suma+
Artículos
Julio 2012
70
pp. 43-63

El problema de la Braquistócrona y otros problemas de la Física como introducción al Cálculo de variaciones

M.ª José Haro Delicado
M.ª José Pérez Haro

> Ya que la fábrica del universo es más que perfecta y es el trabajo de un Creador más que sabio, nada en el universo sucede en el que alguna regla de máximo o mínimo no aparezca (Leonhard Euler).

Con este trabajo pretendemos introducir a estudiantes de 1.° y 2.° curso de ingenierías a los problemas de Cálculo Variacional. En el Bachillerato, se trabaja con problemas relacionados con el cálculo de óptimos de funciones de una variable. Se trata de extender este tipo de problemas al trabajo con funciones de funciones (funcionales) trabajando con ejemplos que representaron un desafío histórico. Se presenta una propuesta didáctica que contiene una secuenciación de contenidos y una metodología que une ecuaciones diferenciales y problemas tradicionales del cálculo variacional.

Palabras clave: Investigación educativa, Cálculo variacional, Ecuaciones diferenciales, Problema de la braquistócrona, Problemas isoperimétricos

The Brachistochrone Problem and another Problems of the Physics Sciences as an Introduction to the Variational Calculus

With this work we aim to introduce Variational Calculus problems to students in first and second year of an engineering degree. At the secondary school, they work with problems based on the optimization of a function. We will try to link this kind of problems to functional ones, working with examples that represented an historical challenge. We offer here a didactic proposal made of a sequence of theoretical contents and a methodology to connect differential equations and traditional Variational Calculus problems.

Key words: Educational Research, Variational Calculus, Differential Equations, Brachistochrone problem, Isoperimetric problem.

Una propuesta didáctica

Introducción

Comenzamos tratando conceptos básicos del cálculo variacional procurando presentar diferencias y similitudes con contenidos previos que ya han sido adquiridos por los estudiantes. Se presenta la idea de funcional comparándola con la idea de función, así como diversos ejemplos muy sencillos en los que aparecen funcionales. Se termina con un ejemplo, como es el de la longitud de un arco de curva que les permite utilizar conocimientos adquiridos en segundo de Bachillerato. La mayor parte de las actividades que se proponen a lo largo de este trabajo han sido extraídas de los cuatro libros citados en las referencias bibliográficas, aunque adaptadas al nivel del conocimiento de los estudiantes.

Conjuntamente con los problemas en que es necesario determinar los máximos y mínimos de cierta función $y = f(x)$, con frecuencia surgen problemas físicos en los que es necesario hallar los valores máximo y mínimo de un tipo especial de magnitudes, llamadas funcionales.

Artículo recibido en *Suma* en febrero de 2011 y aceptado en diciembre de 2011

Se llama funcionales a un determinado tipo de funciones cuyos valores se determinan a partir de los valores de otras funciones. Son «funciones de funciones» o tipos de funciones en los que la variable independiente es una función.

En el caso de las funciones, a cada número le corresponde otro número. En el caso de las funcionales, *a cada función le corresponde un número.*

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Sea $\mathcal{M} = \mathcal{C}[0, 1]$ el conjunto de todas las funciones continuas $y(x)$ definidas en $[0, 1]$, y sea:

$$J\left[y(x)\right] = \int_0^1 y(x)\,dx$$

$J[y(x)]$ es una funcional que a cada función $y(x) \in \mathcal{C}[0, 1]$ le asocia un valor determinado por $J[y(x)]$.

Si $y(x) = x^2$:

$$J\left[y(x)\right] = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Si $y(x) = \sin(\pi x)$;

$$J\left[y(x)\right] = \int_0^1 \sin\pi x\,dx = \left[\frac{-\cos\pi x}{\pi}\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}$$

Si $y(x) = e^{2x} - 1$:

$$J\left[y(x)\right] = \int_0^1 \left(e^{2x} - 1\right)dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} - x\right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}$$

Ejemplo 2. Sea $\mathcal{M} = \mathcal{C}^1[0, 1]$ la clase de funciones $y(x)$ que tienen derivada continua en $[a, b]$ y sea $J[y(x)] = y'(x_0)$, donde $x_0 \in [a, b]$. $J[y(x)]$ es una funcional definida en $\mathcal{M}$.

Si, por ejemplo, $a = 1$, $b = 3$ y $x_0 = 5$, a la función $y(x) = x^3 - 1$ le corresponde el número $J[y(x)] = y'(5) = 3 \cdot 5^2 = 75$. A $y(x) = \tan x$, le corresponde el número $J[y(x)] = 1 + \tan^2 5$.

Ejemplo 3. Consideremos ahora este otro caso un poco más complicado. Sea $\mathcal{M} = \mathcal{C}[-1, 1]$ la clase de todas las funciones continuas $y(x)$ definidas en $[-1, 1]$ y sea $\varphi(x, y)$ una función definida y continua para valores de $x \in [-1, 1]$ y para todos los valores reales de y.

Sea:

$$J\left[y(x)\right] = \int_{-1}^1 \phi(x, y)\,dx$$

$J[y(x)]$ es una funcional definida en $\mathcal{M}$. Concretamente, si $y(x) = x$, y

$$\phi(x, y) = \frac{x}{1 + y^2}$$

tendremos que a $y(x) = x$ le corresponde el valor:

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{1 + x^2}dx = \frac{1}{2}\left[\ln\left(1 + x^2\right)\right]_{-1}^1 = 0$$

Ejemplo 4. La longitud l de un arco de curva plana que une dos puntos dados $A(x_0, y_0)$ y $B(x_1, y_1)$ es una funcional.

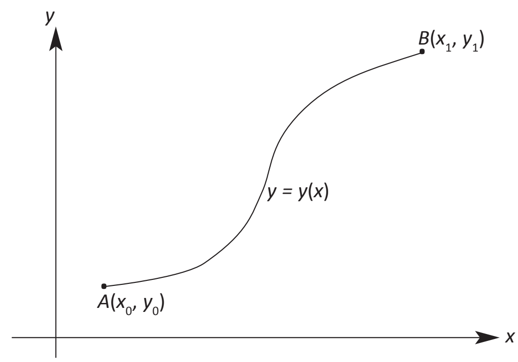

Figura 1

La magnitud l puede calcularse si se da la ecuación de la curva, $y = y(x)$. De este modo:

$$l[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$$

¿Por qué es esto así?

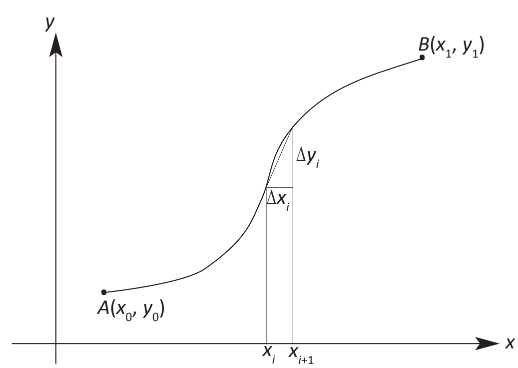

Figura 2

La longitud aproximada del segmento de curva comprendido entre x_i y x_{i+1} es:

$$L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \\ = \sqrt{\frac{(\Delta x_i)^2}{(\Delta x_i)^2} + \frac{(\Delta y_i)^2}{(\Delta x_i)^2}}\Delta x_i$$

Una primera aproximación de la longitud viene dada por:

$$L = \sum_{i=1}^{n} L_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{(\Delta y_i)^2}{(\Delta x_i)^2}}\Delta x_i$$

Y el valor exacto de la longitud del arco:

$$L = \lim_{\Delta x_i \to 0} L_i = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{(\Delta y_i)^2}{(\Delta x_i)^2}}\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\alpha_i))^2}\Delta x_i =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (f'(\alpha_i))^2}\, dx,$$

con $\alpha_i \in [x_i, x_{i+1}]$

Vamos a trabajar con este tipo de expresiones que, por otra parte, desempeñan un papel muy importante en el terreno de la física y de las matemáticas aplicadas.

Una de las ramas más desarrolladas del trabajo con funcionales es el llamado «Cálculo Variacional» o «Cálculo de Variaciones» que tiene que ver con la búsqueda de máximos y mínimos de funcionales.

Breve introducción histórica al cálculo de variaciones

Se considera de una gran importancia que los estudiantes encuentren que lo que estudian es útil y que tiene sentido su aprendizaje. Por ello se hace necesario citar el momento histórico en el que se empezaron a desarrollar los contenidos objeto de estudio, así como los personajes implicados en su desarrollo, los problemas que se resolvieron con ellos y sus implicaciones en el avance del conocimiento humano y de la ciencia.

De los tres problemas presentados en esta breve introducción histórica se tratarán más a fondo, con posterioridad, el primero y el tercero (problema de la braquistócrona y problema isoperimétrico, respectivamente). El primero de ellos se comienza a desmenuzar un poco en esta introducción, con el fin de manejar las ideas introducidas, y resulta adecuado por los cocimientos previos que ya tienen los estudiantes de estos niveles.

El cálculo de variaciones surgió en el siglo XVIII y fueron Euler y Lagrange los que lo convirtieron en una teoría matemática rigurosa. Tras algunos trabajos previos, Euler publicó en 1744 el libro *Método de búsqueda de líneas curvas con propiedades de máximo o mínimo, o la resolución del problema isoperimétrico tomado en su sentido más amplio*, que es el primer libro en la historia sobre cálculo de variaciones. Con solo 19 años, Lagrange se interesaba ya por los trabajos de Euler sobre los problemas de extremos, y en particular por los problemas isoperimétricos (entre todas las curvas cerradas en el plano de perímetro fijo, ¿qué curva (si la hay) maximiza el área de la región que encierra?). Habiendo comprobado que los métodos de Euler en el cálculo de variaciones eran excesivamente complicados, tratándose de un tema de análisis puro, Lagrange desplaza las consideraciones geométrico-analíticas de Euler para sustituirlas por un método puramente analítico y para escribirlas con un simbolismo más apropiado. En 1755, describe en una carta dirigida a Euler su método, al que llama «Método de variación», pero que Euler denominará «Cálculo de variaciones». Su método puede ilustrarse a partir del problema fundamental de hacer máxima o mínima la integral

$$A = \int_{x_1}^{x_2} Z\, dx$$

donde $Z = f(x, y, y')$.

El método de variaciones se aplicó, tras su descubrimiento, sobretodo en física, especialmente en mecánica, y llegó a ser una disciplina matemática independiente, con métodos propios de investigación.

Los tres problemas siguientes tuvieron una gran importancia en el desarrollo del cálculo variacional.

Problema de la braquistócrona (breve tiempo). En 1696, Johann Bernoulli publicó una carta, dirigida a los matemáticos de la época, proponiendo un problema sobre las líneas de deslizamiento más rápidas, o braquistócronas. En este problema se exige determinar la línea que une dos puntos dados A y B, que no pertenecen a una misma recta vertical, de manera que una partícula se deslice por dicha línea desde el punto A hasta el punto B en el menor tiempo posible.

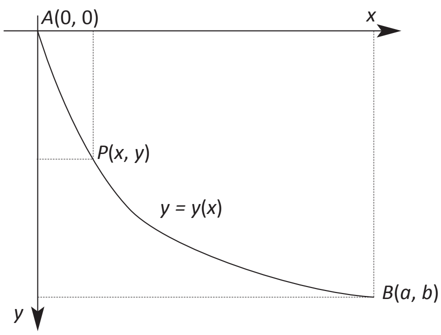

Figura 3

Se puede pensar sobre cuál será la línea de deslizamiento más rápido, llegando a la conclusión de que no será la recta que une los dos puntos (la distancia más corta entre dos puntos es la recta), ya que al moverse por la recta, la velocidad aumentará con una cierta lentitud. Previamente al planteamiento del problema por parte de Johann Bernoulli, Galileo ya pensaba que el tiempo sería menor si el camino se curvaba tomando la forma de un arco de circunferencia, puesto que si se toma una curva que baje más bruscamente cerca del punto B, aunque el camino se alargue, una buena parte del mismo será recorrido con mayor velocidad. Fueron varios los matemáticos que encontraron la respuesta, entre los que cabe destacar a los hermanos Bernoulli, Leibniz, Newton y L'Hôpital. Concretamente, Newton consideró el problema de encontrar la braquistócrona asociada con la construcción de túneles a través de la Tierra, conectando puntos fijos.

Consideremos el problema más de cerca.

Sea s la longitud del arco de curva que une A con P, la velocidad de la partícula en el punto P será $v = ds/dt$, de donde se obtiene $dt = ds/v$, por lo que el tiempo que tarda en desplazarse la partícula desde A hasta P viene dado por:

$$t = \int_0^s \frac{ds}{v}$$

¿Cómo se puede expresar v y ds en función de x y de $y(x)$?

Supongamos que la partícula parte del resposo. Como no hay fricción, se cumplirá el principio de conservación de la energía. Ello significa que al moverse la partícula, desde un punto más alto a un punto más bajo, la energía potencial se convertirá en cinética. La energía potencial en un punto situado a una altura h es igual a mgh, donde m es la masa y g es la aceleración de la gravedad. La energía cinética en un punto es $mv^2/2$. En el punto A la energía cinética es cero; en el punto P, la energía cinética será igual a la variación de la energía potencial entre A y P, por lo que $mv^2/2 = mgx$. Despejando v, obtenemos $\sqrt{2gx}$.

Intentemos hacer lo mismo con ds.

Sean los puntos $P(x, y)$ y $(x + \Delta x, y + \Delta y)$, que se encuentran en la curva $y = y(x)$. Llamemos Δs a la variación de la longitud del arco de curva al pasar de un punto al otro.

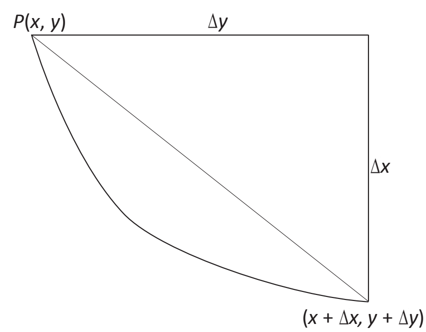

Figura 4

Si Δx es pequeño, es Δs aproximadamente igual a:

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Por lo que $\Delta s / \Delta x$ es aproximadamente igual a:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

Si tomamos límites cuando Δx tiende a cero, se cumple que:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

y, por lo tanto:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Desde aquí llegamos a que el tiempo que tarda una partícula en ir desde A hasta B, a través de la trayectoria determinada por $y = y(x)$, es:

$$T\left[y(x)\right] = \int_0^a \sqrt{\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2gx}}\, dx$$

Hemos de encontrar una función $y(x)$, continua y derivable, con derivada primera continua (esto se representa diciendo que $y(x)$ es de clase C^1), que nos dé la solución del problema:

$$\min T\left[y(x)\right] = \int_0^a \sqrt{\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2gx}}\, dx$$

con $y(0) = 0$, $y(a) = b$

El procedimiento para obtener la solución es algo más complejo y resolveremos el problema más adelante.

Problema de las líneas geodésicas. Se pide determinar la línea de menor longitud que une dos puntos dados en cierta superficie $\varphi(x, y, z) = 0$.

Estas líneas son llamadas geodésicas. Se tiene un problema variacional sobre el llamado extremo fijo o condicional. Se pide hallar el mínimo de la funcional:

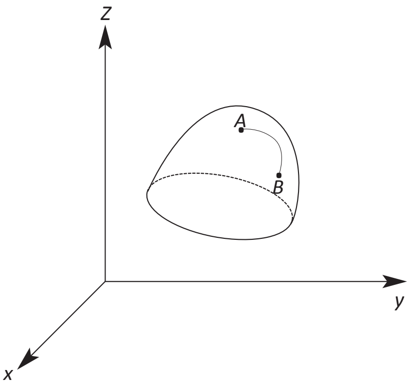

Figura 5

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}\, dx$$

donde las funciones $y(x)$ y $z(x)$ están sometidas a la condición . Este problema fue resuelto por Jakob Bernoulli, pero el método general para resolver este tipo de problemas se obtuvo a partir de los trabajos de Euler y Lagrange.

Problema isoperimétrico. Se pide hallar una línea cerrada de longitud dada l que delimite el área máxima S. Esta línea, ya se sabía cuál era en la antigua Grecia. En este problema se exige hallar el extremo de la funcional S con una condición complementaria, y que es que la longitud de la curva debe ser constante, es decir, la funcional:

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(x'(\mathrm{t})\right)^2 + \left(y'(\mathrm{t})\right)^2}\, dt$$

se ha de mantener constante. Condiciones de este tipo reciben el nombre de isoperimétricas. Los métodos generales de resolución de problemas con condiciones isoperimétricas fueron desarrollados por Euler.

Introducción al cálculo variacional

En esta sección se expone el objetivo fundamental del cálculo variacional y se mencionan algunos de los problemas que resuelve. Se intentan establecer comparaciones entre conceptos similares de cursos anteriores propios del cálculo diferencial, como la idea de variación o incremento de una función y de una funcional, la idea de continuidad, la idea de máximo o mínimo y los teoremas relacionados con estos conceptos. Después de algunos ejercicios relacionados con estas ideas se presenta el problema fundamental objeto del cálculo de variaciones y algunos ejercicios para entender mejor lo tratado.

El *cálculo de variaciones o variacional* estudia los métodos que permiten hallar los valores máximos y mínimos de las funcionales. *Los problemas en que es preciso hallar el máximo o mínimo de funcionales se denominan problemas variacionales.*

Hay leyes de la física que se apoyan en la afirmación de que una determinada funcional alcanza su mínimo o su máximo en una determinada situación. Dichas leyes reciben el nombre de principios variacionales de la física. A dichos principios pertenecen el principio de la acción mínima, la ley de conservación de la energía, la ley de conservación del impulso, la ley de conservación de la cantidad de movimiento, el principio de Fermat en óptica, etc. Por ejemplo:

Principio de la acción mínima. Dado un sistema de coordenadas de todas las trayectorias posibles que transcurran entre el instante t_1 y t_2, el sistema escogerá aquella que minimice la acción S

$$S\left[q_i, q_i'\right] = \int L\left(q_i(t), q_i'(t), t\right) dt$$

Principio de Fermat en óptica: La trayectoria seguida por la luz al propagarse de un punto a otro es tal que el tiempo empleado en recorrerlo es mínimo.

$$t = \frac{1}{c}\int_A^B n(s)\, ds$$

Ejercicio 1. ¿Hasta qué orden de proximidad es continua en $y_0(x) = x$ la funcional:

$$J\left[y(x)\right] = \int_0^1 \left(y + 2y'\right) dx$$

considerada en $\mathcal{M} = C^1[0, 1]$?

Solución: Sea $\varepsilon > 0$ y sea:

1. La variable z es función de la variable x, y se designa como $z = f(x)$, si a cada valor de x perteneciente a cierto dominio de variación de x le corresponde un único valor de z.	1. La variable v se llama funcional dependiente de la función $y(x)$, y se designa como, $v = v[y(x)]$, si a cada función $y(x)$ perteneciente a cierta clase de funciones le corresponde un único valor de v.
2. Se llama incremento Δx de la variable x, a la diferencia entre dos valores, $\Delta x = x - x_1$. Si x es la variable independiente, $dx = \Delta x$	2. Se llama incremento o variación, δy, de $y(x)$ a la diferencia entre dos funciones, $\delta y = y(x) - y_1(x)$, pertenecientes a una clase considerada de funciones $\mathcal{M}$
3. La función $f(x)$ es continua en $x = x_0$, si para todo ε positivo existe un $\delta > 0$, tal que si $\lvert f(x) - f(x_0)\rvert < \varepsilon$, es $\lvert x - x_0\rvert < \delta$	3. La funcional $J[y(x)]$ es continua en $y = y_0(x)$, hasta el orden de proximidad k, si para todo ε positivo existe un $\delta > 0$, tal que si $\lvert J[y(x)] - J[y_0(x)]\rvert < \varepsilon$, entonces: $\lvert y(x)-y_0(x)\rvert < \delta$ $\lvert y'(x)-y'_0(x)\rvert < \delta$ ... $\lvert y^{(k}(x)-y_0^{(k}(x)\rvert < \delta$
4. Se llama función lineal a la función $l(x)$ que satisface las siguientes condiciones: $l(cx)=cl(x)$, donde c es una constante arbitraria y $l(x_1 + x_2) = l(x_1) + l(x_2)$	4. Se llama funcional lineal a la funcional $L[cy(x)] = cL[y(x)]$, donde c es una constante arbitraria y $L[y_1(x)+y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)]$
5. La función $f(x)$ alcanza en un punto x_0 su máximo absoluto, si para todo punto x, perteneciente al dominio de definición de la función, se verifica que $f(x_0) \geq f(x)$. Del mismo modo se dice que $f(x)$ alcanza en un punto x_0 su mínimo absoluto, si para todo punto x perteneciente al dominio de definición de la función, se verifca $f(x_0) \leq f(x)$.	5. La funcional $J[y(x)]$ tiene un máximo en la curva $y = y_0(x)$, si su valor en cualquier curva próxima a $y = y_0(x)$ no es mayor que $J[y_0(x)]$. O sea si $\Delta J = J[y(x)] - J[y_0(x)] \leq 0$. Si además $\Delta J = 0$, sólo para $y = y_0(x)$ diremos que se alcanza un máximo estricto en la curva $y = y_0(x)$. De la misma forma se define la curva $y = y_0(x)$en la que se alcanza un mínimo. En este caso, $\Delta J \geq 0$ para todas las curvas próximas a $y = y_0(x)$
6. Teorema (Condición necesaria): Si la función derivable $f(x)$ alcanza su máximo o su mínimo en un punto interior $x = x_0$ del dominio de definición de la función, entonces en este punto será $f(x_0) = 0$	6. Teorema (Condición necesaria): Si la funcional $J[y(x)]$, alcanza su máximo o su mínimo para $y = y_0(x)$, siendo $y_0(x)$ un punto interior de la región de definición de la funcional, entonces para $y = y_0(x)$ será $\delta J[y_0(x)] = 0$. Las funciones para las que $\delta J = 0$ se denominan funciones estacionarias

Relación entre conceptos relativos a máximos y mínimos de funciones y a máximos y mínimos de funcionales

$$\left|J\left[y(x)\right]-J\left[y_0(x)\right]\right|<\varepsilon\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|\int_0^1\left(y+2y'\right)dx-\int_0^1\left(x+2\right)dx\right|\le$$

$$\le\int_0^1\left|y-x\right|dx+2\int_0^1\left(y'-1\right)dx$$

Sea $\delta=\varepsilon/3$, entonces si:

$$\left|y(x)-x\right|<\frac{\varepsilon}{3}\ \text{y}\ \left|y'(x)-1\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

tendremos que:

$$\left|J\left[y(x)\right]-J\left[y_0(x)\right]\right|<\varepsilon$$

lo que quiere decir que $\forall\ \ \varepsilon>0,\ \ \exists\ \ \delta>0$ (por ejemplo $\delta=\varepsilon/3$), de modo que:

$$\left|y(x)-x\right|<\frac{\varepsilon}{3}\ \text{y}\ \ \left|y'(x)-1\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

entonces:

$$\left|J\left[y(x)\right]-J\left[y_0(x)\right]\right|<\varepsilon$$

Ejercicio 2. Demuestra que la funcional:

$$J\left[y(x)\right]=\int_0^1\left(x^2+y^2\right)dx$$

alcanza un mínimo estricto en la curva $y_0(x)=0$.

Solución:

$$\Delta J=J\left[y(x)\right]-J\left[0\right]=$$

$$=\int_0^1\left(x^2+y^2\right)dx-\int_0^1 x^2\,dx=\int_0^1 y^2\,dx=$$

$$=\left[y^2x\right]_0^1=y^2\ge 0$$

Problema del cálculo de variaciones

Sea F una función de tres variables de clase C^2 (con derivadas parciales primeras y segundas continuas). Se considera el siguiente funcional:

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(y(x),y'(x),x)dx$$

Se trata de encontrar aquella función $y^*(x)$, con derivadas primera y segunda continuas en $[x_0,x_1]$, verificando que $y^*(x_0)=$ $=y_0,\dots y^*(x_1)=y_1$, para que la funcional J alcance el valor máximo o mínimo.

El problema en el caso de maximización, por ejemplo, es:

$$\max_{x\in\Omega}J(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(y(x),y'(x),x)dx$$

con $y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1$

$\Omega=\{y:[x_0,x_1]\rightarrow\mathbb{R}$, tal que y posee derivadas primera y segunda continuas en $[x_0,x_1]\}$.

Para este problema, el conjunto factible (llamado conjunto de funciones admisibles) es:

$$\Psi=\{y\in\Omega\ /\ y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1\}$$

Hablar sólo de máximo o mínimo de una funcional no supone pérdida de generalidad, ya que $\min J(y)$, es equivalente a $\max[-J(y)]$. Además, el elemento y que minimiza $J(y)$ es el mismo que maximiza $[-J(y)]$.

Ejemplo. Dados los puntos (a,α) y (b,β) del plano (x,y), siendo $a\neq b$, se trata de encontrar la función $y^*(x)$ que une dichos puntos cuya longitud sea mínima.

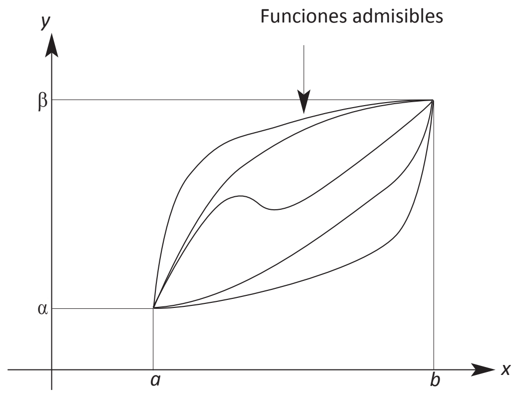

Figura 6

Dada una función cualquiera $y(x)$, ya sabemos que la longitud del arco de curva entre los puntos dados es:

$$l[y(x)]=\int_a^b\sqrt{(1+(y')^2)}dx$$

El problema, por lo tanto, sería:

$$\min l[y(x)]=\int_a^b\sqrt{(1+(y')^2)}dx$$

con $y(a)=\alpha, y(b)=\beta$.

Condición necesaria de optimalidad: condición de Euler

En esta sección se presenta la condición necesaria para la existencia de extremal, que va a ser una de las ideas más importantes que se van a desarrollar y en la que se va a apoyar una buena parte de los ejemplos y de los ejercicios y problemas que se presentan. A través de este resultado vamos a enlazar con la resolución de ecuaciones diferenciales, estableciendo una relación entre el problema fundamental del cálculo variacional y las ecuaciones diferenciales. Esta condición nos va a permitir también resolver dos de los problemas reales más importantes del cálculo variacional que se plantean en este trabajo, como son el problema de la braquistócrona y los problemas isoperimétricos. Empezamos recordando una serie de definiciones necesarias para poder introducir los conceptos más relevantes. Continuamos con el teorema objeto de esta sección, que es la condición de Euler, y lo aplicamos finalmente a la resolución de diversos problemas.

Definición 1: Se dice que y es una función admisible para el problema de cálculo de variaciones si se verifica que $y \in \Omega$, $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$

Definición 2: Sea y^* una función admisible para el problema de cálculo de variaciones. Se dice que y^* es máximo global si para cualquier función admisible y, se verifica que $J(y) \leq J(y^*)$.

Definición 3: Sea y^* una función admisible para el problema de cálculo de variaciones. Se dice que y^* es máximo local, si existe un $\delta > 0$, tal que para toda función admisible y, perteneciente a la bola $B(y^*, \delta) = \{y \in \Omega$ tal que $d(y, y^*)\}$, se verifica que $J(y) \leq J(y^*)$

Teorema Condición de Euler. Si $y^*(x)$ es un máximo local del problema variacional, entonces en $y^*(x)$ *se verifica la ecuación diferencial:*

$$F_y\left(y^*(x), \left(y^*\right)'(x), x\right) - \frac{d}{dx}F_{y'}\left[y^*(x), \left(y^*\right)'(x), x\right] = 0$$

$$x \in \left[x_0, x_1\right]$$

Abreviadamente, podemos escribir:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

Esta última expresión recibe el nombre de *ecuación de Euler* (la publicó en 1744).

Puede que no haya ninguna función que sea solución de la ecuación anterior; y, si la hay, puede que no sea única.

Utilizando la regla de la cadena para derivar la expresión:

$$\frac{d}{dx}F_{y'}$$

llegamos a:

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0$$

Hay que hacer notar que la necesidad de que se cumpla la condición de Euler nos lleva a la resolución de ecuaciones diferenciales, como vamos a poder comprobar en los siguientes ejemplos. A las funciones que satisfacen la ecuación de Euler se les llama *extremales* y sólo en una de esas extremales se puede alcanzar el máximo o mínimo de la funcional.

Ejercicio 1. Obtén las funciones que verifiquen las condiciones necesarias de máximo local del siguiente problema:

$$\max J\left(y\right) = \int_0^2 \left(-12xy - y'^2\right)dx$$

con $y(0) = 2$, $y(2) = 12$

Solución:

$$F\left(x, y, y'\right) = -12xy - y'^2$$

$$F_y = -12x \qquad F_{y'} = -2y'$$

$$\frac{d}{dx}\left(-2y'\right) = -2y''$$

La condición de Euler supone resolver la ecuación diferencial:

$$-12x - \left(-2y''\right) = -12x + 2y'' = 0$$

Ello implica que:

$$2y'' = 12x; \;\; y'' = 6x$$

$$y' = \frac{6x^2}{2} + c_1; \;\; y' = 3x^2 + c_1$$

$$y = \frac{3x^3}{3} + c_1x + c_2; \;\; y = x^3 + c_1x + c_2$$

Como $y(0)=2, y(2)=12$, obtenemos:

$c_2=2, \quad 8+c_1 \cdot 2+2=12 \rightarrow c_1=1$

$y=x^3+x+2,\ 0 \leq x \leq 2$

El máximo sólo puede alcanzarse en la función $y(x)=x^3+x+2$.

Ejercicio 2. Obtén las funciones que verifiquen las condiciones necesarias de máximo o mínimo local del siguiente problema:

$$\operatorname{opt} J(y)=\int_0^1\left(xy+y^2-2y^2y'\right)dx$$

con $y(0)=2, y(1)=5$.

Solución:

$$F(y,y',x)=xy+y^2-2y^2y'$$

Tenemos que:

$$F_y=x+2y-4yy'$$

$$F_{y'}=-2y^2;\ \frac{d}{dx}\left(-2y^2\right)=-4yy'$$

Por lo tanto, la condición de Euler es la ecuación diferencial $x+2y-4yy'+4yy'=0$, lo que implica que $y(x)=-x/2$, con $0 \leq x \leq 1$

Utilizando las condiciones inicial y final, obtenemos:

$2=y(0)=0$, lo cual es imposible

$5=y(1)=-1/2$, lo cual también es imposible. Ello quiere decir que el problema dado no tiene ni máximo ni mínimo, es decir, no hay extremal que verifique las condiciones inicial y final.

Ejercicio 3. ¿En qué curvas puede alcanzar su extremo la funcional:

$$J(y(x))=\int_1^2\left[\left(y'(x)\right)^2-2x\cdot y(x)\right]dx$$

$y(1)=0, y(2)=-1$?

Solución:

$$F(x,y,y')=y'^2-2xy;\ F_y=-2x;$$

$$F_{y'}=2y';\ \frac{d}{dx}2y'=2y''$$

La ecuación de Euler es $-2x-2y''=0 \Rightarrow x+y''=0$;
$y''=-x; y'=-x^2/2+C_1; y=-x^3/6+C_1x+C_2$

Con las condiciones de frontera obtenemos:

$$-\frac{1}{6}+C_1+C_2=0;\ -\frac{8}{6}+2C_1+C_2=-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1=\frac{1}{6};\ C_2=0$$

El extremo sólo puede alcanzarse en la curva:

$$y=\frac{-x^3}{6}+\frac{1}{6}x$$

Ejercicio 4. Halla los extremales de la funcional:

$$J(y(x))=\int_1^3(3x-y)\,y\,dx;$$

que satisfacen las condiciones de frontera $y(1)=1$ e $y(3)=9/2$.

Solución:

$$F(x,y,y')=3xy-y^2;\ F_y=3x-2y;\ F_{y'}=0$$

La condición de Euler queda: $3x-2y=0 \Rightarrow y=3/2x$. Pero esta extremal no cumple una de las condiciones de frontera, concretamente la primera, ya que si $x=1$, entonces $y=3/2 \neq 1$.

Ejercicio 5. ¿En qué curvas puede alcanzar su extremo la funcional:

$$J(y(x))=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(y'(x)\right)^2-y^2(x)\right]dx$$

$y(0)=0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$?

Solución:

$$F(x,y,y')=\left[\left(y'(x)\right)^2-y^2(x)\right];\ F_y=-2y(x);$$

$$F_{y'}=2y'(x);\ \frac{d}{dx}F_{y'}=2y''(x)$$

La ecuación de Euler tiene la forma $-2y(x)-2y''(x)=0$, simplificando queda $y(x)+y''(x)=0$. Hay que resolver la ecuación diferencial $y''+y=0$. Para ello hacemos:

$$y'=\frac{dy}{dx}=p$$

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{x}=\frac{dp}{dy}p$$

$$y" = \frac{dp}{dy}p$$

$$p\frac{dp}{dy} + y = 0$$

$$pdp + ydy = 0$$

$$\frac{p^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C \text{ (Constante)}$$

$$p^2 + y^2 = C$$

Como $p = y' = dy/dx$, queda:

$$(y')^2 + y^2 = C; \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = C - y^2$$

Hagamos $C = k^2$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{k^2 - y^2}; \quad \frac{dy}{\pm\sqrt{k^2 - y^2}} = dx$$

Dos soluciones particulares son: $y = \sin x$ e $y = \cos x$. La solución general será $y = C_1 \sin x + C_1 \cos x$. Si tenemos en cuenta las condiciones de frontera, nos queda $C_2 = 0$ y $C_1 = 1$. Ello quiere decir que el óptimo sólo puede obtenerse en la curva $y = \sin x$.

En estos cinco ejemplos hemos podido comprobar la relación que se establece entre el cálculo de variaciones y las ecuaciones diferenciales a través de la condición de Euler. Es decir, *si el problema variacional tiene solución, necesariamente ha de tenerla la ecuación diferencial correspondiente a la condición de Euler.*

Casos particulares de la ecuación de Euler

a) F *no depende de* y'

Si F no depende de y', la ecuación de Euler es de la forma $F_y = 0$, que es una ecuación algebraica sin ninguna complicación, pero que sólo tendrá solución si por casualidad se cumplen las condiciones de frontera.

Ejemplo

$$\min J[y(x)] = \int_0^1 (x + y)^2 dx$$

Con las condiciones $y(0) = a$, $y(1) = b$.

Halla los valores de a y de b, para los que la solución obtenida sea solución admisible.

Solución:

$F = (x + y)^2$; $F_y = 2(x + y) = 0 \Rightarrow y = -x$. Para que se cumplan las condiciones de frontera, deber ser $a = 0$ y $b = -1$.

b) F *depende sólo de* y'

Si F no depende ni de y ni de x, entonces F_y, $F_{xy'}$ y $F_{yy'}$ son nulos. Teniendo en cuenta la expresión desarrollada de la ecuación de Euler, $F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y" = 0$, nos quedaría $F_{y'y'}y" = 0$. Se ha de cumplir que, o bien $y" = 0$ o bien $F_{y'y'} = 0$. Si $y" = 0$, ha de ser $y(x) = C_1x + C_2$, que es una familia de rectas dependiente de dos parámetros C_1 y C_2.

Si es $F_{y'y'}(y') = 0$, quiere decir que esa ecuación tiene raíces reales, con lo cual $y' = k$ e $y = kx + C$, que es también una familia de rectas con un solo parámetro y que está contenida en la familia anterior.

Según esto, la longitud del arco de una curva:

$$L[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

tiene como extremales rectas $y = C_1x + C_2$, lo que nos parece lógico porque sabemos que la distancia mínima entre dos puntos es la recta.

Veamos otro ejemplo que puede resultar interesante. Si consideramos que el tiempo que se tarda en recorrer una curva $y = y(x)$ desde un punto $A(x_0, y_0)$ hasta otro punto $B(x_1, y_1)$ viene dado por la funcional:

$$T(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1 + [y'(x)]^2}{v(y')}}\, dx$$

donde:

$$l(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx$$

es la longitud del arco de curva, y $v(y')$ es la velocidad, que, en este caso sólo depende de y'. Como estamos en la situación planteada en este apartado, podemos asegurar que el óptimo, caso de existir, es una recta. ¿Qué lo diferencia del problema de la braquistócrona, cuya solución no es una recta, según las conclusiones de los matemáticos que se enfrentaron a él?

c) F *sólo depende de* y *y de* y*'.*

En este caso la ecuación de Euler $F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0$ toma la forma $F_y - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0$. Multiplicando los dos miembros por y', obtenemos:

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'F_{y'}\right) = 0 \Rightarrow F - y'F_{y'} = \text{Cte}$$

Ejercicio 1. Halla la extremal de la funcional

$$J\left[y\left(x\right)\right] = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx$$

que pasa por los puntos fijos (a_1, b_1) y (a_2, b_2) pertenecientes al semiplano superior.

Solución:

Como.

$$F = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}$$

no contiene a x, utilizamos la expresión $F - y'F_{y'} = C$, que nos lleva a:

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} - y'\frac{y'\sqrt{1+y'^2}}{y} = C$$

que queda como $y\sqrt{1+y'^2} = C^*$, siendo C^* la inversa de C.

Para resolver esta ecuación diferencial de una manera sencilla podemos hacer el cambio $y' = \tan t$, con lo cual:

$$y = \frac{C^*}{\sqrt{1+\tan^2 t}} = C^*\cos t;$$

$$dy = -C^*\sin t \; dt$$

Como:

$$\frac{dy}{dx} = \tan t, \quad \frac{-C^*\sin t \; dt}{\tan t} = dx;$$

$$-C^*\cos t \; dt = dx; \quad -C^*\sin t + C_1 = x$$

Eliminando el parámetro t, obtenemos que $(x - C_1)^2 + y^2 = C^{*2}$es una familia de circunferencias de centro en el eje de abscisas.

Según el principio de Fermat, el camino que recorre un rayo de luz al propagarse con una velocidad $v(x, y)$ en un medio bidimensional no homogéneo constituye una extremal de la funcional:

$$J\left[y\left(x\right)\right] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v\left(x,y\right)}dx$$

Si la velocidad de la luz es proporcional a y, estamos en un caso muy similar al anterior y los rayos de luz representan arcos de circunferencia con centros en el eje OX.

Ejercicio 2. Problema de la superficie mínima de rotación. Halla la curva con puntos inicial y final dados, A y B, que al girar alrededor del eje de abscisas forme una superficie de área mínima.

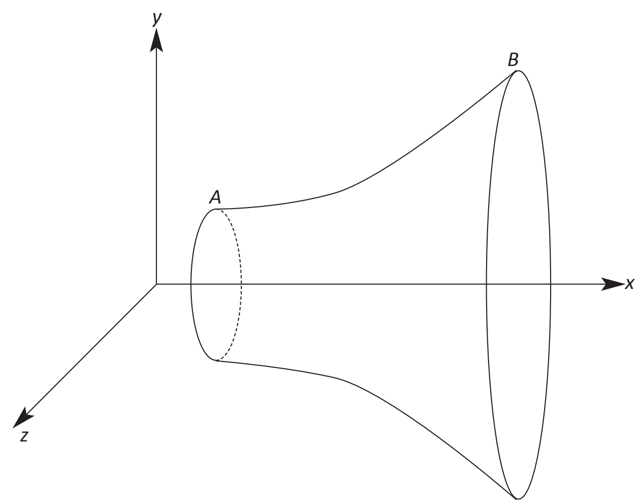

Figura 7

Solución:

Si recordamos, el área de una superficie de revolución es:

$$S\left[y\left(x\right)\right] = 2\pi\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}dx$$

Esta función depende sólo de y y de y'. Por ello, la ecuación de Euler tiene la forma $F - y'F_{y'}$ = Constante. Es decir:

$$y\sqrt{1+y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C$$

que al simplificar queda como:

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}}=C$$

Un modo de poder integrar esta ecuación de manera relativamente sencilla es hacer la sustitución $y' = \sinh t$. De esta forma queda $y = C \cdot \cosh t$, y:

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{C\sinh t\ dt}{\sinh t}=Cdt \Rightarrow x=Ct+C^*$$

Al proceder así la superficie que buscamos se forma al rotar la curva cuya ecuación viene dada en forma paramétrica por:

$$\begin{cases} x=Ct+C^* \\ y=C\cosh t \end{cases}$$

Si se elimina el parámetro t, se tendrá:

$$y=C\cosh\frac{x-C^*}{C}$$

que representa una familia de catenarias. Las constantes hay que buscarlas a partir de las condiciones de frontera que nos dicen que la curva empieza en A y acaba en B.

Problema del cuerpo de resistencia mínima en un fluido

Veamos ahora un ejemplo un poco más complejo, pero muy interesante por su aplicación práctica. Parece ser que fue el primer problema importante de este tipo, propuesto y resuelto por Newton. En sus *Principia* estudió el contorno que debe tener una superficie de revolución moviéndose a una velocidad constante en la dirección de sus ejes para que presente la mínima resistencia al movimiento. Trataremos aquí con este problema. Supongamos que queremos hallar la forma de un cuerpo sólido de revolución que se mueve en un fluido gaseoso, de manera que encuentre la resistencia mínima al movimiento.

Supondremos también que la densidad del gas es suficientemente pequeña y que las moléculas se reflejan como en un espejo cuando chocan contra la superficie del cuerpo. La componente normal de la presión será $P = 2\rho v^2 \sin^2\theta$, siendo ρ la densidad del gas, v la velocidad del gas respecto del cuerpo y θ el ángulo que se forma entre la velocidad y su componente tangencial. Ya que la presión es perpendi-

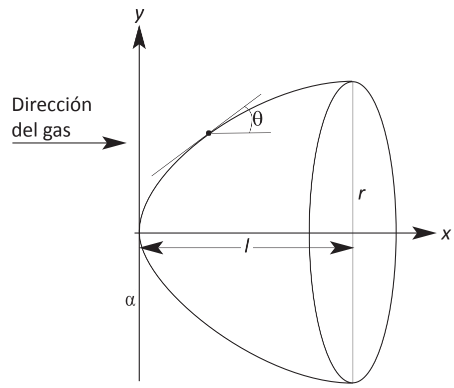

Figura 8

cular a la superficie, la componente según el eje OX de la fuerza que actúa sobre un anillo de anchura:

$$\sqrt{\left(1+y'^2\right)}dx$$

y de radio $y(x)$, se puede representar como:

$$dF=2\rho v^2\sin^2\theta\left[2\pi y\sqrt{\left(1+y'^2\right)}\right]\sin\theta dx$$

La fuerza que actúa en la dirección positiva del eje OX será:

$$F=\int_0^l 4\pi\rho v^2 y\sin^3\theta\sqrt{1+y'^2}dx$$

Para simplificar un poco el problema vamos a suponer que:

$$\sin\theta=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\approx y'$$

Tendremos de esta forma que:

$$F=4\pi\rho v^2\int_0^l y'^3\, y\, dx$$

Se trata de hallar la función $y(x)$ en la que F alcanza el menor valor posible, siendo $y(0) = 0$ e $y(l) = r$:

$$F\left(x,y,y'\right)=y'^3 y;\ F_y=y'^3;$$

$$F_{y'}=3yy'^2;\ \frac{d}{dx}F_{y'}=3y'^3+6yy'y''$$

La ecuación de Euler queda:

$$y'^3-3y'^3-6yy'y''=0;\ y'^3+3yy'y''=0$$

Multiplicando por y' llegamos a $F - y'F_{y'} = C_1$. es decir, $y'^3y - y'^3yy'^2 = -2y'^3y = C_1$, o lo que es lo mismo $y'^3y = C_1$;

$$y' = \frac{\sqrt[3]{C_1}}{\sqrt[3]{y}} = \frac{C_2}{\sqrt[3]{y}} = C_2 y^{-1/3}$$

Resolviendo la ecuación diferencial obtenemos: $y = \left(C_2 x + C_3\right)^{3/4}$

Usando las condiciones de frontera nos queda $C_3 = 0$.

$$r = \left(C_2 l + C_3\right)^{3/4};\ C_2 = \frac{r^{4/3}}{l}$$

luego:

$$y = \left(\frac{r^{4/3}}{l} x\right)^{3/4} = \frac{r}{l^{3/4}} x^{3/4}$$

d) F *sólo depende de* x *y de* y'

Ello quiere decir que F =F(x,y´)

La ecuación de Euler es en este caso

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

y ello supone que $F_{y'} = C$ (Constante)

Ejercicio 1.

$$\max J(y) = \int_0^1 \left(x^2 - \left(y'\right)^2\right) dx$$

con $x(0) = 1$, $x(1) = 2$

Solución:

Como $F = x^2 - (y')^2$, la ecuación de Euler es $F_{y'} = -2y' = C$; $y' = C/-2 = C_1$; al integrar nos queda: $y(x) = C_1 x + C_2$ que es el extremal. Si tenemos en cuenta las condiciones de frontera inicial y final, obtenemos $C_2 = 1$ y $C_1 = 1$. La única función, por lo tanto, en la que puede alcanzarse el máximo es $y(x) = x + 1$, con $0 \leq x \leq 1$.

Ejercicio 2. Entre las curvas que unen los puntos $A(1, 3)$ y $B(2, 5)$, halla la curva en la que puede alcanzar su extremo la funcional

$$J\left[y(x)\right] = \int_1^2 y'\left(1 + x^2 y'\right) dx$$

Solución:

$$F\left(x, y, y'\right) = y'\left(1 + x^2 y'\right);\ F_y = 0;$$

$$F_y = 0;\ F_{y'} = 1 + x^2 y' + y' x^2 = 1 + 2y' x^2$$

Los extremales son, por lo tanto, una familia de hipérbolas. Si tenemos en cuenta las condiciones de frontera tenemos: $3 = C_1 + C^*$, $5 = C_1/2 + C^* \Rightarrow$ $\Rightarrow$ $C_1 = -4$; $C^* = 7$. Luego nuestra extremal será:

$$y = -4/x + 7$$

Problema de la braquistócrona

Cuando con anterioridad hemos hablado del problema de la braquistócrona hemos llegado a la conclusión de que:

$$T(y(x)) = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + \left[y'(x)\right]^2}{2gx}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \sqrt{\frac{1 + \left[y'(x)\right]^2}{x}} dx$$

Podemos observar que $T(y)$ no depende de y, sino sólo de x y de $y'(x)$. Si utilizamos la condición de Euler en la expresión:

$$\int_0^a \sqrt{\frac{1 + \left[y'(x)\right]^2}{x}} dx$$

donde:

$$F(x, y(x), y'(x)) = \sqrt{\frac{1 + \left[y'(x)\right]^2}{x}}$$

sería $F_y = 0$, con lo que tendríamos:

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

que equivale a decir que $F_{y'}$ = Constante.

Pero,

$$F_{y'} = \frac{1}{2\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}} \frac{2y'(x)}{\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{y'(x)}{\sqrt{x}\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}} = C$$

Por comodidad, hagamos $C_1 = 1/C$. Nos queda:

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{x}\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}} = \frac{1}{C_1}$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$\frac{\left[y'(x)\right]^2}{1 + \left[y'(x)\right]^2} = \frac{x}{C_1^2}$$

Haciendo operaciones, obtenemos:

$$C_1^2\left[y'(x)\right]^2 = x + x\left[y'(x)\right]^2;\ \left(C_1^2 - x\right)\left[y'(x)\right]^2 = .$$

$$= x;\ \left[y'(x)\right]^2 = \frac{x}{C_1^2 - x}$$

$$\boxed{y'(x) = \sqrt{\frac{x}{C_1^2 - x}}}$$

Se cumple que $y'(0) = 0$.

Para facilitar el trabajo, introduzcamos una nueva variable independiente θ, de la siguiente forma:

$$x(\theta) = \frac{C_1^2}{2}(1 - \cos\theta) = C_1^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$\theta = 0$ cuando $x = 0$ y si $\theta < \pi$, θ aumenta con x.

$$C_1^2 - x(\theta) = C_1^2\left(1 - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = C_1^2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) =$$

$$= \frac{C_1^2}{2}(1 + \cos\theta)$$

Si utilizamos la regla de la cadena, obtenemos que:

$$\frac{dy}{d\theta} = y'(x)x'(\theta) = y'(x)\frac{C_1^2}{2}\sin\theta$$

Teniendo en cuenta la expresión recuadrada de más arriba, llegamos a:

$$\frac{dy}{d\theta} = \sqrt{\frac{x}{C_1^2 - x}}\,\frac{C_1^2}{2}\sin\theta =$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{C_1^2}{2}(1-\cos\theta)}{C_1^2 - \frac{C_1^2}{2}(1-\cos\theta)}}\,\frac{C_1^2}{2}\sin\theta =$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{C_1^2}{2}(1-\cos\theta)}{\frac{C_1^2}{2}(1+\cos\theta)}}\,\frac{C_1^2}{2}\sin\theta = (1-\cos\theta)\frac{C_1^2}{2}$$

Integrando, tenemos que:

$$y(\theta) = \frac{C_1^2}{2}(\theta - \sin\theta) + C_2$$

Como $y(0)$ ha de ser igual a cero, nos queda $C_2 = 0$

Uniendo las dos expresiones tenemos:

$$x(\theta) = \frac{C_1^2}{2}(1-\cos\theta) \qquad y(\theta) = \frac{C_1^2}{2}(\theta - \sin\theta)$$

Si llamamos R a $C_1^2/2$, obtenemos:

$$x(\theta) = R(1 - \cos\theta)$$
$$y(\theta) = R(\theta - \sin\theta)$$

siendo $0 \leq \theta \leq \theta_1$. R y θ_1 se obtienen teniendo en cuenta que $x(\theta_1) = a$ e $y(\theta_1) = b$.

La curva descrita por estas ecuaciones es la cicloide que pasa por (0, 0). La cicloide se obtiene a partir del recorrido de un punto de la circunferencia de radio R que rueda a lo largo del eje Y, por debajo.

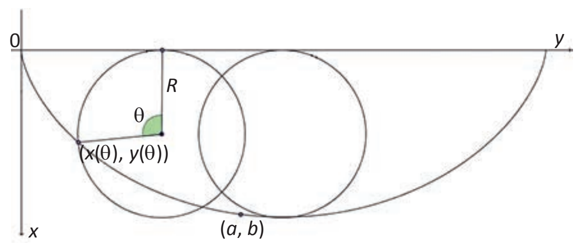

Figura 9

Consideremos este otro ejemplo en el que trabajamos con la funcional:

$$T\left[y(x)\right] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + \left[y'(x)\right]^2}}{x}dx$$

donde T hace referencia al tiempo empleado en desplazarse por la curva $y = y(x)$ desde un punto x_0 hasta un punto x_1, a una velocidad $v = x$.

Ya que $ds/dt = x$, entonces $dt = ds/x$. Estamos en un caso similar al de la braquistócrona, en el que $T(y)$ no depende de y, sino sólo de x y de $y'(x)$. Sería, por lo tanto, $F_y = 0$ y de nuevo tendríamos:

$$\frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

que equivale a decir que:

$$F_{y'} = \frac{2y'}{2x\sqrt{1 + (y')^2}} = \text{Constante} = C$$

Si para integrar esta expresión hacemos un cambio de variable de la forma $y' = \tan\theta$, entonces,

$$x=\frac{1}{C}\frac{y'}{\sqrt{1+\left(y'\right)^2}}=\frac{1}{C}\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\left(\tan\theta\right)^2}}=$$

$$=\frac{1}{C}\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{1}{\cos\theta}}=\frac{1}{C}\sin\theta$$

Si hacemos $1/C = C_1$, queda $x = C_1\sin\theta$. Como $y' = dy/dx = \tan\theta$, resulta que $dy = \tan\theta\, dx = \tan\theta\, C_1\cos\theta\, d\theta = C_1\sin\theta\, d\theta$. Si integramos, nos queda $y = -C_1\cos\theta + C_2$. Es decir:

$$x = C_1\sin\theta,\ y = -C_1\cos\theta + C_2;$$
$$y - C_2 = -C_1\cos\theta;\ x^2 = C_1^{\,2}\sin^2\theta;$$
$$(y - C_2)^2 = -C_1^{\,2}\cos^2\theta;$$
$$x^2 + (y - C_2)^2 = C_1^{\,2}(\sin^2\theta + \cos^2\theta);$$
$$x^2 + (y - C_2)^2 = C_1^{\,2}$$

Esta ecuación representa una familia de circunferencias con centros en el eje de ordenadas, lo que nos viene a mostrar que Galileo no andaba tan equivocado en sus intuiciones.

Si comenzamos en (0, 0),

$$x=\frac{1}{C}\sin\theta\Rightarrow\theta=0;$$

$$y=-\frac{1}{C}\cos\theta+C_2\Rightarrow C_2=-\frac{1}{C}\cos\theta$$

Como $\theta = 0$, nos queda que $C_2 = -1/C$.

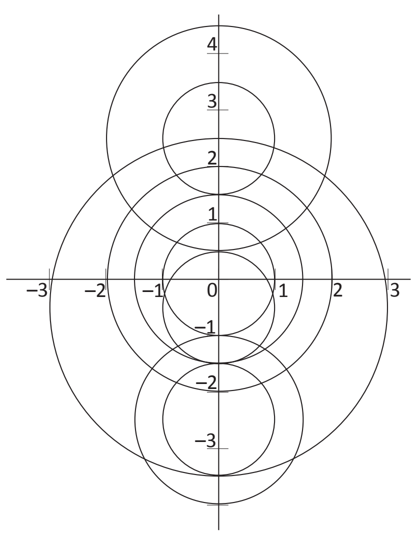

Figura 10

Problemas isoperimétricos

En esta sección se ampliarán un poco más los contenidos de cálculo variacional desarrollados, con la excusa de dar solución a los llamados problemas isoperimétricos. Aparece el problema ya trabajado de optimizar funcionales sujetas a condiciones de frontera, pero también sujetas a otro tipo de condiciones que amplían notablemente el número de problemas reales con los que se puede trabajar. Se introducen los contenidos imprescindibles y una serie de ejemplos y ejercicios prácticos muy conocidos y que no requieren un gran aparato matemático para ser resueltos. Se hace necesario, como en los casos anteriores, resolver ecuaciones diferenciales elementales, con las que se puede trabajar introduciendo las nociones más básicas y que en la mayoría de los casos los estudiantes ya conocerán por estar trabajando con ellas en la materia correspondiente.

Podríamos decir que los problemas isoperimétricos son problemas variacionales con ligaduras o condiciones. Ya en la antigua Grecia se trabajaba con este tipo de problemas. Ejemplos típicos de ellos son los problemas como el de la princesa fenicia Dido, fundadora de Cartago. Este problema se relata en *La Eneida*, de Virgilio. Cuando huyendo de Tiro, la princesa llegó al norte de África y quiso comprar un terreno para instalarse en él, el propietario de la tierra le dijo «Te concederé tanto terreno como puedas encerrar con la piel de este buey». Se cuenta que la princesa cortó la piel a tiras y las unió formando un recinto cerrado que después extendió hasta ocupar la mayor área posible. ¿Qué figura crees que formó con dicha piel?

Podríamos denominar problemas isoperimétricos a aquellos en los que se pretende determinar la figura geométrica de área máxima y perímetro dado.

Con un poco más de generalidad, un problema isoperimétrico se enuncia de la siguiente forma:

Sean F y G dos funciones continuas con derivadas parciales primera y segunda continuas en $[x_0, x_1]$. Entre todas las curvas $y = y(x)$ continuas y con derivada primera continua definidas en $[x_0, x_1]$, a lo largo de las cuales la funcional:

$$K\left[y(x)\right]=\int_{x_0}^{x_1} G\left(x,y,y'\right)dx$$

tiene un valor fijo l, se trata de hallar la curva en la que la funcional:

$$J\left[y(x)\right]=\int_{x_0}^{x_1} F\left(x,y,y'\right)dx$$

alcanza su valor extremo.

Para resolver el problema nos vamos a apoyar en el siguiente teorema.

Teorema de Euler. Si la curva $y = y(x)$ nos da el extremo de la funcional:

$$J\left[y(x)\right]=\int_{x_0}^{x_1} F\left(x,y,y'\right)dx$$

con las condiciones $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$

$$K\left[y(x)\right]=\int_{x_0}^{x_1} G\left(x,y,y'\right)dx=l$$

Y si $y = y(x)$ no es extremal de la funcional K existe una constante λ tal que la curva $y = y(x)$ es extremal de la funcional:

$$L\left[y(x)\right]=\int_{x_0}^{x_1}\left[F\left(x,y,y'\right)+\lambda G\left(x,y,y'\right)\right]dx.$$

Utilizando este teorema intentemos resolver el siguiente ejemplo:

Halla la curva $y = y(x)$ de longitud l, de manera que el área del trapecio curvilíneo $x_0, y(x_0), y(x_1), x_1$ sea máxima.

Nos interesa el extremo de la funcional $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$:

$$S=\int_{x_0}^{x_1} y\,dx;\ y\left(x_0\right)=y_0,\ y\left(x_1\right)=y_1$$

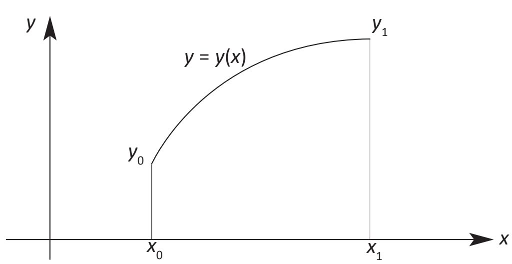

Figura 11

con la condición isoperimétrica:

$$\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx=l$$

Solución:

$$F\left(x,y,y'\right)=y;\ G=\sqrt{1+y'^2}$$

Formamos la funcional auxiliar:

$$L=\int_{x_0}^{x_1}\left[y+\lambda\sqrt{1+y'^2}\right]dx$$

La nueva función:

$$F^*=y+\lambda\sqrt{1+y'^2}$$

no contiene a x, luego tomamos la condición $F^* - y'F^*_{y'} = C_1$;

$$y+\lambda\sqrt{1+y'^2}-y'\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1$$

que simplificada queda:

$$y-C_1=\frac{-\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}$$

Si, para resolver la ecuación diferencial, introducimos un parámetro t, mediante la expresión $y' = \tan t$, nos queda:

$$y-C_1=\frac{-\lambda}{\sqrt{1+\tan^2 t}};\ y-C_1=-\lambda\cos t$$

Como:

$$\frac{dy}{dx}=\tan t;\ dx=\frac{dy}{\tan t}=\frac{\lambda\sin t dt}{\tan t}=$$
$$=\lambda\cos t dt\Rightarrow x=\lambda\sin t$$

Las ecuaciones paramétricas de las extremales son:

$$x=\lambda\sin t+C_2$$
$$y=-\lambda\cos t+C_1$$

Si se excluye t, nos queda:

$$\left(x-C_2\right)^2+\left(y-C_1\right)^2=\lambda^2$$

que es una familia de circunferencias de centro (C_2, C_1). Si aplicamos las condiciones de frontera e isoperimétrica, obtendremos C_1, C_2 y λ.

La catenaria

Halla la forma de una cuerda flexible, inelástica y homogénea de longitud l que está colgada de dos puntos A y B.

Solución:

El centro de gravedad, en la posición de equilibrio debe ocupar la posición más baja, el problema es, por lo tanto, el de hallar el mínimo de la energía potencial.

Como $Ep = mgh$, si por cada unidad de longitud se tiene una masa ρ, la masa de toda la cuerda será:

$$m = \rho l = \rho\sqrt{1+y'^2}$$

Por lo tanto:

$$Ep = \rho\sqrt{1+y'^2}\,g\,y$$

Prescindiendo de las constantes ρ y g, se trata de minimizar:

$$Ep = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

sujeto a:

$$l = \sqrt{1+y'^2};\; y(x_0) = y_0;\; y(x_1) = y_1$$

Formamos la funcional auxiliar:

$$Ep^* = \int_{x_0}^{x_1}\left[y\sqrt{1+y'^2} + \lambda\sqrt{1+y'^2}\right]dx$$

La ecuación de Euler $F - y'F_{y'}$ quedaría:

$$(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2} - y'\left[\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right] = C_1$$

que simplificada se reduce a:

$$y + \lambda = C_1\sqrt{1+y'^2}$$

Si hacemos, como en el problema de la superficie mínima de rotación, $y' = \sinh t$, nos queda:

$$y + \lambda = C_1\cosh t \Rightarrow dy = C_1\sinh t\,dt$$

Como:

$$\frac{dy}{dx} = \sinh t;\; \frac{dy}{\sinh t} = dx;$$

$$\frac{C_1\sinh t\,dt}{\sinh t} = dx \Rightarrow x = C_1 t + C_2$$

Si se elimina t, obtenemos:

$$y + \lambda = C_1\cosh\frac{x - C_2}{C_1}$$

que es una familia de catenarias.

Principio de reciprocidad en el problema isoperimétrico

Las extremales de la funcional:

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

con la condición complementaria:

$$K[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')\,dx = \text{constante}$$

coinciden con las extremales de la funcional $K[y(x)]$ con la condición $J[y(x)]=$ constante.

Esto nos lleva, por ejemplo, a decir que si la circunferencia es la curva cerrada de longitud mínima que encierra un área máxima, también es la circunferencia la curva cerrada de área fija S de longitud mínima.

Ejercicio 1. Demostrad que entre todos los triángulos de base y perímetro fijos el de área máxima es el triángulo isósceles. Demostrad también que si son fijas el área y la base, el triángulo isósceles es el de perímetro mínimo.

Solución:

Este ejercicio se puede resolver mediante una pequeña simulación con GeoGebra:

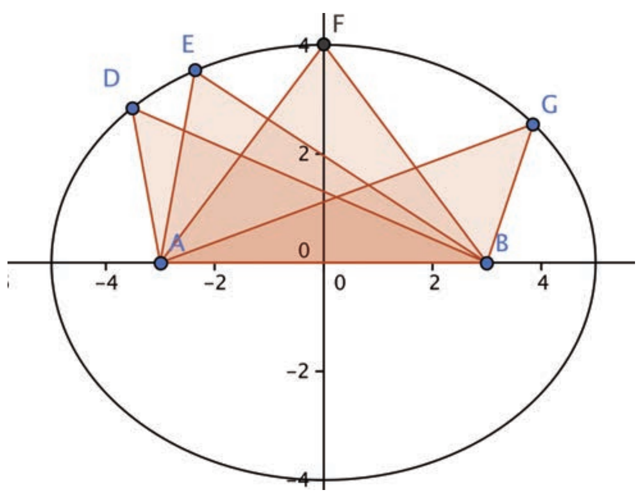

Figura 12

Consideremos una elipse y situemos dentro de ella triángulos donde dos de los vértices se situarán en los focos. El lado que une los dos focos constituirá la base de los triángulos. El otro vértice se moverá a lo largo de la elipse. Teniendo en cuenta que la suma de distancias a los focos desde cualquier punto de la elipse es constante y que todos los triángulos tienen por base la distancia entre los focos, todos los triángulos que se formarán tendrán el mismo perímetro.

En esta simulación, se construye una elipse cualquiera y sobre ella triángulos de la forma explicada más arriba. Es lógico suponer que la mayor área se obtendrá cuando *D* coincida con cualquiera de los vértices del eje menor, puesto que en ese caso tendremos la mayor altura posible. Ello se puede observar sobre la figura. El triángulo de área máxima es un triángulo isósceles.

Para resolver la segunda cuestión podemos utilizar el principio de reciprocidad. Si el área y la base son fijas, el de perímetro mínimo será el triángulo isósceles.

Ejercicio 2. Halla las extremales de:

$$J\left[y(x)\right]=\int_0^{\pi} y'^2\,dx$$

con las condiciones:

$$\int_0^{\pi} y^2\,dx=1;\ y(0)=y(\pi)=0$$

Solución:

Creamos la nueva funcional:

$$L\left[y(x)\right]=\int_0^{\pi}\left(y'^2+\lambda y^2\right)dx$$

Utilizamos la ecuación de Euler:

$$F_y=2\lambda y;\ F_{y'}=2_{y'};\ \frac{d}{dx}2y'=2y'';$$

$$2\lambda y-2y''=0;\ \lambda y-y''=0;\ y''-\lambda y=0$$

$$r^2-\lambda=0;\ r=\pm\sqrt{\lambda}$$

La solución general de la ecuación sería:

$$y(x)=C_1e^{\sqrt{\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

Si tenemos en cuenta las condiciones de frontera :

$$y(0)=0\Rightarrow C_1+C_2=0\Rightarrow C_1=-C_2$$

$$C_1e^{\sqrt{\lambda}\pi}+C_2e^{-\sqrt{\lambda}\pi}=0;\ C_1e^{\sqrt{\lambda}\pi}-C_1e^{-\sqrt{\lambda}\pi}=0$$

$$C_1e^{\sqrt{\lambda}\pi}-\frac{C_1}{e^{\sqrt{\lambda}\pi}}=0;\ C_1\left(e^{2\sqrt{\lambda}\pi}-1\right)=0$$

De aquí se deduce que o bien $C_1=0\Rightarrow$ $\Rightarrow C_2=0$, o bien:

$$e^{2\sqrt{\lambda}\pi}-1=0\Rightarrow e^{2\sqrt{\lambda}\pi}=1\Rightarrow\lambda=0$$

En ambos casos, tanto si $\lambda=0$, como si $C_1=C_2=0$, sería $y(x)=0$ y no se cumpliría la condición de ligadura:

$$\int_0^{\pi} y^2\,dx=1$$

De todo ello deducimos que λ debe ser negativo y las raíces se podrían poner como $r=\pm i\sqrt{\lambda}$. La solución de la ecuación sería:

$$y(x)=C_1\cos\sqrt{-\lambda}x+C_2\sin\sqrt{-\lambda}x$$

Si $x=0$, entonces $C_1=0$. Si $\pi=0$, entonces:

$$0=C_2\sin\sqrt{-\lambda}\pi\Rightarrow\sqrt{-\lambda}$$

ha de ser un número entero, luego $-\lambda=k^2$, $k=1,2,\ldots$

Teniendo en cuenta que:

$$\int_0^{\pi} y^2\,dx=1$$

nos queda:

$$\frac{C_2^2}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2kx)=\frac{C_2^2}{2}\left[x-\frac{\sin 2kx}{2k}\right]_0^{\pi}=$$

$$=\frac{C_2^2}{2}\pi=1\Rightarrow C_2=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

La solución queda:

$$y(x)=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kx$$

Ejercicio 3. Este ejercicio es un ejemplo de problema isoperimétrico que reviste un poco más de dificultad, pero que se considera muy interesante porque es una muestra de lo mucho que se puede hacer manejando unos pocos conceptos y realizando algunos cálculos poco complejos. El interés también radica en que es una aplicación a un problema real.

Un cohete espacial de masa *m*, partiendo del reposo, ha de ser acelerado verticalmente hacia arriba desde la superficie de la tierra hasta una altura *h* en un tiempo *T*, mediante la potencia de su motor $(m \cdot u)$. Si suponemos que *m* y *g* permanecen constantes durante el vuelo, pretendemos controlar la potencia para minimizar el consumo de combustible, que viene dado por:

$$F\left[u(t)\right]=\int_0^T u^2(t)\,dt$$

¿Durante cuánto tiempo deberíamos acelerar el cohete y cuál será el consumo mínimo?

Solución:

Teniendo en cuenta la segunda ley del movimiento de Newton, en el instante *t*, el cohete a una altura $y = y(x)$ debería experimentar una aceleración neta de $y'' = u - g$. Además, hemos de imponer las condiciones $y(0) = y'(0) = 0$; $y(T) = h$.

Ya que $y'(0)=0$, entonces:

$$y(T)=\int_0^T y'(t)\,dt$$

Si integramos por partes, obtenemos:

$$y(T)=\left[y'(t)\cdot t\right]_0^T-\int_0^T t\cdot y''(t)\,dt=$$

$$=T\cdot y'(T)-\int_0^T t\cdot y''(t)\,dt=$$

$$=\int_0^T T\cdot y''(t)\,dt-\int_0^T t\cdot y''(t)\,dt=$$

$$=\int_0^T (T-t)\,y''(t)\,dt$$

Como $y''(t) = u(t) - g$. , tenemos:

$$y(T)=\int_0^T (T-t)\left(u(t)-g\right)dt=$$

$$=\int_0^T (T-t)u(t)\,dt-\left[Tgt\right]_0^T+\left[g\frac{t^2}{2}\right]_0^T=$$

$$=\int_0^T (T-t)u(t)\,dt-\frac{1}{2}gT^2=h$$

Con lo cual:

$$\int_0^T (T-t)u(t)\,dt=\frac{1}{2}gT^2+h=C$$

condición de ligadura.

Hemos de optimizar las extremales de:

$$\int_0^T u^2(t)\,dt$$

sujeto a:

$$\int_0^T (T-t)u(t)\,dt=\frac{1}{2}gT^2+h=C$$

Creamos la funcional:

$$L\left[u(t)\right]=\int_0^T\left[u^2+\lambda(T-t)u\right]dt$$

donde $F^* = u^2 + \lambda(T-t)u$; $F^*_u = 2u + \lambda(T-t)$; $F^*_{u'} = 0$. Aplicando la ecuación de Euler, nos queda:

$$F_u^*=2u+\lambda(T-t)=0\Rightarrow u=\frac{(t-T)\lambda}{2}$$

Para hallar el valor de λ tenemos en cuenta la condición de ligadura y obtenemos:

$$\int_0^T (T-t)(t-T)\frac{\lambda}{2}dt=\frac{-\lambda}{2}\int_0^T (t-T)^2\,dt=$$

$$=\frac{-\lambda}{2}\left[\frac{(t-T)^3}{3}\right]_0^T=\frac{-\lambda T^3}{6}=C\Rightarrow-\lambda=\frac{6C}{T^3}$$

luego la solución es:

$$u(t)=3\left(h+\frac{gT^2}{2}\right)\frac{T-t}{T^3}$$

Para hallar el tiempo para el que se consume el mínimo combustible utilizamos la expresión:

$$F(u)=\int_0^T u^2(t)\,dt=\frac{9C^2}{T^6}\int_0^T (T-t)^2\,dt=$$

$$=\frac{3C^2}{T^3}=3\left(\frac{h^2}{T^3}+\frac{gh}{T}+\frac{g^2T}{4}\right)$$

Derivando e igualando a cero obtenemos que el tiempo durante el que deberíamos acelerar el cohete para gastar el menor combustible posible es de $T=\sqrt{6h/g}$, siendo el gasto mínimo de combustible de:

$$F(u)=3\left(\frac{8hg+6g^3/h}{4\sqrt{6g/h}}\right)$$

Como se ha podido observar a través de este recorrido por aplicaciones prácticas, incluyendo pequeñas modificaciones en las condiciones de los problemas podemos saltar de una situación real a otra diferente resolviéndola con pocos cambios y utilizando sólo un par de condiciones. De esta forma, los estudiantes pueden ver la tremenda potencia de esta teoría.

Por ejemplo, hemos pasado de calcular el recorrido óptimo de un rayo de luz a calcular la curva a lo largo de la cual se llega de un punto a otro en el menor tiempo realizando muy pequeños cambios, o se ha establecido una importante relación entre la superficie mínima de rotación y la forma de una cuerda flexible de longitud fija colgada de dos puntos utilizando los mismos conceptos y variando apenas el procedimiento.

Simulación de dos problemas clásicos

Después de esta breve introducción teórica al cálculo variacional, en la que se ha intentado utilizar el conocimiento previo de los estudiantes y ejemplos prácticos con situaciones reales, vamos a trabajar con dos problemas clásicos como son el problema isoperimétrico y el problema de la braquistócrona.

Simulación del problema isoperimétrico

Empezaremos con el problema isoperimétrico en el caso particular de una familia de funciones elípticas. Lo haremos con el programa de Geometría dinámica, llamado GeoGebra. Representaremos gráficamente familias de elipses de longitud constante, de centro (0, 0) y ejes los de coordenadas:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Como se trata de que estudiantes que inician sus estudios universitarios en carreras de ciencias e ingeniería sean capaces de entender y resolver los problemas, para aproximar la longitud de la elipse utilizamos la expresión de Ramanujan:

$$l \cong \left[3(a+b)-\sqrt{(3a+b)(a+3b)}\right]$$

Tomando un valor fijo $p = 1/\pi$, despejamos b en función de p y de a. Según variamos los valores de a, se modifica b y vamos obteniendo las diferentes elipses. A la vez, se va representando gráficamente el área, con lo cual se podrá observar que el máximo de dicha función se alcanza cuando $a = b$, es decir, en el caso de la circunferencia. Estamos transformando un problema de cálculo de extremales a un problema de cálculo de máximos y mínimos mediante técnicas adquiridas en 2.° de bachillerato, pero ello permite manipular la idea de funcional que trabajamos mediante las áreas de una familia de elipses. A cada elipse se le asocia su área, y se trata de encontrar aquella elipse que dé el área máxima sujeta a una longitud fija.

Se pretende que los estudiantes despejen b de la expresión:

$$p \cong \pi\left[3(a+b)-\sqrt{(3a+b)(a+3b)}\right]$$

El valor de p, que es igual a la longitud de la elipse dividida entre π, permanecerá fijo. Modificarán a y ello hará que b también se vaya modificando (puesto que es función de a), de manera que el perímetro no se altere. A la vez se representarán las diversas elipses que se vayan obteniendo. Por otro lado, mediante la expresión $\pi * a * b$, calcularán y representarán gráficamente la función área, que aparece como una curva punteada en la figura. Así podrán comprobar que el punto en el que el área es máxima, se obtiene cuando $a = b$, es decir, cuando nuestra elipse es una circunferencia, con lo que llegarán a la conclusión de que el extremal es la circunferencia.

Simulación del problema de la braquistócrona

Se trata de que los estudiantes simulen con la ayuda de GeoGebra el movimiento de una partícula sobre una recta y sobre la cicloide, con el fin de que comprueben que

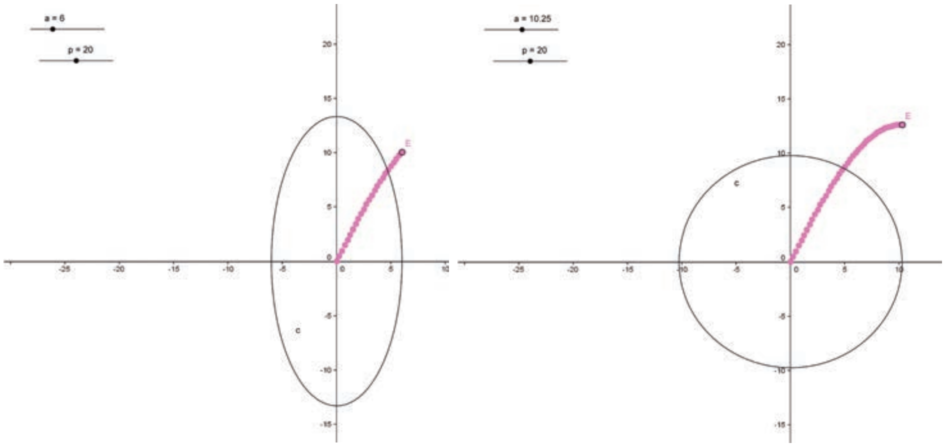

Figura 13

lo que han obtenido previamente a nivel teórico y utilizando fórmulas matemáticas se da realmente y se puede observar.

Se dibujará una cicloide y se escogerán dos puntos de ella (el segundo de ellos más bajo que el primero). Se trazará una recta que pase por ambos puntos. Sobre curva y recta se trazarán puntos que se irán moviendo según varíe el parámetro θ de la curva cicloide (por comodidad en la escritura reemplazaremos la letra θ por la letra t), que vendrá expresada en paramétricas. A la vez y utilizando las fórmulas apropiadas, ya deducidas a nivel teórico, se representarán gráficamente las curvas correspondientes a las velocidades. Así, la observación será doble. Por una parte, se podrá comprobar cómo la partícula que recorre la cicloide adelanta a la que se desliza por la recta antes de llegar al segundo punto. Y por otra, se comprobará cómo las ordenadas de los puntos que representan la velocidad de la partícula que recorre la cicloide se sitúan a partir de un determinado valor del parámetro θ por encima de los que representan la velocidad de la partícula que se mueve sobre la recta.

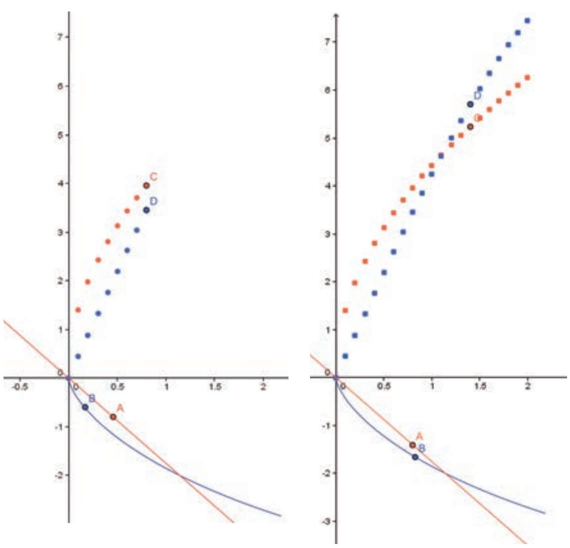

Figura 14

Referencias bibliográficas

CERDÁ, E. (2001): *Optimización dinámica,* Pearson Educación, Madrid.

ELSGOLTZ, L. (1969): *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*, MIR, Moscú.

KRASNOV, M. L.; MAKARENKO, G. y KISELIOV, A. (1992): *Cálculo Variacional*, MIR, Moscú.

TROUTMAN, J. L. (1995): *Variational Calculus and Optimal Control,* Springer, New York.

M.ª José Haro Delicado
IES Al-Basit (Albacete)
Escuela Superior de Ingeniería Informática UCLM
(campus de Albacete)
<mariajose.haro@uclm.es>

M.ª José Pérez Haro
M. S. Facultad de Físicas
Universidad Complutense de Madrid
<perez@mpip-mainz.mpg.d>

XVI JAEM

Jornadas
sobre el aprendizaje
y la enseñanza
de las matemáticas

2-5 julio

Matemáticas y creatividad: un mundo en construcción

Núcleos temáticos

1. Infantil y primaria: ahí empieza todo
2. Didáctica y formación del profesorado
3. Modelización y formalización
4. Resolución de problemas
5. Materiales y recursos en el aula de matemáticas
6. Conexiones y contextos
7 Comunicación y divulgación