SUMA

REVISTA SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

n.º 23

NOVIEMBRE 1996

SUMA 23
noviembre 1996

Índice

Edita
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Diseño portada
José Luis Cano
Diseño interior
Concha Relancio y M.ª José Lisa
Maquetación
M.ª J. Lisa, E. Palacián, J. Sancho

Revista SUMA
ICE Universidad de Zaragoza
C. Pedro Cerbuna, 12
50009-ZARAGOZA

Tirada: 5.700 ejemplares
Depósito Legal: Gr. 752-1988
ISSN: 1130-488X
Impresión: INO Reproducciones. Zaragoza

SUMA 23
noviembre 1996

Después del ICME

EDITORIAL

Cuando en los inicios de la década de los ochenta se fueron creando las sociedades de profesores de matemáticas, ni los más optimistas podían pensar que se podía llegar a convocar en España un acontecimiento de la envergadura del ICME-8. Y se ha convocado, organizado y realizado y, además, de una forma mucho más que digna.

Cuatro mil educadores matemáticos de cien países han convivido en Sevilla durante una semana del mes de julio. Han podido escuchar conferencias sobre muy diversos temas impartidas por los mejores especialistas mundiales en educación matemática, asistir y participar en grupos de trabajo, grupos temáticos, talleres, seminarios y muchas otras actividades entre las que no se pueden olvidar las magníficas exposiciones especiales organizadas por la Federación.

Y todo ello bajo una organización prácticamente perfecta. Cuando hay algún problema en un acontecimiento de este tipo rápidamente se detecta, pero cuando todo o casi todo sale bien, como en este caso, parece que es lo natural, que nadie ha hecho nada, que todo se desarrolla de forma espontánea. Y, sin embargo, han sido muchos los socios de la Federación que, de una forma u otra, han puesto su esfuerzo para que el ICME funcionase y, evidentemente, es la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales al completo y, muy en especial, el Comité Local del ICME –formado por socios de la misma– quienes deben recibir el máximo reconocimiento por su labor.

Si todas las personas que han trabajado en el ICME tuviesen que dar un nombre que personalizase este trabajo, seguro que todas se acordarían de Gonzalo Sánchez Vázquez. A sus cerca de ochenta años, desde la presidencia de Thales, de la Federación y *del Comité Nacional del ICME puso toda la ilusión del mundo para que este Congreso fuera una realidad. Y lo consiguió, aun cuando una grave enfermedad le impidió seguirlo en directo y su silla en la presidencia de la inauguración estuviese vacía. Pero no nos quiso dejar antes del ICME y aguantó un par de meses más. La noticia de su fallecimiento, no por esperada menos dolorosa, nos llegó cuando este número de la revista, de su revista, estaba completamente diseñado y prácticamente acabado. El n.° 24 de SUMA estará íntegramente dedicado a su figura y será un modesto homenaje a quien tanto ha hecho por la misma.*

Pero la vida sigue. Una vez concluido el ICME es preciso reflexionar sobre lo que se ha venido en llamar la «resaca» de los grandes acontecimientos. Cuando un grupo significativo de personas ha estado volcado en la organización de un suceso importante, no es infrecuente que siga un periodo de cierta relajación, sobre todo, porque va a ser imposible montar actividades de esa enjundia. Es preciso que la Federación y sus sociedades no olviden, pero dejen aparcado el éxito del ICME y se centren, con nuevos bríos, en sus actividades cotidianas que son su razón de ser: jornadas, olimpiada, seminarios, boletines...

Como ya anunciamos en el número anterior se ha producido el relevo en la Secretaría General de la Federación. Luis Balbuena deja su cargo a Carmen Azcárate. Pecaríamos de injustos si desde la dirección de SUMA no mostrásemos nuestro público agradecimiento a Luis Balbuena por el ánimo y apoyo que siempre nos ha mostrado, así como por todas las facilidades recibidas desde la Secretaría General para con la revista.

Gonzalo Sánchez Vázquez

Presidente de la Federación Española
de Sociedades de Profesores de Matemáticas

1917-1996

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Presidente: Salvador Guerrero Hidalgo
Secretaria General: Carmen Azcárate Giménez
Tesorero: Florencio Villarroya Bullido

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidente: Antoni Vila
Apartado de Correos 1306. 43200-REUS (Tarragona)

Organización Española para La Coeducación Matemática «Ada Byron»
Presidenta: Adela Salvador
Apartado de Correos 4051. 28080-MADRID

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»
Presidente: Salvador Guerrero Hidalgo
Apartado 1160. 41080-SEVILLA

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo»
Presidenta: Rosa Pérez García
ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»
Presidente: J. Horacio Gutiérrez Álvarez
Apartado de Correos 830. 33400- AVILÉS (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»
Presidente: Manuel Fernández Reyes
Apartado de Correos 329. 38201-LA LAGUNA (Tenerife)

Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas
Presidente: Modesto Sierra Vázquez
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Villalar, s/n. 09006-BURGOS

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Andrés Marcos García
Facultad de Económicas. Universidad de La Coruña

Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»
Presidente: Ricardo Luengo
Apartado 536. 06080-MÉRIDA (Badajoz)

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea Tornamira
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática. Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra. 31006-PAMPLONA

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»
Presidente: María Jesús Luelmo
Apartado de Correos 14610. 28080-MADRID

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Despacho 3517. Facultad de Educación. Universidad Complutense. 28040-MADRID

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departament de Didáctica de la Matemática. Apartado 22045. 46071-VALENCIA

SUMA 23
noviembre 1996, pp. 7-20

Enseñar a pensar al alumnado del primer ciclo de primaria a través de la matemática

Encarnación Soriano Ayala

ARTÍCULOS

En el texto se hacen reflexiones que permiten considerar las matemáticas como área idónea para enseñar a pensar a los niños en la escuela primaria. Se analiza la necesidad de cambiar las prácticas tradicionales, diseñando actividades centradas en los procesos y no en los productos. Desde este planteamiento se establece el paralelismo que existe entre la formación de los conceptos matemáticos y la del pensamiento reflexivo. Se estudia cómo las matemáticas favorecen la adquisición de las diversas capacidades, para terminar revisando, de forma detallada y con ilustraciones prácticas, los elementos intelectuales que un adecuado planteamiento matemático permite desarrollar.

Caminamos hacia una nueva forma de ver y entender la matemática del primer ciclo de Educación Primaria. El *aprender a aprender* y a aplicar las matemáticas ha de ser una meta que debe conseguir todo el alumnado. Para ello, en las escuelas se deben crear, reinventar o aprovechar situaciones que hagan a los alumnos adquirir una amplia gama de aprendizajes significativos por sí solos. El alumnado ha de saber aplicar los conocimientos adquiridos, las matemáticas que se enseñan y aprenden en la escuela han de servir tanto para estudiar otras materias, como para resolver exigencias y problemas matemáticos que encontrarán los niños fuera de ella.

Hemos apreciado, a través de las observaciones de diferentes clases de Educación Primaria, que en muchísimas aulas de primer ciclo, las matemáticas han cubierto los huecos dejados por la lectoescritura. Se les ha dedicado y dedica poco tiempo, y se han trabajado y trabajan utilizando libro-cuaderno-lápiz, dándole importancia, sobre todo, a la práctica con algoritmos. Por esto consideramos interesante recoger en este texto las *aportaciones al debate sobre las matemáticas en los 90* del simposio celebrado en Valencia en 1987. En él se consideraba necesario *incorporar al aula* los resultados relevantes de las *investigaciones educativas,* mejorar las técnicas docentes y facilitar el aprendizaje del alumnado. Debe existir cierta *coherencia entre la práctica matemática y la práctica escolar,* no se puede seguir con esta dicotomía. Por ejemplo, un rasgo característico de la construcción de las matemáticas son los procesos de descubrimiento e invención; sin embargo, en la mayoría de las escuelas se insiste más en la memorización de hechos, datos y resultados matemáticos. Otro ejemplo bastante significativo es que el trabajo de descubrimiento matemático, aunque tiene un fuerte componente individual, es un trabajo compartido; en la práctica escolar, en cambio, el trabajo en matemáticas se reduce al uso del libro-lápiz-papel, olvidando la discusión de ideas, la comunicación de experiencias y pensamientos aún imprecisos entre el alumnado y entre estos y el profesor.

Pensamos que un error, hasta ahora no aceptado como tal, ha consistido en considerar que la enseñanza de las matemáticas de cualquier nivel, dependía de lo que se exigía en el nivel inmediatamente superior (carácter propedéutico de la enseñanza matemática), llevando al profesorado a perder de vista el significado y la utilidad de los conceptos que transmitían a sus alumnos y de los procedimientos que eran necesarios desarrollar para construir el conocimiento matemático.

Como consecuencia de nuestra investigación en esta área (Soriano, 1986, 1993), creemos que los cambios en el currículum matemático estarán encaminados, en primer lugar, a posibles reestructuraciones que reflejen objetivos más precisos y mejor definidos. En segundo lugar, coincidiendo con Coll (1990), estimamos imprescindible favorecer en el alumnado la adquisición de estrategias cognitivas de *exploración, descubrimiento, planificación y regulación* de la propia actividad. En tercer lugar, consideramos que el niño puede aprender a pensar a través de esta materia. Por último, es necesario valorar por igual los diferentes ámbitos o bloques del conocimiento matemático. Por ejemplo, la geometría, hasta ahora ha sido muy olvidada en la escuela de primaria.

Los procesos y los conceptos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Nuestra observación e intervención activa en situaciones reales de clase con alumnado de primer ciclo de primaria nos hace cambiar la pregunta ¿qué conceptos hay que incluir en los proyectos curriculares?, por la pregunta ¿qué queremos que los alumnos aprendan *en* y *de* las matemáticas?

Teniendo en cuenta las teorías cognitivas sobre el aprendizaje de las matemáticas (Bruner, 1961, 1966; Wittrock, 1979; Holmes, 1985), los profesores han de hacer posible el aprendizaje significativo de sus alumnos. Cuando los niños no procesan significativamente la información, los profesores han de lograr la conexión entre el material previamente aprendido y el nuevo, usando métodos verbales, de imágenes o materiales tridimensionales que destaquen la organización y los detalles específicos del material a estudiar. Cuando los alumnos procesan los contenidos significativamente, diseñarán actividades orales y escritas para asegurar que los niños generan relaciones relevantes en un modo verbal o de imagen. Finalmente, cuando los alumnos, espontáneamente, generan relaciones apropiadas, el profesor debe dirigir su atención a conceptos de nivel superior. Bruner, (1961, 1966) y Wittrock (1979) creen que el aprendizaje es un proceso de descubrimiento, los niños deben descubrir relaciones significativas entre los conocimientos previos y los nuevos, y asumir responsabilidad por la actividad cognitiva. Teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente y siguiendo al ICMI (1986), llegamos a la conclusión de que el mejor *currículum matemático* es aquel *basado en procesos.* Al trabajar sobre procesos de razonamiento, las matemáticas imponen unas determinadas características como son: rigor, precisión, razonamiento lógico, equilibrio, concisión, etc. En este sentido, la educación matemática debe consistir primordialmente en *desarrollar en los niños y niñas un pensamiento y una actitud activa y creativa.* Por ello, una matemática anclada en contenidos inmutables se contradice a sí misma.

...cambiar la pregunta ¿qué conceptos hay que incluir en los proyectos curriculares?, por la pregunta ¿qué queremos que los alumnos aprendan en y de las matemáticas?

Si consideramos las matemáticas como un conjunto de procesos, la labor de la escuela, entre otras, consiste en ayudar a los niños a *matematizar,* es decir favorecer en el alumnado los procesos de comparar, clasificar, ordenar, abstraer, simbolizar, generalizar, etc. La tarea estriba en decidir qué procesos pueden ser más útiles para la vida en sociedad de estos niños y qué experiencias de la escuela pueden ayudarles a aprender esos procesos. Pero, éstos sólo se pueden enseñar a través de conceptos, de modo que los alumnos deberán aprender los más adecuados para que las posibilidades de que los procesos sean adquiridos y entendidos sean las más idóneas.

Por muy válido que sea el método que se emplee, los conceptos matemáticos no se aprenden de forma espontánea: un concepto se va adquiriendo en relación con otros y es esa red de conceptos la que tiene estructura sólida. El hecho de haber trabajado con interés un tema durante un determinado tiempo no significa que su conocimiento ya esté adquirido. Gran parte se olvidará o quedará en un almacén de la memoria, y sólo reaparecerá si es tratado en otras ocasiones. Esto es la aplicación a la matemática de las *teorías de los esquemas* (Anderson, 1977; Norman, 1985) que postula que el conocimiento previo, organizado en bloques interrelacionados, es un factor decisivo en la realización de nuevos aprendizajes.

Según C. Coll (1990) la estructura cognoscitiva del alumnado puede concebirse en términos de esquemas de conocimiento. Los diferentes esquemas de conocimiento que acomodan la estructura cognoscitiva pueden mantener entre sí relaciones de extensión y de complejidad diversa. La nueva información matemática aprendida se almacena en la memoria mediante su incorporación y asimilación a uno o más esquemas; los aprendizajes previos quedarían modificados por la construcción de nuevos esquemas. Siendo el objetivo de la educación la modificación de esquemas de conocimiento, revisándolos, enriqueciéndolos, diferenciándolos... mediante una construcción progresiva.

El carácter jerárquico de los contenidos matemáticos obliga a una elección minuciosa que respete los procesos de construcción de las matemáticas. Esto no quiere decir que tenga que seguirse una enseñanza lineal de los conceptos, sino un desarrollo cíclico en espiral, con ampliaciones sucesivas que estaría en concordancia con la psicología de los niños y las niñas (Chamorro, 1991).

La adquisición de técnicas matemáticas requiere *práctica* y un tratamiento continuo y planeado. La *comprensión* se adquiere normalmente como resultado de actividades matemáticas *significativas,* varias y repetidas (ICMI, 1986).

En las aulas, los contenidos y los temas matemáticos no pueden estar encerrados ni aislados, sino que han de ser adecuados a las posibilidades, competencias y capacidades reales de los alumnos y al contexto en el que se desarrolla la vida de estos.

(La) enseñanza-aprendizaje de las matemáticas debe dirigirse a impartir conocimiento y a desarrollar las habilidades del pensamiento. (...) es difícil alcanzar uno de ellos hasta un grado significativo sin hacer algún progreso en el otro.

La matemática como método para «enseñar a pensar»

Consideramos la matemática una materia clave en los primeros años de la escolaridad obligatoria. Ayuda al niño a desarrollar su inteligencia, le enseña a pensar, favorece el desarrollo de las capacidades y procesos cognitivos, facilita la comunicación con el profesor y su grupo de iguales, a la vez que le capacita para encontrar y usar estrategias, repercutiendo sus logros en las demás áreas. La matemática posibilita el desarrollo integral del niño como persona inmersa en una sociedad (Soriano, 1993).

Entre enseñar y aprender, dice Dewey (1933), existe la misma relación que entre vender y comprar. La única manera de aumentar el nivel de aprendizaje del alumnado es incrementar la cantidad y la *cualidad* de la enseñanza real.

El proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas debe dirigirse a impartir conocimiento y a desarrollar las habilidades del pensamiento. Creemos que es difícil alcanzar uno de ellos hasta un grado significativo sin hacer algún progreso en el otro.

Cómo se forman los conceptos matemáticos. Paralelismo con la formación del pensamiento reflexivo

Los conceptos comienzan con experiencias que proceden de la constante interacción del niño con su medio. Todos los organismos están alerta, desean una oportunidad para entrar en actividad, y necesitan algún objeto sobre el cual actuar. Los conceptos *se precisan con el uso,* el pensamiento no es otra cosa que la capacidad para comprender y relacionar entre sí las sugerencias específicas que las cosas plantean y, por último, *se generalizan también con el uso* (Dewey, 1933). Pensar es indagar, investigar, inspeccionar, ensayar... con el fin de encontrar algo nuevo o ver lo ya conocido bajo una perspectiva diferente; por todo lo dicho anteriormente, consideramos que la matemática es una materia ideal para lograrlo en los niños. Las actividades escolares y, de forma especial las que proceden del área de matemáticas, ofrecen grandes posibilidades intelectuales.

Según Dewey (1933), el objetivo y el resultado del pensamiento es en todos los casos la transformación de una situación dudosa y desconcertante en una situación clara y determinada. Coincide con la estrategia de enseñanza que proponemos. Para *trabajar la matemática,* hay que comenzar con el planteamiento de una situación problemática que a través de una cuidadosa investigación pueda ser resuelta.

Vamos a establecer un paralelismo entre las cinco fases del pensamiento reflexivo según Dewey (1933), y las fases que nosotros creemos necesarias para pensar reflexivamente desde las matemáticas. En el plano de la matemática se pueden considerar cinco fases que favorecen el pensar reflexivamente. En la primera, se presenta la situación problemática y se busca una posible solución; en la segunda, hay una intelectualización de la dificultad que se ha experimentado en un problema que hay que resolver, una pregunta a la que se debe buscar una respuesta. La tercera consiste en el uso de una sugerencia tras otra, como hipótesis, para iniciar y guiar la observación; la cuarta fase es la de razonamiento, es la elaboración mental de la idea o suposición (razonar ayuda a ampliar el conocimiento, mientras que al mismo tiempo depende de lo ya conocido y de las facilidades existentes) y, por último, la comprobación de hipótesis. *Creemos que aprender matemáticas es aprender a pensar.*

Todo el proceso de pensar consiste en formar una serie de criterios relacionados entre sí de tal modo que se sostienen mutuamente y conducen a una conclusión, coincidiendo este procedimiento con el que se debe llevar a cabo en matemáticas para adquirir conocimiento de forma significativa. Así, comprender en matemáticas es aprehender un significado. Consiste en contemplarlo en sus relaciones con otras situaciones o materias, determinar que utilidad puede dársele, observar cómo opera...

Los conceptos concreto y abstracto van muy ligados al acto de pensar reflexivamente (Dewey, 1933). En matemáticas hay que ir, para adquirir un buen conocimiento matemático, de lo concreto a lo abstracto y operar en lo abstracto. Pero, es conveniente clarificar semánticamente estos términos y observar el paralelismo de ellos en la formación del pensamiento y en la adquisición del conocimiento matemático.

Dewey (1933) afirma que lo *concreto* denota un significado claramente aprehensible por sí mismo. La diferencia entre lo concreto y lo abstracto está relacionada con el progreso intelectual de un niño; lo que es abstracto en un período del desarrollo es concreto en otro. Lo que determina los límites entre lo concreto y lo abstracto son las exigencias de la vida práctica. Cuando el pensamiento se utiliza como medio para algún fin, bien o valor que lo transciende, es concreto (lo que ocurre cuando se trabaja el área de matemáticas en los primeros niveles de primaria); cuando se emplea simplemente como medio para seguir pensando, es abstracto.

Los conceptos matemáticos han de pasar de lo concreto a lo abstracto, para ello es necesario considerar que el hecho de comenzar con lo concreto significa que en el punto inicial de toda experiencia de aprendizaje matemático, se debería hacer gran parte de lo que ya es familiar. Por ejemplo, no es concreta la enseñanza del número simplemente porque se utilicen piedrecitas, garbanzos, chapas, puntos... Una vez que se ha percibido claramente el uso y el alcance de las relaciones numéricas, la idea de número es concreta aún cuando sólo se usen números. Hay que comenzar a trabajar las matemáticas con manipulaciones prácticas, pero la actividad meramente física y la simple manipulación no aseguran resultados intelectuales. Siempre deben ir encaminadas a resolver un problema, hay que reflexionar sobre lo realizado, discutir con el grupo clase, secuenciar y ordenar las sugerencias para la consideración de una solución a la cuestión planteada (Soriano, 1993). La interacción con el grupo favorece la comunicación. Se ha de utilizar el lenguaje con fines prácticos y sociales, de forma que poco a poco se convierta en una herramienta consciente para vehicular el conocimiento matemático en particular y apoyar el pensamiento (Vygotski, 1978).

...comprender en matemáticas es aprehender un significado. Consiste en contemplarlo en sus relaciones con otras situaciones o materias, determinar qué utilidad puede dársele, observar cómo opera...

Las matemáticas favorecen el desarrollo de la inteligencia y enseñan a pensar a los niños desde los primeros cursos

Nickerson, Perkins y Smith (1987) consideran que los enfoques tradicionales de la educación se han centrado en impartir un conocimiento práctico. Se ha prestado poca atención a la enseñanza de las habilidades del pensamiento tales como el razonamiento, el pensamiento creativo y la solución de problemas. Al enfocarse en las habilidades del pensamiento, no hay por qué negar la importancia de la adquisición de conocimiento. El pensamiento es esencial para la adquisición de conocimiento y el conocimiento es esencial para el pensamiento. Nosotros compartimos esta reflexión y creemos que los niños pueden aprender a pensar a través del currículum matemático. Además lo consideramos la forma idónea para enseñar a pensar a un niño de primer ciclo de Educación Primaria; entendiendo que en matemáticas la mera «información» no se convierte por sí sola en «formación», *el aprendizaje intelectual incluye la reunión, procesamiento, retención o almacenaje y recuperación de la información;* por ello, hay que hacer mucho hincapié en los *procedimientos* y en favorecer *actitudes* positivas hacia esta materia.

La información se va a convertir en conocimiento sólo si se comprende el material que la constituye (Dewey, 1933). La comprensión de las distintas partes de la *información matemática* y sus relaciones recíprocas, se logra cuando la adquisición va acompañada de una constante reflexión sobre el significado de lo que se estudia. Es necesario aprehender las conexiones de lo que es retenido y recordado (recuperado), para poder utilizar el material en situaciones nuevas.

Todo el proceso de enseñanza-aprendizaje tiene como objetivo desarrollar en el alumnado una serie de capacidades que le permitan vivir en sociedad inteligentemente. La matemática contribuye, de forma especial, a desarrollar en el alumnado del primer ciclo de Educación Primaria las capacidades cognitivas, afectivas, psicomotoras, de inserción social y comunicativas (Soriano, 1993).

La matemática favorece el desarrollo de las *capacidades cognitivas* en el alumnado comenzando por las más simples como atender, conocer, comprender... y continuando por otras más complejas como la capacidad de relacionar, de razonar, sintetizar, aplicar, pensamiento creador, pensamiento y sentido crítico.

Aunque se la ha tachado normalmente de materia árida, la matemática contribuye a desarrollar *capacidades de tipo afectivo.* Estas pueden ser, según las circunstancias, positivas y negativas; es labor del profesor que el alumno las logre en sentido positivo: autoestima, valorar, disfrutar (a través de los retos que supone el proceso seguido para alcanzar una solución a un problema), el criticar (los procesos matemáticos, las soluciones... deben ser debatidos por el grupo, deben de participar todos para poder construir el conocimiento matemático a través de la interacción con los iguales), etc.

Las *capacidades de tipo psicomotor* también son desarrolladas por el aprendizaje de las matemáticas. Además, el bloque matemático «Espacio y Geometría» contribuye expresamente a su desarrollo: capacidad de orientarse, organización espacio-temporal, coordinar, manipular, construir...

Si se posibilitan las puestas en común en el aula después de realizar actividades matemáticas y se estudian y debaten los procedimientos seguidos para solucionar un problema, se producen intercambios, etc., se logrará que las matemáticas contribuyan a desarrollar las *capacidades de inserción social.* El compartir un problema al que hay que buscar la solución en el pequeño grupo, el discutir con el grupo clase los procesos y resultados, etcétera, favorece capacidades como las de saber participar, colaborar, compartir, contribuir, respetar... que tan necesarias son para integrarse en la sociedad.

Por último, es preciso comentar el poder que tiene esta área para conseguir, a través del trabajo diario, las *capacidades comunicativas* del alumnado; la expresión oral, la expresión gráfica, la escrita, la simbólica, dialogar, escuchar... No se debe olvidar que la matemática es un lenguaje universal, es decir, lenguaje matemático.

La matemática contribuye de forma especial a desarrollar en el alumnado del primer ciclo de Educación Primaria las capacidades cognitivas, afectivas, psicomotoras, de inserción social y comunicativas

Aspectos intelectuales favorecidos por el área de matemáticas

Desde la perspectiva cognitiva y desde el procesamiento de la información hay una serie de capacidades humanas que su manifestación en una persona nos informa de una conducta más o menos inteligente, y pensamos que son favorecidas por una matemática trabajada adecuadamente. En concreto, existen una serie de elementos importantes cuyo desarrollo y cultivo contribuye a enseñar a una persona a pensar, y creemos que se pueden abordar en toda su amplitud desde el área de matemáticas. Entre ellos, por su importancia, contemplamos los siguientes:

La memoria

Es una de las capacidades cognitivas básicas junto con la atención y el razonamiento. Tradicionalmente ha sido considerada como índice importante de la inteligencia.

Todas las informaciones que llegan al alumno son seleccionadas por él y pueden permanecer en la memoria más o menos tiempo. El período de tiempo depende de la relación que se establezca entre la información nueva y la previamente adquirida. Según Beltrán (1987), Gagné (1987), Novak y Gowin (1988), Heimlich y Pittelman, (1990), Coll (1990) y Hernández Pina (1993), entre otros, la información que le llega al alumno sigue un esquema común. El alumno la selecciona y pasa a su memoria de trabajo, en la que puede permanecer un pequeño período de tiempo y a partir de aquí seguir dos caminos:

- Uno es *desestimarla,* debido a diversos motivos: no encontrar esquemas de conocimiento previos con los que relacionarlos, la existencia de una distancia bastante grande entre el nuevo conocimiento y las ideas previas, que no sea de interés, no le encuentre utilidad, etc. Si esta información no tiene ningún sentido para el niño, la utiliza tal como le llega, sin elaborarla, con el fin de salir de una situación próxima o comprometida para la cual la necesita, como puede ser, aprobar un examen o satisfacer las expectativas que el profesor o la profesora han depositado, en ese momento, en él. Cuando pasa este corto período de tiempo la información que se ha acumulado por repetición, generalmente, se pierde. Se adquieren los conceptos de forma mecánica, y al no encontrar la nueva información relaciones con otras anteriores, no es reelaborada por el alumno, no se almacena y, por lo tanto, no puede recuperarse para adquirir nuevos significados, ni para aplicarla a una nueva situación.

- El otro camino es *encontrar sentido* a la nueva información y, para ello, se buscan relaciones con las experiencias previas que posee. La nueva información siempre produce un desequilibrio conceptual, que se ha de paliar para volver al estado normal de equilibrio. El alumno, intencionadamente, busca y encuentra relaciones con sus conocimientos anteriores, los reelabora y aparecen nuevos esquemas de conocimiento más complejos, para lo cual utiliza estrategias de aprendizaje, ya adquiridas o que puede aprender , recuperándolas en una situación adecuada.

Los niños y niñas una vez reelaboradas las informaciones las almacenan en su memoria a largo plazo, y son recuperadas y utilizadas en nuevas situaciones de aprendizaje o cuando son requeridas para solucionar cualquier situación. De esta manera, los alumnos y alumnas, lo único que siempre tienen son esquemas previos de conocimiento cada vez más complejos, pero son previos porque siempre tienen oportunidad de aprender más sobre un tema en concreto. Nunca se consigue el total aprendizaje o toda la información.

Los aprendizajes se basan en reelaboraciones de esquemas previos de conocimientos, que cada vez son más complicados y con una red más rica de relaciones que se recuperan y usan para solucionar nuevas situaciones o realizar un nuevo aprendizaje. La memoria se ejercita y aumenta porque se comprende, si las informaciones no se comprenden rápidamente se desestiman.

Pensamos que la enseñanza-aprendizaje de los contenidos matemáticos ejercita la capacidad de memoria por muchas razones. Matemáticas es un área que posee una estructura interna rica, lógica y significativa, no se puede trabajar en matemáticas sin reestructurar esquemas previos. Los nuevos conocimientos se basan en los anteriores, se trabaja con ellos, se encuentran relaciones lógicas utilizando para ello estrategias de aprendizaje. Es una materia en la que sus elementos internos se rigen por un orden, así que un buen aprendizaje de matemáticas jamás se logra por repetición, ni mecánicamente, ya que los nuevos conocimientos se basan en los anteriores. Los conocimientos nuevos van a formar parte de la red de conocimientos que el niño poseía en su memoria, construida a partir de su experiencia. A la vez en matemáticas se avanza en espiral, es decir, los contenidos se vuelven a tomar desde diferentes perspectivas y con un índice creciente de dificultad.

La matemática desarrolla la memoria, porque busca estrategias que permitan interconexionar los contenidos nuevos con los ya obtenidos, porque es rica en relaciones y porque para memorizar hay que aprehender significados de las cosas de forma comprensiva.

Realmente comprender matemáticas es aprehender un significado e interrelacionarlo. Las matemáticas favorecen la formación de redes de conexiones para su comprensión, todo lo que se comprende se reelabora y aprende, formando parte de la persona y almacenándose en su memoria. Por ello, decimos que la matemática desarrolla la memoria, porque busca estrategias que permiten interconexionar los contenidos nuevos con los ya obtenidos, porque es rica en relaciones y porque para memorizar hay que aprehender significados de las cosas de forma comprensiva. A la vez, estamos convencidos que las relaciones ejercitadas desde el área de matemáticas se pueden extrapolar a otras áreas para favorecer los aprendizajes.

Desde los primeros años de la escolaridad el niño desarrolla su capacidad de memoria y las actividades matemáticas, bien de tipo manipulativo, verbal o a nivel simbólico le ayudan a conseguirlo.

Capacidad de formación de imágenes mentales

La formación de imágenes proporciona una forma especial de almacenamiento de la información que es diferente del significado verbal. Las imágenes representan la información, y los objetos imaginados pueden ser manipulados mentalmente en la misma forma que sus correspondientes objetos mentales (Kosslyn, 1986).

Según Gordon Bower (1972) las imágenes mentales parecen mejorar la memoria de dos formas. Primeramente, se puede almacenar no solamente la palabra, sino también la cosa a la que se refiere. El recuerdo de 1a memoria verbal y de las imágenes mentales son distintos, y esta diferencia puede ser utilizada para asegurar el recuerdo de alguno. En segundo lugar, las imágenes pueden combinarse en escenas y ser recordadas por ellas mismas, dando lugar a otra vía para mejorar la memoria. Cuando memorizamos escenas, no sólo almacenamos ideas y objetos sino también las relaciones que se establecen entre ellos.

El segundo uso de las imágenes mentales investigado por los científicos, entre ellos

Richardson (1969), implica la utilización de las imágenes mentales como sustituto de la práctica real en la realización de alguna actividad. Las imágenes pueden actuar como sustitutos de objetos reales.

No tenemos conocimiento de investigaciones sobre la formación de imágenes mentales en niños pequeños. Nuestra intervención y observación de las aulas nos informa que los niños pequeños forman imágenes mentales y trabajan con ellas. La imaginación creadora es el modo natural de funcionar de la mente infantil cuyos contenidos se perciben fundamentalmente mediante imágenes o pensamiento visual.

El proceso matemático fomenta la formación de imágenes mentales. Comienza el conocimiento matemático a través de manipulación de un material concreto y situaciones de la vida cotidiana, sobre los que se actúa y reflexiona, pero paulatinamente este material se retira y el niño tiene que trabajar manipulando imágenes mentales que, una vez hechas familiares y asimiladas por el alumnado, son tan concretas como el material sobre el que se ha actuado.

Comienza el conocimiento matemático a través de manipulación de un material... (que paulatinamente) ... se retira y el niño tiene que trabajar manipulando imágenes mentales.

El pensamiento divergente

Muchos autores (Bartlett, 1958; Bruner, 1962; Guilford, 1983; De Bono, 1968) han distinguido dos tipos de pensamiento, uno que caracterizan como analítico, deductivo, riguroso, formal, crítico y *convergente,* y el otro como sintético, inductivo, expansivo, libre, informal, creativo y *divergente.* Hemos de tener en cuenta estos dos tipos de pensamiento.

Para Guiford (1983) el pensamiento divergente, viene a significar mirar desde distintas perspectivas, buscar siempre más de una respuesta, desarticular esquemas rígidos, no apoyarse en suposiciones únicas y previas, ensayar, establecer nuevas asociaciones, tantear para producir algo nuevo a fin de comprender mejor y sentirse autor y ligado a una obra común.

Para muchos, según Orton (1990), las matemáticas son una materia en la que se valoran más las destrezas del pensamiento convergente. De hecho, es posible que no haya prueba de que se necesiten en modo alguno las destrezas del pensamiento divergente. Estas personas piensan que en otras áreas es muy fácil producir preguntas que sean divergentes, es decir, que proporcionen la oportunidad para que surjan muchas variedades de respuestas aceptables. Cabría preguntarse, sin embargo, si ¿es la típica instrucción escolar en matemáticas la que genera los pensadores convergentes que hallamos, por ejemplo, al finalizar la educación primaria? o, por el contrario, ¿los niños se encuentran predispuestos hacia la convergencia y nuestro currículum en matemáticas influye poco para contrarrestar tal tendencia?

Pensamos que hasta ahora las matemáticas escolares han favorecido el desarrollo del pensamiento convergente. La matemática escolar se ha concebido como una materia perfectamente acabada, en la que todo poseía una solución, y cuando se han planteado situaciones con más de una, aparecían problemas de tipo didáctico. Los procesos que hay que seguir para encontrar la solución de un problema pueden ser varios, y muy diferentes. En la instrucción matemática recibida generalmente por los actuales profesores, estos se vieron obligados a realizar el camino efectuado por su profesor al resolver cualquier situación, pues en caso contrario, lo tenían mal. Hoy debemos evitar, para nuestros alumnos, este modelo de instrucción.

Apreciamos que la matemática favorece la aparición de productos creativos, porque puede fomentar tanto el pensamiento convergente como el divergente y de hecho uno de los objetivos de las matemáticas es desarrollar los dos. Ejemplos de actividades realizadas con alumnos y alumnas de primer ciclo de primaria y que reflejan el uso de los dos, son las siguientes:

La matemática favorece la aparición de productos creativos.

Pensamiento convergente

a) *2 - 4 - 6 - 8 - ...*

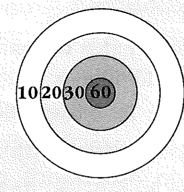
¿Qué número viene a continuación?

b) *3 - 20 - 35 - 8*

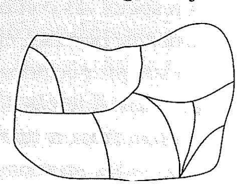
Ordena estos números de menor a mayor.

Pensamiento divergente

a) *Lanza el dardo tres veces de forma que sume 70.*



b) *Colorea las regiones utilizando cuatro colores de forma que no coincidan dos regiones juntas del mismo color.*



Estos ejemplos de enseñanza matemática, unidos a un nuevo estilo de organización del aula y de interacción con el alumnado, se contraponen a un aprendizaje consistente casi con exclusividad en asimilación de informaciones. Un nuevo desarrollo educativo exige una actividad de exploración y descubrimiento del alumnado, para la que constituye un elemento esencial la creatividad, ese modo de proceder sin cánones, ni fórmulas rígidas preestablecidas.

Hemos dicho anteriormente que las actividades matemáticas propuestas mejoran el pensamiento divergente. Si mejora este pensamiento y este lleva asociado actitudes críticas y transformadoras, también colabora en fomentar estas actitudes. Los niños que siguen actividades creativas en su quehacer escolar de forma integrada mejoran su rendimiento escolar, sus experiencias intelectuales y hasta sus relaciones afectivas. Vemos pues, la importancia de la matemática como materia del currículum.

Al analizar los principios en los que según J. A. Smith (1966, 1974) deben fundamentarse y orientarse la enseñanza creativa, encontramos un paralelismo total con los principios en los que deben fundamentarse la enseñanza de las matemáticas.

- La creatividad se desarrolla centrándose en aquellos procesos de la mente que caen bajo el área general de *pensamiento divergente*.
- En la enseñanza creativa se utilizan situaciones con final abierto.
- La enseñanza creativa significa que los alumnos son animados a generar y desarrollar sus propias ideas, a pensar por sí mismos, lo que se logra favoreciendo los procedimientos matemáticos y desarrollando actitudes de autoestima.
- En la enseñanza creativa el proceso es tanto o más importante que el producto logrado.
- En la enseñanza creativa se provee para aprender muchos conocimientos y habilidades pero se hacen previsiones también para aplicar estos conocimientos/habilidades en nuevas situaciones de solución de problemas.
- En la enseñanza creativa se manipulan y exploran las ideas y los objetos.

Nuestro planteamiento del área de matemáticas en el primer ciclo de primaria lo hemos alimentado con estos principios; por lo tanto, las matemáticas se manifiestan como un terreno abonado para fomentar la creatividad en el niño. En el trabajo matemático consideramos más importante el proceso seguido que la solución final. Se invita a los niños y niñas a presentar sus respuestas, a discutirlas con el grupo, a respetar las contestaciones de los demás, aunque sean erróneas; por eso, en los debates, el niño genera y desarrolla sus propias ideas confrontándolas con las de sus compañeros. Además, los niños adquieren más seguridad y confianza para resolver los problemas y las dificultades que se les presentan.

(Niños de edades tempranas) pueden razonar correctamente si se tiene cuidado en asegurarse de que se acuerdan de la información que se les proporciona, de que no se les induce a error a través de preguntas confusas y de que se les presenta problemas sobre objetos familiares en relaciones también familiares.

El razonamiento

El término razonamiento se ha utilizado en los contextos más heterogéneos. Al hablar de razonamiento expresamos dos tipos de razonamiento: *deductivo e inductivo*. El *razonamiento deductivo* incluye una inferencia lógica. El razonamiento deductivo consiste en extraer una conclusión de las premisas existentes (Nickerson, Perkins y Smith, 1987). Una deducción es un proceso sistemático de pensamiento que conduce de un grupo de proposiciones a otro, y que se supone que está basado en los principios de la lógica (Johnson-Laird, 1986).

El dominio total del razonamiento deductivo depende, en la obra de Piaget, del dominio de las operaciones formales. Niños de edades bastante más tempranas que las exigidas por la teoría pueden razonar correctamente si se tiene cuidado en asegurarse de que se acuerdan de la información que se les proporciona (Bryant y Trabasso, 1971), de que no se les induce a error a través de preguntas confusas (Donaldson, 1978) y de que se les presenta problemas sobre objetos familiares en relaciones también familiares.

Veamos a continuación un problema, de los muchos planteados y resueltos por los niños de primer ciclo (segundo curso) de Educación Primaria. Creemos que es un claro ejemplo de razonamiento deductivo.

Problema: Alicia, Rocio, Antonio y Pepe han realizado una carrera.

Se sabe: Que Alicia ha llegado la última. Antonio ha llegado antes que Rocio y después que Pepe.

Completa la tabla indicando el orden de llegada de cada uno de los niños.

1.°	2.°	3.°	4.°

Apreciamos que el área de matemáticas ayuda a utilizar y a desarrollar el razonamiento deductivo desde edades tempranas. Aunque la respuesta para las personas adultas es obvia, los procesos por los que se llega a ella son sorprendentemente complejos. En primer lugar, es necesario entender el problema y captar las condiciones iniciales y el objetivo. En segundo lugar, es necesario diseñar un plan. En tercer lugar, es preciso efectuar el plan sin cometer error. En cuarto lugar, hay que comprobar la respuesta y considerar tal vez si hay alguna otra forma de proceder. Las inferencias deductivas en la vida cotidiana raras veces necesitan una estrategia complicada.

La matemática no sólo influye en el desarrollo del razonamiento deductivo, sino que también influye positiva y dimensionalmente en el razonamiento inductivo.

La *inducción* es una capacidad cognitiva general. Se define como el desarrollo de reglas, ideas o conceptos generales a partir de grupos específicos de ejemplos (Pellegrino, 1986; Nickerson, Perkins y Smith, 1987). Siempre que a partir de diferentes observaciones del mundo en el que vivimos, se hace una generalización, hemos hecho una inducción. Por lo tanto, gran parte del aprendizaje es inducción.

Todas las tareas de razonamiento inductivo (Pellegrino, 1986) tienen la misma propiedad básica. Se presenta un grupo de estímulos al niño, y su tarea consiste en inferir el modelo o regla, de forma que pueda generar o seleccionar una continuación apropiada del modelo. Este procedimiento general de pruebas se observa en una amplia gama de tareas diferentes: clasificaciones, series, etc.

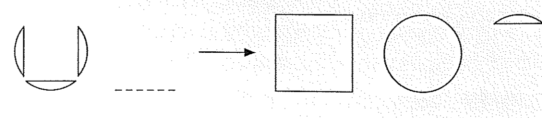
La matemática no sólo influye en el desarrollo del razonamiento deductivo, sino que también influye positiva y dimensionalmente en el razonamiento inductivo.

Los problemas, según Pellegrino (1986), que además de medir, desarrollan la capacidad de razonamiento inductivo y que desde los primeros momentos de la escolaridad obligatoria, nosotros pensamos, deben aparecer en los programas de matemáticas son los siguientes:

A) Clasificaciones.- Consiste en descubrir la relación entre los términos iniciales y a continuación seleccionar la alternativa coherente con la regla inferida.

Consideremos el siguiente ejemplo trabajado con el alumnado de primer ciclo de Educación Primaria.

De las figuras que hay a tu derecha, elige la que debes poner en los puntos suspensivos.



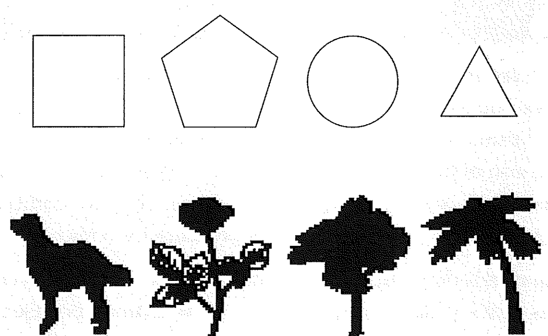
En los problemas de clasificación, el proceso de inferencia busca una relación común entre 3 o 4 términos, como puede ser: perro, vaca, caballo, gato. La relación consiste normalmente en una categoría de nivel superior que abarca a todos los términos o alguna propiedad común.

Por ejemplo:

Fíjate en la siguiente tabla.

a) En el ejemplo de las figuras colorea la que es diferente.

b) En el segundo ejemplo, señala lo que creas que es diferente.



Normalmente el niño que llega al primer ciclo de Educación Primaria está acostumbrado, informalmente, a realizar clasificaciones sencillas. Separar semillas mezcladas, colocando en diferentes tarros las semillas iguales; hacer collares con bolas sólo redondas, otros con cuadrados; con los juegos de colores, guardar cada objeto en su estuche atendiendo al color. Además de hacer estas clasificaciones pasa a realizar otras más estructuradas, por ejemplo utilizando los bloques lógicos de Dienes, clasificando de acuerdo a los criterios: forma, color, tamaño y grosor. Pudiendo clasificar (ya en el primer ciclo de primaria) atendiendo a un criterio, a dos a la vez, a tres criterios a la vez e incluso a cuatro. Así mismo, también pueden inferir la propiedad característica después de observar una clasificación.

B) Series.- Consiste en descubrir la estructura periódica y relacional existente en cadenas de números, letras y figuras, secuencias de notas musicales y modelos coloreados, procesos y secuenciación en las series incompletas.

Con series incompletas de números, ritmos, figuras, etc., se trabaja desde la llegada del niño a la escuela. Cuando empieza a familiarizarse con el número comienza a hacer diversidad de series numéricas. Series ascendentes y descendentes, con operaciones de suma, resta y multiplicación.

Por ejemplo:

Continúa las siguientes series escribiendo cinco números más en cada una de ellas:

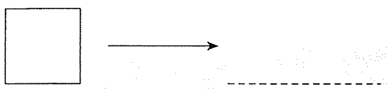
a) 4 - 6 - 8 - ...

b) 20- 19 - 18 - ...

c) 3 - 7 - 12 - 18 ...

Podemos realizar series con figuras en las que se aprecie una estructura periódica clara. También podemos permitir al niño que cree su serie. Por ejemplo, continúa la siguiente serie:

d)

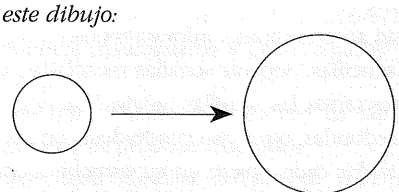


En la puesta en común se observará y estudiará cuál es la solución a la serie de cada uno de los niños, se debatirá y se verá que todas son series aunque sigan ritmos distintos.

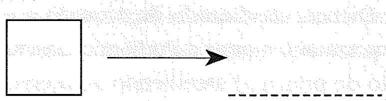
C) Las analogías.- Requieren que los niños elijan la alternativa que esté relacionada con el tercer término del tema, en la misma forma en que el segundo término está relacionado con el primero. Según Pellegrino (1986) las analogías se presentan en un formato de elección forzosa como una introducción de tres términos representados como A:B::C:D.

En el aula de primer ciclo de primaria no se utiliza tanto como las series y clasificaciones, pero, sí las usamos por ejemplo para discriminar formas, tamaños, el número de objetos, etc.

Por ejemplo:
Fíjate en este dibujo:



completa el segundo, estableciendo la misma relación que en el primero.



La capacidad matemática

Una de las capacidades humanas que, sin lugar a dudas, desde el primer momento en que el niño se pone en contacto con las matemáticas, ya sea de manera formal o informal, favorece esta materia, es la capacidad matemática.

Ahora bien, ¿a qué llamamos capacidad matemática? Compartimos la definición de Mayer (1986) que determina la *capacidad matemática* como todo el conjunto de operaciones cognitivas, habilidades y conocimientos que son componentes de las tareas matemáticas.

Algunos alumnos revelan claramente más aptitud que otros por las matemáticas, de modo que la cuestión de la capacidad matemática es esencial para una consideración de las diferencias individuales.

Algunos alumnos revelan claramente más aptitud que otros por las matemáticas, de modo que la cuestión de la capacidad matemática es esencial para una consideración de las diferencias individuales. Lo importante es determinar si se puede desarrollar esta capacidad y nosotros estimamos que puede ser desarrollada con una adecuada metodología matemática.

Krutetskii (1976) elaboró un extenso estudio sobre la capacidad matemática de los alumnos, basado esencialmente en la observación y las conversaciones mantenidas con estos. Define la capacidad matemática como las características psicológicas individuales, que responden a las exigencias de la actividad matemática escolar y que influye en el éxito del dominio creativo de las matemáticas como materia escolar, sobre todo en un dominio relativamente rápido y profundo del conocimiento, las destrezas y los hábitos en matemáticas.

Krutetskii (citado por Orton, 1990) concibió así algunos componentes de la capacidad matemática:

1. Capacidad para extraer la estructura formal del contenido de un problema matemático y para operar con ella.
2. Capacidad para generalizar a partir de resultados matemáticos.
3. Capacidad para operar con símbolos, incluyendo los números.
4. Capacidad para conceptos espaciales, exigidos en ciertas ramas de las matemáticas.
5. Capacidad de razonamiento lógico.
6. Buena memoria para el conocimiento y las ideas matemáticas.

Krutetskii (citado por Orton) también señaló que hay diferentes tipos de capacidad matemática. Algunos alumnos poseen una mente «analítica» y prefieren pensar en términos verbales y lógicos. Otros tienen una mente «geométrica» y gustan de un enfoque visual o gráfico. Y existen otros alumnos que poseen una mente «armónica» y que son capaces de combinar características de la mente analítica y de la geométrica, aunque muy probablemente revelarán una cierta inclinación por el enfoque analítico o por el geométrico.

La capacidad matemática puede adoptar muchas formas, derivada cada una de ellas, de una diferente mezcla de otras aptitudes. Entre estas figuran la habilidad numérica, la espacial, el razonamiento verbal y no verbal, las destrezas del pensamiento convergente y del divergente, etc.

Creemos que no se necesitan grandes pruebas para demostrar que una habilidosa y adecuada organización de la matemática fomenta esta capacidad en el niño, desde el primer momento que se pone en contacto con la institución escolar. Aunque la escuela no posee la exclusiva, ya que la matemática de tipo informal, que este aprende, favorece también el desarrollo de esta capacidad.

La capacidad espacial

Es otra de las capacidades humanas que puede ser desarrollada por la matemática. Aunque, por supuesto, la capacidad espacial no está ligada únicamente a las matemáticas.

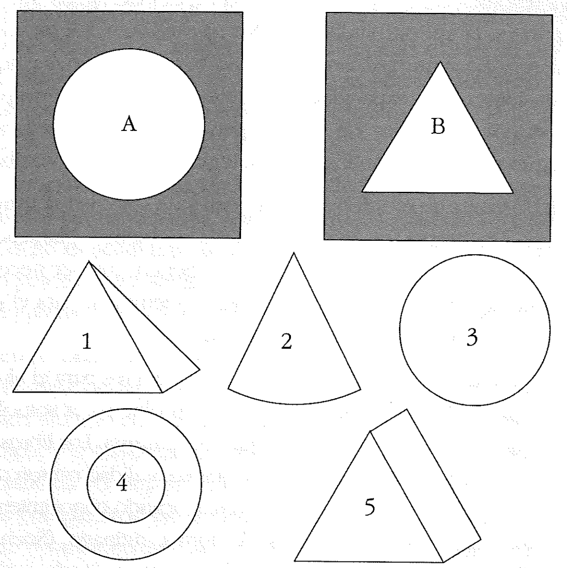
Los estudios realizados por Smith (1964) nos informan sobre la capacidad espacial, considerándola un componente de la destreza matemática. Bruner (1973) apuntaba que la enseñanza podía desarrollar la capacidad espacial, y ello lo expresaba diciendo, «no creo que hayamos comenzado a rozar la superficie del adiestramiento en visualización». Bishop (1973) estudió el valor que tenían los materiales manipulativos en la enseñanza, hallando diferencia de rendimiento en los test de capacidad espacial entre el alumnado que utilizaba en el aula material manipulativo y el que no lo utilizaba. Polya (1957) proponía, como una de las etapas del proceso de resolución de problemas, realizar un dibujo que ayude al alumno, a través de una representación en el espacio, a encontrar la solución.

El aprendizaje de las matemáticas estamos convencidos que favorece la capacidad espacial, ya que relaciona al alumno con imágenes, dibujos, gráficos y representaciones visuales muy diversas. Un problema específico matemático, utilizado en el aula, es la *representación bidimensional de objetos tridimensionales,* otro es la construcción de un objeto espacial a partir de un desarrollo en el plano (*recortables*). Son actividades de tipo espacial que, a la vez, tratan de fomentar el desarrollo de esta capacidad, las nociones topológicas fundamentales: delante-detrás, arriba-abajo..., y otras más complejas para el niño como izquierda-derecha, siempre en relación con su cuerpo y considerando que son conceptos relativos, dependiendo de la posición. Son importantes también las actividades realizadas con material de construcción, encajables, juegos, etc.

El aprendizaje de las matemáticas estamos convencidos que favorece la capacidad espacial, ya que relaciona al alumno con imágenes, dibujos, gráficos y representaciones visuales muy diversas.

Ejemplo 1

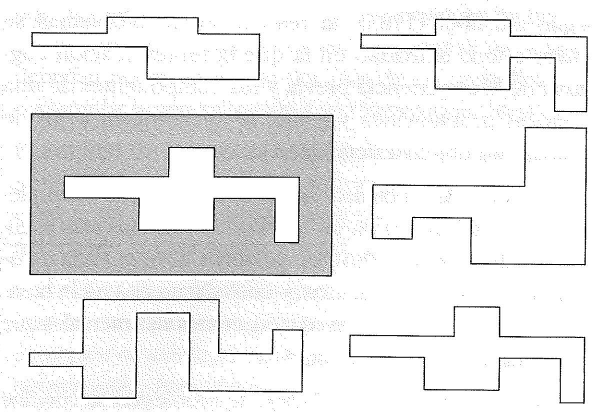
Observa los trozos A, B y los 5 objetos dibujados.



¿Cuáles son los objetos dibujados (1,2,3,4,5) que podrían pasar a través de A? ¿Cuáles de esos objetos pueden pasar a través de B?

Ejemplo 2

Observa el hueco dejado en un tablero después de extraer una figura. Entre las figuras que rodean al tablero, identifica la que encaje y coloréala.



Los ejemplos anteriores son ejercicios espaciales realizados en el papel, después de haber trabajado previamente con materiales concretos manipulables. El último ha sido realizado en el taller de matemáticas de segundo nivel.

La capacidad espacial también la intentamos desarrollar en el primer ciclo de primaria, por medio de otra actividad realizada en la clase de matemáticas. Consiste en localizar las casas de los amigos, tiendas, etc., sobre planos sencillos y familiares para los alumnos. Por supuesto, esto llegan a hacerlo después de haber trabajado elaborando sobre el terreno pequeños itinerarios, una vez que han imaginado su calle, las plazas, etc., de su ambiente familiar.

Resolución de problemas

La resolución de problemas es una capacidad ligada íntimamente a la aptitud intelectual. No hay teóricos cognitivos o matemáticos que hablen de resolución de problemas y no la consideren una capacidad compleja del individuo que proporciona un índice de lo inteligente que puede ser éste, según tenga más facilidad o estrategias para solucionarlos.

Hablaremos de problemas en general y no sólo de los aritméticos. De hecho, en matemáticas los problemas planteados desde el principio a los alumnos no tienen que ser necesariamente aritméticos. Hay infinidad de ejemplos, para el primer ciclo de primaria, que no lo son.

Un problema matemático es una tarea de interés para el alumno, que le lleva a implicarse de lleno en obtener la solución. Cualquier tarea no es un problema por sí misma. Los libros de texto presentan muchos ejercicios, que en realidad no son problemas pues la mayoría se resuelven aplicando conocimientos o procedimientos aprendidos de forma rutinaria (Soriano, 1993). A la derecha podemos ver algunos ejemplos de problemas planteados en el primer ciclo de Educación Primaria.

Para Chi y Glaser (1986), un problema es una situación en la que se intenta alcanzar un objetivo y es necesario encontrar un medio para alcanzarlo. Todos los problemas poseen aspectos comunes, todos tienen un *estado inicial* y tienden a lograr algún *objetivo*. Para resolverlo es preciso realizar algunas operaciones sobre el estado inicial para poder lograr el objetivo.

Según Ausubel (1983), la resolución de problemas se refiere a toda actividad en la que la representación cognitiva de la experiencia previa y los componentes de una situación problemática vigente, se reorganizan a fin de alcanzar un objetivo determinado.

La resolución de problemas es una aptitud cognitiva compleja que caracteriza una de las actividades humanas más inteligentes (Chi y Glaser, 1986). Las personas difieren en la capacidad para resolver problemas, y estas diferencias están basadas en los procesos cognitivos y organizaciones mentales que las personas tienen en común.

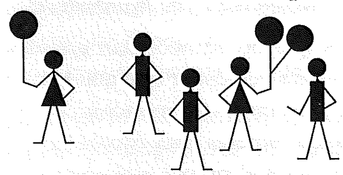
Según Orton (1990) la resolución de problemas se concibe ahora normalmente como generadora de un proceso a través del cual, quien aprende, combina elementos del conocimiento, reglas, técnicas, destrezas y conceptos previamente adquiridos para dar una solución a una situación nueva.

No hay teóricos cognitivos o matemáticos que hablen de resolución de problemas y no la consideren una capacidad compleja del individuo que proporciona un índice de lo inteligente que puede ser éste.

Ejemplo 3

Tenemos cinco amigos, Antonio, Alicia, Rocío, Pepe y Pablo. Se sabe que:

Rocio tiene más globos que Alicia
Pablo es el último
Alicia está delante de Pepe

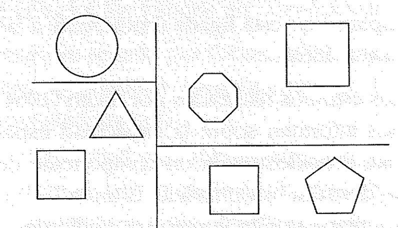


Observa el dibujo en el que aparecen y completa la tabla indicando en cada casilla el nombre del niño al que corresponde.

1.°	2.°	3.°	4.°	5.°

Ejemplo 4

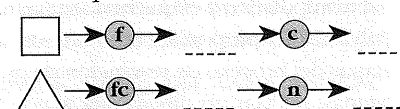
Observa las siguientes figuras geométricas. Colorea las situadas debajo y a la izquierda.



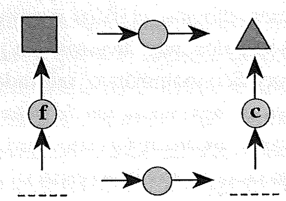
Ejemplo 5

Transforma las figuras con las máquinas que cambian la forma, el color, forma y color o nada. Sabiendo que (f) transforma la forma, (c) el color, (fc) forma y color y (n) nada.

a) Colorea del color que quieras las primeras figuras y sigue las instrucciones de las máquinas.



b) Colorea el cuadrado del color que quieras. Identifica las máquinas que actúan en cada ocasión y completa las figuras que faltan.



Las tendencias actuales en la enseñanza de la resolución de problemas y su aplicación a las matemáticas son: la enseñaza de estrategias de tipo general que puedan ser aplicadas a multitud de problemas; la enseñanza de técnicas heurísticas y la enseñanza estratégica.

Respecto a la enseñanza de estrategias de tipo general, tenemos las cuatro fases de Polya (1957). Éste propone un modelo prescriptivo de solución de problemas dividido en cuatro fases. El que se expone a continuación es una adaptación.

1. *Comprender el problema*

1.1 Cerciorarse de que conoce la incógnita, los datos y las condiciones que relacionan a esos datos.

1.2 Cerciorarse de que conoce la índole del estado final, del estado inicial y de las operaciones.

1.3 Trazar un gráfico (una representación visual de un problema puede evidenciar la existencia de determinadas relaciones entre las diferentes partes).

2. *Idear un plan*

Consiste en traer a la mente otros problemas afines que uno sabe ya resolver.

2.1 Recordar un problema conocido análogo al que tienen delante.

2.2 Pensar en un problema conocido que tenga el mismo tipo de incógnita y que sea más sencillo.

2.3 Si no puede resolverse, intentar transformarlo en otro del que la solución se conozca.

2.4. Simplificar el problema fijándose en casos especiales.

2.5. Sustituir la variable entera por valores específicos.

2.6 Descomponer el problema en partes.

3. *Ejecutar un plan*

Es un estadio deductivo. Se ha de verificar cada paso.

4. *Verificar los resultados*

4.1 Tratar de resolver el problema de un modo diferente.

4.2 Verificar la solución.

Hay métodos, principios y reglas prácticas que funcionan bien en muchos casos. Esos enfoques, que no ofrecen garantías de dar resultado, pero que lo dan con frecuencia se denominan heurísticos. Un *heurístico* constituye sólo un procedimiento que ofrece una probabilidad razonable de solución (Nickerson, 1987). *La enseñanza de tipo heurístico está orientada a desarrollar estrategias específicas para problemas concretos.* Schoenfeld (1979) considera cinco estrategias: a) dibuja un diagrama o representación del problemas; b) considera el parámetro integrador del problema y busca un argumento de tipo inductivo; c) considera un contraargumento; d) piensa en un problema similar pero con menos variables y e) trata de establecer subobjetivos.

Un heurístico importante es el *análisis de los medios y los fines*. Consiste en averiguar las diferencias existentes entre el estado real y el estado final, y a continuación encontrar las operaciones que las reducirán. Estas estrategias nosotros no las hemos apreciado en los niños entre 6 y 8 años.

La *enseñanza estratégica,* o desarrollo de procesos de pensamiento en matemáticas, considera que la solución de problemas no es solamente una habilidad algorítmica, es más bien un proceso consistente en aplicar los conceptos y habilidades adquiridas a situaciones nuevas (Tsuruda y Lash, 1985).

Hemos observado que los niños de 6 a 8 años, poseen la estrategia de representar el problema que quieren resolver. Cada alumno ensaya un camino, que le parece el acertado y único, y a través de las puestas en común, comprenden la posibilidad de seguir otros, aceptando el proceso seguido por sus compañeros. No tienen aún la capacidad de volver atrás uno o varios niveles, aunque sí una capacidad bastante desarrollada y compleja, que les permite enfrentarse a situaciones más complicadas que las que esperaríamos que resolvieran. Puede resultar de utilidad generar un grupo de posibles soluciones, a partir de un problema determinado, y luego comprobar cada una de ellas para ver si es la solución correcta.

Las investigaciones sobre la instrucción estratégica coinciden en que los problemas, antes de ser propuestos a los niños, han de estar formulados claramente para poder ser entendidos; no deben incluir conceptos matemáticos nuevos; ser intrínsecamente motivadores e intelectualmente estimulantes; deberían poder resolverse por más de un procedimiento y contemplar la generalización a una variedad de situaciones.

El empleo de la resolución de problemas como un componente fundamental del currículum de matemáticas implica un cambio radical del enfoque docente tradicional, desde la exposición a la práctica de destrezas.

Con el área de matemáticas pretendemos enseñar a generar y usar los conceptos junto con los contenidos y habilidades. Los conceptos se trabajan a través de habilidades y estrategias de razonamiento. Aprender matemáticas no es sólo adquirir conceptos sino, además, aprender a pensar (Kaplan, 1989). Para ello hay que partir de los conocimientos previos del alumno y favorecer la construcción del conocimiento, reestructurando los conocimientos según las exigencias curriculares y considerando todo el aprendizaje matemático informal exterior al contexto escolar.

El empleo de la resolución de problemas como un componente fundamental del currículum de matemáticas implica un cambio radical del enfoque docente tradicional, desde la exposición a la práctica de destrezas.

Bibliografía

ANDERSON, R. C. (1977): «The notion of schemata and the educational enterprise: general discussion of the conference», en R .C. ANDERSON y otros (comps), *Schooling and the acquisition of knowledge,* L. Erlbaum, Hillsdale, N. J.

AUSUBEL, D. y E. V. SULLIVAN (1983*a*): *El desarrollo infantil: Teorías. Los comienzos del desarrollo,* Paidós, Barcelona.

AUSUBEL, D. y E. V. SULLIVAN (1983*b*). *El desarrollo infantil: aspectos lingüísticos cognitivos y físicos,* Paidós, Barcelona.

BELTRÁN, J. y otros (1987): *Psicología de la Educación,* EUDEMA, Madrid.

BISHOP, A. J. (1973): «The use of structural apparatus and spatial ability- a possible relationship», *Research in Education,* 9, 43-49.

BOWER, G. H. (1972): «Mental imagery and associative learning», en L. GREGG (Ed.), *Cognition in learning and memory,* Wiley, New York.

BRUNER, J. S. (1961): *The Process of Education,* University Press, Harvard.

BRUNER, J. S. (1966): *Toward a theory of instruction,* University Press, Harvard. (Tr. 1972)

BRUNER, J. S. (1973): *Beyond the information given,* Allen & Unwin, Londres.

BRYANT, P. E y T. R. TRABASSO (1971): «Transitive inferences and memory in young children», *Nature,* 232, 456-458.

COLL, C. (1990): *Aprendizaje escolar y construcción del conocimiento,* Paidós Educador, Barcelona.

CHAMORRO, C. (1991): *El aprendizaje significativo en el área de matemáticas,* Alhambra Longman, Madrid.

CHI, M. T. H. y R. GLASER (1986): «Capacidad de resolución de problemas», en R. J. STERNBERG, *Las Capacidades Humanas. Un enfoque desde el procesamiento de la información,* Labor Universitaria, Barcelona.

DE PRADO, D. (1988): *Técnicas creativas y lenguaje total,* Narcea, Madrid.

DEWEY, J. (1933): *Cómo pensamos. Nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo,* Paidós, Barcelona. (Tr. 1989)

GAGNE, R. M. (1987): *Las condiciones del aprendizaje,* Interamérica, México.

GUIFORD, J. P. y otros (1983): *Creatividad y Educación,* Paidós, Barcelona.

HEIMLICH, J. Y S. PITTELMAN (1990): *Los mapas semánticos. Estrategias de aplicación en el aula,* Aprendizaje Visor/MEC, Madrid.

HERNÁNDEZ PINA, F. (1993): «El mapa conceptual como modelo de organización gráfica», *Bordón.*

HOLMES, E. (1985): *Children Learning Mathematics. A Cognitive approach to teaching,* Prentice-Hall, New Jersey.

I.C.M.I. (1986): *Las matemáticas en primaria y secundaria en la década de los 90,* Mestral, Valencia.

JOHNSON-LAIRD, P. N. (1986): «Capacidad de razonamiento deductivo», en R.J. STERNBERG, *Las Capacidades Humanas. Un enfoque desde el procesamiento e la información,* Labor Universitaria, Barcelona.

KAPLAN, R. G., T. YAMOTO y H. P. GINSBURG (1989): «Theaching mathematics concepts». en RESNICK y KOPFER, *Towar the thinking curriculum: current cognitive research,* Yearbook of the Association for Supervision and Curriculum Development.

KOSSLYN S. (1986): «Capacidad para formar imágenes mentales», en R. J. Sternberg, *Las Capacidades Humanas. Un enfoque desde el procesamiento de la información,* Labor Universitaria, Barcelona.

KRUTETSKII, V. A. (1976): *The psychology of mathematical abilities in school children,* University of Chicago Press, Chicago.

MAYER, R.E. (1986): «Capacidad matemática», en R.J. STERNBERG, *Las Capacidades Humanas. Un enfoque desde el procesamiento de la información,* Labor Universitaria, Barcelona.

NICKERSON, R. S. y otros (1985): *Enseñar a Pensar,* Paidós, Barcelona. (Tr. 1987).

NORMAN, D. A (1985): *Aprendizaje y memoria,* Alianza Universidad, Madrid.

NOVAK, J. D. y D. GOWIN (1988): *Aprendiendo a aprender,* Martínez Roca, Barcelona.

ORTON, A. (1990): *Didáctica de las matemáticas,* Morata y MEC, Madrid.

PELLEGRINO, J. W. (1986): «Capacidad de razonamiento inductivo», en R. J. STERNBERG, *Las Capacidades Humanas. Un enfoque desde el procesamiento de la información,* Labor Universitaria, Barcelona.

POLYA, G. (1957): *How to solve it* (2ned.) , Princeton University Press, Princeton, NJ.

RICHARDON, A. (1969): *Mental Imagery,* Springer, New York.

SMITH, J. A. (1966): *Setting conditions for creative teaching in the elementary school,* Allyn and Bacon, Boston.

SMITH, J. A. (1974): *Creative teaching of the lenguage arts in elementary school,* Allyn and Bacon, Boston.

SCHOENFELD, A. H. (1979): «Can heuristics be taught?» en J. LOCHHEAD y J. CLEMENT (Eds.), *Cognitive process instruction,* The Franklin Institute Press, Philadelphia, PA.

SORIANO, E. (1993): *Estrategias de aprendizaje, edad de adquisición y secuenciación de los conceptos matemáticos en los ninos de 6 a 8 años,* Tesis doctoral, Universidad de Murcia.

TSURUDA, G. y A. A. LASH (1985): *Ideas on teaching problem solving in intermediate mathematics,* Far West Laboratory.

VYGOTSKI, L. S. (1978): *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores,* Grijalbo, Barcelona.

WITTROCK, M. C. (1979): «The cognitive movement in instruction», *Educational Researcher,* 8, 5-10.

Encarnación Soriano
Universidad de Almería

SUMA 23
noviembre 1996, pp. 21-32

Estrategias utilizadas por los alumnos de secundaria en la resolución de juegos

Fernando Corbalán Yuste

ARTÍCULOS

Este artículo describe el inicio de una investigación que trata de contestar a dos grandes preguntas: ¿por qué utilizar juegos? y ¿para qué utilizar juegos?, por medio de investigaciones con alumnos para avanzar en el conocimiento de las relaciones entre juegos y resolución de problemas. Para ello, en pequeños grupos de alumnos de 13-14 años se estudia la utilización de determinadas estrategias para contrastarlas con el trabajo de los espertos y tratar de las maneras de instruir esas estrategias. Se utilizan seis juegos y se hace un análisis de los mismos a partir de la información que proporcionan los alumnos en varios aspectos, lo que permite hacer un diagnóstico de los mismos para su utilización en clase de matemáticas.

Este artículo no surge de la nada, sino que tiene detrás un largo proceso de dedicación personal, que podría empezar en la adolescencia o en la juventud, en el momento de la elección de una carrera universitaria. ¿Por qué se elige Matemáticas? Seguro que no es ni por la gloria ni por el dinero, sino más bien por un gusto y una habilidad en la resolución de problemas y un disfrute particular con los entretenimientos matemáticos.

Pero sin irse tan lejos, porque se puede perder la perspectiva (y por otra parte relatar una etapa muy parecida para buena parte de los lectores), nos podemos detener en el trabajo como Asesor de Matemáticas del CEP n.° 1 de Zaragoza, los cursos 1986/87 hasta el 1991/92 en que desarrollamos un trabajo de diseño, experimentación y mejora de juegos matemáticos de diversos tipos, una investigación cuantitativa sobre los mismos, así como cursos y talleres para profesores o alumnos a lo largo de todo el Estado.

De entre las posibles clasificaciones de los juegos, hay una que nos interesa especialmente, según el objeto del juego: por una parte los *juegos de conocimientos*, que son aquellos que hacen referencia a uno o varios de los tópicos habituales de los programas de matemáticas; en segundo lugar, los *juegos de estrategia*, en los que se trataría de poner en marcha uno o varios procedimientos propios de la resolución de problemas o los modos habituales de pensamiento matemático.

Vamos a referirnos en lo sucesivo a los juegos de estrategia, que son el objeto de nuestro artículo. Su utilidad dentro de la formación matemática es potencialmente muy grande, puesto que se trata de iniciar o desarrollar, a partir de la realización de ejemplos prácticos (no de la repetición de procedimientos hechos por otros) y atractivos, las destrezas específicas para la resolución de problemas y los modos típicos de pensar matemáticamente.

Trataremos de precisar un poco más lo que entendemos por juegos de estrategia. Hay que recordar, en primer lugar, que la palabra *estrategia* (tanto como táctica) proviene, desde los antiguos griegos, del vocabulario militar, desde donde ha penetrado el lenguaje matemático y económico. En el solvente *Diccionario de matemáticas* de Bouvier-George (1984) la entrada de la palabra estrategia, que podría pensarse que tiene que ver más con la resolución de problemas que con los juegos (porque así pasa en la literatura de Didáctica de las Matemáticas), nos lleva a su sentido en los juegos. Es la siguiente: «*Estrategia.- Estrategia de un jugador.*- Descripción completa de la manera en que se debería comportar el jugador ante cualquier circunstancia posible, en cada jugada. En un juego finito, si se conocen las estrategias de los jugadores, se puede saber el desarrollo y el resultado del juego» . Y habla también de «*Estrategia ganadora.*- En teoría de los juegos, se dice de una estrategia que lleva al jugador a un éxito hagan lo que hagan sus adversarios». Ese es el mismo sentido que da Guzman, (1992): «Todos esos juegos admiten una estrategia para uno de los jugadores, es decir, una forma de mover en cada situación tal que, cualquiera que sea el movimiento de su oponente, él es capaz de ganar».

Y también, para situar con más claridad estos juegos, «si de lo que se trata es de poner a punto procedimientos para ganar siempre o para no perder, estamos ante juegos de estrategia». (Corbalán-Deulofeu, 1996). Y podemos todavía acotar más el campo de estudio: «Dentro de la amplia gama de juegos de estrategia, podemos distinguir concretamente los juegos bipersonales de información completa, es decir, sin intervención del azar. [...] Todos estos juegos tienen unas características comunes: las partidas se desarrollan entre dos personas y es posible, por lo menos en teoría, determinar una estrategia ganadora para uno de los dos jugadores (o en algunos casos decidir que el juego acabará en tablas). Llamamos pequeños juegos de estrategia a aquellos cuyas condiciones (tablero, situación inicial, finalidad, reglas,...) hacen que las partidas sean, en general de corta duración». (Corbalán-Deulofeu, 1996). Se puede también consultar sobre estos juegos en Deulofeu (1995).

En el camino hacia una estrategia ganadora juegan un papel inportante las ideas que producen o proporcionan reflexiones apropiadas. En ese sentido distinguiremos las *ideas claves* y las *ideas favorecedoras.* Ideas claves son las que desencadenan una estrategia ganadora total o una estrategia parcial (que sirve para ganar en una determinada posición) para un juego. Ideas favorecedoras son las que facilitan el análisis del juego y permiten, a veces, desencadenar una estrategia. Todas las ideas claves son favorecedoras, pero no todas las ideas favorecedoras son claves. En nuestro trabajo nos interesamos en detectar todas las ideas favorecedoras y, dentro de ellas, las ideas clave.

Si hacemos una revisión de la bibliografía, en general los juegos aparecen más como uno de los instrumentos aplicables en clase de matemáticas, de los cuales se ha obtenido empíricamente su utilidad, o como generadores de problemas, que como un objeto de estudio en sí mismo. Y eso tanto en el caso de que sea alguna de las actividades propuestas como en publicaciones dedicadas exclusivamente a juegos matemáticos. El origen de todas las aproximaciones modernas está en la publicación en 1945 del famoso libro de Polya *Cómo plantear y resolver problemas* (*How to solve it*) (Polya, 1945), que fue el origen del movimiento de *resolución de problemas,* del cual podemos considerar una de las partes los juegos, sobre todo los de estrategia, como un tipo especial de *problemas* que pueden desencadenar la búsqueda de determinadas estrategias.

Querríamos destacar dos aspectos de interés para nuestro trabajo. Por una parte Harvey y Brigth (1988) apuntan que «faltan investigaciones sobre la efectividad de los juegos de estrategia». Y Williford (1992) relaciona los juegos de estrategia con los Estandares curriculares del NCTM y concluye, tras analizar algunos juegos, que los juegos prueban ser «vehículos atractivos para aumentar destrezas generales de razonamiento matemático».

...creemos que siguen pendientes las respuestas razonadas a dos grandes preguntas: ¿por qué utilizar juegos matemáticos? *y* ¿para qué utilizar juegos matemáticos?

Por nuestra parte, y después de la investigación cualitativa (Corbalán, 1991) sobre juegos con una participación amplia, y que muestra que los profesores tienen una visión muy positiva sobre la práctica sistemática de juegos en clase, creemos que siguen pendientes las respuestas razonadas a dos grandes preguntas: *¿por qué utilizar juegos matemáticos?* y *¿para qué utilizar juegos matemáticos?* Respuestas basadas en algo más que en apreciaciones subjetivas de un profesorado entusiasta que utiliza juegos matemáticos en sus clases. Por eso son necesarias investigaciones concretas con alumnos, para dar razones objetivas para contestar a las preguntas anteriores y avanzar en el conocimiento sobre las relaciónes entre los juegos y las estrategias de resolución de problemas. Una investigación en esa línea es la que presentamos en este artículo.

Objetivos del estudio

Nuestra investigación ha tenido un triple objetivo:

- Estudiar la *utilización* por parte de los alumnos de 2.° de ESO (13-14 años), de *determinadas estrategias* en unos juegos prefijados.
- *Contrastar las estrategias* con las que a priori el profesor (o los «expertos» en general) supone que son *rentables.*
- *Tratar de los mecanismos* que pueden dar lugar a una *instrucción* de los alumnos para que encuentren y apliquen mejores estrategias.

Nos enfrentamos, por tanto, a la tarea de responder en la medida de lo posible a la siguiente cuestión fundamental:

Utilizando juegos determinados se ponen en funcionamiento por parte de los alumnos algunas estrategias:

- ¿Cuáles son?
- ¿De qué manera intervienen?
- ¿Cuál es su nivel de eficacia?

Para aproximarse a una respuesta realista a una pregunta tan ambiciosa, se imponen algunas puntualizaciones y restricciones. En primer lugar habría que seleccionar los juegos para *evitar,* en lo posible, *la presencia de lo conceptual.* Puesto que se trata de «ver» el proceso de pensamiento, parece conveniente, en segundo lugar, utilizar *juegos que admitan algún tipo de registro escrito.* Y por fin, y aunque tal vez hubiera ventajas, para *evitar distorsiones* de los juegos por la presencia del ordenador, *no habrá modelización informática* de los juegos, sino que la presentación sería la habitual en los juegos de mesa, es decir, con un tablero y fichas.

Hemos elegido dos tipos de juegos: solitarios y de dos jugadores, y siempre de los que antes hemos llamado *pequeños juegos de estrategia.* Dentro de las muchas posibles estrategias de resolución de problemas que se pueden investigar por medio de juegos (y que pueden verse con detalle en Corbalán, (1994)), hemos elegido las tres que consideramos más importantes: *empezar por el final, utilización de la simetría* y *estudio sistemático de todos los casos.* Y también queríamos ver la incidencia de *encontrar notaciones adecuadas* en la búsqueda de las estrategias.

Elección de los juegos

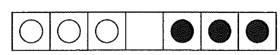
Para poder realizar un estudio de esas estrategias la primera labor era la elección de unos juegos adecuados. Basándonos en nuestra experiencia anterior y la búsqueda bibliográfica, seleccionamos los solitarios, *Sol y sombre, Estrella de oro* y *El párking,* y los juegos para dos jugadores, *Quitamanchas, Llegar el primero* y *Margarita.* Las reglas definitivas de los mismos, que fueron las presentadas a los alumnos tras un proceso de puesta a punto, aparecen como figuras a lo largo de este artículo. Ahora trataremos de las estrategias previstas en cada uno de ellos, así como daremos referencias de los mismos.

Sol y sombra: Es un juego muy conocido con diferentes nombres (*Las ranas, Sol y luna, Blanco y negro,...*). Hay dos posibles estrategias para abordar este juego:

i) Comenzar por un caso más sencillo (dos fichas de cada color o, incluso, una ficha de cada color, separadas en ambos casos por un espacio vacío).

SOL Y SOMBRA

Es un juego *solitario* (para un solo jugador)



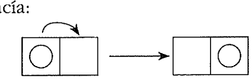
POSICIÓN INICIAL

El juego consiste en intercambiar la colocación de las fichas; las que estaban a la izquierda ponerlas a la derecha y viceversa. Hacerlo en el menor número de movimientos posible.

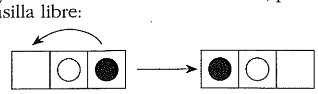
FORMA DE MOVER LAS FICHAS

1.- Las fichas colocadas inicialmente a la izquerda sólo se mueven hacia la derecha. Las de la derecha sólo hacia la izquerda.

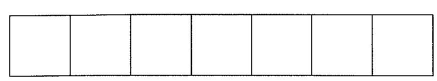
2.- Una ficha puede moverse a la casilla de su lado si está vacía:



3.- Si una ficha tiene a su lado una ficha de otro color y a continuación una casilla libre, puede saltar a la casilla libre:



Nunca puede haber en una casilla más de una ficha.
No es necesario mover alternativamente fichas de los dos colores

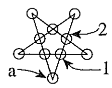


ESTRELLA DE ORO

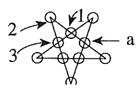
Es un juego *solitario* (para un solo jugador)
Se *coloca una ficha en cada uno de los diez vértices.* El juego consiste en *quitar nueve fichas* (es decir dejar sólo una) siguiendo las:

REGLAS

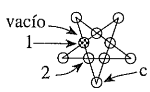
1.- Elegimos un vértice cualquiera que tenga ficha, se cuentan a partir de él dos vértices que formen con el inicial una línea recta y se quita la ficha que está en el último vértice que hemos contado. Por ejemplo, si elegimos el vértice *a*, se puede quitar la ficha que esté en el 2, porque los vértices 2, 1 y *a están en línea recta.*

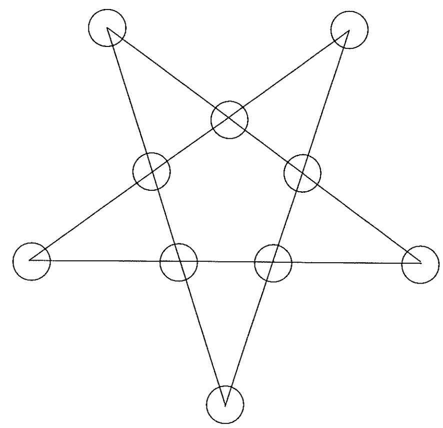


Si elegimos el vértice *b*, se puede quitar la ficha que esté en 2, porque los vértices 2, 1 y *b están en línea recta*. Pero no se puede quitar la ficha que esté en 3 porque los vértices 3, 1 y *b no están en línea recta.*



2.- Si en un vértice no hay ficha no se puede empezar a contar en él, pero siempre hay que contarlo como lugar. Es decir, que si elegimos el vértice *c*, en el que hay una ficha, en el vértice 1 ya hemos quitado la ficha y en el vértice 2 hay todavía una ficha, ésta la podremos quitar porque 2, 1 y *c están en línea recta,* y el lugar del vértice 1 hay que contarlo aunque no haya ficha.





ii) Hacer un estudio sistemático de todos los casos posibles y la utilización de la simetría.

Asimismo hay una estrategia favorecedora, consistente en encontrar una notación adecuada para escribir las partidas, siendo posibles varias (Corbalán, 1994; Alfonso-Gracia, 1995).

La primera de las dos estrategias es difícil que se le ocurra sin preparación previa a ningún alumno. Sin embargo, una buena instrucción puede desencadenarla (Shell Centre, 1984; Olfield, 1991). En otros trabajos, hemos elaborado un análisis detenido de las posibilidades didácticas del juego (Corbalán-Gairín, 1988), y lo hemos incluido dentro de una secuencia educativa (Corbalán, 1994). La segunda estrategia, junto con la utilización de una notación adecuada, tendría que ser el método normal de encontrar la forma de realizar el juego.

Estrella de oro: El tablero de este juego es uno de los más antiguos que se conocen, habiéndose encontrado tallado en los bloques de piedra del templo de Kurna (hacia 1700 a. de C.) (Bell-Cornelius, 1990). Con ese tablero pueden hacerse diferentes juegos, tanto solitarios como de dos jugadores (Corbalán, 1994). El nombre que hemos adoptado proviene de la clásica relación aúrea que aparece en el pentágono estrellado.

El juego que planteamos en nuestra investigación puede resolverse con facilidad si se hacen una serie de análisis. En concreto hay una idea clave, consistente en que desde un vértice se comen dos fichas y que una de ellas es comida a su vez desde dos vértices. Por eso, si desde un vértice comemos dos fichas, la que había en ese vértice ya no la podremos retirar. También hay una idea favorecedora, que puede provenir de una buena notación al intentar escribir las partidas, y que permite ver que solo hay dos tipos de vértices, los de fuera –las puntas– y los de dentro –los del pentágono interior–, y por tanto darse cuenta de la simetría del juego.

En cualquier caso, a partir de la idea clave, la obtención de una estrategia es inmediata si en vez de ir quitando fichas suponemos que el tablero está vacío (o con una ficha) y a partir de ahí, siguiendo las reglas, vamos rellenando todo el tablero. Así se ve que para poder quitar todas se trata de empezar a contar en una ficha y a continuación quitar esa ficha, empezando a contar en la única ficha que es ahora posible. Es decir, la estrategia consiste en *empezar por el final.*

Además, junto con la utilización de la simetría del tablero, se ve que se puede lograr dejar al final la ficha que queramos previamente.

La forma de poder quitar todas las fichas menos una es empezar a contar en una ficha cualquiera, y a continuación quitar esa ficha contando desde la única ficha que podrá quitarla. Es decir, quitar la ficha desde la que se ha empezado a contar para quitar la anterior. Puede hacerse siempre (porque desde una ficha se pueden quitar dos y solo dos), y podemos elegir la ficha desde la que empezamos (de las puntas o del pentágono interior) y la colocación de la ficha que dejemos.

El párking: Este es un juego del tipo del *mancala*, muy populares en África y Asia, pero que nunca tuvieron arraigo en Europa (Grunfeld, 1978), en los cuales hay huecos que se realizan en la tierra (o en un tablero) y semillas (que hacen de fichas) que se *siembran* en ellos. Dentro del grupo hay hay tanto juegos individuales como de dos jugadores (Bell-Cornelius, 1990). La versión que nosotros hemos utilizado (Corbalán, 1994) es una variante urbana del juego indio *tchuka ruma*, en el que las semillas han sido sustituidas por coches que hay que llevar a un parking. Un análisis de las posibilidades y variaciones de este juego fue hecho por Sainte-Laguë (1937).

Para encontrar la forma de realizarlo la estrategia adecuada es el *examen sistemático de todos los casos,* para evitar dejarse algunas de las posibilidades o repetir algunas jugadas, lo que lleva a que se alargue mucho el análisis. Para ello puede hacerse un diagrama de árbol que nos permita barrer todas las jugadas posibles, en cuyo caso es conveniente *encontrar notaciones adecuadas.*

Quitafichas: Es una de las múltiples posibilidades de simplificación del clásico juego para dos personas de origen chino *Nim* o *Marienbad*, así llamado en Europa como consecuencia de que uno de los personajes de la extraordinaria película *El año pasado en Marienbad*, de A. Resnais, ofrece continuamente jugar a este juego, y siempre gana porque conoce la estrategia ganadora, que según su formulación clásica pasaba por cambiar a base dos el número de fichas de cada fila. Esa

EL PARKING

Es un juego *solitario* (para un solo jugador)
Se empieza *colocando dos fichas en cada una de las casillas hexagonales.* El juego consiste en *trasladar todas las fichas a la casilla cuadrada P: el párking* siguiendo las

REGLAS

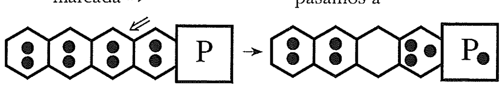
Coger con la mano *todas las fichas que haya en una casilla* (al empezar son dos, pero luego pueden ser más o menos), poner *una en cada una de las casillas* que le siguen a su derecha (incluida el párking), hasta que se acaben. Si se llega al párking y aún no se han acabado las fichas continuar por la primera casilla de la izquierda (como se marca en el tablero. *Nos fijamos en la casilla donde hemos colocada la última ficha*. Pueden pasar tres casos:

1.- Que sea el párking: repetimos la operación anterior empezando de nuevo en la casilla que se quiera.

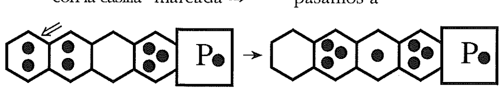
2.- Si se acaba en cualquier otra (que no estuviera vacía), se tienen que coger todas las fichas de esa casilla (incluida la que acabamos de dejar) y repetir la operación anterior.

3.- Si la casilla estaba vacía, hemos hecho un movimiento prohibido y tenemos que volver a empezar: recolocar las fichas, dos en cada casilla hexagonal.

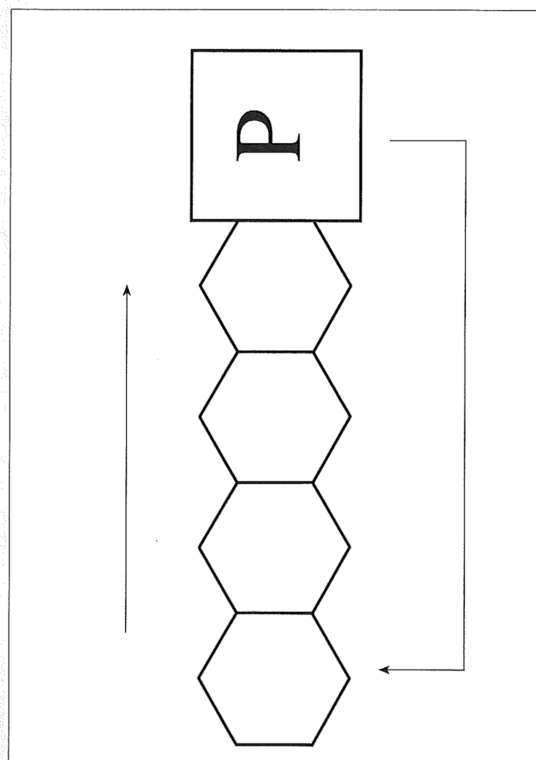
Por ejemplo, si al empezar el juego elegimos la casilla marcada ⇒ pasamos a



Como la última ficha la hemos colocado en el párking, podemos continuar con la casilla que queramos. Si lo hacemos con la casilla marcada ⇒ pasamos a



Como la última ficha la hemos colocado en una que estaba vacía, hemos hecho un movimiento prohibido y tenemos que volver a empezar en la posición inicial.



estrategia es un tanto complicada de encontrar, al menos para alumnos de ESO, y desde luego requiere bastante tiempo.

No es así en la versión simplificada *Quitafichas.* Se encuentra la forma de ganar mediante la estrategia *empezar por el final,* y la idea clave es que entre los dos jugadores pueden siempre retirar tres fichas del tablero, y por tanto el primer jugador ganará siempre al ir dejando al segundo sucesivos múltiplos de tres fichas.

En el análisis del juego hay, por tanto, que hacer planteamientos numéricos. Para encontrar la estrategia, podemos analizar empezando por el final, y forzando al contrario a situaciones *fatales* (es decir, aquellas que necesariamente llevan a perder la partida). En este caso se obtiene con facilidad: «siendo el primero en coger fichas, coger una ficha; y a continuación en cada movimiento coger un número de fichas diferente del otro jugador (de manera que entre los dos se sumen tres fichas). Por ello la secuencia de fichas que se dejan al adversario es: nueve, seis y tres; con lo cual ganamos la partida». Esta estrategia sirve para el primer jugador con cualquier número de fichas no múltiplo de 3 (es decir, de la forma 3n+1 o 3n+2, quitando en primer lugar una o dos ficha). Si el número de fichas es múltiplo de 3, quien tiene estrategia ganadora es el segundo jugador, al ir presentando al contrario números de fichas múltiplos de 3 (que son las situaciones fatales).

Llegar el primero: Es un juego clásico con varios nombres, como *Arrinconar la reina,* –puesto que se puede imaginar como el movimiento de una reina, en un tablero de ajedrez, que hay que llevar hasta un extremo o rincón (ADECUM, 1988)–, *First one home* (Shell Centre, 1984) o *Juego de Wythoff* (M. de Guzmán, 1992). También hay versiones con tablero limitado (como el de ajedrez u otros) o con cuadrícula ilimitada.

Nosotros optamos por un tablero finito y pequeño (para poder hacer un análisis en un tiempo limitado), pero con suficiente extensión de manera que el número de casillas en que es ganador el primer jugador fuera mayor que cuatro, y que exigiera para poder encontrarlas un estudio sistemático. En ese estudio una estrategia apropiada es *empezar por el final,* para ir haciendo un análisis hacia atrás desde la casilla marcada como FINAL. Además de la *utilización de la simetría* del tablero

QUITAFICHAS

Es un juego para dos jugadores

Reglas

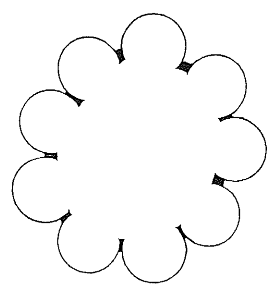
1.- El orden de inicio en la primera partida es por sorteo y en las demás por turno.
2.- Los dos jugadores van haciendo sus jugadas alternativamente.
3.- Se colocan 10 fichas sobre la mesa. Cada jugador, en su turno, quita una o dos fichas, según quiera.
4.- **Gana** el jugador que consigue retirar la última ficha.

MARGARITA

Es un juego para dos jugadores

Reglas

1.- El orden de inicio en la primera partida es por sorteo y en las demás por turno.
2.- Los dos jugadores van haciendo sus jugadas alternativamente.
3.- Cada jugador, en su turno, quita de la margarita con nueve pétalos, un pétalo o dos pétalos, a su elección. Si decide quitar dos pétalos, tienen que estar juntos.
4.- Puedes jugar con más comodidad poniendo al principio una ficha en cada uno de los pétalos y retirando en cada jugada una ficha o dos fichas que estén juntas.
5.- **Gana** el jugador que consigue llevarse el último pétalo (retirar la última ficha).



LLEGAR EL PRIMERO

Es un juego de dos jugadores

Se necesita el tablero adjunto y *una sola ficha* para los dos jugadores

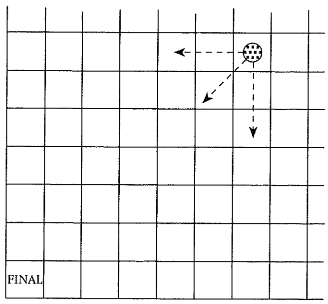
REGLAS

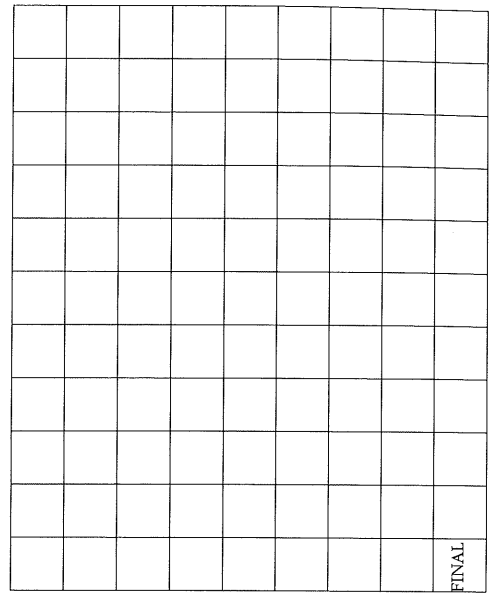
1.- Uno de los jugadores (la primera partida por sorteo y en las demás por turno) sitúa la ficha en una casilla cualquiera del tablero, a su elección.

2.- Mueve en primer lugar el otro jugador, y a partir de ese momento van haciendo movimientos alternativamente.

3.- Cada movimiento consiste en desplazar la ficha en horizontal (hacia la izqquierda), vertical (hacia abajo) o en diagonal (hacia abajo y a la izquierda) *cualquier número de casillas,* como se ve en la figura.

4.- **Gana** el jugador que consigue llevar la ficha a la casilla marcada con FINAL (la situada en el ángulo inferior izquierdo).





para saber que, una vez que se tiene un cuadro ganador para un jugador, también lo será el cuadro simétrico con respecto a la diagonal principal del tablero.

La idea clave para hacer el análisis, es el hecho de que si una determinada casilla A es ganadora para uno de los dos jugadores, todas las casillas desde las que se pueda llegar a A en un solo movimiento son ganadoras para el otro jugador. Esta idea, combinada con la vuelta atrás desde el final, nos dan todas las posibilidades.

Margarita: Dentro de los pequeños juegos de estrategia, ligeras variaciones en las reglas permiten cambiar mucho la estrategia necesaria para ganar. Así sucede si en el caso de un juego del tipo Nim (como el *Quitafichas* anterior) añadimos la condición de que en el caso de quitar dos fichas han de estar juntas (Deulofeu, 1995; Corbalán-Deulofeu, 1996). Al objeto de que hubiera que hacer un análisis detallado, en el que no sólo interviniera el número de las fichas sino su colocación, propusimos el juego *Margarita,* así llamado porque el tablero se hace en forma de esa flor.

El número de pétalos (y por tanto el número de fichas) puede variar, sin que ello añada dificultades conceptuales, excepto la cantidad que puede, si es un poco grande, oscurecer el procedimiento a desarrollar. Elegimos 9 pétalos para diferenciarlo del número de fichas que había en el Quitafichas (10 en ese caso). Aquí la estrategia ganadora es la utilización de la simetría, de forma que si le presentas al contrario una situación simétrica, siempre que él coja una ficha, tú podrás hacer lo mismo y, por tanto, ganar.

Por eso la estrategia ganadora, para el segundo jugador, es la siguiente: en la primera jugada se retira el número contrario de fichas que haga el adversario (es decir, una si él ha retirado dos, y dos si él ha quitado una), y además situadas opuestas a las suyas, de forma que se le deje al primer jugador seis fichas colocadas en dos grupos simétricos de tres fichas. A partir de ese momento coger la o las fichas simétricas de las que retire el adversario.

Recogida, organizacion y análisis de los datos

Una vez que los jugadores individuales o por parejas hubieran dedicado un tiempo a jugar, hacía falta que expresaran sus reflexiones sobre la actividad que habían hecho. Para que esas reflexiones fueran homogéneas y comparables, se les proporcionaba a cada jugador (o pareja de jugadores) una misma ficha en la que tenían que contestar una serie de preguntas.

Y era necesario que contestaran tanto quienes habían llegado a alguna estrategia ganadora como los que no la tenían. En el primer caso se trataba de que la explicitaran, así como que aportaran información sobre el proceso que habían seguido hasta su hallazgo. Los que no tenían estrategia, era interesante que dijeran por qué motivo y cuando habían decidido que no la podían encontrar. Y también una información necesaria para todos era comprobar que el juego que habían jugado era el que se explicitaba en las reglas, es decir, que habían entendido las reglas que se les proprocionaban y que esas eran las que seguían.

Diseñamos una ficha para cada juego, que tenía que rellenar cada jugador (en el caso de los juegos individuales) o pareja de jugadores (en los juegos de dos). Estaba escrita por las dos caras, pero de ellas cada uno de los jugadores (o parejas de jugadores) solo debían contestar una, en función de su respuesta a la primera de las preguntas, que era si habían encontrado o no una estrategia ganadora.

La primera tarea que era necesario realizar era poner a punto la experiencia. Puesto que lo único que se iba a proporcionar a los alumnos era información escrita, era necesario contrastar con grupos de alumnos la redacción de los juegos. Se realizó un largo proceso de pruebas en diferentes grupos de alumnos de 1.° de ESO (12-13 años), con versiones reelaboradas de las reglas hasta que una mayoría de los alumnos las entendía corectamente.

En cuanto a la muestra para la recogida de datos, se eligieron 10 jugadores (o parejas de jugadores) para cada juego, que eran alumnos y alumnas de 2.° de ESO del Colegio Sagrada Familia de Zaragoza. En total conformaban un grupo de 45 alumnos, y la toma de datos se realizó en dos sesiones de 60 minutos de duración. La metodología de la misma fue la siguiente:

1. *Presentar* la sesión.
2. Explicitar que la *única información* sobre los juegos que se les proporcionará será la que aparezca en las *hojas escritas.*
3. Distribución de los *tableros de juego* y las *fichas necesarias* para jugar a cada uno de los jugadores o parejas de jugadores.
4. Jugar durante el tiempo necesario para la *familiarización* y *comienzo del análisis* (unos 25-30 minutos).
5. Se reparte la *ficha del juego* correspondiente a cada uno de los alumnos (o parejas).
6. *Se recogen las fichas* una vez cumplimentadas.

...era necesario que contestaran tanto quienes habían llegado a alguna estrategia ganadora como los que no la tenían. En el primer caso se trataba de que la explicitaran, así como que aportaran información sobre el proceso que habían seguido hasta su hallazgo. Los que no tenían estrategia, era interesante que dijeran por qué motivo y cuando habían decidido que no la podían encontrar.

Además de la recogida de datos por medio de las fichas, también realizamos entrevistas directas con 6 alumnos (2 sobre juegos individuales y otros 4 que formaban dos parejas), porque queríamos tener *información directa* de todo el proceso de pensamiento de los alumnos, expresado por sus propias palabras. En ellas se trataron tres aspectos: *comprensión de las reglas* del juego, indagación sobre el *camino seguido para encontrar una estrategia* (parcial o global, correcta o no), así como en las *razones para dejar el análisis* si no se encuentra y las *relaciones* que manifiestan los alumnos *entre matemáticas, juegos y cultura.*

Para computar los datos de las fichas proporcionadas por los alumnos hemos utilizado seis aspectos distintos en cada uno de los juegos, con una codificación común para poder compararlos. Esos aspectos han sido: respuesta subjetiva, respuesta objetiva, comprensión de las reglas del juego, estrategia, expresión de la realización y descripción del proceso.

En cada uno de los juegos se obtenía de esta forma un cuadro de datos. A partir de ellos y para poder caracterizar los juegos se valoraron las cinco cualidades siguientes:

1) *Comprensibilidad:* Se refiere a la facilidad para entender el proceso del juego, así como el autocontrol respecto al mismo.
2) *Facilidad:* Hace referencia a las dificultades para obtener una estrategia ganadora (en el caso de juegos de dos jugadores) o para obtener la forma de realizar las jugadas necesarias (en el caso de los solitarios), o al menos una estrategia parcial.
3) *Posibilidad de descripción:* Se trata de analizar el aspecto de comunicación del proceso seguido en la manera de actuar, así como de los procesos para llegar a adoptar alguna solución.

4) *Posibilidades de análisis del juego:* Hace referencia a la utilización de estrategias adecuadas en el análisis del juego.

5) *Estrategias utilizadas:* Se trata de comparar con las previsiones o hipótesis de posibles estrategias para encontrar las soluciones de los juegos.

De acuerdo con los resultados recogidos en los cuadros de cada uno de los juegos se han analizado las cinco cualidades de los juegos que hemos relatado, definiéndose índices (números comprendidos entre 0 y 1 para valorarlas) en algunas de ellas para poder compararlos.

Resultados sobre juegos

Recopilamos a continuación los resultados que hemos obtenido en nuestra investigación.

Puesta a punto de los juegos. Hemos hecho una labor de depuración de la presentación de las reglas de los seis juegos objeto de nuestra investigación, hasta conseguir que la mayoría de los alumnos entiendan las reglas de los mismos con la presentación por escrito de las mismas, sin explicación oral por parte del profesor. Hay que destacar las grandes dificultades de los alumnos de estas edades (13-14 años) para realizar lecturas comprensivas, y más en el caso de los juegos en que las reglas tienen que estar enunciadas y entenderse con precisión.

Cómputo de las respuestas de los alumnos. Se ha puesto a punto un mecanismo que recoge seis aspectos distintos y la misma codificación de las respuestas para cada uno de los juegos. En cuanto a la estrategia que utilizaban, objetivo fundamental de la investigación, se ha caracterizado en cada uno de los juegos lo que hemos llamado, dentro de las estrategias apropiadas, es decir, que llevan a resultados positivos, las estrategias *de ataque*, consistente en encontrar una *idea clave*, que bien aplicada nos llevaría a una estrategia ganadora; las estrategias *parciales*, cuando sirven en casos particulares; y la estrategias *completas*, que son aquellas que efectivamente nos dan una estrategia ganadora general.

Caracterización de los juegos. Como resultado del análisis de los resultados obtenidos, se caracterizó los juegos en cinco aspectos distintos, que pasamos a enumerar, junto con los resultados obtenidos.

1) *Comprensibilidad.* Hemos elaborado un *índice de comprensibilidad* (medido sobre 1), que es mayor cuando más grande es el porcentaje de alumnos que entienden las reglas y el de jugadores (o parejas) que encuentran algún tipo de estrategia ganadora. El valor de este índice de comprensibilidad para cada uno de los juegos aparece en la tabla adjunta, en la columna *I comp*, y nos muestra que hay tres juegos *bastante comprensibles* (aquellos cuyo *I comp* es mayor de 0,5) y otros tres *poco comprensibles* (de *I comp* menor que 0,5).

2) *Facilidad.* Con el estudio de las respuestas de los alumnos hemos elaborado un *índice de facilidad* (medido sobre 1), que es más cercano a la unidad cuando se encuentra la estrategia con más facilidad. El valor de este índice de facilidad (columna *I faci* de la tabla) permite dividir a los juegos en *fáciles* o *difíciles*, separados por el valor 0,5 de ese índice, y entre los utilizados en nuestra investigación hay tres de cada tipo.

3) *Posibilidad de descripción.* En cuanto a la descripción de la estrategia que se ha encontrado, hay dos tipos de juegos. Por una parte aquellos en que el proceso se describe sobre todo de forma gráfica (apelando en algunos casos a otros códigos añadidos), y que incluyen a *Sol y sombra, El parking, Llegar el primero* y *Estrella de oro*. Y la otra clase está formada por los juegos en que la descripción se hace por medio de palabras (*Quitafichas* y *Margarita*). La primera clase estaría formada por los juegos que tienen que ver con la geometría, y la segunda con la aritmética (al menos en la forma de análisis de los alumnos).

En lo que se refiere a la descripción del proceso seguido para llegar a la solución hay también dos tipos de juegos: aquellos en que se utilizan sobre todo palabras (*Estrella de oro, Quitafichas* y *Margarita*) y aquellos en que se dan códigos o jugadas (*Llegar el primero* y *Sol y sombra*), estando *El parking* a caballo entre ambas. Las dos clasificaciones sólo coinciden parcialmente porque se refieren a aspectos diferentes: la comunicación de la estrategia y la descripción del proceso de búsqueda de esa estrategia.

4) *Posibilidad de análisis del juego.* Tratamos de la utilización de estrategias adecuadas en el análisis de los juegos, es decir, estrategias diferentes del *ensayo y error* estricto. Por tanto, de la utilización de estrategias de ataque, parciales o completas. Definimos un *índice de análisis* (medido sobre 1) para clasificar los juegos según la

...se ha caracterizado en cada uno de los juegos, las estrategias de ataque, *consistente en encontrar una* idea clave, *que bien aplicada nos llevaría a una estrategia ganadora; las estrategias* parciales, *cuando sirven en casos particulares; y la estrategias* completas, *que son aquellas que efectivamente nos dan una estrategia ganadora general.*

facilidad de análisis (columna *I ana* de la tabla). Es de destacar que los tres juegos por parejas que hemos usado en nuestra investigación tienen un índice de análisis mayor que los juegos individuales.

	I comp	I faci	I ana
Sol y sombra	0,722	0,667	0,074
Estrella de oro	0,409	0,273	0,182
El párking	0,338	0,143	0,023
Quitafichas	0,833	0,667	0,592
Llegar el primero	0,7	0,5	0,567
Margarita	0,425	0,35	0,3

Adecuación a las estrategias y diagnóstico de los juegos

Damos cuenta de los resultados obtenidos en cuanto a las estrategias que se utilizan por parte de los alumnos, cuáles son rentables y si son coincidentes con las previstas en el estudio previo, con las utilizadas por los *expertos*. Lo hacemos separadamente para cada juego.

Sol y sombra. Los alumnos no utilizan ninguna de las estrategias previstas, sino la primaria de *ensayo y error*, pero de forma consciente porque les da resultados. Eso se desprende de que este juego tiene un índice de análisis muy pequeño (0,074), que nos indica que no se utilizan estrategias elaboradas, y un índice de facilidad alto (0,667), que nos señala que a pesar de ello, muchos alumnos encuentran la solución. En cuanto a la descripción de la estrategia se hace de forma geométrica y el proceso de encontrar esa estrategia también se comunica por medio de las jugadas realizadas.

No sería un juego apropiado para utilizarlo como inductor de unas determinadas estrategias, aunque su utilidad sería buena para particularizar y generalizar resultados (tomando otros números de fichas), para encontrar términos generales de sucesiones, así como para demostrar que el número de movimientos es mínimo (y se hace en un contexto gométrico y lúdico).

Estrella de oro. Las estrategias previstas eran *empezar por el final*, de una forma un poco más complicada de lo habitual, puesto que suponía un cierto cambio de reglas (llenar el tablero en vez de vaciarlo), junto con algún tipo de utilización de la simetría. La realidad nos muestra que pocos alumnos las utilizan, ya que el índice de análisis es pequeño (0,182), y no es porque otras más sencillas les sean rentables, ya que el índice de facilidad (0,273) es también muy pequeño. La descripción de la estrategia se hace de forma gráfica, y el proceso de llegar al mismo por medio de una descripción verbal.

...los tres juegos por parejas que hemos usado en nuestra investigación tienen un índice de análisis mayor que los juegos individuales.

Se trata de un juego con dificultades de análisis derivados del hecho de que se puede utilizar la estrategia de *empezar por el final*, pero de una forma no evidente. Y la posible *utilización de la simetría*, tampoco es aplicada. Podría utilizarse después de haber interiorizado esa estrategia como un paso más adelante, pero no como uno de los primeros juegos en esa línea.

El párking. Los alumnos no utilizan ninguna estrategia rentable, y convierten a este juego en el peor de todos en cuanto a la posibilidad de analisis (I ana = 0,023), y además en el más difícil (I faci = 0,143). No sería utilizable en estos niveles educativos, salvo que se hiciera antes un trabajo en la interiorización de esas estrategias.

Quitafichas. Se puede analizar con facilidad por medio de *empezar por el final*, y así se hace, con lo que es el juego de mayor índice de análisis (0,592), así como, en consecuencia, de mayor índice de facilidad (0,667). Hay que añadir que en el análisis del juego no se requieren elementos geométricos, sino sólo numéricos, y que no interviene la simetría, lo que parece facilitar mucho el análisis del juego. Figura en primer lugar en todos los índices que hemos elaborado, y la descripción de los procesos que intervienen se hace siempre por medio de palabras. Es un juego muy apropiado para desarrollar la estrategia de *empezar por el final*, y a partir de la formulación que nosotros hemos hecho se podría generalizar para obtener resultados con otro número de fichas. Facilita el análisis del juego el hecho de que no intervenga en ningún aspecto la geometría.

Llegar el primero. Se utiliza realmente *empezar por el final* (el 80% de los alumnos lo hace así), pero el carácter simétrico del juego sólo es tenido en cuenta por el 10% de los alumnos. Por eso el índice de análisis no es lo alto que podría ser (0,567) y lo mismo pasa con el de facilidad (0,5). La expresión de los análisis se hace de forma gráfica y con jugadas. La dificultad mayor de este juego es la no utilización del aspecto simétrico, mientras que sí se aplica la estrategia de *empezar por el final.* Parece sumamente conveniente para, una vez que se han encontrado posiciones ganadoras, incidir en el aspecto de la simetría.

Margarita. Únicamente se aplica *empezar por el final,* lo que lleva a tener en cuenta sólo aspectos numéricos, a obtener sólo estrategias parciales, y a confundirlo en cierta medida con un juego del tipo de *Quitafichas,* en que interviene sólo el número y no la colocación de las fichas. Ello hace que se quede con un 0,3 como índice de análisis y en cuarto lugar en cuanto a facilidad (I faci = 0,35). La descripción de los procesos que intervienen en su análisis se hace por medio de palabras, olvidando los aspectos geométricos de colocación de las fichas.

Las dificultades del análisis de este juego provienen de considerarlo como sólo de cantidad, de número de fichas, no de posición de las mismas, un análisis del mismo tipo que el que se hace en *Quitafichas.*

Hay que reseñar además, y como suele ser habitual en los trabajos con juegos, que la participación y el interés de los participantes ha sido grande en general, deducido de una apreciación subjetiva, no medida de ninguna forma. Como resultado de ella, en poco tiempo (el de una clase normal) se puede tomar contacto con un juego, analizarlo y rellenar una ficha que proporciona información suficiente de formas muy diferentes de abordar los juegos. Con los indicadores anteriores que hemos puesto a punto, así como con el estudio de la adecuación de los mismos a las estrategias, podemos hacer un diagnóstico de cualquier juego.

Como recapitulación de los comentarios anteriores, parece que se infiere que en el nivel de 2.° de ESO (13-14 años), en que hemos realizado nuestro trabajo, hay una serie de estrategias generales de resolución de problemas que están asumidas de manera general, mientras que otras lo están en menor medida o no lo están en absoluto. Entre las interiorizadas destaca *empezar por el final,* como muestra en los juego *Quitafichas, Llegar el primero* y *Margarita.* El primero que es de aplicación directa y única de esa estrategia es el más fácil. Los otros dos se complican en la medida en que hay que utilizar otras además de esa. La no asumida en absoluto es el *estudio sistemático de casos,* estrategia importante para el análisis de múltiples situaciones y que, al menos con los juegos, no se aplica en absoluto. Tampoco está muy extendida la *utilización de la simetría.* Se hace muy poco en *Llegar el primero,* a pesar de que el contexto parece inducirlo, y se *olvida* en *Margarita,* poniendo el énfasis sólo en el aspecto numérico, sin tener en cuenta el geométrico. Sin embargo, las entrevistas con alumnos parecen insinuar que podría ser posible con cierta rapidez la instrucción en el caso de la simetría de algunos juegos.

Los resultados anteriores parecerían indicar que las técnicas utilizadas en aritmética están más interiorizadas que las técnicas más apropiadas para la geometría o el estudio del azar.

Los resultados anteriores parecerían indicar que las técnicas utilizadas en aritmética, y en particular en el manejo de números, están más interiorizadas que las técnicas más apropiadas para la geometría (como el tener en cuenta la simetría) o el estudio del azar (el recuento de posibilidades).

Futuras líneas de investigación

El trabajo que reseñamos se ha realizado con una muestra pequeña de alumnos (entre 9 y 14 jugadores o parejas de jugadores) y además todos ellos del mismo centro, del mismo curso y del mismo grupo. Por medio de este estudio se trataba de poner en marcha mecanismos adecuados para un estudio más profundo que nos permitiera responder de manera más fiable a las preguntas que nos hacíamos sobre los juegos de estrategia y su relación con las estrategias de resolución de problemas. Es, por tanto, el comienzo de un trabajo que se va a continuar y profundizar con grupos más grandes de alumnos, de centros, cursos y grupos diferentes, para de esta forma poder alcanzar una serie de objetivos. En concreto, se trataría de:

- Contrastar los resultados obtenidos en este trabajo con los que se consigan en grupos más numerosos de alumnos, que nos permitan abarcar un abanico más amplio de posibilidades y estudiar las posibles variaciones de los resultados en función de la edad de los alumnos, dentro de la etapa 12-16 años (la ESO).
- Caracterizar posibles tipos de jugadores (aquellos que siempre utilizan la misma estrategia o los que tienen interiorizadas varias; jugadores más o menos capaces...). Para ello se hará un seguimiento de los resultados que obtienen los jugadores o parejas de jugadores con los tres juegos individuales o de parejas.
- Relacionar los resultados que se obtienen con otras variables. Entre las posibles estarían el sexo, la práctica de juegos *inteligentes* fuera de la escuela (siendo el caso más frecuente el del ajedrez) y el interés por las matemáticas o las notas que obtienen en la asignatura.

Con todo ello esperamos tener una panorámica más amplia de las relaciones entre los juegos de estrategia y las estrategias más interesantes de resolución de problemas en la etapa de los 12-16 años, que corresponde al nivel de la Educación Secundaria Obligatoria.

Nota final: Una versión detallada de esta investigación, bajo el título *Estudio de algunas estrategias de resolución de problemas utilizadas por los alumnos de secundaria en la resolución de juegos matemáticos de estrategia*, dirigida por Jordi Deulofeu, ha sido presentada como Treball de Tesina de Doctorat en el Programa de doctorat de Didactica de la Matemàtica i de les Ciencies Experimentals de la Universidad Autónoma de Barcelona en Junio de 1996, y fue realizada por el autor en el marco de una Licencia por Estudios concedida por el Ministerio de Educación y Ciencia para el curso 1995/96.

Bibliografía

ADECUM-Université d'Orléans (1988): *Mosaico matemático,* Muskaria, Tudela.

ALFONSO, J. y F. GRACIA (1995): «El juego de las ranas», *UNO,* n.° 5.

BELL, R. y M. CORNELIUS (1990): *Juegos con tablero y fichas,* Introducción de R. C. Bell. Labor, Barcelona.

BOUVIER, A. y M. GEORGE (1984): *Diccionario de matemáticas,* Akal, Madrid.

BRIGHT, G. W., J. G. HARVEY y M. M. WHEELER (1985): «Learning and Mathematics Games», *Journal for Research in Mathematics Education,* Monograph number 1, NCTM, Reston.

BRIGHT, G. W. y J. G. HARVEY (1988): «Games, Geometry and Teaching», *Mathematics Teacher,* april 1988.

CORBALÁN, F. (1991): «Utilisation habituelle des jeux mathematiques dans la classe», *Proceedings of the 42nd CIEAEM meeting,* Pedagogical Univesity in Cracow (Poland).

CORBALÁN, F. (1994): *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato,* Síntesis, Madrid.

CORBALÁN, F. y J. DEULOFEU (1996): «Juegos manipulativos en la enseñanza de las matemáticas», *UNO,* n.° 7.

CORBALÁN, F. y J. Mª GAIRÍN (1988): *Problemas a mí. 3. Juegos matemáticos,* Edinumen, Madrid.

DEULOFEU, J. (1995): «Los pequeños Juegos de Estrategia en la enseñanza de las Matemáticas. ¿Por qué?, ¿para qué?», en *Actas de las 7ª JAEM,* Madrid.

GRUNFELD, F. V. (1978): *Juegos de todo el mundo,* Edilan-Unicef, Madrid.

GUZMAN, M. de (1992): «Wining Strategies for Your Games», en *Mathematics in Education,* University of La Verne, La Verne, California, USA.

HARVEY, J.G. y G. W. BRIGHT (1985): «Mathematical Games: Antithesis or Assistance?», *Arithmetic Teacher,* February 1985.

OLDFIELD, B. J. (1991): «Games for developing strategies», *Mathematics in School,* May 91.

POLYA, G. (1945): *Cómo plantear y resolver problemas,* Trillas, México. (Traducción de 1965).

SAINTE-LAGUË, A. (1937): *Avec des nombres et des lignes,* Vuibert, Paris. (Existe una reeedición de 1994, Paris, Blanchard).

SHELL CENTRE FOR MATHEMATICAL EDUCATION (1984): *Problems with Patterns and Numbers. An O-level Module,* University of Nottingham.

WILLIFORD, H. (1992): «Games for Developing Mathematical Strategy», *Mathematics Teacher,* february 1992.

Fernando Corbalán
IES Grande Covián
Zaragoza
Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas
Pedro Sánchez Ciruelo

René Descartes (1596-1650)
(Retrato de Franz Halls)

SUMA 23
noviembre 1996, pp. 33-38

La medida del tiempo a través del tiempo

Luis Balbuena Castellano
Dolores de la Coba García
Luis M. Cutillas Fernández

IDEAS Y RECURSOS

Es una experiencia llevada a cabo por alumnos y profesores del IB Viera y Clavijo de La Laguna consistente en el diseño y construcción de un reloj de sol de tipo analemático.

Lo que vamos a relatar es una experiencia didáctica llevada a cabo en el Instituto de Bachillerato Viera y Clavijo de La Laguna (Tenerife) durante los cursos 1994/95 y 1995/96. En ella hemos participado, además de nosotros tres, profesores del Seminario de Matemáticas, ocho alumnos que cursaban por entonces 3.° de BUP y cuyos nombres son: Yurena Álvarez Pérez, Nayra Ferrera Noda, David Ignacio Gaspar Pérez, Silvia González Galván, Susana González López, Nayra Dácil Herrera Martín, Enrique Fernando Pérez Estévez y Francisco J. Vaquero Perea.

Hemos de confesar que, cuando iniciamos el trabajo, no sospechábamos que el trayecto educativo que íbamos a seguir iba a ser tan amplio y profundo como ha resultado al final. Tuvimos que tomar decisiones restrictivas para limitar y centrar el trabajo, pues permanentemente surgían sugerentes vías de exploración que nos atraían y que debíamos de relegar por el momento para poder concluir lo que nos habíamos propuesto.

Aunque las conclusiones suelen expresarse al final, creemos importante en este momento transmitir a quienes puedan interesarse por este tipo de experiencias que la valoración global del proyecto, ya concluido, es altamente positiva tanto por los aspectos educativos que hemos desarrollado, como por la repercusión que el esfuerzo realizado ha tenido en el desarrollo de una formación más integral de nuestros alumnos, incluyendo a aquellos que no han participado directamente en el proyecto.

Surge la idea

Como en todas estas experiencias, hay un punto de partida. En este caso la idea era bien sencilla: construir un reloj de sol en algún rincón del instituto que permitiera, por una parte, dotar al centro de un educativo elemento decorativo y, por otro lado, realizar los estudios necesarios para poderlo construir.

Se planteó en una reunión del seminario y se acordó desarrollarla con un grupo de alumnos. Todos teníamos alguna intuición sobre cómo debía de hacerse, pero lo cierto es que ninguno había estudiado el tema en profundidad. Nos pareció, por tanto, que el primer paso que había que dar tenía que ser el dotarnos de una bibliografía que nos acercara al tema antes de tomar ninguna otra decisión. Este acopio de bibliografía se inició con una visita al Instituto Astrofísico de Canarias en el que el catedrático D. Teodoro Roca nos sumistró una amplia e interesante reseña y fotocopias de varios artículos. Este material se distribuyó a los componentes del equipo en junio de 1994. Por tanto, tuvimos aquel verano para conocer más a fondo algo de lo que, como se ha dicho, sólo teníamos intuiciones e ideas vagas.

La lectura de aquellos artículos y otros libros sobre el tema que fuimos adquiriendo nos fue abriendo las puertas de algo tan familiar como es el tiempo y su medida a lo largo de la historia. En esa etapa inicial, los alumnos del equipo manifestaron también su desorientación y el trabajo que les costaba dominar los conceptos que allí aparecían.

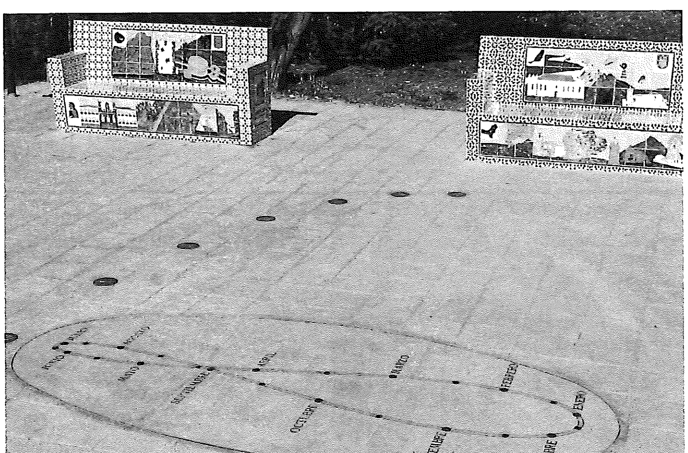
Una vez concluido el trabajo en equipo, y con la perspectiva que nos da la visión global del proceso, vemos con claridad que el trabajo que desarrollamos tuvo dos etapas claramente diferenciadas:

a) De estudio.

b) De diseño y construcción del reloj propuesto.

La primera etapa nos condujo a la conclusión de que el modelo de reloj de sol que mejor se ajustaba a nuestros intereses es el llamado de tipo «analemático».

La primera etapa nos condujo a la conclusión de que el modelo de reloj de sol que mejor se ajustaba a nuestros intereses es el llamado de tipo «analemático».



El reloj con su analema y marcas horarias (Foto: L. Balbuena)

Más adelante explicaremos en qué consiste y cómo diseñamos la placita que hicimos, con el correspondiente permiso y apoyo del consejo escolar del centro.

Nuestra fascinación ante el tema en el que íbamos penetrando era tal que vimos necesario llevar nuestros trabajos a algún tipo de material que permitiera transmitir a los demás, aunque fuera de forma resumida, pero clara, lo que para nosotros había sido un auténtico descubrimiento. Ese deseo justificó la realización de los carteles que forman parte de una exposición que empezó a itinerar por otros centros de Canarias una vez que fue visitada por todos los alumnos del «Viera». Pero además de los carteles, se exponen relojes que son explicados en ellos. En algunos casos (reloj de sol de Tutmosis III, 1.500 años A.C. o el reloj *cañón*) se han reproducido, otros se han conseguido en comercios o por préstamos de familiares, amigos, compañeros, etc.

Objetivos

Para los amantes de estos interesantes aspectos, vamos a exponer ahora los objetivos que creemos más destacables y que pueden ser tenidos en cuenta y ampliados por cuantos se decidan a llevar adelante una experiencia como la nuestra o alguna parecida. Siguiendo la nomenclatura al uso, tenemos objetivos:

a) Conceptuales:

- Conocer más profundamente la variable *tiempo*.
- Investigar la medida del tiempo a lo largo de la historia.
- Averiguar las limitaciones que tienen los distintos modos de medir el tiempo.
- Aplicar, a una actividad no estrictamente curricular, conceptos estudiados en los desarrollos de las asignaturas.
- Proporcionar otras formas y métodos de estudiar y aprender nuevos conceptos.
- Aprender un método de investigación que puede ser aplicado al estudio y profundización de otras cuestiones del entorno.

- Ampliar la cultura científica y tecnológica más allá de lo aprendido estrictamente en las aulas.
- Mostrar cómo detrás de algo tan cotidiano y aparentemente simple, como es la hora, existe una larga historia de conquistas intelectuales que llenan y marcan muchas etapas.

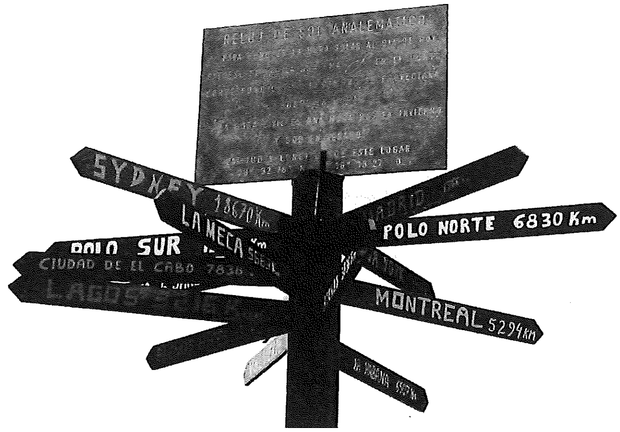
b) Procedimentales:

- Aprender a planificar y a distribuir el trabajo entre los miembros de un equipo.
- Utilizar los elementos informáticos para mejorar los trabajos de grafismos, acumulación de información y obtención de resultados.
- Aprender a exponer estudios realizados, a confrontar opiniones y a expresar y resolver las dudas surgidas.
- Acometer la resolución de problemas utilizando métodos no enseñados en libros.
- Aprender a buscar bibliografía, a obtener lo que sea útil para los objetivos propuestos y a almacenar y organizar con sentido crítico las diversas informaciones.

c) Actitudinales:

- Tomar conciencia de la importancia de la responsabilidad individual cuando se trabaja en equipo.
- Captar la importancia de la formación científica para comprender lo que nos rodea.
- Obtener una visión del dinamismo de la ciencia y de la cultura a través de los tiempos.
- Fomentar la curiosidad científica.
- Apreciar la necesidad del rigor y la honradez intelectual cuando se realiza una investigación.
- Apreciar los componentes estéticos y la necesidad de tenerlos en cuenta a la hora de realizar la tarea encomendada.
- Fomentar la creatividad.
- Valorar la utilidad de la ciencia en la vida cotidiana.
- Valorar en su medida todo el legado histórico y científico que se resume en una mirada a nuestro reloj de pulsera.

También prestamos atención a la Luna como «medidor» de tiempo y cómo ha habido culturas que le han sido, y aún algunas siguen siendo, fieles a nuestro satélite.



Poste de direcciones
(Foto: L. Balbuena)

Contenidos

En este apartado haremos un esquema de los contenidos que fuimos aprendiendo a lo largo de la etapa de estudio. Quien esté interesado en ampliar datos sobre ellos puede acudir a la bibliografía que se expone o, si es algo ,más específico entrar en contacto con nosotros que procuraremos atenderle.

Tras el lógico trabajo de recopilar información y datos, al final pudimos ordenar las ideas y organizar lo aprendido de la siguiente forma:

a) Los primeros pasos dados por la humanidad y por las primeras culturas para medir y controlar el tiempo. En esas épocas lo que más preocupaba –por la utilidad que tenía para ellos– era la elaboración de calendarios que les permitiesen saber cuándo debían de realizar las labores agrícolas. En ese sentido, probablemente, el firmamento constituyó el primer laboratorio científico de la humanidad.

En este capítulo, hicimos un estudio de los dos calendarios que han regido en occidente: el juliano y el gregoriano. También prestamos atención a la Luna como «medidor» de tiempo y cómo ha habido culturas que le han sido, y aún algunas siguen siendo, fieles a nuestro satélite.

b) Tras definir el reloj como cualquier máquina o artilugio que sirve para medir el tiempo, fuimos estudiando los diversos tipos utilizados a lo largo de la historia.

- Reloj de sol de Tutmosis III (año 1500 A.C. aprox.).
- Clepsidras.
- Reloj de arena.
- Reloj de vela.
- Reloj de aceite.
- Reloj de fuego.
- Reloj de especies

Otros modelos de reloj de sol:

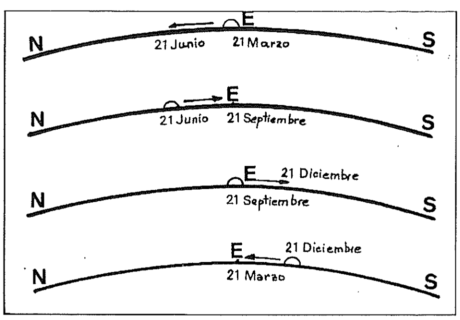
- Reloj de cañón.
- Reloj de pastor.
- Reloj benedictino.
- Reloj ecuatorial.
- Reloj analemático.

c) Aparición del reloj mecánico y la larga carrera para ir perfeccionando y haciendo cada vez más pequeños aquellos aparatos que figuraron en las torres de las iglesias y ayuntamientos. En este apartado está la historia del péndulo, la solución de Huygens, el problema de la medida de la longitud, imprescindible para conseguir desarrollar y dar seguridad a los viajes transoceánicos, etc. Y así, ir avanzando hasta llegar a los relojes que hoy manejamos de manera habitual.

Reloj de sol analemático

Vamos a dedicar la última parte a explicar cómo se construye el reloj de sol que adoptamos hacer y cómo lo construimos.

A medida que el Sol, en su movimiento aparente, va desplazándose sobre la esfera celeste, si observamos la sombra de un gnomon estratégicamente colocado podemos saber exactamente en qué momento del día nos encontramos. Y decimos estratégicamente colocados porque el Sol, a causa de la inclinación del eje de la Tierra, no sigue siempre el mismo camino. En realidad, el Sol sale sólo dos veces al año justo por el Este y se oculta justo por el Oeste; son los días que se corresponden con los equinoccios, mientras que durante la primavera y el verano va desde el Noreste hasta el Noroeste y en otoño e invierno va desde el Sureste al Suroeste, alcanzando las trayectorias extremas en los solsticios.



Movimiento aparente del Sol al amanecer

Por todo ello a la misma hora pero en diferentes días la sombra no sólo será de distinto tamaño, sino que además tendrá distintas orientaciones.

Este modelo es el que nos parece más interesante desde el punto de vista de la exactitud. Pero también desde el punto de vista didáctico porque su construcción requiere la aplicación de cuestiones matemáticas que el alumno ha estudiado.

Sin embargo, conviene saber que siempre en el momento del mediodía solar, la sombra se orienta justo al Norte. Esto ocurre todos los días y es un dato de mucho interés. Se trata del momento en el que el Sol está en el punto más alto de su trayectoria aparente.

Una vez constatado este hecho, en principio, caben tres soluciones para construir un reloj de sol:

1. Señalar en el suelo cada hora para cada día del año.
2. Inclinar el gnomo en la misma medida que esté inclinado el ecuador celeste respecto a nuestro horizonte (el ángulo definido por la latitud geográfica) y obtendremos el modelo más conocido.
3. La solución analemática en la cual el gnomo –que puede ser el propio observador– tendrá que colocarse en distintos lugares en función de la fecha.

Este modelo es el que nos parece más interesante desde el punto de vista de la exactitud. Pero también desde el punto de vista didáctico porque su construcción requiere la aplicación de cuestiones matemáticas que el alumno ha estudiado. Aparte de eso, la presencia del analema en su trazado obligará al curioso a interesarse por averiguar su utilidad y mecanismo de construcción.

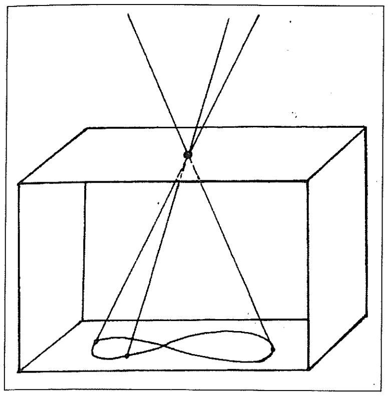
Pero ¿qué es la analema?

El siguiente procedimiento *casero* sirve para realizar una analema.

Se construye una caja, preferiblemente de madera. En el centro de la cara superior se abre un agujero de 3 o 4 mm de diámetro. Interesa que esa cara sea de un material fino (chapilla, cartón piedra, plástico, etc.) para que permita que un rayo de Sol pase limpiamente a través del agujero.

Una cara lateral se deja sin tapa a fin de ver el punto de luz reflejado en el fondo de la caja, en el que se ha fijado una cartulina blanca. Con la ayuda de una brújula, todos los días a las doce, hora solar, se orienta la caja siempre de la misma forma y se marca con un lápiz la situación del punto de luz, datándose el mismo.

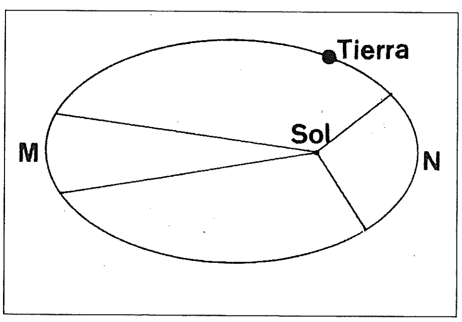
El movimiento del Sol, hace que ese punto luminoso se desplace cada día. Al mes empieza a notarse ya la formación de una curva que una vez completado el ciclo es similar a un ocho panzudo.



Procedimiento artesanal para construir la analema

No obstante si el procedimiento anterior resulta complicado, por lo lento que es, se puede construir matemáticamente la analema.

Pero, previamente, debemos ser conscientes de que la trayectoria de la Tierra alrededor del Sol, como es sabido no es circular sino elíptica. Como, por otra parte, la ley (debida a Kepler) que indica que las áreas M y N, barridas por dos radios que marcan tiempos iguales también son iguales, entonces la velocidad de la Tierra a lo largo del arco de la elipse N será superior a la velocidad con la que recorre el arco en M.



Segunda Ley de Kepler

Una vez decidido el modelo que queríamos, procedimos a diseñar lo que ya es una realidad: una plaza de ciento veinte metros cuadrados en cuyo centro situamos el reloj…

Por esta razón, el mediodía solar raramente coincide con el mediodía de un reloj mecánico.

Las diferencias anuales entre el mediodía solar verdadero y el mediodía solar medio se representan en una curva, denominada Ecuación del Tiempo.

Esta ecuación se suele dar en tablas referidas a cada lugar en función de su latitud y de la fecha.

Análogamente, con la Declinación del Sol.

Con ambas tablas, podremos calcular las coordenadas de cada punto de la analema gracias a las ecuaciones:

$$X=A\cdot\text{sen(Ecuación del Tiempo)}$$

$$Y=A\cdot\cos(\text{Latitud})\cdot\text{tag(Declinación)}$$

(Tanto la Ecuación del Tiempo como la Declinación pueden ser consultadas -conseguidas- en cualquier observatorio meteorológico).

Antes de terminar esta sección, creemos conveniente clarificar algunos detalles:

a) La hora que marcan nuestros relojes no coincide con la hora solar. La hora oficial se rige por el meridiano central del huso horario correspondiente. Es decir, la hora tanto en la parte más a la izquierda del huso como en la parte más a la derecha, coincide con la correspondiente al meridiano central del huso. Cuando se hace un reloj de sol hay que tener presente este detalle por si fuera necesario realizar una corrección en las marcas horarias.

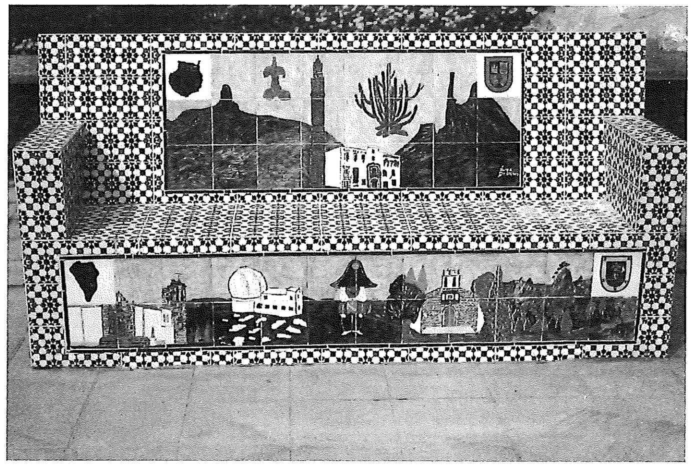
b) No debe olvidarse tampoco que nuestros relojes llevan una hora de adelanto en invierno y dos durante el verano. Esta adaptación podría contemplarse también en los relojes de sol. En general no se hace. Quizás sea porque la hora solar es la natural, la de siempre, y lo otro son arreglos que ha hecho el hombre en función de sus intereses.

Hemos informatizado todo el proceso de tal forma que si alguien quiere construir un reloj de sol analemático sólo tiene que comunicárnoslo.

La plaza del reloj

Una vez decidido el modelo que queríamos, procedimos a diseñar lo que ya es una realidad: una plaza de ciento veinte metros cuadrados en cuyo centro situamos el reloj y adornada con bancos de mampostería recubiertos de azulejos. En uno de los rincones hay un poste de direcciones. Se señalan las direcciones y las distancias de dieciséis puntos del planeta (Polo Norte, Polo Sur, Madrid, Buenos Aires, La Habana, La Meca, Atenas,...). Encima del poste, una placa de bronce le indica al visitante qué debe hacer para saber la hora: se colocará sobre la analema en el día que corresponda a la fecha. Su sombra se proyectará sobre la elipse horaria. Se le recuerda que la hora solar corresponde a una hora menos que la civil en otoño-invierno y dos horas menos en primavera-verano.

Cada uno de los bancos está decorado con dos murales a todo color. Fueron dibujados en tamaño 1:1 por los alumnos participantes y pasados luego a cerámica por Cristina Siverio, una ceramista de La Laguna.



Banco de Gran Canaria y La Palma
(Foto: L. Balbuena)

Bibliografía

WANGH, A. (1973): *Sundials,* Dover.

STRAHLER, A. N. (1982): *Geografía Física,* Omega.

HUTCHINSON, B. (1986): *Guía de relojes antiguos,* Grijalbo.

MONTAÑÉS, L. (1986): Relojes, Cipsa.

DERRY, T. K. y T. I. WILLIANS (1986): *Historia de la tecnología, vol-1,* Siglo XXI.

LÓPEZ PIÑERO, J. M. (1986): *La ciencia en la historia hispánica,* Salvat.

SOLER GAYÁ, R. (1989): *Diseño y construcción de relojes de sol,* Colegio Ingenieros Baleares.

DOMÉNECH ROMÁ, J. (1990): *Cartas solares, teoría de sombras y soleamiento,* Llorens Libros.

DOMÉNECH ROMÁ, J. (1991): *Trazado y construcción de relojes de sol* Aguaclara.

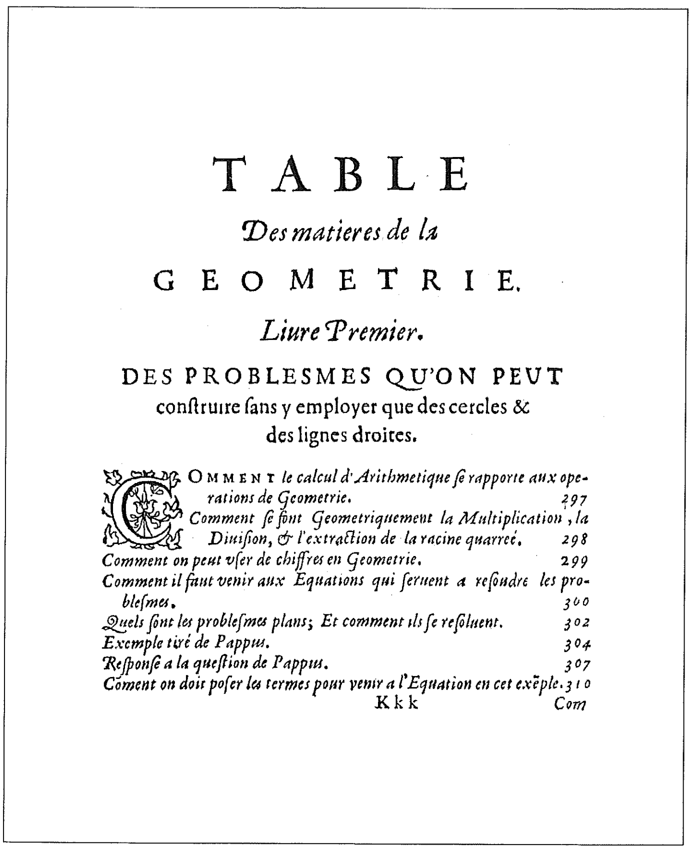
EMBACHER, F. (1992): *Relojes de sol,* Progensa.

ARRIBAS, A. y V. RIVIÉRE (1993): *Taller de Astronomía,* Sirus.

Enciclopedia "Espasa Calpe".

Artículos de revistas.

Luis Balbuena
Dolores de la Coba
Luis M. Cutillas
IB Viera y Clavijo
La Laguna
Sociedad Canaria de
Profesores de Matemáticas
Isaac Newton



TABLE

Des matieres de la

GEOMETRIE.

Liure Premier.

DES PROBLESMES QU'ON PEUT construire ſans y employer que des cercles & des lignes droites.

COMMENT *le calcul d'Arithmetique ſe rapporte aux operations de Geometrie.* 297

Comment ſe ſont Geometriquement la Multiplication, la Diuiſion, & l'extraction de la racine quarreé. 298

Comment on peut vſer de chiffres en Geometrie. 299

Comment il faut venir aux Equations qui ſeruent a reſoudre les problesmes. 300

Quels ſont les problesmes plans; Et comment ils ſe reſoluent. 302

Exemple tiré de Pappus. 304

Reſponſe a la queſtion de Pappus. 307

Cōment on doit poſer les termes pour venir a l'Equation en cet exēple. 310

Kkk *Com*

Índice de *La Géometrie* de Descartes

SUMA 23
noviembre 1996, pp. 39-42

Máquinas de calcular: una colección singular

Luis Balbuena

MISCELÁNEA

Luis Balbuena entrevista a Eusebio Huélamo con motivo de la exposición «Máquinas de calcular» instalada en el casino de la Exposición de Sevilla durante la celebración del ICME-8, formando parte de las exposiciones organizadas por la Federación.

Eusebio Huélamo Martínez es Ingeniero Aeronáutico. Nacio en Cuenca hace 45 años y pasó su niñez en un pueblo manchego, La Almarcha, entre la maquinaria del molino en el que trabajaba su padre, lo que, según él afirma, despertó su afición por los mecanismos. Terminados en ese pueblo sus estudios primarios cursó los de bachillerato en el instituto Alfonso VIII de Cuenca, lo que proclama con orgullo, asegurando haber tenido la suerte de contar con excelentes profesores.

Trabaja en una empresa de Ingeniería, dedicándose fundamentalmene a temas de Simulación.

— *¿Cuánto tiempo lleva coleccionando estos aparatos?*

— Unos diez años.

— *¿Lo hizo por alguna razón especial?*

— Todo comenzó porque un buen amigo de mis tiempos de Colegio Mayor me enseñó una máquina de su propiedad y la verdad es que me dio un poco de envidia. A partir de entonces fui comprando esporádicamente. Luego, muchas máquinas las he adquirido en un estado lamentable y las he ido reparando y recomponiendo yo mismo, lo que me ha obligado a entrar con cierta profundidad en sus mecanismos. Las he ido apreciando como lo que son, es decir producto de muchas horas de dedicación de la gente que las diseñó. Y se encuentra uno con soluciones sorprendentes, y busca otra a ver si es distinta, y se documenta e investiga...

— *¿De qué fecha es el más antiguo que tiene?*

— El aparato más antiguo que tengo, y que forma parte de la exposición, es la *Hélice de Fuller,* que se patentó en 1878. Hay que tener en cuenta que las máquinas de calcular anteriores a 1870 son ejemplares rarísimos... y carísimos. Sin ir más lejos, hace unos meses me ofrecieron un aritmómetro de 1848 (por las características que me dieron por teléfono la verdad es que creo que debe ser ejemplar único) por el módico precio de... varios, muchos, millones de pesetas ¡ya me hubiera gustado poder adqurirlo! En máquinas propiamente dichas (la hélice no deja de ser una regla de cálculo) la más antigua es la *Brunsviga A,* modelo relativamente raro –el módelo B, idéntico pero de menos cifras, tengo entendido que fue más corriente –que es de 1892.

— *¿Cuál o cuáles destacaría por su originalidad?*

— Por originalidad, y por su simplicidad, creo que debería destacarse la sumadora *Adix* que, bien mirado, no sirve para nada, toda vez que sólo puede sumar de dígito en dígito y su rango no alcanza más que hasta 999. No cabe duda de que en su tiempo (1903) desarrollaría su función.

Adix, máquina de sumar de 1903 que sólo puede sumar de dígito en dígito

— *¿Cúal por su rareza?*

— La verdad es que entre los ejemplarse de la colección no hay ninguna rara, en el sentido de que existen pocos ejemplares de ella. Sin embargo, sí es rara, conceptualmente, la *Curta,* una máquina que realmente es una maravilla de relojería y que fue un diseño revolucionario.

— *¿Sabe si los profesores de la época tenían algún tipo de prevención por que lo niños no aprendiesen las operaciones, cono se tienen hoy, con la calculadora? ¿Se llegaron a utilizar en la escuela?*

— No lo se, supongo que no porque realmente no creo que hubiese lugar. Hay que tener en cuenta que estas máquinas eran muy raras, comparativamente mucho más que los ordenadores actuales. Por ejemplo, en 1904, un *aritmómetro de Thomas* costaba 990 pesetas, mientras que el sueldo de un peón era de una peseta diaria. Si suponemos que ese sueldo, trasladado a 1996, se convierte en el sueldo mínimo, no hay más que hacer la proporción para ver que el coste de un aparato de este tipo sólo se lo podían permitir los organismos oficiales o profesionales (ingenieros, arquitectos) que realmente le iban a sacar un gran partido. De hecho, yo recuerdo que en Cuenca, en el Instituto, había sumadoras en secretaría pero solamente vi una máquina (ahora creo que era una *Minerva*) que usaba mi profesor de Física esporádicamente. Creo que con esto están respondidas ambas preguntas.

— *¿Qué tipo de operaciones de puede realiazr con estas calculadoras?*

— Normalmente sólo las cuatro reglas. Existieron algunos modelos, muy pocos, que eran capaces de extraer raíces cuadradas.

— *¿Cuál es la que da más prestaciones?*

— En ese aspecto son todas muy parecidas. Realmente en lo que se avanzó mucho, en los últimos años en los que se fabricaron estos aparatos, fue en los mecanismos de transmisión entre el registro del resultado y el teclado. Ejemplos de esto: *NADAS BTG20, Friden, Facit CA2-16,* etc. Si nos atenemos a otro aspecto. como el de la memoria adicional (lo que serían las teclas M+ y M- de las calculadoras electrónicas más sencillas) ya en 1907 se introdujo este mecanismo, como se puede ver en la máquina *Unitas*, que está en la exposición.

Hélice de Fuller, regla de cálculo de 1879 con un desarrollo de escala de doce metros

— *¿Se pueden clasificar los algoritmos que utilizan?*

— En las máquinas expuestas no, porque todas las que hacen las cuatro reglas usan el mismo, es decir, realizan la multiplicación mediante adiciones sucesivas y la división mediante restas sucesivas, según lo había previsto Leibniz para su diseño de hace trescientos años. Sí hubo algunas máquinas un tanto *especiales:* por ejemplo, hubo un modelo de *Friden,* exteriormente casi idéntico al que hay expuesto, que extraía raices cuadradas mediante el algoritmo de Toppler que puede realizarse, manualmente, en cualquiera de las expuestas. *La Millonaria,* de Otto Steiger, tenía incorporada, mediante un ingenioso mecanismo de barras, la tabla de Pitágoras para multiplicar directamente. Pero éstas sí que son máquinas raras en sentido estricto. *La Millonaria* desciende del diseño de León Bollée del que, que yo sepa, sólo existe un ejemplar en el Museo de Artes y Oficios de París. También el diseño de Ramón Varea lo tenía incorporado pero me parece que sólo se quedó en la patente; es curioso lo de este hombre, periodista-aventurero gallego que le comentó a un redactor de periódico de Nueva York que había diseñado su máquina no para explotar su invento sino para demostrar que un español podía inventar tanto y tan bien como cualquier otro.

— *¿Puede usted orientar a los interesados en el tema con algunas lecturas?*

— Los avances en cualquier campo de la Ciencia tienen su contrapartida: en este momento es difícil encontrar libros sobre el tema, porque se agotaron hace años. Incluyo como anexo una lista de libros básicos, bastantes de los cuales los tengo localizados, bien porque se han hecho reediciones o porque existe algún ejemplar en la Biblioteca Nacional. El de W. Dyck, que debe ser interesantísimo, no lo he conseguido y, por último, existe otro que tampoco he conseguido pero ganas no me faltan, que es un texto en ruso (supongo que debe haber traducción al francés) de V. G. von Bohl *Aparatos y máquinas para le ejecución mecánica de las operaciones de la aritmética,* Moscú, 1896. Permítame hacer un llamamiento desde aquí para que si algún lector sabe donde puede encontrarse cualquiera de ellos haga el favor de comunicármelo. Para un principiante recomiendo encarecidamente el de E. Martin (en su reedición del Charles Babbage Institute se encuentra fácilmente en los Estados Unidos).

— *¿Cree que los fundamentos de estas máquinas están al alcance de un alumno de enseñanza primaria o secundaria?*

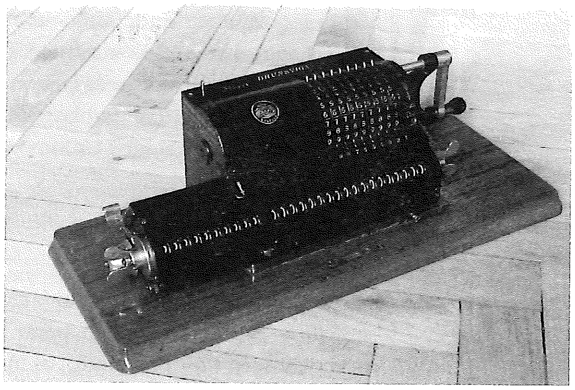
— Por supuesto que sí, los fundamentos teóricos son muy sencillos. Se complican un poco más en su realización práctica pero no demasiado, al menos en las máquinas primitivas. En las más modernas la cosa cambia y una máquina Friden, por ejemplo, puede resultar una pesadilla.

Marchant KC, máquina Sistema Odhner que tiene la particularidad de disponer de teclado completo y motor eléctrico

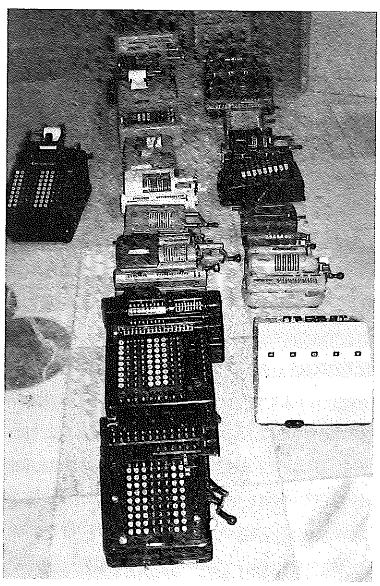
— *¿Puede ser un objetivo de un equipo de trabajo construir una de estas máquinas?*

— Sí creo que se podría construir un esbozo, por ejemplo una *rueda de Odhner,* pero tampoco ahora soy capaz de decir si serviría para algo, desde el punto de vista matemático. No veo factible construir una máquina de calcular: los mecanismos, por sencillos que sean, necesitan una fuerte precisión en su factura y desanima a cualquiera el hecho de haber construido algo que no funciona. Sin embargo, sí creo que se podrían construir sobre ordenador, sobre todo con las nueva herramientas de diseño gráfico y animación. Y, por supuesto, lo que sí puede construirse son reglas de cálculo de todo tipo y pelaje. Ahí están los ejemplos del *Cilindro del Cálculo* de cartón copia de uno fabricado en Ferrol, o de la *regla de*

Hannyngton, o de las *regletas de Genaille,* o de *las de Lucas...*, que yo me he construido, o *la de Thacher,* que alguna vez me construiré. Esto, además de permitir disponer de algo que se ha hecho uno mismo y que calcula, y que lo hace bien, daría pie para explicar muchas más cosas: analogías (el producto como suma de dos segmentos, por ejemplo) y, sobre todo, para que los alumnos encontrasen muy interesantes los resultados de sus investigaciones y vieran que en este mundillo existen ligazones que nunca hubieran imaginado: Lucas, por ejemplo, que popularizó el empleo de las reglillas multisectoras, es el que resolvió de forma general problemas tan conocidos como el de los puentes de Koenisberg o el de las ocho damas de ajedrez. Kummer, que definió los conceptos de grupo y anillo y dio una estructura formal a los números complejos fue el que inventó el contóstilo en su versión más moderna, y tantos y tantos otros. Y, en el terreno de la geometría, se podrían construir desde pantócrafos, compases de reducción, algo tan sencillo como un *planímetro de Prytz* ¡que no es más que una barra doblada y afilada un poco cuidadosamente y funciona y mide áreas! sobre el que basar explicaciones de aplicación de cálculo integral...



Brunsviga, modelo A. Máquina Sistema Odhner de 1892



Luis Balbuena
Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas Isaac Newton

Bibliografía

Únicamente se citan, por problemas de espacio, los que el autor considera clásicos imprescindibles.

JACOB, L. (1911): *Le Calcul Mécanique,* Octave Doin et Fils, París.

D'OCAGNE, M. (1905): *Le Calcul simplifié par les procédés mécaniquess et graphiques,* Gauthier Villars, París. (Hay una edición de 1928 que desconozco.)

MARTIN, E. (1925 y 1937): *Die Rechermaschinen und ihre Entwicklungsgeschichte.* Biblia de las máquinas de calcular, ilegible para el que no esté acostumbrado a la tipografía clásica alemana. Afortunadamente hay una traducción al inglés de la edición de 1925: *The Calculating Machines, their History and Development,* patrocinada por el The Charles Babbage Institute y editada por el MIT Press and Thomas Publishers. ISBN 0-262-13278-8. Sería interesante disponer de un ejemplar de la edición alemana (no hay traducción a otro idioma, que yo sepa) de 1937 que no aporta nada en el plano teórico pero sí la descripción de las principales máquinas que se fabricaron en ese período.

TATON, R. (1963): *Le Calcul Mécanique,* Col Que sais-je?, Presses Universitaires de France.

HORSBURGH, E.M. (1914): *Handbool of the Napier Tercentenary Celebration of Modern Instruments and Methods of Calculation.* (Reeditado recientemente por el Instituto Charles Babbage, ISBN 0-262-08141-5)

MOLK, J. (Dir.): *Encyclopédie des Sciencas Mathematiques Pueres et Appliquées,* tomo 1, vol. 4. En este tomo hay un capítulo, escrito por M. d'Ocagne, basado en Mehmke, sobre cálculo numérico e instrumentos de cálculo. (Esta obra, completa, es un clásico que no debería faltar en ninguna biblioteca especializada).

COUFFIGNAL, L. (1933): *Les Machines à Calculer. Leurs principes and leur évolution,* París.

COUFFIGNAL, L. (1938): *L'analyse mécanique,* París.

DYCK, W. (1892, 1893): *Katalog matematicher und math-physikalischer Modelle, Apparate un instruments,* München, Nachtrag.

LENZ, K. (1924): *Die Rechermaschinen und das Machinenrechnen,* Leipzig-Berlin.

SUMA 23
noviembre 1996

La enseñanza de las matemáticas en Europa

Florencio Villarroya Bullido (Coordinador)

Hace algunos meses, los directores de SUMA me encargaron coordinar un trabajo monográfico que recogiera la situación, más o menos actual, de la enseñanza de las matemáticas en Europa, para la escolarización obligatoria y postobligatoria, en sus diversas opciones, anterior a la universidad.

Allá por el mes de enero del 96, solicité a algunos colegas europeos su colaboración para dicho trabajo. Me gustaría destacar que los elegidos han sido profesores en activo, en algún nivel educativo de su país, no entre representantes de las correspondientes administraciones educativas. En principio los países invitados a participar fueron: Inglaterra, Alemania, Italia, Francia, Rusia y Suiza. Con ellos se quería dar una visión de lo que sucedía, por un lado en los cuatro países mayores de la Comunidad Europea, a los que se quería añadir un país atípico dentro de Europa: Suiza, y otro país representativo del antes llamado Bloque del Este.

Se elaboró un cuestionario, que figura en el Anexo, a título indicativo, para orientar hacia las mismas cuestiones las colaboraciones. Se pedía, escrito entre 12 y 15 folios, una introducción al sistema educativo del país, el calendario escolar, períodos de vacaciones, la formación de los profesores, en especial de matemáticas, el horario de clases, los contenidos de matemáticas de los diferentes cursos, las diversas posibilidades de estudiar matemáticas en los distintos niveles, etc.

Con el tiempo fueron llegando algunos trabajos. Francia y Rusia fueron los primeros, un poco más tarde Italia. Con la llegada del verano, y del ICME-8, tuve oportunidad de hablar personalmente con las personas encargadas de Inglaterra y Alemania que me confirmaron el envío de su trabajo para finales de septiembre.

INFORME

A mediados de agosto recibí un fax de Inglaterra, en el que se me comunicaba la imposibilidad de, por parte de la persona elegida, hacer su trabajo. Durante el mes de septiembre he intentado localizar a otras personas de ese país, pero me ha resultado imposible para estas fechas tener esa parte. Esta es la razón por la que no podemos contar con un país que, durante la época laborista tuvo un sistema de enseñanza que fue fuente de inspiración para la Reforma del Sistema Educativo del Sr. Maravall, cuando era ministro de educación y, que en los últimos años, con la llegada de los conservadores al poder ha sufrido profundas reformas.

A finales de agosto, asistí, como puede verse en otro lugar de esta misma revista, al Congreso de la Sociedad Belga de Profesores de Matemáticas. En dicho congreso, la Junta directiva de dicha sociedad me dijo que me enviaría su colaboración correspondiente a dicho país, si bien sólo de la parte francófona. En este mismo Congreso, conocí a un profesor croata que al hablarle del tema, se ofreció a escribir, aunque fueran unas pocas líneas sobre la enseñanza de las matemáticas en su país. Acepté gustoso su ofrecimiento, y esta es la razón por la que aparece Croacia. La brevedad de esta parte se debe a dos razones; una que Berislav, no había recibido el cuestionario (cuando yo se lo envié, el ya había enviado su trabajo, cruce de correos), y otra las dificultades de la lengua, yo no conozco el croata y él tiene grandes dificultades para escribir en francés (idioma común a ambos).

La riqueza del citado congreso no acaba allí, pues J. P. Richeton, presidente de la A.P.M.E.P. me comunicó la existencia de un trabajo realizado por R. Cabassut, para la revista *l'Ouvert,* de la regional de la A.P.M.E.P. de Strasbourg, sobre la Enseñanza de las Matemáticas en Dinamarca. Puesto, de nuevo, en contacto con R. Cabassut, en los últimos días de septiembre me ha hecho llegar el trabajo que también se incluye así, en este monográfico.

Señalar también que el texto sobre Suiza está elaborado por mi, a partir de una brevísima respuesta de J. A. Calame al cuestionario, y abundantes documentos que me ha enviado para la ocasión.

De esta manera, la panorámica sobre la enseñanza de las matemáticas en Europa es más amplia, al recogerse, no solo los países inicialmente previstos, con excepción de Gran Bretaña, sino otros que podemos considerar representativos de otras áreas europeas: Escandinavia, Norte de Europa y nuevos países del Este.

No querría que esta introducción impidiera la lectura de los trabajos que siguen, pero si querría hacer un breve comentario general: las matemáticas, y su enseñanza, en el contexto europeo han sufrido dos grandes reformas en los últimos decenios: la primera la de las llamadas *matemáticas modernas,* y otra posterior para salir del fracaso a la que condujo aquélla. En esta segunda, el interés se centra en las actividades de los alumnos, en las capacidades generales, en la resolución de problemas, al menos en los países más *avanzados:* Italia, Francia, Alemania*, Suiza. El resto, les va siguiendo en los cambios, si bien con más lentitud.

En muchos países, las responsabilidades educativas están muy repartidas entre los distintos cantones, provincias, regiones,... lo que da diferencias, más aparentes que reales, entre los sistemas educativos correspondientes. El número de horas de matemáticas por alumno también es variable, podemos decir, en general, que es superior al de España. La existencia, también en casi todos los países de una enseñanza secundaria generalizada, obligatoria hasta los dieciséis años, al menos, no impide que existan, en la mayoría de países presentes en este trabajo, aún con los mismos programas de matemáticas, diferentes niveles de profundización y presentación; a veces con opciones claramente diferentes desde los doce o trece años de los alumnos. Cuando pasamos a la enseñanza no obligatoria, constatamos que en general, el número de horas dedicadas a las matemáticas en las opciones científicas, es mayor, de nuevo, que el que se da en estos momentos en nuestro país, en los centros que dan BUP y COU, y, por tanto, mucho más si lo comparamos con los centros que aplican la LOGSE.

No obstante, podemos reconocer que las Matemáticas, siguen siendo un lenguaje universal, que en Europa en casi todos los países su enseñanza ha seguido y sigue por caminos próximos y que estimular intercambios entre profesores de esos países puede servir para mejorarla.

La existencia, también en casi todos los países de una enseñanza secundaria generalizada, obligatoria hasta los dieciséis años, al menos, no impide (...), aún con los mismos programas de matemáticas, diferentes niveles de profundización y presentación.

* En el momento de cerrar la edición no ha llegado el artículo correspondiente a Alemania. Se publicará en un número próximo de SUMA.

Florencio Villarroya
IES Miguel Catalán.
Zaragoza.
Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas Pedro Sánchez Ciruelo

ANEXO

I. Estructura general del sistema educativo

A. Primaria, Secundaria,... Edades de cada una y posibles ramas de elección.

B. Fechas de inicio de la «última reforma».

C. ¿Hay una reforma general del sistema educativo, o solamente de ciertos aspectos: programas de algunas disciplinas,...?

D. Calendario, vacaciones, horario,...

E. Horas de matemáticas cada semana, citando el total de horas del correspondiente curso.

F. Enseñanza privada/pública. Proporciones.

G. Número de alumnos por clase y nivel.

H. Condiciones para acceder a la Universidad.

II. Los profesores de matemáticas

A. Niveles de formación (cursos de formación en la Universidad para Primaria, Secundaria...).

B. ¿Formación matemática, didáctica, pedagógica o en otras disciplinas científicas?

C. Formas de acceso a la profesión de enseñante: contrato laboral, funcionariado...

D. Número de horas de clase por semana de cada profesor.

III. Los programas (y sus reformas) (explicitar)

A. Primaria, ¿el mismo para todos?

B. Secundaria, ¿el mismo para todos? ¿Diversas ramas? ¿Diversos niveles?

1. ¿Diferentes niveles de matemáticas, para el mismo grupo de edad, o no (de acuerdo con las capacidades personales)?
2. ¿Diferentes niveles de matemáticas, para el mismo grupo de edad, o no (de acuerdo con las opciones de los alumnos: opciones científicas, literarias, técnicas, fin de los estudios,...)?
3. Programas: abiertos (¿es el enseñante quién lo cierra con su grupo de alumnos?) o cerrados (¿impuestos por el Ministerio correspondiente?).

C. Relación o correlación de los programas de Matemáticas con los programas de otras materias.

IV. Los métodos de enseñanza

A. ¿Difieren según el nivel escolar? Análisis.

B. Empleo de los libros de texto.

C. Ejercicios o problemas... problemas abiertos.

D. ¿El rigor y las demostraciones tienen algún espacio?

E. La organización de los trabajos en clase (individual, grupo, clases «magistrales», empleo (¿abusivo?) de los libros de texto, problemas/ejercicios, trabajos de investigación,...), deberes para casa...

V. El sistema de evaluación

A. ¿Evaluación de los contenidos matemáticos, de las actitudes, de las capacidades, de los «valores»...?

B. ¿Por qué medios se hace la evaluación? Ejercicios escritos en clase, cuaderno del alumno, trabajos en equipo, presentaciones orales, ...

VI. La aceptación de las «reformas» por parte del «público»: enseñantes, alumnos, padres, ...

VII. Comentarios

SERVICIO DE PUBLICACIONES

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

V OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICAS

Recopilación de los problemas propuestos en las distintas fases provinciales, autonómicas y estatal de la «V Olimpiada Matemática Nacional», organizada por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Precio

Socios . . . . 1.250 pta
No socios . . . . 1.750 pta

OTRAS PUBLICACIONES

- **IV Olimpiada Matemática Nacional**
  Socios: 1.000 pta
  No socios: 1.500 pta

- **Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática (ADDENDA SERIES)**
  * Geometría y sentido espacial
  Socios: 900 pta
  No socios: 1.200 pta

- **Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática (ADDENDA SERIES)**
  * Geometría en el ciclo medio
  Socios: 1.100 pta
  No socios: 1.500 pta

- **Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática (ADDENDA SERIES)**
  * Geometría desde múltiples perspectivas
  Socios: 1.100 pta
  No socios: 1.500 pta

Solicitud de pedidos

(El envío se servirá contrarreembolso a los precios indicados más gastos)

Servicio de Publicaciones. FESPM. Apartado de Correos 1009. 03080 ALICANTE

SUMA 23
noviembre 1996, pp. 47-62

La enseñanza de las matemáticas en Francia*

Richard Cabassut

INFORME

En Francia, la escolarización es obligatoria de los 6 a los 16 años. Además, en 1994-95 la escolarización de niños de 2 años es del 35,4%, la de niños de 3 años del 99,5%, y es del 100% a partir de 4 años. Estos últimos años se observa una escolarización total de los 3 a los 5 años, en la escuela maternal, y una estabilización de la escolarización de los niños de 2 años.

La escuela primaria acoge a los niños de 6 a 11 años. Cada clase la lleva, por regla general, un solo profesor, profesor de escuela, polivalente. Las escuelas están gestionadas materialmente por los ayuntamientos. No disponen de un presupuesto propio. Un consejo escolar compuesto por el director, nombrado por la administración, profesores, representantes elegidos por los padres y representantes de la administración y del ayuntamiento, dan sus opiniones y presentan sus sugerencias sobre el funcionamiento de la escuela.

La enseñanza secundaria ha conocido, en 1994, un descenso en su número, que no está ligado a una situación demográfica. Los institutos de enseñanza general o tecnológica presentan un descenso en su alumnado, mientras que el segundo ciclo profesional, que había sufrido un fuerte descenso en 10 años, manifiesta un fuerte desarrollo de la modalidad que prepara para el *bac* profesional y, mientras tanto, los módulos de aprendices, también tienen un fuerte incremento a partir de 1993. En 1994, la tasa de acceso, en relación con el correspondiente grupo de edad, está estimada en Segundo (general o tecnológico) en un 54,2%, en Segundo Profesional en un 31,4%, y en aprendices en un 14,7%.

Cada tres meses, el consejo de profesores, al que se añaden representantes de alumnos y de los padres, hace una evaluación escolar de cada alumno (control continuo a través de exámenes orales o escritos), y da al final del curso indicaciones para la orientación del alumno. Para algunas cla-

* Traducción: Florencio Villarroya

Curso	Edad	Nombre de la clase	N.º de alumnos en 1994-95
Primer grado Enseñanza pre-elemental en la escuela maternal	3 a 5 años	Clases maternales: pequeños, medianos y mayores	2.663.000
Primer grado Enseñanza elemental en la escuela primaria	6 años	Preparatorio: CP	4.182.000
	7 años	Curso Elemental 1: CE 1	
	8 años	Curso Elemental 2: CE 2	
	9 años	Curso Medio 1: CM1	
	10 años	Curso Medio 2: CM2	
Enseñanza secundaria (segundo grado) Primer ciclo en el Colegio	11 años	Sexto	3.433.000
	12 años	Quinto	
	13 años	Cuarto	
	14 años	Tercero	
Enseñanza secundaria (segundo grado) Segundo ciclo en el Instituto de Enseñanza General, Tecnológica o Profesional	15 años	Segundo	1.549.000 en instituto general o técnico 723.000 en institutos profesionales
	16 años	Primero	
	17 años	Terminal	
Enseñanza superior			2.097.000

Cuadro 1. Estructura general del sistema educativo francés

ses (quinto, tercero, segundo), estas indicaciones del consejo de fin de curso son imperativas, si bien existen procedimientos para reclamar, para otras (sexto, cuarto, primero) son simples consejos que las familias pueden no seguir.

Los colegios y los institutos están dirigidos por un director, que ha superado un concurso-oposición de carácter nacional y, posteriormente, ha sido nombrado por la administración. Cada centro tiene su propio presupuesto y está administrado por un consejo de administración al que pertenecen representantes elegidos de los padres, de los alumnos, de los profesores y representantes de la administración y provinciales para el colegio, siendo regionales para el instituto. La provincia y la región son responsables de la construcción y de la gestión material, respectivamente, de los colegios y de los liceos. Cada centro dispone de un equipo administrativo, ninguno de cuyos miembros asume tareas de enseñanza; el director (llamado *proviseur* en el instituto y *principal* en el colegio), un adjunto, un administrador (encargado de la ejecución del presupuesto), un consejero principal de educación (que se ocupa del seguimiento de los alumnos, especialmente de sus ausencias), secundados, eventualmente, por personal de secretaría, vigilantes y conserjes.

La enseñanza en el colegio dura cuatro años. Casi el 80% de los alumnos entra en el colegio a la *edad normal:* el año en que cumplen once años. Cada materia se enseña por un profesor diferente, el profesor de colegio. Al final de tercero, los alumnos pasan un examen en tres materias (matemáticas, francés, geografía-historia) y un control continuo de sus conocimientos para obtener el título de colegio (575.841 en 1995), diploma que no es obligatorio para continuar la escolarización.

La escolarización en los institutos de enseñanza general o tecnológica dura tres cursos.

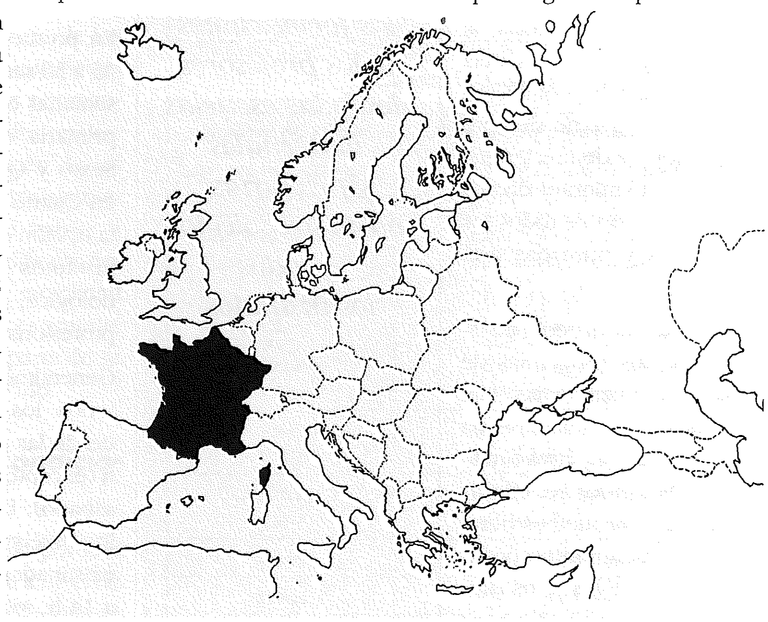
Algunos alumnos con dificultades en la enseñanza general, pueden orientarse hacia la enseñanza profesional al acabar la clase de quinto, para preparar durante tres cursos un certificado de aptitud profesional (CAP) (en 1993, el 8,3% de los alumnos eligieron esta orientación).

La orientación al acabar tercero, conduce a los alumnos, bien a repetir curso (en 1994, el 10,4% lo ha repetido), bien a ir al instituto de enseñanza profesional, para preparar durante dos cursos un diploma de estudios profesionales (BEP), (en 1994, el 20,7% siguieron esta opción), bien a ir a un instituto general o tecnológico para hacer segundo (en 1994, el 61,8% hizo esta elección), bien a los módulos de aprendices (4,6% en 1994). Durante 1994-95, también había 260.000 alumnos en los centros de formación de aprendices (CFA).

El instituto de enseñanza profesional prepara un diploma profesional BEP, prolongado, eventualmente por una preparación de dos años para un *bac* profesional, con una enseñanza general, una enseñanza profesional, práctica y teórica, y períodos de prácticas en una empresa.

La escolarización en los institutos de enseñanza general o tecnológica dura tres cursos. El curso segundo, es un curso, común en gran parte a los dos tipos de institutos, al final del cual, los alumnos tendrán que elegir entre diferentes opciones (S, científica, L, literaria, ES, económica y social, T, tecnológica). Para cada una de las opciones L, ES y S, el alumno puede elegir una enseñanza más amplia de las matemáticas con un horario y un programa suplementarios específicos para cada opción. En terminal, los alumnos preparan el bachillerato o bac. Es un diploma nacional, necesario, pero no siempre suficiente, para acceder a la enseñanza superior.

La organización de este sistema (estructura, objetivos generales, programas, orientaciones pedagógicas, estatus y formación de los profesores, evaluación y titulación) es nacional, y supervisada por el Ministerio de Educación Nacional, de París, a veces ayudado por el Ministerio de Juventud y Deportes, y el Ministerio de Enseñanza Superior. Sin embargo, algunas estructuras descentralizadas permiten introducir una dimensión regional o local. Francia está dividida en 27 Academias (cada una de las cuales agrupa, a 4-5 regiones, por término medio), dirigidas por un Rector, que representa al ministro. El rector trabaja en colaboración con las regiones, provincias, y ayuntamientos de su Academia, responsables, respectivamente, de la construcción y de la gestión material de los institutos, de los colegios y de las escuelas. Se multiplican los reglamentos que implican una mayor flexibilidad en la organización local: a partir de 1992, existen en Alsacia clases maternales bilingües francés-alemán con paridad horaria, que se continúan en primaria y secundaria con una enseñanza mayor del alemán; a partir de 1995, los medios en el horario de enseñanza para la clase de sexto, pueden gestionarse de manera diferente en cada centro (reparto del horario de las materias de enseñanza, duración y frecuencia de la enseñanza, dispositivos de consolidación,...). Análogamente, existen centros que concentran las dificultades (alumnos con dificultades, medio socio-cultural desfavorecido (familia, hogar, paro), inestabilidad del cuerpo de profesores) y reconocidos como tales por la administración central, como centro sensible o centro en zona de educación prioritaria (ZEP), y beneficiándose, por tanto, de medios suplementarios. Como se ve, este sistema nacional, todavía centralizado, es mucho menos homogéneo de lo que puede parecer.



La puesta en marcha de la última gran reforma

La última gran reforma, que afecta a la reorganización pedagógica de los institutos, comenzó en 1992-93 para segundo y terminó en 1994-95, poniendo en marcha un nuevo bachillerato. Esta reforma se ha prolongado en una reforma, en la enseñanza superior fuera de la universidad, de las clases preparatorias para las *grandes escuelas* y las secciones técnicas superiores.

El curso Segundo sigue siendo en esta reforma un curso de orientación, pero la reforma modifica en él la elección de opciones: sabiéndose que ninguna de las opciones elegidas en segundo es obligatoria para la elección del siguiente curso. El gran cambio está en la elección propuesta para los cursos primero y terminal: la vía general, con tres opciones principales: literaria L, económica y social ES, y científica S, y la vía tecnológica. Para cada una de estas opciones se ha tenido que escribir para cada asignatura un programa nuevo. Existe la intención de reequilibrar cualitativa y cuantitativamente las opciones, por ejemplo, ciertos alumnos que elegían la opción científica, pero querían hacer estudios literarios. El reequilibrio cuantitativo parece notarse, y se observa una disminución, que podría ser inquietante, de las orientaciones hacia las opciones científicas y, sobre todo, hacia la especialidad de matemáticas.

La organización de las horas de enseñanza se ha complicado: clases con todo el grupo, trabajos dirigidos en medio grupo, sesiones de módulos, curso básico de matemáticas en una clase en la que sólo una parte de los alumnos siguen una profundización en matemáticas. Los *módulos* constituyen una novedad, su finalidad es constituir grupos de composición y objetivos variables en función de las necesidades personales de cada alumno o de situaciones particulares. En la práctica, la organización material de las horas de enseñanza no respeta el espíritu pedagógico que había justificado esta reorganización, frecuentemente por problemas de horarios, de las aulas, o de los profesores. Por lo que respecta a la enseñanza de las matemáticas, se deseaba reequilibrar la importancia de cada opción, especialmente respecto a la situación anterior a la reforma, en la que la opción matemática-física C, constituía la *vía regia*. En la reforma se observa un reagrupamiento de las antiguas opciones científicas C, D, E, en una única S. Los horarios de matemáticas disminuyen. La importancia de las matemáticas en ciertas opciones literarias se vuelve mínima. En la realidad, se observa que esta reforma ha permitido, tanto por el reagrupamiento de las opciones, como por la disminución del número de horas por curso, importantes ahorros en el número de profesores de matemáticas.

Otras reformas

Se han puesto en marcha otras importantes reformas. En 1991-92, se crearon los Institutos Universitarios de Formación de Maestros (IUFM), en los que se concentran todas las formaciones de los profesores, desde las escuelas maternales y primarias, hasta los colegios y todos los institutos. A partir de 1989, para la clase CE2 (Curso Elemental, en el 2.° año de la Escuela Primaria), y para las clases de Sexto, y de 1993 para las clases de Segundo, se ha realizado, al principio de cada curso escolar, una evaluación de cada alumno. Las matemáticas forman parte de las materias examinadas.

A partir de 1995, se ha emprendido una ligera reorganización pedagógica de las escuelas maternal y primaria, especialmente con una reducción de los programas, la introducción obligatoria de estudio dirigido en la escuela (30 minutos al final de la jornada escolar), la prohibición de mandar deberes escritos para casa (lo que no siempre se respeta), la introducción del aprendizaje de una lengua extranjera (a partir del curso elemental, 15 minutos diarios con técnicas audiovisuales). Una renovación de todos los programas de las escuelas maternales y primarias está programada entre los años 1995 y 1997.

Análogamente, se ha programado una nueva reorganización del colegio entre 1995 y 1998. Los programas de matemáticas se han escrito de nuevo completamente. Para el primer año de la Reforma, aplicada en Sexto, se ha puesto en marcha un Sexto de consolidación, cuya finalidad es permitir a los alumnos con dificultades beneficiarse de una mejora de su nivel. Para ello, los medios horarios están globalizados. Cada centro y cada equipo pedagógico gestionan estos horarios, adaptándolos a los problemas con que se encuentran. No se impone ninguna organización horaria mínima. La Asociación de Profesores de Matemáticas, señalaba que los alumnos ya no se benefician de las mismas condiciones de enseñanza: su horario matemático se puede reducir a 2 h 30 m semanales en algún sitio, mientras que en otro es de 5 h. También se han incorporado 2 horas semanales de estudios dirigidos.

En la enseñanza superior se ha puesto en marcha una reforma de las clases preparatorias para las grandes escuelas, a partir de 1995, para hacer más coherentes las nuevas opciones terminales con las nuevas opciones de las clases preparatorias, reequilibrando las opciones y disminuyendo la importancia de las matemáticas. Igualmente, se ha diversificado el ingreso en las escuelas de ingenieros.

Hay una reforma de la universidad a debate, especialmente para reorganizar el primer ciclo de la universidad, pues ha conocido un gran incremento de su alumnado y un importante porcentaje de fracaso. Esta reforma debería programarse a partir de 1996.

En 1991-92, se crearon los Institutos Universitarios de Formación de Maestros (IUFM), en los que se concentran todas las formaciones de los profesores, desde las escuelas maternales y primarias, hasta los colegios y todos los institutos.

Ritmos escolares: calendario, horario semanal y diario

El curso escolar se divide en tres trimestres. Al final de cada uno de ellos el consejo de profesores realiza una evaluación individual de cada alumno. Los períodos de trabajo se alternan con vacaciones cortas. Pero el turismo impone zonificaciones en las vacaciones de invierno y primavera que dividen el territorio en tres zonas, y que no aseguran un equilibrio en el reparto de esas vacaciones cortas.

En promedio el curso escolar dura de 35 a 36 semanas. En general, el horario semanal es de 26 horas en la Escuela primaria, de 24, por término medio, en Sexto y Quinto, entre 26 y 27,5 horas en Cuarto y Tercero, de 25 a 34 según la opción o las optativas elegidas en los institutos de enseñanza general o tecnológica, de 30 a 36 en los institutos profesionales.

Generalmente los centros están abiertos todos los días, excepto el domingo desde las 8 hasta las 13 h y de 14 a 18 h (excepto las tardes del miércoles y del sábado). Las escuelas primarias cierran los miércoles. Sin embargo, pueden existir adaptaciones locales: clases de 13 a 14 h, jornada más larga o vacaciones más cortas, teniendo libre el sábado por la mañana. Muchos centros tienen servicio de comedor al mediodía.

Enseñanza privada

El sistema educativo francés es obligatorio entre los 6 y los 16 años en la enseñanza pública (los libros de texto los compran los padres, solo a partir de la clase de Segundo). En 1994-95 la distribución entre centros públicos y privados mostraba que entre los alumnos de los centros de primero y segundo grados, 83,4% correspondían a centros públicos, en la enseñanza pre-elemental el porcentaje era de 87,7%, del 85,4% en la enseñanza elemental, del 80% en primer ciclo del Segundo Grado, del 79% en el segundo ciclo general o tecnológico, y 78,85 en Segundo ciclo profesional.

Estas proporciones son relativamente estables desde hace 20 años. Los centros privados son, esencialmente centros confesionales (mayoritariamente católicos) que han establecido un contrato con el Estado. Este contrato regula la ayuda financiera y el control del estado. El Estado paga a los profesores y el centro aplica los programas y las estructuras de enseñanza que el estado propone. Se advierte una fuerte implantación geográfica en el Oeste y en el sudoeste del Macizo Central. Si los padres envían a sus hijos a un centro público, este depende del lugar de residencia de los padres. También hay padres que llevan a sus hijos a escuelas privadas por razones esencialmente no confesionales: más vigilancia antes y después de las clases, población escolar menos problemática que en el centro del barrio, a veces mayor atención a las dificultades escolares. Por otro lado, la movilidad entre los dos tipos de centros es grande: muchos alumnos han hecho parte de su escolaridad en un centro privado.

Enseñanza superior, condiciones de acceso

La enseñanza superior, marcada por una gran variedad de centros, tanto a nivel de organización como de las condiciones de admisión, a veces muy selectivas, acoge a 2.132.800 alumnos en 1994-95. Formaciones cortas de dos o tres años permiten rápidamente ejercer trabajos de técnicos medios en todos los sectores industriales y comerciales, en 1994-95, 98.400 estudiantes (4,6%) en Institutos Universitarios de Tecnología (IUT), o 232.700 (10,9%) en Secciones Técnicas Superiores de los institutos (STS). El acceso para estas formaciones cortas se hace después de un examen del expediente y es muy selectivo. Las formaciones largas se preparan en la universidad o en las grandes escuelas. Después de la admisión por el expediente, los estudiantes (71.600 en 1994, el 3,4%) preparan en dos o tres años de cla-

	Zona A	Zona B	Zona C
Entrada de los profesores	lunes 4 de septiembre		
Entrada de los escolares	martes 5 de septiembre		
Vacaciones de Todos los Santos	Del 27 de octubre al 5 de noviembre (10 días)	Del 22 de octubre al 1 de noviembre (11 días)	Del 27 de octubre al 5 de noviembre (10 días)
Vacaciones de Navidad	Del 24 de diciembre al 7 de enero (15 días)	Del 21 de diciembre al 2 de enero (13 días)	Del 22 de diciembre al 3 de enero (13 días)
Vacaciones de Invierno	Del 25 de febrero al 10 de marzo (15 días)	Del 18 de febrero al 3 de marzo (15 días)	Del 3 de marzo al 17 de marzo (15 días)
Vacaciones de Primavera	Del 14 de abril al 28 de abril (15 días)	Del 7 de abril al 21 de abril (15 días)	Del 18 de abril al 1 de mayo (14 días)
Fin de curso en las escuelas	alumnos: 30 de junio profesores: 2 de julio		
Fin de curso en los colegios	alumnos: 29 de junio profesores: 6 de julio		
Fin de curso en los institutos	alumnos: 25 de junio profesores: 6 de julio		

Cuadro 2. Calendario escolar del curso 95-96

Nombre del curso	N.° de horas semanales de matemáticas	N.° total de horas
Clases maternales: pequeños, medianos y mayores	Sin horario obligatorio.	
Curso Preparatorio: CP	entre 5,5 h 30 m y 9 h 30 m para matemáticas, ciencias y tecnología	26 h
Curso Elemental 1: CE 1	entre 5 h 30 m y 9 h 30 m para matemáticas, ciencias y tecnología	26 h
Curso Elemental 2: CE 2	entre 6 h 30 m y 10 h 30 m para matemáticas, ciencias y tecnología	26 h
Curso Medio 1: CM 1	entre 6 h 30 m y 10 h 30 m para matemáticas, ciencias y tecnología	26 h
Curso Medio 2: CM 2	entre 6 h 30 m y 10 h 30 m para matemáticas, ciencias y tecnología	26 h
sexto	3 h (indicativo)	entre 22,5 y 24 h
quinto	3 h (indicativo)	entre 22,5 y 24 h
cuarto	4 h	entre 26 y 27,5 h
tercero	4 h	entre 26 y 27,5 h
segundo general	2,5 h en todo el grupo + 1 h con medio grupo +3/4 h en grupo *módulo* = 4 h 1/4 en BEP industrial 2 h de 34 h S. terciario 3 h de 31 h Sanitario y Social: 2 h de 31 h	24 h (al menos) depende de las opciones
primero	L literaria: 1 h obligatoria + 4 h (opcionales) ES económica: 4 h obligatorias + 2 h (opcionales) S científica: 5 h + 1 h en grupo T tecnológico: 2 a 3 h + 1 a 2 h en grupo Profesional: 2 a 3 h	26 h como mínimo (depende de las opciones y optativas)
terminal	L literaria: 2/3 h obligatoria + 4 h (opcionales) ES económica: 3 h obligatorias + 2 h (opcionales) S científica: 6 h + 2 h (opcionales) T tecnológico: 2 a 3 h + 0 a 2 h en grupo Profesional: 2 a 3 h	28 h como mínimo (depende de las opciones y optativas)

Cuadro 3. Número de horas de matemáticas a la semana

Retrasos escolares en 1994-95

al final de la primaria (CM2):	edad teórica 10 años.
	18,3% de alumnos de 11 años.
	2,3% de alumnos de 12 años o más.
Al empezar Sexto:	20% de alumnos retrasados (frente al 40% en 1994).

Distribución de los alumnos al finalizar Quinto, en 1993

10,6% repiten curso	77,9% pasan a Cuarto	8,6% preparan un CAP.

Distribución de los alumnos al finalizar Tercero, en 1994

repiten curso,	pasan a Segundo	pasan al instituto profesional,	van a módulos de aprendices.
10,4%	61,8%	20,7%	4,5%

En 10 años el porcentaje de acceso al nivel del bachillerato ha pasado del 35%, en 1984 al 67,1% en 1994, y el número de universitarios ha pasado de menos de un millón, a 1,535 millones en 1994.

Distribución de los bacs en 1995

Tipo de bachillerato	N.° de bachilleres	%
Bac general opción L	69.734	14,6
Bac general opción ES	75.049	15,7
Bac general opción S	135.935	28,5
Bacs tecnológicos	132.756	27,8
Bacs profesionales	63.719	13,4
TOTAL	477.193	100

Distribución de los alumnos salidos del sistema educativo en 1993

En 1993, salieron del sistema 775.200 alumnos.
64.200 (8,3%) sin formación profesional, al final de Tercero o por abandono del segundo ciclo corto,
202.300 (26%) con nivel CAP, BEP, o abandono en Segundo Ciclo largo,
216.400 (28%) con nivel de Bac, o abandono antes del nivel Bac+2
112.000 (14,4%) con Nivel Bac+2,
180.300 (23,2%) con Título de Segundo o Tercer Ciclo Superior.

Tamaño de los grupos de clase en 1994-95

	media de alumnos por clase	en ZEP	% de alumnos en ZEP
escuelas maternales	27,1	26,3	13,7
escuelas primarias	22,9	21,6	10,9
colegios	24,6	22,1	14,7
institutos profesionales	21,6		
institutos generales tecnológicos	28,7		

Dispersión del tamaño de las clases en 1994-95

Proporción de clases con números pequeños o grandes de alumnos en %

Maternal:	Menos de 20 alumnos: 4,7	Más de 30 alumnos 9,4
Primaria:	Menos de 15 alumnos: 8,8	Más de 25 alumnos: 30,6
Colegio:	Menos de 20 alumnos: 9,6	Más de 30: 7,5
Institutos generales y técnicos:	Menos de 25 alumnos: 24,9	Más de 35 alumnos: 9,9

Cuadro 4. Distribución de los alumnos

ses preparatorias el examen de ingreso en las grandes escuelas. Caso de superarlo, proseguirán su escolarización de dos a cuatro años en estas escuelas de ingenieros (50.500, en 1994-95, el 2,4%), cuyo acceso se hace también por concurso al salir de la universidad. Algunos estudiantes preparan su oposición para ser profesor en los Institutos Universitarios de Formación de Maestros (IUFM), cuyo acceso se hace por el expediente (en 1994-95, 83.000, es decir el 3,9%). Finalmente, la gran mayoría (1.353.700, es decir el 63,5%) elige la universidad (excluidos los IUT y los IUFM), repartidas en 677.000 en el primer ciclo, 464.000 en segundo ciclo y 212.700 en tercero. El bachillerato, en principio, es suficiente para acceder a la universidad, si bien existen algunas opciones universitarias selectivas. En la enseñanza superior, los estudios con *numerus clausus* son muy selectivos, en general, al principio, mientras que los estudios universitarios largos (excluidos los IUT y los IUFM) realizan una selección progresiva a lo largo de los estudios.

En 1993, el porcentaje de acceso global de los bachilleres a la enseñanza superior era del 100% para los bachilleres generales y del 86% para los tecnológicos, la universidad (los IUT, aparte) atrae a una parte creciente de los bachilleres. En 1994-95, el 31% de los bachilleres continuaba en la enseñanza superior de ciclo corto (en estudios tecnológicos: IUT o STS).

Los profesores de matemáticas

A partir de la creación de los IUFM, en 1991-92, todos los profesores de matemáticas (en la escuela, en el colegio y en todos los tipos de institutos) se forman en ellos, junto con los profesores de otras disciplinas.

Niveles de formación

Los futuros profesores empiezan recibiendo una formación académica en la universidad, preparando una diplomatura de 3 años. No es obligatorio que esta diplomatura sea de matemáticas o de pedagogía. Especialmente entre los profesores de la escuela, polivalentes, la mayoría tiene una diplomatura no científica. Incluso muchos profesores de institutos profesionales, bivalentes matemáticas-ciencias, tienen una diplomatura en ciencias físicas. Para las oposiciones de *agregado,* el título exigido es el de licenciatura (bac+ 4 años).

Formación matemática, didáctica, pedagógica o en otras disciplinas científicas

Después de la diplomatura, el estudiante prepara la oposición de ingreso en el cuerpo de profesores, sea en el primer año de IUFM, sea como candidato libre. Como los IUFM tienen medios limitados, algunos tienen *numerus clausus* para acceder.

En el primer año de IUFM, hay diferentes asignaturas para ponerse al nivel (en matemáticas, o para los profesores polivalentes, en otras disciplinas), una preparación para las pruebas matemáticas y profesionales de la oposición, una sensibilización con el sistema educativo (informaciones, visitas a centros, períodos de observación en los centros).

Una vez aprobada la oposición, un segundo curso (obligatorio, respecto del primero), permite poner a punto la formación de los profesores, especialmente en el terreno profesional: conocimiento administrativo y pedagógico del sistema, didáctica de la disciplina,... Además un período de prácticas en una clase, desde principio de curso, le permite tomar a su cargo un solo grupo bajo su plena responsabilidad, con un tutor pedagógico en el centro. También hay un período de prácticas acompañadas, es decir en la clase de un profesor *acompañante.*

Centros	N.º de estudiantes	%
IUT (formación corta en 2 o 3 años)	98.400	4,6
STS (formación corta en institutos en 2 o 3 años)	232.700	10,9
Clases preparatorias para las grandes escuelas (2-3 años en institutos)	71.600	3,4
Escuelas de ingenieros (fuera de la universidad)	50.500	2,4
IUFM	83.000	3,9
Universidad: Primer ciclo (2 años)	677.000	31,7
Universidad: Segundo ciclo (2 años)	464.000	21,8
Universidad: Tercer ciclo	212.700	10,0
TOTAL	2.132.800	100

Cuadro 5. Distribución de los alumnos en la enseñanza superior en 1994-95

Entrada al cuerpo

En principio el acceso se hace por oposición. El candidato tiene que ser ciudadano de la Unión Europea y justificar su diplomatura (*bac* + 3 años de Universidad), o su licenciatura (únicamente para la oposición de Agregados, *bac* + 4 años) en un país de la Unión Europea. Hay tres tipos de oposiciones de acuerdo con el tipo de centro: oposiciones regionales comunes para las escuelas maternales y primarias, con pruebas de las diferentes disciplinas, teniendo en cuenta la polivalencia del profesor, dos oposiciones nacionales de matemáticas, una para los colegios y los institutos de enseñanza general o tecnológica (el CAPES y la Agregaduría), y otra oposición bivalente matemáticas-ciencias para los profesores de enseñanza profesional (CAPLP2). La oposición de agregados recluta a profesores que podrán enseñar en las clases post-bachillerato preparatorias para las grandes escuelas.

En 1994, se ofertaron 3.059 plazas en las oposiciones para profesores de matemáticas (CAPES, Agregaduría o CAPLP2, sin contar las plazas de escuelas primarias y maternales). Únicamente se cubrieron 2.048...

La oposición del profesorado de matemáticas para los colegios o institutos no profesionales (CAPES) está constituida por pruebas escritas para verificar el nivel matemático, y dos pruebas orales más profesionales. Una prueba oral consiste, para el candidato, en la investigación, la motivación pedagógica y la resolución de ejercicios sobre un tema elegido por el tribunal. La otra consiste en la preparación de una lección. Durante la preparación de dos horas, el candidato puede utilizar libros de una biblioteca, puesta a su disposición. Al acabar las pruebas, se puntúa a los candidatos y se les van asignando las plazas, tantas como hayan sido convocadas. El candidato admitido se convierte en profesor en prácticas. Entonces realiza su año de preparación en un IUFM, con formaciones complementarias, ya citadas, al término del cual redacta una memoria profesional, y tiene que obtener una evaluación positiva en cada uno de tres dominios, el seguimiento de la formación, las estancias con visitas e informes de los profesores tutores, y la propia memoria. Entonces se convierte en profesor titular.

Existe un sistema análogo para los profesores de escuela o de institutos profesionales, teniendo en cuenta su polivalencia.

Una parte de los profesores (9,4% de los de secundaria en 1994), trabajan sin oposición: profesores interinos. Son profesores contratados con nivel de diplomatura, con salarios bajos, con un contrato anual que se puede rescindir, por tanto, al comienzo de cada curso. Sirven, en el último momento, para sustituir a los profesores que faltan de sus centros, por diversas razones.

En 1994, se ofertaron 3.059 plazas en las oposiciones para profesores de matemáticas (CAPES, Agregaduría o CAPLP2, sin contar las plazas de escuelas primarias y maternales). Únicamente se cubrieron 2.048, sin que se sepa claramente si se debió a que los tribunales consideran al resto de candidatos con nivel insuficiente. Entre los candidatos, solamente 1.688 que estaban en formación, no habían enseñando nunca; 380 eran de otros cuerpos (profesores de escuelas, o de enseñanza profesional,...) o bien eran profesores interinos.

En el total de profesores de segundo grado, había el 1 de enero de 1994, 16,9% mayores de 50 años, 13,8% menores de 30, 9,4% no titulares (es decir sin haber superado la oposición), 56,1% mujeres (frente al 75,6% en primer grado), 8,2% agregados, y 12,6% con dedicación parcial.

En 1986 había 56.600 profesores de matemáticas, de los que la mitad se jubilarán de aquí al año 2010. Por ello, el ministerio ha cuantificado las necesidades anuales de profesores de matemáticas, para el período 1996-2000 y las estima, como mínimo en 2.030 profesores nuevos cada año, de ellos 90% para cubrir las jubilaciones (actualmente el 42% de los profesores tiene entre 42 y 49 años). Hay un aumento considerable del número de ingresados y del número de estudiantes en la diplomatura de matemáticas. Se han tomado medidas estructurales: disminución del número de horas de matemáticas por curso (en terminal literario hay 40 m de enseñanza de matemáticas a la semana, y el horario se puede reducir hasta a 2 h 30 m, en el colegio), reagrupamiento de las opciones científicas y reagrupamiento de la enseñanza de las matemáticas con alumnos que siguen opciones y especialidades diferentes para aumentar el número de alumnos por clase, se recurre a horas *extraordinarias* (el volumen actual de las horas extraordinarias en matemáticas representa el equivalente a 3.000 puestos de profesores), desarrollo de puestos móviles (en 1995, el 10% de los profesores de matemáticas no era fijo: el profesor no enseñaba de manera fija en un centro fijo), los profesores en prácticas desde que superan la oposición toman bajo su responsabilidad 6 horas de clase (en tanto que nunca antes ha enseñado, y que no ha sido formado para ello). Teniendo en cuenta los problemas presupuestarios que tiene Francia, la situación deberá de permanecer estacionaria.

Número de horas de clase semanales de cada profesor

Depende del tipo de centro. Los profesores de escuelas: dan 26 h de las cuales dos son de reunión entre profesores. Los profesores de colegios o institutos, 18 h, a las que se pueden añadir dos suplementarias remuneradas, por razones de servicio. Por último, los profesores agregados 15 h, a las que se pueden añadir dos suplementarias remuneradas, por razones de servicio.

A ello se añaden las reuniones de coordinación o de información (número variable), las sesiones de evaluación (una por trimestre), reuniones con padres (depende del curso) y, por supuesto, la preparación de las clases, la corrección de los trabajos de los alumnos y la formación continua.

Los profesores que han superado una oposición, tienen el estatus de funcionarios del estado.

Los programas y sus reformas

Los programas de enseñanza son programas nacionales.

Los programas de las escuelas maternales y primarias, del colegio y de Segundo son los mismos para todas las clases, puesto que no hay diferenciación de opciones.

Por contra, los programas de la enseñanza profesional o de los cursos Primero y Terminal, dependen de la opción, de la optatividad y de la especialidad elegidas.

Maternal y primaria

Los programas se han establecido por la O.M. de 22 de febrero de 1995, que escalona entre 1995 y 1997 la puesta en marcha de los nuevos programas, los anteriores eran de 1985. Los programas repartidos en tres grupos de edad, empiezan con una introducción que da los objetivos y las principales intenciones, seguidos del desarrollo de los contenidos y de los temas.

La escuela maternal propone para tres cursos (de 3 a 5 años) los siguientes aprendizajes: clasificaciones, seriaciones, enumeraciones, medida, reconocimiento de formas y relaciones espaciales. Un extracto del programa de matemáticas sobre la introducción del número precisa «para el niño, la cuantificación del mundo que le rodea no es numérica, en su conjunto, las cantidades que se estiman o que se producen pueden rebasar sus posibilidades de enumeración. Progresivamente aprende a construir un cierto número de procedimientos o de instrumentos para nombrar las colecciones de objetos: estimación relativa y global de las cantidades (más, menos, igual); enumeración de pequeñas colecciones por una percepción instantánea; comparación con colecciones naturales (dedos de la mano) o colecciones reconocibles (número de sitios alrededor de una mesa,...); fijación y extensión de modos de contar hablando; enumeración utilizando lo anterior».

Los programas de enseñanza son programas nacionales.

La escuela maternal propone para tres cursos (de 3 a 5 años) los siguientes aprendizajes: clasificaciones, seriaciones, enumeraciones, medida, reconocimiento de formas y relaciones espaciales.

En la escuela primaria, los programas están dados en dos partes que tratan tres temas: número y cálculo, geometría y medida.

Una parte común para los dos primeros cursos (6 y 7 años), se dedica al campo numérico, descubriendo los naturales y la numeración decimal, para llegar hasta el 1000, y el dominio de la suma con una pequeña introducción a la multiplicación. En geometría, se inicia el alumno en el espacio, reconoce algunas figuras geométricas sencillas y pone a punto técnicas de referencia, de reproducción y de construcción, empieza a dominar las medidas de longitud y de masa. Se intenta desarrollar la aptitud para investigar y para razonar. La resolución de problemas ocupa un lugar importante en el aprendizaje.

Así mismo, es común a los tres últimos cursos (8 a 10 años), la parte que propone el descubrimiento de los números decimales y de las fracciones, con las técnicas operatorias de las cuatro operaciones. La noción de función numérica se introduce en el marco de las situaciones de proporcionalidad. En geometría el alumno completa sus conocimientos sobre los objetos geométricos (cara, vértice, arista, línea recta, ángulo, perpendicular, paralela), practica trazados y maneja diferentes instrumentos (papel de calco, escuadra, compás y transportador), y pone a punto técnicas de reproducción, construcción y transformación (simetría axial, aumento y reducción). En medida, amplia sus competencias a los ángulos, áreas, volúmenes y tiempo. Se desarrollan las capacidades de investigar, abstraer, razonar, probar, con una iniciación a la lógica y al rigor. La resolución de problemas ocupa siempre un lugar principal.

Damos un extracto de la parte número y cálculo: «Números decimales: escritura con comas, escritura fraccionaria, paso de una a otra; orden en los decimales (comparación, encaje); práctica del cálculo exacto o aproximado utilizando las técnicas operatorias (suma, resta, multiplicación y división de un decimal por un entero), cálculo (mental o escrito), la calculadora en situaciones en las que su uso se muestra pertinente, orden de magnitud (encaje, valor aproximado). Problemas relativos a la suma y la resta, a la multiplicación y a la división decimal de dos enteros».

...el profesor tiene completa libertad para organizar su enseñanza (distribución horaria, progresión adoptada, elección de las actividades y de los libros de texto, presentación de las nociones), con la condición de que se alcancen los objetivos señalados en los programas. Desgraciadamente, el volumen horario, que se considera insuficiente para ciertos cursos, en relación con los contenidos de los programas, reduce los espacios de libertad.

Secundaria, ¿la misma para todos?, ¿opciones, niveles?

El nuevo programa de sexto está en la O.M. de 22 de noviembre de 1995. Para los siguientes cursos, los programas se renovarán cada año a medida que avancen los alumnos con esos nuevos programas.

A partir de Sexto, los programas se precisan para cada curso, en primer lugar lo que se refiere a la naturaleza, objetivos, instrucciones generales y elección de métodos, luego se detallan los contenidos del programa por temas. Para el colegio, los temas propuestos son: trabajos geométricos, trabajos numéricos, organización y gestión de datos, funciones y para cada uno se precisan en paralelo las competencias exigibles y los comentarios.

Los programas son bastante cerrados en cuanto a contenidos; los contenidos obligatorios y ciertas partes que se excluyen están precisadas y comentadas. Sin embargo, se recuerda que el profesor tiene completa libertad para organizar su enseñanza (distribución horaria, progresión adoptada, elección de las actividades y de los libros de texto, presentación de las nociones), con la condición de que se alcancen los objetivos señalados en los programas. Desgraciadamente, el volumen horario, que se considera insuficiente para ciertos cursos, en relación con los contenidos de los programas, reduce los espacios de libertad.

Los cuadros 6 y 7 presentan un resumen de los contenidos de los programas desde Sexto hasta Segundo (de 12 a 16 años, final de la escolarización obligatoria), en el que el curso Segundo se describe por los programas de 1990, mientras que los demás cursos se describen de acuerdo con los programas o los proyectos de 1995.

Para los cursos desde Segundo hasta Terminal, los programas imponen trabajos prácticos y para cada tema contienen una lista de los trabajos prácticos a realizar. Igualmente, desde Segundo, obligan al empleo de calculadoras de bolsillo programables y con funciones estadísticas. Recomiendan el empleo de material informático, especialmente a través de la explotación de la lectura gráfica en la pantalla.

Para los cursos primero y terminal, y para la enseñanza profesional, cada opción tiene un programa específico. Además para cada opción L, ES, y S existe una posible ampliación de las matemáticas (opción o especialidad de matemáticas) con un horario y un programa suplementarios de matemáticas específicas para cada opción. En estos cursos, los programas tienen abundantes trabajos prácticos.

	Configuraciones, construcciones y transformaciones	Referencias, distancias y ángulos, vectores	Magnitudes y medidas
Sexto	Circunferencia, triángulos, triángulos particulares, rectángulo, rombo. Transformación de figuras por simetría axial.	Abscisas positivas sobre una recta graduada. Referencias para los enteros, en una recta graduada (abscisa) y en un plano cuadriculado (coordenadas).	Perímetro y área de un rectángulo, área de un triángulo rectángulo. Longitud de la circunferencia. Volumen de un paralelepípedo rectángulo a partir de un enlosado
Quinto	Paralelogramo. Construcción de triángulos (con instrumentos y/o soporte informático geométricos). Concurrencia de las mediatrices. Transformación de una figura por una simetría central. Prismas rectos, cilindros de revolución.	Referencias en una recta graduada, abscisa del punto medio: referencias en un plano cuadriculado. Desigualdad triangular. Distancia de un punto a una recta. Intersección círculo-recta, tangente a una circunferencia.	Suma de los ángulos de un triángulo. Área del paralelogramo, del triángulo, del círculo. Medida del tiempo. Área lateral y volumen de un prisma recto, y de un cilindro de revolución.
Cuarto	Triángulo: teorema sobre el punto medio de dos lados y su recíproco. Triángulo determinado por dos rectas paralelas que cortan a dos secantes: proporcionalidad de las longitudes. Rectas notables de un triángulo: concurrencia. Transformación de figuras por traslación. Pirámides y cono de revolución.	Coordenadas del punto medio de un segmento. Relación de proporcionalidad: representación gráfica. Teorema de Pitágoras y su recíproco. Coseno de un ángulo agudo.	Magnitudes cociente corrientes (m/s, y km/h, m^3/s, F/kg,...) Volumen de una pirámide, volumen y área lateral de un cono de revolución.
Tercero	Polígonos regulares. Teorema de Thales. Su recíproco. Transformación de figuras por composición de simetrías centrales o de traslaciones, y por rotación. Esferas. Problemas de secciones planas de sólidos.	Representación gráfica de una función afín. Coordenadas de un vector. Trigonometría en el triángulo rectángulo. Vectores (relacionados con las traslaciones), suma de vectores.	Magnitudes producto corrientes y magnitudes compuestas en general (Kw.h,...). Área y volumen de la esfera.
Segundo	Efectos de las transformaciones (traslación, rotación, homotecia, simetría) sobre configuraciones sencillas (paralelismo, alineamiento, distancias, ángulos,...). Ejes de simetrías. En el espacio: rectas, planos, objetos habituales, aplicar las propiedades de le geometría plana, ortogonalidad, proyección.	Cálculo vectorial: suma, multiplicación; interpretación de la configuración de Thales y de la homotecia. Base, referencias, ecuaciones de rectas, expresión analítica de la distancia y de la ortogonalidad. Círculo trigonométrico: cos, sen y tan.	

Cuadro 6. Geometría en los programas de sexto a segundo

En la *opción científica, S en primero,* el programa de 1991 propone: en *álgebra,* las funciones polinómicas y los polinomios de segundo grado; en *probabilidad,* una descripción de los sucesos aleatorios, utilizando el vocabulario y organizando y nombrando los datos con ayuda de particiones, árboles, tablas y modelos; para las *sucesiones y funciones numéricas*: generalidades sobre funciones, límites y derivadas de funciones, utilización de la derivada para el estudio local y global de las funciones, adquisición de un buen dominio de las funciones habituales (polinómicas, racionales, raíz cuadrada, trigonométricas), generalidades sobre sucesiones, sucesiones definidas en función de *n*, o por recurrencia, sucesiones aritméticas y geométricas, límites de sucesiones; en *geometría:* baricentro y producto escalar en el plano, cálculo vectorial y configuraciones en el espacio, ángulos orientados en el plano, rotaciones, transformaciones (traslaciones, homotecias, *reflexiones*, rotaciones): sus composiciones y sus efectos sobre las configuraciones y/o las propiedades.

En la *serie científica, S, en terminal,* un proyecto (que quizá se modifique) de programa para 1997 propone: en *análisis, funciones numéricas y sucesiones:* límite y orden, límite de una función compuesta, derivación de una función compuesta, desigualdad de los incrementos finitos, primitiva de una función continua en un intervalo, funciones habituales (logaritmo neperiano y exponencial, potencial, circulares), resolución de la ecuación diferencial $y'=a\cdot y$, crecimiento comparado de las funciones de referencia, imagen de una sucesión por una función, límites, estudio de la ecuación $f(x) = a$, ejemplos de búsqueda de soluciones aproximadas con ayuda de las sucesiones. En *cálculo integral:* integral de una función sobre un segmento, linealidad y desigualdades, integración por partes, cálculo de áreas y de volúmenes. En *álgebra, aritmética y geometría:* sistemas de ecuaciones lineales (método de Gauss), divisibilidad en los enteros, números primos, números complejos, forma algebraica y trigonométrica, baricentro, producto escalar en el espacio, producto vectorial, representaciones paramétricas y ecuaciones cartesianas de rectas y planos, curvas paramétricas en el plano, elipse. *En combinatoria y probabilidades:* utilización de árboles, tablas y diagramas para contar, combinaciones, propiedades, fórmula del binomio, probabilidades en conjuntos finitos, variable aleatoria con un número finito de valores, ley de probabilidad, esperanza, desviación típica, probabilidad condicionada.

La *especialidad en matemáticas* tiene 2 horas suplementarias de clase a la semana en terminal, con el siguiente programa: *aritmética:* división euclídea y algoritmo de Euclides, máximo común divisor, mínimo común múltiplo, enteros primos entre sí, teoremas de Bézout y de Gauss; *geometría:* Isometrías con un punto fijo, semejanzas directas de centro un punto, desplazamientos, antidesplazamientos: composiciones y recíprocos; aplicación al estudio de configuraciones, búsqueda de lugares, problemas de construcción.

	Números y cálculo numérico	Cálculo literal	Funciones numéricas	Representación y organización de datos
Sexto	Escritura decimal y operaciones + y -. División por un entero: cóciente y resto en la división euclídea, división aproximada. Truncatura y redondeo. Escritura fraccionaria del cociente de dos enteros, simplificaciones.	Sustitución de valores numéricos por las letras en una fórmula.	Aplicación de una tasa de porcentaje. Cambios de unidades de longitud, de área. Estudio de ejemplos que se relacionen o no con la proporcionalidad.	Ejemplos que nos lleven a leer, a establecer, tablas y gráficas.
Quinto	Cálculos sucesivos, prioridades operatorias. Producto de fracciones. Comparación, suma y resta de fracciones de denominadores iguales o múltiplos. Comparación, suma y diferencia de enteros, en escritura decimal.	Igualdad k·(a+b)= k·a+k·b. Verificación de una igualdad o desigualdad por sustitución de valores numéricos en una o varias variables.	Movimiento uniforme. Cambios de unidad de tiempo. Cálculo de un porcentaje, de una tasa, de una frecuencia. Coeficiente de proporcionalidad.	Clases, efectivos de una distribución estadística; efectivos acumulados. Frecuencias. Diagramas de barras, diagramas circulares.
Cuarto	Operaciones (+,-,x,/) con enteros en escritura decimal o fraccionaria (no necesariamente simplificada). Potencias de exponente entero negativo. Notaciones científica y de ingeniero de los números. Teclas raíz cuadrada y cos de la calculadora; sus inversas.	Desarrollo de expresiones. Efecto de la suma y de la multiplicación sobre el orden. Ecuaciones de primer grado con una incógnita.	Velocidad media. Cálculos en los que intervengan los porcentajes, los índices. Cambios de unidades para las magnitudes cociente corrientes. Aplicaciones de la proporcionalidad (por ejemplo, problemas de mezclas).	Cálculos en los que se utilicen frecuencias (por ejemplo, reagrupamiento en clases): Medias. Iniciación al empleo de programas de estadística con ordenador para hacer tablas y gráficos.
Tercero	Cálculos con radicales. Ejemplos sencillos de algoritmos (diferencias sucesivas, Euclides,...); aplicaciones numéricas en el ordenador. Fracciones irreducibles.	Factorización (identidades). Problemas que se resuelven con ecuaciones de primer grado. Inecuaciones. Sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.	Estudio general del efecto de una reducción, de una ampliación sobre las áreas, o sobre los volúmenes. Problemas de cambio de unidades para magnitudes compuestas. Funciones afines.	Empleo de medidas de dispersión para comparar dos distribuciones estadísticas.
Segundo	Práctica del cálculo con potencias, radicales y fracciones (fórmulas). Operaciones con desigualdades. Valor absoluto, intervalos, aproximaciones.	Factorización y aplicación a la resolución de ecuaciones e inecuaciones. Sistemas de dos ecuaciones o inecuaciones de primer grado con una o dos incógnitas.	Generalidades sobre las funciones: curva, paridad, periodicidad, variación, extremos. Funciones habituales: afín, cuadrática, raíz cuadrada, inversa, cos, sen.	Serie estadística de una variable: distribución en clases, efectivos, frecuencias; con una variable cuantitativa: efectivos y frecuencias acumuladas, características de posición y de dispersión (media, desviación típica).

Cuadro 7. Dominio numérico y algebraico en los programas de sexto a segundo

Relación o correlación entre los programas de matemáticas y los de otras materias

No hay relaciones importantes explícitas con los programas de otras disciplinas, excepto quizá en la enseñanza profesional. Muy frecuentemente, los profesores de otras disciplinas introducen las nociones matemáticas independientemente de la clase de matemáticas. Este hecho se ve reforzado por la monovalencia de los profesores de la enseñanza general.

En la enseñanza general, en el Colegio, la parte *organización y gestión de datos* del programa propone «la adquisición de algunos instrumentos estadísticos útiles en otras disciplinas y en la vida de todo ciudadano... Los trabajos correspondientes no se pueden concebir más que a partir de ejemplos y en relación, siempre que sea posible, con la enseñanza de otras disciplinas: ciencias de la vida y de la tierra, tecnología, geografía». En segundo, el programa precisa: «la enseñanza de las matemáticas también se debe relacionar con otras disciplinas en dos aspectos principales: estudio de situaciones salidas de estas disciplinas; organización concertada de actividades de enseñanza. Más ampliamente, conviene mostrar el valor del contenido cultural de las matemáticas; la introducción de una perspectiva histórica puede contribuir a ello». Para los sistemas de ecuaciones lineales, el objetivo es «estudiar los problemas surgidos en otras disciplinas y en la vida económica y social». Para las funciones «se explotarán ampliamente las situaciones surgidas de las ciencias técnicas y de la vida social». Para geometría, «a través de algunos ejemplos surgidos en la mecánica y en la física, se destacará el hecho de que el interés de la noción de vector no se limita a la geometría». Los cálculos de distancias, áreas y volúmenes »se basarán, con frecuencia, en situaciones concretas (topografía, objetos técnicos)».

Los métodos de enseñanza

En este párrafo es difícil describir la verdadera realidad, debido, tanto a la variedad de públicos (una escuela ZEP –zona de educación prioritaria–, no se gestiona pedagógicamente como una escuela de un barrio residencial) como a la variedad de profesores. Muy a menudo, describiremos las instrucciones que dan los programas, a veces, daremos puntos de vista, sin que se pueda medir la distancia entre la realidad y estas intenciones.

Los métodos de enseñanza de las matemáticas han cambiado considerablemente desde 1977 (comienzo de la reforma Haby en Sexto) hasta 1983 (llegada de los primeros alumnos reformados a Terminal), especialmente en el Segundo Ciclo. Durante este período, las matemáticas «modernas» se han abandonado, con una vuelta a lo concreto. El lenguaje de la teoría de conjuntos y de las estructuras (grupos, cuerpo, espacio vectorial), la construcción axiomática de la geometría y la definición teórica de los límites por los infinitésimos se han suprimido.

Desde la escuela primaria, el programa subraya el lugar central de la resolución de problemas en la apropiación por los alumnos de los conocimientos matemáticos...

Estudio por niveles

Desde la *escuela primaria,* el programa subraya «el lugar central de la resolución de problemas en la apropiación por los alumnos de los conocimientos matemáticos: las actividades relativas a la resolución de problemas se realizan sobre problemas destinados a aplicar, a reutilizar, a consolidar las adquisiciones anteriores; situaciones de investigación, que llevan al alumno a explorar los pasos de la resolución de problemas y a introducir así, nociones e instrumentos nuevos. La mayoría de las nociones, en el campo numérico, geométrico, o incluso en el de la medida, pueden ser elaboradas por los alumnos como instrumentos pertinentes para resolver problemas nuevos, antes de ser estudiados en si mismos y vueltos a aplicar en otras situaciones. No hay que perder nunca de vista que toda noción o técnica nueva, se construye sobre las adquisiciones anteriores y sobre las experiencias de que disponen los alumnos».

En el colegio, el programa precisa que es esencial que los conocimientos tengan sentido para el alumno a partir de las cuestiones que él se plantea.

En el *colegio,* el programa precisa que es esencial que «los conocimientos tengan sentido para el alumno a partir de las cuestiones que él se plantea. Se tendrá que privilegiar la actividad de cada alumno, sin abandonar el objetivo de las adquisiciones comunes. Las actividades elegidas deben:

- permitir un posible comienzo para todos los alumnos, por tanto, no dar más que instrucciones muy sencillas y no exigir más que conocimientos sólidamente adquiridos por todo el mundo;
- crear rápidamente una situación lo bastante rica como para provocar conjeturas;
- hacer posible la puesta en práctica de los instrumentos previstos;
- suministrar a los alumnos, con toda la frecuencia posible, ocasiones para

controlar sus resultados, todo ello favoreciendo un nuevo enriquecimiento; por ejemplo, a ello se llega previendo diversos itinerarios que permiten comparaciones fructíferas.

El profesor tendrá cuidado de que los alumnos lean y comprendan mejor un texto matemático. Guiará a los alumnos en la producción de textos. Un método eficaz es el paso del *hacer* al *hacer hacer*. Cuando un alumno escribe instrucciones para su ejecución por otro, o para el ordenador, la obligación de ser preciso se le presenta como una necesidad evidente».

En el *instituto de enseñanza general,* el programa insiste en la «importancia del trabajo personal de los alumnos, tanto en el centro, como en su casa, y del papel formativo de las actividades de resolución de problemas. En esta perspectiva se introduce un apartado de trabajos prácticos en cada capítulo del programa».

«La síntesis que constituye la clase, propiamente dicha, tiene que ser breve; se refiere no solo a las nociones, resultados e instrumentos de base que los alumnos tienen que conocer y saber utilizar, sino también sobre los métodos de resolución de problemas que los activan».

En el instituto de enseñanza general, el programa insiste en la importancia del trabajo personal de los alumnos, tanto en el centro, como en su casa, y del papel formativo de las actividades de resolución de problemas.

Empleo de los libros de texto

Es casi general el empleo de los libros de texto. Como los programas son nacionales, el mercado editorial escolar es importante, lo que permite una gran variedad entre diferentes libros redactados por equipos de profesores para editores privados. Hasta el colegio, incluido, la compra de los libros de texto está, en principio, a cargo de las autoridades locales. Su renovación se hace, en promedio, cada cuatro años. Al salir los nuevos libros, el profesor que tiene a su cargo un curso con el nuevo manual, puede recibir gratuitamente un ejemplar. Por regla general, el conjunto de profesores de matemáticas se reúne en un consejo de departamento para elegir el nuevo texto adoptado por el centro.

Hasta el colegio, incluido, la compra de los libros de texto está, en principio, a cargo de las autoridades locales.

El libro de texto es muy utilizado como colección de ejercicios o de actividades, para tratar en clase o para preparar en casa. También se encuentra el desarrollo de la clase, destacando los resultados esenciales y los ejemplos. A veces, fichas, métodos, ejercicios comentados o con indicaciones, resúmenes, permiten al alumno la utilización del libro de forma autónoma, como complemento de la clase del profesor.

Muchos profesores producen, con ayuda de montajes fotocopiados, o de trabajo con el ordenador, sus propios documentos de trabajo.

También existen instituciones que editan libros sobre temas relacionados con la enseñanza de las matemáticas, muy apreciados por los profesores: la Asociación de Profesores de Matemáticas de la Enseñanza Pública (APMEP), los Institutos de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM), ligados a la universidad, el Centro Nacional y los Centros Regionales de Documentación Pedagógica (CNDP y CRDP), y el propio Ministerio.

Esta edición también se refiere a la producción de material informático, de videos; y de revistas periódicas para alumnos o para profesores.

Ejercicios o problemas... problemas abiertos

En la escuela primaria, el programa distingue, entre las actividades relativas a la resolución de problemas aquellas que «se refieren a:

- verdaderos problemas de investigación, para los que el alumno no dispone de procesos previamente explorados;
- problemas destinados a permitir la utilización de adquisiciones anteriores, en situaciones de explicación o de aplicación;
- problemas destinados a permitir la utilización conjunta de varios conocimientos en situaciones más complejas. Un mismo problema, según el momento en que se plantee, según los conocimientos de los alumnos a quien se destine y según la gestión que de él se haga, puede poner de manifiesto una o otra de las anteriores categorías«.

El programa para el *colegio* desea que se dedique «un lugar importante a la actividad de construcción, de realización de dibujos, de resolución de problemas, de organización y tratamiento de datos, a los cálculos...»

En el *instituto de enseñanza general* «los trabajos prácticos son de dos tipos: unos poner en práctica técnicas clásicas y bien definidas, cuyo dominio es exigible a los alumnos. Los otros, que llevan la mención 'ejemplos de' se destinan a desarrollar un saber hacer o para ilustrar una idea: los alumnos tendrán que haber adquirido, al final del curso, una familiarización con el tipo de problema considerado, pero ningún conocimiento específico se puede exigir respecto a ellos y se deben de dar a los alumnos todas las indicaciones útiles, especialmente en las pruebas de evaluación».

Existen, además, numerosas competiciones matemáticas entre alumnos o entre clases, tanto de carácter regional, como nacional e internacional.

El rigor y las demostraciones, y su ubicación

Los programas piden una sensibilización al rigor y a la demostración desde la primaria. En el *colegio* «la parte de cuestiones de naturaleza formal es necesariamente modesta». La demostración es objeto de una primera iniciación. En sexto, se trata de «tomar contacto con los teoremas y aprender a utilizarlos»; el profesor tiene que «saber identificar y prever las sutilezas que es preferible callar, los pasos rigurosos que se deben sustituir por argumentos accesibles a los alumnos, y conocer las exigencias prematuras de formulación que obstaculizan una progresión adecuada».

«Los estudios experimentales (cálculo numérico, con y sin calculadora, medidas o representaciones con ayuda de instrumentos,...) permiten formular conjeturas y dan sentido a las definiciones y teoremas. Por tanto, tienen su lugar en la formación científica de los alumnos. No obstante, se cuidará de que los alumnos no las confundan con demostraciones: por ejemplo, para cualquier resultado matemático enunciado, se precisará explícitamente que se supone, cuando no está demostrado».

«Es importante hacer percibir, poco a poco, a los alumnos lo que es la actividad matemática, evitando exigirles probar propiedades percibidas como evidentes».

«El curso quinto se ve como una etapa importante en la adquisición del sentido, con la presentación de igualdades, vistas como proposiciones cuya verdad hay que estudiar».

En el *instituto de enseñanza general,* «se deja al profesor la decisión de hacer las demostraciones, de dar un esquema de ellas, o de admitir el resultado, todo ello, manteniendo un buen equilibrio entre estas diferentes posibilidades». En el programa la mención *admitido* significa que la demostración queda fuera del programa.

«Las capacidades de experimentación y razonamiento, de imaginación y análisis crítico, lejos de ser incompatibles, deben de desarrollarse a la par: formular un problema, conjeturar un resultado, experimentar con ejemplos, construir una demostración, poner en práctica instrumentos teóricos, poner una solución en orden, controlar los resultados obtenidos, evaluar su pertinencia en función del problema planteado no son más que momentos diferentes de una misma actividad matemática. En este contexto, la claridad y precisión de los razonamientos, la calidad de la expresión escrita y oral constituyen importantes objetivos. Sin embargo, el dominio del razonamiento y del lenguaje matemático debe situarse en una perspectiva de progresión; se evitará cualquier exigencia prematura en la formulación, tanto para los enunciados como para las demostraciones. En particular, el vocabulario y las notaciones no se imponen a priori; se introducen a lo largo del estudio según un criterio de utilidad».

En el colegio «la parte de cuestiones de naturaleza formal es necesariamente modesta».

En el instituto de enseñanza general, «se deja al profesor la decisión de hacer las demostraciones, de dar un esquema de ellas, o de admitir el resultado, todo ello, manteniendo un buen equilibrio entre estas diferentes posibilidades».

La organización del trabajo

En el *colegio* «el trabajo personal de los alumnos en clase, en los estudios, o en casa, es esencial para su formación. En particular, los trabajos individuales de redacción contribuyen eficazmente al dominio del lenguaje, a la memorización de los saberes y saber-hacer y al desarrollo de las capacidades de razonamiento».

En el *instituto de enseñanza general,* se persiguen «dos objetivos esenciales:

- Entrenar a los alumnos en la actividad científica y promover la adquisición de métodos: la clase de matemáticas en ante todo, un lugar de descubrimientos, de explotación de situaciones, de reflexión y de debate sobre los desarrollos seguidos y sobre los resultados obtenidos, de síntesis, separando claramente algunas ideas y métodos esenciales y dando todo su valor a su importancia.
- Desarrollar las capacidades de comunicación: capacidad de escuchar y de expresión oral, de lectura y de expresión escrita (toma de apuntes, redacción correcta de un enunciado o razonamiento,...)».

Son posibles diferentes disposiciones:

- toda la clase para una síntesis de los trabajos hechos en grupos, lecciones y ejercicios de aplicación, controles escritos;
- media clase en trabajos dirigidos: actividades para introducir una noción nueva que se termina con toda la clase, lugar de observación que permite constituir grupos, según las necesidades, para los módulos, ejercicios progresivos y de entrenamiento, capacidades matemáticas (saber y saber hacer);

- grupos de módulos en Segundo y en Primero: capacidades personales y funcionamiento del alumno, lugar de apertura, lugar privilegiado para el debate científico, ayuda individualizada, profundización.

El sistema de evaluación

Evaluación de los contenidos matemáticos, de las actitudes, de las capacidades, de los «valores»,...

En el colegio «el trabajo personal de los alumnos en clase, en estudio o en casa, es esencial para su formación. En particular, los trabajos individuales de redacción contribuyen eficazmente al dominio del lenguaje, a la memorización de los saberes y saber-hacer, y al desarrollo de las capacidades de razonamiento».

En segundo de enseñanza general, el programa precisa que «conviene desarrollar las capacidades de cada alumno y ayudarle a precisar su proyecto de formación y a realizarlo. A lo largo del curso, la comunicación de los objetivos a alcanzar y la puesta en marcha de formas diversificadas de evaluación pueden ayudar con eficacia a progresar a los alumnos, a situarse y a elegir su futura orientación. Por otro lado, es deseable que se pongan en práctica medidas de apoyo para los alumnos cuyo nivel no esté de acuerdo con su proyecto futuro, para permitirles realizar ese proyecto en buenas condiciones. Además, en función de esos proyectos, se puede hacer la elección de las actividades y su nivel de profundidad; pero esta diversificación no debería de llevar a suprimir temas del programa ni a destruir su equilibrio general».

«La resolución de ejercicios y problemas tiene que jugar también un papel central en los trabajos realizados fuera del horario escolar, en casa o en el instituto. Estos trabajos tienen funciones diversificadas:

- La resolución de ejercicios de entrenamiento, combinada con el estudio de las lecciones, permite a los alumnos afirmar sus conocimientos básicos y evaluar su capacidad para ponerlos en práctica en ejemplos sencillos.
- El estudio de situaciones más complejas, en la forma de preparación de actividades en clase o de problemas para resolver o para redactar, alimenta el trabajo de investigación, individual o en equipo, y permite a los alumnos evaluar su capacidad para movilizar sus conocimientos en diferentes sectores.
- Los trabajos individuales de redacción, solución de un problema, puesta a punto de ejercicios estudiados en clase, trabajos de síntesis sobre un tema estudiado, análisis crítico de un texto,...) tienen por objetivo esencial desarrollar las capacidades de puesta a punto de un razonamiento y de la expresión escrita; vista la importancia de estos objetivos, estos trabajos de redacción, tienen que ser frecuentes, pero su longitud debe ser razonable.
- Las cuestiones de los controles, poco numerosos, combinarán ejercicios de aplicación directa de las lecciones y problemas más sintéticos, incluyendo cuestiones encadenadas de dificultad creciente, pero que permitan a los alumnos verificar los resultados. Deben de ser suficientemente cortas como para permitir a la gran mayoría de los alumnos estudiar el conjunto de las cuestiones propuestas y redactar tranquilamente la solución».

¿Cómo se evalúa? Trabajos escritos en clase, cuaderno del alumno, trabajos en equipo, presentaciones orales...

Existen varios tipos de evaluación.

El profesor puede evaluar la producción individual o colectiva de un alumno con una finalidad formativa: preguntar oralmente a un alumno (con o sin nota, de acuerdo con la situación o el profesor: ejercicio preparado o no), preguntar por escrito en clase (sobre la lección, o sobre la resolución de ejercicios o de problemas), deberes o exposiciones preparadas en casa (calificadas o no).

El profesor realiza una evaluación sumativa cada trimestre, rellenando un boletín en el que figura una nota de matemáticas, situada en relación con el grupo de clase (media de la clase o mejores y peores notas de la clase), acompañada por observaciones escritas del profesor que participa en un consejo de evaluación de final de trimestre. La evaluación de final de curso, puede tener una función de orientación para el alumno (hacia el curso siguiente, o hacia uno u otro centro), con una evaluación predictiva.

Los exámenes para el título en tercero, o de bachillerato, constituyen una evaluación certificativa. En general, las matemáticas se evalúan con una prueba escrita, y en algunos casos con la posibilidad de una prueba oral de recuperación.

En el cuadro 8, indicamos la importancia de las matemáticas para los bachilleratos.

Existen varios tipos de evaluación. El profesor puede evaluar la producción individual o colectiva de un alumno con una finalidad formativa... El profesor realiza una evaluación sumativa cada trimestre, rellenando un boletín en el que figura una nota de matemáticas, situada en relación con el grupo de clase...

Bac L, literario, con especialidad matemáticas	11,76 % (o 17,64 % si las matemáticas se sacan por sorteo para la prueba específica).
Bac L, literario, sin especialidad matemáticas	0 % (o 5,88 % si las matemáticas se sacan por sorteo para la prueba específica).
Bac ES, económico y social, con especialidad matemáticas	20,0 %
Bac ES, económico y social, sin especialidad matemáticas	14,29 %
Bac S, científico, con especialidad matemáticas	25,00 % o 23,08 % según las opciones.
Bac S, científico, sin especialidad matemáticas	19,44 % o 17,95 % o 18,92 % según las opciones.
Bac Tecnológico, según las opciones	11,11 %, o 5,13 %, o 10,81 %

Cuadro 8: Porcentajes del peso de las matemáticas en la nota final del BAC

Existen además, al comienzo de cada curso escolar. para el CE 2, para Sexto y para Segundo, evaluaciones de cada alumno con cuadernos nacionales de evaluación, en varias materias entre las que están las matemáticas. Estas evaluaciones permiten a los profesores adaptar a las necesidades individuales de cada alumno, los medios disponibles (constitución de grupos para los módulos en segundo, distribución de los horarios y constitución de los grupos en Sexto,...). Esta operación permite también una evaluación global del sistema educativo.

Acogida de las reformas: profesores, alumnos, padres,...

Las actuales reformas son reformas muy numerosas, pero cada una de ellas de efecto limitado. Además, estas reformas no suscitan ni entusiasmo, ni oposición masiva. Las reformas delicadas (selección para la Universidad, ritmos escolares, estatus de los profesores, gratuidad de la enseñanza) todavía no se han emprendido. Sin embargo, las restricciones presupuestarias podrían ponerlas de actualidad.

De todos modos, se puede notar una cierta inquietud entre los profesores, después del cambio de presidente de la República. Éste había declarado querer efectuar un referéndum sobre educación. Como los profesores no ven como se podrían resumir en una única pregunta (que por cierto, no ha sido todavía formulada por el presidente) los problemas de la educación, temen una recuperación política de los problemas de la educación.

Un cierto número de políticos consideran que el sistema educativo es demasiado caro y no es lo bastante eficaz. Entre ellos, algunos piensan que la enseñanza de las matemáticas tiene demasiada importancia y que es de eficacia dudosa. En el Ministerio, algunos hablan de dictadura de las matemáticas, otros, desean, a propósito de la reforma de las clases preparatorias científicas, poner fin a la abstracción. Un cierto número de científicos de renombre han llevado a cabo duros ataques contra la enseñanza de las matemáticas y contra las matemáticas, denunciando sus pretendidos efectos nefastos sobre la formación de los jóvenes y deseando asegurar una renovación de las ciencias experimentales sobre los escombros de las matemáticas.

En octubre de 1995, la Inspección General de matemáticas escribía: «Mientras el desarrollo de las opciones científicas constituye un reto esencial para el país y sus resultados son muy importantes, el análisis de la evolución de los efectivos en primero y terminal en los cursos 1993, 1994 y 1995, pone en evidencia una sensible disminución de la serie S, no solo en número de alumnos, sino también en porcentaje ... Además, mientras que la especialidad de matemáticas en terminal S, tiene que abrirse ampliamente a los alumnos que deseen elegirla, el análisis de los efectivos en terminal S, al comienzo de los cursos 1994, 1995 pone en evidencia una caída global sensible de esta especialidad, caída muy variable, dependiendo del perfil del centro».

En la misma época, la Asociación de Profesores de Matemáticas, con ocasión de su Congreso declaraba: «los profesores de matemáticas de la APMEP... se inquietan ante la falta de reglamentación horaria en las clases de sexto y quinto en los Colegios. Parece así, que los alumnos no se van a beneficiar de las mismas condiciones de enseñanza, pudiendo reducirse su horario hasta a 2 h 30 m a la semana... Los resultados de su reflexión ponen de manifiesto que las matemáticas no son únicamente un lenguaje, sino también un pensamiento inscrito en la historia universal, e indispensable para la formación del ciudadano del mañana. ¿Puede pues depender su enseñanza de una relación arbitraria con las fuerzas locales?»

¿La enseñanza de las matemáticas en Francia estaría en peligro? ¿Asistiríamos a la *caída de Platón*?

Richard Cabassut
Licée International
de Strasbourg.
IREM
Université Louis Pasteur
Strasbourg.

SUMA 23
noviembre 1996, pp. 63-68

La enseñanza de las matemáticas en Rusia*

Evguéni Bounimovitch

INFORME

En Rusia, en la educación primaria, existen dos posibilidades: puede elegirse entre 4 cursos (de los 6 a los 10 años) o 3 cursos (de los 7 a los 10 años). Los padres eligen de acuerdo con el desarrollo del niño, tanto en el plano físico, como en el intelectual o psicológico, etc. En los pueblos, es posible que solo se de una de estas posibilidades. Durante las clases primarias, los dos tipos de enseñanza están separados, los alumnos se juntan después, en la secundaria.

En la secundaria, son 5 cursos (desde 5.° hasta 9.°) de escolarización obligatoria, uniforme para la mayoría de las escuelas, seguidos por 2 cursos (10.° y 11.°), que casi todos los alumnos realizan, con diferentes opciones posibles. Al acabar el curso 9.°, hay un examen obligatorio sobre dos materias: ruso y matemáticas (álgebra). La región o la propia escuela pueden exigir otras materias. Más adelante veremos el tipo de pruebas.

En 11.° también hay un examen nacional de final de estudios secundarios, sobre cinco materias, entre las que hay pruebas escritas de matemáticas (análisis y álgebra) y de ruso, obligatorias para todos. Las pruebas, preparadas por el Ministerio de Educación, dependen de las opciones. Las otras tres materias las elige el alumno, entre éstas está la *geometría*.

La mayor parte del tiempo, todas las clases primarias y secundarias están en un mismo centro, con una administración común.

Desde 1986, comienzo de la *perestroika*, el sistema está en permanente reforma, No obstante, se puede precisar la fecha de 1991, que corresponde a la primera ley del primer presidente de Rusia, *ley de educación*. Antes de esta ley, el sistema era casi uniforme, con muchas obligaciones para el profesor, y para el alumno; a partir de esta ley, se deja más libertad a las regiones, a las escuelas, a los

* Traducción: Florencio Villarroya

profesores y a los alumnos, tanto en la elección de las diversas opciones y de los libros de texto, como en la organización y estructura de los estudios. Los programas en las disciplinas literarias y sociales, evidentemente, se han cambiado por completo, en esta situación, podrían aparecer las matemáticas como una disciplina conservadora, pero, incluso en matemáticas, el objetivo de la formación está centrado especialmente en el desarrollo individual del alumno.

Según encuestas recientes, las cuestiones de enseñanza, junto con las de ecología, ocupan el último lugar en las preocupaciones de la gente. Las reformas, por tanto, se aceptan bien...

Según encuestas recientes, las cuestiones de enseñanza, junto con las de ecología, ocupan el último lugar en las preocupaciones de la gente.

Calendario

El curso escolar empieza el primero de septiembre, en todo el país: es fiesta nacional (pero no un día de fiesta), llamada *el día de la sabiduría*. El final del curso es a final de mayo, día de fiesta llamado *la última campana*.

Vacaciones de otoño:	una semana a principios de noviembre.
Vacaciones de invierno:	12 días a principios de enero.
Vacaciones de primavera:	10 días a finales de marzo.
Vacaciones de verano:	julio y agosto.

En junio se realizan los exámenes para los cursos 9.° y 11.°. En algunas escuelas, hay también en junio, exámenes para los otros cursos, y trabajos prácticos dependiendo de las opciones.

asignaturas / curso	Número de clases a la semana en cada curso										
	I	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**	**VIII**	**IX**	**X**	**XI**
Lengua rusa como lengua oficial	3	3	3	3	3	3	3	3	3	-	-
Lengua y literatura	4	4	4	4	8	8	6	5	5	4	4
Arte	2	2	2	2	2	2	2	2	-	-	-
Ciencias sociales	2	2	2	2	2	2	2	3	4	4	4
Ciencias físicas y naturales					2	3	6	8	8	4	4
Matemáticas	4	4	4	4	**5**	**5**	**5**	4	**5**	4	4
Educación física	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3
Tecnología	2	2	2	2	2	2	2	3	3	2	2
TOTAL	19	19	19	19	26	27	28	30	30	20	20
Optativas obligatorias	1	3	5	5	3	3	4	2	3	12	12
Horario total obligatorio	20	22	24	24	29	30	32	32	33	32	32
Trabajos voluntarios, individuales o en pequeños grupos	2	3	3	3	3	3	3	3	3	6	6
TOTAL	22	25	27	27	32	33	35	35	36	38	38

Cuadro 1. Horario mínimo

Durante las *vacaciones cortas* de los alumnos, los profesores celebran reuniones sobre la organización del trabajo en la escuela.

Número de alumnos por aula

en la escuela primaria,	35 aprox.
desde 5.° hasta 9.°	30
en 10.° y 11.°	25

Horarios

En principio, las clases empiezan a las 8 h 30 m, su duración es de 45 minutos (a veces de 35 en la escuela primaria), hay de 10 a 15 minutos de tiempo entre dos clases: 4 o 5 clases por día en la escuela primaria, con estudios vigilados por la tarde, para aquellos alumnos cuya familia lo solicita. Hay de 5 a 7 clases diarias en la escuela secundaria, hasta 9.°, y de 6 a 8 en 10.° y 11.°. En general no hay clases los sábados, ni por supuesto los domingos.

Por falta de puestos escolares en los centros, algunos alumnos tienen horario matinal, mientras que otros lo tienen vespertino.

El cuadro 1 es el documento oficial nacional desde 1993. En este plan, hay una parte obligatoria y una parte opcional, debido a las peculiaridades de las regiones y de sus lenguas regionales y tradiciones socio-culturales.

Las regiones pueden hacer un horario regional propio, sobre la base del anterior, después la escuela hace su propio horario, sobre la base del regional.

La ley de Educación de 1991 sanciona la libertad de enseñanza, la enseñanza privada es poco numerosa, principalmente está situada en las grandes ciudades. la mayoría de las veces se trata de escuelas primarias. Todavía no existen estadísticas sobre este tema.

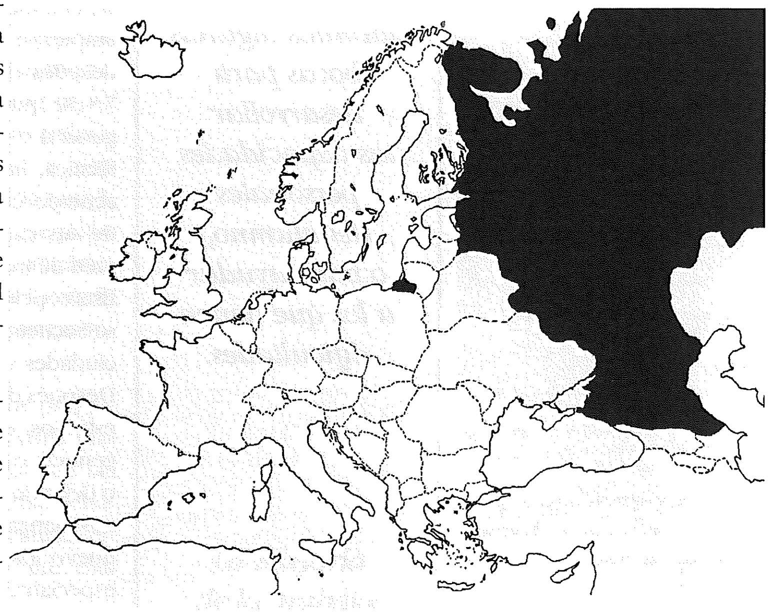
Contenidos matemáticos

Por lo que respecta a las matemáticas, su contenido es tradicional, y está en el núcleo de la enseñanza. Incluye aritmética, álgebra, análisis, geometría, estadísticas y probabilidades, lógica, etc.

Los alumnos adquieren una muy buena formación técnica en cálculos algebraicos, incluso son entrenados en un cierto virtuosismo. La enseñanza del análisis en 10.° y 11.° se introdujo a partir de la reforma de Kolmogorov, en los años 60. La geometría se considera como una asignatura aparte; entre 7.° y 9.° se trata la geometría plana, enseñada de una forma bastante axiomática y formal; en 10.° y 11.° se enseña la geometría en el espacio. Es sobre todo geometría métrica; se hace poca geometría vectorial y poca geometría de transformaciones.

El análisis de datos, la estadística y las probabilidades no se han enseñado nunca en la escuela secundaria. En los nuevos programas, está prevista esta enseñanza, se acaban de preparar libros de texto para los cursos 5.° y 6.°, así como para el 10.° curso de la opción literaria. Por ahora se trata de una enseñanza experimental (a escala rusa: aproximadamente 500.000 alumnos).

Para el acceso a la Universidad el ingreso es mediante examen después de la clase de 11.° curso, independientemente del examen de final de estudios de la escuela secundaria.



La formación de los profesores de matemáticas

La mayoría de los futuros profesores entran, después del curso 11.°, en la Universidad de Pedagogía. Los estudios duran 4 años para los futuros profesores de la escuela elemental, y 5 para los de la escuela secundaria, en centros universitarios diferentes.

Los profesores de la escuela elemental enseñan todas las materias, los de la escuela secundaria están especializados en una. En particular, los profesores de matemáticas solo enseñan matemáticas.

También es posible enseñar en la escuela primaria con 4 años de estudios, después del curso 9.° de secundaria, en el Colegio Especial Pedagógico. En este caso, los salarios son inferiores. Si faltan profesores en la escuela secundaria, pueden dar las clases de ese nivel los profesores de la escuela primaria.

El diploma expedido al final de los estudios universitarios, también da derecho para enseñar en la escuela secundaria.

Los diplomas concedidos al final de los estudios en la Universidad o en la Universidad de Pedagogía, o en el Colegio Especial Pedagógico, no son un concurso-oposición para ingresar automáticamente en un puesto de enseñante. Actualmente, debido a la penuria de profesores, sobre todo de matemáticas y de lenguas extranjeras, los recién licenciados no tienen problemas para encontrar trabajo. El contrato se hace bien directamente por la escuela, o bien por la el gobierno regional.

Desde primer curso, los estudiantes reciben a la vez una enseñanza de la disciplina, y una enseñanza profesional. En los cursos 4.° y 5.°, realizan una estancia de un mes en la clase de un profesor tutor pedagógico. En la situación de penuria de profesores, los estudiantes de los dos últimos cursos, pueden ya empezar a dar clases.

En este momento, la formación continuada de los profesores no es obligatoria. Pero es bastante frecuente, especialmente debido a los cambios de programas y de libros de texto. La formación continua consiste en realizar cursos fuera de su horario de trabajo, dar *clases abiertas* (clases a las que asisten otros colegas, así como inspectores), redactar una memoria. El hecho de haber seguido una formación continua, puede permitir mejorar la remuneración personal.

Los profesores de la escuela primaria tiene 24 clases a la semana, los profesores de la secundaria, tienen 18 horas, pero la mayoría de ellos, hacen 10 horas suplementarias más.

Los programas

En la escuela primaria, los programas son sensiblemente los mismos en todas partes. Existen programas y libros de texto experimentales que siguen las ideas de la escuela de Vigotsky (Davidov, Zankov, Galpérine).

Apéndice 1

Examen de matemáticas, año 1994

(Se dan 5 horas para este examen).

Cursos de educación básica

1. Resolver la ecuación: $\sqrt{(10-x)} = 4 - x$
2. Resolver la inecuación: $3 \cdot \log_8(3x+2) < 2$
3. Calcular todas las raíces de la ecuación

$$\operatorname{sen} 2x + \sqrt{2} \cdot \operatorname{sen} x = 0$$

que pertenezcan al segmento $[-3\pi/2, 3\pi/2]$.
4. Escribir la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función

$$y = 4^x - 2^{x+1}$$

en el punto donde alcanza su mínimo.
5. Encontrar el área de la figura encerrada por las líneas

$$y - x^2 = 0 \quad \text{e} \quad y^2 - x = 0$$

6) ¿Para qué valores del parámetro a la ecuación

$$x^2 - (3a-1) \cdot |x| + 2a^2 - a = 0$$

tiene cuatro soluciones distintas?

Cursos de matemáticas

1. Entre los números complejos z, no nulos con argumento $\pi/4$, encontrar todos aquellos para los que es real, $z^5 - 8 \cdot z$
2. Encontrar todas las raíces del polinomio

$$x^3 + 2a \cdot x^2 - 5 \cdot x - a - 9$$

si los restos de sus divisiones por $x - 2$ y $x + 1$ son iguales.
3. Para qué valores de p el número 2 es solución de la inecuación:

$$\log_{x/(2+p^2)}(0{,}5p^2 + 0{,}5 - x^2 + \frac{6p}{x}) \geq -1$$

4. El gráfico de la función

$$y = 2 - \sqrt{2x+2}$$

intersecta al eje de abscisas en el punto K, y la recta tangente a la gráfica intersecta al eje de abscisas en el punto C. Escribe la ecuación de la tangente si el origen es el punto medio de KC.
5. Probar que para todo negativo x, $\ln \frac{2x-3}{x-7} + \frac{x}{11} \leq 0$
6. Una figura está limitada por las líneas $y = 2 + \cos x$, $y = \operatorname{sen} \pi/2$, $x = a$, $x = a + \pi$. Encuentra el mayor valor de su área.

Clases de humanidades

1. Resolver la ecuación $\cos(3x - \pi/4) = 1/2$, e indicar todas sus raíces positivas.
2. Resolver la desigualdad: $\log_2(3-2x) < 2$
3. Encontrar todos los números a, para los que $4 \cdot 2^{3a} = 0{,}25^{a^2/2}$
4. Calcula el área de la figura limitada por la gráfica de la función $y = x(4-x)$ y el eje de abscisas.
5. Determina el dominio de definición de la función

$$y = \sqrt{4 - \frac{9}{x+1} + \frac{1}{x-3}}$$

6. ¿Para qué valores de a el valor máximo de la función, $y = x^3 - 3x + a$ en el segmento $[-2,0]$ vale 5?

En los primeros cursos de la enseñanza secundaria (10 a 14 años), todos los alumnos reciben la misma enseñanza, pero la escuela puede añadir, para algunos alumnos algunas horas para desarrollar las capacidades personales del alumno, o para ayudar a los que tienen dificultades.

Como se mostraba en el cuadro anterior, cada escuela tiene sin embargo, un cierto *margen de maniobra,* en algunas se dan más clases de matemáticas, por tanto se dice que en ciertas escuelas su nivel es más alto que en otras, sus alumnos entran a través de un examen... ¡la entrada en algunas escuelas primarias o secundarias puede ser más selectiva que la entrada en la universidad!

En los primeros cursos de la enseñanza secundaria (10 a 14 años), todos los alumnos reciben la misma enseñanza, pero la escuela puede añadir, para algunos alumnos algunas horas para desarrollar las capacidades personales del alumno, o para ayudar a los que tienen dificultades. Las diferentes opciones empiezan a partir de 7.° (13 años), o después de 9.° (15 años). Después de 7.° se puede continuar la enseñanza general o elegir una opción científica, técnica, literaria, económica u otra, de acuerdo con la elección del alumno o de sus capacidades para pasar el examen de ingreso en estas especialidades. Estas opciones no existen en toda Rusia, se encuentran sobre todo en las grandes ciudades y en las escuelas de *alto* nivel. Después de 9.°, se pueden continuar los estudios en la escuela de enseñanza general, o elegir una enseñanza técnica, o dejar de estudiar. Los mejores van a la enseñanza general, y entre estos, de nuevo los mejores van a la enseñanza especializada: opciones científica, técnica, literaria, económica u otra.

También existen escuelas que dependen de una universidad o de un instituto y que únicamente tienen clases de 10.° y 11.°, con una orientación especial para acceder a ese instituto. Utilizan el material del instituto y los enseñantes son profesores de la escuela y profesores del instituto. El ingreso en estas escuelas se hace con un examen. Superar los exámenes al acabar los estudios da derecho a entrar en el correspondiente instituto.

Por lo que se refiere a las matemáticas, las clases especializadas de matemáticas existen desde los años 60, los programas de estas clases están adaptados para el acceso a la universidad. En el cuadro anterior, se ve que se pueden dar entre 3 y 12 horas de matemáticas a la semana. Los programas no son obligatorios, pero el ministerio da recomendaciones relativas a los contenidos de enseñanza para 3, 5 u 8 horas semanales. Es lo que corresponde aproximadamente a las clases literarias, generales y científicas. Siempre se pueden añadir contenidos a los anteriores, si la escuela tiene medios para ofrecer un número mayor de horas. Lo que es obligatorio, no es ni el programa, ni el número de horas, ni el contenido del libro de texto, sino los *Standars Nacionales:* currículum definido por sus contenidos matemáticos, sus tipos de problemas y un sistema de evaluación. Hay dos niveles: el mínimo exigible a todos los alumnos, y el contenido que el profesor es capaz de proponer a sus alumnos. Los exámenes nacionales corresponden a esta doble exigencia: para alcanzar la nota 3, hay que haber hecho bien los ejercicios correspondientes al programa mínimo, se puede tener una nota mejor (hasta 5) haciendo bien los ejercicios correspondientes al segundo nivel.

Debido a la estabilidad de los programas en la Unión Soviética, existía una correlación entre los programas de las diferentes disciplinas, pero actualmente las modificaciones que se realizan en todas las disciplinas, hacen que esta cuestión no esté definida.

Los métodos de enseñanza

El método tradicional de enseñanza es la lección, explicada por el profesor, seguida por ejercicios de aplicación. Esto es lo que sucede en la mayoría de las clases de la mayoría de los profesores. Pero hay un objetivo nuevo declarado por la ley de educación y los documentos ministeriales: el desarrollo de las capacidades de cada individuo. Se aplican los estudios de los psicólogos, y ahora se proponen problemas abiertos, investigaciones breves, trabajos en grupos pequeños, investigaciones documentales en libros. Lo que actualmente, es todavía *vanguardista.* La mayoría de los trabajos de evaluación en clase, tiene el carácter de reproducción de los trabajos ya hechos. Cuando se desarrolla un tema, se desarrolla más la técnica que su aplicación en los temas próximos. Se utiliza mucho la capacidad de memorizar (muchas fórmulas de trigonometría, logaritmos,...). Las instrucciones nuevas del Ministerio de Educación (1995) referentes a los exámenes de matemáticas dan ahora a los alumnos la posibilidad de utilizar calculadoras y formularios.

La mayoría de los trabajos de evaluación en clase, tiene el carácter de reproducción de los trabajos ya hechos. Se utiliza mucho la capacidad de memorizar (muchas fórmulas de trigonometría, logaritmos,...).

Apéndice 2

Examen de entrada al departamento de matemática y mecánica de la universidad estatal de Moscú, año 1994. El examen es de 4 horas.

Matemáticas

1. Determina todas las raíces de la ecuación:

$$\frac{4\cdot \operatorname{sen} x - 2\cdot \cos x - 1}{\cos 2x + \sqrt{3}\cdot \cos x - 2}$$

2. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2^x + 2\cdot y = 1 \\ 3\cdot y - 6\cdot y^2 = 2^{x-1} \end{array}\right\}$$

3. Resolver la desigualdad:

$$\log_{(2-5x)} 3 + \frac{1}{\log_2(2-5x)} \leq \frac{1}{\log_6(6\cdot x^2 - 6x + 1)}$$

4. Dado el trapezoide ABCD con bases AD y BC. las diagonales AC y BC se cortan en el punto E. Se traza el círculo circunscrito al triángulo ECB. La recta que toca a esta circunferencia en el punto E, intersecta a la recta AD en el punto F, de modo que los punto A, D y F están sucesivamente en la recta AD. Sabemos que AF = a, AD = b. Calcula EF.
5. Dado el cubo ABCDEFGH. Una esfera toca a las aristas AD, DH, CD y a la recta BG. Encuentra el radio de la esfera, si la longitud de las aristas del cubo es uno.
6. Para cada valor del parámetro a resuelve la ecuación:

$$2x^2 + 2\cdot a\cdot x - a^2 = \sqrt{4x + 2a + 3a^2}$$

Física

1. Determina el valor máximo y el mínimo de la expresión

$$f(a) = \sqrt{2}\cdot \operatorname{sen} a + \sqrt{2}\cdot \cos 2a$$

¿Para que valor de a se han conseguido?

2. Traza la gráfica de la función: $y = \dfrac{x^2 - 6\cdot x + 5}{x - |\, x - 2\,|}$
3. Resuelve la ecuación: $\operatorname{sen}(2x) + 3\cdot \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$
4. Resolver la desigualdad: $\log_x 3 - 4 \geq 4\cdot \log_{1/3} x$
5. Dado el paralelepípedo,en el que las longitudes de las aristas que parten del mismo vértice son a, b y c; cuyas aristas a y b son perpendiculares, y la arista c forma un ángulo α con cada una de las otras aristas a y b, determina el volumen del paralelepípedo.

Siempre se pide a los alumnos que hagan demostraciones, y se concede más importancia al rigor en éstas en las clases científicas.

El sistema de evaluación

El examen nacional al final de 9.° consiste en una prueba escrita de 6 ejercicios (aritmética y álgebra) elegidos de forma nacional entre los aproximadamente 1000 ejercicios de un libro oficial que está en todas las escuelas.

El examen nacional al final de 11.° consiste en una prueba escrita de 6 ejercicios (álgebra y análisis) elaborados de forma nacional. Rusia se extiende sobre 9 husos horarios, está claro que hay diferentes preguntas según la región.

Los ejercicios son corregidos por una comisión de profesores de la escuela del alumno.

Además de su examen de 11.°, el alumno puede elegir hacer la prueba de geometría. Elige, no solo el contenido, sino también la forma de la prueba, que puede ser un test constituido por varias cuestiones elementales, un examen oral con cuestiones del curso, extraídas al azar y un problema (es la forma más tradicional), o la presentación de un trabajo sobre un tema que el alumno ha elegido con su profesor durante el curso escolar, o incluso una entrevista (esta última posibilidad, propuesta en las instrucciones de 1995, todavía no se ha aplicado).

El servicio de inspectores regionales puede, por otro lado, proceder a hacer evaluaciones del sistema escolar, sobre todo de la puesta en marcha de los nuevos programas, de los nuevos libros...

La administración de la escuela organiza evaluaciones en el interior de la escuela destinadas a evaluar el trabajo de los profesores.

La evaluación de los alumnos *día a día* en la clase, la hace el profesor, principalmente son trabajos escritos, en tiempo limitado, después del estudio de cada tema; hay también exámenes orales, y otros elementos de evaluación, tales como el cuaderno del alumno (sobre todo de 10 a 14 años).

Evguéni Bounimovitch
Vicepresidente de
la Asociación de Profesores
de Matemáticas
de Rusia

La Géometrie
Descartes

LA

GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

Des probleſmes qu'on peut conſtruire ſans y employer que des cercles & des lignes droites.

Tous les Probleſmes de Geometrie ſe peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'eſt beſoin par aprés que de connoiſtre la longeur de quelques lignes droites, pour les conſtruire.

Et comme toute l'Arithmetique n'eſt compoſée, que de quatre ou cinq operations, qui ſont l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, la Diuiſion, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne eſpece de Diuiſion : Ainſi n'a-t'on autre choſe a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a eſtre connuës, que leur en adiouſter d'autres, ou en oſter, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement eſtre priſe a diſcretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit à l'vne de ces deux, comme l'autre eſt a l'vnité, ce qui eſt le meſme que la Multiplication; oubien en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

Commẽt le calcul d'Arithmetique ſe rapporte aux operations de Geometrie.

Pp eſt

SUMA 23
noviembre 1996, pp. 69-84

La enseñanza de las matemáticas en Italia*

Lucía Grugnetti
Francesco Speranza

INFORME

Las leyes escolares italianas y los programas son nacionales y rigen tanto para la escuela pública como para la escuela privada.

La Constitución prevé la libertad para crear escuelas privadas, «sin cargas para el Estado». La mayoría del alumnado asiste a la escuela pública; el porcentaje de los que asisten a la escuela privada (de acuerdo con los últimos datos disponibles) es del 48% para la anterior a la Elemental, 1,8% para la Elemental, el 4,5% para la Media y el 9% para la Superior. Una parte importante de la escuela infantil está gestionada por los ayuntamientos.

La mayor parte de las escuelas privadas están gestionadas por religiosos; algunos con una tradición muy sólida. Normalmente son escuelas *homologadas* o *legalmente reconocidas:* en este caso están obligadas a seguir los programas oficiales del Estado. La elección de una escuela privada no siempre se debe a razones *ideológicas:* a veces se debe a la posibilidad de adaptar su horario con el de trabajo de los padres y, sobre todo en el Sur donde es más alta la tasa relativa de alumnos, puede verse influenciada por la desconfianza en la eficacia de la escuela pública.

También existen algunas escuelas, gestionadas por promotores laicos, organizadas para preparar, en un breve tiempo, los exámenes (que se realizan en una escuela pública u homologada).

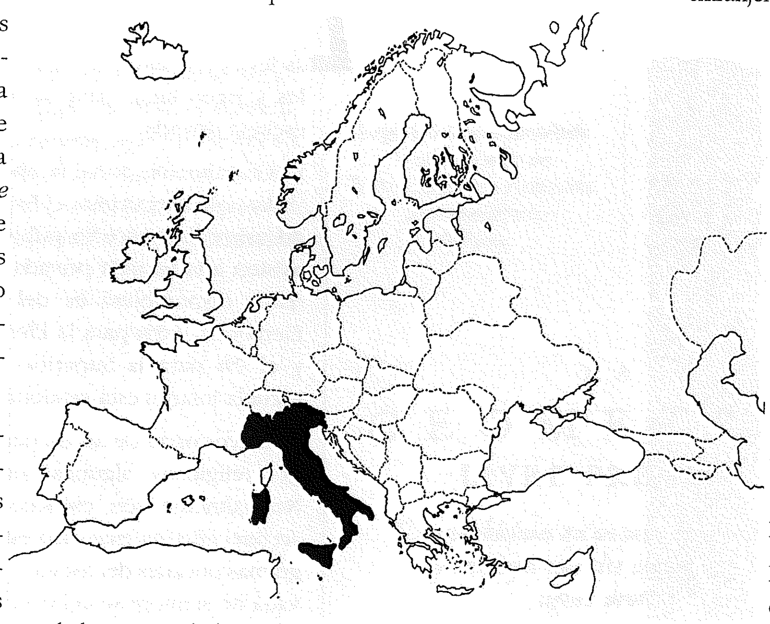
Actualmente la política italiana está implicada en un debate sobre el papel de la escuela privada: algunos desearían una *mayor paridad* con la escuela pública (por ejemplo, con la deducción fiscal de los gastos). De vez en cuando se reabre también el debate sobre la *validez legal de los títulos,* la propuesta sería quitar todo valor a los títulos obtenidos en las escuelas y sustituirlos por exámenes de admisión en las siguientes escuelas y de habilitación para las profesiones. En la situación italiana, esta reforma podría tener el efecto de

* Traducción: Isabel Villarroya y Florencio Villarroya

destruir la escuela ordinaria (pública o privada) que se encontraría con grandes dificultades frente a los que prometen preparar en un tiempo breve los exámenes (sobre todo si la promesa se mantiene verdaderamente).

En la escuela pública y en la mayor parte de las privadas, las clases no se organizan por niveles de capacidad de los alumnos: al contrario, al formar los nuevos grupos al comienzo de la escuela media, algunos intentan mezclar los alumnos provenientes de diferentes escuelas. La diversidad en la aplicación de los programas oficiales sugeriría, al contrario, salvaguardar lo mas posible el grupo.

No obstante, desde finales de los años setenta, se inscriben en las clases normales a alumnos portadores de discapacidades, tanto mentales como físicas (incluso a veces casos muy graves). Desgraciadamente, una legislación muy avanzada, no ha sido aplicada adecuadamente: está previsto que cada uno de esos alumnos sea seguido personalmente (al menos en una parte del horario escolar, que sea entre un cuarto y la mitad) por un *profesor de apoyo;* pero hasta el final de los años ochenta, dichos profesores no han recibido ninguna preparación específica, han estado seleccionados a petición propia.



A partir de 1988, se han estado organizando cursos bianuales para preparar a los profesores de apoyo: por parte de las Delegaciones Provinciales del Ministerio para los profesores numerarios y por parte de la universidad para los demás. Actualmente se han suspendido, en espera de la aplicación de la ley 341 de 1990 que prevé cursos especiales para los profesores de apoyo (¡una ley que no se aplica, sino que se utiliza como pretexto para detener una iniciativa ya en marcha!). También había cursos de ciencias de la educación, de matemáticas, de lingüística, de medicina (cada uno de ellos con un examen al final del curso).

En cuanto a la distribución entre sexos, actualmente parece que las alumnas superan a los chicos en la escuela superior. No obstante, muchas tendencias son *sexistas* (institutos para maestros casi solo femeninos, institutos técnicos industriales, masculinos en gran medida); se calcula que los tipos de escuelas en los que chicas y chicos están equiparados no alcanza el 40% del total (porcentaje que disminuye en los últimos veinte años).

Escuela Elemental

Organización general

La escuela elemental ha sido reformada en 1990, mientras que su currículo había sido definido con los programas publicados en 1985.

La organización actual prevé:
- una división en dos ciclos, de dos y tres años, respectivamente;
- el reagrupamiento de 2 o 3 clases en *módulos* didácticos;
- la adscripción de cada *módulo* a un *grupo docente* formado por tres o cuatro profesores y, eventualmente, integrado por los docentes de religión, lengua extranjera, de apoyo para los alumnos con dificultades (en Italia, no existen clases *diferenciadas;* las personas portadoras de discapacidades físicas o mentales asisten a las clases normales heterogéneas). En los cursos primero y segundo, uno de los profesores del grupo puede tener un horario en el que predomine su presencia en una clase; de todos modos, en todas ellas, corresponde a cada profesor la competencia de un ámbito disciplinar específico.

Horario

El horario de actividades didácticas es de 27 horas, que llega a las 30 cuando se tiene enseñanza de lengua extranjera (a discreción de la escuela), o bien en el caso en que se realiza el llamado tiempo completo, al que se añade el tiempo para el comedor y el período extraescolar entre las actividades de la mañana y de la tarde.

Escuela Media (o Escuela secundaria de primer grado)

Organización general

Está definida en una ley de 1962, con algunos reajustes del año 1977; los actuales programas de enseñanza (para todas las disciplinas) han sido publicados en 1979.

La organización es única para todo el

trienio y prevé la rotación de los docentes de las diversas disciplinas en las clases, a los que se añade el profesor de apoyo cuando se hayan inscrito alumnos con dificultades (vale lo dicho para la escuela elemental).

Horario

El horario es de 30 horas semanales distribuidas en seis días de jornada matinal, que puede llegar a 36-40 horas de estancia, en el tiempo prolongado que prevé las actividades de enriquecimiento y profundización curricular con los mismos docentes del grupo y con dos o tres momentos de actividad por la tarde.

En general, cada escuela ofrece la posibilidad a los alumnos de elegir entre el horario de 30 horas y el de 36-40.

Escuela Superior (o Escuela secundaria de segundo grado)

Organización general

Desde 1923 no se ha realizado ninguna reforma global de la escuela superior. Se han dictado periódicamente decretos ministeriales que, en particular, se refieren a las modalidades de examen de madurez (exámenes finales).

En 1986 se han reformado, de modo no definitivo (sino experimental) los programas de las distintas disciplinas para los diversos tipos de escuela superior. Estos programas sirven para todo el territorio nacional.

En general, la escuela superior tiene una duración de cinco cursos: un bienio, seguido de un trienio.

Algunos institutos profesionales se dividen, al contrario, en un trienio (después del cual se obtiene un primer diploma) y un bienio posterior que permite la equiparación con las otras escuelas en lo referente al acceso a la universidad.

Horario

El horario depende del tipo de escuela superior. En general, en los liceos es de 30 horas. Para los institutos profesionales, donde están previstas diversas actividades prácticas, en general, el horario es de 36 horas.

Los primeros programas que se han renovado han sido los de la escuela media...

La enseñanza de las matemáticas: programas

Características generales

Los primeros programas que se han renovado han sido los de la escuela media: después de la guerra han tenido dos renovaciones radicales, en conexión con reformas estructurales de la escuela. En 1962 se unificó de forma definitiva la banda escolar del 6.° al 9.° grado; otras innovaciones se han introducido en 1977, mediante una profunda reforma de los programas en 1978, que entraron en vigor a partir de 1979. Los programas de la escuela elemental se han reformado en 1982-83 (trabajos de la Comisión), y se han aplicado a partir de 1987. En las Escuelas Superiores, aún no hay, oficialmente, nuevos programas obligatorios, pero muchas escuelas están adoptando programas nuevos de forma *experimental* (parece que aproximadamente la mitad de las escuelas). Las reformas de los programas han sido preparadas por comisiones formadas por profesores universitarios y de la escuela (a veces, por inspectores), especialmente interesados en los problemas de las didácticas específicas. En el caso de las matemáticas, los participantes en las comisiones han discutido sobre la marcha del trabajo con la comunidad matemática (sobre todo con los *núcleos de investigación didáctica*). En general, las reformas de los programas de matemáticas han llegado con cierto retraso respecto al debate sobre la innovación: esto ha permitido darle un aire más meditado, más atento a diversas exigencias. Si se quiere encontrar una característica común de fondo, se puede indicar que es la de dar a la matemática un carácter constructivo, y dar particular importancia a la matematización.

Escuela elemental	5 cursos Edad: 6 a 11 años (obligatoria)
Escuela Secundaria de primer grado	3 cursos Edad 11 a 14 (obligatoria)
Escuela Secundaria de segundo grado: Liceo (clásico, psicopedagógico –para hacerse maestro de elemental–, lingüístico, científico) Institutos Técnicos (con diferentes orientaciones: comercio, electrónico, electrotecnia, informático, mecánico, etc.) Institutos Profesionales (con diferentes ramas, dan un primer diploma a los tres cursos)	5 cursos Edad: 14 a 19 años Da acceso a todas las facultades universitarias
Liceo artístico	4 cursos Edad 14 a 18 Da acceso a todas las facultades universitarias, después de un curso de acceso
Universidad	

Cuadro 1. Estructura general del sistema educativo italiano

Los programas italianos son prescriptivos: un profesor está obligado a tratar todos los temas que se indican. Se observa que para otras materias, a veces, se indica explícitamente que la lista de los temas es sólo indicativa (por ejemplo, para las ciencias en la escuela media), o bien no existe ni siquiera una lista precisa de temas (por ejemplo para el italiano en la escuela media). Sin embargo, los profesores pueden decidir, en la práctica, autónomamente no tratar este o aquel tema: no existe control al respecto (los inspectores están absorbidos por tareas disciplinarias y administrativas).

Los temas a tratar van siempre acompañados de una presentación y de indicaciones metodológicas que forman parte integrante de los programas: éstas llegan a desaconsejar algunos contenidos o presentaciones tradicionales que no están en línea con el espíritu de los programas. Desgraciadamente, estas presentaciones e indicaciones son poco leídas y todavía menos meditadas: un fenómeno que puede relacionarse con la «pedagogía gentiliana», por la cual, lo que cuenta son los contenidos específicos, no el modo de insertarlos en la didáctica; todo ello con la escasa o nula preparación metodológica de los futuros profesores.

Casi todos los programas nuevos de matemáticas no están elaborados por cursos, sino por *ciclos:* en la escuela elemental, son distintos los dos primeros años de los otros tres; los tres años de la escuela media forman un ciclo único; en las superiores, el bienio forma otro ciclo. Sólo en los programas Brocca de los tres últimos años, se ha elegido una programación curso a curso. Los programas por ciclos presentan ventajas y desventajas: señalamos entre estas últimas, que pueden surgir dificultades para un alumno que cambie de clase (pero, de todos modos, hay dificultades debidas a la amplia libertad de elección de los profesores); entre las ventajas, están la posibilidad de construir itinerarios más variados, que respondan a planteamientos incluso distantes entre sí, y la valoración de la profesionalidad de los docentes. Por contra, en los programas del trienio de las escuelas superiores, la división anual ha estancado el análisis matemático en el método de Cauchy-Weierstrass; y ahora, entre los mismos autores de los programas, hay quien quisiera hacer una presentación más próxima al desarrollo histórico.

Tras la aparición de los programas de la escuela media, la Unión Matemática Italiana ha publicado un cuaderno en el que algunos de los núcleos de investigación didáctica han indicado desarrollos más precisos de los programas, con subdivisiones anuales de los temas.

Se requeriría, sin embargo, un apoyo más fuerte para los profesores con ocasión de la publicación de los nuevos programas (apoyo tanto más necesario cuanto más innovadores fuesen los programas). Para la escuela media no ha habido ninguna iniciativa general; para la escuela elemental, ha habido un *plan de puesta al día* en varios años: éste debía contemplar todas las materias para todos los profesores y, por tanto, ha sido más bien limitado y, en algunas regiones, ni siquiera ha llegado a concluir. Para la escuela superior, la introducción de la informática ha sido la ocasión para cierta puesta al día en matemáticas.

...los profesores pueden decidir, en la práctica, autónomamente no tratar este o aquel tema: no existe control al respecto (los inspectores están absorbidos por tareas disciplinarias y administrativas).

Escuela elemental

Hasta los años ochenta, la matemática en la escuela elemental era tratada a un nivel muy sencillo. De hecho, a los niños no se les hablaba siquiera de matemática, sino de *aritmética* (*hacer cuentas*), y de *geometría* (un poco de dibujo, y cálculo de perímetros, áreas y volúmenes en casos muy sencillos): ello respondía, sobre todo, a las mínimas exigencias de una sociedad proto-industrial. La reforma preparada en los años 1982-83, que entró en vigor en 1987, marca un cambio nítido: se reconoce el papel formativo de la matemática, de acuerdo con los resultados de la psicología cognitiva.

Los nuevos programas tienen una introducción general breve, están subdivididos en áreas, cada una de las cuales contiene unos objetivos y unos contenidos y, también, amplias indicaciones metodológicas. Por su extensión global, en la presentación, prescindiremos de algunos pasos:

«La educación matemática contribuye a la formación del pensamiento en sus variados aspectos: de intuición, imaginación, elaboración de proyectos, hipótesis y deducción, de control y, por tanto, de verificación o refutación. Además tiende a desarrollar, de modo específico, conceptos, métodos y actitudes útiles para formar las capacidades necesarias para interpretarla críticamente y para intervenir sobre ella con propiedad.

La enseñanza de las matemáticas en la escuela elemental ha estado condicionada largo tiempo por la necesidad de suministrar precozmente a los niños instrumentos indispensables para las actividades prácticas. Con la ampliación de la educación se ha tenido la posibilidad de afrontar más directamente objetivos de carácter formativo.

En esta situación, que ofrecía una mayor libertad para elaborar proyectos, la enseñanza de las matemáticas, en casi todos los países del mundo, se ha orientado hacia la adquisición directa de los conceptos y de las estructuras matemáticas y así ha promovido, también en Italia, una intensa actividad de experimentación.

La gran experiencia acumulada ha demostrado, sin embargo, que no es posible llegar a la abstracción matemática sin recorrer un largo camino que incluya conjuntamente la observación de la realidad, la actividad de matematización, la resolución de problemas y la conquista de los primeros niveles de formalización. Las investigaciones didácticas más recientes, a través de un análisis cuidadoso de los procesos cognitivos en los que se articula el aprendizaje de las matemáticas, ha revelado su gran complejidad, la gradación del crecimiento y las líneas de desarrollo no unívocas. En este contexto se ha constatado que también los algoritmos de cálculo y el estudio de las figuras geométricas tienen una validez formativa mucho más allá de las utilizaciones prácticas que durante un tiempo justificaron su inclusión en los programas.

Objetivos y contenidos

...Algunos (de los objetivos indicados) resaltan capacidades y conocimientos estrechamente ligados y deben ser transmitidos gradualmente... Se trata principalmente de objetivos que se refieren a los números naturales y decimales, las capacidades para calcular y algunos contenidos de geometría. Otros objetivos se refieren a hechos, conceptos, principios y procedimientos menos estrechamente concatenados, para ser introducidos en un primer estadio de conocimiento y que habrán de ser profundizados en sucesivos niveles escolares... se pueden recordar los relativos a la lógica, la probabilidad, la estadística y la informática...

Los problemas

El pensamiento matemático se caracteriza por la actividad de resolver problemas, y esto en sintonía con la propensión de los niños a hacer preguntas y a buscar respuestas. En consecuencia, las nociones matemáticas de base se deben fundamentar y construir partiendo de situaciones problemáticas concretas, que broten de experiencias reales del niño y que también ofrezcan la oportunidad de aceptar aprendizajes matemáticos realizados anteriormente, instrumentos y estrategias de resolución utilizados y las dificultades encontradas.

El pensamiento matemático se caracteriza por la actividad de resolver problemas, y esto en sintonía con la propensión de los niños a hacer preguntas y a buscar respuestas.

Objetivos

- Traducir problemas elementales expresados con palabras a su representación matemática, eligiendo las operaciones adecuadas; luego buscar la solución e interpretar correctamente el resultado; inversamente, atribuir un significado a representaciones matemáticas dadas.
- Reconocer situaciones problemáticas en ámbitos de experiencias y de estudio y formular y justificar las hipótesis de resolución con el uso de los instrumentos matemáticos apropiados.
- Resolver problemas con procedimiento y resolución únicos y problemas que presenten la posibilidad de diversas respuestas, todas igualmente aceptables.
- Reconocer la falta de datos esenciales para la resolución de los problemas, y eventualmente integrarlas, reconocer... la presencia de datos sobreabundantes, o bien contradictorios...

Aritmética

El desarrollo del concepto de número natural se hará dando todo su valor a las experiencias previas de los alumnos... la idea... es compleja y, por tanto, requiere una aproximación que se apoye en diversos puntos de vista (ordinal, cardinal, medida,...); su adquisición llega a niveles de interiorización y de abstracción cada vez más elevados...

La formación de la capacidad de calcular se funda en modelos concretos y está estrechamente relacionada con situaciones problemáticas. Con ello, no se pretende subvalorar la importancia de la formación de algunos automatismos... En efecto, el conocimiento de tales algoritmos, junto a la elaboración de diversos procedimientos y estrategias de cálculo mental, también contribuye a la construcción significativa de la sucesión de números naturales y de otras importantes sucesiones numéricas.

Objetivos de los cursos primero y segundo

- Contar hacia adelante y hacia atrás...
- Comparar agrupaciones de objetos respecto de su cantidad...
- Leer y escribir números naturales hasta el cien...; compararlos y ordenarlos, utilizando los símbolos =, <, >; además situarlos en la recta numérica de forma correcta;
- Realizar con precisión y rapidez cálculos mentales sencillos de sumas y restas;...

Objetivos de los cursos tercero, cuarto y quinto

[...]

- Escribir tanto en cifras como en letras, o también al dictado, los números naturales y decimales, entendiendo el valor posicional de las cifras, el significado del uso del cero y de la coma.

- Comparar y ordenar los números naturales y decimales, utilizando oportunamente la recta numérica...
- Escribir una sucesión de números naturales a partir de una regla dada; al contrario, descubrir una regla que genere una sucesión dada.
- Intuir y saber usar la propiedad conmutativa y asociativa de la suma y la multiplicación, la propiedad distributiva..., la propiedad de invariancia de la sustracción y de la división, también para agilizar el cálculo mental...
- Calcular, en relación recíproca, múltiplos y divisores de números naturales y reconocer los números primos;
- Encontrar las fracciones que representen partes de figuras geométricas convenientes; de conjuntos de objetos... al contrario, dada una fracción encontrar... la parte correspondiente...
- Comparar y ordenar las fracciones más sencillas, utilizando... la recta numérica.
- Comparar y ordenar sobre la recta numérica los enteros negativos...
- Respetar el orden de realización de una serie de operaciones (expresiones), interpretando el significado de los paréntesis...

Geometría y medida

Inicialmente se ve la geometría como la adquisición gradual de la capacidad de orientación, de reconocimiento y de localización de objetos y formas y, en general, de la organización progresiva del espacio, incluida la oportuna introducción de los sistemas de referencia.

El itinerario geométrico fundamental... se desarrollará a través de la introducción progresiva de las representaciones esquemáticas de los aspectos de la realidad física; desde el estudio y desde la realización de modelos y dibujos se llegará al conocimiento de los principales (tipos de) figuras planas y sólidos y de sus transformaciones elementales.

Se pondrá atención especial en una adquisición correcta de los conceptos fundamentales de longitud, área, volumen, ángulo, paralelismo y perpendicularidad.

Especial interés deberá tener... la introducción de las magnitudes y el uso de... procedimientos de medida, que hay que aprender... en contextos experimentales y problemáticos en continua relación con la enseñanza de las ciencias.

Objetivos de los cursos primero y segundo

- Localización de objetos en el espacio, tomando como referencia, bien uno mismo, bien otras personas u objetos, y utilizar correctamente los términos: delante/detrás, arriba/abajo, a la izquierda/a la derecha, próximo/lejano, dentro/fuera.
- Efectuar cambios de posición a lo largo de trayectos descritos por instrucciones verbales o escritas; o describir... recorridos seguidos de otros, incluso recurriendo a representaciones gráficas adecuadas.
- Reconocer entre los objetos del entorno, y nombrar correctamente, los tipos más sencillos de figuras geométricas: planas, sólidas.
- Reconocer simetrías en objetos y figuras dadas; realizar y representar gráficamente simetrías mediante pliegues, cortes, dibujos,...
- Comparar y medir longitudes, extensiones, capacidades, duraciones temporales, usando las unidades adecuadas...

Objetivos de los cursos tercero, cuarto y quinto

- Reconocer en contextos variados, nombrar, dibujar y construir los principales (tipos de) figuras geométricas planas; construir con técnicas y materiales diferentes, algunas figuras geométricas sólidas sencillas y describir algunas de sus características: como, en el caso de los poliedros, número de vértices, de aristas, de caras.
- Reconocer la igualdad de áreas de figuras planas sencillas, mediante descomposición y recomposición.
- Medir y calcular el perímetro y el área de las principales figuras planas, distinguiendo con claridad la diferencia conceptual entre las dos nociones.
- Calcular el volumen de objetos, incluidos los irregulares, con diversas estrategias y unidades de medida distinguiendo con claridad la diferencia... entre el volumen y el área de la superficie de una figura sólida.
- Reconocer, en situaciones concretas, posiciones y desplazamientos en el plano (puntos, direcciones, distancias, ángulos como rotaciones); representar dichas situaciones además con el uso de retículas con coordenadas enteras positivas; mapas, planos,...
- Utilizar correctamente expresiones como recta vertical, horizontal, rectas paralelas, incidentes, perpendiculares; dibujar con regla, escuadra y compás, rectas paralelas y perpendiculares, ángulos y polígonos.
- Reconocer posibles simetrías presentes en una figura plana y clasificar los triángulos y cuadriláteros respecto de todas sus simetrías.

Inicialmente se ve la geometría como la adquisición gradual de la capacidad de orientación, de reconocimiento y de localización de objetos y formas y, en general, de la organización progresiva del espacio, incluida la oportuna introducción de los sistemas de referencia.

- Realizar, también con el uso de materiales..., y dibujos, la figura correspondiente de una figura plana, sometida a una traslación, a una simetría axial, a una rotación, a una ampliación o a una reducción a escala.
- Conocer las principales unidades internacionales de medida y las usuales...
- Elegir los instrumentos adecuados para realizar las medidas.
- Pasar de una medida expresada en una unidad dada a otra...
- Efectuar medidas de amplitudes angulares... de duraciones...

Lógica

La educación lógica, más que ser objeto de una enseñanza explícita y formalizada, debe ser un tema de reflexión y de cuidado continuo del profesor, al que corresponde la tarea de favorecer y de estimular el desarrollo cognitivo del niño, descubriendo a tiempo las eventuales dificultades y carencias. Se dedicará especial cuidado a la conquista de la precisión y de la perfección del lenguaje... que... tiene una riqueza expresiva y una potencialidad lógica adecuada a las necesidades del aprendizaje.

El profesor propondrá, desde el comienzo... actividades ricas en posibilidades lógicas: clasificaciones mediante atributos, inclusiones, seriaciones, etc. Gradualmente propondrá alguna representación lógico-conjuntista... La simbolización formal de las operaciones lógico-conjuntistas no es necesaria como preliminar para la introducción de los naturales y de las operaciones aritméticas...

Objetivos de los cursos primero y segundo

- Clasificar objetos, figuras, números... con una condición dada y, viceversa, indicar una condición que explique la clasificación dada.
- En contextos problemáticos concretos..., reconocer los posibles casos de combinaciones de objetos y de propiedades.
- Descubrir y verbalizar regularidades y ritmos en sucesiones dadas de objetos, imágenes, sonidos, y viceversa, seguir reglas... para construir tales sucesiones.

La educación lógica, más que ser objeto de una enseñanza explícita y formalizada, debe ser un tema de reflexión y de cuidado continuo del profesor...

Importancia educativa notable debe también reconocerse a conceptos, principios y capacidades relacionadas con la representación estadística de hechos, fenómenos y procesos y con... juicios y previsiones en condiciones de incertidumbre.

- Representar con esquematizaciones elementales (por ejemplo con flechas) sucesiones espacio-temporales, relaciones de orden, correspondencias, referidas a situaciones concretas.

Objetivos de los cursos tercero, cuarto y quinto

- Clasificar objetos de acuerdo con dos o más propiedades y realizar las representaciones adecuadas de las clasificaciones mediante diagramas de Venn, de Carroll, en árbol, con tablas,...
- Utilizar correctamente el lenguaje de conjuntos:... unión, intersección, complementario, incluso en relación... con las conectivas lógicas y con aplicaciones a las clasificaciones aritméticas, geométricas, naturales, gramaticales,...

Probabilidad, estadística, informática

Importancia educativa notable debe también reconocerse a conceptos, principios y capacidades relacionadas con la representación estadística de hechos, fenómenos y procesos y con... juicios y previsiones en condiciones de incertidumbre.

La introducción de los primeros elementos de probabilidad... tiene por objetivo preparar... un terreno intuitivo en el que se pueda, en una fase siguiente, formular el análisis racional de las situaciones de incertidumbre. La definición clásica de probabilidad como relación... no puede ser asumida como punto de partida, pero puede ser el punto de llegada de unas actividades bien graduadas.

En el desarrollo de este itinerario puede realizarse la construcción y el análisis de los procedimientos y de los algoritmos –numéricos y no numéricos– también con el empleo inicial... de los oportunos instrumentos de cálculo y de elaboración de las informaciones.

Objetivos de los cursos primero y segundo

- En situaciones problemáticas extraídas de la vida real y del juego, usar de un modo significativo y coherente las expresiones: quizá, es posible, es seguro, no lo se, es imposible,...

Objetivos de los cursos tercero, cuarto y quinto

- Efectuar observaciones y recogidas de datos estadísticos sencillos: trazar diagramas de barras, histogramas, diagramas circulares,...; calcular medias aritméticas y porcentajes, utilizando, si se considera oportuno, calculadoras de bolsillo...
- Comparar en situaciones de juego... la probabilidad de distintos sucesos...
- Representar, enumerar y contar (por ejemplo, mediante diagramas en árbol) todos los casos posibles en situaciones combinatorias sencillas; deducir de ellas algunos valores elementales de probabilidades;
- Trazar e interpretar diagramas de flujo para la representación adecuada de los procesos.

Indicaciones metodológicas

1) Al comienzo del primer curso elemental es conve-

niente que el profesor realice un reconocimiento cuidadoso del nivel de preparación individualizado de sus alumnos... importantes sectores de su observación son la capacidad de: reconocer relaciones y poner en relación objetos entre sí, contar por contar (sucesión numérica verbal), contar objetos (correspondencia entre pasos consecutivos... y objetos), orientarse en el espacio (arriba, abajo, delante, detrás,...) orientarse en el tiempo (antes, después).

La programación didáctica se desarrollará teniendo en cuenta las informaciones obtenidas... y en primer lugar se dirigirá a constituir una base común de experiencias sobre la que fundar la reflexión y la conceptualización matemática...

Todos los alumnos tienen que estar en condiciones de utilizar, inicialmente, diversos materiales, ordinarios o estructurados, que suministren modelos adecuados de los conceptos matemáticos... También es importante que se distancien, en un cierto momento, de la manipulación del propio material para llegar a utilizar solamente las imágenes mentales relativas...

2) Atención especial hay que poner tanto en la adquisición del... concepto de número natural, como en la formación de la capacidad de representarlo en el sistema decimal, con referencia al valor posicional de las cifras... Con tal objetivo puede ser ventajosa la introducción de diversos sistemas de numeración... Es esencial que el niño adquiera la capacidad de ordenar y de comparar los números, utilizando la... recta numérica...

La introducción de los números decimales se realizará a partir del tercer curso...

La actividad de manipulación de los materiales idóneos, las operaciones de medir magnitudes físicas, el análisis de los datos económicos y demográficos pueden ofrecer ocasiones para trabajar con los números, bien en base diez o bien en otra base...

3) La iniciación en el estudio de la geometría está relacionada... con... los estímulos que provienen de la percepción de la realidad física. Sería, por tanto, empobrecedor limitar la enseñanza... a la memorización de la nomenclatura tradicional y de las fórmulas de cálculo de perímetros, áreas y volúmenes de figuras particulares.

En su lugar, se debe favorecer una actividad geométrica rica y variada, partiendo de la manipulación... de los objetos y de la observación y descripción de sus transformaciones y posiciones recíprocas. Por ejemplo, las sombras de una figura sólida... sugerirán... representaciones planas de la figura; la reproducción en el cuaderno de una figura dibujada en la pizarra dará un ejemplo de reducción de escala; los movimientos de una cartulina.... harán comprender que las nociones de *rectángulo,* de *cuadrado,*... son independientes de la posición de la figura en el plano...

Se recomienda no introducir las nociones de modo incorrecto, siendo preferible posponer la precisión de un concepto a rectificar nociones ya impropiamente introducidas.

Las nociones de perímetro, área, volumen: deberán introducirse –a nivel intuitivo– también para las figuras irregulares, con objeto de desvincular estos conceptos de las fórmulas...

Además de los sistemas de referencia de tipo cartesiano... (geoplano, mapa cuadriculado, mapas y planos geográficos) se podrán introducir informalmente otros sistemas... más directamente ligados con la posición del observador...

4) Un itinerario de trabajo para la medida... deberá incluir las etapas de comparación directa, y comparación indirecta con unidades arbitrarias y... con las unidades convencionales de medida...

Una reflexión sobre las unidades locales de medida... de otros pueblos y de otros tiempos podrá servir para consolidar la idea de la convencionalidad del sistema hoy en uso...

En cuanto al empleo de los «pasos» en la resolución de los problemas... es preferible que no se expresen con las indicaciones de las operaciones... que junto con las mismas operaciones se incluya una descripción del procedimiento, en el que se indicará la unidad de medida obtenida.

[...] tener presente que se pueden medir tanto los aspectos de la realidad física... como económica y social...

5) Los elementos de lógica y de conjuntos tienen por objetivo principal la paternidad de los lenguajes relativos y el suyo propio, su uso...

El profesor... llevará al niño... al empleo correcto de... *todos, alguno,...*

Se recomienda no introducir las nociones de modo incorrecto, siendo preferible posponer la precisión de un concepto a rectificar nociones ya impropiamente introducidas. Por ejemplo, es conveniente que el cuadrado sea presentado como un caso particular de rectángulo, evitando hacer creer que un rectángulo es tal sólo si tiene los lados desiguales...

6) La recogida de datos... en diversos contextos... llevará a las primeras nociones de estadística descriptiva, también a través de la visualización...

En cuanto a las primeras nociones de probabilidad... el niño será conducido a aceptar sin inquietud situaciones de incertidumbre. Se puede alcanzar muy bien este objetivo mediante juegos... La habilidad consiste en saber elegir... la jugada que ofrece mayores posibilidades de victoria: se trata de... sacar conclusiones de la probabilidad...

También la informática... por un lado, pone en evidencia la idea de algoritmo ya presente en la aritmética, pero susceptible de un empleo más amplio; por otro, presenta la calculadora como instrumento...

En definitiva, la introducción al pensamiento y a la actividad matemática debe dirigirse... a construir... una amplia base experimental de hechos, fenómenos, situaciones, sobre las cuales desarrollar el conocimiento intuitivo, los procedimientos y los algoritmos de cálculo y las más elementales formalizaciones...

Así se favorecerá... una disposición positiva hacia la matemática, entendida, bien como instrumento válido de conocimiento y de interpretación crítica de la realidad, bien como fascinante actividad del pensamiento humano.

Escuela media

En la escuela media la matemática se enseña, por un único profesor, integrando las ciencias matemáticas, química, física y naturales.

En las indicaciones metodológicas que acompañan a los programas se dice «la matemática y las ciencias experimentales confluyen unitariamente en la consecución de los objetivos de la educación científica; lo que no excluye la especificidad de los contenidos que cada una lleva de modo autónomo. [...] Dadas las frecuentes relaciones y la constante interacción prevista en el trabajo de aula entre la matemática y las ciencias experimentales, no es posible establecer un reparto rígido del horario semanal entre las dos áreas».

En la práctica escolar, en general, las seis horas semanales para educación científica se reparten en tres horas

Temas	Contenidos del tema
1. La geometría, primera representación del mundo físico.	a) De los objetos a los conceptos geométricos: estudio de las figuras del plano y del espacio a partir de modelos materiales. b) Longitudes, áreas, volúmenes, ángulos y sus medidas. c) Problemas sencillos de isoperimetría y de equiextensión. El teorema de Pitágoras. d) Construcciones geométricas: uso de la regla, la escuadra y el compás.
2. Conjuntos numéricos.	a) Números naturales. Sucesivas ampliaciones del concepto de número: de los naturales a los enteros; de las fracciones (como operadores) a los números racionales. Razones, porcentajes. Proporciones. Representación de los números sobre la recta orientada. b) Escritura decimal. Orden de magnitud. c) Operaciones directas e inversas y sus propiedades en los diferentes conjuntos numéricos. Potencias y raíces. Múltiplos y divisores de un número natural y comunes a varios números. Descomposición en factores primos. Ejercicios de cálculo, exacto y aproximado. Aproximaciones sucesivas, como aproximación al número real. Uso razonado de los instrumentos de cálculo (p.ej. tablas numéricas, calculadoras, etc.).
3. Matemática de lo cierto y matemática de lo probable.	a) Afirmaciones del tipo Verdadero/Falso y afirmaciones de tipo probabilístico. Uso correcto de las conectivas lógicas (y, o, no); su interpretación como operaciones sobre conjuntos y aplicaciones a los circuitos eléctricos. b) Informaciones estadísticas y su representación gráfica (histogramas, aerogramas,...) frecuencia; medias. c) Sucesos casuales; nociones de probabilidad y sus aplicaciones.
4. Problemas y ecuaciones.	a) Reconocimiento de los datos y variables significativas en un problema. Resolución mediante diversos procedimientos (diagramas de flujo, fundamentos y cálculo de expresiones aritméticas...). b) Lectura, escritura, uso y transformaciones de fórmulas sencillas. c) Ecuaciones e inecuaciones numéricas sencillas de primer grado.
5. El método de coordenadas.	a) Uso del método de coordenadas en situaciones concretas; lectura de mapas topográficos y geográficos. b) Coordenadas de un punto en la recta; coordenadas de un punto en el plano. Representación y estudio de las figuras sencillas del plano, p.ej. figuras poligonales de las que se conozcan las coordenadas de los vértices. c) Leyes matemáticas sencillas obtenidas también del mundo físico, económico, etc y su representación en el plano cartesiano; proporcionalidad directa e inversa, dependencia cuadrática, etc.
6. Transformaciones geométricas.	a) Isometrías (o congruencias) planas: traslaciones, rotaciones, simetrías, a partir de experiencias físicas (movimientos rígidos). Composición de isometrías. Figuras planas directa e inversamente congruentes. b) Semejanza plana, en particular homotecia, a partir de ampliaciones y reducciones. Escalas. c) Observación de otras transformaciones geométricas: sombras producidas por los rayos solares u otras fuentes luminosas, representaciones proyectivas (fotografía, pintura, etc.) imágenes deformadas,...
7. Correspondencias y analogías estructurales.	a) Recuerdo, comparación y síntesis de los conceptos de relaciones, correspondencia, función, composición encontrados en diferentes ámbitos. Búsqueda y descubrimiento de analogías entre estructuras.

Cuadro 2. Temas y contenidos de las matemáticas de la escuela media

para matemáticas y tres para ciencias experimentales, o bien cuatro horas para matemáticas y dos para ciencias.

El programa de matemáticas consta de siete temas a desarrollar en los tres cursos (pueden verse sus contenidos en el cuadro 2). La división anual depende de la programación del aula.

Los contenidos de los temas están acompañados de *orientaciones para la lectura,* de las que hemos seleccionado algunos párrafos:

«...El estudio de la geometría sacará provecho de una presentación no estática de las figuras, que hará evidentes las propiedades en el acto de modificarse; también será conveniente utilizar material y recurrir al dibujo. La geometría del espacio no se limitará a consideraciones sobre meras figuras, sino que tendrá que educar además en la visión espacial. En esta concepción dinámica es donde va incluido también el tema de las transformaciones geométricas... Se tendrá presente que *resolver un problema* no significa solamente aplicar reglas fijas a situaciones ya esquematizadas, sino que también quiere decir afrontar problemas en estado natural, en los que se pide al alumno hacerse cargo completo de la traducción en términos matemáticos... El tema *Correspondencias y analogías estructurales* no dará lugar a un tratamiento en sí mismo. En el transcurso de los tres años, todas las veces que se presente la ocasión, se harán reconocer analogías y diferencias entre diversas situaciones... Se desaconseja la insistencia sobre aspectos puramente mecánicos y mnemónicos, debido a su escaso valor formativo...».

Escuela superior

Las dos culturas en la escuela italiana

Incluso antes de la reforma Gentile de 1923, la escuela italiana privilegiaba claramente la *cultura clásica* sobre la *científica.* Francesco Brioschi, ilustre matemático, preocupado por la reforma de la legislación escolar, sostenía que en la fase formativa del aprendizaje bastaba con el estudio del italiano y de las lenguas clásicas. Únicamente el liceo clásico daba acceso a la universidad: durante un cierto tiempo, la matemática, en él, no era obligatoria en el último curso (en ese caso no se podía acceder a ciertos estudios universitarios).

La ideología neoidealista que ha dominado la reforma Gentile tiene entre sus fundamentos la separación de las *dos culturas* y la superioridad de la cultura humanística sobre la científica. Se abolió la *sección físico-matemática* del Instituto Técnico que permitía acceder a algunos estudios universitarios sin necesidad de pasar por las lenguas clásicas, y se instituyó el Liceo Científico, en el cual, sin embargo, se estudia más latín que matemáticas, y que daba acceso sólo a las facultades científicas y técnicas. A menudo se oye decir que los estudiantes universitarios de las facultades científicas y técnicas provenientes del liceo clásico tienen dificultades para adaptarse, inicialmente, pero pueden demostrar una mayor *madurez* y dan un mayor rendimiento; sin embargo, no se ha demostrado estadísticamente esta afirmación y, en todo caso, estaría viciada de origen: la mayor madurez puede ser debida al hecho de que en el liceo clásico (por cuanto numéricamente inferior a los otros tipos de escuela) recoge un mayor porcentaje de muchachos de la clase medio-alta.

La escuela superior italiana se resiente todavía demasiado de la separación entre escuela formativa (los liceos, cuyo título permite en la práctica sólo el acceso a la universidad) y escuelas profesionales.

Por otro lado, muchos expertos científicos han pedido *más espacio* para las materias científicas en el área común, y (cuando se habla de nuevas opciones) algunas opciones orientadas fuertemente hacia las disciplinas científicas (por ejemplo, en el proyecto Brocca, la opción científico-tecnológica); están inspirados de un principio de subdivisión de la influencia entre las culturas (que hoy, en efecto, son tres; la *tecnológica* tiene ahora una fisonomía propia).

La escuela superior italiana se resiente todavía demasiado de la separación entre *escuela formativa* (los liceos, cuyo título permite en la práctica sólo el acceso a la universidad) y *escuelas profesionales.* A estas últimas se les pedía (y en parte, todavía se pide ahora) producir técnicos preparados ya para entrar en el mundo del trabajo: sin embargo se comprende hoy, cada vez más que esto es un objetivo falso, porque los que salen de las escuelas, tienen por delante cuarenta años de trabajo y, en este periodo, las profesiones para las que se hayan preparado podrían modificarse profundamente e, incluso, desaparecer. De aquí la necesidad de *aprender a aprender,* más que aprender técnicas. En las experiencias de estos últimos decenios, se han propuesto soluciones que intentan conciliar estas exigencias: la tarea es menos difícil de lo que puede parecer.

Los nuevos programas Brocca intentan, si bien con alguna timidez, superar la división entre las culturas. Entre tanto, las diferentes opciones estarán mucho menos diferenciadas por las enseñanzas y los programas que las materias de las áreas comunes. En los programas de las materias científicas se han incluido temas que podrían ser importantes para comprender la evolución de la ciencia de un modo no puramente *técnico* (por ejemplo, las geometrías no euclídeas, los problemas de la formalización de la matemática); en todas las opciones se ha introducido el estudio de la filosofía (limitada hasta ahora a los liceos y a las escuelas de magisterio).

La introducción de la informática (en todas las opciones, como parte del programa de matemáticas, pero con cierta ambición de que sea válida también para otras disciplinas), puede ser un paso hacia una valoración de la cultura tecnológica. El plan de actualización de los profesores, en el cual el ministerio ha invertido mucho, se ha desarrollado, sin embargo, bajo líneas diferentes a los programas.

Como en otras muchas ocasiones, una buena reforma debe de contar con la práctica escolar: los profesores (ya sean científicos o humanistas) han tenido una preparación universitaria en un sentido único, y no han tenido (salvo raras excepciones) los instrumentos para abrirse a una visión no sectorial de los problemas del conocimiento y de la vida.

La escuela obligatoria (de 6 a 14 años) se ha modificado profundamente en los últimos decenios; pero la separación de las culturas todavía se siente en alguna medida, sobre todo, a través de la formación de los profesores.

Geometría del plano y del espacio

Plano euclídeo y sus transformaciones isométricas. Figuras y sus propiedades. Polígonos equidescomponibles; teorema de Pitágoras. *Homotecias y semejanzas en el plano. Teorema de Thales.*

Plano cartesiano: recta, *parábola, hipérbola equilátera.*

Coseno y seno de ángulos convexos. Relaciones entre los ángulos de un triángulo equilátero.

Ejemplos significativos de transformaciones geométricas en el espacio. Ejemplos de simetrías en algunos sólidos geométricos.

Conjuntos numéricos: cálculo

Operaciones, orden y propiedades en los conjuntos de los números naturales, enteros y racionales.

Valores aproximados y su uso en cálculos elementales. Introducción intuitiva de los números reales. *Radicales cuadráticos y operaciones elementales con ellos.*

El lenguaje del álgebra y el cálculo literal: monomios, polinomios y funciones algebraicas. Ecuaciones y *sistemas.* de primero y *segundo grado. Inecuaciones de primer grado.*

Relaciones y funciones

Conjuntos y sus operaciones. Primeras nociones de cálculo combinatorio.

Leyes de composición y ejemplos de estructuras particulares. Producto cartesiano. Relaciones binarias. Relaciones de orden y de equivalencia. Aplicaciones (funciones).

Funciones $ax+b$, ax^2+bx+c, a/x, y sus gráficas.

Elementos de probabilidad y estadística

Espacios de probabilidad sencillos: sucesos aleatorios. Sucesos disjuntos, regla de la suma.

Probabilidad condicionada, probabilidad compuesta. Sucesos independientes y «regla del producto».

Elementos de estadística descriptiva: obtención de datos, valores de síntesis, índice de variación.

Elementos de lógica y de informática

Lógica de proposiciones: proposiciones elementales y conectivas, valores de verdad de una proposición compuesta.

Inferencia lógica, principales reglas de deducción.

Variables, predicados, cuantificadores.

Análisis, organización y representación de datos, construcción estructurada de algoritmos y sus representaciones.

Autómatas finitos, alfabetos, palabras y gramática generativa. Sintaxis y semántica. Introducción a los lenguajes formales.

Laboratorio de informática

Utilización de un lenguaje de programación, análisis de problemas y de sus soluciones, bien con lenguajes de programación, bien con el empleo de un «ambiente informático» adecuado.

Cuadro 3. Los programas de matemáticas del primer bienio de la escuela superior

Finalidades, objetivos y contenidos

Actualmente, existen algunas decenas de tipos de escuelas superiores: liceos (clásico y científico), que permiten la entrada a la universidad, liceo artístico, institutos y escuelas de magisterio (para la formación de los profesores de la escuela infantil y elemental), muchos tipos de institutos *técnicos* (formación de técnicos), y de institutos profesionales (para obreros especializados). Los programas oficiales de muchas de ellas, son todavía los de la reforma Gentile.

Se puede decir que, en ellos, la matemática es vista como instrumental, pero de una forma arcaica: largos cálculos (radicales, logaritmos, trigonometría): así se ha formado una tradición que empeora la calidad de los programas. Por ejemplo, la enseñanza de la geometría euclídea tenía una cierta importancia (era probablemente la parte más formativa de la matemática): desde hace algunos años está casi desaparecida.

Aquí, ni siquiera podemos lamentarnos de la escasa preparación disciplinar de los profesores: casi todos son licenciados en matemáticas o en físicas. El empeoramiento ha llegado más o menos, cuando, al inicio de los sesenta, la enseñanza universitaria de las matemáticas se volvió más abstracta, sin una reforma de los programas de la escuela superior y, sobre todo, sin dar a los profesores los instrumentos para comprender las innovaciones, y el modo en que éstas se han inscrito en la matemática elemental, así, la distancia entre la enseñanza en la escuela y en la universidad se ha ampliado.

Ahora existen muchos cursos post-universitarios para la formación de los profesores (los grupos que se interesan en la didáctica de la matemática están implicados en el estudio y experimentación de contenidos y metodología). Además, desde hace algún tiempo existen programas nuevos, todavía experimentales, adoptados por un porcentaje importan-

Tercer curso

Circunferencia, elipse, parábola, hipérbola en el plano cartesiano.

Cambio de sistemas de coordenadas.

Ecuaciones de las isometrías y de las semejanzas.

Propiedades invariantes. Ecuaciones de una afinidad.

Longitud de la circunferencia y medidas angulares.

Teorema del coseno y de los senos. Resolución de triángulos. El conjunto de los números naturales: construcción, divisibilidad, algoritmo de Euclides, números primos, clases de restos. Principio de inducción. Progresiones aritméticas y geométricas. Sucesiones. Sucesiones definidas por recurrencia.

El conjunto de los números reales y su completitud.

Potencias de base real positiva y exponente real. Sus operaciones.

Inecuaciones de segundo grado. Ecuaciones e inecuaciones «fraccionarias» e irracionales. Sistemas de inecuaciones.

Estadística descriptiva multivariante: matriz de datos, tabla de doble entrada, distribuciones estadísticas (conjunta, condicionadas, marginales).

Regresión y correlación.

Reglas de inferencia y de deducción en la lógica de predicados.

Empleo de algoritmos numéricos directos e iterativos, control de la precisión.

Cuarto curso

Incidencia, paralelismo, ortogonalidad en el espacio.

Ángulos entre rectas y planos, ángulos diedros, triedros.

Poliedros regulares, sólidos importantes.

Números complejos y su representación gráfica. Raíces n-ésimas de la unidad.

Estructuras algebraicas fundamentales. Estructura de orden. Correspondencia entre conjuntos estructurados.

Comparación entre conjuntos numéricos infinitos.

Espacio vectorial: estructura vectorial en R^2 y en R^3. Bases, aplicaciones lineales.

Resolución de sistemas lineales. Estructura algebraica de las matrices de orden dos.

Logaritmos y sus propiedades. Funciones exponencial y logarítmica.

Funciones circulares. Fórmulas de adición y principales consecuencias.

Valoración y definición de probabilidad en contextos variados.

Variables aleatorias, en una y dos dimensiones (casos finitos). Correlación, independencia, fórmula de Bayes. Variables aleatorias discretas: distribución binomial, geométrica, de Poisson.

Convergencia de los métodos iterativos. Algoritmos recursivos. Complejidad de cálculo de los algoritmos definidos de modo iterativo o recursivo.

Límite de una sucesión numérica.

Ceros de una función. Límite y continuidad de una función de una variable real. Derivada de una función. Teoremas de Rolle, Cauchy, Lagrange y De l'Hôpital.

Quinto curso

La geometría no euclídea, desde un punto de vista elemental.

El método hipotético deductivo: conceptos primitivos, axiomas, definiciones, teoremas; coherencia e independencia de un sistema de axiomas. Sistemas formales y modelos.

Los axiomas de la geometría euclídea y de la aritmética.

Distribuciones continuas. Distribución normal y errores en las medidas en las ciencias experimentales. Distribución uniforme. Distribución exponencial.

Ley de los grandes números (Bernoulli).

Comparación entre las distribuciones binomial, de Poisson, normal (mediante la construcción de las tablas numéricas).

Inferencia estadística: estimación de parámetros para modelos sencillos.

Formalización del concepto de algoritmo. Tesis de Church. Ejemplos de funciones no calculables. Ejemplos de problemas no decidibles.

El problema de la medida: longitud, área, volumen. Integral definida.

Funciones primitivas e integral indefinida. Teorema fundamental del cálculo integral. Integración por sustitución y por partes.

Resolución aproximada de ecuaciones. Integración numérica.

Cuadro 4. Los programas de matemáticas de la opción científica de la escuela superior

te de escuelas. En un principio fueron preparados para las escuelas que seguían el *plan nacional para la informática*, y después generalizados en los llamados *programas Brocca.*

Los nuevos programas diseñan una escuela superior mucho más unitaria que la actual, articulada en una docena de opciones. En el programa del gobierno, el primer bienio será obligatorio; para la matemática hay previstas dos opciones, la A, más fácil y la B, para las opciones científicas, tecnológicas y económica. En el cuadro 3, pueden verse en detalle los contenidos de las dos opciones de matemáticas en el primer bienio. Lo que va en cursiva, no figura en el programa de la opción A. En el trienio siguiente, los programas son diferentes según las opciones. El cuadro 4 presenta el programa de la opción científica.

Los nuevos programas presentan un cierto desequilibrio: en nuestra opinión pretenden demasiado en estadística e informática. Empero, dan una idea bastante buena de lo que hoy son las matemáticas: para algunos instrumento esencial, necesario para su aplicación y para continuar sus estudios, para otros ofrecen una perspectiva cultural (pensando en argumentos como la matemática griega en continuidad y en oposición a la contemporánea, la abstracción en matemática, las geometrías no euclídeas, el estructuralismo en matemáticas, la lógica matemática, las ideas esenciales de informática,...). Desde nuestro punto de vista, un tratamiento adecuado de estos argumentos es suficiente para hacer comprender a una persona, de cultura media o alta, el significado de la matemática en el desarrollo del pensamiento científico y filosófico.

La evaluación

Escuela elemental

Los programas de 1985 sintetizan, con las siguientes palabras, los criterios de valoración de los alumnos: «con el fin de asegurar una evaluación efectiva del punto de partida y de llegada, de los procesos, de las dificultades encontradas y de las intervenciones compensatorias realizadas, los profesores deberán recoger de manera sistemática y continuada informaciones relativas al desarrollo de los conocimientos y de las capacidades, a su disponibilidad para aprender, a la maduración del sentido de sí mismo de cada alumno... de acuerdo con criterios que aseguren una comparación positiva de los niveles de desarrollo individual y colectivo... para la regulación continua de la programación, permitiendo a los profesores introducir aquellas modificaciones o integraciones que consideren necesarias».

La evaluación de los alumnos se realiza a lo largo de todo el curso.

Para cada alumno se cumplimenta una ficha, articulada en tres partes que se refieren a:

- Los conocimientos del alumno: se recogen datos e informaciones útiles para trazar el perfil del alumno, en la fase inicial del curso escolar –también sobre la base de las informaciones trasmitidas por la escuela materna (de 3 a 5 años, no obligatoria), para los alumnos de primer curso.
- La puesta de relieve de los aprendizajes: se refiere a la apreciación para cada uno de los aspectos esenciales de los campos disciplinarios previstos por los programas, del grado de dominio de los aprendizajes demostrado por el alumno y de cualquier progreso apreciable, junto con las indicaciones de las eventuales intervenciones individualizadas.
- La evaluación del proceso formativo: contiene un balance de la incidencia de la experiencia formativa sobre los aspectos cognitivos, relacionales y ético-sociales de la personalidad del alumno.

Para cada disciplina, la evaluación cognitiva se basa sobre los llamados *indicadores* iguales para los cinco cursos.

La decisión del paso de un curso al siguiente es competencia del grupo docente. La escuela elemental termina con un examen interno/local del que se da un diploma que permite el acceso a la escuela secundaria de primer grado (escuela media).

La escuela media termina con un examen escrito (lengua italiana, matemática, lengua extranjera) y una entrevista oral realizada por los profesores del grupo, dirigidos por un presidente de comisión externo.

La escuela elemental envía a la escuela media un *informe del alumno* que contiene toda la documentación informativa y evaluadora del mismo, junto con una *síntesis global* sobre el recorrido formativo realizado en el transcurso de la escuela elemental.

Escuela media

También en la escuela media está en vigor lo que se acaba de llamar *ficha del alumno* dentro de una concepción de la escuela obligatoria como formativa y no selectiva. Dicha ficha se articula sobre los siguientes puntos:

- la evaluación parte de una aceptación de la situación de partida sobre la que se debe desarrollar el proceso del acercamiento progresivo a los objetivos programados para cada alumno, de alcanzarse a través de itinerarios individualizados y elecciones organizativas que tengan en cuenta el ritmo y las condiciones subjetivas del aprendizaje;
- la ficha indica, para cada disciplina, algunos criterios señalados en los programas: el conocimiento de los contenidos, la iniciación al método disciplinar, las operaciones intelectuales más complejas y específicas de cada lenguaje, la competencia en el conocimiento y en el uso de los instrumentos. En ellos se basa el consejo de curso (compuesto por los profesores de todas las disciplinas), para determinar los objetivos individuales. La escala de valoración indica el grado de aproximación al objetivo entendido como la progresión desde el nivel de partida, a través de cinco calificaciones (A-B-C-D-E);
- la evaluación no se refiere sólo a los progresos cognitivos alcanzados por el alumno, sino que también debe documentar el proceso de maduración de su personalidad, valorando y evidenciando los objetivos, incluso los mínimamente alcanzados, y sus recursos, para ayudarle, así, a construirse un concepto positivo y realista de sí mismo.

La decisión de pasar de un curso al siguiente es competencia del consejo de curso. Es posible la repetición de cada curso.

La escuela media termina con un examen escrito (lengua italiana, matemática, lengua extranjera) y una entrevista oral realizada por los profesores del grupo, dirigidos por un presidente de comisión externo.

El resultado positivo en el examen se certifica con una evaluación en cuatro niveles (suficiente, bien, distinguido y óptimo) y con un consejo de orientación no vinculante. El certificado da acceso a todos los tipos de escuela secundaria de segundo grado.

Escuela superior

La evaluación en la escuela superior, que todavía no se ha reformado globalmente, está todavía regido por los cánones más tradicionales. La evaluación se realiza a través de notas concretas sobre pruebas escritas y orales. El examen de madurez al final del quinquenio tiene carácter nacional con pruebas que, de todos modos, *bloquean* en los últimos cursos las innovaciones metodológicas.

El examen de madurez

La escuela superior termina con un examen de madurez (bachillerato) que:

- habilita para las profesiones, y para los institutos técnicos y escuelas de magisterio;
- permite el acceso a cualquier facultad universitaria (para las escuelas de duración cuatrienal, se exige un curso complementario).

El examen de madurez es el residuo más resistente de la concepción centralizada de la escuela italiana, como estaba prevista en la *reforma Gentile* (1923). Giovanni Gentile (1875.1944) fue el animador, con Benedetto Croce, de la filosofía neoidealista italiana, que se apoyaba en el pensamiento de Hegel (y en particular de la *derecha hegeliana*). Se arrimó al fascismo, en el cual veía la realización del *Estado Ético,* que debía dar su impronta a todos los aspectos de la sociedad: igual que Hegel había dado una justificación del absolutismo prusiano, Gentile daba de este modo un fundamento teórico al fascismo. El examen de madurez debía ser la garantía de la unicidad de la escuela, sobre todo debía de asegurar la adecuación de la escuela privada a los principios de la escuela pública. De hecho, todavía hoy, los temas de las pruebas escritas son seleccionados por una comisión nacional muy *secreta,* y trasmitidos con un ceremonial invariable a las comisiones de examen.

Hasta el año 1968 el examen consistía en numerosas pruebas escritas: 4 en el liceo clásico (italiano, dos de latín, una de griego), 6 en el liceo científico (italiano, matemática, dos de latín, historia del arte, lengua extranjera), y pruebas orales de todas las materias de todos los cursos. Después, para intentar contener la protesta estudiantil, se introdujo un sistema *experimental* provisional que todavía está en práctica. Hay una prueba escrita de italiano (a elegir entre tres temas iguales para todos y uno específico para cada tipo de escuela) y otra prueba escrita que cambia de una escuela a otra; para el examen oral hay señaladas cuatro materias, una de ellas el italiano; el examen se desarrolla sobre el programa del último curso de dos de ellas (uno elegida por el candidato, la otra por la comisión, pero a menudo, ésta deja la elección al candidato). Hay prevista alguna excepción (en el sentido de una evaluación más cuidadosa) para algunas escuelas experimentales.

A pesar de que los porcentajes de éxito son muy altos (más del 95%), el examen de madurez influye de modo negativo en el último curso de la escuela superior. Al principio del mes de abril, se conocen las materias del examen: desde entonces, las otras son abandonadas por los estudiantes. Para el liceo científico, que es habitualmente el canal más seguido para los estudios científicos universitarios, las matemáticas están siempre presentes como prueba escrita y nunca como prueba oral: esto ha difundido una imagen de las matemáticas como *conjunto de ejercicios,* alejando los aspectos críticos y de profundización (debemos decir que en los últimos años los temas de la prueba escrita han sido un poco más innovadores).

La evaluación en la escuela superior, que todavía no se ha reformado globalmente, está todavía regido por los cánones más tradicionales. [...] El examen de madurez al final del quinquenio tiene carácter nacional con pruebas que, de todos modos, bloquean en los últimos cursos las innovaciones metodológicas.

La formación de los profesores

La formación de los profesores es particularmente inadecuada: desde el punto de vista disciplinar, es estadísticamente débil hasta el final de la escuela media; para todos es insuficiente como preparación para la enseñanza de las matemáticas.

La situación actual se puede reagrupar en dos casos:

Escuela infantil y escuela elemental

Sus profesores no tienen una formación universitaria: es más, su formación secundaria es inferior (en dos y un curso respectivamente) a la de otras profesiones (*Escuelas de Magisterio* e *Institutos de Magisterio*[1]). Sus programas de matemáticas son ligeros y de implantación antigua; sin embargo existen muchas experiencias de Institutos de Magisterio de cinco cursos, con programas renovados. Un hecho indicador de la ideología que sostiene a la escuela italiana: hay una facultad universitaria, *Magisterio,* que debería dar una mayor cultura a los profesores elementales. Pero se compone de cursos de Ciencias de la Educación, de Letras, de Historia y de Filosofía: ésta es la *vera cultura* según los principios de la filosofía neoidealista italiana [Benedetto Croce (1866-1952), Giovanni Gentile]. Actualmente estas facultades se están transformando en Facultades de *Filosofía y Letras* o de *Ciencias de la Educación,* pero estas tienen las mismas características que los Magisterios (además, por añadidura, con los mismos profesores).

Se accede a la enseñanza mediante oposición pública, en el que no es

1 Escuela de Magisterio: Se realizan estudios para la formación de la enseñantes de la escuela maternal.

Instituto de Magisterio: Es la escuela media superior, donde se prepara a los futuros maestros de la escuela elemental.

necesario el conocimiento de las matemáticas.

Como hemos visto, en 1987 entraron en vigor los nuevos programas de la escuela elemental, y poco después nuevas *orientaciones* para la escuela infantil. Sobre todo las primeras son más bien avanzadas tanto en contenidos como en la metodología recomendada: es indispensable una renovación de la formación. En la nueva escuela elemental ya no hay un único profesor para todas las materias, sino diferentes profesores que enseñan algunas materias, sin un esquema fijo (es más, deberían cambiar cada cierto tiempo las materias enseñadas).

Una ley de 1990 (n. 341/90) establece que la formación de los profesores de la escuela infantil y elemental sea de nivel universitario, con una sola licenciatura dividida en dos opciones. Desde entonces se ha discutido mucho sobre la efectividad de este principio, sobre todo para los profesores de la elemental. Existe un cierto acuerdo sobre el hecho de que la formación de base sea igual para todos los profesores, con una especialización en una o dos áreas. Actualmente (1996) se ha presentado a los Ministerios de Instrucción y de la Universidad un proyecto para una Licenciatura en *Ciencias de la Formación Primaria,* en la Facultad de Ciencias de la Educación, de cuatro cursos, con un primer bienio común y un segundo diferente para las dos opciones. Se han previsto 21 cursos anuales (o el equivalente en semestres) y 400 horas de prácticas. Se indican algunas áreas disciplinares de las que se van a desarrollar en el curso: una se llama *físico matemática,* y en ella se deben elegir al menos dos cursos anuales: al menos un curso debe ser de didáctica. También para el área lingüístico-literaria, pedagógica y metodológico-didáctica se piden dos cursos anuales; al menos tres para una lengua extranjera. Cumplidos estos mínimos, quedan nueve semestres a elección de la propia universidad o del estudiante.

Sólo existen algunas indicaciones genéricas sobre los contenidos matemáticos: sin embargo en los años pasados se ha hablado mucho de estos temas entre los expertos del sector, y también se ha indicado, como consecuencia de un convenio, un programa de máximos (Coassi, 1982). Este programa aún aparece como válido, quizá un poco ambicioso respecto a los espacios que puedan estar efectivamente disponibles.

A diferencia de lo que ocurre en muchos países europeos, en Italia, los profesores de matemáticas (como también los licenciados en matemáticas), son en su amplia mayoría mujeres.

Escuela media y escuela superior

Para enseñar en estas escuelas se requiere un título universitario completo (la licenciatura). En la facultad de Ingeniería, o de Medicina, o de Derecho,... se considera natural preocuparse de la formación de ciertas figuras profesionales; por contra, en las facultades más interesadas en la formación de los profesores (Ciencias y Letras), se piensa más bien en una preparación cultural genérica. De hecho, la preparación de un licenciado en matemáticas (y no sólo en matemáticas) apunta hacia la formación de un investigador universitario. Al comienzo de los ochenta se ha instituido el *doctorado de investigación,* un título de post-licenciado, de tres o cuatro (caso de las matemáticas) cursos de duración. Con ello se esperaba que los cursos *undergraduati* se dedicarían a una mejor preparación de base, en función de la enseñanza: en su lugar seguimos encontrando cursos muy especializados y avanzados.

Se dice que es obligación del estado establecer los títulos que se deben exigir a los futuros profesores y eventualmente prepararlos profesionalmente (no preocupa si está en condiciones de hacerlo). Existen *tablas* que indican, para cada disciplina, la licenciatura que permite su enseñanza. Naturalmente se desencadenan de vez en cuando las presiones de los lobbies para introducir esta o aquella licenciatura (si bien, a menudo, afirman que algunas no son apropiadas para la formación de profesores).

Para llegar a enseñar hay que obtener la habilitación, y superar una oposición; ambas pueden obtenerse con la misma prueba. La habilitación no se exige para obtener una plaza como interino, en sustitución de un profesor numerario trasladado o enfermo.

A diferencia de lo que ocurre en muchos países europeos, en Italia, los profesores de matemáticas (como también los licenciados en matemáticas), son en su amplia mayoría mujeres.

En la Escuela media, la enseñanza de las matemáticas y de las ciencias se hace por un solo profesor: se le exige una licenciatura cualquiera científica, matemática o física o química o ciencias naturales, o ciencias biológicas, o ciencias geológicas. De hecho, la mayor parte de los profesores han conseguido una de estas últimas, porque es mayor el número de licenciados en esta disciplina y son menores las posibilidades de otras salidas profesionales.

En la Escuela Superior, la matemática a menudo está unida a la física: la mayor parte de los expertos y de los profesores están a favor de su separación. Los licenciados en matemáticas y en física pueden enseñar matemáticas, pero los matemáticos no pueden enseñar física. Actualmente (1996) también se admiten ingenieros.

Todas las licenciaturas científicas se articulan en *opciones,* pero solo en matemáticas y física existe una opción *didáctica* que debería dar una preparación para la enseñanza: pero la opción didáctica en física, en algunas universidades, ni siquiera existe, y la de matemáticas está poco diferenciada de las otras (y, en cualquier caso, ni siquiera es título preferente para enseñar). Además, de varios modos se ve un estudiante inducido a creer que puede desarrollar brillantes perspectivas profesionales de investigación o de colocación profesional; muchos sienten la enseñanza como una salida no adecuada para las propias capacidades y expectativas. Es probable que las *estudiantes* sean menos sensibles a estas ilusiones; la presencia de muchas muchachas entre los licenciados es, por tanto, un rasgo positivo.

De vez en cuando en Italia se habla de la *abolición del valor legal de los títulos de estudio.* No está claro lo que ello significaría en el caso del acceso a la enseñanza: quizá que cualquiera podría presentarse a las oposiciones para la habilitación o para un puesto de numerario. Las oposiciones tendrían que hacerse más serias, para valorar la preparación, tanto cultural como profesional (pero el estado no está preparado para esta operación). Fácilmente podemos prever que la universidad se volvería *inútil,* porque florecerían escuelas privadas que prometerían dar en poco tiempo la preparación para superar la oposición.

También para los profesores de secundaria, la ley 341/90 da disposiciones nuevas (si bien éstas, no se han aplicado todavía). Para obtener la habilitación, un licenciado tendrá que seguir una «escuela de especialización» articulada en opciones para las diferentes enseñanzas secundarias. Su duración será de cuatro semestres, que se reducen cuando el estudiante tenga *créditos,* es decir haya aprendido antes de la licenciatura algunos de los temas enseñados en la escuela. El último proyecto presentado prevé al menos cinco semestres de ciencias de la educación y al menos 5 semestres de didáctica de las disciplinas, con el objetivo de una profundización metodológica y didáctica de las áreas disciplinares correspondientes. A cualquier estudiante también se le podrá exigir que siga cualquier curso universitario, que sea necesario para su preparación cultural (caso de la enseñanza científica en la escuela media).

Los licenciados en matemáticas y en física pueden enseñar matemáticas, pero los matemáticos no pueden enseñar física.

Este proyecto está encontrando oposición en muchos ambientes. Inicialmente muchos decían que se alargaba en dos años el tiempo para llegar a enseñar: pero a menudo, la espera de una oposición es superior a dos años, y por otro lado no piensan en aligerar los cursos de *undergraduati* de especializaciones inútiles. Ahora, en la alta burocracia escolar hay quien ve en ello (y en lo de la licenciatura para los profesores de la elemental) un avance del poder universitario. Algunos ambientes académicos temen la idea de que el sistema de créditos pueda inducir a los estudiantes *undergraduati* a seguir enseñanzas que les puedan ser útiles para prepararse para la enseñanza, en lugar de cursos especializados.

Lucía Grugnetti
Francesco Speranza
Universidad de Parma

SUMA 23
noviembre 1996, pp. 85-90

La enseñanza de las matemáticas en Bélgica (francófona)*

Simone Trompler
Claudine Festraets

INFORME

Después de algunos años opcionales en la enseñanza maternal (de los 2 años y medio hasta los 6), en Bélgica, la enseñanza obligatoria comienza y continúa hasta los 18 años. Se divide en enseñanza fundamental (de 6 a 12 años) y enseñanza secundaria (de 12 a 18 años).

La enseñanza fundamental es la misma para todos, si se exceptúa la enseñanza especial destinada a los niños con retraso mental.

La enseñanza fundamental da derecho a un certificado, indispensable para acceder al primer curso de la enseñanza secundaria. Existe, no obstante, una posibilidad de incorporarse a esta enseñanza, sin certificado, con la condición de hacer un curso especial llamado «clase de acogida» y de obtener la autorización, expedida por el consejo de clase, para retomar la enseñanza normal.

La enseñanza secundaria tiene tres vías: la general, la técnica y la profesional. Existen pasarelas entre ellas y el diploma final permite el paso a la enseñanza superior, universitaria o no, incluso desde la profesional, pero por medio de un curso suplementario en este último caso.

Los seis años de la enseñanza secundaria se reparten en tres ciclos de dos años cada uno; algunos centros (los liceos) no tienen más que los dos primeros ciclos.

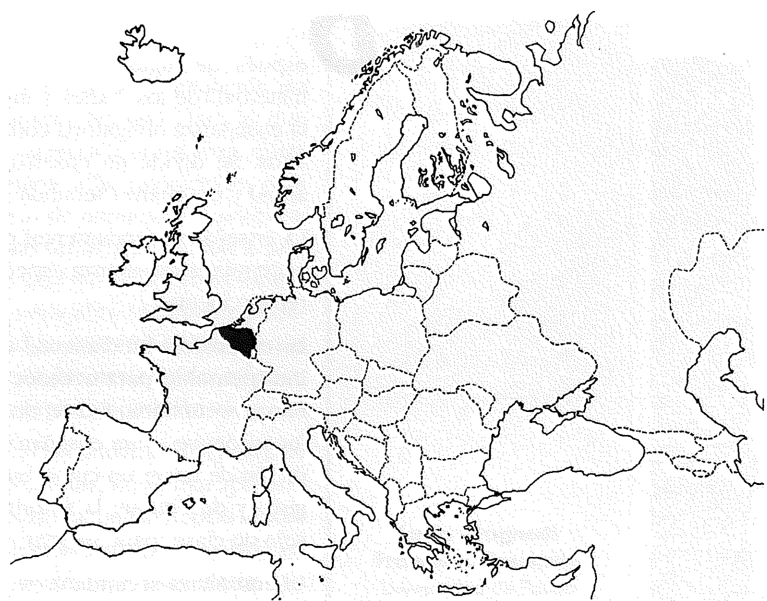
La puesta en marcha de la última gran reforma

En la enseñanza primaria, tuvo lugar una importante reforma de la enseñanza de las matemáticas en 1975, introduciendo especialmente en los programas el estudio de los conjuntos y de las relaciones; entre 1975 y 1986, poco a poco, se fue reduciendo la importancia de estos temas y en 1985-86, se revisaron los programas, dejando a las *matemáticas modernas* un lugar reducido; sin

* Traducción: Florencio Villarroya

embargo, hay que destacar que el estudio de las transformaciones se efectúa siempre por sí mismo, independientemente de cualquier lazo con la geometría. Desde 1994, una comisión estudia un proyecto para coordinar las enseñanzas primaria y secundaria, basado, entre otras cosas, en la utilización de niveles de competencia.

En la enseñanza secundaria, y en especial en la enseñanza secundaria general, las reformas de su estructura y de sus programas se suceden desde hace más de diez años. La mayoría de disciplinas se ven afectadas, quizá más las matemáticas que las otras. Se ha pasado de una enseñanza tradicional con vías bien definidas (latín con griego, latín con matemáticas, latín con ciencias, científica, económica,...) a una enseñanza llamada *renovada* en la que el alumno puede elegir entre numerosas opciones. Después, el número de opciones y las posibilidades de elección se redujeron drásticamente. El número máximo de horas de clase a la semana por alumno también ha disminuido, con la consiguiente reducción del número de horas atribuidas a algunas disciplinas, entre ellas las matemáticas, de ahí la necesidad de cambiar algunos programas.



Otras reformas

En este momento *el acento* se pone en las *capacidades transversales*. Es decir que el profesor de cada disciplina tiene que privilegiar las capacidad más que los conocimientos en su dominio, con el objetivo de formar la inteligencia del alumno, de hacerle capaz de resumir, de extraer las ideas esenciales, comprender los enunciados, etc., cualquiera que sea la situación delante de la que se encuentre e independientemente del curso.

Los dos primeros años (el primer ciclo) de la enseñanza secundaria se hacen seguidos, sin posibilidad de repetir, desde 1994. Estructuras de remediación se han creado para sacar a flote a los niños con dificultades.

Está previsto que este sistema de pasar por ciclos continúe para los cuatro últimos cursos de la enseñanza secundaria.

Calendario, horario semanal y diario

Los horarios semanales en la enseñanza fundamental son de 28 a 30 horas; en la secundaria general de 32 a 34 horas, en la técnica y profesional son más variables, a menudo más largos, a causa de los talleres.

Hay en total, 175 días de clase al año. Las vacaciones son de dos meses en verano, una semana para Todos los Santos, dos semanas en Navidad, una semana de Carnaval y dos Semanas en Pascua.

Número de horas de matemáticas a la semana

El número de clases de matemáticas a la semana ha sufrido fluctuaciones estos últimos años.

Actualmente son cinco durante cada uno de los seis cursos de la primaria.

En la secundaria general y técnica, en el primer ciclo, hay cuatro periodos semanales, y 5 a la semana en el segundo ciclo. Por tanto, antes de los 16 años, los programas de matemáticas no prevén ninguna diferencia entre los alumnos. Si tienen opciones en otros cursos, no tienen la opción de matemáticas. Esta situación es nueva, desde 1994.

En los cursos 5.° y 6.° de la enseñanza general, existen tres posibilidades: 2, 4 o 6 periodos. En los dos últimos cursos de la enseñanza técnica, el número de clases depende de la orientación elegida, lo más frecuente es 6 a la semana.

Las directrices pedagógicas insisten en la necesidad de una pedagogía diferenciada, sobre todo en el segundo ciclo, pero el número de alumnos por clase no hace más que aumentar, lo que hace muy difícil este tipo de pedagogía.

En la enseñanza secundaria profesional, el número de horas de matemáticas es variable, generalmente escaso y depende de la orientación elegida. Ocurre lo mismo en la enseñanza artística, con excepción de las vías que conducen a la arquitectura.

Enseñanza pública y privada

La enseñanza oficial está organizada por la Comunidad francesa, por las provincias o por los ayuntamientos. Existe también una enseñanza privada llamada *libre.*

Es preciso distinguir la enseñanza privada no subvencionada por el Estado, que es muy poco importante y la enseñanza privada subvencionada por el Estado que es muy importante, incluso más que la enseñanza oficial. Esencialmente está organizada por las órdenes religiosas católicas, si bien, con frecuencia, los profesores son laicos. El Estado paga a los profesores y también participa en los gastos de funcionamiento, así como en la construcción y compra de los edificios. Mientras que los profesores de la enseñanza pública son designados y nombrados por el Ministerio de Educación, el poder organizativo privado elige él mismo a sus profesores y los hace nombrar por el Ministerio.

En los niveles preescolar y primario, la enseñanza oficial de los ayuntamientos y la enseñanza libre subvencionada tienen aproximadamente el mismo número de alumnos, mientras que en secundaria, la enseñanza libre lleva ventaja (56%).

Distribución de los alumnos

Las clases tienen de 25 a 30 alumnos, con tendencia a aumentar, sobre todo a partir de este curso. El gobierno intenta hacer ahorros, tanto en la enseñanza como en lo demás.

Las clases tienen de 25 a 30 alumnos, con tendencia a aumentar, sobre todo a partir de este curso.

Enseñanza superior, condiciones de acceso

En cada escuela, *los consejos de clase* (junta de evaluación) son soberanos para decidir la promoción de clase o la repetición; aconsejan a los padres sobre la elección de una orientación de los estudios para sus hijos, pero esta información no es determinante.

En cada escuela, los consejos de clase (junta de evaluación) son soberanos para decidir la promoción de clase o la repetición.

Los certificados de final de secundaria son expedidos por cada centro, público o privado subvencionado. Dan acceso a la universidad y a otras escuelas superiores.

No existe examen de selectividad. Pero el Ministerio de Educación ha establecido una Comisión de Homologación que tiene el papel de verificar que se han seguido los programas y la estructura de la enseñanza secundaria, que se han respetado sus horarios por curso, conforme a la ley. La Comisión actúa mediante sondeos.

Los profesores de matemáticas

Niveles de formación. Formación matemática, didáctica, pedagógica o en otras disciplinas científicas

La formación de los profesores difiere de acuerdo con el nivel en el que enseñan.

Los profesores de la escuela maternal se forman en los *Institutos Pedagógicos,* fuera de la universidad.

Sus estudios son de tres cursos, de los que el último se consagra esencialmente a prácticas.

Su formación se compone de tres direcciones:

- Formación general (sociocultural, comunicación,...).
- Formación especializada (lengua materna, matemáticas, historia, geografía, ciencias, educación plástica, musical, física y psicomotriz).
- Formación pedagógica (psicología, pedagogía, metodología).

Los profesores de la escuela primaria se forman igualmente en los institutos pedagógicos, fuera de la universidad. Su formación es parecida a la de los de la maternal, pero más avanzada, especialmente en matemáticas.

Los profesores de la escuela secundaria en el nivel medio inferior (de 12 a 15 años en la enseñanza general y de 12 a 16 en la técnica o profesional) tampoco se forman en la universidad, sino en los mismos institutos pedagógicos que los anteriores profesores.

Sin embargo, su formación es bastante diferente porque está especializada. En el terreno científico, pueden elegir la opción física-matemáticas, la opción matemáticas-ciencias económicas, o incluso química-física-biología, química-biología-geografía, geografía-historia-ciencias sociales. Sus estudios también duran tres años.

Los profesores del nivel superior de secundaria, se forman en la universidad. Hacen cuatro años de estudio en la especialidad elegida, lo que les da, por ejemplo, el diploma de licenciado en ciencias matemáticas. Este diploma no incluye ningún componente pedagógico; tanto si los estudiantes se dirigen o no hacia la enseñanza, tienen las mismas asignaturas, científicas y de cultura general.

Al mismo tiempo que esta licenciatura, o después de haberla obtenido, tienen que, durante un año, realizar cursos de pedagogía, de metodología general y especial y hacer prácticas (es decir, asistir a clases dadas por profesores designados por el tutor de prácticas y dar un número determinado de lecciones en presencia del profesor titular que remite un informe al tutor de prácticas). Al final de este año, sufren los exámenes. Si las prácticas y los exámenes son satisfactorios, tiene derecho a un título de Agregado para la Enseñanza Secundaria Superior, diploma que les permite enseñar.

A pesar de una sensible mejora de esta preparación para la enseñanza desde hace algunos años, hay que recalcar que es insuficiente. Los futuros profesores no han estado nunca solos delante de una clase y no tienen ninguna idea de la dificultad (además, en neto crecimiento) de mantener la disciplina y de obtener un trabajo responsable. No serán formados más que *en el tajo* con todos los problemas que ello origina al principio de la carrera profesional.

Añadamos que además existen profesores de taller (en la enseñanza profesional o técnica) que tiene que poseer un certificado de aptitud profesional, pero que no se han formado en la enseñanza superior.

Entrada al cuerpo

El conjunto de profesores se nutre de todas las clases sociales. No obstante hay que observar que estas profesiones se feminizan cada vez más (con la consiguiente desvalorización).

El joven licenciado deseoso de entrar en la enseñanza tiene que solicitarlo en el Ministerio de su Comunidad, en la provincia o en el ayuntamiento si quiere hacer su carrera en la enseñanza oficial, o en los correspondientes poderes de la enseñanza libre. Como en la actualidad hay una plétora de profesores, los jóvenes tienen que esperar bastantes años antes de ser nombrados y, al comienzo de su carrera, tienen que contentarse con hacer sustituciones durante algunos semanas, interrumpidas por periodos de paro.

Número de horas de clase semanales de cada profesor

En la enseñanza primaria, el maestro cumple 26 horas semanales; en la secundaria inferior, entre 23 y 25, y en la secundaria superior entre 21 y 23 horas (las *horas* son de 50 minutos).

Los programas y sus reformas

Maternal y primaria

El programa para la escuela primaria es el mismo para todas (excepto para la enseñanza especial que está destinada, repetimos, a los niños retrasados o con dificultades).

En general, los programas son cerrados, impuestos por el Ministerio. No obstante, existe una cierta tolerancia. Los profesores que lo desean, y que pueden defender su punto de vista, consiguen hacer modificaciones...

Secundaria, ¿la misma para todos?, ¿opciones, niveles?

Los programas de la escuela secundaria difieren según la vía seguida (general, técnica o profesional).

En la enseñanza secundaria general, el programa de matemáticas es el mismo, sin tener en cuenta las capacidades personales de los alumnos, hasta el final de cuarto. A partir de quinto, el nivel de matemáticas, relacionado además con el número de horas a la semana, varía de acuerdo con la orientación más o menos científica elegida por el alumnado.

Por lo que respecta a la técnica y sobre todo a la profesional, los programas son muy variados, teniendo en cuenta las necesidades de los alumnos.

En general, los programas son cerrados, impuestos por el Ministerio. No obstante, existe una cierta tolerancia.

Los profesores que lo desean, y que pueden defender su punto de vista, consiguen hacer modificaciones, especialmente en el orden de aprendizaje de los temas y en el grado de importancia relativa de las diferentes partes del curso. Pero no se pueden hacer desviaciones mayores.

Relación o correlación entre los programas de matemáticas y los de otras materias

Los programas de matemáticas tienen poca, demasiado poca, correlación con otras disciplinas.

Existe una tendencia para reforzar la interdisciplinariedad, pero aunque se vea aconsejada por el Ministerio, esta tendencia no se ve en las rúbricas de los programas.

Dentro de una escuela, los profesores pueden ponerse de acuerdo para coordinar sus cursos lo máximo. Algunos lo hacen, pero son la excepción.

Los métodos de enseñanza

Empleo de los libros de texto

No es obligatorio el empleo de libros de texto. Los profesores con experiencia y preocupados por la calidad de su enseñanza muy a menudo redactan sus propios cursos. Pero la mayoría del profesorado prefiere emplear los libros de texto (cuando existen, lo que no es necesariamente el caso, a la vista de los sucesivos cambios de programas).

Ejercicios o problemas... problemas abiertos

Se recomienda proponer problemas abiertos, junto con los ejercicios rutinarios. Pero, una vez más, pocos profesores y pocos libros de texto lo hacen.

El rigor y las demostraciones, y su ubicación

El rigor y las demostraciones tienen su sitio, en particular en los cursos que tienen numerosas horas de clase a la semana. Pero la Sociedad Belga de Profesores de Matemáticas de expresión francesa, se queja al ver disminuir su papel en las reformas de estos últimos años.

Como se aligeran cada vez más los programas, después de la disminución del número de horas dedicadas, es el rigor lo que se sacrifica.

La organización del trabajo

La organización del trabajo en clase es completamente libre, así como los métodos empleados. Las lecciones magistrales, sin embargo, están desaconsejadas, lo mismo que el empleo abusivo de los libros de texto. Los trabajos de investigación, los problemas para hacer en casa se intentan llevar acabo, lo mismo que los trabajos en equipos, en clase.

La organización del trabajo en clase es completamente libre, así como los métodos empleados. Las lecciones magistrales, sin embargo, están desaconsejadas, lo mismo que el empleo abusivo de los libros de texto.

El sistema de evaluación

Evaluación de los contenidos matemáticos, de las actitudes, de las capacidades, de los «valores»,...

La evaluación debe de tener en cuenta los conocimientos matemáticos, su utilización y su asimilación. Es bien «formativa» y, en este caso, tiene por objetivo esencial ayudar al alumno a autoevaluarse, a reconocer sus lagunas, a mejorar sus métodos de trabajo, bien «certificativa» y, en este caso, se refiere solo a la materia prevista en el programa y presentada en clase, y sirve para decidir sobre la promoción de curso.

¿Cómo se evalúa? Trabajos escritos en clase, cuaderno del alumno, trabajos en equipo, presentaciones orales

Esta evaluación se realiza por todos los medios posibles: la participación oral en las clases, los trabajos escritos en clase, el cuaderno, los trabajos en equipo, los trabajos en casa y los exámenes. Aquí, como en los demás aspectos, la personalidad del profesor es muy importante.

La aceptación de las reformas

Los profesores han reaccionado de diferentes maneras frente a las reformas.

No han estado de acuerdo con la reducción del número de horas dedicadas a las matemáticas, tanto más considerando que las exigencias de la enseñanza superior no han disminuido.

Se quejan por la pérdida del rigor impuesta por la falta de tiempo.

También se oponen con firmeza a la homogeneización de las clases hasta quinto. Estiman que las diferencias entre las capacidades matemáticas de los alumnos de 14-15 años son demasiado fuertes como para permitir una clase eficaz para todos. Numerosos profesores piensan que en el cuarto curso, lo más tarde, se necesitarían ya clases diferentes, que no es bueno guardar juntos a todos los alumnos, ni siquiera con grandes esfuerzos pedagógicos. La Sociedad Belga de Profesores de Matemáticas ha defendido este punto de vista, pero desgraciadamente sin éxito.

Los excesos de formalismo y de abstracción prematura presentes en los programas de los años sesenta han sido disminuidos con gran satisfacción de los profesores, pero estos deploran que estas reformas hayan llevado consigo la pérdida casi total del lenguaje conjuntista y de nociones, tan fructíferas como las que este punto de vista ofrecía a los alumnos cuando estaban bien concebidas.

La geometría, sobre todo del espacio, había estado muy descuidada en los programas de los años sesenta. Se ha producido un cambio que alegra a los profesores de matemáticas y también a los de ciencias, especialmente a los de física, que tenían que construir la óptica geométrica sin base. La aritmética había desaparecido de nuestros programas. Ha entrado en ellos, sin embargo tímidamente y limitada al primer ciclo.

El aumento de la importancia de la estadística y las probabilidades también se considera como una cosa buena.

La decisión de no permitir más que la repetición entre primero y segundo ciclo de secundaria deja escépticos a los profesores, que esperan a una primera evaluación para tener una opinión sin prejuicios.

Los padres están divididos pero, en general, no son muy competentes en matemáticas y confían en sus profesores. En cuanto a los alumnos, ¡nadie les pide opinión!

Comentarios

Se acusa a las matemáticas, tanto por parte del Ministerio como por los padres de ser la primera causa del fracaso escolar, y la tendencia actual va en el sentido de ir disminuyendo su importancia. De ahí la reducción del número de periodos semanales que se le dedican.

Los profesores se revelan contra esta concepción que dicen está falta de fundamentos serios. Por otra parte, les parece que los fracasos en matemáticas están ocasionados a menudo por la falta de comprensión de los enunciados, debida a un desconocimiento de la lengua materna, cada vez más acusado.

Las reformas de los programas, han permitido, ciertamente, interesantes discusiones, han motivado a los profesores, han impedido apoltronarse. Pero los medios puestos en marcha para la formación continua de los profesores son insuficientes. Especialmente en geometría, en aritmética, en estadística, muchos profesores no están preparados para asumir correctamente su enseñanza. Estas materias estaban poco presentes en los programas de sus tiempos de formación y no las dominan. Notemos que la formación continua está asegurada esencialmente por los grupos constituidos en el seno de las universidades, tanto libres como oficiales y por la SBPM que publica documentos pedagógicos, organiza jornadas de estudio y un congreso anual.

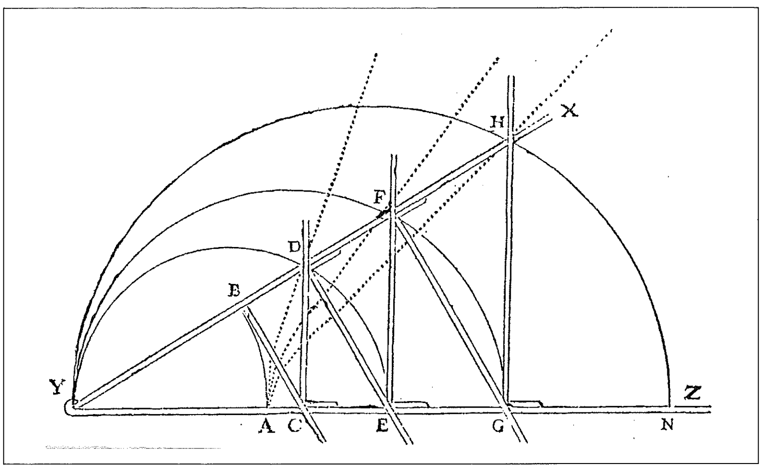
En estos últimos años se han visto suceder los cambios de programas con una prisa que algunos condenan. Ciertamente, hay previstas evaluaciones, pero su puesta en marcha no parece muy científica.

Los ahorros impuestos por las restricciones presupuestarias del gobierno han aumentado el número de alumnos por clase, y a la vez las obligaciones de cada profesor, con la pérdida consiguiente de 3000 empleos y el temor de ver reducida gravemente la eficacia de la enseñanza.

Huelgas largas e importantes de enseñantes han marcado, por otro lado el año 1996 y ciertamente se reanudarán al comienzo del curso.

Los comentarios anteriores, así como las apreciaciones expresadas en el conjunto de este texto, no son representativas más que de las opiniones de sus autoras, y no se refieren más que a ellas.

Simone Trompler
Vicepresidenta de la SBPMef
Claudine Festraets
Miembro del comité de la SBPMef



La Géometrie
Descartes

SUMA 23
noviembre 1996, pp. 91-93

La enseñanza de las matemáticas en Croacia*

Berislav Devcic

El sistema escolar croata consta de dos etapas. La Escuela Primaria: obligatoria, que dura 8 años. A partir de ahí cuatro posibilidades diferentes:

1. Colegio: 4 años.
   Dentro de éste se dan tres posibilidades, todas ellas conducen a las facultades universitarias, según la especialidad elegida.
   a) Colegio general.
   b) Colegio clásico es igual que el general, al que se añaden latín y griego.
   c) Colegio Matemático.
2. Escuela de comercio: Dura tres o cuatro años.
3. Escuela técnica que dura cuatro años.
   Las escuelas de comercio y técnicas permiten acceder más tarde tanto a la Universidad como a la Escuela Superior.
4. Escuela industrial que dura tres años y únicamente conduce al mundo del trabajo.

Alrededor de 30 alumnos por aula (a veces hasta 35).

El curso dura 35 semanas, siendo los periodos vacacionales los siguientes: durante navidades tres semanas, una semana en Pascua y dos meses en verano.

Los niños empiezan a ir a la escuela a los siete años (en casos especiales lo hacen a los seis).

Desde este curso los libros son gratuitos para los alumnos.

Escuela primaria

El cuadro adjunto muestra las horas semanales de clase de matemáticas en la escuela primaria:

Curso	1.°	2.°	3.°	4.°	5.°	6.°	7.°	8.°
Horas/semana	5	5	5	5	4	4	4	4

* Traducción: Florencio Villarroya

INFORME

De manera resumida, los programas de la escuela primaria son los siguientes:

Primer curso:

1. Las formas en el espacio, las superficies, las líneas y los puntos.
2. Las relaciones entre los objetos.
3. Las figuras en el plano.
4. Los números hasta diez, suma y resta.
5. Los números hasta 20, suma y resta.

Segundo curso:

1. Los números hasta 100, suma y resta.
2. La longitud.
3. Multiplicación y división.
4. Medida de longitudes.

Tercer curso:

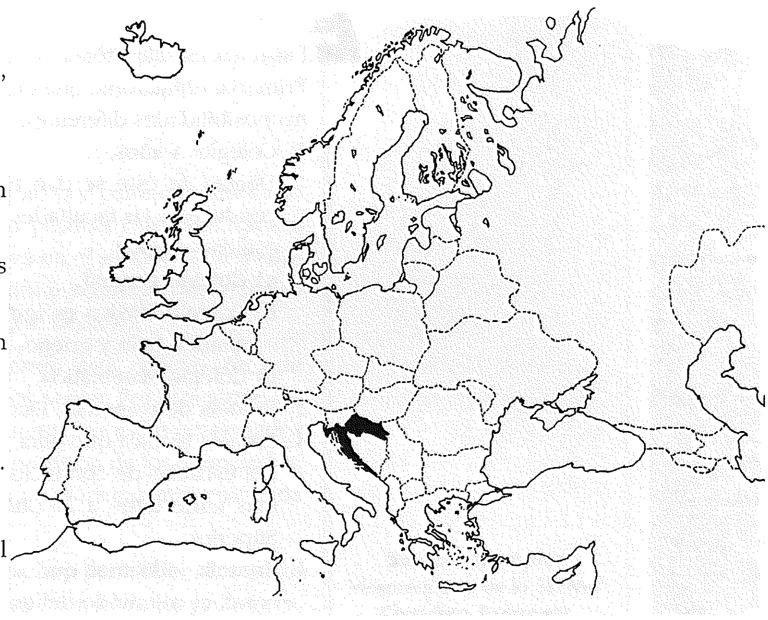
1. Los números hasta 1000, suma y resta escritas.
2. La recta en el espacio.
3. Multiplicación y división escritas.
4. Relaciones entre dos rectas en el espacio.
5. Los números hasta cien mil.
6. Medida de magnitudes.
7. Círculo y circunferencia.

Cuarto curso:

1. Los números hasta el millón.
2. El ángulo.
3. Multiplicación escrita.
4. El triángulo, el rectángulo y el cuadrado.
5. División escrita.
6. El cubo y el paralelepípedo.
7. Los números más grandes de un millón.

Quinto curso:

1. Los números naturales.
2. La división de números naturales.
3. Conjuntos de puntos en el plano.
4. Las fracciones.
5. Los números decimales.
6. El ángulo.



Sexto curso:

1. Las operaciones con las fracciones.
2. El triángulo.
3. Los números enteros.
4. Los números racionales.
5. Cuadriláteros: rectángulos, paralelogramos y trapecios.

Séptimo curso:

1. Los ejes de coordenadas en el plano.
2. Proporcionalidad y proporcionalidad inversa.
3. Los polígonos.
4. La función lineal.
5. La recta en los ejes de coordenadas.
6. Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.
7. Circunferencia y círculo.

Octavo curso:

1. Los números y sus cuadrados. Raíces cuadradas.
2. El teorema de Pitágoras.
3. Los números reales.
4. Puntos, rectas y planos en el espacio.
5. Cuerpos geométricos.

Escuela secundaria

El presente cuadro muestra las horas de clase semanales en los distintos tipos de escuela secundaria:

Curso	1.°	2.°	3.°	4.°
Colegio general y clásico	4	4	3	3
Colegio matemático*	4 ó 5	4 ó 5	5	5
Escuela técnica	4	4	3 ó 4	3 ó 4

* Además se pueden elegir 1 o 2 horas más a la semana.

En la Escuela industrial, la matemática está adaptada a la correspondiente profesión.

Primer curso:

1. El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.
2. El orden en el conjunto de los números reales.
3. Sistemas de coordenadas en el espacio.
4. Congruencias y semejanzas.
5. Raíces y potencias con exponentes racionales.
6. La circunferencia y el círculo.

Segundo curso:

1. El conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos.
2. La ecuación de segundo grado.
3. La función cuadrática y su representación gráfica.
4. Polinomios y ecuaciones algebraicas.
5. Trigonometría (en triángulos rectángulos).
6. Las funciones exponenciales y logarítmicas.
7. La geometría en el espacio.
8. Los poliedros y los sólidos de revolución.

Tercer curso:

1. Las funciones trigonométricas.
2. Vectores en el espacio.
3. Geometría analítica en el espacio.
4. Las cónicas.
5. Introducción a la programación lineal.

Cuarto curso:

1. Los números.
2. Combinatoria.
3. Probabilidad.
4. Funciones.
5. Cálculo diferencial.
6. Integrales y primitivas.

Berislav Devcic
Instituto Clásico Arzobispal
Zagreb

PAr grace & priuilege du Roy tres chreſtien il eſt permis a l'Autheur du liure intitulé *Diſcours de la Methode &c. plus la Dioptrique, les Meteores, & la Geometrie &c.* de le faire imprimer en telle part que bon luy ſemblera dedans & dehors le royaume de France, & ce pendant le terme de dix annees conſequutiues, a conter du iour qu'il ſera parecheué d'imprimer, ſans qu aucun autre que le libraire qu'il aura choiſi le puiſſe imprimer, ou faire imprimer, en tout ny en partie, ſous quelque pretexte ou deguiſement que ce puiſſe eſtre; ny en vendre ou debiter d'autre impreſſion que de celle qui aura eſté faite par ſa permiſſion, a peine de mil liures d'amande, confiſcation de tous les exemplaires &c. Ainſi qu'il eſt plus amplement declaré dans les lettres donnees a Paris le 4 iour de May 1637. ſignees par le Roy en ſon conſeil *Ceberet* & ſeellees du grand ſceau de cire iaune ſur ſimple queuë.

l'Autheur a permis a Ian Maire marchand libraire a Leyde, d'imprimer le dit liure & de iouir du dit priuilege pour le tems & aux conditions entre eux accordeés.

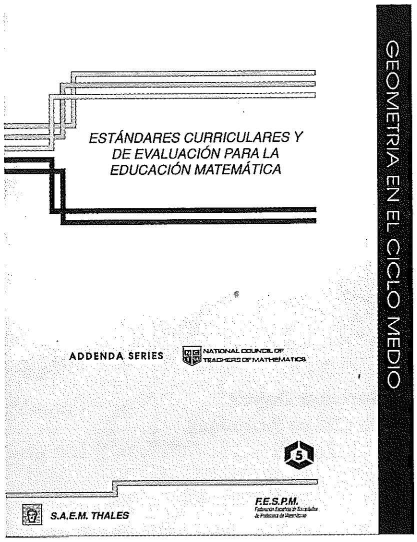
Acheué d'imprimer le 8. *iour de Iuin* 1637.

La Géometrie. Descartes

Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática
ADDENDA SERIES

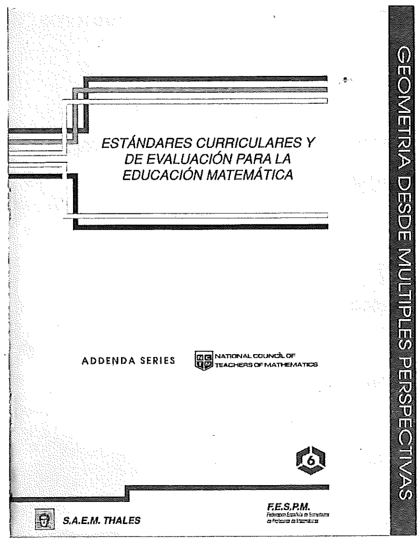
Geometría y sentido espacial

Socios 900 pta
No socios 1.200 pta



Geometría en el ciclo medio

Socios 1.100 pta
No socios 1.500 pta



Geometría desde múltiples perspectivas

Socios 1.100 pta
No socios 1.500 pta

SAEM THALES

Pedidos: SAEM THALES. Facultad de Matemáticas. Apartado de Correos 1160. 41080 SEVILLA.

SUMA 23
noviembre 1996, pp. 95-103

La enseñanza de las matemáticas en Dinamarca*

Richard Cabassut

Dinamarca es un país de 5,15 millones de personas. Los centros escolares están implantados esencialmente en pequeños núcleos urbanos, y con un tamaño humano. En 1990, 632.000 alumnos estaban en la enseñanza obligatoria (incluye la escuela maternal, primaria y primer ciclo de la secundaria en la *Folkeskole*); 72.000 asisten a los institutos de enseñanza general, 240.000 hay en formación profesional y 126.000 en la enseñanza superior.

El ministerio de educación reglamenta el sistema escolar: orientaciones, directrices, recomendaciones (no obligatorias), control general de los exámenes al finalizar los estudios, fijación de las normas mínimas para los edificios escolares, subvenciones globales tanto a la privada como a la pública, sin prescribir en qué se invierten los fondos.

La enseñanza obligatoria: una escuela en la que la enseñanza primaria no se distingue del primer ciclo de la enseñanza secundaria

Hasta los siete años, los niños pueden ir a guarderías de día (de 0 a 3 años) o al jardín de infancia (de 3 a 7 años), o a las clases preparatorias (de 5 a 7 años). La escolarización es obligatoria desde los 7 hasta los 16 años, y se desarrolla toda en un mismo centro: la *Folkeskole* (escuela municipal) o en escuelas privadas (el 10% de los alumnos). Existe un curso décimo para los cursos de nivel superior y prepara para un examen no obligatorio de finalización de estudios avanzados. No es obligatorio realizar este décimo curso para continuar en el instituto: está reservado para los alumnos que desean consolidar sus adquisiciones antes de continuar otros estudios o de abandonar el sistema educativo.

INFORME

* Publicado en *l'Ouvert*, n.° 77, diciembre de 1994.

Traducción: Florencio Villarroya

n.º años	ENSEÑANZA SUPERIOR			
4	GYMNASIUM			
3	OPCIÓN LINGÜÍSTICA	OPCIÓN MATEMÁTICAS		ENSEÑANZA PROFESIONAL aprendizaje
2	(35% de alumnos del Gymnasium)	(65% de alumno del Gymnasium)	HF	
1				
Exámenes no obligatorios: Certificados de fin de estudios				El 8% de los alumnos abandonan la escuela después de las clases de 9.° ó 10.°
Edad	**Curso**			
16	10	Curso seguido por el 45% de los alumnos que hicieron 9.°		
15	9			
14	8	FOLKESKOLE		
13	7			ESCUELAS
12	6	ENSEÑANZA PÚBLICA		PRIVADAS
11	5			
10	4	Primaria y Primer Ciclo de Secundaria		
9	3	(90% de los alumnos)		(10% de alumnos)
8	2			
7	1			
6	Maternal	Bornehaveklasse (90% de alumnos)		

Cuadro 1. El sistema educativo danés

	OPCIÓN MATEMÁTICAS (elegida por el 65% de los alumnos)		OPCIÓN LINGÜÍSTICA (elegida por el 35% de los alumnos)		
Curso 1.°	5 clases de 45 m a la semana		3 clases de 45 minutos a la semana de enseñanza general de ciencias		
2.° Curso	5 clases de 45 m a la semana. Prueba escrita obligatoria (nivel B)		4 clases de 45 minutos a la semana de enseñanza general de ciencias	nivel intermedio	nivel superior
	sin prueba oral	con prueba oral	con prueba oral	4 h de matemáticas o nada	5 h de matemáticas
Curso 3.°	nivel superior 5 clases de 45 minutos	sin matemáticas	sin clases de ciencias	nada o 4 h de matemáticas	5 h de matemáticas
	Pruebas escritas y orales (nivel A)			examen oral (nivel C)	escrito más oral (nivel B)

Cuadro 2. Organización de la enseñanza de las matemáticas

La enseñanza post-obligatoria: la elección entre la enseñanza general o la formación profesional

Al final de la escolarización obligatoria, el alumno puede elegir, bajo ciertas condiciones (explicitadas en el parágrafo evaluación), el *Gymnasium,* que se parece a nuestros institutos de Bachillerato, y que prepara en tres años para el *Studentereksamen* (equivalente de nuestra Selectividad) que permite el acceso a la Universidad. Los alumnos de mayor edad, considerados aptos para retomar los estudios generales que han interrumpido para participar en una experiencia profesional o de otro tipo de formación, pueden elegir los cursos HF *(Hojere Forberedelseksamen):* estos cursos, preparan en dos años el examen preparatorio superior HF que permite, del mismo modo, el acceso a la enseñanza superior. Más de las dos terceras partes de los alumnos de HF interrumpieron su escolaridad después de la Folkeskole, durante más de un año. Cada uno de los 14 condados daneses es responsable, en la gran mayoría de casos, de las escuelas secundarias superiores *(Gymnasium* y cursos de HF), del condado.

Los alumnos pueden elegir, igualmente, la formación profesional por medio del *aprendizaje* (que dura entre 2 y 4 años, con una formación teórica en una escuela técnica o de comercio y una formación práctica en empresas), o el acceso a escuelas técnicas (diseñadores técnicos, ayudantes técnicos o de laboratorio,...), comerciales, agrícolas, de educación sanitaria o social, o de otro tipo de enseñanza profesional. Las escuelas de enseñanza profesional son más bien privadas, aunque reciben subvenciones del Estado.

Las universidades y la mayoría de los centros de enseñanza superior están gestionadas por el estado.

Organización de la enseñanza secundaria de las matemáticas

Las matemáticas en la Folkeskole

La enseñanza de las matemáticas es obligatoria, con cuatro clases de 45 m a la semana. Se proponen programas diferenciados para los cursos 8.°, 9.° ó 10.°.

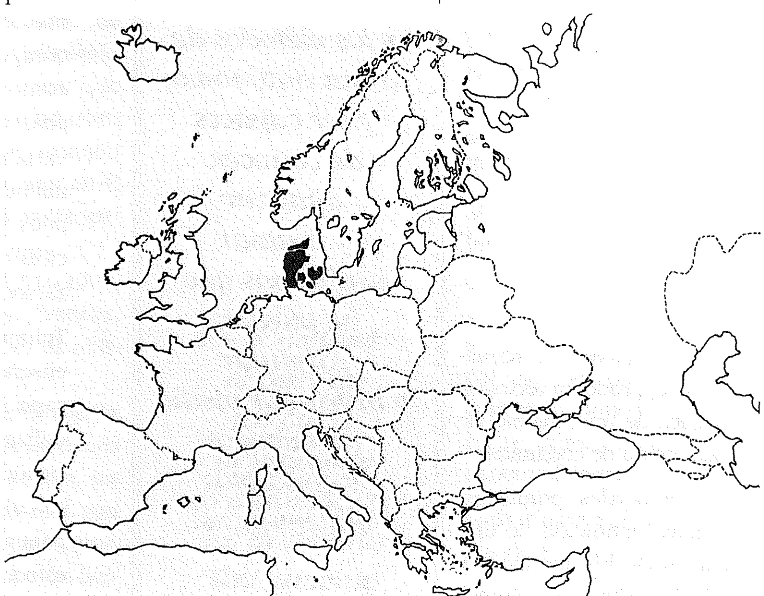
Las matemáticas en los Institutos

La enseñanza dura tres cursos, del de 16-17 años al de 18-19. Se proponen dos opciones: la *opción matemáticas* y la *opción literaria.*

En la opción matemáticas, los alumnos reciben una enseñanza de matemáticas obligatorias durante los dos primeros cursos: Nivel B, a razón de cinco horas a la semana (de 45 m, claro). Al terminar estos dos cursos, que correspondería con nuestro Tercero de BUP, pero con un año más de edad, los alumnos tienen que hacer un examen escrito de 4 horas de verdad y un examen oral de 25 minutos. El tercer año pueden bien no tener matemáticas bien tener unas matemáticas de nivel superior (nivel A), elección que realiza el 85% aproximado de los alumnos del segundo curso de la opción matemáticas. Esta enseñanza de 5 horas semanales se evalúa mediante un examen escrito de 4 horas enteras y un oral de 30 m. Este examen oral sustituye al del final del segundo curso, del que están exentos los alumnos que hacen matemáticas en su tercer curso. Existe también la posibilidad de preparar, durante una semana, en la cual el alumno no tiene que asistir a clases, una memoria de matemáticas, cuya nota se tiene en cuenta en la nota de la Selectividad (una descripción más completa se da en el parágrafo sobre la memoria).

En la opción literaria, hay una enseñanza general de ciencias, constituida por matemáticas, física, química, medio ambiente y astronomía, durante un curso, por un único profesor a razón de tres horas semanales. Al acabar este primer curso se le ofrecen tres posibilidades a los alumnos:

- Seguir en segundo con una enseñanza general de ciencias, de 4 horas a la semana, sancionado por un examen oral; y ninguna enseñanza científica en tercero.
- Elegir la opción literaria, nivel intermedio (nivel C). Entonces recibe una enseñanza semanal de 4 horas de matemáticas, o bien en segundo, o bien en tercero, sancionados por un examen oral de 25 minutos.
- Eligir la opción literaria, nivel superior (nivel B), en la que sigue un curso matemático de nivel comparable al de la enseñanza obligatoria de la opción matemáticas, a razón de 5 horas a la semana y sancionado por un examen escrito y oral.



Todas estas elecciones están bajo la exclusiva responsabilidad de cada alumno: los profesores y los consejos de evaluación, pueden dar informes pero no es necesario seguirlos.

Los programas de matemáticas en el instituto: Opción «matemáticas»

1. Matemáticas obligatorias (nivel B)

Finalidades de esta enseñanza:

- Los estudiantes tienen que adquirir una comprensión de los modos de pensamiento, de los conceptos y de los métodos matemáticos fundamentales;
- los estudiantes deben familiarizarse con las matemáticas como medio de formulación, de análisis y de resolución de problemas dentro de diferentes dominios (del programa).

El programa incluye cinco dominios y tres aspectos. Los cinco dominios son:

1) Números: enteros, racionales, reales, exponentes, raíces, porcentajes, interés.
2) Geometría: triángulo, triángulos rectángulos y semejantes, áreas en el plano, distancia en el plano, seno, coseno y tangente, cálculo de longitudes y ángulos de un triángulo.
3) Funciones: funciones lineales, polinómicas, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas y potenciales. Resolución de problemas de ecuaciones y desigualdades en los que intervengan las funciones anteriores.
4) Cálculo diferencial: número derivada, tangente, aproximación afín, reglas de derivación, máximos y mínimos, funciones monótonas, métodos para trazar curvas.
5) Estadística y probabilidad: experiencias aleatorias, probabilidad a priori y por frecuencias, universo de posibles, probabilidades de sucesos, áleas (variable aleatoria), distribución binomial y normal.

Los tres aspectos son:

1) El aspecto histórico: los estudiantes tienen que adquirir un conocimiento de las matemáticas y de los elementos de historia de las matemáticas en un contexto socio-cultural.
2) El aspecto modelización: el programa debe dar a los estudiantes el conocimiento de la construcción de modelos matemáticos como representación de la realidad y una impresión de las posibilidades y de los límites de la

aplicación de los modelos matemáticos y permitirles modelizar, de manera autónoma, situaciones sencillas.

3) Estructura interna de las matemáticas: los estudiantes tienen que lograr una comprensión de los modos de pensamiento y de los métodos característicos de las matemáticas. Tienen que comprender cómo estos modos de pensamiento y métodos afectan al desarrollo y a la estructura de los diferentes dominios (del programa).

Estudio de los aspectos: los tres aspectos se estudian en relación con el estudio de los cinco dominios, y a través de una enseñanza especial de unidades organizadas en relación con uno o más aspectos. Estas unidades se pueden incluir tanto en un tema obligatorio (del programa) como en un tema adicional (al programa). Estas unidades deben comprender al menos veinte lecciones.

2. Matemáticas a nivel superior (nivel A)

Se añade a las finalidades de la enseñanza obligatoria la siguiente: los estudiantes tienen que desarrollar especialmente la capacidad para utilizar los conceptos matemáticos y los métodos de forma autónoma, y ser capaces de conocer, analizar y evaluar problemas que se pueden formular y tratar por medio de métodos y conceptos matemáticos.

El programa incluye tres dominios, una unidad de libre elección y tres aspectos.

Los tres dominios son:

1) Geometría de dimensiones 2 y 3. Vectores, coordenadas, producto escalar, ortogonalidad, producto vectorial, proyecciones, descripción analítica de un conjunto de puntos, distancia, ángulos, intersección de conjuntos.

2) Cálculo integral. Ecuaciones diferenciales: primitivas, integrales definidas e indefinidas; definición de una integral como límite de sumas, métodos analíticos y numéricos de integración, cálculo de áreas y volúmenes, modelos de ecuaciones diferenciales, incluyendo $y'(x) = f(x)\cdot g(y)$, e $y'' = k\cdot y$.

3) Un dominio ligando las matemáticas con la informática. Los estudiantes tienen que lograr la comprensión de un dominio matemático que ilustre la interacción entre la matemática y la informática... El concepto de algoritmo tiene que jugar un papel principal. Este dominio debe de durar al menos veinte sesiones.

4) Una unidad de libre elección que debe durar alrededor de veinticinco sesiones.

Los aspectos son los mismos tres que para la enseñanza obligatoria precedente.

3. Matemáticas de la opción literaria: nivel intermedio (Nivel C)

Las finalidades de esta enseñanza son:

- Los estudiantes deben adquirir una comprensión de los modos de pensamiento y de los métodos matemáticos;
- los estudiantes tienen que lograr un conocimiento de las matemáticas como medio de formulación, análisis y resolución de problemas en dominios variados (del programa);
- los estudiantes tiene que llegar a ser competentes en la aplicación de algunos conceptos matemáticos elementales y en métodos para resolver problemas.

[En las Matemáticas de nivel A] los estudiantes tienen que desarrollar especialmente la capacidad para utilizar los conceptos matemáticos y los métodos de forma autónoma, y ser capaces de conocer, analizar y evaluar problemas que se pueden formular y tratar por medio de métodos y conceptos matemáticos.

El programa incluye tres dominios y una unidad de libre elección. Los tres dominios son:

1) Función, optimización: los estudiantes tienen que conseguir una comprensión de las funciones como medio de descripción y de análisis de las relaciones entre variables, así como un conocimiento de las funciones elementales y de los métodos de resolución de los problemas de optimización.

2) Tratamiento y análisis de datos: la enseñanza tiene que desarrollar la capacidad de los estudiantes para utilizar los medios de descripción estadística y los instrumentos de cálculo (incluido el ordenador) para analizar los datos. Además, los estudiantes tienen que familiarizarse con los conceptos y las descripciones de problemas económicos corrientes.

3) Geometría: la enseñanza debe aumentar el conocimiento de los estudiantes sobre los conceptos fundamentales de geometría. El objetivo principal es aumentar la comprensión de los estudiantes de los modos de pensamiento y los métodos matemáticos y de darles algunas aplicaciones prácticas de geometría o una visión de las matemáticas en un contexto histórico.

Un tema de libre elección se debe de tratar al menos durante veinte lecciones.

Evaluación y orientación en Dinamarca

El sistema de calificación

En la *Folkeskole,* el sistema de calificaciones refleja una filosofía liberal. Hasta el séptimo grado (alrededor de 13 años), se informa, al menos dos veces al año, a los padres sobre la escolarización de sus hijos, pero sin darles ninguna calificación. A partir de 8.° (14 años), se dan calificaciones de las materias que ha elegido el alumno para presentarse al examen de final de estudios. No es obligatorio presentarse a este examen; simplemente, éste puede servir como certificado del nivel de conocimientos al salir de la *Folkeskole*. Sin embargo, para los alumnos que quieren seguir sus estudios en un instituto, es obligatorio realizar el examen en ciertas materias. Para continuar en el instituto han que cumplir simultáneamente las siguientes condiciones:

- haber terminado el curso 9.° (o 10.°),
- haber cursado alemán o francés, desde 7.° hasta 9.° (el inglés es obligatorio desde 5.° hasta 9.°),
- haber superado una prueba escrita con un resultado aceptable en danés y en cálculo-matemáticas para las dos opciones, una prueba oral con un resultado aceptable en inglés, alemán o francés para la opción literaria, en física y química para la opción matemáticas. Además, los profesores de la Folkeskole deben de haber reconocido que el alumno es apto para continuar en un instituto, si no el alumno tiene que superar un examen oral suplementario.

En la Folkeskole, el sistema de calificaciones refleja una filosofía liberal.

Sea en la Folkeskole o en el instituto, la escala de notas dadas a los trabajos de los alumnos, está formada por nueve, representando categorías bien delimitadas. Uno de los objetivos de este sistema de calificación es el de asegurar la uniformidad de la evaluación de los resultados en el centro y entre diversos centros. El 13 se da a un resultado excepcional, original y excelente; el 11 para un producto original y excelente; el 10 a un resultado excelente, pero no especialmente original; el 9 para algo un poco por encima de la media, el 8 para un resultado medio, es decir, el último nivel de resultado aceptable; el 7 es para algo mediocre, algo por debajo de la media, el 6 para un producto dudoso pero más o menos satisfactorio, el 5 para algo dudoso y no satisfactorio, el 03 para algo imperfecto y muy insuficiente, el 00 para una producción completamente inaceptable. Para las pruebas escritas de matemáticas, existe una tabla que convierte los porcentajes obtenidos del total de puntos en las notas precedentes. El baremo se compone de manera que se respete la significación de las categorías precedentes.

En el instituto el paso de un curso al siguiente es automático: los profesores únicamente dan consejos (dejar la escuela o trabajar más,...).

La evaluación en el instituto

En el instituto el paso de un curso al siguiente es automático: los profesores únicamente dan consejos (dejar la escuela o trabajar más,...). Lo mismo sucede con la orientación (elección de asignaturas de nivel superior, o de nivel intermedio o para la elección de la disciplina en que se redactará la memoria) y el alumno es el que tiene la responsabilidad completa de sus elecciones.

Se realiza un control continuo. En la opción matemáticas, los alumnos tienen que redactar 26 deberes en casa por curso, que se parecen a la resolución de una serie de ejercicios, cada vez más parecidos a los de Selectividad, cuanto más se aproximan a esta prueba. Es una falta profesional para el profesor no proponer estos deberes y no corregirlos individualmente. Sin embargo, estos deberes no se califican, simplemente se corrigen las faltas y se anotan observaciones.

Cada trimestre, se realiza un ejercicio en clase de dos períodos de 45 minutos, que es calificado. Un boletín trimestral con una calificación oral y otra escrita sitúa el nivel matemático del alumno. Para los alumnos de segundo y tercero, se realiza una prueba de selectividad de ensayo, en las mismas condiciones de duración y presentación, pero que la corrige únicamente el propio profesor del grupo.

El examen de matemáticas de Selectividad en la opción «matemáticas»

1. El examen escrito al final del segundo curso

En el instituto los alumnos son evaluados por un examen final, correspondiente a nuestra selectividad: el *Studentereksamen.* Para la opción matemáticas a partir del final del segundo curso de instituto, es obligatoria una prueba escrita de 4 h de matemáticas. Esta prueba está constituida por cuatro partes independientes, que cubren en conjunto el programa, combinando cuestiones de ejecución de algoritmos o tareas rutinarias, con cuestiones que exigen una mayor reflexión, con temas de matemáticas puras y aplicadas (ver el anexo 1). El concepto de problema no aparece en este tipo de pruebas. El alumno dispone de un formulario, muy completo, de 27 páginas, que cubre todos los apartados del programa. La corrección de la prueba escrita la hacen dos personas que se reúnen para poner la nota definitiva.

2. El examen oral al final del segundo curso

Si el alumno no continúa con el estudio de las matemáticas en tercer curso, debe realizar obligatoriamente una prueba oral. El tema de la prueba oral es uno de los del curso, que tiene que desarrollar el alumno (definiciones, teoremas, aplicaciones,...), para ello dispone del libro de texto para prepararlo en 20 minutos, a continuación, lo expone durante 25 minutos. El candidato puede utilizar otras ayudas: otros libros, sus propios apuntes del curso, se permite el uso de calculadoras de bolsillo, de tablas,... En ningún caso se trata de resolver uno o varios problemas. El profesor de la clase hace preguntas e interviene durante la exposición. Un profesor externo asiste a dicha exposición, pero no interviene. Después de la exposición, los dos profesores, de común acuerdo otorgan la calificación definitiva, con preponderancia de la del examinador externo en caso de desacuerdo.

3. Las posibles pruebas en tercer curso

Si el alumno continúa su enseñanza de las matemáticas en tercero, tendrá otra prueba escrita obligatoria de matemáticas (Anexo 2), con una duración de cuatro horas, sobre los temas de tercer curso, con un formulario del curso y una prueba oral de 30 m, con la misma organización descrita para segundo.

Los programas de las pruebas escritas, así como los temas, son nacionales y pueden referirse a cualquier parte del programa. Los programas de las pruebas orales, se refieren al 50% del programa nacional, para la prueba de final de segundo, y a los 2/3 del mismo para la de final de tercero, de modo que las partes principales del programa tengan una importancia apropiada. La elección

Los programas de las pruebas escritas, así como los temas, son nacionales y pueden referirse a cualquier parte del programa.

Anexo 1:

STUDENTEREKSAMEN. Mayo-Junio 1993 (de 9 a 13 h). Matemáticas Nivel obligatorio. (Final de segundo)

Sólo se debe hacer un problema de entre el 6a y el 6b

El reparto de puntos será aproximadamente el siguiente:

Problema 1:	25	puntos
Problema 2:	15	puntos
Problema 3 y 4:	cada uno 15	puntos
Problema 5:	20	puntos
Problema 6:	15	puntos

Problema 1:

a) Para la función $f(x) = b\cdot a^x$, si x aumenta en tres, entonces $f(x)$ dobla su valor. Determinar a.

b) Determinar la derivada $f'(x)$ de $f(x) = \dfrac{x+3}{\text{sen } x}$

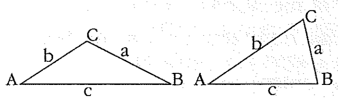
c) Se ingresan 10000 coronas en una cuenta. Cuatro años después, se reciben 14641 coronas. Determinar el interés anual medio.

d) Trazar la gráfica de la curva $f(x) = 120\cdot x^{-2}$, en un sistema de coordenadas logarítmico doble.

e) Realizar la división $(x^3 - 4x^2 + 7x - 6) : (x^2 - 2x + 3)$

Problema 2:

En el triángulo ABC, el ángulo A vale 32,8°, $a = 3{,}51$, y $c = 5{,}72$. Como muestra la figura hay dos formas posibles para el triángulo ABC, Calcular b en cada uno de ellos.



Problema 3:

Una función f se define por $f(x) = \ln(2x + 1) - 4x$, $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$

Determinar la monotonía de f. Dibujar con precisión la gráfica de f. Determinar el conjunto imagen de f.

Problema 4:

En un juego de ordenador, hay que describir rápidamente una órbita. La tabla de ahí al lado, da los porcentajes de jugadores repartidos en función del tiempo, para un gran número de jugadores:

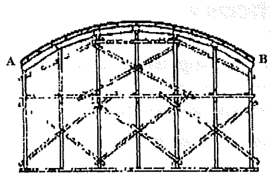
Tiempo (min.)	% jugadores
0-5	2,4%
5-7	19,6%
7-9	43,0%
9-11	29,3%
11 y +	5,7%

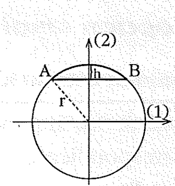
1) Mostrar que el tiempo empleado por un jugador para describir la órbita está aproximadamente distribuido siguiendo una ley normal.

2) Determinar la media y la desviación típica de esta ley normal.

3) Se eligen al azar diez jugadores; calcular la probabilidad de que empleen de 7 a 9 minutos para describir la órbita.

Problema 5:





Se utiliza un encofrado de madera para fundir el hormigón. En la figura 1 se ve un dibujo, en corte vertical, del encofrado de un tejado de forma circular. En la figura 2, la circunferencia está trazada en un sistema de coordenadas. El arco AB corresponde al encofrado, y h es la altura mayor del encofrado, por encima de la cuerda AB, con AB = 9 m, y h = 1,5 m.

del contenido del programa oral la hace el profesor con su clase, y se comunica al Ministerio, a lo largo del año, indicando las páginas correspondientes del libro del curso del que dispondrá el alumno durante el examen. El número de páginas seleccionadas está comprendido entre 140 y 220 para final de segundo y entre 125 y 175 para el de tercero. Es el profesor el que redacta los temas de los orales, sacados al azar para cada candidato en presencia del segundo examinador exterior.

Todas las pruebas de exámenes se realizan bajo el control ministerial: elabora y difunde los temas de las pruebas escritas, nombra y retribuye a los examinadores externos para el oral y para el escrito. Además de los tradicionales anales de los temas escritos, existe un video que muestra las pruebas orales con el resultado de la deliberación del tribunal. Estos vídeos se destinan sobre todo a la formación del profesorado.

Finalmente el alumno puede elegir redactar una memoria de matemáticas, con ciertas condiciones: durante una semana se le libera de las clases para hacerlo (ver una descripción más completa en el parágrafo sobre la memoria).

Las calificaciones que cuentan para la nota final de la Selectividad son las notas de final de curso dadas en cada asignatura del instituto, las notas obtenidas en los exámenes y la nota obtenida en la memoria. La media de estas notas se tiene en cuenta para el acceso a la enseñanza superior, para la que existe un numerus clausus.

Las calificaciones que cuentan para la nota final de la Selectividad son las notas de final de curso dadas en cada asignatura del instituto, las notas obtenidas en los exámenes y la nota obtenida en la memoria.

La prueba de matemáticas en la opción «literaria»

Para los alumnos que no siguen la enseñanza general de ciencias, en la que se integra la enseñanza de las matemáticas, está prevista una prueba oral al final de segundo curso, sobre la enseñanza general de ciencias.

Para los alumnos que eligen la enseñanza de matemáticas de nivel superior, de la opción lingüística, esta enseñanza es comparable a la enseñanza obligatoria

Mostrar que el radio r de la circunferencia vale 7,5 m. y determinar una ecuación de esta circunferencia.

La ecuación de la circunferencia se utiliza en la construcción, por ejemplo para calcular la altura en diferentes puntos. Determinar la altura en un punto situado a 2 m de A. El ángulo entre la tangente en A a la circunferencia y la horizontal es un dato importante para el encofrado. Si el ángulo es mayor de 35°, el encofrado tiene que ser más sólido. Determinar si es o no así.

Problema 6a:

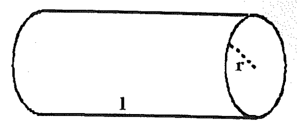


Figura 1

La figura 1 muestra un contenedor de forma cilíndrica, de radio r y altura l, y volumen. Hay que enviar un paquete a Groenlandia. La forma del paquete tiene que ser la de la figura 1. La longitud del paquete más el perímetro de la circunferencia valen 250 cm. Mostrar que el volumen del paquete es $V = 250\pi r^2 - 2\pi^2 r^3$

Determinar el volumen V máximo.

Problema 6b:

En un sistema de coordenadas se considera la parábola $\wp$ y la recta l, siendo $\wp : y = x^2 - 8x + 11$, l: y = $(-1/2)\cdot x$. Dibujar l y $\wp$ en el sistema de coordenadas. Determinar las coordenadas de los puntos de intersección de l y $\wp$ y resolver $-(1/2)\cdot x < x^2 - 8x + 11$. $\wp$ tiene una tangente paralela a l. Determinar la intersección de esta tangente con (Oy)6

[Se recuerda que de los problemas 6a y 6b, solo se debe tratar uno].

Anexo 2:

18 de agosto 1992 (de 9 a 13 h). Matemáticas
Nivel Superior. (Final de tercero).

Sólo se debe hacer un problema de entre el 6a y el 6b

El reparto de puntos será aproximadamente el siguiente:

Problemas 1, 2, 3, 4: ....cada uno 15 puntos
Problema 5: ....25 puntos
Problema 6: ....15 puntos

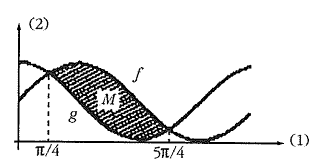
Problema 1:

En un sistema de coordenadas del espacio, se dan dos rectas paralelas l y m en forma paramétrica:

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}, \quad m : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$$

Determinar la distancia entre l y m. Determinar una ecuación del plano α, que contiene a l y m. Una esfera K de centro C(-5,2,1) es tangente al plano α; determinar una ecuación de K.

Problema 2:



Sobre la figura se ha rayado un conjunto M de puntos, limitado por las curvas de las funciones f y g siendo $f(x)$ = sen x + 1, $g(x)$ = cos x + 1. Determinar el área de M. Determinar el volumen del sólido de revolución engendrado por una rotación de M alrededor del eje OX.

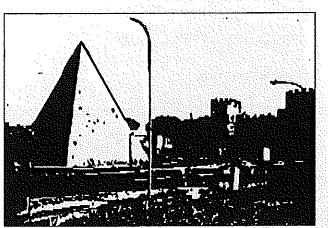
Problema 3:

Determinar la solución f de la ecuación diferencial sabiendo que $f(\sqrt{3}) = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot e^{-y}$$

Esbozar la gráfica de f.

Problema 4:



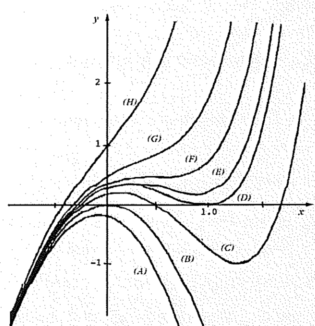
La foto anterior muestra la pirámide de Cestius en Roma. Esta pirámide tiene por base un cuadrado de 30 m. de lado. Su vértice está a 37 m., por encima del punto de intersección de las diagonales de su base.

Determinar el ángulo entre la base y una de las caras inclinadas de la pirámide.

Determinar el ángulo entre dos caras inclinadas vecinas. (Indicación: se podrá dibujar la pirámide en un sistema de coordenadas).

Problema 5:

La figura adjunta muestra una serie de curvas soluciones de la ecuación diferencial $y' - 2y = 4x^2 - 4x$



Determinar el polinomio de segundo grado $p(x)$ solución de la ecuación diferencial. Determinar entre las curvas anteriores cual es la que le corresponde.

Se considera la familia de funciones f_c definidas por donde c es real.

$f_c(x) = c \cdot e^{2x} + p(x)$ Mostrar que cada función f_c es solución de la ecuación diferencial.

Para un valor determinado de c, la función f_c tiene por curva (D). Determinar este valor de c.

Sobre la figura adjunta, se ve que las curvas tienen una tangente horizontal. El conjunto de puntos de tangencia de las tangentes horizontales, describe una parábola. Determinar una ecuación de esta parábola.

Problema 6:

6a) Sabemos que $F(x) = \frac{\ln x}{x}$ es una primitiva de $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

Utilizar esto para calcular $\displaystyle\int \frac{1-\ln x}{x^2}\left(\frac{1}{2}\cdot x^2 + 3\right)\cdot dx$

6b) Dados en un sistema de coordenadas, los dos vectores $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2t \\ 7+t \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8+2t \\ 7-t \end{pmatrix}$, donde t es un número real, determinar el valor de t para el cual $\frac{1}{2}\cdot\vec{b}$ es la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$

[Observación: entre los problemas 6a) y 6b) sólo hay que resolver uno]

Los alumnos de tercero tienen que redactar una memoria, y sólo una, en una asignatura. Las matemáticas de nivel superior pueden elegirse para presentar dicha memoria.

de la opción matemáticas. Por tanto, se evaluará al final de tercero con un examen escrito y uno oral comparables a los del final de segundo de los alumnos de la opción matemáticas.

Otros alumnos, finalmente, pueden elegir, al acabar primero o segundo, las matemáticas de nivel intermedio de la opción lingüística. Son evaluados con un examen oral al final de curso. El tiempo de preparación y de consulta de materiales y documentos es de 25 m. Incluyendo el tiempo de deliberación del tribunal, éste debe examinar a 2,5 candidatos por hora. La parte del programa seleccionada para el examen debe cubrir alrededor de los 2/3 del programa de manera que las partes principales del programa tengan una importancia apropiada.

La parte correspondiente a este programa, en los documentos de referencia puestos a disposición de los alumnos durante la preparación del oral (lo más frecuente es el libro de clase) debe cubrir entre 80 y 120 páginas.

La memoria de clase en tercero

Los alumnos de tercero tienen que redactar una memoria, y sólo una, en una asignatura. Las matemáticas de nivel superior pueden elegirse para presentar dicha memoria. Ésta será evaluada por el profesor del alumno y por un profesor exterior al centro, que de común acuerdo, pondrán la nota que será tenida en cuenta en la media de la Selectividad.

Para describir con detalle la organización de esta memoria, en el cuadro 3 damos un ejemplo (traducido, claro) de la hoja repartida a los alumnos al principio de curso en una reunión informativa sobre la memoria.

Ejemplos de temas para las memorias

Redes de neuronas, recurrencia y recursividad, fracciones continuas, investigación operativa, criptología, álgebra, complejos, cónicas, análisis numérico, cálculo aproximado, fórmula de Taylor y desarrollo en serie, funciones trigonométricas, historia del cálculo diferencial, ecuaciones diferenciales, modelos matemáticos aplicados a la economía, estadística y probabilidades, teoría de juegos, test de hipótesis, probabilidad aplicada a la economía, topografía, geometría esférica, iteración y caos, fractales, matemáticas en Babilonia, matemáticas griegas.

Ejemplos de libros disponibles

El centro dispone de un fondo de libros de matemáticas superiores que el profesor puede utilizar para desarrollar un tema libre o para aconsejar a los alumnos sobre la elección de los temas de las memorias. A título de ejemplo damos la lista de los títulos disponibles, treinta ejemplares de cada uno, en la biblioteca:

Programación Lineal; Aspecto de las matemáticas: Historia de la determinación de las tangentes; En el corazón de las matemáticas: del mito a las matemáticas físicas; ¿Qué es la matemática?; Los números; Demostrar en matemáticas; Los Algoritmos formales (grafos); Dibujos en tres dimensiones; Complejos y fractales; álgebra de Boole; Utilización de las matemáticas en biología; Cálculo Financiero; George Mohr: Euclides: Elementos 1 al 4; Fuentes y comentarios sobre la historia de las ecuaciones; Cuadratura del círculo, Trisección del ángulo; Duplicación del cubo; Del crecimiento lineal al caos; Número y Pensamiento; La opinión de los pitagóricos sobre la vida y el mundo; El número de oro en el arte; La Naturaleza y las Matemáticas; Combinatoria y algoritmos; Complejos; Número y geometría con extractos de historia de las matemáticas griegas.

Estas obras están editadas, bien por la asociación de profesores de matemáticas, bien por editoriales privadas.

Richard Cabassut
Lycée International de Strasbourg

Calendario

28 de octubre información sobre la organización general de la memoria.

12 de noviembre: los profesores de las diferentes asignaturas posibles para la memoria aconsejan a los alumnos.

23 de noviembre: elección de la asignatura y del tema general; esta elección se registra oficialmente por parte de la administración.

18 de enero, a las 12 .: los alumnos reciben la descripción precisa de la memoria (cuaderno de tareas) y se les exime de clases durante una semana para redactarla.

25 de enero a las 12 .: entrega de la memoria.

Disciplina: Se puede elegir como disciplina: la lengua propia (el danés), historia o una asignatura de nivel superior de la opción que se estudia.

Tema: Debe estar dentro de los límites de la asignatura elegida y debe contener un tema que no se haya estudiado en clase (si se trata de un tema que los alumnos ya conocen, hay que estudiarlo de otra manera y profundizarlo). La descripción del tema (23 de noviembre) se aprueba mediante la firma del alumno y de su profesor. Durante los estudios preliminares (antes de la semana de redacción) se tiene derecho a precisar un poco el tema, pero no a cambiarlo.

Formulación del tema: Únicamente el profesor formula el tema concreto, en un cuaderno de tareas, de forma que el alumno no pueda, de antemano, redactar la copia final. Sin embargo, el profesor tiene que tomar en consideración las ideas del alumno durante el periodo de preparación.

La memoria: Debe estar escrita de forma clara y precisa, no más de 15 páginas dactilografiadas de formato A4 de texto real, sin incluir el índice, las notas, la bibliografía, los gráficos, las tablas, las ilustraciones y las citas, incluso si se encuentran dentro del texto. Las 15 páginas tendrán un espacio interlineal de 1,5, 60 caracteres por línea, 40 líneas por página.

Entrega: Dos ejemplares firmados de la memoria, uno con la expresión «original», otro con la expresión ««copia» se deben entregar en la fecha indicada; en caso de litigio, únicamente valdrá la mención «original». (Uno de los ejemplares es para el profesor, el otro para el profesor externo).

Evaluación: Es importante que el candidato respete las instrucciones recibidas en la formulación del tema, que sepa analizar, interpretar y tratar las cuestiones de manera personal, que no se contente con resumir un texto, que trasmita bien las ideas y que sepa documentar su trabajo refiriéndose a las fuentes adecuadas.

Fraude: La prueba forma parte del examen de selectividad, un posible fraude sería castigado muy duramente, con la exclusión del examen final. Está especialmente prohibido entregar algo no escrito personalmente, copiar informaciones importantes sin indicar la fuente,...

Reclamación: Se puede presentar una reclamación de la nota, al director, no más tarde de dos semanas después de recibir la calificación.

Cuadro 3. Calendario e instrucciones generales para la elaboración de la memoria

Los fractales y al caos

1) Describir figuras fractales y algunas de sus características, si es posible a través de ejemplos. Al hacerlo, recordareis el concepto de dimensión de Hausdorff para un objeto. También es posible medir la dimensión de una línea de costa o de algo análogo.
2) Explicitar para algunas figuras fractales cómo están construidas. Por ejemplo, se puede considerar la función cuadrática en el plano y su relación con el conjunto de Mandelbrot.

En los lugares correspondientes de vuestro informe, tendréis que explicar los conceptos centrales, tales como iteración, punto fijo, caos,... Cuando sea pertinente, podéis utilizar el ordenador con moderación.

Programación lineal: teoría y práctica

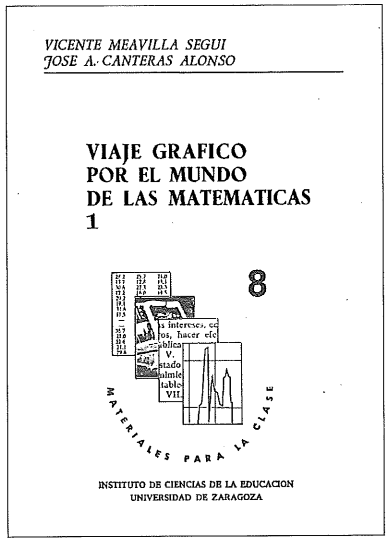
1) Explicar la programación lineal con dos variables. Hay que explicar los conceptos fundamentales, especialmente el de función lineal de dos variables, función de optimización, función numérica de una variable vectorial, polígono de restricciones, curvas de nivel, máximo o mínimo de la función de optimización. Ilustrar, si es posible, el método de resolución, con uno o varios ejemplos (al alumno se le da un ejemplo).
2) Mencionar el método del simplex, el M-método y el análisis de pequeñas variaciones, si es posible, a partir de un ejemplo (ver otro ejemplo en el anexo).
3) La programación lineal en la práctica.

Estudiar, bien a partir de los ejercicios 6.6 a 6.10 del libro de Blomhoj, *Programación lineal,* FAG (1984), el ejemplo 6.5 de ese mismo libro (se trata de la aplicación de la programación lineal al sistema de gestión de las escuelas del tipo Folkeskole de la ciudad de Odense), bien a partir de otros ejemplos concretos (pág. 123 a 126). Si es pertinente se puede utilizar, con moderación, un ordenador.

Cuadro 4. Dos ejemplos de cuaderno de tareas dado a un alumno para la memoria

INSTITUTO DE CIENCIAS
DE LA EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA



VICENTE MEAVILLA SEGUI
JOSE A. CANTERAS ALONSO

VIAJE GRAFICO
POR EL MUNDO
DE LAS MATEMATICAS
1

8

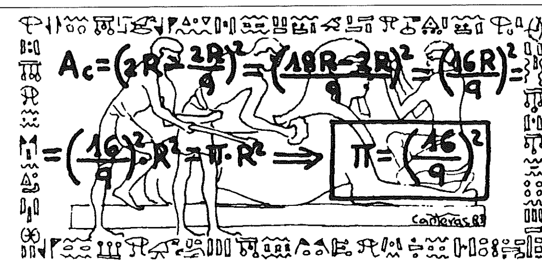
MATERIALES PARA LA CLASE

INSTITUTO DE CIENCIAS DE LA EDUCACION
UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

VIAJE GRÁFICO POR EL MUNDO DE LAS MATEMÁTICAS

Vicente Meavilla Seguí
José A. Canteras Alonso

EL ÁREA DE UN CÍRCULO SE CALCULABA ELEVANDO AL CUADRADO LA DIFERENCIA OBTENIDA AL RESTAR DEL DIÁMETRO LA NOVENA PARTE DE SU LONGITUD. DE ESTE MODO, EL NÚMERO π SE TOMABA COMO $(16/9)^2 = 3{,}1604$... , QUE ES UNA APROXIMACIÓN BASTANTE ACEPTABLE.



BOLETÍN DE PEDIDO

Deseo me envíen contra reembolso, más gastos de envío, los libros marcados con X:

☐ Viaje gráfico por el mundo de las matemáticas 1 (750 ptas)

☐ Viaje gráfico por el mundo de las matemáticas 2 (750 ptas)

Nombre:. . . . .

Dirección:. . . . .

Población: . . . . C.P.: . . . . Provincia:. . . . .

CIF o NIF (a efectos de emitir la obligatoria factura):. . . . .

Remitir a:
Instituto de Ciencias de la Educación. C/ Pedro Cerbuna, 12. 50009 ZARAGOZA. Tno.: (976) 761991. Fax: (976) 761345

SUMA 23
noviembre 1996, pp. 105-109

Los sistemas de enseñanza en Suiza

Jacques André Calame
Florencio Villarroya

INFORME

En Suiza existen tres niveles educativos:

- Uno o dos cursos de clases preescolares.
- Cinco o seis cursos de escuela primaria.
- Cuatro o tres años de escuela secundaria inferior (fin de la escolaridad obligatoria). (En todos los casos, numerados del 1 al 9).

En cuatro cantones, Fribourg, Jura, Geneve y Valais, el sistema consta de 6 años de primaria y 3 de secundaria. Los cantones de Neuchâtel y Tessin tienen 5 años de primaria y 4 de secundaria. El cantón de Vaud tiene 4 y 5 años respectivamente.

La diversificación escolar es muy fuerte. El curso 5.° se llama de adaptación y el 6.° de orientación. A partir de ahí, en la Secundaria Inferior, cursos 7.° al 9.°, se dan tres opciones: Moderna, Clásica y Científica, en Berna; Moderna, Clásica, Científica y General en el Jura, otros cantones añaden una opción Práctica o Preprofesional. En otros, las opciones moderna clásica y científica se incluyen en una llamada *pregymnasiale,* si bien dentro de esta nos encontramos en 8.° una opción con latín y otra sin él, y en 9.° secciones latín-griego, latín-lengua, científica y socioeconómica.

En general, para acceder a la Secundaria Superior hay que cumplir ciertas condiciones, a veces superar un examen, otras haber cursado ciertas materias, para acceder a determinados centros,...

Las dos últimas reformas realizadas en Suiza han estado ligadas a los medios y métodos de enseñanza, tanto la de los años setenta, como la reforma de los años noventa.

Las reformas se han hecho, a menudo, asignatura por asignatura, pero hoy asistimos a una toma de conciencia de la necesidad del cambio con un telón de fondo común. Por ejemplo, la resolución de problemas abiertos, el estudio de situaciones-problema puede encontrarse en muchas de las ramas científicas y también en las literarias.

Cada cantón de la Suiza francófona tiene su propio sistema y su propia dotación horaria. A título de ejemplo, veamos algunos datos relativamente recientes, obtenidos el último curso: respecto del número de horas semanales de matemáticas nos encontramos con variaciones de 3 h a 5 h 30 m. De uno al otro extremo, con un máximo en Friburgo y en Valais, y un mínimo en los cantones de Neuchâtel y Vaud... Pero esto es incluso variable en un mismo cantón. Así, en el cantón de Neuchâtel, el número de horas de matemáticas aumenta de quinto a sexto, es decir al pasar de primaria a secundaria.

Por lo que se refiere a las vacaciones escolares, también es variable el tiempo correspondiente a un curso escolar: se puede decir que de 13 a 15 semanas y media al año no hay escuela, es decir, hay entre 36 y 40 semanas reservadas para la escuela (pero en ellas se incluyen las semanas de ski, los intercambios lingüísticos,...).

Por ejemplo, en Berna hay 798 clases, de 60 minutos, de clase repartidas en 38 semanas, después de haberse sufrido en los últimos años una disminución horaria, por razones presupuestarias. Así el total de clases, de 60 minutos, en segundo de primaria anuales, varía entre 702 y 876, aumentando hasta situarse entre 907 y 1045 clases de 60 minutos para 9.° de secundaria.

El horario semanal para la escuela primaria se desarrolla en 8 o 9 medias jornadas (2 días y medio libres), variando como siempre entre cantones. En la secundaria, el horario se desarrolla en mañanas y cuatro tardes, durante 36 a 39 semanas. La duración de la clase es, en general, de 45 minutos, en algún cantón de 50, en ninguno de más.

Las proporciones [de escuelas públicas y privadas] varían enormemente de un cantón a otro pero, en general, las escuelas públicas son mayoritarias.

Cantón de Berna (periodos de 45 m):

	1.°	2.°	3.°	4.°	5.°	6.°	7.°	8.°	9.°
Matemáticas	5	6	6	6	5	5	5	5	5
Dibujo geométrico y técnico (opciones científica y moderna)							2	1	2

(Existen además 2 horas de clase de Dibujo dentro del área Educación visual y manual. Los alumnos de la opción clásica pueden hacer como optativa el Dibujo geométrico y técnico anterior. Los alumnos de las opciones científica y moderna pueden hacer una hora semanal de TPM (opción informática).

Cantón de Fribourg (periodos de 50 m):

<table>
<tr><th></th><th>1.°</th><th>2.°</th><th>3.°</th><th>4.°</th><th>5.°</th><th>6.°</th><th>7.°</th><th>8.°</th><th>9.°</th></tr>
<tr><td>Matemáticas (opción práctica)</td><td rowspan="2">5</td><td rowspan="2">5</td><td rowspan="2">6</td><td rowspan="2">6</td><td rowspan="2">6</td><td rowspan="2">6</td><td>7</td><td>6</td><td>6</td></tr>
<tr><td>Matemáticas (opciones pregimnasium y general)</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td></tr>
</table>

(Existen además 1 hora de profundización en Matemáticas y 2 horas de clase de Dibujo técnico para los alumnos de la opción general, en 9.°).

Cuadro 1. Ejemplo de la distribución horaria, semanal, de matemáticas en los distintos niveles.

El número de horas semanales, por ejemplo, en 2.° de primaria varía de 24 a 32, en 4.° de 27 a 32; en la secundaria obligatoria varía entre 30 y 34. Hacia el final de la escolarización obligatoria, el número de horas de clase se va equiparando entre los cantones.

En algunos cantones se ha introducido el horario continuo de modo definitivo, en otros a título experimental, en otros no se utiliza.

En algunos cantones, hay Geometría Descriptiva como optativa, de 2 horas semanales, en 8.° y 9.°.

Respecto de la existencia de escuelas públicas y privadas, también hay muchas variaciones, ya que algunos cantones al principio solo tenían escuelas laicas, otros escuelas laicas y religiosas (cantones de origen católico), y además escuelas alternativas, privadas, al lado de la escuela pública (ejemplo: escuela Steiner, animada por *antropósofos*).

Las proporciones varían enormemente de un cantón a otro pero, en general, las escuelas públicas son mayoritarias.

El número de alumnos varía también mucho. Puede variar, desde los 8-10 alumnos en las clases de acogida de niños procedentes del extranjero o con dificultades escolares o sociales conocidas, hasta 28-30 alumnos en las clases llamadas *homogéneas*, cuando las cuestiones financieras, ligadas a la coyuntura, así lo exigen. Podríamos decir que la media debe situarse entre 20 y 25 alumnos por clase, tanto en primaria como en secundaria.

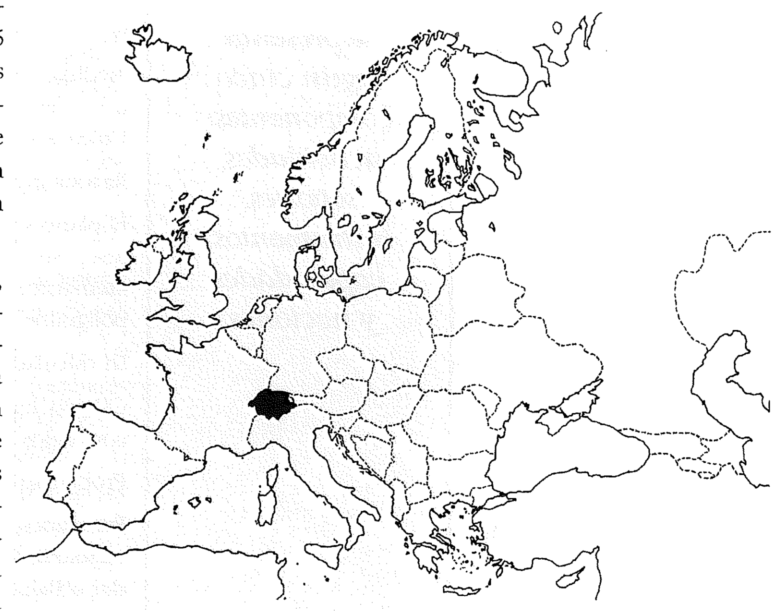
Condiciones de acceso a la Universidad

En principio, es suficiente con estar en posesión del título de Bachiller, y del Certificado de Madurez federal, cuyos tipos varían de una opción a otra de estudios secundarios (comercial, profesional, literaria, científica).

Los profesores de matemáticas

Las personas que enseñan en las escuelas primarias, en principio, han estudiado en las Escuelas Normales, de acuerdo con modalidades cantonales. Actualmente, hay una tendencia a dirigirse hacia un sistema de Bachillerato más tres cursos de formación inicial, uniendo la teoría y la práctica.

En la Secundaria Inferior (de 6.° a 9.°), lo más frecuente son personas que o bien tienen un diploma específico de enseñanza secundaria inferior (3 años de estudio después del Bachillerato), para algunas disciplinas, o bien son licenciados universitarios (con 4-5 años de formación después del bachillerato). Hay profesores de secundaria que completan a veces, y según los cantones, su formación inicial antes de enseñar.



En la Secundaria Superior, todos los profesores disponen de un título universitario o equivalente en la materia que enseñan.En particular, diremos que hoy, ciertos licenciados universitarios han completado su formación con nuevos estudios ligados a la didáctica general o a una didáctica de su rama (por ejemplo de matemáticas) o a ciencias humanas (pedagogía, psicología, por ejemplo).

La contratación del profesorado se realiza, en principio, de acuerdo con las necesidades y la puesta en marcha de las leyes federales o cantonales.

Según el grado de enseñanza y a veces los títulos del interesado, el número de horas varía también de un cantón a otro, o de un nivel a otro. Para dar un orden de magnitud, diremos que la carga media corresponde a 24-30 clases de enseñanza a la semana (que recordamos son de 45 minutos), con unas pocas horas menos en la secundaria superior que en la inferior y primaria.

Las matemáticas enseñadas

Primaria

En 1973, entraron en vigor unos programas de matemáticas, comunes, por primera vez en la historia para los siete cantones de habla francesa, insertados en la corriente de la *matemática moderna,* al igual que en otros países occidentales. Los programas se estuvieron experimentando y revisando durante diez años.

Para ello, se había creado en 1967 una *Comisión intercantonal de habla francesa, de coordinación de la enseñanza.* La implantación de los cursos se hizo año tras año entre 1973 para primero de primaria y 1978 para sexto. Para favorecer la innovación se pusieron a disposición de los profesores acciones de formación y de reciclaje.

Dichos programas, como en el resto de los países, no tuvieron el efecto deseado, y en los años finales de los ochenta se proponen nuevos programas de primero a sexto con los siguientes objetivos generales:

- Despertar el interés por las actividades matemáticas.
- Participar en el desarrollo de las diferentes capacidades intelectuales: razonamiento lógico, capacidad para situar, clasificar, ordenar, capacidad para representarse una situación.
- Permitir la exploración de las nociones, de las propiedades, de las relaciones y de las estructuras en los dominios numérico, geométrico y de la medida.
- Desarrollar la curiosidad, las ganas de comprender y de pensar por sí mismo, la confianza en las propias posibilidades, es decir, las actitudes necesarias para abordar, comprender y resolver las situaciones problemáticas más diversas.
- Favorecer la comunicación a través de la utilización razonada de elementos del lenguaje matemático (gráfico, esquema, símbolo).
- Desarrollar y mantener algunas técnicas importantes del campo matemático.

Son desarrollados a través de contenidos de dos tipos, los unos de carácter general, los segundos referidos a los contenidos matemáticos. Entre los primeros señalamos:

- Plantearse preguntas, querer comprender, probar, aceptar una situación nueva.
- Explorar, focalizar la atención, comparar, anotar observaciones, codificarlas.
- Tratamiento de la información: buscarla, recogerla, organizarla, conservar las que sean pertinentes, reorganizarla.
- Inducir, plantear hipótesis, deducir, verificar, expresar los resultados obtenidos.
- Imaginar, encontrar los casos posibles, inventar procedimientos, ver prolongaciones.
- Modificar un problema para poder resolverlo: cerrar una cuestión abierta, examinar un caso particular,...
- Utilizar los conocimientos: reconocer analogías, aplicar un procedimiento conocido, particularizar un resultado general.
- Convencer o convencerse: comunicar un resultado, explicar un proceso, razonar, organizar una deducción.

De los segundos, los temas matemáticos, la enseñanza debe asegurar una buen comprensión de las técnicas y nociones introducidas, que, en cada caso, deben de responder a una necesidad sentida por el niño:

- Clasificaciones y relaciones.
- Números naturales. Operaciones y sus algoritmos.
- Números reales positivos.
- Aplicaciones (funciones) y proporcionalidad.
- Enumeraciones de tipo combinatorio.
- Sistemas de referencia y coordenadas.
- Transformaciones geométricas.
- Formas geométricas.
- Medias y unidades de medida.

Cada dominio se presenta según cinco componentes:

Actividades: Se trata de los tipos de tareas que se pueden proponer a los alumnos, con objeto de desarrollar las capacidades deseadas, ligadas al tema.

Soportes: Es el material que se puede utilizar, o el contexto en el que se puede situar la enseñanza.

Instrumentos: Esta componente da un cierto número de conocimientos y de convenciones intermedias, necesarias para la consecución de los objetivos establecidos (vocabulario, símbolos). Estos instrumentos no constituyen un fin de aprendizaje en sí mismos.

Capacidades: Se trata de los saber-hacer generales, de las capacidades básicas, que hay que hacer adquirir a los niños.

Nociones: Se retoman aquí los contenidos de forma clásica, pero hay que recordar que el lenguaje del matemático que se utiliza no da cuenta de los conocimientos reales de los niños, que evolucionan a lo largo de los años.

Además, para cada tema se da un cuadro de progreso: trabajo preparatorio, estructuración, utilización, aplicaciones, mantenimiento de la técnica.

Cada dominio se presenta según cinco componentes: actividades, soportes, instrumentos, capacidades y nociones.

Secundaria

Los objetivos generales y los contenidos matemáticos de carácter general serían siendo válidos los enunciados para primaria, en un grado mayor de profundización.

Sobre los contenidos matemáticos propios, damos los temas principales, para los cursos 7.°, 8.° y 9.° de una opción *pregymnasial* (secciones clásica y científica).

Séptimo:

Números: naturales, primos. M.c.d y m.c.m. Números negativos, racionales, sus operaciones.

Actividades geométricas: polígonos, pentominos, embaldosados.

Medidas: áreas de polígonos; volúmenes de cubo y prismas rectos. Unidades. Escalas.

Razonamiento y lógica.

El plano y el espacio: isometrías, vectores, su suma, sus coordenadas. Mediatrices, bisectrices, ángulos en polígonos.

La calculadora.

Cálculo literal: paréntesis, prioridades, convenios de escritura.

Probabilidades y estadística.

Funciones: lineales, pendiente de una carretera, como pasar grados centígrados a Fahrenheit.

Además de dedicar algún tiempo a talleres (manejo de las tablas horarias y de tarifas de los trenes suizos), juegos y estrategias.

Octavo:

Números: potencias, distributividad, numeración binaria, la prueba del nueve. Números racionales, decimales, desarrollos periódicos, operaciones. Notación científica. Raíces cuadradas.

Actividades geométricas: ángulos inscritos, cuadriláteros inscritos, embaldosados, sombras.

Medidas: Círculo y circunferencia. Relación de Pitágoras. Volúmenes: cilindro.

Razonamiento y lógica.

El plano y el espacio: homotecias. Poliedros, sus desarrollos.

La calculadora: tecla raíz cuadrada, prioridades.

Cálculo literal: sumas y productos. Polinomios, suma de monomios, cuadrado de polinomios, factorización. Ecuaciones de primer grado.

Probabilidades y estadística.

Funciones: lineales, afines, crecientes, decrecientes.

Además de dedicar algún tiempo a talleres, juegos y estrategias.

Noveno:

Números: cálculo con radicales, aproximaciones de pi, el número áureo.

Actividades geométricas: poliedros regulares, kaleidociclos, poliedros truncados, perspectivas.

Medidas de superficies planas, de volúmenes: pirámide, cilindro, cono.

Razonamiento y lógica

El plano y el espacio: isometrías, homotecias, semejanzas y transformaciones del plano.

La calculadora: porcentajes, decimales periódicos, n!, productos de números de 8-9 cifras, algoritmo de Horner.

Cálculo literal: potencias, fracciones equivalentes, polinomios, operaciones con ellos, factorización, fracciones racionales, ecuaciones y sistemas de primer grado, ecuación de segundo grado.

Probabilidades y estadística.

Funciones: progresiones geométricas, cuadráticas, proporcionalidad inversa, exponencial, funciones inversas.

Además de dedicar algún tiempo a talleres (aquí se ven las funciones racionales, por ejemplo), juegos y estrategias.

La evaluación

El pequeño tamaño de población de la Suiza francófona, y su proximidad a Francia, permiten que las innovaciones, tanto en programas como en formas de evaluación se experimenten en pocos centros, pero que esos pocos resulten ser casi todos, potenciado todo ello por la existencia del IRDP (Institut Romand de Recherches et de Documentation Pédagogiques) que coordina todo ello.

Todavía hay muchos enseñantes que corrigen con el lápiz rojo, que pasan mucho tiempo poniendo notas, pero un puñado de irreductibles helvéticos –y sin embargo, proeuropeos– militan por una evaluación más científica y más eficaz. Tratan de evaluar de manera formativa la actividad del alumno frente a una situación de investigación. Se realizan observaciones directas del trabajo del alumno, el cual también realiza su autoevaluación, pues ésta va asociada a la eficacia de las estrategias desarrolladas... Se mantienen entrevistas con los alumnos, individuales y colectivas, (muchos trabajos hay que evaluarlos en grupos). Se corrigen pruebas escritas, haciendo simultáneamente el inventario de errores producidos por los alumnos.

Los métodos de enseñanza

El libro del alumno y el libro del profesor son los recursos principales de los profesores. La mayoría de los profesores se adhieren a las grandes líneas de los citados manuales, pero también se observan separaciones, entre un acuerdo de principio, con el manual, y la realidad de la práctica diaria.

En general, los profesores son conscientes de la dificultad de conducir en una clase actividades más abiertas, que también son más ricas. Estas actividades son, a veces, en los manuales los puntos de partida, y son precisamente los que ofrecen más resistencia por parte de los profesores, pues este tipo de actividades exige varias cosas, en primer lugar y frecuentemente, un material suplementario, en segundo lugar, el profesor prefiere empezar rápidamente con los datos matemáticos tradicionales, en tercer lugar pueden existir varias respuestas posibles, cuya confrontación puede hacer perder seguridad al profesor; en cuarto lugar hay que dedicarles bastante tiempo: hay que perder el tiempo, para ganarlo.

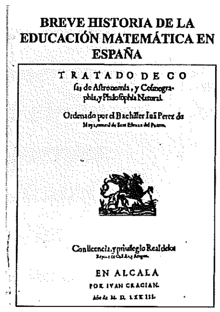
Por contra, en las actividades clásicas, el material es más sencillo, la solución es única, cada vez se trata solo un tema.

El IRDP, hizo, dentro de una encuesta sobre la implantación de los nuevos materiales de 5.° y 6.° de Primaria, la siguiente pregunta a los profesores: ¿Si hubiera que elegir invertir dinero y trabajo, entre formación continua de los profesores y redacción de nuevos materiales de enseñanza, que elegiría Vd.? De los 536 cuestionarios, el 13% no respondió. El 36% prefería redacción de materiales, y el 51% que se ofertase formación continua a los profesores. Analizadas las respuestas, implícitamente se ve que la petición de formación se refiere a problemas de gestión de la clase, de observación y análisis de las situaciones de aprendizaje, de los procesos que siguen los alumnos,...

Jacques André Calame
Institut Romand de Recherches et de Documentation Pédagogiques
Florencio Villarroya
Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo»

PUBLICACIONES VII JAEM

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»



- *Actas 7.as Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas.* (1.500 pts.).
- *Fotografía y matemáticas.* (400 pts.).
- *Breve historia de la educación matemática en España.* (400 pts.).
- *El Cálculo Mecánico. Del ábaco al ordenador.* (250 pts.).
- *Rutas matemáticas por Madrid.* (600 pts.).
- *Medidas tradicionales y de oficios.* (500 pts.).
- *Las Matemáticas en los sellos de correos.* (250 pts.).
- Vídeo: *Rutas matemáticas por Madrid.* (1.000 pts.).

Solicitud de pedidos contra reembolso (500 pts. de gastos de envío):

SMPM «Emma Castelnuovo»

Apartado de Correos 14.610

28080-MADRID

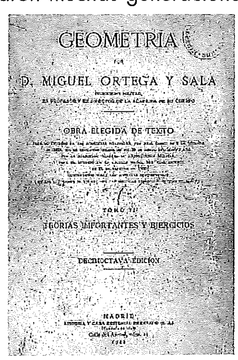
SUMA 23
noviembre 1996

Un manual español de geometría

GEOMETRÍA (Dos tomos)
Miguel Ortega y Sala
Librería y Casa Editorial Hernando
Madrid, 1885

La *Geometría* de Miguel Ortega Sala tuvo su primera edición en Guadalajara en 1885 y tuvo diferentes ediciones en distintas poblaciones españolas. La novena edición la hizo en 1901 en Toledo, Imprenta Peláez, la edición veintiuna se hizo en Madrid en 1946. Una obra con más de sesenta años de vigencia efectiva merece la pena ser conocida y reconocida en el panorama de la matemática española.

La *Geometría* no es un obra de investigación, es un libro de texto de geometría bien estructurado y completo con el que se formaron muchas generaciones de militares españoles. Esta obra fue elegida como libro de texto para el ingreso en academias militares por Real Orden de 7 de octubre de 1884, en el concurso que se celebró el 30 de abril de ese mismo año por la Dirección General de Instrucción Militar y para el ingreso en la Escuela Naval por Real Decreto de 21 de Febrero de 1900. En la edición de 1946 se añade que esa obra contiene todas las materias comprendidas en los programas de las escuelas especiales civiles de España y recomendada en las actuales Academias del Ejército y del Aire.


GEOMETRÍA
D. MIGUEL ORTEGA Y SALA
OBRA ELEGIDA DE TEXTO
TOMO II
TEORÍAS IMPORTANTES Y EJERCICIOS
DECIMOCTAVA EDICIÓN
MADRID

Miguel Ortega y Sala nació en Barcelona en 1848. En 1864 ingresó en la Academia de Ingenieros Militares y siendo oficial de ese cuerpo fue herido de gravedad en el cerco de Seo de Urgel durante la Guerra Carlista. Desde 1877 a 1886 fue profesor de la Academia de Ingenieros. En 1879, durante el reinado de Alfonso XII fue recompensado con el grado de teniente coronel por la publicación de su obra *Lecciones de geometría descriptiva*, escrita para le enseñanza en la Academia y con el de coronel por su obra *Trigonometría*. Aunque su producción matemática fue incesante, su carrera militar no pudo llegar más allá por el método de escribir más y más libros, debido a que se había derogado el Real Decreto de 1 de marzo de 1875 que fijaba la recompensa del profesorado militar en grado, cruz y empleo en plazos fijos de cuatro, dos y dos años respectivamente. El Real Decreto de 1886 deroga estas prerrogativas, pero dos años más tarde las recom-

RECENSIONES

pensas al profesorado se consideraron de nuevo necesarias; el Real Decreto de 4 de abril de 1888 las restableció de modo que por el hecho de ser profesor no se podría obtener el ascenso en grado y empleo, pero sí cruces y gratificaciones económicas. En este R.D. se especificaba que no se concedían grados y empleos para evitar las dificultades que se producían en los ascensos, en un intento de no dar plaza sin vacante. El ministro Manuel Cassola se expresaba así:

> Las tareas del profesorado, oscuras, enojosas, difíciles, sin lucimiento, no son las más propias para atraer a los oficiales que se distinguen en cada Arma, a quien conviene enmendarlas, si no se les ofrece el atractivo de valiosas recompensas; y ya que no será posible por el nuevo sistema de ascensos y recompensas conceder, como antes, grados u empleos, preciso será otorgarles cruces honoríficas y mayores gratificaciones. Estas deben considerarse principalmente, como medio para realzar el prestigio del profesor ante sus alumnos, no como simple aumento de sueldo.

Algo parecido a lo que ocurría para el profesorado sucedía con los autores de obras científicas o militares. Según fuera el mérito de la obra, el R.D. de 30 de septiembre de 1878 fijaba recompensas de grados, empleos, cruces y menciones honoríficas. La Real Orden de 13 de abril de 1883 y la de 10 de diciembre de 1886 que no se manden a informar más obras científicas que las que sean verdaderamente útiles para el ejército. Más tarde la R.O. de 1888 establece que los autores de libros de texto podrían recibir cruz e impresión de la obra por cuenta del estado, una mención honorífica o una recomendación para su carrera.

Ortega y Sala escribió, además de *Geometría,* obra que en concurso fue elegida como libro de texto de la Academia General Militar, las obras inéditas *Elementos de geometría y nociones de álgebra* y *Elementos de Geometría y nociones de Topografía*, por las que le concedieron la encomienda de Isabel la Católica. También escribió en colaboración con Pedro Pedraza *Lecciones de geometría descriptiva.*

La *Geometría* está dividida en dos tomos, el primero lleva el subtítulo de *Parte Elemental* y al segundo le puso la denominación de *Teorías importantes y ejercicios.* La metodología seguida es, según las propias palabras de autor la siguiente:

> ...nos hemos esmerado en seguir un orden metódico en alto grado, sacrificando, a veces, otras condiciones a esta que consideramos muy principal, pues la experiencia adquirida en la enseñanza nos ha demostrado que gran parte de las dificultades que encuentran los alumnos en sus estudios provienen de la falta de dicho requisito en los libros que les sirven de texto.

Le hubiera gustado seguir la línea expositiva de Richard Baltzer (1818-87) profesor de la universidad de Giesen en su obra *Elementos de Matemáticas*, pero su interesante trabajo –dice Ortega– no se había abierto paso en los centros docentes españoles. Este profesor gozó de un gran predicamento entre los matemáticos de su época y entre sus aportaciones se puede destacar el hecho de reclamar la atención de la comunidad matemática sobre las geometrías no euclídeas de Bolyai (1802-60) y Lobachevski (1792-1856) que estaban en el olvido, además simplificó las fórmulas de expresión de la curvatura total de una superficie mediante determinantes.

Atendiendo a que el libro había de ser estudiado por jóvenes optó por seleccionar las demostraciones más sencillas para facilitar el aprendizaje en la medida de lo posible, pero sin faltar al rigor.

Atendiendo a que el libro había de ser estudiado por jóvenes optó por seleccionar las demostraciones más sencillas para facilitar el aprendizaje en la medida de lo posible, pero sin faltar al rigor. En lo referente a problemas destaca el hecho de que cuando se trata la geometría plana el libro expone multitud de problemas, mientras que en la del espacio hay pocos. Las razones que Ortega da para justificar eso es que en la geometría del espacio las propias teorías dan la pauta para la resolución de problemas, pero en general las operaciones prescritas para resolver tales problemas no pueden realizarse más que con el auxilio de la geometría descriptiva y por consiguiente no le parece oportuno proponer problemas en la geometría espacial.

Una obra con tantas ediciones y con vigencia en un período de tiempo tan dilatado como la *Geometría* de Ortega, forzosamente ha de ver evolucionar la materia tratada. Así dieciocho años más tarde, en la edición de 1903 de Pamplona, reconoce el progreso que se ha producido en el campo de la geometría. Hace alusión a las Memorias sobre la geometría del triángulo y del tetraedro de Lemoine (1840-1912), antiguo alumno de la escuela politécnica, de Neuberg (1840-1926), de la universidad de Lieja, de Brocard (1845-1922), Mayor de Ingenieros del Ejército francés, de Cristoforo de Alasia del Instituto de Tempio en Cerdeña. También destaca los excelentes tratados de Hadamard (1865-1963), de Niewenglowki y Gerard, de Lazzeri y Bassani y de Guichard y, entre los españoles, Eduardo Torroja (1847-1918) y las aportaciones de Juan J. Durán y Loriga.

Los enfoques de estos autores se distinguen, según palabras de Ortega, por la amplitud del campo que abarcan, por la belleza de la forma y por la sencillez de los procedimientos de que se valen. Pero estima nuestro autor que para la docencia no se ha logrado compendiarla para que su estudio y el de la geometría de la medida no requieran más tiempo de estudio que el que racionalmente corresponde a una asignatura en los cursos elemental o superior. Además de la falta de una conveniente adaptación pedagógica de la materia aduce una razón adicional a los métodos modernos de la geometría y es que la propia amplitud del campo que desarrolla la geometría moderna y el propio espíritu de generalidad que se advierte en sus procedimientos, permitiendo comprender en un solo precepto varios casos particulares y avanzar siempre de lo complejo a lo sencillo, de lo general a lo particular, suele ser un escollo para los principiantes, pues se ven obligados a realizar estudios superiores antes de conocer lo elemental. Este método es el procedimiento inverso al que se sigue para adquirir conocimientos en cualquier faceta de la vida, puesto que, generalmente, se parte de lo particular y, afirmando los conocimientos mediante aplicaciones y ejemplos que se hallen al alcance de la inteligencia, lograr mayores cotas de abstracción.

...aunque el libro tiene un carácter pedagógico, no se limita a contener la materia propia de su plan de estudios y traspasa los límites.

Pero, aunque el libro tiene un carácter pedagógico, no se limita a contener la materia propia de su plan de estudios y traspasa los límites. Consciente de que las investigaciones modernas en geometría requerían un esfuerzo constante por estar al día y respetando el plan de estudios para el que fue escrita la obra, optó por introducir diversas cuestiones que se planteaba la geometría de su tiempo en el cuerpo de su libro. Así, diseminadas en diversas notas, apéndices y ejercicios, siempre respetando la estructura inicial de la obra, aparecen cuestiones interesantes de la geometría moderna, con el fin de que los estudiantes de su geometría vieran el camino allanado para estudiar las nuevas teorías geométricas.

El contenido de la obra es el siguiente:

TOMO I.- Parte elemental

Geometría plana:

CAPÍTULO I.- La línea recta. Propiedades de la línea recta y la línea quebrada. Ángulos. Perpendiculares y oblicuas. Paralelas.

CAPÍTULO II.- Polígonos o figuras formadas por líneas rectas. Triángulos. Cuadriláteros. Polígonos en general.

CAPÍTULO III.- Circunferencia. Propiedades de la circunferencia. Propiedades relativas de la recta y la circunferencia. Posiciones relativas de dos circunferencias.

CAPÍTULO IV.- Medida de líneas y ángulos. Preliminares. Medida de la línea recta. Medida de un arco. Medida de ángulos.

CAPÍTULO V.- Problemas. Consideraciones preliminares. Problemas sobre la línea recta. Problemas sobre polígonos. Problemas sobre la circunferencia. Observaciones generales sobre los problemas, procedimientos generales y métodos especiales.

CAPÍTULO VI.- Líneas proporcionales y semejanza de figuras. Consideraciones preliminares. Segmentos proporcionales. Semejanza de figuras. Relaciones métricas. Problemas.

CAPÍTULO VII.- Polígonos regulares. Polígonos regulares convexos. Polígonos regulares estrellados. Problemas.

CAPÍTULO VIII.- Medida de la circunferencia y relación de ésta con el diámetro. Consideraciones preliminares. Medida de la circunferencia. Relación de la circunferencia con el diámetro.

CAPÍTULO IX.- Áreas. Determinación de áreas. Comparación de áreas. Problemas sobre áreas.

Geometría del espacio:

CAPÍTULO X.- Rectas y planos. Determinación de un plano. Posiciones relativas de rectas, planos y rectas y planos. Propiedades de rectas y planos debidas a su posición relativa. Proyecciones, ángulos y mínimas distancias. Problemas.

CAPÍTULO XI.- Combinación de planos. Ángulos diedros y poliedros.

CAPÍTULO XII.- Líneas y superficies curvas. Líneas curvas en general. Superficies en general. Superficies cónica, cilíndrica y esférica.

CAPÍTULO XIII.- Poliedros. Pirámide. Prisma. Poliedros en general.

CAPÍTULO XIV.- Comparación de los cuerpos por su magnitud, posición y forma. Igualdad. Simetría. Semejanza.

CAPÍTULO XV.- Áreas y volúmenes de los cuerpos. Áreas. Volúmenes. Comparación de áreas y volúmenes.

Apéndice:

CAPÍTULO XVI.- Curvas de segundo grado. Elipse. Hipérbola. Parábola. Definición común a la elipse, parábola e hipérbola. Secciones cónicas.

CAPÍTULO XVII.- Curvas transcendentes. Cicloide. Epicicloide. Espirales. Hélices.

Enunciados de 500 problemas con datos numéricos.

TOMO II.- Teorías importantes y ejercicios.

CAPÍTULO XVIII.- Preliminares. Ángulos. Puntos y rectas del infinito. Concepto general de los polígonos. Concepto general de los ángulos poliedros. Concepto general de los poliedros. Concepto general de la suma geométrica de varios segmentos. Nuevas definiciones en el triángulo (rectas, puntos, triángulos, círculos, potencias, coordenadas). Formas geométricas. Su clasificación.

CAPÍTULO XIX. Centro de distancias proporcionales. Conceptos y definiciones. Determinación de centros de distancias proporcionales o medias. Centros de gravedad. Conceptos y definiciones. Determinación de centros de gravedad. Centro de gravedad de líneas, de superficies planas y poliédricas, centro de gravedad de volúmenes. Teoremas de Guldin.

CAPÍTULO XX.- Transversales. En el triángulo: Consideraciones preliminares y teoremas fundamentales. En el cuadrilátero alabeado. Aplicaciones de la teoría: Teorema de Pascal y cuadrilátero y cuadriángulo completos.

CAPÍTULO XXI.- Formas proyectivas: Definiciones. Obtención de perspectivas. Propiedades.

CAPÍTULO XXII.- Relación anarmónica. Entre cuatro puntos de la línea recta: Definiciones y nomenclatura. Número y propiedades de las distintas relaciones anarmónicas de cuatro puntos. Deducción y discusión de los valores distintos. Problema inverso. Comparación entre sistemas distintos. Entre cuatro rectas en haz: Nomenclatura. Número y propiedades de las distintas relaciones anarmónicas de cuatro rectas en haz. Deducción y discusión de los valores distintos. Problema inverso. Comparación entre haces distintos. Entre cuatro planos en haz. Nomenclatura y propiedades. Aplicaciones de la teoría principio de dualidad.

CAPÍTULO XXIII.- Proporción o división armónica. De cuatro puntos en línea recta. Haces armónicos de rectas y planos. Aplicaciones de la teoría. Ejemplos.

CAPÍTULO XXIV.- Homografía e involución. Divisiones homográficas sobre bases distintas. Divisiones homográficas sobre base común. Divisiones homográficas en involución. Haces homográficos de distinto centro. Haces homográficos concéntricos. Haces homográficos en involución. Haces homográficos de planos. Aplicaciones de la teoría.

CAPÍTULO XXV.- Homología. Definiciones. Discusión del coeficiente de homología. Propiedades de las figuras homológicas. Determinación de las rectas límite. Determinación de las figuras homológicas. Aplicaciones de la teoría.

CAPÍTULO XXVI.- Curvas cónicas. Nuevas teorías sobre las cónicas. Propiedades proyectivas aplicables a las cónicas. Generación de las cónicas. Propiedades. Demostración directa para las cónicas de los teoremas de Pascal y Brianchon. Aplicaciones de la teoría (determinación de puntos de contacto, trazado de una tangente).

...un estudio detallado de las sucesivas ediciones de la Geometría de Ortega, nos daría una idea clara de la evolución de la enseñanza de la geometría de finales del siglo XIX y el primer tercio del siglo XX.

CAPÍTULO XXVII.- Semejanza y homotecia. Ampliación de la teoría. Propiedades de las figuras plana. Puntos especiales. Propiedades de las figuras en el espacio. Aplicaciones de la teoría.

CAPÍTULO XXVIII.- Polo y polar. En el círculo, propiedades generales, Posiciones relativas del polo y la polar. Determinación del polo y la polar. Cuadrilátero inscrito y circunscrito. Idem en las cónicas y en la esfera. Aplicaciones de la teoría.

CAPÍTULO XXIX.- Ejes y planos radicales. Eje radical, potencia de un punto. Definición y propiedades. Posiciones del eje y centro radical según los casos. Propiedades de los punto y cuerdas antihomólogos. Determinación del eje radical. Plano radical. Aplicaciones de la teoría.

CAPÍTULO XXX.- Inversión en el plano. Propiedades. Inversa de una figura. Inversión en el espacio. Aplicaciones de la teoría.

CAPÍTULO XXXI.- Líneas y superficies en general. Generación y definiciones. Envolventes e involutas. Clasificación de las curvas. Curvatura. Círculo osculador. Envolventes y evolutas. Tangentes, su trazado. Longitud de una curva. Superficies no regladas y regladas. Superficies de segundo orden, hiperboloide de una hoja, hiperboloide hiperbólico, conos y cilindros. Superficies de revolución, cuádricas.

CAPÍTULO XXXII.- Cuestiones y problemas notables. Valor de π. Trisección del arco. Rectificación de la circunferencia, semicircunferencia y cuadrante. División de una circunferencia en n partes iguales. Cuadratura del círculo y duplicación del cubo. Circunferencia tangente a otras tres. Esfera tangente a cuatro.

CAPÍTULO XXXIII.- Instrumentos de utilidad práctica. Curvímetros y planímetros.

Seguramente un estudio detallado de las sucesivas ediciones de la Geometría de Ortega, con el análisis de las cuestiones, teorías y apéndices que fue añadiendo en cada una nos daría una idea clara de la evolución de la enseñanza de la geometría de finales del siglo XIX y el primer tercio del siglo XX.

Víctor Arenzana

LOS MATEMÁTICOS NO SON GENTE SERIA
Claudi Alsina y Miguel de Guzmán
Rubes, Barcelona, 1996
ISBN: 84-497-0011-6
127 páginas

«El matemático estadounidense Underwood Dudley ha publicado recientemente un libro singular: *Mathematical cranks.* Los *cranks* a los cuales se dedica la publicación son todas aquellas personas que, por excentricidad, mala fe, ingenuidad, misticismo, locura, etc., se han dedicado a "resolver" problemas imposibles de solucionar o a propagar extrañas matemáticas paranormales. Dudley no sólo reproduce una extensa muestra de *cranks*, sino que de alguna forma llega a clasificarlos por especialidades: fermatistas, trisecadores, duplicadores, cuadradores...

Estas personas han colapsado academias, han perseguido a decanos, han engañado a editores, etc. [en SUMA también sabemos algo de eso], y siempre tienen como aval de sus singulares trabajos el hecho de que "nadie ha indicado dónde cometen el error". ¡Claro! Nadie quiere perder el tiempo en localizar errores de resultados que son falsos.

[...]

No obstante, los *cranks,* que han tenido la suerte de ser considerados por Dudley ahora pueden estar felices: sus trabajos se han publicado ¡ya! en un libro».

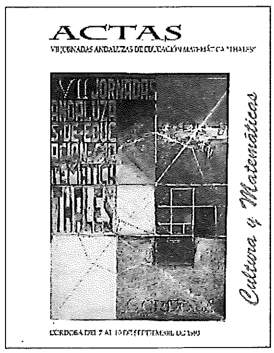
Esta larga cita es parte de una de las más de doscientas anécdotas relacionadas con matemáticos que Alsina y Guzmán cuentan en este entretenido, ligero y refrescante libro.

Las hay de muy diferente procedencia, desde las clásicas más o menos conocidas hasta aquellas vividas personalmente por los autores. Los títulos de los capítulos indican los diferentes temas tratados: despistes, rigor y obviedad, seudónimos, congresos, problemas, publicaciones, oposiciones...

Hay una cierta unanimidad en la conveniencia de utilizar la historia de las matemáticas como recurso didáctico en la clase de matemáticas, lo cual aparece de forma explícita en las orientaciones del DCB de secundaria del área de Matemáticas. Y aun cuando esta utilización no debe quedar reducida solamente a un conjunto de anécdotas contadas en el momento oportuno durante el transcurso de la clase, sí parece claro que éstas, las anécdotas, constituyen un elemento que, introducido por el profesor en un contexto adecuado, sirve para relajar la clase en ciertas ocasiones, para dar un toque humano en otras, para que a los alumnos les vayan «sonando» los nombre de algunos matemáticos... Por todo ello, este libro, va dirigido muy especialmente a los profesores y profesoras a quienes, de hecho, los autores dedican su obra.

Finalmente, hay que destacar que esta publicación es la primera de tema matemático de una nueva editorial, Rubes, cuyo equipo editorial está configurado por parte del antiguo de Labor que tan buen sabor de boca nos dejó con algunas de sus ediciones como *Experiencia matemática, El sueño de Descartes, Pensar matemáticamente,* etc.

Emilio Palacián



CULTURA Y MATEMÁTICA
ACTAS DE LAS VII JORNADAS ANDALUZAS DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA THALES
Miguel de la Fuente y Manuel Torralbo (Edits.)
Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba y SAEM Thales, Córdoba, 1996
ISBN: 84-7801-341-5
724 páginas

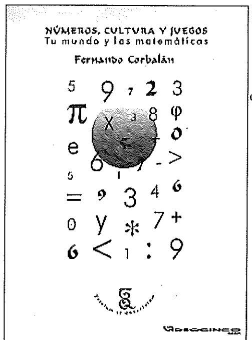
Una vez más se han celebrado las jornadas de la sociedad Thales y una vez más aparecen, puntualmente, las actas de las mismas. En sus más de setecientas páginas este libro recoge todo lo que en Córdoba se expuso en estas séptimas jornadas.

El volumen se inicia con las cuatro conferencias plenarias: «El pasado, el presente y el futuro de la geometría de Euclides y su enseñanza» a cargo de Gonzalo Sánchez Vázquez en lo que fue una de sus últimas y lúcidas exposiciones, «Panorama de la Investigación en Etnomatemática. Una investigación sobre artesanías en Andalucía», por María Luisa Oliveras Contreras, «Dos caras de la enseñanza de la geometría: empírica y teórica» impartida por Colette Laborde y «La historia de la Matemática y las diferentes culturas» de Mariano Martínez Pérez. Es de lamentar que de las dos últimas sólo aparezcan sendos resúmenes y no los textos completos.

Con toda seguridad estas jornadas, y sus actas, se recordarán por lo que en las mismas se denomina *Presentaciones especiales.* Lo constituyen cinco trabajos destinados a dar a conocer diversos aspectos relacionados con «La proporción cordobesa». Además de actividades para el aula relacionadas con esta proporción, de analizar algunos aspectos matemáticos de la Mezquita de Córdoba y de explicar el logotipo y el cartel anunciador de las jornadas que giraban en torno a la misma, expuestas por diversos profesores cordobeses, es de destacar la intervención del arquitecto Rafael de la Hoz que en su trabajo «La proporción cordobesa» expone, magistralmente, sus investigaciones sobre este tema.

Más de medio centenar de comunicaciones sobre, como es lógico, temas muy variados forman el núcleo del libro que termina con las reseñas de las diversas exposiciones realizadas durante las jornadas.

Emilio Palacián



NÚMEROS, CULTURA Y APRENDIZAJE. TU MUNDO Y LAS MATEMÁTICAS
Fernando Corbalán
Editorial Videocinco, Madrid, 1996
ISMB: 84-87190-35-9
177 páginas

Para Bertrand Rusell, las matemáticas puras eran un juego lógico en el que las afirmaciones se refieren a cosas cualesquiera y no a objetos particulares, hasta el punto que llegaba a afirmar que «puede definirse la matemática como aquel campo del saber en el que no sabemos nunca de qué estamos hablando ni si lo que decimos es verdad».

Este juego puramente formal de la matemática pura parece que queda muy distante de una de las características que justifican su inclusión en los programas escolares de todo el mundo: son un poderoso medio de comunicación, conciso, universal, carente de ambigüedad, que forma el esqueleto que proporciona status científico a otras disciplinas.

Y, sin embargo, también son un juego y, por otra parte, también los juegos son susceptibles de un análisis matemático. Es éste uno de los aspecto que propone el libro que nos ocupa, ya que además de tratarse de una actividad placentera, proporcionan una gran oportunidad de ejercitar el intelecto.

El autor, como ya ha demostrado en otras publicaciones, es buen divulgador, poseedor de estilo fluido y de agradable lectura, a pesar de que se enfrenta a ideas que distan de ser simples: relaciones de la matemática con la literatura y el arte; los avances en el cálculo y las propiedades y familias de números...

Se nota que el libro tiene una voluntad didáctica, que se manifiesta en su manera de dirigirse a los lectores, facilitándoles la comprensión de lo que se está contando, haciéndolo de manera que resulte clara y amena. Estas características, unidas al uso de un lenguaje sencillo, hacen de este texto un material apropiado para la lectura de los alumnos y alumnas de secundaria y bachillerato, material por otra parte bastante escaso.

La voluntad didáctica queda mucho más patente cuando el autor está invitando siempre al lector a que sea activo, ya que, como se argumenta en la introducción, la matemática constituye un lenguaje mediante el que se pretende que los escolares puedan enfrentarse a todo tipo de problemas, y qué mejor manera de adquirirlo que practicarlo desde el principio...

Este libro forma parte de una nueva colección, en la que se anuncian otros textos del autor para un futuro cercano, dentro de esta misma línea. Sólo nos queda esperar que estos vayan apareciendo y que resulten igualmente interesantes.

Julio Sancho

SUMA 23
noviembre 1996

ICME-8
Congreso de la SBPMef...

8.º Congreso Internacional de Educación Matemática

Como estaba previsto se celebró en Sevilla, los días 14 al 21 de julio de 1996, el 8.° Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME-8), organizado por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales por delegación de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Este Congreso, el de mayor entidad sobre Educación Matemática a nivel mundial, está convocado, como es sabido por el ICMI, cuyo presidente del Comité Ejecutivo es el español Miguel de Guzmán. Un acontecimiento de esta naturaleza necesita, para su organización del concurso de múltiples personas agrupadas en distintos órganos ejecutivos: el Comité Nacional, presidido por Gonzalo Sánchez Vázquez y del que forman parte representantes de las distintas sociedades federadas; el Comité Internacional de Programas cuyo presidente es Claudi Alsina; los Comités de Selección de Comunicaciones Breves y Proyectos, coordinados por Ricardo Luengo y Luis Rico, respectivamente; y el Comité Local de Organización, formado en su totalidad por socios y socias de la SAEM Thales y que presidido por Antonio Pérez, ha cuidado de forma primorosa todos los detalles organizativos para que, además de cumplirse los objetivos científicos del Congreso, todos los asistentes se hayan sentido a gusto y el ICME-8 se recuerde, por todos los que allí estuvimos, como un ejemplo de buen hacer.

Las actividades desarrolladas fueron muchas y fructíferas y resulta difícil en unas pocas páginas mostrar todo lo que allí se vio y escuchó. Esta crónica sólo pretende dar unas pinceladas, necesariamente breves y un tanto inconexas, de algunos aspectos del Congreso.

CRÓNICAS

LEÍDO EN EL DIARIO DE SEVILLA

Durante los días que duró el ICME-8, el Diario de Sevilla editó números especiales del Congreso que se repartió de forma gratuita a los asistentes. Reportajes, entrevistas, artículos, avances del programa, avisos... fueron desgranando la actualidad de este acontecimiento. Lo que sigue son algunas de las cosas que se dijeron en el mismo.

Christine Keittel: El profesor que tiene una actitud negativa frente a las matemáticas, transmite ese sentimiento a sus alumnos.

Juan Rodríguez Cordobés: Las matemáticas, como cualquier otra ciencia, es esencialmente democrática y, sin embargo,el primer contacto que el alumno tiene con ella es totalmente dogmático.

Miguel de Guzmán: Hay algo muy especial en este Congreso de Sevilla. Yo lo llamaría el primer gran Congreso de Solidaridad en Educación Matemática. Tal vez una de sus características más notables es que, por primera vez, son fundamentalmente los mismos participantes los que han ayudado a costear buena parte de los cuantiosos gastos de desplazamiento y de alojamiento de los numerosos asistentes que, de otra manera, no hubieran podido estar aquí presentes.

Gonzalo Sánchez Vázquez: El profesor es un director de orquesta que apenas se ve, pero que sugiere y orienta constantemente.

Bert K. Waits: La interacción siempre es positiva. Cada forma de entender las matemáticas puede llegar a convertirse en toda una filosofía de enseñanza.

Ismael Roldán: Las Matemáticas constituyen, en sí mismas, un poderoso Medio de Comunicación bastante preciso y conciso. La versatilidad de las mismas hace que puedan configurarse como un lenguaje específico que hay que aprender a descodificar.

Abraham Arcavi: La enseñanza de las matemáticas es algo muy sensible al entorno cultural, social y político donde transcurre.

Ubiratan D'Ambrosio: Las matemáticas son una cosa que se encuentran en todas las culturas, todos los indígenas saben dividir, sumar, restar... Toda la naturaleza está repleta de formas y figuras matemáticas... Todo en el universo responde a algún conocimiento matemático. Entonces yo me pregunto ¿por qué sólo se hacen matemáticas a partir de lo que se ve en los libros? ¿por qué no hacer matemáticas mirando hacia el entorno?

Antonio Pérez: Una de las novedades de ICME-8 es el impulso que va a tener el papel de la mujer en la enseñanza de las matemáticas.

Concha García Severón: Es cierto que este Congreso pasará a la historia como el de las 'Nuevas tecnologías', se discutirá mucho en este sentido. Ahora bien, ¿quién de nosotros va a abandonar el sencillo papel y lápiz? Seguirán siendo compatibles estos nuevos recursos con las estrategias propias de la investigación matemática.

José María Álvarez: El ICME-8 marca la pauta del aprendizaje y la enseñanza durante los próximos cuatro años. Todos los grandes hitos en el devenir de la educación matemática, resolución de problemas, constructivismo, etc., se gestaron siempre en otros ICME anteriores.

En el acto de inauguración, se puso de manifiesto que el ICME-8 era el «Congreso de la Solidaridad» por el número de ayudas sufragadas con el 10% de las cuotas de los asistentes y se resaltó la influencia que los sucesivos ICME tienen en la didáctica de las matemáticas. Singularmente emotivo resultó el recuerdo que Antonio Pérez, Presidente del Comité Local, tuvo para el gran ausente de la inauguración, el presidente del Comité Nacional Gonzalo Sánchez Vázquez, dando explicación a la silla vacía que se encontraba en la mesa presidencial.

Inauguración del ICME-8

El programa científico estaba estructurado alrededor de conferencias plenarias, una mesa redonda, conferencias ordinarias, grupos de trabajo, grupos temáticos, seminarios, presentaciones nacionales, talleres, proyectos, sesiones especiales, encuentros de diversas asociaciones y grupos, así como exposiciones comerciales y no comerciales.

Anna Sierpinska, vicepresidenta del ICMI, impartió la primera conferencia plenaria con el título «¿A dónde va la educación matemática?». Centró su exposición en torno a una idea central: la identificación de tres niveles en los programas de acción y evolución matemática, esto es, la ideología, la teoría y la acción didáctica.

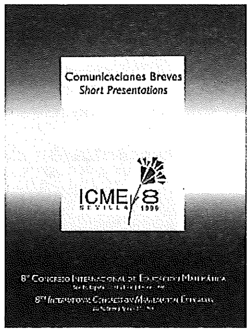
«Sobre el papel del matemático en Educación Matemática» fue el título de la conferencia de Miguel de Guzmán.

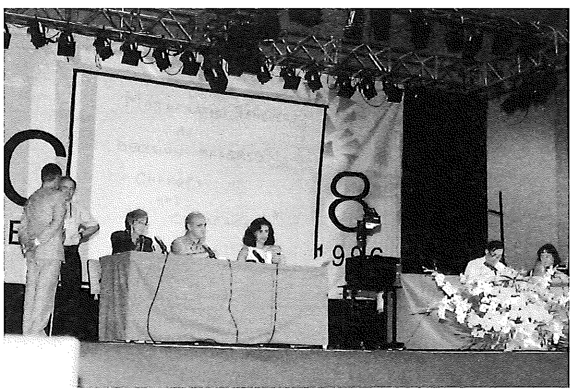
Trató de la responsabilidad que tienen los distintos grupos de la comunidad matemática en colaborar para la solución de los múltiples problemas que la educación matemática presenta. En particular, examinó aquellos problemas y trabajos en los cuales la subcomunidad de matemáticos sería especialmente provechosa.

El holandés Jan de Lange habló sobre «Problemas reales con matemáticas del mundo real» y trató de responder a la pregunta ¿qué convierte a un problema en un buen problema? y la abordó a partir de experiencias de diferentes países.

En la conferencia «Tecnología informática y educación matemática: entusiasmo, posibilidades y realidades» David Tall abordó aspectos críticos en el uso de la tecnología informática en educación matemática.

La Mesa Redonda Internacional programada: «Los profesores de matemáticas como forjadores de decisiones» fue moderada magistralmente por Alan Bishop e intervinieron Gail Burrill, Ruhama Even, Maria Salett, Thang Ruifen y el español Francisco Hernán.





Mesa Redonda Internacional

En las sesenta conferencias ordinarias se trataron temas muy diversos desde etnomatemática hasta el aprendizaje de la geometría con ordenadores, pasando por aspectos de la educación matemática en diversos países o incluso el papel de la lengua materna en el aprendizaje de la matemática. Basta indicar algunos nombres para resaltar la categoría de los conferenciantes: Paolo Abrantes, Luis Balbuena, Hiroshi Jujita, Christine Keitel, Carolyn Kieran, Carlos Vasco...

El contacto científico más importante entre los asistentes tiene lugar, sin duda, en el marco de las reuniones de los Grupos de Trabajo y Grupos Temáticos. En los Grupos de Trabajo, tras una sesión introductoria fue posible una discusión sosegada sobre aspectos diferentes del tema tratado, terminando con una puesta en común del estado de la discusión y las propuestas de trabajo ulteriores. Estas conclusiones aparecerán en las actas del ICME en fechas próximas. En los Grupos Temáticos diversos especialistas presentaron breves ponencias sobre los tópicos correspondientes al grupo.

El número de Comunicaciones Breves fue mucho mayor del previsto, a tenor de lo ocurrido en anteriores ICME. Fueron un total de 685 comunicaciones, entre carteles, vídeos y programas informáticos. Haber podido proporcionar los espacios físicos y medios técnicos para exhibir todo este material constituyó todo un alarde de capacidad por parte de la organización.

Además de todas estas actividades, los congresistas aún tuvieron tiempo y ánimo para asistir a algún taller, presentación nacional o seminario del ICMI. Y si formaba parte de alguna asociación de las muchas que existen en nuestro campo asistir a la correpondiente asamblea o encuentro. No se pudo dejar de visitar el amplio panel de exposiciones comerciales y no comerciales disponibles, entre las que, naturalmente, destacamos las montadas para esta ocasión por la Federación.

Aunque inglés y español fueran las dos lenguas oficiales del Congreso, parte de los asistentes de habla hispana criticaron que bastantes de los ponentes de las diversas actividades no hicieran uso del ofrecimiento de la organización y de los medios puestos a su disposición para presentar esquemas, transparencias, etc. en ambos idiomas.

No se puede olvidar el papel jugado por azafatos y azafatas (en general, estudiantes de los últimos cursos de Magisterio y Matemáticas de distintos puntos de España) que facilitaron enormemente la vida diaria.

Como todo Congreso que se precie, también tuvo su parte llamada social. Consistió, fundamentalmente, en un soberbio espectáculo inaugural a cargo de la Compañía Andaluza de Danza. Todos los días al finalizar la jornada se ofrecía un aperitivo, lo que los americanos llaman «Happy hour» lo que permitía un contacto más informal entre los asistentes (el mejor fue el que ofreció la Thales a base de fino y jamón).

Deseamos que el ICME-9 que se celebrará en Japón en el año 2000 sea, al menos, como este de Sevilla.

PARTICIPACIÓN ESPAÑOLA EN EL ICME-8

Conferencia plenarias

- De Guzmán, Miguel: «Sobre el papel del matemático en la Educación Matemática».

Conferencias ordinarias

- Balbuena, Luis: «Innovación en Educación Matemática».
- Fortuny, Josep Mª: «Rango de capacidades. La Enseñanza y Evaluación del Conocimiento Geométrico en un Contexto de Entorno».
- Pérez, Francisco Javier: «Los manipuladores simbólicos en la enseñanza de las matemáticas».
- Puig, Luis: «Lo que he aprendido sobre resolución de problemas a partir de la historia y la investigación».
- Rico, Luis: «Programas de Investigación Doctorales y Académicos en Educación Matemática en las Universidades Españolas».
- Vicente, José Luis: «Geometría y Cálculo Simbólico».

Responsables de Grupos de Trabajo

- Quesada, José F.: «Lenguajes y matemáticas» (WG10).

Ponentes en Grupos de Trabajo

- Álvarez, José M.: «Dificultades del alumnado en el aprendizaje de las matemáticas» (WG4).
- Armas, Manuel: «El papel de la tecnología en la clase de matemáticas» (WG16).
- Azcárate, Carmen: «La didáctica de la matemática como disciplina científica» (WG25).
- Canals, María: «Cambios curriculares en la enseñanza primaria» (WG12).
- García Mora, Emma: «Cooperación en educación matemática entre países y regiones» (WG23).
- Gutiérrez, Ángel: «Criterios de calidad y pertinencia en la investigación en educación matemática» (WG24).
- Hernández-Guarch, Fernando: «Evaluación de la enseñanza, los medios y los sistemas educativos» (WG20).
- Rivière, Vicente: «Innovación en evaluación» (WG9).
- Rosich, Nuria: «Matemáticas para alumnos con necesidades especiales» (WG8).
- Velázquez, Fidela: «Género y Matemáticas» (WG6).
- Villarroya, Florencio: «Cambios curriculares en la enseñanza secundaria» (WG13).

Responsables de Grupos Temáticos

- Giménez, Joaquín: «El futuro del álgebra y la aritmética» (TG13).

Ponentes en Grupos Temáticos

- Callejo, María L.: «La resolución de problemas en el currículum» (TG10).
- Corbalán, Fernando: «Juegos y rompecabezas matemáticos» (TG22).
- Díaz-Godino, Juan: «Investigaciones internacionales comparativas» (TG25).
- García-Cruz, Juan A.: «Estadística y probabilidad en el nivel secundario» (TG9).
- Lacasta, Eduardo: «Investigaciones internacionales comparativas» (TG25).
- Recio, Tomás: «Entornos informáticos de aprendizaje interactivo» (TG19).
- Romero, Sixto: «Formas futuras de publicación en educación matemática» (TG23).

Presentación de Proyectos

- Fortuny, Josep Mª y Mª José García: «Enseñanza de la Ciencia y de las Matemáticas en el Nivel Medio en Iberoamérica».
- Fernández, Manuel José: «Utilización del Derive en la enseñanza de las Matemáticas».

Exposición de Proyectos

- Segovia, Isidro: «Investigación en Educación Matemática y Formación de Profesores».

Talleres

- Hans, Juan A.: «Salón de Juegos Matemáticos».
- Ledesma, Antonio: «Papiroflexia y matemáticas».
- Gracia, Floreal: «Intuición Espacial».
- Ramírez, Victoriano: «Matemáticas con Software específico».

Presentaciones Nacionales

- Sierra, Modesto: «España».

Sesiones especiales

- Hoz, Rafael de la: «La proporción cordobesa».
- Aizpun, Alberto; Luis Español, Mariano Hormigón, Mariano Martínez y José Luis Vicente: «Matemáticos españoles en el Siglo XX».

Comunicaciones Breves

- Fueron presentadas 87 «Comunicaciones breves» debidas a autores españoles.

  Asimismo, hubo 4 comunicaciones españolas presentadas en «Grupos de Trabajo» y 9 en «Grupos Temáticos».

EXPOSICIONES DE LA FEDERACIÓN

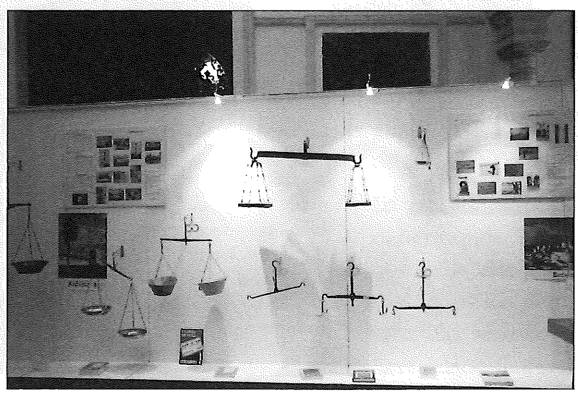
Con motivo del ICME-8 la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas ha hecho un gran esfuerzo, tanto económico como de organización, para ofrecer a los congresistas varias exposiciones de materiales relacionados con la educación matemática.

Medidas tradicionales en España

Antes de universalizarse el Sistema Métrico Decimal se utilizaba una gran cantidad de medidas que incluso variaban de unas zonas a otras. Muchas cayeron en desuso pero otras se mantienen aún. Miembros de la Sociedad Extremeña de Educación Matemática Ventura Reyes Prosper han hecho una recopilación y rescate de medidas tradicionales españolas. Las piezas que se expusieron son originales.

Libros antiguos de matemáticas

El profesor Mariano Martínez hizo un barrido exhaustivo por todas las bibliotecas del país para localizar cuantos libros de Matemáticas haya desde la invención de la imprenta. Se ofreció una amplia muestra del material conseguido, todos ellos libros originales, siendo algunos incunables. Esta excepcional exposición difícilmente volverá a repetirse teniendo en cuenta la calidad del material que se expuso y las dificultades de localización y transporte.



La medida del tiempo antes del reloj mecánico

D. Manuel Ibáñez ha dedicado su vida a la restauración y estudio de relojes. En su taller de Galapagar (Madrid) ha reproducido, con total exactitud, relojes como el de Alfonso X el Sabio o un reloj árabe de complicada mecánica y minuciosa belleza que, además, se presenta por primera vez en esta exposición. Las piezas expuestas se complementaron con un conjunto de paneles realizados por un equipo de profesores y alumnos del IB Viera y Clavijo de La Laguna.

Fotografía y matemáticas

La actividad «Fotografía y Matemáticas» la organiza en Andalucía la SAEM Thales y la coordina el profesor Evaristo González desde hace años. Se reunió una amplia colección de fotografías de contenido matemático realizadas por alumnos a través de actividades programadas. Por otra parte, se expusieron también fotografías que han obtenido premios en concursos celebrados en diversos lugares (Madrid, Canarias...) así como reportajes en los que se combinan los dos temas: fotografía y matemáticas.

Filatelia y matemáticas

En torno a la filatelia se presentaron dos exposiciones. La elaborada por la Sociedad Madrileña Emma Castelnuovo de Profesores de Matemáticas bajo la dirección de Santiago Gutiérrez que cuenta, además, con una interesante guía en español e inglés.

La otra exposición está formada por unas 150 hojas filatélicas propiedad del profesor Edgardo Fernández de Bahía Blanca (Argentina); se trata de una amplia colección de sellos originales que abarcan variados temas.

Material didáctico del profesorado en sus aulas

El profesor Arturo Mandly presentó un conjunto de materiales manipulativos que fueron elaborados por miembros de distintas sociedades de profesores de Matemáticas de España, útiles para su utilización en el aula en aspectos tales como introducir de forma lúdica determinados contenidos, conseguir una enseñanza más significativa, proporcionar a los estudiantes vías de investigación... Se incluye también material específico para ciegos.

Máquinas de calcular

Amplia e interesante colección de instrumentos de cálculo analógico y digital. Los primeros representados por reglas y cilindros de cálculo y los segundos, máquinas mecánicas y electromecánicas. Se pudieron contemplar los sistemas más utilizados en estos ingenios: la rueda de Odhner, el cilindro de Leibniz y el mecanismo intermitente de Hamann.

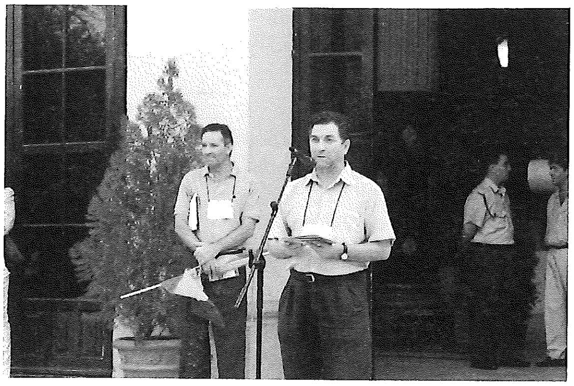
(En la sección Miscelánea puede verse una entrevista con Eusebio Huélamo, propietario de la colección.)

Films y vídeos matemáticos

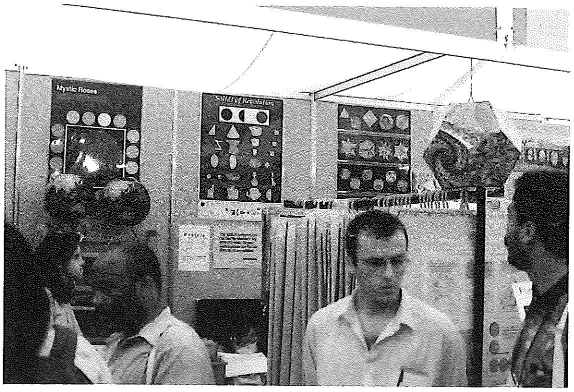
El profesor José Muñoz hizo un gran esfuerzo para conseguir una amplia filmoteca matemática formada por películas y vídeos con clara intencionalidad didáctica.

Escultura y matemáticas: forma y número

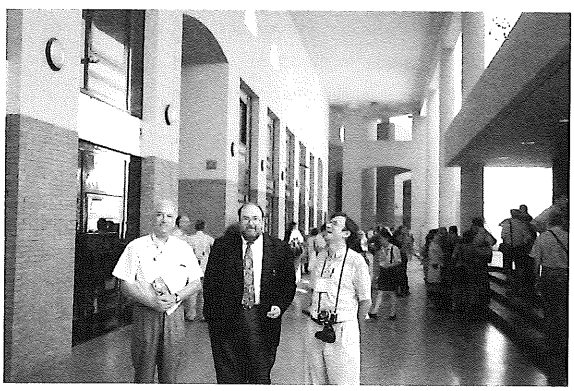
Exposición del escultor Javier Carvajal que unifica el binomio formado por el Arte y las Matemáticas. Las esculturas de Carvajal constituyen un conjunto de formas extraídas con imaginación y arte de una figura tan cotidiana como el cilindro. La matemática está presente y es sugerida en todas las obras.



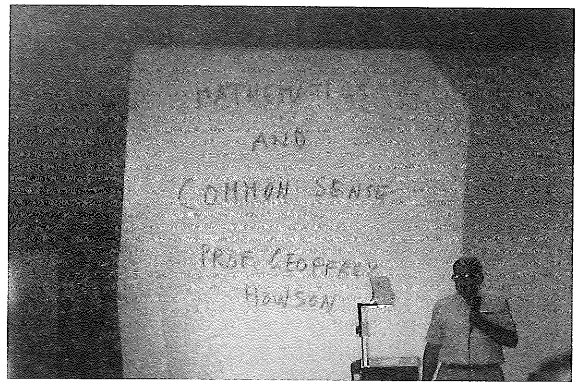
El Presidente y el Secretario General de la FESPM en la inauguración de las exposiciones de la Federación



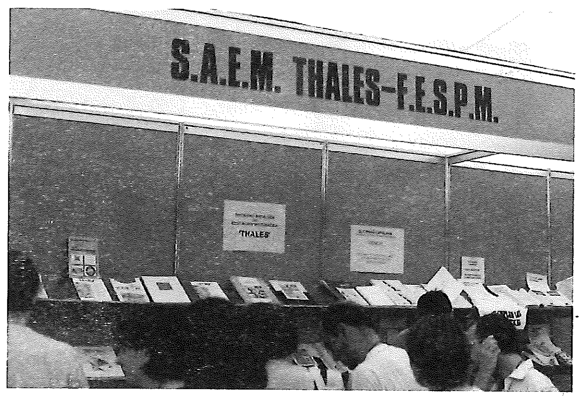
Un aspecto de las exposiciones comerciales



Ricardo Luengo, Claudi Alsina y Florencio Villarroya en un intermedio de la inauguración del ICME



G. Howson dictando su conferencia



El stand de la Federación y de Thales

Exposición de libros matemáticos antiguos

Congreso de la Sociedad Belga de Profesores de Matemáticas de expresión francesa

La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas está estableciendo relaciones y convenios de colaboración con otras sociedades de profesores de matemáticas; por un lado, con los países del área iberoamericana y, por otro, con los países europeos. El objetivo es conocer las actividades que dichas sociedades realizan en sus respectivos países e intentar establecer lazos permanentes de colaboración.

Un primer paso, en este sentido, es la asistencia de representantes de la FESPM a los congresos que las otras sociedades realizan. En las JAEM de Madrid, estuvieron dos profesoras de la Sociedad Belga, invitadas por nuestra Junta Directiva: Simone Trompler (su secretaria) y Jacqueline Van Hamme. En correspondencia a esa visita, los pasados días 21 al 23 de agosto, estuve en Dinant, donde se celebró su Congreso.

La Sociedad Belga de Profesores de Matemáticas de expresión francesa cuenta aproximadamente con 1.100 socios, de los que unos 150 asisten al Congreso, su presidente es Guy Noël. Esta Sociedad procede de la separación pacífica, hace unos veinte años, de la Sociedad de Profesores en dos: una de expresión francesa y otra de expresión flamenca. El intercambio de actividades entre ambas sociedades, en este momento, apenas existe; ejemplo, únicamente ha asistido a este Congreso un profesor de la Sociedad de expresión flamenca, y claro, a título personal.

El Congreso, que se celebra anualmente, se desarrolló en un Colegio Católico, un internado situado a las afueras de la ciudad de Dinant (15.000 habitantes): Notre-Dame de Bellevue.

Además de nuestra Federación, estaba allí representada la APMEP francesa por su presidente, Jean Pierre Richeton, y un sector de profesores suizos de expresión francesa, Charles Félix entre otros.

Ponencias

- C. Laborde: La geometría y las nuevas tecnologías, más allá de la rigidez de los programas o de la clandestinidad, en la enseñanza de las matemáticas.
- R. Gerardy: El número de oro: mitos y realidades.
- C. Bouckaert y M. Frederick: La escala y el espirógrafo.
- A. Benetatos: La etimología al servicio de la enseñanza.
- J. Navez: La geometría del espacio en 5.° de Secundaria.
- D. Justens: La matemática: una aproximación local de lo real.
- J. Wilmet: No tiréis las operaciones sobre conjuntos y el álgebra lineal por el desagüe de la bañera.
- Feria de ideas. Charles Villiers: Problemas de optimización.
- M. Ballieu: ¿Cómo lo hacían ellos?
- M. de Neef: El programa DERIVE en la TI-92.
- G. Lasters: El producto en el círculo.
- C. Felix: ...del Ferro, Tartaglia, Cardan, Bombelli,... Gauss o los matemáticos renacentistas italianos del siglo XVI y el teorema fundamental del álgebra.
- M. Demeuse: Banco de cuestiones informatizadas para permitir una evaluación criterial de las competencias mínimas al final de la primaria.
- R. Moreau: La hidrodinámica y la física de las corrientes de aire.
- M. de Neet: El programa CABRI-GEOMETRE en la TI-92.
- F. Denis: Presentación de CABRI-II.
- G. Nöel: Puntos fijos, contracciones y gráficas.
- P. Marlier: Ideas para la formación de los profesores de Primaria.
- M. Lartillier: Las tribulaciones de la ecuación de segundo grado.
- M. Krysinska y P. Bolly: Comportamiento de la tecla y^x.
- B. Jadin: Curvas de nivel.
- G. Robert: Ejemplos de «Conferencias» de matemáticas (asistidas por ordenador). Explotación de situaciones matemáticas (geometría).
- Debate: ¿A dónde va la enseñanza de las matemáticas? Introducido por una exposición de A. Warbecq de la evolución histórica de los programas de matemáticas.

La inscripción al Congreso es gratuita para los miembros de la Sociedad, 300 F.B. (1 F.B.=4,25 ptas.) para los belgas no socios y 375 F.B. para los extranjeros no miembros de la Sociedad. (La inscripción al Congreso da derecho a ser miembro de la Sociedad para el resto del año 1996).

No se emiten certificados de asistencia, salvo petición expresa de algunas personas, cosa que rara vez sucede.

La mayoría de las contribuciones son voluntarias de los participantes, algunas de las presentaciones son invitadas por la Sociedad Belga, este año han sido las de C. Laborde, R. Moreau y C. Félix.

Las comunicaciones presentadas se publican en uno o más números de su revista *Matemáticas y Pedagogía* que intercambiamos con SUMA.

La sesión inaugural estuvo presidida únicamente por el presidente de la SBPMef y el Director del Colegio que nos acogía. El Ministro de Educación excusó su no asistencia. El Presidente G. Noël empezó hablando del malestar generalizado que hay instalado en la Sociedad, en especial se refirió a la violencia: tanto la que se da en Ruanda o Argelia, como la de los delitos sexuales que en estos días se descubrían en Bélgica, hechos que nos obligan a todos los profesores, pese a todo, a tomarnos cada vez más en serio nuestra función enseñante y educativa de los ciudadanos del siglo XXI. Además, en otro momento, se guardó un minuto de silencio, en memoria de las víctimas de las agresiones sexuales, coincidiendo con todo el país.

Lo que más nos puede sorprender del congreso son sus dimensiones, en comparación con nuestras jornadas, lo que tiene la ventaja de poder hablar cada participante con casi todos los demás, facilitado por el hecho de tener allí tanto las sesiones del congreso como las comidas. Otro hecho que llama la atención es que es una sociedad o grupo de profesores, cerrada sobre sí misma, con relaciones exteriores sólo, por el momento con sociedades y países de habla francesa; a lo que se añade la amabilidad con que fui tratado, tanto por los miembros de la junta directiva como por todos los participantes con los que compartí comidas y conversaciones. En una de estas conversaciones se sugirió la idea de organizar una Federación Europea de Sociedades de Profesores de Matemáticas; idea en la que se debería de trabajar los próximos años, si bien pienso que las dificultades de idioma serán las más graves.

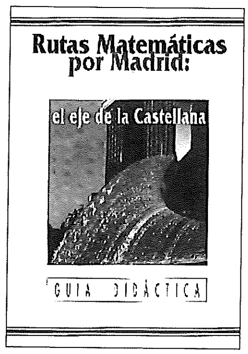
Los temas tratados en las conferencias y comunicaciones, como se puede leer en el cuadro adjunto, pueden considerarse semejantes a los que tratamos en nuestras jornadas. Las preocupaciones generalizadas de los profesores belgas son análogas a las nuestras: dificultades de implantación y adaptación a la reforma (alguno comentaba que lo peor que tenía esta reforma era el paso «obligatorio» de un curso al siguiente de los alumnos, independientemente de los conocimientos), el nivel de los alumnos (con ejemplos alarmantes por parte de un profesor de Formación de Profesorado de Primaria, en donde se matriculan los «peores» alumnos salidos de la secundaria),... Partidarios de las situaciones-problema y de la actividad de los alumnos en el aula, mayoritarios, frente a otros partidarios de dar una axiomática de la geometría al final de la enseñanza secundaria.

Destacó también la intervención de M. Moreau, director de las Casa de las Ciencias de la Universidad de Lieja que defendió la necesidad de seguir relacionando la física con las matemáticas, especialmente en estos momentos en que desde algunos sectores de físicos de su país, se defiende la enseñanza de la física sin matemáticas, a partir de sencillas e interesantes experiencias, para los alumnos de hidrodinámica e hidráulica: alas de avión, efecto ala aplicado a los coches de fórmula uno, tubos de escape de las motos de alta cilindrada, alas delta, turbulencias,...

Ah, se me olvidaba: la cerveza belga magnífica, en cualquiera de sus variedades.

Florencio Villarroya
Tesorero de la FESPM

El vídeo *Rutas Matemáticas por Madrid* premiado



El vídeo *Rutas Matemáticas por Madrid*, producido por la Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas Emma Castelnuovo con motivo de las VII JAEM, y basado en el libro del mismo nombre, ha recibido el primer premio de Vídeo Educativo «Rosa de los vientos», convocado por la UNED y dotado con 250.000 pesetas.

El fallo del concurso se hizo público el pasado 13 de septiembre, en el Salón de Actos del Centro de Arte Reina Sofía de Madrid, con la presencia del jurado al completo: Eugenio Nasarre (Secretario General de Educación), el Rector de la UNED, el vicerrector de Metodología de la misma Universidad, la directora de cine Josefina Molina, el Director del Reina Sofía y un alto cargo de TVE. Se presentaron unos 40 vídeos españoles y extranjeros, aproximadamente la mitad de ellos en la categoría de «producciones de la UNED» y el resto en la de «producciones de otras personas o entidades». En cada categoría se establecieron 5 finalistas, un accésit y un primer premio, que fueron presentándose en un acto lleno de «suspense», al menos para nosotros.

Dio la casualidad de que la obra premiada en la categoría de «producciones de la UNED» fue *Arabescos y Geometría* de Antonio Costa, con lo que de los únicos tres vídeos matemáticos presentados (el tercero fue *Women and Math across the culture*) dos de ellos obtuvieron los primeros premios de sus respectivas categorías, para gran sorpresa del jurado que probablemente tenía una idea muy distinta de las posibilidades de las Matemáticas.

La UNED enviará a todos sus centros asociados un ejemplar del vídeo *Rutas Matemáticas por Madrid*, por lo que este trabajo y el nombre de la SMPM Emma Castelnuovo alcanzará una difusión que nunca hubiéramos imaginado. Con el importe del premio pretendemos montar parte del material filmado durante las VII JAEM, exposiciones de Medidas e Instrumentos de Cálculo sobre todo, completándolo para que el resultado sea didáctico y útil al profesorado.

María Jesús Luelmo

Premio Giner de los Ríos

En el BOE del 28 de junio pasado apareció la resolución por la que se hacían públicos los premios «Francisco Giner de los Ríos» en su XIV convocatoria. Uno de los tres terceros premios recayó sobre Carlos Usón y Ángel Ramírez, miembros de la Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas Pedro Sánchez Ciruelo por su trabajo, «Variaciones sobre un mismo tema».

El estudio presenta una recopilación de los trabajos de los alumnos y alumnas, de los institutos Escultor Daniel de Logroño y Quintiliano de Calahorra, como muestra de la metodología que los autores usan en clase. Cada trabajo va precedido de un comentario en el que se señalan las cuestiones que se pretendían poner de relieve con él: capacidad de hacerse preguntas, tesón, orden y limpieza en la presentación de un trabajo, generalizaciones, etc.

El trabajo está presidido por dos ideas básicas:

- La resolución de problemas como contexto para la enseñanza de las matemáticas, incluso asumiendo muchos de los condicionantes de los temarios oficiales.
- La evaluación como un proceso continuo y flexible, que se ve perjudicado por el sistema tradicional de exámenes.

VIII JAEM
49 Encuentro de la CIEAEM
ICTMA 8

VIII Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas

Al término de las VII JAEM celebradas en Madrid, en septiembre de 1995, la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) acordó que la Sociedad de Profesores de Matemáticas de Castilla y león organizara las siguientes Jornadas Nacionales en Salamanca, durante el mes de septiembre de 1997.

Invitación a todo el profesorado

La Sociedad Castellano-Leonesa, de acuerdo con los planteamientos propios de la FESPM, invita a todo el profesorado a su participación en estas Jornadas, de manera que estén representadas todas las sociedades federadas. Sería muy interesante la participación de todas las sociedades con la presentación de alguna ponencia, comunicación o exposición-taller, para de esta manera facilitar el intercambio de experiencias y la difusión de trabajos de innovación entre todos los grupos y sociedades relacionadas con la Educación Matemática.

Avance de programa

1. *Fechas*: 9, 10 y 11 de septiembre de 1997.
2. *Lugar de celebración*: Facultad de Ciencias. Plaza de la Merced s/n. Salamanca.
3. *Estructura general*:
   - Conferencias plenarias.
   - Conferencias en las mesas temáticas.
   - Comunicaciones de los participantes.
   - Paneles.
   - Talleres.
   - Exposiciones: fotografía, informática, libros...

4. *Mesas temáticas*:
   - La formación inicial y permanente del profesorado de Matemáticas.
   - La gestión de la clase de Matemáticas.
   - Las Nuevas Tecnologías y su incidencia en la enseñanza de las Matemáticas.
   - Relaciones de las Matemáticas con otras materias escolares.
   - Balance de la implantación de los nuevos currículos.
   - El tratamiento de la diversidad en Matemáticas.
   - Las matemáticas en la vida cotidiana, en la ciencia, en el arte y en la técnica.
   - Las matemáticas en la Educación Infantil y Primaria.
   - Las matemáticas en la ESO, Bachillerato y FP.
   - Las matemáticas en la enseñanza universitaria.
5. *Plazos para la presentación de trabajos y resúmenes*: 30 de abril de 1997.
6. *Alojamiento*: Se gestionarán reservas en colegios mayores a precios especiales.

Información y recepción de documentos

— Mariano Domínguez Muro

IES Mateo Hernández

C/ Torrente Ballester, s/n. 37004-Salamanca

Tfno: (923) 22 27 62; Fax: (923) 25 21 10

— Santiago Pascual Izquierdo

CPR de Salamanca

Avda. Filiberto Villalobos, 7, 2ª Planta, 37007-Salamanca

Tfno: (923) 26 31 07; Fax: (923) 26 01 60

49 ENCUENTRO DE LA CIEAEM (Comisión internacional para el estudio y mejora de la enseñanza de las Matemáticas)

Como todos los años, excepto los que se celebra un ICME, habrá un encuentro de la Comisión al que puede asistir todo el que desee participar, bien como asistente, o presentando algún trabajo de investigación relacionado con el tema del encuentro.

Este 49º encuentro se va a celebrar en el Instituto Politécnico de la Escuela Superior de Educación de Setúbal (Portugal) bajo el título genérico «Las interacciones en las clases de matemáticas».

Más adelante se anunciarán los temas y subtemas, así como los grupos de trabajo sobre ellos.

Las lenguas oficiales son francés e inglés.

Para recibir más información, es decir el primer anuncio, dirigirse a

Joana Porfirio,
Escola Superior de Educaçao
Estefanilha
2910 Setúbal Portugal
Fax: 351-65-751705
e-mail: esesettec@mail.telepac.pt
http://www.eseset.pt/ese/cieaem.html

ICTMA 8 (Conferencia Internacional sobre la Enseñanza de la Modelización matemática y sus aplicaciones)

En Brisbane (Australia), a la vuelta de la Tierra, entre los días 1 y 7 de agosto de 1997 se va a celebrar este 8.° encuentro, en el que se abordarán los siguientes temas:

- Investigación y Evaluación en y sobre la enseñanza de la modelización y sus aplicaciones.
- Empleo de la tecnología en la enseñanza de la modelización y las aplicaciones
- Introducción de modelizaciones deterministas y estocásticas, etc.

Esta prevista la asistencia de 400 personas. La cuota de inscripción es de 100 dólares australianos.

Para mayor información e inscripciones dirigirse a:

George Booker,
Institute for Learning in Mathematics and Language,
Griffith University, Nathan, Quensland 4111
Australia
Fax: +61 7 3875 5686
e-mail: G.Booker@edn.gu.edu.au

NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, ICE de Universidad de Zaragoza, C./ Pedro Cerbuna 12, 50009 Zaragoza), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.
2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos en ningún caso serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.
3. Los gráficos, diagramas y figuras se enviarán en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. Así mismo, podrán incluirse fotografías. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.
4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de entre cinco y diez líneas, que no necesariamente tiene que coincidir con la Introducción al artículo. Debe ir escrito en hoja aparte. En ese mismo folio aparecerán los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede).
5. Si se usa procesador de texto, agradeceremos que además se envíe un disquette con el archivo de texto que contenga el artículo, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quiera incluir. La etiqueta del disquette debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda MS-Word (hasta versión 5.0) en Macintosh, o WordPerfect (hasta versión 5.1) en PC. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS, o TIFF.
6. En cualquier caso, tanto un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras deben ser originales y no fotocopias.
7. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.
8. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo.
9. La bibliografía se dispondrá al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:

   TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma,* n.° 20, 91-98.

   En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas,* Labor, Barcelona.

   En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2,* ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.
10. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ...supone un gran avance (Hernández, 1992).

    Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ...según Rico (1993).
11. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como —en caso afirmativo– la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

SUMA

BOLETÍN DE SUSCRIPCIÓN

Tarifa

	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	3.500 pts.	1.700 pts.
Centros	5.000 pts.	1.700 pts.
Europa	$40 USA	$14 USA
América y resto del mundo	$50 USA	$17 USA

Fotocopiar y enviar a: Revista SUMA. ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Deseo suscribirme a la revista SUMA:
Nombre y apellidos:. . . . .
Dirección:. . . . . Tno.: . . . .
Población: . . . . CP:. . . . .
Provincia/país . . . . CIF/NIF: . . . .

Importe

☐ Suscripción a partir del n.º ______ (3 números)

☐ N.os sueltos: ______________________

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto).

☐ Transferencia bancaria (Ibercaja: 2085-0168-50-03-000415-98).

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista Suma.

Firma y fecha:

☐ Giro postal dirigido a Revista Suma.

Nombre y apellidos: . . . .
Código Cuenta Cliente
Entidad |_|_|_|_| Oficina |_|_|_|_| DC |_|_| Cuenta |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|
Banco/Caja . . . .
Agencia n.º: . . . . Dirección: . . . .
Población: . . . . Provincia: . . . .

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que periódicamente les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (Fecha y firma):

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

FESPM