suma+ 63
Febrero 2010, pp. 35-41

Errores *correctos* en la simplificación de fracciones: reflexión sobre algunas prácticas docentes en matemáticas

Tomando como punto de partida un curioso error cometido por los alumnos en la simplificación de fracciones numéricas, en este trabajo se reflexiona sobre algunas prácticas docentes en matemáticas. Se presenta una experiencia de investigación con alumnos de Educación Secundaria Obligatoria para adultos y se propone el manejo de un programa de cálculo simbólico de software libre.

Palabras Clave: Error, simplificación, fracción, práctica docente, software libre.

Correct mistakes in fractions simplification: a reflection about some teaching practice in Mathematics

The starting point is a curious mistake made by the students about the simplification of numerical fractions. In this paper it is reflected about some teaching practice in Mathematics. We present a research experience with students of Secundary School for Adults and it is proposed the hang of a simbolyc calculus programme of free software.

Key words: Mistake, simplification, fraction, teaching practice, free software.

El problema y sus causas

Una sesión de matemáticas en un aula de ESO es siempre una buena ocasión para la sorpresa. Alguna que otra vez, trabajando con fracciones, los alumnos me han sorprendido haciendo una simplificación de fracciones que podríamos calificar, como mínimo, de poco ortodoxa. Ocurre cuando se trata de simplificar fracciones con numerador y denominador comprendidos entre 10 y 99 y alguna cifra repetida en numerador y denominador y consiste en tachar la misma cifra en ambos números. Así se obtienen resultados como:

$$\frac{2\cancel{5}}{1\cancel{5}}=\frac{2}{1};\quad \frac{2\cancel{5}}{\cancel{5}3}=\frac{2}{3};\quad \frac{\cancel{2}5}{3\cancel{2}}=\frac{5}{3};\quad \frac{\cancel{2}5}{\cancel{2}7}=\frac{5}{7}$$

Hay un hecho que observo con estupor. En contra de lo que podría esperarse, atribuyendo este error a la bisoñez matemática, éstos suelen producirse en los últimos cursos de ESO. Durante este curso escolar 2008/2009 ya se me ha presentado este error en una ocasión en un grupo de Educación Secundaria Obligatoria para Personas Adultas, con un alumno de 19 años.

Creo que son tres las causas de esta forma incorrecta de simplificación y que las tres derivan de unas inapropiadas prácticas docentes algebraicas:

- La no utilización de ningún operador multiplicativo explícito cuando se trata de multiplicar números con letras o letras con letras. Solemos escribir, quizás demasiado pronto y a la ligera, $3a$ y ab en lugar de $3{\cdot}a$ y $a{\cdot}b$. Posiblemente, sería una buena reflexión pensar en alargar más el tránsito entre la notación multiplicativa exclusivamente numérica al que el alumno está acostumbrado en la etapa de primaria, a la hora de introducir el álgebra como aritmética generalizada.

- La poca insistencia en el desarrollo polinómico de un número, en nuestro caso, en base decimal. Cuando en

Jesús Beato Sirvent
IES Bahía de Cádiz. Cádiz
Facultad de Ciencias de la Universidad de Cádiz. Puerto Real.

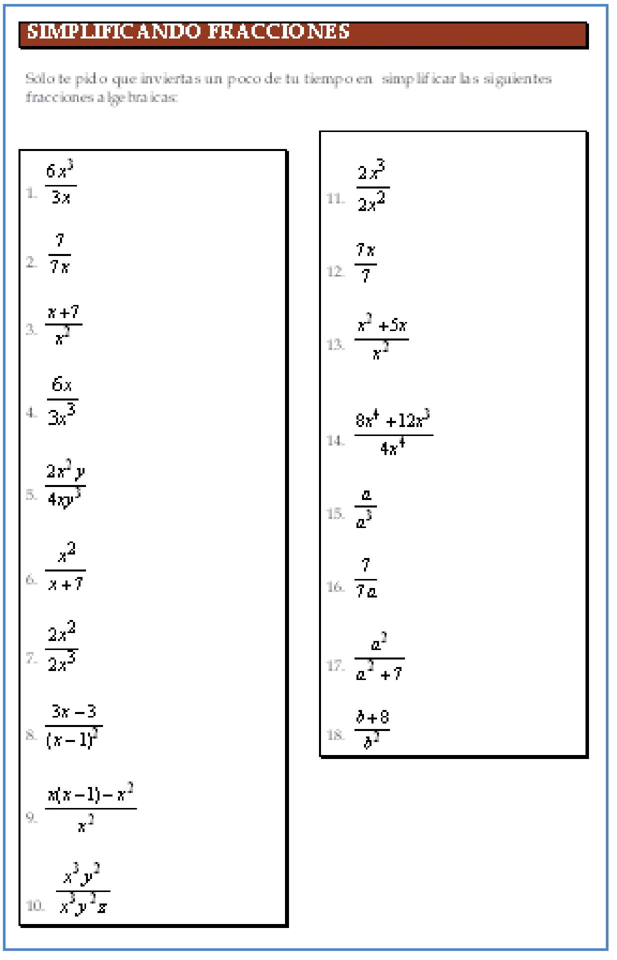
primaria se introducen las dos principales características de nuestro sistema de representación numérica decimal posicional, a saber, que el valor de una cifra depende del lugar donde está escrita y que 10 unidades de un orden constituyen una unidad de un orden superior, aún no se han trabajado las potencias y en secundaria sólo se trabaja la expresión polinómica como eso, simplemente como una expresión y el tipo de ejercicios suele ser directo, es decir, dado un número natural, expresarlo en forma de polinomio de base 10, donde los coeficientes de las sucesivas potencias de 10 sean las cifras del número. La siguiente ocasión en que se trabaja esta representación decimal de un número natural es en el bloque de álgebra, cuando se intenta que el alumno solucione algún problema[1] de enunciado donde la clave está en los valores de las cifras. Los que llevamos bastantes años en la docencia de las matemáticas sabemos que este tipo de problemas es inalcanzable, en primera instancia y por sí solos, para la gran mayoría de nuestros alumnos.

- La utilización de lo que denomino "operador tacha /" para la simplificación algebraica, fundamentalmente en sumas y cocientes. Esta imprecisión que asocia a un mismo símbolo dos valores distintos, impropia del lenguaje matemático, es, en sí misma, fuente de algunos problemas. Con idea de tener una muestra de las capacidades de simplificación de fracciones algebraicas de alumnos de distintas edades, pasé a alumnos de 4º de ESO, 1º de Bachillerato (de rama científica y tecnológica y de Ciencias Sociales) y 1º de una Licenciatura en Química este cuestionario de simplificación de fracciones algebraicas sencillas.

Este cuestionario constaba de 18 fracciones algebraicas. Se les hacía hincapié en que debían especificar, si se daba el caso, aquellas fracciones que no eran simplificables, haciéndolo notar en el cuestionario. Diez de ellas, {1, 2, 4, 5, 7, 10, 11, 12, 15, 16}, eran de simplificación directa, es decir, sólo había que dividir factores comunes en el numerador y en el denominador. Cuatro más, {8, 9, 13, 14} eran de simplificación directa si previamente sacaban factor común. Y las cuatro restantes no se podían simplificar, aunque la 3 y la 18 se podían descomponer en suma de fracciones, y simplificar una de ellas.

Desde luego, no se pretendía extraer conclusiones generales de carácter universal del análisis de este cuestionario, pues la muestra utilizada no era lo suficientemente representativa, pero sí podríamos observar, al menos, el estado de la cuestión en nuestro centro, que no es poco. De hecho, surgió un debate, a pequeña escala en el Departamento, sobre la necesidad o no de revisar el trato que estábamos dando a la simplificación algebraica. Pues bien, del análisis de las respuestas se observa:

- Obviamente el curso mejor es el universitario, con un 92,59% de alumnos que superan la prueba.
- El curso peor es 4º ESO, opción Matemáticas A con un 7,69% de aprobados.
- Las fracciones más fáciles de tratar han sido la 12 con un 89,8% de respuestas correctas y la 1, con un 83,67% de respuestas correctas. Ambas son de simplificación directa.
- Las fracciones más difíciles han sido la 8, con un 20,41% de aciertos y la 9, con un 21,43%. Ambas requerían sacar factor común o hacer alguna operación previa.
- A pesar de la insistencia, la mayoría de los alumnos no especifican las que no se pueden simplificar, limitándose a dejarlas en blanco, con la duda interpretativa que este proceder genera.


SIMPLIFICANDO FRACCIONES

Sólo te pido que inviertas un poco de tu tiempo en simplificar las siguientes fracciones algebraicas:

1. $\frac{6x^3}{3x}$
2. $\frac{7}{7x}$
3. $\frac{x+7}{x^2}$
4. $\frac{6x}{3x^3}$
5. $\frac{2x^2y}{4xy^3}$
6. $\frac{x^2}{x+7}$
7. $\frac{2x^2}{2x^3}$
8. $\frac{3x-3}{(x-1)^2}$
9. $\frac{x(x-1)-x^2}{x^2}$
10. $\frac{x^3y^2}{x^3y^2z}$
11. $\frac{2x^3}{2x^2}$
12. $\frac{7x}{7}$
13. $\frac{x^2+5x}{x^2}$
14. $\frac{8x^4+12x^3}{4x^4}$
15. $\frac{a}{a^3}$
16. $\frac{7}{7a}$
17. $\frac{a^2}{a^2+7}$
18. $\frac{b+8}{b^2}$

Cuestionario

- Los errores cometidos se pueden clasificar en ocho tipos:
  –Simplificar números, pero no letras.

$$\frac{6x}{3x^3}=\frac{2x}{x^3}$$

– Multiplicar el numerador por el denominador, posiblemente herencia de la operación "multiplicar numerador y denominador por la expresión conjugada del denominador" o bien del proceso de racionalización cuando en el denominador hay una raíz cuadrada.

$$\frac{3x-3}{(x-1)^2} = \frac{3x-3\,(x-1)^2}{(x-1)^2(x-1)^2} = \frac{6x-3(x-1)^2}{= x^2+1^2-2x}$$

–No ver el factor común, y por tanto, la posibilidad de simplificación.

– Separa mal las fracciones en sumandos.

$$\frac{x^2}{x+7} = \frac{x\cdot x}{x+7} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} + \frac{x}{7} = \frac{x}{7}$$

– Simplificar elementos del numerador con elementos del denominador, aunque no se trate de factores, sino de sumandos. Este ha sido, con diferencia, el error más cometido.

$$\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}+7} = \frac{x}{7}$$

$$\frac{\cancel{a}^2}{\cancel{a}^2+7} = \frac{1}{7}$$

$$\frac{x^2+5x}{x^2} = \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} + \frac{5x}{x^2} = \frac{5x}{x^2} = \frac{5}{x}$$

$$\frac{x^2}{x+7} = \frac{x}{1+7}$$

$$\frac{\cancel{b}+8}{b^2} = \frac{8}{b}$$

– *Cuando todo se va, queda el vacío...*

$$\frac{a^2}{a^2+7} = \frac{0}{7} \qquad \frac{x^3y^2}{x^3y^2z} = \frac{0}{z}$$

– *¡No puede quedar nada en el denominador!*

$$\frac{7}{7a} = a \qquad \frac{a^2}{a^2+7} = 7$$

– *Chulerías algebraicas.*

$$\frac{x^2+5x}{x^2} = \frac{\cancel{x}\cdot x + 5x}{\cancel{x}\cdot x} = \frac{6x}{x} = 6$$

$$\frac{x(x-1)-x^2}{x^2} = \frac{2x - x - \cancel{x}^2}{\cancel{x}^2} = x$$

En definitiva, no parece que el uso de este operador ayude mucho a la comprensión de los procedimientos de simplificación algebraica y a la toma de conciencia de las operaciones reales que sustentan dichos procesos. Alguien podría advertir que siempre se ha tachado y no parece que el daño ocasionado sea, ni siquiera considerable. ¿Por qué ahora habría de prestarse un especial cuidado? A esta objeción cabe oponerle una doble argumentación. Por un lado, el hecho de que una utilización incorrecta de un símbolo no cause demasiado perjuicio no es aval para su uso, y menos en una disciplina que tiene como uno de sus objetivos la concisión, la precisión y en definitiva la claridad. Hay tradiciones no del todo positivas. Por otro lado, se ha ido produciendo una diferencia, desde luego no sutil, entre la docencia de las matemáticas a estas edades. El peso de la manipulación algebraica, el estudio de los polinomios y muy especialmente las fracciones algebraicas ha ido perdiendo protagonismo hasta prácticamente desaparecer del currículo de Secundaria, al menos con el espacio y el tiempo que creo sería oportuno dedicarle y desde luego, es muy inferior al que se le dedicaba en anteriores etapas educativas. Es por eso, que esta práctica, antaño común tanto en profesores como en alumnos, ahora crea una inseguridad tan grande en el alumno, que le lleva, unida a la ansiedad por la simplificación, a resultados catastróficos[2].

Errores correctos

No obstante lo anterior, a veces se obtienen resultados correctos, que podríamos, en principio, atribuir a una suerte de casualidad numérica:

$$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$$

¡¡ resultado correcto !!

En esta sección vamos a analizar en qué casos, esta forma, desde luego bárbara de simplificar, que a partir de ahora llamaremos *simplificación adulterada*, produce resultados correctos.

Convencido de que la mejor forma de eliminar un error es llegar a la esencia de la causa que lo produce, y aprovechando que tengo docencia en un instituto de Secundaria –con alumnos de Secundaria Obligatoria para Adultos- y en la Universidad –con alumnos de primero de la Facultad de Ciencias-, propuse en ambos niveles profundizar un poco más en este problema, pero mirándolo desde distintos puntos de vista. Lo que relato a continuación es el fruto de la investigación que llevaron a cabo tanto unos como otros, en la que jugué un papel de director de orquesta.

> Nota: a partir de ahora, no emplearemos el operador tacha (/) en las simplificaciones, sin que con ello se pierda el sentido de lo expuesto.

En el Instituto

Mi idea era, desde el principio, aprovechar además esta cuestión para mostrar a los alumnos, en miniatura, cómo se desarrolla una posible investigación en matemáticas. Empecé por mostrarles que en la inmensa mayoría de las ocasiones, este tipo de simplificación produce resultados incorrectos. Para ello bastó con que comprobaran que:

$\frac{12}{25} \neq \frac{1}{5}$ ya que 12·5 ≠ 25·1.

A continuación, les enseñé un ejemplo de simplificación adulterada que produce un resultado correcto. Era el que encabeza esta sección, a saber:

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

Lo siguiente fue pedirles que juguetearan un poco para poder encontrar otras fracciones en las que el numerador y el denominador fuesen números enteros de dos cifras y en las que la *simplificación adulterada* les proporcionase un resultado correcto. Para esto, los distribuí en grupos de cuatro y les di un cuarto de hora. Transcurrido este tiempo, sólo había dos respuestas que destacar:

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

Un grupo había encontrado otro ejemplo esencialmente distinto, que era y en otro grupo, concretamente un alumno que no era muy brillante en mi ámbito, había propuesto como ejemplo, el formado por las fracciones inversas de las que yo había mostrado, a saber:

$$\frac{64}{16} = \frac{4}{1}$$

Rápidamente les hice que pensaran en si lo que ocurría en este ejemplo era generalizable y llegamos a nuestro primer resultado: *Si una fracción produce una simplificación adulterada correcta, la inversa también produce una simplificación adulterada correcta*. Decidimos ahora empezar por descartar “casos triviales”:

Caso I: Si tanto numerador como denominador son múltiplos de 10, entonces la *simplificación adulterada* produce siempre resultados correctos:

$$\frac{30}{50} = \frac{3}{5}$$

Caso II: Si el numerador y el denominador son iguales, la *simplificación adulterada* produce siempre resultados correctos:

$$\frac{23}{23} = 1$$

Aquí se produjo un parón en nuestra investigación. Para atajarlo, les propuse hacer un estudio un poco más sistemático, distinguiendo en principio los cuatro casos posibles, aunque después nos dimos cuenta que algunos de ellos nos conducían a los casos triviales descritos anteriormente. Además, en este momento, tuve que hacer un inciso importante para practicar la expresión polinómica de un número, de manera que se acostumbrasen a identificar la expresión de un número de dos cifras, con su valor. A lo largo de toda esta sección, serán guarismos.

- La cifra de las unidades de numerador es igual a la cifra de las unidades del numerador.

$$\frac{ab}{cb} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow (10a+b)c = (10c+b)a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10ac+bc = 10ac+ba \Leftrightarrow bc = ba$$

Distinguimos ahora:

–Caso $b \neq 0 \Rightarrow c = a$. Nos conduce al caso trivial **Caso II**.

–Caso $b = 0$. Se trata del **Caso I**.

Caso III. La cifra de las unidades del numerador es igual a la cifra de las decenas del denominador.

$$\frac{ab}{bc} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow (10a+b)c = (10b+c)a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10ac+bc = 10ab+ac \Leftrightarrow c = \frac{10ab}{9a+b}$$

Habíamos llegado a un punto interesante. Esta fórmula nos daría las fracciones que andábamos buscando. El problema estaba en calcular para qué valores de a y b, se obtiene como valor de c un guarismo. Observamos que:

$$a = b \Rightarrow c = \frac{10a^2}{10a} = a = b$$

Y esto nos conduciría de nuevo al caso trivial Caso II. Por tanto, a partir de ahora supusimos que $a \neq b$. Con estas restricciones, les propuse elaborar una tabla de valores para *c*, a partir de los posibles valores de *a* y *b*.

a	b	c	a	b	c	a	b
1	1	1,00	2	1	1,05	3	1
1	2	1,82	2	2	2,00	3	2
1	3	2,50	2	3	2,86	3	3
1	4	3,08	2	4	3,64	3	4
1	5	3,57	2	5	4,35	3	5
1	6	4,00	2	6	5,00	3	6
1	7	4,38	2	7	5,60	3	7
1	8	4,71	2	8	6,15	3	8
1	9	5,00	2	9	6,67	3	9

a	b	c	a	b	c	a	b	c
4	1	1,08	5	1	1,09	6	1	1,09
4	2	2,11	5	2	2,13	6	2	2,14
4	3	3,08	5	3	3,13	6	3	3,16
4	4	4,00	5	4	4,08	6	4	4,14
4	5	4,88	5	5	5,00	6	5	5,08
4	6	5,71	5	6	5,88	6	6	6,00
4	7	6,51	5	7	6,73	6	7	6,89
4	8	7,27	5	8	7,55	6	8	7,74
4	9	8,00	5	9	8,33	6	9	8,57

a	b	c	a	b	c	a	b	c
7	1	1,09	8	1	1,10	9	1	1,10
7	2	2,15	8	2	2,16	9	2	2,17
7	3	3,18	8	3	3,20	9	3	3,21
7	4	4,18	8	4	4,21	9	4	4,24
7	5	5,15	8	5	5,19	9	5	5,23
7	6	6,09	8	6	6,15	9	6	6,21
7	7	7,00	8	7	7,09	9	7	7,16
7	8	7,89	8	8	8,00	9	8	8,09
7	9	8,75	8	9	8,89	9	9	9,00

En esta tabla, las celdas sombreadas en color azul, representan los casos triviales. Las celdas sombreadas en color magenta, nos proporcionan casos significativos. De este caso obtuvimos, pues, cuatro casos no triviales:

$$\left\{\frac{16}{64}, \frac{19}{95}, \frac{26}{65}, \frac{49}{98}\right\}$$

- La cifra de las decenas del numerador es igual a la cifra de las unidades del denominador. En este caso, obtenemos las inversas de las fracciones obtenidas en el caso anterior, que también serían válidas, según la primera propiedad que observamos en este tipo de *simplificación adulterada*.

  En efecto:

$$\frac{ab}{ca} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow \left(\frac{ab}{ca}\right)^{-1} = \left(\frac{b}{c}\right)^{-1} \Leftrightarrow \frac{ca}{ab} = \frac{c}{b}$$

- La cifra de las decenas del numerador es igual a la cifra de las decenas del denominador. Por el miso motivo expuesto en el caso anterior, ahora obtendríamos las inversas de las fracciones correspondientes a los Casos I y II.

En resumen, en el instituto llegamos al siguiente resultado:

Salvo inversión y casos triviales, sólo hay cuatro fracciones, con las condiciones impuestas al inicio, que produzcan una simplificación adulterada correcta, a saber:

$$\left\{\frac{16}{64}, \frac{19}{95}, \frac{26}{65}, \frac{49}{98}\right\}$$

En la Facultad

Aprovechando que habíamos terminado el tema inicial de funciones reales de varias variables reales en el que se estudian las curvas de nivel y las gráficas de funciones para dos variables reales, les propuse realizar en casa el siguiente ejercicio, que en principio, era uno más. A propósito, aunque alguno me preguntó el porqué de esta propuesta, dejé las explicaciones para cuando estuvieran los ejercicios entregados.

Ejercicio: Dada la función:

$$f(x, y) = \frac{10xy}{9x + y}$$

Se consideran las curvas de nivel f(x, y)=c , para los valores c= 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 y se pide:

- *¿En cuál/es de estas curvas de nivel hay puntos en los que las dos coordenadas sean números naturales comprendidos entre 0 y 9 –guarismos– (ambos inclusive)?*

- *¿Cuáles son los puntos del apartado anterior?*

- *¿Situación gráfica?*

Como es obvio, con este ejercicio pretendía abordar el problema que nos trae entre manos, pero desde una perspectiva totalmente distinta, ya que los puntos que les pedía se corresponderían, obviamente, a las fracciones que producen una simplificación adulterada correcta. Con la pregunta abierta sobre la situación gráfica, mi intención era que hiciesen alguna representación gráfica que respondiese a la situación planteada, o bien, la representación gráfica de la superficie en cuestión con los planos que producen las correspondientes curvas de nivel y en ellas los puntos que encontrasen, o bien una representación plana de las curvas de nivel seleccionadas y en ellas los puntos encontrados. Con ello, tendrían un motivo para usar el paquete de dibujo en 3 y 2 dimensiones del programa *Maxima* que estábamos estudiando en las clases de prácticas de informática.

El número de ejercicios presentados fue satisfactorio. De los 30 alumnos que asisten por término medio a mis clases, 21 presentaron una respuesta al ejercicio, observándose las siguientes apreciaciones:

- El 28,57% de los alumnos que realizaron el ejercicio encontraron sólo los puntos triviales, es decir, en todas las curvas de nivel encontraron puntos que satisfacían las condiciones impuestas, pero sólo dieron con los puntos (i,i) en la curva de nivel $f(x,y)=i$, para $i=1,2,3,4,5,6,7,8,9$. Corresponden a los que hemos denominado anteriormente casos triviales.
- El 19,04% de los alumnos encontraron, además de los puntos triviales anteriormente citados, "casi" todos los puntos pedidos. No deja de ser curioso que todos dejaran de encontrar el mismo punto, a saber, (1,6) en la curva de nivel $f(x,y)=4$.
- El resto de los alumnos (52,39%), encontró todos los puntos pedidos.
- Un alumno busco soluciones naturales, aunque no cumpliesen las restricciones del enunciado. Así obtuvo por ejemplo puntos como (1,21) para $f(x,y)=7$ o (1,36) y (2,12) para $f(x,y)=8$. Estos puntos no llevan a ninguna generalización en nuestro problema de simplificación.
- En cuanto a la situación gráfica, destacar que ningún alumno hizo una representación tridimensional de la gráfica de la función, sino que los que aportaron algún elemento gráfico (61,90%), lo hicieron sobre 2 dimensiones.
  - 4 de estos alumnos hicieron una representación independiente de cada uno de las curvas de nivel, indicando en ellas los puntos señalados (figura 1).
  - 2 alumnos más hicieron una representación en forma de nube de puntos con los valores encontrados, que luego unieron de una forma aleatoria, obteniendo un gráfico sin sentido alguno (figura 2).

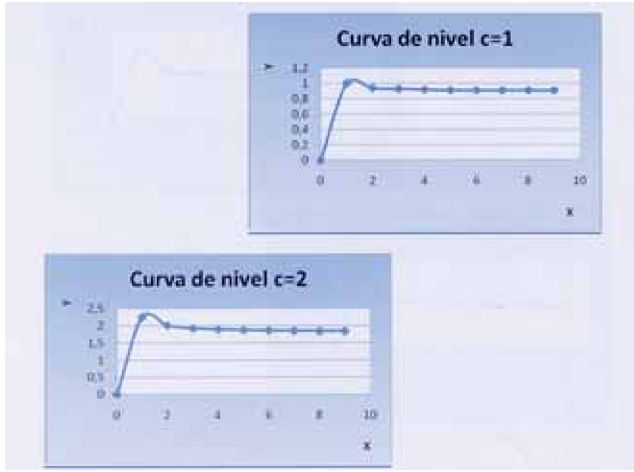


Figura 1

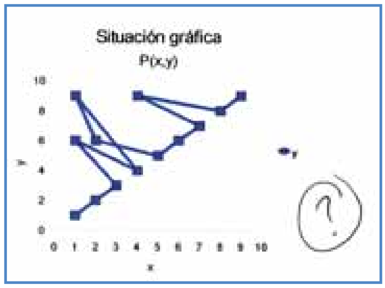


Figura 2

- En cuanto a la forma de encontrar los puntos, el método utilizado fue, en todos los casos salvo 1, el de ensayo y error, lo cual equivale, obviamente a la realización de una tabla como la utilizada en el caso del instituto. Un alumno hizo una tabla similar, también en formato Excel, pero no se percató de todos los puntos que había que encontrar sino que solo observó los puntos triviales.

Tengo que destacar con satisfacción que a los alumnos universitarios, pareció interesarles mucho el hecho de que un problema aparentemente numérico, pudiera tratarse también desde el punto de vista de las funciones de varias variables.

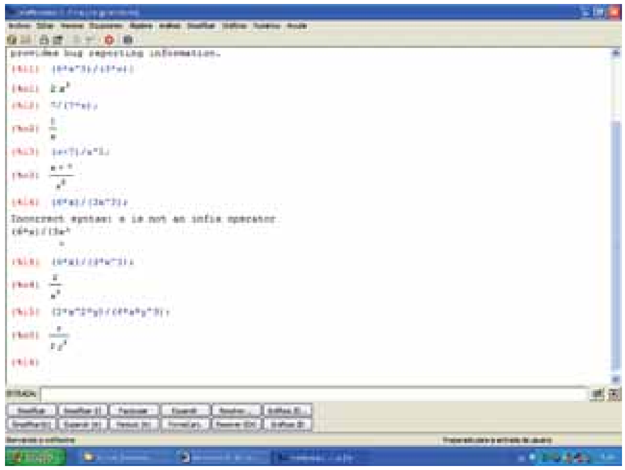
Las TICs pueden ayudar a resolver estos problemas

El uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TICs) para nuestra labor docente requiere un planteamiento serio, riguroso y de cierta continuidad. En general, en la enseñanza hay que huir de las improvisaciones, pero más aún con las TICs. En caso contrario, la clase se convierte bien en una pérdida de tiempo, pues no controlamos las interacciones de los alumnos con el ordenador o bien en una clase excepcional, y por tanto, con un componente de distracción añadido, desde luego, no deseable. Además, el uso de las TICs debe incluir la toma de decisiones sobre qué software utilizar, qué páginas webs visitar y sobre todo, qué actividades concretas van a permitir a los alumnos llenar de contenido el trabajo con las TICs.

En el tema que nos ocupa, yo propongo, como no podía ser de otra forma, la utilización de un programa de cálculo simbólico de software libre. Permite instalarlo en tantos ordenadores como sea conveniente y que el profesor comparta con sus alumnos, con toda legalidad, las herramientas utilizadas. Además, la ventaja fundamental es que el profesor cuenta con la garantía de que el programa podrá ser instalado por los alumnos en su propio domicilio. El programa cuyo uso propongo es Maxima. Se puede descargar desde la página http://maxima.sourceforge.net/. Se trata de un programa cuyos orígenes hay que buscar en 1967 en el MIT AI Lab (Laboratorio de Inteligencia Artificial del Instituto Tecnológico de Massachussets) como una parte del proyecto MAC (Machina Arded Cognition) y que en sus comienzos se llamó Máxima (MAC´s SYmbolic MAnipulator). Maxima es un potente motor de cálculo que, aunque en su origen no destacaba por tener una interfaz gráfica con los usuarios más allá de una simple pantalla de texto, con el tiempo ha ido cambiando y se han desarrollado distintos entornos de ejecución que intentan facilitar la interacción con los usuarios. Entre ellos, el que corresponde a la figura es el entorno wxMaxima, disponible en:
http://wxmaxima.sourceforge.net (Rodríguez, 2007).

Volviendo al problema en torno al cual estamos reflexionando, las posibilidades que ofrece el uso de las TICs son enormes:

- Es un entorno mucho más atractivo que el lápiz y papel.
- Propuesta respuesta a nuestras acciones.
- Permite mayor cantidad de práctica con tareas rutinarias.
- Potencia la experimentación y el análisis de resultados.
- Proporciona una continua autoevaluación, basada en la confianza operativa que nos asegura su empleo.
- Altera los tiempos docentes. Si la excusa para no practicar la simplificación algebraica era el tiempo, ya no existe esta excusa.



Aprender a aprender

El Real Decreto 1631/2006 de 29 de Diciembre marcó un nuevo cambio en la concepción de los procesos de enseñanza y aprendizaje en la etapa Secundaria Obligatoria, al desplazar el punto de vista de la misma hacia los resultados, en el sentido más amplio de la palabra, y valorar éstos en forma de competencias. Entre estas habilidades está la de aprender a aprender. Me gustaría acabar este trabajo con una aportación a la contribución de las matemáticas a esta competencia. En las páginas anteriores se hecho una reflexión crítica a partir de un error cometido en clase por los alumnos. Y esta reflexión se ha llevado hasta sus últimas consecuencias. Es, sin duda, pienso yo, una buena forma de trabajar. ¡Qué mejor aprender a aprender, que aprender de nuestros errores! ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Rodríguez Galván, J. R. (2007) *Maxima con wxMaxima: software libre en el aula de matemáticas*. Oficina de Software Libre de la Universidad de Cádiz.

NOTAS

1 Hallar un número de tres cifras, sabiendo que suman 9; que si del número dado se resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, la diferencia es 198; y que además, la cifra de las decenas es media aritmética entre las otras dos.

2 Viendo el lado positivo, estos desastres algebraicos producen una buena cantidad de situaciones, cuando menos chistosas, que se difunden por la red. Ésta es una de ellas. Puede parecer esperpéntico, pero visto lo visto en los cuestionarios…

$$\frac{1}{n}\sin x = ?$$

$$\frac{1}{\cancel{n}}\mathrm{si}\cancel{n}x =$$

$$six = 6$$

Este artículo fue recibido en SUMA en Julio de 2009 y aceptado en Enero de 2010