suma+ 63
Febrero 2010, pp. 89-93

Horizontales

Fue justo en medio de la calzada de la Avenue des Martyrs de Douz, en los límites del Sahara tunecino, donde vi un papel que me llamó la atención. Estaba arrugado en una bola y por unos instantes dudé en agacharme a recogerlo. Pero los trazos intermitentes entre las arrugas me resultaban tan familiares que no pude evitar recoger del suelo lo que alguien había tirado, probablemente con rabia. Mi acto implicaría abrir una conversación sobre un tema incómodo y poco natural mientras uno está de vacaciones, toda una verdadera provocación. Sin embargo, no podía dejar escapar una ocasión como aquella. Vivía un fenómeno insólito que superaba los límites de imaginación. Así que me agaché y cogí del suelo aquel lío de papel.

Desplegué la hoja. El fondo del papel estaba rayado horizontalmente a diferentes intervalos regulares. También presentaba un margen izquierdo, un poco más extenso en el anverso que en el reverso. La letra me pareció femenina, aunque no eran palabras lo que había escrito. El texto no era árabe, ni francés, ni inglés ni castellano. Es verdad que la mayoría de las letras eran latinas, reconocibles por la mayoría de la gente, pero el texto estaba salpicado de símbolos muy familiares que eran los que a mí me interesaban. No me cabía ninguna duda, estaba escrito en lenguaje matemático.

Mercado de Douz (Túnez)

Miquel Albertí Palmer
IES Vallés, Sabadell
adherencias@revistasuma.es

Era una página de apuntes idéntica a los que había tomado yo treinta años antes. Igual también a las que tomaban mis alumnos en mis clases hacía veinte, cuando comencé mi labor como profesor de Matemáticas en un instituto de Barcelona. Me vinieron a la mente recuerdos de dos demostraciones que hizo mi profesor de Matemáticas cuando yo tenía 16 años. Yo y todos mis compañeros de clase tomamos apuntes de la demostración de un teorema que, entonces, creímos comprender:

La sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *es creciente y acotada; inferiormente por 2, superiormente por 3.*

De ahí se deducía que tal sucesión era convergente hacía un número menor que 3. Ése límite era uno de los números más importantes en Matemáticas, el número:

e=2,71828182845904523536...

Pero los cálculos de límites que llenaban ambas caras de aquel papel arrugado no se referían a la sucesión que genera el número *e*. Eran cálculos de límites de funciones indeterminados del tipo ∞–∞, que se resuelven multiplicando y dividiendo la función por la expresión conjugada. En el anverso había dos ejercicios. Parte del primero se había perdido por una rasgadura. Consistía en calcular:

$$\lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2-1}$$

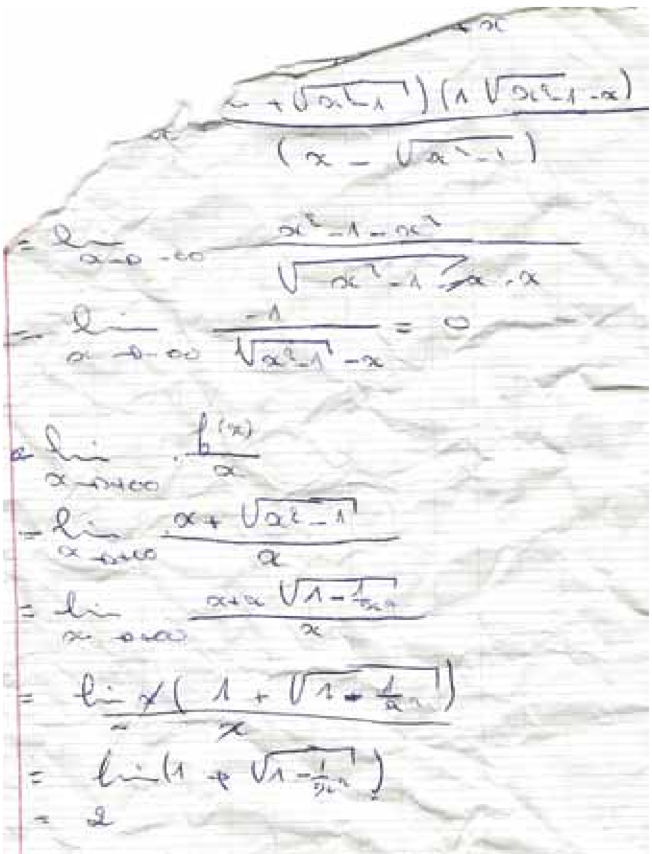
La indeterminación se había resuelto multiplicando y dividiendo por la llamada expresión conjugada, ya que así la indeterminación ∞–∞ se convierte en ∞+∞=∞ y desaparecen tanto la indeterminación como la raíz cuadrada del numerador. Sin embargo, se omiten tanto la constatación de la indeterminación inicial como un detalle previo a la obtención del resultado:

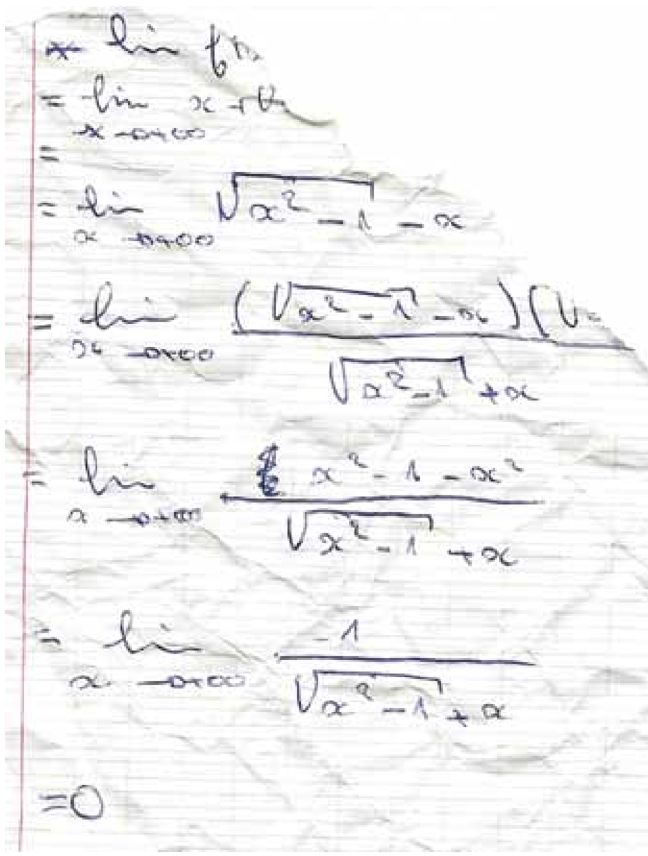
$$\lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2-1}=-\infty+\infty=in\det.$$

$$\ldots=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x}=\frac{-1}{\infty-(-\infty)}=\frac{-1}{\infty}=0$$

En el segundo ejercicio la variable x tendía hacia +∞ y la función anterior estaba dividida por x:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$$





Para resolver el problema se extraía x factor común, primero de la raíz cuadrada y luego de todo el numerador, para simplificarla con la del denominador. De nuevo se omitían los últimos pasos finales:

$$\ldots = \mathop{Lim}_{x\to+\infty} \left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) = 1+\sqrt{1-0} = 1+1 = 2$$

En el dorso de la hoja, y pese a que la rasgadura se había llevado el enunciado, el cálculo consistía en determinar el límite de la función conjugada de la f(x) original cuando x tendía hacia $+\infty$:

$$\mathop{Lim}_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} - x$$

Como antes, el interludio previo al desenlace estaba ausente:

$$\mathop{Lim}_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = \frac{-1}{\infty} = 0$$

Aquel papel y aquellos cálculos de límites actuaron como un icono activador de mis recuerdos. Jamás se me había pasado por la cabeza toparme con algo semejante lejos de mi entorno académico; mucho menos todavía, de mi entorno cultural. Concluida la revisión de los cálculos, me formulé otras preguntas. ¿Qué quedaba de todo aquello en mis entornos? ¿Qué tienen en común esa hoja y los apuntes que toman ahora mis alumnos?

Los límites del desierto en Douz

Me imaginé también en la piel del adolescente del Magreb que llega a un aula de matemáticas de nuestro país. Espera recibir una educación matemática acorde con el significado de un término ya conocido. Pero, ¿tiene aquí el mismo significado que posee en el lugar de donde procede? Espera recibir una educación matemática basada en tareas rutinarias y en imperativos como 'calcula', 'busca', 'determina'... De no ser así, ¿es que han cambiado las Matemáticas? ¿Pensará que lo que hace ahora es hacer Matemáticas? Lo que sabe y lo que cree saber, ¿ayudan o dificulta su adaptación?

Las metodologías contemporáneas occidentales van por derroteros bien distintos a los de su país. A los cambios sociales y culturales tiene que añadir otro no menos impactante: el cambio educativo. Su nuevo profesor de Matemáticas no le dicta la clase, sino que le invita a intuir y a conjeturar, y a manifestar verbalmente los argumentos por los que justifica sus conjeturas e intuiciones. Siente que su profesor apenas hace nada, que es él quien tiene que hacerlo casi todo. ¿A qué referentes puede agarrarse? Los que tenía no le sirven. Esperaba hacer raíces cuadradas, cúbicas, ecuaciones, sistemas, cálculos de límites. En su entorno sabía hacerlo todo. Por eso era bueno en Matemáticas. Ahora en clase de Matemáticas se hace también Física, Biología, Economía, se lee el periódico, se usa la calculadora, el ordenador, Internet. Y encima, apenas comprende el idioma local en el que se explican las cosas.

Menos mal que ese adolescente es varón. Si fuese mujer, sería peor. Las costumbres alabadas en su país no se ven igual aquí. El asfalto sobre el que camina es menos firme que las arenas del desierto que se amontonaban a la puerta de su casa. ¿Aprenderá algo? ¿Logrará superar todo ESO? Sin quererlo, dos palabras salen de su boca: *In shalah*!

Desde aquel día en Douz voy siempre mirando al suelo. No es que vea cosas distintas, los suelos son iguales en todas partes: horizontales. Pero ahora miro al suelo con otros ojos, viendo cosas que antes no veía. He aprendido que la gente tira maravillas. No busco ni espero encontrar sortijas de oro, monedas, billetes de cien euros o perlas. Maravilloso es lo que te transforma, lo que te hace aprender.

El otro día, mientras caminaba cabizbajo, vi en la cuneta un par de tuercas hexagonales. No era la primera vez, las tuercas hexagonales son de lo más corriente que puedes hallar en una cuneta, pero al verlas me hice una pregunta: ¿Por qué siempre están echadas sobre un lado hexagonal y no sobre uno de los otros?

Sorprende la cantidad de geometría que hay en una tuerca. Su agujero es un cilindro surcado por una hélice por donde se enrosca el tornillo que la atraviesa. Las seis caras rectangulares facilitarán la labor de una llave inglesa. Una tuerca es un prisma hexagonal atravesado por un vacío cilíndrico. Este es su inventario geométrico:

Puntos	*Líneas*	*Superfícies*	*Cuerpos*	*Ángulos*	*Paralelas*	*Perpendiculares*
Vértices	Aristas	Rectángulo	Prisma	90º	Aristas	Aristas
	Poligonales	Hexágono	Cilindro	120º	Caras	Caras
	Circunferencia	Cilíndrica				
	Hélice					

Una tuerca perforada no verifica la fórmula de Euler relativa a los poliedros, ya que posee 9 caras (una es circular), 20 aristas (dos son circulares) y 12 vértices. En lugar de C+V=A+2, verifica que C+V=A+1. ¿Será siempre así en un poliedro perforado? La perforación cilíndrica añade 2 aristas circulares y 1 cara cilíndrica. El miembro de la izquierda en la igualdad C+V=A+2 aumenta en 1, mientras que el de la derecha lo hace en 2. Por tanto, la respuesta es afirmativa.

Volvamos a la primera cuestión: ¿Por qué las tuercas nunca acaban en el suelo de canto, sino echadas sobre una de sus dos caras hexagonales? ¿Cómo debe ser una tuerca para que no le ocurra eso? Sean a y b la altura de la tuerca y la longitud de su arista hexagonal, respectivamente. ¿Afecta a la probabilidad el hecho de que la tuerca esté perforada? No, siempre que la

Tuercas hexagonales callejeras

perforación no cambie su centro de gravedad. Como ocurre en una moneda (cilindro de grosor nulo), en un dado (cubo) o en un poliedro regular, es la proporción entre una cara y el total de la superficie del poliedro la que determina la probabilidad de que éste caiga sobre aquella. Luego la probabilidad de que una tuerca lanzada al aire acabe reposando en alguna de sus seis caras rectangulares viene determinada por la proporción entre la superficie de todas ellas y la de la pieza entera:

$$P = \frac{6ab}{6ab + 3\sqrt{3}b^2} = \frac{2a}{2a + b\sqrt{3}}$$

Esta probabilidad será del 50% si $a/b=\sqrt{3}/2$. Las dimensiones de las tuercas que había encontrado eran $a=3$ mm y $b=6{,}5$ mm. Según la fórmula debería caer de canto un 35% de veces. También tenía otra tuerca algo mayor: $a=5$ mm y $b=7$ mm. La probabilidad de que ésta cayese de canto estaba alrededor del 45%. ¿Se ajustaría la realidad experimental a la probabilidad ideal del modelo matemático? Las lancé 100 veces. La pequeña nunca cayó de canto (0%), la otra lo hizo en 21 ocasiones (21%). ¿Dónde estaba el error? No lo busqué en los cálculos, sino en la realidad.

El hallazgo fue aprender de lo que se halla: sacarle provecho al azar.

Examiné las tuercas con lupa. Ninguna de las caras eran polígonos perfectos. Las que había tomado por rectángulos tenían los dos lados más largos arqueados hacia fuera, lo que hacía que las caras hexagonales fuesen ligeramente convexas en sus vértices. Estas diferencias con el modelo de prisma hexagonal eran mayores en la tuerca pequeña, su especial diseño rompía la simetría y acentuaba la inestabilidad de su equilibrio vertical. La tuerca pequeña se había comportado como una moneda.

Aún así, las diferencias eran excesivas. ¿No tendría algo que ver la posición del centro de gravedad? Cuanto más alto, más inestable el equilibrio. Se me ocurrieron varias formas de cuantificar esa probabilidad, pero siempre me asolaban las dudas acerca de lo que la Física podría rebatir a mis disquisiciones. Decidí zanjar la cuestión lanzando las tuercas 100 veces más. La pequeña cayó de canto 2 veces; y la mayor, 21. Las probabilidades se asentaban en torno al 1% (2/200) y al 21% (42/200).

Un modo de elaborar un modelo probabilístico en base a la estabilidad del equilibrio puede ser hallar la amplitud del ángulo con el que el pie de la perpendicular desde el centro de gravedad G al suelo se mantiene dentro de la base del objeto. En un cilindro de altura $2a$ y diámetro $2r$ dicha amplitud es $\alpha=2\arctan(r/a)$. Definamos ahora la probabilidad de que el objeto 'caiga' de ese lado, esto es, se mantenga estable sobre él, como la proporción entre dicha amplitud (α) y la amplitud total posible (π):

$$P = \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{r}{a}\right)$$

Calculando así la probabilidad de que un cilindro 'cúbico' ($r=a$) caiga sobre su cara curva, se obtiene P=1/2. Si se calcula en base a la proporción entre superficies, el resultado es P=2/3. Lástima que no tenga un cilindro así para poner a prueba este modelo matemático.

Sobre proporciones de magnitudes de lo inexistente las matemáticas aventuran probabilidades de lo real. Mientras determinamos con cuál de las dos, si con las matemáticas o con la experimentación, nos acercamos más al valor buscado (perfeccionando los modelos de una y aumentando los ensayos de la otra), no hacemos sino crear ese valor perseguido. El azar y la paciencia conducen a la verdad.

Nunca hasta entonces me había planteado el cálculo de probabilidades con poliedros irregulares. El hallazgo no fue encontrar un papel con cálculos de límites, ni tampoco el par de tuercas hexagonales. El hallazgo fue aprender de lo que se halla: sacarle provecho al azar.

ADHERENCIAS