suma+ 63
Febrero 2010, pp. 21-28

Polilóbulos y competencias básicas

Se presenta un ejemplo de desarrollo de las competencias básicas en el alumnado de educación secundaria a través del estudio geométrico de polilóbulos. En primer lugar se examina la nueva terminología educativa de tales competencias básicas y posteriormente se formula una propuesta didáctica sobre el trazado de polilóbulos –con referencias de nuestro entorno arquitectónico–, así como algunas actividades con enunciados y soluciones, completándose todo ello con la apertura de caminos para pequeñas investigaciones en torno a esos mismos contenidos geométricos.

Palabras Clave: Competencias básicas, geometría, actividades didácticas, polilóbulos y arquitectura.

Polylobes and basic competences

An example of development of the basic competences is presented to the secondary education students, across the geometric study of polylobes. First it is examined the new educational terminology of such basic competetences and later a didactic offer is formulated on the tracing polylobes -by references of our architectural environment-, as well as some activities in terms of reference and solutions, all this being completed by the opening way for small researches concerning the same geometric contents.

Key words: Basic competences, geometry, didactic activities, polylobes and architecture.

Aprender es aprender a pensar
(J. Dewey)

Introducción

La Unión Europea considera que el desarrollo de las competencias básicas es un eje fundamental de la enseñanza y clave para el aprendizaje permanente, por ello, la LOE las incorpora como integrantes del currículo en la Educación Obligatoria (Anexo I del Real Decreto 1631/2006).

En este contexto se considera que una competencia es la capacidad para aplicar conocimientos, habilidades y actitudes en diferentes contextos. Las competencias básicas son aprendizajes imprescindibles desde un planteamiento integrador y orientado a la aplicación de los saberes adquiridos.

Las ocho competencias básicas, que se fijan en la LOE y que los alumnos deberán haber adquirido al finalizar la enseñanza básica son:

- Competencia en comunicación lingüística.
- Competencia matemática.
- Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.
- Tratamiento de la información y competencia digital.
- Competencia social y ciudadana
- Competencia cultural y artística.
- Competencia para aprender a aprender.
- Autonomía e iniciativa personal.

Para conseguirlo, en los currículos de todas las materias se deben programar objetivos e introducir contenidos que potencien la adquisición de todas las competencias y entre ellas la matemática, lo que constituye una importante innovación respecto a leyes educativas anteriores. En los próximos cursos será muy interesante analizar estos cambios y sus efectos educativos

Por otro lado, los currículos de Matemáticas de los cuatro cursos de la ESO deben elaborarse de forma que los alumnos desarrollen la totalidad de competencias y no sólo, como parece evidente, la competencia matemática.

Inmaculada Fernández Benito
IES Núñez de Arce. Valladolid

En mi opinión, a este último imperativo de que el currículo de Matemáticas contribuya a formar a los estudiantes y les permita integrar los aprendizajes cuando les sean necesarios en diferentes situaciones y contextos, se viene dando cumplimiento por buena parte de su profesorado, como prueba la existencia de esta revista o los numerosos congresos, jornadas y seminarios de educación matemática que organizan la Federación o las Sociedades de profesores de Matemáticas.
El informe PISA 2006 menciona en varias ocasiones el término competencia matemática definiéndolo de la siguiente forma: "*Competencia matemática* es una capacidad del individuo para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios fundados y utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de los individuos como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos".

Propuesta didáctica

Presentación

La propuesta didáctica que sigue, trata contenidos de geometría plana que se pueden adecuar a prácticamente todos los niveles de la Secundaria Obligatoria. Se incluyen actividades didácticas cuyas pautas metodológicas se corresponden respectivamente con estas competencias básicas.

Competencia matemática:
- Aplicar estrategias de resolución de problemas.
- Aplicar procesos matemáticos a situaciones cotidianas.
- Comprender elementos matemáticos.
- Comunicarse en lenguaje matemático.
- Justificar resultados.
- Razonar matemáticamente.

Competencia en comunicación lingüística:
- Redactar procesos matemáticos y soluciones a problemas.

Competencia digital y del tratamiento de la información:
- Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) para el aprendizaje y la comunicación.

Competencia cultural y artística:
- Analizar expresiones artísticas visuales desde el punto de vista matemático.
- Conocer otras culturas, especialmente en un contexto matemático.

Competencia para aprender a aprender:
- Ejercitar técnicas de estudio, de trabajo intelectual, …
- Estar motivado para emprender nuevos aprendizajes.
- Hacerse preguntas que generen nuevos aprendizajes.
- Ser conscientes de cómo se aprende.

Competencia en autonomía e iniciativa personal.
- Buscar soluciones con creatividad.
- Detectar necesidades y aplicarlas en la resolución de problemas.

Polilóbulos

Definimos polilóbulo como un conjunto de varios arcos de circunferencia que delimitan una región cerrada. En esta ocasión trabajaremos con polílóbulos formados por arcos de circunferencia del mismo radio y dispuestos concéntricamente alrededor de un punto.

Según el número de arcos o lóbulos que lo forman, se denominarán: trilóbulos (3 lóbulos), cuadrilóbulos (4 lóbulos), etc… En la figura 1 se muestra un octalóbulo en la parte central del rosetón rodeado de ocho cuadrilóbulos.

Figura 1. Rosetón formado por polilóbulos.

Para estudiar geométricamente estas formaciones, vamos a proponer algunos modelos de trazado a partir de polígonos regulares.

Trilóbulos a partir de un triángulo equilátero.

En las figuras 2 y 3 se aprecian distintos ejemplos de trilóbulos.

Figura 2. Santa María de Piasca (Cantabria).

Figura 3. Catedral de Burgos.

Podemos construir estos trilóbulos según los modelos siguientes, todos ellos diseñados a partir de un triángulo equilátero (Figura 4).

a. Los centros de los tres arcos de circunferencia son los puntos medios de los lados del triángulo base y el radio de cada uno de ellos es la mitad del lado de dicho triángulo.
b. Los centros son los vértices del triángulo equilátero y los radios la mitad del lado, como en el modelo anterior.
c. Los centros son los vértices del triángulo inicial y los radios son el lado del hexágono regular que tiene por vértices los del triángulo inical y los de su girado 60º alrededor del centro.

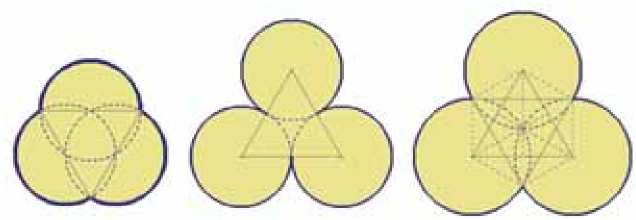

Figura 4. Modelos geométricos de trilóbulos: a, b y c.

Cuadrilóbulos a partir de un cuadrado.

Los cuadrilóbulos que se muestran en las figuras 5 y 6 pueden considerarse formados por cuatro arcos de circunferencia trazados a partir de un cuadrado según se especifica a continuación:

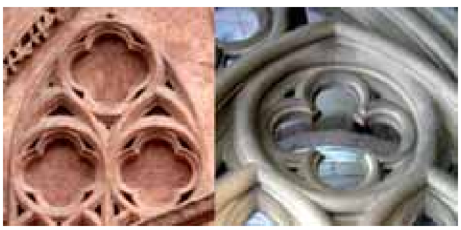

Figura 5. Catedral de Burgos.

Figura 6. Estella (Navarra) y Brujas (Bélgica).

a. Los centros de las circunferencias son los puntos medios de los lados del cuadrado y sus radios la mitad del lado de éste.
b. Los centros son los vértices del cuadrado y los radios la mitad de su lado.
c. Los centros son los vértices del cuadrado y los radios la mitad de la diagonal de dicho cuadrado.
d. Los centros son los vértices del cuadrado inicial y los radios el lado del octógono cuyos ocho vértices coinciden con los del cuadrado de partida y su girado 45º.

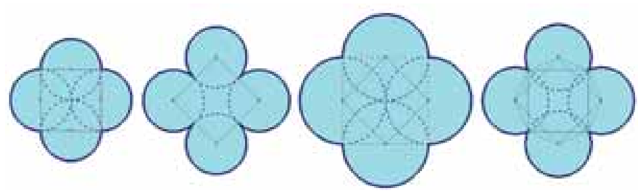

Figura 7. Ejemplos de trazados de cuadrilóbulos a, b c, y d.

Curvas epicicloides.

Algunas curvas epicicloides presentan formas lobuladas de apariencia similar a la de los polilóbulos formados por arcos de circunferencia. En general la epicicloide es la curva descrita por un punto P de una circunferencia, de radio r, cuando rueda sin deslizarse por el exterior de otra circunferencia fija de radio R.

Su ecuación paramétrica es:

$$\begin{cases} x(t) = (R+r)\cos t - r\cos\left(\dfrac{R+r}{r}t\right) \\ y(t) = (R+r)\,sen t - r\,sen\left(\dfrac{R+r}{r}t\right) \end{cases}$$

donde la variable t es el ángulo que forma la recta que une los centros de ambas circunferencias con la parte positiva del eje de abscisas.

En los casos particulares en que $R = 3r$ y $R = 4r$ las curvas epicicloides adoptan las formas que aparecen en la figura 8.

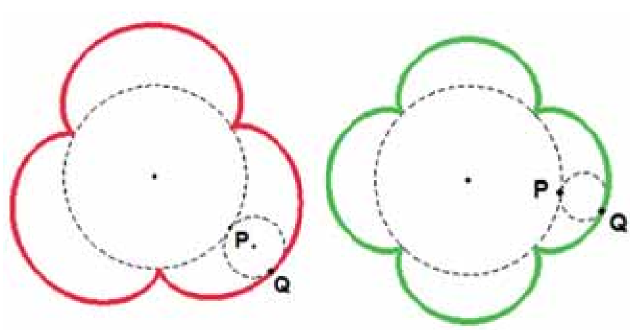

Figura 8. Epicicloides de tres y cuatro hojas.

En la figura 9 se presenta una vidriera diseñada por el artista alemán Alberto Durero, entusiasta geómetra y conocedor de las curvas y sus aplicaciones, quien pudo utilizar la epicicloide de tres hojas como base para este trabajo.


Figura 9. Alberto Durero, *Autorretrato y grabado en vidirera*

Actividades para el aula

Actividad 1

Enunciado: Obtén fórmulas generales para calcular el área de un sector circular de radio R que abarca un ángulo α y la longitud del segmento circular correspondiente.

Solución: Estableciendo las relaciones de proporcionalidad entre las áreas de las regiones circulares o sus longitudes de arco y las correspondientes amplitudes en grados sexagesimales, se obtienen las expresiones siguientes:

$$A_S = \frac{\pi R^2}{360}\alpha \text{ y } L_S = \frac{2\pi R}{360}\alpha = \frac{\pi R}{180}\alpha$$

Actividad 2.

Enunciado: Calcula el área encerrada por los trilóbulos de la figura 4, así como su longitud, según las propuestas de trazados indicadas en los apartados a, b y c del epígrafe *Trilóbulos*. Toma el lado del triángulo de partida de dos unidades de longitud

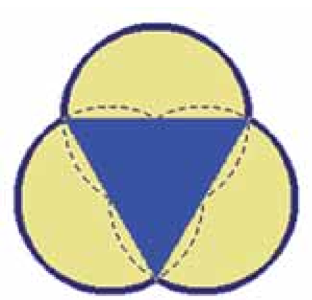

Figura 10. Tilóbulo a

Solución: Utilizando el teorema de Pitágoras se obtiene que la altura del triángulo base es:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2 = \sqrt{3}$$

El trilóbulo del apartado a. (ver figura 10) tiene por área la suma del área del triángulo:

$$A_T = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,u^2$$

y la de tres semicírculos de radio 1u:

$$A_S = \frac{\pi\, 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}u^2$$

Por tanto se obtiene:

$$A = \left(\sqrt{3} + \frac{3\pi}{2}\right)u^2$$

Teniendo en cuenta que el contorno del trilóbulo lo forman tres semicircunferencias cuyo radio mide una unidad, se tiene que su longitud es:

$$L = 3\,\frac{2\pi 1}{2} = 3\pi\, u$$

En el caso del trilóbulo diseñado en el apartado b. se procede de forma similar al del caso anterior, con la única diferencia de que, en éste, los sectores y segmentos circulares abarcan ángulos de 300º (Figura 11). Utilizando las fórmulas de la actividad 1, se tendrá:

Figura 11. Tilóbulo b

$$A = A_T + 3\cdot A_S = \sqrt{3} + 3\,\frac{\pi\cdot 1^2}{360}300 = \left(\sqrt{3} + \frac{5\pi}{2}\right)u^2$$ y

$$L = 3\,\frac{\pi\cdot 1}{180}300 = 5\pi\, u$$

La última propuesta corresponde al trilóbulo del apartado c. En primer lugar se debe calcular el lado y la apotema del hexágono determinado por los dos triángulos equiláteros, para ello, basta observar en la figura 12 que el centro del hexágono es el baricentro del triángulo equilátero inicial y por lo tanto, el radio del hexágono medirá 2/3 de la altura y a la vez mediana del triángulo, es decir: $L=2\sqrt{3}/3$. La apotema del hexágono regular mide una unidad, este resultado se puede obtener, o bien, observando en la figura 12 que la longitud de la misma es la mitad que la del lado del triángulo (que mide dos unidades), o bien, utilizando el teorema de Pitágoras de la forma habitual cuando se conoce el lado y el radio de un polígono regular.

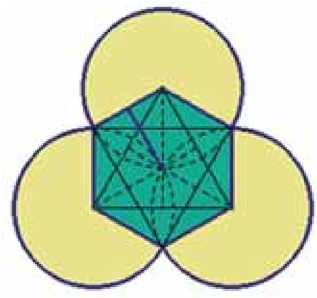

Figura 12. Trilóbulo c

El área encerrada por el trilóbulo será la suma de las áreas del hexágono regular y el de tres sectores circulares que abarcan ángulos de 240º, por tanto se tiene:

$$A = A_H + 3\cdot A_S = \frac{6\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot 1}{2} + 3\,\frac{\pi\cdot\frac{4}{3}}{360}\,240 = \left(2\sqrt{3}+\frac{8\pi}{3}\right)u^2$$

La longitud del trilóbulo c será la suma de las longitudes de tres segmentos circulares que abarcan ángulos de 240º, es decir:

$$L = 3\,\frac{\pi\,\frac{2\sqrt{3}}{3}}{180}\,240 = 3\,\frac{8\sqrt{3}\,\pi}{9} = \frac{8\sqrt{3}\,\pi}{3}\,u$$

Actividad 3.

Enunciado: Calcula el área y la longitud de los tres primeros cuadrilóbulos de la fgura 7, correspondientes a los trazados propuestos en los apartados a, b y c del epígrafe *Cuadrilóbulos*. Toma el lado del cuadrado de partida de medida dos unidades.

Solución: En el diseño del apartado a, el área del cuadrilóbulo es la suma de las áreas del cuadrado de dos unidades de lado y de cuatro semicírculos cuyo radio mide una unidad. Por lo tanto se tiene:

$$A = A_C + 4\cdot A_S = 2^2 + 4\,\frac{\pi\,1^2}{2} = \left(4+2\pi\right)u^2$$

La longitud de este cuadrilóbulo es la de cuatro semicircunferencias de radio uno obteniéndose el siguiente valor:

$$L = 4\,\frac{2\pi 1}{2} = 4\pi\,u$$

El cuadrilóbulo del apartado b tendrá por área la del cuadrado base más la de cuatro sectores circulares de amplitud 270º, (Fig. 13) es decir:

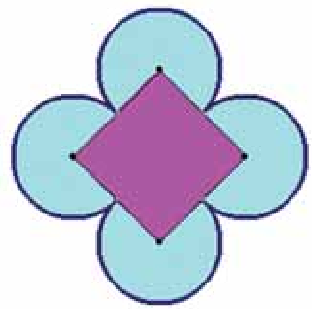

Figura 13. Cuadrilóbulo b

$$A = A_C + 4\cdot A_S = 2^2 + 4\,\frac{\pi\,1^2}{360}270 = \left(4+3\pi\right)u^2$$

y la longitud será la de cuatro segmentos circulares de la misma amplitud:

$$L = 4\,\frac{\pi 1}{180}270 = 6\pi\,u$$

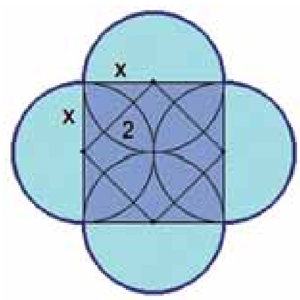

Figura 14. Cuadrilóbulo c

La región determinada por el cuadrilóbulo del apartado c se puede descomponer, como aparece en la figura 14, en un cuadrado de lado $2x$, y en cuatro semicírculos de radio x. Para calcular el valor de x se aplica el teorema de Pitágoras, se obtiene:

$$2x^2=2^2 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\sqrt{2}$$

Una vez calculada la medida del lado del nuevo cuadrado, $2\sqrt{2}$, y la del radio de los círculos, $\sqrt{2}$, se puede determinar el área del cuadrilobulo:

$$A = A_C + 4\cdot A_S = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + 4\,\frac{\pi\left(\sqrt{2}\right)^2}{2} = \left(8+4\pi\right)u^2$$

La longitud total es la de cuatro semicircunferencias de radio $\sqrt{2}$, resultando por tanto:

$$L = 4\,\frac{2\pi\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}\,\pi u$$

Nótese que para la siguiente actividad los alumnos precisan conocimientos de Trigonometría, siendo por ello más apropiada para los que cursan Matemáticas I de 1º de Bachillerato.

Actividad 4.

Enunciado: Calcula el área y la longitud del cuadrilóbulo situado a la derecha de la figura 7, cuyo trazado está propuesto en el apartado d del epígrafe *Cuadrilóbulos*. Toma el lado del cuadrado de partida con medida una unidad.

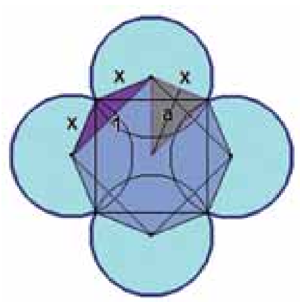

Figura 15. Cuadrilóbulo d

Solución: En la figura 15 se observa que el área del cuadrilóbulo es la suma del área del octógono generado de lado *x*, y de la de cuatro sectores circulares de radio también *x*.

Para calcular el valor de *x* aplicamos el teorema del Coseno al triángulo isósceles de lados *x*, *x*, 1, teniendo en cuenta que el ángulo interior de un octógono regular α mide 135º. Resultando así:

$$1^2 = x^2 + x^2 - 2xx\cos 135^\circ = 2x^2 - 2x^2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = x^2\left(2+\sqrt{2}\right)$$

de donde,

$$x^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$$

Al mismo resultado se llega a partir del valor del *cos*22´5º (ángulo mitad de 45º) en el triángulo rectángulo que resulta al trazar la altura en el triángulo isósceles anteriormente considerado.

Si tenemos en cuenta que el ángulo central del octógono regular es 45º, se calcula la apotema de éste, aplicando que:

$$tg\,22{,}5^\circ = \frac{x/2}{a}$$

Utilizando la fórmula de la tangente del ángulo mitad y sustituyendo en la expresión anterior resulta:

$$a = \frac{x}{2\,tg\,22{,}5^\circ} = \frac{\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}}{2\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$$

Finalmente el área encerrada por el cuadrilóbulo será:

$$A = A_O + 4\cdot A_S = \frac{8\,\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\,\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}}{2} + 4\,\frac{\pi\,\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}{360}\,225 =$$

$$= \left(\sqrt{2} + \frac{5(2-\sqrt{2})}{4}\pi\right)u^2$$

La longitud del cuadrilóbulo es la de cuatro segmentos circulares de ángulo 225º y radio

$$x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$$

Por tanto:

$$L = 4\,\frac{\pi\,\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}}{180}\,225 = \left(\frac{5\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\pi\right)u$$

Actividad 5.

En el trazado del trilóbulo a, propuesto en el epígrafe *Trilóbulos*, se produce una división del triángulo equilátero de partida en cuatro triángulos semejantes a él y de lado la mitad de su lado. En el centro de la figura se ha determinado un triángulo curvo (ver Figura 16), conocido como triángulo de Reuleaux. En el contexto del estudio de polilóbulos podemos considerar que el triángulo de Reuleaux es un trilóbulo, al estar formado por tres arcos de circunferencia. En la figura 17 se puede apreciar el espléndido triángulo de Reuleaux del hastial norte de la Catedral de León.

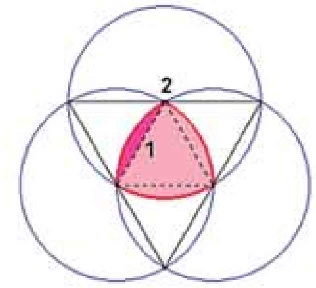

Figura 16. Triángulo de Reuleaux.

Figura 17. Catedral de León.

Enunciado: Calcula el área y la longitud del triángulo de Reuleaux suponiendo, como en la Actividad 2, que el triángulo equilátero de partida mide dos unidades de lado.

Solución: La superficie del plano delimitada por el triángulo de Reuleaux central (Figura 16), está formada por un triángulo equilátero de lado 1 y de altura $\sqrt{3}/2$, y por tres regiones como la sombreada en oscuro. El área de esta región A_R se calcula restando el área triángulo equilátero anterior a la de un sector circular de radio 1 y de ángulo 60º. Por tanto, finalmente, resulta:

$$A = A_T + 3\,A_R = A_T + 3\left(A_S - A_T\right) = 3\,A_S - 2\,A_T =$$
$$= 3\,\frac{\pi 1^2\,60}{360} - 2\,\frac{1\,\sqrt{3}/2}{2} = \left(\frac{\pi - \sqrt{3}}{2}\right)u^2$$

La longitud del triángulo de Reuleaux es la de tres segmentos circulares de radio 1 y de ángulo 60º, siendo su valor:

$$L = 3\,\frac{\pi 1}{180}60 = \pi\,u$$

Investigaciones

En este apartado se proponen enunciados más abiertos y creativos que los de las actividades anteriores cuya resolución requiere el empleo de programas informáticos de geometría dinámica. Estas actividades, que podrían considerarse pequeñas investigaciones y realizarse en grupos de dos o tres alumnos, son las más adecuadas para el desarrollo de las competencias básicas porque, para llevarlas a cabo, los alumnos deben incorporar todos los conocimientos aprendidos, a la vez que detectan la necesidad de adquirir otros nuevos, fomentando un aprendizaje donde se consoliden al mismo tiempo actitudes positivas y se profundize en el vínculo existente entre los conocimientos teóricos y sus aplicaciones prácticas.

Propuesta 1. Los cuadrilóbulos estudiados anteriormente están trazados a partir de un cuadrado y cuatro circunferencias centradas en los vértices o puntos medios de los lados de dicho cuadrado. En los modelos de la figura 7, los radios de las circunferencias están determinados en función del lado o de la diagonal del cuadrado.

a. Con un programa de geometría dinámica (CABRI o GEOGEBRA) construye un cuadrado de lado L y diagonal D y cuatro circunferencias centradas en sus vértices, investiga las diferentes construcciones que se generan al ir variando el radio R de las circunferencias. Prueba, por ejemplo, con:

$$R = \frac{L}{4}\left(R < \frac{L}{2}\right),\quad R = \frac{L}{2},\quad R = \frac{D}{2},\quad R = L, \ldots$$

Constrúyelo de forma que al ir desplazando el punto P sobre el lado del cuadrado (ver Figura 18) se obtengan los cuatro modelos. Busca algunos elementos geométricos que se generan en estos trazados y realiza cálculos a partir de ellos.

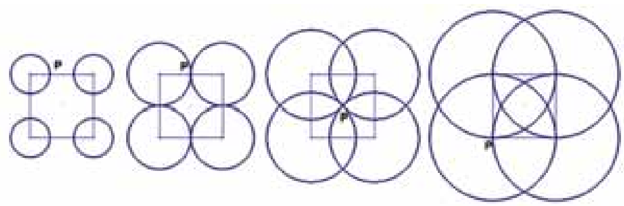

Figura 18. Modelos de círculos con centros en los vértices de un cuadrado.

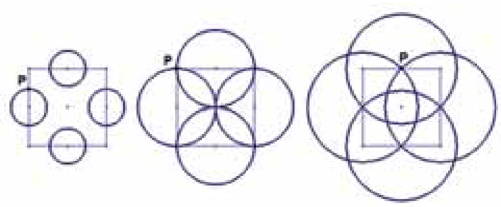

Figura 19. Modelos de círculos con centros en los puntos medios de los lados de un cuadrado.

b. Investiga los posibles trazados que resultan al tomar, como centros de las circunferencias, los puntos medios de los lados del cuadrado y radios variables. Realiza la construcción dinámica de la misma forma que en el apartado anterior. Observa la figura 19 y calcula el radio de las circunferencias en los tres casos mostrados y determina otros posibles elementos geométricos que aparecen.

Figura 20. Diseño de pavimento.

c. Busca diseños cotidianos y artísticos que puedan ajustarse a los modelos descritos anteriormente, como el de la figura 20.

Propuesta 2. En la figura 1 aparece un rosetón con polilóbulos de varios tipos (cuatro u ocho lóbulos). A partir de polígonos regulares de diferente número de lados, traza polilóbulos con los criterios expuestos en la *propuesta 1.*

En al figura 21 se muestran diseños para el pentágono y hexágono regulares.

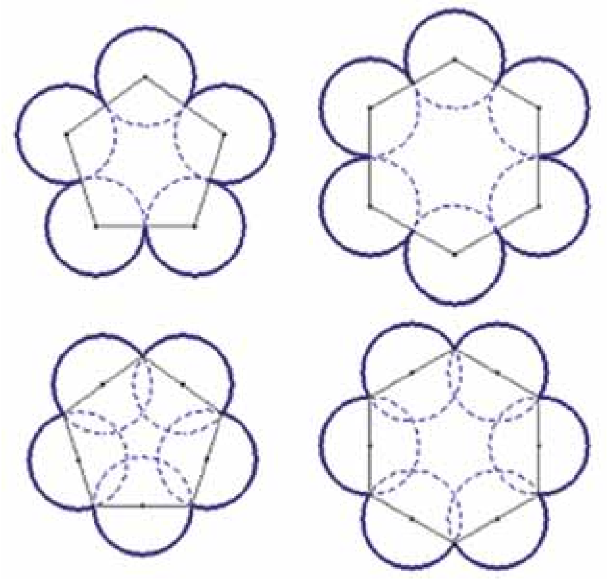

Figura 21. Pentalóbulos y hexalóbulos.

Para terminar

Dada la importancia que el nuevo sistema educativo reserva a las competencias básicas, entendiéndolas no como simples constructos teóricos, sino como aprendizajes que capacitan para adaptar dinámicamente lo que se sabe al contexto en que el alumno estudia y vive, se han presentado en estas páginas algunas líneas de trabajo concreto desde el campo de la geometría, con elementos que pueden insertarse tanto en el currículo de Matemáticas de ESO como en el de Bachillerato. Si en realidad el aprendizaje es, como decía Dewey, “aprender a pensar” bien se puede concluir que en el lento proceso de la construcción del pensamiento, en el que las matemáticas siempre han desempeñado un relevante papel, el estudio de la geometría aplicada a las cosas de la vida real constituye una aportación interesante a lo que hoy entendemos por desarrollo de las competencias básicas en la educación secundaria.

Este artículo fue recibido en SUMA en Noviembre de 2008 y aceptado en Julio de 2009

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOE (4/5/06): LOE , Ley orgánica de Educación de 3 de mayo de 2006.

BCyL (23/5/07): Decreto 52/2007, currículo ESO de Castilla y León.

Chamoso, J., Fernández, I. y Reyes, E. (2009): *Burbujas de Arte y Matemáticas*. Tres cantos (Madrid): Nivola.

Fernández Benito, I. (2003):La matemática del entorno: números y proporciones. En *Premios Nacionales 2001 a la innovación educativa.* Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Fernández, I., Reyes, E. (2003): *Geometría con el hexágono y el octógono*. Granada: Proyecto Sur de Ediciones.

Fernández, I. Reyes, E. (2005): Polígonos y formas estrelladas, Suma nº 49, 7-14.

Fernández Benito, I. (2006): Formas estrelladas y de otros tipos en elementos artísticos. En *Enfoques actuales en la didáctica de las matemáticas.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.