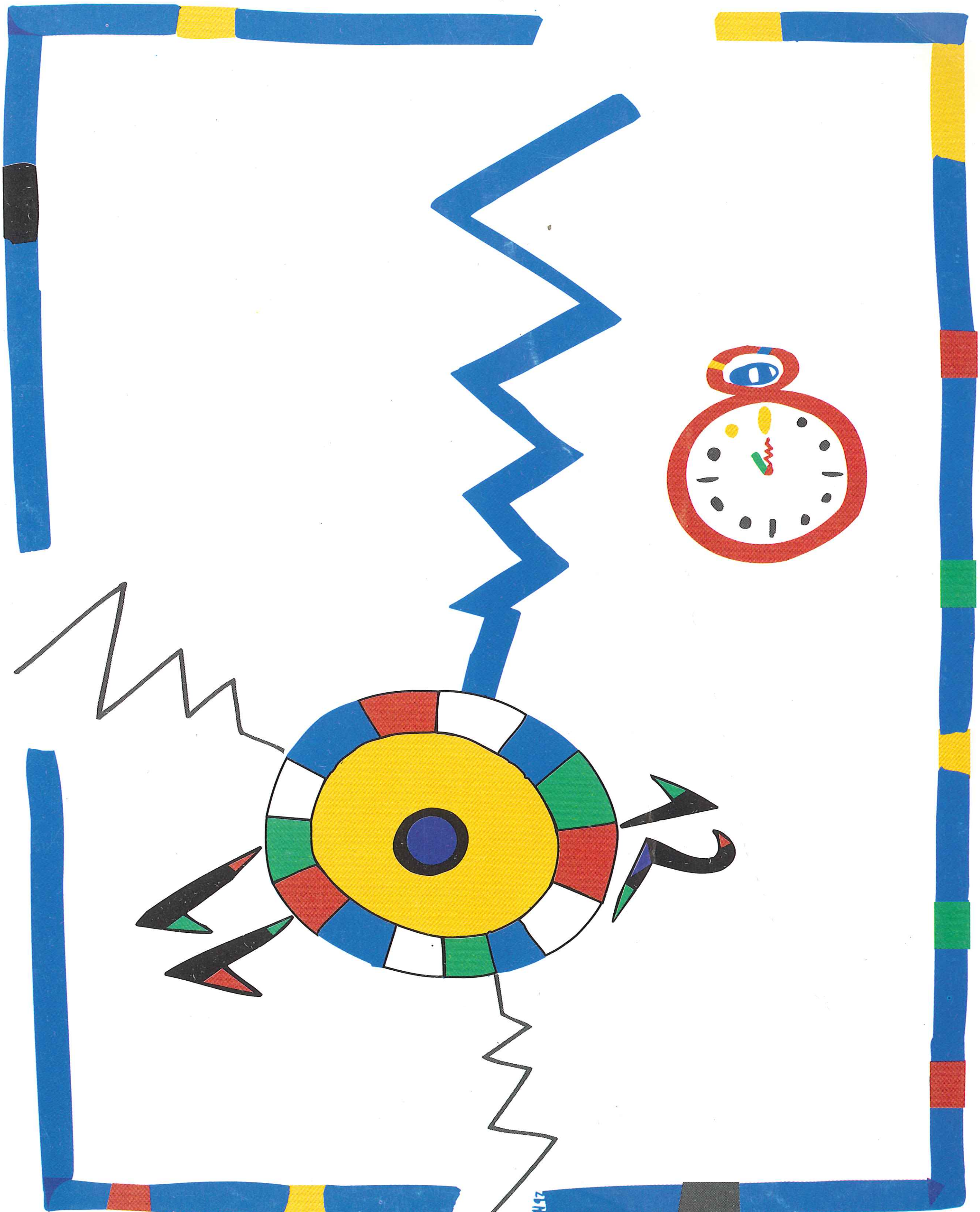
SUMA

Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Números 11 y 12 - 1992



DIRECTOR:
Sixto Romero Sánchez

SUBDIRECTOR :
José Antonio Prado Tendero

ADMINISTRADOR:
Manuel J. Hermosín Mojeda

CONSEJO DE REDACCIÓN:
Juan José Domínguez Alarcón
José Antonio Acevedo Díaz
José Ignacio Aguaded Gómez
Pedro Bravo Sánchez
Teresa Fernández Rodríguez

PORTADA:
Manuel J. Hermosín

CONSEJO EDITORIAL:
Juan Antonio García Cruz, S.C.P.M. "I. Newton"
Claudi Alsina Catalá, Representante en el "ICMI"
Mercedes Casals Colldecarrera, SCPM "Puig Adam"
Carmen da Veiga Fernández, Grupo "Azarquiel"
Francisco Javier Muriel Duran, Soc. Extremeña de Prof. Mat.
Vicens Font Moll, Grup "Zero"
Salvador Guerrero Hidalgo, SAEM "Thales"
Angel Marín Martínez, SNPM "Tornamira" MINE
Magda Morata Cubells, Grupo "Cero"
Florencio Villarroya Bullido, SAPM "P.S. Ciruelo"
Antonio Pérez Sanz, Soc. Madrileña Prof. Matemáticas
José A. Mora, Soc. Prof. de Matemáticas de Alicante.

EDITA:
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"
Presidente: Gonzalo Sánchez Vázquez
Apartado 1.160. 41080-Sevilla

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas "P. Sánchez Ciruelo"
Presidente: Rosa Pérez García
ICE Ciudad Universitaria. 50006-Zaragoza

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "Isaac Newton"
Presidente: Manuel Fernádez Reyes
Apartado de Correos 329. 38080-La Laguna (Tenerife)

Sociedad Castellonenca de Matemáticas
Presidente: Timoteo Briet Blanes
C/ Mayor, 89. 12001-Castellón

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas "Tornamira"
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea
Presidente: José Ramón Pascual Bonís
Dto. Matemáticas. E.U. del P. EGB. Plaza de S. José, s/n. 31001-Pamplona

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas
Presidente: Javier Brihuega
Apartado 14610. 28080-Madrid

Sociedad de Profesores de Matemáticas de Alicante
Presidente: Teresa Vázquez
Apartado 1009. 03080-Alicante

Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper"
Presidente: Ricardo Luengo
Apartado 536. 06080-Mérida

Depósito legal: Gr. 752 - 1988
I.S.S.N.: 1130 - 488X
Fotocomposición e Impresión:
Proyecto Sur de Ediciones. Armilla (Granada)

Suscripciones
Revista Suma Apdo. 1304. 21080 (Huelva)

Condiciones de suscripción
Particulares: 3.000 ptas. (tres números)
Centros: 3.500 ptas. (tres números)
Números sueltos: 1.200 ptas. (más gastos de envío)

ARTÍCULOS

RIO

IDEAS PARA LA CLASE

RECURSOS PARA EL AULA

INFORMACIÓN

RESEÑAS

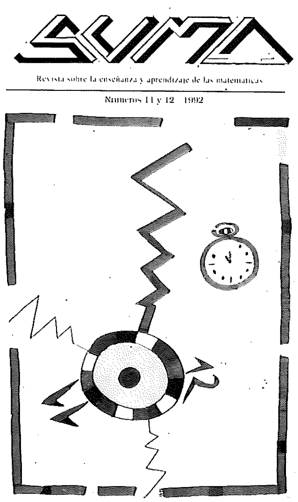
MISCELÁNEA

EDITORIAL

"Tempus fugit irreparabile"

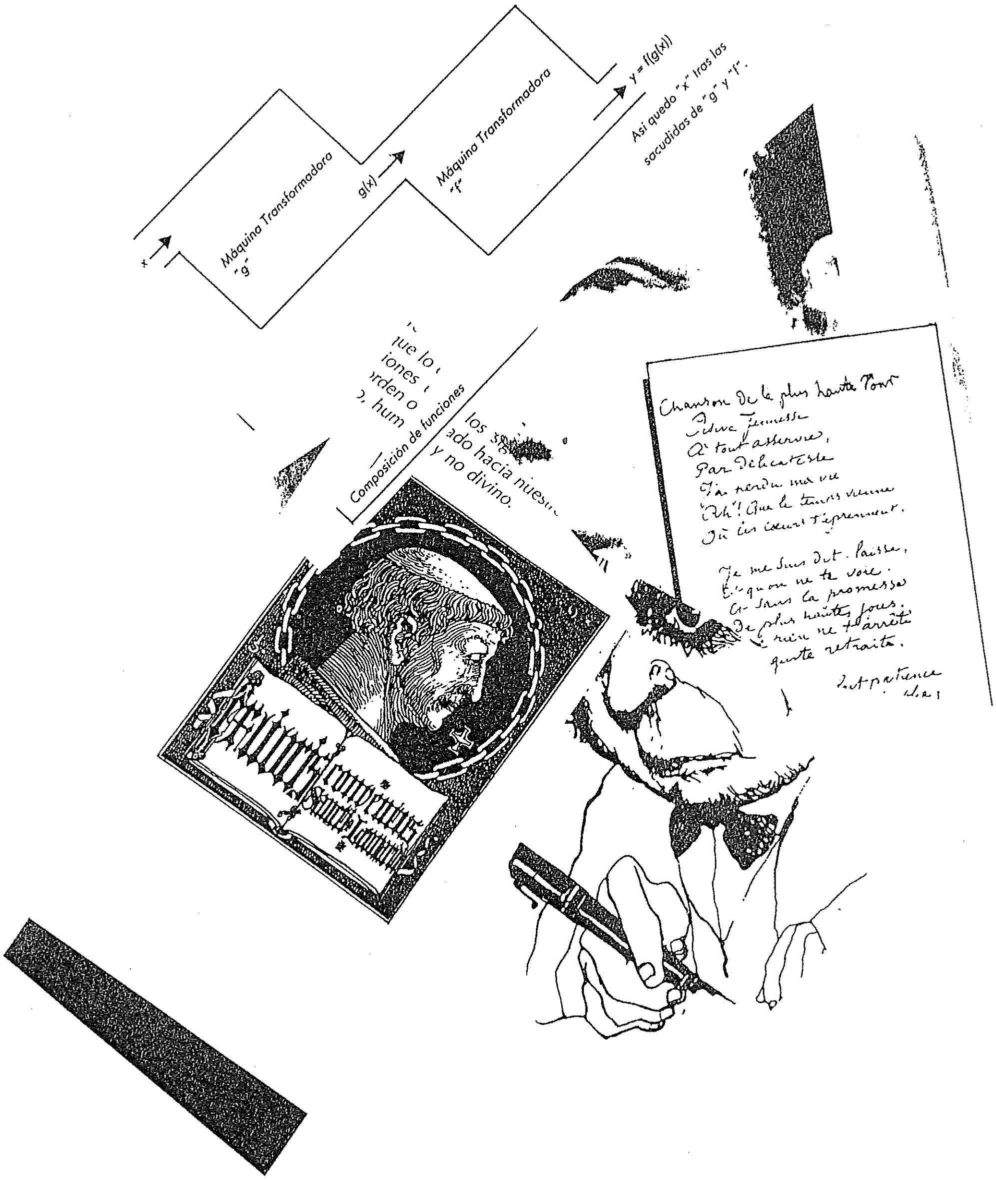
Cronos, inmutable, es un dios severo que no concede licencias ni bulas. Quizás esta introducción -con inevitable referencia al tiempo, que pretendemos ganar-, sea un poco extraña, suene a escatológica o frívola tal vez, pero es cierto que desde esta redacción estamos haciendo lo imposible por cumplir con los objetivos marcados al inicio de la edición de la revista y parece que por fin estamos «al día». Estamos al día porque con la aparición conjunta de este "especial" de nuestra revista conseguimos cumplir el compromiso de tres números por año y, definitivamente, no ir desfasados. El año próximo iniciaremos una nueva época en la que esperemos brillará la regularidad en nuestra publicación.

Se hacía mención en el número pasado a varios acontecimientos, la Reforma que nos viene, el ICME-7 que nos fue y otros encuentros importantes de la vida matemática, sin olvidar, por supuesto, la responsabilidad -que se inicia con los preparativos-, del ICME-8 en Andalucía, en Sevilla. En este número, heterogéneo, se encuentran artículos con la Reforma presente, con ideas para fabricar materiales, para aprovechar los recursos naturales que nos brinda la matemática popular, Geometría, logaritmos, uso de tecnología punta en clase y un primer flash del acontecimiento matemático del año: el ICME canadiense.



Sirva este número también para despedir este año, tan próximo el 93, que tanto ha significado para el mundo, en el que tantos encuentros ha habido, para el que todo estaba programado, en el que no ha quedado ni un segundo sin festejar. La aventura de SUMA no acaba aquí, inicia un nuevo año con un número tal vez chocante, el 13, pero que seguro será positivo para nuestros propósitos ¿no han sentido nunca fascinación por los números primos?

"carpe diem"


x
Máquina Transformadora "g"
g(x)
Máquina Transformadora "f"
y = f(g(x))
Así quedo "x" tras las sacudidas de "g" y "f".
Composición de funciones
y no divino.

ARTÍCULOS

Mirando la educación matemática

Josep María Fortuny

En épocas de cambios sociales y avances tecnológicos el sentarse a mirar placenteramente por una ventana a la educación matemática (o si se quiere reflexionar conc,...) parece que está fuera de lugar. Actuar, renovar, innovar,... rápidamente es lo más apropiado según las intenciones de las administraciones educativas. Pero no sólo con intenciones y elucubraciones teóricas se cambian las cosas.

¡Hay que ver, practicar, aplicar, revivir,... !

Situados en esta perspectiva estamos de acuerdo con la ley de Brooker: «un gramo de aplicación equivale a una tonelada de abstracción». Por eso en este artículo sobre las bases epistemológicas de la educación matemática analizalizaremos y debatiremos algunas bases prácticas o escenarios .

Escenario 1: Enculturación en la práctica

En las sociedades desarrolladas económicamente, el consumo es uno de los rasgos culturales que las definen, a parte de otros valores e intereses como la preocupación por el medio ambiente, las relaciones sociales, éticas, estéticas,... La educación matemática como sistema que debe colaborar con la integración, adaptación y transformación del individuo en la sociedad, tiene una función que cumplir: enculturar a partir de la propia práctica social de un individuo. Nace así una primera idea de lo que llamamos: «la matemática del consumidor» (Alsina;Fortuny, 1992). Se trata de ver un aspecto de la educación matemática como etnomatemáticas, es decir, la matemática que está dentro del consumo, que hay que explicitar para entender mejor un aspecto cultural, por ejemplo, la vivienda como tema de educación consumerista.

Si nos centramos en la didáctica de la matemática, entendiéndola esquemáticamente como la parte de la educación matemática que se focaliza en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en un sistema escolar, la noción de enculturación en la práctica puede ser considerada, por una parte como una «transposición didáctica práctica» de la cultura de la sociedad local al currículum escolar, definiendo uno de los objetivos prioritarios (Atkins et al.,1991), y por otra parte puede ser considerada como un punto de partida, que activa un proceso de aprendizaje de las matemáticas cognitivo y significativo (Noss, 1988), (Lave; Wenger, 1989). Si nos salimos un poco del contexto estrictamente escolar de educación matemática, encontramos en este escenario de la enculturación en la práctica, el tema de la popularización de las matemáticas como otro aspecto clave de construcción social y cultural (SUMA, 1989).

Escenario 2: Facilitación de la Educación Matemática

Dentro del sistema educativo la función de facilitación de la educación matemática es responsabilidad profesional de los profesores. En este sentido el conocimiento pedagógico de los profesores puede considerarse como una base epistemológica de la didáctica de las matemáticas. Desde un punto de vista estratégico este conocimiento pedagógico puede centrarse en el diseño, especificación, conceptualización y control de entornos de aprendizaje.

Entendemos por entornos de aprendizaje una estructura o espacio educativo cuyos objetos son situaciones para trabajar matemáticamente, tanto profesores como alumnos y cuyas transformaciones son interacciones que operan sobre las situaciones, activando distintas tipologías de actividades de aprendizaje, usando conocimientos pedagógicos a medida, implementando orientaciones tutoriales y desarrollando procesos creativos.

En un sentido metafórico los entornos de aprendizaje pueden considerarse como medio para reproducir en la clase de matemáticas una comunidad intelectual y profesional de trabajadores de matemáticas. El profesor como miembro experto de esta comunidad, orienta el trabajo de los alumnos de cara a dar sentido y a usar las matemáticas como un instrumento de cultura de la comunidad. (Greeno, 1991).

Un modo práctico de entorno de aprendizaje lo constituye la unidad didáctica. «En un panal de miel» (Alsina; Fortuny; Giménez, 1992, UD 76).

En los entornos de aprendizaje la interacción social constituye un medio natural y pertinente para facilitar el aprendizaje de las matemáticas, favoreciendo en especial los procesos de argumentación, validación y demostración.

El trabajo intelectual de los alumnos en el aprendizaje de los contenidos (incluyendo valores y normas) de las matemáticas puede y debe ser activado, estimulado, ayudado, potenciado,..., en una palabra, facilitado por el profesor de matemáticas.

Escenario 3: Comunicación interactiva

La educación matemática es un proceso social que tiene lugar en diferentes culturas, sociedades, sistemas educativos y en diferentes medios en interacción.

La construcción del conocimiento consiste en la progresiva construcción de representaciones mentales internas a través de multiples perspectivas en medios interactivos (Vergnaud, 1990).

El proceso de constitución interactivo ocurre cuando un alumno intenta evitar una creencia errónea («miscommunication») siendo influenciado por el trabajo con otros compañeros y también por la simultaneadad de los diferentes medios e interpretacions en que se presenta la actividad matemática (Jaworski, 1991) (Cobb; Yackel; Wood, 1992). Este proceso lo podemos ilustrar de modo práctico en la unidad didáctica «Convencer» (Alsina; Fortuny; Giménez, 1992. UD. 57).

Esta forma de acceder al conocimiento mediante una comunicación interactiva, supone por una parte, la consideración de que el aprendizaje de las matemáticas es una acomodación y reestructuración individual en un medio social, que se concreta en la clase de matemáticas. Esta acomodación supone un proceso cognitivo que se va desarrollando mediante la interacción de los múltiples elementos que conforman una situación didáctica. Y por otra parte, supone definir la función del profesor como un tutor que inicia, guía y gestiona la negociación y el concenso en la clase de los significados y prácticas matemáticas.

Escenario 4: Modelización cognitiva

Para analizar el desarrollo de la educación matemática necesitamos disponer de resultados de investigación en la correspondiente área del saber. Una de las líneas prioritarias de investigación es la relativa a identificar las maneras y los tipos en que se produce aprendizaje y razonamiento. Interesa disponer de construcciones de modelos procesales del conocimiento de los alumnos para poder planificar, actuar y reproducir las tareas docentes de manera eficaz. Se desea definir y categorizar modos de construir estructuras, descripciones, especificaciones de contenido, procedimientos, estrategias, rutinas y tácticas en el proceso de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas.

Los instrumentos de investigación correspondientes se basan en métodos exploratorios cualitativos, como son las secuencias cognitivas de ejemplos y contraejemplos (ver el dispositivo didáctico «Bitrians» en Alsina; Fortuny; Giménez, 1992) y (Goldberg; Hershkowitz, 1992), las redes semánticas (Cirera, 1991), árboles de decisión (Anderson, Boyle; Yost, 1985), etc.

En este escenario las técnicas de ingeniería del conocimiento sobre información-diagnosis de comportamientos cognitivos y representación del conocimiento, propios de la ciencia cognitiva, constituyen otra base epistemológica de la educación matemática.

Escenario 5: Control de funcionamiento

Para regular y tener transparencia en el funcionamiento de la educación matemática, debemos explicitar los mecanismos de control del sistema. Este control lo podemos aplicar a los diferentes ámbitos de la educación matemática. Por una parte, debemos tener medios para hacer transparente el complejo proceso de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas, de cara a regular y tratar adecuadamente los diferentes aspectos implicados, tanto los relativos a la construcción social de conocimiento como los individuales de acomodación y desarrollo. Desde esta perspectiva, un elemento clave de control, lo constituye el diseño del sistema de evaluación. En este ámbito distinguiremos para cada unidad de programación o crédito, por un lado, una evaluación formativa especificada por elementos de observación sistemática del trabajo de clase (elementos actitudinales, instructivos, conativos,...) y descripciones de la realización de un trabajo global, orientado por proyectos (diseño global y estratégico, contenido matemático, exactitud, claridad, comunicación, actitud matemática, autonomía y evaluación) y por otra parte, la propuesta de actividades de seguimiento, que tienen una función diagnóstica sobre conceptos y estructuras, operaciones y elementos instrumentales, estrategias de resolución de problemas, lenguajes y visualización y procesos de razonamiento. Estas informaciones se registran en guías y pautas de observación, corrección, criterios y parrillas de evaluación. La conjunción de estas informaciones permiten describir con bastante amplitud y precisión el comportamiento individual de cada alumno y el colectivo del grupo clase, lo cual permite la realización de un tratamiento de la diversidad en distintos niveles de itinerarios formativos. Estas descripciones y propuestas de tratamiento de la diversidad son registradas en el informe individual para cada crédito. El informe final de un ciclo educativo es la expresión de la evaluación sumativa que viene determinada por las respectivas evaluaciones formativas, actividades de control terminal y seguimiento (Alsina; Fortuny; Giménez, 1992).

Por otra parte si queremos generar informaciones precisas sobre la profesionalización de los profesores de cara a mejorar la educación matemática, podemos especificar distintos indicadores de calidad del profesor formado, a saber: 1. Grado estructuración de contenidos, 2. Es exacto y preciso, 3. Tiene agilidad en la utilización de técnicas visuales, 4. Procura dar sentido, 5. Utiliza diferentes medios de presentación, 6. Facilita instrumentos de exploración y expresión, 7. Organiza y rentabiliza discusiones, 8. Encamina argumentaciones y razonamientos, 9. Orienta y da fluidez a las tareas, 10. Conecta y cohesiona actividades, 11. Realiza «feedback» diferidos, 12. Implementa diseños creativos, 13. Construye relaciones sociales, 14. Mejora rendimientos, 15. Encultura los contenidos matemáticos, 16. Trata la diversidad, 17. Trabaja cooperativamente, 18. Demuestra «feeling» hacia la profesión, 20. Tiene espíritu de innovación, 21. Explica objetivos y organiza subobjetivos para un aprendizaje transparente, 22. Orienta la gestión de la clase, 23. Asiste a los estudiantes, 24. Flexibiliza y remedia. (Fortuny; Azcárate, 1992).

Escenario 6: Modelización profesional

Un escenario esencial desde donde podemos mirar a la educación matemática para analizar su desarrollo y producciones, es el de la modelización profesional de la formación del profesorado.

Aquí identificamos la ocupación profesional como la que hace uso de un conocimento práctico específico («expertise») de manera juiciosa para llevar a cabo un trabajo. Consideramos como atributos profesionales tanto características estructurales (sentido de colectividad o colegiación y servicio público) como características actitudinales (autoregulación, vocación y autonomía). Desde esta perspectiva de profesionalización, fundamentamos el modelo profesional mediante dos categorías:

- El conocimiento profesional para enseñar matemáticas.
- El marco de desarrollo de la organización colectiva o colegial.

En el conocimiento profesional de un profesor de matemáticas podemos distinguir a su vez, tres subcategorías:

1. El conocimiento de la naturaleza de las matemáticas y su correspondiente transposición didáctica.

2. El conocimiento pedagógico, incluyendo los aspectos de comunicación, interacción social y facilitación del aprendizaje.

3. El conocimiento gerencial o de toma de decisiones juiciosas, rutinas y heurísticas frente a las situaciones complejas que comporta la enseñanza de las matemáticas.

En cuanto a la categoría de marco profesional debemos considerar las aspiraciones culturales y colectivas del profesorado de matemáticas como medio para desarrollar su madurez profesional en relación a sus colegas, a su centro, a los colectivos profesionales y como miembro de la comunidad científica del área de didáctica de las matemáticas. (Fortuny; Azcárate, 1992).

Estas especificaciones, nos configuran una manera de analizar la educación matemática desde lo que se conoce como «epistemología de la práctica» (Schon, 1991), en la que el profesor, trabajando desde una perspectiva filosófica constructivista, se convierte en un practicante reflexivo, enfrentándose al dilema producido por la tensión constructivismo/didáctica (Jaworski, 1991). Una concreción práctica de este proceso de reflexión en acción pasa por las siguientes fases: situarse, sorprenderse, concienciarse, cuestionarse y afianzarse, como queda ilustrado en la actividad «expresando generalidad» (Fortuny; Azcárate, 1992).

Ingeniería del sistema de educación matemática

Desde esta rápida y esquemática visita a distintos escenarios arquitectónicos de la ciudad de la educación matemática, vamos a concentrarnos en la plaza del dominio del conocimiento del área de didáctica de las matemáticas. Actualmente hay diversos intentos de elaborar una teoría de la educación matemática: TME (Díaz Godino, 1991) o de construir un paradigma científico en el sentido de Kuhn (Fischbein, 1990). Hasta la fecha no se ha logrado un amplio consenso en la comunidad de educadores de matemáticas en estos intentos. Nosotros en vista a integrar los escenarios descritos anteriormente, nos inclinamos a considerar a la educación matemática como un sistema integrado de fenómenos, cuyo resultado no es la suma directa de cada una de las componentes o escenarios (enculturación, facilitación, comunicación, cognición, control, profesionalización), sino que constituyen una estructura sinergética (Fuller, 1975) resultante de fuerzas de tensión y comprensión. Así miramos la educación matemática como un proceso de creación de un artefacto o sistema complejo a la manera que lo haría un ingeniero, tomando ideas de distintas disciplinas, articulándolas de forma óptima, de cara a resolver un problema práctico: el trabajo de educador matemático, que nos permita revisar nuestras propias concepciones y actuaciones profesionales como profesores de matemáticas.

A modo de reflexión final recogemos las ideas de Ortega y Gasset citadas en (Bauersfeld, 1988):

«It is with the constitution of our world
that it can become a reality given under
a certain perspective only. Perspective is one
of the components of reality... A reality with an
identical face for every observer is nonsense....
Spinoza's species aeternitatis, the overall,
absolute standpoint, does not exist».

(José Ortega y Gaset, *«El tema de nuestro tiempo»*, 1923)

Bibliografía

* ALSINA, C.; FORTUNY, J. M. (1992). **La matemática del consumidor**. Institut Catala del Consum. Gran vía Carles lll, 105 lletra 1, 08028 Barcelona.

* ALSINA, C.; FORTUNY, J. M.; GIMÉNEZ,J (1992). **Bon dia mates 12-14**. Generalitat de Catalunya. Departament d' Ensenyament. Avda. Diagonal, 682, 2 planta, 08034 Barcelona.

* ANDERSON, J.R.; BOYLE, C.F.; YOST, G. (1985). **Thegeometrytutor**. IJCAI.

* ATKINS, M.J. et al. (1991). **L 'enseignement des sciences, des mathematiques et de la technologie dans les pays de 1' OCDE**. Document de reference CERI/SMT (91) 1. OCDE, 2 rue Andre-Pascal 75775 París cedex 16.

* BAUERSFELD, H. (1988). **Interaction, construction and knowledge: Alternative perspectives for mahematics education** in F Cooney & Grows (eds) Effective mahematics teaching Reston NCTM and Lawrence Erlbaum. pp 27-46.

* CIRERA, A. (1991). **Disseny d' instruments d' avaluació del concepte angle**. Dep. Didactica de la matematica i les CC.EE. UAB.

* COOB, P.; YACKEL, E.; WOOD, T. (1992). **A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education**. Journal for Research in Mathematics Education, vol. 23, nº 1, pp 2-33.

* DÍAZ GODINO, J. (1991). **Hacia una teoría de la didáctica de la matemática** en A. Gutiérrez (ed) Área de conocimiento Didáctica de la matemática, Madrid. Sintesis, pp 105-148.

* FISCHBEIN,E. (1990). **Introduction** in P. Nesher & Kilpatrick (eds) Mathematics and Cognition. Cambridge University Press. pp 1-12.

* FORTUNY, J.M.; AZCÁRATE, C. (1992). **Tendencias y experiencias innovadoras en la formación del profesorado de matemáticas 12-18**. OEI. Bravo Murillo, 38, 28015 Madrid.

FULLER, R. B. (1975) «Synergetics» New York, Macmillan.

GOLDBER, M.D. & HERSHKOWITZ (1992) «From concept to proof» in A. Coxford, J.M. Fortuny & A Gutiérrez (eds) Opering plan for SG 11.4 of ICME-7. Quebec.

* GREENO,J.G. (1991). **Number sense as situated knowing in a conceptual domain**. Journal for Research in Mathematics Education, vol. 22, nº, pp 170 -218.

* JAWORSKI,B. (1991). **Some implications of a constuctivist philosophy for the teacher of mathematics** in F. Furinghetti (ed) Proccedings of PME 15, Assisi, vol. 2 pp 213-221.

* LAVE, J. & WENGER (1989). **Situted learning** IRL, 2550 Hanover street Palo Alto CA 94304.

* NOSS, R. (1988). **The computer as a cultural influence in mathematics learning** in A.J. Bishop (ed) Mathematics education and culture. Dordrech, Kluwer. pp 251-269.

* SCHON, D. (1991). **Educating the reflective practioner** San Francisco. Jossey Bass.

* SUMA, Revista (1989). **Popularización**, nº4.

* VERGNAUD,G. (1990). **Epistemology and psychology** in P. Nesher & Kilpatrick (eds) Mathematics and Cognition. Cambridge University Press.

Josep María Fortuny
Departament de Didáctica
de la Matemática i de les
Ciències Experimentales
Universitat Autónoma de Barcelona

¿Cómo cambiar las concepciones erróneas de los estudiantes? Una experiencia en matemáticas

José del Río Sánchez

Uno de los objetivos más importantes de la enseñanza es conseguir cambiar las ideas previas erróneas de los estudiantes. En este artículo, se diseñan dos metodologías didácticas (resolución de problemas y descubrimiento dirigido) que fueron experimentadas durante veinte clases por dos grupos de alumnos de enseñanza secundaria mientras otro grupo utilizaba una metodología expositiva tradicional. Controladas las principales variables intervinientes, los resultados obtenidos indican que un método basado exclusivamente en la resolución de problemas produce un nivel de cambio conceptual y de rendimiento algo inferior al producido por un método más orientado aunque ambos métodos superan al método expositivo tradicional.

Introducción

El análisis de las concepciones erróneas de los estudiantes está adquiriendo, para investigadores y docentes, una importancia decisiva ya que esas ideas condicionan fuertemente el aprendizaje y, por lo tanto, cualquier desarrollo curricular, como han puesto de relieve numerosas investigaciones tanto teóricas como experimentales. En el campo de las matemáticas, existen muchos estudios que se han ocupado de detectar y analizar estas concepciones erróneas entre las cuales mostramos, a modo de ejemplo, las siguientes:

El numerador y el denominador son números independientes. Según Tatsuoka (1984), esta idea es la responsable de errores como

$$\frac{5}{4} + \frac{3}{2} = \frac{8}{6} \;;\quad \frac{3}{5} - \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$$

No se pueden sumar letras con números. Esta idea ha sido detectada por Booth (1982) en los primeros cursos de Educación Secundaria.

El signo igual siempre representa una acción que debe llevar a un resultado, no un equilibrio manipulable en dos sentidos (Grupo Azarquiel, 1987; en 1º de BUP).

Un concepto geométrico se identifica con su representación «canónica». Esta idea, según Hershkowitz (1987) y Medeci y otros (1986), hace que, por ejemplo, muchos estudiantes no reconozcan las figuras 1 como triángulos rectángulos o las figuras 2 como cuadriláteros, debido a que no están dibujados en la posición o en la forma estándar.

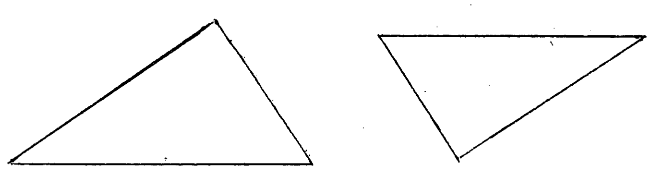


Figura 1

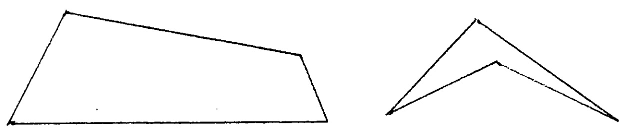


Figura 2

La definición de un objeto geométrico está formada por una lista de propiedades que lo describen, y estas propiedades no tienen por qué ser atributos críticos del concepto ni constituir un conjunto «mínimo» (Vienner y Zur, 1987).

Una gráfica es el dibujo de una situación.

Esta idea fue detectada por Bell y otros (1987) cuando planteaban, a estudiantes de los últimos cursos de primaria, problemas como el de la figura 3. Las respuestas más frecuentes fueron de este tipo: «Han caminado sobre una colina muy empinada y entonces, cuando llegaron a la cima, era muy recta. Entonces, cuando bajaron, fueron otra vez por una colina muy empinada».

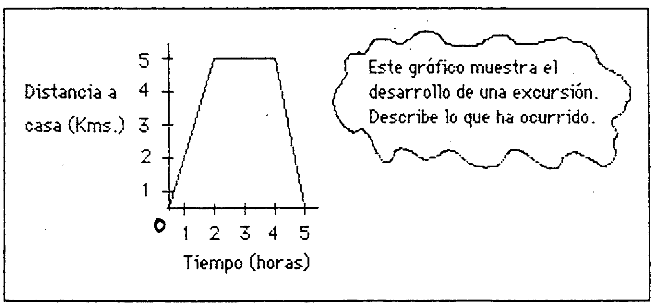


Figura 3

(Una revisión de las principales investigaciones realizadas sobre este tema puede verse en Del Río, 1991).

El origen de las concepciones erróneas es, en algunos casos, preinstruccional (medios de comunicación, familia, ambiente sociocultural, lenguaje coloquial, analogía con otras materias, etc.), pero, en otros casos, se generan durante el proceso instructivo, ya que, con la metodología expositiva habitual:

- no se dan oportunidades a los estudiantes para que pongan en juego lo que ya saben sobre el «tema» antes de su estudio;
- se presentan los conceptos y los procedimientos como algo perfectamente elaborado y rematado donde no es posible ninguna intervención personal;
- se valora más la memorización de los conceptos y, sobre todo de los procedimientos, que su comprensión, con lo cual los alumnos memorizan sin intentar entender;
- no se analizan sistemáticamente los errores más frecuentes de los estudiantes.

¿Es posible diseñar una metodología didáctica que sea capaz de cambiar las concepciones erróneas de los estudiantes?

Entre las pocas «respuestas» suficientemente contrastadas que existen, destaca la enseñanza por diagnóstico, estrategia desarrollada en el Shell Centre for Mathematical Education, cuyas líneas generales pueden verse en Bell (1986, 1987).

En este estudio presentamos, en primer lugar, el diseño de dos metodologías didácticas que, basadas en un modelo constructivista del aprendizaje, aspiran a cambiar las concepciones erróneas de los estudiantes y a incrementar su nivel de aprendizaje conceptual. En segundo lugar, describimos la experimentación de estas metodologías con estudiantes de 3º de BUP. Finalmente, comparamos el nivel de cambio conceptual y de rendimiento obtenido por estos alumnos con el obtenido por quienes siguieron una metodología expositiva habitual. Los resultados y las conclusiones cierran el presente trabajo.

Diseño de las metodologías didácticas

Las dos metodologías que presentamos se fundamentan en los principios teóricos del aprendizaje por descubrimiento, concebido como un proceso cognoscitivo que parte de la identificación de un problema y, mediante un procedimiento resolutivo al que le es consustancial la evaluación de hipótesis, autorregulado por el propio sujeto con la necesaria orientación sociocultural, produce una construcción intrapsíquica novedosa (Barrón, 1991).

La estrategia instructiva es una síntesis de las propuestas por diferentes autores (Joyce y Weil, 1985; Barrón, 1991; Marks, 1980; Guzmán,1987; Libeskind, 1977; Bautista, 1987;etc.) y se desarrolla en tres fases cuya síntaxis es la siguiente:

Fase 1: Contextualización. El profesor identifica las ideas previas, las concepciones intuitivas, que poseen ya los alumnos sobre el tema de estudio así como su nivel de competencia en las estructuras conceptuales sobre las que se asientan los nuevos conceptos o procedimientos algorítmicos. A partir de estos datos elabora y propone una o varias situaciones problemáticas tras cuya exploración cada alumno formula sus propias conjeturas o propuestas de solución.

Fase 2: Construcción. En esta fase, los alumnos deben demostrar o refutar sus conjeturas. Este proceso puede facilitarse si poseen más información que la suministrada en el enunciado de la situación problemática. La única diferencia entre las dos metodologías es la siguiente: en la primera, los estudiantes adquieren esa información realizando una secuencia de actividades, expertamente planificadas por el profesor, como elaboración de definiciones, razonamientos dirigidos, corrección y/o complementación de cálculos, generalizaciones, etc.; en la segunda metodología, los alumnos han de buscar toda la información necesaria en el propio proceso resolutivo. Al final de este proceso, deben quedar construidos los nuevos conceptos, estructuras conceptuales o procedimientos algorítmicos.

Fase 3: Ampliación. Con el fin de reforzar los conocimientos, habilidades y actitudes que van generándose con este aprendizaje, se proponen una serie de actividades algorítmicas, problemas o investigaciones cuya resolución permita al alumno incrementar la significación y la red de relaciones de los nuevos conceptos o procedimientos algorítmicos al mismo tiempo que ponga en juego su poder de transferencia.

El sistema social de ambos modelos se basa en el trabajo de los alumnos en pequeños grupos y en la puesta en común de los resultados después de cada una de las fases con el fin de asegurar que los resultados correctos son conocidos y compartidos por todos los alumnos, puesto que algunos conducen a estructuras conceptuales que es necesario utilizar en actividades posteriores. Cuando los alumnos están realizando las actividades, el profesor pasa por los distintos grupos de trabajo, no como un inspector, sino como una persona que procura atender y ayudar individualmente a todos los alumnos sin discriminaciones. Un interés sincero y evidente por parte del profesor en lo que piensan sus alumnos ayuda a aumentar su disposición a compartir sus pensamientos. De este modo, genera en ellos la suficiente confianza y admiración como para que surja el diálogo. En ese diálogo personal o de pequeño grupo, el profesor no facilita información a los alumnos, sino que consigue que éstos sientan curiosidad y piensen por sí mismos, pero sin abocarlos al desaliento o a la desesperación porque no encuentren las soluciones; por el contrario, intenta que los alumnos obtengan éxitos (aunque sean parciales) con el fin de aumentarles la confianza y la seguridad en su quehacer matemático. Al mismo tiempo, procura convencer a los alumnos de que, también en matemáticas, el trabajo y el esfuerzo conducen al éxito; para ello, detecta los logros conseguidos de esta forma y los elogia explícitamente.

El principal sistema de apoyo es un guión de actividades o problemas cuidadosamente estructurados de manera que pueda ser utilizado de modo individual por todos los estudiantes. Para la segunda metodología, es conveniente, además, una guía heurística o estrategia directiva parecida a la de Polya (1965) con el fin de facilitar el proceso de resolución de problemas. En resumen, podemos conceptualizar la primera metodología como descubrimiento dirigido y la segunda como resolución de problemas.

Análisis de las ideas previas

La aplicación de estas metodologías exige, en primer lugar, que se conozcan las ideas previas de los estudiantes como punto de partida de todo el proceso instructivo. Escogimos como unidad didáctica objeto de estudio las Cónicas (3º de BUP) y procedimos a realizar una investigación para diagnosticar qué ideas previas poseen los estudiantes de este curso sobre estas curvas antes de comenzar su estudio sistemático.

La investigación se desarrolló en dos fases:

Primera fase: Se pretendía obtener una información aproximada de carácter general sobre las ideas previas que poseían los alumnos. Para ello se elaboró un cuestionario breve y muy abierto en el que, sobre cada una de las curvas, se pedía a los alumnos que la dibujasen, la definieran, enunciaran alguna propiedad y describieran algún objeto o fenómeno real donde se encontrase esta curva. Fue contestado por 76 alumnos de 3º de BUP (17 años) en el mes de noviembre de 1987, cuando todavía no habían comenzado su estudio sistemático. Utilizaron una hoja para cada curva, tenían regla y compás y disponían de una hora, tiempo que fue, en todos los casos, suficiente. Las contestaciones fueron anónimas, lo cual favoreció el alto grado de espontaneidad que necesitaba esta primera aproximación al objetivo de la investigación.

Segunda fase: A partir de los resultados obtenidos en la primera fase se confeccionó un cuestionario de 40 items de verdadero-falso (anexo 1) que fue contestado por 305 estudiantes de tres centros distintos durante el primer trimestre del curso 1988-1989, antes de comenzar el estudio sistemático de estas curvas.

Los resultados obtenidos indican que la mayor parte del conocimiento que poseen los alumnos sobre las cónicas es de tipo físico y social pero no lógico-matemático en el sentido que da Piaget a estos términos, pues solamente han realizado una abstracción empírica (conocimiento físico) y han asignado a esas curvas el nombre convencionalmente aceptado en el entorno socio-cultural (conocimiento social). Las definiciones de elipse, hipérbola y parábola, aceptadas de modo casi unánime, están constituidas por una sucesión de propiedades obtenidas perceptualmente que intentan describir por exhaustión la forma de la curva. Por ejemplo:

- Una elipse se define como una curva plana, cerrada y simétrica en la que sus puntos no equidistan del centro.

- Una parábola se define como una curva abierta, simétrica e ilimitada que se caracteriza por ser la gráfica de una función.

Como consecuencia, se detectaron las siguientes ideas erróneas:

1. Un óvalo construido con cuatro arcos de circunferencia, como el de la figura 4, es una elipse.

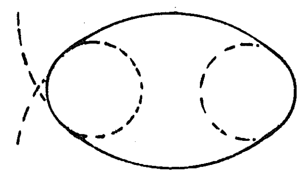


Figura 4

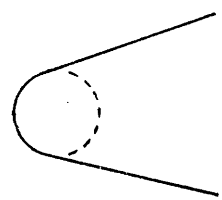


Figura 5

2. Un arco de circunferencia y dos semirrectas tangentes en sus extremos, como muestra la figura 5, forman una parábola.

3. Todas las cónicas pueden dibujarse perfectamente empleando sólo la regla y el compás.

4. Los tres tipos de cónicas (elipse, hipérbola y parábola) son independientes, no guardan ninguna relación estructural entre sí, ni directa ni indirecta (a través de un elemento externo como podría ser una superficie cónica).

5. Una parábola (y, en general, cualquier curva) no es un objeto geométrico independiente del sis-

tema de referencia; por el contrario, primero existe el sistema de referencia como algo dado a priori y después la curva completamente encadenada a él; esto implica que una curva no tiene infinitas ecuaciones dependiendo del sistema escogido, sino una sola.

6. Pueden trazarse dos tangentes distintas en cada punto de una cónica.

7. En general, los estudiantes perciben que las cónicas están poco conectadas con la realidad.

(Puede consultarse una descripción completa de este estudio en Del Río, 1989).

Materiales y recursos didácticos

Procedimos, en primer lugar, a la formulación de los objetivos y a la selección de los contenidos, comunes para todos los grupos, teniendo en cuenta los temarios vigentes y las características de los estudiantes. Después, a partir de las ideas previas que enumeramos en el apartado anterior, elaboramos los materiales didácticos.

Para la primera de las metodologías didácticas (descubrimiento dirigido), diseñamos un guión de actividades instructivas para el alumno entre las cuales se intercalan breves informaciones o comentarios. Las actividades, escritas en letra cursiva, numeradas y con un espacio en blanco para que los estudiantes anoten en él sus resultados, son de distintos tipos: exploraciones y analogías, corrección y/o complementación de cálculos, evaluación de conjeturas, ejercicios algorítmicos, problemas de determinación, problemas de demostración y problemas de descubrimiento de propiedades. Estos tipos de actividades se distribuyen a lo largo de todo el guión ajustándose, en la enseñanza de cada estructura conceptual, a las tres fases instructivas descritas anteriormente. Dado que la extensión de este trabajo no nos permite mostrar el material completo, describimos, a modo de ejemplo, las actividades que se refieren a la enseñanza de la estructura que hace equivalentes los conceptos de elipse como sección cónica y como lugar geométrico basado en la propiedad focal.

En la primera actividad se desarrolla la *fase de contextualización*. En ella, los alumnos analizan nueve curvas distintas relacionadas con las cónicas y van formulando una conjetura sobre el tipo de curva que es cada una de ellas (anexo 2). De este modo, salen a la luz ideas previas que ya poseen sobre las cónicas, el profesor toma conciencia de cuáles son las conjeturas erróneas más frecuentes y en qué grupos se producen con el fin de orientar el cambio conceptual que debe producirse en esos alumnos cuando, en actividades posteriores, deban refutar su conjetura utilizando argumentos basados ya en los conceptos matemáticos. Se utilizan como recursos materiales la regla, el cartabón, la escuadra, el compás, una hoja de papel vegetal y una lámpara con pantalla cilíndrica.

A partir de este momento, comienza la *fase de construcción*. Las actividades siguientes van encaminadas a que el alumno obtenga una información adicional suficiente que le facilite la evaluación matemática de las conjeturas formuladas antes. Mediante los dibujos del guión y cortando superficies cónicas de cartón, los alumnos obtienen las definiciones de los tres tipos afines de secciones cónicas que materializan también iluminando la pared con una lámpara de mesa que tenga una pantalla cilíndrica. A continuación, completan un razonamiento que conduce al descubrimiento de la propiedad focal de la elipse, ayudados por modelos materiales construidos con transparencias y pelotas. Refuerzan este aprendizaje con el trazado de una elipse utilizando un cartón, dos chinchetas y un trozo de hilo. Una vez adquirida toda esta información, se enfrentan, ya, a la refutación o la demostración matemática de las conjeturas que formularon al examinar las curvas de la primera actividad y, en la puesta en común subsiguiente, se resuelven los conflictos cognitivos que hayan surgido.

El guión continúa proponiendo actividades para la *construcción de las estructuras conceptuales* equivalentes de la hipérbola y de la parábola y, finalmente, plantea una serie de situaciones problemáticas que relacionan todas ellas y que constituyen la *fase de ampliación* del proceso instructivo, tal como fue descrita anteriormente: los arcos a través de la historia, las superficies cuádricas en la arquitectura, las cónicas como envolventes, billares circulares y elípticos, antenas y radares, etc. (El material completo, junto con la guía del profesor, puede consultarse en Del Río, 1990,a,b).

Los materiales de la segunda metodología están constituidos por una colección de 18 situaciones problemáticas precedida por una guía heurística que puede ser utilizada por los alumnos de forma sistemática en su tarea resolutiva. De este modo, al mismo tiempo que sistematizan sus procesos de resolución, usan de modo consciente estas estrategias, reconocen su validez en problemas de contenidos diversos y las interiorizan. Para conseguir mayor eficacia en el uso de esta guía, los problemas se han clasificado, por su tarea, en problemas de determinación, problemas de demostración y problemas de descubrimiento de propiedades. Para cada tipo, se relacionan las heurísticas más específicas, estructuradas en las cuatro fases del modelo de Polya (1965): comprender el problema, concebir un plan de resolución, ejecutar el plan y examinar la solución.

La secuencia de contenidos no coincide exactamente con la propuesta en la otra metodología, debido a que, al ser menor la orientación externa, hay que apoyarse exclusivamente en los conocimientos previos del alumno y conseguir en los primeros problemas instrumentos y modelos para los siguientes. Esto nos indujo a empezar con la ecuación de la circunferencia (instrumento y modelo para las demás ecuaciones) y seguir con el concepto de elipse (modelo para los conceptos de las demás cónicas). En el anexo 3 mostramos, a modo de ejemplo, la situación problemática en que se construye la equivalencia de los conceptos de elipse como sección cónica y como lugar geométrico basado en la propiedad focal. Como en la primera metodología, los alumnos, tras el examen de las curvas obtenidas, formulan sus conjeturas; pero, aquí, la evaluación de esas conjeturas se realiza empleando como única información adicional la definición de elipse como lugar geométrico. El proceso, por lo tanto, es mucho más abierto; por ello, el número de curvas propuestas es menor y la formulación de la tercera actividad (sección con plano tangente a las esferas) esconde una valiosa ayuda para el descubrimiento de la estructura conceptual. En esta única situación problemática, se recogen la fase de exploración y la fase de construcción. Tras una puesta en común, donde se resuelven los conflictos cognitivos, en los siguientes problemas se construyen, de modo análogo, las estructuras de hipérbola y parábola y, luego, se proponen las mismas situaciones problemáticas que en la primera metodología para relacionar todas ellas y completar el proceso instructivo (fase de ampliación).

Experimentación

La primera versión provisional de los materiales didácticos se experimentó entre abril y mayo de 1988. Participaron en ella cuatro grupos de alumnos con cuatro profesores distintos. Esta experiencia piloto sirvió para comprobar la adecuación de los materiales diseñados a la situación educativa real.

La experimentación definitiva se realizó entre enero y marzo de 1989 y en ella participaron 230 alumnos de Salamanca y Zamora distribuidos de la siguiente manera:

Grupo 1 (Primera metodología: Descubrimiento dirigido): 90 estudiantes pertenecientes a tres grupos de 3º de BUP.

Grupo 2 (Segunda metodología: Resolución de problemas): 58 estudiantes pertenecientes a dos grupos de 3º de BUP, a cargo de un profesor distinto de los anteriores.

Grupo 3 (Metodología expositiva tradicional): 82 estudiantes pertenecientes a tres grupos de 3º de BUP, a cargo de los tres mismos profesores que utilizaron la primera metodología.

Puesto que la muestra no fue escogida al azar, no teníamos la certeza de que los tres grupos fueran homogéneos y, como consecuencia, evaluamos su grado de homogeneidad respecto de las principales variables que podrían influir en el rendimiento del proceso instructivo: sexo, profesión del padre, estudios del padre, aptitud espacial y numérica, factor «g», estilo cognitivo, actitud hacia las matemáticas y nivel de conocimientos previos. La tabla I muestra los instrumentos elegidos para la obtención de los datos.

Antes de comenzar el periodo instructivo, se pasaron a todos los estudiantes estas pruebas y cuestionarios y se procesaron los datos obtenidos mediante los paquetes estadísticos Statview y Systat. Utilizando las pruebas «ji-cuadrado» y análisis de la varianza, no se apreciaron diferencias significativas al 95% entre los tres grupos salvo en la actitud inicial hacia las matemáticas que, por lo tanto, incorporamos como variable independiente (covariable) en el diseño de la investigación, para que en la comparación de rendimientos, nó influyera esta diferencia inicial.

Durante la experiencia en las aulas, cuya duración fue igual para todos los grupos (20 clases), los profesores tuvieron el apoyo del investigador que hizo un seguimiento puntual de la misma velando por la fiel realización de ambas metodologías. A pesar de que ninguno de los grupos de alumnos había trabajado con estrategias instructivas de este tipo, todos, en general, acogieron bien las dos nuevas metodologías a las que se adaptaron perfectamente aunque tardaron algo más en la segunda debido a la mayor exigencia de participación. Trabajaron en grupos de tres, que ellos mismos constituyeron, tal como estaba previsto, y no se observaron conflictos ni enfrentamientos notables. Sobre las puestas en común, puede decirse que se ajustaron al programa previsto aunque algunos de los debates que se suscitaron podrían haberse alargado más si el tiempo no hubiese tenido que ser controlado.

Resultados

Con el fin de evaluar el rendimiento en el aprendizaje conceptual, se elaboró una prueba añadiendo 20 items más al cuestionario que se utilizó en el diagnóstico de las ideas previas (Anexo 1). La validez de la prueba resultante se aseguró por su concomitancia con los objetivos y contenidos seleccionados, y su fiabilidad se midió con la fórmula 20 de Kuder y Richardson obteniéndose un valor más que aceptable: 0,94898. Los alumnos realizaron esta prueba al acabar el período instructivo. Procesamos los datos obtenidos utilizando los paquetes estadísticos Statview y Systat y las medias encontradas fueron las siguientes:

Grupo 1= 16,88 ; Grupo 2= 12,617 ; Grupo 3= 9,132

Mediante análisis de la covarianza, tomando como factores las metodologías (grupos), como covariable la actitud inicial y como variable dependiente la puntuación de la prueba, constatamos que las diferencias entre las medias de los tres grupos eran significativas al 99%, es decir:

Grupo 1> Grupo 2> Grupo 3

Este resultado muestra que, frente al método expositivo tradicional, las metodologías didácticas para el aprendizaje por descubrimiento, tal como se han descrito aquí, mejoran el aprendizaje significativo de los conceptos pues emplean como punto de partida los conocimientos previos de los estudiantes y permiten la superación de los conflictos cognitivos mediante un procedimiento resolutivo de problemas que incluye la evaluación de las conjeturas. Además, apreciamos que la mayor orientación usada en la primera metodología, sin anular este proceso resolutivo autorregulado por el propio sujeto, garantiza que la construcción de los conceptos es realizada por un número mayor de estudiantes y, como consecuencia, produce un rendimiento medio más alto.

Para comparar el nivel de cambio conceptual entre los tres grupos, calculamos el porcentaje de respuestas correctas en los items de la prueba que contenían las ideas previas erróneas detectadas en el diagnóstico inicial. Estos fueron los items escogidos (Anexo1): 2, 9, 12, 13, 16, 17, 19, 20, 23, 24, 25, 27, 29, 32, 33, 35, 36, 37, 39 y 40. Utilizando la prueba «ji-cuadrado», encontramos las diferencias significativas que se muestran en la Tabla II donde se aprecia que el porcentaje de respuestas correctas de los Grupos 1 y 2 es significativamente superior al del Grupo 3 en doce y siete items respectivamente. Resumiendo, podemos decir que se produce un nivel de cambio conceptual análogo con las dos metodologías experimentales, que es superior al producido por la metodología expositiva tradicional.

Un análisis minucioso de esta tabla todavía permite extraer algunos otros resultados interesantes. Por ejemplo, se observa que las dos metodologías experimentales, aunque consiguen cambiar casi todas las ideas previas erróneas, todavía son incapaces de conseguir que la mayoría de los alumnos superen estas tres:

- Una parábola puede construirse perfectamente empleando sólo la regla, el compás y el lápiz (item 20).

- Una parábola no tiene infinitas ecuaciones no equivalentes entre sí (item 32),

- Una parábola se define así: es una curva abierta, simétrica e ilimitada que se caracteriza por ser la eráfica de una función (item 35).

Por su parte, la mayoría de los alumnos del grupo de control mantiene estas tres ideas previas erróneas y además las siguientes:

- Un óvalo construido con cuatro arcos de circunferencia (figura 4) es una elipse (item 2).

- Una elipse o una hipérbola pueden dibujarse perfectamente empleando sólo la regla, el compás y el lápiz (items 9 y 29).

- Una elipse se define como una curva plana, cerrada y simétrica en la que sus puntos no equidistan del centro (item 19).

- Los huevos de gallina tienen forma de elipsoide (item 24).

- Una horquilla de pelo como la de la figura 6. tiene forma de parábola (item 25).

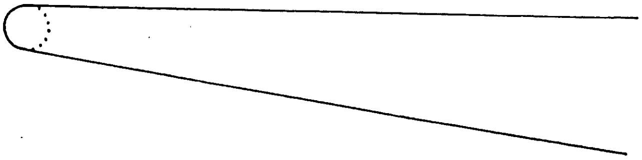


Figura 6

- Si cortamos una superficie cónica con un plano paralelo a una generatriz, obtenemos una curva que no es del mismo tipo que la obtenida iluminando una hoja de papel con una linterna inclinada según muestra la figura 7 (item 39).

Ésto demuestra, una vez más, la resistencia al cambio que ofrecen este tipo de ideas y la necesidad de contar con ellas para que la enseñanza sea realmente eficaz.

Conclusión general

Como conclusión, se deduce de los resultados anteriores que, tanto en la superación de concepciones erróneas como en el aprendizaje de nuevos conceptos, las metodologías expositivas tradicionales son menos eficaces que las metodologías que favorecen el aprendizaje por descubrimiento, entendiendo éste como un proceso cognoscitivo que parte de la identificación de un problema y, mediante un procedimiento resolutivo al que le es consustancial la evaluación de hipótesis, autorregulado por el propio sujeto con la necesaria orientación sociocultural, produce una construcción intrapsíquica novedosa. Además, hemos constatado que esta orientación sociocultural, en el aprendizaje por descubrimiento, es uno de los factores determinantes de la eficacia instructiva, alcanzando su grado óptimo en un punto intermedio que, sin anular la autorregulación interna que debe ejercer el propio sujeto sobre su proceso de aprendizaje, utilice un rico contexto de orientaciones externas expertamente estructuradas y organizadas que faciliten la comprobación de las conjeturas. Ésta es la característica diferenciadora de la primera metodología y de ahí su eficacia al no discriminar a estudiantes que, por sus rasgos personales, podrían sentirse poco motivados, desbordados o inseguros ante estas metodologías.

Creemos que, con esta investigación educativa, hemos contribuido a esclarecer qué modelos de enseñanza pueden suponer una respuesta a la desesperación confesada por los profesores de matemáticas cuando, un año tras otro, constatan que sus alumnos siguen cometiendo los mismos errores.

Bibliografía

* BARRON, A. (1991). **Aprendizaje por descubrimiento. Análisis crítico y reconstrucción teórica**. Ed. Universidad de Salamanca, Salamanca.

* BAUTISTA, A. (1987): **Fundamentación de un método de enseñanza basado en la resolución de problemas**. Revista de Educación, 282, 151-160.

* BELL, A. (1986a): **Shell Center for Mathematical Education: Estudios de enseñanza por diagnóstico**. Enseñanza de las Ciencias, 4 (1), pp. 86-89.

* BELL, A. (1986b): **Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros**. Enseñanza de las Ciencias, 4 (3), pp. 199-208 .

* BELL. A. (1986c): **Diagnostic Teaching: Report of an ESRC projet**. University of Nottingham, Shell Centre for Mathematical Education.

* BELL, A. (1987): **Diseño de enseñanza diagnóstica en matemáticas**, en A. Álvarez (Comp.): Psicología y Educación. Realizaciones y tendencias actuales en la investigación y en la práctica, VISOR-MEC, Madrid.

* BELL, A. y otros. (1987). **Diagnostic Teaching**. Mathematics Teaching, 119, 56-59.

* BENNETT, G.K.; SEASHORE, H.G. y WESMAN, A.G. (1972): **DAT. Test de Aptitudes Diferenciales**. T. E. A., Madrid.

* BOOTH, L. R. (1982): **Developing a teaching module in beginning Algebra**, en A. Vermandel (Ed.), Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Universitaire Instelling, Antwerp, Bélgica.

* CATTELL, R.B. y CATTELL, A.K.S. (1977): **Tests de factor «g», escalas 2 y 3**. T. E. A., Madrid.

- DEL RÍO SÁNCHEZ, J. (1989): **Ideas previas en matemáticas. Una investigación sobre las cónicas**, Studia Paedagogica, 21, 59-96.

* DEL RÍO SÁNCHEZ, J. (1990a): **Aprendizaje de las matemáticas por descubrimiento. Una aplicación al estudio de las cónicas. Libro del alumno**. I. U. C. E., Salamanca.

* DEL RÍO SÁNCHEZ, J. (1990b): **Aprendizaje de las matemáticas por descubrimiento. Una aplicación al estudio de las cónicas. Guía del profesor**. I. U. C. E.

* DEL RÍO SÁNCHEZ, J. (1991): **Concepciones erróneas en matemáticas. Revisión y evaluación de las investigaciones**, Educar (en prensa).

* GAIRIN, J. (1987): **Las actitudes en Educación**, PPU, Barcelona.

* GRUPO AZARQUIEL (1987): **Análisis de los errores en la adquisición de los conceptos matemáticos** en A. Álvarez (Comp.): Psicología y Educación. Realizaciones y tendencias actuales en la investigación y en la práctica, Visor-MEC, Madrid.

* GUZMÁN, M. de (1987): **Enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas**, en Aspectos didácticos de Matemáticas 2, I.C.E., Zaragoza.

* HERSHKOWITZ, R. (1987): **The acquisition of concepts and misconceptions in basic Geometry or when «a little learning is dangerous thing»**, en Novak, J. (Ed.): Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics. Proceedings of the International Seminar (2nd), Cornell Univ., Ithaca, NY, v. I I I, pp. 238-251.

* JOYCE, B. y WELL, M. (1985): **Modelos de enseñanza**. Anaya, Madrid.

* LIBESKING, S. (1977): **A problem Solving Approach to Teaching Mathematics**. Educational Studies in Mathematics, 8 (2) 168-179 .

* MARKS, L. K. (1980): **Meeting the Challenge: Successfully Teaching the Student of the 80s at the Conceptual Level**. Mentor Consulting, Philippi, WV.

* McLEOD, D. y ADAMS, V. M. (1977): **Relating Field Independence and a Discovery Approach to Learning Mathematics: A Trait-treatment Interaction Study**. Anual Meetin of the American Educational Research Association. New York.

* MEDECI, D., y Otros. (1986): **Sobre la formación de los conceptos geométricos y sobre el léxico geométrico**. Enseñanza de las Ciencias, 4 (1), 16-22.

* POLYA, G. (1965): **Cómo plantear y resolver problemas**. Trillas, México.

* TATSUOKA, K. K. (1984): **Analysis of Errors in Fraction Addition and Subraction Problems. Final Report**. National Inst. of Education, Washington, D. C.

* VINNER, S. y ZUR, Ch (1987): **Some Aspects of Geometry as a Deductive System in High School Students**, en

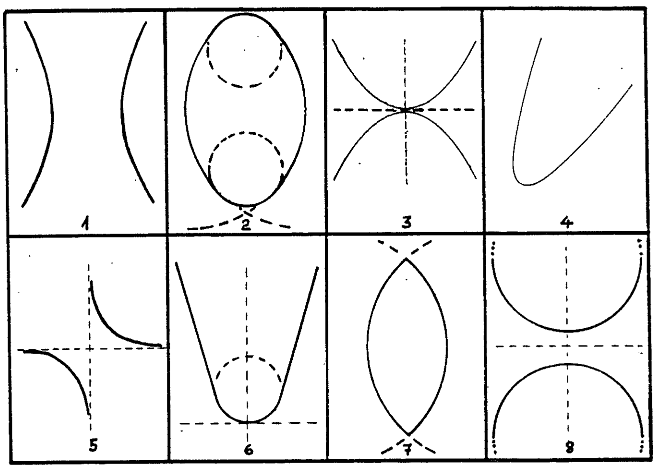
Novak, J. (Ed.): Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics. Proceedings of the International Sminar (2nd). Cornell Univ., Ithaca, NY, v.III, pp. 551-563.

* WITKIN, H.A., OLTMAN, P.K.; RASKIN, E. y KARP, S.A. (1987): **Tests de Figuras Enmascaradas**. T. E. A., Madrid.

Anexo 1

Análisis de las ideas previas sobre las cónicas. Cuestionario definitivo

Las primeras 8 frases hacen referencia a las curvas de las siguientes figuras en las cuales las líneas de puntos no forman parte de las curvas, sólo sirven para indicar cómo se trazaron:



1. La curva 1 podría ser una hipérbola.

2. La curva 2 podría ser una elipse.

3. La curva 3 podría ser una hipérbola.

4. La curva 4 podría ser una parábola.

5. La curva 5 podría ser una hipérbola.

6. La curva 6 podría ser una parábola.

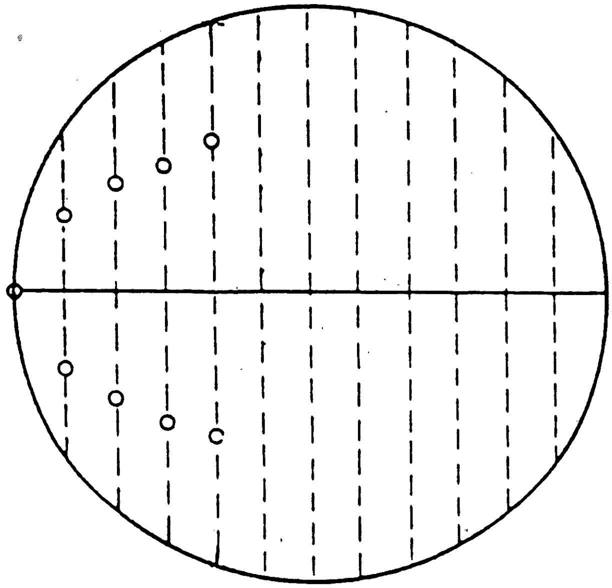
7. La curva 7 podría ser una elipse.

8. La curva 8 podría ser una hipérbola.

9. Una elipse puede dibujarse perfectamente utilizando sólo el compás, la regla y el lápiz.

10. Si representamos la función $y = 3x^2$, obtenemos una parábola.

11. Si señalamos los puntos medios de todas las semicuerdas verticales de una circunferencia (como en la figura siguiente) y los unimos, entonces se obtiene una elipse.

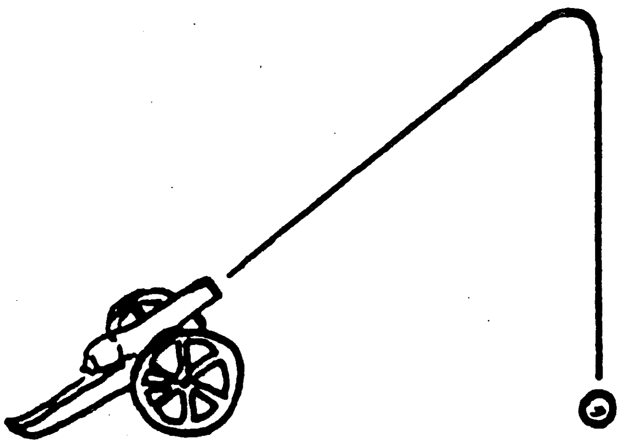


12. Una hipérbola se define así: es la curva obtenida al seccionar una superficie cónica completa mediante un plano que no pasa por el vértice y corta a sus dos hojas.

13. Las únicas elipses que existen en la realidad son las órbitas de los planetas alrededor del sol y las de algunas partículas atómicas alrededor del núcleo.

14. La longitud de una parábola es infinita.

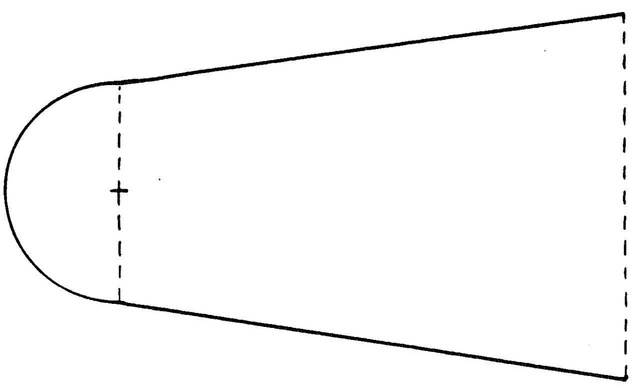
15. Si disparamos un cañón antiguo con una inclinación de 45° y suponemos que el rozamiento del aire no existe, la trayectoria completa de la bala es una curva como la de la siguiente figura:



16. Una hipérbola no puede formarse con las dos mitades de una elipse enfrentadas entre sí.

17. Fijado un punto de una hipérbola, siempre es posible trazar dos tangentes a dicha hipérbola pasando por ese punto.

18. La zona de una cancha de baloncesto que se muestra en la figura siguiente tiene forma de parábola.



19. Una elipse se define como una curva plana, cerrada y simétrica en la que sus puntos no equidistan del centro.

20. Una parábola puede dibujarse perfectamente empleando sólo una regla, un compás y un lápiz.

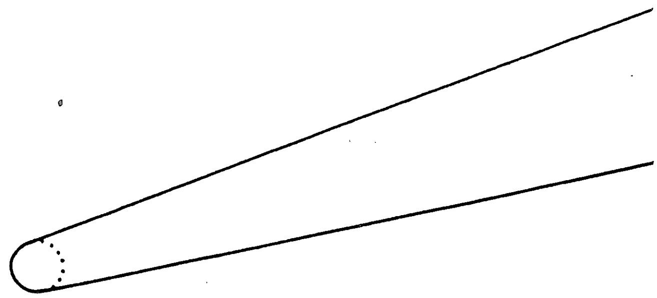
21. Las hipérbolas no aparecen en objetos o fenómenos reales.

22. $y^2 = 2x$ es la ecuación de una parábola cuyo eje coincide con el eje de abscisas.

23. Por cualquier punto de una elipse pasan dos tangentes distantas.

24. Los huevos de gallina tienen forma de elipsoide.

25. Una horquilla de pelo, como la de la siguiente figura, tiene forma de parábola.



26. Si un jugador de baloncesto lanza el balón desde el centro del campo y consigue una canasta, entonces el camino recorrido por el balón tiene forma de parábola.

27. Una parábola se define así: es la curva obtenida al cortar una superficie cónica por un plano paralelo a la generatriz.

28. Las parábolas no tienen centro de simetría.

29. Una hipérbola no puede dibujarse perfectamente empleando sólo el compás, la regla y el lápiz.

30. Una elipse se define como el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos es siempre la misma.

31. La gráfica de la función $y = 1/x$ es una parábola.

32. Cualquier parábola tiene infinitas ecuaciones no equivalentes entre sí.

33. Un melón perfectamente simétrico tiene forma de elipse.

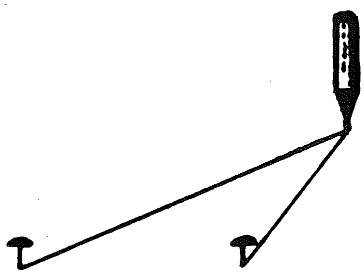
34. La ecuación $x^2 = 2y$ es una parábola cuyo eje coincide con el eje de ordenadas.

35. Una parábola se define así: es una curva abierta, simétrica e ilimitada que se caracteriza por ser la gráfica de una función.

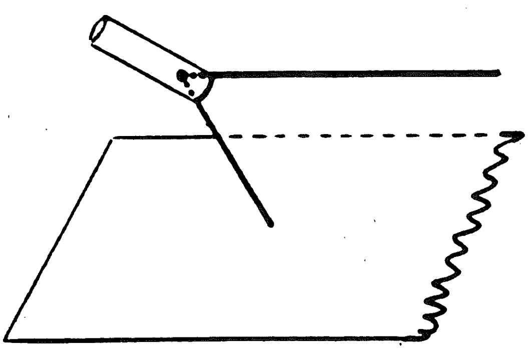
Las próximas cinco frases hacen referencia a las siguientes actividades:

A. Tomamos una superficie cónica (completa) en la cual las generatrices forman con el eje un ángulo de 30°. La cortamos con un plano que no pasa por el vértice y que forma con el eje un ángulo ß. Consideramos la curva obtenida en esta sección.

B. Clavamos dos chinchetas sobre una hoja de papel y trazamos la curva que resulta al desplazar un lápiz manteniendo tenso un hilo cuyos extremos se han unido a las chinchetas como muestra la figura siguiente:



C. Con una linterna cuyo haz luminoso forma un cono perfecto, iluminamos una hoja de papel con la inclinación que muestra la figura siguiente; consideramos la curva formada por el borde del recinto iluminado.



36. Si, ß = 30°, la curva obtenida en A es una sección cónica del mismo tipo que la obtenida en C.

37. Si, ß es menor que 30°, la curva obtenida en A es siempre una sección cónica del mismo tipo que la obtenida en B.

38. Si, ß es mayor que 30°, la curva obtenida en A, en algunos casos, es del mismo tipo que la obtenida en C.

39. Si cortamos la superficie cónica de la actividad A con un plano paralelo a una generatriz, obtenemos una curva del mismo tipo que la obtenida en la actividad C.

40. Si seccionamos la superficie cónica de la actividad A con los planos que cortan a todas las generatrices, podría obtenerse, en algún caso, una curva del mismo tipo que la obtenida en la actividad B.

Anexo 2

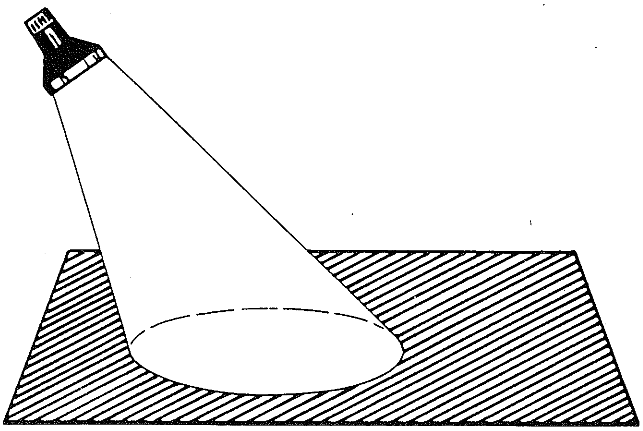
Materiales de la primera metodología

Entre las primeras curvas descubiertas y analizadas por los griegos figuran las elipses, las hipérbolas y las parábolas. Como tú ya tienes una cierta idea intuitiva sobre la forma de estas curvas, a continuación aparecerán 9 curvas y tú vas a decidir, apoyándote en esa idea, qué tipo de curva es cada una:

Curva I

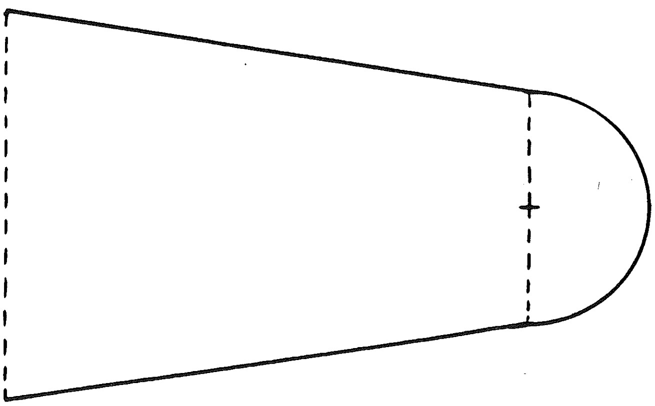
Imagina que, con una linterna cuyo haz luminoso forma un cono perfecto, iluminas una hoja de papel con una inclinación parecida a la que indica la siguiente figura:

Considera la curva que delimita el recinto iluminado. ¿Qué tipo de curva es?



Curva II

La zona de una cancha de baloncesto tiene aproximadamente la siguiente forma:

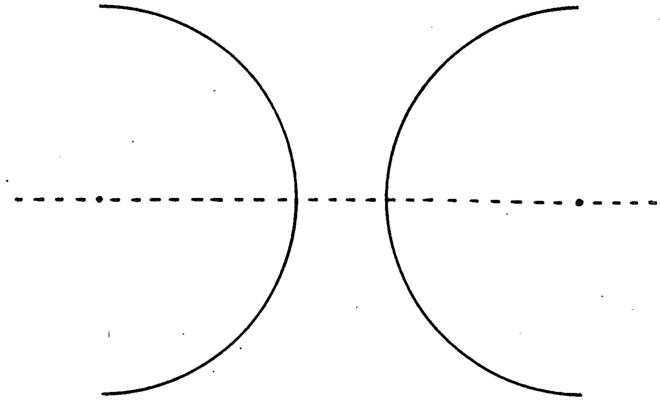


¿Qué tipo de curva es?

Curva III

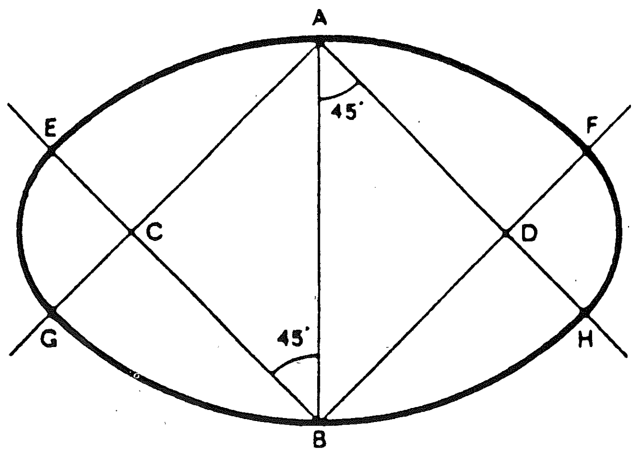
El siguiente dibujo muestra dos semicircunferencias enfrentadas y separadas:

¿Qué tipo de curva es?



Curva IV

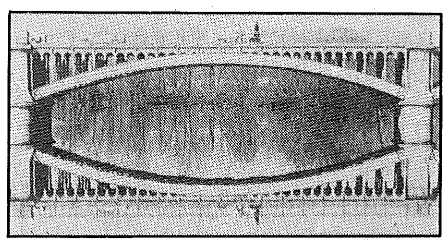
Descubre cómo se trazó la siguiente curva:



¿Qué tipo de curva es?

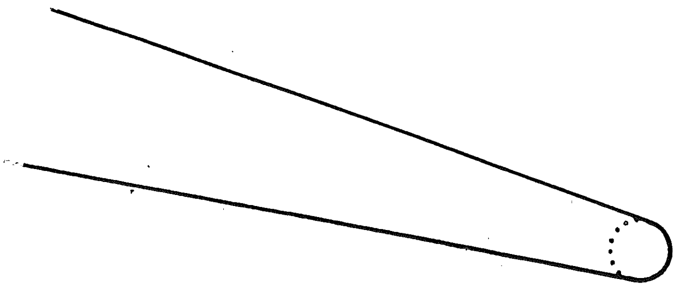
Curva V

¿Qué tipo de curva es la formada por el arco del puente y su reflejo, en la siguiente fotografía? (Puedes utilizar papel vegetal para calcar esta curva y hacer luego su estudio).



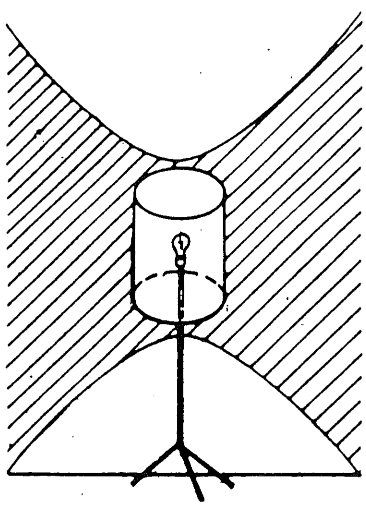
Curva VI

¿Qué tipo de curva es la formada por una horquilla del pelo como la siguiente?



Curva VII

Ilumina la pared con una lámpara de mesa que tenga una pantalla cilíndrica manteniendo el eje de la lámpara paralelo a la pared como muestra el suguiente dibujo:



¿Qué tipo de curva forma el borde del recinto iluminado?

Curva VIII

Considera una circunferencia de 4 cm. de radio. Vamos a «achatarla». Para ello, escogemos un diámetro y trazamos varias cuerdas perpendiculares a él (fig. 1). A continuación, «bajamos», cada punto P de la circunferencia al punto P' que está en la mitad de RP, y «subimos» cada punto Q al punto Q' que está en la mitad de RQ (fig. 2). Unimos todos los puntos P' y Q' así obtenidos. ¿Qué tipo de curva obtenemos?

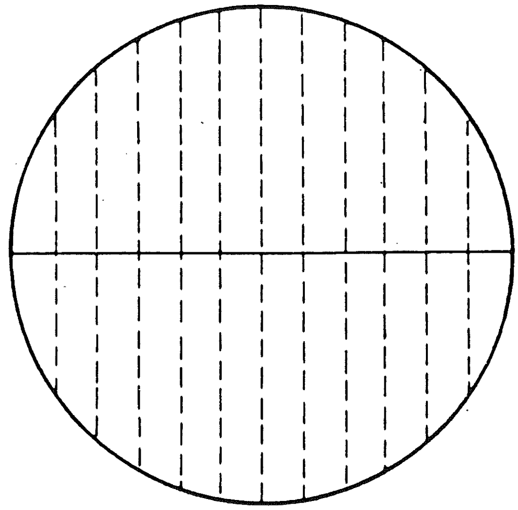


Figura 1

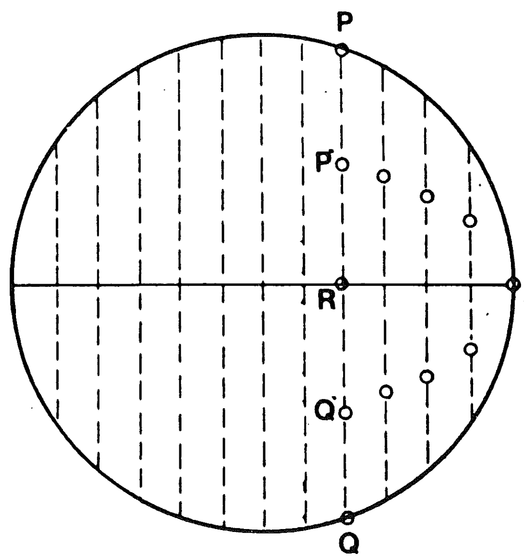
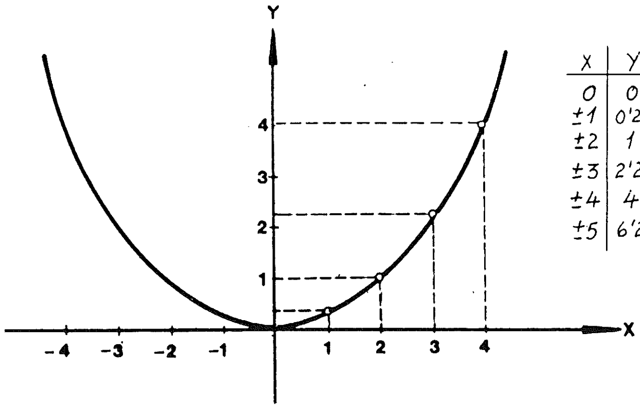


Figura 2

Curva IX

Aquí tienes la gráfica de la función $y = 0'25x^2$ obtenida a partir de su tabla de valores:

¿Qué tipo de curva es?



X	Y
0	0
±1	0'25
±2	1
±3	2'25
±4	4
±5	6'25

Anexo 3

Materiales de la segunda metodología

Las aparencias pueden o no engañar.

Actividades:

Realiza las siguientes actividades:

1. Sobre un cartón coloca una hoja de papel y clava en ella dos chinchetas. Manteniendo tenso un hilo unido a ellas, ve trazando con un lápiz una curva como indica la figura 3.1:

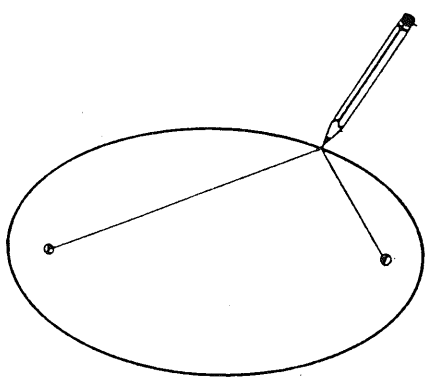


Figura 3.1

2. Descubre el trazado de la curva siguiente (figura 3.2) y reprodúcela en tu cuaderno:

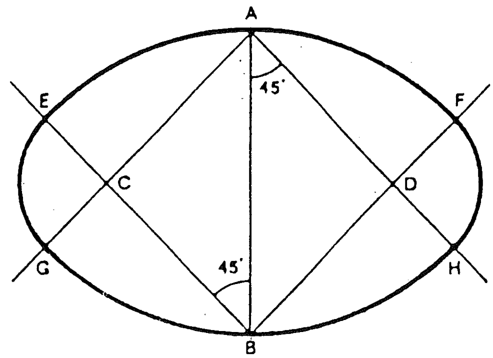


Figura 3.2

3. Considera un cono en el que se han introducido dos esferas de distintos radios, no tangentes entre sí (como muestra la figura 3.3). Secciona el cono con un plano tangente interiormente a las dos esferas (como indica esquemáticamente la fig. 3.4) y dibuja aproximadamente la curva que resulta de dicha sección.

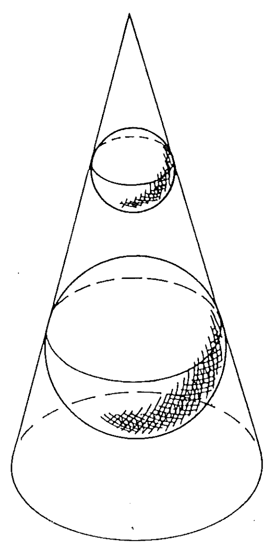


Figura 3.3

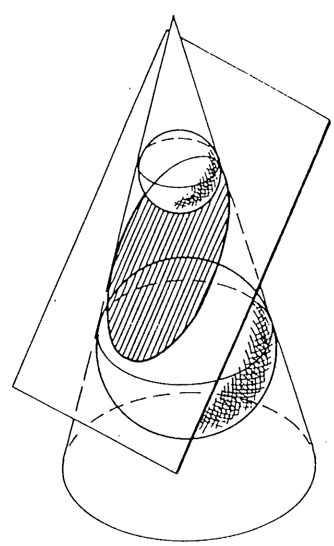


Figura 3.4

4. Imagina que, con una linterna cuyo haz luminoso forma un cono perfecto, iluminas una hoja de papel con una inclinación parecida a la que aparece en la siguiente figura 3.5:

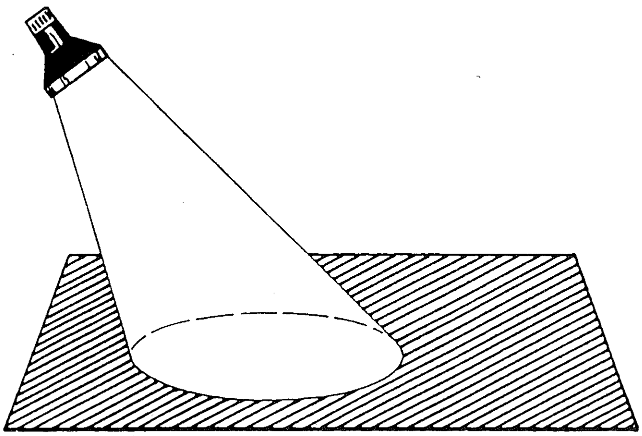


Figura 3.5

Dibuja aproximadamente la curva formada por el borde del recinto iluminado.

5. Considera una circunferencia de 4 cm de radio. Vas a "achatarla". Para ello, escoge un diámetro y traza varias cuerdas perpendiculares a él (fig.3.6). A continuación, "baja" cada punto P de la circunferencia al punto P' que está en la mitad de RP, y "sube" cada punto Q al punto Q' que está en la mitad de RQ (fig. 3.7). Une todos los puntos P' y Q' así obtenidos y resultará una "circunferencia achatada".

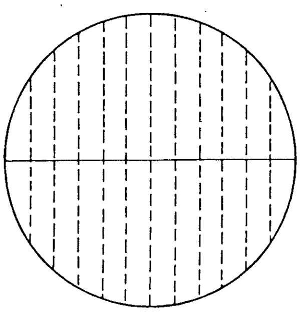


Figura 3.6

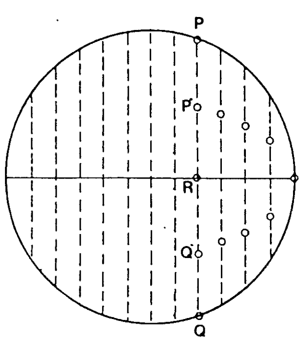


Figura 3.7

Cuestiones

a) En las actividades anteriores, han aparecido curvas que parecen elipses. Como tú ya tienes una idea intuitiva de lo que es una elipse, después de analizarlas y compararlas detenidamente, indica cuáles crees que son elipses y cuáles no, según esa idea.

b) Es lógico que tu respuesta a la pregunta del apartado anterior difiera de la de algunos de tus compañeros, porque el criterio para decidir qué es una elipse ha sido subjetivo y, por lo tanto, distinto en cada uno. ¿Quién tiene razón? Para decidirlo, nos hace falta un criterio único, objetivo, que sirva para que todas las personas se entiendan sin ambigüedades cuando hablan de elipses. Este criterio consiste en establecer una definición precisa nte aceptada de lo que es una elipse. Los libros de texto de matemáticas suelen definirla así:

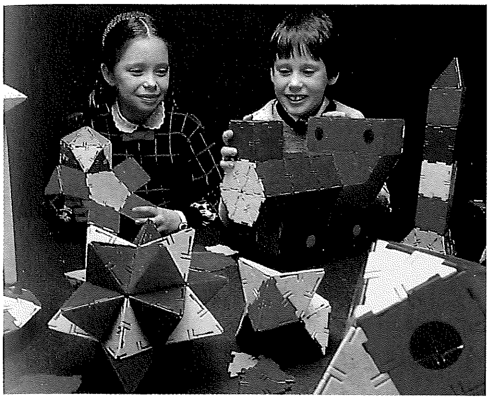
La elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a otros dos puntos fijos, llamados focos, es siempre la misma, es decir, es constante.

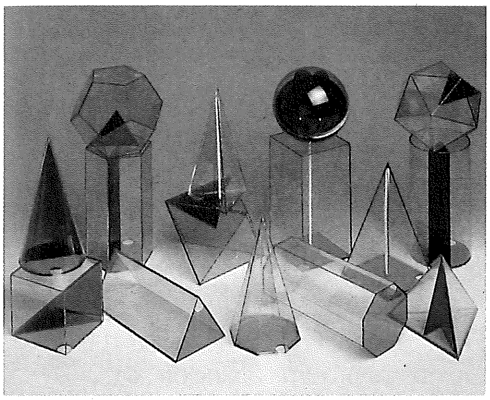
Tal vez te resulte extraña esta definición e incluso creas que está mal, que ese lugar geométrico no tiene nada que ver con un elipse. Acéptala por un momento y realiza la siguiente investigación:

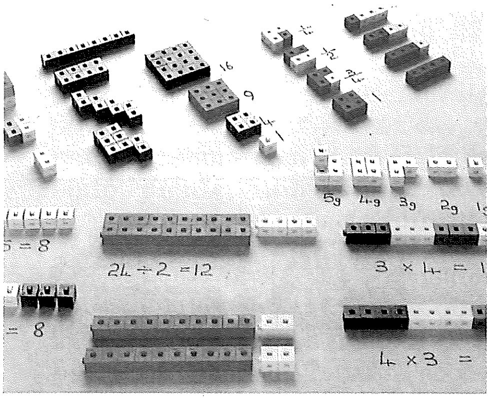
¿Cuáles de las curvas que has obtenido antes son elipses y cuáles no de acuerdo con esa definición? ¡Ojo, ahora ya no te fíes sólo de tus ideas intuitivas: razona lo mejor que puedas!

c) Compara estas últimas respuestas con las primeras. ¿Las apariencias engañan?

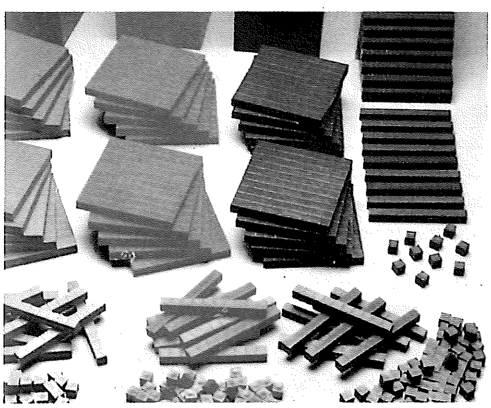
José del Río Sánchez
Grupo Gauss
Instituto Universitario de Ciencias de la Educación
Universidad de Salamanca







24 ÷ 2 = 12
3 × 4 =
4 × 3 =



Proyecto Sur. Apdo. 1052. 18080. Granada. Tle. 958 - 550381

Proyecto Sur. Apdo. 1052. 18080. Granada. Tle. 958 - 550381

Proyecto Sur. Apdo. 1052. 18080. Granada. Tle. 958 - 550381

Matemáticas experimentales[1]

Antonio Pérez Jiménez

Introducción

En primer lugar, quiero manifestar mi más sincero agradecimiento a los Organizadores de estos II Encuentros Extremeños por la amabilidad que han tenido al invitarme.

Antes que nada, una aclaración. Al hablar de matemáticas experimentales me estaré refiriendo siempre a la enseñanza de nuestra materia. Nada más lejos de mis posibilidades que intentar adjetivar las propias matemáticas. Hablaré de enseñanza de las matemáticas y, en general, de la utilización de recursos que posibiliten la acción del alumno y su protagonismo en el aprendizaje. No pretendo, obviamente, magnificar ni dar valor absoluto a nada; las matemáticas experimentales serán, simplemente, una propuesta metodológica y organizadora del espacio educativo.

He elegido un tema que considero de actualidad. De actualidad no por lo nuevo, que no lo es, sino por lo "novedoso". En los tiempos de Reforma que nos ha tocado vivir en España, se están propiciando unos cambios que yo no dudaría en calificar de profundos: estamos pasando desde un paradigma de enseñanza expositivo, contemplativo, de "rigor matemático" y teórico, a otro en el que predomina la propia reflexión del alumno, el planteamiento de actividades y preguntas por parte del profesor, el "rigor didáctico", lo cultural.

Profundo, porque arranca desde el propio profesorado: desde casi al mismo tiempo que se implantan los actuales programas de EGB y BUP, en la década de los setenta, grupos de profesores relacionados con o aglutinados por los movimientos de Renovación Pedagógicas (los actuales MRP's) manifiestan su desacuerdo con los programas implantados por los "expertos" (las "matemáticas modernas", en nuestro caso; la "lingüística estructural", etc.). Pronto aparecen textos y métodos alternativos y, cada vez más, grupos y asociaciones que reivindican de una u otra manera, un cambio de programa, del currículo, que decimos hoy.

El Grupo Cero de Valencia puede ser, para los que enseñamos matemáticas, un primer ejemplo: irrumpen en la escena educativa en una "Escola d'Estiu" de Barcelona,, en 1975, dentro del marco de las actividades de "Rosa Sensat". Sus propuestas de entonces suponen un revulsivo: basta de hacer matemáticas sin sentido; hagamos clases con problemas de interés, vienen a decir. Comienzan a aparecer, en distinta época y hasta nuestros días, otros grupos: Zero de Barcelona, Azarquiel de Madrid, Beta de Badajoz, Halley de Cáceres; los colectivos de didáctica de León, Cantabria y Sevilla; los Seminarios Permanentes de Salamanca y Málaga; las asociaciones de profesores de Canarias, Andalucía, Castilla, Aragón, Navarra, Castellón, Extremadura, Alicante, Madrid y Galicia.

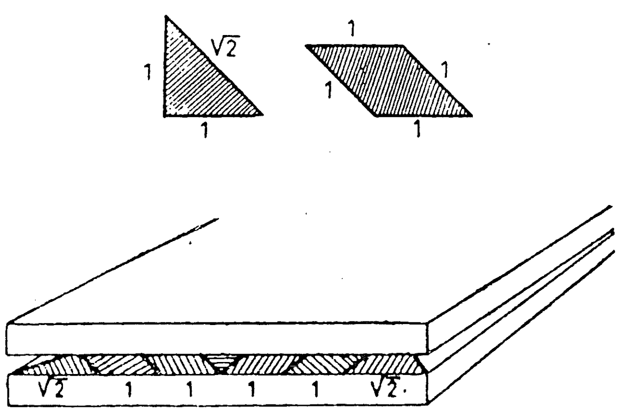
1 Conferencia pronunciada por el autor en los II Encuentros Extremeños de Educación Matemática, organizados por la Sociedad Extremeña de Profesores de Matemáticas, y celebrados en Cáceres del 19 al 21 de noviembre de 1991.

La propia Administración, en el año 83, lanza la Reforma en plan experimental. pero a diferencia de otras Reformas, el posicionamiento de Grupos de profesores es claro y, en cierta medida, la administración lo tiene en cuenta. Y es desde este punto de vista, del de la acción del profesorado, y desde el de la incorporación masiva del alumnado a la enseñanza secundaria, desde el que digo que se está produciendo una Reforma en profundidad.

Ya sé que el desencanto invade hoy muchos de nuestros Centros. Muchos son los problemas: desde los laborales y administrativos hasta los de "identidad", pasando por la falta de espacios y recursos que son imprescindibles en esta Reforma pregonada. Pero desde el centro mismo de la crisis, el posicionamiento didáctico, que para mí equivale a científico, es cada vez más importante.

Dije al principio que el planteamiento que voy a hacer no es nuevo, sino novedoso. Veamos un ejemplo.

Se trata de un problema que suelo contar. La situación es la siguiente:



Nos muestran, entreabierta, una caja cuadrada en la que hay un masaico construido con dos tipos de piezas: triángulos rectágulos e isósceles y rombos con lados iguales a los catetos de los triángulos. Los catetos y los lados del rombo son iguales. Se observa una primera fila compuesta por dos triángulos, con las hipotenusas hacia nosotros y situados en los extremos, y cuatro rombos. Se trata de averiguar cuántas piezas de cada tipo hay en total.

Cada vez que he propuesto este problema, los profesores han actuado, en general, como los alumnos: bien mediante dibujo o bien mediante piezas han intentado reconstruir el mosaico. En alguna ocasión, alguien da la solución "matemática" a primera vista: $(4+2\sqrt{2})^2 = 24+16\sqrt{2}$ y por lo tanto el mosaico estará compuesto por 48 triángulos (área $1/2$) y 32 rombos (área $\sqrt{2}/2$).

Los problemas sobre mosaicos son de rabiosa actualidad en la enseñanza, pero no son nuevos. El problema que he referido está contado por el profesor Puig Adam a propósito de un juego popular entonces conocido como "Rombo".

El problema viene a cuento de nuestra charla. Es un prototipo de problema en el sentido de que con problemas como éste podemos introducirnos en el mundo de las cantidades inconmensurables: la existencia de la $\sqrt{2}$, en nuestro caso, nos lleva a no poder "mezclar" rombos y triángulos en el recuento.

Y podemos introducir al alumno experimentalmente: acudiendo a la estrategia de resolver un problema con la misma estructura, pero más simple en sus datos; por ejemplo, en un friso puede observarse la imposibilidad de mezclar cantidades no conmensurables. Por otro lado, una progresiva generalización en los datos, conduce a un método general de resolución del problema planteado.

La experiencia con profesores de matemáticas, en su intento de resolver este problema, también nos dice mucho. Casi todos, intentan la vía experimental; no acuden directamente al modelo matemático, a pesar de que la caja, siendo cuadrada, podría apuntar al cálculo del área del cuadrado antes descrito. Parece que ante una situación nueva, todos la abordamos "tirando" de lo experimental. No siempre se acude directamente al bagaje de conocimientos, ni siquiera en matemáticas.

Pero retomemos el hilo de la charla allí donde lo habíamos dejado. Decíamos que el tema no era nuevo sino novedoso. Y no es nuevo porque, salvo con los actuales programas de matemáticas modernas, la enseñanza de las matemáticas ha estado siempre relativamente centrada en la propia experiencia, en lo empírico, en lo concreto. Bien es verdad que con distintos enfoques, principalmente dos: uno consistente en considerar los procesos de aprendizaje vinculados a una intuición estática, en la que la construcción del conocimiento estaba centrada en una especie de actitud contemplativa, y otro en el que la intuición se entendía desde un punto de vista dinámico. El punto de vista dinámico se impone al estático; Gattegno, Castelnuovo, Puig Adam, Nicolet, miembros de la CIEAEM, (Comisión Internacional para el Estudio y Mejora de la Enseñanza de las Matemáticas), hablan de una enseñanza en la que el aprendizaje adquiera una mayor importancia. Decir aprendizaje es decir, también, protagonismo del niño. Las tesis de Piaget sobre psicología evolutiva aparecen ya reflejadas en el primer libro de la Comisión. Puig Adam llega a afirmar que el profesor debe parecerse cada vez menos a un conferenciante y cada vez más a un maestro de taller. El Aula-Taller, incluso el Laboratorio de Matemáticas, no es una invención de los ochenta.

Tras el Congreso de Royaumont, el academicismo matemático se impone y las llamadas "matemáticas modernas" impregnan los contenidos y métodos de la enseñanza.

Cuando decidí hablar de matemáticas experimentales en esta Conferencia, lo hice adrede: es importante dar un giro a la actual enseñanza de nuestra materia; nuestros actuales programas llevan a impartir una matemática carente de significado, ahistórica y acultural: el formalismo por el formalismo. El alumno está obligado a trabajar de forma rutinaria y memorística: la falta de referencias es absoluta. Frente a ello, creo que se impone la utilización de recursos, de materiales que "encarnen" los conceptos, los métodos y permitan aquello que constituye la esencia de toda disciplina científica y, muy en particular, de la nuestra: la abstracción. Partiendo del formalismo bourbakista, ¿qué puede abstraer un alumno?. Podrá memorizar, sólo memorizar. El alumno aprenderá matemáticas, pero no en la escuela. O como nos ha recordado recientemente Leone Burton, en todo caso el alumno se acostumbrará a pensar en matemáticas, pero no a pensar matemáticamente.

¿Es la Matemática una ciencia experimental?

El título de la conferencia puede conducir a la afirmación: La Matemática es una ciencia experimental. Si en algo han estado de acuerdo empiristas y racionalistas ha sido precisamente en la consideración de la matemática como una ciencia no empírica del conocimiento matemático.

Frege, que se sitúa en una posición platónica al afirmar: "Si en el flujo continuo de todas las cosas no persistiera nada firme, eterno, desaparecería la inteligibilidad del mundo y todo se precipitaría en la confusión", considera, sin embargo, que "El modo de consideración histórico, que trata de detectar el devenir de las cosas y de descubrir su esencia a partir de su devenir, tiene, sin duda, una gran justificación" y añade, "pero también tiene sus límites". (Gottlob Frege, Fundamentos de la Aritmética, Ed. Laia, 2ª edición, Barcelona 1973).

Lo que sí parece claro, es la vinculación de la matemática, en sus orígenes, con la experiencia y el quehacer humanos. Así, Boyer, en su Historia de la Matemática, afirma: "Durante un cierto tiempo se pensó que la matemática se refería directamente al mundo de nuestra experiencia sensible, y sólo en el siglo XIX se liberó la matemática pura de las limitaciones que implican las observaciones de la naturaleza. Está totalmente claro, no obstante, que la matemática apareció originariamente como parte de la vida diaria del hombre (...)"

Y más adelante, hablando del Papiro de Moscú (1890 a. C.) y refiriéndose al cálculo del volumen del tronco de pirámide, Boyer dice, "No se sabe cómo llegaron los egipcios a estos resultados, pero parece muy posible que la regla para el volumen de la pirámide tuviera un origen experimental, y quizá también para el volumen del tronco, aunque no es tan fácil. Para este último, parece más probable una explicación de base teórica, y se ha sugerido que los egipcios pudieron proceder aquí de una manera análoga a como hicieron en los casos de los triángulos isósceles y del trapecio isósceles, es decir, pudieron haber descompuesto, al menos mentalmente, el tronco de pirámide en paralelepípedos, prismas y pirámides".

Otro historiador, Eric Temple Bell, (Historia de las Matemáticas", 1985 - 1ª ed. original, 1945) refiriéndose al carácter deductivo de las matemáticas, afirma: "Existe un abismo entre el empirismo práctico de los agrimensores que parcelaban los campos del antiguo Egipto, y la geometría de los griegos del siglo VI a. C. Aquello fue lo que precedió a las matemáticas; esto, las matemáticas propiamente dichas; ese abismo lo salva el puente del razonamiento deductivo aplicado en forma consciente y deliberada a las inducciones prácticas de la vida diaria. Las matemáticas no existen sin la estricta demostración deductiva a partir de hipótesis admitidas y claramente establecidas como tales. Lo anterior no niega que la intuición, los experimentos, la inducción y el golpe de vista sean elementos importantes en la inventiva matemática; únicamente establece el criterio por el cual el resultado de todo golpe de vista, sea cual sea el nombre que se le asigne, se juzga o no como matemáticas. Así, por ejemplo, la regla útil y práctica de los babilonios -que el área de un campo rectangular puede medirse multiplicando "el largo por el ancho"- puede verificarse en la práctica con toda la exactitud físicamente posible, pero esa regla no se incorpora en las matemáticas hasta que se ha deducido de supuestos explícitos".

Y, a continuación, en vista del auge de las matemáticas aplicadas, Bell habla del prestigio matemático de los procedimientos semiempíricos de cálculo. Esta son sus palabras: "Es significativo asentar que esta diferencia tajante entre las matemáticas y las demás ciencias empezó a desaparecer por el rápido desarrollo de las llamadas matemáticas aplicadas durante la segunda guerra mundial. Los procedimientos semiempíricos de cálculo, necesarios por su utilidad práctica en la guerra, alcanzaron un completo prestigio matemático".

¿Qué diría Bell ante la demostración por ordenador del teorema de los cuatro colores dada a conocer por Hankel y Appel en 1976 y anunciada en las páginas del New York Times? Según Davis y Hersh (Experiencia Matemática, Ed. Labor-MEC, 1988), la crítica del filósofo consistiría en afirmar que "se está sacrificando una parte esencial de la certeza matemática al nivel vulgar del conocimiento ordinario, que está sujeto a un escepticismo posible y cierto del cual siempre estuvo libre el conocimiento matemático". Sin embargo, para estos mismos autores, el matemático lo verá de distinta manera según pertenezca o no a esa familia de matemáticos que se sienten cómodos con el ordenador.

El ordenador es, qué duda cabe, la herramienta moderna con la que vienen trabajando últimamente algunos matemáticos. Los matemáticos han venido utilizando desde siempre multitud de herramientas y artilugios; la regla y compás, los ábacos y la regla de cálculo, son los más conocidos junto con las calculadores modernas y los ordenadores.

A este respecto, cuenta Henri Poincare la manera de proceder, tan distinta, de los matemáticos. Y, hablando de Klein, refiere: "(...) estudia una de las cuestiones más abstractas de la teoría de funciones; se trata de saber si sobre cierta superficie de Riemann, existe siempre una fución que admite singularidades dadas. ¿Qué hace el célebre matemático alemán? Reemplaza la superficie de Riemann por una superficie metálica, cuya conductibilidad eléctrica varía según ciertas leyes. Pone dos de sus puntos en comunicación con los polos de una pila. La corriente, dice, tendrá que pasar y, la forma como esta corriente sea distribuida sobre la superficie, definirá una función cuyas singularidades serán precisamente las que están previstas por el enunciado.

Sin duda, Klein sabe bien que ahí no ha hecho más que una estimación aproximada; sin embargo, no ha vacilado en publicarla. Probablemente creía encontrar en ello, si no una demostración rigurosa, por lo menos no sé que certeza moral. Un lógico habría rechazado con horror una concepción semejante o, más bien, no habría tenido que rechazarla, pues nunca habría podido nacer en su mente". (H. Poincaré; El Valor de la Ciencia; Espasa-Calpe, 3ª Ed.).

El nombre de Matemáticas Experimentales está sacado de una cierta clasificación que suele hacerse de las tendencias en la enseñanza de las matemáticas. Según esta clasificación, se distinguen tres tendencias:

1.- Las Matemáticas y el Entorno.
2.- La Resolución de Problemas.
3.- Las Matemáticas Experimentales.

La primera de estas tendencias supone, antes que nada, un rechazo a las llamadas matemáticas modernas:

- Busca la motivación.
- Pretende la interdisciplinariedad.
- Considera a las matemáticas como una ciencia auxiliar.
- Aborda problemas de la realidad.
- La enseñanza se entiende integrada dentro de la realidad cultural. En este sentido, las matemáticas no son sino un instrumento cultural.

El Grupo Cero de Valencia, al que ya he aludido, fue en el segundo lustro de los 70 el principal impulsor de esta corriente. A nivel teórico, la escuela holandesa de Freudhental, con sus estudios sobre fenomenología de las estructuras didácticas, será la principal valedora de esta tendencia.

La segunda de las tendencias señaladas, la Resolución de Problemas, retoma la línea de Polya.- Las matemáticas son, al fin y al cabo, los problemas que la originan. Resolver los problemas es un proceso íntimamente vinculado al de construcción y descubrimiento de las matemáticas. La N.C.T.M. (National Council of Teachers of Mathematics), recomienda que la Resolución de Problemas sea el principal objetivo de la enseñanza de los 80. Alan Schoenfeld, uno de los principales teóricos de esta tendencia, distingue cuatro enfoques principales:

1.- Ejercicios muy sencillos situados en el contexto del mundo real.
2.- Problemas de Matemáticas Aplicadas o de "Modelos Matemáticos".
3.- Problemas que intentan explorar, desde un punto de vista psicológico, los aspectos del pensamiento matemático.
4.- Resolución de problemas en el sentido de Pólya, en cuanto al método heurístico y a las estrategias generales de Resolución.

En cuanto a la tercera tendencia, las Matemáticas Experimentales, que dan nombre a nuestra charla, reúne aspectos de las tendencias anteriores: por un lado, considera muy importante los procesos de elaboración empíricos y, en este sentido conecta con la primera tendencia; por otra, utiliza como método la Resolución de Problemas. Cuando se habla de matemáticas experimentales, se le suelen asociar las siguientes notas características:

1.- Las matemáticas experimentales se basan en el método científico de ensayo y error.
2.- La matematización se produce mediante un proceso de construcción de modelos.
3.- Disminuye el énfasis en las demostraciones deductivas y se atiende más a las aportaciones de pruebas y conjeturas, conectando de esta manera con la línea de matemáticas informales de Lakatos.
4.- Por otro lado, las matemáticas experimentales determinan un espacio "natural" para el aprendizaje: el taller o Laboratorio de Matemáticas.

Pero antes de seguir con esta ya larga perorata con la que tengo el riesgo de aburrir al auditorio, vamos a comentar algunos ejemplos.

1º Ejemplo: Trabajando con poliedros.[2]

La matemática sobre poliedros suele considerarse una materia acabada. Parece que poco más hay que decir y, mucho menos de los platónicos. Hablar de ellos a los niños suele ser un ejercicio entre cultural, estético y de descripción. Es ésta una opinión que debe estar bastante extendida, porque poco, muy poco se habla de ellos en los programas actuales. Pero si a la enseñanza se le da el enfoque constructivo de elaboración de las matemáticas por los alumnos, de la aprehensión por estos del proceso de elaboración, entonces tratar en clase el tema de los poliedros puede ser muy instructivo.

El ejemplo se refiere exclusivamente a una parte de todo el partido que se le puede sacar al estudio

[2] Ver ejemplificación en la sección "Para Coleccionar"

de poliedros, dentro de otro más general, de percepción y matematización del espacio tridimensional.

Utilizaremos como material los troqueles "Plot" o los polígonos de plástico engarzables conocidos como Polydron.

En una primera fase, dejamos que los alumnos jueguen con el material, que se familiaricen con él. Aparecen ya poliedros "monstruos", quizás por un tendencia natural en los niños de alejarse de lo convencional o simplemente por una estética distinta.

Solicitamos que construyan poliedros con un solo tipo de piezas (polígonos regulares). Construyen el cubo, el dodecaedro, el tetraedro y suele aparecer el octaedro y, a veces, también el icosaedro. No suelen faltar algunos deltaedros (poliedros con caras triángulos equiláteros) no regulares.

Durante este proceso, los alumnos han observado que no se pueden construir poliedros con el hexágono. El profesor interviene para solicitar si pueden obtenerse poliedros regulares con polígonos de seis o más de seis lados. He aquí una buena cuestión para reflexionar sobre los ángulos.

Descartados el hexágono y los polígonos de más lados, nos centramos en el triángulo, cuadrado y pentágono. La evidencia empírica lleva a que con el cuadrado sólo se puede montar un poliedro, el cubo, y lo mismo con el pentágono. Cuatro cuadrados suman en un vértice 360º y por lo tanto no pueden "subirse al espacio". Cuatro pentágonos suman más de 360º en un vértice.

No ocurre lo mismo con los triángulos equiláteros: aparte de los deltaedros que ya han obtenido, (tetraedro, octaedro, y algunos no regulares) comienza a aparecer toda una fauna. Solicitamos que los nombren y los caractericen. Surgen nombres más variopintos y una conjetura: sólo hay deltaedros con números pares de caras: 4, 6, 8, ...

¿Por qué no puede haber deltaedros con un número impar de caras? ¿Cómo se puede construir un deltaedro a partir de otro, del anterior? Ambas preguntas están relacionadas y el proceso de construcción nos facilita una prueba de la primera.

Debemos entrar en una sistemática de construcción y clasificación. Desechamos los deltaedros cóncavos porque pueden ser obtenidos por yuxtaposición de los convexos. Nombramos y buscamos características: el orden del vértice aparece casi a primera vista. Escribimos una tabla sobre el encerado y facilitamos los nombre genéricos y los "vulgares" cuando los conozcamos.

DELTAEDRO	C	A	V	V-3	V-4	V-5
Tetraedro	4	6	4	4		
Delta-6	6	9	5	2	3	
Octaedro	8	12	6		6	
Delta-10	10	15	7		5	2
Delta-12	12	18	8		4	4
Delta-14	14	21	9		3	6
Delta-16	16	24	10		2	8
Icosaedro	20	30	12			12

En esa tabla, se echa de menos el deltaedro de 18 caras. ¿Existirá o no el delta-18? ¿Por qué no aparece? Los intentos de cosntruirlos han sido vanos. Se impone la reflexión. Y lo natural es hacerlo sobre el propio proceso de cosntrucción y teniendo en cuenta las características de los vértices. Añadir sólo dos triángulos al delta-16 obligaría a un vértice a ser de orden 6., es decir, plano; sin embargo sí puedo añadir cuatro al delta-16, abriéndolo desde los dos únicos vértices de orden 4. [Un estudio detallado de lo que acabo de hacer, y más general sobre Poliedros, aparece en el libro de Gregoria Guillén Poliedros (Ed. Síntesis, Madrid, 1991)].

He aquí una construcción empírica y una prueba de la misma naturalea. Por el camino, los alumnos no sólo se han familiarizado con los poliedros y han aprendido sus nombres, también han efectuado caracterizaciones y clasificaciones, han realizado pruebas basadas en el propio proceso de construcción, se han hecho preguntas y han elaborado conjeturas. La actividad ha sido, sin duda alguna, muy rica.

2º Ejemplo: Midiendo en la realidad. Trigonometría.

El enfoque usual de la trigonometría, que se suele restringir a 2º de BUP, es decir a alumnos de 15 años, está encaminado al estudio de las funciones circulares. Por ello, tras una alusión a la semejanza, se suelen definir las razones trigonométricas, se generalizan para ángulos mayores de 90°, se representan gráficamente, se establecen las relaciones entre ellas y se estudian las fórmulas centrales (desde la llamada fórmula fundamental, hasta los conocidos desarrollos del seno, el coseno y la tangente de la suma de ángulos; fórmulas para el ángulo doble y mitad). Los ejercicios suelen girar sobre la adquisición de habilidades con éstas fórmulas para lo que se suele acudir a la comprobación de identidades y a las ecuaciones trigonométricas. Por último, se estudia la llamada Trigonometría plana, con los teoremas del seno y coseno. En definitiva, un enfoque en demasía internalista, con ejercicios de aplicación.

Desde una perspectiva de enseñanza experimental, el enfoque es otro y, desde luego, debería empezarse a edades más tempranas, pues lo esencial de la trigonometría es la medición.

La trigonometría nos proporciona una extraordinaria ocasión para imbuir a nuestro alumnos en una perspectiva más histórica y cultural, de matemática aplicada. En este sentido, un aspecto esencial es explicitar los llamados trabajo de Campo y trabajo de Gabinete. Es decir, hay unas medidas que se toman en la realidad, con unos instrumentos de medición, y unas tareas a realizar sobre la mesa, en la que se traducen los problemas reales de medición a problemas semejantes y se utiliza un cierto bagaje teórico.

Desde esta perspectiva, los clásicos problemas escolares de cálculo de distancias a puntos inaccesibles pueden hacerse simplemente a escala (incluidos los de pies inaccesibles): se utilizan los datos, distancias y ángulos, para elaborar, a escala, un dibujo en el que las incógnitas serán segmentos que hay que medir sobre el papel y restituir la escala. Es un método sencillo y de una gran potencia.

Las razones trigonométricas empiezan a jugar un importante papel en el momento en que intentamos prescindir del dibujo a escala, para hacer un trabajo más preciso, menos laborioso e independiente de los útiles de dibujo. Definir las razones trigonométricas, calcular tablas por medición y su generalización a ángulos mayores de 90°, son eslabones que pueden ir perfectamente engarzados en el planteamiento de problemas sobre medidas.

Un ejemplo simple: el cálculo de la altura de una torre. Sobre el terreno, se han medido la distancia desde el pie de la torre hasta el punto del observador, y, con un goniómetro vertical, se ha calculado el ángulo de la visual trazada hasta la cima de la torre. El dibujo de gabinete supone, en primer lugar, una decisión sobre qué escala se usará, la realización del propio dibujo y, finalmente, la restitución de la escala correspondiente. Al entrar en juego las razones trigonométricas, el problema se reduce a multiplicar la medida tomada por la tangente del ángulo medido. Así, disponer de una tabla de tangentes nos permitirá economizar esfuerzos y ahorrar tiempo.

De esta manera, las razones trigonométricas se introducen con problemas elementales; los alumnos construyen pequeñas tablas midiendo y calculando sobre triángulos rectángulos que ellos mismos han dibujado; han de decidir cuál sea la unidad de medida más conveniente, para calcular con más precisión, y sobre qué lado conviene tomarla para ahorrar cálculos. En este proceso, surge la circunferencia goniométrica, que a su vez, nos sugiere la generalización a ángulos mayores de 90° y negativos, y la representación gráfica.

La llamada trigonometría plana no es necesariamente el último eslabón, para el que además se necesitan los teoremas del seno y coseno, como sugieren los planteamientos escolares tradicionales. Como se ha estado trabajando con triángulos cualesquiera, y no sólo con triángulos rectángulos, los alumnos han tenido que utilizar la estrategia de la altura. Trazar la altura permite reducir el problema a triángulos rectángulos. La utilización de este recurso tan simple, no debe ser un paso dado por el profesor para demostrar los consabidos teoremas, sino un objetivo de conocimiento. Con la "estrategia de la altura", los teoremas de seno y coseno se introducen mediante la generalización de aquellos problemas que ya han sido resueltos.

Otro aspecto que me parece importante destacar desde la óptica experimental, es el cálculo exacto de razones trigonométricas. Es usual calcular las razones de 30°, 60°, etc. y, curiosamente, "por decreto", se suele trabajar con ellas más que con las aproximadas. Calcular valores exactos tiene el interés de trabajar directamente desde la teoría. Si calculamos el seno de 60°, tomaremos un triángulo equilátero, de lado unidad, trazaremos su altura, que además es mediatriz, mediana y bisectriz. Sobre uno de los triángulos rectángulos aplicamos la definición de seno al ángulo de 30° y obtenemos su valor exacto. A mí me gusta más hablar de valor teórico. Este valor me va a permitir obtener, si quiero, la aproximación que desee. He aquí una buena ocasión para que el alumno discierna la teoría de la práctica, que aquí aparece servida, en una confrontación ofrecida por los propios problemas y ejercicios. Desde esta óptica, el desarrollo de las razones trigonométricas de la suma, resta, ángulos doble y mitad, etc., adquiere una justificación clara, pues permitirá obtener más razones trigonométricas exactas, lo que parece deseable en cálculos de envergadura.

Por último, unas palabras sobre recursos. Desde la utilización de sombras hasta la astronomía, pasando por la construcción y utilización de goniómetros, deben ser puestos en juego para engarzar, desde la óptica en la que estoy situado, todos los elementos que pueden hacer de la trigonometría en la enseñanza secundaria una herramienta cultural, histórica, empírica y teórica.

No estará de más salir alguna vez al campo y realizar alguna mediciones sobre el terreno, provisto de una cinta métrica y de un teodolito (siempre que este no tenga tal margen de error que, a simple vista, consigamos mejores mediciones). Construir un goniómetro puede ser un ejemplo sencillo: una regla, un transportador de ángulo la cánula de un bolígrafo y una plomada casera, bastarán para que los alumnos construyean un goniómetro vertical y se hagan una buena idea de cómo se miden los ángulos en la realidad. La clase, un laboratorio o taller, desde el punto de vista experimetal, debe estar provista de distintas herramientas de medición: desde el teodolito señalado, hasta un curvímetro pasando por los aparatos de medición mediante ultrasonidos, relativamente económicos.

Sobre la utilización de la Astronomía les invito a leer un hermoso documento de trabajo titulado "Geometría y Luz", elaborado por nuestros compañeros del Grupo Halley.

3º Ejemplo: Probabilidad. El Problema de los Repartos.

Vamos a abordar un problema histórico, el de los Repartos, para diagnosticar un obstáculo epistemológico y enfrentarlo por vía experimental.

He aquí el segundo problema propuesto por De Méré a Pascal y que se considera históricamente como el origen del moderno cálculo de probabilidades, tras la fructífera correspondencia mantenida por el propio Pascal con Fermat:

> "Dos jugadores, de común acuerdo, deciden interrumpir una partida antes de su final y quieren hacer un justo reparto de las cantidades apostadas, de acuerdo con las probabilidades que tienen cada uno de ganar"

Pascal comenta a Fermat, en carta de 29 de julio de 1654:

> "Admiro más el método de las partidas que el de los dados [se refiere Pascal al primer problema planteado por De Méré, en el que se trata de averiguar a cuántos lanzamientos hay que jugar con dos dados, para tener la seguridad de que se apostará con ventaja]. He visto a varias personas descubrir el de los dados, como el caballero De Méré, que es el que me propuso estos problemas, y también a Monsieur de Roberval, pero el señor De Méré no pudo hallar nunca el valor exacto de los repartos, ni tampoco ningún rodeo para conseguirlo, de suerte que me encontré con que era yo el único que había conocido esa proporción".

Pascal resuelva el problema de la siguiente manera (en la hipótesis de que se juegue a ganar tres partidas y de que, en el momento de la interrupción, el primer jugador haya ganado dos partidas y el segundo una): "considerad, pues señor, [dice en la citada carta a Fermat] que si el primero gana, le corresponden 64 monedas ("pistolas"); si pierde, le pertenecen 32 [pues en ese momento ambos jugadores estarían empatados]. Por lo tanto, si quieren no arriesgar esta partida y separarse sin jugarla, el primero debe decir: "Estoy seguro de tener 32 monedas, porque incluso la pérdida me las da, pero en cuanto a las otras 32, tal vez yo las consiga, tal vez vos: la probabilidad es la misma; repartamos pues esas 32 monedas por la mitad y dadme, además, mis 32 monedas que tengo seguras". Tendrá pues 48 monedas y el otro 16".

Es decir, el reparto se hace de acuerdo con las proporciones: 3/4 y 1/4, que son las probabilidades calculadas por Pascal.

El análisis que hace Fermat, se basa en la Combinatoria. Pascal opina que ese método es excesivo y que el suyo es más corto y más claro.

En una segunda carta a Fermat, de 24 de agosto de 1654, le dice que Roberval ha objetado su método: "Que es un error que se establezca que el arte de hacer el reparto basándose en la suposición de que se juega en cuatro partidas, habida cuenta que, cuando le faltan dos partidas a un jugador, y tres al otro, no es necesario que se jueguen cuatro partidas, pudiendo suceder que sólo se jugarán dos o tres o, a la verdad, tal vez cuatro". (Roberval se está refiriendo al caso en que a un jugador le faltan tres partidas y al otro dos).

La posición de Roberval lleva implícita que en el caso de que a un jugador le falte 2 partidas y al otro 1 las probabilidades respectivas serían de 1/3 y 2/3.

Y hasta aquí, la referencia histórica.

¿Qué ocurre en clase?

Suelo plantear, en lugar del enunciado histórico, otro de idéntica estructura:

"Se lanza una moneda en dos ocasiones. El jugador A gana en cuanto sale Cara y el jugador B cuando salen dos Cruces. ¿Qué probabilidad tiene cada jugador de ganar?"..

El planteamiento de los alumnos es similar al de Roberval: organizan tres tipos de partidas: C, +C y ++; es decir Cara, Cruz-Cara y Cruz-Cruz. Y añaden: "A tiene 2 posibilidades sobre 3; su probabilidad será 2/3. La de B será 1/3".

Este problema es fácil de realizar experimentalmente. Se puede simular bastante bien con una tabla aleatoria. Realizada la simulación, el resultado se sitúa en torno a 3/4 y 1/4. Los alumnos han de enfrentarse con la discrepancia entre sus modelos.

Cuando he planteado directamente el problema histórico, en el supuesto de jugarse a tres partidas y habiendo ganado ya A le queda una partida y a B dos para ganar; el reparto estará en la proporción 2:1. Es decir, las probabilidades asociadas serán 2/3 y 1/3". Estamos en la misma situación que con el juego de Cara y Cruz. Antes, los alumnos lo abordaron por el método de Fermat y ahora, según el de Pascal. Desafortunadamente, mal en ambos casos.

Nos enfrentamos a una situación didáctica conocida: un obstáculo epistemológico. Los modelos teóricos elaborados por los alumnos son claros y rotundos (como lo era para Roberval). Didácticamente, los obstáculos deben ser sacados a la luz y los alumnos deben enfrentarse a ellos. La utilización de recursos experimentales (en este caso, la simulación) viene en nuestra ayuda al plantear a los alumnos el conflicto entre resultados dispares para un mismo problema.

El obstáculo citado está relacionado con la noción de equiprobabilidad. Los alumnos han considerado que todos los casos son equiprobables y han efectuado la proporción. ¿Qué ocurre, pues, con las clases ordinarias en las que la probabilidad se centra en el modelo de Laplace de casos favorables entre casos posibles?. Pues ocurre que los alumnos jamás se enfrentan al citado obstáculo, que se rehuye mediante la combinatoria, en busca de espacios probabilísticos equiprobables. Pascal le decía a Fermat que su método era laborioso. Y no le faltaba razón. Nuestros programas oficiales de probabilidad se centran más en la combinatoria que en el estudio del azar, con lo que no se da al tema su carácter más apreciado: el de adentrar a los alumnos en un modelo no determinista.

La realización y simulación de experiencias son una estrategia sencilla, que debería ser utilizada en la escuela como señalaban Vergas y Glaymann en su extraordinario librito "La Probabilidad en la Escuela". Hacer la probabilidad de esta manera, es adentrarse en lo que estoy definiendo como matemáticas experimentales.

Con los ejemplos anteriores he pretendido ejemplificar el enfoque experimental de la enseñanza de las matemáticas.

En el ejemplo de los poliedros platónicos, hemos visto cómo se puede realizar un proceso constructivo de lenguaje, conjeturas y pruebas desde una óptica empírica.

Con la trigonometría, hemos utilizado problemas reales que hemos matematizado a través de la semejanza, construyendo las razones trigonométricas; hemos marcado claramente la diferencia entre los procedimientos experimentales de medición y la utilización de modelos teóricos (en el cálculo de valores exactos), adentrándonos así en una valoración de la propia teoría.

En el ejemplo de los Repartos, hemos visto cómo desde la óptica experimental pueden abordarse los obstáculos epistemológicos a través del conflicto cognitivo que supone la confrontación de resultados dispares obtenidos por procedimientos distintos. Además, hemos comprobado cómo la historia nos puede servir para detectar posibles obstáculos que también tienen lugar en la enseñanza.

En los tres ejemplos hemos utilizado distinto tipo de materiales. En el caso de los poliedros, el material "Plot" o "Polydron"; en Trigonometría, desde los goniómetros hasta los instrumentos de dibujo para el trabajo de gabinete. En Probabilidad hemos utilizado monedas o hemos simulado el problema con tablas aleatorias.

La utilización de materiales y recursos diversos suele ser una característica esencial de las matemáticas experimentales. El lugar idóneo para trabajar con estos materiales es un Aula-Taller de Matemáticas y se concreta en una estructura educativa conocida como Laboratorio de Matemáticas.

El Laboratorio de Matemáticas

Ya he señalado cómo el espacio natural para el desarrollo de la enseñanza y aprendizaje desde el punto de vista experimental es el Laboratorio de Matemáticas. Pero al decir espacio natural, no nos estamos refiriendo a un Laboratorio en el sentido escolar clásico de un lugar al que se va a experimentar, a hacer prácticas. No. Se podría hablar de Laboratorio de Matemáticas sin que hay un lugar específico y determinado; es decir, sin disponer de un Aula-Taller. De hecho, más adelante, nos referiremos a los Laboratorios Móviles. Aclaremos, pues, que el Laboratorio es, antes que nada, una estructura para la enseñanza y el aprendizaje en la que se concreta la enseñanza experimental. Tendríamos que hablar entonces, más que de Laboratorio, de situaciones de Laboratorio.

Según Fortuny y Giménez, (Els Material del Laboratori de Matematiques, Dpto. de Didáctica de la UAB, 1988) que citan al pedagogo italiano De Bartolomeis, un Laboratorio es "un espacio de comportamiento y una forma de producción".

Veamos las dos notas características que señala De Bartolomeis.

Una forma de producción quiere decir, "una actitud investigadora respecto a la construcción de conceptos, la resolución de problemas, la innovación organizada, la preparación de procedimientos de investigación, de técnicas de colaboración, etc.".

Por espacio de comportamientos, se entiende "el proceso o forma de construir un concepto, de asumir una línea gradual y personal de aprendizaje".

Desde el punto de vista de las matemáticas, la estructura de Laboratorio se basa en una concepción informal de las mismas, en el sentido de Lakatos. Hacer matemáticas es un proceso constructivo, nunca terminado, en el que se realizan pruebas y conjeturas. Ya lo vimos en el ejemplo de los poliedros. Los alumnos conjeturan que se pueden construir los deltaedros con un número par de caras, hasta 20. El proceso de construcción refuta esta conjetura al no encontrarse deltaedros de 18 caras.

La estructura de Laboratorio se fundamenta en las tesis constructivistas de la enseñanza. El alumno se enfrenta a su aprendizaje a través de la acción, poniendo en juego su intuición, su lenguaje, su capacidad descriptiva y de abstracción, su visión estética. En unos casos, la acción es manipulativa y concreta, a veces lúdica; en otros es representativa y simbólica y, finalmente, formal, de acuerdo con los estadios evolutivos por los que atraviesa el alumno.

En cuanto a la pedagogía, el Laboratorio se basa en el método experimental, que abarca, con los pasos anteriormente señalados, desde lo intuitivo y empírico hasta lo teórico, pasando por el experimento mental. Según Giménez y Fortuny: "La estructura de Laboratorio da la oportunidad de experimentar: más que en la idea clásica de laboratorio, pensamos en situaciones de Laboratorio, que enfatizan el hecho de que el alumno es un participante activo que construye sus propios conocimientos, en contraposición a la concepción del alumno como receptor de los conocimientos ya acabados. Por tanto, el profesor ha de convertirse en el promotor del conocimiento más que en su emisor".

Para que una estructura de Laboratorio sea posible hay que disponer de un espacio organizado y equipado que favorezca la actividad investigadora. Debe, pues, disponerse necesariamente de un Equipo de Profesores que hará las veces de Centro de Programación y Control del trabajo del Laboratorio. Será misión de este equipo, tomar las decisiones sobre qué tipo de actividades se realizan y con qué materiales, qué problemas se proponen y qué ejercicios; cómo enlazan las actividades con el programa del departamento, cuándo estas actividades han de ser de investigación de consolidación o de evaluación del alumno; corresponde igualmente a este equipo la evaluación de las experiencias realizadas, es decir, del propio laboratorio. En definitiva, y dicho brevemente, el Equipo de Profesores ha de realizar la tarea de programación y organización.

Además del Equipo de Profesores, el Laboratorio debe disponer de medios y material. Respecto a los medios, retroproyector, proyector de diapositivas, pantalla, pizarra, vídeo y monitor y ordenadores. En cuanto al material, desde el software y vídeos didácticos hasta las tramas, pasando por los clásicos instrumentos de regla y compás, troqueles para poliedros, polígonos para mosaicos, dados, ruletas, calculadoras, y un largo etc. cuya enumeración nos llevaría al aburrimiento. A los ordenadores y al software didáctico dedicaré la última parte de esta charla.

Según la ubicación de los materiales, se distingue entre Laboratorios Móviles y Laboratorios Fijos. Los primeros suponen evidentemente una tarea suplementaria para el profesor, que ha de estar llevando, cada vez, el material al aula de los alumnos. Esta estructura móvil se lleva a cabo cuando no se puede disponer de un Aula-Taller. Lo deseable, evidentemente, es un Aula-Taller en la que se dispone del material y medios, organizados de tal manera que su utilización no demore la marcha de la clase.

Si lo deseable, desde mi punto de vista, es disponer de un Aula-Taller y de muchos medios y materiales, quiero insistir en la idea de que lo importante son las llamadas situaciones de laboratorios. O dicho de otra manera, aún cuando no se disponga de un espacio físico ad hoc, muchas actividades pueden ser realizadas en el aula de la clase y con pocos medios.

Un ejemplo muy simple: el trabajo con tramas. Repartimos tramas cuadradas a los alumnos. Solicitamos que construyan polígonos de perímetro $8+4\sqrt{2}$. Los alumnos obtienen soluciones diversas. Algunos, muy pocos, obtienen también polígonos estrellados.

Sobre éstos últimos surgen las dudas: ¿Valen o no valen como solución? ¿Es o no un polígono esa figura?. La discusión se centra sobre si es o no un polígono. Hay quien dice que sí; hay quien opina que son dos triángulos. El profesor plantea la pregunta, ¿Cuándo una figura es un polígono?

Es ésta una situación típica de laboratorio que se puede realizar sin más medios que una trama cuadrada de puntos. Hay otras muchas que pueden ser realizadas con pocos materiales y medios o con medios muy rudimentarios. Al fin y al cabo, de lo que se trata es de fomentar situaciones en la que el alumno se adentre en su propio aprendizaje y lo haga con curiosidad e interés.

Para terminar, quiero señalar dos cosas. Por un lado, que, en conexión con la Reforma y la innovación, el Laboratorio puede ser planteado como una estrategia para el cambio. Una estructura de Laboratorio es lo suficientemente flexible como para que en ella pueda trabajar un equipo de profesores y no todo el departamento o Seminario del Centro. Además, es una estructura que se hace; es decir, las experiencias pueden abordarse parcialmente y poco a poco. Por otro lado, hay un referencia en los centros: los laboratorios de las materias experimentales; de ellos se puede partir como modelo; pero, eso sí, con la idea de llegar al Laboratorio en el sentido que hemos señalado desde el principio. Por otro lado, el Laboratorio hay que entenderlo como una integración de las viejas y nuevas tecnología. No se trata de tener los mejores medios y materiales, sino los más adecuados y aquellos que cumplen una clara función en el aprendizaje, aportando alguna especificidad. Las nuevas tecnologías suelen ser un mito; sólo su confrontación en un mismo espacio de trabajo nos hará ver qué ventajas tienen éstas respecto de aquéllas y cuándo ambas pueden complementarse.

Dedicaremos la última parte de nuestra charla a una de esas nuevas tecnologías: los ordenadores y el software didáctico.

Las nuevas tecnologías

Me voy a centrar, como he dicho, en los ordenadores y el software didáctico, pero antes quiero dedicar, aunque sólo sea una alusión, a los vídeos y a las calculadoras.

Los vídeos son un extraordinario material visual en los que las imágenes adquieren su mejor dinamismo. Son, desde el punto de vista de la enseñanza de las matemáticas, una continuación de los filmes matemáticos de Nicolet bajo un nuevo soporte más ágil y económico. Su incorporación a las aulas supone llevar la enseñanza al terreno donde ha encontrado una mayor competencia fuera de las clases; se dice que estamos en una cultura de la imagen. Incorporémosla, pues, a la educación.

En cuanto a las calculadoras, aún persiste la duda sobre su uso. La polémica, ciertamente, es cada vez más apagada, pero se insiste en "el buen uso de la calculadora", o en "un uso adecuado"; ¿es que de los demás medios no hay que hacer también un buen uso?. Por supuesto, cuando se utilizan eufemismos como los indicados, no se está pensando en la calculadora como favorecedora del cálculo mental o como un instrumento para la Resolución de Problemas; se está pensando en las habilidades algorítmicas. En relación con estas habilidades, decía Peter Hilton (entrevista publicada en Crónica d'Ensenyament), que "seguimos intentando que los alumnos calculen de manera rápida y precisa, cuando las verdaderas matemáticas son las que llevan a comprender el por qué del funcionamiento de las operaciones elementales. Saber dividir con precisión y rapidez no tiene sentido desde el momento en que hay una máquina que lo hace".

Yo añadiría que los algoritmos están vinculados a los medios y que nuevos medios posibilitan la utilización de nuevos algoritmos. Es una realidad que cada vez se enseña menos el algritmo usual de la raíz cuadrada (por supuesto, nadie aprende ya el de la raíz cúbica).

La calculadora está haciendo posible la realización de cálculos antes impensables y permitiendo el planteamiento de problemas que, por su laboriosidad, antes nunca se acometían.

Pero si la calculadora está cambiando el panorama de la enseñanza, dando alternativas a los algoritmos elementales de suma, resta, multiplicación y división, y permitiendo su utilización el abordaje de otros problemas, entrando en el terreno de la Resolución de Problemas, ¿qué decir de los ordenadores?

Yo creo que los ordenadores son un extraordinario recurso para una enseñanza experimental de las matemáticas y quiero, al final, poner algún ejemplo. Pero antes, creo que es obligada una reflexión sobre su utilización.

La importancia de los ordenadores, y en general de las nuevas tecnologías, parece tal que los distintos Gobiernos han elaborado y elaboran planes institucionales de preparación del profesorado, de utilización en clase y de su inclusión en los currículos escolares. Las esperanzas puestas en los ordenadores hacia final de los 70 y principios de los 80 sobre las virtualidades de los mismos parecen que, hay por hoy, no se cumplen. Tal vez el papel del ordenador en la enseñanza sea más modesto del que, en principio, se le suponía. El Logo que, antes que un lenguaje de programación, es una filosofía de la enseñanza, parecía una herramienta tal que su introducción en las aulas iba a revolucionar la educación. Sin embargo, no ha sido así y hoy se le asigna un papel más humilde que el que se le suponía. S. Papert, su creador, denomina tecnocentrismo a aquella actitud consistente en colocar al ordenador en el centro del proceso de enseñanza y advierte que, "(...) si nos interesa eliminar el tecnocentrismo del tema de las computadoras, podemos encontrarnos en la necesidad de revisar nuestros conceptos sobre la educación, que son muy anteriores al advenimiento de los ordenadores", indicando inmediatamente que "podría argüirse que la principal contribución de las computadoras a la educación ha sido el obligarnos a repensar en temas que, en sí mismos, nada tienen que ver con las computadoras". Y más adelante, refiriéndose al Logo, dice: "No preguntéis qué puede hacer Logo con la gente, sino qué puede hacer la gente con Logo". (S. Papert, "Crítica del Tecnocentrismo", artículo publicado en Idealogic, 1986).

La actitud tecnocentrista ha desarrollado un conjunto de síntomas que yo no he dudado en calificar de "síndrome de la quincallería" o "síndrome de la cacharrería". El ordenador ha adquirido tal importancia que, en muchos casos, se ha convertido en sujeto, desvirtuando el discurso educativo. Esta actitud, seguramente obligada en el proceso de adecuación de esa tecnología a la enseñanza, ha imposibilitado un mayor y mejor avance en los cambios curriculares, necesarios en toda Reforma que contemple la realidad en la que está inmersa.

Pero, a pesar de esta actitud, se ha avanzado. No se ha llegado al punto que muchos podrían esperar en cuanto a su presencia en las aulas. Pero hay un abundante software cuya utilización incidirá en la mejora de la enseñanza.

Llegado a este punto, debemos preguntarnos, ¿qué software?.

Creo que, en clase, hay tres enfoques posibles de los ordenadores, teniendo en cuenta el software que se utilice: Mimético, Conductista y, por último, Experimental.

El enfoque mimético, que también es frecuente en los vídeos, consiste en utilizarlo como un medio sin especificidad propia; constituyen un ejemplo de mimetismo todos aquellos programas que "copian" el libro de texto y lo transcriben a una pantalla, utilizando el color y la movilidad del ordenador y, como pretexto, la pantalla (con estos programas se corre el peligro de hacer a los niños y niñas más teleadictos cada vez...!). Es también mimético todo software que, con uno u otro estilo, desarrolla una programación didáctica, o parte de ésta, sin habérsela cuestionado previamente. El desarrollo de todas las fórmulas trigonométricas, tal y como aparecen en los programas ordinarios, puede prepararse mediante una hoja de cálculo; pero el punto de vista del enseñante debería ser anterior: ¿tiene interés o es conveniente dicho desarrollo?; caso contrario, resucitaríamos las fórmulas de Briggs; y el problema no está, obviamente en su resurrección, sino en su sentido didáctico y en su oportunidad.

En cuanto al enfoque conductista, también conocido como enseñanza programada, consiste en realizar una enseñanza del paso a paso, con retrocesos (feed-bak), con "repasos" en aquellos puntos en que se producen errores. La "máquina de enseñar" fue utilizada como herramienta antes de la introducción masiva de los ordenadores. Estos serían para los conductistas las mejores máquinas de enseñar.

Hay muchos programas con este enfoque; al alumno se le va llevando poco a poco hacia la solución, con pequeñas unidades de información.

La utilización de los ordenadores, en este caso, es específica: un libro nunca tendrá la movilidad y agilidad requerida para éste tipo de enseñanza. Pero, en este tipo de programas, la interacción de los alumnos suele ser mínima, pues la propia filosofía conductista es, precisamente eso: un único camino en el que si el alumno se pierde debe volver a rememorar para seguir por ese mismo sendero.

Por último, hay un enfoque que he llamado experimental, es decir, consistente en la utilización de los ordenadores desde la óptica del método experimental. Se concibe el ordenador como una herramienta más que el alumno utiliza en su aprendizaje. No se pretende que el ordenador sustituya a nada ni a nadie; ni a los libros, como en la óptica mimética, ni a los profesores, como puede pretender el conductismo. El ordenador, desde el momento que está inserto en una estructura de Laboratorio, juega un papel específico, acorde con su virtualidad.

El principal elemento que se pone en juego en un software experimetal es el carácter interactivo del ordenador: el ordenador no hace preguntas y el alumno responde, sino que se establece un flujo de comunicación mediante el cual el alumno puede explorar, comprobar, investigar, elaborar conjeturas, refutarlas; en definitiva, experimentar.

Hay un par de programas didácticos que, a modo de ejemplos, y para terminar, quiero comentar. Uno de ellos, se titula GRÁFICOS y está elaborado por D. Tall y otros, y traducido por el equipo "Ábaco", de la Comunidad Canaria. Parte del programa es parecido al Eureka o a la parte gráfica del Derive. Dicho programa se dedica a la representación gráfica, desde las funciones elementales hasta las de variable compleja, pasando la representación de funciones en el espacio (de dos variables y paramétricas). Calcula gráficamente la derivada e integrales por distintos métodos y resulve ecuaciones por métodos numéricos.

La exploración que el programa permite hacer de las funciones es típicamente experimental. El alumno puede verificar si tal o cual función tiene la representación gráfica esperada. Puede explorar dónde hay asíntotas, dónde un máximo, etc. Puede, además, introducir funciones con parámetros dados y ver qué influencia tienen tales parámetros. A modo de ejemplo sencillo, diré que se puede experimentar cómo cambia la forma de una parábola al variar la amplitud. En pantalla pueden mantenerse varias representaciones para su comparación. Además, podemos hacer el proceso inverso: dar una gráfica y solicitar su ecuación.

La derivada y la integral, pueden ser igualmente exploradas a nivel gráfico. En el primer caso podemos ver cómo varía la recta tangente dentro del dominio especificado y obtener, además, a través de los distintos métodos de integración (rectángulos, trapecios, Simpson).

El segundo programa al que me voy a referir es conocido como CABRI. Ha sido elaborado por El Laboratorio de Estructuras Discretas de la Universidad de Grénoble y fue presentado en el ICME-6 (6ª Congreso Internacional de Educación Matemática), celebrado en Budapest en agosto de 1988. Hay implementaciones de este programa para PC's y Macintosh.

Es un programa sobre geometría elemental. Reconoce como objetos los puntos, segmentos, rectas, triángulos y círculos. Pueden construirse mediatrices, puntos medios, medianas, centros de círculos, rectas paralelas, bisectrices de ángulos. El usuario puede, por su cuenta, preparar otras construcciones mediante un proceso denominado "macro-construcciones", e incorporarlas al menú. Las construcciones usuales de regla y compás y los lugares geométricos de puntos, se realizan con bastante facilidad, aunque en este último caso, los objetos generados no son reconocibles como tales por el programa.

Dispone también de un "histórico" y un diario de sesiones, que nos permiten recrear las construcciones realizadas, desde el primer paso hasta el último. Finalmente, pueden medirse ángulos y segmentos.

El programa es fácil de manejar y totalmente interactivo. Es ideal para el aprendizaje de la geometría elemental plana y el desarrollo del lenguaje correspondiente.

Los objetos pueden ser desplazados por la pantalla, según el grado de libertad y con las condiciones de dependencia que haya entre ellos. Estos desplazamientos permiten comprobar experimentalmente teoremas como los referidos a los puntos notables de los triángulos, equidistancias de la bisectriz y la mediatriz, teorema de Pitágoras, condiciones para la existencia de un triángulo, según las medidas de los lados, etc.

Es, en fin, un programa que genera situaciones dinámicas para el aprendizaje de la geometría elemental plana.

Antonio Pérez Jiménez
I. B. Nervión. Sevilla

El desarrollo del razonamiento lógico en matemáticas: correlación y combinatoria

José Antonio Acevedo Díaz
Sixto Romero Sánchez

En la teoría del pensamiento formal de Piaget aparecen diversos esquemas operatorios relacionados con el razonamiento matemático. En el presente artículo se estudian algunos aspectos de dos de estos esquemas: la correlación y la combinatoria. Se analizan las respuestas de estudiantes de Educación Secundaria (BUP, COU y Reforma) a cuatro tareas del Test de Razanamiento Lógico (TRL). La evaluación se ha centrado sobre todo en la discusión de los pincipales errores sistemáticos encontrados. Asimismo, se sugieren implicaciones para la enseñanza de estas nociones desde el punto de vista del aprendizaje y el desarrollo cognitivo de los estudiantes.

Introducción

Como es sabido el razonamiento correlacional implica identificar y verificar relaciones entre variables, siendo precisa alguna forma de comparación entre aquellos datos que confirmen la hipótesis a prueba y los que se muestren contrarios a ella. Según Inhelder y Piaget (1955) la adquisición del concepto de correlación supone la conjunción de otros esquemas operatorios formales, tal y como los de proporcionalidad y probabilidad, ya que son necesarios cálculos de ambos tipos para hacer una estimación correlacional. Desde esta óptica puede considerarse entonces que la noción de correlación sería un poco más compleja que la de probabilidad.

Por otro lado, estos mismos investigadores entonces encontraron también que, durante el período de las operaciones concretas, los niños y las niñas intentan la construcción de todas las combinaciones posibles de los elementos de un conjunto, llegando a elaborar espontáneamente, por ensayo y error, algunos procedimientos rudimentarios cuando el número de elementos es pequeño (Piaget e Inhelder 1951). Sin embargo, a partir de ahí no conseguirían generalizar ni usar ningún método sistemático, competencia que se adquirirá plenamente una vez alcanzado el pensamiento formal. Otros autores, en cambio, opinan que esto último es solamente más bien una capacidad potencial para la mayoría de los sujetos, que pueden extenderse incluso a esades más tempranas (Fischbein, 1975), por lo que dirigen su atención al efecto de la enseñanza sobre la formación de estas habilidades cognitivas.

En este trabajo indagaremos en los razonamientos correlacional y combinatorio de los estudiantes de Enseñanza Secundaria para, entre otros fines, tratar de establecer una posible clasificación en categorías de sus respuestas más representativas a diferentes tareas, haciendo especial hincapié en la evolución a lo largo de la escolarización de los principales errores sistemáticos encontrados. De este modo el presente estudio complementa otro anterior sobre la proporcionalidad y la probabilidad (Acevedo y Romero 1991), nociones con las que, desde el punto de vista del desarrollo cognitivo, se emparentan de alguna manera la correlación y las operaciones combinatorias. Ampliaremos pues aquí la evaluación que venimos realizando sobre la comprensión de algunos conceptos de gran interés interdisciplinar y los procedimientos matemáticos asociados a ellos, cubriéndose así uno de los principales propósitos del Proyecto TRL (Acevedo, 1991) en el cual se inserta esta investigación.

Procedimiento

La muestra participante en el esetudio ha sido de 581 alumnas y alumnos de Enseñanza Secundaria (BUP, COU y Reforma) que, durante el curso 1989-90, estudiaban en tres Institutos de Bachillerato de Huelva, uno de la capital y dos de la provincia. La distribución de la misma por niveles escolares fue la siguiente: 135 de 1º, 225 de 2º, 133 de 3º y 88 de COU/4º, con edades comprendidas entre 14 y 19 años. Socioculturalmente la población de la muestra puede considerarse entre media y media-baja.

Los problemas que se han utilizado en este trabajo son las cuestiones 7, 8, 9 y 10 del *Test de Razonamiento Lógico (TRL)*, el cual es la traducción castellana, realizada en 1989 por profesores de Cádiz miembros del Seminario Permanente de Investigación en Didáctica de las Ciencias, del *Test of Logical Thinking (TOLT)* de Tobin y Cpie (1981), que han sido validados respectivamente con muestras de alrededor de un millar y medio de estudiantess de un amplio rango de edades y niveles de escolarización, tanto en su versión original inglesa (Tobin, 1988) como en la española (Acevedo y Oliva, 1990). Como puede comprobar en el anexo, dos de las tareas son de correlación de probabilidades y las otras dos de operaciones combinatorias (ordenaciones por permutación y agrupaciones por combinatoria simple).

Las respuestas a los problemas planteados se han asociado en distintas categorías, lo que nos ha permitido elaborar una clasificación de los principales tipos de razonamiento, correctos y erróneos, para cada una de las dos nociones manejadas. Por otra parte, aunque la metodología seguida ha sido de naturaleza transversal, se ha hecho una extrapolación a partir de las frecuencias relativas de los distintos razonamientos para así poder estimar cómo evolucionan éstos a través del Bachillerato.

De esta forma los resultados que se describen y discuten a continuación permiten valorar los progresos de los escolares, desde una perspectiva psicoevolutiva del aprendizaje de las Matemáticas que presten atención a los obstáculos que encuentran para adquirir los conocimientos (Velázquez, 1991), así como evaluar también la incidencia de la enseñanza en los aspectos citados.

Resultados

Esquemáticamente podemos clasificar las respuestas a las cuestiones según los siguientes modelos de razonamiento:

a) *Categorías correspondientes a las tareas de correlación*

CR.1 Correlación correcta.
CR.2 Observaciones cualitativas sin relacionar las frecuencias.
CR.3 Se computan todos los datos aunque sin considerar por separado las frecuencias.
CR.4 La estimulación se hace a partir de sólo dos clases de datos.

b) *Categorías correspondientes a las tareas de combinatoria*

CB.1 Agrupaciones combinatorias y permutaciones correctas.
CB.2 Se intenta controlar las variables necesarias, pero no hay un procedimiento sistemático en la resolución.
CB.3 No hay control efectivo de las variables. Las respuestas parecen generadas al azar.

En la tabla 1 se muestran los porcentajes de los distintos tipos de razonamiento para cada una de las cuestiones de correlación, indicándose también qué tanto por ciento de la muestra resuelve correctamente los dos problemas y cuál no hace bien ninguno delos dos. En la tabla 2 se hace lo mismo con los datos correspondientes a las cuestiones de combinatoria.

Tabla 1 Frecuencias relativas, expresadas en tanto por ciento, de las categorías de razonamiento utilizados en la resolución de tareas de correlación del TRL

Tareas	CR.1	CR.2	CR.3	CR.4
Correlación (1)	28,4	28,6	25,5	6,4
Correlación (2)	35,3	35,6	7,6	6,9

El 14,5% resuelven bien los dos problemas, mientras que el 50,9% no hace bien ninguno de los dos.

Tabla 2 Frecuencias relativas, expresadas en tanto por ciento, de las categorías de razonamiento utilizados en la resolución de tareas de combinatorias del TRL

Tareas	CB.1	CB.2	CB.3
Combinatoria (1)	34,4	50,4	13,1
Combinatoria (2)	32,5	37,3	21,2

El 20,3% resuelven bien los dos problemas, mientras que el 53,2% no hace bien ninguno de los dos.

Por último, en las tablas 3 y 4 se expresan, distribuidos por niveles escolares, los porcentajes de los principales modos de razonamiento referentes, respectivamente, a los problemas de correlación y combinatoria. Estos datos permiten construir las trazas evolutivas que se representan en las figuras 1, 2, 3 y 4.

Tabla 3 Distribución por cursos de las frecuencias relativas, expresadas en tanto por ciento, de los modos de razonamiento utilizados en la resolución de tareas de correlación del TRL

Categorías	BUP/REF			COU/4º REF
	1º	2º	3º	
CR.1 (1)	23,0	31,6	27,8	29,5
CR.2 (1)	40,7	24,4	27,1	22,7
CR.3 (1)	17,8	31,6	27,1	19,3
CR.4 (1)	5,2	3,1	9,8	11,4
CR.1 (2)	29,6	33,8	32,3	52,3
CR.2 (2)	48,9	33,8	35,3	21,6
CR.3 (2)	8,1	8,4	9,0	1,1
CR.4 (2)	3,0	7,6	7,5	10,2

Entre paréntesis se indica la referencia a la primera o a la segunda tarea de corrección.

Tabla 4 Distribución por cursos de las frecuencias relativas, expresadas en tanto por ciento, de los modos de razonamiento utilizados en la resolución de tareas de combinatoria del TRL

Categorías	BUP/REF			COU/4º REF
	1º	2º	3º	
CB.1 (1)	23,7	29,8	43,6	48,9
CB.2 (1)	55,6	56,0	42,9	39,8
CB.3 (1)	16,3	12,4	12,0	11,4
CB.1 (2)	21,5	32,9	32,3	48,9
CB.2 (2)	37,8	37,8	42,1	28,4
CB.3 (2)	27,4	21,8	13,5	21,6

Entre paréntesis se indica la referencia a la primera o a la segunda tarea de combinatoria.

Discusión

Razonamiento correlacional

En las tareas de correlación del TRL hay dos variables dicotomizadas que, al combinarlas entre sí, dan lugar a cuatro clases de casos. La resolución correcta de ambos problemas implica utilizar separadamente los datos de las diferentes clases establecidas para calcular dos probabilidades en forma de proporción que después hay que comparar.

Las justificaciones de las respuestas incluyen básicamente tres tipos de razonamientos erróneos. El que se ha detectado más frecuentemente, con una incidencia próxima a la tercera parte de la muestra, consiste en hacer únicamente observaciones cualitativas que, evidentemente, resultan insufi-cientes. Este modo de razonar se manifiesta un poco más en la segunda cuestión que en la primera, subyaciendo también en el mismo dificultades con la noción de probabilidad.

Otro razonamiento incorrecto supone centrar la atención en las sumas parciales de los datos correspondientes a cada categoría de una de las variables. Aunque en el cómputo se usan todos los datos del problema, las frecuencias no se consideran por separado, lo que conduce a una comparación inútil para la correlación pedida. Este fallo se comete sobre todo en la primera de las tareas, en donde aparece para alrededor de la cuarta parte de las explicaciones recogidas.

Por último, hay un error más minoritario que, sin embargo, ha supuesto aproximadamente una de cada diez respuestas de los estudiantes de COU en ambas cuestiones. En este tipo de razonamiento no se emplean todos los datos necesarios, limitándose el sujeto a estimar una sola frecuencia relativa a partir de los correspondientes a dos de las cuatro clases posibles.

Prácticamente la mitad de los estudiantes encuestados no resuelven correctamente ninguno de los dos problemas, mientras que solamente uno de cada siete hace bien los dos. Los resultados son ligeramente mejores para la segunda de las tareas, lo que concuerda con lo obtenido anteriormente por Garnett y Tobin (1984). Asimismo, cabe señalar que los porcentajes de ausencia de respuesta son similares en ambos problemas (3,1% en el primero y 2,8% en el segundo).

Desde el punto de vista evolutivo no se observa ninguna mejora significativa en los aciertos para la primera de las tareas, mientras que en la segunda hay un aumento importante de los éxitos únicamente en el paso de 3º a COU (figuras 1 y 2). Los diversos razonamientos erróneos persisten generalmente de la forma apreciable en todos los niveles escolares, si bien el cualitativo muestra una clara tendencia a disminuir pronto aunque manteniendo siempre su importancia relativa. Otro dato de interés para la reflexión lo proporcionan los logros al final del Bachillerato, donde menos de la tercera parte de los estudiantes de COU resuelven bien la primera de las cuestiones planteadas y un poco más de la mitad de los mismos consiguen hacer acertadamente la segunda (tabla 3).

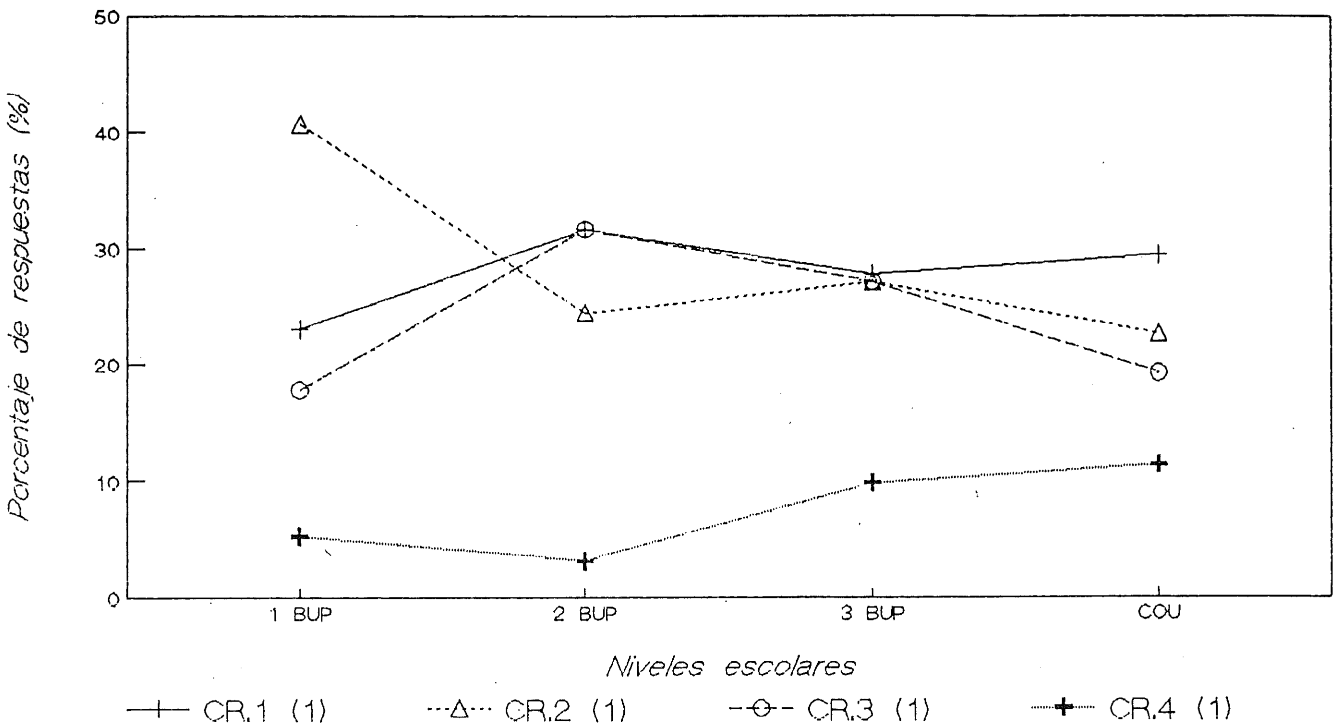


Figura 1. Secuencia evolutiva de razonamientos en tarea 1 de correlaciones.

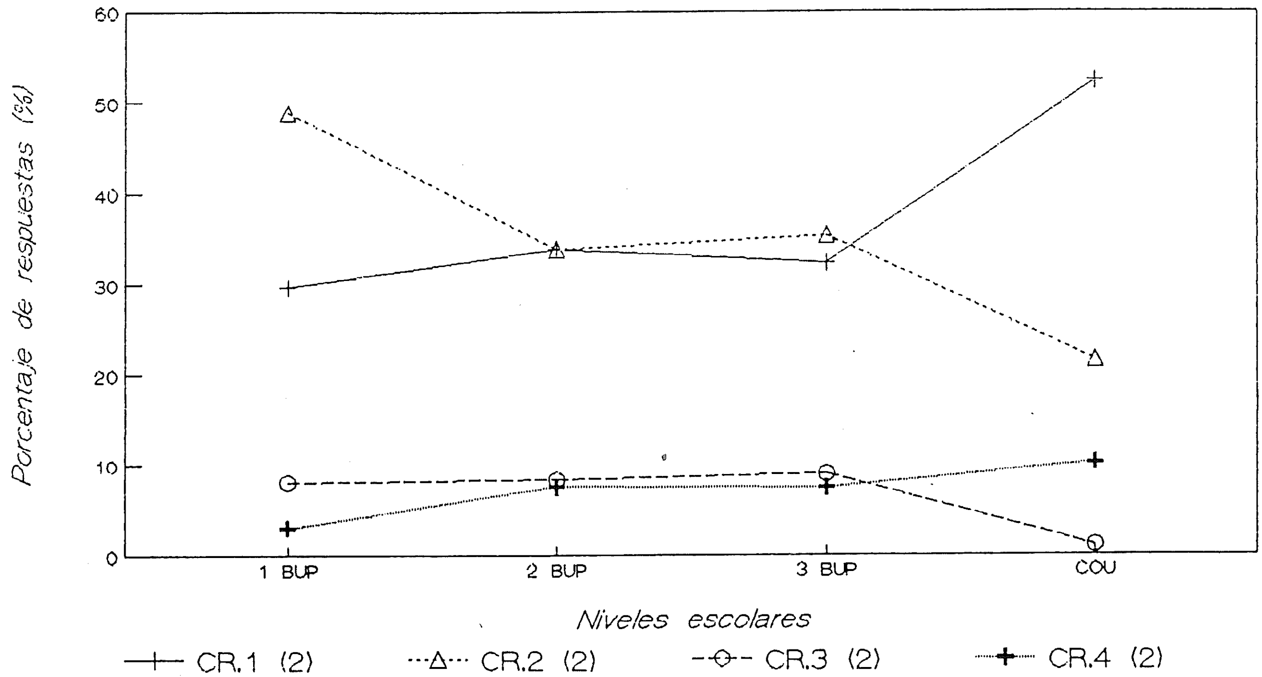


Figura 2. Secuencia evolutiva de razonamientos en tarea 2 de correlaciones.

Algunos autores han cuestionado la validez de las tareas de correlación del TRL en cuanto a su capacidad para valorar adecuadamente las habilidades propias del esquema operatorio formal correspondiente. En efecto, si se considera que el razonamiento correlacional implica de alguna forma hacer estimaciones probabilísticas, podría parecer sorprendente que los resultados obtenidos en la resolución de estos problemas sean superiores a los alcanzados por los mismos sujetos en las tareas de probabilidad del TRL (Acevedo y Romero 1991); hecho que se repite también en otros estudios, utilizando siempre los mismos problemas, con profesores australianos en formación (Garnett y Tobin 1984), con escolares australianos de Educación Secundaria (Garnett, Tobin y Swingler 1985) y con estudiantes onubenses de Escuela Universitaria Politécnica (Acevedo, Romero y Romero 1990).

Ahora bien, por otra parte, los análisis factoriales hechos para validar la construcción del TOLT (Tobin 1988) y la del TRL (Acevedo y Oliva 1990) muestran la existencia de cinco factores, de tal manera que cada uno de ellos correlaciona significativamente sólo con las puntuaciones de los sujetos en cada una de las cinco parejas de cuestiones que constituyen el test. Esto significa que las dos tareas que estamos discutiendo valoran algún tipo de razonamiento específico que no es evaluado por las otras.

Mc Kenzie y Padilla (1982) intentaron solventar esta aparente incongruencia sugiriendo que los problemas del TOLT podrían ser válidos para medir una forma temprana del razonamiento correlacional, ya que los mismos, tal y como se presentan en el test, no requieren la elaboración de una explicación sino simplemente elegir una entre varias dadas. Esta interpretación se vería avalada por los resultados de algunos estudios realizados con estudiantes norteamericanos de distintos niveles escolares, en los que se han empleado las mismas tareas que en el TRL pero dejando abierta la justificación. En estos (Karplus, Adi y Lawson, 1980, Lawson 1982, 1983, Lawson y Bealer, 1984, Lawson, Karplus y Adi 1978) los aciertos disminuyen notablemente en comparación con los mostrados en los trabajos que han usado el TOLT o el TRL. Asimismo, en las investigaciones estadounidenses indicadas, las respuestas correctas a las cuestiones de probabilidad superan siempre a las de correlación.

Profundizando en estas observaciones, pensamos que la selección de la explicación adecuada en los problemas de correlación del TRL se ve favorecida por la ausencia de otras alternativas plausibles, las cuales dificultarían posiblemente su resolución. Así pues, podrían haberse sugerido relaciones entre probabilidades que no son válidas para la correlación solicitada, tal y como comparar, por ejemplo, las frecuencias relativas de los datos de cada una de dos de las clases respecto del total de datos, o bien hacer lo mismo en las frecuencias, relativas referidas esta vez a la suma parcial de los correspondientes a las dos clases consideradas. En definitiva, creemos necesaria la realización de más estudios destinados a aclarar algunos puntos oscuros sobre los aspectos apuntados en esta discusión.

Razonamiento combinatorio

En el TRL se proponen dos tareas de operaciones combinatorias, una en la que no importa el orden de los elementos pero sí el no repetir dos de un mismo subconjunto en cada agrupación, y otra de permutaciones en la que, como es notorio, la ordenación resulta clave. Con estos problemas no se pretende evaluar si los escolares están en condiciones de formular explícitamente una expresión matemática que permita su resolución, sino más bien si son capaces de utilizar un método exhaustivo y sistemático para generar todas las agrupaciones que constituyen la solución correcta.

A causa de la estructura del formato utilizado en las cuestiones planteadas, resulta más difícil identificar los modos de razonamiento inadecuados. No obstante, el análisis de las estrategias subyacentes en las respuestas nos ha permitido clasificar las equivocadas en dos grandes tipos. En el primero se observan intentos de los sujetos por controlar las variables relevantes de la tarea, sin embargo éstos no son capaces de establecer un procedimiento sistemático suficientemente riguroso que les permita construir todas las combinaciones o permutaciones posibles. Como consecuencia de esta dificultad hay tanto agrupaciones repetidas como ausencia de otras. Este ha sido, sin duda, el error más frecuente en la resolución de ambas tareas, detectándose en la mitad de la muestra en el caso del problema de combinatoria simple y en más de la tercera parte para el de permutaciones.

La segunda de las limitaciones supone la incapacidad de los sujetos en el momento de controlar las variables necesarias para resolver las cuestiones, de tal manera que da la impresión de que las respuestas han sido generadas al azar. Esta forma de abordar los problemas, que conduce muchas veces a abandonar pronto la búsqueda de una solución completa a los mismos, aparece en más de la quinta parte de la muestra para la cuestión de permutaciones y, aproximadamente, en uno de cada ocho estudiantes en la de combinatoria.

Por otra parte, algo más de la mitad de los escolares no resuelven bien ninguna de las dos tareas y la quinta parte hace correctamente las dos. También hay que indicar que dejaron sin responder en menos ocasiones el problema de combinatoria que el de permutaciones (2,1% y 9,0% respectivamente). En cambio, los aciertos son muy similares en ambas cuestiones, alrededor de uno de cada tres. Así pues, en conjunto, no hemos encontrado diferencias importantes que prueben lo expresado por Piaget e Inhelder (1951) quienes afirmaron que las permutaciones resultan algo más difíciles que las operaciones combinatorias. Sin embargo, nuestros resultados si guardan paralelismo con los obtenidos anteriormente por Garnett y Tobin (1984).

Para terminar, es preciso señalar que a lo largo del Bachillerato se produce un aumento significativo de los éxitos en ambos problemas (figuras 3 y 4), si bien es destacable que el final del mismo, en COU, sólo en torno a la mitad de los sujetos hacen bien cada una de las cuestiones (tabla 4). Asimismo, resulta de interés el análisis evolutivo de los dos tipos de limitaciones catalogadas. Este revela que los errores debidos fundamentalmente a la falta de control de variables se mantienen prácticamente semejantes en todos los niveles escolares, mientras que los relacionados con la incapacidad para elaborar un método sistemático descienden sobre todo para los alumnos y las alumnas de COU. De esta manera, aunque en nuestro trabajo esta última dificultad es siempre la más importante, todo indica que podría disminuir conforme los sujetos tuvieran más edad y mayor experiencia escolar; hipótesis que se vería reforzada por lo mostrado en otras investigaciones con estudiantes universitarios (Acevedo, Romero y Romero 1990, Garnett y Tobin 1984) en las que observaron menos fracasos ocasionados por la ausencia de un procedimiento sistemático que por no controlar las variables necesarias.

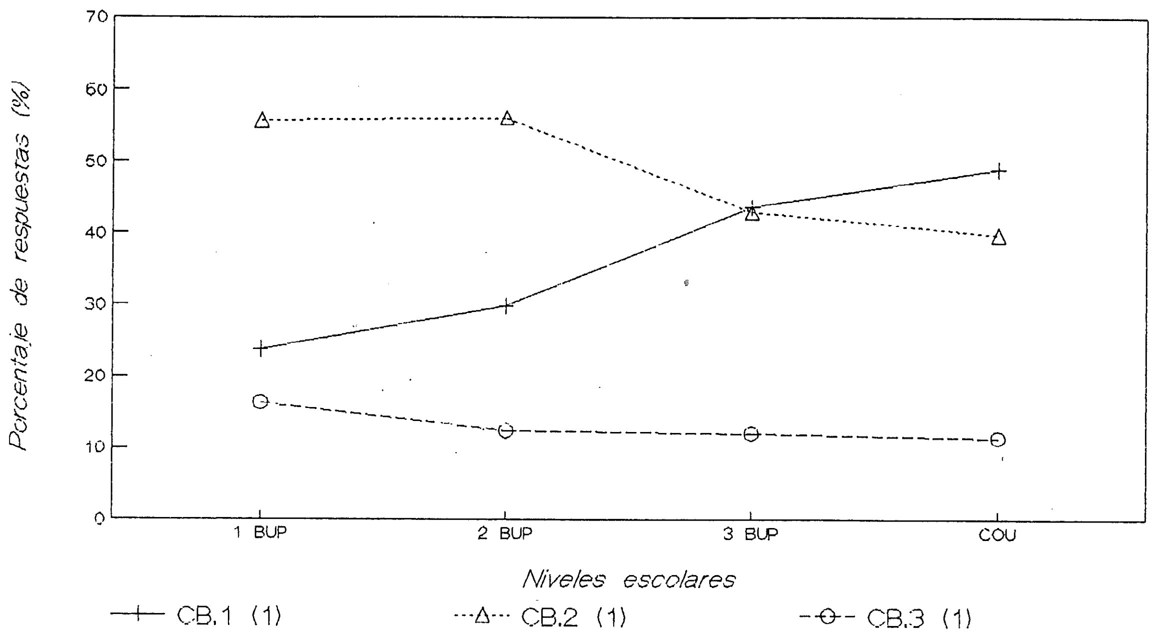


Figura 3. Secuencia evolutiva de razonamientos en tarea 1 de combinatoria.

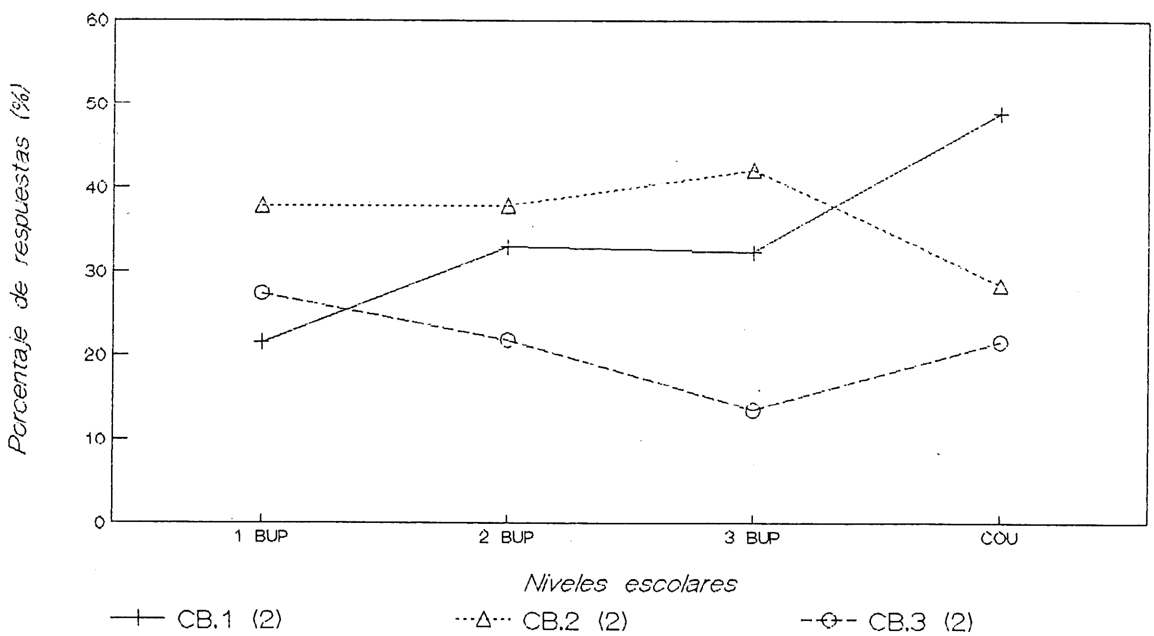


Figura 4. Secuencia evolutiva de razonamientos en tarea 2 de combinatoria.

Implicaciones

Independientemente de que se admita o no la teoría unitaria del pensamiento formal elaboradas por Piaget, los estudios sobre los esquemas operatorios que aparecen en la misma, tal y como los analizados en este trabajo, resultan de gran interés por tratarse de razonamientos útiles para la formación de distintos aspectos del pensamiento científico (Carretero 1985). Además, incluso aunque no se esté de acuerdo con la existencia de una unidad cognitiva subyacente a los diferentes esquemas (Lawson, Karplus y Adi, 1978), es difícil negar la presencia de interrelaciones entre éstos (Shayer y Adey, 1981). En cambio es más habitual cuestionar la posición piagetiana sobre la escasa influencia que, según este epistemólogo, tendría la enseñanza en la adquisición de estos razonamientos. Esta polémica nos lleva a centrar las reflexiones que se hacen a continuación en la dualidad que, desde una perspectiva constructivista, deben conformar el aprendizaje de las matemáticas y el desarrollo cognitivo de los escolares (Acevedo, 1989).

La habilidad para razonar correlacionalmente parece ser que se elabora con bastante lentitud. Sin embargo, es posible enseñar a los estudiantes a reconocer formas incorrectas de esta modalidad de razonamiento, por ejemplo planteándoles preguntas adecuadas en la resolución de tareas diversas. Ahora bien, para lograr ésto el profesorado debe conocer a fondo la problemática de la correlación, así como ser sensible a las limitaciones de los razonamientos de sus alumnas y alumnos (Acevedo et al., 1991).

Otro tanto podríamos decir del razonamiento combinatorio. Ya se ha indicado anteriormente que los escolares pueden, en el pensamiento concreto, tantear espontáneamente la construcción de procedimientos sencillos para hacer agrupaciones con los elementos de un conjunto, sobre todo cuando el número de éstos es pequeño. Aunque, por supuesto, en esta situación se encuentran todavía lejos de alcanzar la capacidad para desarrollar un método sistemático para resolver este tipo de problemas, Fischbein (1975) ha mostrado que se puede aprovechar con éxito la intuición de estos sujetos para ayudarles, mediante la enseñanza, a aprender algunos procedimientos generales como, por ejemplo, los empleados en la construcción de diagramas en árbol (Díaz, Batanero y Cañizares 1987).

Según se desprende de nuestros resultados, un elevado número de alumnas y alumnos no dominan a niveles elementales los razonamientos ligados a las nociones de correlación y combinatoria, incluso en el caso de aquellos de mayor edad que se encuentran próximos a finalizar sus estudios secundarios. Estos datos pueden usarse para negar la formación generalizada, al final de la adolescencia, de las capacidades propias del pensamiento formal; pero también sirven para denunciar la escasa incidencia que parece tener la enseñanza en el desarrollo de estos razonamientos o, al menos, que estas cuestiones no se contemplan o no se cuidan suficientemente en los actuales curricula.

Desde otros puntos de vista podría dudarse de la validez de la interpretación que hemos dado a los resultados obtenidos. Si bien es razonable discutir algunos aspectos controvertidos de las tareas utilizadas, y así se ha hecho en el artículo, creemos, no obstante, que las respuestas recogidas no se deben al azar, sino que responden a verdaderos obstáculos cognitivos que los estudiantes deben superar en el aprendizaje de los razonamientos correlacional y combinatorio. En efecto, la persistencia cualitativa, y a veces cuantitativa, de algunos tipos de error, así como la concordancia con lo mostrado en otros estudios ya citados, les confiere un cierto carácter universal; esto es, se trata de errores sistemáticos a los que la enseñanza tendría que prestar una especial atención.

En definitiva, es un hecho que los escolares suelen tener ideas tempranas, generalmente difusas, sobre las nociones matemáticas que se han tratado aquí, y también sobre otros conceptos. Ahora bien, estas intuiciones, aun siendo importantes, no se pueden articular de modo espontáneo con las características específicas de los correspondientes esquemas operatorios formales. Como acertadamente señala Fischbein (1987), para intentar conseguir lo anterior es preciso enseñar a los estudiantes a desarrollar, mediante la intervención didáctica, aquellas intuiciones que puedan resultar más relevante para el razonamiento matemático. Cuestión ésta que, debiendo ser uno de los objetivos de la educación matemática, supone un gran reto para el profesorado.

Bibliografía

* ACEVEDO, J.A. (1989). **Desarrollo cognitivo y matemáticas. Un ejemplo: la evolución del razonamiento proporcional en BUP**. Epsilon, 13, 51-57.

* ACEVEDO, J.A. (1991). **Proyecto TRL. Una investigación en curso**. Borrador (aceptada su publicación).

* ACEVEDO, J.A., BOLIVAR, J.P., LÓPEZ-MOLINA, E.J. y TRUJILLO, M. (1991). **Modelos de razonamiento en dos tareas de proporcionalidad**. Revista de Psicología General y Aplicada, 44 (2), 175-182.

* ACEVEDO, J.A. y OLIVA, J.M. (1990). **Validación de un test de razonamiento lógico: el TRL**. Documento no publicado, Extensión de Huelva del I.C.E. de la Universidad de Sevilla.

* ACEVEDO, J.A. y ROMERO, S. (1991). **El error sistemático en la resolución de tareas proporcionalidad y probabilidad**. Epsilon, 19, 9-22.

* ACEVEDO, J.A., ROMERO, S. y ROMERO, J. (1990). **L'evolution du raisonnement formel des étudiants depuis l'Enseignement Secondaire jusqu'au l'Université**. Comunicación expuesta en la 42 Reunión Internacional de la CIEAEM, Szczyrck, Bielsko-Biala. Polonia.

* CARRETERO, M. (1985). **El desarrollo cognitivo en la adolescencia y la juventud: las operaciones formales. En M. Carretero, J. Palacios y A. Marchesi (Comp.): Psicología Evolutiva 3. Adolescencia, madurez y senectud**. (Alianza, Madrid), 37-93.

* DÍAZ, J., BATANERO, M.C. y CAÑIZARES, M.J. (1987). **Azar y probabilidad**. (Síntesis, Madrid).

* FISCHBEIN, E. (1975). **The intuitive sources of probability thinking in children.** (D. Reidel, Dordrecht).

* FISCHBEIN, E. (1987). **Intuition in Science and Mathematics Education**. (D. Reidel, Dordrecht).

* GARNETT, P.J. y TOBIN, K.G. (1984). **Reasoning patterns of preservice elementary and middle school science teachers**. Science Education, 68(5), 621-631.

* GARNETT, P.J., TOBIN, K.G. y SWINGLER, D.G. (1985). **Reasoning abilities of secondary school students aged 13-16 and implications for the teaching of science**. European Journal of Science Education, 7(4), 387-397.

* INHELDER, B. y PIAGET, J. (1955). **De la logique de l'enfant a la logique de l'adolescent. Essais sur la construction des structures opératoires formalles**. (PUF, París). Traducción castellana de M.T. Cevasco (1972): *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. (Paidós, Buenos Aires).

* KARPLUS, R., ADI, H. y LAWSON, A.E. (1980). **Intellectual development beyond elementary school VIII: Proportional, probabilistic and correlational reasoning**. School Science and Mathematics, 80 (8), 673-683.

* LAWSON, A.E. (1982). **The reality of general cognitive operations**. Science Education, 66 (2), 229-241.

* LAWSON, A.E. (1983). **The acquisition of formal operational schemata during adolescence: the role of the biconditional**. Journal of Research in Science Teaching, 20 (4), 347-356.

* LAWSON, A.E. y BEALER, J.M. (1984). **The acquisition of basic quantitative reasoning skills during adolescence: learning or developmente?** Journal of Research in Science Teaching, 21 (4), 417-423.

* LAWSON, A.E., KARPLUS, R. y ADI, H. (1978). **The acquisition of propositional logic and formal operational schemata during the secondary school years**. Journal of Reseach in Science Teaching, 15 (6), 465-478.

* MC KENZIE, D.L. y PADILLA, M.J. (1982). **Are proportional and probabilistic reasoning necessary prerequisites to correlational reasoning?** Paper presented at the annual meeting of the National Association for Research in Science Teaching, Fontana, WI.

* PIAGET, J. e INHELDER, B. (1951). **Le genese de l'idés de hasard chez l'enfant**. (PUF, París).

* SHAYER, M. y ADEY, P. (1981). **Towards a science of science teaching**. (Heinemann, London). Traducción

castallana de A. Cameno (1984): *La Ciencia de enseñar Ciencias. Desarrollo cognoscitivo y exigencias del currículo.* (Narcea, Madrid).

* TOBIN, K.G. (1988). **Applications of the test of logical thinking**. Unpublished paper, Florida State University, USA.

* TOBIN, K.G. y CAPIE, W. (1981). **Development and validation of a group test of logical thinking**. Eduational and Psychological Measurement, 41, 413-424.

* VELÁZQUEZ, F. (1991). **¿Desalgebrizar la educación básica?** Epsilon, 19, 59-66.

Anexo

Cuestiones de correlación y operaciones combinatorias del Test de Razonamiento Lógico (TRL)

Cuestión 7

La figura adjunta representa una muestra de ratones capturados en el campo. Decide, a partir de la misma, si es más probable que tengan el rabo negro los ratones gordos que los delgados.

Respuesta

a) Sí, los ratones gordos tienen mayor probabilidad de tener el rabo negro que los delgados.

b) No, los ratones gordos no tienen más probabilidad de tener el rabo negro que los delgados.

Razonamiento

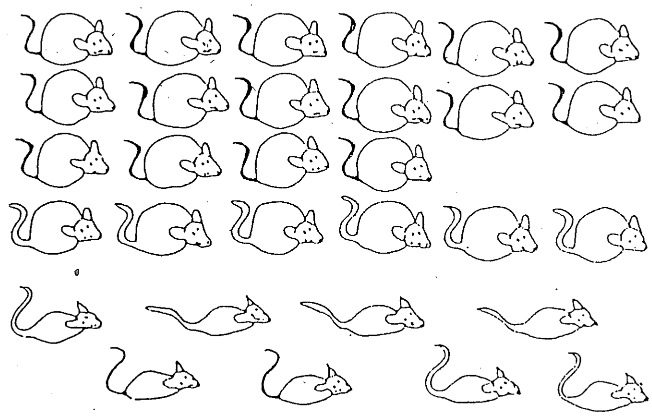
1) 8/11 de los ratones gordos tienen rabo negro y 3/4 de los ratones delgados tienen rabo blanco.

2) Tanto algunos de los ratones gordos como algunos de los ratones delgados tienen el rabo blanco.

3) De los 30 ratones, 18 tienen el rabo negro y 12 lo tienen blanco.

4) Ni todos los ratones gordos tienen el rabo negro ni todos los delgados lo tienen blanco.

5) 6/12 de los ratones con rabo blanco son gordos.



Cuestión 8

¿Es más probable que tengan rayas anchas los peces gordos que los peces delgados?

Respuesta

a) Sí, los peces gordos tienen mayor probabilidad de tener rayas anchas que los delgados.

b) No, los peces gordos no tienen más probabilidad de tener rayas anchas que los delgados.

Razonamiento

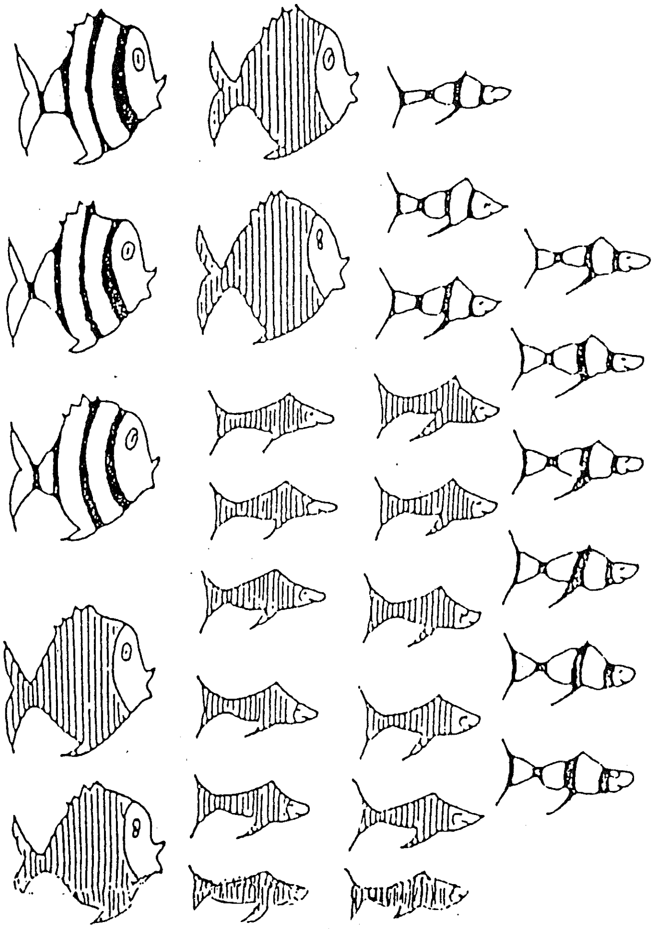
1) Unos peces gordos tienen rayas anchas y otros estrechas.

2) 3/7 de los peces gordos tienen las rayas anchas.

3) 12/28 tienen las rayas anchas y 16/28 las tienen estrechas.

4) 3/7 de los peces gordos y 9/21 de los peces delgados tienen las rayas anchas.

5) Algunos de los peces con rayas anchas son delgados y otros son gordos.



Cuestión 9

Tres estudiantes por cada uno de los cursos de 1º, 2º y 3º de BUP son candidatos al Consejo Escolar. La representación quedará constituida por un estudiante de cada curso. Cada votante debe considerar todas las combinaciones posibles antes de decidir su voto.

Dos ejemplos de combinaciones posibles serían: Tomás, José y Pedro (T, J, P) e Isabel, Carmen y María (I, C, M).

Haz una lista con todas las combinaciones posibles usando para ello los espacios de la HOJA DE RESPUESTAS. ten en cuenta que en ésta hay más espacios de los necesarios.

CANDIDATOS AL CONSEJO ESCOLAR

1º BUP	**2º BUP**	**3º BUP**
Tomás (T)	José (J)	Pedro (P)
Isabel (I)	Carmen (C)	María (M)
Antonio (A)	Beatriz (B)	Luis (L)

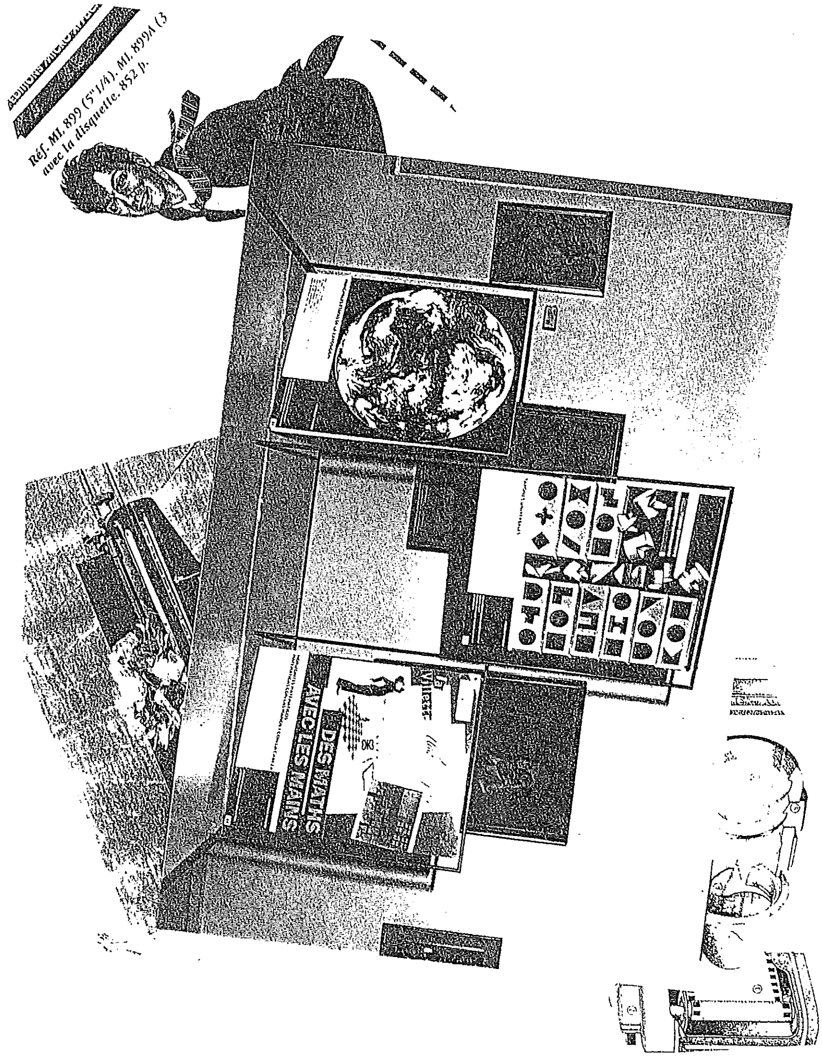
Cuestión 10

Se prevé abrir 4 tiendas en un nuevo centro comercial. Los locales serán destinados a una Barbería (B), una Farmacia (F), una Pastelería (P) y una Cafetería (C). Cada uno de los negocios mencionados ha de ocupar uno de los locales previstos. Un ejemplo de posible ocupación sería B, F, P, C.

Haz una lista con todas las formas posibles de ocupar los cuatro locales usando para ello los espacios de la HOJA DE RESPUESTA. Ten en cuenta que en ésta hay más espacios de los necesarios.

LOCAL 1	LOCAL 2	LOCAL 3	LOCAL 4

José Antonio Acevedo Díaz
Sixto Romero Sánchez
Coordinación General del I.C.E. en Huelva



IDEAS PARA LA CLASE

Mirando el problema al revés

Vicente Ibañez Orts

Este artículo es continuación del titulado ¿Qué es la inducción matemática? publicado en la revista «Mundo Científico», nº 123 de abril del 92. En él, los mismos personajes O'Maggi, Valdemar y el propio profesor Polya vuelven a recrear una de las clases del ilustre pedagogo. Esta vez trata sobre el método propuesto por Pappus de atacar un problema suponiendo que ya se conoce la solución.

Es la clase. En una esquina hay colgada una litografía de Durero: Melancolía I. En ella, un joven ángel pensativo apoya la cabeza en su mano izquierda mientras mantiene un compás en su regazo. Está sentado frente a una ventana en la que declina el sol y da profundidad al dibujo. Junto a él, en el suelo, hay una esfera y un enorme octaedro de piedra negra bruñida formado por dos triángulos equiláteros y seis pentágonos irregulares, de modo que el espectador del cuadro no puede por menos de preguntarse que hace allí aquel extraño objeto telúrico. Un reloj de arena pende del muro, junto a un cuadrado mágico 4x4 empotrada en la pared que indica la fecha de ejecución del grabado: 1514.

Una tarde clara y fría de otoño. Tras el escritorio y con la pipa en la mano, el profesor Polya (1) exclama:

Señores, son Ustedes afortunados. Les gusta la enseñanza y además poseen una honda afición desinteresada por el canto puro de Pitágoras. Hoy quiero hacer hincapié en una forma particular y quizás algo enrevesada de resolver con carácter general un problema matemático. Pero no adelantemos los acontecimientos y vayamos por partes. Sta. O'Maggi, ¿Quiere salir al encerado?

El problema que les voy a presentar y que O'Maggi va a intentar resolver es este: Dibuje Sta. dos recipientes, uno de 9 litros de cabida y otro de 4, en los que se da la circunstancia de que no hay marca alguna en sus bordes que nos de idea de su capacidad, por lo que tan solo conocemos el volumen total. ¿Sta., los tiene ya dibujados?. Piensen que cada uno de Ustedes dispone en su mesa de estos dos recipientes. ¿Se ha formado todo el

(1) El profesor George Polya nació en Budapest y está afincado en Estados Unidos. Ha sido profesor de las Universidades de Princeton, Brown y Stanford. Del breve curso que dio en esta última, situada en Palo Alto, California, sobre «Docencia y retórica en matemáticas» al que tuvo la oportunidad de asistir su alumno e incondicional admirador Ignacio Valdemar, y a partir de las notas manuscritas que este dejó de su asistencia, -por lo demás única prueba evidente de que se impartió dicho curso - junto con partes del conocido librito de Polya «How to solved it» (¿Cómo resolverlo?) Princeton University Press (1945), especialmente de su capítulo «Trabajando hacia atrás», se han entremezclado para configurar este artículo. Creemos que al eminente pedagogo no le importará este plagio, hecho, al fin y al cabo, en aras de una mayor difusión de sus brillantes ideas y en recuerdo de su malogrado discípulo.

mundo una imagen mental de los mismos?. Bien, la pregunta que hago extensiva al conjunto de la clase es esta: ¿Cómo podemos utilizarlos de forma combinada para tomar exactamente 6 litros de un gran tonel?

Veamos, O'Maggi, a pesar de que este ejercicio tiene un enunciado excesivamente académico con líquidos y volúmenes ficticios, y lo más indicado sería disponer de un vaso convenientemente graduado, ¿Se le ocurre alguna idea?. En ese momento O'Maggi suspiró, y con las manos en la espalda se separó ligeramente de la pizarra como si quisiera observar en perspectiva el dibujo que acababa de hacer. Después de un momento de reflexión, respondió tras un breve carraspeo:

Señor, podríamos llenar el primer recipiente en toda su capacidad, mientras alzaba su mano izquierda como si mantuviese en ella el vaso de cristal lleno de líquido, y vaciar parte de él en el segundo, y realizaba el acto de trasvasar el agua a su mano derecha, con lo que tendríamos 5 y 4 litros respectivamente, y después, bueno,...después...

Efectivamente, apostilló Polya, el método que emplea su compañera es muy gráfico y adecuado. Consiste en probar y tantear. Está actuando como cualquier persona al enfrentarse a un problema. Partimos de dos recipientes vacíos, y el profesor levantaba las manos como si sujetasen también los dos vasos, ensayamos esto y aquello, y aunque fracasemos en el primer intento, seguimos probando. Fíjense Ustedes que siempre se trata de **ir hacia delante**, buscando a tientas la solución que nos permita resolver el rompecabezas. Tal vez con perseverancia, mediante prueba y error, lleguemos a tener éxito... Sin embargo hay personas intuitivas o aquellas que hayan tenido la oportunidad de aprender en sus clases de matemáticas algo más que meras operaciones de rutina, que conocen otra manera muy astuta de enfrentarse a esta cuestión.

En este momento el profesor Polya cortó su discurso, y dirigiéndose a O'Maggi comentó: gracias Señorita, ya puede sentarse, pero antes tenga la amabilidad de dejar los recipientes sobre mi mesa procurando no derramar el líquido. ¿Estaban llenos de agua? ¿No? Seguidamente nos miró con socarronería y comenzó la ardua tarea de limpiar y recargar su cachimba. Era su manera personal de indicarnos que debíamos poner a cavilar nuestros cerebros para buscar alguna respuesta. Cuando finalmente encendió su pipa y expulsó una larga y tranquila bocanada de humo, prosiguió:

Señores, hemos comentado en anteriores ocasiones que resolver un problema, por nimio que sea, es realizar un pequeño descubrimiento, y al hacerlo podemos gozar, a nuestro nivel, de la tensión y zozobra que embargó a su descubridor. Por tanto, veamos, ¿Qué se nos pide? 0 en términos matemáticos ¿Cuál es la incógnita? Actuemos conscientemente por una vez al revés, y partamos del principio de que ya hemos dado con la solución. Ahora es el momento de que razonemos hacia atrás. Por ejemplo, podríamos llenar el primer recipiente a plena capacidad, 9 litros. Si lográramos verter 3, obtendríamos los 6 que buscamos... Claro que para ello nos bastaría con que en ese momento el recipiente pequeño tuviese justamente 1 solo litro. El problema inicial, por tanto, se ha transformado en encontrar el modo de llegar a esta última situación.

No piensen que es fácil dar con la solución que les sugiero, aunque nunca hay que descartar que se pueda descubrir por azar tras sucesivos intentos. Lo que hemos de hacer es llenar hasta arriba el recipiente de 9 litros, mientras levantaba su mano izquierda, y después vaciarlo dos veces en el de 4, -mientras nosotros nos representábamos mentalmente esta operación- con lo que nos quedará exactamente un litro en él. ¡Justo lo que buscábamos!

Sin darnos cuenta hemos seguido un razonamiento muy antiguo, ya propuesto por el filósofo y matemático griego de Alejandría, Pappus «partamos de lo que se nos pide y razonemos a la inversa» tal como lo describe en su obra «Tesoro del Análisis» en la que iniciaba en el arte de resolver cualquier problema; y, según él, éste fue el método usado con gran profusión por los afamados matemáticos que le precedieron como Platón, Euclides o Apolonio. El tema es trascendente y su riqueza creativa indudable. Espero que se enamoren de él como lo hicieron aquellos grandes personajes, ya que se trata de una máxima perdurable que sin duda les ayudará a afinar su lógica deductiva. Efectivamente, una vez tengamos un litro en el recipiente pequeño, nos bastará con llenar hasta el tope el de 9 litros y vaciarlo en él hasta el borde, para que queden exactamente en él los 6 litros buscados. Como ven, hemos llegado a algo que ya conocíamos, puesto que habíamos partido de este valor, y **trabajando hacia atrás**, hemos logrado reconstruir la sucesión apropiada de operaciones que nos han llevado a la solución.

Señores, no se necesita ser un genio para resolver un problema mediante el método de análisis expuesto; basta con actuar con un poco de sentido común. Primero nos concentraremos sobre el fin deseado, y acto seguido analizaremos la solución final que deseamos obtener. En este punto nos formularemos la pregunta: ¿A partir de que posición precedente podríamos conseguir esta? Si el análisis nos conduce a un absurdo, el problema será también insoluble, ya que una conclusión falsa implica una premisa equivocada. Espero que anclen con fuerza en su consciencia este valioso instrumento de análisis.

El profesor Polya nos dio un respiro y con parsimonia volvió a encender su pipa. Miró atentamente el cuadro de Durero y siguió los ojos del ángel a través de la ventana. A nosotros, que desde el fondo del aula dominábamos toda la escena, nos producía la sensación irreal de que tanto el rostro del ángel dubitativo como el de nuestro maestro se fundían en la cara pentaédrica del octógono irregular que actuaba como un espejo mágico entre las dos figuras melancólicas.

El tiempo se había detenido. Tras un breve esfuerzo, el profesor se escapó del hechizo de la puesta de sol que veía reflejado en otras pupilas y continuó su discurso:

Estimados alumnos, para finalizar, me van a permitir que en este curso de «Docencia y retórica en matemáticas» en el que como todos saben también interviene la ética, la estética y la historia, me permita una cierta transgresión y les comente un modesto experimento de conducta comparada con animales: disponemos de un lugar cerrado en el que se encuentra un perro. En uno de sus lados hay una puerta abierta. Frente a ella, pero al otro lado del vallado opuesto, hemos colocado un cebo atractivo, como por ejemplo comida suculenta. La dificultad es muy fácil de vencer para el animal. Al principio puede ladrar y corretear nervioso de un lado a otro del recinto, o intentar saltar la valla, pero rápidamente captará la situación, dará media vuelta atravesando la abertura y dando un rodeo alcanzará rápidamente la comida.

El mismo problema es extraordinariamente difícil de resolver para una gallina. La veremos corretear exaltada de un punto a otro de la valla, piando y agitando desacompasadamente las alas, y puede pasar mucho tiempo antes de conseguir la pitanza, si es que la llega a conseguir.

Piensen Ustedes que lo que hacemos al resolver un problema es también sortear un obstáculo. Este experimento tiene por tanto una especie de valor simbólico. La gallina actuó al igual que aquellas personas que resuelven un problema por casualidad, desordenadamente, topando con la solución al volver sobre él machaconamente una y otra vez, mas que por aplicar un plan metódico para alcanzar la meta. Por el contrario, el perro resolvió el problema tan bien como nosotros el de los recipientes: de una manera estructurada. Recuerden que primero intentamos solucionarlo hacia adelante, para después pararnos e imaginar que ya lo teníamos resuelto y desde ese punto final como comienzo, trabajar hacia atrás. El can que tras una breve inspección de la situación y algunos ladridos dio media vuelta y se lanzó fuera, nos da, de alguna manera, la impresión de tener una visión de la situación muy superior a la gallinácea.

Todos tenemos una cierta propensión a ir directamente a lo que creemos esencial en la resolución del problema sin darnos cuenta que es mejor observarlo con perspectiva, y adelantarnos a imaginar que ya tenemos la solución, y desde ese punto, empezar a razonar a la inversa. A veces no hay que seguir la línea recta, ni tan siquiera la transversal, sino la dirección contraria a la habitual, aunque ello conlleva, no cabe duda, un esfuerzo adicional. Por tanto, anadió, mientras comenzaba a recoger sus útiles de fumador y su manojo de libros, no hay que criticar al ave por su falta de tino al solucionar el problema, sino, lamentablemente, reconocer que hay un cierto paralelismo entre sus dificultades y las nuestras.

Y poniéndose de pie exclamó mientras se dirigía a la puerta: ¡Señores, hasta la próxima clase!

Vicente Ibanez Orts
Sociedad de Profesores de Matemáticas de Alicante

Litografía de A. Durero titulada Melancolía. Su fecha de ejecución fue 1514, y aparece en las dos casillas centrales de la parte inferior del cuadrado mágico.

Simetría Plana en la clase: Grupos y Geometría

Juan Bosco Romero Márquez

En este artículo relatamos una experiencia sobre Simetría de las letras del abecedario, vivida con los alumnos de 1º y 3º de BUP, en la clase de Matemáticas.

El problema principal fue el estudiar las diferentes simetrías que presentan las figuras planas: simetrías axiales (respecto de un eje o una recta), y la simetría central u homotecia de razón - 1, o semigiro de 180° (respecto de un punto).

A cada tipo de alumnos se les mandó hacer un trabajo sobre este tema, de acuerdo con su nivel de conocimientos: a los alumnos de 1º de BUP, sobre todo, la manipulación de todo tipo de simetría; a los alumnos de 3º de BUP, aparte de lo anterior se les pidió el estudio geométrico-algebraico de la simetría: el aspecto analítico de coordenadas y la estructura del grupo de simetría de las letras del abecedario, y los diferentes grupos de simetría que aparecen cuando éstas vienen escritas en la tipografía de imprenta (figura 1): grupos de un elemento, de dos y de cuatro elementos.

Conceptos iniciales previos

Sea E el plano euclídeo en el que se ha hecho la identificación de los puntos y de los vectores libres, respecto de un origen de coordenadas.

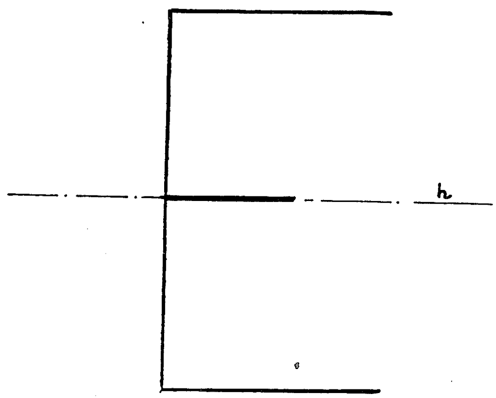
Una figura plana F es cualquier subconjunto no vacío de E.

Una simetría (isometría, movimiento rígido) de una figura F es una aplicación biyectiva s de F sobre F que conserva la distancia euclídea: la distancia d(P,Q) entre dos puntos cualesquiera de F y la distancia entre sus imágenes u homólogos s(P) y s(Q), esto es, que

$$d(P,Q) = d\,(s(P),\, s(Q)).$$

Describamos algunos casos particulares de simetrías: cualquier figura F tiene la simetría trivial, es decir, la aplicación identidad que pasa cada punto de la figura en el mismo. Además, se comprueba de forma inmediata que si s y s' son dos simetrías de F, es claro que la composición como aplicaciones de s, s' es otra simetría. Designamos por S(F) el conjunto de todas las simetrías de la figura F con la estructura interna dada por la composición de aplicaciones se prueba que es un grupo, llamado el grupo de simetría de la figura F. Supuesto, que la figura F, tiene un grupo de simetría, S(F) finito, tendrá una tabla de Cayley que se construye en la forma habitual. Es claro que la simetría trivial o identidad e (giro de 360°) de la figura F es el elemento unidad, ya que si s es cualquier otra simetría de F, entonces $e.s = s.e = s$. La simetría trivial e actúa bajo la composición de aplicaciones de la misma forma que el número 1, y por eso, a veces, ambas se identifican a efectos de cálculos.

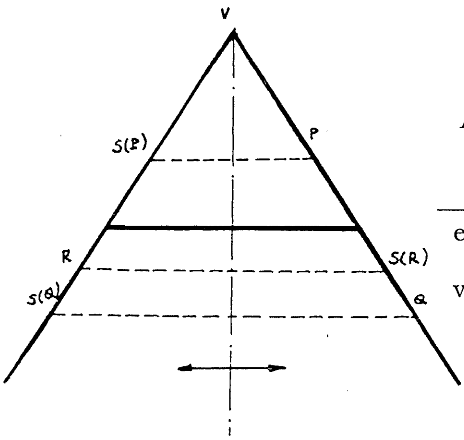
ABCDEFGHIJKLM
NOPQRSTUVWXYZ



B, C, D, E, K

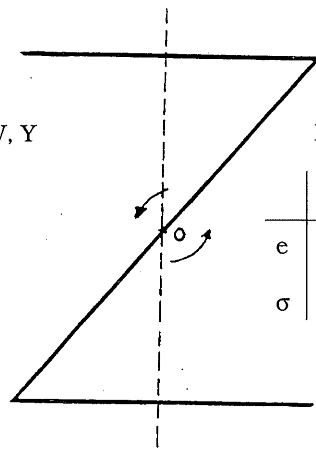
	e	h
e	e	h
h	h	e

Figura 1



A, M, T, U, V, W, Y

	e	v
e	e	v
v	v	e

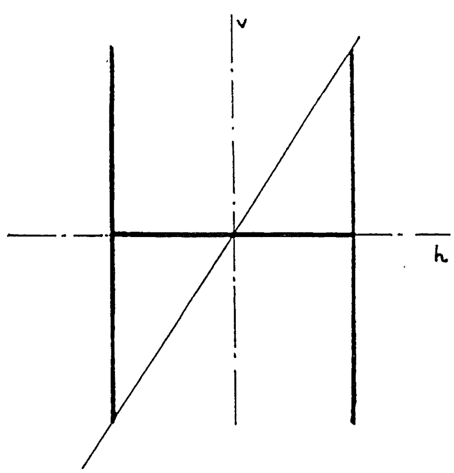


$\sigma = g_{180°}$

N, S, Z

	e	σ
e	e	σ
σ	σ	e

Figura 2



H, I, O, X

	e	v	h	σ
e	e	v	h	σ
v	v	e	σ	h
h	h	σ	e	v
σ	σ	h	v	e

Figura 3

Notas y observaciones.- Una simetría de un objeto F es una transformación o permutación de F que, es una biyección |: F→F, conservando un conjunto de propiedades P, es decir, se mueven todos los puntos individuales de F, pero deja invariante a F como un todo.

Si F es un subconjunto de un espacio métrico, tal como una figura F de un espacio euclídeo $|^n$, y P consiste de las distancias d(P,Q) entre los distintos puntos P y Q de F, por tanto la simetría *s* aplicará estos puntos, respectivamente, en *s*(P), y *s*(Q) verificando:

$$d(s(P),\ s(Q)) = d(P,Q).$$

La simetría desde el punto de vista racional del análisis de la estética significa armonía y proporción en los objetos y en los seres.

Grupos de simetría de las letras del abecedario

Empecemos calculando las simetrías y por tanto, los grupos de simetría de dos letras representativas del abecedario: la letra A y la Z.

Simetrías y grupo de simetrías de la letra A. (figura 2). Si reflejamos la letra A según un eje vertical s= v que pasa por su apex (vértice), entonces cada punto P es transformado o aplicado en su correspondiente punto imagen *v(P)* sobre el semiplano contrario u opuesto al que se encontraba P. Los puntos R sobre el eje (como el vértice, por ejemplo, quedan fijos o invariantes, esto es *v(R)=R).* La transformación o permutación anterior se ilustra en la figura 2, y deja, la letra A como un todo invariante al no saber distinguir el lado anterior y posterior de la letra antes y después de aplicarle *v*. Más aún, *v* conserva la distancia entre dos puntos cualesquiera de la letra A. Por lo tanto *v* es una isometría de la letra A. Esta isometría también la tienen las letras: A,M,T,H,U,V,W,Y y X, y es llamada simetría bilateral, ya que ella intercambia los dos lados de A. Similarmente, B y E se reflejan sobre un eje horizontal, y H sobre ambos ejes: horizontal y vertical.

Otros tipos de isometría o simetría es la formada por las rotaciones. Por ejemplo, si giramos la letra Z alrededor de su centro por un giro de 180°, como en la figura 3, entonces la letra Z se transforma en sí misma, y la distancias entre pares de puntos originales y transformados se conservan por dicha rotación que es por lo tanto una simetría de la letra Z, mientras que la rotación de 90° no lo es, para dicha letra Z. De la misma forma, las letras H,N, y S tienen la simetría dada por el giro de 180° alrededor del centro de la figura de cada letra. El triángulo equilátero tiene las simetrías dadas por los giros, respectivamente, 120° y 240°; y la letra O identificada, a un círculo tiene cualquier tipo de simetría obtenida por rotación de la misma, cualquier ángulo alrededor de su centro.

Aplicación a la obtención de todas las simetrías y grupos de simetría de las letras del abecedario escritas en la tipografía de imprenta

Se trata de estudiar y obtener las simetrías de cada letra y el grupo de simetría asociada a la misma. Clasificar cada letra por el mismo tipo de simetría cuando tienen el mismo grupo de simetría o uno isomorfo. Dos letras se dirán distintas desde el punto de vista geométrico o algebraico cuando tengan grupos de simetría no isomorfos. De esta forma, obtenemos una relación de equivalencia en el conjunto de las letras del abecedario, a saber:

Dos letras son equivalentes *geométrica-algebraica* cuando sus dos grupos de simetría son el mismo, o siendo distintos son isomorfos.

Finalmente, obtendremos las clases de equivalencia.

Descripción de las simetrías y grupos de simetría:

1.- Las letras A,M,T,U,V,W, y Y admiten el mismo grupo de simetría. Es un grupo con dos elementos: la identidad o trivial *e* y la simetría o reflexión de eje vertical *v*. Su tabla de Cayley es:

S(F)= {e,v}

	e	v
e	e	v
v	v	e

Ejercicios.- Dibujar otros conjuntos geométricos del plano que tengan el mismo grupo de simetría anterior.

2.- Las letras B,C,D,E y K admiten el mismo grupo de simetría (es decir, tienen los mismos tipos de simetría), a saber: es un grupo de dos elementos: la identidad e y la reflexión o simetría de eje horizontal h. Su tabla de Cayley es: S(F)={e,h}.

	e	h
e	e	h
h	h	e

Los grupos de los epígrafes 1) y 2) tienen elementos distintos, pero, son isomorfos, es decir, existen entre ellos, una aplicación biyectiva que conserva la estructura algebraica de los dos, o que transporta la estructura de grupo cíclico, de uno en el otro.

Ejercicios.- Dibujar otros conjuntos geométricos del plano que tengan el mismo grupo de simetría anterior.

3.- Las letras F,G,J,L,P,Q,R poseen sólo la simetría trivial. Su grupo de simetría es el grupo trivial, con un sólo elemento, S(F)={1=e}. Su tabla de multiplicación es:

	1
1	1

Ejercicios.- Dibujar otros conjuntos geométricos del plano que tengan el mismo grupo de simetría anterior.

4.- Las letras N,S y Z admiten como simetría no trivial g, un semigiro o rotación de 180°, alrededor del centro de la figura, es decir, de su centro de simetría. El grupo de simetría de tales letras tiene dos elementos y por lo tanto, es isomorfo a los grupos obtenidos en 1) y 2) esto es S(F)= {e,g}. Su tabla de Cayley es la siguiente:

	1	g
1	1	g
g	g	1

Los grupos de 1), 2) y 4) son isomorfos como grupos abstractos, aunque, obviamente, tienen significados geométricos diferentes.

5.- Las restantes letras con la tipografía en que han sido dibujadas, H,I,O,X, admiten todas las simetrías siguientes e,v,h,g consideradas antes, y de hecho no admiten otras. De aquí, si F designa cualquiera de las letras anteriores, su grupo de simetría , S(F)={e,v,h,g}, que es isomorfo al grupo de Klein del rectángulo (simetrías del rectángulo). La tabla de Cayley, de este grupo es:

	e	v	h	g
e	e	v	h	g
v	v	e	g	h
h	h	g	e	v
g	g	h	v	e

Para probar, por ejemplo, que e,v,h,g son las únicas simetrías de la letra H, basta ver que cada simetría s cambiaría de posición las cuatro terminaciones verticales de esta letra.

Ejercicios.- Dibujar otros conjuntos geométricos del plano que tengan el grupo de simetría anterior.

Notas y observaciones.- Si la letra I fuera considerada como una barra vertical delgada, entonces las aplicaciones e y v coinciden como aplicaciones al restringirlas a dicha letra. Y de la misma forma, las simetrías h y g coinciden y su grupo de simetría es ahora: S(I)= {e,h}.

Usualmente, las simetrías de una figura F no se consideran como isometrías que dejan invariante a F globalmente solo, sino que se consideran como transformaciones (movimientos o isometrías) del plano euclídeo E. Las excepciones a este concepto amplio de simetría se deben, al caso, en que la figura F está contenida en alguna recta de E.

Observemos que si consideramos la letra O como un círculo, admite todas las rotaciones de cualquier ángulo como simetrías alrededor de su centro, como también cualquier reflexión o simetría según un diámetro. Y así, su grupo de simetría sería infinito.

Si consideramos la letra X como una cruz, X como construida con dos segmentos perpendiculares bisecando cada uno al otro, entonces su grupo de simetría, tendría ocho elementos.

Un buen ejercicio, como complemento de todo lo anterior, sería el siguiente: *Hallar las simetrías y el grupo de simetrías de un polígono regular de cualquier número de lados.* Pero, esto será hecho en otra aventura del descubrimiento geométrico-algebraico que en otra ocasión abordaremos.

Bibliografía

* THE OPEN UNIVERSITY.: **Curso básico de matemáticas. Grupos I, II.** México, 1971.

* H. WEYL.: **La Simetría**. Ed. Nueva Visión. Buenos Aires. 1958.

* I. STEWART.: **Conceptos de Matemática Moderna**. Alianza. Madrid, 1971.

* J.A.C. REYNOLDS.: **Colección Principios de Matemática Moderna. Forma, Tamaño y lugar**. Vicens Vives. Barcelona, 1968.

* H. FREUDENTAL.: **Las Matemáticas en la vida cotidiana**. Guadarrama, Madrid, 1967.

* H.S.M. COXETER.: **Fundamentos de geometría**. Limusa Wiley. México, 1971.

* F. PAPY.: **Matemática Moderna, 1, 2, 3, 4, 5**. Eudeba. Buenos Aires. 1970.

* G. MATTHEWS.: **Colección principios de Matemática Moderna. Matrices I, II**. Vicens vives. Barcelona, 1968.

* M. OTTE, H. STEINBRING, P. STOWASSER, A. DRESS.: **Enciclopedia de las ciencias: Matemáticas**. Desclée de Brouwer. Bilbao, 1985.

* T. J. FLETCHER.: **Didáctica de las Matemáticas**. Teide. Barcelona, 1974.

* H. STEINHAUS.: **Instantáneas Matemáticas**. Biblioteca Científica Salvat. Barcelona, 1986.

* M. GARDNER.: **Izquierda y derecha en el cosmos**. Biblioteca Científica Salvat. Barcelona, 1986.

* P. S. STEVENS.: **Patrones y pautas en la naturaleza**. Biblioteca Científica Salvat. Barcelona, 1986.

* E. H. LOCKWOOD y P. H. MACMILLAN.: **Geometry Symmetry**. Cambridqe University Press. Cambridge, 1978.

* J. ROSEN.: **Symmetry discovered: concepts and applications in natura and science**. Cambridge University Press. London, 1971.

Juan Bosco Romero Márquez
I.B. Isabel de Castilla. Ávila

Potenciar el papel de los logaritmos

Jorge Fernández Herce

Lo que pretendemos es destacar cómo se pueden integrar las calculadoras en el tema de los logaritmos, dando a éstas un papel como instrumento importante en su enseñanza y no como el elemento que ha llevado hacia su decadencia.

Introducción

Como tantos otros conceptos, la noción de logaritmo que hoy se recibe en la Educación Secundaria, tiene muy poco que ver con su origen y no revela en absoluto el papel trascendente que ha jugado en la historia del desarrollo científico de la humanidad. La evolución en los medios de cálculo y, más concretamente la proliferación de calculadoras de bolsillo hicieron que, sin darnos cuenta, fuera desapareciendo de nuestra vista. En la parte dedicada al área de Matemáticas en el «Diseño Curricular Base» del M.E.C., tanto en la Enseñanza Primaria como la Secundaria Obligatoria, se puede leer:

«La perspectiva histórica muestra claramente que las matemáticas son un conjunto de conocimientos en evolución continua y que en dicha evolución desempeña a menudo un papel de primer orden su interrelación con otros conocimientos y la necesidad de resolver determinados problemas prácticos».

De los muchos ejemplos que ilustran esta afirmación, de los que el texto citado da algunos, los logaritmos son un clarísimo exponente pero que generalmente no se recuerda en momentos como éste.

Origen histórico

John Napier, nació cerca de Edimburgo en 1550 y murió en 1617. Fue un importante matemático de su época que siempre manifestó un profundo interés por el hecho de que los cálculos numéricos eran largos, difíciles y retrasaban notablemente el progreso de las ciencias. Ya en su libro «Rabdología» describe el funcionamiento de las famosas «Regletas de Neper» cuya virtud consistía en facilitar las multiplicaciones.

Pero todos sus esfuerzos no quedaron en este intento, el cual no era poco para la situación de su época. El mismo afirma que dedicó veinte años de su vida con el fin de buscar métodos de cálculo que abreviasen los penosos esfuerzos que las operaciones requerían. A penas tres años antes de morir, en 1614, se atreve a publicar «Mirifici logarithmorum canonis descriptio» en el que se da luz a los logaritmos y su modo de empleo como instrumento para calcular.

He aquí la causa primera, el motivo, del nacimiento de la noción de logaritmo. La necesidad de aumentar la fluidez en los cálculos era fundamental. En esta época la astronomía era una ciencia en pleno apogeo y se precisaban grandes esfuerzos para que, tanto los datos como las operaciones entre ellos, no llevasen a errores importantes. En el capítulo 16 de la «Nueva Astronomía» escribe Johanes Kepler (1571-1601):

«Si te sientes aburrido con este tedioso método de cálculo ten piedad de mí que tuve que recorrerlo en su totalidad con al menos 70 repeticiones, con una gran pérdida de tiempo,...».

Trataba entonces de determinar la órbita de Marte y, el borrador de los cálculos que se reflejan en el capítulo citado está formado por 900 páginas con letra pequeña.

Hay quien afirma que el nacimiento de los logaritmos multiplicó por 10 la efectividad de los cálculos astronómicos y fue decisivo en numerosos resultados de tipo científico y práctico.

Algunas ideas que encaminaron hacia el nacimiento de los logaritmos, se habían ido apuntando en épocas anteriores: en la «Arithmetica integra» de Michael Stifel (1486-1567) se apuntan comentarios como el hecho de que 729/64 puede dividirse 6 veces por 3/2. Más claramente Nicolás Chuquet (parisino de finales del XV), cita la relación entre los elementos de una progresión aritmética y una geométrica señalando el paralelismo entre suma, resta, multiplicación y división en la primera, con producto, división, potenciación y radicación en la segunda.

Un truco matemático muy utilizado es la llamada *prostaféresis*, que consistía en transformar una multiplicación en una suma ante la evidente simplicidad y rapidez de ésta con respecto al producto. Un ejemplo llevado a su máxima simplicidad que se explica en el bachillerato sería:

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2 \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y)$$
$$\cos(x-y) + \cos(x+y) = 2 \cos(x) \cos(y)$$

Curiosamente la utilización que en las aulas se hace de estas relaciones suele ser la contraria. La idea que viene reseñada cuando se comentan estas igualdades es, la importancia de la transformación de suma en producto para la simplificación. Ni que decir tiene que si carecemos de una máquina de calcular, entender el proceso a la inversa es de una utilidad manifiesta:

«Si disponemos únicamente de unas tablas trigonométricas, podremos fácilmente buscar

$\cos(75^{\circ}) = 0.25882$; $\cos(10^{\circ}) = 0.98481$

Efectuar ahora $\cos(75^{\circ}) \cdot \cos(10^{\circ})$ no es una tarea amena ni, mucho menos, rápida. (Tiempo aproximado: 100 segundos)

Es mucho más fácil acudir a las tablas y buscar

$\cos(65^{\circ}) = 0.42262$; $\cos(85^{\circ}) = 0.08715$

haciendo que

$\cos(75^{\circ}) \cos(10^{\circ}) = (0.42262 + 0.08715)/2 =$
$= 0.50977/2 = 0.25488$».

Esta segunda opción es mucho más rápida (Tiempo aproximado: 20 segundos) y la posibilidad de errores es mucho menor debido a la simplicidad de la suma y la división entre 2 frente a la laboriosidad de la multiplicación con números de varias cifras.

Todas estas cuestiones influyeron en las investigaciones de Neper, aunque su definición es puramente cinemática, subyaciendo la continuidad del logaritmo como función. Neper además, dio los logaritmos de los senos de 0º a 90º y no de números.

Sin duda que la preocupación por encontrar un método de simplificación de las operaciones aritméticas explica que los logaritmos fuesen descubiertos casi simultáneamente por dos personas distintas y que su difusión fuese tan rápida y magníficamente aceptada, existiendo ya en 1631, 17 años después de la primera, 20 publicaciones sobre el tema. Y decimos que el descubrimiento fue casi simultáneo pues Jobst Bürgi (1552-1632) elaboró ideas similares a las de Neper aunque tal vez más próximas a nuestro concepto actual. Al parecer Bürgi construye una tabla en la que aparecen *números rojos* en progresión aritmética, y *números negros* en progresión geométrica. Perdió sin embargo todos los honores históricos del descubrimiento al publicar su obra «Arithmetische und geometrishe Progress-Tabulen» en 1620, años más tarde que Neper.

De los contactos entre J. Neper y Henry Brigss (1560-1630), nacen nuestros actuales logaritmos de base 10 con la idea de adaptar el concepto al sistema de numeración imperante. Así en 1617, Brigss publica la primera tabla de logaritmos en base 10 de los números 1 a 1000 con una precisión de 14 cifras decimales. En 1624 una nueva publicación recoge ya los números del 1 al 20000 y del 90000 a 100000, apareciendo por primera vez las palabras *mantisa* y *característica*.

Como última reseña histórica citaremos que William Oughtred (1574-1660) enuncia las propiedades básicas de los logaritmos fundamentales para su utilización en el cálculo:

$$\log(x) + \log(y) = \log(x.y)$$
$$\log(x) - \log(y) = \log(x / y) \qquad \{ a \}$$
$$\log(x^y) = y \log(x)$$

Él es además el inventor de las tan famosas *reglas de cálculo*. Estos instrumentos que han sido de uso habitual para muchos estudiantes en un pasado muy reciente y que ya hoy a duras penas se consiguen en el mercado, totalmente desfasadas y superadas en rapidez y precisión por las máquinas calculadoras.

Aunque las relaciones {a} son válidas para logaritmos en cualquier base, consideraremos a partir de ahora que estamos hablando de logaritmos en base 10 y, por tanto, denotaremos log representando $\log_{10}$.

Utilización en los cálculos

En [2], aparece en su prólogo: «Los aspectos numéricos de la trigonometría plana se han tratado ampliamente. Igual atención se ha prestado a las soluciones logarítmicas y no-logarítmicas de los triángulos rectángulos y oblicuángulos...» Además sus capítulos 6 y 7 son respectivamente: 6. Logaritmos y 7. Resolución logarítmica de triángulos rectángulos.

Vamos a hacer un estudio en la resolución de un simple ejercicio sobre triángulos rectángulos. Para que no resulte excesivamente pesado nos centraremos en los pasos I y IV. Sobre ellos estableceremos comparaciones, obviando los demás. Citamos aquí una estimación de tiempos, pero retamos al lector a que efectúe el proceso manualmente para que se observe en toda su dimensión la diferencia. El tema del tiempo no es el fundamental. Hay a quién le puede resultar más largo efectuar el cálculo con logaritmos que sin ellos por falta de práctica. La cuestión más importante es la simplificación del proceso; la probabilidad de cometer un error al efectuar la división I. es muchísimo mayor que la de errar en la búsqueda en unas buenas tablas y efectuar la resta; el trabajo de multiplicar y elevar al cuadrado en IV es mucho mayor y más tedioso que buscar en unas tablas y sumar. Por último, la facilidad de revisión por posibles errores dista mucho entre el proceso 1 y el 2.

Resolver y comprobar el triángulo rectángulo ABC, dados los lados a=48,620 y b=37,640. (Ángulo C = 90º. Hipotenusa: c)

1.º Mediante cálculo aritmético manual sin logaritmos:

I. Tag A = a/b = (48,620/37,640)
t=150 segundos
II. Obtenemos el sen A
III. c= a/senA
IV. Comprobación: $a^2 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b)$
t= 180 segundos

TIEMPO TOTAL de los procesos I. y IV. ....
t= 330 segundos

2. Mediante cálculo logarítmico:

I. a) Buscando en las tablas:
log (a) = log(b)= t=50 segundos
I. b) log(tagA) = log(a)-log(b)= t=20 segundos
II. Obtenemos el sen A
III. c= a/sen A
IV. $a^2 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b)$
$2 \log(a) = \log(c-b) + \log(c+b)$
t= 105 segundos

TIEMPO TOTAL DE LOS PROCESOS I y IV. .....
t= 175 segundos

3. Mediante una calculadora con funciones trigonométricas:

TIEMPO TOTAL DE LOS PROCESOS I y IV. .....
t= 45 segundos

Entre los procesos 1 y 2 la diferencia estriba en que las multiplicaciones y divisiones se efectúen por medio del algoritmo tradicional o bien por medio de logaritmos. La diferencia de tiempos en nuestra prueba a favor del método logarítmico es casi de 2 a 1. Como es lógico, la calculadora es el método más rápido y, sobre todo, fiable.

Este pequeño ejemplo nos puede dar una idea del protagonismo que los logaritmos adquirieron. Era una cuestión de primer orden contar con unas tablas adecuadas. Precisamente los libros de tablas de logaritmos proliferaron mucho. En las págs. 385-386 de [4], después de tratar el tema de los logaritmos, se menciona: «*Ya que nuestros planes de enseñanza faltan cursos especiales sobre cálculo numérico, destinados a astrónomos, físicos, etc.. daremos una breve nota bibliográfica...*» A continuación se nombran un total de 8 libros sobre reglas aritméticas y métodos de cálculo y 9 referencias a otras tantas colecciones de tablas de logaritmos con los números que éstas contienen y su precisión en número de decimales. También es una práctica habitual en muchos textos reseñar junto a la resolución de un ejercicio, qué tablas de logaritmos fueron empleadas para su ejecución. Así en [7], pág. 32: «*... Utilizamos las Tablas de Logaritmos de L. Schron con 7 cifras decimales (Ed. Victoriano Suárez, Madrid, 1963). Gracias al dispositivo tipográfico empleado [...] se obtienen los logaritmos con un error inferior al cuarto de unidad del séptimo orden. En general, la precisión resulta del orden de las centésimas de segundo de arco*».

Reglas de cálculo

«*Excepto para sumar y restar, la regla de cálculo constituye una buena herramienta para efectuar las operaciones más corrientes, tales como la multiplicación, división, extracción de raíces, operaciones con funciones trigonométricas, etc...*»

El fundamento de este objeto consiste en una serie de regletas, algunas de las cuales se pueden desplazar linealmente con respecto a las otras pero que tienen la peculiaridad de estar marcadas en varios tipos de escalas, bien de tipo lineal o no, por ejemplo logarítmicas. Se lee también en un manual:

«Las escalas C y D son similares a una regla milimetrada, pero con una diferencia fundamental. Así como en una regla normal milimetrada la distancia entre dos divisiones consecutivas, siempre es la misma, no sucede igual con las escalas de la regla de cálculo. [...]

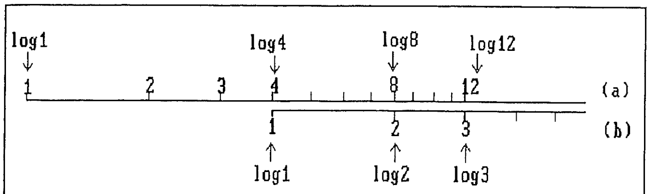
Las escalas C y D son logaritmos, con lo que queremos significar que la distancia entre dos números consecutivos varía logarítmicamente a medida que el número aumenta. No es necesario entender el significado de una escala logarítmica para aprender a manejar la regla de cálculo, pero si es necesario tener una idea de ella para comprender por qué es posible efectuar una multiplicación con una simple adición de distancias. Ello no sería posible con una escala uniforme».

Conseguir una regla de cálculo resulta ilustrativo, pero una actividad que constituye un bonito recurso didáctico que aumenta la motivación y permite la fijación de conceptos, es la fabricación de nuestras escalas logarítmicas y, así una regla de cálculo propia. El método, a pesar de que para mucha gente que conoce estos objetos de cálculo es desconocido, resulta muy simple. En el artículo «Los cambios de escala y el Cálculo Gráfico» [9] se describe la construcción así como la importancia de los cambios de escalas y algunas aplicaciones. Sin pretender ser repetitivos, vamos a describir el proceso de multiplicación con dos escalas logarítmicas en forma longitudinal pues así es como se manejan en las reglas de cálculo, mientras que el método descrito en el artículo citado está dado en forma gráfica bidimensional:

Consideremos que vamos a multiplicar 2 x 4 :

i) coloquemos el 1 de la escala (b) sobre el 4 de la otra.

ii) busquemos el 2 de (b) y veamos sobre que valor de (a) se encuentra y ese es nuestro resultado.



4 x 3 = 12 : log(4x3) = log(4) + log(3)

4 x 2 = 8 : log(4x2) = log(4) + log(2)

La explicación es evidente pues fijémonos que lo que hemos nombrado con 2 es en realidad log(2) y lo nombrado con 4, log(4). De este modo al superponer ambas regletas el llamado resultado es la suma lineal de log(2) + log(4) que, aplicando propiedades de logaritmo: log(2) + log(4) = log(8). Y log(8) lo hemos denotado con 8 en nuestras regletas.

Llegaron las calculadoras

Todavía hoy no se ha introducido sin prejuicios la calculadora en el aula, pero hay momentos. en que no queda más remedio que admitirla. A veces, esta situación es más perjudicial que no permitir su uso pues estamos colaborando a su utilización irracional. ¿Para qué se utiliza la calculadora cuando estamos explicando logaritmos? Únicamente para efectuar el cálculo que antes se realizaba mirando a una tabla. (log(2) = 0,3010...).

Ahora pasamos rápidamente a hablar de función logarítmica sin detenernos en muchos detalles de los que «en otros tiempos» se hablaba y que hoy no se mencionan. Así nos encontramos con la gran contradicción de que las calculadoras, objetos que muchos son contrarios a introducir en el aula, hacen relegar al olvido conceptos que ya no parecen útiles precisamente por la presencia de aquéllas. Como veremos más adelante la introducción racional de una calculadora podría reconvertir esas cuestiones que parecían obsoletas. Además la importancia histórica del logaritmo, su origen y utilización a lo largo del tiempo bien merece la pena ser reseñado. También, como no, el motivo por el que han ido perdiendo interés como concepto aislado.

La misma calculadora puede ser la generadora del concepto tal y como cuenta la experiencia descrita en el artículo «La calculadora generadora de conceptos» de [10].

Mantisa y características, dos conceptos olvidados

Los términos mantisa y característica han desaparecido prácticamente del vocabulario habitual del mundo de los logaritmos. La llegada de las calculadoras fue arrinconando el uso de tablas y, fuera de uso éstas, tenía poco sentido hablar de aquéllas. Ambos conceptos podrían «reconvertirse» adaptándolos a una nueva perspectiva: nuestra calculadora.

Recordemos que característica es la parte entera del logaritmo y mantisa la parte decimal:

log (15) = 1,176091259
caract.: 1
mantisa: 0,176091259

Los números muy grandes o muy pequeños, de uso tan frecuente hoy en día, suelen presentarse en un formato estandarizado que llamamos notación científica y que consiste en disponer la cantidad como producto de un número con una sola cifra entera no nula, multiplicado por una potencia de 10. Esta representación tiene la ventaja de darnos una idea de «el orden de magnitud» con el que estamos trabajando, de una forma inmediata. En efecto, entre indicar 2^{37} ó $1,374389534 \cdot 10^{11}$, la primera expresión nos da una exactitud total mientras que la segunda es aproximada, pero de nada nos sirve lo primero si no somos capaces de operar con ella y saber ¡qué tamaño tiene!

- Propongamos entonces escribir en notación científica el número 23^{12}. El desconcierto puede ser general. Pero cualquiera que posea una calculadora científica comprobará que con sólo teclear

23 $\boxed{x^y}$ 12 $\boxed{=}$

aparece en la pantalla el resultado en notación científica:

$$2,191462443 \cdot 10^{16}$$

Analicemos el problema desde el punto de vista de los logaritmos procediendo como sigue:

{b} $\log(23^{12}) = 12 \cdot \log(23) = 12 \cdot 1.361727836 = 16{,}34073403$

caracteristica: 16
mantisa: 0,34073403 .

ant $\log(0{,}34073403) = 10^{0{,}34073403} = 2{,}191462432$

- Así pues:
a) La característica del logaritmo de un número N es, el exponente de 10 cuando N se representa en notación científica.
b) El antilogaritmo de la mantisa de un número N, es la parte decimal de su expresión en notación científica.

Las afirmaciones a) y b) resultan evidentes de probar siguiendo los pasos de {b} de forma general:

Si $\log(N) = c{,}m$ (c = caract.; 0,m= mantisa)

$$N = 10^{\log(N)} = 10^{c,m} = 10^{0,m} \cdot 10^{c} = \text{ant}\log(0{,}m) \cdot 10^{c}$$

Al ser $0 < 0{,}m < 1$ se sigue que $0 < \text{ant}\log(0{,}m) < 10$, lo que demuestra a) y b).

- ¿Por qué en {b} hemos efectuado $\log(23^{12}) = 12 \cdot \log(23)$?

Nuestra calculadora es tan eficaz que convierte automáticamente en notación científica algunos números. El conocimiento de la máquina o una simple ojeada a su manual de instrucciones nos permitirá averiguar en que rango de valores la conversión es automática. Pero esa misma ojeada nos informará que, con toda probabilidad, el mayor número que puede soportar es $9{,}9999\ldots \cdot 10^{99}$. Así, qué hacer con una cantidad como 235^{62}. Pulsar ahora

253 $\boxed{x^y}$ 62 $\boxed{=}$

no servirá porque el número excede la capacidad de la máquina. El recurso empleado en {b} es necesario:

$$\log(253^{62}) = 62 \log(253) = 62 \cdot 2.403120521 = 148.9934723$$

$$253^{62} = 10^{0.9934723} \cdot 10^{148} = 9{,}850818107 \cdot 10^{148}$$

- El comportamiento de este proceso con potencias variadas nos puede llevar a manejar muchos aspectos de los logaritmos. Si enunciamos el ejercicio con 235^{-62} y con $1/253^{62}$ manejamos diversas propiedades. Si es $(-253)^{62}$, $(-253)^{-62}$, -235^{-62}, etc., el resultado será más enriquecedor teniendo en cuenta que no se pueden calcular los logaritmos de números negativos pero que, evidentemente, nuestra transformación es posible. En otro orden de cosas, implícitamente hemos establecido que la función *log* es creciente y que es inyectiva (al calcular el antilogaritmo). Todo esto en el plano teórico de los logaritmos. En el aspecto práctico habremos conseguido manejar números casi tan grandes como queramos con ayuda de nuestra calculadora pero de una forma constructiva ya que ella, sin nosotros, tampoco hubiese podido operarlos. Si utilizamos estos resultados de una forma lúdico-científica se pueden obtener cosas como éstas:

- Cuando «se juega» con potencias muy grandes causa un gran impacto dar una idea aproximada del tamaño de un número. Para ello los logaritmos son ideales, como aplicación inmediata de lo que acabamos de ver.

¿Cuál es el número más grande que se puede escribir con sólo tres digitos? ¿Cuál es su tamaño?

La respuesta a la primera cuestión suele ser siempre la misma: 999. Sin embargo pensando un poquito más detenidamente y dando alguna pista se empieza a variar y se presentan dos posibilidades: 9^{99} o bien 99^{9}.

Ambos números «caben» en la calculadora y, por tanto al introducirlos pasarán a notación científica automáticamente y será fácil reconocer el mayor. Pero forcemos la imaginación y hagamos una aproximación que en este caso es válida:

$\log(9^{99}) = 99 \log(9)$ lo cual «está próximo» a $99 \log(10) = 99$.

De ello concluimos que 9^{99} ronda las 99 cifras.

$\log(99^{9}) = 9 \log(99)$ lo cual «está próximo» a $9 \log(100) = 9 \cdot 2 = 18$

Y por tanto 99^9 no supera las 18 cifras.

Las aproximaciones son muy burdas pero son suficientes para el caso. Una vez que hemos visto la diferencia tan grande entre ellos, resulta curioso que se dude de cuál es el mayor.

Quizá todos quedemos satisfechos pero aún podemos escribir:

$$9^{9^9}$$

Resulta que éste no nos «cabe en nuestra calculadora». Parece por tanto el mayor. ¿Pero qué tamaño tiene?:

Tomando su logaritmo: $9^9 \log(9) =$
$9^9 . 0.9542425094 = 387420489 . 0.9542425094=$
$= 369693099.6$

La expresión en notación científica de nuestro gigante será:

$$10^{0.6} . 10^{369693099} = 3.98107 \cdot 10^{369693099}$$

tiene entonces 369693100 cifras, lo que quiere decir que si lo escribiéramos con este mismo tamaño de letra ocuparía una longitud de más de 616 kilómetros de papel.

Bibliografía

* ARENZANA HERNÁNDEZ, Victor, BUERA PÉREZ, Pedro y RODRÍGUEZ SOL, Luisa. **Los cambios de escala y el cálculo gráfico**. Revista SUMA nº 5 (págs: 59-64). 1990.

* BORRAS VESES, Eliseo. **La Calculadora, generadora de conceptos**. APUNTES de Educación nº 32 (Ed. ANAYA.) (págs: 6-8). 1989.
* COLLETTE, Jean-Paul. **Historia de las Matemáticas**. Ed. Siglo XXI. Madrid, 1985.

* FRANK AYRES, JR. **Trigonometría plana y esférica**. Colección Schaum. Ed. McGRAW-HILL. México, 1977.

* REY PASTOR, J. y BABINI, J. **Historia de la Matemática**. Ed. Espasa Calpe Argentina S.A. Buenos Aires, 1951.

* REY PASTOR,J. **Elementos de Análisis Algebraico**. Ed. Herederos de Julio Rey Pastor. Madrid, 1966.

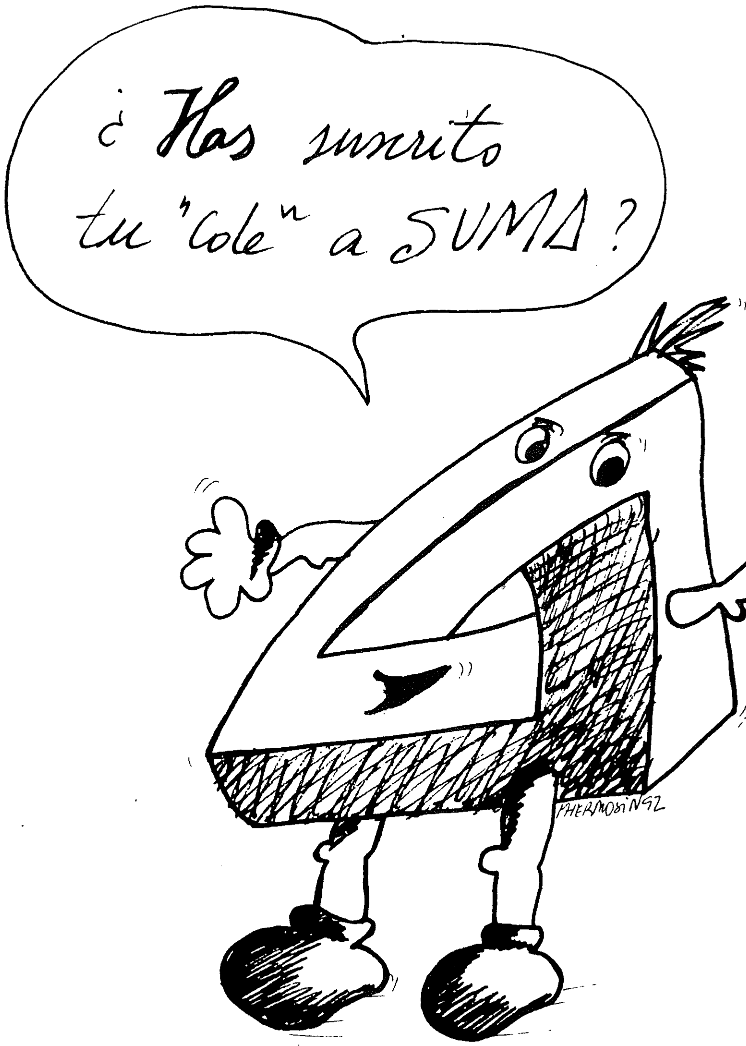
* RIBNIKOV, K. **Historia de las Matemáticas**. Ed. Mir Moscú. Moscú, 1987.

* VÁZQUEZ QUEIPO, Vicente. **Tablas de los Logaritmos Vulgares**. Casa Editorial Hernando S.A. Madrid, 1974.

* VIVES, Teodoro J. **Astronomía de posición**. Colección EXEDRA. Ed. Alhambra. Bilbao, 1971.

* **DISEÑO CURRICULAR BASE. Enseñanza Secundaria Obligatoria**. M.E.C. Madrid, 1989.

Jorge Fernández Herce
I. B. José Arencibia Gil (Telde)



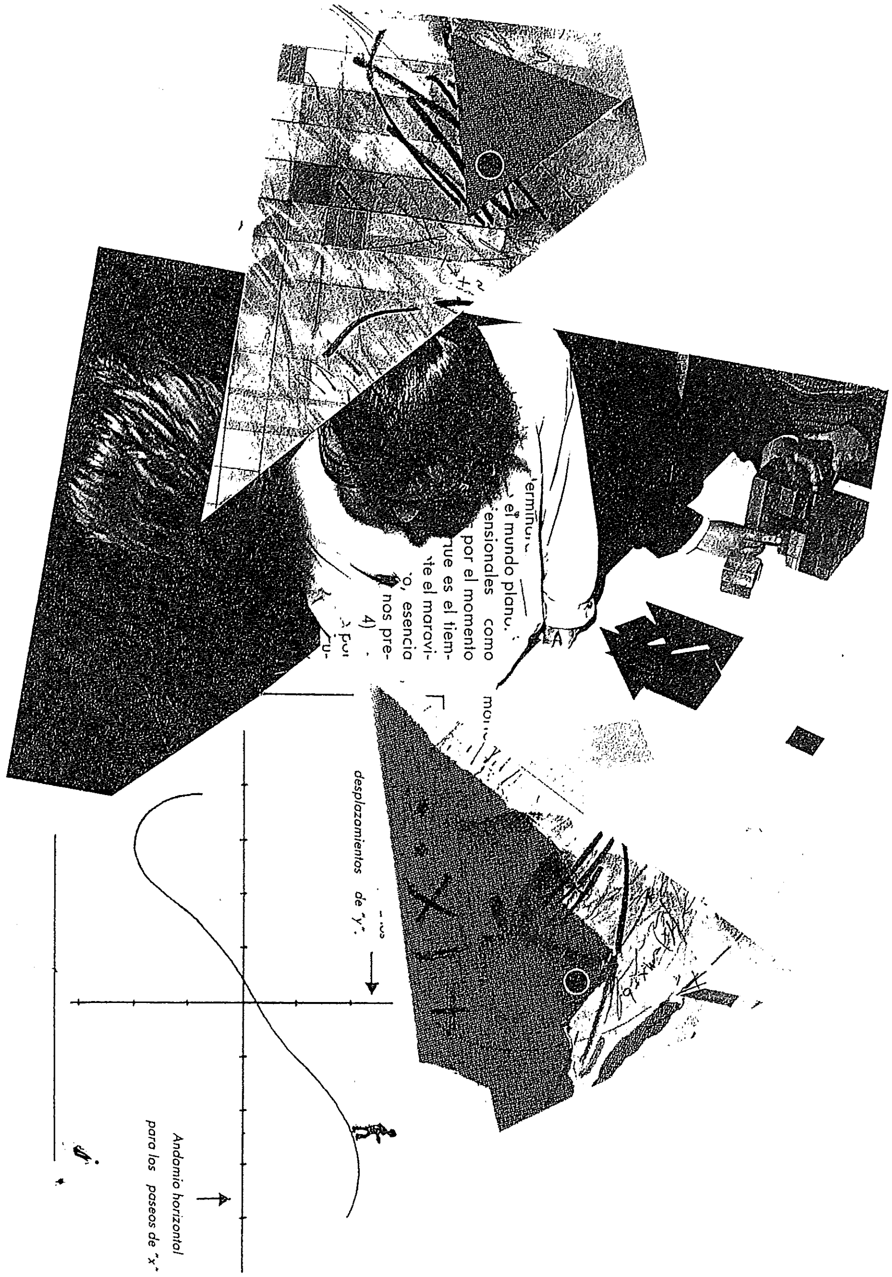
NUEVA DIRECCIÓN

PARA LA CORRESPONDENCIA

CON **SUMA**

Apdo. de Correos 1304

21080 - HUELVA



RECURSOS PARA EL AULA

Visión heurística de la clasificación de una cónica mediante calculadora gráfica y ordenador a nivel de 3º de BUP.

Germán Sáez i Moreno

Este escrito es el relato de una experiencia matemática en la que se pretendía hacer un programa que clasificara una cónica dada. Se comenzó con un programa escrito en PASCAL que devolvía el centro y el radio de una circunferencia entrada por sus coeficientes. El trabajo fue realizado por alumnos de 3º de BUP con ordenadores y calculadoras gráficas, bajo unos planteamientos heurísticos. Parte del trabajo se hizo en clase y la mayor parte fuera de la misma con un grupo de alumnos interesados en el tema.

Introducción

El objetivo de este escrito es explicar una experiencia que se llevó a cabo en el Instituto de Bachillerato Menéndez y Pelayo con alumnos de 3º de BUP, tanto en clase como en horas no lectivas. En general se pretendía dar una visión de la matemática más como un experimento-juego que como un compartimento estanco y en el tema de cónicas se quería dar una visión más completa de la que tenían. Además, se trataba de introducir a los alumnos, que quisieran, en unos conocimientos básicos de un lenguaje de programación estructurado. Había unos objetivos mínimos muy claros y otros que estaban en función del entusiasmo de los alumnos, de forma que se llegara hasta donde fuese necesario y no tanto con límites de programa, o metas parecidas. Subrayemos que todo lo que viene a continuación es la descripción de una experiencia matemática real con los defectos que comporta (conjeturas incompletas,...).

Test de la circunferencia y determinación del centro y el radio

Radio y centro de una circunferencia

Cuando se hace el estudio analítico de la circunferencia, más de una vez, se tiene la tentación de decir que las conclusiones a las que se llega son fácilmente programables. El programa es de los más sencillos que se pueden hacer con una máquina (ya sea una calculadora programable o un ordenador): se entran unos datos, se hace un cálculo aritmético trivial, que en esencia es una asignación, y se devuelve una respuesta hacia el exterior. Este algoritmo es uno de los más sencillos que se pueden utilizar para introducir la programación.

Este hecho se hizo notar a los alumnos después de dicho estudio que describe la ecuación de la circunferencia, y se ofreció la posibilidad de hacer este programa en un lenguaje estructurado en ordenadores y en horas no lectivas. El lenguaje de alto nivel escogido fue el PASCAL. Un grupo de alumnos se puso a trabajar y a estudiar los mínimos conocimientos de PASCAL que se necesitaban para programar una cuestión como ésta, a partir de un manual muy básico.

Comenzaron por hacer un pequeño programa sin ningún formato de escritura ni de lectura, que traducía el algoritmo que definen las fórmulas:

$$C\left(\frac{-m}{2}, \frac{-n}{2}\right)$$

$$r = \frac{\sqrt{m^2 + n^2 - 4p}}{2}$$

que nos permiten encontrar el centro *C* y el radio *r* de la circunferencia de ecuación

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0.$$

Este programa decía más o menos:

```
program circun;
  var
    m,n,p,xc,yc,r:real;

  begin
    readln(m);
    readln(n);
    readln(p);
    xc:=-m/2;
    yc: =-n/2;
    r:=sqrt(m*m+n*n-4*p)/2;
    writeln(xc);
    writeln(yc);
    writeln(r);

  end.
```

Los problemas que surgieron fueron los clásicos: confusión BEGIN/BEGUIN, el carácter fuertemente *tipado* del lenguaje, 4p en lugar de 4 * p, y sobre todo la utilización del entorno desde el que trabajábamos en PASCAL. Después pasamos a los formatos de entrada/salida:

```
program circun;

  var
    m,n,p,xc,yc,r: real;

  begin
    clrscr; (*borramos la pantalla*)
    writeln('Dame');
    write('m=');
    readln(m);
    write('n=');
    readln(n);
    write('p=');
    readln(p);

  (* cálculo del centro (xc,yc) y radio r de una
  circunferencia de ecuación:
                    x²+y²+mx+ny+p=0*)

    xc: =-m/2;
    yc: =-n/2;
    r:=sqrt(m*m+n*n-4*p)/2;
    writeln('El centro es: (',xc:11:11,',',yc:11:11,')');
    writeln(' y el radio vale: r=',r:11:11);

  end.
```

Problemas con la raíz cuadrada: caso no circunferencia, como siguiente paso en la programación (instrucción IF)

Después del ensayo con más ecuaciones y reseña en la libreta de clase de los resultados a los que llegábamos, nos encontramos con una ecuación que no representaba una circunferencia:

$$x^2 + y^2 + x + y + 1 = 0.$$

De esta manera tan natural surgió la necesidad de distinguir casos. Fue un intento de proteger el programa contra posibles situaciones de error y como análisis más exhaustivo del resultado de clase. Así, llegamos a un paso siguiente en programación: la instrucción IF. Entonces quedó un programa que ya parecía que cerraba todo el problema planteado:

```
program circun;

  var
     m,n,p,xc,yc,r,disc:real;

  begin
     clrscr; (*borramos la pantalla*)
     writeln('Dame');
     write('m=');
     readln(m);
     write('n= ');
     readln(n);
     write('p= ');
     readln(p);

 (* cálculo del centro (xc,yc) y radio r de una
 circunferencia de ecuación:
              x² + y² + mx + ny + p = 0*)

    xc:=-m/2;
    yc:=-n/2;
    disc: =m*m+n*n-4*p;
    if disc<0 then writeln('No se trata de una
    circunferencia')
           else begin
                r:=sqrt(disc)/2;
                writeln('El centro es:
                (',xc: ll:11,',',yc:ll:ll,')');
                writeln(' y el radio vale:
                r=',r:11:11)
                end
 end.
```

Representación con calculadora gráfica de cónicas en forma no reducida

Antes de llegar a este programa que resolvía nuestro problema habíamos planteado en clase la utilización de las calculadoras gráficas (en concreto la CASIO FX-7000G) para visualizar cónicas. El estudio hecho en clase de la elipse, la parábola y la hipérbola se había hecho en unas condiciones muy particulares. En concreto, se había propuesto a los alumnos ver qué dibujo formaban los puntos que verificaban la ecuación (desconocida para ellos):

$$2x^2 + 2y^2 - 5xy + 2 = 0$$

El punto de vista funcional de este problema venía impuesto por la calculadora gráfica (en concreto la función GRAPH), dado que lo que dibuja es una función que viene definida por una ecuación en forma explícita. Como entrenamiento introdujimos la ecuación de una recta en forma explícita. Justo en este punto teníamos un problema al que no están demasiado acostumbrados: despejar la y de la ecuación implícita de este lugar geométrico que queríamos visualizar. Jugando con la similitud con el caso de la recta que también se había dado inicialmente en forma implícita, llegaron a la sorpresa que estaban delante de dos funciones:

$$2x^2 + 2y^2 - 5xy + 2 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 + (-5x)y + (2x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{5x \pm \sqrt{25x^2 - 8(2x^2 + 2)}}{4} =$$

$$= \frac{5x \pm \sqrt{9x^2 - 16}}{4}$$

Después de descubrir que se trataba de una hipérbola que estaba en una posición diferente de la que nosotros habíamos estudiado básicamente en clase, continuaron averiguando qué representaban las ecuaciones:

$$2x^2 + 2y^2 - 12x + 10y + 42 = 0$$

$$4x^2 + y^2 - 4xy - 3x - 3y + 1 = 0$$

$$6x^2 + 6y^2 - 8xy - 1 = 0$$

$$x^2 - y^2 + 4x + 2y + 4 = 0$$

$$2x^2 + 2y^2 - 3 = 0$$

Así se fue conformando la idea de que toda ecuación de segundo grado del tipo $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ representaba una circunferencia (único caso que teníamos perfectamente estudiado), una elipse, una hipérbola o una parábola.

Clasificación de una cónica

Primera aproximación al problema

Entonces, el siguiente paso natural era intentar ampliar nuestro programa en PASCAL, de forma que clasificara la cónica que definía una ecuación cualquiera: $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$. En este punto hubo muchas conjeturas a propósito del criterio que el programa tendría que utilizar para averiguar el tipo de cónica que era. A base de ejemplos y contraejemplos (visualizados con la calculadora gráfica) descartaron conjeturas falsas y llegaron a un camino claro que podía distinguir entre los diferentes tipo de cónicas. El punto clave era un problema que la calculadora tenía contínuamente cada vez que dibujaba una cónica: el dominio de las funciones. Haciendo cálculos llegábamos a la conclusión de que las funciones que tenía que dibujar eran:

$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0 \Leftrightarrow by^2+(cx+e)y+(ax^2+dx+f)=0 \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{-cx-e \pm \sqrt{(cx+e)^2-4b(ax^2+dx+f)}}{2b} =$$

$$= \frac{-cx-e \pm \sqrt{(c^2-4ab)x^2+(2ce-4bd)x+(e^2-4bf)}}{2b}$$

por lo que se tenía que ver para qué valores el polinomio que había en el radicando daba resultados negativos o positivos. El estudio se reducía a preguntarse por el signo de una función cuadrática; llamando $r = c^2-4ab$, $s = 2ce-4bd$, $t = e^2-4bf$:

$$r \begin{cases} > 0 \rightarrow s^2-4rt \begin{cases} > 0\text{: hipérbola (fig. 1)} \\ = 0\text{: parábola o hipérbola (fig. 2)} \\ < 0\text{: parábola o hipérbola (fig. 2)} \end{cases} \\ = 0 \rightarrow s \begin{cases} > 0\text{: parábola (fig. 3)} \\ = 0 \rightarrow t \begin{cases} < 0\text{: no tiene puntos reales (fig. 4)} \\ \geq 0\text{: ????? (fig 5)} \end{cases} \\ < 0\text{: parábola (fig. 6)} \end{cases} \\ < 0 \rightarrow s^2-4rt \begin{cases} > 0\text{: elipse o circunferencia (fig. 7)} \\ = 0\text{: un punto o una recta (fig. 8)} \\ < 0\text{: no tiene puntos reales (fig. 9)} \end{cases} \end{cases}$$

Esquema que es un poco pesado de traducir en un programa PASCAL.

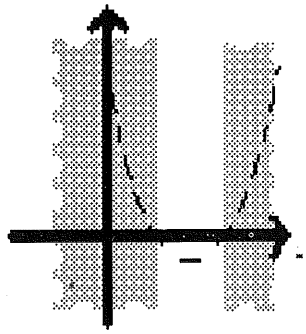


Figura 1

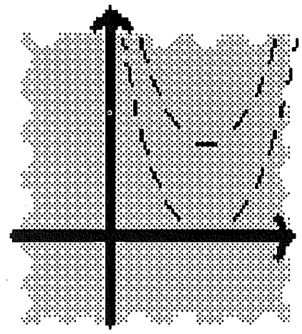


Figura 2

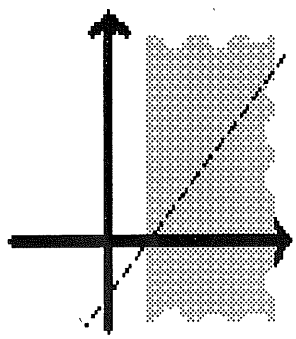


Figura 3

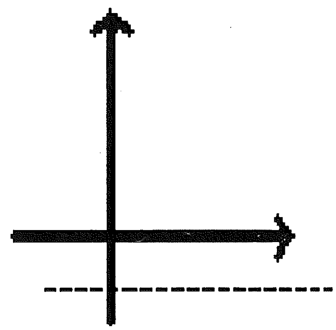


Figura 4

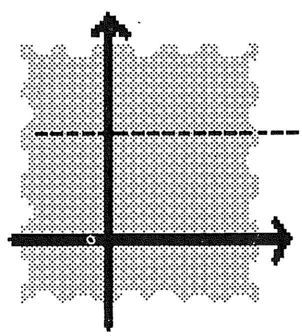


Figura 5

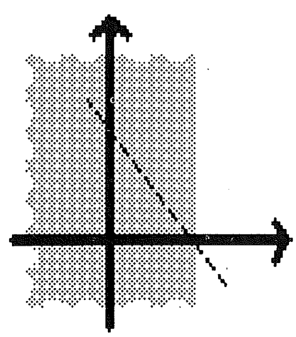


Figura 6

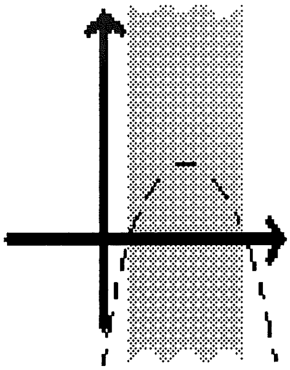


Figura 7

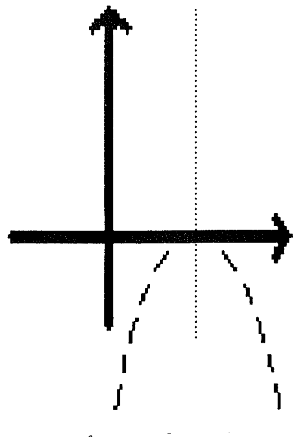


Figura 8

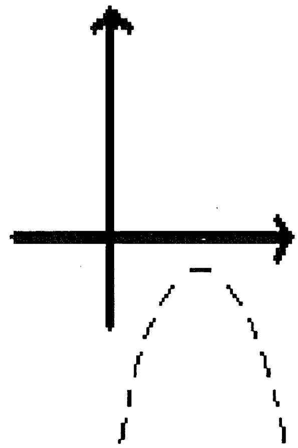


Figura 9

Segunda aproximación: descubrimiento de las dos rectas como cónica «especial»

Conforme van probando el programa con diferentes ecuaciones de segundo grado y comprobando los resultados con la calculadora gráfica se van encontrando sorpresas. En primer lugar aparece una ecuación de segundo grado que representa dos rectas: $3x^2 - y^2 + 2xy + 4x + 1 = 0$, una vez seguido el razonamiento del programa se tiene en cuenta, para completar y corregir el esquema anterior. Fundamentalmente se tiene en cuenta que si $r > 0$ y $s^2 - 4rt = 0$ (fig. 2) el discriminante de la ecuación es un cuadrado perfecto, por lo que salen dos rectas (no una parábola o hipérbola como nos había parecido al comienzo). Si estamos en el caso $r < 0$ y $s^2 - 4rt = 0$ (fig. 8) sólo se podrá dar un valor a la x, por lo que o es una recta vertical o bien un punto. ¿Cómo distinguirlo? Mirando ahora la situación desde el eje OY:

$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0 \Leftrightarrow ax^2+(cy+d)x+(by^2+ey+f)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-cy-d \pm \sqrt{(cy+d)^2-4a(by^2+ey+f)}}{2a} =$$

$$= \frac{-cy - d \pm \sqrt{(c^2 - 4ab)y^2 + (2cd - 4ae)y + (d^2 - 4af)}}{2a}$$

Se observa como primer detalle que coinciden los coeficientes de grado dos de esta función cuadrática y el de la anterior, por lo que analizando los tres posibles casos de discriminante de esta función cuadrática (fig. 10, 11, 12), nos sale sólo viable el caso *discriminante* = 0, por tanto estamos ante un punto (fig. 11).

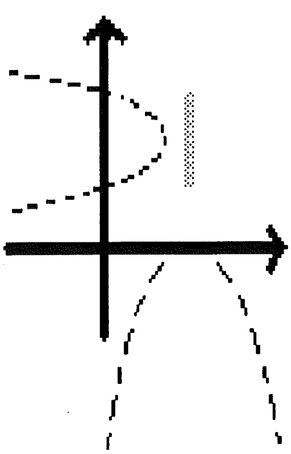


Figura 10

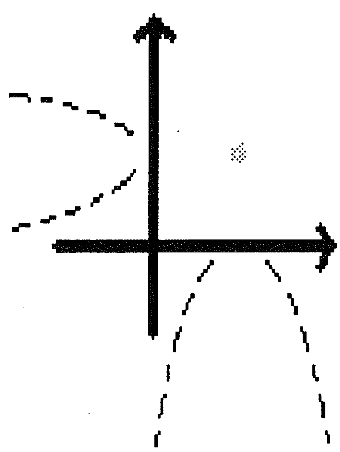


Figura 11

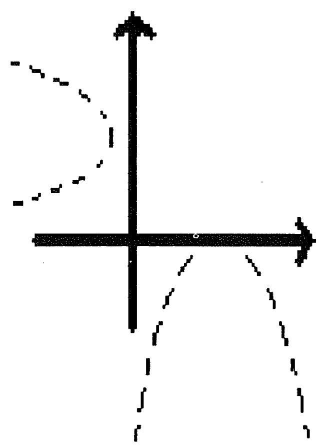


Figura 12

La otra cuestión que nos queda por analizar es la de cómo distinguir entre parábola e hipérbola en el caso $r > 0$, $s^2 - 4rt < 0$ (fig. 2). Mirando las funciones con variable independiente y, al ser el coeficiente de segundo grado del discriminante el mismo r, tenemos sólo tres posibles casos: *discriminante* > 0 (fig. 13) que definiría una hipérbola, *discriminante* $= 0$ (fig. 14) que nos daría un par de rectas (caso imposible porque nos hubiera dado este resultado mirando desde OX) y el *discriminante* < 0 (fig. 15) que nos seguiría dejando en la duda de si es una hipérbola o una parábola. Matemáticamente se puede ver que no puede ser una parábola: si una recta y todas sus paralelas cortan a una parábola, entonces la recta es paralela al eje de la parábola. Si fuera una parábola, el eje OY y sus paralelas cortarían la parábola (fig. 2), de lo que tendríamos que OY es paralelo al eje de la parábola y entonces la función con variable independiente y tendría como dominio una semirecta, en contradicción con $r > 0$.

Nuestro esquema queda:

$$r \begin{cases} > 0 \rightarrow s^2 - 4rt \begin{cases} \neq 0: \text{ hipérbola} \\ = 0: \text{ dos rectas} \end{cases} \\ = 0 \rightarrow s \begin{cases} \neq 0: \text{ parábola} \\ = 0 \rightarrow t \begin{cases} < 0: \text{ no tiene puntos reales} \\ > 0: \text{ dos rectas} \end{cases} \end{cases} \\ < 0 \rightarrow s^2 - 4rt \begin{cases} > 0: \text{ elipse o circunferencia} \\ = 0: \text{ un punto} \\ < 0: \text{ no tiene puntos reales} \end{cases} \end{cases}$$

Y el programa que lo describe completado con el nuestro:

```
program clasif;

  var
    a,b,c,d,e,f,r,s,t,discrim,m,n,p,disc,xc,yc:real;
  begin
    clrscr; (*borramos la pantalla*)
    writeln('De la ecuación
    ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 dame');
    write('a='); readln(a);
    write('b='); readln(b);
    write('c='); readln(c);
    write('d='); readln(d);
    write('e='); readln(e);
    write('f='); readln(f);
    r:=c*c-4*a*b;
    s: =2*c*e-4*b*d;
    t:=e*e-4*b*f;
    discrim:=s*s-4*r*t;
    if r>0 then begin
      if discrim<>0 then writeln('Es una hipérbola.')
               else writeln('Es un par de rectas.')
      end
    else if r=0 then if s<>0 then writeln('Es una
    parábola.')
                     else if t<0 then writeln('No
                     tiene ningún punto real.')
                     else writeln('Son dos rectas
                     paralelas.')
          (*caso r<0*)
            else if discrim<0 then writeln('No tiene
            ningún punto real.')
                 else if discrim=0 then
                 writeln('Es un punto.')
                      else begin
                 (*caso circunferencia
                 o elipse*)
  m:=d/b;
  n:=e/b;
  p: =f/b;
  disc:=m*m+n*n-4*p;
  if (a=b) and (c=0) and (disc>0) then
    begin
  (* cálculo del centro (xc,yc) y radio r de una circunfe-
  rencia de ecuación:
           x^2 +y^2 +mx+ny+ p= 0*)
    xc:=-m/2;
    yc: =-n/2;
    r:=sqrt(disc)/2;
    writeln('Es una circunferencia de centro:
    (',xc: 11:11,',',yc:11:11,')');
    writeln(' y radio: r=',r:11:11)
    end
                 else writeln('Es una
                 elipse.')
                 end
end.
```

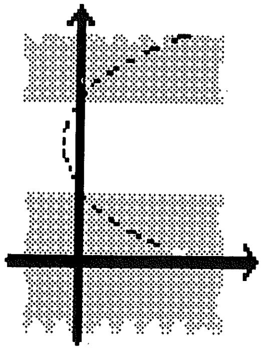


Figura 13

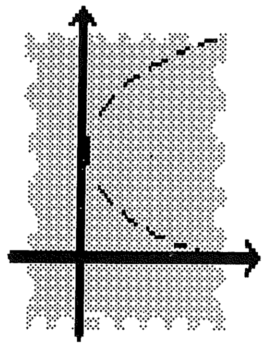


Figura 14

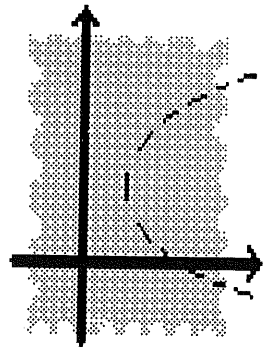


Figura 15

Descubrimientos posteriores, conclusiones, caracterizaciones no heurísticas

Posible continuación

Una posible continuación podría ser intentar reproducir lo que hace la calculadora gráfica para dibujar las cónicas, pero con las posibilidades gráficas del PASCAL.

También, completar el esquema con el caso b = 0, caso que no se plantean hasta que no encuentran una ecuación como por ejemplo $x^2-3x + 5y-13 = 0$:

$$b = 0 \rightarrow c \begin{cases} \neq 0\text{: hipérbola} \\ = 0 \rightarrow a \begin{cases} = 0\text{: no es una cónica} \\ \neq 0 \rightarrow e \begin{cases} \neq 0\text{: parábola} \\ = 0 \rightarrow d^2 -4af \begin{cases} \geq 0\text{: un par de rectas} \\ <0\text{: no tiene puntos reales} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

y a partir de aquí el programa.

Se podría pensar de la misma manera el intento de calcular los elementos más importantes de la cónica, pero con medios elementales de 3º de BUP.

Conclusiones estrictamente matemáticas del problema planteado

Se pueden intentar deducir teoremas a partir del programa. Por ejemplo, aplicando el algoritmo que define el programa a la curva de ecuación $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$ se puede ampliar el teorema que describe la circunferencia con el añadido que en el caso $m^2 + n^2-4p = 0$ se trata de un punto, y en el caso $m^2 + n^2-4p < 0$ no es ninguna cónica con puntos reales (todos los tiene complejos).

También, se puede plantear el problema de forma diferente intentando caracterizar los diferentes tipos de cónicas:

$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ es una circunferencia $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a = b \neq 0 \text{ y } c = 0 \text{ y } d^2 + e^2 -4bf > 0$$

$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ es una parábola $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(a = \frac{c^2}{4b} \text{ y } d \neq \frac{ce}{2b} \text{ y } b \neq 0\right) \text{ o bien } (a,\ e \neq 0 \text{ y } b = c = 0)$$

o bien estudiar una familia de cónicas, por ejemplo

$$(1-e^2)x^2 + y^2 + a^2(e^2 -1) = 0$$

Demostrar que no hay ninguna parábola que pase por los puntos (1, 0), (0,1), (1,1), (0, 0), o que las únicas parábolas que no tienen termino en *xy* son las de eje horizontal o vertical.

Planteamiento pedagógico de la experiencia

Se hizo un planteamiento poco dirigido de la experiencia, por parte del profesor. Por ejemplo, la mejora de los formatos del programa inicial que calculaba el radio y el centro de una circunferencia, se hizo por iniciativa de los propios alumnos, como un requerimiento completamente normal para ellos, no como algo sugerido por el profesor. Eso no quiere decir que el profesor no estuviese encima de los detalles que posiblemente no tuvieran en cuenta los alumnos (reseña en la libreta de los resultados obtenidos, grabación de los programas intermedios,...).

Es más, el papel del profesor era el de saber reconducir. Por ejemplo, hubo un momento, que de forma muy natural, los alumnos querían acceder a las posibilidades gráficas del PASCAL, para poder hacer los dibujos tal como los hacía la calculadora. Como reacción se hizo una reconducción hacia un planteamiento diferente.

Otro de los puntos que hubo que tener muy presente fue el abstenerse de hacer indicaciones, que podían casi cerrar todo el problema con una solución que a ellos no se les había ocurrido, sobretodo cuando estaba claro que más adelante ellos mismos verían esta cuestión (por ejemplo en los errores del primer esquema de clasificación de una cónica, o bien que no vieran que uno de estos casos era un par de rectas).

Dado que la experiencia se hacía fundamentalmente fuera de clase y con alumnos bastante motivados, se puso como objetivo que ellos encontraran los resultados, aunque no llegaran demasiado lejos. De esta manera los conocimientos los hacen más suyos, si son ellos mismos los que los han encontrado.

Trabajaron con el esquema clásico del método científico: experimentación, conjeturación, demostración (o bien contraejemplificación). Fue un trabajo en un laboratorio matemático con una vertiente muy lúdica: se jugaba a redescubrir y a hacer de sabios,...

En cuanto al rigor matemático se optó por avanzar aunque las afirmaciones no estuvieran suficientemente justificadas. Como siempre no se intentó razonar aquello que para ellos era evidente, ya que el objetivo en este caso no era poner en duda estas cuestiones ni rigorizarlas. Evidentemente se han utilizado afirmaciones bastante *fuertes*, sin demostrarlas (como por ejemplo que toda ecuación del tipo estudiado representaba una circunferencia, una elipse, una parábola o una hipérbola).

También requería, por parte del profesor, llevar todo el tema de cónicas bien estudiado y preparado, sobretodo de cara a la invención de contraejemplos. Era necesario tener paciencia con los avances y los resultados: estábamos dentro de un estadio de aproximaciones sucesivas (en todos los sentidos: madurez, rigor, resultados,...).

Como siempre en la asignatura de matemáticas, se tenía que reconducir la motivación externa (informática-matemática) hacia a una motivación puramente matemática.

Puesta en práctica real

Esta experiencia se llevó a cabo con dos grupos de tercer curso de BUP al final del estudio de las cónicas. Hay que señalar que no se había hecho la parte de Análisis y que el nivel de cónicas era el habitual; el concepto de tangencia se había trabajado bastante mediante el uso de discriminantes.

Ninguno de ellos había manejado nunca una calculadora gráfica, y sólo una minoría tenía nociones de BASIC. Se trabajó con quince calculadoras gráficas con la totalidad de los 39 alumnos de cada grupo (por separado). La utilización de la calculadora gráfica se impone en el caso que se quiera trabajar con todo el curso a la vez, pero también nos ha sido muy útil a la hora de rebatir instantáneamente conjeturas falsas cuando se trabajaba con los ordenadores (por ejemplo se conjeturó que cuando $a = b$ se trataba de una circunferencia, a lo que se puso como contraejemplo $3x^2 + 3y^2 -4xy -1 = 0$).

Los alumnos que estaban interesados en los mínimos conocimientos de PASCAL eran unos 10, aunque en las últimas sesiones el número bajó hasta unos 5 alumnos. No se llegó a acabar de escribir correctamente el último programa. A pesar de todo el resultado fue muy positivo.

Bibliografía

* MANZANO, S., LÓPEZ, A., **Lenguaje Pascal**, Ed. Alhambra (BREDA), Barcelona, 1986.

* TRIGO, V., CAMACHO, A., **Manual de TURBO PASCAL para las Ensenanzas Medias**, Ed. Anaya, Madrid, 1988.

Germán Sáez i Moreno
I.B. Bellvitge
Hospitalet de Llobregat

Una experiencia con el Teorema de Pitágoras según Iowo

Manuel Cortegoso Iglesias
Enrique Gómez Cabrero

Introducción

Esta Unidad está englobada dentro de cuatro de geometría plana:

- El cuadrado y el rectángulo
- Triángulos
- El Teorema de Pitágoras
- Áreas de figuras planas

las cuales han sido llevadas al aula durante los tres últimos cursos en 1º de FP1 a razón de tres grupos en cada curso.

Las cuatro están pensadas para ser impartidas en la ESO.

Para la elaboración de la unidad del Teorema de Pitágoras, nos hemos basado en la unidad que con el mismo titulo hizo el grupo Holandés IOWO.

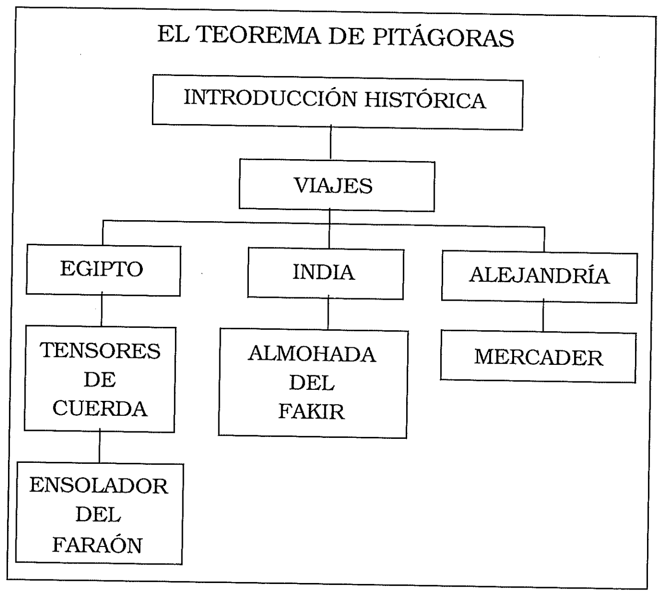
Su puesta en práctica en el aula se realiza utilizando retroproyector y transparencias en las que aparecen los dibujos que figuran en el texto, los cuales fueron pasados a transparencias por el Profesor Edelmiro Barreiro Gómez, del Departamento de Dibujo del Centro.

Los materiales utilizados han sido: cuerdas, papel milimetrado, calculadoras, geoplanos, puzles de madera y barras de mecano.

Dado que en el Centro hay la Especialidad de Madera, esto nos permite contar con la colaboración de Profesores y Alumnos de esta Especialidad para construir los puzzles, cubos, y vaciados en madera a los que se hace referencia a lo largo de la unidad.

Metodología

Con el siguiente diagrama se inicia la Unidad, al cual se volverá siempre que sea necesario, con el fin de no perder la idea global de la historia.



A lo largo de la primera clase se da una visión global de la unidad, aclarando en las notas históricas, lo que puede haber de verdadero o de fantástico en esta historia. Como actividad complementaria a las notas históricas utilizamos como material de apoyo la película *El Pato Donald en el País de las Matemágicas* (véase Revista Suma nº1, trabajo de José del Río Sánchez).

Durante las ocho clases siguientes los alumnos van resolviendo los problemas planteados, y al finalizar cada uno de los problemas, se procede a una puesta en común por parte de toda la clase, no excluyendo en ningún momento cualquier tipo de solución.

A la hora de construir materiales por parte de los alumnos, concretamente la cuerda y el papel milimetrado, la experiencia nos dice que se rompe mucho el ritmo de la clase si los elaboran en el aula, por lo tanto es aconsejable que los construyan previamente en casa o si no proporcionárselo.

Notas históricas

Hace unos 2.500 años vivía en la antigua ciudad griega de Crotón en el Mediterráneo, un sabio llamado Pitágoras de Samos, todos los sabios griegos adoptaron como segundo nombre el de la ciudad donde nacieron así es que Pitágoras nació en la isla griega de Samos. Fue un hombre emprendedor que viajó mucho, estuvo en Egipto, Babilonia y se cree que incluso en la India.

Al regreso de sus viajes, Pitágoras contaba a sus amigos, cosas sobre lo que había visto.

Nadie sabe exactamente lo que ocurrió hace 2.500 años, pero con un poco de fantasía trataremos de contarte la historia del TEOREMA DE PITÁGORAS.

Si se sabe que Pitágoras no fue el primero que descubrió el teorema que lleva su nombre. Unos 1000 años antes ya había gente en Babilonia que lo conocía. Eso está demostrado en tablillas de barro con escritos de esa época.

Puede ser que Pitágoras fuera uno de los primeros que se preocuparon de la demostración del TEOREMA, pero eso tampoco es seguro. Después de él innumerables amantes de las matemáticas se han dedicado a hacer diversas demostraciones del TEOREMA. Así a lo largo del tiempo se han dado más de 100 demostraciones.

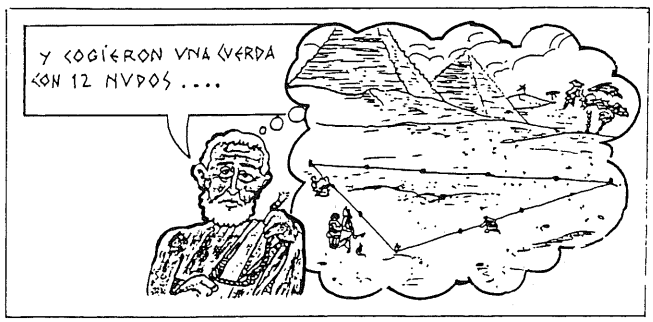
También es seguro que él fundó una ESCUELA, LA LLAMADA ESCUELA PITAGÓRICA, en la que además de dedicarse a las matemáticas estudiaban ASTRONOMÍA, MÚSICA, MÍSTICA Y RELIGIÓN. Realmente Pitágoras era visto en la antiguedad más como un profeta que como un científico.

Sus seguidores, los pitagóricos, vivían con reglas muy estrictas; vivían como monjes en un monasterio y eran vegetarianos. Como emblema para reconocerse usaban la estrella de cinco puntas, el símbolo de la salud.

La influencia de los pitagóricos en el desarrollo científico de ese tiempo fue muy grande y tuvo su resonancia durante muchos siglos después. Se puede decir que los pitagóricos son los primeros en la historia de la Ciencia occidental en ejercer ia actividad científica en equipo.

Tensadores de cuerda en Egipto

Durante una de sus clases Pitágoras mostró a sus amigos como los albañiles egipcios sabían trazar ángulos rectos con mucha exactitud.



1.- ¿Por qué sería tan importante en la construcción trazar ángulos rectos con mucha exactitud? ¿Tienes alguna idea de cómo lo hacen nuestros albañiles?

2.- Coge un trozo de cuerda y mide en ella 12 trozos iguales. Ata los extremos para obtener una cuerda cerrada con 12 nudos.

3.- Con esta cuerda puedes tensar un triángulo de tal manera que cada uno de los vértices coincida justamente con un nudo. A este triángulo lo llamaremos un *Triángulo de 12 nudos.* ¿Cuántos triángulos diferentes de 12 nudos puedes hacer?

4.- Dibuja esos triángulos de 12 nudos a escala y con precisión. Distancia entre los nudos 2 cm.

5.- ¿Cuál de esos triángulos usaron los tensadores de cuerda egipcios? ¿Por qué precisamente ese?.

6.- De uno de esos triángulos de 12 nudos puedes, sin medir ángulos, decir con mucha exactitud el tamaño de esos ángulos. ¿Qué triángulo es ese y qué tamaño tienen esos ángulos?

Pitágoras había enseñado así a sus amigos como los albañiles egipcios podían tensar un triángulo rectángulo con una cuerda de doce nudos. Pero esos amigos no se dejaron convencer así como así...

Para Pitágoras eso no era problema. Pitágoras dijo: *Naturalmente hay muchos triángulos de nudos que puedes hacer con menos de 12 nudos; en total hay 15. Pero entre ellos no hay ningún triángulo rectángulo...*

7.- Dibuja con precisión (usa regla y compás) esos 15 triángulos. Los triángulos rectángulos son, desde luego, raros. Se encuentran difícilmente, al menos si pretendes que la longitud de cada lado sea un número entero. Pitágoras conocía algunos y enseñó a sus amigos esta lista.

TRIANGULOS RECTANGULOS

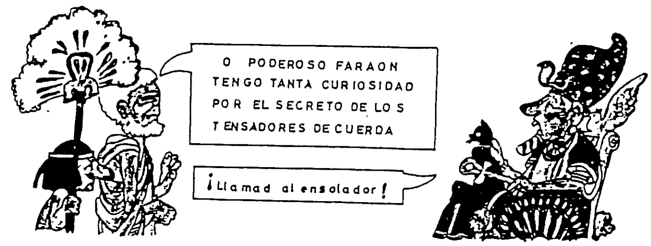
Nº DE NUDOS	LADOS
12	3,4,5
24	6,8,10
30	5,12,13
36	9,12,15
40	8,15,17

¿Cómo consiguió estos números?

Pitágoras y el ensolador del Faraón

Filolaios tenía muchas ganas de saber como su maestro había descubierto el secreto de los tensadores de cuerda. Pitágoras, que siempre estaba dispuesto a enseñar algo a los demás gustosamente accedió a contarselo:

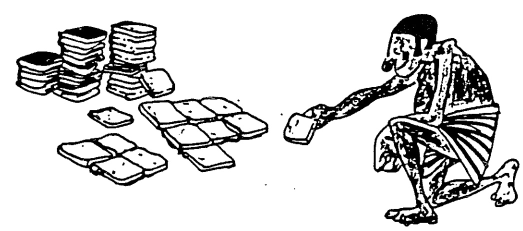
Debes saber que el día después de mi encuentro con los tensadores de cuerda fui recibido en el palacio del faraón de Egipto. Me arme de valor y...



El faraón mandó llamar a su ensolador y le pidió que trajera 2480 baldosas: *1240 blancas como el marfil y 1240 azules como el mar, pero todas de forma cuadrada.*

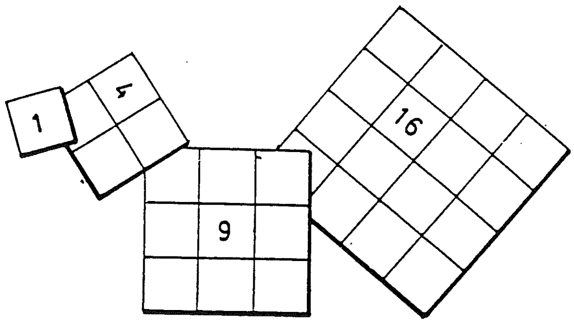
Y cuando el ensolador volvió con su carga de baldosas, el faraón le mandó formar el mayor número posible de cuadrados, pero todos diferentes de tamaño. Con las baldosas azules tenía que hacer lo mismo.

9.- Lee detenidamente el encargo al ensolador. ¿Cuántos cuadrados blancos diferentes podía colocar el ensolador?[1]

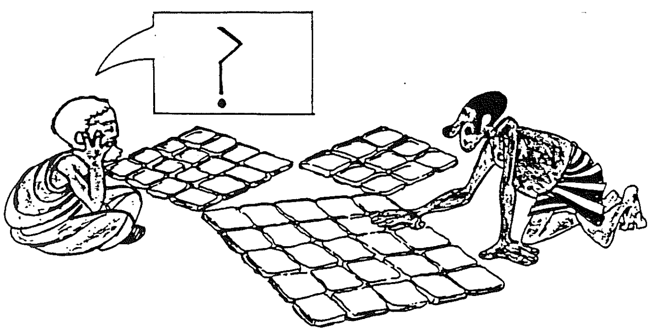


[1] Como actividad complementaria sugerimos que se utilice una demostración geométrica de la suma de los cuadrados que se encuentra en el libro del siglo XVII *La Llave de las Matemáticas* cuyo autor es Du Zhigeng, según un artículo aparecido en la Revista Suma nº 7 del que es autor Vicente Meavilla Segui.

10.- Recorta los cuadrados del ensolador en papel milimetrado, colorea de azul el primer conjunto que hagas con los 1240 y deja sin colorear el otro conjunto de 1 240. Escribe en cada cuadrado el número de baldosas.



Cuando el ensolador hubo hecho su trabajo sin ningún error, pregunté al faraón por la relación entre los cuadrados del ensolador y el triángulo de los tensadores de cuerda. El faraón contestó sencillamente: *mira como mi ensolador hace un triángulo...*

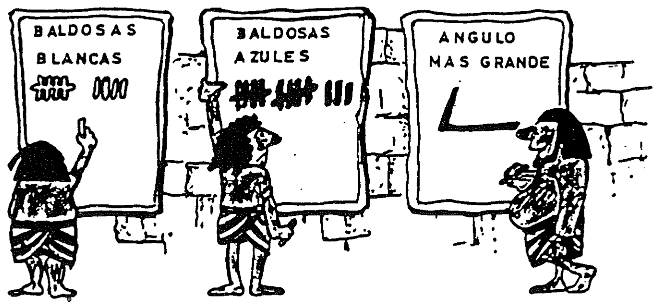


11.- Coge tres cuadrados de los que has recortado y construye con ellos un triángulo a la manera del ensolador.

¿Tiene importancia los cuadrados que eliges?.

Y el faraón dio el encargo a su ensolador de hacer una serie de triángulos. Le dijo que el cuadrado más grande debía ser blanco y los dos más pequeños azules.

A uno de los sirvientes que estaban presentes les pidió que contara las baldosas blancas para cada triángulo, un segundo sirviente debía de contar las baldosas azules; y un tercero debía comprobar si el ángulo más grande del triángulo era agudo, recto u obtuso...



12.- El ensolador usó para el primer triángulo cuadrados azules con 25 y 64 baldosas respectivamente. Tal como le habían encargado usó baldosas blancas para el cuadrado más grande.

El triángulo que hizo era acutángulo.

¿Cuántas baldosas tenía el cuadrado blanco?.

13.- Para el segundo triángulo usó baldosas azules con 100 y 81 baldosas respectivamente. Ahora le salió un triángulo obtusángulo. ¿Cuántas baldosas tenía el cuadrado blanco?.

14.- Haz una serie de 10 triángulos, mira en cada triángulo.

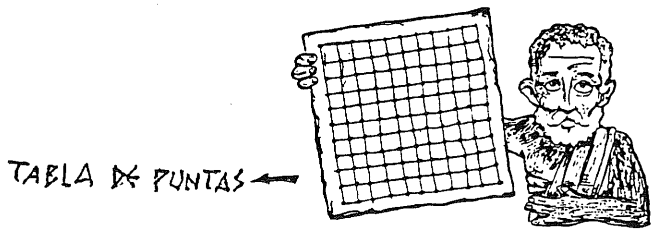
a) Cuántas baldosas azules has usado
b) Cuántas baldosas blancas has usado
c) Qué tipo de triángulo te sale.

Escribe los resultados en una tabla.

15.- ¿Puedes imaginarte ahora que tipo de triángulo obtienes si usas cuadrados de 100, 225 y 400 baldosas?.

Mi siguiente destino era la India, allí en ese lejano país, me encontre con un viejo fakir...

La almohada del fakir me dio la idea para una investigación más profunda sobre los triángulos con cuadrados alrededor. Me regaló la almohada, mira..»



16.- En una tabla de puntas (hoja de trabajo nº 1) dibuja: un rectángulo, un triángulo obtusángulo, un triángulo isósceles, una cometa.

17.- Calcula de cada una de las figuras cuantos *cuadrados de puntas* tienen de superficie.

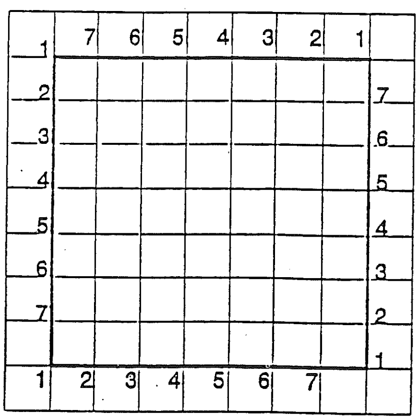
18.- Haz en una tabla de puntas (hoja de trabajo nº 2) cuatro figuras que sean distintas pero que tengan todas una superficie de seis *cuadritos de puntas*.

19.- Tensa en la tabla de puntas un cuadrado de 49 cuadritos de puntas. A las puntas a lo largo de los lados les das un número (como en el dibujo)

a) Tensa una goma con las puntas que tienen el número 2. ¿Qué figura has construido?. Dibújala en la hoja de trabajo nº 3.

b) Haz lo mismo con los números 3 y 4.

c) Calcula la superficie en *cuadrados* de las figuras anteriores.



20.- El fakir enseñó a Pitágoras un truco para hacer cuadrados que estén inclinados en la *rejilla*.

a) Termina de dibujar los cuadrados que están dibujados a medias en la hoja de trabajo nº 3.

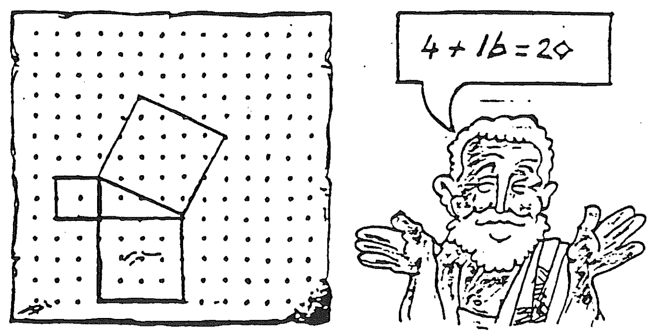
b) Explica como hace el fakir para conseguirlo.

21.- a) Calcula la superficie del cuadrado de la hoja de trabajo nº 4.

b) Busca los puntos medios de los lados de ese cuadrado. Une esos puntos. ¿Qué figura te sale? ¿Cuál es su superficie?

22.- Dibuja en la tabla de puntas una serie de cuadrados aumentando el tamaño. Empieza por un cuadrado de una cuadricula de puntas y termina con uno de 10 cuadrados de puntas. Usa la hoja de trabajo nº 4.

Era para mi entonces una cosa chupada tensar triángulos rectángulos en el tablero de puntas con cuadrados alrededor. Comparaba la superficie del cuadrado más grande con la suma de las superficies de los cuadrados más pequeños...



23.- Tensa tú mismo otro triángulo rectángulo rodeado de cuadrados. Compara la superficie del cuadrado grande con la suma de las superficies de los cuadrados pequeños. ¿Qué pasa..?

24.- Dibuja sobre los triángulos de la hoja de trabajo nº 5, los cuadrados que lo rodean y compara de nuevo las superficies del grande con la suma de las de los otros dos.

25.- Los amigos de Pitágoras también habían hecho triángulos y cuadrados en el tablero de puntas. Filolaios fue el primero en descubrirlo.

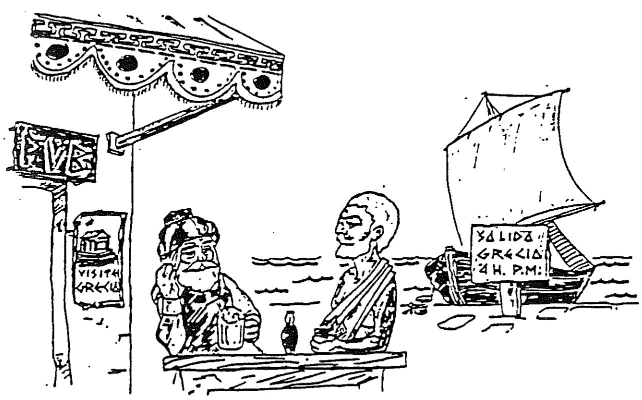
Dijo: *Si el triángulo tiene un ángulo recto, entonces el cuadrado del lado más largo es...*Intenta terminar la frase.

Pero Alkmaión, plomo como siempre, farfullaba: *¿y como puedo estar seguro de que eso es así, de que eso ocurre con todos los triángulos rectángulos?*

Y Pitágoras siguió contando...

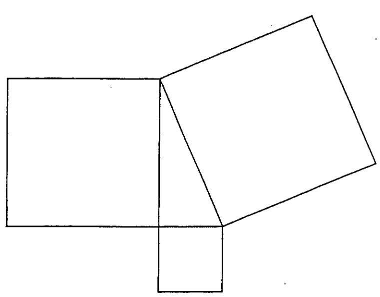
Pitágoras y los dos rompecabezas del mercader

En Alejandría me embarque para regresar a casa.
A bordo empecé a conversar con un mercader...



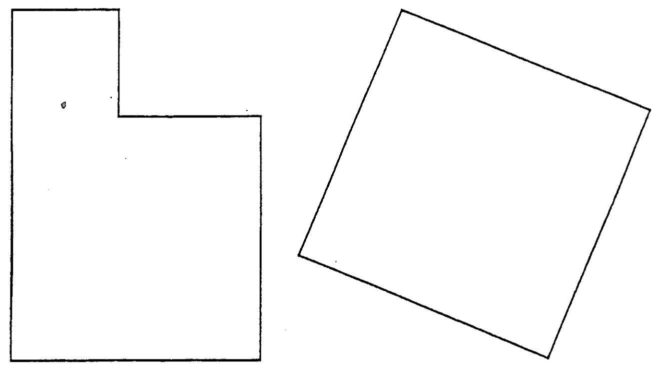
Y le conté lo del triángulo rectángulo. Pero el no se mostró sorprendido y me enseñó los siguientes rompecabezas...

26.- El primer rompecabezas tiene las siguientes piezas: tres cuadrados distintos y ocho triángulos iguales. Con los tres cuadrados y uno de los triángulos se ha construido la figura siguiente:



Si de los tres cuadrados iniciales los más pequeños tienen de área 9 cm^2 y 49 cm^2 ¿Cuántos cm^2 de área tiene el grande?. Resuélvelo utilizando el rompecabezas, construyendo con el dos cuadrados iguales.

27.- El segundo rompecabezas tiene las siguientes piezas: dos cuadrados iguales y ocho triángulos iguales. Construye con las piezas las dos figuras siguientes:

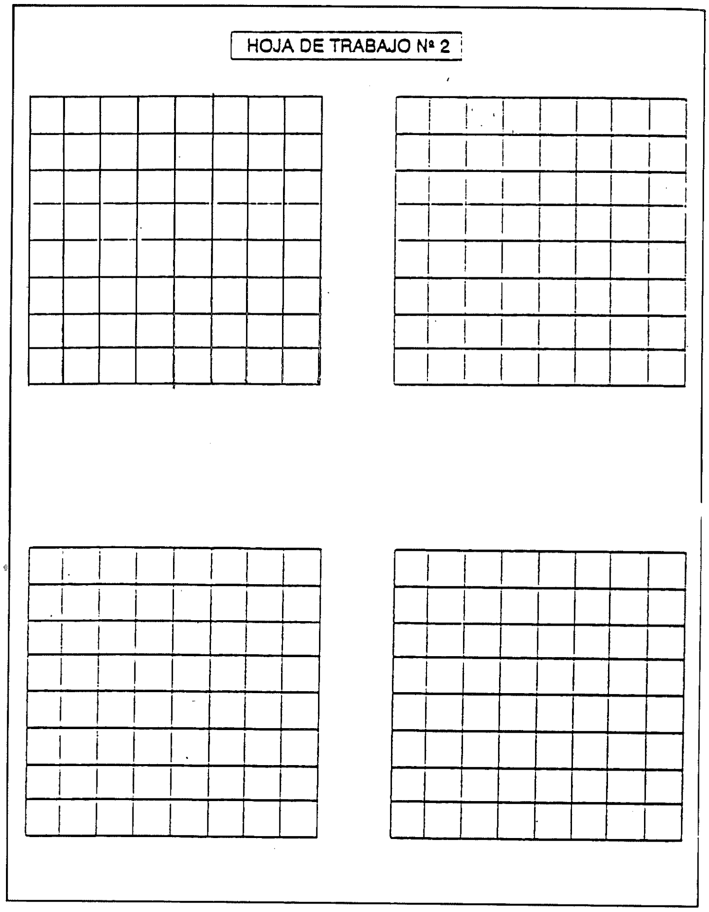


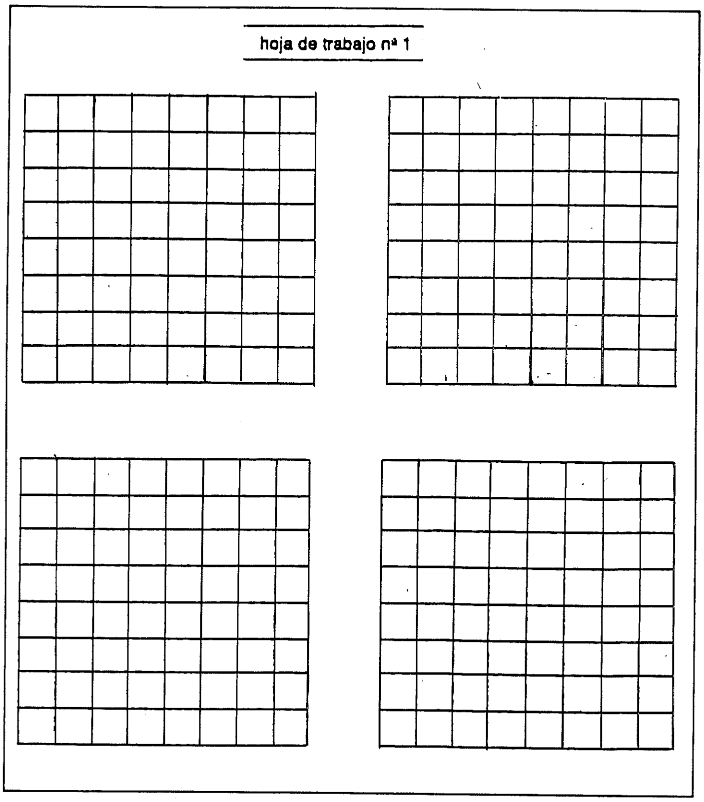
a) ¿Qué relación hay entre las dos piezas?
b) ¿Sería posible recubrir el cuadrado grande con una de las piezas y los dos pequeños con la otra?

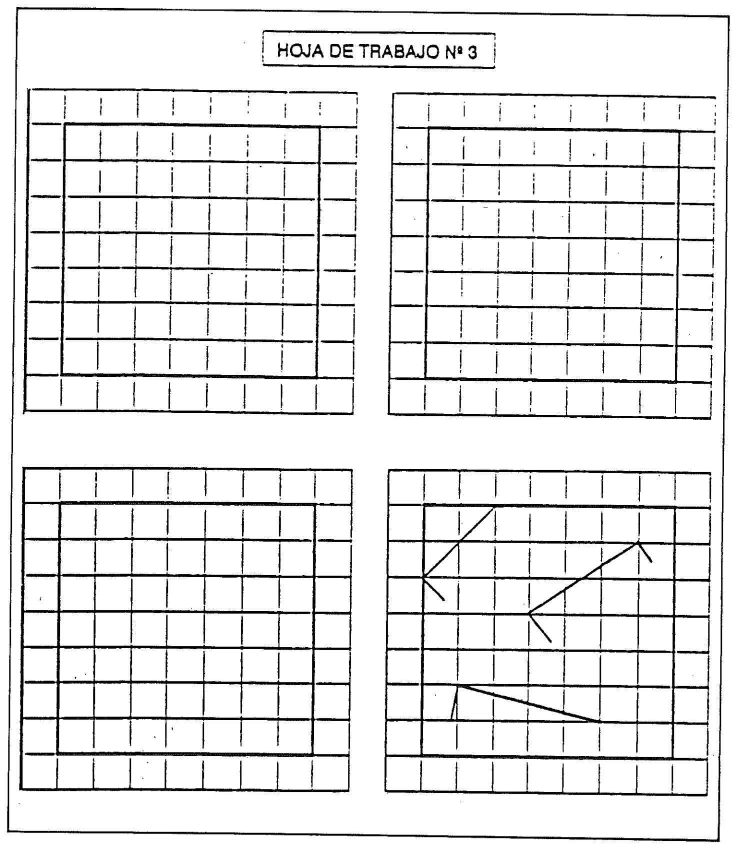
Después de esto por fin Pitágoras convenció a todo el mundo y desplegó el pergamino

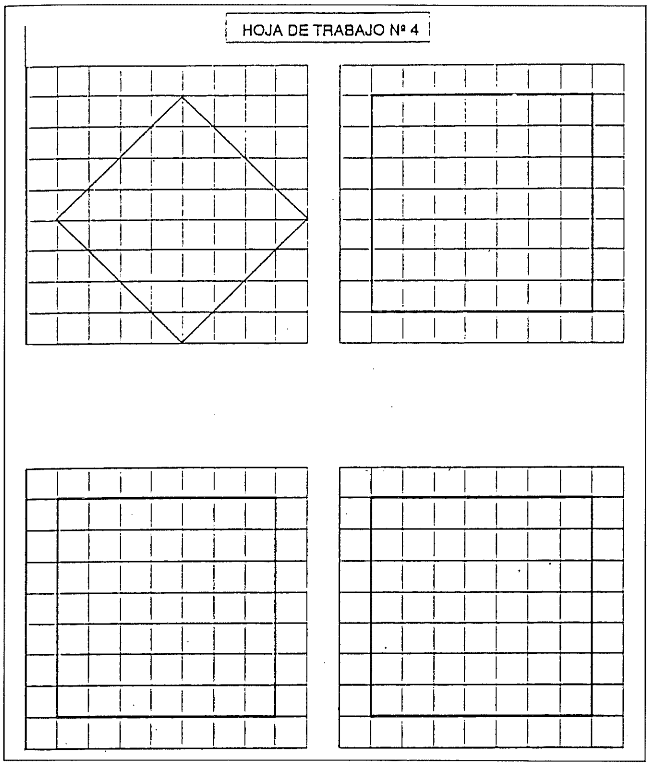
28.- ¿Qué puedes decir del cuadrado más grande si el triángulo es obtusángulo? ¿Y si el triángulo es acutángulo?

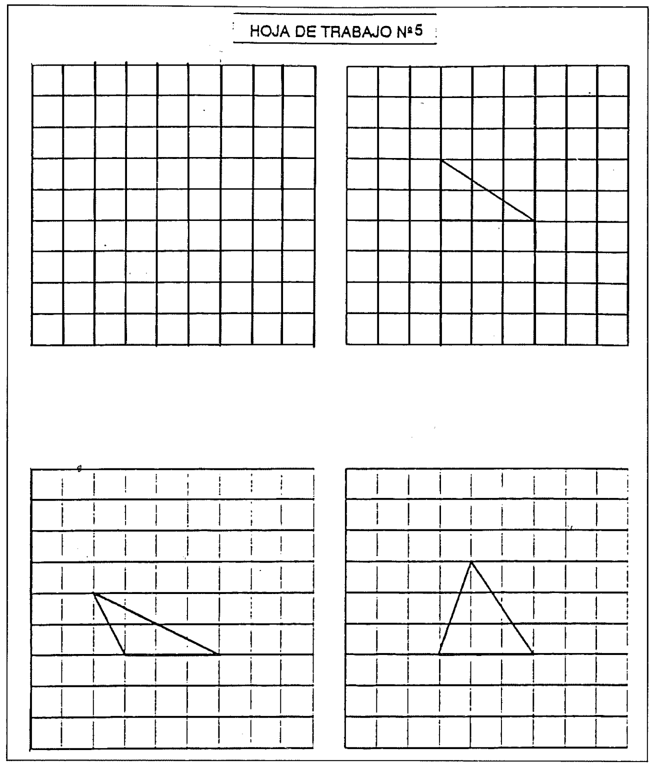
Manuel Cortegoso Iglesias
Enrique Gómez Cabrero
I.F.P. Xunqueira. Pontevedra








HOJA DE TRABAJO Nº 4


HOJA DE TRABAJO Nº5


¡Anímate y colabora!

Grafos a través de juegos

María Inés Sobrón Fernández
María Candelaria Espinel Febles

El objeto del presente artículo es presentar, partiendo de juegos, algunos problemas que incentiven el enfoque de una situación desde distintos ángulos. Concretamente el trabajo se estructura en tres epígrafes, correspondiendo cada uno a un juego: I. Pasar la pelota en un corro. II. El juego de las cerillas. III. Hundimiento de barcos. En cada epígrafe se comienza planteando el problema en forma intuitiva, introduciéndose a continuación los conceptos, relacionados con las cuestiones suscitadas, de los distintos campos de la matemática: Geometría, Álgebra, Combinatoria, Teoría de Grafos, Programación Lineal, Computación, etc. Adicionalmente se presentan algunos resultados que facilitan el análisis del problema.

Introducción

Con frecuencia una misma idea puede llevar a desarrollos muy distintos según el ámbito en que ésta surja o la utilidad que se le piense dar. Los modelos matemáticos más fructíferos en el campo del pensamiento humano son aquellos que presentan un mismo problema bajo distintos puntos de vista. Además, los de fácil comprensión, aunque conlleven problemas difíciles, son un estímulo para la creatividad y un extraordinario instrumento para la enseñanza.

El objeto del presente artículo es presentar, partiendo de juegos, algunos problemas que incentiven el enfoque de una situación desde distintos ángulos. Concretamente el trabajo se estructura en tres epígrafes, correspondiendo cada uno a un juego: I. Pasar la pelota en un corro. II. El juego de las cerillas. III. Hundimiento de barcos.

En cada epígrafe se comienza planteando el problema en forma intuitiva, introduciéndose a continuación los conceptos, relacionados con las cuestiones suscitadas, de los distintos campos de la matemática: Geometría, Álgebra, Combinatoria, Teoría de Grafos, Programación Lineal, Computación, etc. Adicionalmente se presentan algunos resultados que facilitan el análisis del problema.

Pasar la pelota en un corro

Consideremos que se traza una circunferencia en el patio de un colegio y sobre ella, aproximadamente equidistantes, se sitúan n niños que se numeran consecutivamente en el sentido de las agujas del reloj. El juego consiste en pasarse la pelota cumpliendo alguna regla determinada, por ejemplo, cada niño debe lanzarla al que está d lugares más avanzado que él.

Si representamos gráficamente el juego, obtenemos figuras que desde el punto de vista de la geometría reciben el nombre de polígonos. Por ejemplo, si $n = 8$ y consideramos los casos $d = 2$ y $d = 3$, obtenemos la figuras 1 y 2 que se denominen respectivamente *estrella* $\{ {8 \atop 2} \}$ y *polígono estrellado*

$\left\{ {8 \atop 3} \right\}$. Si interpretamos los niños como vértices y las trayectorias de la pelota como aristas entre los vértices, las figuras anteriores reciben el nombre grafos.

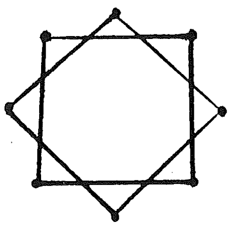


Figura 1

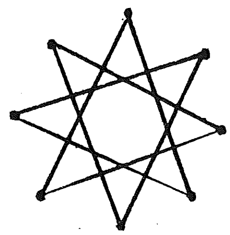


Figura 2

En relación con el juego surgen las siguientes cuestiones. ¿En qué situaciones la pelota llega a todos los niños? ¿Cuántos lanzamientos hay que realizar para que la pelota vuelva a quien inició el juego? Precisamos a continuación las ideas expuestas para polígonos y para grafos.

Un *polígono estrellado* es la figura formada al unir por rectas los puntos que resultan de dividir la circunferencia en n partes iguales, partiendo de uno dado y contando de d en d. Se representa por $\left\{ {n \atop d} \right\}$, siendo d la *densidad* del polígono. Para $d = 1$ se tiene el polígono regular de n lados. Se llama orden o *género* al número g de rectas o *cuerdas* necesarias para volver al punto de partida.

Se pueden presentar los siguientes casos:

1] n es múltiplo de d. En este caso se obtiene un polígono de género, $g = n/d$.

A la figura que resulta de dibujar todos los polígonos de la misma densidad, para un determinado valor de n, se les llama polígono de segunda especie o sencillamente *Estrella*. La figura 1 se representa la estrella correspondiente a $n = 8$, $d = 2$, $g = 8/2 = 4$.

2] $n \neq d$, pero n y d no son primos entre si. Sea $k = m.c.m.(n,d)$, entonces $g = n/k$. En el ejemplo de la figura 3, $n = 10$, $d = 4$, $m.c.d.\ (10,4) = 2$, $g = 10/2 = 5$.

3] n y d son primos entre sí. En este caso $g = n$ y se obtiene un polígono de n lados, en el que la circunferencia es recorrida d veces. En el ejemplo de la figura 2, $n = 8$, $d = 3$, $m.c.m.\ (8,3) = 1$, $g = 8$.

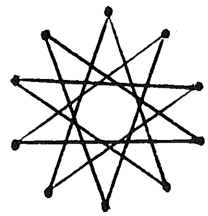


Figura 3

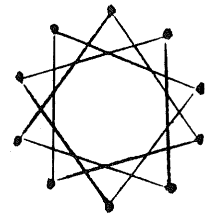


Figura 4

A los polígonos que resultan de los casos 2] y 3] es a los que propiamente se les llama *polígonos estrellados* o de primera especie. En estos casos, el polígono se forma con una sola línea poligonal. El polígono $\left\{ {n \atop d} \right\}$ se considera el mismo que $\left\{ {n \atop n-d} \right\}$ pero trazado en sentido inverso.

La figura 4 corresponde al polígono estrellado $\left\{ {10 \atop 3} \right\}$.

La idea de unir puntos situados sobre una circunferencia se puede trasladar fácilmente a la teoría de grafos.

Un grafo no dirigido G = (V,E) es una estructura que consta de un conjunto finito V de elementos llamados *vértices* y de un conjunto E de pares no ordenados de vértices llamadas *aristas*. Se llama *grafo complementario* G de un grafo G, al grafo formado por los vértices de G y por las aristas que no están en G. Al número de aristas que inciden en un vértice se le llama *grado*.

Algunos grafos reciben nombres especiales. Un grafo con n vértices se dice *completo* si y sólo si para cada par de vértices existe una arista que los relaciona, se indica por K_n. Un grafo en el que todos los vértices tinen el mismo grado se llama *regular*.

Un *ciclo* es una sucesión de aristas donde el vértice inicial y final coinciden. C_n simboliza un ciclo de longitud $n > 3$. Una *cuerda* de un ciclo es una arista que une dos vértices no consecutivos en el ciclo.

Un grafo con n vértices, $n \geq 4$, que es un ciclo sin cuerdas se llama un *agujero* y se indica por H_n. El grafo complementario de un agujero H_n^d se le llama *antiagujero*, $\overline{H}_n$. Indicaremos por H_n un agujero de n vértices y cuerdas de longitud *d*.

Un grafo con n vértices, $n \geq 3$, se llama *tela de araña*, A_n^d, si para cada vértice $i \in \{1,2,...,n\}$ existe una arista que le relaciona con los vértices $i+d$, $i+d+1$, $i+d+2,...,i+n-d$ (las sumas se toman módulo n), siendo $1 \leq d \leq [n/2]$. Al grafo complementario $\overline{A}_n^d$ se le llama *antitela de araña.*

Si consideramos que los n vértices están situados sobre una circunferencia, siguiendo la notación de los polígonos estrellados, un grafo completo se representaría:

$$K_n = \left\{ {n \atop 1\ 2\ ...\ [n/2]} \right\}$$

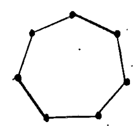
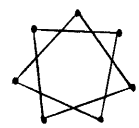
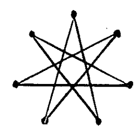
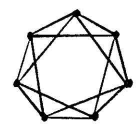
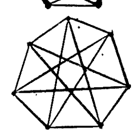
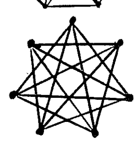
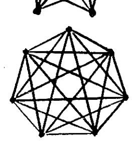
Un ciclo tendrá la notación:

$$C_n = H_n = \left\{ {n \atop 1} \right\}$$

Mientras que la tela de araña y la antitela de araña quedarían, respectivamente:

$$A_n^d = \left\{ {n \atop d\ \ (d+l)\ ..\ ([n/2]-d)} \right\} \quad y \quad \overline{A}_n^d = \left\{ {n \atop 1\ 2\ ...\ (d-1)} \right\}$$

Para $n = 7$ se pueden presentar los siguientes casos:

Especie	**Polígono**	**Grafo**	**Nombre**	**Dibujo**
$\left\{ {7 \atop 0} \right\}$		$\overline{A}_7^1$	Grafo desconexo	
$\left\{ {7 \atop 1} \right\}$	Polígono	$\overline{A}_7^2 = C_7$	Antitela de araña o ciclo	
$\left\{ {7 \atop 2} \right\}$	Polígono Estrellado	H_7^2	Agujero	
$\left\{ {7 \atop 3} \right\}$	Polígono Estrellado	$H_7^3 = A_7^3$	Agujero o tela de araña	
$\left\{ {7 \atop 1\ 2} \right\}$		$\overline{H}_7^3 = \overline{A}_7^3$	Antiagujero o Antitela de araña	
$\left\{ {7 \atop 1\ 3} \right\}$		$\overline{H}_7^2$	Antiagujero	
$\left\{ {7 \atop 2\ 3} \right\}$		A_7^2	Tela de araña	
$\left\{ {7 \atop 1\ 2\ 3} \right\}$		A_7^1	Tela de araña	

El juego de las cerillas

A partir de un montón de cerillas, dos jugadores que actúan alternativamente, van retirando en cada jugada una, dos o tres cerillas. Gana el juego quien consigue dejar en el montón una sola cerilla.

Como veremos, el análisis de esta situación tan sencilla genera gran número de conceptos: juego de información perfecta, grafo dirigido, circuitos de un grafo, juego de Nim, conjuntos internamente estables, conjuntos externamente estables, núcleo de un grafo, función de Grundy.

Este juego es un ejemplo de *juego de información perfecta*. Un juego se dice de información perfecta, cuando jugándose alternativamente entre dos o más jugadores, estos conocen de antemano tanto todos los estados del juego como todas las jugadas que se pueden realizar desde cada estado. Cuando dichas jugadas son las mismas para todos los jugadores el juego se dice *equilibrado*.

En el estudio de muchos juegos resulta muy útil su modelización mediante un grafo. Un *grafo dirigido* $G = (V,E)$ es un par formado por un conjunto finito V, cuyos elementos se denominan *vértices*, y otro conjunto $E \subset V \times V$, cuyos elementos se denominan *arcos*.

Para el análisis de nuestro juego, consideraremos el grafo cuyos vértices son los estados del juego, es decir, el número de cerillas *n* con que se inicia el juego y el número de cerillas que pueden permanecer en el montón a lo largo de su desarrollo,

$$V = \{1, 2, \dots, n\}$$

y los arcos son los pares ordenados de estados entre los que la transición del primero al segundo es posible en una jugada,

$$E = \{ (n,k) / n \in V \wedge k \in V \cap \{(n-1), (n-2), (n-3)\} \}.$$

Si consideramos $n = 16$, podemos representar el juego mediante el grafo de la figura 5.

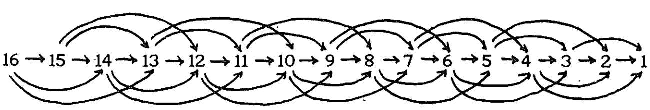


Figura 5

Un juego se dice que es un *juego de NIM*, cuando es un juego de información perfecta que se puede representar mediante un grafo dirigido. En estos juegos resulta vencedor quien conduce el juego a un vértice final, es decir un vértice $u \in V$ tal que $\forall v \in V, (u,v) \notin E$.

Nuestro juego evidentemente es un juego de NIM. Muchos otros también pertenecen a esta clase: ajedrez, damas, tres en raya, juegos de Marienbad, etc.

Se llama *circuito*, en un grafo dirigido, a un conjunto de arcos $\{(u_i, v_i)\}$, $i = 1,\dots,n$, tal que $v_n = u_0$ y $v_i = u_{i+1}$, $\forall i = 1,\dots,n-1$. Claramente todo juego de Nim cuyo grafo no tiene circuitos, como ocurre en nuestro juego, finaliza con un ganador.

Nuestro objetivo es la caracterización de las posiciones ganadoras del juego, es decir, aquellos vértices que debe elegir un jugador para vencer independientemente de las jugadas de su oponente.

En esta dirección tienen especial importancia los conceptos de *conjunto internamente estable*, *conjunto externamente estable* y *núcleo* de un grafo. Un conjunto de vértices se dice internamente estable, si siempre que un jugador elija uno de sus vértices obliga a que su contrario no pueda elegir ningún vértice de dicho conjunto. Un conjunto de vértices se dice externamente estable, si desde cualquier vértice de su complementario es posible elegir uno de sus vértices. Evidentemente todo conjunto externamente estable contiene todos los vértices finales del grafo. Un conjunto, $S \subset V$, que sea a la vez externamente estable e internamente estable se llama *núcleo del grafo*.

De acuerdo con estas ideas, la determinación de un nucleo S del grafo, si existe, proporciona una estrategia no perdedora para el jugador que consiga situar el juego en uno de sus vértices. Si un jugador A elige un vértice $v_1 \in S$, o bien es un vértice final (triunfo), o bien obliga a su oponente B a elegir un vértice $v_2 \in V - S$. Entonces el jugador A puede elegir nuevamente un vértice $v_3 \in S$, etc. El juego termina cuando uno de los dos jugadores elige un vértice final v_k y puesto que $v_k \in S$ el jugador ganador no puede ser B. Además si el grafo no tiene circuitos, la anterior estrategia conduce claramente al triunfo.

De forma más precisa, en un grafo G = (V, E), un conjunto $I \subset V$ se dice que es internamente estable o independiente, si y sólo si,

$u, v \in I \Rightarrow (u,v) \notin E \wedge (v,u) \notin E$ [1]

Un conjunto $J \subset V$ se dice *externamente estable o dependiente*, si y sólo si, verifica:

$\forall\, u \notin J\ \exists\ v \in J$ tal que $(u,v) \in E$ [2]

Un conjunto de vértices se dice que es *núcleo* del grafo, si y sólo si, verifica las propiedades [1] y [2].

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, nuestro interés debe centrarse en encontrar, si existen, los núcleos del grafo. Ahora bien, un grafo sin circuitos posee núcleo y además es único, como ocurre en el grafo que nos interesa.

Una buena ayuda a la hora de determinar los núcleos de un grafo es proporcionada por la *función de Grundy*.

Dado un grafo dirigido G = (V,E), se define la función de Grundy, como una función $g: V \rightarrow N \cup \{0\}$ cumpliendo la condición:

$g(v) = \text{Min}\ \{\ n\ /\ n \notin \{\ g(u)\ /\ (v,u) \in E\ \}\ \}.$

El valor de la función de Grundy *g* en un vértice *v*, es el menor de los números naturales, incluido el cero, que no ha sido asignado por la función de Grundy *g*, a ninguno de sus vértices siguientes.

Así puede no existir función de Grundy y puede no ser única.

Un ejemplo de grafo con más de una función de Grundy es el representado en la figura 6, donde el valor de la función se escribe junto al vértice correspondiente.

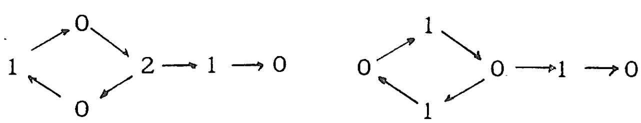


Figura 6

Si un grafo tiene función de Grundy g, entonces tiene un núcleo

$$S = \{\ v \in\ /\ g(v) = 0\}$$

puesto que este conjunto satisface simultáneamente [1] y [2]:

$v \in S \Leftrightarrow g(v) = 0 \Rightarrow \text{Min}\ \{\ g(u)\ /\ (v,u) \in E\ \} > 0$

$\Rightarrow u \notin S\ \forall\ u \in V$ tal que $(v,u) \in E$;

$v \notin S \Leftrightarrow g(v) > 0 \Rightarrow \text{Min}\ \{\ g(u)\ /\ (v,u) \in E\ \} = 0$

$\Rightarrow \exists\ (v,u) \in E$ tal que $u \in S$.

El recíproco no es cierto. En la figura 7 se representa un grafo que no tiene función de Grundy aunque tiene núcleo S = {d}.

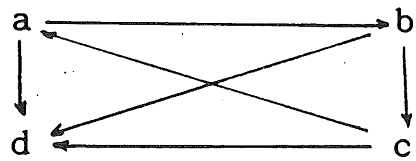


Figura 7

Un grafo sin circuitos, como el de nuestro juego, posee una única función de Grundy. Por tanto un juego de NIM cuyo grafo asociado no tenga circuitos, puede analizarse completamente mediante un mecanismo teóricamente sencillo: se calcula la función de Grundy y, a partir de ella, se halla el núcleo del grafo, que son los vértices para los que la función de Grundy valen cero.

Si el punto de partida del juego es un vértice que no pertenece al núcleo, gana el primer jugador, siempre que en todas sus jugadas elija vértices del núcleo; por el contrario, si el juego se inicia en un vértice del núcleo, gana el jugador que actúe en segundo lugar siguiendo la misma estrategia.

En nuestro ejemplo, con $n = 16$ cerillas, la función de Grundy se define de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
g(1) = g(5) = g(9) = g(13) &= 0\\
g(2) = g(6) = g(10) = g(14) &= 1\\
g(3) = g(7) = g(11) = g(15) &= 2\\
g(4) = g(8) = g(12) = g(16) &= 3
\end{aligned}$$

por tanto el núcleo del grafo es

$$S=\{1, 5, 9, 13\}$$

y puesto que el vértice inicial «16» no pertenece al núcleo, ganará el primer jugador si sigue la estrategia indicada, que en las sucesivas jugadas le conducirá a los vértices: 13, 9, 5, 1; independientemente de la actuación de su oponente.

En general, si se comienza con n cerillas, la función de Grundy queda definida por:

$g(4k+1) = 0$ para $k \in N$ tal que $4k+1 \leq n$
$g(4k+2) = 1$ para $k \in N$ tal que $4k+2 \leq n$
$g(4k+3) = 2$ para $k \in N$ tal que $4k+3 \leq n$
$g(4k) = 3$ para $k \in N$ tal que $4k \leq n$

y el núcleo es el conjunto:

$$S = \{4k+1 \ / \ k \in N \wedge 4k+1 \leq n\}.$$

Por tanto, siguiendo la estrategia acertada, el primer jugador vence si $n \neq \dot{4}+1$ y pierde en caso contrario.

Hundimiento de barcos

A partir de un rectángulo dividido en *m x n* casillas, un jugador marca un número determinado de casillas, simulando que esas posiciones están ocupadas por barcos, con la condición de no marcar casillas adyacentes. El segundo jugador, en cada jugada, dispara sobre una de las casillas, pudiendo ser el resultado:

a] hundir el barco, si dispara a la casilla donde se encuentra,
b] tocar algunos barcos, si dispara a una casilla adyacente a ellos,
c] hacer agua, si el resultado no se encuentra entre los anteriores.

El objetivo del juego es hundir todos los barcos con el mínimo número de disparos.

El juego puede representarse mediante un rectángulo convenientemente cuadriculado, por ejemplo, si $m = 4$ y $n = 6$ tendremos la figura 8.

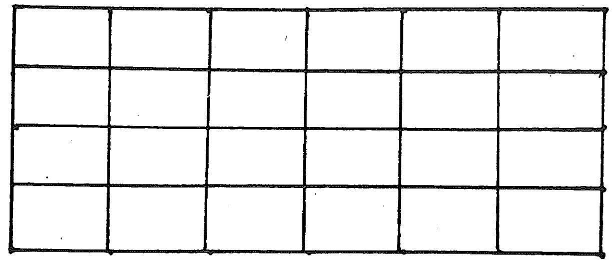


Figura 8

También se puede representar por una matriz

$$(a_{ij}),\ i = 1, 2, 3, 4; \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6;$$

o bien por un grafo no dirigido, como el de la figura 9, donde los vértices son las casillas, simbolizadas por los pares

$$(i,j),\ i = 1, 2, 3, 4; \quad j= 1, 2, 3, 4, 5, 6;$$

y dos vértices están conectados si las casillas son adyacentes:

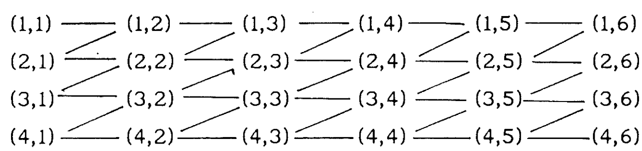


Figura 9

Dependiendo de la representación elegida, cada colocación de los barcos es un subconjunto de cuadriculas, elementos de la matriz o vértices del grafo, cumpliendo la condición establecida. Sea $\mathfrak{C}_0$ la clase de dichos subconjuntos, es decir: $A \in \mathfrak{C}_0$, si y sólo si, para todo par de elementos a, b de A, estos no son adyacentes. Claramente si $A \in \mathfrak{C}_0$ y $B \subset A$, entonces $B \in \mathfrak{C}_0$; propiedad que se expresa diciendo que la clase $\mathfrak{C}_0$ de poposiciones de los barcos es una *clase hereditaria.*

Si consideramos el grafo $G = (V,E)$, siendo

$$V = \{ (i,j) \ / \ i = 1,2,\ldots,4 \ j = 1,2,\ldots,6\}$$

$$((i,j),(s,t)) \in E \Leftrightarrow |i-s| \leq 1 \wedge |j-t| \leq 1$$

en el lenguaje relativo a grafos, la clase $\mathfrak{C}_0$ está formada por los conjuntos independientes del grafo.

Consideraremos algunos problemas que se pueden formular en relación con este juego.

El problema de determinar el número máximo de barcos que se pueden colocar, es equivalente al problema de calcular el cardinal de los elementos maximales de la clase $\mathfrak{C}_0$. Número que puede determinarse resolviendo el problema de programación lineal binaria:

$$\text{Máximizar} \quad \sum_{\substack{i=1,\dots,4 \\ j=1,\dots,6}} x_{ij}$$

sujeto a:

$$x_{ij} + x_{st} \leq 1 \text{ donde } i = 1,\dots,4; \; j = 1,\dots,6;$$

$$\text{y siendo } |i-s| \leq 1 \wedge |j-t| \leq 1 \quad (i,j) \neq (s,t)$$
$$\text{con } x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i = 1,\dots,4, \quad j = 1,\dots,6$$

donde $x_{ij} = 1$ significa que en el vértice (i,j) se sitúa un barco, y $x_{ij} = 0$ en caso contrario.

En el intento de optimizar la eficacia de los disparos, parece razonable disparar aleatoriamente entre los vértices que pertenezcan a la intersección del mayor número posible de subconjuntos de la clase $\mathfrak{C}_0$.

Procediendo secuencialmente, si el barco blanco del disparo n-ésimo fue elegido entre los pertenecientes al mayor número posible de subconjuntos de la clase $\mathfrak{C}_{n-1}$, para el siguiente disparo consideraremos la clase $\mathfrak{C}_n$ cuya construcción dependerá del resultado del último disparo:

1] Si el disparo produce un *hundimiento*, la clase $\mathfrak{C}_n$ se obtiene de la clase $\mathfrak{C}_{n-1}$ suprimiento los elementos que no contengan el barco hundido.

2] Si el resultado fue *agua*, la clase $\mathfrak{C}_n$ estará formada por los elementos de $\mathfrak{C}_{n-1}$ que no contengan ni el barco al que se disparó ni a ninguno de los adyacentes.

3] Por último, si el resultado del disparo es *tocó a k barcos*, $\mathfrak{C}_n$ se formará con los elementos de $\mathfrak{C}_{n-1}$ que contengan k barcos adyacentes al blanco del disparo.

Siguiendo esta estrategia, realizaremos el n+l-ésimo disparo contra uno de los barcos que pertenezcan al mayor número posible de subconjuntos de la clase $\mathfrak{C}_n$.

Evidentemente, si se fija de antemano el número de barcos, la clase $\mathfrak{C}_0$ debe restringirse considerando únicamente los subconjuntos de V que contengan el número de barcos señalados.

Otra cuestión a considerar en el juego es el número de barcos que le interesa colocar al primer jugador y donde debe colocarlos, para obligar a su oponente a realizar el número máximo de disparos.

Bibliografía

* BALAS, E - PADBERG, M.W. (1979) **Set Partitioning-a Survey**. Combinatorial Optimization. John Wiley & Sons.

* BERGE, C. (1973) **Graphs and Hypergraphs**. North - Holland.

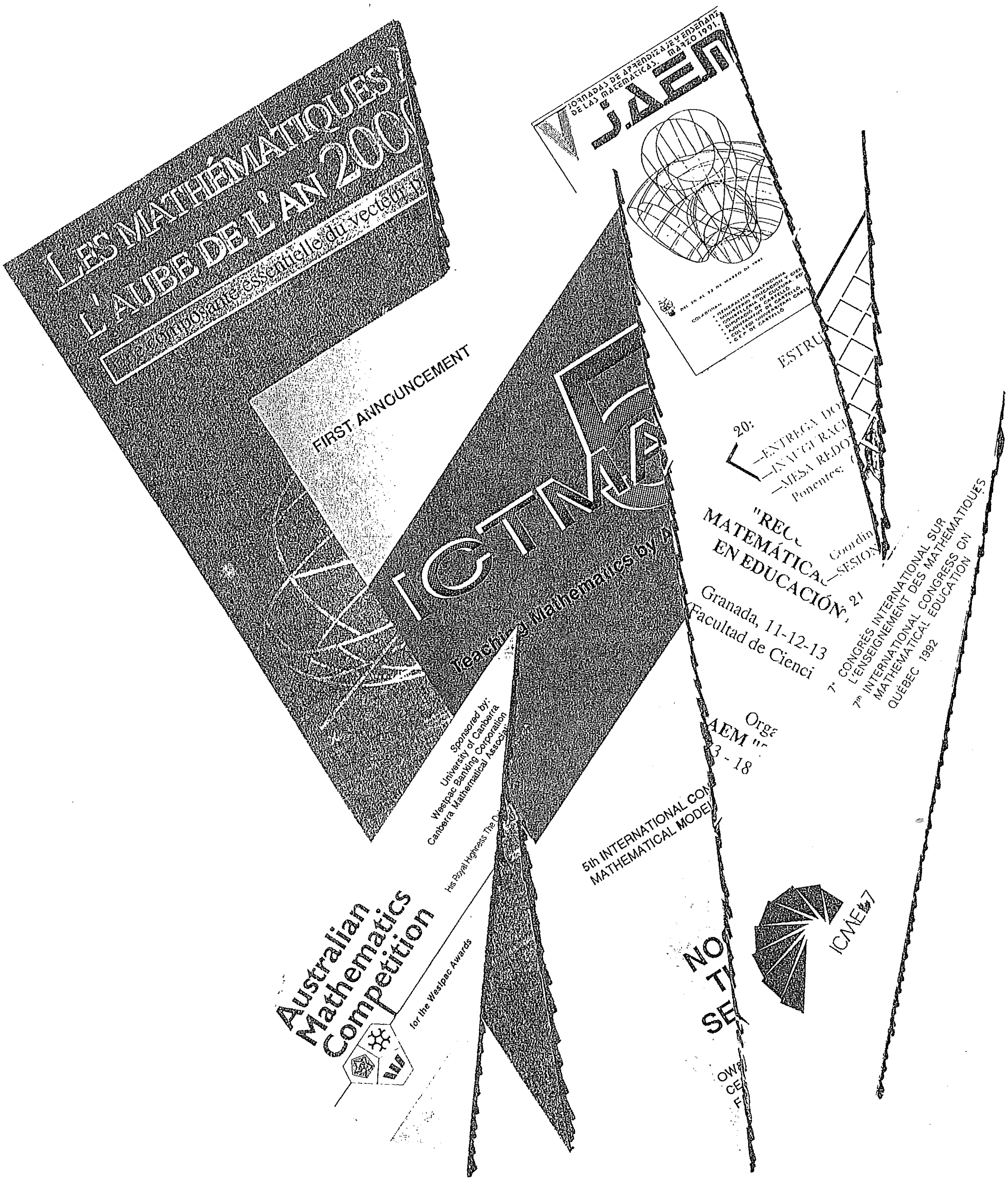
* BRUÑO. (1978) **Geometría. Curso superior**. Bruño. Madrid.

* COXETER, H.S.M. (1969) **Fundamentos de geometría**. Limusa - Wiley.

* PUIG ADAM, P. (1973) **Geometría Métrica**. Vol I, Madrid.

* SÁNCHES GARCÍA, M. (1979) **Técnicas de Optimización Subsecretaria de Planificación**. Presidencia del Gobierno.

María Inés Sobrón Fernández
Universidad Complutense
María Candelaria Espinel Febles
Universidad de La Laguna



INFORMACIÓN

Encuentro Debate "Las matemáticas en el Bachillerato"

En reunión celebrada en Granada en Septiembre de 1991, la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas decidió organizar un encuentro para analizar la propuesta de estructura y contenidos de las asignaturas de matemáticas en el diseño del bachillerato de la L.O.G.S.E. La Sociedad de Profesores de Matemáticas de Alicante fue comisionada por la Federación para la organización material del mismo, que se celebró en el Centro de Profesores de Benidorm, los días 30 de Abril y 1 de Mayo de 1992.

En el citado encuentro participaron los representantes de las Sociedades de Profesores de Matemáticas que se citan a continuación:

Alicante -José Angel Bolea, Salvador Caballero, María Cano, Francisco J. García, Luis Millán, Pascual Pérez y Joan Pons;
«Thales» (Andalucía) - Antonio Aranda, Salvador Guerrero y Luis Rico; «Pedro Sánchez Ciruelo» (Aragón) - Florencio Villarroya;
«Isaac Newton» (Canarias) - Manuel Luis de Armas, Manuel Fernández, Juan Antonio García, Eloy Morales y Fidela Velázquez;
«V. Reyes Prósper» (Extremadura) - Arturo Mandly y Claudio Sánchez;
«Emma Castelnuovo» (Madrid) - Javier Brihuega, Francisco Martín y Rosario Rivarés;
«Tornamira» (Navarra) - Mª Dolores Eraso y José Ramón Pascual.

Asistieron también, por la Federación Española, Luis Balbuena y Gonzalo Sánchez, y, como invitados, José Colera, Vicente Riviere, Juan Sala y Concepción Tormo.

El trabajo se organizó en torno al documento previo que la Sociedad de Alicante había elaborado en Noviembre de 1991 y que recogía los principales interrogantes que, a su parecer, planteaba la publicación «Bachillerato: Estructura y Contenidos» de la Dirección General de Renovación Pedagógica del Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid 1991. Dicho documento se había distribuído a todas las Sociedades de Profesores de Matemáticas para ser discutido por sus miembros, de forma que cualquier aportación pudiera llegar a la reunión de Benidorm a través de los representantes que acudieran a la misma.

Las distintas sesiones de que constó el encuentro versaron sobre «El Bachillerato, ¿por qué y para qué?», «Las Matemáticas en las diferentes modalidades del Bachillerato» y «Perfil del docente de Matemáticas en el Bachillerato», cuyas conclusiones se recogen en los apartados que figuran a continuación.

El Bachillerato ¿por qué y para qué?

El comentario general de esta sesión giró en torno a las tres finalidades educativas que el bachillerato parece tener que conseguir: Formación básica y terminal, Formación propedeútica o preparatoria y Orientación sobre las etapas formativas posteriores.

El bachillerato tiene una misión muy compleja que cubrir. En sólo dos años tiene que enlazar adecuadamente con la E.S.O. y, al mismo tiempo, servir a intereses muy diversos, tal y como se contempla en los objetivos generales para esta etapa educativa. Este carácter complejo le hace aparecer como un periodo transitorio entre la E.S.O. y la Universidad, concepción que supone un peligro evidente para el bachillerato.

El profesor de bachillerato debe tener en cuenta que esta es una etapa distinta de la E.S.O., no obstante, la conexión entre la E.S.O. y el bachillerato está garantizada, al menos teóricamente, por el nivel de los currícula establecidos y porque los centros y los profesores que impartan las dos etapas serán los mismos.

El objetivo fundamental de las asignaturas de matemáticas es *hacer matemáticas*, en el mismo sentido que en la E.S.O., pero con herramientas más potentes (límites, derivadas, manipulación de casos concretos antes de generalizar,...). El nivel de formalización (lenguaje muy abstracto, profusión de algoritmos, etc.) no es preciso que sea muy elevado pero sí que es imprescindible que se aumente la capacitación matemática que se alcanza actualmente en el COU. No obstante no se puede ocultar que en la práctica estas pautas de actuación no son sencillas. Hay pocos materiales, pocos recursos y falta experiencia en el profesorado.

Las novedades de la nueva estructura del bachillerato no son relevantes. De hecho, los puntos claves como la concepción de la formación profesional, ya estaban recogidos en la Ley General del 70, aunque luego en la práctica no se aplicó. Tal precedente arroja dudas sobre los posibles logros de la nueva estructura. Por ejemplo, podemos pensar que habrá desde el bachillerato otras salidas distintas a las de la universidad, pero la efectividad de esas salidas es todavía una gran incógnita. Es más, la descoordinación patente entre la universidad y los órganos administrativos que deciden sobre el bachillerato hacen predecir que no se producirán grandes cambios.

Tal y como está planificado, se hace necesaria en el bachillerato una labor de orientación profesional que debe ser recogida por cada asignatura. Las matemáticas deben orientar acerca de qué caminos abren a los estudiantes. La modificación de la realidad universitaria, con el acortamiento de las carreras y la aparición de nuevos estudios de menor duración, no tiene precedentes en la historia universitaria de nuestro país. Si el cambio de los planes de estudio en las universidades relativiza el peso de filtro de las matemáticas, ello puede tener trascendencia sobre la concepción exclusivamente propedeútica de la asignatura. Si por el contrario el nivel de exigencia en destrezas matemáticas de la universidad no se modifica en el futuro próximo, esto puede forzar un estilo propedeútico en las asignaturas de matemáticas y en la elección de las asignaturas optativas. No obstante un interrogante abierto es la influencia que tendrán los futuros módulos profesionales III. El hecho de que estos módulos se impartan en los centros de secundaria puede tener influencias positivas pero no son controlables.

Hay una tendencia muy fuerte entre el profesorado de matemáticas a recuperar todos los contenidos presentes en el actual BUP, de modo que la puesta en práctica de nuevos programas es difícil porque es necesario vencer muchas resistencias.

La influencia de las pruebas de acceso a la universidad, sobre todo las primeras, marcarán en gran medida las pautas de comportamiento del profesorado y por lo tanto la esencia de las asignatura. Si las pruebas se mantienen como hasta ahora, la asignaturas de matemáticas seguirán desarrollos parecidos a los actuales.

En ese sentido es en el que se hace necesaria la racionalización de dichas pruebas que, hasta ahora, y aunque existan excepciones, han sido de mala calidad, estando diseñadas sin una conciencia explícita de la influencia que tienen en la realidad educativa de los centros de bachillerato. Además, los criterios de corrección de las pruebas no están fijados, lo que puede conducir a veces que se produzcan arbitrariedades. El hecho de que la universidad está ultimando sus planes de estudio sin tener en cuenta los decretos de contenidos de bachillerato, que todavía no están publicados, hace que pueda existir uma gran desconexión entre el bachillerato y la universidad por lo que se hace urgente la coordinación entre los diseñadores de los nuevos planes.

La influencia de la universidad en los futuros bachilleratos no es contemplada por la legislación, que relega su papel al de realizar una prueba marco, con lo que la buena conexión entre el bachillerato y la universidad no está en absoluto garantizada.

En resumen: Es de desear un cambio en la estructura de la prueba de acceso y en lo que ahora son las coordinaciones de COU, de modo que se convierta en una labor positiva de orientación y diálogo entre la universidad y el bachillerato. La actual coyuntura podría conseguir esa mejora, a lo que además podría contribuir la actuación de las Sociedades de Profesores de Matemáticas quienes deberían intentar colaborar en el análisis y control de las pruebas, sobre todo en estos momentos en los que aún pueden adelantarse a los acontecimientos.

Respecto a la posibilidad de que cada alumno construya su propio currículum el decreto de bachilleratos se ha decantado por cerrar la estructura de los mismos reduciendo, respecto a las intenciones iniciales, el espacio de optatividad que hacía posible el tratamiento de la diversidad generalizada.

La formación matemática que reciban los alumnos en el bachillerato debe ser básica y de carácter general, teniendo en cuenta que en la universidad hay en la actualidad una gran diversificación de carreras que obliga a no pensar exclusivamente en algunas de ellas, como por ejemplo las ingenierías. Precisamente por eso debería ser factible ofrecer asignaturas optativas, como unas matemáticas adicionales para el caso del ejemplo citado. Así ocurre en otras realidades educativas como puede ser en Francia. Y ese espacio de optatividad podría organizarse mediante la asignación de créditos a las distintas asignaturas no obligatorias, cuyo número no debería limitarse en exceso para no limitar perspectivas.

Otra preocupación compartida por todos es el número total de *horas lectivas semanales* que se asemeja a las actuales, punto negativo en nuestro sistema educativo.

En lo que atañe a las asignaturas de matemáticas, la repercusión del cierre de la estructura es muy intensa: el primer curso, el único obligatorio, se convierte de hecho en un curso a la vez terminal y propedeútico, ocurriendo además que sus contenidos son prácticamente los mismos en todas las modalidades. Incluso las opciones de Ciencias y Tecnología comparten asignatura, lo que demuestra hasta qué punto la supuesta diversificación es muy relativa.

Una lectura estricta del decreto de bachilleratos no obliga a cerrar la estructura, sino que traslada la decisión a las administraciones educativas de las comunidades con competencias en educación.

En resumen, los factores más negativos serían la citada reducción de la optatividad y el aumento de la carga lectiva.

A pesar del condicionamiento externo de la universidad y de la apariencia de una estructura sin grandes cambios, es preciso reconocer que los decretos de contenidos de matemáticas sí están redactados con un nuevo estilo, que de algún modo recogen de manera sensata lo que cabe esperar de las mismas en el bachillerato. Los cambios son lo suficientemente significativos como para contemplarlos con optimismo.

Comparando las materias comunes y algunas optativas del BUP y del nuevo bachillerato no se observan apenas diferencias si no aparece toda la gama de optatividad de las distintas modalidades. La imposibilidad de los centros para incorporarlas puede obligarlos a una especialización, siendo las opciones más usuales las clásicas: Ciencias y Letras. Es dudoso que esta realidad sea positiva, pues la elección de centro estará condicionada por las modalidades que se impartan. De todos modos no se pueden hacer predicciones muy fiables al respecto por la propia movilidad de los docentes.

Los nuevos planes de bachillerato obligan a plantear las asignaturas autosuficientemente en cada curso, de modo que el problema central de las matemáticas en el bachillerato es el mismo de siempre: ¿Cómo enfocar y resolver los problemas de la materia en el tiempo disponible? En ese sentido los planes de estudio son hasta cierto punto poco relevantes y lo importante sigue siendo, como siempre, la actuación cotidiana en el aula.

Dentro de este marco general se cree conveniente llegar a aclarar qué se entiende por matemáticas de calidad e incluso qué se quiere decir cuando se habla de rigor, formalismo, matemáticas recreativas, jugar a matemáticas, etc.

Las matemáticas en las diferentes modalidades del Bachillerato

El inicial proyecto para el debate era analizar en profundidad y por separado las matemáticas en cada uno de los bachilleratos, pero, al comenzar el mismo, se tuvo conocimiento del penúltimo *borrador* del Real Decreto por el que se establecerán las enseñanzas mínimas del bachillerato. Este hecho supuso un cambio cualitativo en el debate previsto, decidiéndose examinar conjuntamente los bachilleratos de Ciencias de la Naturaleza y la Salud, Tecnológico y de Ciencias Humanas y Sociales y, por otra parte, el bachillerato de Artes Plásticas.

La consecuencia del desconocimiento previo del citado borrador fue que el análisis de los contenidos generales resultara bastante somero y se centrara en la *Resolución de Problemas*, que sufría modificaciones sustanciales en el último documento.

Antes de abordar el tema se planteó cuál sería la distribución óptima de las materias comunes y de las materias propias de la modalidad en cada uno de los dos cursos de bachillerato.

Las matemáticas en los bachilleratos de Ciencias de la Naturaleza y la Salud (BCNS), Tecnológico (BT) y de Ciencias Humanas y Sociales BCHS)

Bachilleratos de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud y Tecnológico: ¿Se deben diferenciar estas matemáticas?

En todos los *borradores* del M.E.C., las matemáticas han sido las mismas; pero las orientaciones metodológicas parecen indicar que en el BCNS debe tener mayor peso el papel formativo y de fundamentación teórica, mientras que en el BT el papel instrumental ha de ser prioritario.

¿Parece conveniente que sean las mismas matemáticas?

Tal vez las orientaciones del M.E.C. sean las que plantean el dilema ya que, de no diferenciarse ninguno de los tres aspectos: formativo, instrumental y de fundamentación teórica, sería razonable que no fueran distintas.

Una razón a favor de que sean las mismas matemáticas es contribuir a que no haya diferencias en la preparación del alumnado según estén en un bachillerato u otro para facilitar el cambio de modalidad e impedir que la elección de sus estudios posteriores quede hipotecada. Debería ser en los estudios universitarios donde estas diferencias fuesen más notorias.

Resumen de los contenidos mínimos de Matemáticas en los Bachilleratos confeccionados según la última propuesta conocida del M.E.C.

Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud y Tecnológico

	ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD	GEOMETRÍA	FUNCIONES	ARITMÉTICA
I	Distr. bidimensionales Estudio del grado de relación entre dos variables. Probabilidades Compuestas Condicionadas Totales a posteriori. Distribuciones Binomial y normal Ajuste de un conjunto de datos a una distribución de uno de estos tipos.	Estudio de las razones trigonométricas a partir de la proporcionalidad en un triángulo rectángulo. Ampliación: extensión del dominio a una circunferencia de cualquier ángulo real.	Familias habituales de funciones (sucesiones, polinómicas, racionales sencillas, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas) Interpretación de las propiedades globales de las funciones mediante el análisis de sus dominios, recorridos, intervalo de crecimiento y decrecimiento.	Utilización de la notación científica para expresar cantidades muy pequeñas y muy grandes y para realizar cáculos. Resolución de ecuaciones. Introducción al número real y número irracional.
			ANÁLISIS	ÁLGEBRA
II		**Vectores:** Introducción práctica al concepto y operaciones a partir del estudio de problemas físicos concretos. Aplicaciones del cálculo vectorial a la resolución de problemas geométricos en el plano y el espacio afín. Interpretación geométrica de las operaciones con vectores. **Formas Geométricas** Estudio analítico de rectas, curvas, planos y superficies. Propiedades afines y métricas de estas formas. **Lugares Geométricos** Estudio, en particular de las cónicas, combinando los enfoques analíticos y sintéticos.	**Límite y derivada** Introducción de dichos conceptos en un punto. Cálculo de ellos en funciones Estudio de la derivada de una suma, producto y cociente de funciones y de la función compuesta. Justificación teórica y aplicación al estudio de las propiedades locales de funciones. **Integral** Introducción al concepto de I. definida a partir del cálculo de áreas bajo una curva.	**Matrices** Estudio como herramienta para manejar datos estructurados en tablas y grafos. Suma, producto, inversa, cociente. Interpretación de las operaciones y de sus propiedades en problemas extraídos de contextos reales. **Determinante de una matriz** Concepto, cálculo y propiedades, aplicados a la resolución de sistemas y el cálculo de productos vectoriales y Mixtos para determinar áreas y Volúmenes.

Nota: La resolución de problemas se considera el eje fundamental del aprendizaje

Cuadro I

Resolución de Problemas

Como ya se ha dicho, al observar los cuadros se llegó a la conclusión de que la principal novedad en los contenidos mínimos es la aparición, bien como eje transversal, bien como núcleo teórico, de la Resolución de Problemas. Este hecho llevó a que la mayor parte del análisis de los contenidos se refiriese a este tema.

La mayor parte de los asistentes coincidió en que la resolución de problemas es imprescindible como eje conductor en los bachilleratos, pero sin diferenciar cursos; es decir, tan importante es en primero como en segundo. Se opinó que la resolución de problemas no debía considerarse como núcleo temático en ningún curso, sino como eje corre el riesgo de convertir el tema en una profusión de técnicas, recetas, etc., que harían perder la filosofía primordial. A pesar de ello, alguno de los asistentes consideraba que, de no aparecer como núcleo temático en el BCHS se podría dar un desarrrollo poco conveniente.

Al respecto surgieron cuestiones como las siguientes:

a) No todos los temas son susceptibles de ser abordados a través de la resolución de problemas.

b) *No existe tradición en la resolución de problemas*, lo que implica que la formación del profesorado habrá de tener en cuenta este hecho para dotarle del material necesario.

c) *Las orientaciones metodológicas son imprescindibles*. No basta con que en el proyecto se den unos criterios de evaluación que puedan clarificar en cierta medida la profundidad de los temas.

Bachillerato de Ciencias Sociales

	RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	CAMPO NUMÉRICO	FUNCIONES	ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD
I	**Fases usuales:** Detección. Comprensión y formulación, elaboración de conjeturas, selección de estrategias, diseño y realización de un plan de actuación, reflexión sobre el proceso a interpretación de posibles soluciones y contextualización de retados. **Estrategias heurísticas** Simplificación, analogías, búsqueda de regularidades y pautas, particularización, elección de notación, razonamiento por contradicción, inversión del proceso, análisis de posibilidades, introducción elementos auxiliares, generalización, etc. **Decisiones ejecutivas** Selección de objetivos, búsqueda de recursos conceptuales, técnicos y estratégicos, ejecución del plan y revisión del mismo.	**Sistemas lineales** de dos ecuaciones con dos incógnitas y de ecuaciones de 2º grado. **Números irracionales** Introducción a partir de la existencia de medidas y de soluciones a ecuaciones que no pueden ser expresadas exactamente con números racionales. Uso de los racionales y los irracionales mediante estimaciones y aproximaciones, controlando los márgenes de error acordes con las situaciones estudiadas.	Funciones en forma de tablas y gráficas. Uso de éstas para la interpretación de fenómenos sociales y de la naturaleza. Identificación de la expresión analítica y de la gráfica de las familias de funciones (polinómicas, exponencial y logarítmica, periódicas y racionales del tipo $f(x)=k/x$) a partir del estudio de sus peculiaridades.	**Distribuciones bidimensionales** Interpretación de fenómenos sociales y económicos en los que intervengan variables a partir de la representación gráfica de una nube de puntos. Estudio del grado de relación entre dos variables. **Distribuciones binomial y normal** Como herramientas para asignar probabilidades a sucesos.
		ÁLGEBRA		
		Matrices Como forma de representación de tablas y grafos. Suma y producto. Interpretación del significado en contexto de problemas reales. Aplicación de la resolución de sistemas. **Programación lineal** Introducción	**Derivada** Aproximación al concepto e interpretación geométrica como pendiente de una curva y como variación de una función. Aplicación del cálculo de derivadas elementales a problemas de optimización. **Límites** Aplicación junto con derv. a la determinación e interpretación de las propiedades locales de funciones en situaciones contextualizadas.	Profundiación en conceptos de probabilidades utilizando técnicas elementales (conteo directo, diagramas de árbol, ...) Introducción al concepto, uso y alcance de la inferencia estadística: Muestras. Condiciones de representatividad, conclusiones.

Cuadro II

También se aportaron ideas que podrían resolver alguna de las dudas anteriores. Se propuso, por ejemplo, que en la revista SUMA apareciesen problemas genuinos que generaran las cuestiones planteadas en los núcleos temáticos.

Hubo unanimidad en que bajo ningún concepto la resolución de problemas debía quedar fuera del diseño curricular del bachillerato. La administración educativa debe dar las orientaciones suficientes y velar para que todo el profesorado asuma este hecho. Por ejemplo, serían interesantes concreciones del tipo *Matrices a través de la economía.*

No parece convincente el argumento de la administración que le lleva a incluir como bloque temático la resolución de problemas en primero de BCHS y que consiste en evitar que se obvie dicho tema al no ser obligatorias las matemáticas en segundo. Se cree mucho más adecuado enfocarlo como eje transversal desarrollando algo más la cita textual que se recoge a continuación, extraída del libro *Bachillerato: Estructura y Contenidos*. página 196:

Por ello, esta formación matemática trae como consecuencia, y a la vez es subsidiaria, de unos procedimientos y de unas actitudes que la impregnan por completo. Se destacan a continuación tres núcleos temáticos, transversales a todos los anteriores, que vertebran los contenidos de estos dos cursos:

Resolución de Problemas

La actividad matemática está llena de situaciones problemáticas de todo tipo y a todos los niveles. Aparte de los ejercicios y de los problemas de aplicación directa, cabe destacar los problemas genuinos, que suponen un verdadero reto, pues hay que interpretarlos, encuadrarlos, encontrar una estrategia de resolución, aplicar correctamente recursos técnicos adecuados y darle sentido a la solución obtenida.

Teorización

Los alumnos han de adquirir una destreza suficiente en comprender y valorar los desarrollos teóricos y en conseguir una cierta autonomía al llevarlos a cabo, tratando de buscar justificación a propiedades que conocen o que suponen.

Utilidad

El científico y el técnico han de tener la convicción de que las Matemáticas sirven para explicar la realidad y que, a su vez, permiten actuar sobre ella. Han de tener también el hábito de encontrar en las cuestiones científicas, técnicas o cotidianas, aspectos matematizables y destrezas para llevar a cabo dicha matematización.

Cuadro III

Otras cuestiones debatidas

a) La mayor crítica hacia los contenidos mínimos vino dada por el hecho de dejar poca libertad para su ampliación, ya que sólo ellos requerirían para su desarrollo el curso completo sin permitir profundizaciones, alternativas distintas, etc. La propuesta sería la de unos contenidos menos desarrollados que dejaran mayor margen para el proyecto curricular de centro.

b) Aunque las últimas noticias indican que puede haber algún cambio, el hecho de que la geometría sólo se vea en un curso del BCNS no parece apropiado.

c) Plena coincidencia hubo en la necesidad de *leer* al mismo tiempo los contenidos y los objetivos de evaluación, ya que éstos clarifican bastante el enfoque que se pretende dar en el bachillerato.

d) En el BCHS se echan en falta contenidos más relacionados con el campo social (Teoría de valoraciones), al tiempo que se puntualizó sobre el número irracional, tratándolo como aproximación teniendo en cuenta que en el contexto de este bachillerato no es lógico que aparezca de una manera formal.

Cuestiones no debatidas

Entre las cuestiones que no pudieron debatirse por la premura de tiempo, hubo dos que por su importancia merecerían un análisis más detallado:

a) ¿Existe una adecuada conexión entre los contenidos de la E.S.O. y de los Bachilleratos?. No hay que olvidar que se contempla la posibilidad en la E.S.O. de dos matemáticas distintas.

b) Independientemente del enfoque metodológico y de los diseños curriculares de centro, los contenidos mínimos ¿son excesivos?.

Las matemáticas en el bachillerato de Artes Plásticas

Por su carácter de optativa *Las matemáticas de la Forma* no está sujeta al decreto de enseñanzas mínimas de los bachilleratos, por lo que el documento de referencia sigue siendo el inicialmente propuesto: *Bachillerato: Estructura y Contenidos.*

El diseño de las asignaturas será fijado definitivamente por el M.E.C. y las comunidades autónomas con competencias en educación sin tener que sujetarse a unos contenidos mínimos. Aún hay tiempo, pues, para poder incidir en los diseños definitivos.

Opinión General

La mayoría de los presentes consideraba que podía aportar muy poco al debate sobre esta asignatura debido a su falta de conocimientos relativos a:

- Las demandas de los alumnos que escojan este bachillerato.

- El mundo del arte y el trabajo de los diseñadores.

- Los temas de matemáticas que pueden tener interés para los citados alumnos.

- Experiencias realizadas con esta asignatura u otras similares.

- Los contenidos del resto de materias de este bachillerato.

Como consecuencia se propuso retomar el tema en una próxima reunión en la que los asistentes estén más informados sobre los puntos anteriores. Para ello se cree necesaria la coordinación con la asignatura de Dibujo en la que se ven muchos de los contenidos que configurarán esta asignatura. Igualmente la conexión con profesionales de la escultura, pintura, dibujo, diseño, música, ...podría aportar datos sobre qué puede pedirse a las matemáticas desde el mundo del Arte.

Otras opiniones expuestas

A pesar de lo dicho anteriormente, sí se hicieron algunas aportaciones aisladas analizando el diseño propuesto:

- Es un programa bien hecho porque da respuesta a las preguntas que suelen hacer los profesores de Plástica y supone una novedad la aparición de unas matemáticas adaptadas a esta especialidad.

- Se echa en falta la presencia de la Geometría Proyectiva, pero hubo varias intervenciones que consideraban que incluirla supondría ampliar demasiado el programa.

- El papel de estas matemáticas es ayudar a los que van a pensar y resolver problemas sobre las formas para que vayan más allá de un conocimiento superficial y anecdótico de las mismas. El interrogante es qué grado de formalización es el adecuado para conseguirlo.

- El diseño parece indicar que estas matemáticas están pensadas más como un medio instrumental que con pretensiones de contextualizar partiendo de problemas artísticos. Se incide más en el cómo funcionan las cosas que en el por qué funcionan.

- La geometría que se propone parece tener continuidad con la que aparece en la E.S.O., ¿por qué, entonces, no se aborda también en los otros bachilleratos, donde ha sido sustituída por un Álgebra Lineal?

Peligros observados

Varios asistentes manifestaron su preocupación por algunas cuestiones importantes que pueden afectar al futuro de la asignatura:

- Si en una reunión como la efectuada existen dificultades o una cierta inhibición para analizar y opinar sobre un diseño coherente y con contenidos matemáticos, no es de extrañar que esto pase después en los centros, y que los seminarios de matemáticas rehuyan hacerse cargo de esta asignatura, con lo que desaparecerá y sólo existirá en los papeles.

- De las pocas experiencias llevadas a cabo (Comunidad Valenciana) se deduce un grave problema de formación del profesorado. En general no se está preparado para afrontar la asignatura.

- Sería necesario realizar una formación específica para los profesores de matemáticas de los centros donde se implante el bachillerato de Artes Plásticas y Diseño, de modo que se garantice al alumnado la oferta de esta asignatura.

- Si el debate no se vuelve a plantear a tiempo es posible que se comience con este diseño y no se consideren otros posibles contenidos por no haber abordado el tema en su momento.

Perfil del docente de matemáticas en el Bachillerato

De partida se hizo una consideración de amplitud, importancia e interés para el tema en debate: Este apartado del perfil del profesorado dentro del encuentro dedicado a las matemáticas en los bachilleratos debe ser el iniciador de un proceso de discusión, el punto de arranque y, quizás, el elaborador de un guión o borrador de un futuro debate. En este sentido, la opinión unánime de las Sociedades asistentes fue la de solicitar a la Federación la convocatoria de unas JORNADAS SOBRE LA FORMACIÓN DE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS.

Entrando en materia, como definición aceptada y tomada del conjunto del debate, se partió de los siguientes criterios u organizadores para el diseño y desarrollo del currículo:

- La organización de los contenidos de cada tema: Procedimientos, estrategias, actitudes, conceptos.

- La fenomenología de los contenidos: Campos de los que provienen o se aplican.

- Las dificultades: Diagnóstico. Los errores: Tratamiento. La valoración: Orientación.

- Los modelos: Representaciones. Los materiales: Recursos.

- La evolución histórica: Obstáculos.

Estos criterios pueden permitir esbozar los elementos comunes en la formación del conjunto del profesorado de matemáticas.

Desde el principio de la sesión se diferenciaron, a efectos de organizar las discusiones, los dos grandes campos de formación para definir un perfil de un profesor de bachillerato: *La formación inicial y la formación permanente*. Además, dentro de ellos se definieron cuatro tipos, posteriormente ampliados a cinco.

Formación inicial

1. En la Licenciatura.

2. Previa al ejercicio profesional.

En formación inicial para el primer tipo, o *formación recibida durante la licenciatura*, se apoyó la idea de que este integrada en las facultades de matemáticas con los créditos específicos necesarios en educación matemática. Lo cual podría definir una especialidad propia de Educación Matemática. También se planteó debate sobre una necesidad, más cercana, de cambios en la misma estructura y formas de trabajo de la Licenciatura de Matemáticas, haciendo que, los mismos contenidos de la carrera sean tratados didácticamente.

En el segundo tipo señalado dentro de esta formación, la *formación previa a la profesión*, que viene recogida en la L.O.G.S.E. con la única indicación de que se realizará durante un año, se subrayó la necesidad de que esté lo más claramente reglamentada y que sea asignada a los departamentos universitarios competentes, no dejándose a reglamentaciones provisionales y/o improvisadas.

Cuando en las facultades de matemáticas o de pedagogía se incorporen módulos suficientes sobre educación matemática, sería interesante la convalidación del año previo al ingreso en la profesión de profesor de matemáticas a los licenciados en matemáticas que hayan cursado dichos módulos.

Esta formación estaría destinada también a los titulados de facultades distintas a las de matemáticas que quisieran acceder al profesorado de matemáticas. En estos casos debería ir acompañado de la correspondiente formación en contenidos matemáticos.

Precisamente en la procedencia académica del profesorado que imparte las asignaturas de matemáticas en bachillerato se constata, y se puso de manifiesto en la reunión, una gran heterogeneidad. Los licenciados en matemáticas son cada vez menos y, de éstos, el porcentaje que se dedica a la docencia baja considerablemente. A pesar de ello, el sentido mayoritario de la reunión fue el ya señalado, es necesario integrar los contenidos de educación matemática en las facultades de matemáticas y es necesario que se reglamente y se ponga en marcha el año de formación marcado por la L.O.G.S.E. para los profesionales procedentes de facultades distintas.

Formación permanente

1. Ante los cambios propuestos en la L.O.G.S.E.

2. Derivada de una necesidad normal de constante formación.

3. Para fomentar el papel del profesor como investigador.

De la discusión habida sobre estos tipos de formación permanente se mostró un acuerdo amplio sobre la necesidad de que los campos queden bien definidos, sobre todo para que la oferta de formación sea clara. En este punto se señaló la confusión que las ofertas de formación pueden generar si no clarifican el campo al que se circunscriben. De hecho se apuntaron algunas situaciones que ya se dan en la actualidad y que generan esta confusión.

Del tercer tipo de formación señalado en este apartado, el de *capacitación para la investigación*, no se trató.

En cuanto a la denominada *formación permanente ante los cambios propuestos en la L.O.G.S.E.* se señaló su carácter urgente en estos momentos. De hecho se utilizó el término *formación de reconversión* por algunos participantes que querían poner de manifiesto la gran magnitud y la urgencia que requiere este tipo de formación. Otros mostraron su discrepancia con dichos términos por llevar aparejadas acepciones que no son de interés sobre todo porque pueden homogeneizar demasiado.

Como contenidos posibles de la oferta de *formación necesaria para la puesta en marcha de la L.O.G.S.E.* se apuntaron:

- Nuevos temas: Estadística bidimensional, Matemáticas de la Forma,..

- Procedimientos para poder concretar los currículos.

- El uso de materiales.

- La evaluación del trabajo propio y de los alumnos.

En esta modalidad de formación se apuntó que hay distintos cursos que convendría clarificar, los más individuales y los denominados de formación para centros.

En cuanto a la formación denominada *normal*, es decir la formación necesaria al margen de las necesidades momentáneas, se destacó que no sólo se diferencia de la anterior por sus contenidos sino también por la necesidad que el profesorado percibe en estos momentos previos a la reforma.

Un tema también tratado en la reunión, íntimamente ligado a los diferentes modelos de formación, fue el de las instituciones de formación y el de los asesores de formación.

Respecto a las instituciones, se vio importante la necesidad de institucionalizar la formación, creando las redes necesarias para llevarlas a cabo, los Centros de Profesores. Aunque también se apuntó que esta institucionalización no debe llevar aparejada el que sólo la administración pueda certificar la formación y que las Sociedades de Profesores, que de hecho aportan gran cantidad de sus miembros a las tareas de formadores, puedan también hacerlo.

Sobre los asesores un punto de reflexión de interés, fue la separación total de la docencia. Esta separación del aula no es interesante. No obstante también se apuntó que, en la realidad, es virtualmente imposible la compaginación de ambas tareas. Desde luego el asesor de *carrera* no parece una propuesta interesante. También se trató acerca de la complejidad del trabajo de los asesores que deben atender además de a la formación a otras tareas entre la que destaca la gestión.

Señalar, para finalizar, la necesidad de establecer unos estándares profesionales que fijen el perfil del profesorado que ha de impartir la matemáticas en la nueva enseñanza secundaria (Bachillerato y Obligatoria).

Sociedad de Profesores de Matemáticas
Alicante.

La Olimpiada, una aventura de jóvenes y profesores

En 1991 participaron en la primera ronda de la Olimpiada Matemática Argentina (OMA) casi 100.000 alumnos provenientes de 2.500 escuelas diseminadas por todo el país. Hoy la competencia cuenta con una concurrencia masiva, pero aún está creciendo.

La OMA renació en 1987 como una aventura casi personal de un pequeño grupo; catorce años antes, había sido prácticamente prohibida. Conviene señalar algunos aspectos notables que acompañaron a esta aventura:

Los jóvenes estaban espontáneamente motivados por la competencia y resolvían problemas mucho más complejos que los que se suponía que eran capaces de resolver.

Había un grupo de profesores dotados también de un entusiasmo inusual y, sobre todo, una actitud abierta, esto es, no ponían límites a la capacidad de sus alumnos.

En cambio, en los medios científicos se estimaba que la actividad era buena, era recomendable, pero se aconsejaba mucha cautela, pues un abismo insondable separaba a los estudiantes argentinos de sus congéneres de otros países.

En los ámbitos educativos se observaba con recelo este tipo de proyecto, pues algunas corrientes pedagógicas en boga sostenían que la competencia acarrea frustraciones para los que no ganan.

¿Por qué aquel entusiasmo y en contraste, estos resquemores?

Porque sólo los jóvenes, junto con sus profesores, habían descubierto una acitivada nueva y fascinante: resolver problemas. Y entendían que la Olimpiada simplemente organiza esta actividad, la estimula y le añade el sabor de la competencia.

La difusión de la Olimpiada

Uno difunde espontáneamente aquello que le gusta; la Olimpiada se difunde porque muchos profesores y muchos estudiantes han decubierto el enorme placer de resolver problemas. Ese es el motor de la OMA.

Para que esta actividad (resolver problemas) lograra difusión, hubo que pautarla, brindar ocasiones para compartirla. El empeño de la OMA es no permitir que baje la fiebre de resolver problemas, y para ello hay que proponer problemas y además brindar todo el apoyo posible para los que aceptan el desafío de cada problema, sean estudiantes o profesores. Hay que satisfacer la voracidad de los problemadictos.

Por otra parte, se ha aprovechado el exitismo de nuestra sociedad, ganando espacios en los medios masivos de comunicación. El carácter competitivo de la Olimpíada brinda diversas ocasiones que no deben desaprovecharse.

En cada certamen hay triunfadores; cuando el periodismo busca a estas jóvenes estrellas y las indaga, descubre que se trata de adolescentes normales a los que simplemente les encanta resolver problemas. Lentamente la comunidad sabe en qué consiste la Olimpiada, y se pregunta, ¿qué es eso de resolver problemas?, ¿qué problemas resuelven? Es la oportunidad para explicarlo.

Los profesores de la Olimpiada

Nuestra Olimpiada se apoya esencialmente en los profesores de matemática. Ellos cubren el organigrama de coordinadores intercolegiales, zonales y regionales, y ganan mayor responsabilidad de acuerdo con su desempeño.

La primera ronda de la OMA se realiza en cada escuela, y son los profesores los que elaboran la pruebas, asignan las puntuaciones y deciden quiénes pasan a la ronda siguiente. Tienen así un protagonismo primordial y un fuerte compromiso con la actividad.

En las rondas subsiguientes se constituyen jurados asépticos, y los profesores se consagran a la tarea de preparar a sus alumnos para las pruebas.

Pero durante el desarrollo de las pruebas, mientras los estudiantes se enfrentan con los problemas de la Olimpiada, se realizan seminarios para los profesores, con temas específicos de matemática y resolución de problemas.

Son también los profesores los que movilizan a las comunidades para poder financiar el viaje de sus alumnos a medida que avanzan en las rondas. Esto les trae muchos contratiempos pero los compromete de manera singular. Después de tantos esfuerzos, la final nacional es una verdadera fiesta.

Cada profesor sabe que los jóvenes talentosos existen, y que pueden estar en cualquier punto del país, por ejemplo el propio., Hay que descubrirlos y pulirlos. Y en esa ruta hacia la excelencia, un conjunto de muchachos y muchachas consigue superar ampliamente las expectativas de la enseñanza tradicional.

Como contrapartida, la OMA asiste a los profesores en todo lo posible, y se ha trazado objetivos que lentamente se van cumpliendo: desde la edición de material *ad hoc* hasta la gestión de recursos ante las autoridades nacionales.

La resolución de problemas no es sólo una técnica pedagógica; es una actividad en sí misma. Y sólo puede conducirla una persona (el profesor) que la aprecie y la disfrute. A los profesores de la Olimpiada les gusta resolver problemas. A partir de esto, lo aplican en sus cursos regulares y lo transmiten a sus alumnos. Por supuesto les encanta que, además, sus alumnos ganen olimpiadas

Las precauciones de la Olimpiada

La OMA se cuida de preservar la ilusión y la energía positiva de los alumnos y los profesores, graduando las dificultades de las pruebas.

Los alumnos que puedan avanzar algunas rondas harán enormes progresos, porque se habrán motivado. A la primera ronda se llega, a veces, por casualidad, pero si se consigue pasarla, cuando ya se está en carrera, se persiste por voluntad.

El profesor podrá trabajar con sus alumnos en problemas de olimpiadas mientras tenga algún discípulo participando. Este mantendrá viva la motivación propia, la de su profesor y la de sus compañeros.

Graduando la dificultad de las pruebas se mantiene despierto el interés de la mayoría.

La OMA reconoce como árbitro de su trabajo a un grupo de matemáticos investigadores de gran prestigio, a quienes recurre en los momentos de confusión, evitando el debate estéril que generan algunos mediocres que se han enquistado en el sistema educativo, que gozan de un relativo predicamento en el medio, y que tienen el poder suficiente para paralizar a la Olimpiada.

Una competencia para cada edad y un final brillante

La OMA es un conjunto de tres competencias que se desarrollan paralelamente, de acuerdo con el año de escolaridad del participante. De este modo, los estudiantes pueden competir durante toda su escuela media y crecer en la Olimpiada.

La final nacional de las tres competencias, en su última jornada, establece una sesión oral en la que los tres finalistas de cada nivel exponen ante el jurado y el público un problema seleccionado. Se trata de un evento brillante, en el que todos pueden observar a los jóvenes talentos en acción, y que culmina con la proclamación de un campeón por cada nivel, en un marco festivo, sumamente emocionante.

Juan Carlos Dalmaso
Patricia Fauring
OMA

Breve informe de la participación española en el ICME-7

(7º Congreso Internacional de enseñanza de las matemáticas)

Que son los ICMES

Existe una sóla asociación que agrupa a todos los profesores de matemáticas del mundo, la IMU (International Mathematical Union) que preside el Profesor Lions, también Presidente del CNES (Centro Nacional de Estudios Espaciales). Orienta dos tipos de Congresos Internacionales, cada cuatro años: uno de los matemáticos profesionales, investigadores, y otro de los educadores. Este es el ICME (International Congress on Mathematical Education), organizado por un Comité autónomo, el ICMI (International Commission on Mathematical Instruction), que preside por primera vez un profesor español, Miguel de Guzmán, de la Universidad Complutense.

Los ICME's ponen al día las experiencias e investigaciones sobre enseñanza en un futuro próximo. Constituyen un marco importantísimo para conocer e impulsar los movimientos de renovación y reforma que se desarrollan actualmente en muchos países.

El último ICME-7 (7º Congreso) se ha celebrado en Quebec (Canadá), en la Universidad Laval, del 17 al 23 de agosto del presente año. Han asistido unos 3.600 profesores de más de cien naciones, una tercera parte de los cuales procedían de los Estados Unidos y Canadá. Las otras representaciones más numerosas pertenecían a Japón (225), Gran Bretaña (180), Italia (150), España (112) y Francia (118). Hay que destacar la fuerte presencia española, por primera vez en un lugar de vanguadia.

El ICME-8 en Sevilla, en 1996

El movimiento para el mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas, que ha cobrado una gran fuerza entre los profesores de nuestro país a través de grupos y asociaciones desde hace más de quince años, ha propiciado la creación de la Federación Española de Profesores de Matemáticas en 1988, a fin de coordinar las distintas actividades en los planos nacional e internacional. El Comité Ejecutivo del ICMI acordó por unanimidad en abril de 1991 encomendar a la Federación Española la organización del ICME-8 en 1996, en Sevilla, que ha delegado en la SAEM "Thales" (Sociedad Andaluza de Educación Matemática) su efectiva realización.

Momento del Acto de Presentación español.

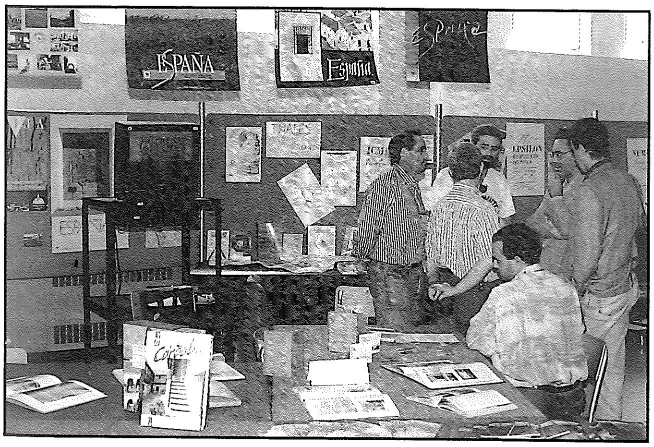
Constituye la organización del ICME-8 un reto trascendental para nuestra Federación y para nuestro país, ya que por primera vez se celebrará en un país iberoamericano, lo que representa un gran honor y una gran responsabilidad para nuestra comunidad cultural. Asistirán más de 4.000 profesores de todo el mundo, y, con ayuda del ICMI, de la UNESCO y de nuestras Instituciones, se espera facilitar la participación solidaria de congresistas de países con menos recursos económicos, y, en especial, de los países iberoamericanos.

Actividad española en el ICME-7

No es posible detallar la participación de los profesores españoles en las conferencias, grupos de trabajo, grupos de estudio, comunicaciones, exposiciones, etc., que a veces se celebraban en número de más de 30.

Pero hay que señalar, especialmente, la instalación de un stand dedicado sobre todo a informar sobre el futuro ICME-8 en Sevilla. En él había también numerosos ejemplares de las publicaciones de las Sociedades integradas en la Federación: revistas de educación matemática alusivas al ICME-8, folletos, insignias, material turístico de Andalucía y de toda España, así como una

Stand de Suma.



D. Miguel de Guzmán visita el Stand de la F.E.S.P.M.

exposición de fotografía matemática. Se puede afirmar que por el stand han desfilado casi la totalidad de los congresistas, que se han detenido a contemplar video-films que se proyectaban constantemente. También se presentó una interesante exposición iberoamericana en otro edificio, dirigida y organizada por profesores españoles.

Presentación del ICME-8

La organización del Congreso de Québec reservó oficialmente a la Federación Española la tarde del 21 de agosto para realizar la presentación del ICME-8. Esta tuvo lugar en dos fases:

La primera se desarrolló en el Anfiteatro 2-A del Pabellón De Koninck, de la Universidad Laval. Intervinieron los profesores Gonzalo Sánchez Vázquez, Presidente de la Federación; Eduardo Luna, Presidente del Comité Interamericano de Educación Matemática; Claude Gaulin, por el Comité organizador del ICME-7 y la Universidad Laval; y Gerardo Quintana, Director del Sevilla Congress & Convention Bureau, que presentó brillantemente el marco de la ciudad, así como el video-film sobre Sevilla realizado especialmente para este acto por D. Manuel Salguero, que tuvo un éxito resonante. A esta primera parte asistieron en mayoría profesores españoles e iberoamericanos.

La segunda parte del acato se desarrolló al aire libre, ante la presencia de más de 2.000 congresistas. Tomaron la palabra D. Luis Balbuena, Secretario General de la Federación Española; D. Luis Arias, Consul Gral. de España en Canadá; y D. Miguel de Guzmán, Presidente del Comité Ejecutivo del ICME, que presentaron el ICME-8. A continuación tuvo lugar la Happy-Hour, con el ofrecimiento de un vino español por parte de nuestra delegación, donado para esta ocasión por la Casa Domecq.

Intervención de D. Miguel de Guzmán en el Happy-Hour.

El Cónsul general español en el Happy-Hour.

Acto de Clausura

Cerraron el ICME-7 el Presidente y el Secretario General del ICMI, los Presidentes de los Comités del ICME-7, y el Presidente de la Federación Española, invitado especialmente para este acto, que pronunció un breve discurso en los idiomas oficiales, inglés y francés, así como en español, cuyo texto aparece a continuación. El acto terminó con la proyección del video-film, sobre Sevilla, antes mencionado.

FESPM

Discurso Presidencial en la ceremonia de inauguración del Séptimo Congreso Internacional de Educación Matemática (Québec, 17-23 Agosto 1992)

Como Presidente de la Comisión Internacional de Educación Matemática, en nombre de su Comité Ejecutivo, de su Asamblea General, de todos los participantes en este Séptimo Congreso Internacional de Educación Matemática y de toda la comunidad matemática, especialmente de aquellos que se ocupan de la educación matemática, quiero expresar nuestra gratitud más profunda en primer lugar al Gobierno de Canadá y al de la Provincia y Ciudad de Québec y a la Universidad Laval por la hospitalidad que nos han ofrecido y por toda la ayuda que han prestado a los organizadores de este Congreso.

Es una señal bien significativa de la alta estima que un país posee acerca de la educación, de la matemática, de la educación matemática y de la cultura en general, su ávida disposición para cooperar en tal grado en la organización y financiacón de este Congreso, del cual se derivan tantas y tan fructuosas consecuencias en todo el mundo en lo que se refiere a la educación matemática. A todas las personas del país y también a las diferentes organizaciones de Canadá y de otros países que han colaborado y patrocinado este magnífico evento, nuestra gratitud más cordial y nuestra más calurosa felicitación por su maravillosa actitud con respecto a la cultura y la matemática.

Deseo también expresar nuestro más profundo agradecimiento a quienes, dentro de la organización del Congreso, el equipo canadiense así como el equipo internacional, lo han hecho posible mediante su constante dedicación durante varios años, En particular quisiera hacer constar los nombres de los Profesores Bernard Hodgson, Claude Gaulin, David Wheeler y David Robittaille. A todos ustedes, que han participado en la preparación de este Congreso, tan importante y tan lleno de consecuencias para toda la comunidad matemática internacional, y especialmente también a todos los miembros de los diferentes Comités, quisiera decirles en nombre de todos nosotros: Estén ciertos de que estimamos muy altamente todos los esfuerzos que ustedes han hecho por nosotros y por toda la comunidad matemática, y de que les felicitamos por su evidente éxito en la preparación de este Congreso.

También deseo expresar mis gracias a todos los participantes, a todos ustedes que han venido aquí a fin de compartir sus experiencias educativas en diversas maneras, unos a través de sus conferencias, otros mediante sus comunicaciones y participaciones en sus diferentes actividades, etc. A todos nosotros los que aquí estamos nos une un deseo común, el de servir a la comunidad matemática relacionada con la educación de la manera más efectiva posible, trabajando juntamente hacia una mejora de la educación matemática en todos los países del mundo, con la profunda persuasión de que este trabajo será de gran influencia para el progreso de la cultura humana.

Este Congreso es una manifestación de la vitalidad creciente de la Comisión Internacional de Educación Matemática, debida en los años recientes de modo muy significativo a los esfuerzos de los Profesores Jean-Pierre Kahane y Geoffrey Howson, anteriores Presidente y Secretario de la Comisión, quienes han enriquecido su actividad de muchas maneras durante la pasada década. Por citar tan solo un ejemplo, a través de la influyente idea de los Estudios de la Comisión Internacional, de los cuales se han realizado un buen número, con otros hoy día en preparación.

Las actuales circunstancias mundiales nos impelen a seguir trabajando en las direcciones en las que la Comisión lo ha venido haciendo tan fructíferamente hasta ahora y a tratar de proporcionar un fuerte estímulo a un proyecto que, en opinión de nuestro actual Comité Ejecutivo, requiere en este momento una firme prioridad: Este es: SOLIDARIDAD EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

El Programa para el Desarrollo, de Naciones Unidas, ha publicado hace unos meses un impresionante Informe sobre el Desarrollo Humano 1992. Con una extraordinaria riqueza de información, después de varios años de trabajo de un equipo muy competente, el informe examina los problemas presentes de la distribución de los recursos humanos y materiales en el mundo. De acuerdo con él, la pasada década se ha caracterizado por una drástica intensificación del abismo que separa los países ricos de los países pobres, las personas ricas de las personas pobres.

Dos piezas de información son bien concluyentes:

* En este momento se puede decir que un quinto de la población mundial (la parte más rica de la población) posee más del 80 por ciento del total de los recursos materiales mientras que otro quinto de la población (la parte más pobre) posee menos del 1,5 por ciento de todos los recursos humanos.

* Esta situación de desigualdad se va deteriorando rápidamente en las últimas décadas, y muy especialmente durante los años ochenta. En 1960, la parte rica de la población, es decir la quinta parte más rica, era 30 veces más rica que la quinta parte más pobre. En 1980 era 45 veces más rica y en 1989 era 60 veces más rica.

Se puede explicar de otra manera. Había una familia de cinco hermanos. Por todas partes se proclamaba que todos ellos tenían los mismos derechos. Pero uno de los hermanos se hizo dueño de casi todas las pertenencias de la familia (el 80 por ciento). Y había otro de los hermanos que no poseía casi nada (1,5 por ciento). Hace algún tiempo el hermano rico era 30 veces más rico que el hermano pobre. Pero ahora el rico es 60 veces más rico que el pobre... ESTE ES NUESTRO MUNDO. ESTE ES NUESTRO DESARROLLO... INHUMANO.

Por supuesto el desarrollo humano, las oportunidades educativas, culturales, las estructuras sociales, etc., están en gran medida condicionadas por la situación económica y por tanto la disparidad entre las personas pobres y las ricas en estos aspectos es al menos tan grande como estas cifras muestran.

De esta situación de la distribución de los recursos materiales y humanos en el mundo, que se va deteriorando rápidamente, podemos establecer varias consecuencias:

* Las acciones y esfuerzos llevados a cabo por las instituciones globales durante la última década han sido intensos y bien aplicados en muchos casos, pero han resultado ser totalmente insuficientes.

* Es necesario que pensemos nuevos modos creativos para tratar de mejorar esta situación, que se va conviertiendo en algo intolerablemente injusto. De otro modo las condiciones globales llegarán a ser aún peores de lo que son en este momento.

* No podemos conformarnos solamente con lo que las instituciones globales van tratando de hacer. No podemos silenciar nuestras conciencias con la excusa de que ya hay organizaciones encargadas de tratar de redimir las injusticias de la situación actual. ES NECESARIO QUE FOMENTEMOS EN NOSOTROS Y EN NUESTRO DERREDOR UN COMPROMISO PERSONAL. HEMOS DE TOMAR PARTE ACTIVA Y PERSONAL PARA MEJORAR ESTA SITUACIÓN. ¿QUÉ PODEMOS HACER?

La nuestra, por supuesto, es una tarea educativa. Y esta tarea está basada en dos pilares fundamentales: recursos humanos y recursos materiales. Nuestro compromiso personal pude asumir formas muy diferentes.

* Podemos buscar activamente lugares en nuestro alrededor donde nuestra cooperación personal en educación podría ser muy bien recibida y necesitada. Hay un Sur en cada Norte. Existen muchos grupos de personas en necesidad de desarrollo dentro de cada país. Tal vez durante demasiado tiempo hemos ido buscando lugares donde poder encontrar nuestro provecho para nuestro propio desarrollo. Tal vez haya llegado ya el tiempo de buscar lugares donde podamos ofrecer algo de nosotros mismos.

* Para algunos de nosotros las barreras de lenguaje con muchos de los países en necesidad de desarrollo en educación matemática no existen. Podemos ofrecer algo de nuestro tiempo para cooperar con ellos. Tal vez deberíamos tomar la iniciativa, sin esperar a ser llamados, a ser invitados, sino buscando nosotros mismos

lugares donde ir y fondos para financiar nuestro trabajo en tales países. No imponiendo nuestra propia manera de analizar sus problemas, sino preguntando a las personas de estos países con una actitud abierta dónde, cuándo y de qué maneras podemos ser de alguna ayuda.

* Muchos de nosotros que vivimos y trabajamos en aquellos países con mejores condiciones económicas podríamos y deberíamos ofrecer personalmente una parte de nuestros recursos materiales a fin de ayudar a otros a lograr un mayor desarrollo en educación matemática.

LA COMISIÓN INTERNACIONAL DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA PODRÍA Y DEBERÍA AYUDAR EN LA ARTICULACIÓN DE ESTE COMPROMISO PERSONAL. Estoy cierto de que habrá muchas personas en muchos países que desearían encontrar formas concretas de actuar. La Comisión Internacional, junto con la Comisión para el Intercambio y Desarrollo de la Unión Matemática Internacional, podría designar un grupo de personas a fin de canalizar las ofertas que se reciban y de recibir las peticiones de ayuda. Todos aquellos de ustedes que quieran contribuir con sus ideas y con su tiempo y esfuerzo personal para la realización de este programa de solidaridad están invitados a ponerse en contacto con cualquiera de los miembros del Comité Ejecutivo de la Comisión Internacional y de los representates nacionales de la Asamblea General de la Comisión. A todas las personas que puedan concebir modos efectivos para contribuir a la mejora de las condiciones educativas en matemática en diferentes regiones o grupos concretos de personas en el mundo quisiera pedirles: Por favor, compartan sus ideas con nosotros.

Con respecto a los recursos materiales que se necesitan para ir adelante con este PROGRAMA DE SOLIDARIDAD, algunos de los miembros del Comité Ejecutivo hemos comenzado a trabajar en la iniciación de lo que podríamos llamar un FONDO DE SOLIDARIDAD PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA, tratando de recoger fondos provenientes de amigos a nuestro alrededor. Ellos han aceptado muy generosamente colaborar con la Comisión Internacional de esta forma. Es un placer expresar aquí nuestro agradecimiento a estas personas en diferentes países que han contribuido generosamente a este Fondo de Solidaridad que ha podido comenzar así con una cantidad de 20.000 dólares USA. No tengo la menor duda de que muchos de ustedes desearán colaborar personalmente para incrementar esta cantidad a través de sus propias contribuciones personales o bien mediante su participación activa en obtener fondos de diferentes fuentes, personales o institucionales. Este Fondo de Solidaridad será administrado por el momento por el Tesorero y Secretario de la Comisión Internacional, Profesor Mogens Niss. Todos aquellos de ustedes que deseen contribuir a este Fondo de Solidaridad están invitados a enviar sus aportaciones a su dirección.

Pero hay otras muchas maneras en las que podemos cooperar. He aquí un ejemplo. Tal vez muchos de ustedes han pensado que el coste de 300 dólores USA por la inscripción en el Congreso que todos hemos pagado estaba lejos de ser barato. Si muchos de ustedes, que vienen de países más bien ricos, se ven inclinados a pensar que tal coste es caro, podrán imaginar bien lo que pensarán de ello los profesores de matemáticas de muchos países cuyo salario mensual está bien por debajo de tal cantidad. Si consideran esta situación con atención, estoy seguro de que muchos de ustedes estarían de acuerdo en pagar, junto con su propia inscripción, una porción de la de una persona en alguno de los países menos favorecidos económicamente, cuya presencia en este Congreso sería así posible. Tal vez deberíamos introducir esta forma de proceder no meramente como una opción, sino como un muy razonable y justo impuesto de solidaridad. Ser solidario no es cuestión de caridad. SER SOLIDARIO ES CUESTIÓN DE JUSTICIA.

Para este Congreso ha existido una Comisión de Ayudas Económicas a fin de financiar algunos participantes de países donde las condiciones económicas no son buenas. Aproximadamente 90 participantes han recibido algún tipo de ayuda a fin de asistir al Congreso, habiendo entre ellos representantes de todos los continentes. Esto ha sido posible gracias a los esfuerzos combinados de la Agencia Canadiense para el Desarrollo Internacional, juntamente con la UNESCO, la Organización del ICME-7, la Unión Matemática Internacional y la Comisión Internacional de Educación Matemática. En conjunto se han distribuido 75.000 dólares canadienses. Quisiera expresar nuestra gratitud más cordial a todos estos patrocinadores y también a las personas encargadas de la Comisión de Ayudas Económicas por la labor delicada e intensa que han realizado.

Pero deberíamos tratar de alcanzar cotas aún más altas en el futuro. Tal vez, con este tipo de contribuciones personales que hemos sugerido podamos hacernos capaces en el futuro de tener entre nosotros varios cientos de participantes de muchos más países que tienen una urgente necesidad, mucho más que la mayor parte de nosotros, de oportunidades de desarrollo e intercambio como las que el Congreso va a ofrecer. El Comité Ejecutivo quisiera ofrecer esta idea a nuestros colegas españoles que se habrán de encargar de organizar el próximo

Congreso Internacional, ICME-8, en Sevilla, para que exploren la posibilidad de su realización. Para ello estamos aún a tiempo.

También podríamos proceder de una manera semejante con las Actas de este Congreso y con muchas otras publicaciones relacionadas con la Comisión Internacional. Las personas que se encuentran en situación económica suficientemente buena podrían pagar un poco más a fin de que estas publicaciones que ellos encuentran útiles para ellos mismos puedan llegar a personas, lugares, centros en países menos favorecidos con descuentos drásticos. De otro modo tal vez se encontrarán ante la imposibilidad de comprarlas. Tal vez deberíamos instaurar un nuevo estilo de vida, espíritu de austeridad y moderación. Austeridad propuesta no por sí misma, sino austeridad para compartir. Tal vez deberíamos proponer un nuevo lema: LLEVA UNO, PAGA DOS.

Por supuesto, este Programa de Solidaridad y Fondo de Solidaridad, basados primariamente sobre compromisos y contribuciones personales de muchas personas en todo el mundo, ha de recibir alguna estructura, si es que ha de ser eficaz. ha de tratar con todos los medios a su alcance, de conseguir que los recursos humanos y los recursos materiales a su disposición lleguen de hecho allí donde son realmente necesitados y donde han de actuar más eficazmente. Ha de explorar con diligencia cuáles son en cada caso las formas correctas de conseguir este objetivo. Como muchos de ustedes bien saben, esto no es una tarea sencilla, ya que en algunos casos los recursos llegan con restricciones y en otros son canalizados a través de organizaciones de cuya honradez, imparcialidad e integridad uno puede dudar con tada justificación.

Este espíritu de solidaridad se encuentra en pleno acuerdo con los objetivos del programa propuesto por la Unión Matemática Internacional para el año 2000, declarando este año AÑO MUNDIAL DE LA MATEMÁTICA.

Como ustedes tal vez sepan, el 6 de Mayo de 1992, la Unión Matemática Internacional, junto con la UNESCO y otras instituciones, declaró el año 2000 AÑO MUNDIAL DE LA MATEMÁTICA. Se decidió, en el segundo objetivo de este programa, proclamar la matemática como una de las claves centrales para la compresión del mundo y para el progreso de la cultura humana. La Comisión Internacional de Educación Matemática, junto con la Comisión para el Desarrollo e Intercambio quedó encargada de la tarea de promocionar un desarrollo adecuado de la educación matemática en todos los países del mundo. Podemos estar seguros de que tal desarrollo será imposible a menos que tomemos medidas innovadoras drásticas que han de incluir un compromiso personal como el que el Comité Ejecutivo ha decidido estimular en la comunidad matemática internacional.

Si este Séptimo Congreso Internacional de Educación Matemática sirve para impulsar tal espíritu de solidaridad, ante todo entre sus participantes y a través de ellos en sus comunidades matemáticas locales, habrá hecho un gran servicio para el desarrollo matemático en nuestro mundo. Esperémoslo así.

Para concluir: QUEDA INAUGURADO ESTE SÉPTIMO CONGRESO INTERNACIONAL DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

Intervención del Presidente de la FESPM D. Gonzalo Sánchez Vázquez en la Clausura del ICME-7

Dinstinguées autorités, chers membres de la direction de l'IMU (Union mathématique internationale) et de l'ICMI (Commission internationale pour l'enseignement des mathématiques), chers professeurs qui participez à cet ICME-7.

Au nom de la Fédération espagnole des professeurs de mathématique, je remercie le Comité exécutif de l'ICMI et le Comité d'avoir approuvé unanimement notre demande d' organiser l'ICME-8. Je veux aussi féliciter l'organisation de cet IME-7 pour sa magnifique préparation et pour l'heureux déroulement des activités, remercier nos collègues du Canada des facilités données à la délégation espagnole qui d'ores et déjà peut annoncer que le prochain ICME-8 se tiendra à Séville en 1996, très probablement en juillet. Cette rencontre sera organisée par la Société andalouse d'enseignement des mathématiques "Thales", au nom de la Fédération espagnole.

Nous souhaitons, chers collègues du Canada, cher professeur Claude Gaulin, notre grand ami de toujours, être à la hauteur de la qualité et de l'accueil de l'actuel congrès de Québec.

Spain which, in recent years, has made an enormous effort to modernize and update its educatl system, will be in 1996 the ideal setting for the meeting of the countries which have been and still are the leaders in the area of mathematical instruction. The latin american countries, with which we enjoy a close relationship over the last years and which are progressing steadily, as well as others, members of UNESCO of other continents, which are striving to raise their scientific and educational standards should also be there.

To make this participation fruitful and complete, it is necessary to call for the solidarity from the wealthier countries towards the not so developped ones. This solidarity was proposed by the President of ICMI at the opening ceremony of ICME-7 and counts with the full support of the Spanish Federation.

With the help of ICMI, UNESCO, and other institutions, we will try to make possible the idea of a financial support for every teacher who is coming from parts of the world with fewer economic resources. Every such teacher who has an experience or contribution of interest, should be present at ICME-8 in Seville.

El ICME-8 debe ser un acontecimiento que nos acerque, en el dominio de la educación matemática, a los objetivos señalados en la DECLARACIÓN DE RÍO, de la IMU, que marca el año 2000 como año matemático mundial.

Por ello, con la colaboración del ICMI y de la UNESCO, deseamos llevar a la práctica en 1996 la feliz iniciativa de los profesores De Guzmán y Niss, Presidente y Secretario General del Comité Ejecutivo del ICMI respectivamente, de realizar, y además de forma simultánea, una comunicación global a través de varias subsedes situadas en las distintas zonas culturales del mundo, a fin de conseguir la participación indirecta de miles de enseñantes.

En 1996 os esperamos en Sevilla, queridos amigos. Podeis contar con la acogida cordial de una ciudad que conserva, junto a las más avanzadas realizaciones urbanísticas y tecnológicas, el sabor de su tradicional encanto histórico y la cordialidad más entusiasta hacia sus visitantes.

¡Esperamos encontrarles de nuevo en Sevilla en el ICME-8 en 1996!

¡Au plaisir de vous rencontrer de nouveau à ICME-8 à Seville en 1996!

¡Please, we look forward to meeting you again at ICME-8 in Sevilla in 1996!

Consejo de Redacción

Declaration de Rio de Janeiro sur les mathematiques

Le 6 mai 1992, au cours de la célébration du 40ème anniversaire de l'Institut de Mathématiques Pures el Appliquées (IMPA), de réputation mondiales, le Professeur J.L. LIONS, Présidente de l'Union Mathématique Internationale (UMI) a déclaré, au nom de cette Union, l'an 2.000 comme ANNEE MATHEMATIQUE MONDIALE.

W.M.Y. 2.000 (WORLD MATHEMATICAL YEAR E.000). est placée sous le patronage de l'UNESCO (Professeur Abdus SALAM et Professeur Carlos CHAGAS, qui a participé à la Déclaration de Rio de Janeiro), du Ministre de la Recherche et de l'Espace de France (Professeur H. CURIEN), du Secrétaire d'Etat à la Science et à la Techonologie du Brésil (Professeur Helio JAGUARIBE), de l'Académie Brésilienne des Sciences (Professeur Israel VARGAS), et du Coseiller Fédéral Flavio COTTI de la Suisse, pays qui organise à Zürich en 1994 le prochain Congrès International des Mathématiciens.

La Declaration de Rio de Janeiro fixe trois objectifs.

Objectif 1. Les Grands Défis du 21 ème Siècle.

Dans sa conférence de 1900, à PARIS, le Mathématicien David HILBERT avait dressé une liste des grands problèmes, pour le siècle qui s'achève.

La Société Mathématique Américaine a proposé en 1990 à l'Assemblée Générale de l'UMI à Kobe (Japon) que les meilleurs mathématiciens du monde représentés au sein du Comité du Tournant du Siècle (TURN of the CENTURY COMMITTEE) organisent, de même, les efforts pour dessiner les grands défis de l'An 2000. Ce Comité est présidé par le Professeur J. PALIS Jr, IMPA, Secrétaire Général de l'UMI.

Objectif 2. Les Mathématiques, clés du Développement.

Les Mathématiques, pures et appliquées, sont l'une des principales clés de la compréhension du monde et de son développemente.

Il est donc essentiel que, graduellement, les pays membres de l'UNESCO soient'en mesure d'atteindre un niveau permettant leur admission à l'UMI, dont les membres sont des pays, pour le moment au nombre de 50.

L'objectif Nº 2 de la Declaration de Rio est que la plupart des pays membres de l'UNESCO atteignent un tel niveau au tournant du siècle.

Cela suppose de grands efforts supplémentaires dans le domaine de l'Education, de la Formation et - point très particulièrement sensible pour les pays où les ressources en devises sont difficiles - l'accès à l'Information Scientifique.

Ces efforts, déjà largement entrepris, seront confortés et amplifiés par les deux grandes commissions de l'UMI que sont l'ICMI (International Commission on Mathematical Instruction), présidée par le Professeur M. de GUZMan, Madrid et dont le Secrétaire Général est le Professeur M. NISS - Danemark et la CDE (Commisson on Development and Exhange), présidée par le Professeur M.S. NARASIMHAN et dont le Secrétaire Général est le Professeur P. BERARD - Grenoble, en liaison avec l'UNESCO, représentée à Rio de Janeiro par le Professeur A. MARZOLLO (Responsable des Mathématiques).

Objectif 3. L'image des Mathématiques.

LA DECRARATION de RIO de JANEIRO donne comme objectif Nº 3, lui aussi de la plus grande importance, une présence systématique des mahtématiques dans la "Sociéte de l'Information", par des exemples et des applications qui seront scientifiquement exacts et accessibles au plus grand nombre.

Cela sera développé en liaison avec des efforts de ce type déjà entrepris par plusieurs pays membres de l'UMI.

La DECLARATION de RIO de JANEIRO annonçant l'année Mathématique Mondiale en l'An 2.000 a été chaleureusement appuyée non seulement par tous les Mathématiciens présents, venus de tous les continents et bien sùr plusieurs des plus éminents mathématiciens Brésiliens, mais aussi par des Professeurs d'autres disciplines et notamment par le Professeur Carlos CHAGAS qui fut, en particulier, Président de l'Académie Pontificale des Sciences.

International Mathematical Union

1ª Información de la VI JAEM

La Junta Directiva de la FESPM en la reunión celebrada, en Castellón, al término de la V JAEM, acordó la celebración de las VI JAEM en Badajoz en Abril de 1993. La Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prosper" que recibió el engargo de su Organización, ha acordado su celebración los días 31 de Marzo al 3 de Abril de 1993.

De acuerdo a los planteamientos propios de la FESPM propondremos unas Jornadas que ayuden a coordinar los esfuerzos de todas las personas, grupos y sociedades relacionadas con la Educación Matemática, así como intercambiar experiencias y difundir los trabajos de innovación que se están llevando en nuestro país, todo ello con el objetivo fundamental de mejorar la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

Las Jornadas se desarrollarán en torno a Conferencias Plenarias, Mesas de Trabajo (Ponencias y Comunicaciones), Carteles y presentación de Materiales didácticos.

Los temas propuestos para Mesas de trabajo son: 1. Formación del profesorado de Matemáticas; 2. Evaluación en Matemáticas; 3. Resolución de problemas; 4. Material y recursos; 5. Aspectos singulares en la enseñanza de las Matemáticas; 6. Matemáticas en Primaria; 7. Matemáticas en Secundaria.

Normas para las Comunicaciones

Las comunicaciones guardarán relación con el ámbito de los temas de trabajo, incluyendo una clara descripción del problema, marco teórico y metodología utilizada.

La comunicación tendrá una extensión máxima de 7 DIN-A4 (incluyendo notas y bibliografía) con un formato de 28 líneas por página, 60 carácteres por línea y a doble espacio. El resumen deberá incluir, al menos, cuatro descriptores de la contribución, y no deberá exceder de 200 palabras. El Comité incluirá los resúmenes de las comunicaciones en la documentación que se entregará a los participantes a su llegada a las Jornadas. Aquellas comunicaciones que se selecionen solamente podrán ser expuestas mediante la presencia e intervención de sus autores.

Las comunicaciones y resumen se enviarán por duplicado: 1 copia impresa en DIN-A4 y 1 copia impresa en soporte informático. El soporte informático se ajustará a:

i) Documento producido conforme a la aplicación WORDPERFECT, versión PC.; ii) Documento producido conforme a la aplicación WRITE NOW o MAC WRITE, versión Macintosh. Las notas y referencias bibliográficas se incluirán al final del texto siguiendo las normas usuales.

Normas de Cartel/Poster

Todos los interesados en realizar comunicaciones breves, se les ofrece la posibilidad de hacerlo mediante carteles, que estarán expuestos durante la mayor parte del desarrollo de las Jornadas, siendo invitados sus autores a organizar encuentros para intercambiar ideas con las personas interesadas.

Los carteles tendrán una dimensión de 70 cm. por 100 cm. El texto, cuadros y gráficos, serán claros y legibles a una distancia de un metro. Los carteles que no respondan a estas exigencias no serán expuestos. Para su aceptación se enviará un resumen del mismo, que deberá incluir, al menos, cuatro descriptores de la contribución, y no deberá exceder de 200 palabras.

Normas presentación materiales

Los autores de material didáctico, que desen presentarlo en estas jornadas, enviarán una breve descripción del mismo, en el que se indicará su utilidad, conceptos en los que se puede usar, y nivel de aplicación.

Las normas de envío de resumen son las mismas que para las comunicaciones o carteles.

Fecha límite de recepción de comunicaciones, carteles, materiales: 10 de Febrero de 1993.

Información e Inscripciones:

Teléfono (924) 274800. Ext. 408. Fax (924) 270214

La cuota de inscripción será:

	hasta 31 de Enero	hasta 15 de Marzo
SOCIOS	10.000 pts.	14.000 pts.
NO SOCIOS	14.000 pts.	18.000 pts.

La cuota de inscripción dará derecho a recibir, gratuitamente, las actas de las Jornadas.

BOLETÍN DE INSCRIPCIÓN

APELLIDOS ______________________ NOMBRE ______________

DOMICILIO PARTICULAR ______________________________

LOCALIDAD ______________ C.P. ________ PROVINCIA ____________

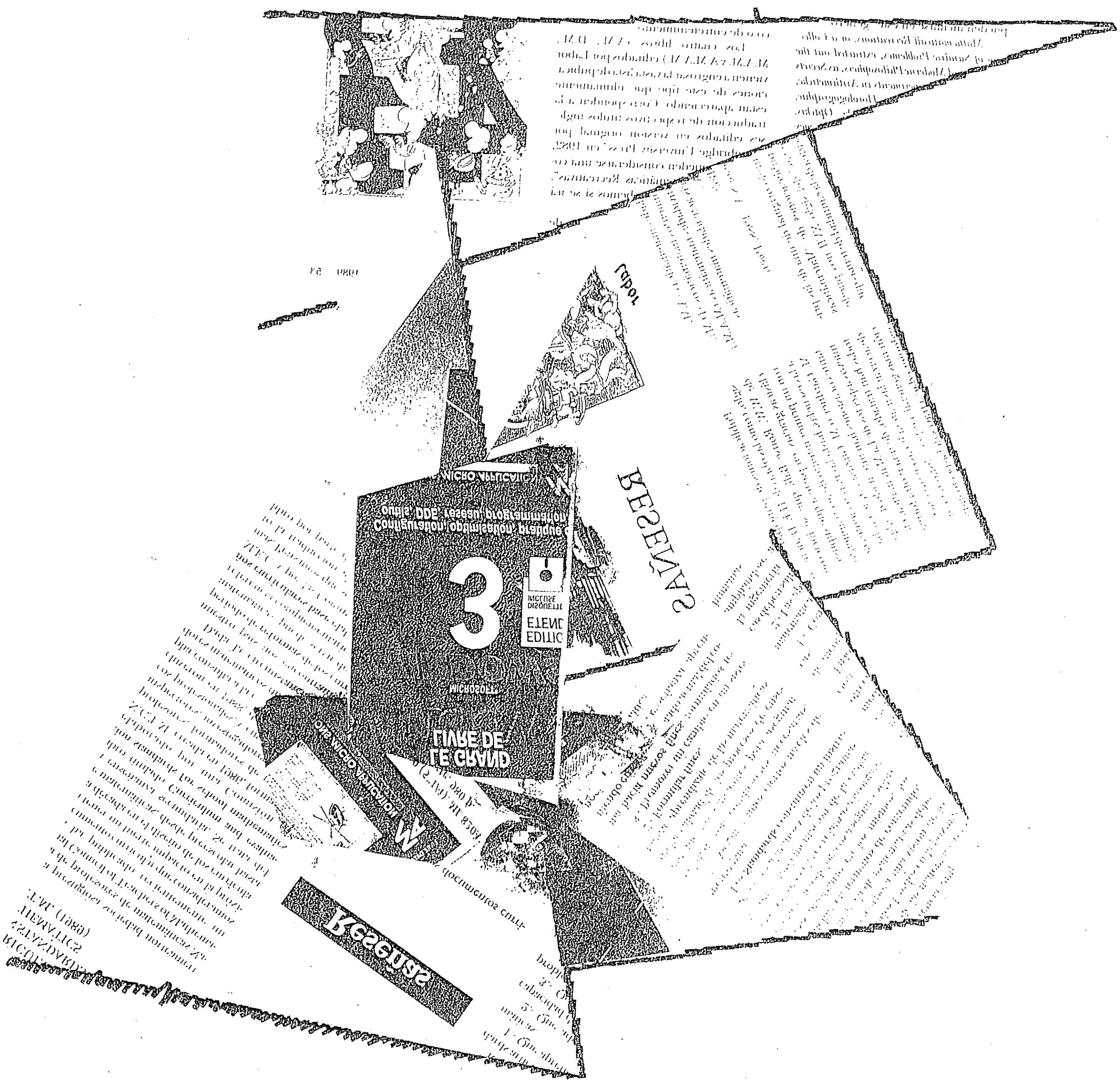
CENTRO DE TRABAJO ______________________ NIVEL ____________

LOCALIDAD ______________ C.P. ________ PROVINCIA ____________

Presenta Comunicación _____ SI _____ NO; Presenta Cartel _____ SI _____ NO

Mesa de trabajo preferida ______________________________

Pertenece a alguna Sociedad Federada. Cuál ______________________

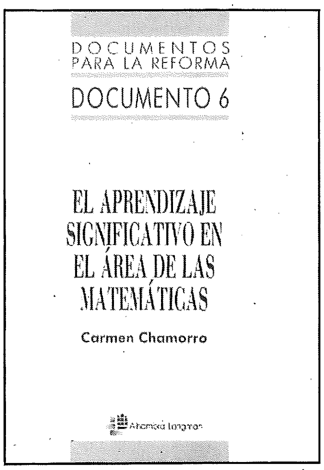


RESEÑAS

El aprendizaje significativo en el área de las matemáticas

Chamorro. C. (1991)

(Madrid: Alhambra Longman)



Dentro de la colección Documentos para la Reforma que edita Alhambra Longman, aparece el nº 6 dedicado al Área de las Matemáticas de la mano de la Profesora Carmen Chamorro.

El libro consta de 84 páginas y en ellas la autora establece dos grandes bloques, uno dedicado a las Matemáticas en la reforma y el otro dedicado a El aprendizaje significativo en Matemáticas.

En «Las Matemáticas en la Reforma» hace un recorrido por la filosofía de la Educación Primaria, los ejes de contenidos, los bloques temáticos y la evaluación y el papel del error. A lo largo de 43 páginas expone la autora sus reflexiones derivadas del estudio del DCB de la Enseñanza Obligatoria, aportando continuas referencias a la línea francesa de Didáctica de las Matemáticas, encabezada por Brousseau y Chevallard y resaltando tres temas que a su juicio «han sido, si no recobrados, al menos situados en el nivel que les corresponde» y son: el cálculo mental, la resolución de problemas y la geometría. Concluye el apartado de la evaluación con las cuatro etapas de «negociación didáctica» de Chevallard: Redacción del enunciado, Realización de la prueba, Construcción de un baremo y Corrección de la prueba.

La segunda parte del libro, titulada «El aprendizaje significativo en matemáticas» aporta la autora algunos aspectos de la teoría de Piaget deduciendo algunas de las características del conocimiento lógico-matemático, para después adentrarse en el factor social en la construcción de la inteligencia, basándose en las aportaciones del psicólogo ruso Vygotski. Cita la autora a Vergnaud y su noción de «campo conceptual» cuando habla de la especificidad del saber que se va a enseñar y concluye con la teoría de «situaciones didácticas» de Brousseau, detallando la dialéctica de la acción, de la formulación, de la validación y de la institucionalización.

Completa un esquema de Brousseau sobre «Tentativa de Enseñanza» y una Bibliografía en la que se recogen una serie de libros a los que hace referencia la autora en su trabajo y que son fundamentales para poder cornprender el mensaje de sus reflexiones sobre este tema.

En suma un libro útil y provechoso dedicado a divulgar aspectos de la Reforma en el área de Matemáticas y en el que la autora ha aprovechado para introducir al lector en algunas líneas de investigación en Didáctica de las Matemáticas.

Andrés Nortes Checa

Curiosidades Matemáticas

Manuel Bernabé Flores

Ed, Alianza, Madrid, 1989

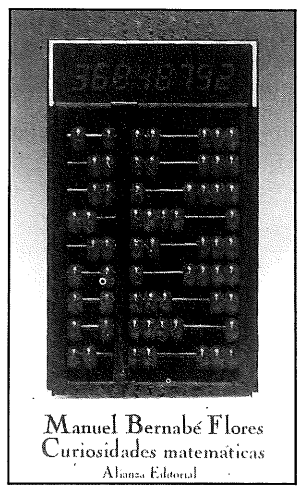
Desde el comienzo de los tiempos pocas cosas han estado ligadas tan determinantemente al desarrollo humano como las matemáticas, como dijera uno de los matemáticos que aparecen en este libro "los números gobiernan el mundo".

También es cierto que conforme se han desarrollado las cosas, cada vez las matemáticas creativas se han ido alejando más de la cultura popular, jugando un doble papel: matemáticas de uso cotidiano, cercanas, tangibles y matemáticas para iniciados.

Desde el campo de los iniciados llega el autor de este libro, con el propósito de hacer digerir algunos de los trabalenguas lejanos y divinos de la matemática de "altura: por un lado, y de la de "todos los días" por otro a los estómagos más delicados, en un menú no exento de sabores dulces, agrios, salados y picantes. Con un particular estilo, desenfadado claro y directo, el autor -gran comunicador- va presentando sus platos -capítulos-, por seguir con el simil gastronómico, que se prestan a ser devorados y, por qué no decirlo, dan pie a «rebañar el plato» al final. En una buena combinación culinaria se encuentran citas célebres de matemáticos ilustres, respuestas ingeniosas de alumnos, descubrimientos interesantes y curiosos, relaciones de la matemática con otras artes y ciencias, problemas insolubles, divertidos y paradójicos, ... y todas esas historias de la historia que harán disfrutar la lectura de este libro como un manjar.

Quizás después de disfrutado, el libro se convierta en una herramienta útil en nuestras clases, para leer algunas cosas a los niños o para recomendar la lectura de un libro que no tiene desperdicio.

Manuel J. Hermosín




Máquina de hacer perrerías matemáticas o Función.
y = f (x)
El ingenuo dependiente.

MISCELÁNEA

Tecnología Popular Tradicional: Medición de la Capacidad de Barriles y Toneles por métodos empíricos

José Manuel González Rodríguez

Introducción

Entre las técnicas populares conocidas en Canarias por artesanos, mercaderes y agricultores encontramos una que nos habla de la valoración de la capacidad de barricas y barriles. La figura del viticultor o del fiel ejecutor con su varilla de medir introduciéndola en la boca del barril y evaluando de inmediato el volumen que este aforaba era particularmente popular en las zonas de raigambre vinícola de Canarias. Su recuerdo ha perdurado y aún en la actualidad es rememorado por bodegueros y vinicultores.

Tratamos de estudiar en estas páginas los fundamentos científicos que gobiernan este método empírico de cálculo de la capacidad de toneles y barriles; y lo haremos describiendo con detalle su ejercicio y comparándolo con otros métodos también tradicionales, recogidos en textos elementales de geometría de tiempos pasados. El **Aforo Diagonal**, que es el nombre que se le da a la práctica de que hablamos se nos mostrará entonces como el modelo más peculiar entre todos estos procedimientos. Su origen data de épocas remotas y se relaciona con elementos tradicionales pintorescos como **la verga** de El País Vasco o **la vara** vinícola dieciochesca.

En cuatro apartados describiremos los métodos de cálculo de la capacidad de los toneles, su justificación matemática; así como los elementos imprescindibles que conforman la elaboración de los recipientes de que hablamos. En el último párrafo discutiremos con detalle este método de Aforo Diagonal que forma parte sustantiva de la tradición vitivinícola canaria.

Los toneles y el oficio de tonelero

Plinio atribuye a los galos la introducción del barril y del tonel en la viticultura. Según sus escritos, éstos construían barriles uniendo tablillas de madera de encina curvadas y sujetas con ramas flexibles o mimbres (Integral: El hombre y la madera). Todo ello provocó una gran revolución en la ciencia de la viticultura, dando lugar al oficio de tonelero que se ha sostenido en vigencia hasta nuestros días.

El tonelero, artesano de tradición antigua como vemos, se nos presenta como uno de los fabricantes de productos tradicionales más completos; pues el oficio de constructor de barriles es uno de los más complejos dentro de los trabajos tradicionales. Recordemos en este sentido la conocida frase *a ojo de buen cubero* que nos habla de los acertados conocimientos que se le reconocen al oficiante de tonelero. En esencia, se trata de un trabajo delicado que exige de aquel que lo practica un buen número de habilidades.

En España se conocen algunas zonas de tradición antigua en la construcción de barriles y toneles. En particular, y en la actualidad, aquellos que se fabrican en Extremadura, Andalucía, Valencia, Castilla y El País Vasco son los que, con mayor frecuencia, se distribuyen entre otras regiones productoras de vinos. Por otro lado, hemos encontrado que las técnicas que se usan en la fabricación de las piezas son muy semejantes en cada una de estas zonas; por lo que habremos de considerar sólo un modelo uniforme en el proceso de construcción de tales recipientes.

Mas, enseguida se nos plantea una primera cuestión: ¿tratamos de barriles o de toneles, de barricas o de cascos? El nombre varía según el tamaño y su capacidad; a tenor de su estructura externa, más o menos ovalada; e incluso según el uso que se le dé. Podemos, no obstante, establecer unas clasificaciones básicas, distintas en cada comarca o región de procedencia de las piezas.

En Andalucía los nombres de las piezas varían según su capacidad:

Así, se suelen conocer con la denominación genérica de *barril chico* todas las medidas que van desde el de dos litros al de 128, que ya se denomina *media bota*...

Las capacidades siguientes se conocen como *botas* y se miden por arrobas, cada una de las cuales equivale a 16 litros. Existen así las botas de 32, 36 y 38 arrobas, reservándose el nombre específico de *tonel* a las capacidades que superan las 38 arrobas

Pedro Martínez Massa.

En Extremadura ocurre algo similar, mas se tiene en consideración igualmente las dimensiones de las duelas que conforman la pieza:

Se distinguen varios tipos: el *bocoy*, en plural, los bocoyes, entre 650 y 700 litros; las *pipas*, desde 500 litros, aunque pueden llegar hasta 900; tienen otra hechura que los bocoyes; el *medio* (medio bocoy) 400 litros; y los *barriles*, inferiores a 400 litros pueden ser de 250, 200, 160, 130, 100, 64, 32, 16,...

Como es evidente, las distintas capacidades se forman sobre distintas longitudes de duelas. La pipa, 130 centímetros, el bocoy, 115 cms.; el medio, 105 cms.; los barriles de 250 y 200, llevan duelas de 95 centímetros, etc.

Guía de la artesanía de Extremadura, pág. 72

El tonel, la pipa, la bota y el barril también se conocen en El País Vasco, y aparecen considerados como unidades de medida de capacidad o de volumen tradicionales (*Basas Fernández*). Por otra pate, la denominación de *barrica* también la encontramos, significando la cuarta parte del tonel o de la bota.

Por lo demás, **Carmen Ortíz García** en su trabajo sobre la Tonelería en Madrid nos muestra un exhaustivo cuadro de denominaciones para toneles y barriles que se clasifican de acuerdo a sus capacidades que recogemos aquí:

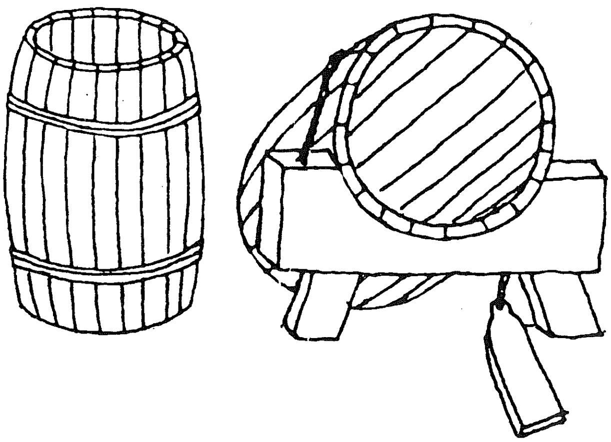
a) *Media Pipa*: Tonel con un aforo de 200 litros aproximadamente, es decir unas 12 arrobas y media.
b) *Bordelesa*: Tonel de 16 arrobas de capacidad que toma su nombre de la medida francesa para vinos de igual capacidad y denominación.
c) *Cuarta*: Tonel de 20 arrobas de capacidad...
d) *Pipa*: Recipiente que puede llegar a contener hasta 30 arrobas de líquido en su interior.
e) *Bocoy*: Cuba que normalmente tiene una capacidad de 40 arrobas, midiendo 83 cms. de diámetro de cabeza, un metro 10 cms. de diámetro de barriga y un metro 10 cms. de altura.
f) *Foudre*: Se denomina así a la cuba a partir de las 60 ó 70 arrobas de capacidad. Este nombre quizá pueda derivarse de la voz *fuder* que denomina una medida para líquidos en Alemania.
g) *Cuba*: No tiene límite claro en su aforo ya que puede llegar a tener 100 arrobas de capacidad o incluso más.

Para dicha autora todas estas piezas se nombran con el término genérico de *tonel* o *barril*, pues incluso las distinciones que se dan según sean las variaciones en la forma, en su opinión, no inciden en la variación del nombre de la pieza. En este sentido es de la opinión de que:

Las proporciones entre la altura y la circunferencia de un tonel son muy variadas y dependen del gusto del destinatario de la pieza o bien del uso general del oficio en la región.

Con todo, las distintas denominaciones que se conocen confunden y entremezclan los nombres de barril y de tonel en función de las influencias que se hayan dadao en cada región; y así, en particular, en Canarias, tierra de frecuentes intercambios e influencias vitivinícolas, encontramos denominaciones varias tales como: *casco, tonel, cuba, bota, barrica, bocoy, barril, barrilote, fole, garrafa, ...* entre otras.

Pensemos pues en un tonel o barril prototipo como el que se recoge en la figura que reúne todos



los elementos de una pieza característica de tonelería e intentemos describir cada una de sus partes. En primer lugar distinguimos tres divisiones en su estructura: la central, más abultada, llamada *barriga* o *estesa*; los dos extremos, denominados *testas*, y los dos círculos que cierran las bocas, que reciben el nombre de *fondos*. El tonel está formado por varias tablas longitudinales, más estrechas en sus estremos que en su centro, llamadas *duelas*. Las duelas se mantienen en posición por medio de aros de hierro o madera. Para conseguir una resistencia suficiente en el tonel se suelen encajar hasta siete aros en cada lado, tres junto a la barriga y cuatro cerca de la testa. El más próximo al fondo se llama *pendiente*, el segundo, madre, el que le sigue, *colete* y el último *bajo colete*. El más inmediato al vientre, *primero de vientre*, y los otros, *segundo y tercero de vientre*. Los fondos pueden ser de una o varias piezas, en este último caso, las tablas centrales reciben los nombres de *llave o pieza maestra*, las intermedias se llaman *sobaqueras* y las extremas *gambas o canteras*.

Por último, ya indicamos que la construcción de un barril o de un tonel sigue una serie de etapas que, siempre son las mismas en todas las regiones, y que podemos resumir del modo que sigue:

Primera. Fabricación de las duelas, que se cortan longitudinalmente de un tronco de árbol

Segunda. Armado del casco; donde, partiendo de una plantilla, molde o aro de armar, se reúnen circularmente un número par de duelas hasta conseguir el aforo necesario para alcanzar la capacidad deseada para la pieza.

Tercera. Eslomado del casco, durante el cual, ayudándose con un fuego tenue pero parejo se consigue formar la barrica.

Cuarta. Herrado del casco, o colocación de los aros con la ayuda de las *chasas* y el martillo.

Quinta. Labrado de las testas a fin de conseguir el igualado de las duelas y que comprende las faenas de *estovado, ejecución del garce* y el *rematado* de las duelas.

Sexta. Fondado: tras la toma del punto o centro del fondo se procede al *enclavillado*, al *ribeteo* de los fondos y a su colocación.

Séptima. Acabado de la pieza, que se consigue con el cepillado interior y externo y con la apertura de agujeros.

Queda enteramente elaborada la pieza de tonelería, lista entonces para su uso en el embase, trasiego o transporte de vinos y licores.

Fórmulas clásicas de cálculo de la capacidad de un barril

La pregunta que se nos plantea en este apartado estriba en conocer de qué modo el tonelero calcula la capacidad de la pieza que acaba de construir. Partamos del principio de que al artesano se le pide que fabrique un barril de capacidad prefijada; sin que el cliente se preocupe en ningún modo de la forma que tendrá éste. El tonelero dispone entonces de moldes o plantillas que le permiten determinar la capacidad deseada de la pieza; y, con su ayuda, acopla un número fijo de duelas de dimensiones elegidas de antemano.

Algunas veces la plantillas es *un aro de armar que es el molde clave, ya que llenando todo su perímetro se conseguirá la capacidad propuesta para el tonel (Carmen Ortíz García, pág 168).* En otros lugares se usa una medida lineal para establecer el número de duelas necesarias de forma que se alcance la capacidad deseada. Así, en Extremadura:

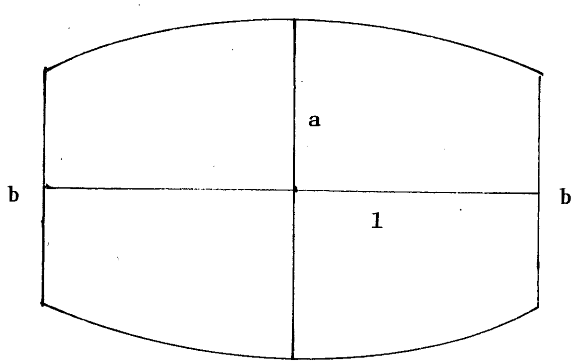
... Un tablón en el suelo del taller marca las longitudes de circunferencia de las panzas de cada tonel. Se han de reunir el número de duelas cuyos anchos conjuntamente den la medida precisa... La tabla maestra es un útil decisivo, conservado en el taller a través de las generaciones.

Guía de la Artesania de Extremadura, pág. 72

Las longitudes de las duelas se conocen con precisión según la capacidad buscada; y en la relación que se establece entre esta longitud y aquella del aro o de la tabla maestros se fundamenta el cómputo del volumen que aforará el recipiente. En esencia, dos magnitudes lineales determinan por entero la capacidad del tonel. Según esto, las fórmulas que se conocen y que permiten obtener la capacidad encerrada en un casco adquieren su fundamento empírico en este principio. En el modelo ideal de barril se debe reconocer la siguiente relación entre sus partes:

$$a = (18/21)\ l \qquad\qquad b = (16/21)\ l$$

donde: l es la altura total del recipiente; a es el valor del diámetro del vientre; y b determina el diámetro de cada uno de los fondos.



En todo caso se conocen varias fórmulas que, operando con los valores conocidos de a, b y l, nos dan la capacidad de cada pieza, evaluada ésta siempre de forma aproximada. Estas fórmulas se introdujeron con posterioridad a la invención del *Sistema Métrico Decimal*, y se obtienen comparando el tonel prototipo con figuras geométricas más sencillas.

Encontramos, en primer lugar, que si comparamos el tonel con un tronco de cono doble de áreas de las bases $\pi a^2/4$ y $\pi b^2/4$, obtenemos el límite inferior de su capacidad, que es igual a:

$$V_1 = (1/12)\,\pi\, l\ (a^2 + b^2 + ab) \qquad (1)$$

Por otra parte, siendo el valor dado por la fórmula (1) el volumen del barril, evaluado por defecto, conviene sustituir ab por a^2 y resulta:

$$V_2 = (\pi/12)\ l\ (2a^2 + b^2) \qquad (2)$$

fórmula recogida en *Morroyo y Gago, pág. 447* y que la encontramos en el tratado de Geometría de Bruño en la forma:

$$V_3 = (11/42)\ l\ (2a^2 + b^2) \qquad (3)$$

Esta fórmula nos muestra una aproximación de $\pi/12$ dada por 11/42; es decir, nos da como valor del número trascendente π la buena aproximación de 3,1428.

Siguiendo con *Morroyo y Gago*, pág. 447:

Si se sustituye cada medio tonel por un cilíndro de l/2 de altura y cuya base sea para uno de ellos la del fondo, y para el otro, la del vientre; el primero nos da el volumen de medio tonel por defecto, y el segundo el de medio tonel por exceso, y la suma de ambos es aproximadamente el volúmen del tonel, luego:

$$V_4 = l\,\pi\,(a/2)^2/2 + l\,\pi\,(b/2)^2/2 = (\pi/8)\,(a^2 + b^2) \qquad (4)$$

También obtendremos otra fórmula para la capacidad de un tonel, debida a *Béziers*, considerando éste como un cilíndro de altura l que tenga por base un círculo cuyo diámetro sea (a+b)/2; es decir:

$$V_5 = \pi\, l\, ((a + b)/4)^2 = 0{,}2l\, (a + b)^2 \qquad (5)$$

fórmula muy utilizada en las apreciaciones del volumen *(Integral, El hombre y la madera. Pág. 126. Bruño. Pág. 169. Morroyo y Gago. Pág. 448).*

Otra fórmula conocida, usada en aduanas, según recogemos de Basas Fernández, pág. 51 y de un reglamento de aduanas de la Isla de Cuba, escrito en 1847 es:

$$V_6 = ((a-b)\ 0{,}625 + b)^2\ l\ 0{,}7854 \qquad (6)$$

fórmula que da el volumen del tonel regularmente conformado, según apreciaciones hechas anteriormente, y que para otros tipos de toneles variaba la cantida 0,625 por 0,667 si el tonel tenía mucha comba o por 0,55 ó 0,6 si ésta era escasa. La explicación rigurosa de (6) habremos de darla en el siguiente apartado.

Por último, en un texto francés del siglo pasado *(A. Coindre)* encontramos la fórmula que sigue:

$$V_7 = (\pi l/4)\ [(2a + b)/3]^2 \qquad (7)$$

En resumen, hemos enumerado siete fórmulas distintas que fueros usadas en la determinación de forma aproximada del volumen encerrado por un barril o tonel. Todas éllas se acercan notablemente al valor exacto de éste; por cuanto al efectuar cálculos con los valores de a, b y l estimados como prototipos (ver párrafos anteriores), obtenemos para cada fórmula los valores que siguen:

$$V_1 = 0{,}515275\ l^3$$

$$V_2 = 0{,}5366459\ l^3$$

$$V_4 = 0{,}5164623\ l^3$$

$$V_5 = 0{,}52426\ l^3$$

$$V_6 = 0{,}5299445\ l^3$$

que dan expresiones muy próximas entre sí.

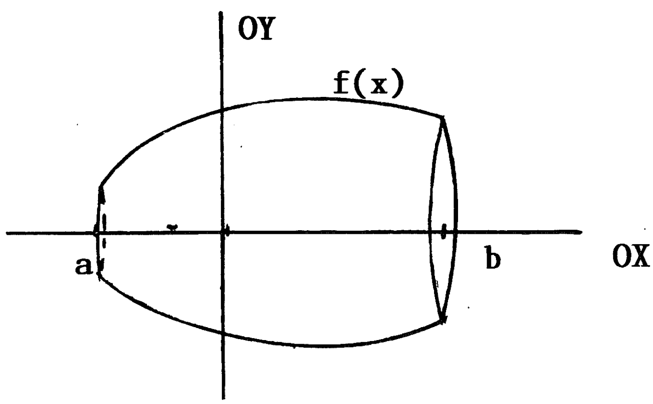
Existe aún otra fórmula que permite calcular el volumen encerrado en un tonel, conocida como Aforo Diagonal, que estudiaremos con detalle más adelante, siendo su derivación de carácter eminentemente empírico.

Justificación matemática de las fórmulas encontradas

En este apartado intentaremos encontrar explicaciones matemáticas rigurosas de las fórmulas enumeradas anteriormente. Partimos de la base de que el cálculo de áreas y volúmenes de sólidos de revolución (de los que el tonel es un caso particular) es un problema de cuadraturas estrechamente ligado a la teoría de la integración. La relación entre ambos tópicos era conocida en Europa ampliamente en los comienzos del siglo XIX; y en especial en España como lo aseveran los textos de *José Mariano Vallejo*, de 1819 y de *Gabriel Ciscar Ciscar*, de 1803; entre ótros. Apuntemos que de estas fechas datan las fórmulas reunidas en 3.

En definitiva, si una curva plana de ecuación y = f(x) que abarca dos abcisas a y b gira alrededor del eje OX, el volumen del sólido que se genera se calcula con la ayuda de la integral:

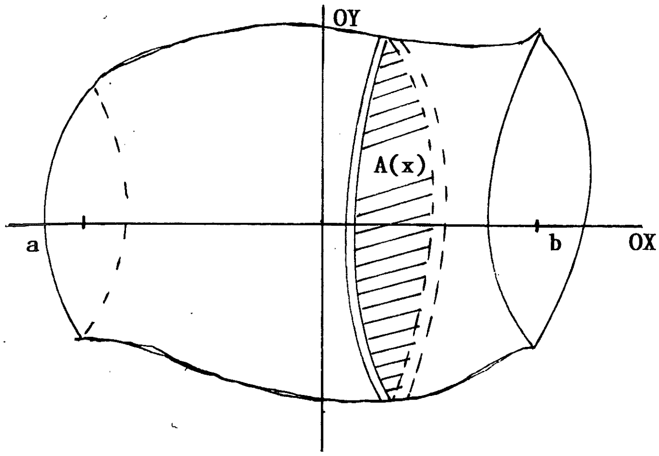
$$V = \pi\int_a^b (f(x))^2\, dx$$



Por otra parte, si en un sólido de R^3 conocemos el área A(x) de cada sección transversal perpendicular a un eje dado (OX) en función de la distancia medida en ese eje desde el origen de coordenadas su volumen será:

$$V = \int_a^b A(x)\, dx$$

Entonces, el volumen del tonel se obtendrá fácilmente siempre que se conozca la curva y = f(x) que delimita su contorno o el área de cada sección transversal A(x) paralela a los fondos. Mas, no



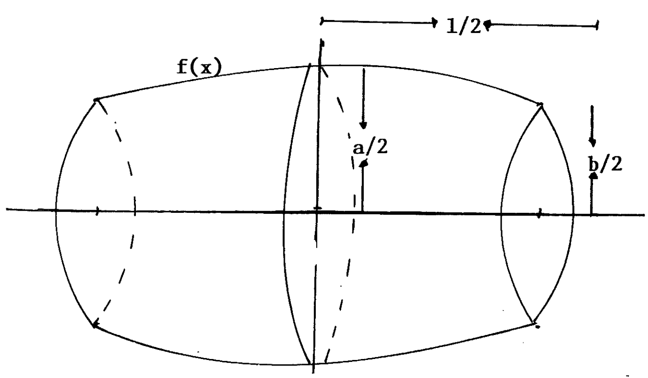
conocemos ninguna de estas dos funciones; y únicamente podremos aproximar éstas con la ayuda de curvas de fácil manipulación. En todo caso, aún con el uso de la integración sólo encontraremos valores aproximados de la capacidad encerrada en el tonel.

Analicemos al menos dos casos: el tonel considerado como una parábola que gira alrededor del eje OX, o bien imaginado como un elipsoide de revolución truncado.

En el primero de los casos la curva f(x) tendrá como ecuación $f(x) = \alpha - \beta x^2$ que gira alrededor de OX entre las abcisas $a = -l/2$ y $b = l/2$. Para determinar los valores de α y de β sabemos que para $x = 0$, será $f(0) = \alpha = a/2$ y para $x = l/2$ se tendrá $f(l/2) = b/2$, esto es:

$$\alpha - \beta\, l^2/4 = b/2$$

es decir: $\beta = 2(a-b)/l^2$



Tendremos así que: $f(x) = (a/2) - [2(a-b)/l^2]x^2$

$$V = 2\int_0^{l/2} \pi\, [(a/2) - 2(a-b)x^2/l^2]^2\, dx =$$

$$= 2\pi\, [a^2 x/4 - 2a(a-b)x^3/3l^2 + 4(a-b)^2 x^5/5\, l^4]_0^{l/2}$$

$$= 2\pi\, [a^2\, l/8 - a(a-b)l/12 + (a-b)^2\, l/40] =$$

$$= (\pi l/60)\, (15a^2 - 10a^2 + 10\, a\, b + 3(a-b)^2)$$

$$= (\pi l/60)\, (8a^2 + 4\, a\, b + 3b^2).$$

Ahora bien, si escogemos la media aritmética $(a^2 + b^2)/2$ en lugar de la geométrica $\sqrt{a^2b^2}$ la fórmula del volumen quedará:

$$V = (\pi l/60)\, (10a^2 + 5b^2) = (\pi l/12)\, (2a^2 + b^2) \qquad (8)$$

Es decir, encontramos la fórmula (2) con lo cual le hemos asignado un cierto rigor o fundamento matemático. Por otra parte, escogiendo 11/14.3 como aproximación de $\pi/12$ encontraremos la fórmula (3).

En todo caso hemos aproximado el valor del volumen real, mas sabiendo que el error que se comete al reemplazar $A = (a^2 + b^2)/2$ por $G = ab$ es:

$$A - G < (a^2-b^2)^2/8a^2$$

entonces, en el cálculo del volumen anterior se habrá cometido un error de:

$$E < (\pi l/60)\, .\, [(a^2-b^2)^2/8a^2]\, .\, 4$$

error muy pequeño en comparación con el valor de las magnitudes que se manipulan. Así, en el caso del barril estandar o prototipo, donde $a = 18l/21$ y $b = 16l/21$ el error que separa el volumen real del calculado es menor que $0{,}0008469\, l^3$; aproximación del volumen real considerablemente buena.

En el segundo cálculo del volumen habremos de suponer que el tonel lo asemejamos a un elipsoide de ejes a, c y a, truncado en los puntos de abcisas $x = -l/2$ y $x = l/2$. Entonces, siendo el elipsoide un sólido de revolución limitado por una superficie de ecuación:

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{a^2/4} + \frac{z^2}{a^2/4} = 1$$

su volumen coincide con la integral:

$$V = 2 \int_0^{l/2} A(x)\, dx = 2 \int_0^{l/2} \pi\, (R(x))^2\, dx$$

donde A(x) representa el área de un círculo de radio R tomado a una distancia x del origen,

es decir $R = a/2 \sqrt{l - x^2/c^2}$ entonces:

$$V = 2 \int_0^{l/2} \pi\, (a^2/4)\, (l - x^2/c^2)\, dx =$$

$$= \pi(a^2/2)\, [l/2 - l^3/24c^2] =$$

$$= (\pi/12)\, a^2\, [3l - l^3/4c^2]$$

mas sabemos que los valores de x y z se relacionan en el elipsoide en la forma:

$$\frac{l^2/4}{c^2} + \frac{b^2/4}{a^2/4} = 1, \text{ es decir: } c = l\, (1 - b^2/c^2)^{-1/2}/2$$

entonces, encontramos que el volumen queda en la forma:

$$V = (\pi/12)a^2 \left[3l - \frac{l^3[1-b^2/a^2]}{l^2} \right] =$$

$$= (\pi/12)\, a^2\, [3 - (1-b^2/a^2)]\, l =$$

$$= (\pi/12)\, (3a^2 - (a^2 - b^2))\, l =$$

$$= (\pi/12)\, (2a^2 + b^2)\, l$$

Es decir, encontramos directamente la fórmula anterior.

Insistimos en la apreciación de que estos cálculos responden a modelos matemáticos del problema, no son exactamente una transcripción de la realidad; pues la curva que delimita cada duela no debe coincidir con exactitud con las reseñadas. Además, con lo anterior sólo podemos justificar una única fórmula entre las enumeradas; y para encontrar un fundamento de algunas otras habremos de recurrir a otras técnicas.

En esencia nos valdremos de una versión depurada del conocido Principio de Cavalieri. Según éste: *Si en dos cuerpos de igual altura las áreas de las secciones por planos paralelos a la base son iguales, ambos tienen el mismo volumen (J. García Arenas y C. Bertran Infante, pág. 151).* De forma más general: *Si tres sólidos comprendidos entre los planos z = 0 y z = h dan, al ser cortados por una plano z = k, tres secciones cuyas áreas son, respectivamente f(z), g(z) y h(z) y además se tiene: f(z) = αg(z) + βh(z), con α y β constantes se verifica que $V_1 = \alpha V_2 + \beta V_3$, en donde V_1, V_2, V_3 son los volúmenes de los tres sólidos (A. Palacio Gros, pág 884).*

Entonces podemos hacer uso de lo anterior para explicar fórmulas tales como las (2), (4) y (6) de 3.. Comencemos describiendo con mayor precisión la fórmula (6), recogida de *Basas Fernández.* Tendremos que:

$$V_6 = ((a-b)0{,}625 + b\,)^2\, 0{,}7854\, l =$$

$$= ((a-b)\, 0{,}625 + b)^2\, (3{,}1416/4)\;\; l =$$

$$= (\pi/4)\, l\;\; (0{,}625a + 0{,}375b)^2 =$$

$$= (\pi/4)\, l\, [(a-b)\, (5^4/1000) + b]^2 =$$

$$= (5^6/1000^2)\, (\pi/4)\, l\;\; (5a + 3b)^2 =$$

$$= (1/64)\, (\pi/4)\, l\, (25a^2 + 9b2 + 30ab)$$

y sustituyendo ab por $(a^2 + b^2)/2$ encontramos que:

$$V_6 \cong (1/64)\, (\pi/4)\, l\, (40\, a^2 + 24\, b^2) =$$

$$= (\pi/12)\, l\, (15a^2 + 9b^2)/8$$

Otra de las fórmulas de *Basas Fernández* es:

$$V'_6 = ((a-b)\, 0{,}667 + b)^2\;\; 0{,}7854\, l =$$

$$= (\pi/4)\, l\;\; (\, (a-b)(1/3) + b)^2 =$$

$$= (\pi/36)\, l\;\; (a + 2b)^2 = (\pi/36)\, l\;\; (a^2 + 4ab + 4b^2)$$

y tomando 4ab por $2(a^2 + b^2)$ quedará:

$$V'_6 = (\pi/12)\, l\, (a^2 + 2b^2)$$

que es la misma fórmula (2) sustituyendo a por b.

Entonces escojamos los tres sólidos siguientes: el tonel, un cilindro de base circular de diámetro a y altura l y un cilindro de base circular de diámetro b y de altura l. Cortando por un plano perpendicular al eje de las duelas quedarán las secciones que siguen:

g(z), área de la sección del tonel,
$f(z) = \pi a^2/4$, área de la sección del primer cilindro, y
$h(z) = \pi b^2/4$, superficie de la sección del segundo cilindro.

Admitimos por otra parte, la hipótesis evidente que:

$$g(z) = \alpha f(z) + \beta h(z), \quad \text{con } \alpha + \beta = 1$$

Entonces los volúmenes respectivos vendrán dados en relación a:

$V_{tonel} = \alpha\ \pi l\, a^2/4 + \beta\ \pi\ l\ b^2/4$; es decir:

$V_{tonel} = (\pi l/12)\ (3\alpha a^2 + 3\beta b^2)$

Entonces, escogiendo los valores $\alpha = 2/3$ y $\beta = 1/3$ encontraremos la fórmula (2). Para $\alpha = 5/8$ y $\beta = 3/8$ aparece la primera fórmula recogida de Basas Fernández, en la que, de nuevo, encontramos que $\alpha + \beta = 1$. Para $\alpha = 1/3$ y $\beta = 2/3$ aparece la fórmula anterior modificada. Escogiendo $\alpha = 3/5$ y $\beta = 2/5$ encontraremos otra de las fórmulas recogidas por dicho autor. Y, por último, la fórmula (4) se obtendrá de la recogida en párrafos anteriores, tomando $\alpha = 1/2$ y $\beta = 1/2$.

En todo caso, hemos encontrado que el volumen real del tonel se obtiene como combinación lineal de la forma $\alpha V^1 + \beta V^2$, siendo $\alpha + \beta = 1$, y V^1, V^2 los volúmenes respectivos de dos cilindros circulares que aproximan el volumen deseado por defecto y por exceso. La adecuada elección de los parámetros α y β determinará el mejor o peor ajuste al valor real del volumen que nos interesa evaluar.

Aforo Diagonal de un barril: modelo canario de medición de su capacidad

El procedimiento de *Aforo Diagonal* consiste en medir la distancia L que se extiende entre la boca del barril horadada en su vientre hasta el extremo más alejado de uno de los fondos; a continuación se eleva el valor calculado al cubo y se multiplica el resultado por el factor corrector 0,625, obteniéndose de esta forma el volumen:

$$V_8 = 0{,}625.L^3$$

Esta fórmula, recogida por numerosos textos de geometría elemental *(Dalmau Carles, J. Estévez, Morroyo y Gago, Bruño, etc.)* es la que se utilizaba en Canarias, en ejercicio de maestros de tonelería y viticultores expertos, y, según recoge Morroyo y Gago:

En la práctica, la distancia L se mide con una varilla graduada, que tiene por una cara divisiones que dan la longitud L y por la otra el volumen que corresponde a cada división, y por consiguiente se halla dicho volumen, introduciendo dicha varilla por el agujero hasta que su extremo toque en el punto más bajo de cualquiera de los fondos, y haciendo lectura correspondiente se tiene el volumen pág. 448.

La fórmula del volumen obtenida por Aforo Diagonal desconoce una formalización matemática rigurosa, y habremos de otorgarle un origen y fundamento empíricos. Sin embargo, debemos de reconocer que su frecuente uso se encuentra bien extendido en distintas comarcas y en diferentes épocas. Así, en El País Vasco Basas Fernández ha recogido este método, que era conocido con el nombre de *vergar*. Reconoce el autor que:

La verga venía a ser como una especie de tara de una barrica, cuya capacidad se medía con la verga, que era un instrumento, una barra metálica que se introducía, indicando o señalando la cantidad de vergas que contenía.

Esto era lo que se llamaba *vergar* un líquido o un recipiente que lo contenía. De donde venía el oficio de *vergador*. pág. 52.

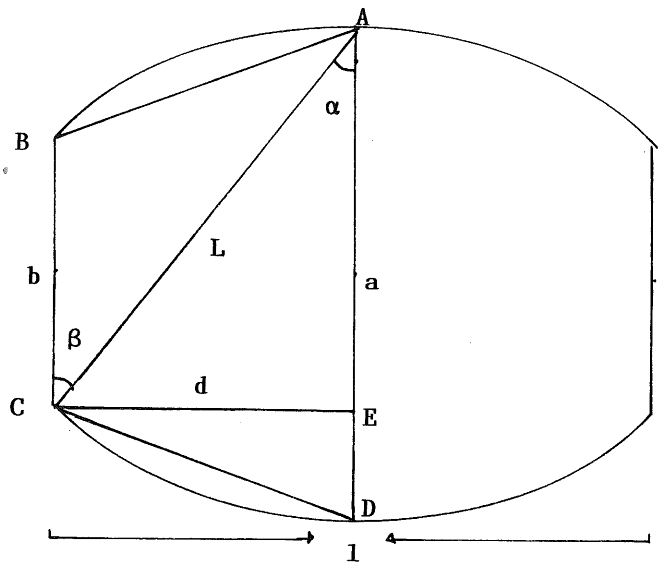
Según dicho autor en la *... alhóndiga de Bilbao... la verga equivalía a 14 libras... pág. 37.*

Por otra parte el Aforo Diagonal debió de usarse desde tiempos remotos, pues en textos de geometría y aritmétrica diciochescos encontramos trazas de métodos similares, utilizados en la medición de la capacidad encerrada por barriles y toneles. En particular, conocemos la existencia de la vara vinaria utilizada en aforos de barricas según recoge P. Giannini en su obra *Práctica de Geometría y Trigonometría* de 1784. Expone el autor que:

Por la vara vinaria se medirá con mas precision, por tratar la cuba como esferoide; i porque la tengo presente, daré aora su fabrica, i uso. Hacese la vara vinaria, para medir con brevedad, i saber las arrobas ó cantaros de vino, agua, aceite, ó cualquier liquido, que caben en una cuba. A cuyo fin se tiene bien sabido el solido de una cierta medida del licor; i por aora supongo que una arroba castellana de vino ocupa, ó tiene de solidéz, un cubo ó dado de 13 dedos, tambien Castellanos, por un lado.

Tomo una regla, ó vara de bastante longitud, v. g. de 11 palmos, que es a lo que alcanza la tabla q voi à dar, i en la una parte pongo divisiones iguales de 13 en 13 dedos, hasta 10 i aun puedo dividir los intervalos en ocho partes iguales, que seran azumbres: a cada senal se pondrá numeros 1. 2. 3. etc. en la otra parte de la vara se pondrán las divisiones, que llaman de planos, que proceden de las diagonales de los cuadrados dobles; el primer numero, ó arroba a 13 dedos; el segundo la diagonal del cuadrado de 13 dedos; el tercero la diagonal del segundo cuadrado, i assi de los demás. Pero por la tabla siguiente, calculada á esse, i á otros fines, se assignarán los planos, hasta el numero que se quiera. El intervalo, ó linea total de 13 dedos dividiré en 100 partes, pomendo alli numero 1 a la 147 pondré 2 á las 173 pondré 3 etc. como se vé. pág. 59.

La vara vinaria medía la capacidad en arrobas, azumbres o cuartillos; unidades de medida anteriores a la introducción del Sistema Métrico Decimal, pero en su explicación encontramos el fundamento básico de este Aforo Diagonal. Otros métodos de medición de volúmenes de cubas o toneles con el uso de varas de medir también nos son conocidos con anterioridad a 1849, fecha en que se dicta la Real Orden por la que se introducía el SMD en España. Como ejemplos señalemos los recogidos por *Bordazar de Artazu*, en su tratado de 1736 o por *J. Justo García* en su texto de 1815. Con todo, la explicación rigurosa de la fórmula $0.625.\ L^3$ la podemos detallar como sigue:



La figura representa la mayor sección del tonel, y en élla se han señalado los elementos que necesitaremos en la demostración. Aplicando el teorema del coseno en los triángulos ACD y ABC quedará:

$$a^2 + L^2 - 2a\cos\alpha = d^2$$
$$b^2 + L^2 - 2b\cos\beta = d^2$$

Mas, siendo α y β ángulos alternos, serán iguales y tendremos:

$$a^2 + L^2 - 2a\cos\alpha = b^2 + L^2 - 2b\cos\alpha$$
$$a^2 - b^2 = 2(a-b)\ L\cos\alpha$$
$$a + b = 2L\cos\alpha$$

es decir: $L = (a+b)/2\cos\alpha$

Por otra parte, según el teorema de Pitágoras, aplicado al triángulo ACE será:

sen α = $l/2L$, es decir:

$$\cos \alpha = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = \sqrt{1-(l/2L)^2}$$

con lo cual, será:

$$L = \frac{a+b}{\sqrt{4-(l/L)^2}} \quad \text{ó} \quad \sqrt{4L^2 - l^2} = (a+b)$$

$$4L^2 = l^2 + (a+b)^2 \quad \text{ó} \quad L = \sqrt{(a+b)^2 + l^2}\,/2$$

y por tanto el volumen que da el aforo vendrá dado por:

$$V_8 = 0{,}625\ [\ (a+b)^2/2 + [l/2]^2]^{3/2}$$

Como podemos comprobar, encontramos una fórmula que no admite comparación directa con las otras recogidas anteriormente, y que difícilmente puede interpretarse geométricamente. Sólo aventuramos que se trata de una fracción del volumen de un cubo que tiene por lado la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos $(a+b)/2$ y $l/2$. Con todo reiteramos el uso intensivo, aunque empírico, que dicha fórmula ha concitado en nuestras comarcas vitivinícolas.

Bibliografía

* BASAS FERNÁNDEZ, M. **Antiguos sistemas de pesos y medidas**. Caja de Ahorros Vizcaína. Bilbao. 1980.

* BERTRÁN INFANTE, C. GARCÍA ARENAS, J. **Geometría y Experiencias**. Biblioteca de Recursos Didácticos Alhambra. Ed. Alhambra. Madrid. 1987.

* BORDAZAR DE ARTAZU, A. **Proporción de monedas, pesas i medidas, con principios practicos de Arithmetica i Geometría para su uso.** Valencia. 1736.

* CISCAR CISCAR, G. *Curso de Estudios Elementales de Marina, Tomo II que contiene el Tratado de Geometría.* Imprenta Real. Madrid. 1803.

* COINDRE, A. **Aritmétique: Leçons accompagnées d'exercises oraux et de devoirs écrits**. Impr. et Libraire Edouard Privat, Touluse.

* DALMAU CARLES, J. **Lecciones de Aritmética. Grado Superior.** Dalmau Carles Pla S. A. Gerona. 1894.

* DERRY, T. K. - WILLIAMS, T. J. **Historia de la Tecnología**. Siglo XXI de España Editores S. A., Madrid. 1986.

* ESTEVEZ MENDEZ, J. **Problemas de Matemáticas**. Santa Cruz de Tenerife. 1959.

* GIANNINI, P. **Prácticas de Geometría y Trigonometría**. Segovia. 1784.

* GUÍA DE LA ARTESANIA DE EXTREMADURA, Ministerio de Industria y Energía, Consejería de Industria y Energía de la Junta de Extremadura, Madrid, 1986.

* INSTRUCCIÓN REGLAMENTARIA PARA EL SERVICIO DE LAS ADUANAS EN LO DE LA ISLA DE CUBA, Imprenta del Gobierno y Real Hacienda por S. M., La Habana, 1847.

* INTEGRAL, Número 14 **El Hombre y la Madera**. Barcelona. 1986.

* JUSTO GARCÍA, J. **Elementos de Aritmética, Algebra y Geometría**. Imprenta de D. Vicente Blanco. Salamanca. 1815.

* LECCIONES ELEMENTALES DE GEOMETRÍA SEGUNDO GRADO. Ed. Bruño, Madrid.

* MARIANO VALLEJO, J. **Compendio de Matemáticas**. Imprenta de Estévan. Valencia. 1819.

* MARTÍNEZ MASSA, P. **Toneleros de Montilla**. Diario EL País. Suplemento Dominical. 11 de septiembre de 1988. Pág. 28.

* MITRINOVIC, D. S. **Elementary Inequalities**. P. Noordhoff Ltd. Groningen. 1964.

* MORROYO Y GAGO, B. **Tratado Elemental de Geometría**. Imprenta y Librería Moderna. Logroño. 1916.

* ORTIZ GARCÍA, C. - FERNÁNDEZ MONTES, M. **Dos oficios tradicionales de Madrid: La Hojalatería y la Tonelería**. Diputación Provincial de Madrid. Madrid. 1980.

* PALACIO GROS, A. **Ejercicios de Matemáticas**. Universidad Central de Venezuela. Ediciones de la Biblioteca. Caracas, 1968.

José Manuel González Rodríguez
Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Matemáticas
Universidad de La Laguna

La curiosa historia de ....

El día que Hadamard se llevó un buen susto

Mariano Martínez Pérez

El francés Jacques Hadamard (1865 - 1963) fue, con su compatriota algo más joven René Maurice Fréchet (1878-1973), uno de los grandes matemáticos más longevos de la historia. Ambos fueron, además, eminentes analistas.

A Hadamard se le debe una amplia e importantísima obra en teoría de ecuaciones en derivadas parciales, a la que dio su forma realmente moderna. También son importantes sus investigaciones en teoría de funciones analíticas que lo condujo al campo de la teoría analítica de números (a través de la función $\zeta(z)$ de Riemann), en la que se le debe la primera demostración completa y rigurosa del llamado *teorema de los números primos* (1896), conjeturado un siglo antes por Legendre y Gauss. Este famoso teorema asegura que, si llamamos π (x) al número de números primos menores que x, para x real positivo, entonces

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1$$

Aparte de estos trabajos *técnicos*, es bien conocida su obra sobre psicología de la creación (o, como él dice, *invención*) en el campo de la matemática.

Pero no divaguemos y vamos con nuestra historia.

Con ocasión del famoso y desdichado *affaire* Dreyfus, en el que fue condenado en 1894 por alta traición el capitán del ejército francés de origen judío Alfred Dreyfus, acusado de espionaje a favor de los alemanes y sentenciado a cadena perpetua (de la que sería rehabilitado en 1906, concediéndosele como reparación la legión de honor), Hadamard, que era pariente cercano de la mujer de Dreyfus, se había manifestado públicamente de una manera enérgica en favor del militar acusado.

Por otra parte, el ya anciano y gran algebrista Charles Hermite (1822-1901), cuya ingente obra sobre la teoría aritmética de las formas cuadráticas y su estupenda resolución de la ecuación quíntica general con ayuda de las funciones elípticas, le habían ganado un indiscutible prestigio, se mostró como un conservador recalcitrante y, por descontado, *anti-dreyfusiano* convencido.

Así las cosas, llegó la fecha en que el joven Hadamard debía defender su tesis doctoral ante un tribunal presidido, ¡vaya por Dios!, por el mismísimo Hermite. Hadamard se encontraba naturalmente nervioso y preocupado ante la fecha del examen, más que nada, como es lógico, por su conocida posición política enfrentada a la de Hermite.

Llegada la fecha temida, y ya durante el acto formal de la defensa de la tesis, Hadamard se llevó un buen susto al oir de pronto a Hermite tronar: «¡M. Hadamard, vous êtes un traitre!». El pobre Hadamard, al que, como suele: decirse, no le llegaba la camisa al cuerpo, comenzó a farfullar algo confusamente, al tiempo que Hermite, sin escucharle, continuaba rugiendo: «¡Vous avez deserté la geométrie pour l'analyse!».

¡Bendito y terrible viejo Hermite!.

Mariano Martínez Pérez

Matemáticas y humor en las comedias de Vital Aza

José María Núñez Espallargas

I. En aquellos pocos casos en los que se ha estudiado el papel ejercido por la matemática como elemento inspirador en obras literarias, siempre la investigación ha recaido en autores considerados como *serios*. Así ha ocurrido con escritores como Swift, Dogson, Duchamp, Borges, etc. Al margen de este tipo de análisis ha quedado la obra de los autores humorísticos. Parece como si la matemática debiera estar reñida con el humor y la caricatura. Quizás sea el hecho de que esta ciencia tenga un carácter de certeza absoluta e inmutable lo que tiende a hacerla inmune o al menos refractaria a los trances o situaciones cómicas. Jardiel Poncela decía, ironizando sobre esta peculiaridad de la matemática, que *las ciencias exactas no pueden progresar por su naturaleza... porque son exactas (1).*

Como una regla que invita a tener su excepción aparece en nuestra literatura la obra de Vital Aza, un notable comediógrafo de fines del siglo XIX, que no sólo tiene plagadas sus creaciones de chistes en los que los números o sus propiedades intervienen de una manera destacada, sino que, además, es autor de comedias en las que la matemática se convierte en el verdadero protagonista de la acción.

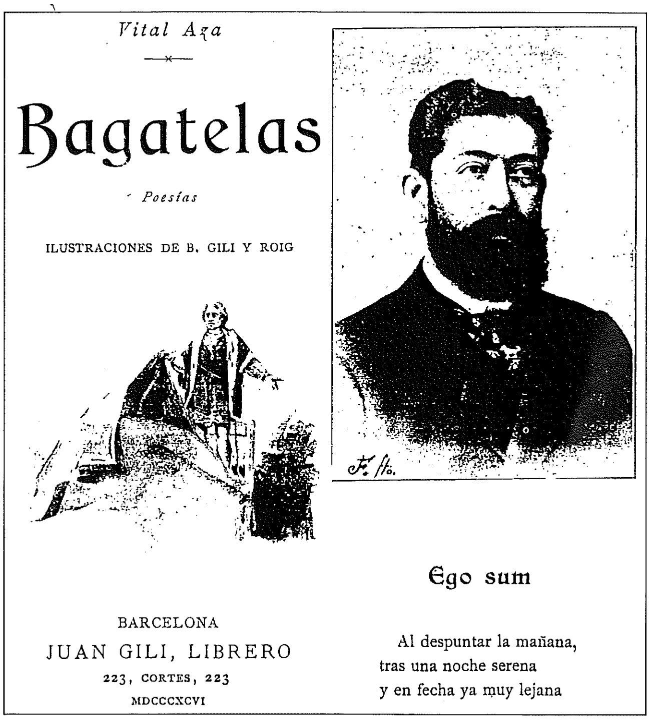
Vital Aza nació en la villa asturiana de Pola de Lena en 1851. De carácter inquieto cambió en varias ocasiones de orientación profesional. Así, tras una breve estancia en el seminario, siguió estudios de matemáticas trabajando, después, durante algún tiempo como delineante en una compañía de ferrocarriles. Más tarde, se trasladó a Madrid donde cursó con brillantez la carrera de medicina. El mismo nos cuenta humorísticamente

Vital Aza, por R. Casas

estas mudanzas en Ego sum, su autobiografía en verso:

Perdida la vocación
dejé sermones y pláticas;
tiré el Nebrija a un rincón
y empecé las Matemáticas
en la villa de Gijón.
Como era buen dibujante
obtuve, siendo un chiquillo,
mi plaza de delineante,
y fui después ayudante
del ingeniero Castillo.
Casi a palmos estudié
el ferrocarril de Oviedo,
y jamás olvidaré
los diez meses que pasé

sobre el túnel de Robledo!
Cansado de dibujar
y de tanto cubicar
en el campo y en la oficina,
vine a Madrid a estudiar,
¿qué diréis ? Pues... Medicina!
Seguí mi nueva carrera
con decisión verdadera.
¡Hoy soy todo un Licenciado
y juro que no he matado
un solo enfermo siquiera! (2)


Vital Aza

Bagatelas

Poesías

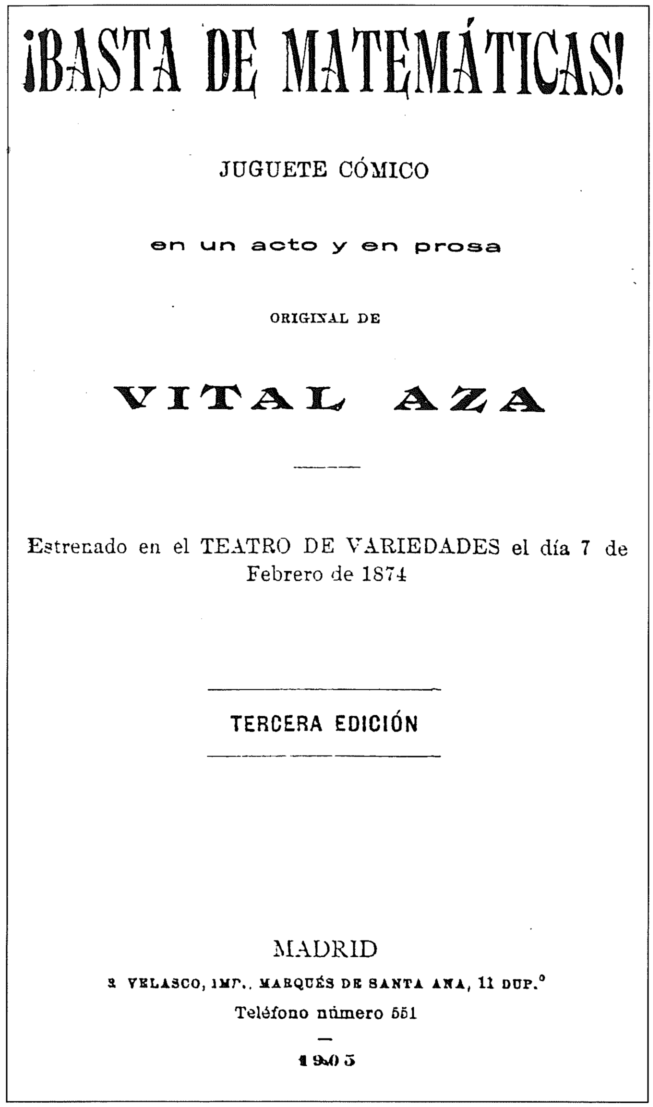
ILUSTRACIONES DE B. GILI Y ROIG

BARCELONA
JUAN GILI, LIBRERO
223, CORTES, 223
MDCCCXCVI

Ego sum

Al despuntar la mañana,
tras una noche serena
y en fecha ya muy lejana

Con toda justicia se podía vanagloriar de no haber "matado" a ningún paciente, pues nunca ejerció la medicina. Ya desde su llegada a la capital había comenzado a colaborar en diversas revistas y publicaciones, primero timidamente, pero luego con cada vez mayor asiduidad, hasta que acabó dedicándose por completo a las letras. Su verdadera fama como autor cómico comenzó a consolidarse en 1874, después de la representación de su primera comedia, ¡Basta de matemáticas!, que constituyó un gran éxito y de la que hablaremos más adelante. A partir de esa fecha y hasta comienzos del presente siglo salieron de su pluma más de 50 comedias, algunas fruto de la colaboración con Ramos Carrión o con otros autores; todas ellas originales, excepto unas pocas adaptaciones de obras extranjeras (especialmente francesas). Publicó, además, varios libros de poesías, pues a su habilidad como prosista añadía la de versificador. Alabando su facilidad en ambos géneros se decía de él, que "pedía el almuerzo en endecasílabos, y sostenía en romance la conversación horas y horas sin esfuerzo ni violencia» (3).


¡BASTA DE MATEMÁTICAS!

JUGUETE CÓMICO

en un acto y en prosa

ORIGINAL DE

VITAL AZA

Estrenado en el TEATRO DE VARIEDADES el día 7 de Febrero de 1874

TERCERA EDICIÓN

MADRID
S. VELASCO, IMP., MARQUÉS DE SANTA ANA, 11 DUP.°
Teléfono número 551
1905

Muchas de sus comedias entusiasmaron de tal modo al público de la época, que se llegó a afirmar, que "por los años 1880 a 1900, Vital Aza y Ramos Carrión, ya separados, ya juntos, reinaban en los teatros como soberanos del ingenio y dominadores de los públicos" (4). Pero con el cambio de siglo el tipo de teatro de enredo, el sainete cómico, cayó en decadencia. Cuando murió Vital Aza en 1912 habían pasado relativamente pocos años de sus triunfos más sonados, pero la gente lo había ya casi olvidado. De ello se lamentaba el crítico García Valero al constatar el escaso número de asistentes a sus honras fúnebres: "Vital ha muerto tarde, pues de haber sido en la época que sus talentos abrillantaban el dramático proscenio, numerosa hubiera sido la concurrencia" (5).

Ciencias exactas

SAINETE

En un acto y en prosa

ORIGINAL DE

VITAL AZA

Estrenado en el TEATRO LARA, el 5 de diciembre de 1902.

Copyright by, Vital Aza.

MADRID
«GRAFICA MADRID», DOÑA URRACA, 17
1925

A pesar del olvido en que cayó la obra de Aza y la de otros autores del teatro de comedia finisecular, hay en ella elementos que todavía hoy nos pueden interesar. Certeramente los ha señalado Alonso Cortés: "el género de comedia que Vital Aza, con otros celebrados ingenios, mantuvo boyante durante el último tercio del siglo XIX y primeros años del actual, ofrece evidente importancia histórico-literaria. Habrá pasado de moda... pero siempre conservará un valor positivo, no ya sólo como reflejo de una época y de unas costumbres que le dan carácter documental, sino también como manifestación de un ingenio vivaz y espontáneo» (6).

II. A través de algunos ejemplos entresacados de sus comedias intentaremos mostrar en que aspectos de las matemáticas hallaba Vital Aza el elemento inspirador de chistes, situaciones o escenas cómicas.

En la obra Calvo y Compañía, son los conocimientos de geometría que Aza adquirió en su práctica como delineante, los que le sugieren una divertida escena en la que un personaje intenta convencer a otro de las excelencias de un negocio relacionado con la construcción de un ferrocarril, mientras su interlocutor cree, que el presunto buen negocio se refiere a un posible matrimonio de fortuna con una bella dama:

Felipe.- Se ve que es usted hombre que estudia bien los negocios. En este se pueden ganar unos cuantos millones.
Melquíades.- Cuánto agradezco a usted...
F.- No merece la pena. Yo le enseñaré a usted punto por punto toda la línea...
M.- (¡La línea! ¡Vamos si, la línea de conducta!)
F.- Y cuanto a ella se refiere.
M.- (¡A ella!) ¿Con que usted la conoce?
F.- ¿Que si la conozco? ¡Ya lo creo! ¡A palmos!
M.- (¿Eh?)
F.- Desde hace algún tiempo. ¡Qué admirablemente trazada está!
M.- ¡Ah, es preciosa, está muy bien trazada!
F.- ¡Qué curvas y contracurvas tan bien comprendidas!
M.- ¡Ah si! Las curvas sobre todo... (7)

Aunque abundan en los sainetes de Aza los chistes de carácter "geométrico",

Urbano.- Bueno anda el mundo, ¿eh?
Leontina.- Echado a perder.
U.- ¡Yo no lo hubiera creido nunca!
L.- ¡Ni yo!
U.- ¡Separarse a las siete semanas de casados!
L.- ¡Y yo que creí que se querían tanto! ¡Que era un matrimonio de inclinación!
U.- ¡Por eso! Los matrimonios de inclinación son los que caen con mayor facilidad. (8)

son las expresiones numéricas las que proporcionan a nuestro autor la mejor fuente de ocurrencias humorísticas.

El valor posicional que tienen las cifras en el sistema decimal constituye el núcleo del enredo que, en El sueño dorado, hace creer a un matrimonio de edad madura, deseoso de casar a su hija solterona, que Ramón es un buen partido por disponer de una *sustanciosa* renta familiar:

Ramón.- El sueldo no es una gran cosa, pero...
Gumersindo.- ¡Claro! Para tí, que tienes un fortunón.
R.- ¿Yo?
G.- ¡Digo! Trescientos cuatro mil reales de renta.
R.- ¿Está usted loco?
G.- Pues, tu tío lo dice bien claro... Mira, aquí lo tienes. (Leyendo la carta) "Tres, cero, cuatro y mil". Trescientos cuatro mil.
R.- Perdone usted.. ahí falta un acento. Ese cero no es un cero, es una o.
Basilisa.- ¿Eh?
R.- O.
G.- ¡Ah!
R.- Tres o cuatro mil, y no trescientos cuatro mil. Ya ve usted la diferencia. (9)

Con los ordinales Vital Aza ironiza sobre diversos usos y costumbres de la sociedad. En una ocasión, el objetivo de la sátira es la función pública y sus servidores,

Andrés.- Supongo que seguirá usted empleado.
García.- ¡Siempre! ¡Soy una lapa! Cuando cayeron los anteriores estaba de oficial segundo en el Gobierno de Zamora; vinieron estos y me mandaron de oficial tercero a San Sebastián.
A.- ¿De modo que ha ascendido usted?
G.- Hombre, según. Si crees que los destinos son como los pisos de las casas, he ascendido, porque el tercero está encima del segundo, pero en el presupuesto ocurre lo contrario. (10)

y, en otra, los extremos ridículos en los que se movía la moda de su época:

Madame.- En este otro figurín, observe usted qué distinguido. La derniere. Sombrero Luis trece, cuerpo Luis catorce, falda Luis quince, y cinturón...
Gonzalito.- Luis diez y seis.
M.- No señor, el cinturón es Enrique octavo. (11)

Vital Aza es capaz de encontrar chispa cómica incluso a una operación mal realizada...

Manuel.- Con qué gusto cobraremos todos los meses... Dí, ¿cuánto cobraremos?
Pepe.- Ahora te lo diré. (Saca un lápiz y papel) Tenemos, mejor dicho, tendremos ocho mil reales al año cada uno. Ocho mil entre doce meses, dan un cociente de seiscientos sesenta y seis reales con sesenta y seis céntimos.
M.- ¡Hermoso cociente!
P.- Que divididos a su vez por treinta, dan un valor de... veintidós reales con veintidós céntimos.
M.- Los cuales divididos por veinticuatro horas que tiene el día...
P.- No, porque no trabajaremos las veinticuatro horas. Suponiendo que trabajemos dos -y es mucho suponer- resultará que cada hora ganaremos... once reales y once céntimos.
M.- Cerca de tres pesetas por hora.
P.- Ya ves; más que un simón. Once reales por hora: el día tiene veinticuatro, luego son... doscientos sesenta y cuatro reales diarios.
M.- Hombre no puede ser.
P.- ¡Ah! Si, tienes razón; me había confundido. (12)

Las confusiones creadas en torno a una incorrecta interpretación de una medida o de sus unidades ofrece a nuestro autor un sinfín de recursos hilarantes. Por ejemplo, en una de sus comedias más celebradas, *El señor gobernador*, Juan un burócrata de escalafón recibe, por error, la credencial de gobernador de una provincia. Al llegar a su lugar de destino y tener que prepararse para su nueva función se producen toda una serie de lances cómicos:

Juan.- Advierto a usted que me urge el uniforme, porque se acercan las fiestas de la Semana Santa y, como es natural, yo he de presidir las procesiones. ¿Hay muchas en esta población?
Sastre.- (Ancho de espalda) Ochenta y cuatro.
J.- ¡Ochenta y cuatro procesiones!
S.- No, señor, no; es el ancho de espalda de usía. Procesiones no hay más que tres... (13)

Dentro de este grupo debemos situar, como apartado propio, los múltiples chistes con duros, pesetas, reales y céntimos.

Rafael.- ¡Ah! ¿Pero, usted debe un piquillo a esta señora?
Nicasia.- Claro que si. Me debe doscientas pesetas
Menéndez.- No, señora; no son más que cuarenta duros.
R.- Cuarenta duros, son doscientas pesetas...
M.- ¡Ah!... si, es verdad; pero es que esta señora lo ha dicho en pesetas, para que parezcan más. (14)

Otro ejemplo, tomado de *Parada y fonda*, cuya acción transcurre en una fonda de Valladolid y donde la figura seria y profesional del viajante catalán Pau Palau y Tomeu da el contrapunto en clave de humor al pícaro Emeterio...

Camarero.- Mándeme usted.
Emeterio.- ¿Cuánto le debo?
Palau.- No pague usted lo mío.
E.- ¿Eh?
P.- No lo consiento. Estos gastos son siempre de cuenta de la casa
E.- Bueno, bueno, no lo pagaré. (No había pensado en semejante cosa) ¿Cuánto es lo mío?
C.- Pues quince pesetas y cincuenta.
E.- ¡Quince pesetas y cincuenta! Es decir, sesenta y cinco pesetas.
C.- No, señor, y cincuenta céntimos.
E.- ¡Ah, vamos! Sigue pareciéndome caro; pero en fin, ahí tiene usted. Las cincuenta pesetas que sobran, de propina, digo, los cincuenta céntimos. (15)

El ingenio creativo de Vital Aza le lleva a jugar, como no, con las posibilidades que ofrece el doble sentido, técnico y cotidiano, de muchos de los términos que se emplean usualmente en el lenguaje matemático. En un caso, por ejemplo, para que el préstamo que la patrona hace al estudiante pillo, apenas lo parezca;

Maruja.- Tienes razón. Mira, yo puedo ayudarte en algo con mis ahorros.
Carlos.- ¿Cómo?
M.- Tengo una hucha con tres mil y pico de reales.
C.- ¿Tres mil y pico? Acepto los tres mil, pero el pico de ninguna manera. No me gusta abusar... (16)

en otro, para bromear sobre el eterno cesante que la alternancia de partidos en el poder, típica en la época, creaba en la administración del estado;

Pérez.- No señor; pero supongo que tendrá usted familia.
Leandro.- ¡Ya!
P.- Yo también la tenía; pero hoy me encuentro completamente solo. Me he quedado huérfano a lo mejor de mi edad, a los veintiocho años. Hoy tengo treinta y cuatro y llevo cinco...
L.- ¡Hombre! De treinta y cuatro se llevan seis.
P.- Digo que llevo cinco años de cesante... (17)

en otro más, se ironiza sobre la edad ya más que madura de una solterona empedernida;

Castora.- El que te oiga pensará que soy una vieja.
Estrella.- ¡Quiá! ¿Usted vieja? ¡No, señora!
C.- Si hoy mismo dijera yo: ime caso! no faltaría quien quisiera...
Lola.- (¡Ave María!)
E.- ¡Pues ya lo creo que no!
C.- ¡Más de uno se me presenta! y aunque el caso lo merece, yo, nada, ¡firme en mis trece!
E.- (Es decir, en sus cincuenta) (18)

y, en fin, en *El sombrero de copa*, comedia donde reina la lógica de la ilógica con una serie de tergiversaciones que enmarañan jocosamente la acción, la broma raya casi con el absurdo.

Cipriano.- Y ahora que me acuerdo: ese señor me encargó mucho lo de los décimos. No sea que nos volvamos sin ellos. Ya sabes que le debemos muchos favores. Aquí debo tener la apuntación. Sí, aquí está: «El 1007 y el 7001". ¡También es capricho! Las dos cantidades al revés. Pero, es claro, como un décimo es para él y el otro para su mujer, que siempre le lleva la contraria.. (19)

Para concluir esta breve selección no me resisto a incluir un fragmento extraído, no de las comedias de Vital Aza, sino de uno de sus libros de poesías. La obra en cuestión es la titulada *Plutarquillo*, en recuerdo del autor de *Vidas paralelas*, y que reune un conjunto de biografías festivas de personajes célebres. De este ingenioso modo, jugando con el número de orden de las sílabas, introduce la biografía del héroe griego Epaminondas:

La prima de mi charada
está en el abecedario;
la tercera con la quinta
es un rey que no ha reinado;
dos dos vale poca cosa
y puede ser Padre Santo,
tercia sola es un pronombre;
la cuarta adverbio anticuado,
y el todo, lector amigo,
es un general tebano. (20)

III. Capítulo aparte en este trabajo merecen las comedias que podríamos clasificar como de carácter *matemático*. Ya se ha dicho que, la presencia de referencias numéricas o geométricas en las obras de Vital Aza no se limitaba a sus frecuentes utilizaciones como recurso humorístico en la construcción de situaciones o escenas, sino que algunas de sus comedias más representadas tuvieron un argumento que giraba en torno a las matemáticas o a la metodología de su enseñanza.

Su primera obra teatral estrenada, que le proporcionó un éxito inmediato, fue ¡Basta de matemáticas!. En este sainete se reunen algunas de las situaciones y personajes que serán arquetípicos en su producción posterior. La acción se desenvuelve en una casa de huéspedes madrileña en la que vive Federico, el protagonista, un estudiante *que hace cuatro años que comenzó la carrera de ingeniero y no ha pasado del primer curso*, más amigo de la jarana que del estudio y despilfarrador del dinero que le envía su padre, modesto tendero de provincias. La patrona es su víctima y su verdugo, a la vez. Con el afán de ocultar los resultados desastrosos en sus estudios de matemáticas y con la intervención de otros personajes, Federico, se ve envuelto en diversos y divertidos embrollos. Como un ejemplo, verdaderamente antológico, de la utilización cómica del doble sentido de la terminología algebraica, veamos el encuentro entre el protagonista, ensimismado en la resolución de un dificil problema, y Benito, un nuevo huésped, que también, más tarde, será víctima de las truhanerias de Federico.

Federico.- (Sentándose a estudiar) Pues señor, estudiemos. ¿Quién me ha metido a mí a resolver problemas matemáticos?
Benito.- (¡Calla! Un compañero de casa. ¿Y quién será? Parece que está muy ocupado)
F.- A más B, más C, elevadas a la cuarta potencia y multiplicadas por la hipotenusa.
B.- (¿Qué demonios está hablando? No entiendo una palabra.)
F.- Si ahora elevamos al cubo...
B.- (¿Elevar al cubo? ¿Si será un aguador?)
F.- Y si comparamos los antecedentes...
B.- (¡Canario! Habla de los ántecedentes... ¿Si será un agente de policia?)
F.- Pero aquí me falta la razón.
B.- ¿Qué le falta la razón? (Retrocediendo asustado) ¿Si estará loco?
F.- Y si extraemos las raíces...
B.- (¡Vamos! ¡Es un dentista!)
F.- Tendremos que la incógnita...
B.- (¡Y apareció aquello! ¡Ya apareció la incógnita! ¿Quién será ella?)
F.- ¡No! ¡Pues no sale!
B.- (Mirando a todos lados) (¿Qué no sale? ¿Y de donde querrá que salga?) (21)

La historia concluye con la entrada en escena del padre de Federico, que al descubrir los enredos de su hijo, decide darles fin con la frase que da título a la comedia, y enviar al mal estudiante al pueblo para que le ayude en el negocio familiar.

Dos años después de estrenada su primera obra teatral, en 1876, con *Aprobados y suspensos*, un sainete en verso, vuelve a incidir Vital Aza en el tema estudiantil. La comedia recoge el diálogo que mantienen varios estudiantes mientras esperan ser llamados a un examen. El autor tiene así ocasión de presentar una tipología bien conocida por él y que tiene carácter casi universal. Interviene, entre otros personajes, Paco, el estudiante tarambana que no ve llegar el fin de sus estudios;

Francisco.- Ayer al examinarme,
senores, ha sido tal
mi aturdimiento, que estuve
a punto de zozobrar.
Fijaros que al hacerme
esta pregunta, no más:
"Dígame usted, ¿Qué espesor
tiene el conducto nasal?"
Respondí, ¡cuatro kilómetros!
Fermín.- Pues no te has quedado corto.
Fr.- Luego tuve que cortar.
F.- Tratando de dimensiones
es bueno pecar de más. (22)

Fermín el sabihondo, gustoso de hablar siempre con tecnicismos; Arturo, que alardea de sus poderosas influencias; y, en fin, Cosme, el veterano con la memoria ya algo agotada.

Cosme.- Lo menos cuarenta veces
me puse a estudiar los huesos,
y ¡nada! aunque los estudio
se me olvidan al momento.
Ya no sé si las costillas
son treinta y cinco o son menos.
¿Usted sabe?
Paco.- ¡Si, señor,
son... son... pues ya no me acuerdo!
Pero serán... las precisas. (23)

Pero es en una obra de madurez donde, Vital Aza, al rememorar sus recuerdos juveniles, consigue una de sus comedias más perfectas. Escrita en 1902 y reeditada numerosas veces, *Ciencias exactas* es un juguete cómico en el que la matemática y su enseñanza constituyen el argumento y el núcleo esencial en torno a los cuales giran la sátira y el divertimento. El protagonista, D. Silverio, es un funcionario cesante que, mientras espera ansiosamente una credencial que le permita volver a la administración pública, se gana modestamente la vida dando clases de matemáticas a varios alumnos que preparan oposiciones. Su metodología docente es una peculiar interpretación del *enseñar deleitando*:

Silverio.- Yo no soy un maestro. Soy un amigo... Un amigo... que por tres duros mensuales, les pone a ustedes en condiciones de presentarse, a exámenes. ¿Qué vienen ustedes con puntualidad? Lo celebro mucho. ¿Qué alguno hace novillos? Lo lamento por él. ¿Qué no basta una hora de clase? Pues tenemos dos. ¿Qué se fatigan ustedes? Pues un ratito de conversación. Ese es mi sistema. Yo sigo siempre la máxima de *enseñar deleitando*. (24)

Hay, como en *Aprobados y suspensos*, un grupo variopinto de fauna estudiantil: Ripoll, el alumno *empollón*, que se sabe siempre los temas al dedillo y que se expresa con un fuerte acento catalán; Manolito, estudiante tronera, más asiduo a los teatros de variedades que a las bibliotecas; Palomino, que no acierta a dar pie con bola; Solares, el marrullero que tiene siempre las respuestas *en la punta de la lengua*...

Silverio.- Señor Ripoll. ¿A qué se llama ecuación?
Ripoll.- Se llama ecuación a la igualdat de dos cantidades en que entran una o más incógnitas, las cuales se han de determinar con la condisión...
S.- ¡Basta!
R.- Me parese que ahora no me he comido ningún asiento.
S.- No, señor. Ha estado muy bien. Don Manolito...
Manolito.- Venga de ahí.
S.- ¿En qué se dividen las ecuaciones?
M.- Pues las ecuaciones se dividen en... en...
S.- (Ayudándole) En determinadas
M.- Eso es. En determinadas...
S.- ¿Y en qué más?
M.- En... en... (Silverio mímicamente le indica la contestación)
S.- En todo lo contrario.
M.- En todo lo contrario.
S.- ¡No, hombre!
M.- ¡Ah! ¡Si! En determinadas e indeterminadas.

S.- ¡Muy bien! Admirablemente. ¿Ve usted? Si la verdad es que tiene usted grandes disposiciones para las matemáticas
M.- Gracias.
S.- Señor Palomino ¿Cuándo se dice que una ecuación es determinada?
Palomino.- Pues... se dice... se dice que una ecuación es determinada, cuando... cuando no es indeterminada.
S.- Eso sí que no tiene vuelta de hoja... Señor Solares.
Solares.- Servidor.
S.- Dígalo usted.
So.- (Muy decidido) Con mucho gusto, sí, senor. Se dice que una ecuación es determinada... (Parándose de pronto) cuando... cuando...
S.- ¿Cuándo que?
So.- ¡Si lo sé! Lo tengo en la punta de la lengua.
S.- Hijo mío; haga usted el favor de colocar las respuestas en otra parte, porque si sigue usted así, el día del examen va usted a tener que enseñar la lengua al tribunal. (25)

Naturalmente, las clases de D. Silverio con este "grupo" de alumnos constituyen una serie continua de lances hilarantes. Veamos, por ejemplo, como se satiriza el planteamiento de uno de esos problemas de álgebra, que suelen denominarse "problemas de la vida real":

S.- Plantearemos un problema.
M.- El del divorcio.
S.- ¡Niño! No sea usted satírico. Hablo de un problema algebraico. Salga usted al encerado.
M.- Con mucho gusto.
S.- Los términos son los siguientes. Fíjense ustedes bien. Don Manolito, el señor Rodríguez, el señor Palomino y yo, nos vamos esta tarde a comer a los Viveros.
Rodríguez.- Muy bien pensado.
M.- ¡Es una gran idea!
S.- El problema consiste en determinar...
R.- (¡Ah, vamos!)
S.- El valor de las incógnitas.
P.- Don Silverio...
S.- ¿Qué hay?
P.- No cuente usted conmigo.
S.- ¿Cómo?
P.- Que esta tarde estoy convidado en casa de mi tía y no podré acompañarles.
S.- No sea usted tonto, criatura. Si hablo en hipótesis.
P.- Usted perdone... No había oido la hipótesis.
S.- ¡Formalidad señores! Al sentarnos a la mesa, acordamos gastar en la comida todo el dinero que llevamos en los bolsillos.
R.- Pues vamos a comer muy mal.
S.- No señor; comemos admirablemente. Don Manolito paga la tercera parte de la comida.
M.- Bueno, con mucho gusto.
S.- El señor Rodríguez, la cuarta parte.
R.- ¡Corriente!
S.- El señor Palomino la sexta.
P.- Menos mal.
S.- Y yo le entrego al mozo sesenta reales que llevo en el bolsillo.
R.- ¡No, señor!
P.- ¡No, senor!
M.- ¡De ninguna manera!
S.- ¿Cómo?
M.- Yendo con nosotros, no podemos permitir que pague usted nada.
S.- ¡Pero si ya he dicho que hablo en hipótesis, caramba!
R.- ¡Eso es otra cosa!
S.- (¡Cualquiera me saca a mí sesenta reales del bolsillo!) El problema consiste en saber cuánto importa la comida.
M.- Pues es muy sencillo.
S.- Vamos a ver.
M.- Con pedirle al mozo la cuenta y ver lo que suma, está resuelto el problema.
S.- Naturalmente; pero, para eso, maldita la falta que hacen las matemáticas.
M.- Eso me parece a mí.
S.- Pues le parece a usted muy mal, y va usted a ver cómo se resuelve la ecuación. Llamemos x el valor de la comida. Escriba usted; x igual...
M.- Ya está.
S.- ¿Cómo se transforma esa ecuación?
M.- Pues... pues no lo sé.
S.- ¡Pero, don Manolito!
M. - ¿Qué es lo que tratamos de averiguar?¿Lo que ha de pagar cada uno?
S.- Naturalmente.
M.- Bueno. Pues yo les convido a ustedes, y así, no necesitamos averiguar más.
S.- Hijo mío, no sabe usted una palabra.
M.- Ya lo sé; pero pienso apretar estos dos meses.

S.- ¿Apretar, eh? Pues ya puede ir haciendo gimnasia. (26)

La acción aún se anima más con la llegada de otros personajes. Se inscribe, Rosita, una nueva alumna, provinciana aunque bastante marisabidilla...

Rosita.- El álgebra es una ciencia que me encanta.
M.- Y a mí.
Ro.- ¿Han llegado ustedes ya a las ecuaciones exponenciales?
M.- (¿Eh?) Si... es decir, me parece que si.
Ro.- ¿Conocerá usted ya la regla de Kramer, referente a las incógnitas.
M.- No, a eso no hemos llegado todavía.
Ro.- Pues se estudia antes que las ecuaciones exponenciales.
M.- Eso es en provincias. Aquí lo estudiamos después. (27)

Pero, sobre todo, interviene en escena don Ceferino, tío de Manolito, diputado provisto de incansable verborrea, que ha venido a comprobar los progresos de su sobrino. Su presencia da lugar a una escena graciosisima, en la que Manolito finge resolver una ecuación muy *complicada* para demostrar sus *conocimentos* a su tío, individuo que es profano en todo excepto en oratoria

M.- (En el encerado) Vamos a demostrar la ecuación siguiente: a más b elevado al cuadrado, es igual a raíz cuadrada de c multiplicado por b, más x partido por veinte.
Ce.- ¡Muy bien!
S.- (¡Ave María Purísima!)
M.- Tenemos que a más b más c multiplicado por x, es igual a raíz cúbica de c partido por b más x partido por catorce.
Ce.- ¡Por catorce! ¡Perfectamente!
S.- (¡Jesús!)
M.- De donde raíz cúbica de a más b más c más d...
S.- (¡Todo el alfabeto!)
M.- Es igual a raíz cuadrada de menos H multiplicado por x ... como la raíz cuadrada de menos H es una cantidad negativa..
S.- (¡Anda salero!)
M.- Tendremos que a más b elevado al cuadrado es igual a raíz cuadrada de c multiplicado por b más x partido por ciento veinte, que es lo que nos proponiamos demostrar.
Ce.- ¡Admirable!
S.- (¡Qué barbaridad!)
Ce.- Vale, vale el chiquillo.
S.- ¡Ya lo creo que vale! ¿Ve usted cómo ha sabido esta lección? Pues así se sabe toda la asignatura. (28)

Satiriza también Vital Aza la eficacia de los procesos matemáticos aprendidos cuando se tienen que aplicar a las necesidades prácticas. Así, cuando Basilisa, la mujer de Silverio, le plantea un sencillo problema aritmético, ella misma, haciendo uso del *cálculo de la vieja*, alcanza la solución con más rapidez y exactitud que un alumno de Silverio siguiendo sus instrucciones.

Basilisa.- Acabo de despedir a la criada.
S.- Me alegro.
B.- Sólo espera la cuenta. Se le deben veintitrés días a cincuenta reales. ¿Cuánto tengo que darle?
S.- Pues es muy sencillo. Don Manolito escriba usted ahí. Es una proporción. Treinta, que son los días del mes, es a cincuenta, como veintitrés es a x . De donde x será igual al producto de los medios, partido por el extremo conocido.
M.- Si, señor, si.
B.- (Que ha echado la cuenta por los dedos) No se molesten ustedes. Ya la he sacado yo. Son nueve pesetas y cincuenta y cinco céntimos. Dame dos pesetas, que no tengo bastante.
M.- Pues son... tres mil ochocientos cuarenta y siete reales.
S.- ¡Qué barbaridad!
B.- ¡Lo ves! ¡Si las matemáticas no sirven para nada! (29)

IV. La frecuencia con que Vital Aza recurría directa o indirectamente a las matemáticas como recurso cómico para sus comedias fue un hecho que sus contemporáneos conocían, ya que como fuente de inspiración no se encuentra ni en las obras de Ramos Carrión, ni en las de José Estremera, por no citar más que a dos autores con los que compartió los éxitos en varias ocasiones. Para Antonio Espina, el motivo de esta debilidad había que buscarlo en la revulsión que le causaba tanto la matemática en sí misma como su manera de enseñarla: «Su odio a las ciencias exactas dio el argumento de su primera obra teatral, *¡Basta de* *matemáticas!*, y su odio también a la tradicional manera de examinar dio como resultado una comedia en un acto titulada *Aprobados y suspensos...* todavía el tema de la crítica de la enseñanza de la matemática aparece en la pieza cómica *Ciencias exactas...*" (30).

No creo yo en un sentimiento tan extremo, sino en que, como en otros temas que aparecen con frecuencia en sus comedias, el estudiante, la casa de huéspedes, la medicina, el funcionario, el político,..., son fruto de su propia experiencia. Vital Aza habla de matemáticas por ser este tema uno de los que conoce con alguna profundidad; pues es, salvo el caso especial de José de Echegaray, el único comediógrafo de la época con una más que regular formación en ese campo.

Por otra parte, el calificativo de *odio* no se le puede aplicar ni hacia las matemáticas, ni hacia ningún otro tema, pues como hemos podido constatar a través de los ejemplos expuestos y de otros más, no hay en ningún momento ni ataques ni insinuaciones que sobrepasen el nivel de la ironía, por muy mordaz que esta sea. Lo reconocían así, también, los críticos de su obra: *Vital Aza se mantiene siempre, sin excepción, dentro de los límites del epigrama culto, de la gracia decorosa... ni la pimienta es jamás en sus obras excesivamente gruesa* (31).

En conclusión, podemos afirmar que, la utilización que Vital Aza hace de determinados aspectos de la matemática en sus comedias, tiene como objetivo primario el de divertir al espectador, aunque, no se deba ignorar un propósito subyacente de satirizar aspectos de nuestra sociedad, entre los que cabe situar la enseñanza y la utilización de la matemática, buscando, siempre a través del humor, el contrapunto entre la realidad y la ficción literaria. Como agudamente había observado ya Clarín en uno de sus famosos *paliques* dedicado a Vital Aza: *...cultivó la comedia más realista posible, la que toma el elemento cómico de la prosa ordinaria de la vida; la que da lecciones con los desengaños a veces grotescos, de las pequeñeces de la experiencia cotidiana* (32).

Bibliografía

(1) JARDIEL PONCELA, E. (1955). **Exceso de equipaje**. Madrid, Biblioteca Nueva, 2º edición, p. 500.

(2) AZA, V. (1896). **Bagatelas**. Barcelona, Juan Gili, p. 7.

(3) ALONSO CORTES, N. (1949). **Vital Aza: biografía**. Valladolid, S. Eve. R.- Cuesta, p. 18.

(4) DELEITO Y PIÑUELA, J. (1945). **Estampas del Madrid teatral fin de siglo. Vol. I. Teatros de declamación.** Madrid, S. Calleja, p. 339.

(5) GARCÍA VALERO, V. (1913). **Dentro y fuera del teatro**. Madrid, Lib. General de Victoriano Suárez, p. 261.

(6) ALONSO CORTES, N. (1949). **Ob. cit.**, p. 9.

(7) AZA, V. (1877). **Calvo y compañía**. Madrid. Imp. J. Rodríguez, p. 19.

(8) AZA, V. (1907). **El matrimonio interino**. Madrid. Imp. R. Velasco, p. 84.

(9) AZA, V. (1890). **El sueño dorado**. Madrid. Imp. R. Velasco, p. 41 y s.

(10) AZA, V. (1882). **Las codornices**. Madrid. Imp. C. Rodríguez, p. 19.

(11) AZA, V. y RAMOS CARRION, M. (1881). **El hijo de la nieve**. Madrid. Imp. C. Rodríguez, p. 10.

(12) AZA, V. y RAMOS CARRION, M. (1882). **Robo en despoblado**. Madrid. Imp. C. Rodríguez, p. 35 y s.

(13) AZA, V. y RAMOS CARRION, M. (1888). **El señor gobernador**. Madrid. Imp. R. Velasco, p. 52.

(14) AZA, V. (1890). **El señor cura**. Madrid. Imp. R. Velasco, p. 10.

(15) AZA, V. (1885). **Parada y fonda**. Madrid. Imp. J. Rodríguez, p. 11 .

(16) AZA, V. y RAMOS CARRION, M. (1894). **Zaragueta**. Madrid. Imp. R. Velasco, p. 28.

(17) AZA, V. (1886). **Perecito**. Madrid. Imp. R. Velasco, p. 8.

(18) AZA, V. (1878). **Con la música a otra parte**. Madrid. Imp. J. Rodríguez, p. 2.

(19) AZA, V. (1887). **El sombrero de copa**. Madrid. Imp. R. Velasco, p. 1 7.

(20) AZA, V. (1901). **Plutarquillo. Biografías festivas de personajes célebres**. Madrid. Imp. Pérez y Cía., p. 83.

(21) AZA, V. (1874). **¡Basta de matemáticas!**. Madrid. Imp. J. Rodríguez, p. 12 y s.

(22) AZA, V. (1876). **Aprobados y suspensos**. Madrid. Imp. J. Rodríguez, p. 10.

(23) **Ibíd.**, p. 17.

(24) AZA, V. (1902). **Ciencias exactas**. Madrid. Imp. R. Velasco, p. 5.

(25) **Ibíd.**, p. 6 y s.

(26) **Ibíd.**, p. 8.

(27) **Ibíd.**, p. 17.

(28) **Ibíd.**, p. 11 y s.

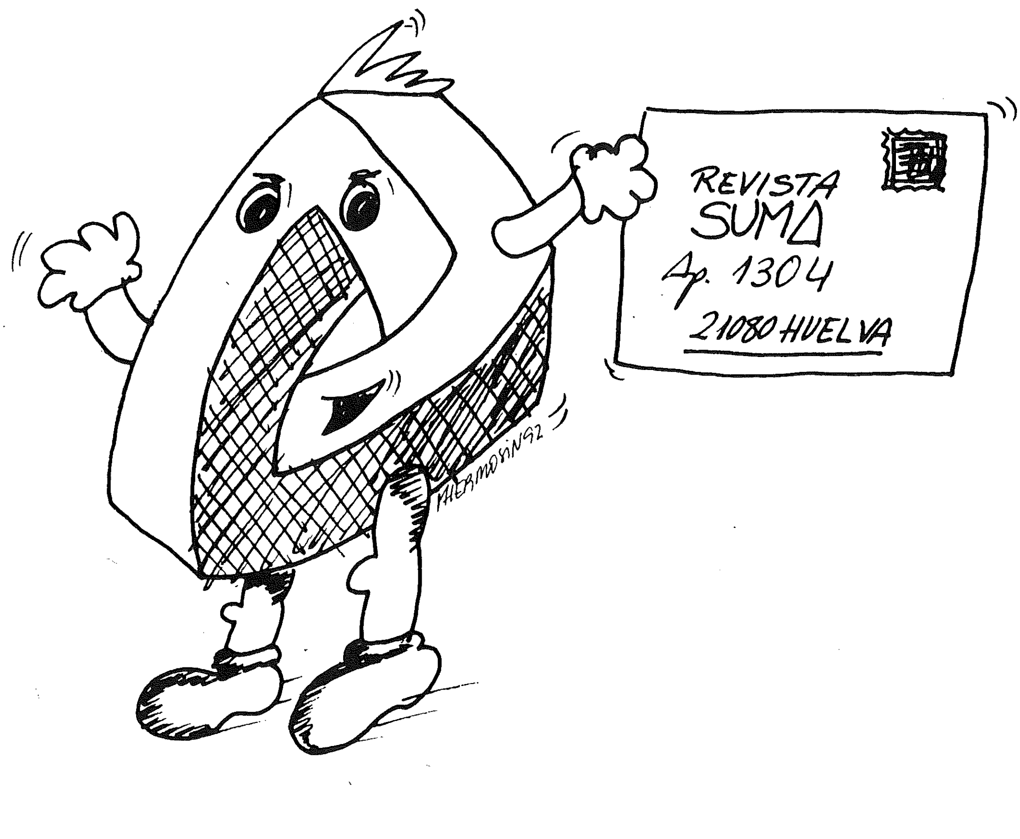
(29) **Ibíd.**, p. 18.

(30) ESPINA Y CAPO, A. (1929). **Notas del viaje de mi vida. Vol. III (1881-1890)**. Madrid. Espasa Calpe, p. 511 y s.

(31) SÁNCHEZ PÉREZ, A. (1894). **Prólogo de la obra Teatro moderno de Vital Aza**. Madrid. Viuda de Hernando y Cía., p. XXXV y s.

(32) ALAS, L. (1894). **Palique**. Madrid. Lib. Victoriano Suárez, p. 307.

José María Núñez Espallargas
Departamento de Didáctica
de las Ciencias Experimentales y de la Matemática
Universidad de Barcelona



SUMA

hoja para fotocopiar y enviar

Nombre y Apellidos: ______________________________

Calle: ______________________________

Población: ______________________ C.P.: __________

Provincia/País: ______________________ Tfno.: (   ) __________

CIF/NIF: ______________________ Centro de Trabajo __________

Firmado: ______________________ Fecha: __________

☐ Renovación (Nº de suscriptor ______________)*

☐ Primera suscripción

☐ Ha sido antes suscriptor

Deseo suscribirme por 3 números, a partir del número en curso al precio: 3.000 pts. particulares y 3.500 pts. Centros./Europa $35 U.S.A./América y resto del Mundo $45 U.S.A. (Ver condiciones de suscripción)

☐ Cheque bancario adjunto
☐ Domiciliación bancaria
☐ Giro Postal Nº_______ Fecha __________

* Imprescindible poner el nº de suscriptor

Domiciliación Bancaria

Señores, les agradeceré que con cargo a mi cuenta corriente/libreta atiendan al recibo que anualmente les presentará la revista «SUMA» correspondiente al pago de mi suscripción a la citada revista.

(Sólo para el Estado Español)

Banco/Caja: ______________________________

Agencia: ______________________ Nº C/C: __________

Calle: ______________________________

Población: ______________________ C. Postal: __________

Provincia: ______________________________

Titular: ______________________________

Firmado: ______________________ Fecha: __________

Firma:

Condiciones de Suscripción

Los miembros de cualquiera de las Sociedades que componen la Federación reciben la Revista por el mero hecho de ser socios. Si no pertenece a ninguna Sociedad y desea recibir SUMA en su domicilio envíe, debidamente cumplimentado, el boletín adjunto a **Revista SUMA, Apdo. 1304, 21080 Huelva (España)**. El número de inicio de la suscripción es siempre el que en ese momento se vaya a editar, considerándose los números precedentes como números atrasados. Dichos números, se enviarán previa solicitud contrarreembolso, al precio de **1.200 pts.** para España y **$ 12 U.S.A.** para el resto del Mundo cada ejemplar, más gastos de envío, excepto el nº 1 que está agotado. Para su comodidad la suscripción le será renovada automáticamente al finalizar el período inicial indicado, si no nos comunica por escrito, su deseo de causar baja. Para Iberoamérica, Europa y resto del Mundo, sólo se aceptará la suscripción por el importe indicado, mediante transferencia internacional a la c/c nº **101.133920286** de EL MONTE, Caja de Huelva y Sevilla, Oficina Principal, sita en c/Plus Ultra, 4. 21001 HUELVA (España). Si decide suscribirse a SUMA, puede optar por cualquiera de las formas de pago que aparecen en el boletín de suscripción. No obstante nos permitimos sugerirle la domiciliación banciaria como forma más cómoda de hacer efectivo el importe de la suscripción. En ese caso no olvide rellenar con letra clara y firmar y, en el caso de los Centros sellar, los datos bancarios que aparecen en el boletín.

RECOMENDACIONES A AUTORES

1. De carácter general:

1.1. Los artículos se remitirán por triplicado, mecanografiados a doble espacio, por una sola cara y en formato DIN A-4.

1.2. Adjunto al artículo se redactará un resumen (Abstract) de cinco líneas como máximo, que no necesariamente tiene que coincidir con la introducción. Debe ir escrito en hoja aparte.

1.3. Si el/los autor/es ha/n utilizado un procesador de textos, recomendables Wordstar y Wordperfect 5.1. Es conveniente enviar un diskette para facilitar el trabajo de edición y posibles erratas.

1.4. Se identificará el autor o los autores debidamente al final del artículo. Deberá aparecer el nombre completo, lugar de trabajo (si procede) y dirección completa; en el caso de ser varios autores, los datos de al menos uno de ellos y para todos un número de teléfono de contacto.

2. Normas específicas.

2.1. Es aconsejable no rebasar las quince páginas de extensión.

2.2. Los símbolos y unidades empleadas no deben dar lugar a equívocos en su interpretación.

2.3. Las referencias bibliográficas deben ir numeradas entre corchetes y listadas al final del artículo claramente identificadas.

2.4. Las notas a pie de página deben in correlativamente numeradas con superíndices a lo largo del artículo.

2.5. Los listados de ordenador deben ser rigurosamente originales.

2.6. Las ilustraciones y fotografías (preferentemente en hojas aparte e identificadas), deben estar hechas en blanco y negro, en el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.

La mejor forma de presentar las ilustraciones es a tinta china sobre papel vegetal, en el caso de estar hechas con impresora, que sean originales.

3. Envíos.

Revista SUMA, Aptdo. 1304. 21080-HUELVA. España.

Excepcionalmente se puede enviar a cualquiera de los miembros del Consejo de Redacción.

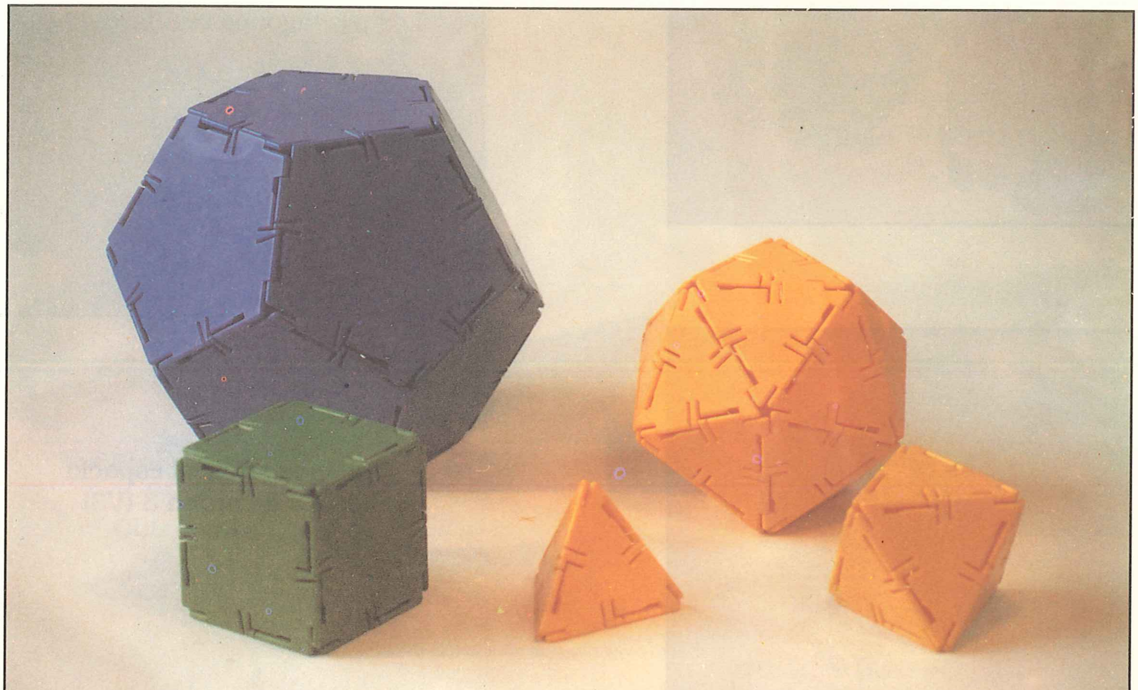
PANEL DE COLABORADORES

Aizpún López, A.
SCPM "Puig Adam", Madrid.
Arias Vílchez, J.
SAEM "Thales". I.B. "Auringis", Jaén.
Arrieta Gallastegui, J.
Centro de Profesores, Gijón.
Azcárate Goded, P.
EUPEGB, Cádiz.
Balbuena Castellano, L.
SCPM "Isaac Newton". La Laguna.
Bou García, L.
I.B. "Zalaeta", La Coruña.
Benítez Trujillo, F.
SAEM "Thales", E.U. de Estudios Empresariales, Cádiz.
Burgués Flamarich, C.
Escola de Mestres " S. Cugat", Univ. Autónoma, Barcelona.
Cajaraville Pegito, J.
EUPGB, Melilla.
Cancio León, Mª P.
SCPM "Isaac Newton", Telde (Las Palmas).
Cardeñoso Domingo, J. Mª
EUPGB, Melilla.
Castro Castro, A.
Secret. Gral. Técn. Cons. Educación, Santiago.
Colectivo "Manuel Sacristán"
Centro de Profesores, Algorta (Vizcaya).
Colera Jiménez, J.
I.B. "Colmenar Viejo", Colmenar Viejo, Madrid.
Coriat Benarroch, M.
SAEM "Thales" (Granada).
Díaz Godino, J.
SAEM "Thales", EUPEGB, Granada.
Dorta Díaz, J. A.
SCPM "Isaac Newton", La Laguna.
Fernández Sucasas, J.
EUPEGB, León.
Fortuny Aymemí, J. Mª
Escola de Mestres "S. Cugat", Univ. Autónoma, Barcelona.
Fuente Martos, M.
SAEM "Thales", I.B. "Averroes", Córdoba.
García Arribas, C.
SAEM "Thales", I.B. "Padre Suárez", Granada.
García Cruz, J. A.
SCPM "Isaac Newton", La Laguna.
García González, E.
SCPM "Isaac Newton", Las Palmas.
García Cuesta, S.
Centro de Profesores, Albacete.
Garrudo García, M.
SAEM "Thales", Colegio Público, Palomares del Río (Sevilla).
Gil Cuadra, F.
SAEM "Thales", EUPEGB, Almería.
Giménez, J.
EUPEGB, Tarragona.
Gómez Fernández, J. R.
SCPM "Isaac Newton", Santa Cruz de Tenerife.
Grupo AZARQUIEL
ICE de la Universidad Autónoma, Madrid.
Grupo BETA
EUPEGB, Universidad de Extremadura, Badajoz.
Grupo CERO
Centro de Profesores, Valencia.
Grupo GAUSS
ICE de la Universidad de Salamanca, Salamanca.
Grup ZERO
Escola de Mestres "S. Cugat", Universidad Autónoma, Barcelona.
Guzmán Ozámiz, M. de
Facultad de Matemáticas, Univ. Complutense, Madrid.
Hernández Guarch, F.
SCPM "Isaac Newton", Las Palmas.
López Gómez, J.
SAEM "Thales", I.B. "Luis Cernuda", Sevilla.
Luelmo Verdú, Mª J.
SMPM, I.B. "San Mateo", Madrid.
Llinares Ciscar, S.
SAEM "Thales", EUPEGB, Sevilla.
Martínez Recio, A.
SAEM "Thales", EUPEGB, Córdoba.
Mayor Forteza, G.
Dep. Matemáticas, Univ. Islas Baleares, Palma de Mallorca.
Mora Sánchez, J. A.
Centro de Profesores, Alicante.
Moreno Gómez, P.
Instituto Español, Andorra.
Nicolau Voguer, J.
Centro de Profesores, Palma de Mallorca.
Nortes Checa, A.
EUPEGB, Murcia.
Padilla Díaz, F. J.
SCPM "Isaac Newton", Santa Cruz de Tenerife.
Pareja Pérez, J. L.
SAEM "Thales", EUPEGB, Ceuta.
Pascual Bonis, J. R.
SNPM "Tornamira", EUPEGB, Pamplona.
Pérez Bernal, L.
SAEM "Thales", I.B. "Emilio Prados", Málaga.
Pérez Fernández, J.
SAEM "Thales", IFP "Las Salinas", San Fernando (Cádiz).
Pérez García, R.
SAPM "P. S. Ciruelo", I.B. "Miguel Servet", Zaragoza.
Pérez Jiménez, A.
SAEM "Thales", I.B. "Nervión", Sevilla.
Petri Etxeberría, A.
SNPM "Tornamira", C.P. "Mª Ana Sanz", Pamplona.
Puig Espinosa, L.
EUPEGB, Valencia.
Rico Romero, L.
SAEM "Thales", EUPEGB, Granada.
Ruiz Garrido, C.
SAEM "Thales", Facultad de Ciencias, Granada.
Ruiz Higueras, L.
SAEM "Thales", EUPEGB, Jaén.
Salvador Alcaide, A.
I.B. "San Mateo", Madrid.
Sánchez Cobos, F. T.
SAEM "Thales", I.F..P. "Andrés de Vandelviva", Baeza. Jaén.
Santos Hernández, A.
SCPM "Isaac Newton", La Laguna.
Seminario ACCIÓN EDUCATIVA
(M. Aguilera, I. Callejo, C. Calvo, L. Ferrero), Madrid.
Socas Robayna, M. M.
SCPM "Isaac Newton", La Laguna.
Soto Iborra, F.
EUPEGB, Valencia.
Suárez Vázquez, J. A.
SAEM "Thales", C.E. "Blanco White", Sevilla.
Varo Gómez de la Torre, A.
SAEM "Thales", I.B. "Trafalgar", Barbate (Cádiz).
Velázquez Manuel, F.
SCPM "Isaac Newton", Santa Cruz de Tenerife.
Vicente Córdoba, J. L.
SAEM "Thales", Facultad de Matemática, Sevilla.

PARA COLECCIONAR Nº 3

Este "Para coleccionar" pretende en el actual período de Reforma del sistema Educativo Español mostrar algunos cambios que pasan desde la enseñanza teórica a un planteamiento mucho más práctico donde la actividad del alumno debe ser «eje central» de la misma.

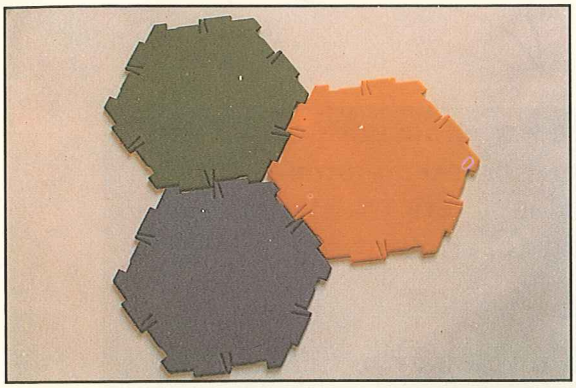
La colección que presentamos (complemento del artículo "Matemáticas experimentales") muestra cómo la utilización de recursos materiales puede conducir mediante experimentación, no sólo a la introducción sino también a la utilización de pruebas.



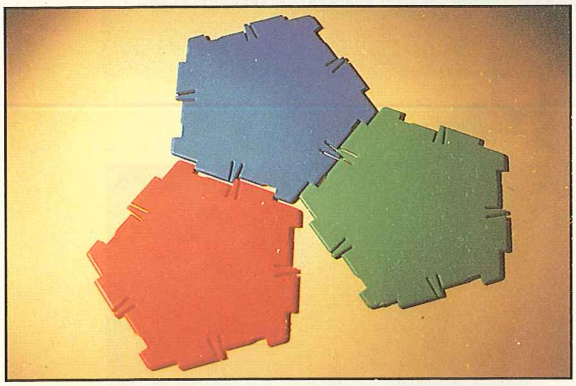
Sólo hay cinco poliedros regulares.

Sólo hay cinco poliedros regulares

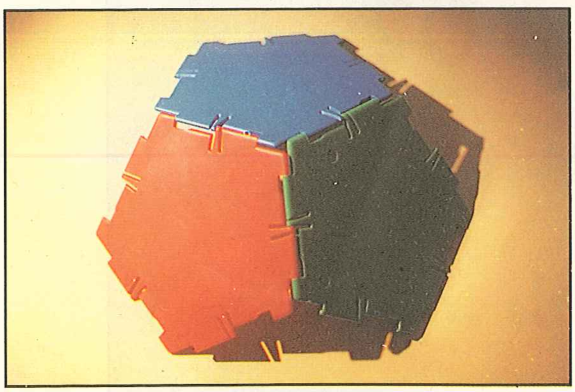
(Una prueba visual)



Los hexágonos regulares cubren el plano

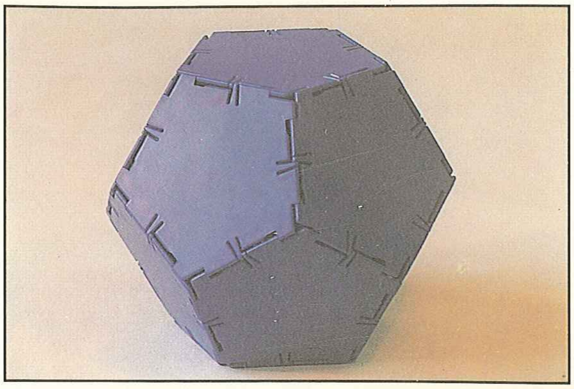


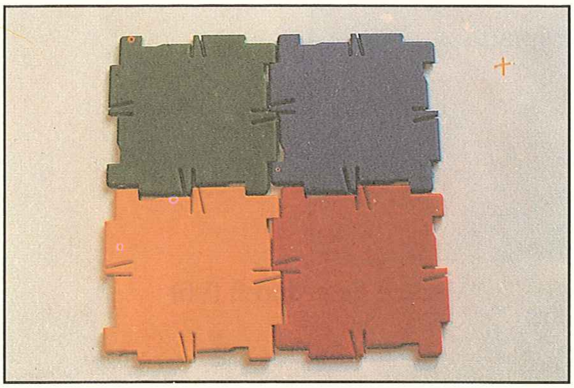
Los pentágonos regulares, no



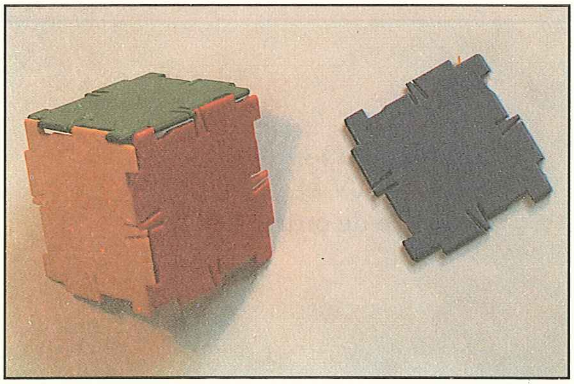
Podemos subir al espacio
Vértice de orden 3 (V3)

Obtenemos el dodecaedro



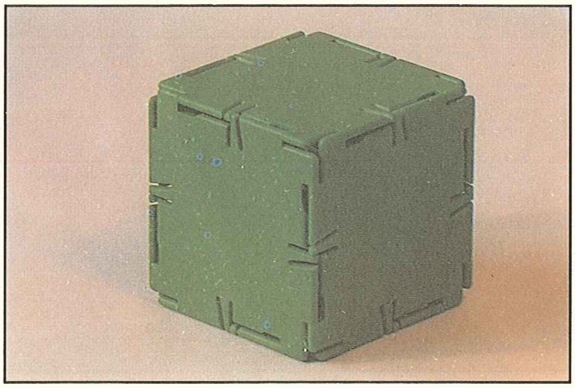


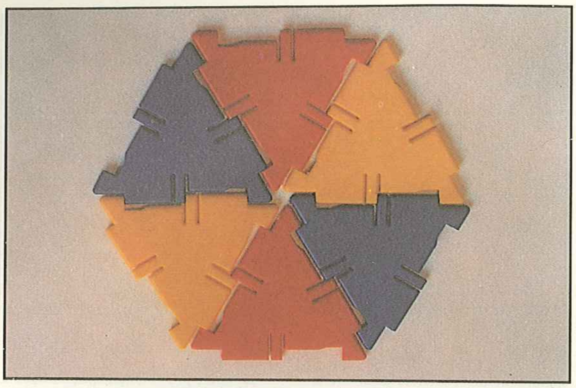
Los cuadrados cubren el plano



Pero podemos subir al espacio
Vértice de orden 3 (V3)

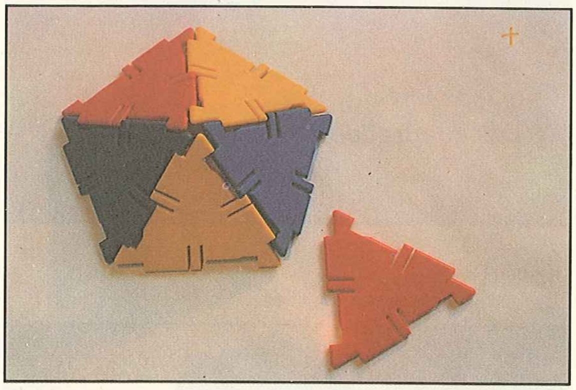
Obtenemos el cubo



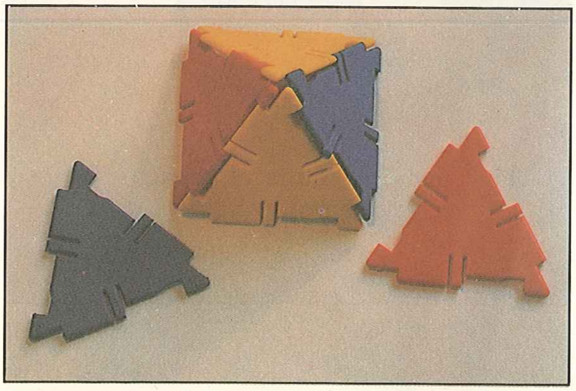


Los triángulos equiláteros cubren el plano

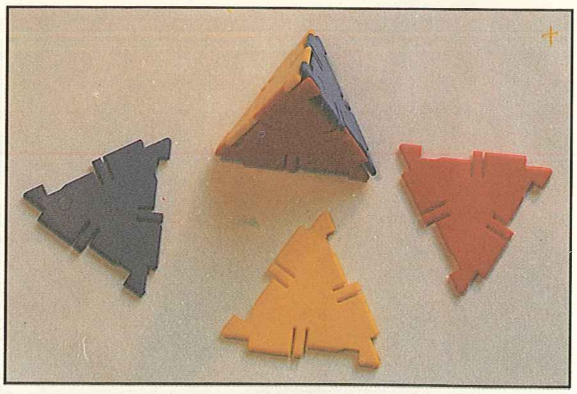
Pero podemos subir al espacio...



Vértice de orden 5 (V5)

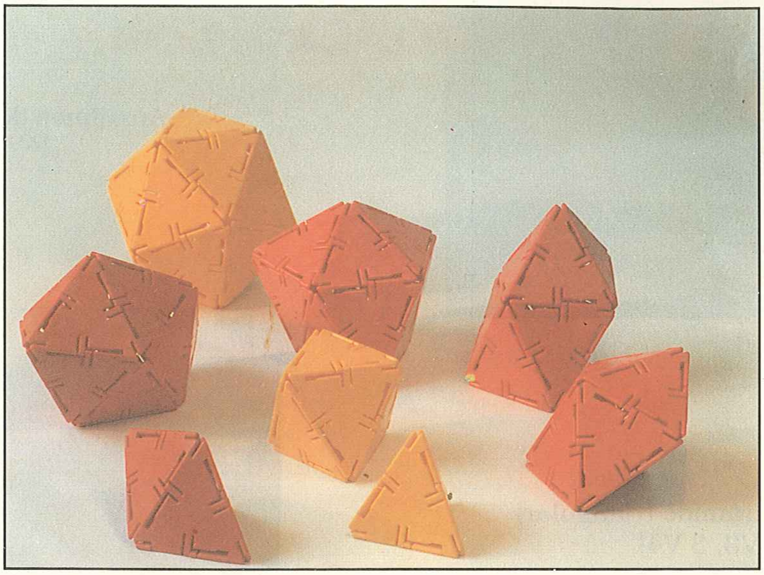


Vértice de orden 4 (V4)

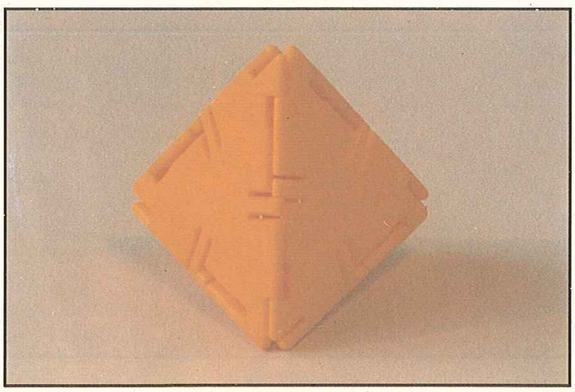


Vértice de orden 3 (V3)

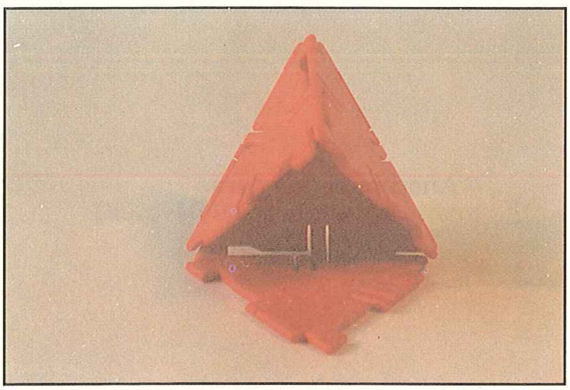
Los poliedros convexos construidos con triángulos equiláteros se denominan **Deltaedros**



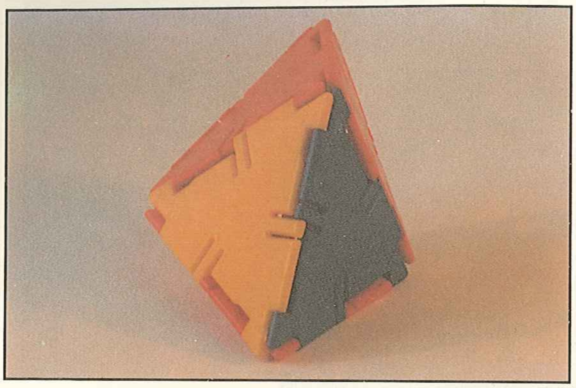
Sólo hay ocho deltaedros



Delta-4 (tetraedro)
[4 V3]

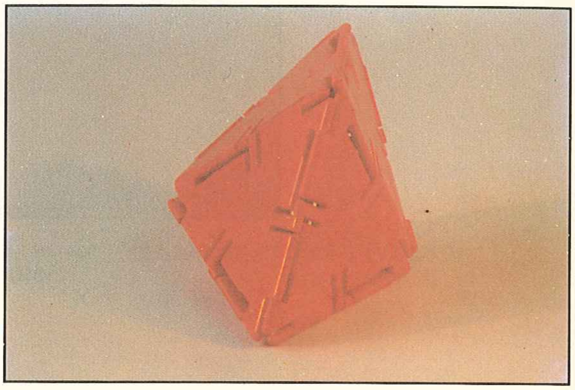


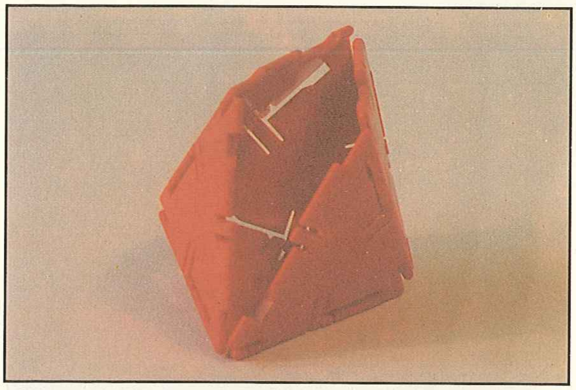
Abrimos el Delta-4



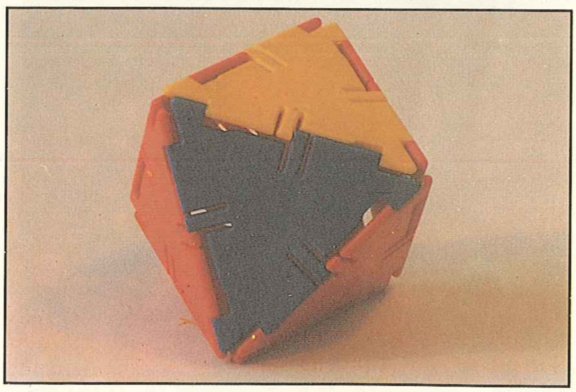
Añadimos dos caras

Delta-6 (bipirámide triangular)
[2 V3, 3 V4]



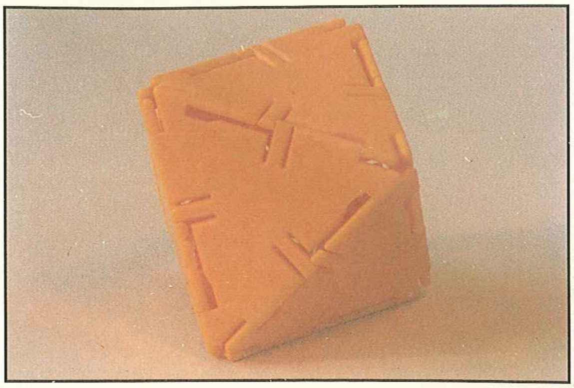


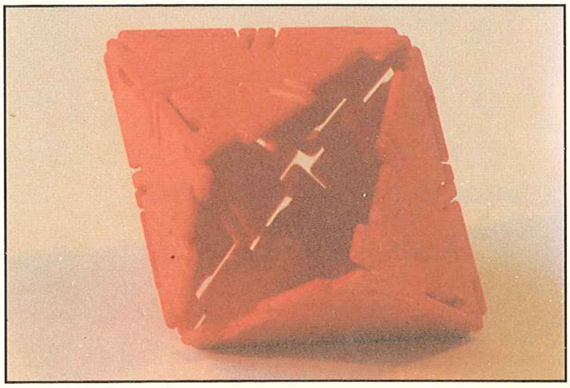
Abrimos el Delta-6



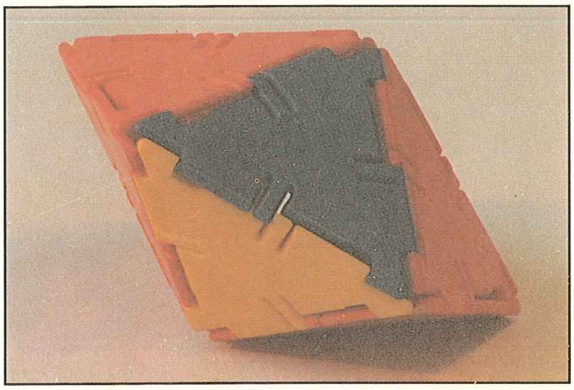
Añadimos dos caras

Delta-8 (octaedro)
[6 V4]

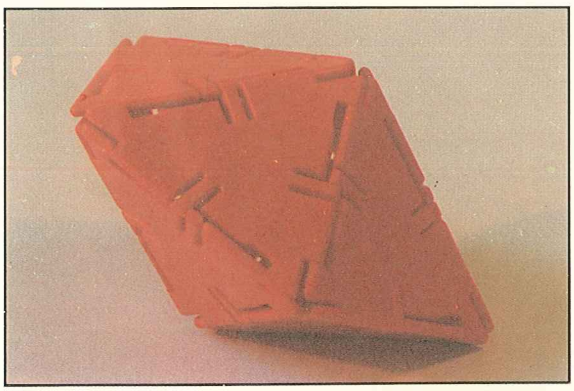




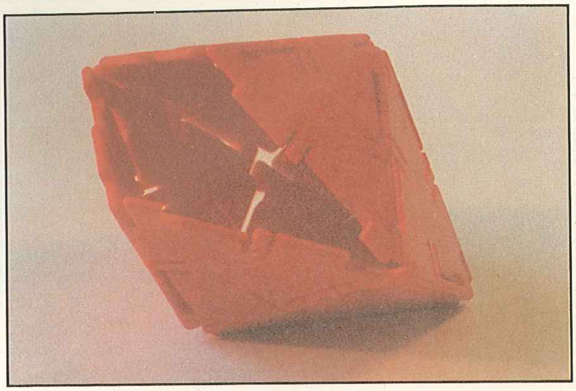
Abrimos el Delta-8



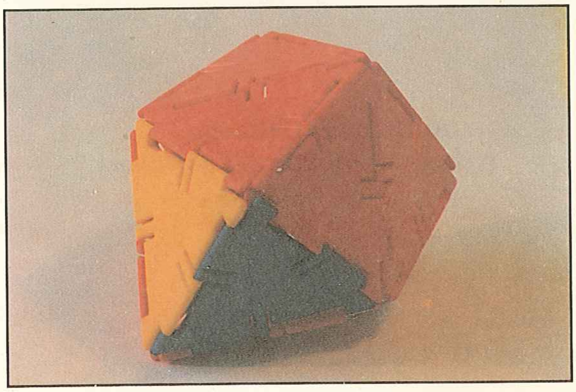
Añadimos dos caras



Delta-10 (bipirámide pentagonal]
[5 V4, 2 V5]

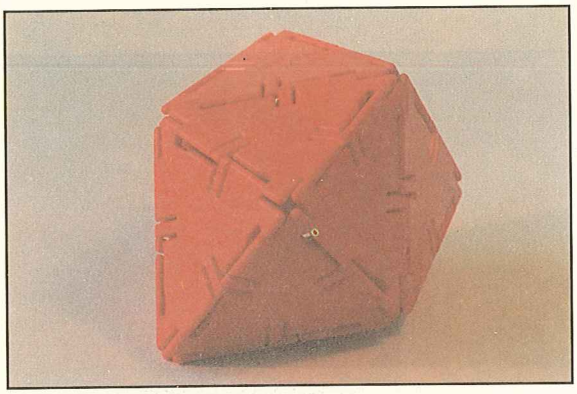


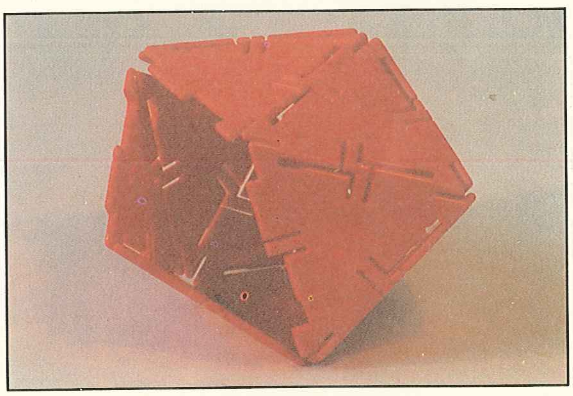
Abrimos el Delta-10



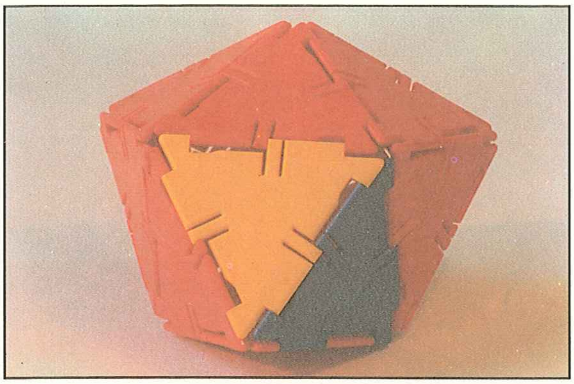
Añadimos dos caras

Delta-12 (dodecadeltaedro)
[4 V4, 4 V5]



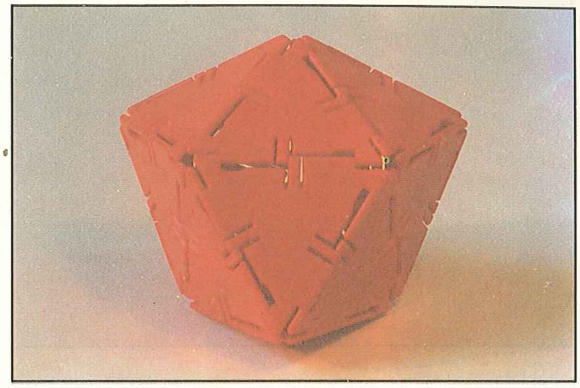


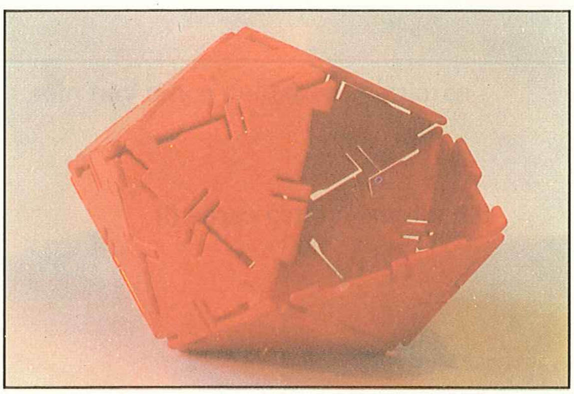
Abrimos el Delta-12



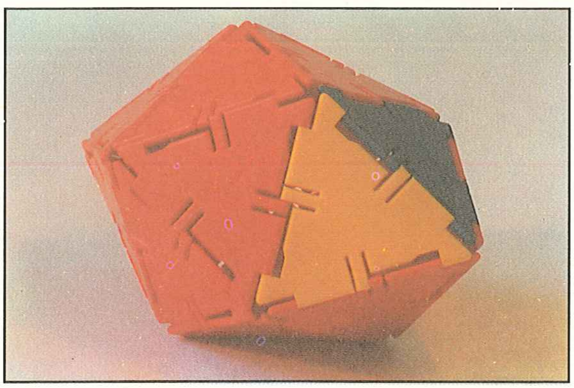
Añadimos dos caras

Delta-14 [Decatetradeltaedro]
[3 V4, 6 V5]



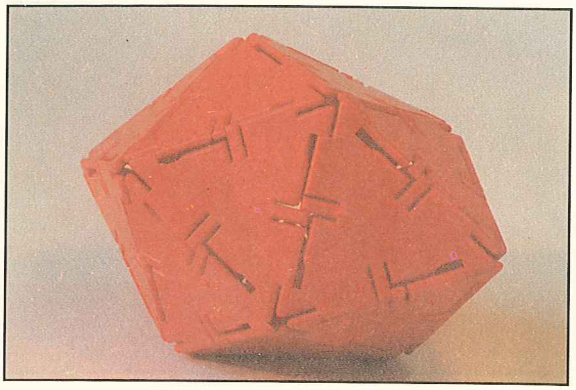


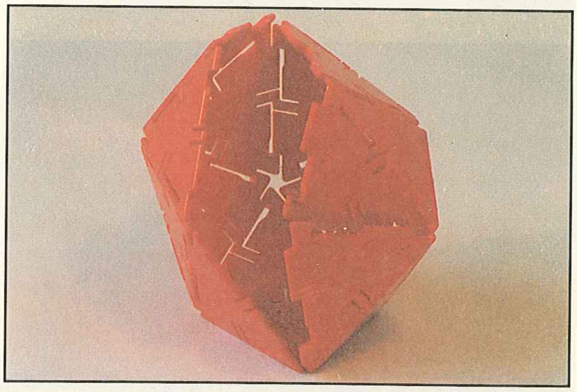
Abrimos el Delta-14



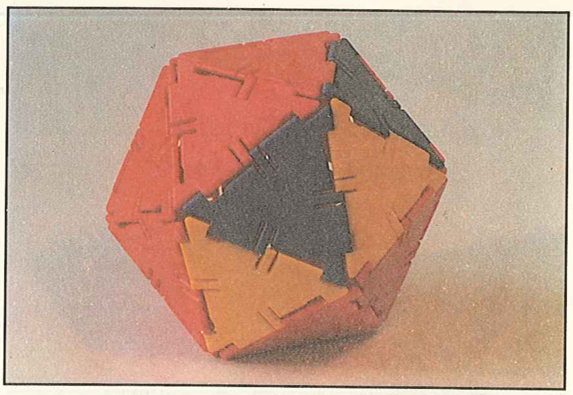
Añadimos dos caras

Delta-16 [Decahexadeltaedro]
[2 V4, 8 V5]

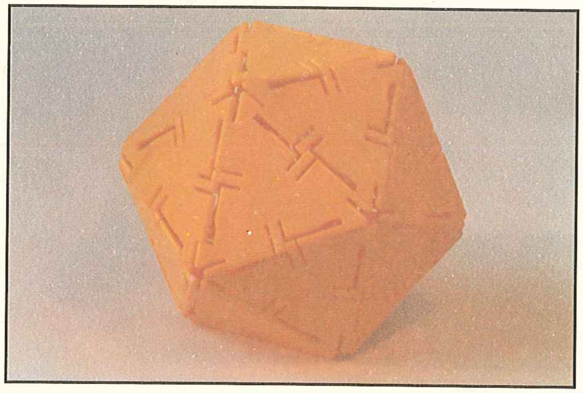




Abrimos el Delta-16

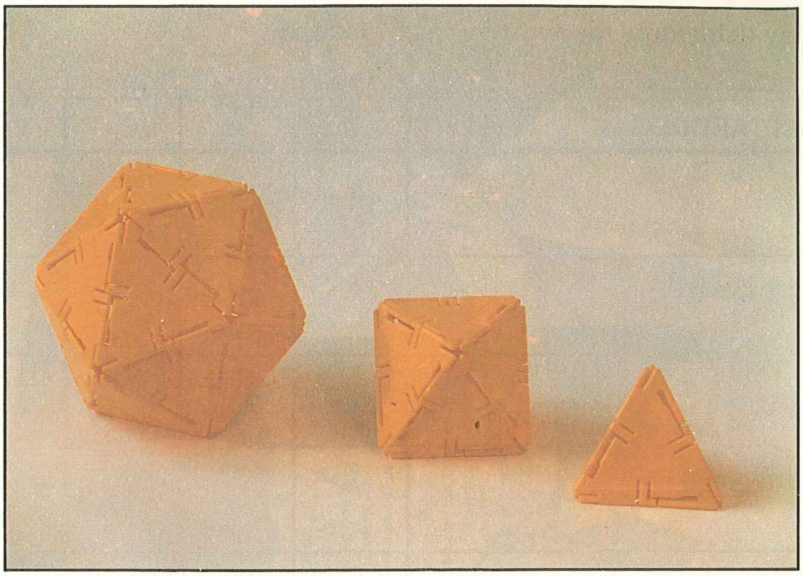


Añadimos cuatro caras (!)

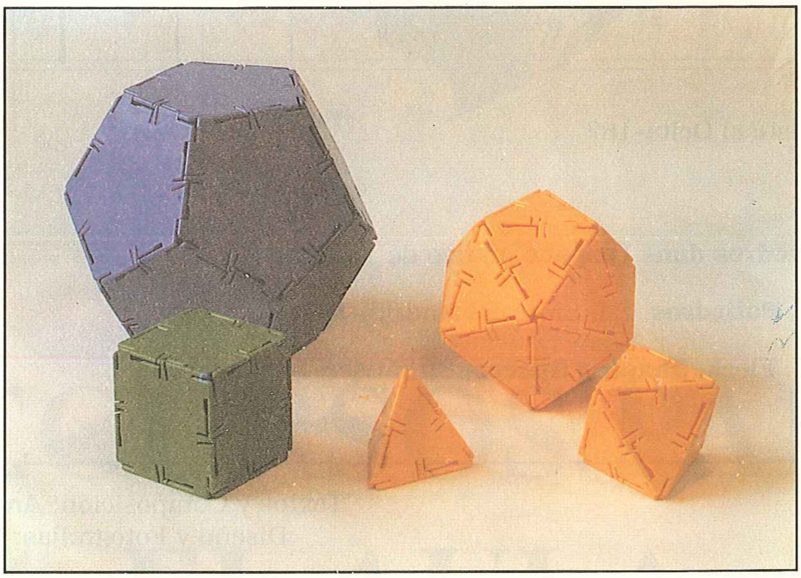


Delta-20 (icosaedro)
[12 V5]

Por tanto, sólo hay tres deltaedros regulares y ...



...sólo hay cinco poliedros regulares



* ¿Por qué con un solo tipo de polígonos regulares de 6 o más lados no se puede "subir" al espacio?

* ¿Por dónde hay que abrir cada deltaedro para obtener el "siguiente"?

* ¿Por qué sólo hay deltaedros de un número par de caras?

DELTAEDROS	V	A	C	V-3	V-4	V-5
Tetraedro (Delta-4)	4	6	4	4	-	-
Bipirámide Triangular (Delta-6)	5	9	6	2	3	-
Octaedro (Delta-8)	6	12	8	-	6	-
Bipirámide Pentagonal (Delta-10)	7	15	10	-	5	2
Dodecadeltaedro (Delta-12)	8	18	12	-	4	4
Decatetradeltaedro (Delta-14)	9	21	14	-	3	6
Decahexadeltaedro (Delta-16)	10	24	16	-	2	8
¿Delta-18?	11	27	18	-	1	10
Icosaedro (Delta-20)	12	30	20	-	-	12

* ¿Por qué no existe el Delta-18?

Bibliografía

Revista Plot, **Polièdres dans l'espace**, marzo de 1987.

Gregoria Guillén; **Poliedros**, Ed. Síntesis. Madrid, 1991.

M. Senechal & G. Fleck, **Shaping Spaces**, Birkäuser, Boston, 1988.

Textos y Composición: ***Antonio Pérez Jiménez***
Diseño y Fotografías: ***Manuel J. Hermosín***