SUMA

REVISTA SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

n.º 33

FEBRERO 2000

SUMA 33
febrero 2000

Índice

Edita
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Diseño portada
José Luis Cano
Diseño interior
Concha Relancio y M.ª José Lisa
Maquetación
E. Palacián, J. Sancho, D. Sierra

Revista SUMA
ICE Universidad de Zaragoza
C. Pedro Cerbuna, 12
50009-ZARAGOZA

Tirada: 6.200 ejemplares
Depósito Legal: Gr. 752-1988
ISSN: 1130-488X
Impresión: INO Reproducciones. Zaragoza

Las ilustraciones de este número corresponden a manuales escolares. (Colección: E. Palacián)

SUMA 33
febrero 2000

Seguimos sumando

EDITORIAL

LA FEDERACIÓN PRORROGÓ a la actual Dirección de SUMA por un nuevo periodo de cuatro años –doce números–, que comenzó con el pasado número 32 de la revista.

Del cambio de equipos suele esperarse algún tipo de renovación, pero dado que seguimos siendo los mismos, cabe preguntarse si todo va a seguir igual. Hace cuatro años nos propusimos llegar a las manos de los socios y suscriptores con periodicidad y calidad tanto en la composición de la revista como en el contenido. En eso no vamos a cambiar... Nuestro compromiso sigue siendo el de mantener la calidad ya alcanzada, intentando mejorarda siempre que sea posible.

La calidad de una revista como la nuestra la dan, sobre todo, los autores y autoras a través de sus escritos. En la actualidad, el número de trabajos que llegan a la redacción, para que se considere su publicación, es bastante aceptable. Esto permite ser más riguroso en la selección. No obstante nuestra intención es, con la ayuda de la estupenda plantilla de asesores con que contamos, ayudar a los autores a mejorar sus trabajos hasta que sean aceptados para su publicación. Así, procurareos que las experiencias de aula estén bien escritas y aporten ideas a los profesores para su labor diaria y que los trabajos de los investigadores lleguen a incorporarse a la práctica mediante la trasmisión clara de sus conclusiones y hallazgos.

Existen aspectos interesantes para la enseñanza de las Matemáticas que pueden acabar quedando apartados, arrinconados. A partir de este número, introducimos nuevas secciones que, en conjunto, hemos denominado como «Rincones», en las que vamos a dar cabida a alguno de ellos. Podrían ser otros, pero los que hemos elegido, sin duda tienen un gran interés. Para su diseño y *realización hemos buscado a personas o grupos que nos han parecido de indudable valía. Todos ellos aceptaron de forma inmediata la propuesta, por lo que hemos de agradecerles profundamente su disposición a colaborar en SUMA.*

En las páginas siguientes aparecen sus primeros trabajos: en cada entrega del «Taller de Problemas», el Grupo Construir las Matemáticas, *con Rafael Pérez al frente, nos contará un aspecto diferente del apasionante problema de los isoperímetros; Fernando Corbalán, en «Mates y Medios», desvelará el relevante papel que juegan las matemáticas en los medios de comunicación y su papel en clase de matemáticas; un buen juego matemático nos será propuesto en cada número por el* Grupo Alquerque *de Sevilla en su rincón de «Juegos»; Antonio Pérez Sanz nos hará más fácil y provechoso navegar con sus «Recursos en Internet»; y, finalmente, Carlos Usón y Ángel Ramírez, o viceversa, nos descubrirán algún aspecto interesante y nos harán reflexionar a propósito de la historia en su rincón.*

La Federación sigue en el proceso de su renovación aplicando los nuevos estatutos. En este contexto se han producido los nombramientos de Serapio Garcia (Presidente de la Sociedad Castellano Manchega) como Vicepresidente y de los responsables de dos nuevos secretariados: el de Actividades, que ha recaído en la persona de Xavier Vilella y el de Publicaciones, para el que se ha nombrado a Ricardo Luengo.

Otra noticia gozosa: se ha constituido, y ya forma parte de nuestra Federación, la Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas. Les deseamos toda clase de éxitos y, por supuesto, tienen todo nuestro apoyo para aquello en lo que podamos serles útiles. ¡Ya faltan menos… para que estemos todos!

SUMA 33
febrero 2000, pp. 5-23

Los 17 grupos de simetría planos en el mudéjar aragonés

Ángel Ramírez Martínez
Carlos Usón Villalba

ARTÍCULOS

Cuando los autores propusieron al Centro de Estudios Mudéjares del Instituto de Estudios Turolenses completar el catálogo de estructuras presentes en las decoraciones geométricas mudéjares en Aragón, se estaba lejos de sospechar que se pudieran encontrar los 17 grupos de simetría planos. En este artículo, además de aportar un ejemplo de cada uno de ellos, reflexionan sobre diversas cuestiones que se han ido planteando durante la búsqueda.

I

SE HA CONVERTIDO en lugar común entre las personas que se dedican a las matemáticas la asociación geometría-arte islámico. De manera que, sin pretender con ello eliminarla, quizás convenga hacer algunas matizaciones. Por ejemplo, recordar que el Gran Alminar de Delhi, en la India, no muestra ningún detalle de ornamentación geométrica: sólo aparecen motivos florales y caligráficos. O que el alminar de la Gran Mezquita de Samara, en Irak, presenta sus muros de ladrillo –ascendentes en una lenta espiral que lima poco a poco el pesado volumen del primer cuerpo– absolutamente desnudos de cualquier tipo de decoración. Por lo demás, si bien es cierto que en todas las épocas han sido necesarias las matemáticas para fundamentar si no toda la producción artística sí parte de ella, también lo es que ha habido momentos de un decidido culto a la geometría. No hay que olvidar el interés de la Baja Edad Media occidental –claramente perceptible en las decoraciones del gótico tardío, época en la que se llega a representar a Dios en el momento de la Creación con un compás en la mano[1]– acrecentado en el Renacimiento, continuado hasta el Barroco (urbanismo, ciudades de planta geométrica), presente con vitalidad en la arquitectura y en la pintura abstracta de nuestro siglo. El famoso –y manido– número áureo, como se encargó de enseñarnos a muchos la factoría Walt Disney antes de que hubiéramos tenido tiempo de tomar contacto con el inflamado pitagorismo de Ghyka[2], rige las proporciones del Partenón, de Nôtre-Dame, del Patio de los Leones y de las torres de Manhattan.

Una geometría al servicio de la mística

Siempre el arte ha estado al servicio de una ideología, sin que esta afirmación tenga por qué tener una carga peyorativa. El transcurso del tiempo dota a la Historia de un halo determinista que matemáticamente podríamos expresar asignando el valor 1 a la probabilidad de que las cosas hayan sido como han sido. Para disentir de esta afirmación habría que recurrir –si ello fuera posible– al modelo de la distribución de Poisson[3], pero dudamos que fuera suficiente para eliminar el efecto psicológico resultante del determinismo *a posteriori*. El arte occidental y el arte islámico han estado, están y estarán al servicio de una determinada visión del mundo, de la vida, de la religiosidad y de la trascendencia. La geometría empleada en ellos, también. Como tal geometría sirve, claro está, a la razón técnica –la del arquitecto y la del artesano– pero ésta, a su vez, sirve a la ideología. Desde esta perspectiva se puede afirmar que la geometría, en el arte islámico, no está tanto al servicio de la razón como de la mística, y que de ahí deriva su particular atractivo.

Si se parte de una concepción atomizada[4] de la Naturaleza que sin embargo no niega la unidad[5]; si se pretende mostrar la dialéctica entre esta última y la diversidad; si no puede haber centros que destaquen sobre los demás porque Uno sólo es Dios;... entonces el arte puede derivar hacia soluciones en las que la estructura –la contemplación del conjunto– pierde importancia[6], la abstracción es preponderante y la decoración juega en ocasiones, y de forma obligada, un papel fundamental. Si esta decoración es fiel a todo lo anterior puede recurrir a una geometría dinámica que tenderá hacia la infinitud empleando la repetición como argumento. Como resultado, los objetos geométricos que emplee no estarán aislados, desconectados entre sí, sino que formarán refinados conjuntos cuyo atractivo (su calidez; su sensualidad, incluso) no deriva de la propia estructura abstracta (teórica) sino de su finalidad, de la idiosincrasia, de la ideología que ese arte abstracto quiere transmitir (compárese, para que se nos entienda, con la buscada frialdad surrealista de los dibujos de Escher). Unas estructuras lineales o bidimensionales impregnadas de una pátina algebraica agradable para quien observa desde las matemáticas. Y ello no sólo por estar contemplando la plasmación plástica de una hermosa dialéctica teórica, sino también por el recuerdo de que la conexión geometría-álgebra, en un campo temático más elemental, fue comenzada por los matemáticos islámicos medievales[7].

Algunas precisiones previas

Llegados al final del siglo XX, el arte islámico, por mor de los desarrollos teóricos de las matemáticas en el XIX y de la reivindicación de la geometría[8] en los últimos 25 años como reacción al dogmatismo bourbakista, aparece como el principal campo de búsqueda del ingenuo cazador (o de la ingenua cazadora) de grupos infinitos de simetría. Mahoma Rami[9] se sorprenderá sin duda desde su tumba.

La elección del mudéjar aragonés como campo de trabajo es comprensible por razones personale y prácticas, pero también por ser, de todos los focos mudéjares regionales españoles, el que ha hecho un uso más aparente de la geometría en sus decoraciones.

Hay que decir, en defensa de los ingenuos buscadores, que el hallazgo de Rafael Pérez Gómez, asegurando la presencia de las 17 estructuras teóricas en La Alhambra, es una incitación difícilmente eludible y que el camino a recorrer es muy atractivo. Eugenio Roanes Macías y Eugenio Roanes Lozano[10] eligieron rastrear mosaicos romanos del s. II en los que, como se sabe, localizaron 16 grupos, y tenemos constancia bibliográfica de un trabajo similar para el antiguo México[11]. La Mezquita de Córdoba[12] también ha sido objeto de este estudio con el resultado de 12 grupos de simetría encontrados. La elección del mudéjar aragonés como campo de trabajo es comprensible por razones personales y prácticas (algún tope hay que marcarse), pero también por ser, de todos los focos mudéjares regionales españoles, el que ha hecho un uso más aparente de la geometría en sus decoraciones. A cambio, el marco definido puede parecer forzado, dadas las distintas influencias y tradiciones que confluyen en un intervalo tan amplio de tiempo (siglos XIII-XVII), pero el mismo argumento puede aplicarse a los otros estudios citados y, en cualquier caso, la variedad temática encontrada elimina cualquier duda sobre el interés del trabajo.

Puesto que los lectores y lectoras de SUMA disponen de fuentes de información suficientes, evitamos explicaciones teóricas y nos limitaremos a mostrar un ejemplo (no necesariamente el más característico) de cada grupo en el mudéjar aragonés, sin ser exhaustivos sobre sus localizaciones ni sobre las variantes decorativas que ofrecen. Pretendemos simplemente dar noticia del aspecto más llamativo para la comunidad matemática de un trabajo más amplio que hemos desarrollado con una beca del Centro de Estudios Mudéjares del Instituto de Estudios Turolenses. Remitimos para una presentación más exhaustiva a la publicación final del mismo, así como a las dos comunicaciones que presentamos al VIII Simposio Internacional de Mudejarismo, celebrado en Teruel en septiembre de 1999.

Emplearemos la notación internacional abreviada; tiene un carácter más descriptivo y experimental que las demás, por lo que resulta cómoda para un primer acercamiento. En el citado número de la revista *Epsilon* sobre la Alhambra puede verse la equivalencia entre todos los sistemas. Para las cenefas seguiremos la notación de Maltsev[13]. Iremos comentando su presencia, con menos exhaustividad aún, al hilo de los ejemplos de los paños. Ello no supone menosprecio alguno –no hay que perder de vista que los frisos son la característica decorativa por excelencia del mudéjar en Aragón– sino simplemente aceptación de las limitaciones de espacio de un artículo. Finalmente, para referirnos a un grupo finito emplearemos C_n o D_n, según sea cíclico o diédrico, indicando con el subíndice el orden del grupo en los primeros y su mitad en los segundos[14].

Sorprendentemente estaban los 17 grupos. Algunas conclusiones

Habíamos leído tantas veces la afirmación de que el mudéjar repite tradiciones, cada vez más empobrecidas con el paso del tiempo, que rara vez es original y creativo, que suponíamos la existencia de un tope temático. En realidad la experiencia nos ha echado por tierra ésta y otras hipótesis previas. A este respecto resaltamos brevemente algunas conclusiones.

• Hay estructuras que serán siempre habituales (aunque no se pretenda) dada la facilidad con que pueden ser obtenidas en un proceso de diseño puramente experimental no guiado por la teoría. El caso más claro es el grupo CMM. Pensando en abstracto, es una opción muy asequible para escapar de la rigidez de P4M cuyos movimientos quedan paralizados por la abundancia de simetrías. CMM mantiene dos pero gana movilidad al hacerse más claras las direcciones de deslizamiento[15]. PMM no las tiene y resulta también muy estático. P4G puede ofrecer mucha más sensación de movimiento que CMM, pero incluso técnicamente es un grupo muy sofisticado.

Hay estructuras que serán siempre habituales (aunque no se pretenda) dada la facilidad con que pueden ser obtenidas en un proceso de diseño puramente experimental no guiado por la teoría.

• Los elementos geométricos de las decoraciones son compartidos en general por todas las civilizaciones, pero algunas estructuras están culturalmente condicionadas. Es el caso de la trama triangular como soporte de la ornamentación, que parece una opción claramente oriental. Salvo P6 y P6M, muy fáciles de obtener a partir de un embaldosado de hexágonos, los otros tres grupos exclusivos de esta trama –P31M, P3M1 y P3–, son realmente raros. Hemos localizado sólo un ejemplo de cada uno, pero en La Alhambra también escasean y P31M no ha sido encontrado de momento en mosaicos romanos. En contrapartida son fáciles de observar abriendo al azar un libro que incluya reproducciones de arte islámico oriental. En las miniaturas centroasiáticas, en particular, la trama triangular parece abrumadoramente mayoritaria, si nos fiamos de las pocas observaciones a las que hemos tenido acceso.

• Lo anterior aumenta el interés de los tres ejemplos de estos grupos localizados en Aragón. Y aporta un dato a favor de la creatividad de los artesanos mudéjares, sin que pretendamos con ello rebatir completamente la opinión recogida al principio de este apartado. Es cierto que en el P3M1 y el P3 encontrados hay influencias del Sur (se encuentran en el muro de La Seo, en el que trabajaron artesanos sevillanos), pero el extraño y original P31M podría ser un producto local[16], puesto que se atribuye al taller de taracea de Torrellas (s. XVI), cerca de Tarazona. Por otra parte, la presencia de estos tres grupos puede interpretarse, dados los condicionantes culturales antes citados, como un refrendo más, esta vez desde el campo de las matemáticas, del fuerte arraigo de la idiosincrasia mudéjar en Aragón en el pasado.

• En la Mezquita de Córdoba se encontraron 12 grupos. Está P6 pero falta PG. Las celosías del claustro de Tarazona recogen 11. Aquí faltan los cinco «grupos triangulares» y PG. Además de avalar estos datos nuestras afirmaciones anteriores, plantean la rareza de PG, un grupo habitual sin embargo en La Alhambra y en Aragón, con un diseño muy similar en los dos casos. Son indicativos también de la importancia que podemos conceder al claustro de Tarazona como el más alto exponente de la variedad temática estructural en el mudéjar aragonés. Hay que pensar que se trata de un recinto reducido y menos emblemático que la Mezquita. Por otra parte, Tarazona aporta además el P31M comentado, lo que eleva a 12 el número de grupos presentes en la ciudad.

• La tradición y la incidencia de los materiales con los que se elabora la decoración[17] son, en última instancia, los factores determinantes de la presencia o no de una determinada estructura teórica. Desde este punto de vista, la exhaustividad en cuanto al número de grupos que pueden encontrarse tiene una componente azarosa. Estamos hablando de épocas históricas en las que la búsqueda teórica consciente no podía guiar el trabajo de los artesanos.

• Es obligado añadir, finalmente, que todas las afirmaciones que puedan hacerse están referidas al mudéjar aragonés que nos ha llegado y en el estado en que lo ha hecho. Las pérdidas a lo largo de los siglos –especialmente en las yeserías–, como resultado de los cambios en las modas artísticas y de las modificaciones introducidas por las sucesivas restauraciones, han sido enormes. Esta advertencia no afecta a 16 de los grupos, pues hay ejemplos localizados en decoraciones fiables para cada uno, pero sí a la posible desaparición de un muestrario más amplio para varios de ellos. El paso del tiempo ha jugado, sin embargo, un papel determinante en la no presencia real del último, con el agravante de que el caos actual decorativo del paño en el que pudo encontrarse impide una conclusión definitiva, por más que haya pistas razonables para afirmar su presencia en el pasado.

II

La obsesión por el solapamiento

Una característica muy habitual del mudéjar aragonés, con claros antecedentes en La Aljafería, es el solapamiento en los cruces de las líneas que componen la retícula de la ornamentación, transmitiendo la idea de que se cruzan sin cortarse. Aunque se pierde paulatinamente al diluirse la fuerza del mudéjar en los estilos cristianos con los que se mezcla, reaparece con fuerza tras la expulsión de los moriscos en las yeserías de lazo barrocas de tradición mudéjar del s. XVII, extraordinariamente abundantes en Aragón. Se observa con facilidad en decoraciones en ladrillo resaltado y en las celosías en yeso que adornan los ventanales de las iglesias del s. XIV. El solapamiento elimina las simetrías bilaterales y, por tanto, reduce el campo de grupos posibles.

1. P2

Fotografía 1. Yesería en el patio interior de la casa de los Luna, en Daroca. Obtenida por cruce de dos tramas rómbicas de «hexágonos con picos», una horizontal y otra vertical, dando lugar a una retícula que aparece también, por ejemplo, en la fachada de Tobed, esta vez en ladrillo resaltado. Los solapamientos sólo respetan los centros de giro de orden 2.

En la iglesia de San Miguel de los Navarros, en Zaragoza, puede observarse otro P2, más habitual, formado sólo por la trama vertical.

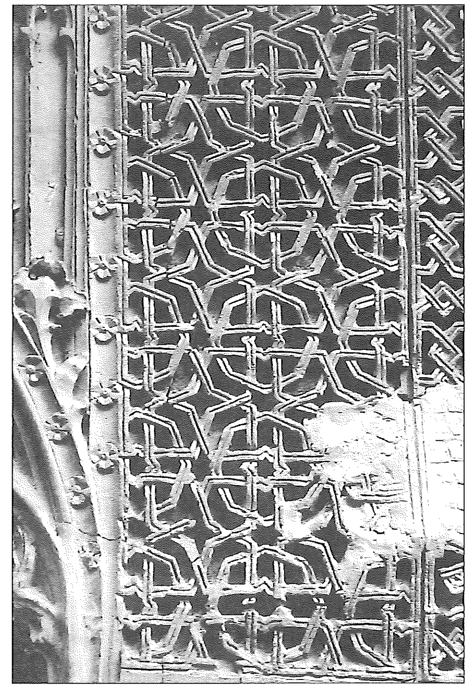


Foto 1.
Yesería en el patio interior de la casa de los Luna. Daroca (Zaragoza)

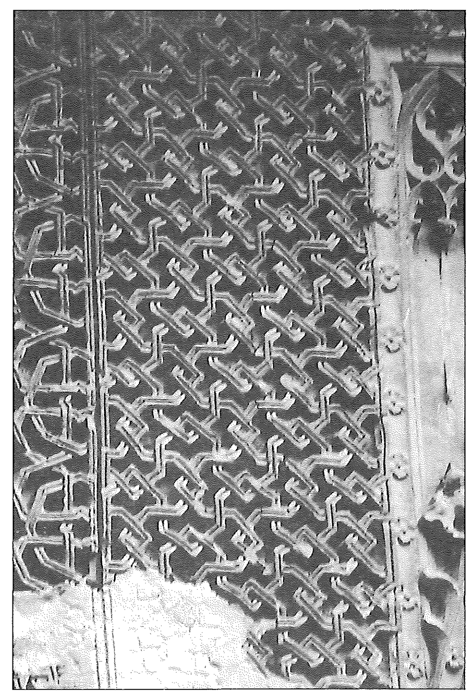


Foto 2.
Yesería en el patio interior de la casa de los Luna. Daroca (Zaragoza)

2. P4

Fotografía 2. Patio de la casa de los Luna, en Daroca.

Fotografía 3. Iglesia parroquial de Acered (Zaragoza).

La misma situación pero en trama cuadrada, ahora también con centros de giro de orden 4. De nuevo la yesería de

Daroca resulta muy refinada. Su diseño está presente en muchas puertas del Alcázar de Sevilla. Un modelo más habitual se puede ver también en San Miguel de los Navarros.

P4 es abundante por la conocida afición del mudéjar a la ornamentación con lazos de cuatro y de ocho. Curiosamente la mayor presencia de este grupo, desarrollando hasta el límite las posibilidades de estas dos decoraciones, se da en las yeserías del XVII (fot. 3).

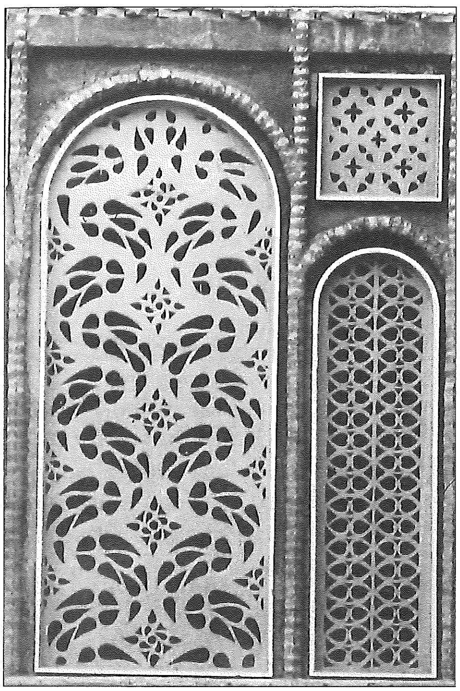


Foto 3.
Iglesia parroquial.
Acered (Zaragoza)

3. P6

Fotografía 4. Iglesia de San Miguel de los Navarros.

Ahora en trama hexagonal. Una celosía muy atractiva. Otra variante, el típico lazo de seis (con precedentes en La Aljafería) puede verse en cualquier iglesia que conserve su programa decorativo de yeserías del siglo XIV.

Salvo el modelo P3, del que hablaremos más adelante, la iglesia de San Miguel de los Navarros muestra todas las posibilidades para grupos que se generan exclusivamente a partir de traslaciones y giros.

...el típico lazo de seis (con precedentes en La Aljafería) puede verse en cualquier iglesia que conserve su programa decorativo de yeserías del siglo XIV.

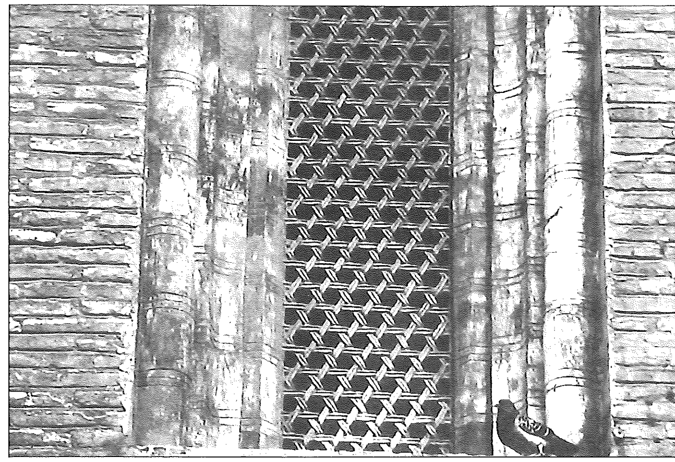


Foto 4. Iglesia de San Miguel de los Navarros. Zaragoza

4. PG

Fotografía 5. Iglesia parroquial de Alfajarín.

Los arcos lobulados o mixtilíneos entrecruzados formando cenefa (L_1: la superposición en los cruces hace que sólo se conserven las traslaciones) son muy habituales en el mudéjar aragonés. Si el módulo que forman se extiende por todo el muro aparece un paño en el que los solapamientos definen un PG, cuyos ejes de deslizamiento se intercalan entre los fustes en que se apoya el conjunto.

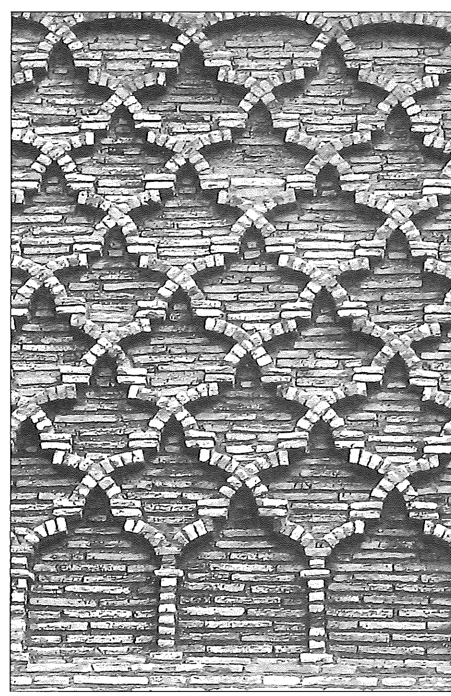


Foto 5. Iglesia parroquial. Alfajarín (Zaragoza)

La rareza de la sencillez

5. P1

Fotografía 6. Yesería en el claustro de la Catedral de Tarazona.

Curiosamente la máxima sencillez estructural (algebraica) no es la opción más habitual, ni en cenefas ni en paños: P1 es muy escaso. De hecho puede hablarse de una relación directa entre presencia real y complejidad teórica, salvo en la trama triangular que resulta en esto también algo peculiar.

El que muestra la fot. 6 (nos referimos a la celosía grande) se encuentra en el claustro de la Catedral de Tarazona. Si prescindimos del motivo que decora los rombos curvilíneos estaríamos ante un CM, pero el grupo cíclico (C_4) que los rellena elimina del conjunto toda isometría que no sea una traslación[18]. Llama la atención la amanerada sofisticación con la que se ha llegado a la estructura más elemental de las 17. Evidentemente no hay consciencia de esta cuestión teórica. La celosías de Tarazona explotan las posibilidades de la simbiosis entre la sintaxis mudéjar y un vocabulario gótico tardío, en ocasiones muy recargado (estamos en el s. XVI), que a veces produce paños tan escasamente auténticos, tan poco ideologizados, como el que se comenta.

Foto 6.
Claustro de la Catedral.
Tarazona (Zaragoza)

Curiosamente la máxima sencillez estructural (algebraica) no es la opción más habitual, ni en cenefas ni en paños...

El protagonismo de la simetría bilateral

La eliminación de las superposiciones en los cruces permite la aparición de los grupos de este apartado.

6. CMM

Fotografía 7. Torre de Villamayor (Zaragoza)

Al contrario que P1, es abundantísimo en decoraciones de cualquier estilo y época. El mudéjar aragonés no es una excepción. La fot. 7 muestra dos ejemplos de este grupo. El de la parte inferior, una sencilla red de rombos, es el más característico en Aragón. Una ornamentación que pervive obsesivamente hasta los últimos períodos del mudéjar, dando lugar en ocasiones a programas decorativos monográficos para un mismo edificio, como en la torre de Olalla o en el ábside de Belmonte de Gracián.

Si seleccionamos fragmentos lineales de este paño obtenemos las cenefas L_7, L^6 y L_3 (media, una y una hilera y media de rombos, respectivamante) también muy habituales. La primera de ellas puede verse en la fot. 14.

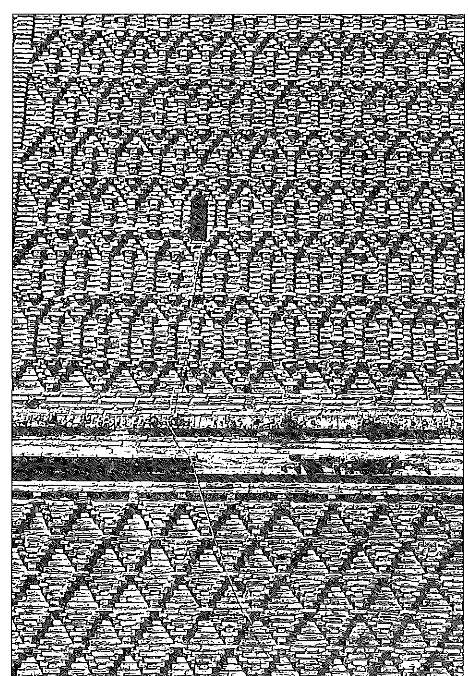


Foto 7.
Torre.
Villamayor
(Zaragoza)

7. PMM

Fotografía 8. Torre de Peñaflor (Zaragoza).

Basta con cambiar alternadamente la decoración de las filas de rombos para obtener PMM. Se mantienen con ello las reflexiones y desaparecen los deslizamientos.

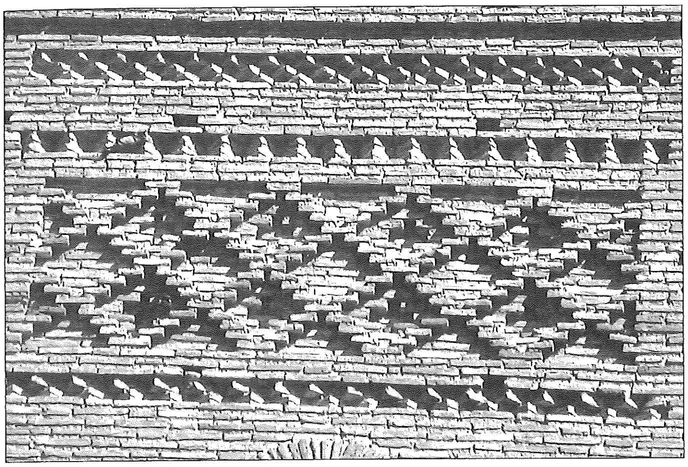


Foto 8. Torre. Peñaflor (Zaragoza)

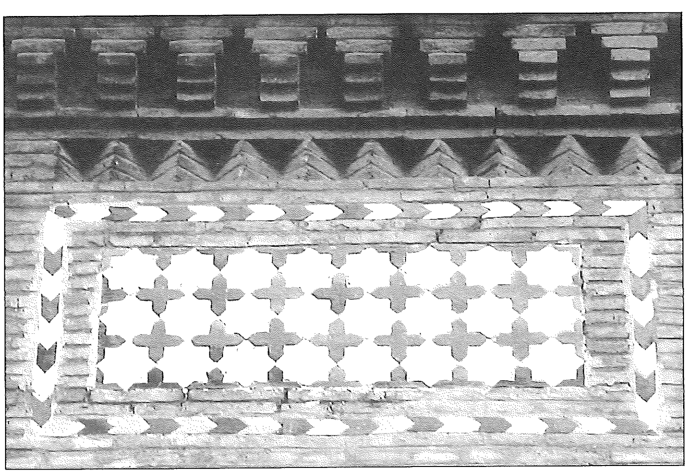


Foto 9. Decoración en el ábside de la Iglesia de San Pedro. Teruel

Foto 10. Puerta de la ex-catedral de Roda de Isábena (Huesca)

8. P4M

Fotografía 9. Ábside de la iglesia de San Pedro, en Teruel.

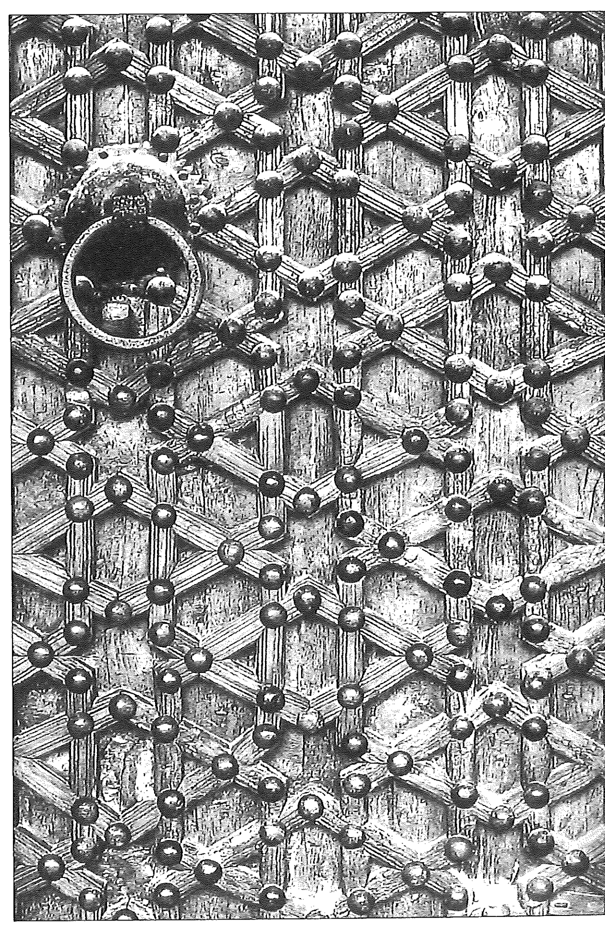
Si se cambian los solapamientos por cortes en el grupo P4 se obtiene la estructura P4M. Las dos son muy habituales en la decoración de puertas mudéjares. El P4M seleccionado está formado por baldosas de dos colores: blanco para las estrellas de ocho puntas, obtenidas al ensamblar dos cuadrados, y verde para las cruces. La fotografía muestra además cenefas de los tipos L_3 (hilera de ménsulas), L_4 (recuadro de flechas de dos colores) y L_6 (hilera de tres esquinillas superpuestas).

Se pueden observar también casos de P4M en el cuadrado superior de la derecha de la fot. 6, en las celosías rectangulares de la fot. 11 y en la cenefa que bordea la celosía central de la fot. 15.

9.P6M

Fotografía 10. Puerta de la ex-catedral de Roda de Isábena, en Huesca.

La misma relación existente entre P4 y P4M se da entre P6 y P6M. En este caso, los clavos en los cruces evitan los solapamientos y aseguran las simetrías bilaterales.



10. P4G

Fotografía 11. Claustro de la catedral de Tarazona.

Un grupo intermedio entre P4 y P4M. Desaparecen en él dos de las cuatro direcciones de simetría de P4M. Es intermedio incluso en sentido estético. Según como se observe, la vista fija su atención en los centros de giro de orden 4 o en las dos direcciones de reflexión. Un grupo ambiguo, elegante, muy atractivo. Una bonita muestra de la capacidad de lo abstracto para generar sensaciones variadas y contrapuestas.

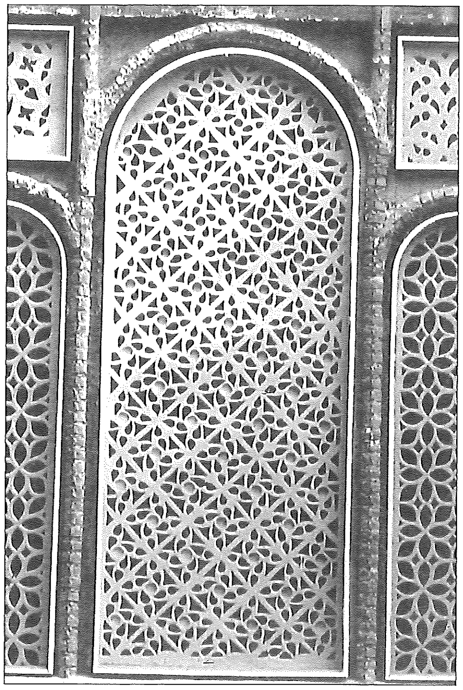


Foto 11. Yeserías en el claustro de la Catedral de Tarazona (Zaragoza)

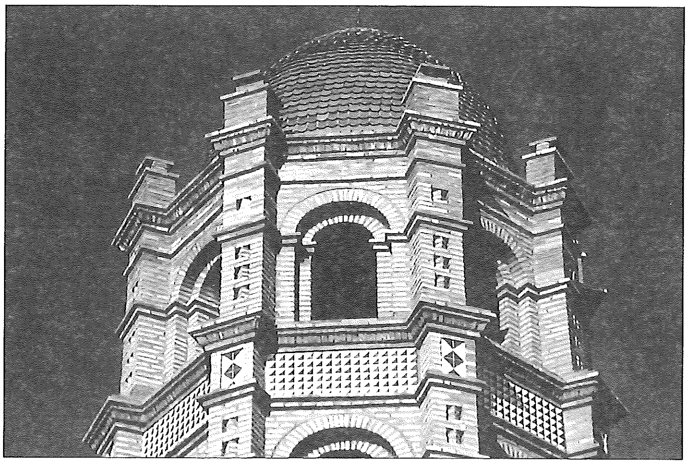


Foto 12. Torre de Mainar (Zaragoza)

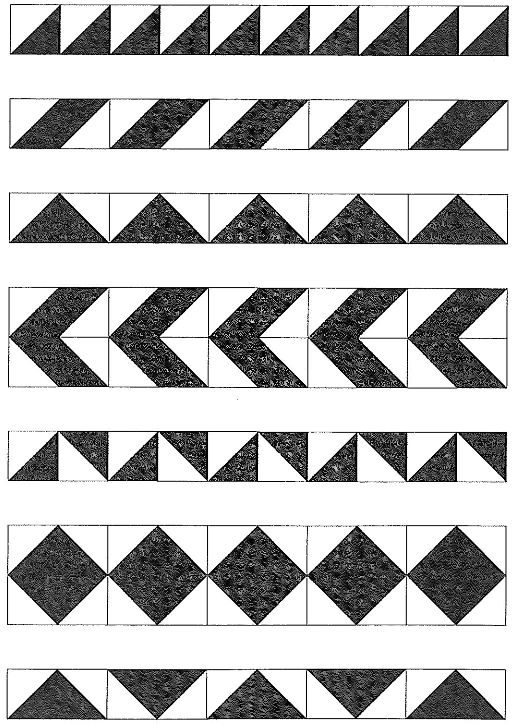
Su eje de simetría y su carácter abstracto [de la baldosa empleada en Mainar] son las causas de su capacidad para producir estructuras geométricas muy variadas.

11. CM (y todas las cenefas)

Fotografía 12. Torre de Mainar (Zaragoza)

Una baldosa muy sencilla introducida tardíamente en el mudéjar aragonés (s. XVI), un cuadrado dividido por una diagonal en dos zonas de dos colores, produce de forma muy natural, por simple apilamiento, el grupo CM. Los ejes de simetría pasan por el centro de las baldosas perpendicularmente a las diagonales que separan los colores. Paralelos a ellos se intercalan los de deslizamiento.

La sencillez de esta baldosa no es ingenua. Su eje de simetría y su carácter abstracto son las causas de su capacidad para producir estructuras geométricas muy variadas. Como muestra de esta capacidad incluimos las siete cenefas, desarrolladas a partir de ella, tal como pueden verse en las torres de Villamayor y La Almunia de Doña Godina.



L_1

L_2

L_3

L_4

L_5

L_7

L_6

12. PM

Fotografía 13. Claustro de la catedral de Tarazona.

En este caso, la alternancia de filas paralelas con dos motivos distintos, cada uno de ellos con una sola dirección de simetría, elimina los deslizamientos.

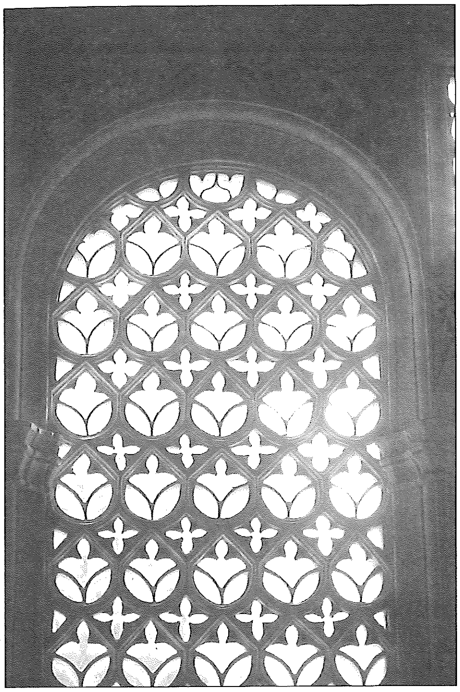


Foto 13. Claustro de la Catedral de Tarazona (Zaragoza)

La original y poco habitual estética del deslizamiento

Los grupos construidos exclusivamente a partir de deslizamientos no son fáciles de observar. En CMM, P4M, P4G, CM y P6M (de los vistos hasta ahora) aparece también esta isometría, pero resulta de componer otras. Es decir: no forma parte necesariamente del sistema generador del grupo. De hecho, la vista suele detectar en ellos con preferencia las simetrías bilaterales (aunque a veces hay sorpresas...).

Los grupos construidos exclusivamente a partir de deslizamientos no son fáciles de observar.

De PG, un grupo escaso, ya hemos hablado porque lo hemos incluido entre los obtenidos por solapamiento. No es fácil construir PGG (también raro de observar) a partir de esta idea, puesto que ahora son necesarias dos direcciones perpendiculares de deslizamiento, pero al igual que PG nos ha resultado habitual por una decoración muy característica (fig. 1).

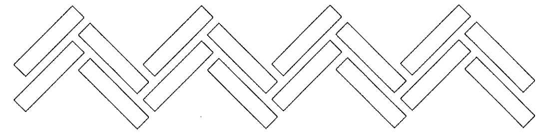


Figura 1

13. PGG

Fotografía 14. Torre del Monasterio de Rueda (Zaragoza)

En La Alhambra se encuentra gracias a una disposición muy común en suelos de ladrillo (en nuestros días, de parquet). En las torres y muros del mudéjar en Aragón es fácil encontrar dos bandas de ese embaldosado, formando un zigzag horizontal. Los centros de giro de orden dos están en los centros de los ladrillos.

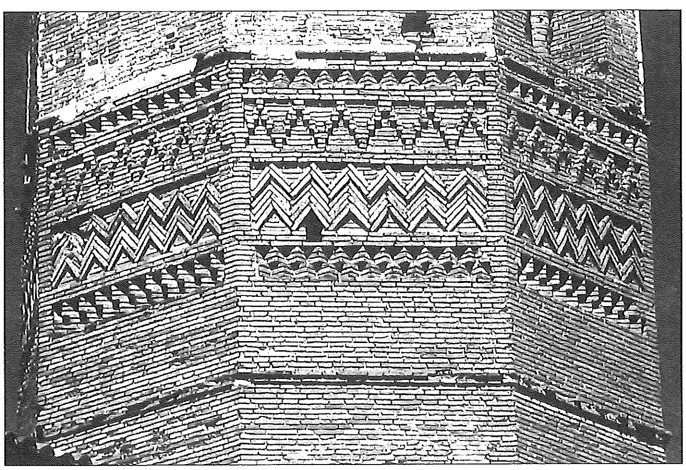


Foto 14. Torre del Monasterio de Rueda (Zaragoza)

Aunque la presencia de dos hileras basta para poder hablar de un paño, puesto que aparecen ya traslaciones no horizontales, parece evidente la intencionalidad del artesano de sugerir una lectura exclusivamente lineal. El módulo fundamental de la cenefa estaría formado por los dos fragmentos de dos ladrillos comprendidos entre dos de los ejes verticales de deslizamiento. Por supuesto, ya no son válidos los centros de giro. Estaríamos, por tanto, ante una L_5.

El mismo modelo de PGG tiene un desarrollo mucho más original e inquietante –el zigzag es ahora vertical– en la base de la torre de San Pablo, en Zaragoza (fig. 2).

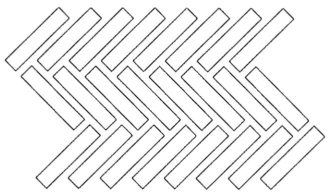


Figura 2

Resulta didáctica la comparación de las dos figuras anteriores consideradas como cenefas. En el segundo caso estamos ante una L_2: la isometría generadora del friso en su avance horizontal no es ahora un deslizamiento sino el giro de 180°.

La decoración de la fotografía 14 incluye seis hileras de zigzag. El muro lateral derecho de la torre permite observar que dos de ellas están resaltadas alternativamente. La continuación del grupo en estas condiciones no modifica su carácter de PGG.

La última banda decorada en la fotografía muestra una cenefa L_7 obtenida por dos hileras desplazadas de tres esquinillas.

14. PMG

Fotografía 15. Claustro de la catedral de Tarazona.

Fotografía 16. Claustro de la catedral de Tarazona.

PMG tiene direcciones de simetría y de deslizamiento. Al ser perpendiculares producen centros de giro de segundo orden y el resultado es menos estático que en CM, donde eran paralelas. Al igual que P4G, este grupo ofrece un efecto estético intermedio. En este caso entre PMM y PGG.

En la yesería central de la foto 15, PMG está obtenido por apilamiento de cenefas L_7, formadas por triángulos invertidos alternativamente. La celosía resalta un tipo de ejes de deslizamiento. Considérese el fuerte efecto del hecho de resaltarlos en la estética final del conjunto. Paralelos a ellos se adivinan los restantes, los ejes centrales de las cenefas L_7.

Si la «baldosa» que define la cenefa L_7 no tiene un eje de simetría, como los triángulos anteriores, PMG resulta más inestable, como puede observarse en el mismo claustro de Tarazona (fot. 16).

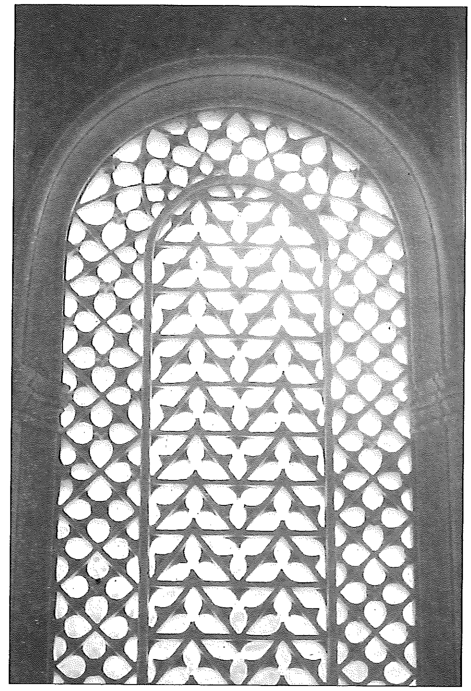


Foto 15. Claustro de la Catedral de Tarazona (Zaragoza)

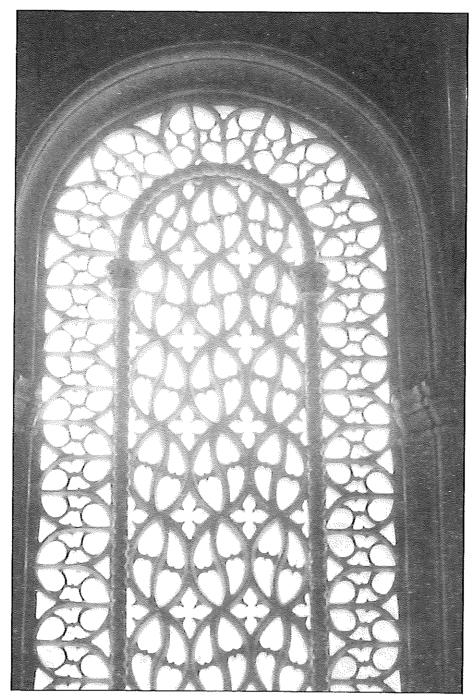


Foto 16. Claustro de la Catedral de Tarazona (Zaragoza)

Las tres delicadezas de la trama triangular

Ya hemos comentado el carácter extraño a nuestra cultura occidental de la trama triangular, salvo el caso de P6M por la sencillez de su diseño. Tanto este grupo como P6 se observan con facilidad en el mudéjar aragonés en las yeserías del s. XIV. Los otros tres grupos exclusivos de esta trama son realmente escasos. Sólo hemos encontrado uno de cada tipo, situación análoga para dos de ellos en la Alhambra. Para obtener variantes hay que explorar la trama, y aquí es donde debe fallar la tradición. Por otra parte, los materiales imponen sus condiciones: ¿cómo construir un P3 superponiendo líneas de yeso para formar una celosía? Para obtenerlo es más cómodo el azulejo y ha sido finalmente siguiendo esta pista como lo hemos encontrado.

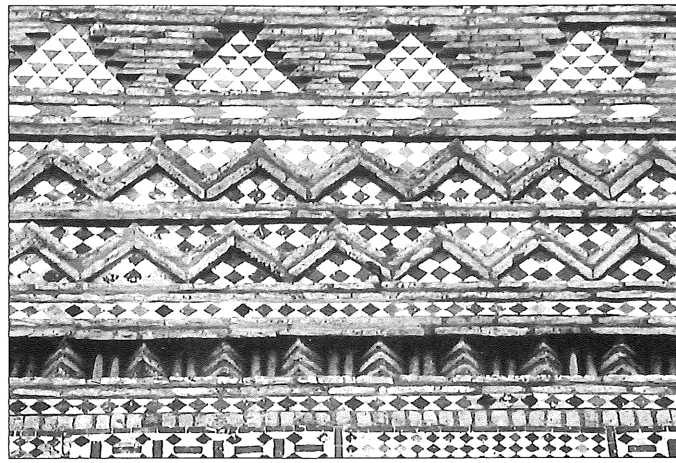


Foto 17. Muro de la Parroquieta en La Seo de Zaragoza

15. P3M1

Fotografía 17. La Seo de Zaragoza.

El mismo modelo que en La Alhambra. Nos referimos al «ajedrezado» de triángulos equiláteros que aparece rellenando los huecos entre el ladrillo en la parte superior de la fotografía. Sorprende la escasez de esta decoración dada la naturalidad del diseño. Aquí se manifiesta claramente el condicionante cultural[19].

Por lo demás, este muro de La Seo ofrece un amplio muestrario de estructuras geométricas. En este fragmento podemos observar cenefas de los tipos L_6, L_3, L_4, L_5 y L_2 (esta última si consideramos conjuntamente los dos zig-zags de ladrillo), y grupos P3M1, P4M (ajedrezado normal de cuadrados) y PM (aunque no se distinguirá al imprimirse la fotografía en blanco y negro; nos referimos a los paños de cuadrados de varios colores de la parte inferior).

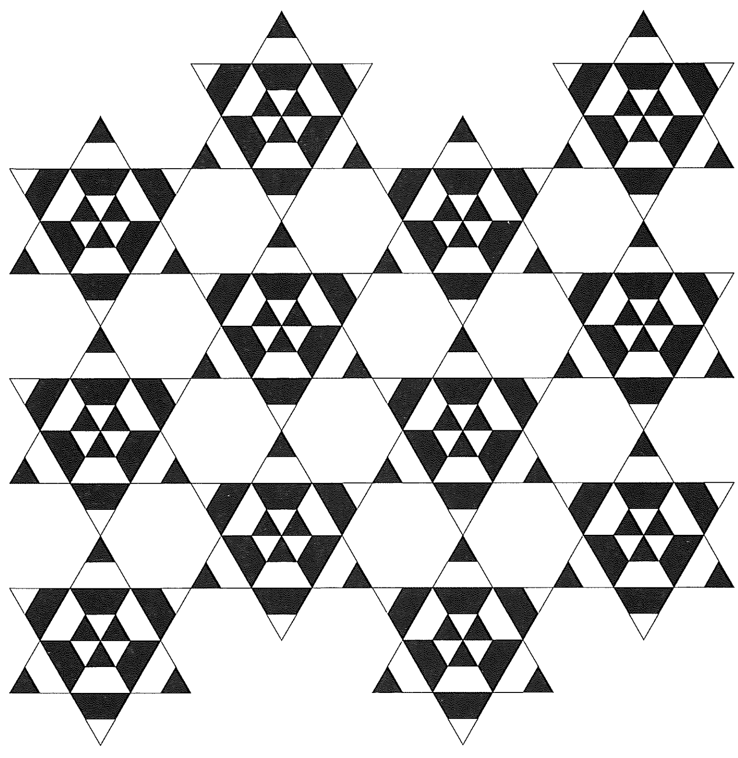


Figura 3

16. P31M

Figura 3. Facistol de la iglesia de La Magdalena, en Tarazona[20].

Un producto extremadamente sofisticado, creación del taller de taracea de Torrellas, activo durante el siglo XVI. Las tres direcciones de ejes de simetría se cortan, por supuesto, en centros de giro de orden 3, pero a diferencia de P3M1 hay también centros de giro por los que no pasan ejes de simetría.

17. P3

Fotografía 18. Muro de la parroquieta de La Seo de Zaragoza.

Un paño complejo, resultado de las aportaciones sucesivas de artesanos aragoneses y andaluces. Es el último que localizamos, cuando ya dábamos por supuesto que nos quedaríamos en 16; está realmente escondido, a pesar de exponerse al público todos los días. Su descubrimiento, un largo proceso guiado primero y analizado posteriormente desde la resolución de problemas –a veces las deformaciones profesionales son rentables–, merece que le dediquemos todo un capítulo que contribuirá, esperamos, a explicar nuestra convicción, más allá del caos que reina actualmente en el paño.

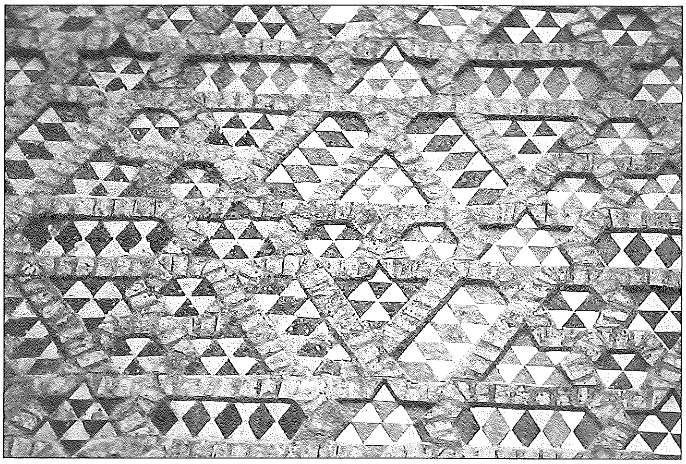


Foto 18. Muro de la Parroquieta en La Seo de Zaragoza

III

Una búsqueda sistemática más allá de la evidencia

En septiembre anunciábamos en Teruel[21] la presencia de dieciséis de los diecisiete grupos de simetría en el mudéjar aragonés. Pese a la revisión exhaustiva de apuntes y fotografías no habíamos conseguido localizar el último. Faltaba un P3. Abordamos su búsqueda como si de un problema se tratase.

A priori no parecía un grupo particularmente complicado ni en su estructura ni en su diseño. Hay que partir de una trama hexagonal en la que tan sólo admitiremos centros de orden tres (120°). Los otros tres grupos basados en los giros P2, P4 y P6 son habituales en las decoraciones mudéjares aragonesas. Caracterizan sin ningún género de dudas las celosías en yeso del siglo XIV. Los dos primeros definen, casi por sí solos, las pervivencias barrocas del XVII en ese mismo material.

Sin embargo, un detenido análisis de los modelos observados de estos tres grupos nos llevó a asociarlos, casi indisolublemente, al solapamiento. Es precisamente esa condición la que convierte en mayoritaria su presencia. Bajo esa premisa de entrelazar las líneas en los cruces[22] la naturalidad conduce a P4 desde la trama cuadrada, a P2 desde la paralelográmica y a P6 desde la hexagonal, pero P3 parece necesitar de la originalidad para forzar el resultado. Ante su ausencia surge una doble pregunta: ¿cómo conseguir P3 mediante el solapamiento? o, en su defecto, ¿cómo modificar la natural disposición de P6 para lograr un P3, manteniendo esa misma vocación de superponer las líneas en los cruces?

Primeros tanteos

Una asociación de ideas –como tal irreflexiva– incita a relacionar el P3 con la trama isométrica. La exigencia de generar el grupo basándolo en el solapamiento plantea entonces, como dificultad más evidente, la imposibilidad de superponer más de dos líneas en el mismo cruce. Ello obliga a introducir modificaciones en la trama triangular que deberán superar además otro inconveniente: el entrelazado de líneas genera con facilidad centros de giro de orden dos que están ausentes de la estructura algebraica de P3. Esa es la razón de que surja P6 con tanta naturalidad, una y otra vez, aunque tratemos de evitarlo.

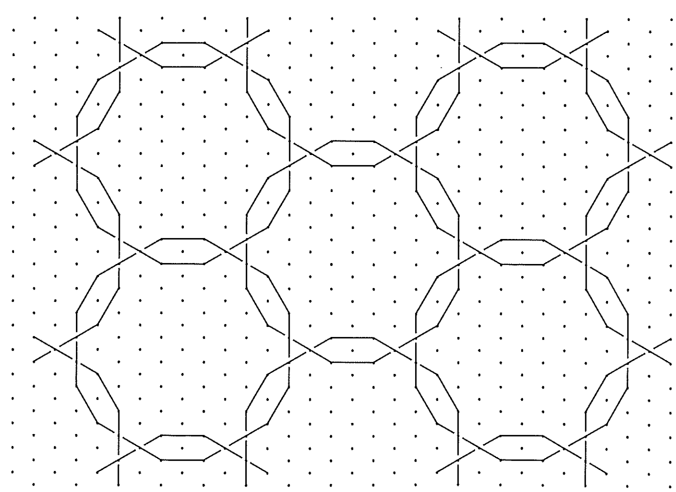


Figura 4

Así por ejemplo, tomando el entramado isométrico como referencia, podemos partir de un triángulo[23] que nos asegure el centro de orden tres y tratar de enlazarlo con otros por diversos medios. Como resultado aparecen los modelos de las figuras 4 y 5, ambos P6. También podríamos optar por desplazar paralelamente a sí mismas, una distancia igual a la mitad de la que las separa, las líneas horizontales que conforman la trama[24]. Se consigue de este modo eliminar los centros de giro de orden dos y la superposición múltiple en los cruces. Pero se obtiene de nuevo como resultado el diseño de la fig. 5.

Una nueva revisión de la iglesia de Tobed, con la mirada guiada por otros objetivos pero con la búsqueda de P3 alimentando nuestras obsesiones, nos hizo detenernos en un pequeño óculo interior situado sobre el altar mayor en el que sorprende la disposición de las líneas, aparentemente caótica (fig. 6). El triángulo, tan carismático en la simbología cristiana, parecía tratar de compaginar la evocación de la Trinidad y la aspiración musulmana de aunar unidad y multiplicidad a base de cubrir todo el plano. Resultaba atractivo pensar que este original diseño pudiera generar de algún modo un P3. Dábamos por supuesto que no formaba parte de un deseo explícito de llegar a él a través del solapamiento –una aspiración más propia de las matemáticas que de la estética– pero era nuestra única baza en aquellos momentos.

En realidad, la idea que sugiere nos permite modificar el P6, aunque el resultado no mantiene la condición de que cada línea alterne su posición con las demás a medida que se va encontrando con ellas, ni evita la intersección de tres líneas en el mismo vértice (fig. 7). Un pequeño inconveniente que se resuelve duplicando las rectas que parten del interior de los triángulos, aunque esa solución nos devuelve, una vez más, al P6.

Estas dificultades reforzaron la convicción inicial de que el tanteo era un camino ingenuo. A pesar de tener claro el objetivo, partíamos en desventaja res-

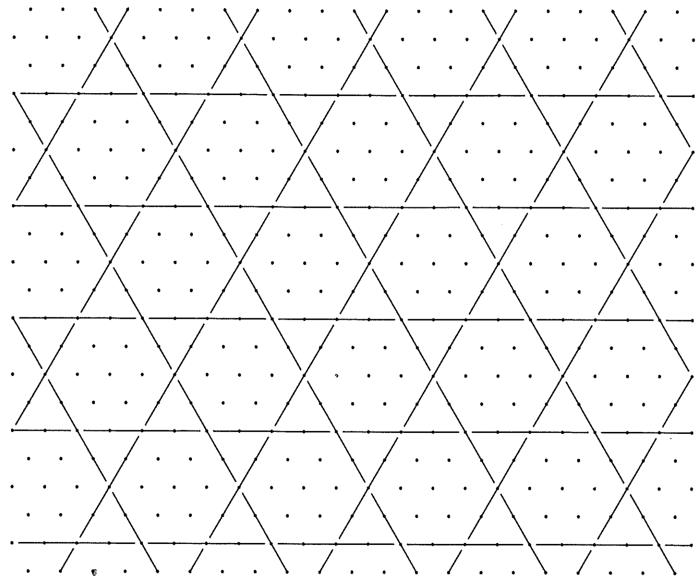


Figura 5

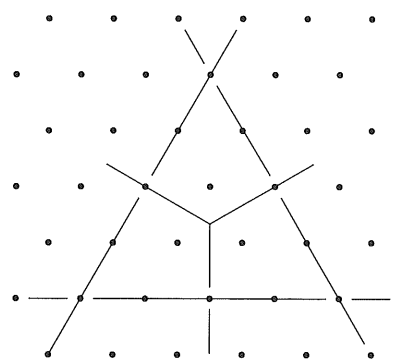
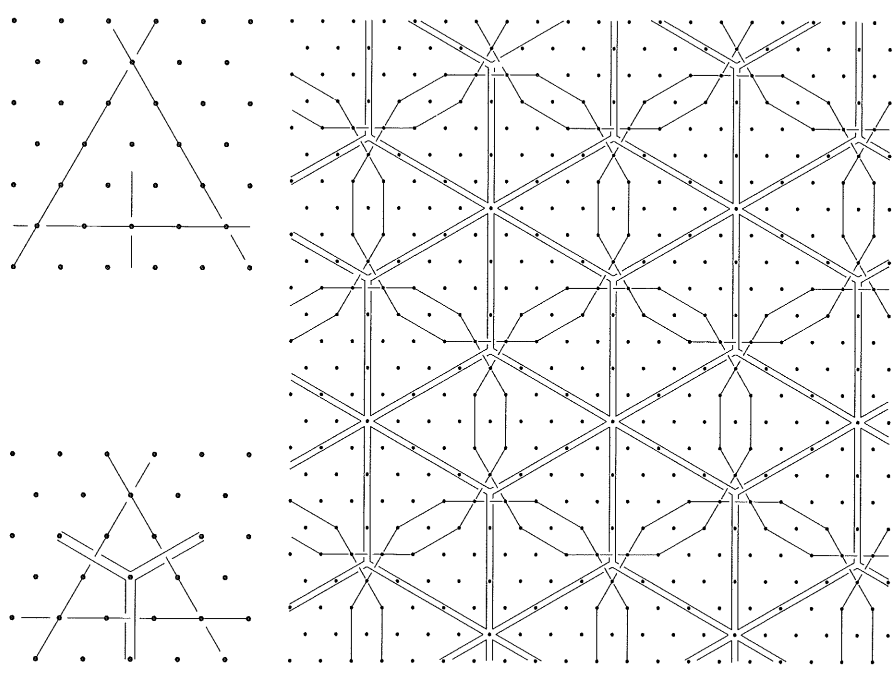


Figura 6

Figura 7



pecto a los alarifes mudéjares. El alarde de creatividad geométrica y diversidad decorativa alcanzado por el arte hispanomusulmán hacía suponer de antemano que no iba a ser fácil encontrar un diseño, estructuralmente distinto, ligado en exclusiva a la idea del solapamiento.

Desde nuestro punto de vista, condicionado por la búsqueda del P3, el aparente error de Tobed era al mismo tiempo el resultado de una necesidad y la explicación de una imposibilidad. Parecía más razonable tratar de localizarlo introduciendo modificaciones en un P6. Pero, el azar también juega sus cartas y uno de los primeros intentos de generar un P3 desplazando las líneas horizontales que generan la trama isométrica –despreciado en un principio por infructuoso– aportó el embaldosado de la figura 8.

...el aparente error de Tobed era al mismo tiempo el resultado de una necesidad y la explicación de una imposibilidad.

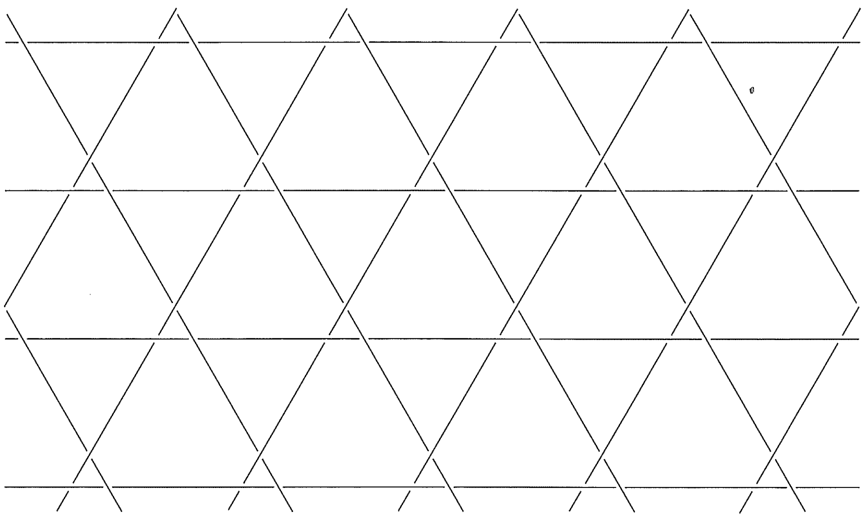


Figura 8

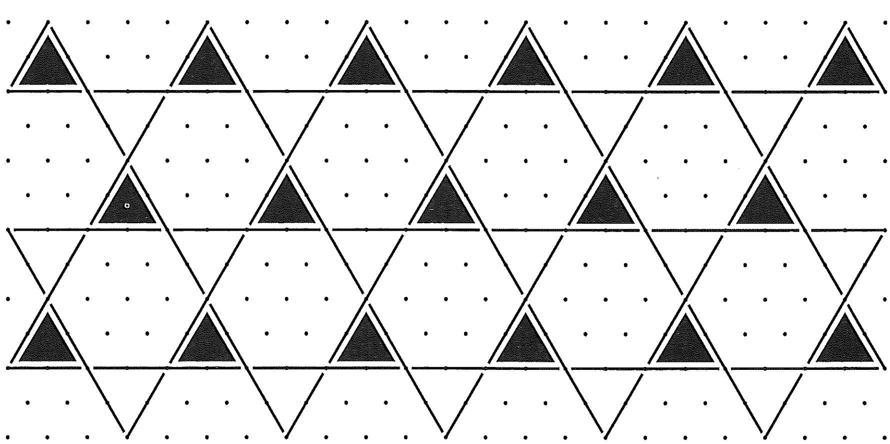


Figura 9

Sin embargo, seguramente como consecuencia del uso de tramas en el diseño, era poco probable encontrarlo en el exterior de los muros de nuestras iglesias o en la decoración en yeso de sus interiores.

Ejecutar un plan: Modificar un P6

En teoría, modificar un P6 para llegar a un P3 parece sencillo. Si se recurre al color, basta con elegir dos tonalidades distintas y decorar con ellas alternativamente las figuras del paño capaces de repetirse seis veces al girar sobre sí mismas (Fig. 9). Al eliminar los centros de giro de orden seis desaparecen también los de orden dos. Se llega así a una solución que resulta difícil de trasladar a las celosías caladas en yeso, salvo que se hubiera optado por colorear sus diferentes tramos adecuadamente. Una apuesta estética que se nos antoja inverosímil puesto que no han llegado ejemplos de ella hasta nuestros días. En cualquier caso quedaba claro que se debía ampliar la búsqueda a otros materiales.

Desde un punto de vista técnico se abre, por tanto, una nueva línea de trabajo. La decoración de la fig. 9 no es otra cosa que el resultado de superponer un P6, construido a base de solapamientos, a un P3M1 producto del juego alternativo de dos colores. El procedimiento resulta asequible una vez que nuestra búsqueda ha dejado de vincular en exclusiva P3 a la superposición de líneas. Por otra parte, el obligado recurso al color dirigió nuestra atención a la cerámica (como en La Alhambra) o a la pintura. Dadas las características del mudéjar aragonés, la solución –si existía– probablemente estaría ligada a una combinación de materiales: ladrillo y cerámica o madera y pintura. Incluso agramilado y pintura.

En esa tesitura, y ante la escasa presencia de P6 en otro material que no sea el yeso, el primer candidato era sin duda el muro de la parroquieta de San Miguel en la Seo de Zaragoza. Habíamos analizado el paño con anterioridad identificando por separado P6 en ladrillo resal-

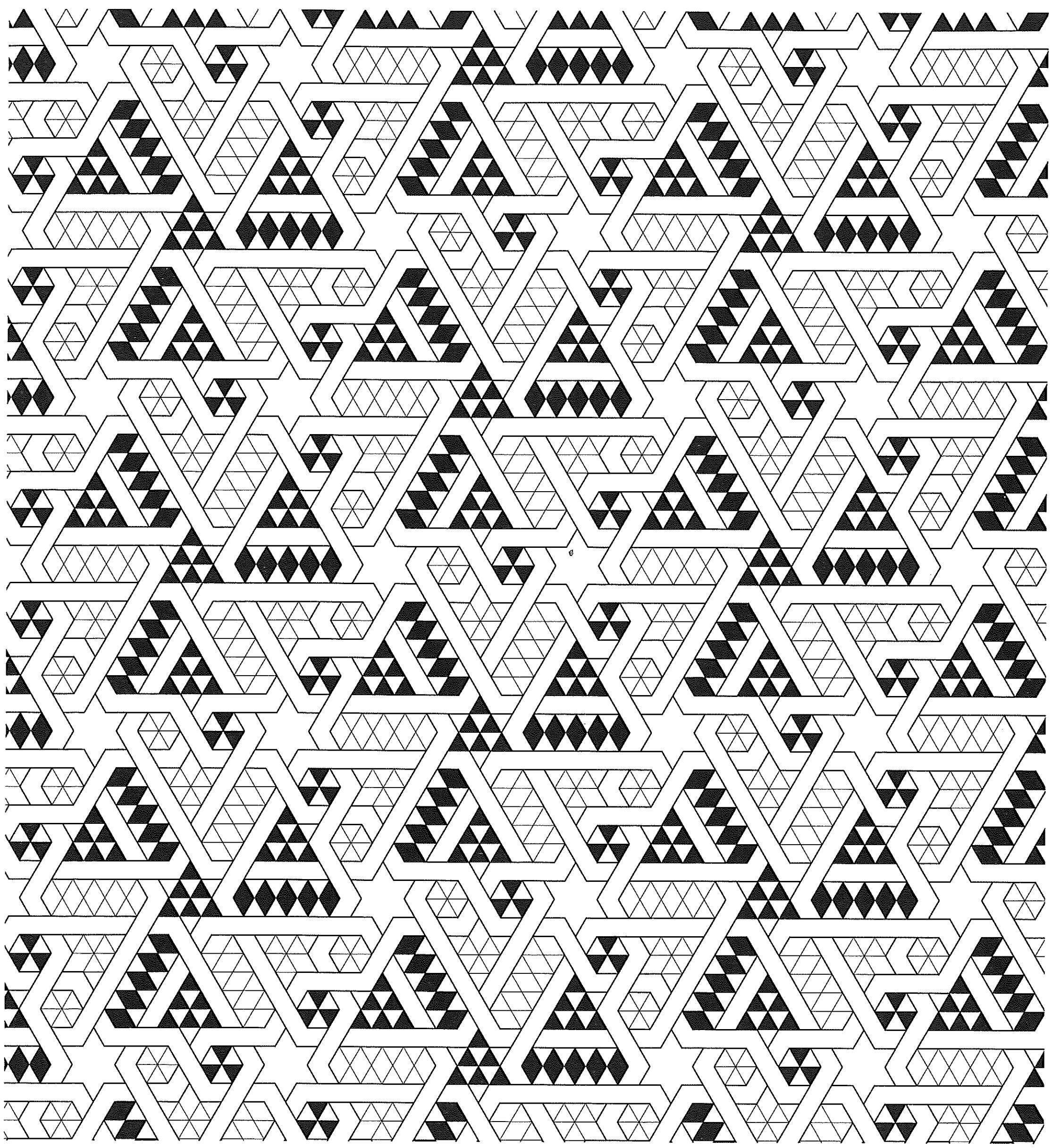


Figura 10

tado y un posible P31M en cerámica. Y..., como no podía ser de otro modo..., ¡allí estaba!, el resultado ¡era evidente! y lo fue todavía más visto al natural, prescindiendo de la limitación fotográfica.

¿Cómo podía habernos pasado desapercibido hasta ahora? El hecho no debe sorprendernos: algunos grupos son difíciles de localizar. Se precisa identificar localmente sus isometrías y abarcarlas

...algunos grupos son difíciles de localizar.

globalmente para cerciorarse de que efectivamente dejan invariante el plano y no sólo ese fragmento en el que las hemos identificado. Pero la vista no siempre da esta visión de conjunto, hay que reconstruirla mentalmente. Máxime en la Seo, donde la escasa amplitud de la calle dificulta un distanciamiento que favorecería, sin duda, esa imprescindible recreación mental. Ante la complejidad, la mente necesita tiempo. Tiempo para estructurar, pero sobre todo tiempo para saber lo que tiene que buscar. Es entonces cuando se impone agresiva la obviedad, por más que sólo alcance el carácter de tal *a posteriori*.

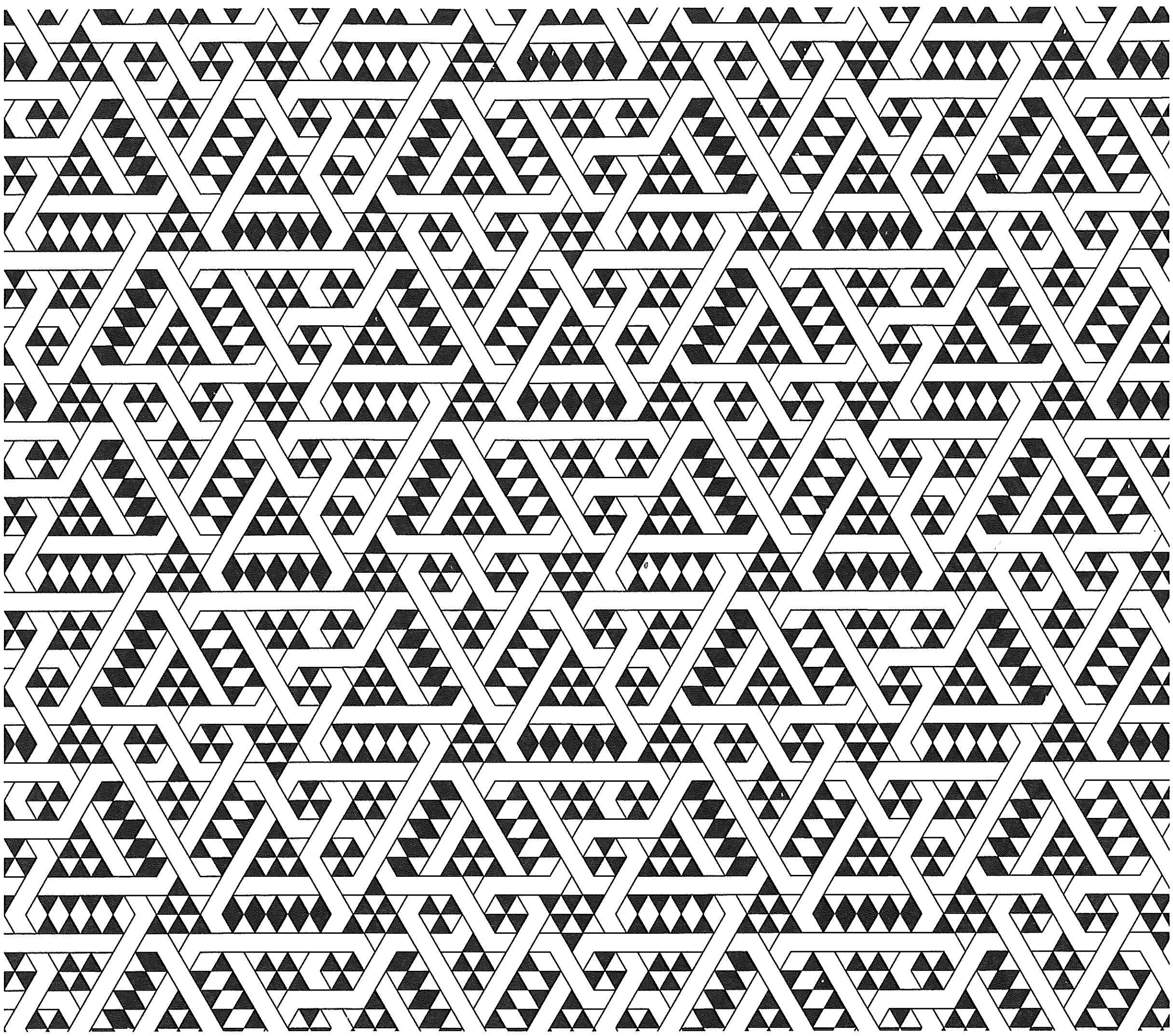


Figura 11

Una pasajera decepción

Sin embargo, la evidencia que aporta la razón resulta a veces cegadora y nos permite ver, con claridad meridiana, incluso lo que no existe. La misma dificultad que nos había impedido reconstruir el paño en su globalidad, favoreció ahora la recreación de una certeza algebraica más allá de la realidad física que se abría a nuestros ojos (fot. 18). Un detenido análisis de cada una de las componentes del paño comienza por identificar pequeños errores que se van multiplicando aquí y allá. La mente se niega a admitir que la única regularidad que presenta la cerámica enclavada bajo el P6 de ladrillo resaltado es su desorden. Y niega lo que ve porque le es ajeno, porque choca frontalmente con la experiencia vivida en todos y cada uno de los edificios visitados, en todas y cada una de las ilustraciones consultadas: el caos compositivo repugna a la sensibilidad mudéjar.

...el caos compositivo repugna a la sensibilidad mudéjar.

Es cierto que la sofisticación, en unos casos por el uso de motivos no geométricos y en otros por el empleo del color, llevó al arte hispanomusulmán a la eliminación sucesiva de las isometrías básicas implicadas en determinados paños hasta reducir su estructura a P1. Pero aquí el caos existente ni siquiera respeta el mínimo orden que generan las traslaciones, en contraste con el respeto exquisito de todo el conjunto al entramado isométrico (fig. 12a y b). Resulta por tanto inevitable preguntarse cuál pudo ser la composición original de esta parte del muro.

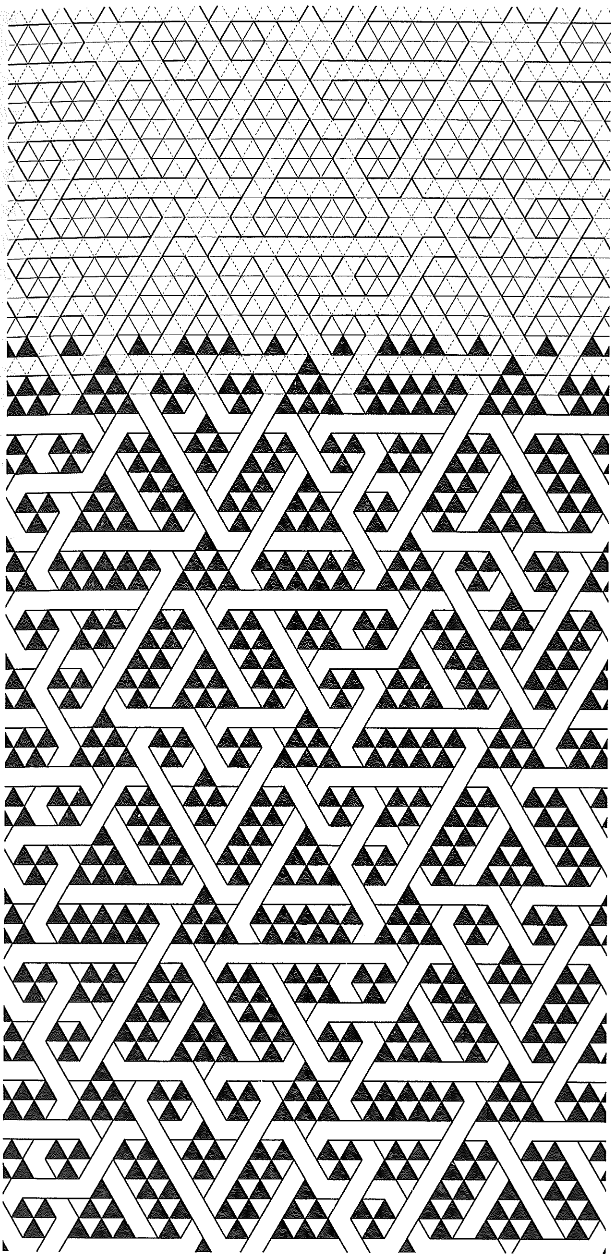


Figura 12a

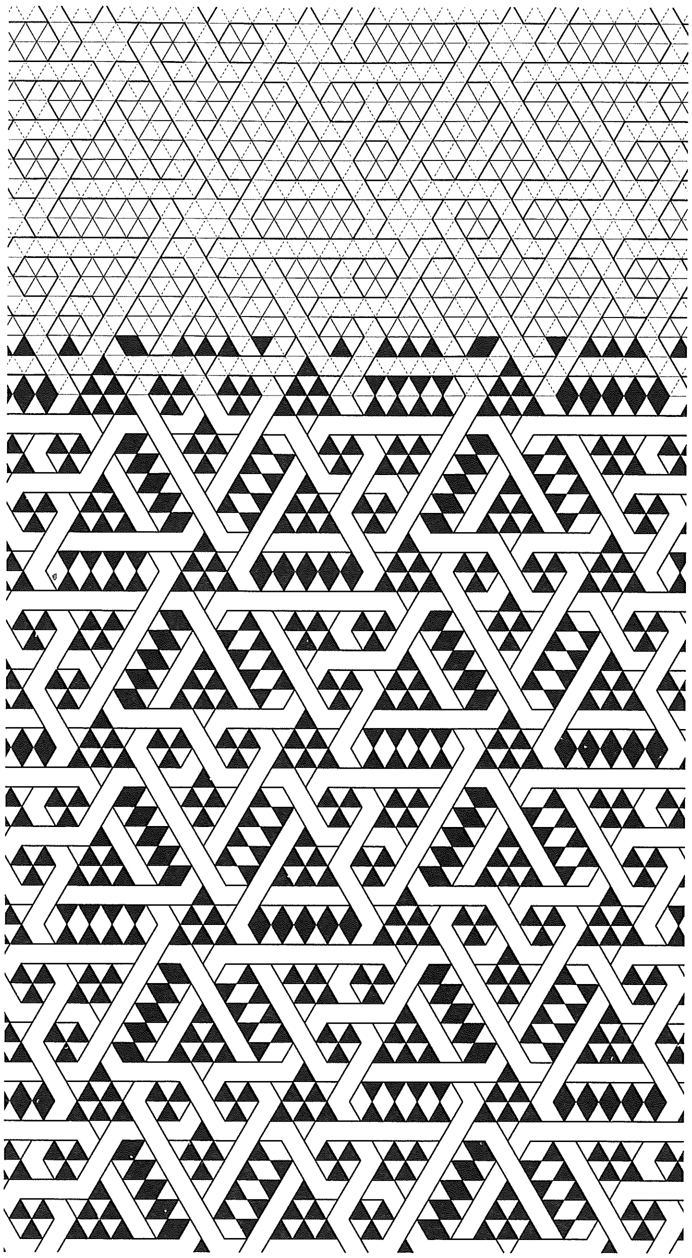


Figura 12b

Elevar la especulación a rango de hipótesis

Conviene, en primer lugar, identificar los cuatro elementos decorativos (ver fig. 10) sobre los que se estructura el paño de azulejos y que no son otros que los diferentes huecos que deja el P6 de ladrillo. Es decir: estrellas, hexágonos regulares, «puntas de flecha» y hexágonos alargados[25] que encierran cinco rombos de color verde sobre «fondo» blanco (o viceversa). En cuanto a las estrellas, podemos distinguir además dos modelos diferentes. Por un lado están las que se prolongan en seis brazos de rombos (tipo A) y por otro las que alternan estos con hexágonos regulares (tipo B). Podemos elegir entonces un tipo de decoración determinado para cada uno de ellos y analizar las posibilidades que existen a la hora de construir un P3. La fig. 10 incluye las exigencias decorativas mínimas a las que obliga este grupo de simetría y que analizamos a continuación.

...el respeto exquisito de todo el conjunto al entramado isométrico.

Identificados los centros de las estrellas de seis puntas como centros de giro de orden tres, y elegida una determinada disposición de los colores de los azulejos en un tipo de ellas (triangulitos negros hacia arriba en las de tipo A, por ejemplo), los centros de giro situados en las otras les obligan a mantener la misma orientación, pero dejan libres a las de tipo B[26]. En cualquiera de los dos casos el resultado seguiría siendo P3 una vez que la alternancia de colores de la cerámica ha roto los centros de orden seis.

Lo mismo sucede con el resto de las formas. Podemos elegir para las que hemos dejado en blanco cualquiera de las dos opciones: triangulitos negros hacia arriba o hacia abajo, en el caso de las estrellas, «puntas de flecha» y hexágonos regulares[27], y con rombos blancos o negros en el de los otros hexágonos. En resumen, sesenta y cuatro formas distintas de obtener un P3.

De todas ellas nos inclinamos a pensar que fue precisamente la de mayor alternancia decorativa la que vio la luz a manos de los azulejeros sevillanos (fig. 11). Dos razones sostienen esta creencia: la presencia actual en el muro de todas las variedades de figuras que hemos analizado y la seguridad de que se respetó el dinamismo del giro que impone el ladrillo. La primera de ellas tiene un peso muy relativo, dados los previsibles cambios sufridos por el modelo inicial, y además nos permite rechazar la idea inicial de un P31M modificando el P6 en ladrillo resaltado.

Queremos plantear todavía una última posibilidad, insinuada por la presencia del P3M1 de la parte superior del muro. ¿Sería posible una decoración en la que el P6 de ladrillo se superpusiera a un «ajedrezado» de triangulitos blancos y verdes? La perfecta conjunción de ladrillo y cerámica con el entramado isométrico (fig. 12a y b) hace factible esta opción que, como cabía sospechar, nos lleva también al P3 (fig. 12a). Sin embargo, el exceso de orden en la disposición de la cerámica de los brazos de las estrellas produce el efecto contrario: un aparente desorden que molesta la lectura del paño. Ello explicaría la modificación que se observa en el muro, alternando rombos blancos y verdes. Aporta una mayor estabilidad a la composición reforzando curiosamente, a través de la simetría bilateral, la idea de giro. En cualquier caso, el resultado nos lleva de nuevo a P3.

Conclusión

Si nos centramos en el paño tal como los siglos lo han hecho llegar hasta nosotros y lo analizamos desde el punto de vista de las características del arte hispanomusulmán, esto es: asumiendo el respeto a la infinitud, a la búsqueda de la uniformidad, al deseo de regularidad que evite identificar un fragmento del mismo como núcleo central, en definitiva, si admitimos el inequívoco sometimiento a la estructura geométrica que subyace bajo la composición, lo primero que debería sorprender es el caos originado por el paso del tiempo. De hecho no podemos decir que el paño realmente existente en el muro de la parroquieta de San Miguel sea un P3. Tampoco podemos afirmar que lo hubiera en otro momento. Y, sin embargo, no encontramos razones que apuesten por P1, única opción no rechazada de antemano por la composición de ladrillo y cerámica[28]. Así pues, dado que la decoración actual del muro no parece razonable y todas las opciones teóricas estudiadas nos llevan al P3, afirmamos la presencia de los diecisiete grupos en el mudéjar aragonés.

...afirmamos la presencia de los diecisiete grupos en el mudéjar aragonés.

IV

Final en La Aljafería: máxima variedad en mínimo espacio

La austeridad decorativa y el tamaño de los edificios del mudéjar aragonés dificulta la posible presencia de todas las estructuras en una única construcción. Aún así se dan casos de abundante variedad de modelos (claustro de Tarazona, muro de La Seo). Es claro que resulta excesivo pedirle a un solo edificio los 17 grupos de simetría, pero sí que parecería más fácil localizar las siete cenefas. Como profesores de matemáticas sabemos que alumnos y alumnas de Secundaria obtienen todas por simple experimentación. Su empleo ha sido general a todas las culturas. Pues bien: es realmente difícil encontrarlas juntas. La exhaustividad temática en lo estructural requiere de una búsqueda consciente, y el artesano actuaba guiado por la teoría, no por la tradición.

La austeridad decorativa y el tamaño de los edificios del mudéjar aragonés dificulta la posible presencia de todas las estructuras en una única construcción.

Las torres de La Almunia de Doña Godina y de San Martín de Teruel ofrecen seis tipos distintos de cenefas. En la torre de Villamayor aparecen las siete, pero hay que forzar la interpretación para alguna de ellas. También es posible verlas en la techumbre de la Catedral de Teruel; aunque en este caso era previsible encontrarlas, lo cierto es que están por muy poco, gracias a dos bandas de un P4M consideradas como cenefa L_7. Pero queremos resaltar especialmente el Salón del trono de La Aljafería. En el reducido espacio que va del comienzo de la obra en madera en el muro hasta alcanzar el techo, se encuentran los siete tipos de cenefas. Un curioso ejemplo de exhaustividad temática teórica que quizás se produjera por la especial magnificencia de la obra.

Como profesores de matemáticas sabemos que alumnos y alumnas de Secundaria obtienen todas [las cenefas] por simple experimentación.

Notas

1 Por ejemplo en el retablo del Santo Espíritu, de Pere Serra, en Manresa

2 Matila C. Ghyka: *Estética de las proporciones en la Naturaleza y en las Artes* y *El número de oro*, Poseidón, Buenos Aires, 1953 y 1968. Sin volver a postular un pitagorismo ingenuo, sí que deberíamos plantearnos qué dejaciones ha asumido la comunidad matemática para haber perdido estos libros como propios durante tanto tiempo.

3 ¿Hace falta advertir que se trata de una broma? Los intentos de la Ciencia (sí, aquí procede la mayúscula; la Autoridad siempre se nombra con mayúscula) al servicio del Poder (también con mayúscula), pretendiendo interpretar(nos) solo a partir de modelos reduccionistas son cada vez más fuertes. Por eso no evitamos esta nota. Afortunadamente, en palabras de Pasternak, «la vida se derrama siempre por el borde de todas las copas».

4 Atomizada, no atomista. El mundo está compuesto de seres y objetos con los que Dios juega a su voluntad.

5 No pretendemos extendernos sobre estas cuestiones. Ni es el lugar ni estamos preparados para ello. Se trata solamente de aportar algunas claves interpretativas. Puede consultarse: Joaquín Lomba Fuentes: *Aproximación a una estética musulmana. Incluido en La Filosofía y sus márgenes: Homenaje al profesor Carlos Baliña Fernández*, Universidad de Santiago de Compostela, 1997.

6 No perdemos de vista, por ejemplo, la estructura de las salas de Dos Hermanas y Abencerrajes (véase el número especial de la revista *Epsilon* (pág. 80) sobre La Alhambra). Pero en conjunto, como afirma el profesor Lomba (obra citada en la nota anterior), la Mezquita de Córdoba admitió ampliaciones sin pérdida de su belleza. Algo impensable en el Partenón y discutible en las iglesias cristianas, edificios definitivamente marcados por su estructura.

7 Sin pretender establecer una conexión fuerte, sino simplemente resaltar la coincidencia, queremos recordar el enfoque aritmético y algebraico que los sabios islámicos medievales dan a su producción matemática. Siguen efectuando demostraciones geométricas por respeto a Grecia, pero a partir de ellos la geometría queda ligada al álgebra. Este enfoque algebraico ha sido relacionado por algunos autores (Youskievich, por ejemplo, en la *Historia general de las Ciencias*, dirigida por René Taton) con las características del idioma árabe, en el que la formación de palabras relativas a un tema tiene cierto sabor a la obtención de valores numéricos (en este caso lingüísticos) de un polinomio en las consonantes, para ciertos valores de las vocales.

8 Y de la componente platónica que siempre la acompaña.

9 Siglos XIII-XIV. Maestro de obras del Papa Luna. Uno de los más importantes alarifes del mudéjar aragonés.

10 E. Roanes Macías y E. Roanes Lozano: «Simetría en mosaicos romanos», *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, n.° 37, Madrid, Abril de 1994.

11 J. Garrido: «Les groupes de symetrie des ornaments employés par les anciennes civilizations du Mexique»,*C.R. Acad. Sci.*, Paris, 235, 1134-1186.

12 M. de la Fuente Martos: «Introducción didáctica al estudio de mosaicos periódicos. Análisis de los mismos en la mezquita de Córdoba». (En el número especial de la revista *Epsilon* dedicado a La Alhambra).

13 Maltsev: «Grupos y otros sistemas algebraicos», en Aleksandrov y otros: *La matemática: su contenido, métodos y significado*, Alianza Universidad, 1976. La notación no es estándar, y al contrario que la que hemos escogido para los paños no hace referencia a la estructura de la cenefa. Se trata sencillamente de una numeración arbitraria de los distintos modelos. La sencillez de las cenefas y su reducido número hace cómoda cualquier notación.

14 Por respeto al rigor del que siempre se ha hecho gala en matemáticas, nos parece obligado incluir dos advertencias. Un mosaico o un friso, por definición, cubren totalmente el plano o un fragmento lineal del mismo. Las decoraciones no pueden mostrar, por tanto, más que una parte. Se les asigna la condición de tal o cual grupo cuando están presentes elementos suficientes para ello. Las decoraciones, además, no son el grupo, pero para agilizar la redacción del texto nos permitiremos abusar del lenguaje. En la misma línea, emplearemos diversas palabras como sinónimas: paños, mosaicos y embaldosados, o cenefas, frisos y bandas.

Utilizaremos también las expresiones «simetría bilateral» (como Herman Weyl) o «reflexión» (como Coxeter) para referirnos a la isometría «reflexión respecto de un eje».

15 En el tablero de ajedrez –P4M– están resaltadas por los colores alternados de las casillas... si se coloca el tablero apoyado sobre un lado. Si se coloca «en posición de rombo» quedan muy escondidas.

16 Es decir, realizado por artesanos locales. No estamos hablando del origen del motivo de la decoración.

17 Para este último aspecto remitimos a nuestro trabajo para el Centro de Estudios Mudéjares.

18 Hay un error en el rombo superior de la fila central (¿alguna restauración?) que gira en sentido contrario a los otros 12 que aparecen en la celosía.

19 Curiosamente este tipo de ornamentación es habitual en las iglesias románicas de la región de Auvergne.

20 ¿Será suficiente la rareza de esta decoración para que se restaure el facistol? La situación en que se encuentra nos ha impedido aportar una fotografía con un mínimo de calidad.

21 VIII Simposio Internacional de Mudejarismo. Septiembre 1999.

22 De las diferentes formas de entrelazado, el mudéjar opta por aquella en la que cada línea pasa, alternativamente, por encima y por debajo de las que encuentra en su camino.

23 Puede tomarse como punto de partida el que aparece sombreado en negro en cada una de las figuras.

24 Atravesarían, horizontalmente, los vértices de los hexágonos que ahora quedan libres, tal como indica la que aparece punteada en la fig. 2.

25 En adelante nos referiremos a estos últimos como «brazos».

26 De hecho, ni siquiera están obligadas a mantener una misma orientación todas las estrellas de tipo B.

27 Imponer la condición de que el fondo sea un P31M reduce las opciones a dieciséis puesto que obliga a los rombos a ser todos iguales y a los hexágonos regulares a situarse simétricamente unos respecto a otros.

28 Las referencias gráficas que hemos encontrado son dibujos que, lejos de reflejar fielmente lo que había lo falsean, interpretando desde un punto de vista muy occidentalizado la sensación general que debía producir un paño tan tremendamente plástico y complejo como este.

Ángel Ramírez
IES Biello Aragón
Sabiñánigo (Huesca).
Sociedad Aragonesa
de Profesores de Matemáticas
«Pedro Sánchez Ciruelo»
Carlos Usón
IES Quintiliano
Calahorra (La Rioja).
Sociedad Riojana
de Profesores de Matemáticas

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Comisión Ejecutiva

Presidenta: María Jesús Luelmo
Secretario General: José Luis Álvarez García
Vicepresidente: Serapio García
Tesorero: Florencio Villarroya Bullido
Secretariados:
Prensa: Antonio Pérez Sanz
Revista SUMA: Emilio Palacián/Julio Sancho
Relaciones internacionales: Luis Balbuena/Florencio Villarroya
Actividades: Xavier Vilella Miró
Publicaciones: Ricardo Luengo González

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidente: Xavier Vilella Miró
Apartado de Correos 1306. 43200-REUS (Tarragona)

Organización Española para la Coeducación Matemática «Ada Byron»
Presidenta: Xaro Nomdedeu Moreno
Almagro, 28. 28010-MADRID

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»
Presidente: Antonio Pérez Jiménez
Apartado 1160. 41080-SEVILLA

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo»
Presidente: Florencio Villarroya Bullido
ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12.
50009-ZARAGOZA

Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»
Presidente: José Joaquín Arrieta Gallastegui
Apartado de Correos 830. 33400- AVILÉS (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»
Presidente: Francisco Aguiar Clavijo
Apartado de Correos 329. 38201-LA LAGUNA (Tenerife)

Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas
Presidente: Tomás Ortega
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Villalar, s/n.
09006-BURGOS

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García
Avda. España, 14, 5ª planta. 02006-ALBACETE

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidenta: Remedios Peña Quintana
IES Francisco de Goya. C./ Caravaca, s/n.
30500-MOLINA DE SEGURA (Murcia)

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Luis Carlos Cachafeiro Chamosa
Apartado de Correos 103.
SANTIAGO DE COMPOSTELA

Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»
Presidente: Ricardo Luengo González
Apartado 536.
06080-MÉRIDA (Badajoz)

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»
Presidenta: María Jesús Luelmo
Apartado de Correos 14610.
28080-MADRID

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: Claudia Lázaro del Pozo
CPR de Santander. C./ Peña Herbosa, 29.
39003-SANTANDER

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea Tornamira
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.
Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra.
31006-PAMPLONA

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Despacho 3517. Facultad de Educación.
Universidad Complutense. 28040-MADRID

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas
Presidente: Javier Galarreta Espinosa
C.P.R. Avda. de la Paz, 9. 26004 LOGROÑO

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departament de Didàctica de la Matemàtica.
Apartado 22045. 46071-VALENCIA

SUMA 33
febrero 2000, pp. 25-36

Historia de un problema: el reparto de la apuesta

Juan Antonio García Cruz

ARTÍCULOS

En un juego de azar interesa la probabilidad de ganar en un lance o partida. También es importante, incluso más, saber qué se puede esperar si se juega una serie larga de partidas, es decir, la esperanza matemática del juego o ganancia promedio. El 27 de abril de 1657 Christiaan Huygens envió a su tutor van Schooten un manuscrito, que más tarde sería conocido con el título *De ratiociniis in ludo aleae*, donde entraba en la polémica de cómo dividir la apuesta en un juego que se ha de interrumpir antes de finalizar. El joven Huygens no sólo resolvió el problema, sino que lo hizo definiendo y utilizando un concepto hasta entonces ausente: la *expectatio* o esperanza matemática de un juego de azar.

EL PROBLEMA y su historia

En la historia de la matemática hay problemas que ilustran, de forma especial, las dificultades que los matemáticos han encontrado al construir una nueva teoría. Uno de esos problemas es el reparto de la apuesta o del juego interrumpido. Conocido desde el Renacimiento y abordado sucesivamente por diferentes matemáticos no se encontró un método correcto de solución hasta finales del siglo XVII. Su formulación general sería algo así:

Dos jugadores compiten por un premio que es otorgado después de que uno de ellos haya ganado n *lances en un juego. El jugador* A *ha ganado más que el jugador* B *y, debido a alguna intervención externa, deben abandonar el juego antes de llegar al número* n*. ¿Cómo debe dividirse la apuesta entre los jugadores?*

La polémica motivada por la certeza

Fra Luca Pacioli

El primer matemático conocido que aborda el problema es Fra Luca Pacioli (ca1445-ca1514). En su obra *Summa* *de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità* (Venecia, 1494) presenta la siguiente versión del problema:

> *Un grupo juega a la pelota de modo tal que se necesita un total de 60 puntos para ganar el juego. La apuesta es de 22 ducados. Por algún incidente no pueden terminar el juego y un bando queda con 50 puntos y el otro con 30. Se quiere saber qué participación del dinero del premio le corresponde a cada bando.*

La solución dada por Pacioli involucra los siguientes cálculos:

$$\frac{5}{11}+\frac{3}{11}=\frac{8}{11}$$

luego 8/11 equivale a 22 ducados y, por lo tanto, se tiene que al bando que va ganando le corresponderá 5/11 de 22 ducados (13 + 3/4 ducados) y al bando que va perdiendo le corresponderá 3/11 de 22 ducados (8 + 1/4 ducados).

Observemos que en la formulación del problema no se explicita que en el juego intervenga el azar. Una primera aproximación a la solución es que se trata de un problema de reparto, un simple problema de aritmética, y así es como lo enfoca Pacioli. Su solución parte del principio de que la apuesta debe dividirse de acuerdo con los puntos anotados por cada bando en el momento en que el juego se interrumpe. Sin embargo, las palabras de Pacioli: «He encontrado que las opiniones sobre la solución difieren de una persona a otra, pero todos parecen insuficientes en sus argumentos. Yo afirmo la verdad y doy la forma correcta de solucionar el problema», indican claramente que el problema proviene de una fuente anterior y que había diferencias de opinión sobre su solución. El argumento de Pacioli sólo tiene en cuenta lo que ha ocurrido mientras se ha podido celebrar el juego. Sin embargo, el bando que va perdiendo podría argumentar que la apuesta debería repartirse por igual, pues tal apuesta se pactó a término y no hubo acuerdo previo sobre otra contingencia del juego.

Medio siglo después Niccolo Tartaglia (ca1499-1557) aborda el problema en su obra *Trattato generale di numeri et misure* (Venecia, 1556). Tartaglia reproduce la solución dada por Pacioli y lanza la siguiente objeción:

> Supongamos que en un juego, un bando ha ganado 10 puntos y el otro bando 0 puntos. En esta situación el bando que tiene 10 puntos debería recibir toda la apuesta, lo cual no tiene sentido.

A continuación resuelve un problema cuyos datos son los mismos de la situación que le ha servido como objeción al método de Pacioli.

> En una partida a 60 puntos, A ha ganado 10 y B ha ganado 0. ¿Cómo debería dividirse la apuesta si cada jugador ha colocado 22 ducados?

Una primera aproximación a la solución es que se trata de un problema de reparto, un simple problema de aritmética, y así es como lo enfoca Pacioli.

Niccolo Tartaglia

Solución:

$$\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$$

parte de 22 ducados, o también

$$\frac{22}{6}=3\frac{2}{3}\text{ ducados}$$

Por lo tanto, el jugador *A* recibirá

$$22+3\frac{2}{3}=25\frac{2}{3}\text{ ducados}$$

y el jugador *B:*

$$22-3\frac{2}{3}=18\frac{1}{3}\text{ ducados}$$

De la solución se desprende que el método de Tartaglia consiste en dar, al jugador que va ganando, su apuesta más la parte proporcional correspondiente a los puntos ganados. Sin embargo es, en el siguiente problema con los mismos datos que el de Pacioli, donde se ve claramente su método de solución.

> En una partida a 60 puntos, *A* ha ganado 50 y *B* ha ganado 30. ¿Cómo debería dividirse la apuesta si cada jugador ha colocado 22 ducados?

Solución: 50-30=20;

$$\frac{20}{60}=\frac{1}{3};\ \frac{22}{3}=7\frac{1}{3}$$

luego el jugador *A* recibe

$$22+7\frac{1}{3}=29\frac{1}{3}\text{ ducados}$$

y el jugador *B* recibe

$$22-7\frac{1}{3}=14\frac{2}{3}\text{ ducados}$$

Ahora sí que está claro el método de Tartaglia *el jugador que lleva ventaja recibe su apuesta más la parte del remanente proporcional a su ventaja.* Es decir, dado que la ventaja de *A* sobre *B* (20) es un tercio del total requerido para ganar (60), debe recibir esta proporción del remanente. El jugador *B*, por lo tanto recibe lo que resta una vez *A* toma su parte. Esto es equivalente a dividir el total de la apuesta como 2:1 para el jugador que lleva ventaja.

Frente al argumento de Pacioli, puntos ganados por cada jugador, el argumento de Tartaglia se basa en la ventaja de un jugador respecto del otro en el momento en que debe interrumpirse el juego. Si el juego continuara, esa ventaja podría anularse e, incluso, podría ganar el jugador que va perdiendo. Esto último, es un argumento de peso en contra de la solución adoptada por Tartaglia. Prueba de que no quedó muy conforme con su solución es la siguiente observación con la que concluye su exposición: «la resolución de tal pregunta debe ser más judicial que matemática, de modo que, cualquiera que sea la manera en que se lleve a cabo la división, habrá causa para litigar».

Girolamo Cardano

La vía hacia lo incierto

El siguiente en retomar el problema del reparto de la apuesta es Girolamo Cardano (1501-1576). En su obra *Practica arithmeticae generalis* (1539) señala una nueva dirección para abordar la solución del problema. Critica la solución de Pacioli y observa que no se ha tenido en cuenta el número de juegos que a cada jugador le quedan por ganar, en la eventualidad de que el juego continuara. Sin embargo, no es capaz de obtener la solución correcta al problema. Su expresión para el reparto de la apuesta es

$$\frac{\text{parte de } A}{\text{parte de } B} = \frac{1+2+3+\cdots+(n-q)}{1+2+3+\cdots+(n-p)}$$

Blaise Pascal

donde n es el número total de puntos a jugar, y p y q son los números de puntos ganados por A y B, respectivamente. Tal expresión da la proporción correcta en el caso particular enunciado por Pacioli pero no es válida en general.

Sin embargo, Cardano escribió posteriormente un tratado sobre los juegos titulado *Liber de ludo aleae*, cuya fecha de redacción es incierta aunque el propio Cardano menciona, en el capítulo 20 del libro, que fue escrito en 1526. El tratado se encontró entre los papeles de Cardano a su muerte en 1576, más no se publicó hasta 1663 (Maistrov, 1974, p. 18). Por primera vez tenemos un título de una obra cuyo tema es los juegos de azar. Entre otras cuestiones, en este libro Cardano trata de cómo deben establecerse las apuestas en el juego de los dados.

Pierre de Fermat

> Siempre, la mitad del número total de caras representa igualdad; luego las posibilidades son iguales a que un punto dado caiga hacia arriba en tres tiradas, ya que el circuito total se completa en seis, o también que uno de tres puntos dados caiga hacia arriba en una tirada. Por ejemplo, se puede de igual forma lanzar 1, 3 o 5 que 2, 4 o 6. Por lo tanto las apuestas deben realizarse de acuerdo a esta igualdad si el dado es honesto y, si no, aumentan o decrecen en proporción a la desviación de la verdadera igualdad.

La probabilidad de que un punto dado caiga hacia arriba en tres tiradas es igual a 1 menos la probabilidad de que no salga ninguna vez, es decir,

$$1-\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}=\frac{91}{216}$$

Probabilidad cuyo valor es menor que 1/2.

La probabilidad de que uno de tres puntos dados caiga hacia arriba en una tirada es 3/6 = 1/2. Sin embargo, Cardano argumenta sobre la igualdad de ambas probabilidades. Es cierto que el valor esperado, *esperanza matemática*, de que un punto dado ocurra en tres tiradas es

$$3\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

El razonamiento de Cardano indica que confunde *probabilidad* y *esperanza matemática*. Sin embargo, señala el espacio de sucesos elementales (circuito) y tiene claro lo que significa un juego justo, relacionado con un dado honesto, al establecer claramente las apuestas y señalar que éstas variarán en proporción a la desviación (diferentes probabilidades) respecto de la igualdad (equiprobabilidad). La idea de equilibrio asociada a un juego justo es una noción previa y necesaria al concepto de esperanza matemática. Pero para llegar a cristalizar tal noción debe relacionarse con el concepto matemático de media aritmética o media aritmética ponderada. Esto, como veremos más adelante, no fue posible hasta la época de Christiaan Huygens.

Los primeros métodos de solución correctos

La siguiente aparición del problema de la división de la apuesta ocurre en la Francia del siglo XVII. En 1654 se inicia una correspondencia entre B. Pascal (1623-1662) y P. de Fermat (1608-1665) sobre algunos problemas que habían sido propuestos al primero por un personaje misterioso conocido con el nombre de Chevalier de Méré.

Entre los problemas propuestos se encuentra el problema del reparto de la apuesta. La primera carta de la correspondencia se ha perdido. Pero, afortunadamente, se conserva bastante del resto.

Carta de Pascal a Fermat, Miércoles 29 de julio de 1654 (Smith, 1959):

> Para conocer el valor del reparto, cuando participan dos jugadores en tres tiradas y pone cada uno 32 monedas en la apuesta:
>
> Supongamos que el primero de ambos tiene 2 puntos y el otro 1 punto. Si, ahora, vuelven a lanzar el dado las posibilidades son tales que si el primero gana, ganará el total de monedas en la apuesta, es decir 64. Pero si es el otro el que gana, estarán 2 a 2 y en consecuencia, si desean acabar o se interrumpe el juego, sigue que cada uno tomará su apuesta, es decir 32 monedas.
>
> Por lo tanto Señor, se ha de considerar que, si el primero gana, 64 monedas le pertenecerán y si pierde, entonces sólo le pertenecerán 32 monedas. Si no desearan jugar este punto, y desearan separarse, el primero podría argumentar «Tengo seguras 32 monedas, pues incluso si pierdo las recibiré. Las 32 restantes, quizás las gane o quizás no, el riesgo es el mismo. Por lo tanto, dividamos esas 32 restantes por la mitad, y dadme además las 32 que tengo seguras».
>
> El primero tendrá 48 monedas y el segundo tendrá 16.

El reparto se hará, por lo tanto, en la proporción 3:1.

La solución aportada por Pascal supone un giro importante en el tipo de razonamiento utilizado por Pacioli y Tartaglia, no así por Cardano que, como hemos visto, aventuró el camino adecuado pero no fue capaz de resolver el problema coherentemente.

La respuesta de Fermat a Pascal se ha perdido pero, afortunadamente, se conserva el resto de la correspondencia. Por ella sabemos que Fermat respondió a Pascal con otro método para resolver el problema. En carta fechada el 24 de agosto de 1654, Pascal critica la solución aportada por Fermat, «un método bueno sólo en casos aislados pero no válido siempre».

El método de Fermat, según se desprende del resto del comentario de Pascal es como sigue. Supongamos que hay dos jugadores. Al primer jugador, le faltan dos lances para ganar y al segundo jugador, le faltan tres lances. Obsérvese el cambio en el enunciado: independientemente del número de lances requeridos y el tanteo particular, lo que importa es el número de lances que le falta a cada jugador para concluir el juego. Sigamos con la exposición de Pascal del método de Fermat. En primer lugar, hay que determinar *necesariamente* en cuántos lances el juego quedará decidido con toda seguridad. Fermat supone que el juego acabará en cuatro lances. Luego habrá que ver cómo se distribuyen los cuatro lances entre los dos jugadores, cuántas *combinaciones* harán ganar al primero, cuántas al segundo, y dividir la apuesta de acuerdo con tal proporción. Supongamos, pues, que el juego se desarrolla con un dado de dos caras en el que en una cara aparece la letra *a* (gana el primer jugador) y en la otra cara la letra *b* (gana el segundo jugador). ¿Cuántas *combinaciones* posibles hay? La siguiente tabla 1 es la respuesta.

a	a	a	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b	b	b	b
a	a	a	a	b	b	b	b	a	a	a	a	b	b	b	b
a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	2	2	2

Tabla 1

La solución aportada por Pascal supone un giro importante en el tipo de razonamiento utilizado por Pacioli y Tartaglia, no así por Cardano...

Luego todas las combinaciones en las que hay dos *a* significa que gana el primer jugador y todas en las que hay tres *b* gana el segundo jugador. Por lo tanto, la apuesta debe dividirse como 11 es a 5.

Pascal expresa en la carta las dificultades que tiene de comprender tal razonamiento que involucra *combinaciones*, y hace una objeción seria al método de Fermat «pues no es necesario, cuando al primero le faltan dos lances para ganar, tener que jugar cuatro lances pues podrían ser dos o tres o quizás cuatro». Además Pascal le pone otra objeción mucho más sería para el caso en que participen tres jugadores, faltando un lance para el primero, y dos para cada uno de los restantes.

> Para realizar el reparto, siguiendo el método de las combinaciones, es necesario descubrir en primer lugar cuántos lances serán necesarios para acabar el juego. Será en tres lances, pues no pueden jugar tres lances sin necesariamente llegar a una decisión.

A continuación, Pascal presenta la tabla 2 (página siguiente) con las posibles *combinaciones*.

> Ya que al primero le falta un lance, todas las formas en las que haya una *a* le son favorables. Hay 19 de tales. Como al segundo le faltan dos lances, todas en las que haya dos *b* le son favorables. Hay 7 de tales. Como al tercero le faltan dos lances, todas en las que haya dos *c* le son favorables. Hay 7 de tales. Si concluimos que debemos realizar el reparto de acuerdo con la proporción 19:7:7, cometeremos entonces un serio error y dudaría que usted hiciera tal cosa.

a	a	a	a	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b	b	b	b	b	c	c	c	c	c	c	c	c	c
a	a	a	b	b	b	c	c	c	a	a	a	b	b	b	c	c	c	a	a	a	b	b	b	c	c	c
a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			1			1	1	1	1			1		
				2						2		2	2	2		2						2				
									3								3			3			3	3	3	3

Tabla 2

Christiaan Huygens

...la primera reseña histórica sobre el cálculo de probabilidades aparece al final del Essai philosophique sur les probabilités *de Pierre-Simon de Laplace (1749-1827).*

Obviamente el serio error, como se desprende de la tabla, es que por la necesidad de jugar tres lances, hay resultados que son favorables a más de un jugador. Sin embargo, si asignamos la combinación al primero que gana el juego y no el lance parcial, entonces el método de Fermat sí es válido. Por ejemplo, en el caso *abb*, está claro que tal combinación es para el primer jugador.

Para el propósito de este trabajo no es necesario seguir con la correspondencia entre Pascal y Fermat, tal correspondencia se puede seguir en Smith (1959: 546-565), sólo señalar que después de una amplia correspondencia, Fermat refinó su método basado en las *combinaciones*, superando los obstáculos propuestos por Pascal. Al final Pascal reconoció la validez y generalidad del método de Fermat. Sin embargo, ambos métodos son difíciles de seguir en casos complicados y adolecen de un planteamiento general sencillo.

Antes de pasar al siguiente episodio demos un pequeño salto en el tiempo, casi un siglo. Creo que la primera reseña histórica sobre el cálculo de probabilidades aparece al final del *Essai philosophique sur les probabilités* de Pierre-Simon de Laplace (1749-1827). En tal reseña Laplace, en un alarde de *chauvinismo*, asigna todo el mérito de la resolución del problema del reparto de la apuesta a sus paisanos Pascal y Fermat, atribuyéndoles el establecimiento de los principios y métodos que conducen a la solución del problema. Se olvida que el principio, hacia dónde había que mirar, fue señalado por Cardano y que el método, más general y definitivo, en la nueva y naciente teoría será del holandés Christiaan Huygens, cuya obra tilda de pequeña recopilación de problemas ya resueltos por otros. En lo que sigue veremos lo injusto del juicio de Laplace.

La esperanza de Christiaan Huygens

En 1655 a la edad de 26 años, Christiaan Huygens (1629-1695) realiza su primer viaje a Francia. Durante su estancia en París establece relaciones con los ambientes matemáticos del momento y queda impresionado por los problemas investigados por Pascal y Fermat. A su conocimiento llegó sin duda la respuesta de Pascal al problema de la división de la apuesta, pero no así el método de solución. Al retornar a Holanda se pone a investigar por su cuenta.

El 27 de abril de 1657 envía a su tutor Frank van Schooten un manuscrito titulado *Van Rekinigh in Spelen van Geluck*. En la carta introductoria, Huygens explica a su tutor el contenido del manuscrito. Por tal carta sabemos que, los problemas de los que trata, ya fueron tema de ocupación de grandes matemáticos de Francia y que, por lo tanto, el mérito de la nueva teoría que presenta no se le debe atribuir sólo a él. También cuenta que tales problemas eran propuestos, entre los sabios franceses, sin mostrar los métodos de solución, con el objetivo de ponerse a prueba entre ellos. La carta finaliza en los siguientes términos:

> Por lo tanto he tenido que examinar y profundizar por mi cuenta en esta materia, empezando con lo más básico. Por esta razón, para mí es imposible afirmar que haya partido desde los mismos principios. Finalmente he hallado que mis respuestas, en muchos casos, no difieren de las de ellos.

El manuscrito de Huygens, escrito en holandés, es traducido al latín por el propio van Schooten (Todhunter, 1949: 22), con el título *De ratiociniis in ludo aleae*, y publicado como un apéndice al libro quinto de su obra *Exercitationvm Mathematicorum*, sirviendo de introducción la carta antes referida.

De ratiociniis in ludo aleae se desarrolla en catorce páginas (521-534) y consta de catorce proposiciones, más un apéndice de cinco problemas propuestos y no resueltos.

Las tres primeras proposiciones tienen el sentido de la generalidad.

Proposición I: Si puedo obtener igual de fácil, a o b, entonces mi *expectatio* es $(a + b)/2$.

El desarrollo de la proposición tiene dos partes. En la primera parte, utiliza el álgebra y resuelve una ecuación que le dará el valor de la *expectatio.* Veamos cómo procede. Supone que su *expectatio* es x y que puede llegar a ella mediante un juego equitativo. En el juego participa Huygens y un oponente. Cada uno ha colocado x como apuesta y acuerdan que el que gane dará la cantidad a al que pierda. Luego hay la misma probabilidad de ganar a que de ganar $2x - a$. Sea $2x - a = b$, se sigue que

$$x = \frac{a+b}{2}$$

Una vez obtenido ese valor, comprueba que es la solución a la ecuación anterior. Como cada jugador ha puesto la misma cantidad, el montante total de la apuesta es $a + b$. Si ahora gano entonces daré a mi oponente a, y me quedaré con b. Si pierdo ganaré a y mi oponente b. Y ambos sucesos tienen la misma probabilidad (*ganar igual de fácil,* a o b).

Huygens termina esta proposición con un ejemplo numérico concreto en el que a y b son iguales a 3 y 7, y su *expectatio* es 5. En otras palabras, la *expectatio* de Huygens es la *ganancia promedio* en un juego equitativo.

Proposición II: Si puedo obtener igual de fácil, a o b o c, entonces mi expectatio es $(a + b + c)/3$.

Huygens utiliza el mismo método algebraico que en la anterior proposición con la salvedad de que introduce un nuevo contrincante en el juego. Ahora el juego es entre Huygens y dos más.

La tercera proposición es la más genérica de todas y el método de desarrollo el mismo que las anteriores.

Proposición III: Sea p el número cualquiera de casos para a, sea q el número cualquiera de casos para b, tomando todos los casos igualmente posibles (*proclivi*), mi *expectatio* es

$$\frac{pa+qb}{p+q}$$

Las siguientes proposiciones tratan ejemplos concretos del reparto de la apuesta entre dos o más jugadores y en distintas contingencias del juego. Pero echemos un vistazo a la siguiente proposición.

Proposición IV: Así pues, para que lleguemos primeramente a la cuestión propuesta, sobre cómo hacer la distribución entre diversos jugadores, cuando las suertes de estos son desiguales, es necesario que empecemos por las más fáciles. Supongamos que juego contra mi oponente al primero que gane tres lances, habiendo yo ganado ya dos y mi oponente uno. Deseo saber qué parte de la apuesta me corresponde si decido no jugar los lances restantes.

Huygens es el primero que introduce, en la historia de la matemática, la noción de esperanza matemática, a partir de la noción de juego equitativo.

¡De nuevo encontramos aquí el problema del reparto de la apuesta en los mismos términos propuestos por Pascal a Fermat!

Sigamos a Huygens en su exposición:

Para calcular la proporción para cada uno de nosotros, debemos considerar que ocurriría si el juego hubiera continuado. Es cierto, que si yo gano la primera ronda entonces habré acabado el juego y por lo tanto ganaría el monte total de la apuesta, a lo que llamaré a. Pero, si es mi oponente el que gana la primera ronda, entonces nuestras posibilidades serán iguales a partir de ese mismo momento, dado que a cada uno nos restará un punto para acabar el juego; por lo tanto cada uno podrá reclamar $a/2$. Evidentemente, tengo las mismas posibilidades de ganar que de perder la primera ronda. Luego, tengo iguales posibilidades de conseguir a o $a/2$, de acuerdo con la primera proposición mi proporción es $3a/4$ y la de mi oponente $a/4$.

Encontramos en Huygens la misma elegancia de exposición que en Pascal, pero aquí al contrario que allí, hay algo más. En las tres primeras proposiciones Christiaan Huygens define un nuevo concepto matemático: *expectatio*, y da una expresión para su cálculo en cualquier situación que se pueda presentar. El resto de las proposiciones las dedica a exponer diferentes situaciones y calcular la *expectatio* correspondiente. Huygens es el primero que introduce, en la historia de la matemática, la noción de *esperanza matemática*, a partir de la noción de juego equitativo. La esperanza matemática es tanto lo que espero ganar como el valor de la apuesta para tal ganancia. Recordemos que tal noción fue ya avanzada por Cardano. Sin embargo, Huygens fue mucho más allá de forma que el enfoque y solución del problema del reparto de la apuesta hizo de la esperanza matemática un concepto más básico que el de la probabilidad y esto se mantuvo así durante, aproximadamente, un siglo (Hacking, 1995: 123). Pero la contribución de Huygens a la nueva teoría es mucho más importante de lo que cabría esperar de su pequeño tratado.

La obra de Huygens sirve de punto de partida para el desarrollo y evolución posterior del cálculo de probabilidades.

La próxima obra importante, *Ars Conjectandi*, es el trabajo de un gran matemático suizo: Jakob Bernoulli (1654-1705). A él debemos el primer teorema o *Ley de los grandes números*. La obra se publicó en 1713, después de muerto su autor, y consta de cuatro capítulos. El capítulo I es una revisión comentada del *De Ratiociniis in ludo aleae*. La revisión comentada al trabajo de Huygens muestra que Jakob Bernoulli se inspiró en el mismo para obtener nuevas fórmulas para el cálculo de probabilidades. La más notable de todas es el caso general de determinar las suertes de que un suceso ocurra al menos m veces en n lances, cuando se conoce la suerte de que ocurra en un lance sencillo. Si las suertes de éxito y fracaso en un lance sencillo son b/a y c/a respectivamente, entonces la *suerte* requerida consiste en los términos del desarrollo del binomio

$$\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)^n$$

desde el término

$$\left(\frac{b}{a}\right)^n$$

hasta el término

$$\left(\frac{b}{a}\right)^m\left(\frac{c}{a}\right)^{n-m}$$

ambos inclusive. Esta fórmula nos indica cómo hacer el reparto en el caso de dos jugadores con diferentes habilidades en los lances del juego, pero Jakob Bernoulli no se refiere explícitamente a este hecho (Todhunter, 1949: 60).

Entre los problemas propuestos y no resueltos por Huygens en el *Ratiociniis* es interesante la observación que hace Bernoulli al segundo problema:

> Tres jugadores *A*, *B* y *C* toman 12 cálculos de los que 4 son blancos y 8 negros. Juegan con la condición de que el primero que, con los ojos cerrados, saque un cálculo blanco gana y la primera elección es para *A*, la segunda para *B*, la tercera para *C* y siguiendo de nuevo *A* alternativamente. Búsquese la razón futura de las suertes.

Jakob Bernouilli

La historia del problema de la división de la apuesta es una historia ejemplar de cómo se produce el tránsito entre un conocimiento consolidado, la aritmética y las operaciones básicas de división, reparto y media aritmética, a una nueva teoría matemática: la probabilidad.

Bernoulli sugiere tres posibles interpretaciones del problema:

i) se tiene un solo conjunto de 12 cálculos y cada vez que sale un cálculo negro, se devuelve al conjunto (esta parece ser la interpretación que tenía en mente Huygens);

ii) tenemos extracciones sin reposición (interpretación de Huddel, alcalde de Amsterdam);

iii) cada jugador extrae, sin reposición, de su propio conjunto de 12 fichas.

Esto es una muestra de la ambigüedad de la formulación de Huygens, y fue no sólo motivo de diversas interpretaciones como la de Bernoulli, sino que además suscitó una verdadera polémica epistolar entre Huygens y Huddel (Hacking, 1995: 124). Señalemos que la interpretación de Huygens (i) conlleva un proceso estocástico infinito, que retomaremos en la parte segunda de este trabajo.

El último problema planteado por Huygens es el primer ejemplo sobre la duración de un juego, aspecto que influirá el trabajo de De Moivre sobre el azar (Todhunter, 1949: 61).

> *Problema 5:* *A* y *B* acuerdan jugar con 12 monedas cada uno y tres dados, con la siguiente condición: si se lanzan 11 puntos, *A* entregue la moneda a *B*, pero si se lanzan 14 puntos *B* entregue la moneda a *A*, de manera que saldría vencedor aquel jugador que tendría todas las monedas primero. Encuéntrese la razón de la suerte de *A* para la de *B*.

La historia del problema de la división de la apuesta es una historia ejemplar de cómo se produce el tránsito entre un conocimiento consolidado, la aritmética y las operaciones básicas de división, reparto y media aritmética, a una nueva teoría matemática: la probabilidad. Los intentos de solución del problema presentados por Pacioli y Tartaglia se centraron en lo que ha ocurrido, puntos ganados por los contrincantes en Paccioli y ventaja del que va ganando en Tartaglia, es decir en aquello sobre lo que tenemos la más absoluta certeza. Girolamo Cardano fue el primero que aventuró otro camino, el camino de lo incierto, de lo que está por ocurrir, pero no fue capaz de arbitrar un algoritmo para la resolución del problema. La correspondencia entre Pascal y Fermat retoma el problema en el punto en que lo había dejado Cardano y, aunque su método de solución es correcto, no establecen una nueva noción conceptual. Esto último es el mérito de Christiaan Huygens. El interés de Huygens está centrado en los *riesgos* o *suertes* que son los que permiten, de forma fácil, definir las apuestas y pagos en un juego de azar, y que más tarde serán la base del estudio de las pensiones vitalicias y de los seguros de vida. Tal punto de partida lleva a la noción de esperanza matemática. Como señalará más tarde J. Bernoulli en su *Ars Conjectandi* (1713), el significado de la palabra *expectatio* es diferente del uso común de la misma. La expectativa o esperanza, en el sentido ordinario del término, se refiere al resultado posible más favorable, aunque sabemos que puede también ocurrir lo menos favorable. En el uso empleado por Huygens del término debemos entender, *expectatio*, como la esperanza de conseguir lo mejor, disminuida por el temor de conseguir lo peor. De este modo, nuestra *expectatio* se sitúa a medio camino entre lo mejor que podemos esperar y lo peor que podemos temer. Con el poder que da la generalidad expresada en su tercera proposición, Christiaan Huygens acabó, de una vez por todas, con la polémica que el problema había suscitado desde el Renacimiento y que además había consumido las energías y el tiempo de grandes *geómetras*. La influencia que sobre la obra de Jakob Bernoulli y otros matemáticos ejerció ese pequeño tratado, que según Laplace escribió, hizo que Christiaan Huygens entrara por la puerta grande como maestro y fundador de la nueva ciencia del azar.

La reflexión didáctica

El estudio de la génesis y evolución de los conceptos matemáticos nos proporciona una mejor y más profunda comprensión de los mismos. De igual forma, nos pueden servir para comprender las dificultades de aprendizaje que muestran los alumnos. Mi interés sobre la historia es, pues, doble. Por un lado, me interesa en el sentido en que mi conocimiento matemático se amplía. Por el otro, en que espero, me suministre situaciones que pueda utilizar con mis alumnos. En lo que sigue expondré las ventajas que tiene el problema del reparto de la apuesta como situación didáctica.

Como punto de partida se puede presentar a los alumnos la formulación siguiente:

Dos jugadores participan en un juego. Cada uno coloca sobre la mesa 32 monedas. Acuerdan que el primero que consiga 3 puntos gana el total de la apuesta. Por algún motivo el juego debe interrumpirse cuando un jugador lleva ganados 2 puntos y el otro 1 punto. ¿Cómo debe repartirse la apuesta inicial? Justificar el reparto.

Como se ve, es la formulación del problema en Pascal y Huygens. Pienso que tal formulación es la más sencilla de las posibles, sin llegar a ser trivial (partir de un empate).

Espere un tiempo prudencial y observará la cantidad de preguntas que surgen de los alumnos sobre aclaraciones del juego. En primer lugar, en ningún sitio se ha dicho que el juego sea al azar. Como queremos que tal situación sirva de punto de partida, podemos aclarar este término. Por ejemplo, los jugadores utilizan un artefacto aleatorio en cada lance del juego. Además garantizamos la equidad en los lances. Estas son dos ideas importantes en la conceptualización del azar. Luego vendrán las soluciones.

El estudio de la génesis y evolución de los conceptos matemáticos nos proporciona una mejor y más profunda comprensión de los mismos. De igual forma, nos pueden servir para comprender las dificultades de aprendizaje que muestran los alumnos.

Por lo general, los alumnos presentan la de Pacioli, es decir, el reparto proporcional a los puntos ganados. De forma similar a Pacioli y Tartaglia, los alumnos se centran en lo ocurrido, en la certeza del juego. Este es un obstáculo difícil de superar. Sólo la argumentación y la toma de posición en el juego puede hacer que se acepte otra forma de solución. Para tal fin, se debe conseguir que los alumnos se pongan en la situación del jugador que lleva 1 punto, de esa forma aceptarán como conveniente el argumento de que eso no es lo acordado al principio y por lo tanto, no satisface al que va perdiendo. Hay que hacerles ver que si el juego continuara podrían ganar y que tal posibilidad no se tiene en cuenta con la solución de Pacioli. La solución dada por Tartaglia no suele proponerse por los alumnos. Es bastante sutil. Pero se puede dar como una forma de solución para discutir en clase. Después de estas discusiones se debe explicitar que ambas soluciones sólo tienen en cuenta lo que ha ocurrido y no lo que podría ocurrir. La certeza frente a lo incierto.

Ahora viene lo difícil. ¿Cómo seguir? Lo más probable es que nadie presente una solución como la de Pascal y menos como la de Huygens.

Cuente la historia del problema hasta ese momento. Es una buena oportunidad para que los alumnos se trasladen en el tiempo y vean la importancia matemática que tuvo el problema. Además les llamará la atención que, la solución dada por ellos, corresponda con un personaje de la antigüedad. Ahora es el momento de que aparezcan en clase Pascal y Fermat.

Es el momento de introducir dos herramientas visuales que permiten analizar la situación: el diagrama figurado y el diagrama de árbol.

Reparto de las monedas (diagrama figurado).

En el momento en que se tiene que interrumpir el juego, el primer jugador gana por 2:1. Luego se han efectuado tres lances del juego. Sea cual sea el resultado *del 4.° lance del juego (gana el primero, resultado parcial 3:1; gana el segundo, resultado parcial 2:2), el primer jugador tiene aseguradas 32 monedas (parte superior en la figura 1 izquierda).*

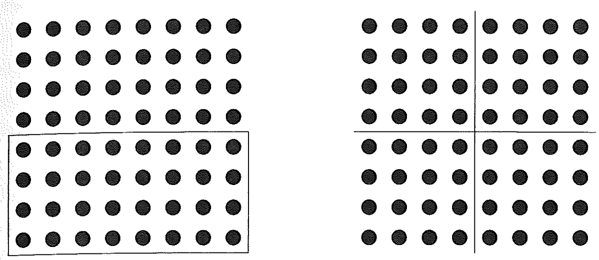


Figura 1

Quedan 32 monedas (recuadro), y estamos en la situación 2:2. Como el riesgo es el mismo (equiprobabilidad en los dos posibles resultados), las 32 monedas restantes deben dividirse por igual, quedando 48 monedas (tres cuadrantes) para el primer jugador.

El reparto se hace de acuerdo con la proporción tres a uno, favorable al primer jugador.

La exposición no basta y debe darse la oportunidad a cada alumno que haga el reparto de forma individual. Propóngase el problema de nuevo, pero ahora para acabar en 4 puntos y los contendientes están en la situación 3:1 (Proposición V del libro de Huygens).

Una vez ejercitados, en esta primera herramienta, introducimos el diagrama de árbol (figura 2).

El diagrama de árbol tiene dos funciones...

Sean A y B el primer y segundo jugador, respectivamente. Si el juego pudiera continuar, cabrían tres posibles formas de terminarlo que no son equiprobables. El valor de 3:1 es el doble de cualquiera de las otras dos alternativas.

Una respuesta muy común, entre el alumnado, es asignar a cada resultado del diagrama de árbol (izquierda) la probabilidad 1/3. No siendo los resultados equiprobables. Para poder contemplar la equiprobabilidad en el diagrama, hay que completarlo mediante dos alternativas que nunca ocurrirían, incluso si el juego pudiera haber continuado. Ahora sí es fácil observar la proporción *tres a uno* favorable al primer jugador (A). Éste es, en esencia, el método de *combinaciones* propuesto por Fermat.

Propóngase a los alumnos que resuelvan, utilizando el diagrama de árbol, la misma situación anterior (juego a 4 puntos y están 3:1).

El diagrama de árbol tiene dos funciones: la primera es facilitar el recuento sistemático de todas las posibilidades (hechos o sucesos) del juego, en segundo lugar hacer operativo el cálculo de la probabilidad de cada evento.

Uno de los errores que suele cometer el alumnado, al utilizar el diagrama de árbol, es sumar las probabilidades que se sitúan en ramas consecutivas.

Si combinamos las dos representaciones (monedas y diagrama de árbol) podemos introducir el cálculo de las probabilidades de cada evento y de este modo intentar que no se produzca tal error.

A tal fin se debe mantener las dos representaciones a la vista y señalar qué partes de cada representación corresponden entre sí. Se debe comenzar por el diagrama de las monedas y aclarar que el reparto se hará al mismo tiempo que se enumeran las alternativas del juego mediante el diagrama de árbol.

Así, a la alternativa gana *A*, resultado 3:1, corresponde la mitad de la apuesta total (señalada en el diagrama de monedas). A la alternativa gana *B*, resultado 2:2, corresponde la parte no recuadrada del diagrama de monedas.

Ahora, el diagrama de árbol continúa a partir de este último resultado, y tendríamos que gana *A* (3:2), mitad de lo restante (cuarta parte del total) o gana *B* (2:3), la otra mitad (cuarto restante). (Ver figura 3 de la página siguiente).

Una vez que se han identificado las partes correspondientes en los dos diagramas, queda por introducir la ley multiplicativa de las probabilidades parciales.

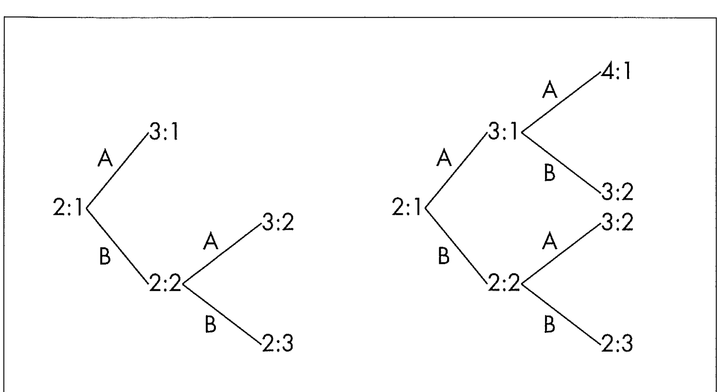


Figura 2

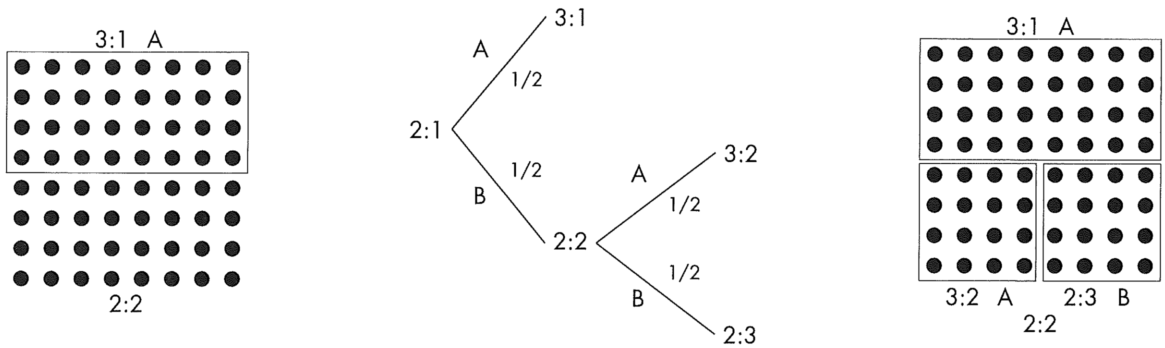


Figura 3

Se mostrará que el resultado

$$\frac{1}{2}\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

corresponde con la probabilidad de la alternativa *BA*, por ejemplo, dado que su valor es equivalente a la parte correspondiente del diagrama de monedas (3:2 *A*). De igual forma, se debe señalar la otra alternativa *BB* que corresponde con la parte del diagrama de monedas (2:3 *B*). Es conveniente hacer notar al alumnado que no se deben sumar las probabilidades, pues

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

y tal valor otorgaría el total de la apuesta, lo que no tiene sentido. Pienso que ésta es una forma natural de introducir la ley de multiplicación de probabilidades parciales para obtener la probabilidad total a través de un itinerario posible del juego. Este ejercicio debe repetirse por el alumnado varias veces, con distintas situaciones de partida (4:1, 5:2, etc.), hasta que se adquiera destreza y comprensión en los elementos mostrados. Con estas herramientas y la situación en que se utiliza se hace especial hincapié en el significado de una fracción como valor de una probabilidad.

Veamos ahora un caso en que las herramientas vistas no sirven. Retomemos el problema segundo propuesto por Huygens al final de su obra.

> Tres jugadores *A*, *B* y *C* toman 12 bolas de los que 4 son blancas y 8 negras. Juegan con la condición de que el primero que, con los ojos cerrados, saque una bola blanco gana y la primera elección es para *A*, la segunda para *B*, la tercera para *C* y siguiendo de nuevo *A* alternativamente. Búsquese la razón futura de las suertes.

La interpretación de Huygens conlleva un proceso estocástico infinito, que puede ser visualizado mediante un grafo (el diagrama de árbol no es una herramienta apropiada para representar la situación). El grafo se compone de estadios. El estadio inicial (*S*) es el punto de partida, los estadios *A*, *B* y *C* son los finales correspondientes a cada jugador y, por último los estadios de transición (*i*1, *i*2).

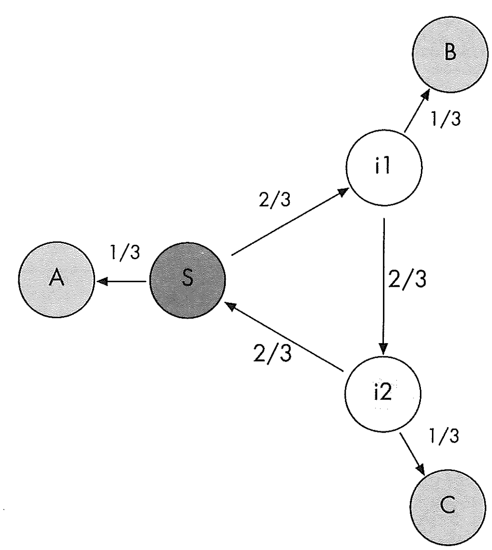


Figura 4. Grafo interpretación de Huygens

Hay varios procedimientos para evaluar las probabilidades. Fijándonos en el grafo, observamos que se puede alcanzar *A*, desde *S*, directamente (probabilidad 1/3) o recorriendo el bucle interno hasta *S* y de ahí directamente a *A*. Y es esta segunda opción la que produce el espacio infinito de sucesos. Pues el recorrido podemos hacerlo una vez (probabilidad (2/3)(2/3)(2/3)(1/3)), dos veces, tres veces, etc. Tenemos, por tanto, que la probabilidad de alcanzar *A* desde *S* es igual a la suma de una serie infinita, que afortunadamente es geométrica de razón menor que la unidad.

$$p(A) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^6 + \cdots + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{3n} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{9}{19}$$

De igual forma, se tiene para alcanzar *B* desde *S*:

$$p(B) = \frac{2}{3}\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^7 + \cdots + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{3n+1} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\frac{2}{3}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{6}{19}$$

Y para alcanzar *C* desde *S*:

$$p(C) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^5 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^8 + \cdots + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{3n+2} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{4}{19}$$

Luego los jugadores tienen riesgos o suertes como 9:6:4 para *A*, *B* y *C*, respectivamente.

Veamos otro procedimiento basado en ecuaciones lineales. En el grafo denominemos *P*(*X*) a la probabilidad de alcanzar el estadio final *A* desde el estadio *X*. Luego *P*(*A*) = 1, *P*(*B*) = *P*(*C*) = 0. Tenemos las siguientes ecuaciones:

La evolución del problema es una lección importante...

$$p(S) = \frac{1}{3}P(A) + \frac{2}{3}P(i1)$$

$$p(i1) = \frac{1}{3}P(B) + \frac{2}{3}P(i2)$$

$$p(i2) = \frac{1}{3}P(C) + \frac{2}{3}P(S)$$

equivalente al sistema

$$p(S) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}P(i1)$$

$$p(i1) = \frac{2}{3}P(i2)$$

$$p(i2) = \frac{2}{3}P(S)$$

Por último, tenemos que

$$p(S) = \frac{1}{3} + \frac{8}{27}P(S) \quad \Rightarrow \quad P(S) = \frac{9}{19}$$

De forma similar, y planteando ahora el sistema para *B* y luego para *C*, se obtienen las correspondientes probabilidades.

Hemos visto tres herramientas para la resolución de problemas de probabilidad: el diagrama figurado (monedas), el diagrama de árbol y el grafo. El grafo es, como se ha visto, una herramienta importante en el caso en que el espacio de sucesos sea infinito (numerable). El grafo además permite observar esta particularidad de forma evidente por medio del bucle. Pienso que tal herramienta y métodos de solución asociados como son las series geométricas infinitas y los sistemas de ecuaciones lineales están al alcance de los alumnos de bachillerato. Es más, podríamos introducir matrices, pero creo que sería forzar la situación.

Por encima de tales herramientas visuales y los algoritmos de cálculos involucrados, está otro aspecto de la historia, que merece ser resaltado y al que se debe dedicar un tiempo de discusión y reflexión. La evolución del problema es una lección importante, pues los distintos enfoques que recibió a lo largo de casi dos siglos, muestran el cambio del interés desde lo que es cierto, los hechos ocurridos, hacia lo incierto, lo que está por venir. Tal enfoque permitió la conceptualización del azar, de lo que es imprevisible. Pacioli y Tartaglia consideraron el problema como un reparto aritmético directamente proporcional. Cardano utiliza una expresión inversamente proporcional a los puntos que le quedan, a cada contendiente, para alcanzar el número de puntos acordados. Todos estos métodos se apoyan en un conocimiento matemático ya muy desarrollado y utilizado ampliamente en su época: la aritmética básica. Pascal hace algo similar y, es Fermat el que introduce las combinaciones para resolver el problema. Huygens define un nuevo concepto, *expectatio*, que va a permitir el desarrollo posterior del cálculo de probabilidades y de la estadística, permitiendo a ambas ramas cierta autonomía dentro de las matemáticas. Sin embargo, recordemos que para definir tal concepto, Huygens utiliza un concepto ya consolidado como es el de media aritmética o media ponderada. Además, en su solución a la cuarta proposición del *Ratiociniis*, utiliza un planteamiento puramente algebraico, pues primero plantea una ecuación que permite calcular su *expectatio* y después muestra, comprueba, que es válida para los datos del problema. Todos se apoyaron en un conocimiento básico y previamente consolidado como es la aritmética en unos casos y, la aritmética y el álgebra en otro. A partir de tales conocimientos, y mediante un sencillo problema, sentaron las bases para la conceptualización de la probabilidad y comenzar la domesticación del fenómeno del azar. Considero que ésta es una lección didáctica importante que arroja la historia del problema y que puede ser útil para nosotros los profesores.

Utilizar la resolución de problemas como vía para la construcción del conocimiento no ha sido muy explotada en el tema de probabilidad, el problema del reparto de la apuesta puede ser una buena introducción. Los conceptos de *espacio muestral* (circuito en Cardano), *combinaciones* (en Fermat y Pascal), *suceso con mayor probabilidad* (mayor expectativa de ocurrencia), *juego equitativo* y *esperanza matemática* constituyen elementos importantes en la conceptualización del azar. Tales elementos, como hemos visto en el desarrollo histórico, no son fáciles, requieren de discusión y clarificación. Los diferentes intentos de resolución del problema del reparto de la apuesta, sirvieron para tal fin.

La presentación y discusión de las diferentes soluciones, que marcan el cambio de enfoque, es una tarea que puede ser desarrollada en el aula con alumnos de secundaria obligatoria. El problema suministra el material para la acción. La discusión y reflexión serán el medio mediante el cual cristalicen las ideas. La riqueza de ideas que muestra la historia del problema es un buen alimento para los espíritus inquietos y curiosos. Es en ese espíritu donde se gesta el joven científico. Lo que yo he disfrutado, estudiando y comprendiendo la génesis y evolución del problema, lo he compartido con mis alumnos y, espero, que también a usted paciente lector le haya sido grato. Vale.

La riqueza de ideas que muestra la historia del problema es un buen alimento para los espíritus inquietos y curiosos. Es en ese espíritu donde se gesta el joven científico.

Juan Antonio García Cruz
IES Domingo Pérez Minik.
La Laguna
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»

Nota

La reconstrucción del problema de la apuesta ha sido posible gracias a los trabajos utilizados como referencias, a falta de las fuentes originales. Sin embargo he de hacer notar que he encontrado disparidad en las obras consultadas. Al final opté por una reconstrucción que correspondiera a la solución que Maistrov da del problema por Pacioli. Gracias a mis amigos Manolo Salas, especialista en Latín medieval, y a Martin Kindt, que me proporcionó el original del trabajo de Huygens, he podido realizar este artículo.

Referencias

HACKING, I. (1995): *El surgimiento de la probabilidad*, Gedisa, Barcelona. (Traducción de José A. Alvarez de la obra: *The emergence of probability*, Cambridge University Press, 1975).

HUGENIUS, C. (1657): «De ratiociniis in ludo aleae», en F. Schooten: *Exercitationvm Mathematicorum. Libri quinque*, 517-534.

LAPLACE, P. S de (1985): *Ensayo filosófico sobre las probabilidades*, Traducción de Pilar Castrillo, El libro de bolsillo, Alianza Editorial, Madrid.

MAISTROV, L.E. (1974): *Probability Theory. A Historical Sketch*, Academic Press, New York.

TODHUNTER, I. (1949): *A history of the Mathematical Theory of Probability. From the time of Pascal to that of Laplace*, Chelsea Publishing Company, New York.

SMITH, D.E. (1959). *A source book in mathematics*, Dover Publication Inc, New York.

SUMA 33
febrero 2000, pp. 37-44

La combinación de las observaciones: una aplicación práctica de los sistemas de ecuaciones lineales incompatibles

María Álvaro Calvache
Cristina Fernández Álvaro
Carmen Pérez Morilla

Las situaciones del mundo real que llevan al estudio de sistemas de ecuaciones lineales incompatibles no pueden ser resueltas, y frecuentemente se hace el frío comentario matemático de que no existe solución para los mismos. Ya que responden a problemas reales necesariamente tiene «algún tipo» de solución. Exponemos en el presente artículo cómo los astrónomos soslayaron el problema basándose en los sistemas de ecuaciones compatibles o bien en enfocar el problema en otra dirección, creando métodos que minimizarán los «errores» cometidos al resolver dichas ecuaciones. Ilustramos dichos enfoques a través de los hombres que desarrollaron las diferentes aproximaciones así como de los problemas originales que dieron lugar a dichos desarrollos.

CUANDO DESARROLLAMOS la enseñanza de un tema matemático, nos debemos cuestionar si estamos enseñando dicho tema como un fin en sí mismo o si estamos ayudando a que puedan resolverse verdaderos problemas del mundo real en el que están sumergidos. Probablemente si conectamos nuestro tema matemático con el mundo real, tanto en relación con el pasado que le dio vida, como con las futuras aplicaciones, haremos que el interés del alumno por el tema en cuestión crezca de modo sustancial. Ello es semejante a lo que ocurre si le hacemos aprender un idioma sólo para que vea lo bello que es y las obras que ha producido, o si hacemos que se exprese en dicho idioma en un contexto real; esta segunda vía sería más fructífera para su aprendizaje.

Esta situación es común a todo el sistema de enseñanza, ya que el profesor puede encontrarse más seguro dentro del reino que su teoría define, que cuando se aproxima al impacto de su enseñanza en el mundo real, donde pueden aparecer parcelas de inseguridad. Podemos poner uno de los ejemplos que más nos han llamado la atención, y que nos indican que nuestros contenidos, frecuentemente, adolecen de una conexión con el mundo real.

Uno de los problemas más importantes en la historia de la humanidad, que ha tardado mucho en ser resuelto, y que le ha ocasionado grandes quebraderos de cabeza a lo largo de su intento de resolución, ha sido el conocido como «problema de la longitud». La determinación de un punto sobre la superficie de la Tierra mediante un sistema de coordenadas, longitud y latitud, fue un problema resuelto por los griegos, al menos teóricamente. Pero, debido a los instrumentos que el hombre ha ido disponiendo a lo largo de los años, no fue hasta bien entrado el siglo XVIII cuando fue realmente resuelto para fines prácticos.

ARTÍCULOS

¿Qué importancia tenía para la humanidad este problema? Cuando el hombre viajaba por tierra tenía muchos puntos de referencia que evitaban el que se perdiera, pero cuando comenzó a navegar en mar abierto, sólo las estrellas y la brújula podían orientarlo, pero determinar el punto exacto dónde se encontraba fue un difícil problema, que tras varios días de navegación lo llevaban a un lugar desconocido. La determinación de la latitud era sencillo, pues bastaba con conocer la altura de la estrella Polar en el punto en cuestión, pero la longitud dependía de un reloj preciso. Ello tendría que ser construido por el hombre, cosa que ocurrió a mitad del siglo XVIII por J. Harrison, un carpintero inglés, o bien interpretar los múltiples relojes siderales que hay en nuestro cielo y crear, basándose en ellos, los célebres Almanaques Náuticos para la navegación, cosa que ocurrió en la misma época citada, por parte de los astrónomos.

Para darnos cuenta de la importancia y necesidad de resolución de este problema, citemos que en 1642 Abel Tasman zarpó de la isla Mauricio con dos naves cargadas de víveres para buscar el gran continente del Sur. La flota atraviesa el Océano Índico y ¡bordea Australia sin verla!, aunque encuentra una tierra en los mares del Sur que hoy día se denomina Tasmania. Existen otros muchos ejemplos de catástrofes ocurridas a grandes flotas debido a la imprecisión de su localización.

No es extraño, por tanto, los numerosos premios ofrecidos por los gobiernos dominantes de la época (España, Francia, Inglaterra...) a quien resolviese el problema de la longitud, lo que nos pone de manifiesto el impacto que éste tuvo a lo largo de los años. Intervinieron e intentaron resolver el problema todos los grandes científicos que lo conocieron, Galileo, Newton, Laplace, Euler... pero eso nos llevaría a otra historia.

Para un conocimiento del problema recomendamos se lea el libro de la divulgadora científica Dova Sobel, titulado *Longitud* donde se expone de una forma coherente la problemática relacionada con la cuestión citada. Una visión más novelesca de este problema puede verse en el libro de Umberto Eco titulado *La isla del día antes*.

La búsqueda de la resolución del problema de la longitud llevó a los astrónomos a precisar sus constantes astronómicas a través de las observaciones de los astros, realizadas durante siglos. Y para ello tuvieron que resolver sistemas de ecuaciones lineales, pero ¡donde el número de ecuaciones era muy superior al de incógnitas!

Hoy día en la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales, cuando hay incompatibilidad por exceso del número de ecuaciones, les decimos a los alumnos que el sistema no tiene solución. Pero esta respuesta, que matemáticamente es correcta, deja abierta una puerta no bien explicada en nuestra enseñanza, y que es necesaria su estudio desde el punto de vista real, pues si le decimos a los astrónomos que ese problema no tiene solución, ellos dirían que no es una buena respuesta, pues sus constantes astronómicas son reales. Lógicamente, como veremos, los astrónomos más cerca de la realidad que los matemáticos, nos muestran una solución al conocer el problema real que desean resolver, y tratan de dar respuesta lo mejor que pueden.

El objetivo de este trabajo es plantearnos este tipo de situaciones, que son mucho más frecuentes en el mundo real que aquellas que estudiamos de solución única del sistema, ver cómo se ha ido resolviendo a lo largo de los años, y mostrar cómo hoy día es un problema corriente en todos los campos científicos, aunque los matemáticos en nuestra enseñanza casi lo ocultamos, quizás porque su historia es excitante y ello puede hacer que nuestros alumnos se diviertan estudiando matemáticas.

El objetivo de este trabajo es plantearnos este tipo de situaciones, que son mucho más frecuentes en el mundo real que aquellas que estudiamos de solución única del sistema, ver cómo se ha ido resolviendo a lo largo de los años, y mostrar cómo hoy día es un problema corriente en todos los campos científicos, aunque los matemáticos en nuestra enseñanza casi lo ocultamos, quizás porque su historia es excitante y ello puede hacer que nuestros alumnos se diviertan estudiando matemáticas.

Planteamiento del problema

Cuando se estudia un sistema físico, biológico..., se suele desear explicar el comportamiento de una variable, posición de la Luna en el cielo, ritmo cardíaco..., en función de otras variables fuertemente relacionadas con ella, hora del día..., peso del animal..., lo que se escribe formalmente como:

$$y = f(x^1, \ldots, x^k)$$

lo que nos indica que la variable y es explicada por la función f a través de las valores que toman las variables conocidas x^i.

La búsqueda de la función f es una constante en la ciencia, así sabemos la función que da la fuerza de atracción entre dos masas del universo a través de la famosa fórmula dada por Newton, y conocida como ley de la gravitación universal.

A veces, para determinar la función f se obtienen numerosas observaciones de las variables x^i e y, y de ello se infiere dicha ley o función, siendo frecuente suponer el tipo de función y determinar, a través de los datos, algunas constantes que la determinan. Por comodidad de escritura y, sobre todo, de representación, supondremos que sólo existe una variable x.

Partimos, pues, de un conjunto de n observaciones (x_i, y_i) $i = 1, \ldots, n$, cuya representación nos sugiere un cierto modelo o función que nos explique el fenómeno estudiado, es decir la relación entre la variable y y la variable x.

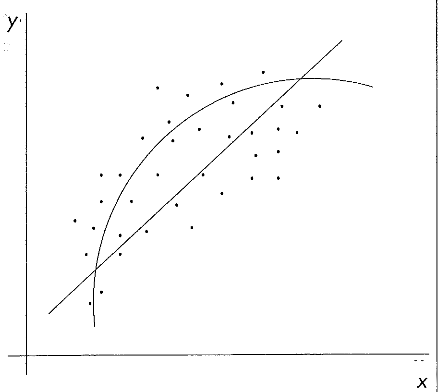


Figura 1

Si suponemos que esta relación es lineal, podemos escribir que:

$$y = b_0 + b_1 x + \varepsilon$$

donde b_0 y b_1 son las constantes (o parámetros) que debemos determinar, partiendo de las observaciones, para tener la función, o ley, que sigue nuestro sistema. La variable ε representa la desviación entre el valor observado (y_i), y el que nos daría el modelo que hemos supuesto $(\tilde{y}_i = b_0 + b_1 x_i)$, es decir:

$$\varepsilon_i = y_i - \tilde{y}_i = y_i - b_0 - b_1 x_i$$

Para determinar b_0 y b_1, debería poder encontrarse valores de modo que $\varepsilon_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Es decir, deberíamos poder resolver el sistema de n ecuaciones con dos incógnitas:

$$y_i = b_0 + b_1 x_i, \; i = 1, \ldots, n.$$

Pero como el sistema no suele tener solución, al ser el sistema incompatible muy frecuentemente, debemos de pensar en el problema en relación con el fenómeno real.

...los astrónomos dieron diferentes soluciones al problema, unas brillantes, otras bastante chapuceras, pero es la grandeza de la resolución de los grandes problemas.

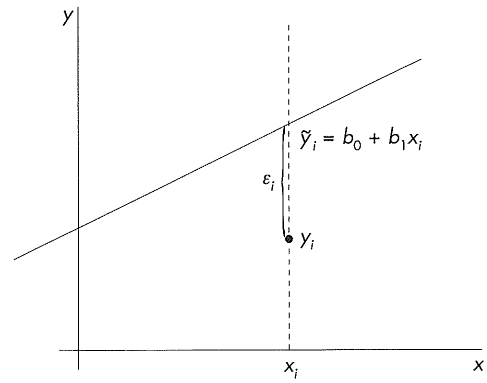


Figura 2

Los astrónomos buscaron los parámetros b_0 y b_1, tratando de obtener los menores errores en el conjunto ε_i, $i = 1, \ldots, n$. Hoy día este planteamiento nos conduce a un problema de optimización multiobjetivo, al desear minimizar simultáneamente las «funciones», ε_i, $i = 1, \ldots, n$, pero esto no puede ser desarrollado en este trabajo; el lector interesado puede verlo en Carrizosa y otros (1996).

Como veremos a continuación, los astrónomos dieron diferentes soluciones al problema, unas brillantes, otras bastante chapuceras, pero es la grandeza de la resolución de los grandes problemas. Cuando dieron criterios, o principios implícitos, sobre este conjunto de errores se obtuvieron claras soluciones al problema, dando lugar a los criterios que hoy día seguimos empleando, y que denominamos de esta forma:

- *Regresión de mínimo valor absoluto medio.* Boscovich, 1757.

$$\min_{b_0, b_1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i|$$

- *Regresión que minimiza la máxima desviación absoluta.* Laplace, 1786.

$$\min_{b_0, b_1} \left(\max_i |\varepsilon_i| \right)$$

- *Regresión mínimo cuadrática.* Legendre 1805.

$$\min_{b_0, b_1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$$

Veamos este desarrollo en su contexto real.

Breve historia de la resolución del problema: sus autores y los problemas reales que deseaban resolver

Desde un principio observan que si hay un sistema de m ecuaciones con n incógnitas ($m > n$), podían resolver todos los sistemas de n ecuaciones con n incógnitas que se podrían formar, esto es

$$\binom{m}{n}$$

Entre ellos, buscan los que dieran residuales o desviaciones más «homogéneas». Pero comprendieron la dificultad, que hoy llamaríamos complejidad computacional, e intentaron evitar el problema abordando heurísticamente la situación.

Relatamos en esta historia sólo tres de los métodos de resolución y que dieron lugar a métodos que fueron empleados durante años en la resolución de problemas reales.

Mayer y el método de los promedios

La media aritmética era empleada como solución natural de los problemas astronómicos en aquellas situaciones en las que existían «varias soluciones», al promediar entre ellas. El astrónomo alemán Tobias Mayer (1723-1762) tuvo la genialidad de agrupar las ecuaciones, y tomar como representante de estos grupos la suma de las mismas, produciendo los grupos de modo que sus representaciones fueran lo más diferentes posibles, y al escoger un número de grupos igual al de parámetros a determinar, tenía un sistema compatible, cuya resolución se conoce como método de las sumas. Si dividimos por el número de ecuaciones en cada grupo tendremos el método de los promedios.

El astrónomo alemán Tobias Mayer (1723-1762) tuvo la genialidad de agrupar las ecuaciones, y tomar como representante de estos grupos la suma de las mismas...

Mayer estudiaba el comportamiento lunar, para realizar unas tablas lunares que permitiesen a los navegantes la posibilidad de determinar la longitud en el mar al observar este astro. En la determinación de la posición lunar el fenómeno de la libración de la Luna distorsiona la determinación de los parámetros lunares, pues ello indica que no es cierto que la Luna presente la misma figura visible, el movimiento de libración permite observar un 60% de su superficie. Mayer estudia el fenómeno a través de los cambios de posición del cráter Manilius visto desde la Tierra.

Mayer estudiaba el comportamiento lunar, para realizar unas tablas lunares que permitiesen a los navegantes la posibilidad de determinar la longitud en el mar al observar este astro.

Él llevó el problema a un sistema de ecuaciones, 27 observaciones, con tres incógnitas. Para resolverlo, inicialmente selecciona tres ecuaciones, pero ve cómo los residuales dependían fuertemente de las ecuaciones escogidas, por lo que propone dividir las ecuaciones en tres grupos de nueve ecuaciones cada uno, y suma las ecuaciones en cada grupo, buscando los grupos de modo que hubiese máximas diferencias entre las ecuaciones resultantes, resolviendo el sistema obtenido para hallar las constantes que buscaba.

Como astrónomo Mayer sabía que este método va a disminuir el error más que si toma las ecuaciones individualmente, aunque los cálculos del error cometido no los hizo con gran precisión. No obstante, el método será empleado durante bastantes décadas por los astrónomos.

Hoy día sabemos que la incertidumbre de una media es $1/n$ la de una observación. Además, los métodos de muestreo estratificado van a basarse, posteriormente, en la idea de agrupar las observaciones por grupos que sean lo más diferentes entre sí.

No es extraño que la precisión que Tobias Mayer pudo dar a las tablas lunares fuese tal que obtuvo un premio de la Comisión inglesa para la determinación de la longitud en el mar (aunque fue cobrado por su viuda en 1765). Tampoco nos debe de extrañar la felicitación recibida de Euler.

Euler dio un tratamiento diferente al problema de las ecuaciones. Él se enfrentó al problema cuando estudiaba las anomalías de los movimiento de Júpiter y Saturno. Euler presentó un magnífico tratado teórico *Recherches sur la question des irrégularitiés du mouvement de Saturn et de Jupiter, sujet proposé pour le prix de l´année 1748, par l´Academie Royale des Sciences de Paris*, explicando el fenómeno y obteniendo el citado premio.

Aunque, cuando desea comprobar la teoría con la observación, obtiene un problema de siete parámetros y 75 observaciones, a cuyo sistema no supo dar una solución razonable como dio Mayer, al no pasar la barrera del problema conceptual al problema real, tal como Mayer hizo en 1750.

Boscovich y el método de mínima desviación absoluta

Fue Boscovich el primero que da un método basado en una función de valoración de los residuos de un modo explícito, aunque los presentó de un modo geométrico, por lo que parece un método no sistemático, pero coincide totalmente con el razonamiento analítico que haremos aquí y que corresponde con el que se da hoy día en nuestros textos.

Roger Joseph Boscovich (1711-1787) fue un sacerdote jesuita que en 1740 llegó a ser profesor de matemáticas en el Collegium Romanum, y por ello fue consultado por el Papa en trabajos geodésicos.

Un problema de aquella época era el confirmar las hipótesis de Newton de que la Tierra, debido a ser un fluido homogéneo en rotación, era un esferoide con radio ecuatorial que excedía al radio del polo en 1/230. Para chequear la teoría, Francia hizo observaciones en Laponia y en el Perú para medir un grado terrestre sobre un arco de meridiano y confirmar las hipótesis de Newton, o bien las de los astrónomos franceses que habían creído medir que la Tierra tenía forma de limón, no de naranja newtoniana, en el que el radio del ecuador era menor que el radio polar.

El Papa Benedicto XIV formó una comisión para medir un arco del meridiano y construir un nuevo mapa de los estados papales, al frente de lo cual puso a Boscovich y al rector del Colegio de Jesuitas ingleses en Roma, Christopher Maire.

Boscovich se encontró con un problema con menor número de incógnitas (sólo dos) del que los astrónomos habían estado trabajando. Era conocido que la relación entre la longitud de un arco y su latitud, en arcos pequeños, es dado por $y = b_0 + b_1 \mathrm{sen}^2 L$, donde y representa la longitud de un grado del arco del meridiano y L la latitud del punto medio de dicho arco.

La excentricidad buscada es $b_1/3b_0$ por lo que tiene que determinar los parámetros (b_0, b_1)en un problema que hoy llamamos de regresión lineal al escribir:

$$y = b_0 + b_1 x$$

con $x = \mathrm{sen}^2 L$, pues los parámetros se comportan linealmente, usando las observaciones efectuadas sobre diferentes puntos de la Tierra por diferentes expediciones.

Boscovich tuvo el acierto de introducir un criterio para escoger los parámetros. Hizo una formulación verbal del mismo:

> Dado un cierto número de observaciones, encontrar los parámetros que consigan:
>
> 1. La suma de las desviaciones positivas deberá ser igual a la suma de las negativas.
> 2. La suma de todas las desviaciones, independientemente del signo, debe ser mínima.

Escrito con nuestra notación, estos principios se expresa como:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \left| y_i - b_0 - b_1 x_i \right|$$

sujeto por

$$\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - b_0 - b_1 x_i \right) = 0$$

La resolución al problema que parte de Boscovich es propia de un genio, da un método geométrico de resolución que coincide con lo que nosotros hoy deducimos analíticamente. Veamos cómo procedemos en la actualidad para la resolución del problema.

Desarrollando la condición tenemos que $\bar{y} - b_0 - b_1 \bar{x} = 0$, por lo que b_0 ($b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$) será conocida al serlo b_1, y al sustituir en la función objetivo tenemos un problema con una incógnita b_1,que llamamos b por comodidad.

Debemos determinar b tal que produzca

$$\min \sum \left| y_i - \bar{y} - b(x_i - \bar{x}) \right|$$

O bien $min[f(b)]$, donde

$$f(b) = \sum_{i=1}^{n} f_i(b) = \sum \left| \tilde{y}_i - b\tilde{x}_i \right|$$

al definir $\tilde{x}_1 = x_1 - \bar{x}$ e $\tilde{y}_1 = y_1 - \bar{y}$.

Esta función $f(b)$ no es derivable para todo valor de b, por lo que el cálculo del mínimo no es trivial, como veremos en el caso del criterio del error cuadrático medio.

Sin embargo, $f(b)$ es una función convexa, lineal a trazos.

Su demostración es sencilla ya que $f_1(b)$ es la función valor absoluto, por lo que es convexa y lineal en dos trazos, teniendo el mínimo en $b = y_1/x_1$ (ver figura 3).

Ahora dado que la suma de funciones convexa es convexa resulta que $f(b)$ tiene las propiedades que enunciábamos (ver figura 4).

Por ello los mínimos locales de esta función serán mínimos globales.

Para buscar dichos mínimos veamos que la función $f(b)$ tiene la siguientes propiedades:

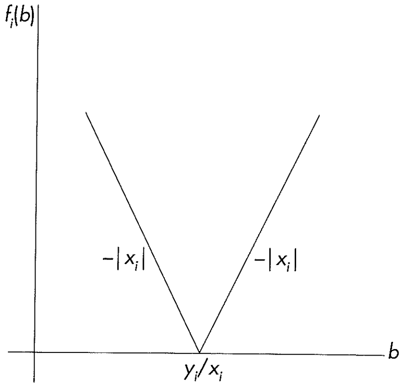


Figura 3

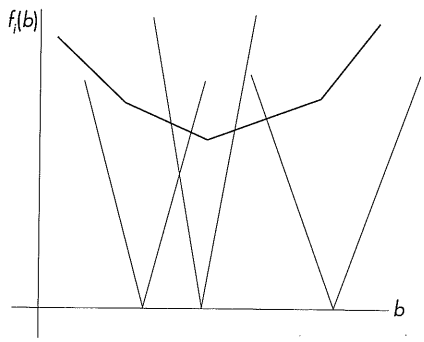


Figura 4

1. La pendiente del extremo lineal izquierdo es

$$-\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

y similarmente la del derecho es

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

2. Los puntos donde cambia la pendiente de la función vienen dados por los valores y_i/x_i, $i = 1, ..., n$.

Si ordenamos los puntos $i_1, i_2, \ldots, i_n$, tal que $y_{i_1}/x_{i_1} \leq \ldots \leq y_{i_n}/x_{i_n}$, la pendiente de $f(b)$ se incrementa en cada punto $b_{(k)}$ en $2|x_k|$, siendo $b_{(k)} = y_{i_k}/x_{i_k}$.

La demostración, también es fácil:

1. Notemos que para $b \leq b_{(i)}$ todas las $f_i(b)$ tienen pendiente $-|x_i|$ por lo que $f(b)$ tiene pendiente

$$-\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

y para $b \geq b_{(n)}$ tiene la pendiente

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

por idéntica razón.

2. Para $b_{(1)} \leq b \leq b_{(2)}$ la pendiente de $f(b)$ es constante, pero ahora $f_{i_1}(b)$ tiene pendiente $|x_{i_1}|$ pues ha cambiado en $b_{(1)}$, y las restantes $f_i(b)$ continúan con pendiente $-|x_i|$, por lo que $f(b)$ tiene en este intervalo pendiente

$$-\sum_{i=1}^{n}|x_i| + 2|x_{i_1}|$$

Y así se sigue razonando en los restantes intervalos.

Como consecuencia de las propiedades anteriores, la pendiente de $f(b)$ va aumentando desde

$$-\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

hasta

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

por lo que pasa de negativa a positiva, y en dicho momento alcanza el mínimo la función, es decir:

El min$f(b)$ se alcanza en $b = b_{(r)}$, tal que

$$-\sum_{i=1}^{n}|x_i| + 2\sum_{i=1}^{r-1}|x_i|$$

es negativa y

$$-\sum_{i=1}^{n}|x_i| + 2\sum_{i=1}^{r}|x_i|$$

es no negativa.

Si

$$-\sum_{i=1}^{n}|x_i| + 2\sum_{i=1}^{r}|x_i| = 0$$

entonces $b \in [b_{(r)}, b_{(r+1)}]$, sería un intervalo de valor óptimo.

Lo que puede escribirse como que el índice r debe verificar la relación

$$\sum_{i=1}^{r-1}|x_i| \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|x_i| \leq -\sum_{i=1}^{r}|x_i|$$

lo que nos dice que la mediana de las observaciones x_i, ordenadas por los cocientes y_i/x_i, nos da la solución óptima, por lo que al $b_{(r)}$ correspondiente se le llama *mediana* de las b_i, y el método se conoce a veces como *método de la mediana*.

...el método se conoce a veces como método de la mediana.

Este es el método de Boskovich pero que él propueso de un modo geométrico, como era usual en aquellas fechas.

Posteriormente Laplace empleó en su obra de 1786 *Mémorie sur la figure de la terre*, el método de minimizar el mayor valor absoluto de los residuales:

$$\min\left(\max_i \left|y_i - \bar{y} - b\left(x_i - \bar{x}\right)\right|\right)$$

Siendo en este caso

$$g(b) = \max_i \left|\tilde{y}_i - b\tilde{x}_i\right|$$

también una función convexa, lineal a trozos, por lo que el proceso para la obtención del mínimo de dicha función es similar al del problema anterior. No obstante, en este caso es un poco más compleja la determinación de los puntos donde la función cambia de pendiente.

Veremos como ambos métodos pueden resolverse a través de la programación lineal en un próximo artículo sobre las aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales indeterminados.

Desde el principio estos métodos de ajuste también fueron empleados para interpolar valores en las tablas de mortalidad, así Lambert en 1772 combina métodos gráficos y analíticos para ajustar tablas de vida a partir de las tablas de mortalidad de Londres del periodo 1728-1757.

Legendre y el método de los mínimos cuadrados

Legendre fue el primero en publicar el más famoso de los métodos, el método de los mínimos cuadrados, aunque no fue dado a conocer en una publicación aislada, lo que nos indica que estos procedimientos sólo suponían una herramienta para los astrónomos, no como los presentan los matemáticos con un fin en sí. El método en cuestión aparece en su obra de 1805 titulada *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*, a la que añade un apéndice titulado *Sur la méthode des moindres quarrés*, y en el que se describe el método tal como hoy se hace en nuestros textos, aunque con una notación diferente. Dicho método es muy fácil de usar, por lo que es posible que con anterioridad algún astrónomo lo hubiera empleado en sus cálculos, en especial el mismo C. F. Gauss como reclamó a la comunidad científica, pero en honor a la verdad nunca se tuvo un conocimiento explícito del mismo hasta la publicación de Legendre, y a partir de dicha fecha se empleó con gran profusión en todos los ámbitos científicos.

Legendre fue el primero en publicar el más famoso de los métodos, el método de los mínimos cuadrados, aunque no fue dado a conocer en una publicación aislada, lo que nos indica que estos procedimientos sólo suponían una herramienta para los astrónomos, no como los presentan los matemáticos con un fin en sí.

Adrien-Marie Legendre (1752-1833) fue un gran científico francés que trabajó en los numerosos campos que se estudiaban en su tiempo desde la mecánica celeste, como hemos indicado, hasta diferentes cuestiones matemáticas, así en 1794 publicó un tratado de geometría que fue ampliamente utilizado.

La exposición de Legendre sobre el principio de los mínimos cuadrados de los errores es muy ilustrativa de su pensamiento, y puede ser empleada en nuestras clases como introducción al mismo:

> De todos los principios que pueden proponerse para la distribución de los errores entre las ecuaciones, pienso que no hay ninguno más general, más exacto o más fácil de explicar, que el que uso en este trabajo; consiste en hacer *mínima* la suma de los cuadrados de los errores.

Con nuestra notación, y para el problema de dos incógnitas que estamos presentando, podemos desarrollar las ideas de Legendre

$$\min \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2$$

Como esta función

$$h(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2$$

es diferenciable para todos los valores de los parámetros, la búsqueda de los mismos lo hacemos a través de las condiciones de optimalidad, igualando a cero las derivadas parciales de la función respecto de los parámetros:

$$\frac{\partial h(b_0, b_1)}{\partial b_0} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 x_i) = 0$$

$$\frac{\partial h(b_0, b_1)}{\partial b_1} = \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - b_0 - b_1 x_i) = 0$$

Notemos que el principio de los mínimos cuadrados nos conduce a un sistema lineal en los parámetros siempre que el modelo de partida sea lineal, de ahí una de sus múltiples ventajas que el método posee.

La primera ecuación nos dice que:

$$b_0 + b_1\bar{x} = \bar{y}$$

condición que es equivalente a la primera propuesta por Boscovich, pero sin hacer hipótesis sobre ella.

La segunda ecuación puede escribirse:

$$b_0\sum_{i=1}^{n} x_i + b_1\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

De ambas ecuaciones podemos determinar que:

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\Big/ n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\Big/ n}$$

que es conocido como coeficiente de regresión lineal de y sobre x, pues representa la pendiente de la recta que se toma como modelo para explicar la variable y a través de la variable x.

Vemos la sencillez del método de los mínimos cuadrados, por lo que fue empleado con mayor frecuencia que los otros. No obstante, no es la única razón para su utilización.

A lo largo del resumen histórico que hemos realizado no hemos desarrollado una cuestión importante en la aplicación de los métodos, el problema de la determinación del error que se comete al emplear un método, en función de los errores que los datos tienen. Esta consideración nos llevaría a un tema importante como es la célebre controversia entre Laplace y Gauss, véase Stiegler (1996), que abre las bases matemáticas a la teoría moderna de los modelos lineales, pero que nos alejaría del tema central del trabajo, la consideración de los sistemas lineales incompatibles. Sólo añadiremos que hoy día la estadística matemática se ocupa del estudio de la distribución de los errores al emplear los parámetros que los métodos proporcionan.

Finalmente debemos de hablar sobre el futuro de dichos métodos. Cuando aparecen problemas reales donde existe un gran número de parámetros a determinar a partir de un enorme volumen de datos, poder determinar los parámetros no es un problema sólo del método a emplear, sino que depende también de los procedimientos de cálculo de que se dispongan. Por ello, en los últimos años al emplear los métodos de programación lineal para resolver el método de la mínima desviación absoluta, éste se ha convertido en un método mas robusto que su oponente, el método de los mínimos cuadrados, de todas formas la batalla entre Laplace y Gaus parece que continuará...

María Álvaro
IES Mateo Alemán.
San Juan de Aznalfarache (Sevilla)
Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»
Cristina Fernández
Carmen Pérez

Bibliografía

ARTHANARI T. S. y Y. DODGE (1981): *Mathematical programming in Statistics*, Wiley.

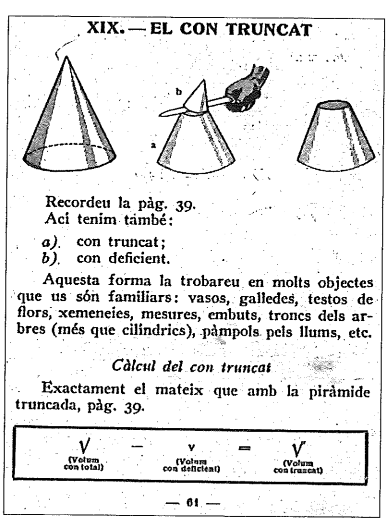
CARRIZOSA E., E. CONDE, F. FERNÁNDEZ, M. MUÑOZ, PUERTO J. (1995): «Pareto Optimality in Linear Regression», *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 190, 129-141.

HALL A. (1998): *A History of Mathematical Statistics*, Wiley.

ECO U. (1995): *La isla del día antes*, Lumen, Barcelona.

SOBEL D. (1997): *Longitud*. Destino.

STIEGLER S.(1996): *The History of Statistics*, Belknap Harvard Press.


XIX.—EL CON TRUNCAT

Recordeu la pàg. 39.
Ací tenim també:
a). con truncat;
b). con deficient.

Aquesta forma la trobareu en molts objectes que us són familiars: vasos, galledes, testos de flors, xemeneies, mesures, embuts, troncs dels arbres (més que cilíndrics), pàmpols pels llums, etc.

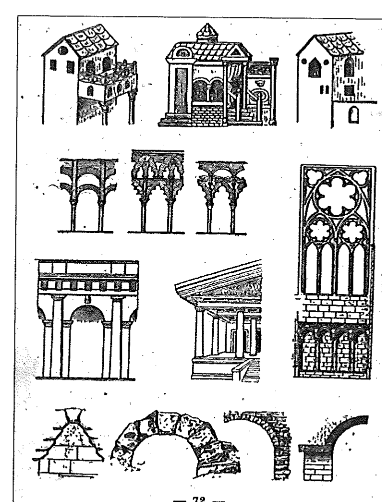
Càlcul del con truncat

Exactament el mateix que amb la piràmide truncada, pàg. 39.

V (Volum con total) − v (Volum con deficient) = V' (Volum con truncat)

— 61 —

Cartilla de Geometria
Raimon Torroja Valls
Llibreria Montserrat
Barcelona, 1931



SUMA 33
febrero 2000, pp. 45-58

Taller de criptomatemáticas para jóvenes (y adultos)

Luis Hernández Encinas

Se presentan algunas nociones de la criptología moderna que pueden ser usadas en el aula como complemento a determinados conceptos matemáticos. Estos temas pueden ser utilizados dentro de un taller de Matemáticas y permiten divulgar algunas facetas de las Matemáticas, así como un acercamiento de los alumnos a temas de actualidad como pueden ser los relacionados con la seguridad de la información, intercambio de mensajes secretos, etc. Las actividades que se proponen pueden ser desarrolladas por alumnos de cualquiera de los dos ciclos de la ESO.

ARTÍCULOS

EL TÉRMINO CRIPTOLOGÍA suele llevar, en ocasiones, a determinadas confusiones. Así, no es extraño encontrar libros de esta ciencia en las secciones, de bibliotecas o librerías, dedicadas al esoterismo, por ejemplo, cuando su contenido es casi totalmente matemático. Tampoco es extraño oír que se asocie esta palabra con «cosas de egipcios», «sectas», etc. Por esta razón, parece necesario aclarar desde el comienzo qué entendemos en la actualidad por criptografía y cuáles son sus objetivos.

La *criptología* (del griego *cryptos* = oculto y *logos* = ciencia) se podría definir como la ciencia de lo oculto (para una visión histórica ver Sgarro, 1990). Sin embargo, la criptología moderna, debido al tipo de sociedad en la que vivimos, tiene dos objetivos fundamentales: por un lado el de permitir que dos o más personas puedan comunicarse de forma secreta utilizando canales de comunicación inseguros, es decir, medios de comunicación que pueden ser «interceptados» por una tercera persona (teléfono, correo, fax, correo electrónico, etc.). El segundo objetivo es justamente el contrario, es decir, analizar cómo estas comunicaciones pueden ser vulneradas o rotas, para conocer su contenido.

El primer objetivo señalado es estudiado por la criptografía, mientras que el segundo lo es por el criptoanálisis. El procedimiento que se sigue para lograr comunicaciones seguras es el de disfrazar o cifrar el mensaje que se desea enviar (criptograma[1]), utilizando algún tipo de clave, de modo que sólo quien esté autorizado sea capaz de recuperar el mensaje original a partir del criptograma (ver CSID, 1993; Pastor, 1996; Ribagorda, 1997). El proceso de cifrar el mensaje se basa en la presunta dificultad o intratabilidad computacional de resolver determinado problema matemático (Fúster y otros, 1997).

La importancia de los dos términos anteriores se debe a la frecuencia con que en los medios de comunicación se

1 La Real Academia de la Lengua define el término *criptografía* como el «Arte de escribir con clave secreta o de un modo enigmático», mientras que el *criptoanálisis* es el «Arte de descifrar criptogramas», siendo un *criptograma* una «Especie de crucigrama en el que, propuesta una serie de conceptos, se han de sustituir por palabras que los signifiquen, cuyas letras, trasladadas a un casillero, componen una frase».

habla de *hackers*, *crackers* y de aspectos relacionados con la Seguridad de la Información, que tienen que ver con Internet y redes de ordenadores, con los accesos de personas no autorizadas a los ordenadores de la OTAN, de la NASA, del Pentágono, etc. Asuntos que llaman enormemente la atención de nuestros alumnos, quienes están capacitados y muy motivados para comenzar a entenderlos, si les son presentados de una manera sencilla.

Por ello, es importante incorporar a las aulas determinados aspectos matemáticos que han ido surgiendo en esta sociedad tecnificada y de la información. Otros ejemplos matemáticos, en la línea de los que se comentan aquí, han sido propuestos por Espinel (1994), Caballero y Bruno (1994) y Espinel y Caballero (1995). Sin embargo, el problema que se presenta es determinar dónde tiene cabida este nuevo saber.

La inclusión en el aula de los aspectos matemáticos que nos rodean es una necesidad que sentimos todos y que intentamos resolver, fundamentalmente, de dos formas. Una posibilidad es la de incluir esta realidad cuando se plantean y resuelven problemas, de modo que, de alguna manera, quede incorporado al bagaje de los alumnos. La segunda forma es la de recurrir a talleres de Matemáticas.

No es el principal objetivo de este artículo discutir el lugar más idóneo donde llevar a cabo esta inclusión, sino el de presentar un ejemplo más de divulgación de las Matemáticas, utilizando temas de debate, relacionados con la criptología, que aparecen cada vez con más frecuencia y que son motivadores para nuestros alumnos.

En este caso, y debido a la diversidad de aspectos matemáticos relacionados con la criptografía que se presentarán (algoritmos, complejidad computacional, funciones unidireccionales, protocolos para ocultar información, etc., y cuya relación con los contenidos matemáticos se comentará más adelante), se analizan diferentes actividades enmarcadas dentro de un taller de Matemáticas y criptografía. Ante esta propuesta que hacemos de un nuevo taller de Matemáticas, no podemos dejar de recomendar el lugar que consideramos puede ser más idóneo para su inclusión, en función de los objetivos que se pretenden conseguir y de los contenidos que subyacen en el taller.

Creemos que este taller debería desarrollarse como una asignatura optativa en cualquiera de los dos cursos del segundo ciclo de la ESO. En esta etapa, los alumnos ya tienen los conocimientos mínimos necesarios para poder desarrollar las actividades que se incluyen en el taller, así como las inquietudes y cultura que les permitirán conocer la importancia y las relaciones con el entorno que les rodea, de los contenidos de dicho taller.

El resto del artículo se distribuye como sigue. En la sección primera se presenta una actividad relacionada con el problema de colorear mapas con determinado número de colores. En la segunda se analiza el problema de pavimentar determinadas calles de una ciudad enlodada con determinados objetivos. En la tercera aparece el problema de la ciudad turística, en la que se deben colocar determinados puntos de información. Un acercamiento a las funciones unidireccionales por medio de grafos se presenta en la sección cuarta, y en la quinta aparece un protocolo para ocultar información. En la sección sexta se analiza cómo dos personas pueden intercambiarse mensajes secretos, mientras que en la séptima lo que se intercambian son pequeñas informaciones en presencia de un extraño, sin que la tercera persona llegue a conocer ningún trozo de dicha información. La sección octava presenta un método para cifrar mensajes por medio de las llamadas rejillas. En las secciones novena y décima se analizan cómo enmascarar un número o una imagen de modo que sea necesaria la participación de varias personas cualificadas para obtener el número o la imagen original. Finalmente, en la última sección se presentan algunas reflexiones sobre las intenciones educativas y los contenidos que subyacen a este taller.

...es importante incorporar a las aulas determinados aspectos matemáticos que han ido surgiendo en esta sociedad tecnificada y de la información.

La primera de las actividades de este taller consiste en plantear a los alumnos la necesidad de colorear un mapa utilizando sólo unos pocos colores.

Coloreando un mapa

La primera de las actividades de este taller consiste en plantear a los alumnos la necesidad de colorear un mapa utilizando sólo unos pocos colores. El origen del problema puede hacerse mediante una historia, que dependerá de la edad de los alumnos con los que se trabaje. La definición del problema puede hacerse de forma puramente visual, ilustrándolo con diferentes mapas, incluyendo los que haya en la propia aula. En sólo unos minutos los alumnos comprenderán cuál es el objetivo que deben conseguir:

> Encontrar el mínimo número de colores que se deben utilizar para colorear un mapa dado.

La actividad puede comenzarse proporcionando a los alumnos mapas que sean coloreables con sólo dos colores. Como ejemplo de uno de estos mapas puede verse el que se presenta en la figura 1.

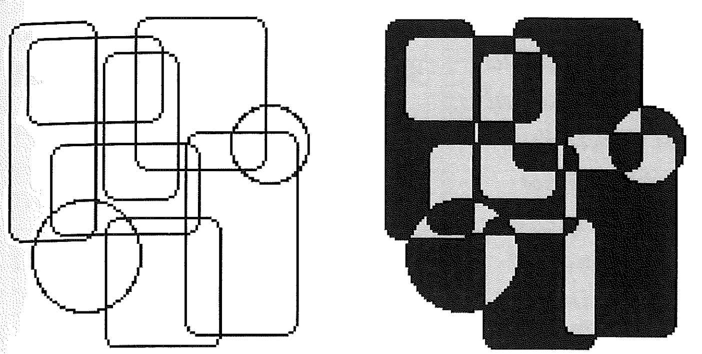


Figura 1. Ejemplo de mapa coloreable con sólo dos colores, generado por solapamiento de curvas cerradas

Una vez que los alumnos intenten colorear el mapa, descubrirán rápidamente el algoritmo que deben seguir: si un país es rojo, sus vecinos tienen que ser azules, y los vecinos de éstos volverán a ser rojos, etc.

Una vez que los alumnos han trabajado con la anterior actividad, puede resultarles divertida la propuesta de que inventen por sí mismos, o en grupos, mapas que sean coloreables con exactamente dos colores[2].

Después de la actividad anterior, se pueden distribuir a los alumnos mapas que no sean coloreables con dos colores y que requieran de tres. El propio algoritmo utilizado por los alumnos en el caso anterior, les llevará a la conclusión de la imposibilidad de hacer el trabajo con sólo dos colores[3]. Como un primer ejemplo de este tipo de mapas puede verse el de la figura 2.

La ciudad enlodada

La actividad que se presenta ahora es la que responde al problema de encontrar el árbol de mínima envergadura en un grafo[4]. Dado que este problema puede llegar a ser muy complejo para los alumnos, conviene llevar a cabo un planteamiento que les sea más cercano.

El problema puede ser planteado como sigue:

> El ayuntamiento de una ciudad enlodada ha decidido que hay que pavimentar todas las calles de la ciudad que sean necesarias, de modo que cualquier vecino pueda ir desde su casa a cualquier otra casa de la ciudad por una calle que esté pavimentada, pero de modo que el coste de la pavimentación sea el mínimo posible.

Así pues, se trata de pavimentar el suficiente número de calles de modo que se pueda ir de una manzana de casas a cualquiera otra sin necesidad de ir por calles enlodadas. Dado que el ayuntamiento sabe cuánto cuesta pavimentar cada una de las calles, el dinero que hay que gastar debe ser el menor posible, debido a la precariedad del presupuesto de la ciudad.

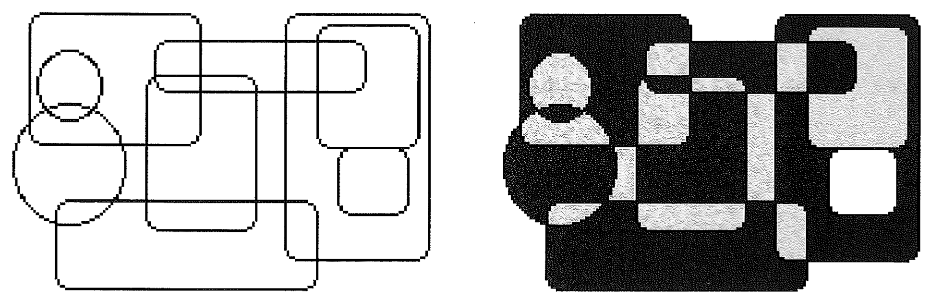


Figura 2. Ejemplo de mapa no coloreable con sólo dos colores

Con el planteamiento anterior, se puede representar la ciudad de forma esquemática mediante un grafo, de modo que cada uno de los vértices del grafo sea una manzana de casas y cada uno de sus lados sea una calle.

Como ejemplo de ciudad enlodada puede utilizarse el grafo de la figura 3, donde los números que hay sobre cada uno de los lados corresponden al coste, en millones de pesetas, que supone pavimentar dicha calle.

Una vez planteado el problema, los alumnos pueden trabajar en grupos, de modo que por tanteo, y analizando las calles que se deben pavimentar en cada uno de los sucesivos intentos, lograrán acercarse a la solución adecuada mediante la estrategia de ensayo y error. Es conveniente que cada uno de los grupos de trabajo comente la estrategia seguida para obtener su mejor solución. Si fuera necesario, porque ninguno de los grupos llegara a la solución óptima, se podría presentar el algoritmo de Kruskal que consiste en ir pavimentando de forma sucesiva las calles cuyo coste sea menor hasta que no sea necesario pavimentar más calles y siempre que las calles pavimentadas no formen un ciclo. Diferentes aproximaciones a la solución óptima (de valor 23) del problema anterior pueden ser las que se presentan en la figura 4.

2 Generar mapas coloreables con sólo dos colores es fácil si se utilizan curvas cerradas que se solapan.

3 El contraste entre el sencillo algoritmo de colorear un mapa con sólo dos colores y la aparente dificultad del algoritmo para un mapa de tres colores pone en contacto a los alumnos con uno de los problemas no resueltos más importantes de las Matemáticas: la conjetura de que la clase de problemas de complejidad *P* (conjunto de todos los problemas de decisión que son resolubles en tiempo polinómico) es distinta a la clase de problemas de complejidad *NP* (conjunto de todos los problemas de decisión para los que la respuesta *sí* puede verificarse en tiempo polinómico, utilizando una información extra o certificado).

4 Determinar el *árbol de mínima envergadura en un grafo* consiste, básicamente, en seleccionar los lados del grafo cuya suma de pesos sea mínima y de modo que se pueda ir de un vértice del grafo a cualquier otro por el árbol elegido.

La ciudad turística

Un problema que puede ilustrar la noción de complejidad computacional[5] (Fúster y otros, 1997, Apéndice B) es el llamado *problema del conjunto dominante mínimo*[6].

En esta actividad el planteamiento del problema es como sigue:

> En las esquinas de una ciudad turística se quieren colocar puntos de información de modo que sin importar en qué esquina esté un turista, pueda llegar a un punto de información caminando, como máximo, una manzana.

La figura 5 muestra un grafo que ilustra este planteamiento.

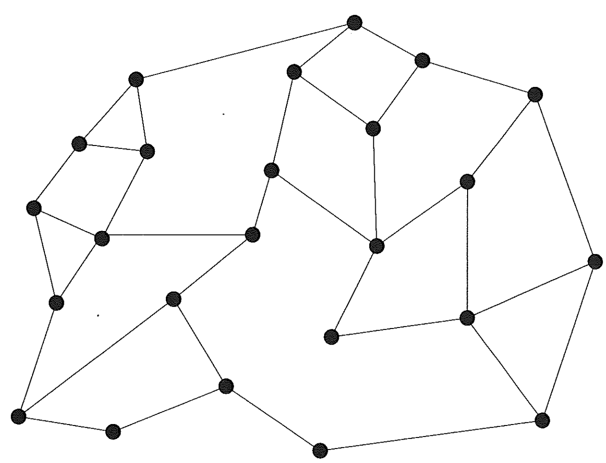


Figura 5. Mapa de una ciudad turística

Después de planteado el problema, dejaremos a los alumnos que trabajen en grupos sobre el mismo. Las soluciones que obtendrán serán cada vez mejores, pero es difícil que lleguen a obtener la solución óptima de la localización de los 6 puntos de información.

La diferencia entre el problema de la ciudad lodosa y éste, uno fácilmente resoluble y otro aparentemente más difícil, proporciona una idea de la noción de complejidad computacional. Hay que señalar que no se conoce un buen algoritmo para resolver este problema[7],

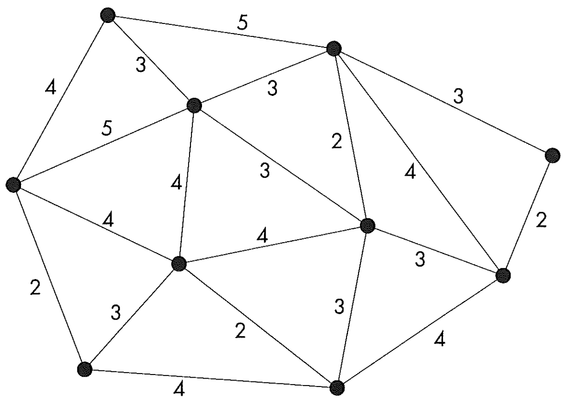


Figura 3. Ejemplo de grafo que representa una ciudad enlodada

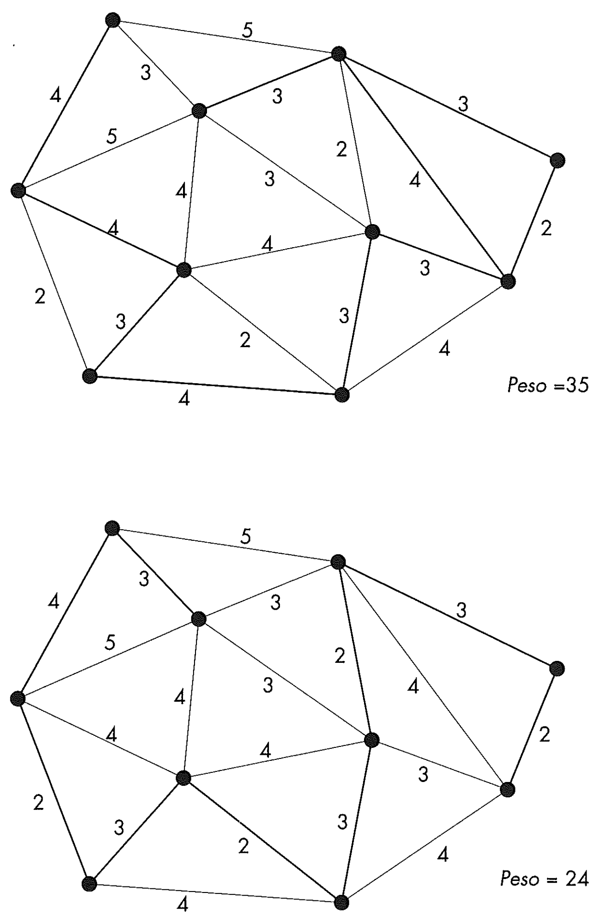


Figura 4. Diferentes aproximaciones a la solución óptima

Un problema que puede ilustrar la noción de complejidad computacional es el llamado problema del conjunto dominante mínimo.

5 La *teoría de la complejidad computacional* estudia el tiempo que tarda en ejecutarse un algoritmo en función del número de operaciones que realiza dicho algoritmo y en función del tamaño de la entrada del mismo.

6 Un *conjunto dominante* en un grafo $G = (V, L)$ es un subconjunto de vértices V' de V de modo que para cualquier vértice v de G, se verifica que o v está en V' o tiene un vecino que está en V'.

7 Por *buen algoritmo* queremos indicar un algoritmo cuya ejecución requiera de tiempo polinómico en el tamaño de la entrada.

lo cual puede poner de manifiesto ante los alumnos que las Matemáticas no son algo completamente acabado, que cada día aparecen nuevos problemas para los que se debe encontrar una solución.

Funciones unidireccionales

Una de las herramientas fundamentales en la criptografía moderna es el uso de las funciones unidireccionales[8] (Menezes y otros, 1996). No se ha demostrado aún la existencia de funciones unidireccionales, sin embargo en la práctica criptográfica se utilizan dos funciones que parecen serlo. La primera de ellas es el producto de números primos (cuya inversa es la factorización de un número compuesto) y la segunda es la exponencial sobre un grupo finito (cuya inversa es el logaritmo discreto) (Fúster y otros, 1997: 115).

Después de haber comentado a los alumnos que no se conoce (no que no exista) un buen algoritmo para resolver el problema anterior, es conveniente señalar que existe un algoritmo sencillo para trabajar hacia atrás, es decir, comenzar con un conjunto de vértices y obtener el mapa de la ciudad turística de una forma muy rápida.

El algoritmo tiene dos pasos. El primero de ellos consiste en dibujar tantas estrellas, hechas con puntos (vértices) y rayos (lados), como la solución que se desea; y el segundo es disfrazar el grafo añadiendo más lados. Este hecho no incrementa el número de vértices del conjunto dominante y a la vez dificulta la solución del problema. En la figura 6 puede verse el primer paso del algoritmo señalado para el mapa de la figura 5.

Para los alumnos es claro que el conocimiento de la configuración de estrellas permite obtener de forma rápida el mapa de la ciudad. Este ejemplo pone de manifiesto la ventaja de conocer funciones unidireccionales. Así, los alumnos, conociendo esta función unidireccional, podrán desafiar a otros compañeros a resolver el problema de la ciudad turística, sin más que elaborar previamente la solución al problema que vayan a plantear.

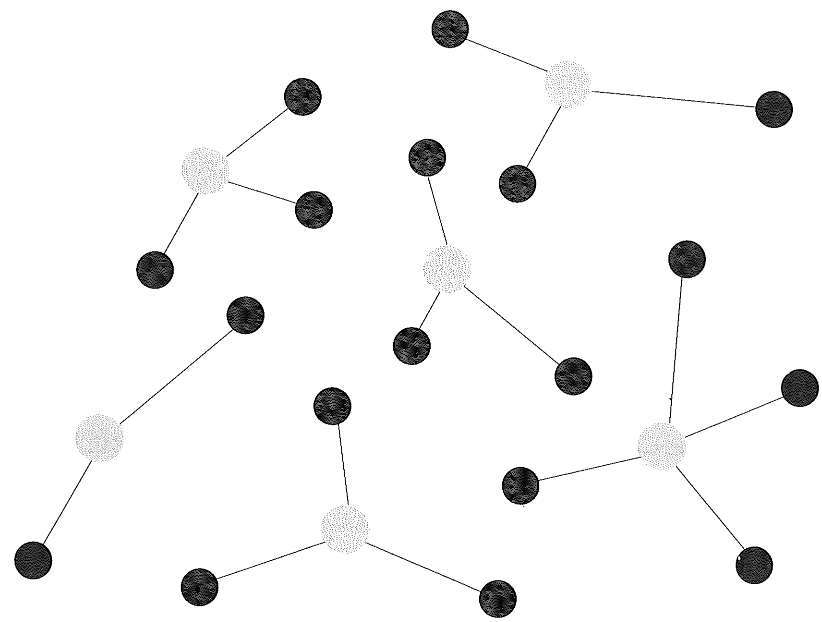


Figura 6. Primer paso para la construcción del mapa de la ciudad turística

Una de las herramientas fundamentales en la criptografía moderna es el uso de las funciones unidireccionales...

8 Una *función unidireccional* es una función invertible $f: A \longrightarrow B$, de modo que es fácil (computacionalmente hablando) calcular la imagen de un elemento $f(a) = b$, pero es muy difícil (computacionalmente) calcular la antiimagen de un elemento: $f^{-1}(b) = a$.

Ocultando información

Después de las actividades anteriores que pueden considerarse como de pre-criptografía, y que están muy relacionadas con la teoría de grafos, pasamos, a partir de esta actividad, a problemas más directamente relacionados con la criptografía.

La actividad siguiente ilustra de una forma sencilla un protocolo para ocultar información. El problema que se puede plantear en esta ocasión es el siguiente:

> Determinar la media de la paga semanal de los alumnos de la clase, sin que ninguno de ellos de a conocer al resto de los compañeros cuál es su paga.

De forma más general, el procedimiento que se describe a continuación puede utilizarse para determinar la media de una colección de datos de un grupo, sin comprometer la información que posee cada uno de los miembros del grupo.

El protocolo para resolver el problema anterior es el siguiente:

- El primer alumno, por ejemplo Alicia, elige un número secreto, x, al que le añade su paga semanal, p_{Alicia}, obteniendo el valor $x + p_{\text{Alicia}}$. A continuación, Alicia susurra este valor al segundo alumno de la clase, Bernardo.

- Bernardo suma a la cantidad que le dijo Alicia su paga semanal y obtiene el valor $x + p_{\text{Alicia}} + p_{\text{Bernardo}}$, y susurra este valor al tercer alumno, Carmen.
- Carmen repite la operación anterior y así sucesivamente hasta que todos los alumnos hayan efectuado una operación similar.
- El último alumno, Zacarías, añade su paga semanal a la cantidad que le dijo el penúltimo alumno, Yolanda, obteniendo el valor

$$x + p_{\text{Alicia}} + p_{\text{Bernardo}} + p_{\text{Carmen}} + \cdots + p_{\text{Yolanda}} + p_{\text{Zacarías}}.$$

- Zacarías susurra el valor que ha obtenido a Alicia, quien resta a la cantidad anterior el número secreto que sumó a su paga.
- Por último, Alicia divide la cantidad obtenida entre el número de alumnos de la clase y obtiene la paga semanal media.

La actividad que pueden realizar los alumnos en este caso, además de analizar el protocolo anterior, es una similar a la descrita anteriormente, como puede ser la de determinar la edad media de los alumnos, sus ahorros medios, su estatura media, etc.

Mensajes secretos

El objetivo de esta actividad es el de conseguir que algunos alumnos se intercambien mensajes secretos, diseñando ellos mismos métodos para cifrar los mensajes, de modo que otros intenten conocer el contenido del mensaje intercambiado. De esta forma, mientras unos juegan el papel de criptógrafos o de agentes secretos, otros harán el papel de criptoanalistas o espías. Para ello, y en lugar de presentar el método a seguir para lograr este objetivo, presentaremos a los alumnos un mensaje cifrado, que deberán tratar de descubrir.

El objetivo de esta actividad es el de conseguir que algunos alumnos se intercambien mensajes secretos, diseñando ellos mismos métodos para cifrar los mensajes, de modo que otros intenten conocer el contenido del mensaje intercambiado. De esta forma, mientras unos juegan el papel de criptógrafos o de agentes secretos, otros harán el papel de criptoanalistas o espías.

El primer mensaje que podemos presentarles puede ser el siguiente:

BQSFTVSBUF DPÑ MFÑUJUVE

El problema que tendrán que resolver los alumnos será el de determinar su significado, trabajando en grupos. Es de suponer que tras varios intentos llegarán a la conclusión de que cada una de las letras del mensaje cifrado debe cambiarse por la letra que le precede en el alfabeto castellano, por lo que el mensaje original era:

APRESURATE CON LENTITUD

Este mensaje se ha cifrado utilizando el procedimiento diseñado por el emperador romano Augusto, que consistía en cambiar cada una de las letras del mensaje original por su siguiente letra en el alfabeto. Por tanto, para recuperar el mensaje a partir del criptograma se debe hacer la operación contraria, esto es, cambiar cada letra del criptograma por la letra que le precede.

Complicando un poco más el cifrado anterior, se puede utilizar el cifrado de Julio César, que consistía en cambiar cada una de las letras del mensaje original por la tercera letra siguiente en el alfabeto. Así, la frase

LA SUERTE AYUDA A LOS AUDACES

Se convierte en el mensaje cifrado siguiente:

ÑD VXHUWH DBXGD D ÑRV DXGDFHV

Con estos dos ejemplos serán suficientes para que los alumnos diseñen sus propios métodos de cifrado, de modo que algunos de los métodos que se les ocurrirán serán:

1. Cambiar cada letra por la n-ésima letra siguiente del alfabeto,
2. Cambiar la primera letra por la siguiente en el alfabeto, la segunda por la segunda siguiente, la tercera por la tercera siguiente, etc.
3. Cambiar las letras que ocupen posiciones impares por la n-ésima siguiente, y las que ocupen posiciones pares por la n-ésima anterior.
4. Etc.

Hay que hacer notar que los métodos anteriores y otros similares no son seguros en la actualidad, debido a que se puede recuperar el mensaje original utilizando métodos estadísticos, puesto que se conoce la frecuencia de las letras y grupos de letras en castellano y otros idiomas[9].

Una extensión de esta actividad, más relacionada con la Estadística pero con una relación evidente con el caso que nos ocupa, es la de proponer a los alumnos que hagan un estudio de la frecuencia de las letras en español, eligiendo diferentes textos aleatoriamente. Una vez que los alumnos hayan hecho este estudio, se puede considerar como punto de partida la media de las frecuencias halladas por cada uno de ellos. Incluso, se

9 Un método cuasi-estadístico fue utilizado por Edgar Alan Poe para hacer que William Legrand descifrara el criptograma del pirata Kidd en el cuento del *Escarabajo de Oro*.

podría desafiar a los alumnos a repetir esta actividad de descifrar mensajes con textos escritos en otros idiomas.

Cambiando la clave

Otro de los problemas básicos en criptografía consiste en analizar cómo dos personas pueden compartir pequeñas cantidades de información en presencia de un espía, de modo que éste no consiga la información intercambiada (Fúster y otros, 1997: 116). Esta información que las dos personas se intercambian puede servir posteriormente como la clave que usarán para comunicaciones posteriores[10]. Por ejemplo, para decidir qué método de cifrado del tipo de César usarán para intercambiarse mensajes.

Otro de los problemas básicos en criptografía consiste en analizar cómo dos personas pueden compartir pequeñas cantidades de información en presencia de un espía, de modo que éste no consiga la información intercambiada...

Para llevar a cabo esta actividad, se señalará a los alumnos que para intercambiarse palabras o frases, es más sencillo utilizar un código simple recurriendo sólo a dos símbolos, de modo similar a como se codifican las letras en el alfabeto Morse, donde sólo se usan el punto y la raya. En la actualidad es más fácil y cómodo utilizar ceros y unos, recurriendo al código ASCII de los ordenadores[11], de modo que cada letra del alfabeto está codificada por una colección de ceros y unos (cada uno de los cuales se llama *bit*).

Por tanto, la actividad en esta ocasión es la que sigue:

> Permitir que dos alumnos, Alicia y Bernardo, puedan intercambiarse de forma secreta una secuencia de bits, que ninguno de los dos conoce previamente, de modo que pueda servirles como clave a partir de ese momento, y de modo que todo el proceso se realice delante de Esteban, que hará el papel de espía.

Para esta actividad se requiere el uso de tres cartas diferentes, por ejemplo, la sota, el caballo y el rey de un palo de la baraja, de modo que para decidir cada uno de los bits, las cartas se barajan y se reparte una a cada uno de los presentes.

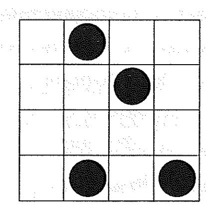
Antes de comenzar con el procedimiento, Alicia y Bernardo se han puesto de acuerdo en que si los dos pueden saber quien de ellos tiene la carta más alta sin que lo sepa Esteban, el bit que considerarán será: 1 si Alicia es quien tiene la carta más alta y 0 si es Bernardo el que la tiene más alta.

Alicia, después de que se hayan repartido las tres cartas, dice en voz alta una de las cartas que no tiene. Si Bernardo tiene esa carta, lo dice y barajan de nuevo las tres cartas sin decidir ningún bit. En caso contrario, es decir, si Bernardo no tiene la carta, dice «Esteban la tiene» y entonces Alicia y Bernardo saben qué carta tiene cada uno, con lo que ambos saben qué bit es el que eligen. A la vez, Esteban no ha obtenido ningún datos sobre el bit que han elegido Alicia y Bernardo. El procedimiento anterior continua hasta que se hayan completado los bits necesarios.

Una vez presentada la actividad, los alumnos analizarán las razones de por qué funciona el protocolo anterior, es decir, comprobarán que la información que consiguen Alicia y Bernardo es la misma, mientras que Esteban no es capaz de saber absolutamente ningún bit de esa información. Posteriormente, pueden dedicarse, en grupos de tres, a intercambiar colecciones de bits o pequeños mensajes (una vez que se les ha proporcionado la traducción a bits de las letras del alfabeto). Es conveniente que cada grupo repita la actividad anterior varias veces de modo que cada uno de los participantes haga el papel de espía.

Las rejillas

Otro de los métodos para cifrar mensajes consiste en utilizar las llamadas rejillas. Para introducir a los alumnos en esta actividad se puede recurrir a la novela «Mathias Sandorf» de Julio Verne[12], o bien inventarse una historia como la siguiente:

> Un agente secreto ha entrado en la habitación del hotel de un conocido espía y después de buscar por todas partes, tan sólo ha encontrado dos objetos sospechosos. El primero de ellos es un papel con las siguientes cuatro palabras:
>
> LAAI ARSN AVUP EISM
>
> El otro objeto sospechoso es un cuadrado de papel con algunos agujeros, como si fuera una rejilla. El agente ha copiado las cuatro palabras, la forma de la rejilla y los lugares de los agujeros:
>
> 
>
> ¿Podrías ayudar al agente secreto a descubrir el mensaje oculto?

10 Este problema se conoce como el problema del *cambio de clave de Diffie y Hellman*.

11 El *código ASCII* (*American Standard Code for Interchange Information*) es el código que se utiliza para la comunicación con los ordenadores. Está formado por 256 caracteres (incluyendo las letras mayúsculas, las minúsculas, los diez dígitos, etc.), cada uno de los cuales está codificado por 8 dígitos binarios.

12 En esta ocasión fue Julio Verne quien hizo que su personaje Mathias Sandorf utilizara este método para descifrar un mensaje y evitar una conspiración

Dado que el mensaje está dividido en 4 palabras de 4 letras, y que esta distribución es igual al de las casillas de la rejilla, el primer paso para descifrar el mensaje consiste en distribuir el mensaje de la misma forma que la rejilla:

L	A	A	I
A	R	S	N
A	V	U	P
E	I	S	M

A continuación se colocará la rejilla sobre el mensaje, obteniéndose lo siguiente:

	A		
		S	
	I		M

Es decir, aparecen las letras ASIM. Si se gira la rejilla 90° a la derecha y se repite el procedimiento anterior, se obtienen las letras ANUE. Repitiendo el proceso anterior otras dos veces[13], se obtienen las palabras: LAVS y IRAP. Uniendo ahora todas las palabras se tiene:

ASIM ANUE LAVS IRAP

Mensaje que no tiene sentido, pero si se lee desde el final hasta el principio, el mensaje ahora ya es claro:

PARIS VALE UNA MISA

Para el procedimiento anterior hemos utilizado un mensaje en el que el número de letras es igual al de cuadrados de la rejilla, pero no es necesario que esto suceda siempre. En el caso de que el mensaje tenga más letras que cuadrados la rejilla, se puede dividir éste en varias partes y realizar el procedimiento anterior con cada una de las partes. Si la última parte del mensaje tiene menos letras que cuadrados en la rejilla, se pueden añadir letras que no añadan sentido al mensaje.

La actividad anterior pueden repetirla los alumnos tal y como se ha presentado, de modo que un alumno cifre un mensaje mientras que otro trata de descifrarlo. Después de esta primera actividad, sería recomendable que cada alumno diseñara una rejilla de tamaño 4x4, diferente de la usada anteriormente. De esta manera, se podría poner de acuerdo con algún compañero en la rejilla que van a utilizar y pedir a cualquier otro que intente descifrar el mensaje, sin conocer la rejilla.

Complicando un poco más la actividad anterior, se podría pedir a los alumnos que intentaran diseñar rejillas de tamaño 5x5 o 6x6, por ejemplo[14].

El problema que se presenta en esta actividad requiere más tiempo que las presentadas hasta ahora. Entra dentro de lo que, en criptografía, se conoce como división de secretos...

13 De esta forma, la rejilla ha sido girada un total de 270°. Este proceso puede poner a los alumnos en la pista para una de las actividades que se proponen posteriormente: diseñar nuevas rejillas.

14 El diseño de rejillas de tamaño 6x6 es similar al de las de tamaño 4x4. Sin embargo, no se pueden construir rejillas de orden impar dado que existe una casilla central y al girar la rejilla, esta casilla permanece fija.

15 La *división de secretos* se lleva a cabo cuando una instancia superior no desea que determinado secreto sea conocido en su integridad por una única persona. Entonces, la instancia divide el secreto en varias partes de tal forma que para recuperar el secreto en su totalidad sea necesario el concurso de determinado número de partes, siendo imposible recuperarlo con menos de las establecidas.

16 El procedimiento anterior de los empleados del banco se conoce como *esquema umbral 2 de 3*, dado que la combinación de la caja se divide en 3 partes y es necesario reunir, al menos, 2 de ellas para poder abrirla.

La caja fuerte del banco

El problema que se presenta en esta actividad requiere más tiempo que las presentadas hasta ahora. Entra dentro de lo que, en criptografía, se conoce como división de secretos[15] (Salomaa, 1990 y Schenier, 1993). En este caso se trata de presentar a los alumnos un protocolo que permita a una persona enmascarar un número, dividiéndolo en varios trozos y entregando cada trozo a una persona diferente, de modo que el número secreto sólo pueda ser recuperado cuando se unan los trozos de un determinado número de esas personas.

Una situación real en la que se presenta un protocolo parecido al que se desarrollará más tarde, y que puede aclarar a los alumnos lo que se pretende, es el siguiente:

Una sucursal bancaria tiene 3 empleados, pero ninguno de ellos quiere tener toda la responsabilidad de conocer la combinación de la caja fuerte de la sucursal. El problema que se presenta es cómo lograr que cada mañana se abra la caja fuerte del banco para hacer los pagos necesarios, sin que la responsabilidad recaiga en un único empleado.

Una forma de solventar este problema, de modo que la caja fuerte pueda ser abierta cada mañana, consiste en dividir la combinación de la caja en tres partes, una para cada empleado, de modo que ésta sólo pueda ser abierta cuando se unan las combinaciones parciales de, al menos, 2 de los empleados. De este modo, ninguno de ellos puede, de forma individual, abrir la caja y así, la responsabilidad de llevar a cabo su apertura queda distribuida entre los empleados.

Los problemas similares al planteado anteriormente se conocen como esquemas umbrales (Blackley, 1979; Shamir, 1979) y tienen dos valores que los definen: el número de personas cualificadas para obtener el secreto y el número de participantes[16]. En general, un esquema umbral para dividir el secreto S, en m partes (llamadas sombras) y en el que hay n participantes debe cumplir las siguientes condiciones:

1. Cada participante recibe de forma secreta una sombra de las n en que se ha dividido el secreto.
2. Cualesquiera m participantes cualificados pueden determinar el valor del secreto sin más que compartir las sombras que cada uno de ellos posee.
3. Ningún grupo de m–1 participantes, o menos, puede conocer ninguna información sobre el valor secreto.

En estos esquemas hace falta un observador, que es quien lleva a cabo el proceso de dividir el secreto en las n sombras y que entrega, secretamente, cada una de las sombras a cada uno de los participantes.

Para conocer cómo trabajan los esquemas umbrales, vamos a presentar un ejemplo de cómo construir un esquema umbral 2 de 2, donde el secreto es una cadena de bits. En este caso, el secreto debe romperse en 2 sombras, de modo que cada una de ellas estará formada por una colección de bits, y será necesaria la colaboración de las dos partes para recuperar el secreto original.

Supongamos que el secreto elegido por el observador es la siguiente cadena de bits: S = (0100101). El observador elabora la primera de las sombras de forma aleatoria: s_1 = (1100110). Para construir la segunda sombra el observador utiliza la siguiente tabla de sumar:

$$0 \oplus 0 = 0,\ 0 \oplus 1 = 1,$$
$$1 \oplus 0 = 1 \text{ y } 1 \oplus 1 = 0$$[17]

Como se cumple que:

$$0 \oplus 1 = 1,\ 1 \oplus 1 = 0,\ 0 \oplus 0 = 0,$$
$$0 \oplus 0 = 0,\ 1 \oplus 1 = 0,$$
$$0 \oplus 1 = 1 \text{ y } 1 \oplus 0 = 1,$$

la segunda sombra es:

$$s_2 = (1000011).$$

Para recuperar el secreto, basta con que los dos participantes pongan en común sus dos sombras y las sumen, bit a bit:

Si en lugar de ocultar un número o un mensaje, lo que se desea enmascarar es una imagen, en blanco y negro, estamos ante la criptografía visual, que hace uso de los esquemas visuales umbrales...

17 Nótese que esta tabla de sumar corresponde a la suma en el grupo de las clases residuales módulo 2.

18 Un *pixel* es el elemento de dibujo que permite presentar en los monitores de los ordenadores las imágenes que en él aparecen. Para evitar recurrir al uso de ordenadores en esta actividad, se recomienda hacer la analogía de que cada pixel es como cada una de las bombillas que forman parte y definen algunos anuncios luminosos, con la salvedad que aquí los pixeles tendrán forma cuadrada.

$$1 \oplus 1 = 0,\ 1 \oplus 0 = 1,\ 0 \oplus 0 = 0,\ 0 \oplus 0 = 0,$$
$$1 \oplus 0 = 1,\ 1 \oplus 1 = 0 \text{ y } 0 \oplus 1 = 1;$$

lo que proporciona el valor secreto original:

$$S = (0100101).$$

Si uno de los participantes quisiera recuperar el secreto original utilizando sólo su sombra, debería suponer cuál es la sombra del otro participante. Para ello necesitaría probar, en el ejemplo anterior, un total de 2^7 = 128 posibilidades (dos valores, 0 y 1, para colocar en 7 posiciones).

Después de hecha la presentación, la actividad de los alumnos consiste en dividirse en grupos de 3, de modo que uno de ellos haga el papel de observador y construya un esquema parecido al presentado anteriormente. En este caso, el secreto del observador puede plantearse como la combinación de una caja fuerte donde se encuentran determinadas instrucciones que deberán seguir los otros dos participantes. Estos dos participantes deberán intentar por sí mismos recuperar el secreto pensado por el observador. Dado que no conseguirán recuperarlo de forma individual, deberán ponerse de acuerdo para compartir la información que posee cada uno de ellos y recuperar, de esta forma, el secreto del observador.

Enmascarando una imagen

Si en lugar de ocultar un número o un mensaje, lo que se desea enmascarar es una imagen, en blanco y negro, estamos ante la criptografía visual, que hace uso de los esquemas visuales umbrales (Nahor y Shamir, 1995; Stinson, c.p.). Estos esquemas visuales siguen el mismo procedimiento que los esquemas de la actividad anterior, pero con las siguientes características:

1. El secreto S es una imagen formada por pixeles cuadrados blancos y negros[18].
2. Las n partes o sombras en que se divide la imagen secreta son otras tantas transparencias cada una con una imagen que tiene el mismo tamaño y el mismo número de pixeles que la imagen original.
3. La recuperación de la imagen secreta se lleva a cabo mediante la superposición de m transparencias cualesquiera, de modo que no es posible obtener la imagen original con sólo m–1, o menos, de ellas.

La actividad ahora será la de construir las sombras en que se dividirá una imagen, para después fotocopiar cada una de las sombras en transparencias y proporcionar una transparencia a cada participante. Con la superposición de determinado número de transparencias se obtendrá la imagen oculta, pero esto no se logrará superponiendo menos transparencias.

Vamos a detallar cómo construir un esquema visual umbral 2 de 2[19], de modo que podamos enmascarar una imagen para luego recuperarla. Dado que el esquema es 2 de 2, la imagen se dividirá en 2 sombras o transparencias, una para cada uno de los participantes, de modo que ninguno de ellos pueda conocer ninguna información de dicha imagen original a partir de la imagen que recibe, y de tal manera que sólo se pueda recuperar la imagen original superponiendo las 2 transparencias en que se ha dividido la imagen.

Para elaborar las sombras supondremos que la imagen que hay que ocultar está contenida en un rectángulo, dividido en pixeles. Los pixeles que definen la imagen secreta serán blancos y negros. Vamos, entonces, a enmascarar la figura 7, que representa al número π.

Conviene señalar que esta figura contiene muy pocos pixeles, por lo que el proceso será puramente ilustrativo, sin buscar una buena definición de la imagen resultante. Más adelante se presentarán otras imágenes enmascaradas con el mismo protocolo pero definidas con más pixeles, lo que hará que su definición sea mucho mejor.

El esquema visual 2 de 2 para dividir la imagen secreta consiste en enmascarar cada uno de los pixeles de la imagen original en dos pixeles, cada uno de los cuales ocupará en lugar del pixel original pero en cada una de las sombras. Para llevar a cabo este enmascaramiento del pixel original, cada uno de los pixeles de cada una de las sombras está dividido en dos semipixeles, la mitad blanco y la mitad negro. El algoritmo para enmascarar cada uno de los pixeles originales se ilustra en la figura 8.

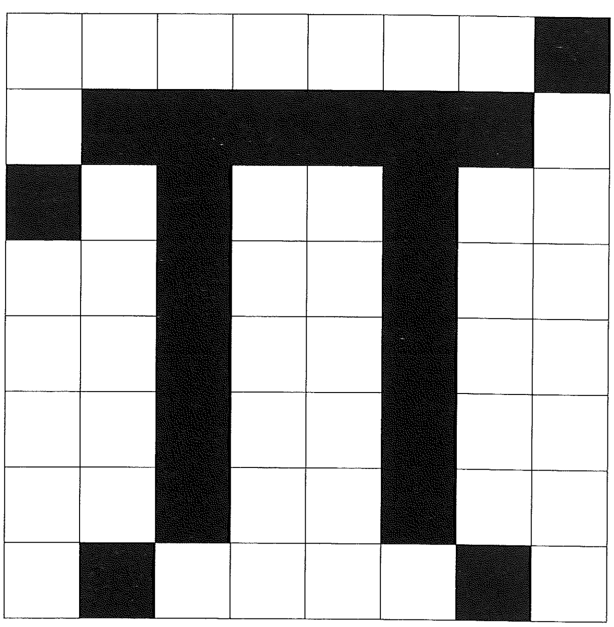
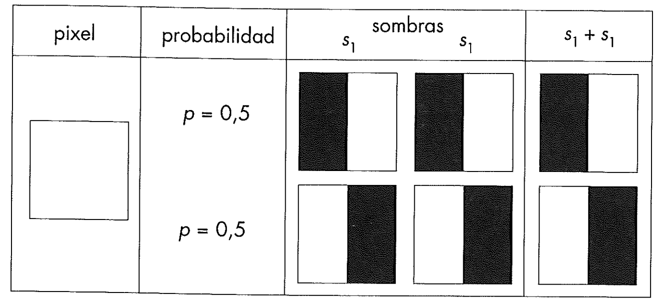
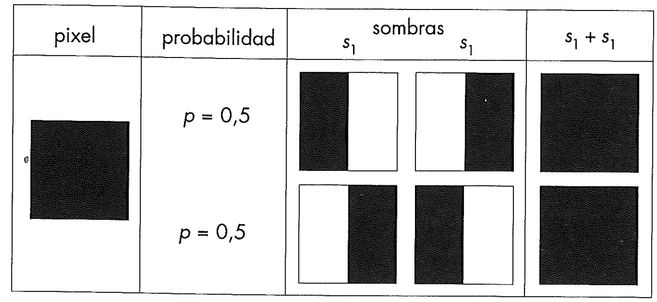


Figura 7. Imagen secreta a ocultar



8.a



8.b

Figura 8. Enmascaramiento de un pixel original en un esquema 2 de 2

Si el pixel original es blanco, el observador lanza una moneda al aire, de modo que si el resultado es cara, elige como pixeles para cada una de las sombras los dos pixeles de la primera línea de la figura 8.a; si el resultado es cruz elige como pixeles para cada sombra los dos pixeles de la segunda línea. De forma análoga se procede para enmascarar un pixel negro, utilizando la figura 8.b. El algoritmo que se acaba de describir se ejecuta con cada uno de los pixeles de la imagen secreta.

Antes de conocer las 2 sombras obtenidas mediante el algoritmo anterior, vamos a analizar las características de dicho algoritmo. Cada pixel enmascarado de la imagen original da lugar a dos pixeles, uno para cada sombra. Cada uno de estos nuevos pixeles está dividido en dos semipixeles uno blanco y el otro negro. La obtención de un semipixel blanco-negro o negro-blanco tiene la misma probabilidad (p = 0,5), y no depende del color del pixel original[20]. Además, como el proceso de enmasca-

19 El esquema visual umbral 2 de 2 anterior puede extenderse a esquemas 2 de *n* y, de forma más general, a *esquemas visuales umbrales m de n*. Sin embargo, las técnicas matemáticas empleadas en estos últimos son más complejas y no serán comentadas aquí.

20 Por este motivo, los pixeles de las sombras obtenidos no proporcionan ninguna información a los participantes sobre el color del pixel original.

ramiento de los pixeles es aleatorio, pues depende del resultado de lanzar una moneda al aire, y los resultados obtenidos en cada prueba son independientes, no se obtiene información adicional si se observa un grupo de pixeles en cualquiera de las sombras.

Por otra parte, cuando se superponen las dos sombras (ver las columnas $s_1 + s_2$ de las figuras 8.a y 8.b) se obtiene, si el pixel original era blanco, un pixel negro-blanco o blanco-negro, y un pixel negro si el pixel original era negro. Por tanto, cuando se superponen los pixeles de las sombras de un pixel original negro, se obtiene un pixel negro en la imagen que se recupera. Mientras que los pixeles blancos pierden contraste por el hecho de que el pixel que se obtiene al superponer las sombras es negro-blanco o blanco-negro y no completamente blanco[21].

Después de las consideraciones anteriores sobre el algoritmo definido, si la sucesión de caras (c) y cruces (x) obtenida por el observador para enmascarar cada uno de los 64 pixeles fue:

c	c	x	x	x	c	x	c
x	x	c	c	x	x	x	x
c	c	x	x	c	c	x	c
c	c	x	c	x	c	c	x
x	x	c	c	x	c	x	c
x	x	c	c	x	c	x	c
c	x	x	c	x	x	x	c
c	c	c	x	x	c	c	x

Las sombras obtenidas son las que se muestran en las figuras 9 y 10.

Las dos sombras serán impresas o fotocopiadas por el observador en dos transparencias y entregadas de forma secreta a cada uno de los dos participantes. Superponiendo las dos transparencias de las dos sombras anteriores, la imagen original recuperada es la que se muestra en la figura 11[22].

Después de la presentación anterior, la actividad de los alumnos consiste en dibujar una imagen con contrastes definidos, utilizando pixeles cuadrados, y luego enmascarar la imagen que han elaborado.

...la actividad de los alumnos consiste en dibujar una imagen con contrastes definidos, utilizando pixeles cuadrados, y luego enmascarar la imagen que han elaborado.

21 Esta pérdida de contraste en la imagen obtenida al superponer las sombras hace que se recomiende el uso de imágenes claramente definidas.

22 En la figura 11 se presenta la imagen recuperada con dos tonos para que se aprecie la imagen original y la pérdida de contraste. Ya se comentó que la imagen elegida estaba definida por muy pocos pixeles, con el objetivo de prestar la mayor atención al procedimiento y éste no quedara ensombrecido por la cantidad de pixeles a enmascarar.

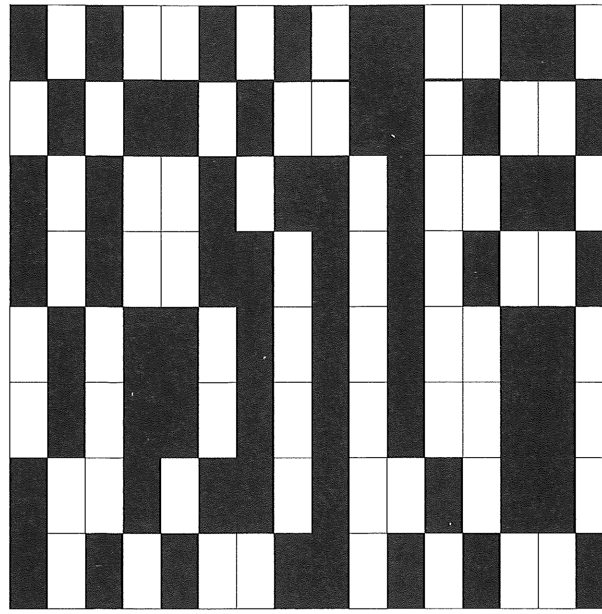


Figura 9. Sombra obtenida para el primer participante

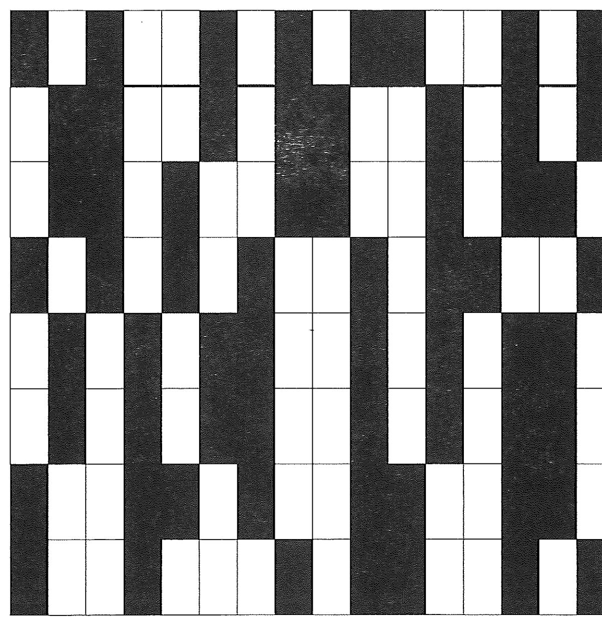


Figura 10. Sombra obtenida para el segundo participante

La actividad anterior se puede extender de forma sencilla a esquemas visuales 2 de 3 mediante un algoritmo similar al descrito anteriormente y utilizando las sombras que se presentan en la figura 12.

A modo de ejemplo se presentan las sombras de otras imágenes, así como las imágenes recuperadas en cada caso (figuras 13, 14 y 15).

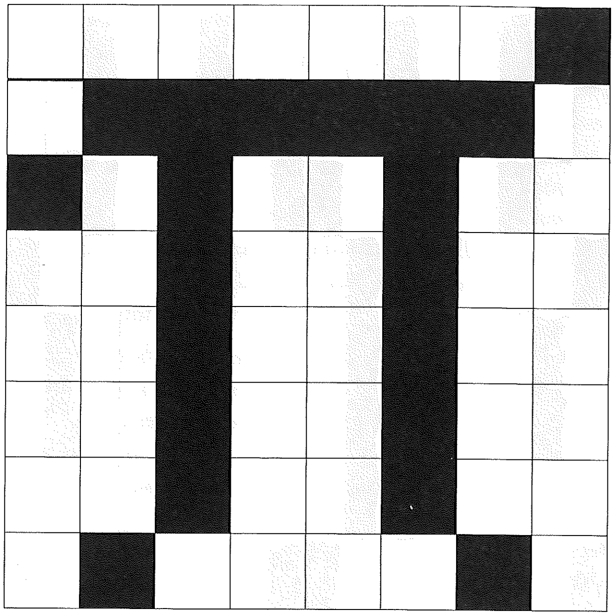


Figura 11. Sombras de un pixel en un esquema 2 de 3

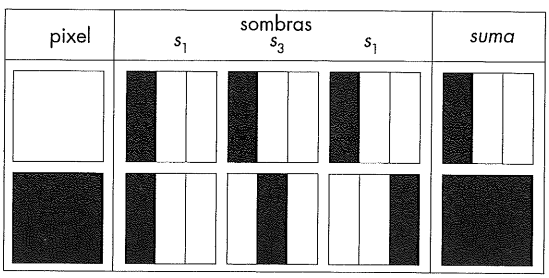


Figura 12. Imagen secreta recuperada.

Intenciones educativas

Como ya hemos comentado en el inicio del artículo, la principal intención educativa que subyace al taller que se propone es la de divulgar determinados aspectos de las Matemáticas, que quedan fuera de los contenidos de los currículos actuales, pero que no dejan de aparecer en los medios de comunicación y que son de absoluta actualidad. En este caso, son aspectos matemáticos relacionados con la seguridad de la información y de la criptología, pero que están basados en conceptos matemáticos conocidos (o al alcance) de nuestros alumnos. Además, de esta forma se trataría de «sistematizar» de alguna forma, algunos de los juegos que han practicado nuestros alumnos (sin saber que estaban haciendo Matemáticas), como el de enviarse mensajes secretos, utilizando para ello los más «sofisticados» métodos de cifrado.

...una forma de presentar la criptografía a los alumnos podría ser algo así como la «ciencia de las matemáticas y los ordenadores con la presencia de un adversario, enemigo o espía», lo que lleva presente aspectos relacionados con el drama y el suspense.

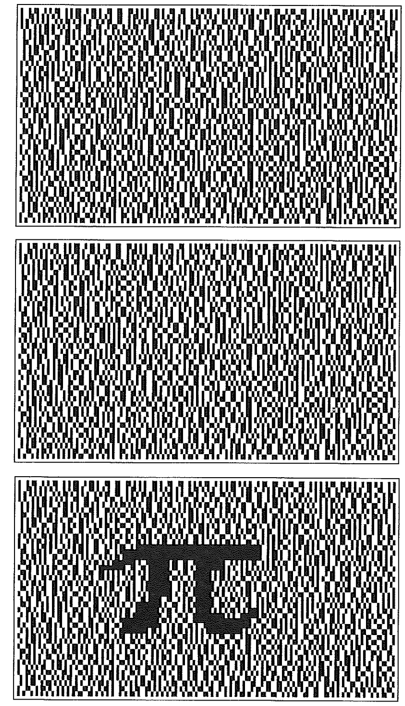


Figura 13. Símbolo π

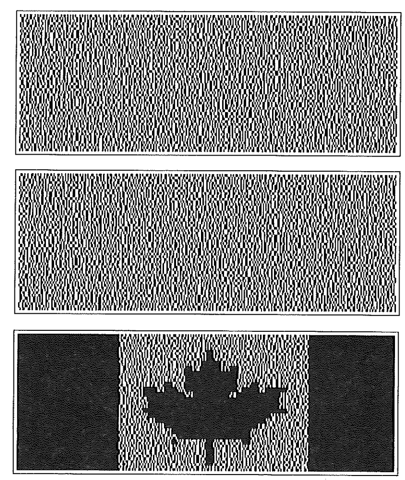


Figura 14. Bandera canadiense

Por otra parte, hay que tener en cuenta que una forma de presentar la criptografía a los alumnos podría ser algo así como la «ciencia de las matemáticas y los ordenadores con la presencia de un adversario, enemigo o espía», lo que lleva presente aspectos relacionados con el drama y el suspense. Además, no hay que olvidar que una de las cosas que motivan más a los alumnos de

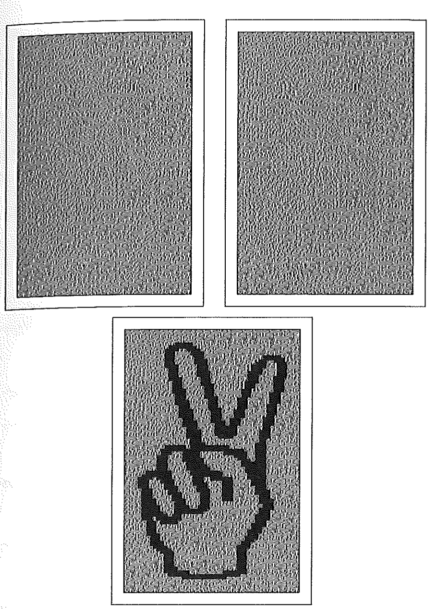


Figura 15. Símbolo de victoria

cualquier edad es todo aquello que tenga que ver con el hecho de derrotar a los «malos» e incluso de jugar a «ser uno de los malos».

En cuanto al nivel educativo en el que se podría desarrollar este taller, creemos que un lugar adecuado sería en cualquiera de los dos cursos del segundo ciclo de la ES., como una asignatura optativa. Es cierto que algunas de las actividades que se proponen podrían ser llevadas a cabo en cursos anteriores, pero creemos que para sacarles mayor partido convendría que los alumnos tuvieran un determinado bagaje cultural, que les permitiera comprender la transcendencia de los problemas reales y cotidianos que se esconden detrás de las actividades que vayan a realizar: cuestiones de economía local (pavimentación de calles y temas turísticos), la responsabilidad de abrir la caja fuerte de un banco, enviar mensajes de forma secreta, etc.

Con relación a las cuestiones puramente matemáticas, conviene destacar que aparecen dos asuntos básicos: el relacionado con los conceptos matemáticos y el relativo a los aspectos metodológicos. Los primeros aparecen de forma clara en las actividades propias de la criptología (a partir de la sección quinta); mientras que los segundos aparecen a lo largo de todas la actividades. Hemos pretendido que en las primeras actividades (de las secciones primera a la cuarta) no aparezcan conceptos matemáticos claramente definidos, de modo que a la hora de desarrollar la actividad en cuestión, se haga especial hincapié en la metodología y en los aspectos didácticos que lleva la propia actividad, de modo que los alumnos aprecien especialmente los problemas que surgen y su planteamiento, y aborden su solución sin ideas preconcebidas.

Con relación a las cuestiones puramente matemáticas, conviene destacar que aparecen dos asuntos básicos: el relacionado con los conceptos matemáticos y el relativo a los aspectos metodológicos.

Con relación a los conceptos matemáticos, y por no hacer una lista exhaustiva de los mismos, se puede mencionar que aparecen los siguientes:

- estadísticos (determinación de medias en la sección quinta, elaboración de tablas de frecuencias en la sexta);
- de numeración (trabajar en base binaria con bits y sumar números en esta base en las secciones séptima y novena).
- geométricos (giro y diseño de rejillas en la sección octava, con el análisis de lo que podría llamarse semejanza de rejillas);
- de combinatoria (determinar el número de pruebas a realizar para descubrir un secreto en la sección novena);
- probabilísticos (lanzamiento de una moneda y discusión de cuestiones de aleatoriedad, independencia y equiprobabilidad de sucesos en la sección décima);

Para terminar, cabe destacar la presencia en las actividades de los siguientes aspectos metodológicos:

- el trabajo en grupo (en la mayor parte de las actividades);
- la elaboración de algoritmos y el análisis de su correcto funcionamiento, apreciando que las soluciones que se obtienen se acercan cada vez más a la óptima (secciones primera, sexta y séptima);
- la propuesta de nuevos problemas, diseñados por los propios alumnos (secciones primera, cuarta y sexta);
- apreciar la complejidad de algunos problemas matemáticos y su falta de solución; notando que las Matemáticas no son algo acabado y que se pueden presentar nuevos problemas, completamente actuales, de fácil comprensión pero de difícil solución (secciones primera y tercera);
- la utilización de diferentes estrategias para la resolución de problemas: de ensayo y error (secciones primera y segunda), aproximarse a la solución de forma sucesiva (sección tercera), suponer el problema resuelto (sección cuarta), etc.
- interdisciplinariedad: Lengua (lectura de novelas de Alan Poe y Julio Verne, con cuestiones criptológicas,

recomendadas en las secciones sexta y octava), Idiomas (análisis de las frecuencias de las letras en otros idiomas y descifrado de mensajes escritos en tales idiomas en la sección sexta), Dibujo y Diseño (elaboración de imágenes definidas por píxeles en la sección décima), Informática (trabajo con el código ASCII, bits y píxeles en la sección décima e implementación de los algoritmos diseñados en las distintas actividades).

Referencias bibliográficas

BLACKLEY, G. R. (1979): «Safeguarding cryptographic keys», *Proceedings of the National Computer Conference, American Federation of Information Processing Societies Proceedings*, n.° 48, 313-317.

CABALLERO, P. y C. BRUNO (1994): «Uso didáctico de la criptografía: la administración de secretos», *Suma*, n.° 19, 59-64.

CSID (1993): *Glosario de términos de Criptología*, Publicación interna, Madrid.

ESPINEL, M. C. (1994): «El lenguaje de los grafos», *Suma*, n.° 16, 19-28.

ESPINEL, M. C. y P. CABALLERO, (1995): «La matemática que protege de errores a los números de identificación», *Suma*, n.° 20, 77-84.

FELLOWS, M. R. y N. KOBLITZ (1993): *Combinatorially based cryptography for children and adults*, Comunicación personal.

FÚSTER, A., D. GUÍA, L. HERNÁNDEZ, F. MONTOYA y J. MUÑOZ (1997): *Técnicas criptográficas de protección de datos*, RA-MA, Madrid.

MENEZES, A. J., P. C. VAN OORSCHOT y S. A. VANSTONE (1996): *Handbook of applied cryptography*, CRC Press, Boca Ratón, U.S.A.

NAOR, M. y A. SHAMIR (1995): «Visual cryptography. Advanced in Cryptology», *Eurocrypt'94, Lecture Notes in Computer Science*, n.° 950, 1-12.

PASTOR, D. (1996): *Diccionario enciclopédico del espionaje*, Complutense, Madrid.

RIBAGORDA, A. (1997): *Glosario de términos de seguridad de las T.I.*, Coda, Madrid.

SALOMAA, A. (1990): *Public-key cryptography*, Springer-Verlag, Berlín.

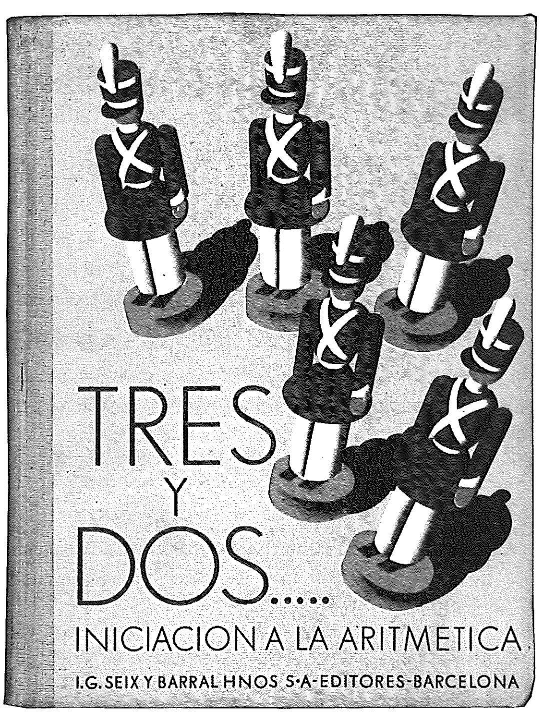
SCHNEIER, A. (1979): *Applied cryptography*, John Wiley & Sons, New York.

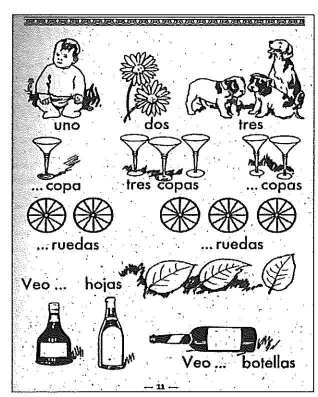
SGARRO, A. (1990): *Códigos secretos*, Pirámide, Madrid.

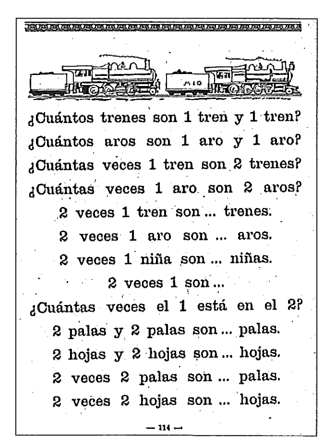
SHAMIR, A. (1979): «How to share a secret». *Communications of the ACM*, n.° 22, 612-613.

STINSON, D. R. *An introduction to visual cryptography*, Comunicación personal.

Luis Hernández
Departamento de Didáctica
de las Matemáticas
y de las CC.EE.
Facultad de Educación
Universidad de Salamanca
Sociedad Castellano-Leonesa
del Profesorado
de Matemáticas







Tres y dos... Iniciación a la Aritmética
Agustín Ballvé
Seix y Barral Editores
Barcelona, 1933

SUMA 33
febrero 2000, pp. 59-71

Proceso de elaboración de actividades geométricas ricas: un ejemplo, las rotaciones

Núria Gorgorió, Francesca Artigues, Francesc Banyuls, David Moyano, Núria Planas, Montse Roca y Àngel Xifré

ARTÍCULOS

En este artículo presentamos el proceso de reflexión de un grupo de trabajo en el que profesores de secundaria e investigadores en educación matemática hemos desarrollado y experimentado una secuencia de «actividades ricas» en el ámbito de la geometría de las rotaciones. Junto con el desarrollo del concepto de «actividad rica», presentamos la revisión de algunas contribuciones procedentes de la investigación y analizamos los resultados fruto de su experimentación con alumnos de ESO.

LA REFORMA: un buen contexto para la recuperación de la geometría en la secundaria obligatoria

A menudo parece que existen verdaderas dificultades para incorporar la geometría en los currículos efectivos de matemáticas. La geometría ha ido quedando relegada en los programas frente a otros aspectos de la educación matemática. Aseguramos un nivel de desempeño significativo en aritmética para todos los alumnos, pero descuidamos la geometría o, en el mejor de los casos, la reducimos a cálculos geométricos mecánicos de áreas o volúmenes. Constatamos que mientras existe un currículo estándar elemental para la aritmética y el álgebra, no parece haber consenso cuando se trata de fijar un currículo elemental para la geometría escolar.

Si bien en el currículo intencional se acepta que los conocimientos y habilidades geométricas son suficientemente importantes para merecer un lugar en todos los niveles de la educación obligatoria, en el plano del currículo desarrollado no existe un acuerdo por lo que se refiere al contenido y su secuenciación en relación a la geometría que debe enseñarse. El gran contenido algorítmico de la aritmética y del álgebra conduce a que la enseñanza de estos aspectos resulte mucho más gratificante, tanto para profesores como alumnos, que la de la geometría. Por otra parte, a pesar de que son numerosas las actividades conocidas para el desarrollo de determinados contenidos geométricos, en general, los profesores tenemos dificultades para secuenciarlos y organizarlos de forma global, contrariamente a lo que ocurre en la aritmética o el álgebra cuya secuenciación parece algo natural. Además, la geometría es una materia donde los procesos algorítmicos son pocos y su interés radica en que nos permite plantear preguntas que podrán ser resueltas a través del álgebra y la aritmética. Además, la falta de éxito que caracteriza las experiencias en geometría de tantos alumnos incita a los profesores a considerar esta parte de las matemáticas como de menor importancia.

El ciclo se perpetúa a través de la formación del profesorado. Los responsables de la formación del profesorado de primaria encuentran extraordinariamente difícil hacer evolucionar a sus alumnos con unas bases tan pobres. Por otra parte, son pocos los profesores de secundaria que durante su formación han seguido cursos de geometría, porque no está contemplada en el currículo diseñado para su capacitación desde los departamentos universitarios. De esta forma, únicamente se consigue perpetuar el círculo vicioso.

Las dificultades tanto en el currículo intencional como en el desarrollado repercuten directamente en el currículo adquirido (Robitaille y Dirks, 1982). Como consecuencia, el conocimiento geométrico de los estudiantes al finalizar la enseñanza obligatoria es, en general, desigual y escaso. Por otra parte, alumnos muy capaces visualmente, pero con poca habilidad para conceptos algebraicos y aritméticos, se ven discriminados ante el desequilibrio actual entre los distintos aspectos de la educación matemática.

Ante esta situación, la reforma educativa parece un buen contexto para que la geometría euclidea recupere el espacio en los currículos de secundaria. Para que la reforma suponga una reacción a esta situación deben presentarse propuestas innovadoras de actuación en el aula que ayuden a la creación y ampliación de significados para los conceptos geométricos. Por otra parte, si bien es cierto que con la reforma hay un énfasis en la geometría, no queda claro en qué geometría. Aún está por ver si la sociedad que quería una aritmética y una álgebra rutinarias desea ahora simultanear una geometría creativa e intuitiva, basada no sólo en productos sino también en procesos, con una geometría de definiciones y teoremas. La reforma sólo será un proceso de recuperación si introduce una geometría no reduccionista.

El grupo de trabajo Menaecme[1] nace como un grupo de reflexión sobre el papel de la geometría en la educación matemática de los alumnos de la ESO. El proceso de reflexión y conceptualización de la propia actuación didáctica se inicia a partir de algunas cuestiones centrales: ¿Cuál debería ser la geometría en la enseñanza obligatoria? ¿Cuáles deberían ser sus objetivos? ¿Cómo podemos aproximarnos a la consecución de estos objetivos? ¿Cuáles son las metodologías actualmente validadas que nos dan pistas a seguir? ¿Qué sentido tiene concentrarse en la geometría deductiva si no hay geometría descriptiva y geometría visual?

Para analizar, desde una perspectiva curricular, las distintas formas de conceptualizar la geometría, partimos de la interpretación de la geometría descrita por Usiskin (1987) como:

...la falta de éxito que caracteriza las experiencias en geometría de tantos alumnos incita a los profesores a considerar esta parte de las matemáticas como de menor importancia.

- Visualización, dibujo y construcción de figuras.
- Estudio de los aspectos espaciales del entorno físico.
- Medio para representar conceptos y relaciones matemáticas cuyo origen no es visual o físico.
- Sistema matemático formal.

Esta conceptualización de la geometría coincide con la propuesta de Bishop (1982) en relación a las actividades geométricas que deberían proponerse en el aula para promover aprendizajes significativos en los alumnos. Este autor sugiere que en las aulas se utilicen, entre otras, más actividades relacionadas con problemas cotidianos que utilicen ideas geométricas, la reducción y la representación del entorno físico, la utilización de recursos verbales para describir el espacio y el diseño de las producciones humanas.

La reflexión en torno a nuestra experiencia como profesores de matemáticas nos lleva a aceptar el hecho de que tradicionalmente la enseñanza de la geometría en la secundaria ha sido de naturaleza axiomática, reduciendo los cuatro aspectos mencionados por Usiskin a un enfoque unidimensional. Entendemos que este enfoque impide el desarrollo completo de capacidades que deben ser desarrolladas en toda educación obligatoria (NCTM, 1982):

- Identificar, describir, comparar, modelar, dibujar y clasificar figuras geométricas de dos y tres dimensiones.
- Desarrollar el sentido espacial.
- Explorar los efectos de transformar, combinar, subdividir y cambiar las figuras geométricas.
- Comprender, aplicar y deducir propiedades de las figuras geométricas y de las relaciones entre ellas, incluyendo la congruencia y la semejanza.
- Apreciar la geometría como medio para describir y modelar el entorno físico.
- Explorar diversas aproximaciones a la geometría.

1 El grupo Menaecme es un grupo de trabajo del ICE de la Universitat de Barcelona que se formó a inicios del curso 1996-97. Los componentes del grupo son: Francesca Artigues, Francesc Banyuls, Montse Fontdevila, Javier Fraile, Núria Gorgorió, David Moyano, Núria Planas, Montse Roca y Àngel Xifré.

Después de una fase inicial de detección de necesidades e intereses en relación a la enseñanza de la geometría en la etapa 12-16, iniciamos un proceso de elaboración de una propuesta de implementación teniendo en cuenta las aportaciones de los estudios teóricos en este campo, y los recursos y materiales didácticos existentes en nuestro entorno, en busca de secuencias de actividades y situaciones didácticas que faciliten el aprendizaje de determinados conceptos geométricos.

En esta primera fase de trabajo del grupo elaboramos una propuesta de implementación, actualmente en proceso de experimentación y revisión. En este artículo queremos presentar no tanto las actividades y secuencias elaboradas como producto, sino el proceso de análisis y experimentación seguido y nuestras primeras conclusiones ya que creemos que éste puede ser utilizado como modelo de reflexión por otros profesores en situaciones parecidas y con inquietudes análogas.

A lo largo de todo el proceso hemos podido contar con la inestimable colaboración de expertos internacionales de reconocido prestigio[2] que, con su participación en nuestras discusiones, han aportado elementos de reflexión teórica y su experiencia como dinamizadores de grupos de profesores trabajando en propuestas de innovación geométrica en el aula.

«Actividades» ricas en geometría[3]

Bishop (1988) desarrolla un modelo de currículo pedagógico a partir de tres componentes: el componente simbólico/conceptual, el componente aplicable/social y el componente estructural/cultural. En un número anterior de esta misma revista (Bishop, 1998) puede encontrarse una síntesis de los constructos a los que se refieren los distintos componentes y las estrategias pedagógicas para enseñar estos componentes en clase.

Nuestra propuesta de implementación tiene en cuenta los tres componentes y contiene por lo tanto propuestas de actividades, proyectos e investigaciones geométricas. A pesar de ello, creemos importante explicitar que nos resulta mucho más fácil organizar nuestro debate curricular a partir del establecimiento de los que creemos conocimientos geométricos básicos para la etapa 12-16.

Sin embargo, al referirnos a conocimiento geométrico consideramos, tal como afirman Gorgorió y Bishop (1998), no únicamente conocimiento de conceptos y significados sino también desarrollo de habilidades y procedimientos, ya que habilidades y procedimientos deben integrarse en estructuras de conocimiento útiles y significativas. Desde este punto de vista nuestra interpretación de lo que debería ser el componente simbólico conceptual de la geometría en la escolaridad obligatoria puede resumirse en el esquema de la figura 1.

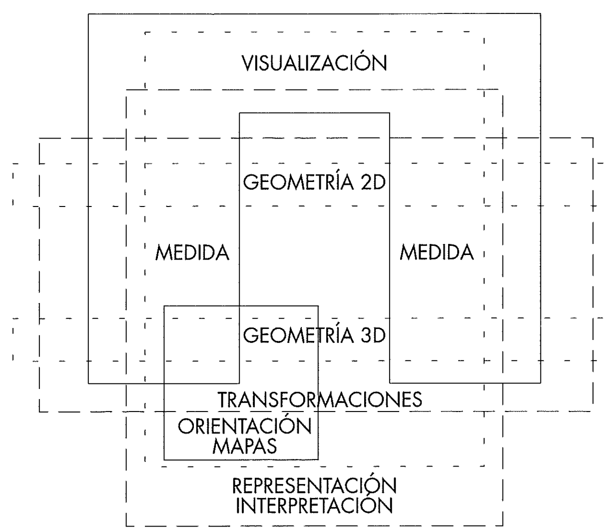


Figura 1. Relaciones entre los distintos tipos de contenidos

Centrándonos en la búsqueda de actividades[4] geométricas para la enseñanza de los conocimientos básicos establecidos, nuestro debate gira en torno a las condiciones que debe reunir una actividad geométrica para poder ser considerada una «actividad rica».

Desarrollando la propuesta de Broomes (1989), consideramos como «actividad rica» aquella que:

- está relacionada con el contenido curricular tanto en el currículo intencional como en el currículo que se tiene que desarrollar;
- permite establecer conexiones entre distintas áreas del currículo dentro o fuera de las matemáticas con lo cual amplía la imagen de las ideas matemáticas y desarrolla significados;

2 A. Bishop (Monash University, Australia), B. Bolt (University of Exeter, Gran Bretaña), K. Clements (University of Brunei, Brunei Darussalam), P. Hilton (SUNY at Binghamton, USA), R. Hershkowitz (Weizmann Institute, Israel), B. Parzysz (Univesité de Metz, Francia), J. Pedersen (Santa Clara University, USA) y Norma Premeg (Florida State University, USA). A todos ellos queremos manifestarles nuestro agradecimiento tanto por su contribución académica como su apoyo personal. También nuestro agradecimiento al Centre de Recerca Matemàtica, Institut d'Estudis Catalans por haber financiado el proyecto TIEM98 que nos permitió trabajar con todos ellos durante su visita a nuestro país.

3 El desarrollo del concepto «actividad rica» aparece también en un artículo publicado con anterioridad en esta misma revista (*SUMA*, 30) «Fiayaz en clase de matemáticas: un ambiente de resolución de problemas», de N. Planas, X. Vilella y N. Gorgorió, ya que dicho concepto fue uno de los temas de debate de los grupos de trabajo del proyecto TIEM98, en los que participaron los distintos autores de ambos artículos.

4 A partir de este punto utilizamos el término actividad geométrica en el sentido establecido por Bishop (1988) de actividad matemática correspondiente al componente simbólico/conceptual.

- sirve como introducción y motivación para un contenido básico y, por lo tanto, su presencia en el currículo desarrollado está justificada;
- supone un reto para la mayoría de los alumnos ya que incluye una gradación de dificultades para diferentes ritmos de aprendizaje, partiendo de las posibilidades de todos los alumnos y permitiendo su expansión para los más rápidos;
- facilita la implicación de todos los alumnos, ya que permite que el alumno pueda establecer conexiones con el contexto de fuera del aula;
- es flexible, permitiendo al alumno que establezca relaciones entre sus conocimientos para poder aplicarlos;
- pretende no únicamente la búsqueda de respuestas correctas sino también que los alumnos generen buenas preguntas;
- finaliza cuando el alumno es consciente de sus aprendizajes, reflexionando, interiorizando estableciendo relaciones tanto con aprendizajes anteriores como con vivencias de fuera del aula.

Es evidente que conseguir una actividad que cumpla todas estas condiciones es algo difícil. Sin embargo, consideramos que como profesores debemos plantearnos el reto de proponer a nuestros alumnos actividades que se acerquen al máximo a las condiciones propuestas.

Procesos de resolución de actividades en que la transformación geométrica es una rotación en el espacio

Tal como afirmábamos en el primer apartado, durante el proceso de elaboración de nuestra propuesta de implementación tenemos en cuenta las aportaciones de las investigaciones en el campo de la educación geométrica, en particular aquellas que contribuyen a la comprensión de los procesos de resolución por parte de los alumnos de las propuestas a implementar. Dado que las actividades de la secuencia didáctica que presentamos requieren una rotación en el espacio, los resultados de Gorgorió (1995 y 1998) han contribuido en gran manera tanto al planteamiento de las actividades como a su experimentación y su análisis, facilitando el proceso de interpretación de los procesos de resolución y las dificultades de los alumnos. Presentamos a continuación algunas de las aportaciones de los trabajos citados con la intención de facilitar la comprensión de los planteamientos del grupo de trabajo.

El constructo visualización aparece no únicamente en la mayoría de estudios acerca de las habilidades espaciales, sino también en muchas de las investigaciones relacionadas con los procesos de resolución de problemas de matemáticas en general. Gorgorió recoge y amplía los estudios existentes hasta el momento en relación a las habilidades necesarias para la resolución de tareas geométricas que requieren una rotación en el espacio. Esta autora, propone analizar las estrategias que los alumnos utilizan en la resolución de dichas tareas desde tres puntos de vista: el origen y la organización de la información utilizada, el modo de representación mental y el foco de atención. A partir de estos tres puntos de vista, para cada alumno y en cada actividad, pueden distinguirse la *estrategia de estructuración*, la *estrategia de procesamiento* y la *estrategia de aproximación* utilizadas consideradas no como tres tipos distintos de estrategias cognitivas sino como tres aspectos distintos del proceso de resolución seguido por el alumno.

El constructo visualización aparece no únicamente en la mayoría de estudios acerca de las habilidades espaciales, sino también en muchas de las investigaciones relacionadas con los procesos de resolución de problemas de matemáticas en general.

En este artículo nos centramos en las aportaciones de los trabajos citados en relación a las estrategias de procesamiento dado que son las que influyen en nuestro proceso de formulación de las actividades y su gestión en el aula. El lector puede encontrar información más amplia en las publicaciones citadas.

Para el análisis de las *estrategias de procesamiento* se considera el proceso de resolución del alumno desde el punto de vista del tipo de representación mental utilizada. Se parte de la hipótesis de que la resolución de cualquier problema matemático requiere razonamiento lógico. Además, si todas las actividades que se presentan a los alumnos utilizan soporte visual, el factor que determina el tipo de estrategia de procesamiento del alumno es si utiliza o no imágenes mentales visuales como elemento clave del proceso de resolución.

Las *estrategias de procesamiento* pueden caracterizarse como *visuales* o *no visuales*. Una estrategia de procesamiento se considera visual, cuando el alumno basa su proceso en la imaginación de alguno de los aspectos siguientes: el contexto de la actividad, una rotación o un cambio de posición ya sea del objeto o del propio sujeto. En caso contrario, se considera la estrategia de procesamiento del alumno como no visual. Entre las estrategias de *procesamiento no visual*, son importantes las caracterizadas como estrategias *geométricas*, aquellas en que el alumno resuelve la actividad sin imaginar ninguna situación, basándose en hechos relacionados con las propiedades geométricas que conoce.

Entre los resultados de los trabajos mencionados, un aspecto remarcable desde el punto de vista de su aplicabilidad en el aula es la constatación del importante papel de las características de la actividad como factores que influyen en los procesos de resolución de los alumnos, en sus dificultades y sus errores. Entre las características de una actividad susceptibles de condicionar los procesos de resolución que van a utilizar los alumnos se encuentran la forma de presentación (lenguaje y códigos visuales utilizados), el requerimiento geométrico (proponiendo la situación de forma estática o dinámica), la forma de respuesta (verbal, gráfica o construcción), el contexto de la actividad (próximo o no a la experiencia del alumno) y la acción requerida (acción mental o física que el alumno debe efectuar para resolver la actividad).

Posiblemente, la característica más interesante desde el punto de vista del tema que aquí tratamos, sea la acción requerida por la actividad. Según Leinhardt y otros (1990) la acción requerida puede ser de *interpretación* o de *construcción*. La acción requerida por una actividad es de interpretación cuando el alumno debe dar sentido u obtener información partiendo de un objeto o su representación, requiriendo reaccionar frente a una acción geométrica presentada como finalizada. La acción requerida es de construcción cuando el alumno debe generar un nuevo objeto, ya sea construyéndolo o dibujándolo. Dado el objeto inicial el alumno debe producir el objeto final, efectuando la transformación geométrica, manipulativa o mentalmente, sobre el objeto inicial para generar un nuevo objeto, real, no imaginado. De acuerdo con estos autores, las actividades de construcción requieren, a menudo, de un cierto grado de interpretación, aunque no a la inversa.

...las actividades que se presenten a los alumnos deben ser suficientemente variadas en su enunciado, ya que las características de las actividades condicionan no únicamente el éxito o fracaso de los alumnos sino también los procesos de resolución seguidos y las dificultades encontradas.

Gorgorió (1995), intentando dar respuesta a la necesidad de ayudar a los alumnos a superar las dificultades en los procesos de resolución sin que éstos deban renunciar a sus propios procesos de resolución, hace distintas consideraciones en relación a la gestión en el aula de este tipo de actividades. A continuación presentamos algunos de los aspectos a tener en cuenta en el momento de elaborar y desarrollar propuestas para el aula.

En primer lugar, las actividades que se presenten a los alumnos deben ser suficientemente variadas en su enunciado, ya que las características de las actividades condicionan no únicamente el éxito o fracaso de los alumnos sino también los procesos de resolución seguidos y las dificultades encontradas. Además, como profesores debemos ser conscientes que también nosotros tenemos preferencias en la utilización de determinados tipos de estrategias, preferencias que posiblemente son distintas de las de nuestros alumnos. Tal como afirma Presmeg (1986, 1999), estas diferencias pueden provocar interferencias y ser fuente de conflictos. Por lo tanto, es necesario poner los medios para que los alumnos conozcan la existencia de posibles estrategias distintas, y puedan compartirlas con el profesor y sus compañeros. Además, consideramos imprescindible que el profesor promueva no únicamente la explicitación de las estrategias utilizadas por el alumno, sino que acepte como válidas las que conduzcan a resultados correctos, independientemente de si coinciden o no con las propias. De esta forma facilitamos también la posibilidad de que los alumnos descubran los errores resultado de la aplicación de sus propias estrategias. Por todo ello, creemos que como fuente de riqueza es importante el trabajo en grupos pequeños, formados por alumnos que prefieren utilizar estrategias distintas.

Si las estrategias de procesamiento geométrico pueden ser fácilmente explicitadas en público, no ocurre lo mismo con las de procesamiento visual, ya que la exteriorización de las imágenes visuales mentales utilizadas comporta, a menudo, grandes dificultades. En primer lugar, para favorecer la utilización de estrategias de procesamiento visual, se propone que el profesor acepte como estrategia válida el hecho de imaginar si conduce a resultados correctos, independientemente de si el alumno puede o no explicar en qué consisten sus imágenes mentales. Con la intención de ayudar a los alumnos a superar los posibles errores debidos a la aplicación de estrategias de procesamiento visual se propone que se den oportunidades suficientes a los alumnos de contrastar manipulativamente el resultado de las acciones previamente imaginado.

Algunos de los errores de los alumnos surgen durante la interpretación del enunciado de la actividad o en la explicitación de la respuesta. Tanto el enunciado como la respuesta de la actividad pueden tener contenido figurativo (objetos reales o representaciones) y/o verbal. Para mejorar los aspectos relacionados con la información verbal referida a objetos, relaciones y transformaciones geométricas se propone que el profesor utilice correctamente el lenguaje geométrico específico y fomente la corrección en el que utilizan sus alumnos.

Finalmente, en relación a la información transmitida a través de descripciones gráficas o con modelos, se sugiere que debe hacerse una introducción adecuada a la utilización de los distintos códigos de representación, tal como propone Parzysz (1988). De este modo, creemos que no debe darse por supuesto que los alumnos entenderán y sabrán utilizar una determinada representación de un objeto simplemente por el hecho de haberla visto repetidas veces. Es necesario, por lo tanto, justificar y analizar las convenciones propias de los códigos utilizados, proponiendo a los alumnos que los utilicen para representar distintas situaciones, contrastando la representación con el modelo, que creen nuevos códigos y los expliquen, hecho que facilitará la comprensión de la idea de codificar.

Proceso hacia una secuencia de actividades ricas

El proceso de reflexión sobre nuestra práctica docente nos lleva a la conclusión de que, a menudo, las actividades relacionadas con el componente simbólico/conceptual sugeridas por el currículo intencional y que aparecen en el currículo desarrollado cumplen potencialmente ya varias de las condiciones requeridas para poder ser consideradas actividades ricas. Por otra parte, características como la posibilidad de establecer conexiones o de incorporar conocimientos no escolares, la adecuación a los distintos ritmos, la motivación, la posibilidad de generar preguntas y la reflexión que permiten la interiorización del aprendizaje, son frecuentemente aspectos condicionados por la gestión de la actividad por parte del profesor y la interacción entre contenido y alumno y, por lo tanto, dependen de la actuación docente. Por todo ello, las actividades de nuestra propuesta de implementación no son necesariamente actividades totalmente nuevas, sino que algunas de ellas, en particular las que presentamos, son actividades publicadas en distintos textos, planteadas en el aula desde un nuevo punto de vista, ya que nuestra intención es reflexionar sobre un proceso de enriquecimiento.

Tal como ya hemos expuesto anteriormente, una de las preocupaciones del grupo es la frecuencia con que se interpreta como conocimiento geométrico el conocimiento de conceptos y significados, olvidándose el desarrollo de habilidades y procedimientos. Por este motivo, las actividades de la secuencia didáctica que presentamos están relacionadas con el estudio de las proyecciones y responden a objetivos relacionados con el desarrollo de habilidades y procedimientos de representación e interpretación y de procesamiento visual del espacio tridimensional.

...las actividades de la secuencia didáctica que presentamos están relacionadas con el estudio de las proyecciones y responden a objetivos relacionados con el desarrollo de habilidades y procedimientos de representación e interpretación y de procesamiento visual del espacio tridimensional.

El título genérico adoptado para la secuencia didáctica es «vistas». El nombre nos parece adecuado ya que, en definitiva, la representación plana de un objeto, o de una composición espacial, requiere de una proyección del espacio, y la palabra «vista» resulta comprensiva para el alumno ya que puede relacionarla con sus conocimientos de dibujo y con experiencias de la vida no escolar.

En el momento de fijar el contenido de una actividad y programar su gestión en el aula deben fijarse, de forma concreta, sus objetivos. Para esta secuencia de actividades los objetivos son:

- localización y orientación (utilización de sistemas de referencia);
- interpretación y construcción de representaciones bidimensionales de objetos y situaciones tridimensionales (proyecciones);
- utilización de estrategias de procesamiento visual y de procesamiento geométrico;
- utilización e interpretación de códigos (códigos concretos y significado del concepto de codificación).

La propuesta de trabajo de la que partimos estaba compuesta por 3 actividades[5], concretamente:

El café (figura 2)

Esta actividad requiere una rotación en el espacio a partir de representaciones planas en las que intervienen códigos distintos. Puede ser resuelta a través de una estrategia de procesamiento geométrico o de una estrategia de procesamiento visual en la que el alumno imagina una rotación ya sea del objeto o del propio sujeto. De acuerdo a la caracterización establecida en la sección anterior, esta es una actividad de interpretación planteada estáticamente.

5 La actividad número 1 procede del «Taller de intución espacial» de Floreal Gracia Alcaine (1995*b*). Las actividades 2 y 3 proceden de *Imágenes*, de Floreal Gracia Alcaine (1995*a*), páginas 30 y 93.

Actividad 1

Es tracta d'imaginar un cos des d'un angle diferent al qual es veié, la qual cosa permet desenvolupar la capacitat intuitiva, d'imaginació y ubicació.

En Joan, la Laia, en Pere y la Mercè han anat a prender un cafè. Els quatre amics s'han assegut en una butaca al voltant d'una taula. Tots tenen una vista diferent del objects que hi ha al damunt de la taula.

Identifiqueu la vista particular de cada amic dels objectes que hi ha sobre la taula.

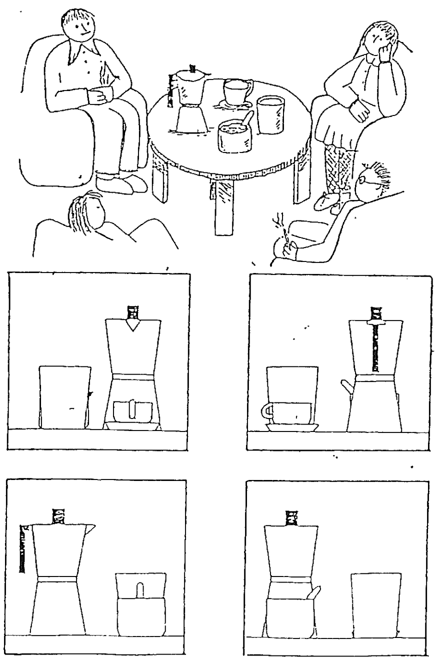


Figura 2

Paseando en barco (figura 3)

Igual que en el caso anterior requiere una rotación en el espacio a partir de representaciones planas en las que intervienen códigos distintos y puede ser resuelta a través de una estrategia de procesamiento geométrico o de una estrategia de procesamiento visual. De acuerdo a la caracterización establecida en la sección anterior, esta es una actividad de interpretación planteada dinámicamente. Por otra parte, para la resolución de esta actividad es necesario que los alumnos vean la necesidad de codificar las fotografías para ordenarlas. Además de establecer el orden en que fueron tomadas las fotografías que depende del sentido del movimiento, es necesario indicar la posición y la dirección en que fue tomada cada una de ellas, con lo cual es necesario la utilización de un tercer tipo de sistema de codificación

Una isla (figura 4)

La tarea planteada en esta actividad requiere, una vez mas, poner en juego estrategias de procesamiento visual y geométrico, coordinándolas, y requiere ubicarse en el espacio. Además requiere un cambio de orientación, no únicamente sobre un plano, sino en el espacio, ya que es necesario considerar en la respuesta puntos de vista situados en el nivel del mar. De acuerdo a la caracterización establecida anteriormente, esta es una actividad de construcción planteada dinámicamente siendo la inversa de la anterior.

Analizadas la secuencia formada por las 3 primeras actividades, teniendo en cuenta sus características, la consideramos incompleta. Creemos que para facilitar los objetivos pretendidos es necesario completar la secuencia con una actividad de construcción en una situación estática y una actividad de interpretación en una situación estática con un mayor nivel de dificultad ya que las características de la actividad condicionan el tipo de estrategias de procesamiento que los alumnos ponen en juego. A partir de esta necesidad se incluyen dos actividades[6] más:

Las casas (figura 4)

Dada la representación de una composición en el espacio, utilizando distintos códigos, esta actividad de interpretación en una situación estática requiere identificar las direcciones desde donde se han tomado los distintos puntos de vista y para su resolución hay que poner en juego estrategias de procesamiento visual y geométrico, ubicarse en el espacio y utilizar diferentes códigos.

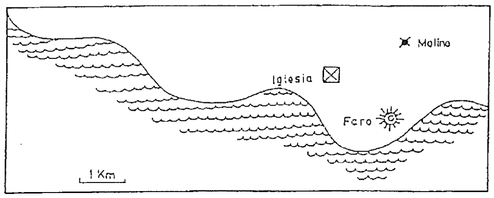
El pueblo (figura 5)

Partiendo de representaciones de un grado de realismo semejante al de la fotografía, la actividad requiere dibujar una proyección plana de una composición en el espacio. La tarea planteada requiere poner en juego estrategias de procesamiento visual y geométrico y ubicarse en el espacio. De acuerdo a la caracterización establecida anteriormente, esta es una actividad de construcción planteada estáticamente. En el momento de incluirla en la secuencia, acordamos que si los alumnos manifiestan serias dificultades permitiremos la construcción de maquetas para facilitar el proceso de resolución.

6 La actividad número 4 procede del «Taller de intución espacial» de Floreal Gracia Alcaine (1995*b*). La actividad número 5 procede de *Imágenes*, de Floreal Gracia Alcaine (1995*a*), página 26.

Actividad 2

El mapa ès una part de l'área costsanera de la mar Mediterrània.



El capità d'un vaixell que passa prop de la costa, realitzá algunes fotografies de construccions que li agradaren. Malauradament, les fotografies caigueren y es barrejaren. En quin odre foren efectuades les fotografies?

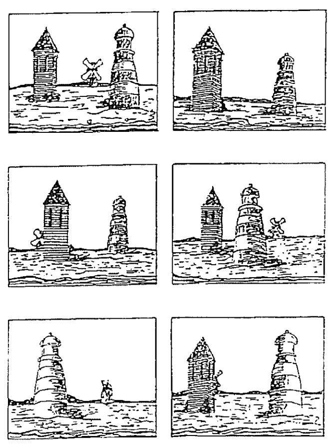


Figura 3

Las actividades de la secuencia didáctica que nos proponemos analizar son ya *a priori* actividades ricas. Responden a objetivos generales de la etapa, con lo cual están directamente relacionadas con el currículo intencional y responden a la introducción de lo que hemos considerado un contenido básico del componente simbólico/conceptual. Además, permiten establecer conexiones, con otras áreas del currículo (educación visual y plástica, tecnología y ciencias sociales), con otros contenidos matemáticos (ángulos, sistemas de referencia, giros, simetrías, movimientos...) y con la experiencia no escolar de los alumnos dado el contexto en que se plantean. La gestión de las actividades en clase, que justificamos y describimos en la sección siguiente, completan los aspectos que nos permiten considerar que esta propuesta contiene lo que llamamos actividades ricas.

Experimentación de la secuencia

Diseñadas las actividades se llevan al aula para su experimentación con distintos grupos de alumnos. El objetivo de la experimentación era doble. Por una parte, analizar su validez como actividades ricas y, por otra, conocer las estrategias y las dificultades de los alumnos. Para ello elaboramos unas pautas de observación en clase y un cuestionario para el alumno que nos permitiera recoger la información deseada a partir de las respuestas de los estudiantes a nuestras cuestiones. Tanto la observación directa como el cuestionario tenían el objetivo de contrastar el aprendizaje esperado por el profesor con lo que el alumno realmente aprendía. Se pretendía establecer las orientaciones y las preguntas que como profesores debíamos dar y plantear para conseguir que el aprendizaje real del alumno fuera significativo y aplicable. Nuestro objetivo era determinar cómo la intervención del profesor podía facilitar que el estudiante fuese capaz de establecer conexiones ricas entre los conocimientos necesarios para, o adquiridos durante, la resolución de las actividades y los conocimientos poseídos, procedentes tanto del conocimiento académico, matemático o no, como de su experiencia en la vida no académica.

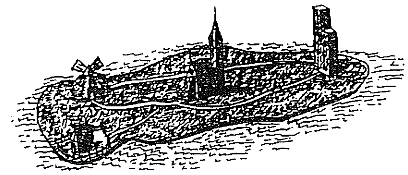
El cuestionario y la tabla de observación estaban destinados a recoger información sobre:

- la comprensión de la tarea propuesta en la actividad;
- las estrategias utilizadas por los alumnos;
- las dificultades que encuentran;
- los conocimientos matemáticos que ponen en juego;
- las relaciones que establecen con conocimientos no matemáticos;
- las conexiones con situaciones no escolares;
- aquello que los alumnos creen que han aprendido;

Tanto la observación directa como el cuestionario tenían el objetivo de contrastar el aprendizaje esperado por el profesor con lo que el alumno realmente aprendía.

Actividad 1

Durant un creuer, visiteu una bonica illa y, per tal de veure-la millor, la rodegue completamet amb el vaixell.



En el recorregut, feu quatre fotografies des de punts diferents. Podrieu dibuixar el que es veuria en cadascuna de les fotografies?

Actividad 4

En aquesta situació, determineu quines vistes corresponen a cada punt.

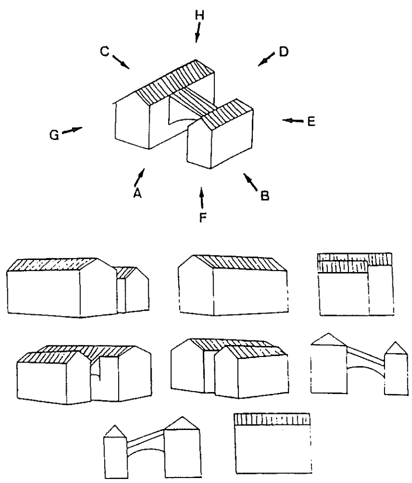


Figura 4

- la valoración de las actividades y las propuestas de cambio.

Para ello, por ejemplo, el cuestionario contenía preguntas como: ¿Has comprendido el enunciado, palabras y representaciones? ¿Cómo has resuelto la actividad? ¿Te has fijado en algún detalle en especial? ¿Te ha recordado alguna situación vivida? ¿Has utilizado algún dibujo para resolverla? ¿Has imaginado alguna situación concreta? ¿Cuál? ¿Has utilizado algo que habías aprendido en clase de matemáticas o de otras asignaturas? ¿Te has «atascado» en algún momento? ¿Cuándo y por qué? ¿Qué crees que has aprendido? ¿Qué valoración darías a la actividad? ¿Qué aspectos crees que deberían cambiarse?

La experimentación de las actividades se desarrolló en distintos grupos clase, de diferentes niveles, en los que el profesor era miembro del grupo de trabajo. En general, se dejan al profesor las decisiones relativas a la organización de la clase en función del método con el que los alumnos están más familiarizados. De esta forma, los alumnos trabajan o bien en pequeño grupo, o bien individualmente aunque, en este caso, se les permite comentar y discutir entre ellos. En todos los casos, la secuencia se cierra con una puesta en común. En general, las actividades no tienen relación con la programación de matemáticas seguida en el momento en que se realizan y se presentan a los alumnos como actividades experimentales que se están desarrollando en un grupo de IES, como parte de un trabajo de innovación en el aula, y se les pide su colaboración.

El papel del profesor consiste, en general, en presentar las actividades, responder y orientar a los alumnos, aunque sin darles la respuesta, y conducir una reflexión final en un marco más amplio de resolución de problemas y hábitos de trabajo y estudio. El material del que disponen los alumnos son los instrumentos habituales de dibujo y el material de aula. En relación a la evaluación formal, la que se comunica a los alumnos, se considera, por una parte, la realización correcta de la actividad y, por otra, tanto las estrategias y procedimientos utilizados como las conexiones entre conceptos establecidas por los alumnos.

Las actividades se pasaron a dos grupos de 2.° de ESO del IES Voltrera de Abrera, dos grupos de 4.° de ESO del IES Pompeu Fabra de Martorell, un grupo de 4.° de ESO del IES Jaume I de Salou, un grupo de 4.° de ESO del IES Gabriel Ferrater de Reus y un grupo de alumnos de 4.° de ESO del IES Dolors Mallafrè de Vilanova i la Geltrú.

A continuación presentamos, para cada una de las actividades, un resumen de las estrategias de los alumnos, así como el nivel de éxito, en el sentido de «completación correcta de la actividad», y la valoración asignada por los alumnos a las distintas actividades.

El café

En relación a las estrategias más comunes, la mayoría de los alumnos afirma haber imaginado estar en la situación de los personajes y algunos afirman haberse fijado en el asa de la cafetera como punto de referencia. Por lo que se refiere a las relaciones establecidas con otras situaciones, algunos alumnos dicen que la distribución de los perso-

Actividad 5

Disposem de quatre fotografies d'un poble. Podríeu dibuixar-ne el plànol?

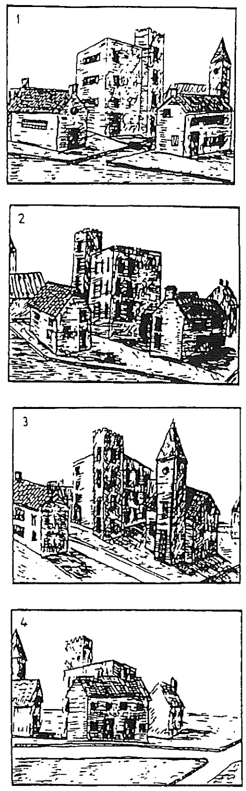


Figura 5

najes es análoga a la de los participantes en un juego de naipes. Los alumnos más jóvenes valoran con una puntuación muy alta esta actividad, sin embargo gran parte de los mayores la valoran poco, posiblemente por considerarla demasiado fácil. El nivel de éxito alcanzado por los alumnos en esta actividad es considerablemente alto.

Paseando en barco

La mayoría de los alumnos afirman resolver la actividad imaginando el desplazamiento del barco fijando la posición de alguno de los edificios, en particular, el molino. Los alumnos explicitan que necesitan conocer el sentido del desplazamiento y, en general, lo toman de izquierda a derecha. Los alumnos refieren que la situación les recuerda a la de un viaje en barca o en coche. Una gran mayoría de los alumnos de 4.° resuelven el problema, mientras que entre los jóvenes el éxito no llega al 50%. Esta actividad es valorada positivamente tanto por los alumnos de 2.°, como por los de 4.°, siendo estos últimos quienes la valoran más.

Una isla

De los alumnos de 2.° casi la mitad dibujan edificio por edificio, como estrategia cómoda frente a una tarea que no saben como atacar y los demás intentan resolverlo utilizando los códigos de la perspectiva, aunque, en general, el resultado es pobre. La mayoría de los de 4.° resuelven correctamente la actividad, o bien imaginando la situación o bien construyendo una maqueta que la represente con los materiales disponibles en el aula. En general, los alumnos manifiestan que la falta de calidad en el dibujo dado en la actividad resulta una dificultad para su trabajo. La situación les recuerda un viaje en coche y, a algunos, la ciudad donde está su centro. Sólo los alumnos mayores valoran bien esta actividad, aunque su puntuación no es la máxima.

Las casas

Los alumnos que resuelven la actividad dicen que imaginan que están situados en la posición indicada por las flechas, y utilizan códigos simbólicos (letras y números) para indicar las respuestas. El éxito entre los alumnos de 2.° no llega al 50%, mientras que entre los mayores es muy alto. Una vez más, únicamente los alumnos mayores valoran bien esta actividad, aunque su puntuación no es la máxima

El pueblo

La mayoría de alumnos de 2.° abandona rápidamente la actividad y los pocos que lo intentan no consiguen resolverla correctamente. También para los alumnos de 4.° esta actividad resulta difícil, menos de la mitad la resuelven con éxito. Para ello utilizan distintas estrategias, imaginar la situación vista desde un punto determinado o la imagen en movimiento, construir una maqueta con el material disponible en el aula o comparar la situación con una real. A pesar de su dificultad, la actividad es muy bien valorada entre los grupos de los mayores y les motiva.

Observaciones y resultados

Las actividades propuestas motivaron a los alumnos, ya que permiten su creatividad, sin tener que restringirse a un proceso de resolución algorítmico, previamente establecido y dirigido. En general, los alumnos se manifiestan muy creativos, inventando estrategias y procedimientos, muchos de ellos realmente sorprendentes para el profesor.

Sin embargo, la mayoría de las veces son incapaces de describir, de forma rigurosa, sus procesos de resolución, posiblemente porque no son conscientes de ellos. Por ello, la clasificación de las estrategias que utilizan no es más que el resultado de nuestra interpretación, a partir del conocimiento teórico, de las preguntas y comentarios que los alumnos hacen, y de la observación de sus procedimientos explícitos. De esta forma, observamos que en el desarrollo de las actividades por parte de ellos aparecen distintos tipos de estrategias:

- de procesamiento visual, imaginando una situación estática (por ejemplo. sentados alrededor de la mesa)o dinámica (por ejemplo. el desplazamiento del barco);
- de aproximación, tanto global, como parcial, fijándose en un elemento concreto (por ejemplo. el molino);
- de estructuración, en general relacionando la actividad con una situación real.

Constatamos, en primer lugar, que las estrategias que utilizan los alumnos están inducidas, en cierto modo, por la propuesta de la actividad. De esta forma, un desplazamiento incita estrategias dinámicas de procesamiento visual, mientras que una situación estática se resuelve mayoritariamente a través de estrategias de procesamiento visual estáticas. Además, las estrategias utilizadas pueden, en algunos casos, ser estrategias inesperadas por parte del profesor lo cual reafirma la importancia de que el profesor esté abierto a aceptar como válidas estrategias distintas de las propias si llevan a resultados correctos. Por otra parte, observamos que los alumnos, ante la dificultad de resolver una situación, son capaces de reconvertir la acción requerida por la actividad. Por ejemplo, al ser incapaces de imaginar la situación propuesta en las actividades 4 o 5, deciden construir una maqueta, con lo cual la necesidad de imaginar puede ser resuelta a partir de la observación directa de una situación real que la representa.

Las actividades propuestas motivaron a los alumnos, ya que permiten su creatividad, sin tener que restringirse a un proceso de resolución algorítmico, previamente establecido y dirigido. En general, los alumnos se manifiestan muy creativos, inventando estrategias y procedimientos, muchos de ellos realmente sorprendentes para el profesor.

Por otra parte, en ningún caso aparecen espontáneamente estrategias de procesamiento geométrico. En general, los alumnos no relacionan, a menos que se les pida, la actividad con otros conocimientos matemáticos, excepto con aquellos con los cuales la relación es directa y evidente, por ejemplo con el proceso de elaboración de mapas, que, para algunos «no son matemáticas» y si las aceptan como tal es «porque las ha dado el profesor de matemáticas» ya que han desarrollado actividades parecidas con anterioridad en las áreas visual y plástica o ciencias de la naturaleza.

No obstante, al proponer a los alumnos que reflexionasen y preguntarles qué conceptos matemáticos estaban relacionados con las actividades y qué habían aprendido, ven relaciones con la traslación (sentido y dirección), la orientación y la posición (sistemas de referencia), los giros (ángulos), las simetrías, la representación plana de objetos tridimensionales (proyección y perspectiva), la utilización de códigos (numéricos y alfabéticos) y la semejanza (escalas), los mayores expresándolo en un lenguaje bastante adecuado, mientras que los de 2.° utilizan frases del estilo «ver el mismo elemento en distintas vistas» o «que una figura tiene más de una perspectiva».

En general, durante la experimentación se revela como muy importante el papel del profesor como conductor del aprendizaje. Actividades, interesantes *a priori* pueden no conseguir que los alumnos aprendan sin una intervención adecuada del profesor. Observamos, por ejemplo, que con frecuencia aunque los alumnos lleguen a la solución del problema no saben si el resultado obtenido es solución del problema, ni tampoco por qué es correcta. Además, en el caso de situaciones abiertas, les resulta difícil aceptar que un problema pueda tener soluciones diversas.

La valoración que los alumnos asocian a las actividades, junto con sus comentarios, en relación con el rendimiento en las actividades nos lleva a pensar que, los menores valoran las actividades en función del éxito que tienen en ellas, mientras que para los de 4.° la valoración va asociada al reto que les plantea la actividad. Además de suponer un reto para los alumnos, las actividades no deben ser ni demasiado fáciles ni demasiado difíciles, sino que, si se pretende un aprendizaje real, deben ser próximas a sus posibilidades a la vez que les supongan un reto. Observamos también que al aumentar el nivel de dificultad de una actividad aumenta la variedad y riqueza de las estrategias que aparecen en los procesos de resolución.

Durante la experimentación constatamos también la importancia de que las actividades estén formuladas con un lenguaje que resulte claro para los alumnos. En particular, observamos que era necesario mejorar la calidad de las imágenes que aparecían en las actividades (somos conscientes de que en publicaciones posteriores algunas de estas actividades deben aparecer ya modificadas). Algunas de ellas llevaban a confusión a los alumnos y podían prestarse a distintas interpretaciones y, por lo tanto, a resultados erróneos.

Conclusiones

Después de este periodo de experimentación, creemos que la organización del currículo a partir de secuencias de «actividades ricas» puede facilitar que la geometría en la enseñanza sea algo más que una «lista de nombres, una colección de fórmulas para calcular áreas y volúmenes, el enunciado del teorema de Pitágoras y su aplicación a un listado de ejercicios». Las «actividades ricas» permiten la conexión del conocimiento geométrico con la experiencia y conocimientos previos de los alumnos, con otros aspectos de las matemáticas, con otras áreas del currículo y con el entorno. El establecimiento de estas conexiones podría conseguir que los alumnos llegasen a una interpretación más rica del significado y aplicabilidad de las matemáticas, interpretación especialmente interesante en un momento en que la Reforma nos permite poner énfasis en los procedimientos y en la adquisición de conocimientos globalizados.

Las «actividades ricas» resultan, a nuestro entender, motivadoras para los alumnos, especialmente porque resultan un reto para ellos ya que requieren que éstos pongan en juego su creatividad y van más allá de procesos algorítmicos rutinarios. Creemos que el esfuerzo para adaptar las múltiples e interesantes actividades, conocidas ya por el profesor, para convertirlas en «actividades ricas», puede favorecer el aprendizaje de los alumnos y la satisfacción de todos los implicados en el proceso de enseñanza.

En este proceso, el papel del profesor, como incitador, moderador y estructurador de la dinámica de la clase y de los procesos de aprendizaje de los alumnos, es de gran importancia. A él corresponde no sólo adaptar las actividades al currículo y sus objetivos, sino también adecuar su intervención de tal forma que las tareas que proponga a sus alumnos lleguen a ser realmente «actividades ricas». Una actividad interesante *a priori* llegará a ser una «actividad rica» únicamente cuando el profesor proponga las cuestiones necesarias para que los alumnos puedan establecer conexiones y elaborar conclusiones y principios teóricos. Sin la intervención adecuada del profesor las actividades potencialmente «ricas» pueden ser intranscendentes para el aprendizaje del alumno. A él le corresponde el reto de dinamizar, fomentar y estructurar el proceso de aprendizaje.

Las «actividades ricas» permiten la conexión del conocimiento geométrico con la experiencia y conocimientos previos de los alumnos, con otros aspectos de las matemáticas, con otras áreas del currículo y con el entorno.

En la introducción de este artículo, mencionábamos las dificultades que los profesores encontramos en el momento de plantearnos la concreción de un currículo de geometría básico y coherente. Desde este punto de vista, consideramos que el trabajo desarrollado en grupo en colaboración, profesores e investigadores en educación matemática, permite, a partir de la discusión conjunta, encontrar puntos de contacto para elaborar criterios que faciliten la concreción del currículo y su adecuación a la realidad de nuestras aulas.

Tal como indicábamos también al inicio de este escrito, otro de los retos al que se enfrentan los profesores está relacionado con la dificultad para encontrar referencias teóricas que clarifiquen los procesos de los alumnos en el desarrollo de actividades geométricas. Si se contrastan los conocimientos que los docentes tienen, respecto a este tema, en los aspectos de aritmética o álgebra con los de geometría se observa que son pocos los documentos al alcance del profesor de secundaria que le permiten interpretar los procesos de conocimiento de los alumnos. Desde esta perspectiva el trabajo desarrollado en el grupo Menaecme ha sido realmente interesante, ya que ha permitido contrastar las aportaciones teóricas provenientes de la investigación con la realidad del aula.

Como resultado de este contraste, comprendemos mejor los procesos de conocimiento de los alumnos, en particular, la importancia de que el profesor facilite la explicitación de modelos y estrategias de resolución distintas a las propias, cómo las características de la actividad condicionan o limitan los procesos de resolución y las dificultades de los alumnos y la necesidad de presentar las tareas de la forma más clara posible, especialmente la información a través de imágenes. Además, somos más conscientes de la necesidad de que desde la investigación se contribuya a la creación de útiles que ayuden realmente al profesor y, en particular, creemos que la investigación en colaboración puede ser un camino para ello.

El contraste entre teoría y práctica es también interesante desde otra perspectiva. Con frecuencia, el investigador desarrolla sus estudios alrededor de un tema relacionado con la docencia, pero en un marco muy distinto, trabajando con alumnos en situaciones empíricas muy distantes de la situación real del aula, y publica los resultados en revistas divulgativas de carácter científico. Sin embargo, y debido a la distancia entre el carácter empírico y la realidad docente, el investigador se cuestiona con frecuencia la utilidad real de sus esfuerzos. Por otra parte, los profesores al leer dichas publicaciones, en las que espera encontrar respuestas a sus dificultades en el aula, sienten con frecuencia que aquellas tienen un carácter excesivamente teórico que no contempla las posibilidades reales en el aula.

Desde este punto de vista, el trabajo del grupo Menaecme ha sido realmente interesante dado que ha permitido un intercambio real entre profesores e investigadores, permitiendo analizar cuáles de las preguntas del ámbito de la investigación eran realmente significativas para la práctica del aula y cómo sus resultados facilitaban la tarea de los docentes aportando modelos a los profesores para la comprensión de los procesos de los alumnos. Sin embargo, debemos reconocer que este tipo de estudios en colaboración tiene también dificultades, tanto de carácter práctico, por ejemplo las relativas a la dedicación o a las limitaciones de la experimentación, como las relacionadas a la compatibilización de intereses o registros de lenguaje. A pesar de ello, creemos importante que desde la administración educativa, desde las universidades y desde el ámbito de la formación permanente se facilite el desarrollo de este tipo de estudios ya que los resultados son realmente enriquecedores, no sólo para el grupo que los desarrolla sino también para el colectivo de profesores e investigadores en general.

...el trabajo del grupo Menaecme ha sido realmente interesante dado que ha permitido un intercambio real entre profesores e investigadores, permitiendo analizar cuáles de las preguntas del ámbito de la investigación eran realmente significativas para la práctica del aula y cómo sus resultados facilitaban la tarea de los docentes aportando modelos a los profesores para la comprensión de los procesos de los alumnos.

Núria Gorgorió
Francesca Artigues
Francesc Banyuls
David Moyano
Núria Planas
Montse Roca
Àngel Xifré

Bibliografía

BISHOP, A. (1982): *Towards relevance in the teaching of geometry*, Conferencia plenaria en Conference on Geometry Teaching, International Comission on Mathematics Instruction, Mons, Belgica, Agosto 1982.

BISHOP, A. (1988): *Mathematical Enculturation: a cultural perspective on mathematics education*, Kluwer, Dordrecht.

BISHOP, A. (1998): «Equilibrando las necesidades matemáticas de la educación general con las de la instrucción matemática de los especialistas», *Suma*, n.° 27, 25-37.

BROOMES, D. (1989): *Using goals to construct useful forms of school mathematics*, UNESCO, Col. Science and Technology Education, Document Series, n.° 35, Paris.

GRACIA ALCAINE, F. (1995): *Imágenes*, Proyecto Sur de Ediciones, Granada.

GRACIA ALCAINE, F. (1995): «Taller de intución espacial», en *Séptimas JAEM*, Madrid.

GORGORIÓ, N. (1995): *Estratègies, dificultats i errors en els aprenentatges de les habilitats espacials*, Tesi Doctoral, Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona. Universitat Autònoma de Barcelona.

GORGORIÓ, N. (1998): «Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems», *Educational Studies in Mathematics*, n.° 35, 207-231.

GORGORIÓ, N. y A. BISHOP (1998): *La geometria en el currículum 12-16*, *Biaix*, 12, Mayo 98.

LEINHARDT, G., O. ZASLAVSKY Y M. K. STEIN (1990): «Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching.' *Review of Educational Research*, n.° 60(1), 1-64.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1989): *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, N.C.T.M., Reston, Virginia,

PARZYSZ, B. (1988): «"Knowing" vs "Seeing". Problems of the Plane Representation of Space Geometry Figures», *Educational Studies in Mathematic*, 19(1), 79-92.

PRESMEG, N., (1986): «Visualisation in high school mathematics», *For the Learning of Mathematics*, n.° 6(3), 43-44.

PRESMEG, N. (1999): «Las posibilidades y peligros del pensamiento basado en imágenes en la resolución de problemas matemáticos», *Suma*, 32, Noviembre 1999.

ROBITAILLE, D. y M. DIRKS (1982): «Models for the Mathematics Curriculum», *For the Learning of Mathematics*, n.° 2, 3, 3-21.

USISKIN, Z. (1987): «Resolving the Continuing Dilemma in School Geometry», en M. M. LINDQUIST y A. P. SHULTE, (Eds.), *Learning and Teaching Geometry*, K-12, N.C.T.M., Reston, Virginia.

GEOMETRÍA

POR

D. JUAN B. PUIG

Director de las Escuelas de la Beneficencia de Zaragoza

GRADO ELEMENTAL

GEOMETRÍA INTUITIVA

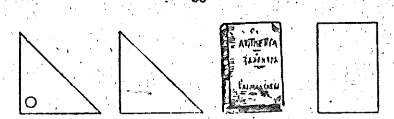
400 GRABADOS

10.ª EDICIÓN

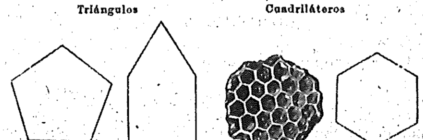
De texto por R. O. de 24 de mayo de 1909

GERONA – DALMÁU CARLES, PLA, S. A. – EDITORES

Geometría
Juan B. Puig
Dalmáu Carles, Editores
Gerona, 1924



Triángulos Cuadriláteros

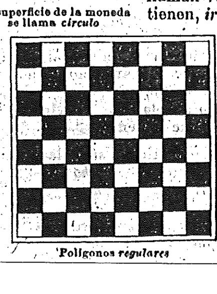


Pentágonos Exágonos

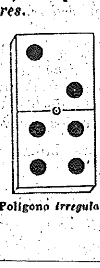
La superficie de la moneda se llama *círculo*

4. Si el polígono es como las monedas o las hostias, *de infinitos lados*, se llama *círculo*, que es la *superficie encerrada dentro de la circunferencia*.

5. Los polígonos que tienen sus lados y ángulos iguales, se llaman *regulares;* los que no los tienen, *irregulares*.

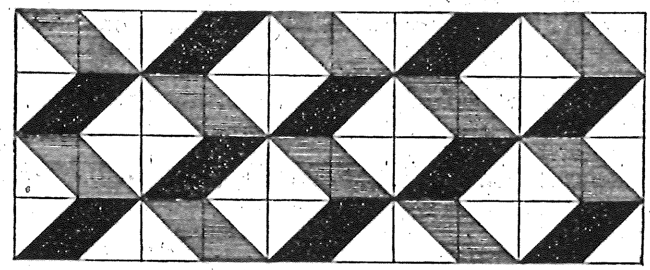


Polígonos *regulares*

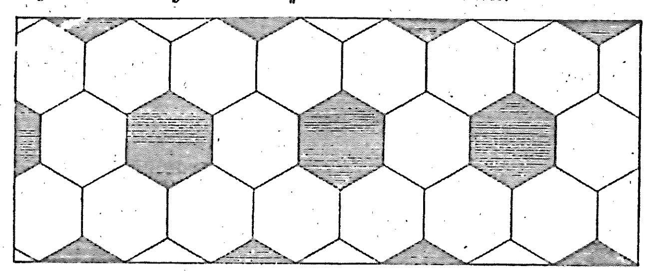


Polígono *irregular*

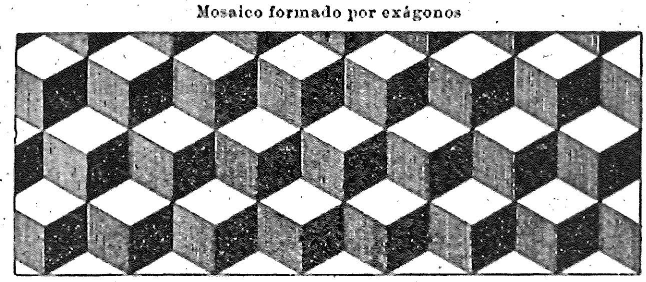
y si después llenas de tinta los romboides que no has sombreado, te saldrá el siguiente mosaico):



41. Las combinaciones de polígonos que pueden formarse, no acaban nunca. Repara en los dibujos que siguen, y, para saber trazarlos, *no lo mires todo de una vez; ve hallando, en ellos, cosas; poco a poco haz lo que vayas viendo*, y los dibujarás con facilidad.



Mosaico formado por exágonos



Mosaico formado por exágonos y rombos

SUMA 33
febrero 2000, pp. 73-81

Las ideas de los alumnos respecto de la dependencia funcional entre variables

Carme Vall de Pérez
Jordi Deulofeu

ARTÍCULOS

Se describe una investigación cuyo objetivo general consiste en estudiar las ideas de los alumnos de secundaria respecto una noción importante en matemáticas, la dependencia funcional entre variables. Para una aproximación realista al objeto de esta investigación, se ha particularizado el estudio a dos variables, con una relación de dependencia expresable mediante una ecuación sencilla, y en situaciones caracterizadas por un contexto geométrico.

COMO TODOS SABEMOS, el concepto de función está presente en los currículos escolares de los distintos niveles de enseñanza, dada su gran importancia en la construcción del conocimiento matemático. Además, debido a su naturaleza unificante y generadora de modelos, las funciones son utilizadas en casi todos los campos de la ciencia. Los enseñantes de matemáticas sabemos también que, desde el punto de vista de su enseñanza-aprendizaje, éste es un concepto muy complejo. Ello es debido a su relación con muchos otros conceptos (variable, dominio, etc.) y a la diversidad de lenguajes de representación –tabla, gráfico, ecuación, descripción verbal– que admiten las funciones. Por otra parte, estas características originan también su gran potencia como instrumento matemático.

En los últimos años, han sido numerosos los estudios sobre los aspectos psicológicos del aprendizaje de las matemáticas y, como consecuencia de ello, la importancia de la actividad mental constructiva del alumno es hoy un principio ampliamente compartido. Este principio lleva a entender el aprendizaje, no como una adquisición acumulativa de conocimientos y habilidades sino como un proceso de construcción del conocimiento. Por tanto, conocer mejor los procesos mediante los cuales los alumnos aprenden matemáticas, profundizar en la comprensión de las ideas de los alumnos, nos permitirá después tener elementos para mejorar la enseñanza que impartimos en las aulas.

Desde la perspectiva que acabamos de exponer, y desde nuestra condición de enseñantes de matemáticas en educación secundaria, hemos realizado una investigación sobre las ideas de los alumnos respecto a la dependencia funcional entre variables, investigación que describimos en este artículo.

El aprendizaje de las matemáticas. La construcción de conceptos

Exponemos a continuación algunas de las teorías que se utilizan en la investigación de los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de conceptos matemáticos, y que hemos utilizado como marco teórico de nuestro estudio.

Diversos autores se refieren a la diferencia entre los conceptos matemáticos definidos formalmente y los procesos cognitivos utilizados para concebirlos. Tall y Vinner (1981) establecen una distinción entre:

- La *definición del concepto* (*concept definition*): una secuencia de palabras, una definición verbal que explica el concepto con precisión. Puede distinguirse entre las definiciones formales, aceptadas por la comunidad científica, y las definiciones personales que utilizan los individuos.
- La *idea del concepto* o *esquema conceptual* (*concept image*) que tiene una persona sobre un concepto matemático. Esta expresión describe la estructura cognitiva del individuo asociada al concepto, e incluye todas las imágenes mentales (en cualquier representación: simbólica, gráfica,...) junto con las propiedades y los procesos asociados a dicho concepto. Estos autores explican que la idea del concepto (*concept image*) se construye a través de experiencias de todo tipo y va cambiando cuando el individuo encuentra nuevos estímulos; puede no ser coherente globalmente y tener aspectos que difieran bastante de la definición formal del concepto.

Unos años más tarde, Vinner y Dreyfus (1989) añaden que la idea conceptual de un individuo es el resultado de su experiencia con ejemplos y contraejemplos del concepto, y derivan una serie de consecuencias para la enseñanza: la necesidad de dedicar tiempo a observar y comprender las ideas y comportamientos espontáneos de los estudiantes ante los problemas de matemáticas, y la importancia de tener en cuenta estas ideas y comportamientos en los métodos de enseñanza.

Otros autores –Artigue (1990), Sfard (1991)– utilizan los términos *concepto matemático* y *concepciones* de los alumnos. Con el primero designan las ideas matemáticas oficiales y con el segundo las representaciones internas. Nos parece especialmente interesante la definición que Michelle Artigue, después de analizar su origen y evolución en la comunidad didáctica francesa, da de estos dos términos:

De la misma manera que en un *concepto matemático* se distingue:

- la noción matemática tal como se define en el contexto del «savoir savant» de una época dada,
- el conjunto de significantes asociados al concepto,
- la clase de problemas en cuya resolución adquiere sentido,
- los instrumentos: teoremas, técnicas algorítmicas, específicas del tratamiento del concepto; en las *concepciones* de los sujetos se distinguirán diversas componentes y, en particular:
  - la clase de situaciones-problema que dan sentido al concepto para el alumno,
  - el conjunto de significantes que es capaz de asociarle, en particular las imágenes mentales, las expresiones simbólicas,
  - los instrumentos, teoremas, algoritmos de que dispone para manipular el concepto.

Diversos autores se refieren a la diferencia entre los conceptos matemáticos definidos formalmente y los procesos cognitivos utilizados para concebirlos.

Por otra parte, Sfard (1991) también distingue el *concepto* matemático, término con que designa las ideas matemáticas como constructos teóricos que forman parte de lo que llama «universo formal del conocimiento ideal», de la *concepción, término* que utiliza para referirse al conjunto de representaciones y asociaciones internas del individuo que evoca el concepto. Una característica del conocimiento matemático es que la mayoría de nociones pueden jugar un papel de procesos u objetos, según la situación del problema o la conceptualización del estudiante. Por ejemplo, la noción de función puede considerarse como un conjunto de pares ordenados siguiendo la definición de Bourbaki, o bien se puede considerar como un proceso computacional, remarcando su aspecto operacional, con una definición históricamente más antigua, pero no menos interesante desde el punto de vista del aprendizaje del concepto. Siguiendo esta línea, Sfard establece dos tipos de concepciones: las *concepciones estructurales*, cuando se consideran las nociones matemáticas como objetos abstractos, y las *concepciones operacionales*, cuando se tratan las nociones matemáticas como procesos, algoritmos y acciones. Si miramos el proceso de formación de los conceptos matemáticos a lo largo de la historia, vemos que las concepciones operacionales preceden a las estructurales, que las nociones –por ejemplo: número, función,...– se han concebido primero operacionalmente y después de un proceso con sucesivas secuencias de abstracción se llega a la definición y concepción estructural que reconoce un nuevo objeto matemático. En el proceso de aprendizaje individual parece que se sigue la misma norma: la concepción operacional es un primer estadio –necesario e imprescindible– en la adquisición de una idea matemática nueva, lo cual entra en contradicción con cualquier enseñanza que introduzca los conceptos nuevos mediante definiciones formales acabadas, sin ninguna referencia explícita a los procesos relacionados con ellos.

Debemos añadir que las dos concepciones no son excluyentes entre sí, sino que son complementarias y «la habilidad para ver una función o un número de ambas formas, como un proceso o como un objeto, es indispensable para una comprensión profunda de las matemáticas».

Objetivos del estudio

Como decíamos en la introducción, en nuestra investigación nos hemos propuesto como objetivo general estudiar las ideas de los alumnos de secundaria respecto una noción importante en matemáticas, la dependencia funcional entre variables. Para aproximarnos de manera realista al objeto de nuestra investigación, hemos particularizado el estudio a dos variables, con una relación de dependencia expresable mediante una ecuación sencilla, y en situaciones caracterizadas por un contexto geométrico. Y hemos concretado el objetivo general en:

- Analizar y clasificar las estrategias que utilizan los estudiantes para conocer la relación de dependencia entre dos variables, a partir de un enunciado en lenguaje natural que se refiere a una situación de contexto geométrico.
- Analizar y clasificar las predicciones que realizan los alumnos respecto a la variación de una variable en situaciones de dependencia funcional expresable mediante una ecuación sencilla, y las argumentaciones o justificaciones en que basan sus predicciones.

Las ideas de los alumnos las conocemos a través de sus actuaciones y de sus explicaciones sobre ellas.

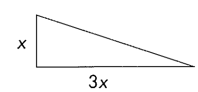
Como consecuencia de los análisis anteriores, también queremos conseguir clasificar las concepciones de los alumnos en diferentes categorías, según la estrategia que utilicen para determinar la relación entre las cantidades variables, y según sus argumentaciones sobre el significado de la relación.

El instrumento para la obtención de datos: una selección de problemas

Las ideas de los alumnos las conocemos a través de sus actuaciones y de sus explicaciones sobre ellas. Por ello elaboramos un cuestionario con unos problemas como primera aproximación hacia el objeto de nuestro estudio (Figura 1). Este primer cuestionario fue suministrado a

Problema A

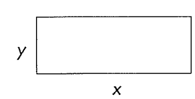
Consideremos un triángulo rectángulo tal que la longitud de un cateto es el triple de la longitud del otro.



Este es un dibujo que representa la situación

Problema B

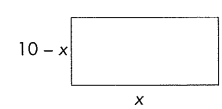
Consideremos un cuadrilátero rectángulo de 36 cm^2 de superficie. Queremos estudiar cómo cambia la altura del rectángulo cuando variamos la longitud de la base.



Este es un dibujo que representa la situación

Problema C

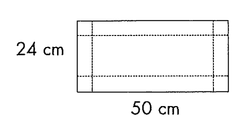
Consideremos un cuadrilátero rectángulo de 20 cm de perímetro. Queremos estudiar cómo cambia la superficie cuando variamos la longitud de los lados.



Este es un dibujo que representa la situación

Problema D

Construimos una caja sin tapa a partir de una cartulina rectangular de 50 cm de longitud y 24 cm de anchura. Lo hacemos recortando un cuadrado de cada esquina y luego doblando hacia arriba las pestañas. Queremos estudiar cómo cambia el volumen de la caja cuando variamos la longitud del lado del cuadrado que recortamos.



Este es un dibujo que representa la situación

Figura 1

diez alumnos de tercero de BUP cerca del final de curso, y los resultados que obtuvimos nos sirvieron para comprobar la validez del cuestionario como instrumento de obtención de datos y, a su vez, para revisar la formulación de algunos aspectos de los problemas. El cuestionario con el que realizamos la experiencia estuvo listo a principios del curso siguiente, por lo que decidimos suministrarlo a alumnos de COU, ya que su situación sería similar a la de los alumnos del estudio-piloto. La muestra elegida estuvo formada por 60 alumnos de COU, 33 de los cuales cursaban las opciones A o B (Ciencias) y los restantes 27 cursaban la opción C (Letras). Este cuestionario está formado por cuatro problemas. Cada problema consta de una breve presentación (3 a 5 líneas) sobre una situación de contenido geométrico sencillo y de un dibujo que representa la situación.

Las cuestiones planteadas en cada uno de los cuatro problemas tienen la misma estructura, que consiste en:

- *Apartado 1.* Completar una tabla donde hay unos valores numéricos de x ordenados de forma creciente.
- *Apartado 2.* Explicar detalladamente cómo se han hallado los valores numéricos de la tabla.
- *Apartado 3.* Escribir una ecuación que permita hallar el valor numérico de la variable dependiente a partir de un valor numérico de la variable x.
- *Apartado 4.* Explicar qué pasaría con el valor de la variable dependiente si seguimos aumentando el valor numérico de x, y explicar en qué se basan para realizar esta predicción.

Podemos resumir la estructura de los problemas con el siguiente esquema:

Situación + Dibujo —> Tabla y explicación —> ecuación —> Predicción y justificación

Como vemos, los cuatro apartados piden tareas distintas, pues en los apartados 1 y 3 se proponen tareas cerradas: completar una tabla de valores numéricos. escribir una ecuación, mientras que en los apartados 2 y 4 se proponen cuestiones abiertas: explicar el procedimiento utilizado para calcular los valores de la tabla, realizar una predicción y justificarla. Ha sido, sobre todo, en las respuestas a estas preguntas abiertas donde hemos encontrado una interesante información sobre las concepciones de los alumnos.

El análisis de los datos

En este trabajo de investigación no teníamos ninguna hipótesis que verificar sobre las ideas de los alumnos ni tampoco ningún esquema previo de interpretación de datos en las preguntas abiertas. Ha sido a partir de repetidas lecturas a las respuestas literales a los problemas que nos hemos familiarizado con ellas, hasta captar sus principales características y llegar a establecer criterios de clasificación.

Ha sido, sobre todo, en las respuestas a estas preguntas abiertas donde hemos encontrado una interesante información sobre las concepciones de los alumnos.

El primer apartado consistía en completar una tabla de valores numéricos, es una tarea que los alumnos realizan correctamente en los tres primeros problemas (sólo hubo una respuesta incorrecta al problema A y otra al problema B). El problema D presenta más dificultad, y hay tres respuestas en blanco y diez incorrectas. Que los alumnos respondan correctamente el primer apartado de los problemas es un resultado que no nos sorprendió, y nos permite asegurar que las dificultades que puedan aparecer en los otros apartados no dependen de la comprensión de la situación, exceptuando el último problema. Esta uniformidad, sin embargo, existe solamente en los resultados dados por los alumnos: los procedimientos utilizados para hallarlos pueden ser muy distintos, como demuestran las respuestas al segundo apartado de los problemas.

El segundo apartado de cada problema pide a los alumnos que expliquen detalladamente cómo han hallado los valores numéricos de la tabla. Los problemas A, C y D tienen una estructura multiplicativa, mientras que en el problema B, la operación que se realiza para hallar los valores es una división. Por ello, hemos podido clasificar las respuestas a los problemas A, C y D siguiendo el mismo criterio, mientras que el criterio seguido en el problema B es ligeramente distinto. La principal característica que diferencia las respuestas de los alumnos tiene que ver con la utilización del lenguaje algebraico. Así, mientras algunos alumnos no utilizan este lenguaje en su explicación y dan simplemente como respuesta en el problema A «multiplicando la base por la altura y dividiendo por dos», otros explican que hallan los valores numéricos de la tabla sustituyendo el valor de x en la fórmula $S = 3x^2/2$. Hay también alumnos que utilizan el lenguaje algebraico sin llegar a escribir la fórmula anterior, y explican que multiplican los catetos x y $3x$, y luego dividen por 2, algunos de estos alumnos escriben la fórmula $S = 3x{\cdot}x/2$. Teniendo en cuenta estas características de las respuestas hemos establecido tres categorías:

- *Algebraica-objeto*. Engloba a las respuestas que calculan los valores numéricos utilizando la ecuación algebraica que relaciona las dos variables expresada en forma de polinomio. En el problema A esta ecuación es $S = 3x^2/2$, en el problema C es $S = 10x{\cdot}x^2$, y en el problema D es $V = 4x^3 - 148x^2 + 1200x$.
- *Algebraica-proceso*. Se refiere a las respuestas que utilizan el lenguaje algebraico para explicar el procedimiento seguido para completar la tabla, pero sin escribir la ecuación que caracteriza la categoría anterior. En el problema A designan a los catetos con los símbolos x y $3x$, en el problema C indican la base y la altura del rectángulo con los símbolos x y $10 - x$, y en el problema D representan las dimensiones de la caja con los símbolos x, $50 - 2x$ y $24 - 2x$. En muchas de las respuestas de esta categoría está escrita la ecuación algebraica que relaciona las dos variables expresada en forma de producto, esta ecuación es $S = 3x{\cdot}x/2$ en el problema A, $S = x(10 - x)$ en el problema C y $V = x(50 - 2x)(24 - 2x)$ en el problema D.
- *Numérica*. Engloba a las respuestas que no utilizan el lenguaje algebraico para explicar el procedimiento que han utilizado para calcular los valores numéricos de la tabla.

Un rasgo que hay que destacar del conjunto de respuestas es la tendencia de los alumnos del grupo de Ciencias en utilizar el lenguaje algebraico frente a los alumnos del grupo de Letras que lo usan en una proporción muy inferior. Efectivamente, en este apartado de cada problema utilizan los símbolos del álgebra entre el 67% y el 79% de los alumnos del grupo de Ciencias, mientras que sólo lo hacen entre el 22% y el 44% del grupo de alumnos de Letras. Como hemos comentado, la mayoría de alumnos con respuesta algebraica al apartado 2, escriben la ecuación que relaciona las variables antes que el problema lo pida explícitamente, y la utilizan para calcular los valores de la variable dependiente. Es decir, son alumnos capaces de ver la ecuación algebraica como una forma de expresar la situación que plantea el problema y de utilizarla para hacer de forma más cómoda la tarea de cómputo de valores numéricos que se les pide en el apartado 1. Podemos decir, pues, que para estos alumnos el lenguaje algebraico tiene un significado y que, además, es una herramienta útil para realizar determinadas tareas.

Un rasgo que hay que destacar del conjunto de respuestas es la tendencia de los alumnos del grupo de Ciencias en utilizar el lenguaje algebraico frente a los alumnos del grupo de Letras que lo usan en una proporción muy inferior.

Y, ¿qué pasa cuando en el apartado 3 pedimos a los alumnos que escriban la ecuación que relaciona las dos variables? Algunos alumnos con respuesta numérica en el apartado 2 utilizan ahora los símbolos de la geometría elemental, con lo cual la fórmula que escriben es $S = b{\cdot}h/2$ en el problema A, $S = b{\cdot}h$ en el problema C, etc. Estos alumnos son una pequeña parte de la muestra, entre el 3% y el 8%. La inmensa mayoría de alumnos utiliza correctamente la simbología algebraica y escriben la ecuación bien en forma de polinomio, o bien expresándola como el producto de las dimensiones del objeto que se estudia en el problema. Vemos, pues, que hay un grupo importante de alumnos que utilizan correctamente el lenguaje algebraico cuando se les pide explícitamente que escriban una ecuación, pero que no lo han utilizado para explicar cómo calculan los valores de la tabla numérica. Estos alumnos representan aproximadamente la mitad del grupo de Letras y entre un 12% y un 24% del grupo de Ciencias, según los problemas. Son alumnos que conocen el lenguaje algebraico, pero no hacen uso de él de forma natural y espontánea cuando ello puede facilitar la tarea que se les ha encargado. Para estos alumnos la simbología algebraica no es una forma útil de expresar la relación de dependencia entre las variables implicadas.

Pasamos ahora a explicar los resultados obtenidos en el último apartado de los problemas. Recordemos que en este apartado se efectuaban dos preguntas, la primera es: «¿Qué pasará con el valor de la variable dependiente (superficie, volumen,...) si seguimos aumentando los valores de x?» La mayoría de alumnos responde correctamente que aumentará o disminuirá según las características de la situación. A la segunda pregunta: «¿Por qué?», los alumnos responden con un texto que puede tener de 2 a 5 líneas. Hemos clasificado las respuestas con un criterio que es el mismo para los cuatro problemas y que se basa en el tipo de argumentación que expone el alumno. Las categorías que hemos definido son las siguientes:

- *Tabla*, que se refiere a las respuestas descriptivas, basadas sólo en la observación de los valores de la tabla del apartado 1.

- *Geométrica,* corresponde a los argumentos relativos al contexto geométrico del problema.
- *Ecuación,* que se aplica a las respuestas que exponen argumentos relativos a las características de la ecuación que relaciona a las variables.

Dentro de la categoría *Ecuación* hemos realizado una nueva clasificación *–E-cómputo, E-foco* y *E-función–* ya que hay respuestas que se refieren básicamente al proceso de cómputo de los valores numéricos de la variable dependiente, otras focalizan la atención en el valor concreto de x que anula la otra variable (problema C y problema D) y, finalmente otras respuestas argumentan sobre la función como un objeto con características propias y que admite diversos lenguajes de representación. Si comparamos las respuestas obtenidas en este apartado con la de los apartados anteriores, observamos que existe correlación entre algunas categorías de respuestas: la mayoría (más del 70%) de alumnos con respuesta Ecuación en el apartado 4 de un problema habían dado una respuesta Algebraica en el apartado 2 de ese mismo problema, y si nos fijamos solamente en las respuestas Ecuación-funcional vemos que en más del 60% de los casos se corresponden con respuestas Algebraica-objeto en el apartado 2. Por otra parte, las respuestas Geométricas en el apartado 4 de un problema se corresponden con respuestas Algrebraica-proceso o Numéricas.

Las concepciones de los alumnos

El análisis de las respuestas a los tres primeros apartados de los problemas nos ha permitido clasificar las estrategias que los alumnos utilizan para conocer la relación de dependencia, clasificación que tiene como eje central la utilización de la expresión algebraica. Y el análisis de las respuestas al cuarto apartado nos ha llevado a clasificar las argumentaciones que realizan los alumnos sobre la relación de dependencia, argumentaciones que indican el significado que esta relación tiene para el alumno. E1 conjunto de significados que el individuo da al concepto y las expresiones simbólicas que le asocia forman parte de lo que Artigue (1990) llama concepciones de los sujetos. Con esta palabra, Sfard (1991) designa «todo el conjunto de representaciones internas y asociaciones que evoca el concepto.» Así, pues, los análisis y clasificaciones anteriores nos permitieron caracterizar y clasificar las concepciones de los alumnos de la muestra estudiada. En un primer momento, nos centramos en las respuestas al cuarto apartado de cada problema, para ampliar después al conjunto de todas las respuestas. El análisis expuesto anteriormente, nos permite detectar tres grandes concepciones:

El análisis de las respuestas a los tres primeros apartados de los problemas nos ha permitido clasifica las estrategias que los alumnos utilizan para conocer la relación de dependencia, clasificación que tiene como eje central la utilización de la expresión algebraica.

- *Ecuación.* Decimos que un alumno tiene concepción *Ecuación* si argumenta sobre la relación entre las variables refiriéndose a aspectos de la ecuación o más globalmente de la función.
- *Geométrica.* Los alumnos con concepción *Geométrica* son los que exponen argumentos relativos al contexto geométrico de los problemas.
- *No argumento.* Los alumnos con concepción *No argumento* son los que o bien no exponen ningún argumento y por tanto su respuesta ha sido clasificada como Tabla, o bien han dejado la respuesta en blanco.

Para fijar la clasificación hemos adoptado el siguiente criterio: Si el alumno da una respuesta de la misma categoría en 3 o en los 4 problemas diremos que tiene una concepción de dicha categoría: Ecuación, Geométrica o No argumento. Éstos son los alumnos de concepción pura. Si un alumno tiene dos respuestas de una categoría y dos de otra tiene una concepción mixta, y si no presenta estas regularidades diremos que no tiene una concepción definida. Observando las clasificaciones de las respuestas en los distintos apartados podemos explicar de manera más precisa los rasgos que caracterizan a cada una de estas concepciones, como veremos a continuación.

Los alumnos de concepción Ecuación justifican la relación de dependencia con argumentos relativos a las características de la ecuación que relaciona las dos variables y utilizan el simbolismo algebraico como la manera natural de expresar la relación de dependencia. Son capaces de pasar a la representación algebraica de la función cuando ello facilita la tarea que han de realizar sin que esto se les haya indicado explícitamente. La ecuación que relaciona las variables es un elemento central en la visión que estos alumnos tienen de la relación de dependencia. Sin embargo, las ideas de estos alumnos tienen distintos niveles de abstracción. Unos ven la ecuación como un instrumento de cómputo para calcular los valores numéricos de la variable dependiente, es decir, entienden la ecuación como un proceso, mientras que otros ven la ecuación como una de las formas de representación de un objeto matemático: la relación de dependencia funcional. Los alumnos de concepción Ecuación, que representan el 30% del total, tienen una presencia más importante en el grupo de ciencias (42%) que en el de Letras (27%).

Para los alumnos de concepción Geométrica es el contexto quien da significado a las variables y a su relación de dependencia. Algunos –al igual que los alumnos de concepción Ecuación– utilizan el lenguaje algebraico espontáneamente para expresar la relación de dependencia, pero lo hacen de forma que se conserva el significado del contexto: dejando sin efectuar el producto de las dimensiones de la figura que se estudia. Otros sólo utilizan el lenguaje algebraico cuando se les pide explícitamente que escriban una ecuación. Vemos que los alumnos de concepción Geométrica son capaces de utilizar correctamente el simbolismo algebraico para escribir la ecuación que relaciona las dos variables, pero este simbolismo no tiene el mismo papel en la estructura cognitiva de todos los alumnos. Unas dos terceras partes de los alumnos de concepción Geométrica pertenecientes al grupo de Ciencias ven la expresión algebraica como una forma importante, útil y significativa de expresar la relación de dependencia entre las variables. En cambio, esto no ocurre con una gran mayoría –el 70% aproximadamente– de los alumnos de concepción Geométrica del grupo de Letras. Los alumnos de concepción Geométrica son el 28,3% del total de la muestra, y su presencia relativa es ligeramente superior en el grupo de Letras (29,6%) que en el de Ciencias (27,3%).

El conjunto de alumnos de concepción No argumento no tienen una idea de la dependencia funcional que vaya más allá de una correspondencia numérica que, en nuestro caso, puede obtenerse mediante la aplicación de una fórmula geométrica. Estos alumnos se encuentran en una fase muy inicial en la construcción del concepto, y cuando han de argumentar sobre su significado o no responden o describen la tendencia de la tabla de valores numéricos. Algunos de estos alumnos utilizan el lenguaje algebraico sólo cuando se les pide que escriban una ecuación, y otros ni tan si quiera en ese caso lo utilizan. Todos los alumnos de concepción No argumento son del grupo de Letras (26%) y representan el 11,7% del total de alumnos.

Dentro de estas tres concepciones tenemos al 70% de alumnos de la muestra estudiada. Además, hay algunos alumnos que presentan una categoría de concepción u otra en los distintos problemas...

Dentro de estas tres concepciones tenemos al 70% de alumnos de la muestra estudiada. Además, hay algunos alumnos que presentan una categoría de concepción u otra en los distintos problemas, lo que nos ha llevado a definir dos concepciones mixtas: *Ecuación-Geométrica* y *No argumento-Alto* que incluyen respectivamente al 10% y al 8,3% de los alumnos. Las ideas sobre la relación de dependencia de los alumnos con concepción Ecuación-Geométrica comparten las características de las dos tendencias: el papel de la representación algebraica es importante, pero también lo es el significado que el contexto da a las variables y a su relación. Los alumnos de concepción No argumento-Alto son del grupo de Letras y expresan unas ideas muy similares a las No argumento, aunque presentan alguna característica de las otras concepciones. Como acabamos de ver, nuestro estudio nos condujo a definir tres concepciones puras y dos concepciones mixtas que engloban casi al 90% de la muestra estudiada. El 10% restante no se adecua a la clasificación que hemos establecido, ya que sus respuestas varían según la naturaleza del problema.

Conclusiones

De los resultados obtenidos se deducen unas conclusiones que hemos agrupado en tres apartados:

Respecto a las concepciones de los alumnos

Acabamos de explicar la clasificación de las concepciones de los alumnos y los rasgos característicos de cada categoría. Esta clasificación queda reflejada en los gráficos 1, 2 y 3.

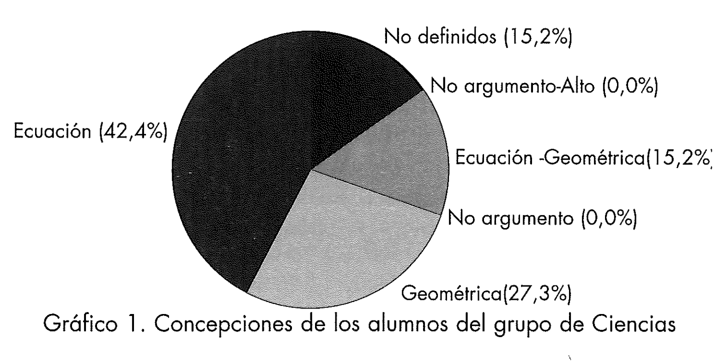


Gráfico 1. Concepciones de los alumnos del grupo de Ciencias

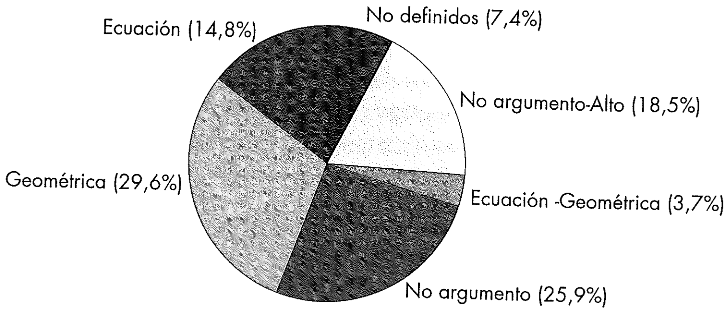


Gráfico 2. Concepciones de los alumnos del grupo de Letras

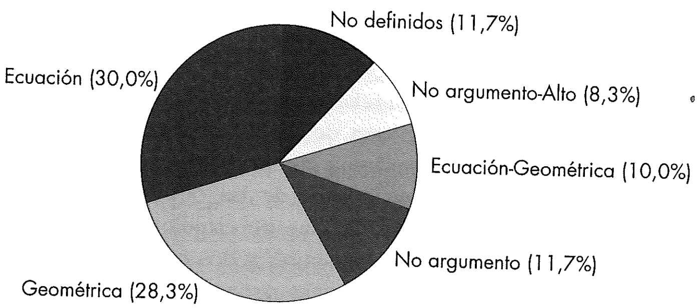


Gráfico 3. Concepciones del total de alumnos

Respecto a las diferencias entre los dos grupos de alumnos estudiados

La muestra estudiada en esta investigación estaba formada por 60 alumnos de COU: 33 alumnos de las opciones A y B formando el grupo de Ciencias y 27 alumnos de opción C, el grupo de Letras. Entre los dos grupos de alumnos hay importantes diferencias respecto a la capacidad de trabajar con el lenguaje algebraico y respecto a la visión que tienen de la relación de dependencia funcional.

Estas diferencias quedan reflejadas en el gráfico 4, donde se representa la proporción de alumnos de cada grupo pertenecientes a cada categoría de concepción.

Respecto a la enseñanza-aprendizaje de las funciones

El cuestionario que hemos utilizado como instrumento de obtención de datos presenta cuatro situaciones de dependencia funcional. La función que relaciona las variables es:

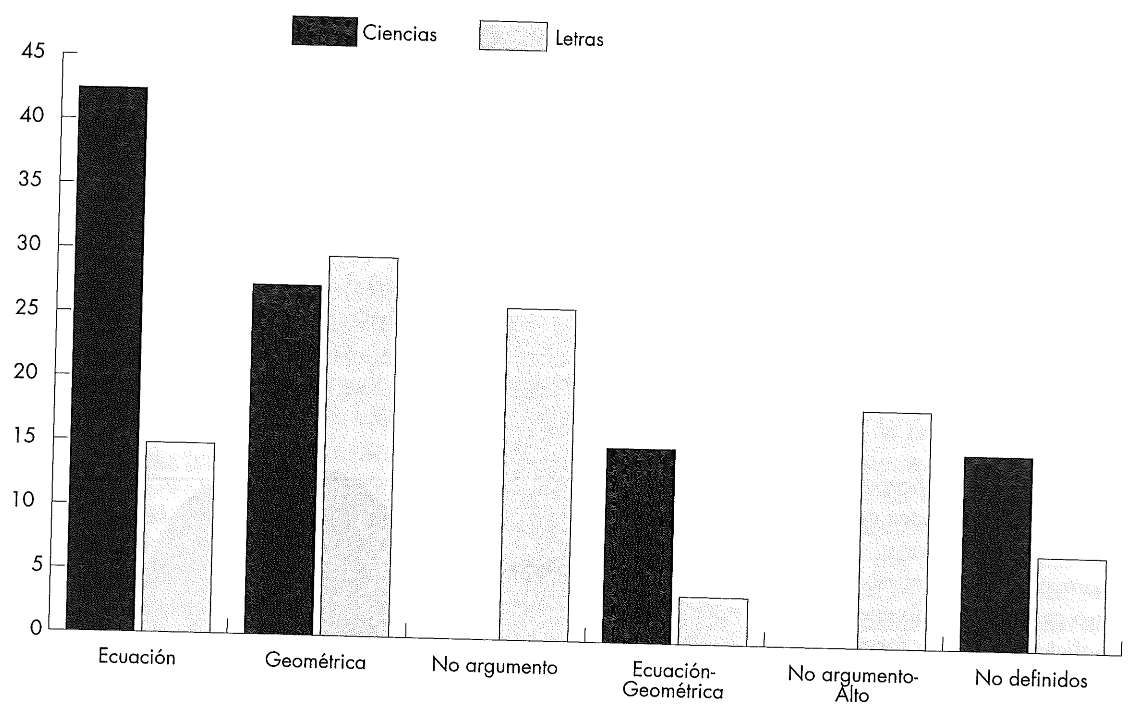


Gráfico 4. Distribución porcentual de los alumnos de cada grupo

- *Problema A.* Una función polinómica de segundo grado acotada inferiormente, cuya ecuación es del tipo $y = ax^2$.
- *Problema B.* Una función de proporcionalidad inversa.
- *Problema C.* Una función polinómica de segundo grado acotada superiormente, cuya ecuación es del tipo $y = ax^2 + bx$.
- *Problema D.* Una función polinómica de tercer grado con dos extremos relativos.

El análisis que hemos realizado de las respuestas de los alumnos se ha centrado principalmente en qué procedimientos utilizaban o en las argumentaciones que exponían, con independencia de su corrección. No ha sido un objetivo prioritario en nuestro estudio el análisis de las respuestas a los problemas desde el punto de vista de su corrección o incorrección, pero también hemos realizado una primera aproximación a este análisis. De él, parece deducirse que de los cuatro modelos de función que intervienen en el cuestionario, la función de proporcionalidad inversa es la que presenta menos dificultad conceptual para los alumnos, ya que en el problema B argumentan correctamente sobre la relación de dependencia 53 de los 60 alumnos de la muestra. Sigue en dificultad el problema A, donde la relación es una función cuadrática de la forma $y = ax^2$, pues hay 47 alumnos capaces de exponer argumentos correctos sobre la relación entre las variables. En el problema C, donde la ecuación cuadrática es $y = ax^2 + bx$, con $a < 0$, la dificultad aumenta, y solamente hay 21 alumnos (una tercera parte de la muestra) con argumentaciones de una calidad aceptable. Finalmente en el problema D nos encontramos con una función polinómica de tercer grado, y una cuarta parte de los alumnos argumenta de forma correcta.

Para construir el concepto de relación de dependencia funcional es necesario haber asimilado los modelos de función más sencillos: la dependencia lineal (proporcionalidad directa y función afín) y la proporcionalidad inversa y función cuadrática que intervienen en el cuestionario. Como acabamos de ver, los resultados obtenidos en nuestro estudio, nos ofrecen una secuencia de la dificultad que presentan estas funciones para los alumnos, y por tanto sugieren también una secuencia didáctica, donde la función de proporcionalidad inversa se introduzca después de las funciones lineal y afín, y antes de la función cuadrática. De los resultados obtenidos, creemos que merece ser destacada también la gran diferencia observada entre la función polinómica de segundo grado de la forma $y = ax^2$. y la función $y = ax^2 + bx$, con $a < 0$. De un 78% de respuestas correctas pasamos a un 35%, por tanto, podemos afirmar que hay un salto conceptual importante entre estos dos modelos de función cuadrática. Como enseñantes, conocíamos el aumento de dificultad que supone para los estudiantes pasar de la función $y = ax^2$ a la función cuadrática general, y de nuestra experiencia sabemos también que esta dificultad tiene mucho que ver con la traslación del eje de simetría de la función. Nuestro estudio nos confirma este importante aumento de dificultad. La función polinómica de tercer grado es –como ya esperábamos– la que presenta el menor porcentaje de respuestas correctas. Sin embargo, la diferencia de dificultad entre esta función y la función $y = ax^2 + bx + c$, con $a < 0$ (25% y 35% de respuestas correctas respectivamente) no es tan grande como la diferencia entre los dos modelos de función cuadrática estudiados.

El análisis que hemos realizado de las respuestas de los alumnos se ha centrado principalmente en qué procedimientos utilizaban o en las argumentaciones que exponían, con independencia de su corrección.

Carme Vall de Pérez
Jordi Deulofeu
Universidad Autónoma de Barcelona

Bibliografía

ARMENDÁRIZ M.V, C. AZCÁRATE y J. DEULOFEU (1993): «Didáctica de las Matemáticas y Psicología», *Infancia y Aprendizaje*, n.° 62-63, 77-99.

AZCÁRATE, C. y J. DEULOFEU (1990): *Funciones y Gráficas*, Síntesis, Col. Matemáticas, cultura y aprendizaje, n.° 26, Madrid.

ARTIGUE, M. (1990): «Epistémologie et didactique», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 10, n.° 2 y 3, 241-286.

JANVIER, C. (ed.) (1987): *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale.

LEINHARDT, G. y otros (1990): «Functions, Graphs and Graphing: Tasks, Learning and Teaching», *Review of Educational Research*, vol. 60, n.° 1, 1-64.

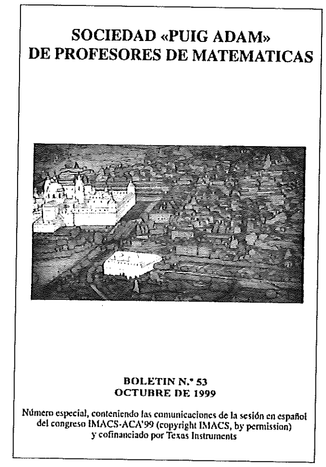
SFARD, A. (1991): «On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as differents sides of the same coin», *Educational Studies in Mathematics*, n.° 22, 1-36.

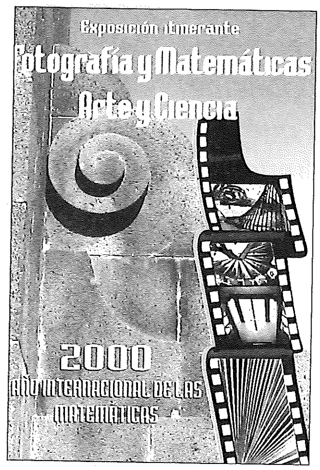
SHELL CENTRE (1990): *El lenguaje de funciones y graficas* (trad. y adapt. Félix Alayo), MEC y Universidad del País Vasco, Bilbao.

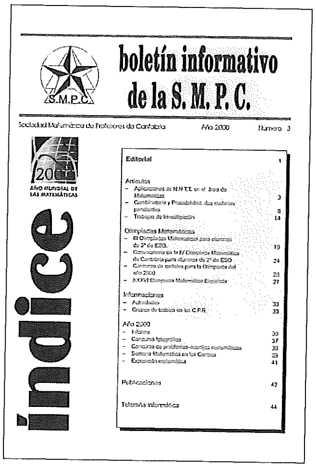
TALL, D. y S. VINNER (1981): «Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity», *Educational Studies in Mathematics*, n.° 12, 151-169.

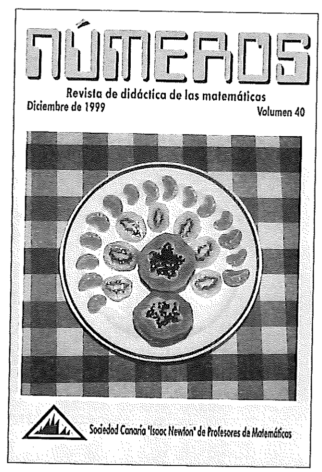
VINNER, S. y DREYFUS, T. (1989): «Images and definitions for the concept of function», *Journal for Research in Mathematics Education*, vol 20, 356-366.

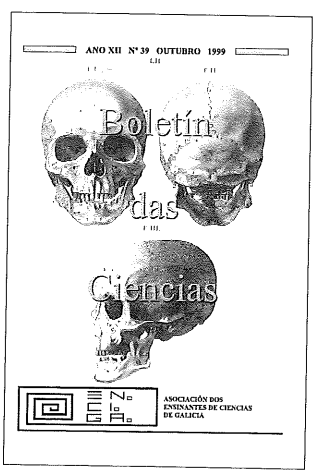
PUBLICACIONES DE LAS SOCIEDADES

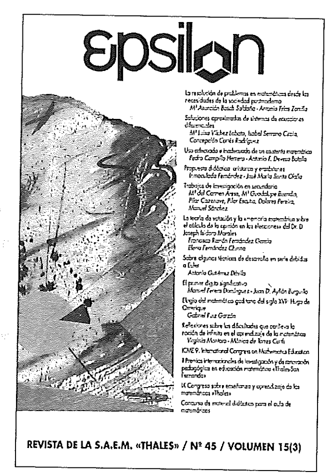












SUMA 33
febrero 2000, pp. 83-90

Nada... ¡vale tanto!

o cómo descubrir la moneda falsa sin desesperarse, ¡cualquiera que sea el número de monedas!

Rafael Losada Liste

IDEAS Y RECURSOS

En este trabajo se crea una estrategia, basada en el proceso inductivo, que permite resolver (de una vez por todas) el problema de determinar una moneda falsa, que puede pesar más o menos que el resto, entre un número *N* cualquiera de monedas en el mínimo número de pesadas. Este problema es la generalización del otro, más conocido, que limita *N* a 12. El artículo no se limita a contemplar la *posibilidad* de resolución encasos concretos, sino que genera un proceso que *resuelve* de hecho todos los casos. Este proceso es de carácter algorítmico, lo que permite su informatización de forma muy sencilla. En el texto se incluye el programa informático.

TENEMOS 119 monedas, aparentemente iguales, de las cuales una puede pesar más o menos que las demás. Disponemos de una balanza de dos platillos. ¿Cómo podemos saber si existe una moneda «falsa» y, en este caso, cuál es, en tan sólo 5 pesadas? ¿Y si fuesen 100 monedas? ¿Y si fuesen 120 monedas? ¿Y si fuesen 37 monedas en tan sólo 4 pesadas? (*ad aeternum*...).

Introducción

Año 55 de la era espacial (2012 d.C.). Nuestro grupo participa en las IX Jornadas de Matemática Recreativa (A Coruña). Sentados en nuestras confortables butacas con pantalla de cristal líquido, nos disponemos a disfrutar de la próxima exhibición. Surge Temis, la matemaga, en el centro del escenario. Tiene algún parecido con Ada Byron. En la gran pantalla central, controlada por un ordenador HAL, aparece la figura 1.

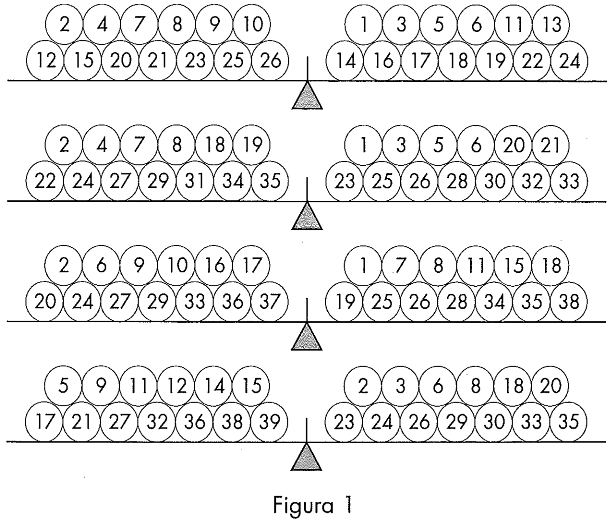


Figura 1

— «Ahora necesito que alguien... Tú, por ejemplo, ¿quieres ayudarme?... Necesito que elijas una cualquiera de las 39 monedas que aparecen en la pantalla y que decidas si pesa más o menos que el resto. Por supuesto, no me digas cuál ha sido tu elección. Pero puedes escribirla en tu pantalla electrónica para que los demás la conozcan... ¿Ya está?... Bien, ahora dime qué platillos descenderían al realizar las cuatro pesadas».

— «Bajaría el platillo de la izquierda de la primera pesada, y los de la derecha de la segunda y tercera. La cuarta pesada quedaría equilibrada». (Murmullos de asentimiento.)

Casi instantáneamente la matemaga resuelve:

— «La moneda elegida fue la 25, y has decidido que pesara más».

Mi compañero de butaca sonríe:

— «Este truco ya lo conozco: basta codificar el resultado de la pesada como 0221, que no es más que el número 25 en base 3. Pero se lo voy a poner más difícil...»,

y dirigiéndose a la matemaga, añade:

— «¿Podrías volver a realizar el mismo truco con 37 monedas?».

«¡Tendrá que reorganizarlo todo!», pensé. Pero, para asombro nuestra, Temis *responde*, enigmática y sonriente:

— «*Nada* me gustará más...»

y procede a realizar su truco de nuevo mientras en la pantalla grande aparece una nueva figura, similar a la anterior, pero en la que sólo figuran 37 monedas.

Cuando finaliza, oímos una voz detrás nuestra:

— «Creo que esto ya lo vi en alguna parte, hace algunos años... Me parece recordar que apareció en la revista *SUMA*, hacia finales del milenio... A propósito, ¿os habéis dado cuenta de que nuestro 55 año espacial se escribe 2001 en base 3? Y hablando de espacio, dicen que están preparando un HAL para...».

El problema

El problema consiste no tanto en resolver la cuestión para un número determinado de monedas como en hallar un procedimiento sistemático para resolver rápida y eficazmente este tipo de cuestiones. Para lograrlo, construiremos un edificio donde cada planta se eleve a partir de la anterior. Utilizando palabras más exóticas: recurriremos a un proceso inductivo.

Resolver el problema planteado, paso a paso, es un ejemplo de proceso inductivo que muestra perfectamente tanto el método como la potencia del mismo. El programa informático que se adjunta no es más que el conjunto de instrucciones que vamos creando en este proceso inductivo. Pero este conjunto de instrucciones permite resolver de igual forma el ya clásico problema de descubrir una moneda falsa entre 12 en tres pesadas como el nuevo problema de descubrir una moneda falsa entre 3.000 en sólo ocho pesadas.

Resolver el problema planteado, paso a paso, es un ejemplo de proceso inductivo que muestra perfectamente tanto el método como la potencia del mismo. El programa informático que se adjunta no es más que el conjunto de instrucciones que vamos creando en este proceso inductivo.

Este problema, en su versión de 12 monedas, parece ser que apareció en 1945 sin que se sepa su procedencia. Al menos así se afirma en el capítulo *El sistema ternario* (Gardner, 1986), de la sexta compilación de la famosa columna que su autor mantenía en la revista *Investigación y Ciencia* (1963). En ese capítulo, Gardner expone que una solución del problema se relaciona con los números ternarios, al igual que haremos aquí. Sin embargo, aunque expresa que *el problema ha sido generalizado*, desgraciadamente no ofrece ninguna idea que permita tal generalización y tampoco menciona cómo resolver los casos en donde haya un número de monedas que no sea de la forma *P0* (ver «Preparando el terreno») sin modificar drásticamente el método. Más bien parece que dicha generalización se reduce a saber cuál es el número máximo de monedas que admite cada serie de pesadas, sin profundizar en cómo se resolvería en cualquier caso. Es más, la combinación utilizada por Gardner para resolver el problema de las 12 monedas no permite, sin cambios importantes, resolver el problema con menos monedas. Digamos que es una combinación sin *nada* más. El objetivo de este artículo es cubrir estas ausencias al tiempo que se desarrolla paso a paso el proceso inductivo en uno de los problemas más atractivos de la matemática ¿recreativa?

Una sola pesada (p=1)

Con *una moneda*... no hay nada que hacer (incluso si es un euro, o de oro, o de chocolate). Con *dos monedas* lo más que podemos es afirmar la existencia o no de la moneda falsa, pero no podemos determinar cuál es. Sin embargo, esta simple situación nos permite ya profundizar en el problema, al tiempo que nos apropiamos de una notación adecuada.

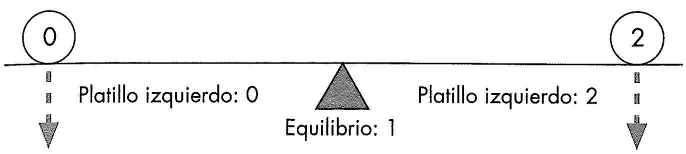


Figura 2

Asignamos la cifra **0** a la situación «el platillo izquierdo baja» y la cifra **2** a la situación «el platillo derecho baja». Reservamos la cifra **1** para el caso de equilibrio. Si ahora asignamos a cada moneda *el mismo número correspondiente al platillo donde se encuentra*, es evidente que sabremos inmediatamente cuál es la moneda más pesada sin más que observar cuál es el platillo que baja. Si se presenta el caso **1**, de equilibrio, al no haber ninguna moneda con ese número asignado, no existirá moneda falsa. Si se presenta otro caso, sabemos que existe una falsa, pero *no podemos saber cuál de ellas es.* Lo que ocurre es que el caso «platillo izquierdo baja» puede significar «moneda **0** pesa más» pero también «moneda **2** pesa menos».

Dos pesadas (p=2)

Ya podemos pesar *3 monedas.* Hay varias formas de hacerlo. Elijamos una cualquiera, por ejemplo colocando la primera moneda sólo en el platillo derecho de la primera pesada. Esta moneda tendrá asignado el número **21** (derecho-equilibrio). Colocamos la segunda moneda en el platillo izquierdo de la primera pesada y en el derecho de la segunda. Su número asignado será **02** (izquierdo-derecho). La tercera moneda se coloca sólo en el platillo izquierdo de la segunda pesada. Su número asignado será **10** (equilibrio-izquierdo).

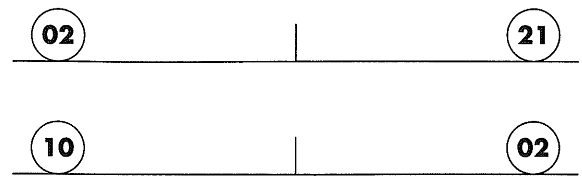


Figura 3

Observemos ahora qué pasa según los casos. Si no baja ningún platillo, la moneda correspondiente será **11**, es decir, no hay moneda falsa. Si baja sólo el platillo derecho de la primera pesada, la moneda correspondiente será **21**, es decir, la primera moneda pesa más. Pero atención: si baja sólo el platillo izquierdo de la primera pesada, la moneda correspondiente será **01**, que indica «la moneda **21** pesa menos».

En la siguiente tabla se recogen todas las posibilidades:

1.ª pesada platillo que baja	*2.ª pesada platillo que baja*	*Número correspondiente*	*Moneda correspondiente*	*¿Cómo pesa?*
Izquierdo	—	**01**	**21**	Menos
Izquierdo	Derecho	**02**	**02**	Más
—	Izquierdo	**10**	**10**	Más
—	—	**11**	Ninguna	No hay falsa
—	Derecho	**12**	**10**	Menos
Derecho	Izquierdo	**20**	**02**	Menos
Derecho	—	**21**	**21**	Más

Tabla 1

Como vemos, simplemente anotando el resultado de cada pesada (**0**, **1**, **2**) obtenemos un número que nos indica unívocamente la moneda correspondiente: si ese número no señala directamente la moneda que pesa más, cambiamos los **0** por los **2** (y viceversa) y obtenemos la moneda que pesa menos. Dicho de otra forma, si conocemos qué número debe corresponder a cada moneda, la solución del problema es prácticamente instantánea.

Además, para establecer cómo se pesan las monedas basta saber la *combinación* de números que hemos asignado a cada una. En el caso anterior, basta decir que hemos pesado siguiendo la combinación {**02**, **10**, **21**}.

Preparando el terreno

Adivinamos ya qué va a pasar cuando tengamos más monedas. Harán falta más pesadas, lo que significa que los números asignados a las monedas tendrán más cifras, que serán siempre **0**, **1** o **2**. Los números así expresados aparecen en el sistema ternario (base 3). Como este sistema no lo manejamos con tanta soltura como nuestro familiar sistema decimal, a partir de ahora traduciremos cada número a su correspondiente decimal. Así, la combinación anterior se convierte en {2, 3, 7}. Para conocer la posición de cada moneda, basta reconvertir estos números a la base 3.

No es posible localizar la moneda falsa entre *4 monedas* en menos de 3 pesadas. Podría parecer que sí, proponiendo por ejemplo la combinación {0, 2, 6, 8}, es decir, {**00**, **02**, **20**, **22**}. Pero recordemos que el número **22** significa tanto «moneda **22** más pesada» como «moneda **00** menos pesada». No sabríamos diferenciar la moneda **00** (desde ahora llamada *Nada*) de la **22**. Lo mismo ocurre con las monedas **02** y **20**. A estos números les llamamos *complementarios*: su suma siempre será un número en base 3 compuesto exclusivamente por **2**, lo que significa, en nuestro sistema, que su suma es siempre una potencia de 3 menos una unidad (más precisamente, dos números complementarios suman siempre 3^p–1, donde p es el número de pesadas). Este número es el que se conoce como *Pato* pues, en forma ternaria, sólo aparece el «pato» **2**. (Teorema 1: *Pato-Nada* son complementarios).

Otra posible ocurrencia sería la combinación {0, 4, 5, 7}, es decir, {**00**, **11**, **12**, **21**}. Pero en este caso, si los platillos se equilibrasen con las monedas **00**, **12** y **21**, no podríamos saber si la moneda **11** es falsa o no, y en caso de serlo tampoco sabríamos si pesa más o menos que las demás. La moneda **11** no hace nada, ya que no aparece en ninguna pesada. En adelante, llamaremos siempre *Pa* al número en base 3 compuesto de exclusivamente cifras **1**. (Teorema 2: *Pa* es la mitad de *Pato*. Teorema 3: *Pa* es complementario de sí mismo.) Notación: 4' significará *Pa* menos 4.

Además, gracias a nuestro sistema ya podemos averiguar cuántas monedas como máximo podemos utilizar en p pesadas. Veamos: la numeración de las monedas irá de **0...0** a **2...2** lo que significa un total de 3^p números. Ahora bien, uno de ellos, *Pa*, no aparece en las pesadas. Por lo tanto tenemos 3^p–1 números. Cada número tiene su complementario, que señala a la misma moneda (modificando su peso). Por lo tanto, como mucho podremos disponer (3^p–1)/2 monedas en los platillos. Es decir, *Pa* monedas. Bien, supongamos que hemos dispuesto las *Pa* monedas. En cada pesada aparecen 3^{p-1} monedas, repartidas en dos platillos. Pero 3^{p-1} es siempre impar, lo que impide que el número de monedas en ambos platillos sea el mismo. Siempre sobra una: por ejemplo, la moneda *Nada*. Así que el número máximo de monedas que podemos distribuir con p pesadas es *Po* = *Pa* – 1 (*Po* es casi *Pa*). Esto quiere decir que en 2, 3, 4... pesadas podremos pesar hasta 3, 12, 39... monedas[1].

No es posible localizar la moneda falsa entre 4 monedas en menos de 3 pesadas.

Tres pesadas (p=3)

Hemos visto que con 3 pesadas podemos comparar hasta *12 monedas*. Hay varias formas de conseguirlo, pero estamos tratando de seguir un método, así que nos apoyaremos en las pesadas de tres monedas. Busquemos entonces cuatro combinaciones de 3 monedas que cumplan las siguientes condiciones:

C.1) Deben indicar monedas distintas, independientemente de su peso. Debe reservarse *Nada*, para que la numeración sea de 1 a 12 (y complementarios).

C.2) Cada combinación debe poder generar otras tres combinaciones, para que el proceso sea inductivo.

C.3) Cada combinación debe equilibrarse por sí misma, como pasaba con la combinación {2, 3, 7}, para poder distribuir 6 o 9 monedas simplemente eliminando combinaciones sobrantes. Dicho de otra forma, en cada combinación se debe depositar una sola moneda en cada platillo.

C.4) Podamos reemplazar dos o tres monedas por *Nada* para poder distribuir cantidades de monedas que no sean múltiplos de 3.

Sólo existen dos combinaciones que cumplan las tres primeras condiciones:

{2, 12, 25}, {6, 11, 22}, {7, 9, 23}
y {8, 10, 21} (o complementarios)

{2, 12, 25}, {6, 10, 23}, {7, 11, 21}
y {8, 9, 22} (o complementarios)

Pero la segunda no cumple la cuarta condición. Ajustamos la primera (por complementarios) para que sí la cumpla y obtenemos la *única serie posible*:

{2, 12, 25}, {4, 15, 20},
{7, 9, 23} y {8, 10, 21}

1 Una alumna propone sustituir *Po* por el diminutivo inglés *Di* (más aristocrático), que es casi *Du* (la mitad de *Duck*).

es decir:

{**002**, **110**, **221**}, {**011**, **120**, **202**},

{**021**, **100**, **212**}, {**022**, **101**, **210**}.

Como *reserva*, añadimos una nueva tríada, formada por *Nada*, *Pa* y *Pato*, que sólo utilizaremos para el proceso inductivo: {0, 13, 26} = {**000**, **111**, **222**}.

Veamos que cumplen todas las condiciones:

C.1) Indican monedas distintas, independientemente de su peso, pues aparecen todos los números posibles (rechazando complementarios) excepto *Nada* (**000**) y *Pa* (**111**).

C.2) Cada combinación genera 3 combinaciones nuevas sin más que antecederles **0**, **1** y **2** en distinto orden. Por ejemplo, la combinación en tres pesadas {2, 12, 25}={**002**, **110**, **221**} genera las combinaciones[2] en cuatro pesadas:

{**0 002**, **1 110**, **2 221**},
{**1 002**, **2 110**, **0 221**},
{**2 002**, **0 110**, **1 221**},

es decir, {2, 39, 79}, {25, 29, 66}, {12, 52, 56}. Esto hace que las 4 combinaciones se transformen en 12, equivalentes a 36 monedas. Las tres monedas que faltan hasta las 39 se consiguen recurriendo a la tríada de reserva, que genera la combinación {26, 27, 67}, su complementaria (que rechazamos) y la nueva tríada de reserva {0, 40, 80}.

C.3) Cada combinación se equilibra por sí misma, por construcción, de forma que podemos eliminar las combinaciones que queramos para pesar menos monedas. Solamente debemos tener cuidado en no eliminar las combinaciones donde aparecen 4, 10, 4' y (4'+10') si posteriormente las necesitamos.

C.4) Cuando convenga, podemos utilizar la moneda *Nada* para reemplazar a otras dos, 4 y 4':

la moneda 4' tiene asociado el número: **1...1 100**

la moneda 4 tiene asociado el número: **0...0 011**

Y nada mejor que un ejemplo para ilustrar el proceso. Nos piden descubrir la moneda falsa entre 10, en sólo tres pesadas.

ambas se pueden sustituir por Nada: **0...0 000**

Así mismo, cuando convenga, podemos utilizar la moneda *Nada* para reemplazar a otras tres, 4, 10 y el complementario de 14:

la moneda 4 tiene asociado el número: **0...0 011**

la moneda 10 tiene asociado el número: **0...0 101**

la moneda complementaria de 14 tiene asociado el número: **2...2 110**

las tres se pueden sustituir por *Nada*: **0...0 000**

¡Ya está! Y nada mejor que un ejemplo para ilustrar el proceso. Nos piden descubrir la moneda falsa entre 10, en sólo tres pesadas. Tomamos el *pa-trón* correspondiente a 3 pesadas, que nos permite pesar hasta 12 monedas: {2, 12, 25}, {4, 15, 20}, {7, 9, 23}, {8, 10, 21}, es decir,

{**002**, **110**, **221**}, {**011**, **120**, **202**},
{**021**, **100**, **212**}, {**022**, **101**, **210**}.

Colocamos cada moneda en su platillo correspondiente:

Platillo Izquierdo				*Platillo Derecho*			
002	**011**	**021**	**022**	**221**	**202**	**212**	**210**
002	**202**	**100**	**101**	**221**	**120**	**021**	**022**
110	**120**	**100**	**210**	**002**	**202**	**212**	**022**

es decir:

Platillo Izquierdo				*Platillo Derecho*			
2	4	7	8	25	20	23	21
2	20	9	10	25	15	7	8
12	15	9	21	2	20	23	8

Con esta tabla podemos responder cuando hay doce monedas (eliminando una combinación, cuando hay 9 monedas; eliminando dos combinaciones, cuando hay 6 monedas). Como sobran dos monedas, recurrimos a *Nada*, que reemplaza a 4, 10 y 12 (complementario de 14):

Platillo Izquierdo				*Platillo Derecho*			
2	0	7	8	25	20	23	21
2	20	9	0	25	15	7	8
0	15	9	21	2	20	23	8

Para que se note menos lo especial de estos números, terminamos el proceso reemplazando los números mayores que *Pa* (13) por sus complementarios (*Pata* es 26):

2 Podemos generar las combinaciones más fácilmente en nuestro sistema decimal, escribiendo tres veces la combinación original de esta forma: {2, 12, 25}, {25, 2, 12}, {12, 25, 2} y sumando $3^p = 27$ a cada segundo número y $2 \cdot 3^p = 54$ a cada tercer número. O bien, si se conoce la regla de Pierre Sarrus, escribiendo las combinaciones positivas del determinante

2	12	25
2+27	12+27	25+27
2+54	12+54	25+54

Platillo Izquierdo				Platillo Derecho			
2	0	7	8	1	6	3	5
2	6	9	0	1	11	7	8
0	11	9	5	2	6	3	8

Hagamos la prueba. Imaginemos que la balanza queda equilibrada en la primera pesada y se inclina hacia la derecha en las demás: el número correspondiente es **122**, es decir, 17 (mayor que 13), cuyo complementario es 9: la moneda falsa es la 9. Como el 9 no aparece en los platillos hacia donde se inclina la balanza, sino en los opuestos, entonces la moneda 9 pesa menos que el resto. Evidentemente, si la balanza no se inclinara en ninguna pesada, es que no habría moneda falsa (sería la moneda *Pa*, que no interviene en las pesadas).

Por supuesto, es muy sencillo volver a diseñar la tabla para que aparezcan los números entre 1 y 10 (basta asignar a cada número uno nuevo). Sin embargo, este proceder dificulta bastante la resolución fulgurante de la matemaga.

Cientos de monedas

El procedimiento es exactamente el mismo que el descrito aquí. Los patrones para 12, 39, 120... monedas (o cualquier número intermedio) se pueden generar «a mano», mediante el proceso descrito en la condición C.2, o bien utilizar el programa informático, que nos aporta tres resultados:

- El patrón correspondiente a ese número de monedas.
- La distribución de las monedas en cada pesada.
- Realiza el truco de la matemaga.

Como ejemplo, damos a continuación el patrón de 13 tríadas (generadas por las 4 tríadas, más la tríada de reserva) que permite resolver todos los casos entre 13 y 39 monedas:

{2, 39, 79}, {25, 29, 66}, {12, 52, 56}, {4, 42, 74},
{20, 31, 69}, {15, 47, 58}, {7, 36, 77},
{23, 34, 63}, {9, 50, 61}, {8, 37, 75},
{21, 35, 64}, {10, 48, 62}, {26, 27, 67};
Reserva: {0, 40, 80}

Este patrón permite la distribución de la figura 1, presentada por HAL en la introducción. Mientras Temis procede por segunda vez a realizar el truco, lo único que tiene que hacer HAL es sustituir en la figura 1 las monedas 4, 10 y 14 por la moneda 0, lo que reduce el número de monedas a 37. Si se hubiese solicitado resolver con 28 monedas, por ejemplo, además del reemplazo anterior HAL sólo necesita eliminar 3 tríadas (en las que no aparezca el 0).

Excepción

Este método funciona para cualquier número de monedas excepto 4. El motivo de esta excepción es que no hay suficientes combinaciones de tres monedas para efectuar los oportunos reemplazos desde el patrón de 12. En este caso, se emplea cualquier combinación de 4 números que se equilibren. En el programa informático aparece la más *elegante* de estas combinaciones.

Este método funciona para cualquier número de monedas excepto 4. El motivo de esta excepción es que no hay suficientes combinaciones de tres monedas para efectuar los oportunos reemplazos desde el patrón de 12. En este caso, se emplea cualquier combinación de 4 números que se equilibren.

Variante 1 del problema

Cómo descubrir la moneda falsa (sin determinar si pesa más o menos que el resto) de entre 13 (o 40,... en general, *Pa*) monedas aparentemente idénticas en tan sólo 3 pesadas:

Formamos la combinación de pesadas correspondiente a 12 de esas monedas, según las instrucciones anteriores, y procedemos de igual forma. La única variante es que sólo podemos determinar ahora si la falsa pesa más o menos en el caso de que sea una de estas 12 monedas. Si el resultado es 13, sabemos que la falsa es la moneda que no hemos pesado, pero no sabemos si pesa más o menos que el resto.

Variante 2 del problema

Cómo descubrir si existe una moneda falsa, y si pesa más o menos que el resto, de entre 13 (0 40,... en general, *Pa*) monedas aparentemente idénticas en tan solo 3 pesadas, si disponemos además de otra moneda que sabemos que no es falsa:

Formamos la combinación de pesadas correspondiente a 12 de esas monedas, según las instrucciones anteriores. Asignamos el número *Nada* a la moneda decimotercera y la añadimos en las tres pesadas. En el otro platillo, añadimos, para compensar, la moneda que sabemos no es falsa, sin asignarle número alguno. Se sigue el mismo proceso que en el problema original.

Bibliografía

GARDNER, M. (1986): *Comunicación extraterrestre y otros pasatiempos matemáticos*, Cátedra, Madrid.

Programa informático

Rafael Losada
IES Antonio Machado. Madrid
SMPM «Emma Castelnuovo»

Este programa que sigue a continuación está escrito utilizando el lenguaje QBasic, cuyo ejecutable acompaña al sistema operativo MS-DOS (versión 6.2). He utilizado QBasic sin números de línea y sin instrucciones GOTO, es decir, empleando órdenes estructuradas, lo que facilita su lectura y la posible traducción a otro lenguaje de programación, como Visual Basic o Mathematica.

```
CLS
REM ****************************Solicita el número de monedas a pesar
LOCATE 10, 20: INPUT "¿Número de monedas"; B
DO WHILE B < 3: LOCATE 4, 6
PRINT "Es imposible resolver con menos de 3 monedas.": END: LOOP
DO WHILE B <> INT(B): LOCATE 4, 6
PRINT "Lo siento, pero este programa no admite decimales.": END: LOOP
SELECT CASE B
CASE 3: PRINT : PRINT "Combinaci¢n: {2, 3, 7}": PRINT
        PRINT "Pesada 1"
        PRINT "Platillo Izquierdo: 2   Platillo Derecho: 1"
        PRINT : PRINT "Pesada 2"
        PRINT "Platillo Izquierdo: 3   Platillo Derecho: 2"
        PRINT : PRINT "Pato = 8, resuelve tú.": END
CASE 4: PRINT : PRINT "Combinaci¢n: {1, 4, 23, 24}": PRINT
        PRINT "Pesada 1"
        PRINT "Platillo Izquierdo: 1  4    Platillo Derecho: 2  3"
        PRINT : PRINT "Pesada 2"
        PRINT "Platillo Izquierdo: 1       Platillo Derecho: 2"
        PRINT : PRINT "Pesada 3"
        PRINT "Platillo Izquierdo: 2       Platillo Derecho: 3"
        PRINT : PRINT "Pato = 26, resuelve tú.": END
END SELECT

REM ***Calcula los números Pa, Po y el número P de pesadas necesarias
PA = B + 1: P = LOG(2 * PA + 1) / LOG(3)
IF P <> INT(P) THEN P = INT(P) + 1
PA = (3 ^ P - 1) / 2: PO = PA - 1: F = (PA + 2) / 3

REM ***********************************Establece el patrón inicial
DIM X(P, F + 1, 2)   AS INTEGER, PI(F * 3), PD(F * 3)
DIM Y(F + 1, 2) AS INTEGER, Z(F + 1, 2) AS INTEGER
P1 = 3: PA1 = 13: X(3, 1, 0) = 2: X(3, 1, 1) = 12: X(3, 1, 2) = 25
X(3, 2, 0) = 4: X(3, 2, 1) = 15: X(3, 2, 2) = 20: X(3, 3, 0) = 7
X(3, 3, 1) = 9: X(3, 3, 2) = 23: X(3, 4, 0) = 8: X(3, 4, 1) = 10
X(3, 4, 2) = 21: X(3, 5, 0) = 0: X(3, 5, 1) = 13: X(3, 5, 2) = 26

REM Calcula iterativamente los sucesivos patrones hasta el adecuado
DO WHILE P1 < P
FOR J = 1 TO (PA1 + 2) / 3 - 1
        X(P1 + 1, 3 * J - 2, 0) = X(P1, J, 0)
        X(P1 + 1, 3 * J - 2, 1) = X(P1, J, 1) + 3 ^ P1
        X(P1 + 1, 3 * J - 2, 2) = X(P1, J, 2) + 2 * 3 ^ P1
        X(P1 + 1, 3 * J - 1, 0) = X(P1, J, 2)
        X(P1 + 1, 3 * J - 1, 1) = X(P1, J, 0) + 3 ^ P1
        X(P1 + 1, 3 * J - 1, 2) = X(P1, J, 1) + 2 * 3 ^ P1
        X(P1 + 1, 3 * J, 0) = X(P1, J, 1)
        X(P1 + 1, 3 * J, 1) = X(P1, J, 2) + 3 ^ P1
        X(P1 + 1, 3 * J, 2) = X(P1, J, 0) + 2 * 3 ^ P1: NEXT
J = (PA1 + 2) / 3
X(P1 + 1, 3 * J - 2, 0) = X(P1, J, 2)
X(P1 + 1, 3 * J - 2, 1) = X(P1, J, 0) + 3 ^ P1
X(P1 + 1, 3 * J - 2, 2) = X(P1, J, 1) + 2 * 3 ^ P1
X(P1 + 1, 3 * J - 1, 0) = X(P1, J, 0)
X(P1 + 1, 3 * J - 1, 1) = X(P1, J, 1) + 3 ^ P1
X(P1 + 1, 3 * J - 1, 2) = X(P1, J, 2) + 2 * 3 ^ P1
P1 = P1 + 1: PA1 = (3 ^ P1 - 1) / 2: LOOP

REM *********************Analiza si sobran combinaciones del patrón
S4 = PA - 4: C14 = 3 ^ P - 15: D = PA - 1 - B: TS = INT(D / 3)
FOR J = 1 TO F - 1: FOR K = 0 TO 2: Y(J, K) = X(P, J, K)
        IF Y(J, K) = 4 THEN J4 = J: K4 = K
        IF Y(J, K) = S4 THEN JS4 = J: KS4 = K
        IF Y(J, K) = 10 THEN J10 = J: K10 = K
        IF Y(J, K) = C14 THEN J14 = J: K14 = K
        NEXT: NEXT
S = D - TS * 3
SELECT CASE S
CASE 1: Y(J4, K4) = 0: Y(JS4, KS4) = -1
```

```
CASE 2: Y(J4, K4) = 0: Y(J10, K10) = -1: Y(J14, K14) = -1
END SELECT
J = F - 1
DO WHILE FTS < TS: SIGUE = 0
        FOR K = 0 TO 2
                IF Y(J, K) < 1 THEN SIGUE = 1
                NEXT
        DO WHILE SIGUE = 0: FTS = FTS + 1
                FOR K = 0 TO 2: Y(J, K) = -1: NEXT
                SIGUE = 1: LOOP: J = J - 1: LOOP

REM *****************************************Muestra el patrón final
CLS : LOCATE 3, 3
PRINT "El patrón para pesar las"; B; "monedas en"; P; "pesadas es:"
FOR J = 1 TO F - 1: PRINT "  "; : FOR K = 0 TO 2
IF Y(J, K) > PO THEN Z(J, K) = 2 * PA - Y(J, K) ELSE Z(J, K) = Y(J, K)
IF Y(J, K) > -1 THEN PRINT Y(J, K);
X(0, J, K) = Y(J, K): NEXT: NEXT
PRINT : PRINT "Pulsa cualquier tecla para continuar"
DO: LOOP UNTIL INKEY$ <> "": CLS

REM ***************************Muestra la disposición de las monedas
FOR I = P - 1 TO 0 STEP -1: I3 = 3 ^ I
        PRINT : PRINT "Pesada"; P - I: IP = 0: DP = 0
        FOR J = 1 TO F - 1: FOR K = 0 TO 2: CON = Y(J, K)
                DO WHILE CON > -1: M = INT(CON / I3)
                    IF M = 0 THEN IP = IP + 1: PI(IP) = Z(J, K)
                    CON = -1: LOOP: NEXT: NEXT
        FOR K = 2 TO IP: FOR J = 1 TO K - 1
                IF PI(J) > PI(K) THEN SWAP PI(J), PI(K)
                NEXT: NEXT
        PRINT "Platillo Izquierdo:";
        FOR K = 1 TO IP - 1: PRINT LTRIM$(STR$(PI(K))) + "-"; : NEXT
        PRINT LTRIM$(STR$(PI(IP)))
        FOR J = 1 TO F - 1: FOR K = 0 TO 2: CON = Y(J, K)
                DO WHILE CON > -1: M = INT(CON / I3)
                    IF M = 2 THEN DP = DP + 1: PD(DP) = Z(J, K)
                    Y(J, K) = Y(J, K) - I3 * M
                    CON = -1: LOOP: NEXT: NEXT
        FOR K = 2 TO DP: FOR J = 1 TO K - 1
                IF PD(J) > PD(K) THEN SWAP PD(J), PD(K)
                NEXT: NEXT
        PRINT "Platillo Derecho:";
        FOR K = 1 TO DP - 1: PRINT LTRIM$(STR$(PD(K))) + "-"; : NEXT
        PRINT LTRIM$(STR$(PD(DP)))
        PRINT : PRINT "Pulsa cualquier tecla para continuar"
        DO: LOOP UNTIL INKEY$ <> "": NEXT

REM *********************Hace el papel de matemaga (ya hizo el de HAL)
CLS : LOCATE 2, 4
PRINT "Elige una moneda y dime el resultado de cada pesada"
PRINT "Si baja el platillo izquierdo escribe I"
PRINT "Si baja el platillo derecho escribe D"
PRINT "Si no desciende ningún platillo escribe N": PRINT
FOR I = 1 TO P: A$ = ""
    DO WHILE A$ <> "I" AND A$ <> "D" AND A$ <> "N"
      LOCATE 10, 12: PRINT "                              "
      LOCATE 10, 12: PRINT "Pesada número" + STR$(I); : INPUT A$: LOOP
    SELECT CASE A$
    CASE "D": XX = XX + 2 * 3 ^ (P - I)
    CASE "N": XX = XX + 3 ^ (P - I)
    END SELECT: NEXT
P$ = " menos pesada ": PRINT : YY = XX
IF XX = PA THEN PRINT " No hay moneda falsa.": END
IF XX > PA THEN XX = 2 * PA - XX
SIGUE = 0
FOR J = 1 TO F - 1: FOR K = 0 TO 2
        IF XX = Z(J, K) THEN SIGUE = 1
        NEXT: NEXT
IF SIGUE = 0 THEN PRINT "°No es posible tal resultado!": END
FOR J = 1 TO F - 1: FOR K = 0 TO 2
        IF X(0, J, K) = YY THEN P$ = " más pesada "
        NEXT: NEXT
PRINT "La moneda es la" + STR$(XX) + " y es" + P$ + "que el resto."
```

SUMA 33
febrero 2000, pp. 91-97

Ajuste de una curva a un conjunto de datos con la calculadora TI-92

Leandro Tortosa Grau
Rosario Martín Rico

IDEAS Y RECURSOS

Este artículo trata de resolver el problema del ajuste de una curva a un conjunto de datos que se obtienen a partir de diferentes observaciones de la posición de un asteroide en su órbita alrededor del Sol. Utilizando este problema concreto, se realiza un análisis gráfico sobre la exactitud y complejidad que nos proporcionan los distintos modelos de ajuste que utilizamos, como son el lineal, cuadrático y cúbico. Con ayuda de la calculadora TI-92 se obtiene la ecuación de la cónica que mejor describe el movimiento de este astro. Utilizando las capacidades de cálculo simbólico que la TI-92 nos ofrece, se construye una función que nos permite predecir de una forma sencilla las sucesivas posiciones del asteroide en su órbita.

ESTE ARTÍCULO constituye un ejemplo completo del ajuste de una curva a un conjunto de datos obtenidos de un problema concreto, como es la posición de un asteroide a través de sucesivas observaciones. Se utiliza como herramienta básica de cálculo y visualización la calculadora TI-92, que lleva incorporado el CAS (Cálculo Algebraico Simbólico) para realizar todo tipo de cálculos algebraicos. Esta calculadora permite mecanizar los cálculos matemáticos imprescindibles para conseguir los distintos ajustes, a la vez que resulta amena dada la capacidad de visualización que nos ofrece.

Desde el punto de vista pedagógico, los distintos modelos de ajuste, que se realizan de forma inmediata con la ayuda de la máquina y que pueden ser visualizados simultáneamente, constituyen un excelente medio para relacionar la creciente complejidad de los modelos utilizados con la exactitud en la resolución del problema.

En el artículo se distinguen tres etapas:

- En la primera se realiza un ajuste de datos mediante funciones lineales, cuadráticas y cúbicas, comprobando la poca exactitud de estos modelos de ajuste para la predicción de futuras posiciones del asteroide.
- En la segunda etapa se hace una reflexión sobre la naturaleza del problema que se trata de resolver y las herramientas matemáticas más adecuadas para su resolución.
- En la tercera, se aprovechan las capacidades que la calculadora TI-92 ofrece para la edición de una función que permite simplificar los cálculos necesarios para la predicción de nuevos puntos en la órbita del asteroide.

Planteamiento del problema

Supongamos que disponemos de cinco puntos en el plano que representan distintas posiciones de un cierto asteroide en su órbita alrededor del Sol. Nuestro objetivo es ajustar una curva a estos datos para establecer la órbita que seguirá el astro. Desde el punto de vista matemático, debemos encontrar la curva que mejor se adapte a esas posiciones. Para ello, utilizamos como herramienta la calculadora gráfica TI-92, cuyas capacidades gráficas y de cálculo simbólico la convierten en un pequeño ordenador matemático en nuestras manos. Distintas observaciones del asteroide en tiempos sucesivos determinan los cinco puntos de coordenadas:

(5,764; 0,648), (6,286; 1,202), (6,759; 1,823)

(7,168; 2,526), (7,480; 3,360).

El problema que estudiamos es la obtención de una curva que se ajuste a estos datos y represente, por tanto, la ecuación de su órbita.

Resolución del problema

En principio, nos planteamos el problema de ajustar, mediante una curva, el conjunto de datos que tenemos. No nos planteamos inicialmente el tipo de curva que mejor se ajuste de acuerdo con los datos que tenemos. Queremos realizar varios ajustes utilizando diversas curvas, con el fin de que el alumno compruebe los diferentes grados de exactitud que se obtienen cuando se utilizan diferentes modelos de ajuste. Por ello, comenzaremos con el ajuste lineal, que es el más sencillo y continuaremos con modelos algo más complicados.

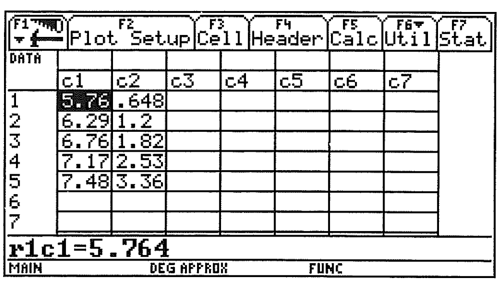


Figura 1. Editor de datos

Comenzamos introduciendo los cinco puntos anteriores en el editor de *Datos/Matrices* de la calculadora TI-92. El nombre que le damos al fichero de datos es *astro1*, como vemos en la Figura 1. Una vez introducidos los datos en el editor correspondiente, vamos a detallar los pasos necesarios que debemos realizar con la TI-92 para obtener distintos tipos de ajustes, según el tipo de función escogida para llevar a cabo el ajuste.

Primero obtendremos un ajuste lineal mediante una recta de regresión lineal. Para ello, presionando la tecla *F5* obtenemos una pantalla como la que se muestra en la Figura 2,

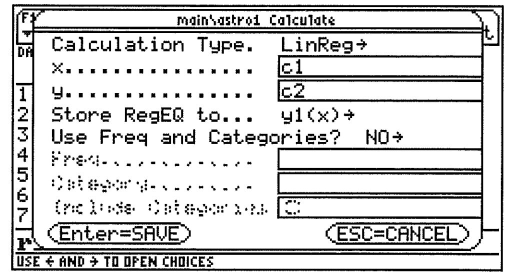


Figura 2. Regresión lineal

en la que hemos seleccionado la opción de regresión lineal. Además, queremos que la recta de regresión lineal quede almacenada en el editor de funciones en la variable *y1(x)*. De esta manera, la máquina nos proporciona, de forma inmediata, la recta de regresión y el coeficiente de correlación que aparecen en la Figura 3.

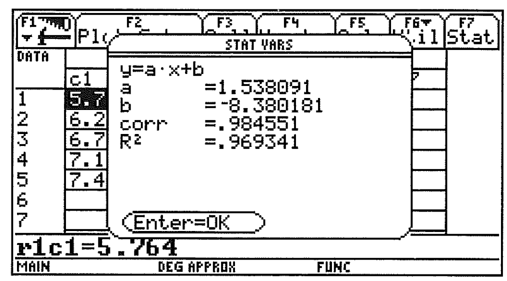


Figura 3. Recta de regresión lineal

Una vez obtenida la recta de regresión y almacenada en *y1(x)* en el editor de funciones, debemos indicar el tipo de gráfico que queremos representar con los puntos de la tabla. Eso lo hacemos presionando la tecla *F2* y efectuando las elecciones oportunas en los menús desplegables que allí nos aparecen. Lo vemos en la Figura 4, en la que se ha elegido el tipo de gráfico *scatter* y los puntos se representan como cajas (*box*).

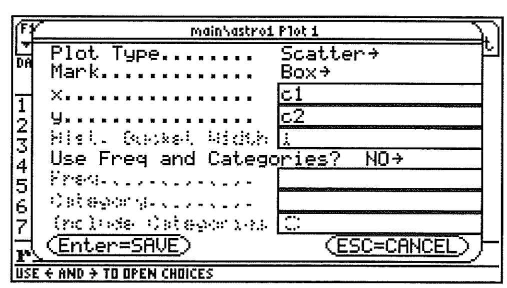


Figura 4. Tipo de gráfico para datos

Si ahora representamos gráficamente este gráfico de puntos en la variable *Plot1* y la función *y1(x)*, que es la recta de regresión, obtenemos un gráfico como el que muestra la Figura 5, en la que se ha realizado un *ZoomData* para que los datos que se representan ocupen el área máxima de la pantalla.

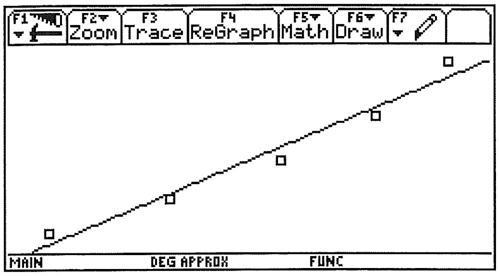


Figura 5. Gráfico de regresión lineal

Hasta aquí se ha realizado un ajuste de datos utilizando el modelo de regresión lineal sobre ese conjunto de puntos inicial. Observando el gráfico, notamos que la recta no se ajusta exactamente a ese conjunto de puntos, aunque el coeficiente de correlación (positivo y cercano a uno), nos indica una fuerte relación entre las variables. Sin embargo, pretendemos encontrar una curva que se ajuste perfectamente a esos puntos.

Ahora el siguiente paso va a ser probar con un ajuste cuadrático, es decir, vamos a calcular la función cuadrática de la forma:

$$y = ax^2 + bx + c \qquad [1]$$

que mejor se ajuste a los valores que tenemos. Para ello, realizamos los mismos pasos con la máquina que en el caso anterior. La Figura 6 muestra el cuadro de diálogo donde seleccionamos la regresión cuadrática, que quedará almacenada en el editor de funciones como *y2(x)*. La Figura 7 recoge el resultado que proporciona la calculadora para un ajuste cuadrático. En la Figura 8 vemos el editor de funciones de la TI-92 donde aparecen las dos funciones correspondientes a los dos tipos de regresión que hemos calculado. Si ahora representamos gráficamente las funciones almacenadas en el editor de funciones, se obtiene una representación gráfica como la que muestra la Figura 9. En esta figura se observa claramente que al ajustar por una función de segundo grado obtenemos una gráfica que se acerca mucho más a los puntos que tenemos representados. Podemos notar la diferencia en cuanto a la precisión que se obtiene al utilizar un modelo de tipo cuadrático frente al modelo lineal.

Podemos notar la diferencia en cuanto a la precisión que se obtiene al utilizar un modelo de tipo cuadrático frente al modelo lineal.

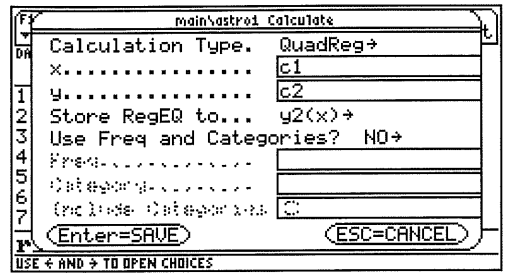


Figura 6. Regresión cuadrática

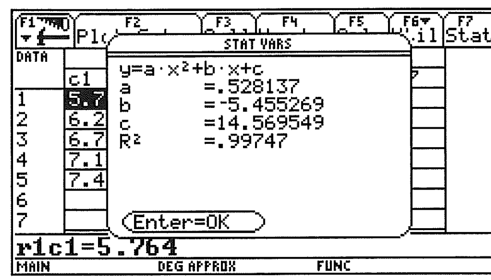


Figura 7. Función cuadrática de ajuste

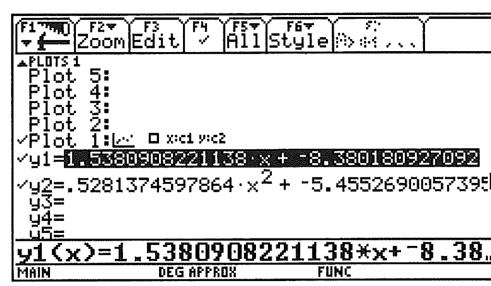


Figura 8. Editor de funciones

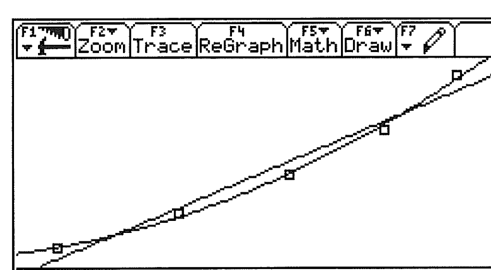


Figura 9. Regresión lineal y cuadrática

Podemos continuar el proceso decrito hasta aquí ajustando ahora mediante una función polinómica de tercer grado. Para ello elegimos la opción de ajuste mediante una regresión cúbica, que aparece en el mismo menú que el de las anteriores, como se muestra en la Figura 10. Ahora almacenamos la función cúbica en la variable *y3(x)* del editor, con el fin de poder comparar el nuevo resultado con los obtenidos anteriormente. El resultado de la función lo vemos en la Figura 11, donde se muestran los coeficientes para el polinomio de tercer grado que mejor se ajusta a los datos.

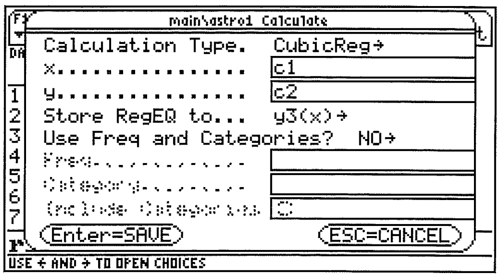


Figura 10. Regresión cúbica

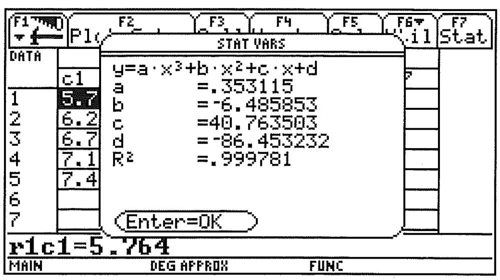


Figura 11. Ecuación cúbica del ajuste

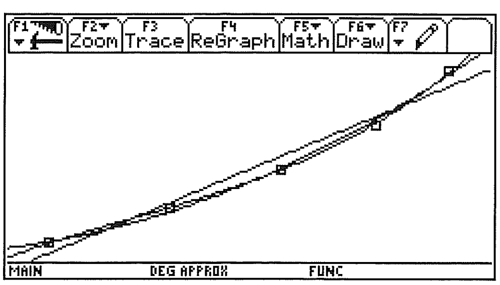


Figura 12. Comparativa de las regresiones

En la Figura 12 vemos la gráfica comparativa de los tres ajustes realizados, utilizando polinomios de grado uno, dos y tres. Se observa muy poca diferencia entre los ajustes que nos proporciona el polinomio de grado dos y el de grado tres (en el polinomio de grado tres se obtiene una aproximación casi perfecta). Si hacemos un *ZoomOut* en la máquina, obtenemos una gráfica como la que se muestra en la Figura 13.

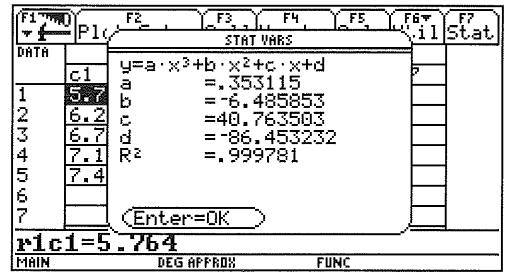


Figura 13. Zoom sobre la gráfica anterior

...al aumentar el grado del polinomio de ajuste, la precisión es mayor; esto nos sugiere la idea de continuar aumentando su grado para obtener cada vez mejores resultados.

Observando la última gráfica, vemos que al aumentar el grado del polinomio de ajuste, la precisión es mayor; esto nos sugiere la idea de continuar aumentando su grado para obtener cada vez mejores resultados. Sin embargo, debemos siempre calibrar de algún modo la mejora en el ajuste frente a la complejidad en el cálculo. Además, hasta ahora no nos hemos planteado que estamos intentando ajustar un problema «real», como es el movimiento de un asteroide en torno al Sol. ¿Pensamos que su trayectoria es una recta? ¿Es una función cuadrática? Volveremos más tarde sobre esta cuestión.

Modificando el problema inicial

Modificamos ahora el problema inicial añadiendo un nuevo punto. Supongamos que en una observación posterior del asteroide se toman sus coordenadas de posición, que son (5,0; 5,363). De esta forma la lista de puntos que teníamos queda ampliada con este último valor, como se aprecia en la Figura 14.

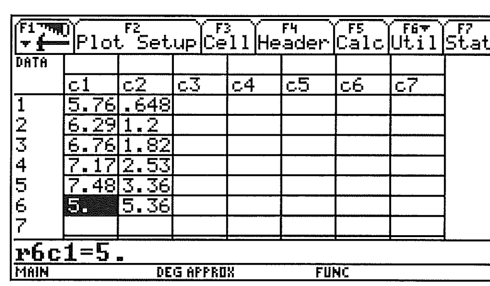


Figura 14 Nuevo dato

Realizamos un proceso similar al descrito anteriormente, pero ahora obtendremos funciones de tipo cuadrático y cúbico.

Los resultados que se obtienen pueden apreciarse en las Figuras 15, 16 y 17. Observamos de forma inmediata que la introducción de un nuevo punto en nuestro conjunto de datos modifica drásticamente las funciones que se obtienen al realizar los distintos tipos de regresión en la máquina. Podemos comparar los resultados obtenidos con los anteriores para darnos cuenta de que las funciones han cambiado totalmente. Es evidente que si realizáramos un ajuste lineal, los resultados serían muy distintos, ya que ahora es muy difícil encontrar una recta que se ajuste también al nuevo valor añadido. Esto nos da una idea de la dificultad y el riesgo que lleva el ajuste de datos por funciones simples como las que estamos utilizando.

...la introducción de un nuevo punto en nuestro conjunto de datos modifica drásticamente las funciones que se obtienen al realizar los distintos tipos de regresión en la máquina.

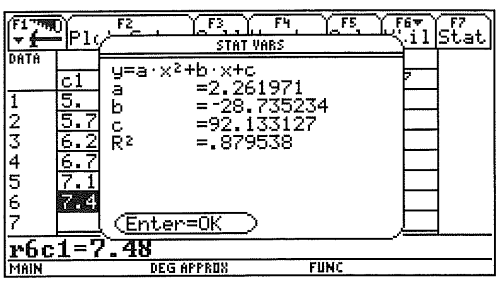


Figura 15. Regresión cuadrática

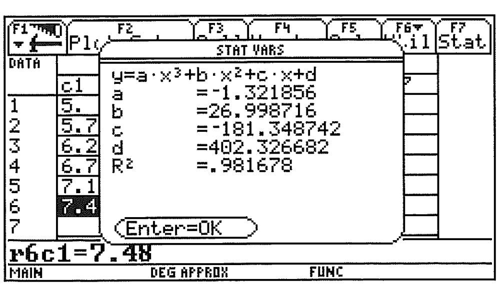


Figura 16. Regresión cúbica

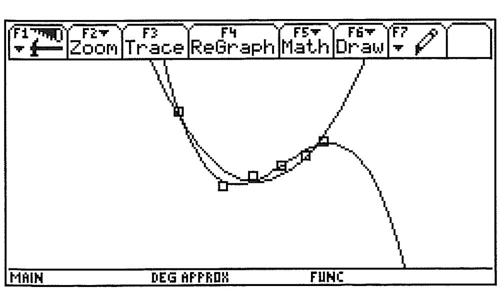


Figura 17. Comparativa de regresiones

Esta variación drástica en la forma de las curvas de ajuste se produce como consecuencia del problema particular que estamos estudiando. Debemos reflexionar sobre el problema que estamos resolviendo y la manera en la que lo hemos resuelto hasta ahora. Estamos tratando un problema concreto: el movimiento de un cuerpo en el sistema solar, es decir, estamos ajustando mediante polinomios de grado uno, dos o tres unos datos de un cuerpo que sigue una trayectoria en el espacio cuya representación matemática es la sección de una cónica. No sabemos, *a priori*, el tipo de cónica que describe su órbita; lo máximo que conocemos son un conjunto de posiciones dadas en función de dos coordenadas. En cuanto al modo de resolución, si pensamos un poco, debemos notar que estamos intentando ajustar unos puntos cuya trayectoria debe ser una sección cónica por medio de una cónica en particular, como es la parábola. Cuando ajustamos mediante una función del tipo 1), debemos tener en cuenta que estamos ajustando mediante una parábola con su eje de simetría paralelo al eje OY. Por lo tanto, pensamos que el ajuste que hemos realizado puede ser muy válido para estos puntos, pero seguramente no nos va a proporcionar demasiada información acerca del conjunto de la trayectoria que estamos analizando. Así, debemos utilizar otro método que nos proporcione más información.

El método que vamos a utilizar tiene cierta relación con el concepto de determinante de una matriz, como veremos a continuación.

La forma general de la ecuación de una sección cónica en el plano, ya se trate de una parábola, elipse o hipérbola, es:

$$c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2 + c_4x + c_5y + c_6 = 0 \qquad [2]$$

Esta ecuación tiene seis coeficientes que deben ser determinados para poder conocer su expresión analítica particular. Pero, en realidad sólo son necesarios cinco ya que podemos dividir por algún coeficiente no nulo. Si suponemos que c_1 es distinto de cero, entonces podemos hacer

$$x^2 + \frac{c_2}{c_1}xy + \frac{c_3}{c_1}y^2 + \frac{c_4}{c_1}x + \frac{c_5}{c_1}y + \frac{c_6}{c_1} = 0$$

o, lo que es lo mismo,

$$x^2 + Axy + By^2 + Cx + Dy + E = 0.$$

De esta forma, vemos que únicamente es necesario determinar cinco de los seis coeficientes para obtener la ecuación de la cónica. Esto significa que con cinco puntos que tengamos ya podemos ser capaces de determinar la misma, por medio de determinantes. Si llamamos a dichos puntos:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5),$$

entonces la ecuación de la cónica puede escribirse en forma de determinante como:

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad [3]$$

De acuerdo con nuestro ejemplo, sustituyendo los puntos

$$(x_1, y_1) = (5{,}764;\ 0{,}648)$$
$$(x_2, y_2) = (6{,}286;\ 1{,}202)$$
$$(x_3, y_3) = (6{,}759;\ 1{,}283)$$
$$(x_4, y_4) = (7{,}168;\ 2{,}526)$$
$$(x_5, y_5) = (7{,}480;\ 3{,}360)$$

en el determinante [3], se obtiene:

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 33{,}224 & 3{,}735 & 0{,}420 & 5{,}764 & 0{,}648 & 1 \\ 39{,}514 & 7{,}556 & 1{,}445 & 6{,}286 & 1{,}202 & 1 \\ 45{,}684 & 12{,}322 & 3{,}323 & 6{,}759 & 1{,}823 & 1 \\ 51{,}380 & 18{,}106 & 6{,}381 & 7{,}168 & 2{,}526 & 1 \\ 55{,}950 & 25{,}133 & 11{,}290 & 7{,}480 & 3{,}360 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Introducimos en la calculadora esta matriz de tamaño 6 x 6 y la llamamos *mat.* Después calculamos el determinante de esta matriz mediante la instrucción *det(mat),* con lo que obtenemos en la calculadora la expresión:

$$.0025(x^2 - 1.136x(y + 5.057) + 1.077(y^2 - .0863y + 3.485))$$

Con el fin de obtener un polinomio con variables x e y, empleamos la instrucción *expand,* escribiendo en el editor *expand(det(mat))* $\rightarrow$ *b,* con lo que obtenemos el siguiente polinomio:

$$.0025x^2 - .0028xy - .0141x + .0027y^2 - .0002y + .0092 \quad [4]$$

Mediante la instrucción anterior conseguimos la ecuación de la cónica de la forma dada por [2], además de guardar el resultado en una variable que hemos llamado *b.* De esta forma, hemos calculado de forma inmediata, con la ayuda de la TI-92, la ecuación de la cónica que representa el movimiento del asteroide. Notemos que han sido suficientes cinco puntos para determinar la ecuación, ya que el número de coeficientes a determinar era de cinco.

Ahora vamos a representar gráficamente la ecuación obtenida despejando la variable y del polinomio que representa la sección cónica. Para ello, utilizamos la instrucción *solve* del menú de álgebra. Escribimos *solve(b = 0, y)* ,con lo que en pantalla nos aparecen las dos soluciones de esta ecuación en función de la variable x. Ahora tenemos las dos partes de la función que queremos representar. Basta con pegar cada uno de los resultados en el editor de funciones en dos funciones distintas y seleccionar aquellas funciones que queremos representar para obtener una representación gráfica de la curva. Para obtener una representación gráfica adecuada mantenemos el dibujo de los datos que ya teníamos anteriormente. Las representaciones que se obtienen son las que aparecen en las Figuras 18 y 19.

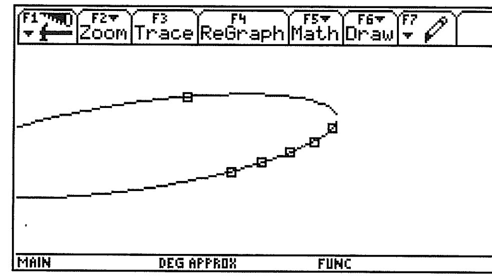


Figura 18. Representación gráfica de la sección cónica

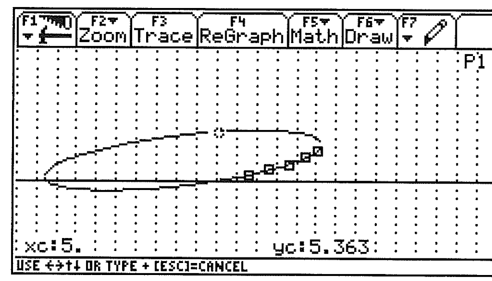


Figura 19. Zoom de la gráfica anterior

...en muchos de los problemas con que nos encontramos nos conformamos con ajustes de tipo lineal o exponencial, ya que intuimos que el tipo de ajuste va a ser de ese tipo.

Debemos notar, al observar las últimas gráficas, que hemos realizado un cálculo de la sección cónica basado en los cinco puntos iniciales; no hemos considerado el último punto que añadimos. El ajuste del sexto punto a la cónica es perfecto. De esta forma, cuando es conocida la curva que describen los puntos que debemos ajustar, el resultado es perfecto. En este caso particular estudiamos un problema del que conocemos su resultado final, ya que sabemos que los puntos van a seguir una sección cónica. Ello nos permite utilizar elementos muy básicos de la teoría de determinantes para su resolución. Sin embargo, en muchos de los problemas con que nos encontramos nos conformamos con ajustes de tipo lineal o exponencial, ya que intuimos que el tipo de ajuste va a ser de ese tipo.

Una vez obtenida la ecuación que gobierna el movimiento del asteroide, nos planteamos la estimación de una posición del mismo a partir de una de sus coordenadas. Vamos a ver ahora cómo con la ayuda de una máquina del tipo TI-92 esta tarea puede resultar muy simple. En principio, podemos despejar de [4] la variable y, escribiéndola en función de x. Sustituyendo el valor adecuado de x calculamos el valor particular de y, con lo que tenemos calculadas las dos coordenadas del punto.

Sin embargo, podemos crear una función en la TI-92 que nos resuelva este problema. Para ello, construimos en el editor de programas y funciones una nueva función, que llamaremos *aste1*, que va tener dos entradas y como salida nos proporciona la coordenada y del punto. La función es:

```
:aste1(x,y)
:Func
:.0024613994000665*x^2 - .0027973729800917*x*y -
.014145192500744*x + .0026507504200284*y^2 -
2.2864397947563E-4*y + .0092383901094095
:solve(.0024613994000665*x^2 - .0027973729800917*x*y -
.014145192500744*x + .0026507504200284*y^2 -
2.2864397947563E-4*y + .0092383901094095=0,y)
:EndFunc
```

La función comienza con la declaración de dos variables de entrada, que son las dos coordenadas del punto de la sección cónica. La siguiente expresión es el polinomio [4], que representa la ecuación de la sección cónica que describe el movimiento del cuerpo. En la siguiente línea de función resolvemos la variable y para el valor de x que le hayamos introducido inicialmente. De esta forma, si introducimos en el editor la expresión *aste1(5,y)*, obtenemos como resultado:

$$y = 5.363 \ or\ y = .0009$$

que son los resultados de las dos coordenadas y para $x = 5$. Esto significa que los puntos:

$$(5;\ 5{,}363) \text{ y } (5;\ 0{,}0009)$$

representan dos posiciones de la órbita del asteroide en su movimiento en torno al Sol. Análogamente podríamos crear una función que al introducir la coordenada y nos diera como resultado la coordenada x de su posición.

Leandro Tortosa Grau
IES Haygón.
San Vicente del Raspeig.
(Alicante).
Societat d'Educació
Matemàtica de la Comunitat
Valenciana «Al-Khwarizmi».

Rosario Martín Rico
IES Haygón.
San Vicente del Raspeig.
(Alicante).

Bibliografía

BERRY, J., E. GRAHAM y A. WATKINS (1997): *Learning Mathematics through the TI-92*, Chartwell-Bratt, Browley.

BERRY, J., E. GRAHAM y A. WATKINS (1997): *Mathematical Activities with DERIVE*, Chartwell-Bratt, Browley.

DEMANA, F., B. WAITS, S. CLEMENS y G. FOLEY (1994): *Precalculus. Functions and Graphs*, Addison-Wesley.

FINNEY, R.L., G.B. THOMAS, F. DEMANA y B. WAITS (1994): *Calculus. Graphical, Numerical, Algebraic*, Addison-Wesley.

ARITMÉTICA

(SEGUNDO GRADO)

POR

D. JUAN PALAU VERA
LICENCIADO EN FILOSOFÍA

FUNDADOR Y DIRECTOR QUE FUÉ DEL
COLEGIO MONT D'OR

S. A. Industrias Gráficas - Seix y Barral Herms.
EDITORES
Provenza, 219 :: BARCELONA
1913

Aritmética
(Segundo Grado)
Juan Palau Vera
Seix y Barral Herms.
Barcelona, 1913

Cuadro de Jackson

1	5	6	4	7	5	8	7	4
7								3
2								6
8								4
9								7
5								5
5								3
8								2
7	5	2	8	3	6	4	5	9

1	5	7	6	8
2				5
3				7
6				4
9	3	4	5	1

Súmense los números del cuadro pequeño, empezando por el 1, hacia la derecha, así: 1 + 5 + 7 + 6, etc., hasta dar toda la vuelta. Se dirán sólo los resultados parciales: 1, 6, 13, 19, etc. Lo mismo se repetirá empezando por el 5, por el 7, por el 6, es decir, por todos los números del cuadro y siguiendo la misma dirección. Siguiendo la dirección contraria puede doblarse el número de ejercicios.

Al terminar los ejercicios en el cuadro pequeño, se empezarán en el grande, empezando también por todos sus números y siguiendo las dos direcciones.

Los alumnos adquirirán con estos ejercicios una gran rapidez y seguridad en las sumas largas, que son las más difíciles.

Si el maestro lo cree conveniente o algún alumno lo pide, se pueden cambiar los números del cuadro por otros mayores.

El maestro distinguirá a los que hagan una suma completa en menos tiempo y sin equivocarse.

Tres o cuatro veces al año puede anotarse el tiempo que necesitan los alumnos para sumar sin error y comparar los resultados.

Dividir decimales

Ejercicios orales

Divídase mentalmente por 2:

2 ptas. 20 cts.	5 ptas. 60 cts.	14 ptas. 50 cts.

Divídase por 3:

3 ptas. 30 cts.	9 ptas. 15 cts.	24 ptas. 45 cts.

Divídase por 4:

4 ptas. 40 cts.	20 ptas. 16 cts.	16 ptas. 32 cts.

Divídase por 5:

10 ptas. 50 cts.	15 ptas. 60 cts.	30 ptas. 80 cts.

Divídase por 6:

12 ptas. 60 cts.	25 ptas. 20 cts.	13 ptas. 80 cts.

En estos cálculos dividimos primero las pesetas y luego los céntimos.

Las operaciones se escribirán del modo siguiente:

2'20 ptas. | 2
1'10 ptas.

50'25 ptas. | 5
10'05 ptas.

Obsérvese que en el cociente la coma decimal va siempre después de las pesetas.

En las operaciones:

5'52 ptas. | 3
1'81 ptas.

5'08 ptas. | 2
2'51 ptas.

en que las pesetas divididas por el divisor no dan un cociente entero, se divide prescindiendo de la coma y separando en el cociente... ¿cuántas cifras?

Multiplicar y dividir

Ejercicios orales

Díganse sólo los resultados:

2 000	5 000	10 000	6 000	9 000	× 5
12 000	11 000	15 000	20 000	14 000	× 5
3 000	7 000	2 000	2 000	8 000	× 2
15 000	25 000	44 000	50 000	29 000	× 2
4 000	6 000	9 000	3 000	7 000	× 4
12 000	15 000	20 000	25 000	23 000	× 4
6 000	9 000	8 000	7 000	4 000	× 3
15 000	25 000	33 000	14 000	21 000	× 3
7 000	3 000	5 000	8 000	4 000	× 6
12 000	15 000	13 000	11 000	16 000	× 6
3 000	5 000	2 000	7 000	4 000	× 7
8 000	11 000	13 000	10 000	14 000	× 7
9 000	4 000	6 000	11 000	12 000	× 8
3 000	5 000	9 000	6 000	7 000	× 9
10 000	25 000	30 000	50 000	55 000	: 5
15 000	35 000	45 000	80 000	100 000	: 5
14 000	16 000	20 000	60 000	22 000	: 2
80 000	72 000	98 000	68 000	100 000	: 2
40 000	8 000	12 000	32 000	16 000	: 4
60 000	72 000	88 000	64 000	100 000	: 4
12 000	18 000	27 000	36 000	33 000	: 3
66 000	75 000	78 000	81 000	63 000	: 3
12 000	24 000	30 000	42 000	54 000	: 6
72 000	96 000	60 000	48 000	90 000	: 6
14 000	35 000	21 000	70 000	77 000	: 7
49 000	84 000	42 000	63 000	98 000	: 7
24 000	40 000	88 000	72 000	96 000	: 8
18 000	90 000	63 000	45 000	99 000	: 9

SUMA 33
febrero 2000, pp. 99-102

Las cifras de π y el diálogo en el aula

M.ª del Carmen Rodríguez Teijeiro

A partir de un artículo publicado en el *Faro de Vigo* sobre la poetisa Wislawa Szymborska, Premio Nobel de Literatura, en el que se reproduce su poema «El número π», se lleva a cabo una experiencia interdisciplinar con el departamento de Lengua y Literatura, cuya descripción es el objeto de este trabajo.

IDEAS Y RECURSOS

LOS ALUMNOS de 1.° de BUP, con el paso del colegio al instituto, muestran muy variadas actitudes que van desde una gran inquietud, desasosiego, no parar, hasta posturas de más silencio, rigidez y bloqueo.

Después de varios años de experiencia docente me he encontrado por primera vez con un grupo de primero de 37 alumnos y alumnas apagados, serios, callados; en las sesiones primera y segunda de contacto con ellos sólo les he escuchado monosílabos, sí, no y silencio.

Para intentar romper esta situación he preparado una actividad que podría desarrollarse parte en el aula y parte fuera de ella, siguiendo un proceso que motivase el diálogo entre los alumnos rompiendo el hielo. Se trata de buscar las cifras del número π y compararlas con las cifras dadas en un poema escrito por la poetisa Wislawa Szymborska, Premio Nobel de Literatura. El alumno, mediante medidas, comprueba las primeras cifras. Más adelante, comprueba que existe un error en el número π dado por el poema (3,141592653589793234), mientras que las cifras de π son 3,14159265358979323**8**4. La poetisa se ha saltado una cifra, ¿por qué? En clase de Matemáticas se detecta el error de la poetisa, en clase de Lengua se intenta dar una explicación de la causa de este error.

Lo más llamativo de la puesta en práctica de este trabajo es que los alumnos observan medidas muy distintas de circunferencias y diámetros que dan como cociente aproximadamente el mismo número, con lo que ven con claridad el significado del error y la necesidad de su correspondiente valoración.

Para la realización de la actividad solicité a los alumnos:

- La construcción de una circunferencia y su diámetro, medición y análisis de las dificultades que se presentan.

- Una búsqueda de información documentada del cociente longitud/diámetro, ¿es el número π?
- Bibliografía (anotamos lo interesante que más o menos se puede entender).
- Por división y tanteo, búsqueda de aproximadadmente 20 cifras decimales de nuetsro cociente.
- Se entrega el poema del número π de Wislawa Szymborska publicado en el *Faro de Vigo*. Se trabaja sobre él en clase de Lengua Española.
- Comparación de las cifras del π calculado con el π del poema. falta un 8 en éste.

El número Pí

WISLAWA SZYMBORSKA

El número Pí es digno de admiración
tres coma **uno cuatro uno**
todas sus cifras siguientes también son iniciales
cinco nueve dos, porque nunca se termina.
No permite abarcarlo con la mirada **seis cinco tres cinco**
con un cálculo **ocho nueve**
con la imaginación **siete nueve**
o en broma **tres dos tres**, es decir, por comparación
cuatro seis con cualquier otra cosa
dos seis cuatro tres en el mundo.
La más larga serpiente después de varios metros se interrumpe.
Igualmente, aunque un poco más tarde, hacen las serpientes fabulosas.
El cortejo de cifras que forman el número Pí
no se detiene en el margen de un folio,
es capaz de prolongarse por la mesa, a través del aire,
a través del muro, de una hoja, del nido de un pájaro,
de las nubes, directamente al cielo
a través de la total hinchazón e inmensidad del cielo.
¡Oh, qué corta es la cola del cometa, como la de un ratón!
¡Qué frágil el rayo de la estrella que se encorva en cualquier espacio!
Pero aquí **dos tres quince trescientos noventa**
mi número de teléfono la talla de tu camisa
año mil novecientos setenta y tres sexto piso
número de habitantes sesenta cinco céntimos
la medida de la cadera dos dedos la charada y el código
en la que mi ruiseñor vuela y canta
y pide un comportamiento tranquilo
también transcurren la tierra y el cielo
pero no el número Pí, éste no,
él es todavía un buen **cinco**
no es un **ocho** cualquiera
ni el último **siete**
metiendo prisa, oh, metiendo prisa a la perezosa eternidad
para la permanencia.

- Autoevaluación en pequeños grupos y en gran grupo.
- Presentación, por parte de cada grupo, de un trabajo escrito y bien ordenado de todo el proceso.

Con esto lo que se pretende es que los alumnos consigan:

- Conocerse en pequeños grupos, rompiendo el hielo de principio de curso.
- Descubrir que el número π se puede calcular directamente, al menos en sus primeras cifras decimales.
- Observar que el número π, aunque familiar, es complicado.
- Aprender a buscar información documentada en distintos libros, prensa, etc.
- Leer la prensa de manera atenta y comprensiva (aparecen cuestiones matemáticas en ella).
- Conectar las Matemáticas con el Lenguaje de manera lúdica, en este caso a través de un poema de una Nobel de Literatura.

Al llevar la actividad al aula, conseguí una gran rentabilidad matemática, ya que con ella se repasaron y se fijaron los contenidos relativos a:

- División de números decimales.
- Números decimales infinitos no periódicos.
- La medida.
- El error en la medida.
- El tanteo y la aproximación.
- Comparación de números.

El hecho de realizarla en colaboración con el Departamento de Lengua y Literatura propició que también se potenciasen los siguientes contenidos lingüísticos:

- Juego simbólico de las palabras.
- Poema.
- Poesía libre.
- Expresión oral y escrita.

Metodología

Hemos comenzado la actividad de manera individual, cada alumno intenta construir una circunferencia con su diámetro, al surgir las primeras dificultades para el dibujo, comienzan a comentar entre ellos.

A la hora de medir, dichas dificultades aumentan, entonces se les da una pequeña pista y se les invita a formar pequeños grupos. Éstos se hacen al azar. El resto de la actividad se desarrolla en pequeños grupos y se hacen también algunas puestas en común en el gran grupo. El debate final recoge la valoración y dificultades intragrupales e intergrupales.

La actividad ha sido bastante dirigida porque al principio del primer curso los alumnos no están acostumbrados a trabajar así, además les resultaba desconocido el tema y la forma de abordarlo.

Evaluación de la experiencia

Ha sido toda ella muy positiva.

Aquel grupo que aparece en las primeras sesiones totalmente apagado, aburrido, con sus componentes ajenos al aula, bloqueados, después de la experiencia cambia radicalmente de actitud y se transforma en un grupo dinámico. El diálogo crítico, directo al alumno (al que se le llama por su nombre), al tema que tratamos, a la profesora, dio vida al grupo...

Las dificultades que han surgido, les han ayudado a ser más reflexivos sobre las cuestiones lingüísticas, matemáticas y a darse cuenta de que no por mucho usarlas éstas se entienden mejor, y no por ello dejan de ser complicadas, como en este caso.

Con esta experiencia se ha logrado un buen conocimiento de todos los alumnos del curso entre sí y con los profesores de Matemáticas y Lengua.

Se ha conseguido un clima de confianza aceptable que favoreció el resto del trabajo del curso.

Sorprendida por el premio afirmó que dedicará los 140 millones de pesetas de dotación a obras sociales

La poetisa polaca Wislawa Szymborska, galardonada con el Nobel de Literatura

Wislawa Szymborska, poetisa polaca de 73 años, es el nuevo nombre que se añade a la lista de laureados con el premio Nobel de Literatura, según la decisión unánime de la Academia Sueca, que anunció ayer jueves su secretario permanente, Sture Allén. Según la justificación de los 15 miembros del organismo, la autora merece el premio "por una poesía que con precisión irónica deja aparecer el contexto histórico y biológico en fragmentos de la realidad humana".

Los alumnos han aprendido algo de lo que supone la organización de un pequeño trabajo sobre un tema concreto y a buscar información que no está en un libro de texto.

Los alumnos han aprendido algo de lo que supone la organización de un pequeño trabajo sobre un tema concreto y a buscar información que no está en un libro de texto.

La motivación, el ánimo, el movimiento, el aprendizaje en este nuevo curso, tuvo su punto de partida en esta experiencia que valorada por ellos y por mí tendría una calificación media de notable y una dispersión 0,6. Dicha valoración se realizó posteriormente estudiando la Estadística a partir de los datos de una encuesta realizada sobre la actividad.

De los trabajos realizados por los alumnos he elegido un informe de uno de los grupos. me ha parecido interesante que el lector considere la opinión de los propios alumnos sobre su trabajo, por ello he hecho la siguiente transcripción literal de un escrito aportado por un grupo de trabajo de alumnos:

> Un día la profesora vino a clase y mandó dibujar una circunferencia. Después hallar su longitud y radio sin utilizar fórmulas y propuso que a ver quien era capaz de hacer esto, sin fórmulas.
>
> Como vio que no acertaban con la idea correcta dio ella como una pequeña idea o pista, que fue utilizar un cordelito, medirlo y ponerlo en la medida de la circunferencia, varios alumnos lo hicieron en clase. La profesora mandó hacerlo a todos en casa para el día siguiente, por grupos.
>
> A la clase siguiente anotó en el encerado y en un papel las longitudes y los radios de las circunferencias de todos los grupos.

Seguido a esto mandó dividir la longitud en el radio multiplicado por dos a ver si daba. Si la longitud era correcta tenía que ser una división infinita y aproximada al númeroπ, si no daba el número π teníamos que tantear, y así empezamos el número π.

Después de esto, mandó buscar información sobre este número y nos entregó fotocopias de un periódico en donde publicaron un poema sobre el número π,la autora de éste fue una escritora que ganó el premio Nobel. Las clases siguientes de lengua dedicamos un tiempo a leer y comentar este poema.

En otra clase la mayoría de los alumnos, divididos en grupos, le llevaron información y la profesora nos dijo que con esa información hiciésemos un trabajo sobre el número π. Muchos o todos los grupos se olvidaron de poner algo en el trabajo y la profesora los devolvió y puso otro margten, esto mismo sucedió otra vez, porque el trabajo tendría que estar formado por: información, circunferencia con su longitud y radio, comparación del número π que conseguimos cada grupo con el número π del poema, el proceso y la valoración.

M.ª del Carmen Rodríguez
IES Dámaso Alonso
Madrid

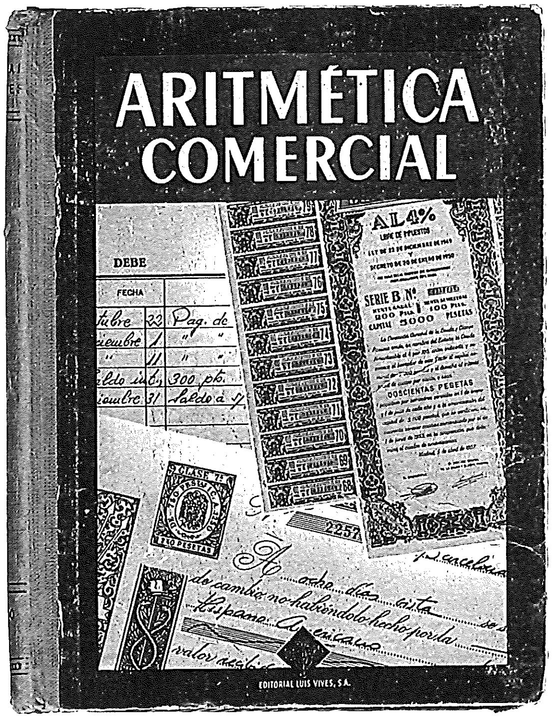


Fig. 31. — Ejemplo de Acción (tamaño reducido)

Aritmética Comercial
Tercer Grado
Editorial Luis Vives
Zaragoza, 1966

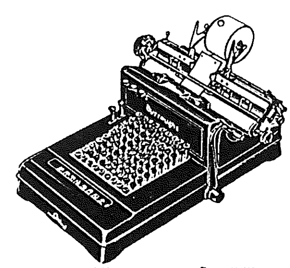


Fig. 1. — Máquina de sumar «Burroughs»

Las operaciones con las máquinas de calcular. — Desde hace algunos años vienen usándose las máquinas de calcular para las operaciones aritméticas. Daremos una ligera idea de las más conocidas.

La figura 1 representa la MÁQUINA DE SUMAR de «BURROUGHS» con la cual pueden efectuarse también la resta, la multiplicación y la división, reducidas a suma. En ella se ven columnas de teclas, numerada cada una de 1 a 9. Las dos primeras columnas de la derecha, que son negras, se destinan a decimales, aunque también pueden emplearse otras en caso necesario.

Ejemplo 10. — Repetición del anterior por el método hamburgués

Fecha		Conceptos	Vencimientos			Capitales		Días	Números	
Septbre.	10	S/r en let.	Septbre.	20	H	1.100	»	10		110
Septbre.	1	S/r en let.	Septbre.	30	H	900	»			
					H	2.000	»	19		380
Septbre.	2	M/r en let.	Octubre	19	D	800	»			
					H	1.200	»	6		72
Octubre	25	S/r en met.	Novbre.	25	H	600	»			
					H	1.800	»	21		378
Novbre.	15	M/r en met.	Novbre.	15	D	4.400	»			
					D	2.600	»	35	910	
Novbre.	29	S/r en let.	Dicbre.	20	H	2.050	»			
					D	500	»	−20	−110	
Novbre.	30	*Int. a m/f.*			D	3	28	71		
Novbre.	30	*Sdo. a m/f.*			D	553	28		800	940

Cálculo de los intereses: *Debe*, 800 : 72=11'11 ptas. *Haber*, 940 : 120=7'83 pesetas. Diferencia a favor del Debe, 3'28 pesetas.

SUMA 33

febrero 2000, pp. 103-106

El problema isoperimétrico en la Arquitectura, Literatura, Música..., en la Naturaleza

Grupo Construir las Matemáticas*

TALLER DE PROBLEMAS

PRESENTACIÓN

Por Rafael Pérez Gómez

Siempre me ha interesado la Historia de las Matemáticas cuando la resolución de problemas ha sido su columna vertebral. Ahora que estamos en el 2000, tenemos muy presente aquella famosa lista de 23 problemas dados por Hilbert hace 100 años. En ella propuso, lógicamente, problemas que después se ha visto que no tenían solución, otros que han dado lugar a nuevos campos de las Matemáticas y hasta algunos que aún hoy no sabemos resolver. Sin lugar a dudas, se trataba de buenos problemas para quienes investigan en Matemáticas. Éstos, y otros muchos problemas, tienen ocupados y preocupados a muchos grupos de trabajo que se afanan en su solución porque la resolución de problemas es el corazón mismo de la actividad matemática. De esa actividad surgen nuevas teorías que aportan modelos aplicables a situaciones reales que contribuyen al progreso de la Humanidad. Quizá debería matizar y decir «progreso científico», porque del social habría que hablar más despacio. Las Matemáticas son llamadas «reina de las ciencias» porque a todas resuelve problemas. ¿Qué hay en el pensamiento matemático que haga imprescindible su concurso en diversos campos de la actividad humana? La respuesta a esta pregunta puede ser un criterio que me permite calificar como bueno a un problema. Es decir, en esta sección, que tan amablemente me han solicitado mantener, durante once números de SUMA Emilio Palacián y Julio Sancho, algunos miembros del grupo, que me honro en coordinar –y que trabajamos bajo el eslogan *Construir las Matemáticas*– iremos presentando una colección de problemas «históricos» de Matemáticas y con valor cultural actual, lo que les hace tener interés educativo. ¡Ya salió la educación!, ¿es que no puede tener valor un problema por el mero hecho de ser de Matemáticas? Sí, claro, pero la selección que he hecho no va en esa dirección. Veamos. ¿Desde cuándo

* Los componentes del Grupo Construir las Matemáticas son Rafael Pérez, Isabel Berenguer, Luis Berenguer, Belén Cobo, M.ª Dolores Daza, Francisco Fernández, Miguel Pasadas y Ana M.ª Payá.

ha interesado tal problema y cuánto tiempo ha esperado su solución? ¿Por qué ese empeño en resolverlo? ¿Puede enunciarse y ser entendido por cualquier persona? ¿Tiene interés su solución en la sociedad actual? ¿Admite soluciones parciales? ¿Pueden obtenerse soluciones parciales interesantes dependiendo del grado de conocimiento que un posible resolutor tenga en Matemáticas? ¿Qué puede aprenderse, en cuanto a pensamiento matemático se refiere, en la reconstrucción de las soluciones?, ¿qué heurísticos, procedimientos o métodos pueden emplearse?

Belén Cobo es la persona de nuestro grupo con quien comparto mi interés por la Geometría. M.ª Dolores Daza, Ana M.ª Payá y Francisco Fernández son piezas fundamentales en el mismo para desarrollar estrategias para la enseñanza de Funciones y Gráficas. Miguel Pasadas, además de ser un buen matemático aplicado todoterreno, está capacitado para hablar de tú a cualquier ordenador. María Isabel Berenguer se emplea a fondo en una «cocina» llamada Álgebra con las especies propias de las incógnitas y las ecuaciones. Y, por último, Luis Berenguer es el encargado de «materializar» los conceptos para «jugar» con ellos. Entre todos, hemos elegido el primer buen problema para todos vosotros.

El Taller de problemas para (re)construir matemáticas

En esta ocasión no diremos «nunca perteneceré a un club que me tenga como socio» (Groucho) porque es para nosotros un honor ser miembros de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Más aún lo es el que se nos invite a mantener una nueva sección sobre problemas «históricos» en SUMA, durante unos números, y que comencemos en este emblemático 2000.

Lógicamente, se nos ha pedido que expongamos en unas líneas en qué vamos a emplear las páginas asignadas. ¿Qué hacer? Bueno, es claro que haremos Matemáticas. No sabemos aún qué Matemáticas, pero seguro que construiremos Matemáticas y nos divertiremos. Claro, ¿pero qué Matemáticas construiremos si, probablemente, ya están construidas todas las que podamos construir en esta sección de SUMA?

¿Hacemos un hueco para construir...? ¿Por qué no para resolver...? ¿Por qué no para explicar...? Mejor aún, ¡por qué no para dejarnos seducir por las Matemáticas! Entonces, lo mejor será que intentemos descubrir juntos el placer de (re)construir las Matemáticas trabajando sobre un solo problema. ¡Los problemas son el corazón de la actividad matemática! Sí, decididamente, haremos un solo problema con el que podamos trabajar en 1.° de ESO, en 2.° de ESO,..., en la Licenciatura de Matemáticas y en el año 2000, porque aún no se sabe su solución bajo determinadas condiciones. Trabajaremos un solo problema que está en la Literatura, en la Música, en la Arquitectura, en la Historia (también en la de las Matemáticas), en la Naturaleza y, sobre todo, tiene interés en nuestra cultura: **el problema isoperimétrico**. Lo presentaremos en 11 «entregas», que es un número insignificante para ciudadanos y ciudadanas de nuestro país que practican el seguimiento de ciertos temas que son suministrados por idéntico procedimiento, ¿o no? Bromas aparte, deseamos os guste el trabajo que hemos desarrollado para quienes leéis asiduamente nuestra queridísima SUMA. Esperamos vuestros comentarios, sugerencias y críticas, que presentaremos en la última entrega. Y, cómo no, nos gustaría que esta sección que ahora abrimos tenga un largo futuro. De todos y todas depende.

Propuesta de entregas

- *Primera*
  Presentación de la sección. El problema de los isoperímetros en la Naturaleza, Literatura, Música, Arquitectura... Los isoperímetros en la Educación: distintos enunciados del problema.
- *Segunda*
  Historia en la época griega.
- *Tercera*
  Historia en la época del Islam.
- *Cuarta*
  Ficha didáctica en geometría. Métodos trigonométricos.
- *Quinta*
  Ficha didáctica en álgebra. Desigualdades.
- *Sexta*
  Lapsus intermedio. Estudio del panal de abejas.
- *Séptima*
  Nueva aparición al final del siglo XVII. El cálculo de variaciones.
- *Octava*
  Ficha didáctica en funciones. Resolución mediante la función cuadrática.
- *Novena*
  El problema isoperimétrico y su resolución mediante el uso de derivadas.
- *Décima*
  En el siglo XIX se hace la penúltima aportación: Weierstrass y el problema de la existencia de solución.
- *Undécima*
  Visión global y análisis de sugerencias recibidas en la Redacción de SUMA

El problema isoperimétrico en la Arquitectura, Literatura, Música..., en la Naturaleza

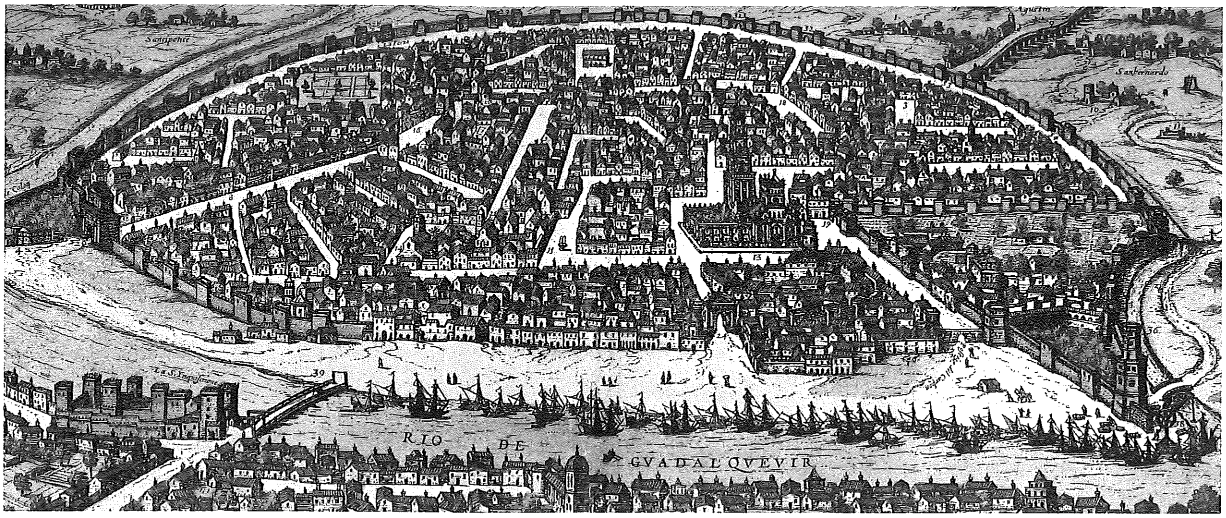
Fotografía y Matemáticas es una de las actividades que vienen despertando gran interés entre nuestro alumnado. La imagen que se muestra es una fotografía hecha por Pilar Moreno, una de las mejores fotógrafos sobre el tema y asidua colaboradora de SUMA.

¡Qué raro!, un balcón circular en el Ensanche de Barcelona. ¡Estos arquitectos modernistas estaban de la cabeza!, pensarán algunos. Sin embargo, nada hay de extraño en este caprichoso diseño arquitectónico si se recuerda el gusto por imitar a la Naturaleza de Antoni Gaudí, genial arquitecto catalán, que nos dejó, entre otras construcciones, la casa de la Pedrera como ejemplo singular de lo que decimos.

Balcón modernista. Barcelona
(Foto: Pilar Moreno)

Un balcón demasiado grande, o demasiado pequeño, rompería la estética de una fachada; es decir, independientemente de su forma, el tamaño debe ser el «habitual» en su entorno. Todo balcón que se precie incorpora unos cristales cuya función no es otra sino la de permitir la visión a su través; entonces, para un tamaño dado, ¿qué forma es la óptima? Es decir, cómo conseguir la mayor iluminación posible dentro de la habitación o cómo tener la mayor superficie acristalada para poder ver el exterior es el problema que debió presentársele al arquitecto, pero con la limitación, ya dicha, de ciertas dimensiones dadas. Matemáticamente, podemos plantear la situación diciendo que entre un cristal rectangular, con unas determinadas dimensiones, y otro con una forma diferente y dimensiones similares, ¿cuál optimiza su función? Evidentemente, su diseñador debía haber pensado en la forma que adopta una gota de aceite cuando la vemos flotar en la sopa o, quizá, en la forma de las ondas provocadas sobre la superficie del agua en un estanque, o... ¡vaya usted a saber cómo!, dio con la propiedad maximal de la circunferencia en la Naturaleza y la incorporó a su Arquitectura. Aunque es probable que también conociese la leyenda sobre la reina Dido, fundadora legendaria de la ciudad de Cartago, que el poeta romano Virgilio (70-19 a.C.) narra en la *Eneida*, epopeya mitológica que está reconocida como obra maestra de la literatura latina.

Dido, en la mitología griega, era una princesa fenicia hija de Belo, rey de Tiro, ciudad del sur del Líbano, junto al Mediterráneo, la ciudad más importante de aquellos fenicios que obsequiaron a la Humanidad regalándole un alfabeto. Su hermano Pigmalión asesinó al marido de Dido para quitarle todas sus posesiones y convertirse en rey. Ésta huye por mar hasta llegar a las costas de África. Era el año 900 a.C., aproximadamente. Quiso comprar unas tierras al cacique local, llamado Jarbas de Numidia, donde pudiesen vivir ella y sus gentes. El trato fue difícil, no tanto porque Dido regatease demasiado sino porque Jarbas no estaba dispuesto a que se estableciera una colonia en su territorio, y se cerró con la condición de que le vendería más tierra que la que pudiera delimitarse con la piel de un buey. Dido supo sacar el mayor provecho de lo acordado ya que hizo cortar la piel en finas tiras, las cosió una a continuación de otra y, aprovechando la costa, determinó una semicircunferencia. Suponiendo que la piel fuese equivalente a la superficie lateral de un cilindro de 2 m de altura y 0,5 m de radio y que se cortasen tiras de 2 mm, la semicircunferencia que pudo construir Dido pudo ocupar algo más de millón y medio de metros cuadrados o, equivalentemente, más de 150 hectáreas de terreno. Eso es lo que la Historia dice que fue la fundación de la ciudad de Cartago que, en la actualidad es un suburbio residencial de Túnez. Mas no debemos ver un hecho aislado el uso que Dido hizo de esta propiedad de la circunferencia ya que Proclo (ca. 450) describe situaciones análogas en sus comentarios al primer libro de



Reproducción de las murallas medievales de Sevilla

Euclides ya que indica que era frecuente encontrar embaucadores que basaban un trato sobre compra de tierras en la comparación de la extensión de terrenos con el tiempo de duración de su circunvalación, siendo conscientes de que había figuras que teniendo un perímetro menor podían tener mayor superficie. Por último, cabe decir que el urbanismo medieval fue quien mejor imitó a la reina Dido, ya que no hay más que observar la forma de las murallas que rodean a ciudades como, por ejemplo, Sevilla que se construyeron en la ribera de un río.

Asimismo en la *Divina comedia* de Dante, en la que Dido es condenada al segundo círculo del Infierno por haberse suicidado al ver cómo se iba Eneas, aquel príncipe troyano que fundara Roma, del que se enamoró perdidamente en un amor que, por mandato del dios Júpiter, era imposible. Claro que en Barcelona hay una gran afición a la ópera y también pudiera haber sido éste el camino seguido por nuestro arquitecto ya que el británico Henry Purcell plasmó esta historia en la ópera llamada Dido y Eneas.

Realmente, no parece probable nada de lo anterior, pero es claro que nuestro desconocido arquitecto conocía el problema de los isoperímetros y aplicó magistralmente de un modo «natural».

Quienes leemos SUMA tenemos como denominador común el interés por la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Desde esta perspectiva, un problema es más interesante si podemos llevarlo al aula. Sin ninguna duda, nos atrevemos a animarte a que isoperimetrees (¡vaya palabro!) con tu alumnado. Dependiendo de su nivel, elige el enunciado conveniente de entre los que aparecen en el recuadro que figura debajo.

Hasta aquí llega el primer capítulo de la historia de los isoperímetros. Prometemos seguir en el próximo número narrando cómo lo abordaron aquellos griegos que crearon una ciencia que convinieron en llamar Matemáticas.

FIN DE LA PRIMERA ENTREGA

- ***Enunciado 1*** (do Carmo, *Geometría diferencial de curvas y superficies*, Alianza Universidad Textos, 1976, Madrid):
  De todas las curvas cerradas simples en el plano con longitud dada l, ¿cuál es la que encierra un área máxima?
- ***Enunciado 2*** (Roshdi Rashed y otros, *Histoire des sciences arabes*, vol 2, Seuil, 1997):
  Se trata de demostrar que entre los dominios planos, con un perímetro dado, la circunferencia encierra un área mayor; de todos los sólidos del espacio que presentan igual área lateral, la esfera encierra el volumen mayor.
- ***Enunciado 3*** (Polya, *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas, 1981):
  De entre los cuadriláteros con igual perímetro, determinar el de mayor superficie.
- ***Enunciado 4*** (Rafael Pérez Gómez y otros, *Construir las Matemáticas*, vols. 1.° y 3.° E.S.O., Proyecto Sur, 1997):
  Con un listón de 3 metros de longitud se desea enmarcar un cuadro lo más grande posible. Hallar sus dimensiones.

SUMA 33
febrero 2000, pp. 107-110

Publicidad y matemáticas

Fernando Corbalán

MATES Y MEDIOS

A

No estoy seguro de que la importancia del sistema educativo aumente con el paso del tiempo (por más que se nos diga a los profesores por parte de las autoridades de turno en ocasiones destacadas y con voz engolada aquello de que «vuestra misión en muy importante porque en vuestras manos están nuestros jóvenes, el futuro de la sociedad»), pero hay que cerrar los ojos para no ver el despegue fulgurante y la influencia creciente de los medios de comunicación social, encabezados por la televisión (un miembro destacado de las nuevas familias, en las que el poder lo tiene quien maneja el mando a distancia), pero seguidos de cerca por la radio (con todos sus «principales»), la prensa (que da carta de «existencia» a los hechos que recoge) y ahora la tela de araña que nos invade por Internet (de una importancia tal que se ha desgajado del conjunto de medios).

También las matemáticas aparecen por ese mundo, aunque los profesores seamos tendentes a esconder la cabeza debajo del ala y a no darnos por aludidos. En contadas ocasiones su papel es destacado (cuando se refieren a hechos matemáticos o personas que trabajan en ellas), pero en muchas más de las que percibimos (incluso nosotros que estamos dispuestos a detectarlas) las matemáticas se nos cuelan de rondón. Y todas esas formas de uso son algunas de las encarnaciones de las matemáticas en nuestra sociedad, la utilización que hacen de las mismas los ciudadanos de a pie, con independencia de lo que a nosotros nos pudiera gustar.

Esta nueva sección de SUMA se va a ocupar de sacar a la luz, de hacer visibles esas matemáticas que vegetan agazapadas por los medios. Y nos gustaría hacerlo de una manera interactiva (con ese virus de contacto y participación que nos han inoculado, precisamente, los medios): desde aquí se harán ofertas (propuestas, sugerencias, métodos de búsqueda,...) que querríamos que dieran su fruto de forma que en la siguiente entrega buena parte del material proviniera de los lectores, para corroborar lo que aquí se diga o para contravenirlo (y también por supuesto –y ojalá– para iniciar nuevas vías). La comunicación puede hacerse por correo normal en la dirección de la revista o por mail a la dirección

suma@public.ibercaja.es

Hoy comenzaremos nuestra andadura con la Publicidad, y en cada uno de los próximos números de SUMA iremos proponiendo temas diversos de los medios de comunicación para contextualizarlos y comentarlos, con el propósito de que los tomemos en consideración, y aportemos entre todos datos, ejemplos y reflexiones. Para que de esa manera veamos una parte de esas matemáticas que pululan por la sociedad, a la vez tan importantes y tan «invisibles» para todos los ciudadanos.

Publicidad y matemáticas

Si los medios de comunicación tienen una gran influencia en nuestra vida (y más todavía en la de nuestros alumnos y alumnas, en período de formación de su personalidad), uno de los aspectos que vehiculan, la publicidad, es determinante de usos, costumbres y valores de esta sociedad de consumo a caballo entre dos milenios, en la que no se cuestiona el pensamiento único de la ley de la oferta y la demanda. Tanto es así que, sin demasiada hipérbole, el tratadista del tema R. Guérin ha afirmado que «el aire que respiramos es un compuesto de nitrógeno, oxígeno y publicidad».

En la publicidad, por la importancia de los medios económicos que maneja (no olvidemos que es el sostén económico único de las cadenas privadas de televisión y radio y uno de los pilares de la prensa, en la que supone la mitad de los ingresos) y la rapidez con que tiene que dar sus mensajes (sobre todo en TV), casi nada está dejado al azar. Las razones por las que aparecen unas u otras cosas están meditadas con cuidado y sus efectos previstos con detalle. Se ha estudiado desde diferentes puntos de vista (algunos bastante poco explícitos a veces, entre los que vale la pena destacar la sexualidad y los aspectos subliminales).

También cuando aparecen aspectos matemáticos (porque, como veremos a continuación, los hay, aunque demasiadas veces nos pasen desapercibidos) responden a razones meditadas y a inclinaciones profundas del ser humano. Os ofrecemos a continuación algunos rasgos de los mismos. En primer lugar los logotipos o anagramas que identifican las marcas comerciales. Y después tres razones para la aparición de las matemáticas (con ejemplos un poco añejos, pero con razones que perviven), para acabar con un anuncio actual un tanto críptico del que nos gustaría recibir comentarios.

Logotipos

Un porcentaje significativo de los de las grandes compañías son geométricos. La introducción o el cambio de logotipo supone una inversión de ingentes cantidades de dinero; por tanto cuando se eligen figuras geométricas o dibujos con propiedades sencillas (simetrías sobre todo) es porque son de un impacto seguro (profundo y duradero) en la mente humana: un aspecto que nos hace valorar más las matemáticas, incluso las elementales, y que pocas veces tomamos en consideración. Aportamos sólo dos de esos logotipos, sencillos y sugerentes:

* MITSUBISHI: a la vez un triángulo equilátero al que se quitan tres pequeños triángulos equiláteros y tres rombos que resultan de girar uno 120° cada vez (lo que le da un aspecto dinámico de una hélice que gira).

* NEW MAN: una grafía que permite leer siempre la marca tanto si está hacia arriba como hacia abajo; por eso los «jeans» exhiben claramente su marca en las tiendas incluso estando colgados de una percha.

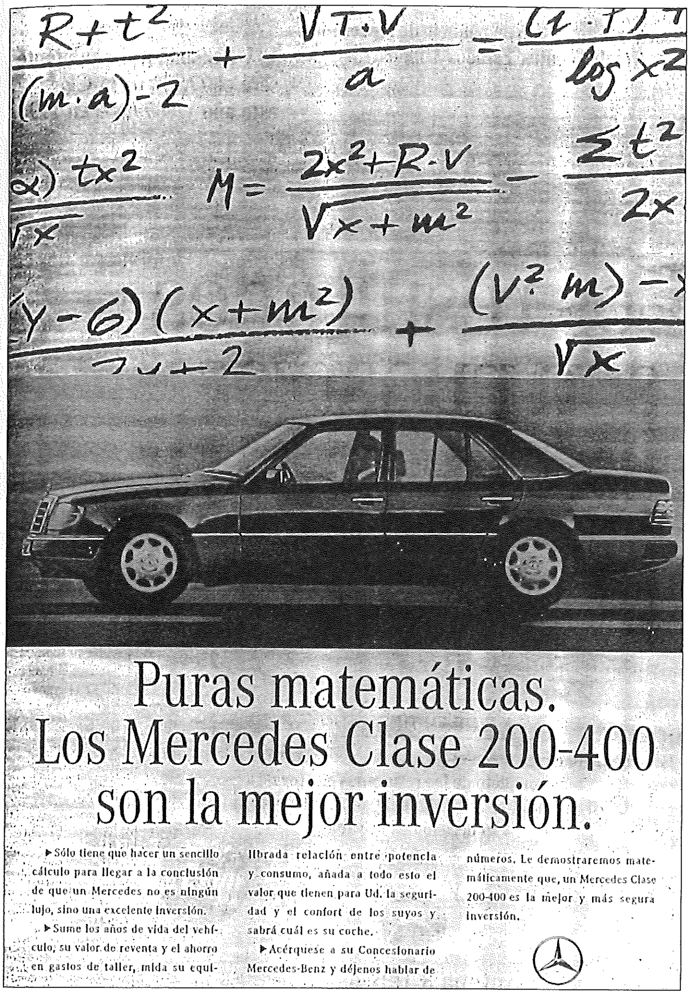
Seguro que hay muchos otros que os han impactado por alguna razón (que ya de paso podéis hacer pública para que todos la tengamos en cuenta): enviarlos y los someteremos a la opinión pública en el próximo número.

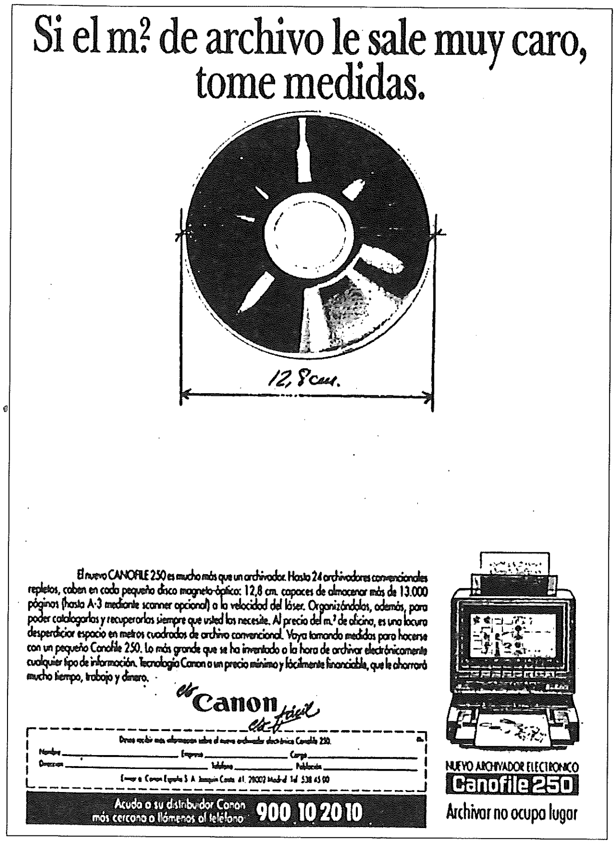
Las matemáticas para dar seriedad

Cuando en los anuncios aparecen las matemáticas vienen a suponer un intento de seriedad e incontrovertibilidad (o mejor para evitar la palabra, de algo sin discusión), como en el de los coches Mercedes que adjuntamos. También de referirse a temas que sólo los dirigentes, los ejecutivos (los que mandan en definitiva) entienden. Es un guiño cómplice: los que sabemos matemáticas hemos llegado a altos niveles de dirección y podemos tomar decisiones (y hay que tomar nota –y que la tomen las autoridades–: formamos parte de la de la «jet-set», de la elite social), como en el anuncio de Canon.

Las matemáticas para dar seguridad

En particular en dos aspectos diferentes. El 100% es el símbolo de la seguridad a toda prueba, luego buen eslogan para una compañía de seguros, por ejemplo (ver la campaña de AXA). Y las gráficas, cuanto más cartesianas mejor (porque aún se entienden menos, quizás) para mostrar algo que no tiene vuelta de hoja, que está perfectamente bien calculado (no damos ejemplos de este aspecto pero seguros que vosotros tenéis varios).


Puras matemáticas.
Los Mercedes Clase 200-400
son la mejor inversión.
▶Sólo tiene que hacer un sencillo cálculo para llegar a la conclusión de que un Mercedes no es ningún lujo, sino una excelente inversión.
▶Sume los años de vida del vehículo, su valor de reventa y el ahorro en gastos de taller, mida su equilibrada relación entre potencia y consumo, añada a todo esto el valor que tienen para Ud. la seguridad y el confort de los suyos y sabrá cuál es su coche.
▶Acérquese a su Concesionario Mercedes-Benz y déjenos hablar de números. Le demostraremos matemáticamente que, un Mercedes Clase 200-400 es la mejor y más segura inversión.


Si el m.² de archivo le sale muy caro,
tome medidas.
12,8 cm.
El nuevo CANOFILE 250 es mucho más que un archivador. Hasta 24 archivadores convencionales repletos, caben en cada pequeño disco magneto-óptico: 12,8 cm. capaces de almacenar más de 13.000 páginas (hasta A-3 mediante scanner opcional) a la velocidad del láser. Organizándolas, además, para poder catalogarlas y recuperarlas siempre que usted las necesite. Al precio del m.² de oficina, es una locura desperdiciar espacio en metros cuadrados de archivo convencional. Vaya tomando medidas para hacerse con un pequeño Canofile 250. Lo más grande que se ha inventado a la hora de archivar electrónicamente cualquier tipo de información. Tecnología Canon a un precio mínimo y fácilmente financiable, que le ahorrará mucho tiempo, trabajo y dinero.
es Canon es fácil
Acuda a su distribuidor Canon más cercano o llámenos al teléfono 900 10 20 10
NUEVO ARCHIVADOR ELECTRONICO
Canofile 250
Archivar no ocupa lugar


La Compañía con Visión de Futuro.
100%
SEGUROS
A PARTIR DE AHORA, CON AXA, USTED PUEDE ASEGURAR SU FUTURO AL 100%. PORQUE AXA ES LA COMPAÑIA DE SEGUROS NACIDA EN EL SIGLO XX PARA ASEGURAR EL SIGLO XXI. EN AXA TRABAJAMOS EN EL PRESENTE PARA SER
LA MAS IMPORTANTE COMPAÑIA ASEGURADORA DEL MAÑANA. DE ESTA FORMA, CON NOSOTROS, USTED ESTA CONSTRUYENDO SU MEJOR FUTURO.
CIEN POR CIEN SEGUROS
AXA
SEGUROS

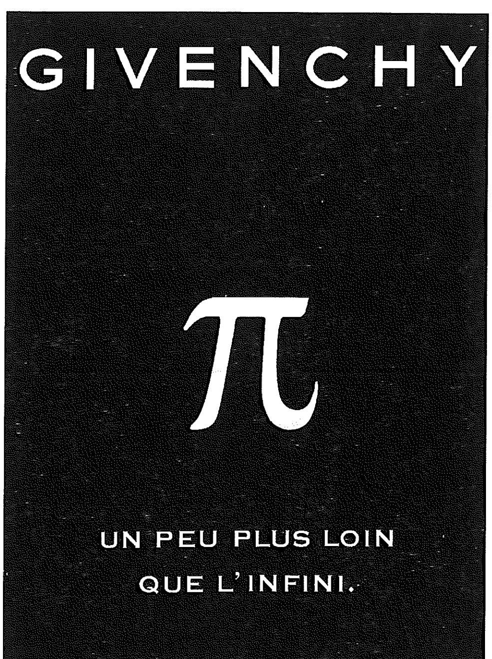
Lo subliminal

Como muchas otras cosas lo matemático aparece de forma subliminal, un tanto escondido, pero presente, lo que permite su percepción, aunque no nos demos cuenta muy clara. ¿Qué hay en el anagrama del Banco Zaragozano? Por supuesto que una Z, pero también un símbolo que tiene que ver con la ocupación del banco: un %. No es el único, porque en el Deustche Bank está completamente despojado en su logotipo.

Banco
Zaragozano

Grupo Deutsche Bank

Y para acabar el anuncio prometido: la campaña del perfume π de Givenchy: «un peu plus loin que l'infini» (un poco más allá del infinito). ¿Qué quiere decir y por qué se utiliza ese nombre y ese eslogan? Yo tengo mis hipótesis pero prefiero decirlas tras ver las vuestras. Las esperamos. Aparecerán en el próximo número junto con otra vertiente interesante (esperamos) de los medios de comunicación.



SUBCOMISIÓN ESPAÑOLA DE ICMI

¿Qué es ICMI?

La Comisión Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas (ICMI) se creó en el Congreso Internacional de Matemáticas (Roma, 1908) a propuesta de David Eugene Smith, siendo su primeros Presidente y Secretario Félix Klein y Henri Fehr.

Cuando en 1952 se creó la Unión Matemática Internacional (IMU), la ICMI se reconstituyó como comisión de la IMU.

Subcomisión Española de ICMI

España ha participado activamente en la ICMI a través de un representante nacional, Claudi Alsina, y de Miguel de Guzmán, presidente de ICMI hasta 1998.

En 1999 se forma la subcomisión nacional de ICMI, a iniciativa del Presidente del Comité español de la IMU (Unión Matemática Internacional), José Luis Fernández.

En esta subcomisión están representadas las cuatro sociedades que integran el comité español de IMU, otras dos sociedades del ámbito de la enseñanza y de la investigación en didáctica de las matemáticas, más el Ministerio de Educación y Cultura.

Actividades

Los objetivos inmediatos de la Subcomisión española de la ICMI son:

- Difundir la existencia y fines de ICMI.
- Impulsar estudios sobre la enseñanza de las Matemáticas en España, entre los que figuran:
  * La coordinación de la enseñanza primaria, secundaria y universitaria.
  * La utilización de nuevas tecnologías en la enseñanza de las Matemáticas.
- Conseguir el apoyo y la financiación adecuados a sus fines.

Miembros de la Subcomisión española ICMI

Presidencia: María Jesús Luelmo. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM).

Secretaría General: Tomás Recio. Real Sociedad Matemática Española (RSME).

Vocalías: Antonio Aranda (FESPM). José Luis Álvarez (FESPM). Joan Cerda (Sociedad Catalana de Matemáticas –SCM–). Soledad Rodríguez (Sociedad Española de Matemática Aplicada –SEMA–). María Victoria Sánchez (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática –SEIEM–). María Dolores de Prada (Ministerio de Educación y Cultura). Marco Antonio López (Sociedad de Estadística e Investigación Operativa –SEIO–).

Más información

Tomás Recio. Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad de Cantabria. 39071 Santander.
<recio@matesco.unicam.es>

Web de la subcomisión española de la ICMI:
http://www.matesco.unicam.es/icmi.es

Web de la ICMI:
http://elib.zib.de/IMU/ICMI

SUMA 33
febrero 2000, pp. 111-112

El salto del factor

Grupo Alquerque*

JUEGO para dos jugadores.

Material

- Lápiz y goma.
- Un tablero con los números del 1 al 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Reglas del juego

1) El primer jugador tacha en el tablero un número par.
2) A continuación y por turno, cada jugador debe tachar un múltiplo o divisor del número que ha elegido su compañero y que no haya sido aún tachado.

* Los componentes del Grupo Alquerque de Sevilla son Juan Antonio Hans Martín (C.C. Santa María de los Reyes), José Muñoz Santonja (IES Macarena), Antonio Fernández-Aliseda Redondo (IES Camas), José Blanco García (IES Alcalá del Río) y Josefa M.ª Aldana Pérez (C.C. Inmaculado Corazón de María –Portaceli–).

JUEGOS

3) Si un jugador elimina un número que no cumple las características anteriores y el contrario lo descubre, la jugada no tiene validez y el jugador pierde.

4) Cuando un jugador no encuentra ningún número que suprimir, pierde la partida.

Características del juego

1) Éste es un juego de conocimiento en el que se manejan los siguientes contenidos: múltiplo y divisor de un número entero, descomposición de un número en producto de factores y manejo de números primos.

2) El juego puede utilizarse al principio de la secundaria para afianzar los conceptos relativos a divisibilidad en enteros. Conceptos que previamente se habrán explicado y trabajado en clase. Si se utilizan en cursos posteriores, pueden servir para repasar esos mismos conocimientos antes de adentrarnos en otra parte de la materia.

3) Es deseable que se utilice el cálculo mental para descubrir cuál es la jugada que se debe hacer. Si en el grupo hay alumnos con más dificultades se les puede permitir que realicen los cálculos con papel e incluso con calculadora, pero potenciando que usen estos medios para asegurarse el cálculo, es decir, que elijan mentalmente el resultado y lo comprueben posteriormente a mano o con la calculadora.

4) Si se utiliza el juego en cursos bajos, es interesante no utilizar todos los números en un primer momento, sino comenzar sólo con números del 1 al 50 o incluso menos. En sucesivas partidas se puede ir ampliando la cantidad de números que se utilizan.

5) La primera regla del juego es necesaria porque si no existe una estrategia que permite ganar siempre sin más que comenzar por elegir un número primo superior a 50. Es interesante proponer el juego la primera vez sin esa condición y cuando los alumnos comiencen a encontrar la estrategia ganadora, entonces imponer la primera condición.

6) Las primeras partidas que se realizan suelen ser lentas, pues los alumnos no manejan bien los números primos y los divisiores de un número pero, posteriormente, las partidas son muy rápidas por lo que en poco tiempo se practican varias veces los conceptos que hemos comentado.

7) Una de las mayores dificultades que encuentran los alumnos es localizar todos los posibles divisores de un número no primo para encontrar alguno que no esté tachado; puede ser deseable repasar estructuras en árbol o cualquier otro método que permita encontrar todos los divisores.

8) El tablero puede servir para realizar la Criba de Eratóstenes pues cuando los alumnos han descubierto estrategias basadas en los números primos, les interesa conocer cuáles son éstos y, sobre todo, los números primos grandes que son los que permiten aislar al contrario.

9) Después de jugar varias veces, los alumnos llegan con facilidad a descubrir que caer en el número 1 es equivalente a perder la partida, pues al contrario le basta tachar un primo mayor que 50 para quedarse sin posibilidades de jugar.

10) El tablero del juego puede servir para varias partidas si se tachan los números con lápiz que pueda ser borrado. Pueden utilizarse también fichas para tapar los números y así no tener que andar borrando.

Referencia

STEWART, I (1997): «Juegos Matemáticos», *Investigación y Ciencia,* mayo 1997.

SUMA 33
febrero 2000, pp. 113-114

Matemáticas en Internet

Antonio Pérez Sanz

RECURSOS EN INTERNET

SEGÚN DATOS del mes de enero ya existen en nuestro país más de dos millones y medio de usuarios de Internet; y no sólo eso, cada mes se incorporan más de 100.000 personas nuevas a la Red. Sin duda muchos de ellos son matemáticos.

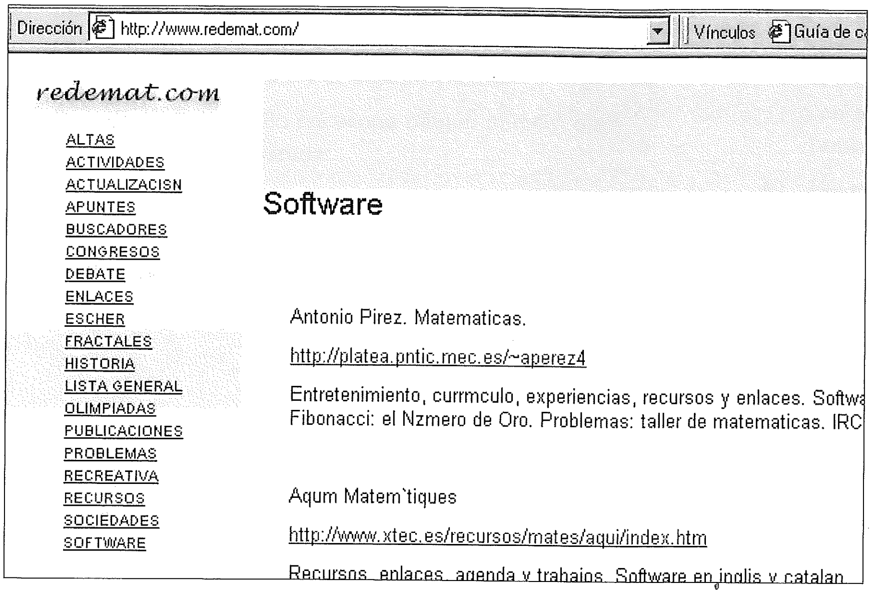
En numerosos artículos, Internet aparece como una puerta de acceso a una información casi ilimitada. Y en parte, sólo en parte, es cierto. Sin embargo, y pienso ahora en los profesores recién incorporados a la Red, buscar algo concreto de matemáticas en Internet, un recurso específico para desarrollar una unidad didáctica, un programa del que nos han hablado, problemas para aplicar en la clase la semana próxima, experiencias de aula para un determinado curso de la ESO..., no es tarea tan simple. Uno se puede perder fácilmente buscando una aguja en el pajar o lo que es casi peor encontrar miles de agujas que no nos sirven.

Para encontrar cosas de interés sin necesidad de perder decenas o cientos de horas de sueño colgados al ordenador lo mejor es contar con un buen amigo matemático con muchas horas de navegación y que tenga una buena selección de sitios clasificados por temas y que esté dispuesto a pasarnos sus direcciones favoritas.

Pero esto no es tan fácil. Por fortuna, la generosidad en la transmisión de información gratuita ha sido una de las constantes de Internet desde su nacimiento, muchos de los viejos usuarios nos ahorran mucho tiempo y dinero facilitando en sus páginas una buena selección de sitios que se pueden visitar.

Este es el caso de nuestro colega gallego Flavio Piñeiro Sarille, del IES de Sanxenxo, que en su página www.redemat.com nos brinda una excelente colección de enlaces clasificados a páginas con información y materiales útiles sobre matemáticas.

Los enlaces están clasificados por temas, agrupados por orden alfabético en las siguientes categorías: Actividades, Actualización, Apuntes, Buscadores, Congresos, Debate, Enlaces, Escher, Fractales, Historia, Lista General, Olimpiadas, Publicaciones, Problemas, Recreativa, Recursos, Sociedades y Software.



En cada una de estas secciones podemos encontrar una veintena de direcciones con un breve comentario descriptivo de los contenidos de la página que se puede visitar.

Como se ve por los títulos de las secciones los enlaces abarcan una buena porción de los temas de interés de cualquier profesor de matemáticas. Seguro que en algunas de ellas podréis encontrar ese material que andábais buscando desesperadamente.

En definitiva, una buena catapulta de lanzamiento para iniciar nuestra lista de favoritos en matemáticas.

Y hablando de generosidad, además de recursos interesantes, nuestros buenos amigos y colaboradores de SUMA, José Antonio Mora y Onofre Monzó nos ofrecen una nueva página que hará las delicias de todos los amantes de CABRI II.

La dirección es

http://teleline.terra.es/personal/joseantm/

No es una página de Internet al uso, no encontraréis en ella una presentación alambicada y llena de colorido. Encontraréis algo mucho mejor: más de 100 archivos de Cabri preparados para bajarlos directamente a nuestro ordenador y empezar a disfrutar de ellos; y por qué no, a utilizarlos en clase con los alumnos. Son los ejemplos presentados por los autores en las JAEM de Salamanca y en las recientes de Lugo.

Por que además vienen acompañados del un amplio texto con explicaciones de lo más detalladas.

Los archivos se agrupan en dos secciones:

- Geometría de los mecanismos.
- Coordenadas con Cabri.

En la primera, los amantes de investigar lugares geométricos van a encontrar un material más que interesante, además de poder disfrutar de las animaciones de todos esos artilugios mecánicos en los que hasta ahora muy pocos se han parado a buscar las matemáticas que los hacen funcionar.

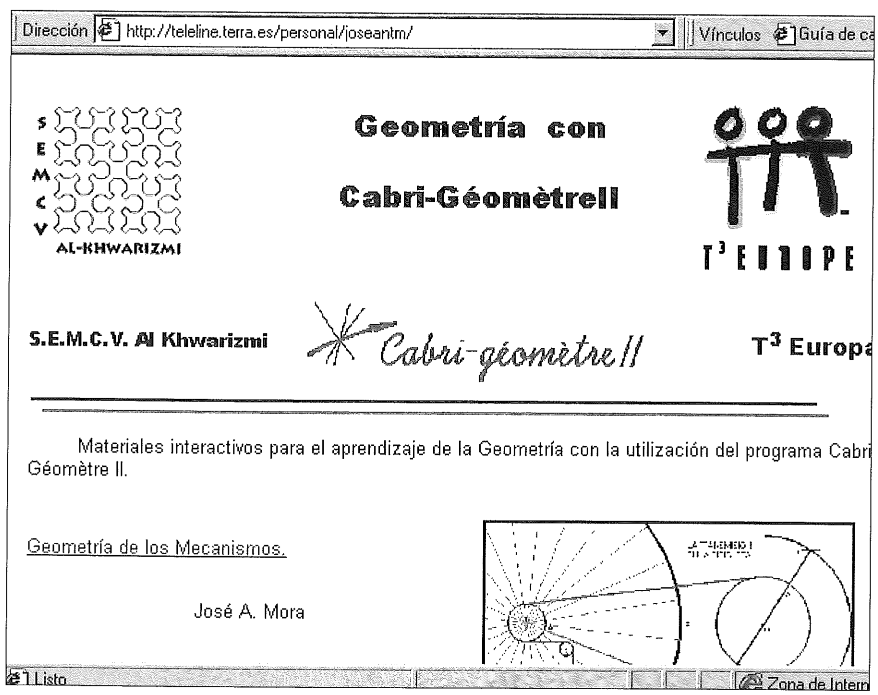
En la segunda, los autores nos brindan un excelente material en forma de aplicaciones de Cabri para el estudio de diversos temas de Análisis y Estadística: la recta, funciones, derivada e integral, optimización y estadística.

Y todo ello con unas animaciones muy atractivas visualmente, en las que los conceptos, y nunca mejor dicho, entran por los ojos.

Aunque muchos están un poco mosqueados con el hecho de bajarse ficheros de la red, por el tiempo que se tarda en conseguirlo, no es en este caso algo que deba preocupar. Los ficheros, comprimidos ZIP, son muy pequeños (2 o 3 K cada uno y 125 K el de todos los mecanismos) y se bajan de forma casi instantánea.

No desaprovechéis la ocasión de conseguir un material magnífico.

¡Y todavía hay algunos que dicen que en Internet sólo hay pornografía!...



SUMA 33
febrero 2000, pp. 115-117

¿Ejercitar el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación?

Carlos Usón Villalba
Ángel Ramírez Martínez

DESDE LA HISTORIA

EN LA SEGUNDA PARTE del *Discurso del Método* afirma Descartes, comparando «el análisis de los antiguos y el álgebra de los modernos», que «el primero está tan sujeto a la consideración de las figuras que no puede ejercitar el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación». Se intuyen en esta frase, a pesar de estar sacada de contexto, la pretensión de buscar procedimientos generales y la creativa tensión dialéctica entre métodos antiguos y modernos. En realidad, la eterna dinámica de trabajo en matemáticas. Sí, eterna. Al menos desde hace dos mil quinientos años, si nos ceñimos a nuestro entorno cultural. Es cierto que el cambio teorizado por Descartes (teorizado; había ya mucho camino práctico recorrido desde la matemática islámica medieval) es un momento clave. Puesto que las matemáticas de la enseñanza secundaria (hasta primero de bachillerato) se distribuyen en un entorno que lo tiene como centro, el cambio metodológico que supone nos parece una de las más interesantes cuestiones históricas y filosóficas (en general, culturales) que pueden y deben resaltarse y ser aprovechadas didácticamente en el aula.

Artesanía y producción en serie

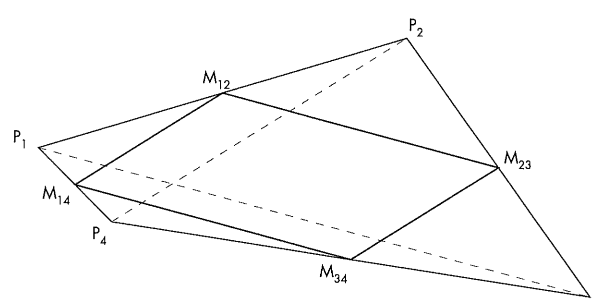
Lucio Lombardo Radice[1], sin citar a Descartes, contrapone la demostración de Euclides para la igualdad que da la potencia de orden dos de la suma de dos números –el conocido cuadrado cuyo lado está descompuesto en suma de dos segmentos– con la que haría un matemático de la época de Newton, desarrollando sin más la expresión $(a+b)^2$ según las reglas del cálculo algebraico, de la *logística speciosa* de principios del XVII. Sorprendentemente la demostración de Euclides es desconocida para muchos alumnos y alumnas de secundaria, a pesar de que ofrece una sencilla ocasión para mostrar las matemáticas como una materia viva, producto de un proceso de creación colectivo, frente al inmutable halo platónico y dogmático de que la recubre la pedagogía habitual. Todavía quedarán más claras las tensiones de ese proceso creativo si recurrimos a la cita de Cavalieri que recoge Radice, en la que el jesuita geómetra se queja del atrevimiento de los cultivadores del incipiente cálculo simbólico: «Los algebristas ... suman, restan, multiplican y dividen las raíces de los números, aun siendo inefables, absurdas y desconocidas y están convencidos de haber actuado correctamente, siempre que eso sirva para obtener el resultado deseado».

Si cambiamos ligeramente las condiciones del problema y pasamos al caso $(a-b)^2$, quien desee permanecer fiel a los métodos griegos deberá inventar un nuevo puzzle para justificar o llegar al resultado. El matemático del XVII ajeno a los prejuicios de Cavalieri no se inmutaría y volvería a aplicar su potente máquina algebraica. Somos conscientes de que nos permitimos unas cuantas licencias en la narración –las mismas que Radice, por otra parte– pero el fin perseguido, valorar en su justo punto la importancia del cambio, justifica los medios. Radice alcanza el momento más sublime de su texto en el final de este capítulo (págs. 58-59) cuando establece comparaciones entre la evolución de la actividad humana en la industria y en matemáticas, y cuando extrae consecuencias didácticas de esa comparación:

> No es nada exagerado decir que, para el progreso humano, la introducción y difusión del cálculo literal, en sustitución del álgebra geométrica, ha sido una revolución comparable a la adopción de la máquina en lugar del trabajo manual.
>
> La belleza, la fantasía, la originalidad y la individualidad de cada pieza es lo que le falta a la producción mecánica en serie. (...) Trataremos de conservar en nosotros, aunque usemos los nuevos instrumentos, el espíritu del viejo Euclides, la imaginación geométrica de los antiguos griegos, que será esencial para nosotros cuando no se trate de aplicar unas reglas sino de descubrir y crear otras nuevas.

Una propiedad de los cuadriláteros

Vamos a dejar de lado la tentación didáctica y nos centraremos exclusivamente en el placer histórico de la comparación de métodos. Una bonita propiedad de los cuadriláteros, muy sencilla y menos citada de lo que sería deseable, afirma que si se unen los puntos medios de los lados de uno cualquiera de ellos se obtiene siempre un paralelogramo, cuya área es además la mitad que la del cuadrilátero inicial. El resultado es debido a Varignon (1654-1722) pero podría haber sido firmado por Tales. La demostración «al estilo griego» requiere sólo del trazado de las diagonales del cuadrilátero (ver figura) y el recuerdo de su teorema. Los cuatro adjetivos empleados por Radice para los procesos no mecanizados son válidos en este caso. La idea es además tan sencilla que sorprende haberla desconocido tanto tiempo. Desde otro punto de vista, una de las indiscutibles ventajas de esta demostración artesanal radica en que sugiere casi con seguridad el germen del teorema. La observación del hecho debió llevar al enunciado.



La demostración «moderna», «mecanizada», funciona ciertamente como un rodillo. Elegidos cuatro puntos cualesquiera, $P_i(x_i, y_i)$ (i = 1, 2, 3, 4), las reglas del cálculo simbólico permiten comprobar que las pendientes de los segmentos $M_{12}M_{23}$ y $M_{14}M_{34}$ son iguales, y lo mismo para $M_{14}M_{12}$ y $M_{34}M_{23}$ (evidentemente llamamos M_{ij} al punto medio del lado P_iP_j). Como se ve no es necesario fatigar la imaginación para validar el resultado, pero la sensación de que se actúa a ciegas es muy fuerte. De hecho esta comprobación algorítmica no aporta información sobre la esencia del problema, sobre el porqué del resultado: es dudoso que nos haya permitido «ejercitar el entendimiento». Entraríamos en este deseable estado si aprovechamos su generalidad para ampliar el contexto en el que es válido el teorema. Puesto que las coordenadas iniciales han sido tomadas sin restricciones, el teorema será válido para todas las posiciones relativas posibles de los cuatro puntos (alineados los cuatro, tres alineados y uno fuera de la recta, etc.), incluso en los casos de coincidencia de algunos de ellos, aunque entonces sería necesario un planteamiento vectorial para evitar los denominadores nulos (cuando $P_i = M_{ij} = P_j$) y modificar la tesis de forma que no aparezca la palabra «paralelogramo».

Una opción interdisciplinar

Es evidente que sugerimos una mezcla metodológica de matemáticas, historia y filosofía. Las matemáticas evolucionan y es bueno conocer y comparar los distintos métodos y enfoques que han empleado a lo largo de su historia. Esa historia no ha estado aislada de la de las sociedades humanas en cuyo seno se ha producido la creación matemática, se ha visto influenciada por ellas y a su vez las ha influenciado. Finalmente, la pretensión globalizadora de Descartes cuadra muy bien con su racionalismo filosófico. La contemplación del conjunto, por más que esté simplificado, resulta mucho más rica que la consideración aislada de cada uno de sus componentes en clases especializadas.

Los problemas de geometría analítica ofrecen mil posibilidades. Veamos, como ejemplo, la obtención de la circunferencia que pasa por tres puntos no alineados. Para el enfoque griego «obtener» quiere decir construir con regla y compás. La solución «cartesiana dura» (no fatigar la imaginación, actuar sistemáticamente) supone partir de tres pares concretos de coordenadas que al ser sustituidos en la ecuación general $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ conducirán a un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas. «Obtener» es ahora construir una ecuación, no una figura. Un enfoque intermedio consistiría en trabajar con métodos algebraicos la solución griega, resolviendo el sistema formado por las mediatrices de dos de los segmentos determinados por los tres puntos para localizar el centro. De nuevo la opción más ciega a la «realidad física» de la situación de partida es la algebraica.

La historia de los distintos métodos empleados a lo largo del tiempo para trazar tangentes a una curva, y la evolución del concepto implícito de tangente que subyacía en ellos, proporciona otra buena ocasión para la confrontación de métodos antiguos y «modernos». Desde los métodos de los griegos para las cónicas (uno diferente para cada una aunque unificables desde el punto de vista de sus propiedades ópticas), pasando por la propuesta algebraica de Descartes (un sistema con dos parámetros indeterminados –los de la futura recta tangente– al que se le exigirá que sólo tenga una solución), válida sólo también para las curvas de segundo grado, hasta el decisivo aporte conceptual de Fermat (la tangente como límite de secantes) que permite acceder finalmente al concepto de derivada, aplicable a situaciones distintas de la de partida[2].

La realidad desbordará siempre los deseos

El deseo en este caso (Descartes, Leibniz) era el mecanismo universal de trabajo y a pesar de las frustraciones teóricas de nuestro siglo aún no concluido es inevitable mantenerlo, por lo menos localmente, como referencia metodológica. Pero señala Hegel, resaltando una tensión casi trágica, que «cuanto más sólido, bien definido y espléndido es el edificio erigido por el entendimiento, más imperioso es el deseo de la vida ... por escapar de él hacia la libertad». La advertencia es tan poética que casi se siente apuro al particularizar de nuevo. No se trataría de volver a trazar tangentes con regla y compás –en palabras de Radice de «volver a la lanzadera y al huso»– pero sí de reivindicar el disfrute de la belleza de la artesanía. Al ser englobados en enfoques generales se reducen al olvido resultados particulares muy hermosos. Recordaremos simplemente uno. Imaginemos dos esferas inscritas en una superficie cilíndrica y su plano tangente común. Su sección en el cilindro es una elipse cuyos focos son los puntos de tangencia de las esferas.

Afortunadamente, siempre habrá amantes de la historia (de la arqueología, incluso). Y, desde luego, el carácter tan decididamente abstracto de las matemáticas seguirá haciendo posibles sucesivas extensiones de conceptos que alejarán de nuevo el soñado perfil de la utopía racionalista. Puesto que el camino se hace desde el centro hacia el exterior, la cebolla que construimos tendrá con toda seguridad infinitas capas. Al menos de momento.

Y detrás de todo, la vida, claro

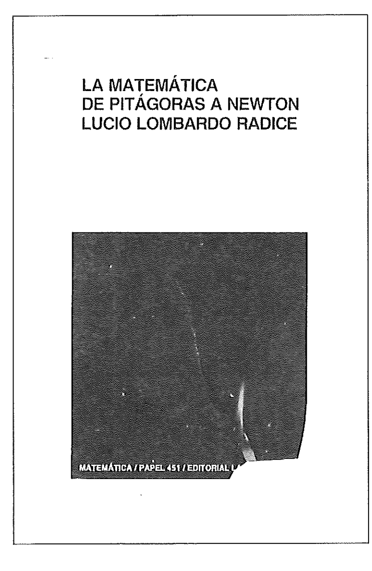
Un apunte político para terminar. Radice advierte en la dedicatoria de su libro que está escrito para sus hijos, nietos y sobrinos. Un texto sencillo de divulgación particularmente didáctico escrito por un matemático. Pero, aparte de esto, ¿quién es Radice? Desde luego no fue en la contraportada del libro de la editorial Laia donde pudimos obtener información sobre esta pregunta, puesto que no recoge ningún dato sobre el autor. Pues bien: hemos encontrado después a Radice en el libro de María Antonietta Macciocchi *Después de Marx, abril*[3]. Allí no es un matemático interesado en divulgar la historia de las matemáticas sino uno de los miembros del aparato del PCI que decide excluir de su seno a una incómoda militante para intentar superar desde el inmovilismo la crisis que la revuelta estudiantil italiana del 77 produce en la izquierda oficial. El mundo está lleno de desencuentros. Quienes conozcan a nuestro autor sólo por el libro comentado ignorarán que también compartió las incapacidades históricas de la izquierda europea. Quienes se hayan acercado a él sólo desde la política ignorarán que su opción marxista late fértilmente en el más hermoso pasaje de su pequeño gran libro sobre historia de las matemáticas.

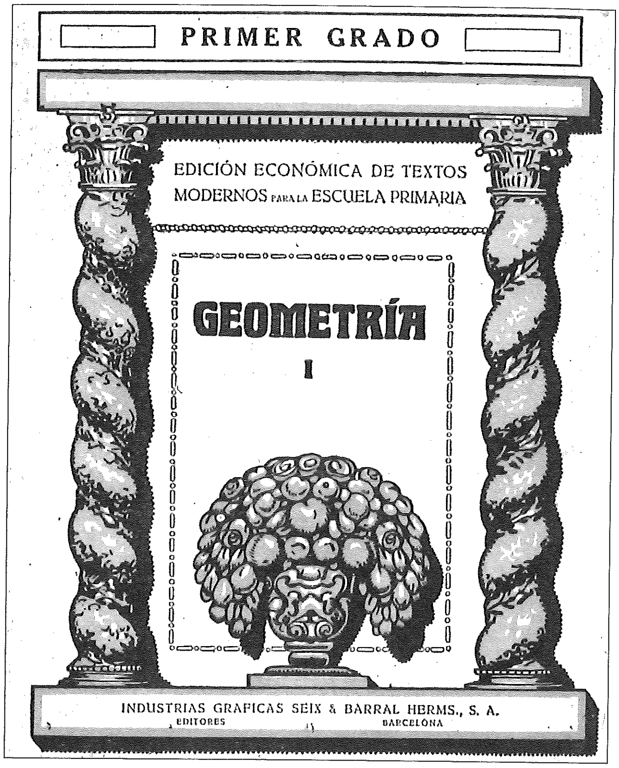
Notas

1 *La matemática de Pitágoras a Newton*, Laia, Barcelona, 1983.

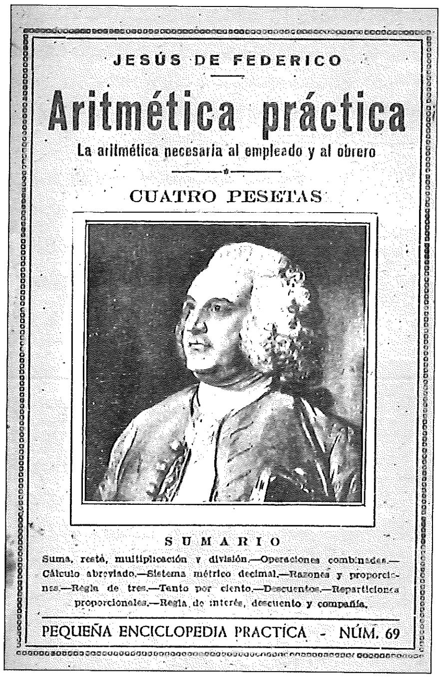
2 Un camino espléndidamente recorrido desde el punto de vista de la didáctica en el libro de Cruse y Lehman: *Lecciones de cálculo*, Fondo Educativo Interamericano, Méjico, 1982.

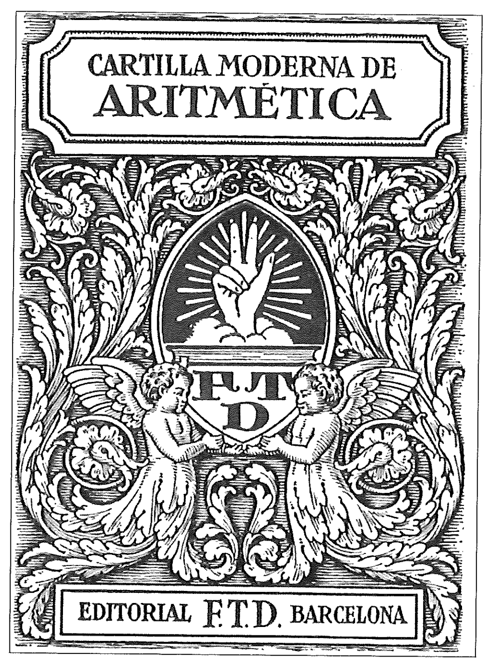
3 Pre-textos, Valencia, 1979.




PRIMER GRADO
EDICIÓN ECONÓMICA DE TEXTOS MODERNOS PARA LA ESCUELA PRIMARIA
GEOMETRÍA
I
INDUSTRIAS GRAFICAS SEIX & BARRAL HERMS., S. A.
EDITORES
BARCELONA


GEOMETRÍA
TERCERA PARTE
EDITADA POR EL
SERVICIO DE EXTENSIÓN DE ENSEÑANZAS TÉCNICAS
DE LA DIPUTACION PROVINCIAL DE BARCELONA
Calle Urgel-187-Barcelona

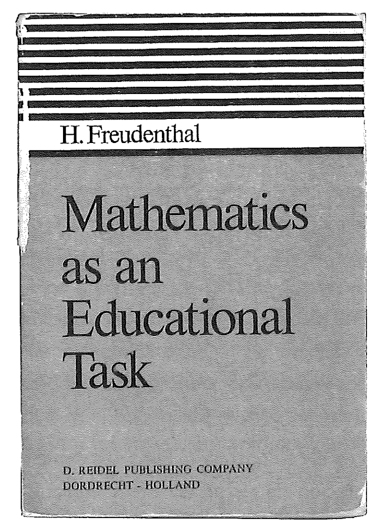

JESÚS DE FEDERICO
Aritmética práctica
La aritmética necesaria al empleado y al obrero
CUATRO PESETAS
SUMARIO
Suma, resta, multiplicación y división.—Operaciones combinadas.—Cálculo abreviado.—Sistema métrico decimal.—Razones y proporciones.—Regla de tres.—Tanto por ciento.—Descuentos.—Reparticiones proporcionales.—Regla de interés, descuento y compañía.
PEQUEÑA ENCICLOPEDIA PRACTICA - NÚM. 69


CARTILLA MODERNA DE
ARITMÉTICA
F.T.D.
EDITORIAL F.T.D. BARCELONA

SUMA 33
febrero 2000

Freudenthal es un arma cargado de futuro

MATHEMATICS AS AN EDUCATIONAL TASK
Hans Freudenthal
D. Reidel Publishing Company
Dordrecht (Holland), 1973
Primera edición
ISBN: 90 277 0322 1
680 páginas



En la contraportada del libro puede leerse:

> Las matemáticas modernas han sido un slogan durante una década. Las matemáticas modernas, interpretadas literalmente matan la educación; interpretadas de acuerdo con su espíritu pueden darle vida. El autor sitúa las matemáticas en sus contextos, histórico, social y de desarrollo intelectual, y la educación matemática en el contexto de la educación en general, así como su desarrollo pasado y presente. En la cúspide de la producción científica, generalmente se reconoce que las matemáticas son una actividad, mucho más que un almacén de conocimientos bien establecido. La filosofía sobre la enseñanza que el autor proclama es que esta idea se aplica a todos los niveles del proceso de aprendizaje. Se analizan estos niveles en numerosos ejemplos. Esta teoría general va seguida de un análisis de varios conceptos y campos matemáticos cruciales. En oposi-

RECENSIONES

ción a la tendencia moderna a sobreestimar los aspectos cardinales, el concepto de número se analiza desde un amplio espectro, tomando en consideración los aspectos lógicos y de desarrollo intelectual. El autor muestra cuáles son los usos de la teoría de conjuntos, simultáneamente advierte de sus malas utilizaciones. La geometría no se presenta como la cumbre de la deductividad; su actividad pasa a ser la de explorar el espacio en que vivimos, y la de ofrecer un campo para la actividad matemática. En el capítulo dedicado al análisis se destacan la comprensión intuitiva y su relación con las aplicaciones. La probabilidad se estudia como otro modo de relacionarse con la realidad; mucho más que como ejemplo de la teoría de la medida. El ejemplo más impresionante de que la letra mata y es el espíritu el que da la vida, a saber, la lógica, se trata en el último capítulo. En un apéndice se analizan algunos trabajos de Piaget.

La característica más destacada de este libro es que es una filosofía comprehensiva de la educación matemática y que analiza una gran parte de los temas matemáticos de la enseñanza de un modo en el que se integran los aspectos científicos y de enseñanza. La teoría educativa de niveles en el proceso de aprendizaje no había sido nunca aplicada al aprendizaje matemático de una manera tan amplia como la del presente libro. También se tratan las implicaciones sociales de las matemáticas. La enseñanza de algunas partes de las matemáticas, como el análisis y la lógica nunca antes habían sido manejadas con tanta minuciosidad.

El libro se dirige a profesores de matemáticas, diseñadores de currículo, educadores, matemáticos en general, y también a físicos e ingenieros.

Hans Freudenthal nació en 1905 en Holanda, se formó como matemático en Göttingen, al lado de, entre otros, Hilbert, van der Waerden... Fue un matemático de primera fila en los años centrales de este siglo. Se dedicó a los problemas de la enseñanza de las matemáticas desde muy pronto: pues en 1950 estaba ya en la constitución de la CEIAEM (Comisión internacional para el estudio y mejora de la enseñanza de las matemáticas), al lado de Gattegno, Papy, y otros. Los miembros de esta Comisión, a la que pronto se sumaron Emma Castelnuovo y Pedro Puig Adam, conocían bien las disputas que mantenían Papy y Freudenthal. (Yo he oído al propio Freudenthal calificar a Papy de dictador, por cierto éste último todavía vive, retirado, muy mayor en Bélgica). En dicha comisión también había conocidos psicólogos como Piaget y Wallon. También eran sonados las discusiones y enfrentamientos entre Piaget y Freudenthal. Hans Freudenthal murió un día del Pilar de 1990, sentado en un banco del parque por donde le gustaba pasear.

Ya en el prólogo de su libro nos anuncia el estilo habitual de presentación de las matemáticas en su época: la inversión didáctica. Cuando hay que imprimir un resultado, un trabajo de matemáticas, el camino que lleva al resultado es justo el inverso al camino por el que se encontró; en especial, las definiciones que son el toque final de una estructura se ponen al principio. Anunciando inmediatamente que durante muchos años ha contrapuesto a la inversión didáctica el experimento mental. El experimento mental trata de mostrar cómo un estudiante puede reinventar lo que se está esperando que aprenda.

Podríamos situar esta obra de Hans Freudenthal, en una línea, mejor en un camino que continúa el trabajo de Courant y Robbins, en su *¿Qué es la matemática?*. Ya iniciado a su vez en este siglo por las preocupaciones que llevaron a Felix Klein a publicar *Matemáticas Elementales desde un punto de vista superior.* Camino en el que no conviene olvidar los inestimables trabajos de Polya. Que podrían resumirse en una de las frases más utilizadas por el propio Freudenthal: enseñar las matemáticas cargadas de relaciones. Muy alejados por supuesto de pensadores como Bertrand Russell, o Hardy, o el grupo Bourbaki.

...durante muchos años ha contrapuesto a la inversión didáctica el experimento mental. El experimento mental trata de mostrar cómo un estudiante puede reinventar lo que se está esperando que aprenda.

Pero no sólo matemáticas cargadas de relaciones, sino también presentando las matemáticas en su enseñanza como una actividad, no como un cuerpo de doctrina terminado lista para ser exhibido.

El libro es de una enorme extensión (casi 700 páginas), está dividido en varios capítulos, diecinueve y dos apéndices. Los capítulos se pueden clasificar en dos bloques, el primero formado por los capítulos I al X, habla de ideas de tipo general, y el segundo, formado por los capítulos XI al XIX en los que aborda los grandes temas que deben ser enseñados en matemáticas. Destaca el gran espacio dedicado al desarrollo del concepto de número, cuatro capítulos, dedicando después el XV a conjuntos y funciones, el XVI a la geometría, el XVII al análisis, el XVIII a la probabilidad y estadística y el XIX a la lógica. En el apéndice I, critica a Piaget y sus investigaciones sobre el desarrollo de los conceptos matemáticos.

Los títulos de los primeros capítulos son:

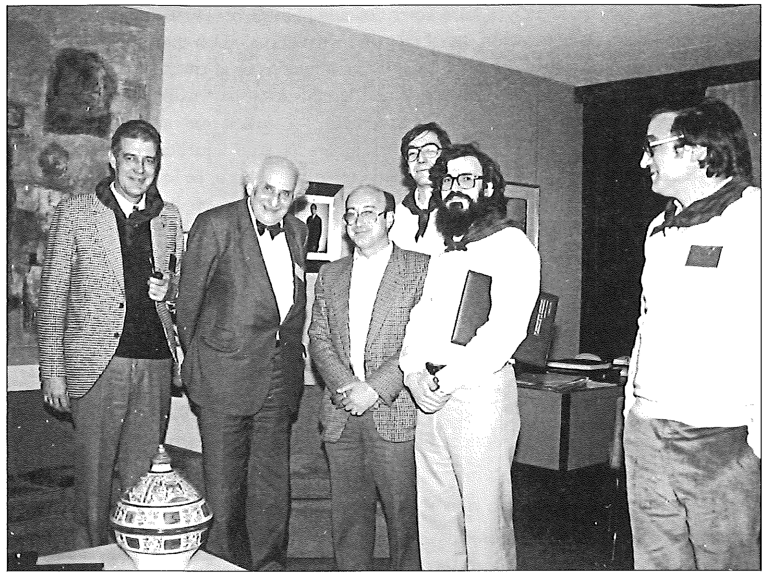
I. La tradición matemática.
II. Las matemáticas hoy.
III. Tradición y educación.
IV. El método socrático.
VI. Re-invención.
VII. Organización de un campo por matematización.
VIII. El rigor matemático.
IX. Instrucción.
X. El profesor de matemáticas.

Dedicamos estas páginas a entresacar las ideas más importantes de tipo general, las de los diez primeros capítulos, dejando la mayoría del tiempo que sea el propio Freudenthal el que hable, es decir que esto sea un resumen, breve, de este enorme trabajo, de gran interés para todos los profesores de matemáticas, pero que se ha divulgado escasamente entre nosotros por la falta de una traducción. Yo conocí este libro gracias a las noticias que de él tenía a través de Paco Hernán, a principios de los ochenta. Personalmente conocí a Hans Freudenthal en la reunión de la CIEAEM del verano del 82, en la que aproveché para invitarle a pronunciar una conferencia en las III JAEM que íbamos a organizar en marzo de 1983 en Zaragoza.

En el primer capítulo hace un resumen del desarrollo histórico de las matemáticas, desde los tiempos prehistóricos hasta el siglo XIX. Finaliza dicho capítulo con los siguientes párrafos:

> El entusiasmo por la teoría de números, la geometría algebraica y las categorías no debería impedirnos a todos reconocer cuanto más pobres serían las matemáticas sin el impulso recibido de sus aplicaciones. Las matemáticas empezaron como una actividad útil, y hoy es más útil de lo que lo ha sido nunca. Esto es, sin embargo, una modesta declaración. Se debería decir: si no son útiles, las matemáticas no deberían de existir.
>
> ¿Por qué esta insistencia en la utilidad de las matemáticas? Porque no hay nada tan fácil de olvidar como un tópico. Incluso las personas responsables de la instrucción y la educación lo olvidan a menudo. No pretendo que puedan o deban negarlo. Sin embargo, la enseñanza y la educación son acción, y lo que se admite pronto de palabra, pasa normalmente mucho tiempo antes de que influya en la acción.

En el segundo capítulo habla de los cambios producidos en las matemáticas en el último siglo, haciendo especial hincapié en el cambio de estilo en la presentación de las matemáticas. Dice que los matemáticos son tan conservadores como cualquier otra persona, y que, por ello, los viejos hábitos persisten durante decenios, los nuevos se aceptan cuando se hacen inevitables. Insiste también en el papel del lenguaje y en especial del lenguaje matemático, recalcando que el perfeccionamiento del lenguaje matemático es un proceso continuo, cuyo estadio final debería de ser un lenguaje tan exacto como para ser manejado por un ordenador. Uno de los rasgos de las matemáticas de este siglo es la formalización del lenguaje, otro de los rasgos es la abstracción, seguido de la axiomatización. Describe como surge un sistema axiomático con la historia del concepto de grupo, señalando que cuando en 1870 se formula este concepto, existían ya, no sólo un gran número de grupos conocidos, sino una amplia experiencia en teoría de grupos. El concepto de grupo no se produjo coleccionando en una clase todo aquello que se consideraba grupo, sino destacando las características comunes dentro de la variedad de grupos conocidos. Es una construcción por tanto, axiomatizadora, y no extensionalista.



Hans Freudenthal en 1983, durante las III JAEM en Zaragoza
[De izquierda a derecha: G. Dorda, H. Freudenthal,
T. Escudero, F. Martín, F. Villarroya y E. Palacián]

Las matemáticas empezaron como una actividad útil, y hoy es más útil de lo que lo ha sido nunca. [...] si no son útiles, las matemáticas no deberían de existir.

Acaba el capítulo diciendo que no se debe de pensar que los esfuerzos formalizadores y axiomatizadores han sido los más importantes del siglo; sino que las matemáticas aplicadas han tenido también un enorme desarrollo, destacando la estadística y la investigación operativa, incluyendo en ésta la teoría de autómatas y los sistemas de análisis de los ordenadores.

En el tercer capítulo analiza las relaciones entre el progreso y la tradición, contraponiendo ideas tales como que «el progreso técnico es tan viejo como la humanidad» al hecho de que «desde la antigüedad, la tradición ha sido el cemento de la sociedad humana». Las leyes y las clases, costumbres y hábitos son instituciones sobrehumanas, por tanto, es peligroso rebelarse contra la tradición. Hay toda una corriente filosófica de la historia que defiende la tradición y ataca el progreso, pero pese a ella, la historia humana ha sido una historia del progreso. Los inventores y artistas sabían, y saben bien, que es peligroso ser innovador; por ello nunca pretendían innovar.

También señala que los prejuicios pueden sobrevivir un tiempo sorprendentemente largo, incluso entre los científicos.

Acaba este capítulo diciendo:

> Hasta ahora, la educación en Europa Occidental ha sido educación de elite, es decir educación de una elite, o al menos para

una elite. Esta tendencia, ¡ay!, ha sido reforzada por muchos de los movimientos de innovación. Igual que en matemáticas, temo que estos programas y métodos educativos estén influidos por la creencia, natural para todo matemático, de que la educación matemática es la educación para llegar a ser matemático –aquellos que no pueden seguir el ritmo tienen que abandonar–. Y para aquellos que abandonan o que ni siquiera se han embarcado nunca, se les da otra taza de esas matemáticas para la elite. Incluso en los Estados Unidos con su mayor experiencia en matemáticas para todos, la educación matemática de masas está todavía en estado experimental, sin una imagen convincente de unas matemáticas nuevas para todos. Hay una cosa que nos hace mucha falta, saber qué es una matemática para una elite o para todos –una imagen de las matemáticas para la totalidad de la educación–.

El capítulo cuarto está dedicado a analizar la utilización y objetivos de la educación matemática, empieza diciendo que el gran problema de la educación matemática es la distancia entre su uso y sus objetivos. Distancia que es mucho mayor en educación matemática que en otras materias, por ejemplo cuando un niño aprende a leer y/o a escribir, el objetivo está claro.

En ese sentido la aritmética no sería muy diferente, pero cabe preguntarse: cuál es el objetivo del aprendizaje de la aritmética. El uso de 2+3 está claro, pero cuál es el de las largas divisiones o de las fracciones de fracciones en numerador y denominador. Las personas se han vuelto cada vez más escépticas respectos de la aritmética pura como asignatura, porque si los problemas se vuelven más complicados, confían más en los ordenadores.

Está hablando en 1970, y todavía hoy, año 2000, nos encontramos que en muchos centros escolares la situación no ha cambiado.

Inmediatamente advierte contra el peligro de una clase en la que los alumnos sean unos fantásticos calculadores,

puesto que los alumnos de poca edad son fácilmente moldeables y los experimentos educativos muestran que casi todo puede ser enseñado, a condición de que se haga bien y de modo tajante. Entre los maestros de escuela hay, o había, fanáticos del cálculo, que creen en él y en su valor educativo.

A continuación, se siente asustado por el peligro de que pronto las matemáticas serán enseñadas por personas que ni siquiera saben lo que son las matemáticas. Añade:

no hay manera de decir positivamente cuál es el objetivo de la instrucción matemática, las matemáticas admiten numerosas aplicaciones, pero no podemos decir qué conceptos y técnicas matemáticos necesitarán nuestros alumnos en el futuro no es sencillo, al contrario, las matemáticas son tan flexibles que ni individual ni colectivamente podemos dar contornos más precisos, que un puñado de generalidades. Esto podría significar libertad casi total para prescribir currículos.

Un profesor que tenga éxito enseñando un tema aislado puede ser aclamado, pero su éxito es pasajero, pues ninguna materia aislada se puede enseñar con éxito. Lo que realmente importa es saber cómo el tema encaja en el cuerpo de la enseñanza de las matemáticas, si se integra en el todo, o es tan aislado que no dejará ninguna huella.

Por otro lado, que algunos temas se puedan enseñar, no quiere decir que se deban enseñar, en la instrucción matemática hay prioridades que no se pueden ignorar. Es muy peligroso argumentar que el tema es divertido; es un argumento hipócrita porque no se utiliza el criterio de placer de los estudiantes para elegir los temas. A los niños les gusta resolver problemas de cálculo, dibujar, copiar, pero el profesor que abuse de ello no es un educador, es un demagogo. Sencillamente, el gusto también se puede educar.

No se puede decir que no importa qué matemáticas se enseñen, pues nadie puede predecir lo que un niño necesitará, pero con bastante certeza se puede predecir que probablemente no será un matemático. Certeza que disminuye al pasar de la escuela primaria a la secundaria, vuelve a disminuir si en secundaria superior elige la rama de ciencias, y de nuevo en la universidad. Una y otra vez deberíamos resaltar este punto: que junto con el futuro matemático hay otros muchos alumnos que deben de aprender matemáticas, que son una minoría los que en un futuro aplicarán unas matemáticas sofisticadas, y que incluso los que nunca aplicarán las matemáticas en su vida, deben de aprender matemáticas porque las necesitan como uno de los aspectos de su existencia como seres humanos.

La inclinación natural de un matemático es formar matemáticos; al preparar una lección el profesor es probable que se imagine al alumno al que le gustaría enseñar y que sea bastante parecido a él; pero un matemático nunca debe olvidar que las matemáticas son demasiado importantes para estructurar su enseñanza de acuerdo con las necesidades de los futuros matemáticos. La mente matemática se expresa ella misma en la tendencia a matematizar las matemáticas. Por supuesto que los estudiantes deben de aprender a matematizar: para empezar situaciones reales; matematizar situaciones matemáticas puede ser el punto de llegada, pero nunca el de partida. El sistema de las matemáticas irradia un innegable encanto estético que, sin embargo, no puede ser aprehendido por las personas que no tienen un profundo conocimiento de las matemáticas, pero no puede ser el objetivo de una educación matemática general. Si la enseñanza sigue el sistema, es antididáctico, por ejemplo la anticipación del punto de vista afín frente al métrico, dictada por el sistematismo.

Un poco más adelante, habla de las aplicaciones, y entre otros ejemplos cita la situación de los profesores de física de secundaria que evitan en lo posible el uso de funciones, tratando de reducir todas las matemáticas a la sustitución de valores numéricos.

Esta desmatematización de la ciencia perjudica, a la vez, a la educación matemática y a la científica. Es el resultado de cultivar una matemática estéril y una ciencia depravada. Ni las matemáticas ni la ciencia podrían haber llegado a su estado actual si

...junto con el futuro matemático hay otros muchos alumnos que deben de aprender matemáticas, que son una minoría los que en un futuro aplicarán unas matemáticas sofisticadas, y que incluso los que nunca aplicarán las matemáticas en su vida, deben de aprender matemáticas porque las necesitan como uno de los aspectos de su existencia como seres humanos.

las matemáticas no hubiesen ayudado a la ciencia y si los matemáticos no hubieran aprendido de esta ayuda cuáles son los problemas importantes. Si queremos enseñar a los alumnos a aplicar las matemáticas, deberíamos hacer más fácil para él, el aplicarlas. En general, el profesor de matemáticas no sabe cómo se aplican las matemáticas, y no podemos culparlo de esta ignorancia. ¿Dónde tendría que haberlo aprendido?

Pasa a continuación al argumento fundamental del capítulo y del libro: los temas relacionados se aprenden más rápido y se retienen más tiempo. Pero hay más de una clase de conexiones, unas las del profesor, otras las del autor del libro de texto.

Cita la mala traducción de la palabra aplicadas, desde el francés, que mejor sería haber traducido por matemáticas aplicándose, lo que le sirve para decir que no quiere que se enseñen matemáticas aplicadas, sino que se enseñe a aplicar las matemáticas. Ya Comenius decía que cualquier cosa que se aprende debe de hacerse CARGADA DE RELACIONES.

> No obstante, no se puede evitar que al principio de la instrucción en aritmética, geometría y teoría de conjuntos, falten las relaciones esenciales de estos dominios. En un nivel más alto pueden construirse, pero no se deben anticipar, ni siquiera si el profesor no puede evitar dar gusto a sus pasiones lógico estéticas en el aula. Los temas matemáticos deben estar interconectados, pero las conexiones no necesitan ser dirigidas, ni intramatemáticas.
>
> Para enseñar matemáticas conectadas no es prudente empezar buscando conexiones directas, más bien se deben encontrar los puntos de contacto en los que las matemáticas se ligan a la realidad vivida del estudiante. La realidad es el armazón al que las mismas matemáticas se ligan y, en un oportuno proceso de maduración las conexiones se desarrollarán.
>
> Cualquiera puede comprobar consigo mismo lo rápido que los temas no relacionados se olvidaron. Antes citaba que los niños pueden aprender (casi) cualquier cosa, pero otro hecho innegable es que después lo olvidan completamente. Un experimento de enseñanza es irrelevante si no dice con qué profundidad se fija el tema enseñado, y cuánto tiempo permanece activo. La profundidad de la fijación no es más que la propiedad de conectarse con la realidad vivida, y su persistencia puede garantizarse por la fuerza de estas relaciones.

...como educadores rehusamos aceptar la selección como objetivo de la educación y como matemáticos creemos que las matemáticas son demasiado nobles para ser utilizadas con tal fin.

Dedica interesantes párrafos a la analogía:

> La analogía es un medio muy efectivo de construcción de relaciones dentro y fuera de las matemáticas debido a que es el más natural y primitivo de todos los medios que se han utilizado para intentar organizar el mundo. Su sobreestimación es peligrosa, en particular en matemáticas, pero para valorarlo correctamente uno tiene que aprender su aplicación conscientemente.

El argumento principal que subyace en el capítulo es que las matemáticas que se van aprendiendo sirvan para conectar diversos campos de conocimiento y además que perduren en la mente del aprendiz, durante tiempo, por ello dice:

> La riqueza de las relaciones debe de garantizar que las matemáticas una vez aprendidas no se olviden fácilmente. Pero no ser olvidadas no es un criterio suficiente para decidir qué matemáticas deben ser aprendidas, no es ni siquiera necesario. Lo que importa es la operatividad, y esto es verdad, tanto en la vida individual como en la historia. Cientos de intentos abortados sobre la trisección del ángulo fueron necesarios para preparar la teoría de Galois, no eran callejones sin salida, sino que eran intentos operativos. Lo que importa no es que las matemáticas que uno aprende no se olviden, sino que hayan sido y sean todavía, operativas. Para intentarlo, se deben enseñar las matemáticas cargadas de relaciones.
>
> Entre las siete artes liberales, cuando las humanidades incluían las matemáticas; éstas eran las ciencias de linaje más noble, eran una disciplina mental, una piedra de afilar el ingenio, así eran queridas por todos los que querían disciplinar la mente. En Francia, el interés de Napoleón por las matemáticas estableció las Grandes Écoles, como escuelas matemáticas con fundamentos militares. Los militares franceses decían que su éxito se debía a las matemáticas; pero no era la educación matemática la que elevaba a los militares franceses por encima de las otras naciones, sino más bien la selección por medio de las matemáticas, que aparentemente estaba mejor hecha que por privilegios de nobleza o por capacidades juristas o filológicas. Así históricamente las matemáticas como disciplina de la mente fueron un factor importante. Montones de alumnos desafortunados tuvieron que aprender muchas matemáticas para justificar la existencia de sus profesores que a su vez estudiaban matemáticas para justificar a otros profesores que creaban matemáticas que, cuando la tecnología las necesitaba, mostraron ser útiles. Hoy las matemáticas son una ciencia enormemente útil que para alcanzar este estado ha tenido, sin embargo, que atravesar el desierto de la inutilidad, unas matemáticas inútiles, como disciplina mental.
>
> No es la Historia una extraña consejera. Colón descubrió América creyendo que era la India. Posiblemente el talento matemático es universal, en el sentido de que es un síntoma de capacidades más generales. Cualquier enseñante lo confirma: la persona que es buena en matemáticas, normalmente es también buena en otros campos. Que lo único que significa es que las matemáticas son un buen examen de selección. Se podría concluir de ello que el objetivo de la enseñanza de las matemáticas es la selección de estudiantes. Pero nuestro objetivo es luchar contra este objetivo, como educadores rehusamos aceptar la selección como objetivo de la educación y como matemáticos creemos que las matemáticas son demasiado nobles para ser utilizadas con tal fin.

No obstante señala:

> Examinar es una actividad significativa: el enseñante tiene que ser capaz de comprobar la influencia del proceso de enseñanza, y el estudiante tiene derecho a saber si realmente aprende algo.

Volviendo a la cuestión de si las matemáticas son una disciplina de la mente, su respuesta es «sí»:

> Desde la antigüedad estaba claro que el pensamiento lógico tenía que formarse a través de las matemáticas. Junto al famoso «Todos los hombres son mortales...» hay otros patrones de pensamiento; a menudo el pensamiento procede informalmente, es decir por analogía.

Otro factor imprescindible a tener en cuenta es el lenguaje, frente a ello señala que muchas experiencias de Piaget se refieren no al desarrollo cognitivo, sino al lingüístico.

> Las matemáticas tienen tan alta consideración porque son un medio de resolver muchos problemas. Esta fe en las matemáticas tiene una primera fuente: el encanto de los números y, una segunda, las reminiscencias de la instrucción aritmética. Cuando faltan algunos datos para resolver un cierto problema, las personas se dirigen a los matemáticos. Cuando un matemático resuelve un problema, le distingue del no-matemático que una vez resuelto intenta unificar los resultados en una demostración. De manera que esta manera de enfrentarse a los problemas para inventarse en ellos demostraciones sería una actividad más allá de la resolución local de problemas para construir un sistema de autoconfianza en matemáticas.

El capítulo cinco está dedicado al método socrático, expuesto en el Menón de Platón. Empieza señalando que el método socrático es uno de los fundamentales de la enseñanza, o mejor dicho debería serlo, pues muchos de nuestros contemporáneos son todavía pre-socráticos. Incluso un conferenciante puede utilizar dicho método; el conferenciante ha sido sólo el partero de los pensamientos de los oyentes, que sienten que el orador «expresó mis pensamientos más íntimos».

Método socrático o método del experimento mental como lo llamó Mach que lo describió como un método de la física teórica, el método central desde Galileo hasta Einstein.

Freudenthal en didáctica entiende por experimento mental la actitud de un profesor o de un autor de libro de texto que se imagina a un estudiante o un grupo de estudiantes y les enseña sus pensamientos mientras reacciona por adelantado a sus probables reacciones. Los estudiantes imaginados son activos y su actividad permite al profesor determinar su camino. En cierto sentido la cuestión por enseñar se re-inventa, se re-descubre, en el transcurso de la enseñanza. La materia no se presenta de modo dogmático sino que se origina a los ojos de los estudiantes. Si bien, en el método socrático, la actividad de los estudiantes es una ficción.

Lo contrario de este método es lo que los franceses llaman «paracaidismo», donde las ideas «vienen del cielo». Los matemáticos sucumben fácilmente a la tentación de este método. La matemática está interrelacionada lógicamente; de una definición se deduce un teorema que se prueba; el camino discurre por un riguroso sistema lógico que alguien ha diseñado y, por tanto, decretado. Es muy difícil cambiar la mentalidad del profesor que ha inventado dicho sistema. El peligro es que dicho profesor apenas puede comprender que además del sistema lógico existen otros puntos de vista.

Empieza a esbozar cómo habría de enseñarse, sin pretender nunca más que dar sugerencias, que el resto de enseñantes puedan readaptar a su situación:

Pretender que las ideas se enseñen genéticamente no quiere decir que tengan que presentarse en el orden en que surgieron, ni tampoco con todos los callejones sin salida ni todos sus vericuetos. Genéticamente quiere decir en desacuerdo con Bourbaki.

> Pretender que las ideas se enseñen genéticamente no quiere decir que tengan que presentarse en el orden en que surgieron, ni tampoco con todos los callejones sin salida ni todos sus vericuetos. Genéticamente quiere decir en desacuerdo con Bourbaki. Como educador no me importa cómo se desarrollan espontáneamente las matemáticas en un individuo, me gusta saber cómo se originan las matemáticas bajo la guía de un buen profesor y cómo yo podría enseñarlas. El énfasis está en «se originan» que es lo contrario de «se imponen».
>
> Pero no necesitamos hoy compartir la creencia de Sócrates en la preexistencia; así lo que queda es el aprendizaje por redescubrimiento; donde el «re» no quiere decir la prehistoria del aprendiz, sino la historia de la humanidad.
>
> Existe otro método totalmente diferente; su filosofía es que la instrucción tiene que ser sistemática, y el sistema tiene que ser el resultado de un análisis lógico del tema. De tal suerte que si el análisis de las matemáticas muestra que las matemáticas tienen una estructura deductiva, entonces las matemáticas tienen que ponerse en marcha según dicha estructura, o más precisamente según un sistema deductivo especial; es lo que llamo la inversión antididáctica. Es el modo en que los matemáticos escribimos nuestros artículos. Concebimos la formación del pensamiento que nos lleva al resultado; el modo en que nos viene una idea concreta no le importa a nadie. Como matemáticos servimos para objetivar que, en sí mismo es un buen hábito. Los artículos matemáticos están escritos para expertos que conocen los trucos, que están bien formados para leer en el artículo acabado, la manera como se podría haber inventado. Los autores de los textos escolares, a los que fascina este estilo, olvidan que no están escribiendo para matemáticos, y que el estudiante probablemente no tiene la menor idea de cómo utilizar el texto.

A continuación comienza un análisis de los numerosos programas de matemáticas modernas que circularon durante los años sesenta, diciendo:

> puede ser importante discutir cuánta teoría de conjuntos o cuánta álgebra lineal o moderna tiene que enseñarse en la escuela; pero luego los argumentos decisivos deben ser todos de naturaleza didáctica, pero aquellos programas no permitían una discusión didáctica: el matemático ha suplantado al educador. Si un matemático tuviera que publicar alguna de las ideas que le llevan al resultado sentiría como si le pusieran en ropa interior en medio de la calle; comunica el resultado, a la vez que

> oculta el modo en que lo ha logrado. Pero lo que resulta entonces no es objetivo, sino dogmático.

Sigue un análisis más profundo respecto de la geometría afín que revela que lo que se pretende enseñar a los alumnos son matemáticas terminadas, prefabricadas por el matemático adulto que sabe las partes que se conectan, pero que al alumno le parecen un montón de ladrillos aislados y sin sentido.

Plantea a continuación el problema que tendrían los autores de libros de textos si los escribieran en el modo en que se desarrolla una clase comenzando por definiciones provisionales que unas páginas más tarde se deben cambiar, es lo que llama la «maldición de la imprenta».

> El libro ha sido el mayor enemigo del método socrático. ¿Qué debería de sustituir al libro de texto? ¿Publicando experimentos? Sí, pero entiendo por ello lecciones que realmente han sido enseñadas. Pero esto no se ha hecho a menudo. El ejemplo más llamativo es el conjunto de libros de G. Polya.

Sigue uno de los capítulos más interesantes el sexto dedicado a la Re-invención, empieza con una cita de Comenius:

> El mejor método de enseñar una actividad es mostrarla.

El principio más importante de Comenius es que el alumno aprende tomando la realidad en su totalidad sensual y no sólo por palabras. Las tres etapas del método de enseñanza de Comenius son: ejemplo, prescripción e imitación. La tarea del alumno es experimentar, comprender e imitar.

Freudenthal prefiere parafrasear a Comenius así:

> El mejor modo de aprender una actividad es practicarla.
>
> Es decir, el interés se cambia del enseñar al aprender, de la acción del profesor a la del alumno, de los efectos sensitivos a los motores.
>
> Desde Comenius todo se ha vuelto más complejo, pero sobre todo la teoría se ha desarrollado tanto y su carácter ha variado tan profundamente que ya no se puede sostener la división del proceso de enseñanza de Comenius. También se ha desarrollado mucho la pedagogía, además las pretendidas fronteras entre experiencia sensual, teoría y praxis se desvanecen.
>
> ¡Qué extraño parece un mundo que tiene fronteras artificiales entre el pensamiento y la acción! Pero hay un ejemplo sobresaliente de ello: *Los Elementos* de Euclides.
>
> Otro asunto que ha cambiado desde entonces es la relación entre el pensar y el actuar. Se hizo una distinción entre el trabajo intelectual y el manual, pero ¿dónde empieza uno y donde termina el otro?
>
> No es una metáfora decir que pensar y planear es actuar.

No es una metáfora decir que pensar y planear es actuar.

El punto esencial del capítulo es la distinción entre matemáticas terminadas, listas para su uso y matemáticas en acción, aplicándose. Hay que saber que junto a la matemática terminada existe una matemática como actividad.

> Hasta la fecha las matemáticas sólo se han analizado como un producto terminado. Por ejemplo en los *Principia Mathematica* de B. Russell y Whitehead. No hay preguntas, no hay problemas, además carece de todos los medios lingüísticos para formular cuestiones y problemas.

Explica cómo lee personalmente los artículos de matemáticas:

> Empiezo con los resultados, reflexiono sobre ellos, si no los puedo confirmar busco a través del artículo alguna indicación; si al final y por mis propios medios y un poco de copia confirmo los resultados, estoy preparado para leer los artículos otra vez sistemáticamente. Creo que casi todo el mundo lee los artículos así, tratan de re-inventar los contenidos del artículo.
>
> Sabemos que nadie puede entender el producto terminado. En pocos siglos el centro de gravedad cambió de la ciencia terminada a la ciencia activa; proceso que condujo a la formación y secesión de las matemáticas escolares. Difieren tanto de las matemáticas verdaderas que ya al comienzo del siglo XX se advirtió una doble fractura en la educación matemática, incluyendo discontinuidades en la formación de los profesores de matemáticas que al pasar de la escuela e institutos a la universidad tenían que olvidar las matemáticas escolares, mientras que unos años después cuando volvían a la escuela como profesores tenían que olvidar las matemáticas universitarias y reconstruir los hilos que habían roto unos pocos años antes. Esta doble ruptura fue advertida, pero no fue reparada. El antagonismo se produjo entre una ciencia activa bajo la responsabilidad competente de sus adeptos, y una ciencia acabada, colección de algoritmos, un bello cuento para niños de escuela. Por supuesto que para ser enseñada la ciencia tiene que ser adaptada al nivel de los alumnos, pero lo que aquí señalo es que la versión de cuento de hadas se desarrolló independientemente de las verdaderas matemáticas. Después de un siglo de autonomía, las matemáticas escolares han llegado a un callejón sin salida que no lleva ni a las matemáticas superiores, ni a la vida.
>
> Este desarrollo fue consecuencia de la colisión entre dos esfuerzos poco compatibles. El primero de ellos era el de enseñar matemáticas, enseñar un sistema deductivo, una ciencia terminada. El segundo esfuerzo venía de la pedagogía, era estimular un aprendizaje activo. Así la única oportunidad que se dejaba a la actividad de los estudiantes era en las llamadas aplicaciones, es decir, en los problemas; que no podían traer consigo verdaderas matemáticas puesto que esta posibilidad había sido extirpada cuando las matemáticas se introdujeron como ciencia terminada. Lo que quedaba para los problemas eran unas matemáticas ridiculizadas, cuyo nivel más bajo era el de sustituir valores particulares para los parámetros en fórmulas generales o modelos de pensamiento de la teoría; ... a esto le llamaban aplicaciones. Entonces el alumno abandonaba la escuela con una imagen perversa de las matemáticas que quedaba instalada en su mente durante muchos años.

...el alumno abandonaba la escuela con una imagen perversa de las matemáticas que quedaba instalada en su mente durante muchos años.

H. F. señala que estamos en peligro de repetir la misma historia, hoy estamos en condiciones de afirmar que efectivamente se ha repetido en bastantes lugares de Europa. Los temores que él expresa de ver las matemáticas nuevas como unas matemáticas escolares autónomas, se han confirmado plenamente con un conjunto de problemas que compiten con éxito en el absurdo con los problemas tradicionales. La causa es la misma, lo único que el alumno puede hacer con las matemáticas terminadas es reproducirlas.

> La importancia creciente de las matemáticas ha incrementado la urgencia del problema didáctico. Si las matemáticas existen para ser aplicadas, entonces aplicar las matemáticas tiene que ser enseñado y aprendido; pero las matemáticas se aplican creándolas cada vez de nuevo; esta actividad no se puede ejercer nunca aprendiendo matemáticas como un producto terminado. Dominar los algoritmos puede ser indispensable, pero no crea ocasiones de aprender matemáticas aplicándose.
>
> Hoy pedimos que el propio alumno re-invente las matemáticas. Ningún tema del programa se debe imponer al estudiante como un producto ya terminado. La ciencia en su punto máximo siempre ha sido invención creativa. El proceso de aprendizaje debe incluir fases de invención directa, no en su sentido objetivo, sino en el subjetivo, desde el punto de vista del estudiante. Se cree que el conocimiento y la capacidad adquiridas por reinvención se comprenden mejor y se mantienen más fácilmente que si se adquieren de un modo menos activo.

Con estos antecedentes, lo que a continuación defiende H. F. es que hay que analizar el tema que se va a enseñar como una actividad; pero que se ha hecho poco para analizar las matemáticas como una actividad. Un ejemplo antiguo y bello se debe a T. Ehrenfest-Afanasjewa, de 1931, su análisis de la geometría activa se distingue claramente e influyó fuertemente en los van Hiele.

Fueron precisamente estos trabajos de Ehrenfest los que hicieron caer en la cuenta a H. F:

> de que el método de enseñanza debe de ser la re-invención, analizando las matemáticas como una actividad.

Lo que aquí llamo reinvención en otros lugares se llama re-descubrimiento; pero considera la palabra reinvención más amplia, cita a continuación a los Van Hiele como los que mejor han interpretado los niveles en el proceso de aprendizaje.

A continuación sigue una larga explicación de los niveles de van Hiele, explicación que sirvió en los años 70 y 80 en nuestro país para que grupos como el Cero de Valencia, y otros los conociesen y empezasen a difundirlos a través de escuelas de verano o de otro tipo de cursos. La idea fundamental de los niveles es que si comparamos dos niveles sucesivos, en el más alto la acción del nivel más bajo se convierte en objeto de análisis.

Otro punto importante que señala en este capítulo es que la actividad matemática es, además, una actividad de organización de campos de experiencia.

La geometría, según los van Hiele, y con ello está de acuerdo H. F. debería de empezar con la organización matemática de los fenómenos en el espacio, dando oportunidad al estudiante de aprender a matematizar un tema no-matemático; una importante conexión entre matemáticas puras y aplicadas.

Si las matemáticas existen para ser aplicadas, entonces aplicar las matemáticas tiene que ser enseñado y aprendido; pero las matemáticas se aplican creándolas cada vez de nuevo; esta actividad no se puede ejercer nunca aprendiendo matemáticas como un producto terminado. Dominar los algoritmos puede ser indispensable, pero no crea ocasiones de aprender matemáticas aplicándose.

Cita más adelante un texto de los van Hiele:

> Si se le enseñan a un alumno habilidades por encima de su nivel real, hay que describir las acciones que tiene que realizar por medio de reglas planas, los algoritmos, que pueden ser manipuladas sin ninguna referencia al sentido de las acciones. Con ello puede suceder que un proceso de aprendizaje sea obstruido definitivamente porque al alumno no se le ha dado la oportunidad de avanzar al nivel más alto.

Además los van Hiele advirtieron saltos en el proceso de aprendizaje; saltos que revelan la presencia de niveles.

A continuación insiste en que

> la actividad en el nivel inferior, no debe ser descuidada en el proceso de aprendizaje, nivel prematemático, por tanto relevante en grado máximo. El niño está jugando un juego; el juego es enormemente importante pero es el nivel más bajo, que quiere decir indispensable y transitorio.
>
> En el siguiente nivel el niño debe reflexionar sobre lo que hizo en el nivel inferior; aquí empezarían las matemáticas.

Advierte socarronamente que «se le pueden enseñar al niño una cantidad asombrosa de temas matemáticos, siempre que se hayan eliminado de ellos todas las matemáticas».

Pero ello significa que están en el nivel inferior, y los alumnos deben ser orientados en sus actividades para poder progresar al siguiente nivel.

Termina el capítulo resumiendo:

> ...la actividad estimulada por re-invención en el nivel inferior es una necesidad. Es significativa en tanto en cuanto tiene lugar bajo condiciones en las que es preparatoria más que un juego no esencial. La re-invención, que es un principio didáctico para investigar el nivel, debe de ser el principio de toda la educación matemática, no sólo en el nivel inferior, done está demasiado próxima del juego, para mostrar rasgos acusadamente matemáticos.

El capitulo VII se titula «Organización de un Campo por matematización», después del análisis local, pasa a estudiar la posibilidad de un análisis global de las matemáticas, indicando que la estructura global de las matemáticas no es un esqueleto rígido, sino algo que nace y perece en el proceso de aprendizaje.

> La fuerza global estructurante debe de ser vivida a través de la realidad. Sólo de esta manera podemos enseñar matemáticas cargadas de relaciones, para que el estudiante

pueda integrar las matemáticas que ha aprendido y garantizar así la aplicabilidad de las matemáticas aprendidas.

La tradicional enseñanza de la aritmética nos muestra el camino correcto; si se tienen que enseñar las matemáticas cargadas de relaciones, se deben de ligar al otro término de la relación, empezar con ello una y otra vez. Por ejemplo, los números negativos deben empezar en la palanca si tienen que aplicarse en la palanca, los logaritmos con la presión del aire o la hipérbola si es allí donde se tienen que aplicar, la derivada con la velocidad, la densidad y la aceleración, y la función lineal con todas aquellas proporcionalidades que hay en la naturaleza y la sociedad.

El estudiante debe de aprender a matematizar situaciones no matemáticas, comprender las formas espaciales como figuras es matematizar el espacio. Ordenar los teoremas geométricos para obtener todos ellos a partir de unos pocos es matematizar (o axiomatizar) la geometría. De nuevo, organizar este sistema con medios lingüísticos es matematizar un tema, es la formalización. La historia se repite: cada afirmación general sobre paralelogramos es una afirmación matemática, pero el total de estas afirmaciones es en sí mismo un revoltijo, que se convierte en matemáticas si se estructura por medio de relaciones lógicas, y esto es matematizar. Los teoremas de geometría son un desorden, por matematización axiomática, este conglomerado se matematiza. Este mismo es lingüísticamente un galimatías, como todo lo que se expresa en lenguaje ordinario; aquí la organización lingüística conduce a un sistema formal.

No hay duda de que los alumnos tienen que aprender a matematizar, en todos los niveles en que actúen; hasta dónde se deba llegar se podrá discutir más adelante. Sin embargo si la axiomática y la formalización se enseñan, axiomatizar y formalizar no pueden ser omitidos. No hay matemáticas sin matematizar, ni axiomática sin axiomatizar, ni formalismo sin formalizar.

A veces esto se entiende de manera estrecha, por ejemplo los que hablan de *problem solving*, presentan en general el problema de una manera demasiado abstracta; el problema debería de nacer de la situación, y el estudiante debería de aprender a reconocer el problema en la situación. El nacimiento de un problema también son matemáticas.

Ahora está claro lo que H. F. entiende por organización de un campo por matematización: es el acercamiento en sentido amplio, que tiene que garantizar la estructura global.

No hay duda de que los alumnos tienen que aprender a matematizar, en todos los niveles en que actúen; hasta dónde se deba llegar se podrá discutir...

Si las matemáticas se tratan a partir de sus temas, sacaremos más partido de ellos; los más convincentes vienen de la geometría: tipos de cuadriláteros, simetrías, embaldosados, concepto de ángulo, algebraización de la geometría; pero también de otros dominios: las leyes de la palanca, la matematización de la microeconomía, la construcción del análisis a partir de métodos numéricos, el estudio de las ondas. Muchos de los temas vienen de la física, lo que nos lleva a hablar de la integración de disciplinas, y el estudio de la ciencia integrada, a través de los proyectos: el agua, la nutrición, el espacio, apropiados para la exploración fenomenológica, pero menos para practicar la ciencia de modo más teórico. Al menos desde los catorce años una coordinación bien organizada debería de ser mejor que la integración, sino antes. Puesto que las matemáticas tienen gran ventaja en su comienzo sobre las otras ciencias, al menos en nuestro sistema educativo; pero esto no debe impedirnos la coordinación, en particular con la física. Por ejemplo, en física se establece la ley de refracción, pero no se puede formalizar porque la tradición de enseñanza matemática no permite usar los senos hasta más adelante, porque en el sistema, la trigonometría es un todo. En el sistema o todo o nada. ¿No podría ser el seno un maravilloso ejemplo de una función matemática introducida gráficamente a partir de un círculo? Incluso es uno de los primeros ejemplos de función que tiene que aprender un estudiante. Otro ejemplo: el cálculo siempre llega demasiado tarde para la física. Sin embargo lo que el físico necesita, conceptos de cociente diferencial e integral y derivadas e integrales de unas pocas funciones no debería de llegar tarde; incluso conceptos matemáticos fuertemente motivados por sus aplicaciones en las lecciones de física, como gradiente, ni siquiera se mencionan en las clases de matemáticas. Pero no olvidemos que los físicos están mucho más hipnotizados por el sistema: Leyes del tipo de la gravitación o la de Coulomb, que matemáticamente van juntas, se tratan por separado. Todas las magnitudes específicas que podrían ayudar al matemático a ilustrar y motivar las funciones lineales llegan mucho más tarde en física.

Pero si la instrucción física y matemática tienen que estar coordinadas, tanto físicos como matemáticos tienen que abjurar del sistema. Pero ¿es prudente complicar la tarea de modernizar la instrucción matemática modernizándola con la física? Se ha hecho en Alemania, donde hay una unión personal de la enseñanza física y matemática, pero en otros países necesitarían serias medidas de formación del profesorado.

A lo que añade otra cuestión:

¿es realmente necesaria la coordinación de la enseñanza de ambas materias? Al examinar libros de texto de física se diría que no, el físico no se fía de las matemáticas, y por tanto el matemático no necesita hacer esfuerzos para agradar al físico. Es el círculo vicioso de la indiferencia, pero si sigue así, acabará con el aislamiento mutuo y completo de las enseñanzas de la física y la matemática.

Después hace un análisis de los algoritmos, comenzando por el de la suma, comparando el ábaco, como nivel inferior, donde el calculador no necesita saber lo que está haciendo, pero al traducir sus acciones del ábaco al papel necesita comprender lo que está haciendo, si bien esto se puede hacer automatizando las acciones hasta tal punto que las reglas desaparecen de la propia consciencia, o si se conoce como funcionan las cifras, se pueden corregir los errores de cálculo.

Por supuesto que se puede confrontar al niño con algoritmos listos para su uso, para hacerle saltar niveles intermedios, pero eso puede detener un proceso de aprendizaje. El mejor modo de aprender un truco es descubrirlo; nada es tan convincente como el descubrimiento personal; si no se le da al niño el tiempo que necesita, y el algoritmo se le impone bruscamente, seguirá una mala reacción. Los algoritmos tienen que aplicarse como rutinas, pero hasta que no funcionen perfectamente no es útil aplicarlos como rutinas.

No hay que olvidar que los algoritmos son de la mayor importancia en matemáticas. Hay hoy fuertes tendencias a la algoritmización y en la enseñanza los algoritmos son tentadores, tanto para profesores como para alumnos; para los primeros que en lugar de enseñar matemáticas enseñan algoritmos, para los alumnos que fácilmente se sienten cautivados por el buen funcionamiento del algoritmo.

Junto a los algoritmos están las estrategias, las tácticas, los patrones, que deben de ser prácticados pero no demasiado temprano, y no hasta que el alumno sea capaz de reinventarlos por sí mismo.

Concluye el capítulo con una lección:

...problemas didácticamente fértiles no deben ser demasiado sencillos, no deben ser demasiado especiales y no deben ser formulados demasiado finamente.

El capítulo VIII se dedica a los niveles de rigor. Cita para empezar al Poincaré de 1900, cuando dijo en el 2.° Congreso internacional de matemáticas de Paris,

...las demostraciones no son todo en la ciencia, la intuición tiene asignada una parte complementaria, como contrapunto o antídoto de la lógica.

Continua H. F.:

¿Quién juzga si las matemáticas enseñadas son rigurosas o no?

No hay duda de que el estudiante no puede aprender rigor matemático de modo diferente al resto de las matemáticas, es decir, por re-invención, y esto también debe de suceder en diferentes niveles. Sin embargo no es fácil de hacer. Además en el curso de la historia el rigor matemático no ha sido el mismo en la mente de todos los matemáticos.

Las matemáticas del descubrimiento libre son mucho más importantes que las que se confinan a unos axiomas impuestos por el profesor o el libro de texto y no hay razón para decir que sea menos rigurosa. Hay niveles de rigor y para cada tema hay un nivel de rigor que se le adapta, el aprendiz debe de pasar a través de los niveles y adquirir su rigor. La transición de un sistema de reglas al siguiente es discontinua aunque natural.

La tarea del rigor es convencer, pero las matemáticas listas para su uso nunca convencen. Para progresar en el rigor, el primer paso es dudar del rigor en el que uno cree en ese momento. Sin esta duda, poco se aprende, dejando a otras personas que le ordenen a uno mismo nuevos criterios de rigor.

Pasa después a hablar de la organización local de un campo, eligiendo como tema la geometría:

...los conceptos geométricos y las relaciones se analizan siempre hasta una cierta frontera más bien arbitraria, hasta el punto en que a simple vista se distingue lo que significan las nociones y si las proposiciones son verdaderas. Todo el mundo razona a partir del horizonte cambiante y confuso de los hechos que suceden y que se suponen como verdaderos y nunca a partir de los axiomas. El campo está organizado localmente.

Otra cuestión de la que trata aquí es sobre la separación de la teoría matemática y el mundo real.

Separación que empieza cuando se olvida que siete son siete unidades, el alumno empieza a poner las matemáticas entre paréntesis para que no se estropeen con el contacto con la realidad y para funcionar con más seguridad, lo que también es útil para comprender que hay verdades que no dependen ni del tiempo ni de la buena voluntad. Así la separación de la teoría matemática y el mundo real puede experimentarse mejor en los primeros estadios y con ejemplos sencillos que más tarde con otros más sofisticados.

Hay hoy fuertes tendencias a la algoritmización y en la enseñanza los algoritmos son tentadores, tanto para profesores com para alumnos; para los primeros que en lugar de enseñar matemáticas enseñan algoritmos, para los alumnos que fácilmente se sienten cautivados por el buen funcionamiento del algoritmo.

El capítulo IX se dedica a la instrucción (en todo el texto la palabra instrucción está tomada en su significado más etimológico, o en el casi-militar, de reglas que se aprenden y se obedecen). Instrucción considerada como opresora, frente a educación como generadora de libertad.

Empieza por analizar la autoridad del teórico, criticando a los que acostumbran a decir a los demás como tienen que enseñar, expresando que esta cuestión es una de las muchas variaciones sobre el tema «ideal y realidad»; pero sin olvidar que los ideales también son realidad, la realidad vista por las personas que ven un poco más allá que sus contemporáneos. Añade que

...la esencia de este libro no es promover en la enseñanza una teoría por la que yo debería prescribir a los educadores prácticos sus métodos de enseñanza. Pero esta es mi filosofía para combatir cualquier intento de influir en la instrucción escolar de un modo antididáctico. En particular me opongo a toda la instrucción puramente orientada por los contenidos, y a todos los puntos de vista dogmáticos sobre las matemáticas que descuidan todas las presuposiciones psicológicas e implicaciones sociales de la instrucción matemática.

Es fácil imaginar cómo actúa la influencia dogmática; si una autoridad declara que algo es riguroso de un modo e impreciso de otro, esto puede afectar crucialmente a la instrucción, si bien no importa si dicha afirmación ha sido propiamente comprendida o no. Por ejemplo, en Alemania, las repercusiones no previstas de Klein han bloqueado muchos desarrollos razonados; en los Países Bajos ocurrió algo parecido en 1937 con una reforma de los currículos de matemáticas llevada a cabo honestamente por un grupo de profesores que confiaban en imponer la deductividad como agente matemático y que no sentían la necesidad de ninguna argumentación pedagógica ni didáctica, ni social para justificar sus propuestas. Programa que era irreal, pero nadie se atrevía a protestar contra sus ideas, salvo excepciones, como D. Van Dantzig, pero sus argumentos no indujeron a nadie a renunciar a aquellas teorías idealistas. Muchos profesores podían creer que estaban llevando a cabo dicho programa; otro muchos sin embargo, no querían admitir que no eran capaces de llevar adelante un programa tan irreal, puesto que gozaba del acuerdo general. Esta historia muestra, no sólo la poca fiabilidad de los programas y currículos, sino también que esta historia se repetirá. El papel jugado en 1937 por «riguroso» o «impreciso», ahora lo desempeñan «moderno» y «pasado de moda». A veces parece más una tienda de modas que cualquier otra cosa. Que algo sea nuevo no es un criterio para ser enseñado. Siento que si los profesores pagan su justo precio a las matemáticas «modernas» y al rigor «moderno», no es sólo un signo de respeto, sino también de frustración: temiendo el ojo crítico de la autoridad y temiendo ser considerado un reaccionario o un pasado de moda. Lo importante es que no puedo comprender por qué los profesores de instituto casi nunca protestan, ni siquiera contra los proyectos en los que todas las evidencias muestran que son ilusorios.

Por otro lado, es muy difícil averiguar cuál es la práctica en el aula. Los currículos son casi siempre vagos, los programas muestran más detalles pero sobre todo incluyen objetivos y mínimos; nunca dicen si esos objetivos se logran o si los mínimos fueron alcanzados por la educación real. Si se analizan los libros de texto, en todos los países hay buenos y malos, ¿cuáles son los más influyentes?. Otra fuente de información son los exámenes, pero debe de ser usado sólo por aquellos que estén bien enterados de las peculiaridades de la habilidad de preparar exámenes y de las técnicas de evaluación de los resultados. La investigación teórica sobre la enseñanza tiene la característica de decir a otras personas cómo tienen que enseñar, entonces es programática y a menudo irreal, está basada en la creencia firme de la persona que presenta sus ideas: los experimentos con clases de prueba son especialmente sospechosos si suceden bajo condiciones que difieren de las condiciones ordinarias de las escuelas; el laboratorio del psicopedagogo es un entorno aún menos deseable para experimentos que se puedan llamar representativos.

La educación en matemáticas verdaderamente modernas exige un laboratorio en el que el método de invención se pueda desarrollar libremente, en el que los estudiantes trabajen individualmente o en pequeños grupos, mientras el profesor observa sus actividades para intervenir si lo considera necesario. Otro aspecto para abolir el aula, el profesor no debe enseñar solo, sino en equipos de dos o tres, donde uno observa al otro, cada uno aprende del otro. Por supuesto el trabajo de laboratorio se tiene que completar con un diálogo amplio del profesor con un grupo.

Para enseñar, por supuesto hay que saber los contenidos, pero para enseñar también hay que saber cómo enseñar, aunque esto no se enseñe propiamente en la universidad.

Acaba con una premonición que sigue fresca y válida 25 años después:

> En los países europeos aproximadamente un 1% de la población trabaja en la educación; con seguridad la demanda de educación se duplicará en las próximas décadas, y esto sucederá en gran parte en sectores en los que hoy el número de estudiantes por profesor es pequeño. Esto significa que con los métodos actuales de instrucción el número de trabajadores en educación tendría que multiplicarse por cinco o diez. Lo que indica que nuestros métodos actuales están seguros de fracasar. La instrucción de grupos de edad superior por profesores individuales estará, dentro de poco, tan anticuada como los libros de texto escritos a mano. Esto debería de ser recalcado a los jóvenes de hoy, radicales y románticos, cuando piden una instrucción más personalizada. Del mismo modo que un matemático adulto ha aprendido a acomodar la lectura de la literatura a la libertad de la reinvención, así deberíamos enseñar esta actitud a nuestros adolescentes, y el modo de hacerlo sería programando la reinvención en el proceso de aprendizaje.

El capitulo X se dedica al profesor de matemáticas:

> «Se busca profesor de natación que sepa nadar». Todos están de acuerdo en un punto: la persona que está enseñando debe de saber más de lo que enseña, y no sólo en el momento de enseñarlo, sino más pronto. Pero ¿cuánto debe ser este «más» y este «más pronto»?, ya no hay acuerdo ni entre los expertos, ni entre los legisladores, ni entre las naciones.
>
> Un niño papúa aprende de sus padres exactamente lo que necesita en su vida, vida que no es muy distinta de la de sus padres. Esta es la gran diferencia entre países desarrollados y en vías de desarrollo que nuestros niños y adolescentes tienen que aprender mucho más de lo que propiamente necesitan. El exceso se puede justificar siempre por el supuesto valor formal del tema estudiado, y en matemáticas se justifica como disciplina intelectual.
>
> Para enseñar, por supuesto hay que saber los contenidos, pero para enseñar también hay que saber cómo enseñar, aunque esto no se enseñe propiamente en la universidad.

Volviendo al término doble olvido de Klein se pregunta H. F.:

> ¿cuál es la utilidad de este periodo de estudio en la universidad intercalada entre el primero y el segundo olvidos? Por supuesto apreciamos que tiene que haber un cierto intervalo en alguien entre que aprende matemáticas en el aula y las enseña en una clase, y si este intervalo tiene que llenarse de algún modo no es extraño pedir que se llene con matemáticas.
>
> En los últimos años se han hecho esfuerzos para que las matemáticas escolares recuperen su retraso de un siglo, también se han hecho esfuerzos en la formación del profesor, éste debe ser capaz de enseñar de acuerdo con el programa que difiere ampliamente del que estaba de moda cuando él iba a la escuela.
>
> ¿Por qué se ha retrasado tanto tiempo la cimentación de la brecha entre las matemáticas escolares y las universitarias? ¿Por qué se intenta hacer ahora algo que hace medio siglo o más se demanda? Las matemáticas crecían por todos lados, no sólo fuera de las matemáticas escolares, sino también hacia las matemáticas escolares, reestructurar las matemáticas significa a menudo que preferentemente sus ideas más elementales sean puestas en duda otra vez, y a menudo, esas ideas residen precisamente en el plano de ruptura entre las matemáticas escolares y las universitarias. La brecha está siendo llenada gracias al desarrollo de las matemáticas desde ambos lados, del uno hacia el otro.

> Hoy, cualquiera que quisiera resumir el intento de Klein para enseñar «matemáticas elementales desde un punto de vista superior» tendría que hacerlo en un nivel mucho más bajo, mucho más cerca de la matemática escolar. Que lo más fundamental está más ligado a lo más elemental es una idea que necesitó medio siglo para madurar.

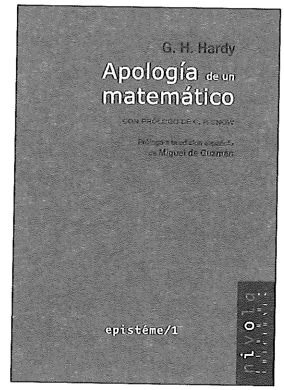
Finalmente formula las exigencias mínimas para la formación de los profesores de matemáticas:

> 1) que capacite al profesor para emplear con autoconfianza los métodos fundamentales de las matemáticas de hoy,
>
> 2) que mejore el conocimiento fundamental que se necesita para comprender la estructura de las matemáticas de hoy,
>
> 3) que desarrolle ciertas nociones sobre cómo se aplican las matemáticas, (obviamente, incluye matemáticas de ordenadores)
>
> 4) que de una primera visión de cómo investigan los matemáticos.
>
> A esto hay que añadir la formación pedagógica, obviamente la enseñanza también se aprende a hacerla, por ello no es bueno permanecer en el nivel más bajo. Ello implica que el primer estudio en la universidad puede contribuir sólo en una modesta parte a la formación pedagógico-didáctica. Si pedimos que la teoría hoy se deba reinventar y que, por tanto, no puede preceder a la práctica, sólo hay una pequeña cantidad de teoría de la enseñanza que se deba aprender antes de que un profesor empiece a enseñar, a saber, aprender de los ejemplos de uno mismo y de otros para analizar la instrucción que se esta intentando dar, se está dando y se ha dado. El futuro profesor debería de aprender el método del experimento mental y cómo informar sobre él.
>
> Hasta hace pocos años la formación continua del profesorado se limitaba a conferencias ocasionales sobre ciencia, o participaban en los movimientos de innovación como oyentes, de didáctica no se discutía. Se cambió el modelo en muchos países, con dos extremos: enseñar al profesor exactamente lo que él mismo debería de enseñar dentro de unos pocos años, o proporcionarle una ciencia fundamental que nunca puede aplicar en la enseñanza.
>
> El gran problema es el de los profesores de la escuela primaria (seis años de escuela primaria). Desde que las matemáticas han sido abolidas como materia obligatoria en la formación de profesores de la escuela primaria, puede ocurrir que se permita a un profesor enseñar aritmética y matemáticas en la escuela primaria, o incluso en los primeros años de secundaria, incluso si la última nota que recibió en matemáticas fue insuficiente y estaba relacionada con ecuaciones lineales de una incógnita y aplicaciones numéricas del teorema de Pitágoras. El número de profesores de escuela primaria es aproximadamente 50 veces el de profesores de bachillerato.

Acabamos aquí esta recensión, que ha sido un resumen de las principales ideas de Freudenthal sobre cómo se debe enseñar matemáticas, sin ánimo de ser dogmático. Sus ideas han sido fundamentales en el cambio de la enseñanza de las matemáticas, sin duda en su país, donde el principal centro de enseñanza matemática, el antiguo IOWO, lleva hoy el nombre de Instituto «Freudenthal», y en los países de alrededor; contra lo que otros piensan sostengo que la didáctica de las matemáticas tanto en Francia, como en Alemania o Inglaterra ha adoptado-adaptado muchas de las ideas expuestas en este libro.

H. Freudenthal escribió muchísimos más textos sobre enseñanza de las matemáticas, en particular, en 1978, *Weeding and Sowing*, en 1983, *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* y en 1991, *Revisiting Mathematics Education. Chine Lectures*, donde vuelve a replantearse y retomar sus ideas y trabajos anteriores, pero el análisis de estos libros lo dejamos para otra ocasión.

Florencio Villarroya



APOLOGÍA DE UN MATEMÁTICO
G. H. Hardy
Nivola Libros Ediciones
Col. Epistéme, n.° 1
Madrid, 1999
ISBN: 84-930719-0-0
136 páginas

Este clásico se publicó por primera vez en 1940 con el título *A Mathematician's Apology*. En español, se publicó una parte de este libro en el tomo quinto de la magnífica *Sigma. El mundo de las matemáticas*, con un comentario inicial de James R. Newman. Ahora, aparece completo con un prólogo a la edición inglesa de C. P. Snow y con otro a la edición española de Miguel de Guzmán.

Hardy (1877-1947) fue un matemático, de los que denominaríamos ahora puro, que escribió sobre temas como convergencia y sumación de series, desigualdades y teoría analítica de números. Su texto *A Course of Pure Mathematics* estableció un nuevo modelo para la enseñanza inglesa en matemáticas. Su colaboración con Littlewood, iniciada en 1911 y que duró prácticamente hasta su muerte, fue excepcionalmente larga y fructífera escribiendo conjuntamente cerca de un centenar de artículos. Otra colaboración, en este caso precedida de un «descubrimiento» fue con Ramanujan; Snow narra de forma fascinante en el prólogo de este libro, junto con muchos otros aspectos de su personalidad, cómo llegó a Hardy un manuscrito del matemático hindú y cómo en una noche, tras su estudio y previo intercambio de opiniones con Littlewood, se percató de estar delante de un matemático excepcional.

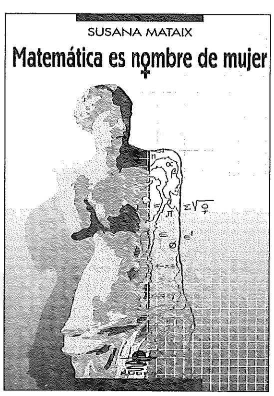
Pasados los sesenta años, en su ocaso como creador matemático, escribe Hardy su *Apología*, en la que da su visión de lo que es la matemática. Sólo por esto merece la pena leer el libro; pocos matemáticos nos han contado sus impresiones sobre la ciencia que han cultivado; Hardy es una excepción, otra, muy brillante, Poincaré. Precisamente, Hardy inicia su obra justificándose ante este «atrevimiento» : «Es una experiencia melancólica –escribe– para un matemático profesional encontrarse a sí mismo escribiendo sobre matemáticas. La función de un matemático es hacer algo, es probar nuevos teoremas, es contribuir a las matemáticas y no hablar sobre lo que él u otros matemáticos han hecho. [...] no hay desprecio más profundo que aquél que sienten los hombres que crean hacia los hombres que explican. La exposición, la crítica y la apreciación son tareas para mentes de segunda clase».

A lo largo de 29 cortas secciones, Hardy va desgranando, con un cierto pesimismo –en la época en que escribió esta obra estaba en un estado depresivo bastante agudo–, sus ideas sobre su justificación como matemático, la edad productiva en los matemáticos, la belleza de las matemáticas, la utilidad (mejor dicho, inutilidad de las matemáticas), matemáticas auténticas, matemáticas puras y aplicadas, matemáticas triviales...

Es un libro polémico, con el que es muy fácil discrepar en algunos puntos pero que, sin duda, merece la pena leer, aunque sea, para eso... para no estar de acuerdo.

Emilio Palacián

MATEMÁTICA
ES NOMBRE DE MUJER
Susana Mataix
Editorial Rubes
Barcelona, 1999
ISBN: 84-497-0014-0
159 páginas



Creo que cada vez somos más los que agradecemos la aparición de libros sobre matemáticas que se puedan leer, es decir, que utilicen el lenguaje habitual para desarrollar los conceptos y sus aplicaciones y se recurra a los símbolos y a las fórmulas sólo cuando realmente sea necesario para plasmar y explicar una idea con rigor matemático.

Pues bien, estamos ante ciento cincuenta páginas que pueden leerse de un tirón (o dos) y entre las que no encontramos ni una sola expresión algebraica.

Con un estilo sencillo y claro, Susana Mataix nos lleva de la mano para hacer un recorrido por toda la Historia de las Matemáticas a través de la mirada de unas mujeres tenaces que supieron sobreponerse a todo tipo de dificultades y desarrollar su pasión científica.

Algunos echarán de menos información concreta y precisa sobre los descubrimientos de estas mujeres e, incluso, un desarrollo más pormenorizado de los conceptos matemáticos sobre los que trabajaron, pero creo que el objetivo del libro es otro: que cualquier persona que se acerque a él, sea cual sea el punto de interés –la Historia de la Ciencia, las matemáticas, la mujer, la cultura...–, pueda leerlo sin que el lenguaje matemático constituya una barrera. En mi opinión, *Matemática es nombre de mujer* nace con clara vocación divulgativa.

En el prólogo, la autora nos cuenta cómo el azar puso ante sus ojos una novela de un autor inglés, Charles Kingsley, titulada *Hipatia*; no fue su valor literario lo que despertó su interés, sino el personaje: «¿Cómo fue aquella mujer, filósofa y matemática, que se atrevió a destacar en una sociedad de hombres?».

Y así es como Hipatia empieza a hablarnos desde Alejandría, en el año 415, año en el que murió asesinada por los cristianos. Nos cuenta cómo su padre la inició en el mundo de las matemáticas a pesar de las reticencias de su madre, que no lo consideraba adecuado para una niña, para luego ir desgranando los problemas por los que se interesó y los personajes que admiró a lo largo de su vida. Así van desfilando en su relato:

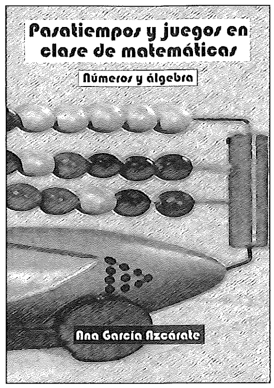
- Euclides y el postulado de las paralelas.
- Ptolomeo y los movimientos del universo.
- Arquímedes y la cuadratura del círculo.
- Diofanto y la simbología matemática y aritmética.

Susana Mataix hace que un manuscrito de Hipatia sirva de enlace entre todas estas mujeres que nos hablan, siempre en primera persona y desde la perspectiva de los últimos meses de su vida, de su trabajo científico y el de sus contemporáneos, pero sin olvidar aspectos personales que nos acercan a la vida cotidiana de la época y nos muestran su faceta más humana. Madame du Châtelet (1706-1749), Maria Gaetana Agnesi (1718-1799), Sophie Germain (1776-1831), Ada Lovelace (1815-1852), Florence Nightingale (1820-1910), Sofía Kovalevskaya (1850-1891), Emmy Noether (1882-1935), todas ellas, van pasándose el testigo para proclamar su pasión por las matemáticas y reivindicar su lugar como científicas. Para todas ellas fue un obstáculo su condición de mujer para tener acceso a la ciencia y siempre tuvieron que tener el aval de un hombre para ser escuchadas, ya fuera un padre, un marido o un maestro.

En el epílogo Susana Mataix nos descubre qué parte hay de ficción y cuánto de realidad en los relatos de estas mujeres que, según expresa Miguel de Unamuno en el *Sentimiento trágico de la vida*, «vivieron para ser recordadas y viven actualmente en nuestro recuerdo». Pero ¿a cuántas más se les ha escamoteado su obra e, incluso, se les ha negado su existencia?

Ana Pola

PASATIEMPOS Y JUEGOS EN CLASE DE MATEMÁTICAS NÚMEROS Y ÁLGEBRA
Ana García Azcárate
UAM ediciones
Madrid, 1999
ISBN: 84-605-9700-8
232 páginas



Como casi todo en la vida, la pertenencia a un grupo tiene ventajas e inconvenientes. En el caso de Ana García Azcárate y el Grupo Azarquiel, al que pertenece desde su fundación, ha hecho que sus quehaceres en la Didáctica y sus aficiones personales hayan quedado englobados en las múltiples e importantes publicaciones del Grupo, en las que aparecía el consenso de todas las tendencias de los componentes del mismo. Ahora, con la publicación de su primer libro realizado en forma individual, nos muestra sus interesantes realizaciones sobre juegos.

Un porcentaje elevado de los que nos dedicamos a la enseñanza de las Matemáticas sentimos (o en algún momento lo tuvimos) un placer especial en el aprendizaje de las mismas, que todavía se agudiza cuando tenemos que enfrentarnos a juegos o acertijos que ponen en cuestión nuestra imaginación. Pero la verdad es que, como colectivo, lo debemos transmitir bastante mal a nuestro alumnado, porque socialmente no se suele percibir ese sentido de reto, de desafío intelectual ante problemas que nos atrapan, que proporciona un gran placer en el desarrollo de las estrategias de ataque a los mismos (se llegue o no a ganar, que en el fondo casi da lo mismo). Con cierta frecuencia se aduce por parte de los enseñantes inconvenientes de diferentes tipos para aplazar la presencia del aspecto lúdico de las matemáticas en clase (programas,«seriedad» de la materia, comportamiento de los alumnos y alumnas, prevención ante la reacción de los padres o de las autoridades educativas,...), pero el más generalizado es la falta de material adecuado para utilizar en clase.

A ayudar a llenar (de forma brillante) ese hueco viene el libro que comentamos. En él hay una formidable cantidad de juegos y pasatiempos (en dos partes, la primera trata de números naturales, enteros y fraccionarios; la segunda de actividades que tienen que ver con el álgebra), con indicación del nivel de la ESO más apropiado para su utilización, con material para presentar directamente al alumnado, comentarios pedagógicos dirigidos al profesorado y con las soluciones pormenorizadas de todos ellos. Y, además, con el aroma inequívoco de no ser copia de otras publicaciones, sino de haber sido practicado de forma directa con alumnos con nombres y apellidos, que ha posibilitado la relación directa entre profesores y alumnos en el proceso de aprendizaje (y haber sido readaptados en función de los resultados que se obtenían). Y es que además de otras fuentes de aplicación, buena parte de las actividades de este libro han sido utilizadas durante años en un proyecto de ayuda a estudiantes con dificultades de la Comunidad de Madrid.

El libro no tiene nada más que unas pocas páginas de introducción teórica (igual hubiera sido bueno que fuera más extensa esa parte), pero una ingente cantidad de juegos interesantes y tendría que ser libro de cabecera, casi de obligado «consumo», para todo el profesorado de ESO, como filón inagotable de actividades, para el conjunto de la clase, o para individualizar (o diversificar, según la jerga vigente) la atención en algunos de los estudiantes. Y lo único que echaremos pronto en falta será la continuación para el resto de partes del programa que está a la espera de un libro similar.

Estamos ante un libro que en poco tiempo ha alcanzado ya la segunda edición en el mismo año (la primera fue de las ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid, la segunda la ha realizado la autora). Y un aviso para navegantes, ya que el mayor problema de los libros de editoriales minoritarias es su distribución, algo que también puede pasar en éste y que no merece dado su interés: se puede pedir a la Librería Avinareta de Madrid que tan meritorio papel está haciendo en la tarea de poner al alcance del profesorado todo tipo de publicaciones interesantes de Didáctica de las Matemáticas.

Fernando Corbalán

SUMA 33
febrero 2000

Problemas X Olimpiada, Jornada matemática en el Congreso de los Diputados, Congresos belga y francés

CRÓNICAS

X OLIMPIADA Matemática Nacional: problemas propuestos

Prueba individual

Problema n.° 1. Seis monedas

Coloca seis monedas en un modelo de casillas como el que indica la figura, de manera que en las monedas de la fila superior se vea la cara y en las monedas de la fila inferior se vea la cruz.

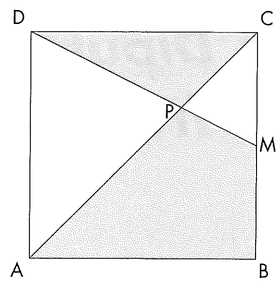
El objetivo es intercambiar las caras con las cruces en el menor número de movimientos.

Caras y cruces se mueven por turno hacia cualquier casilla contigua que esté desocupada y cada movimiento puede hacerse hacia arriba, hacia abajo, de lado o en diagonal.

¿Cuál es el mínimo número de movimientos para intercambiarlas? Cuando encuentres la solución trata de resolver un problema parecido, con una fila de cinco casillas con cuatro caras encima de otra fila con cuatro casillas de cruces. Prueba entonces a diseñar una estrategia para resolver este problema en un caso general.

Problema n.° 2. Cuadrado

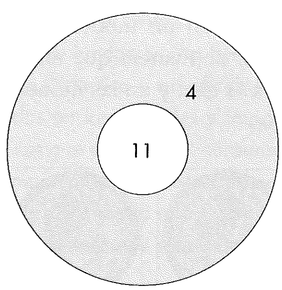
En un cuadrado *ABCD* de lado unidad se traza la diagonal *AC*. Se une el vértice *D* con el punto medio, *M*, del lado *BC*.



- Calcular la razón entre las superficies del cuadrilátero *ABMP* y el triángulo *CDP*.
- ¿Cuál sería la razón si *M* en lugar de estar en el punto medio del lado *CB*, estuviese a 1/3 del vértice *B*?
- ¿Podrías aportar algún tipo de solución para *M* situado a $1/n$ del vértice *B*?

Problema n.° 3. Jugando a los dardos

Juan y María están jugando a los dardos tirando sobre una diana como la que muestra el dibujo.



La diana está dividida en sólo dos regiones: la interior vale 11 puntos y la exterior vale 4.

Los jugadores tiran los dardos por turnos, sumando los totales, hasta que alguno alcanza una puntuación previamente acordada. Éste será el ganador.

Cuando Juan y María estaban jugando a conseguir 21 puntos, se dieron cuenta de que no eran capaces de conseguir esa puntuación. Así es que cogieron papel y lápiz y se sentaron para averiguar todos los totales posibles. Menos mal que vieron que, a partir de cierto número, cualquier puntuación era posible. Entonces acordaron que en el futuro siempre fijarían un total suficientemente grande.

Encuentra todos los totales imposibles de obtener en este juego.

Investiga acerca de los números imposibles de obtener cuando se definen otras puntuaciones para cada región de la diana.

Esta X Olimpiada se celebró en Albacete, en junio de 1999, organizada por la Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas

Tal vez puedas descubrir una fórmula general para saber la máxima puntuación imposible cuando la región interior vale m puntos y la exterior n puntos.

Prueba por equipos

Problema 1. El templete de la música

Estáis viendo lo que se conoce como templete de la música, y está situado al final de la calle central del parque. Aquí es donde, entre otras cosas, tienen lugar los conciertos de la banda municipal que atraen a multitud de albacetenses. Es una construcción agradable y sencilla y sobre ella os vamos a hacer una serie de preguntas que se nos han planteado estos días con motivo de la remodelación del parque.

1) Suponiendo que un músico necesita, para poder estar bien acomodado mientras interpreta, una superficie de 0,90 m^2, ¿cuál sería el número máximo de músicos que podrían tocar en el templete, habida cuenta de que aprovecharían toda la superficie disponible y que el director de la banda necesita 2 m^2 para él?
2) En la parte superior podéis observar que, uniendo las columnas, hay unos arcos. Queremos adornar esos arcos adosándoles unas guirnaldas. ¿Qué longitud aproximada de guirnaldas deberemos comprar?
3) Por último, para darle más luminosidad por las noches, queremos colocar unas hileras de bombillas que, colocadas sobre el techo, vayan desde las columnas al punto en que cuelga la lámpara que se encuentra en el centro del templete. ¿Qué longitud mínima de cable necesitaremos para hacer la instalación?

Problema 2. La fuente de las columnas

Aquí estáis viendo una hermosa fuente, rodeada por columnas que la enmarcan recordando una figura geométrica que esperamos os resulte familiar. Precisamente sobre esa figura, os queremos proponer unas preguntas que nos permitan resolver algunos problemas que tenemos planteados en el diseño de la nueva fuente que se quiere instalar.

1) ¿Cómo encontraríamos el centro de la figura para poder colocar allí la fuente? Por supuesto, no está permitido entrar en el estanque, ni en el parterre que lo rodea.

2) Queremos también completar el doble recinto de columnas colocando las cuatro que parecen faltar. ¿A qué distancia del centro se deberían colocar dichas columnas para que formen con las otras sendos polígonos regulares? ¿Qué distancia habría hasta las columnas contiguas?

3) Por último, si cubriéramos totalmente el pasillo que forman las columnas con un artesonado de madera al estilo del que ahora hay esbozado, ¿qué superficie mínima necesitaríamos cubrir?

Problema 3. Mosaico romano

Últimamente, la palabra mosaico y los conceptos a ella ligados se utilizan mucho en matemáticas trabajando no sólo los aspectos geométricos sino incluso su vertiente cultural e histórica. Pero en referencias históricas al uso de los mosaicos, casi siempre acudimos a los árabes olvidándonos que, aunque de una forma menos rica, los romanos también hicieron uso de ellos para embellecer sus construcciones. Buen ejemplo tenéis en las exposiciones permanentes del Museo Arqueológico Provincial de Albacete, en las que podemos observar los bellos diseños que utilizaron por estas tierras.

Precisamente queremos que os fijéis especialmente en el mosaico procedente de Hellín, una ciudad situada a 60 km de Albacete, porque sobre él debéis averiguar varias cosas.

1) ¿Cuál es la figura geométrica básica utilizada por el artesano que diseñó este mosaico para cubrir todo el plano? ¿Podríais explicar la forma en que está hecho y cómo se extiende en todas direcciones la construcción?

2) Como piedrecillas negras que entran a formar parte del dibujo del mosaico son las que más escasean en la zona, queremos averiguar las que necesitaremos para cubrir el suelo de una habitación cuadrada de 5 metros de lado, sabiendo que se precisan, aproximadamente, 100 de esas piedrecillas, para cubrir 1 dm^2.

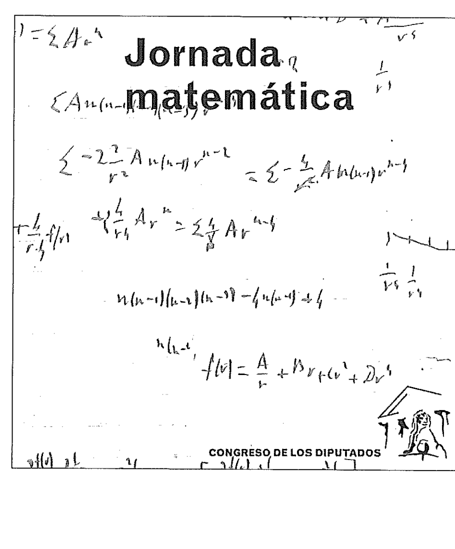
El primer gran acontecimiento para celebrar el Año Mundial de las Matemáticas (AMM2000) ha sido la Jornada matemática desarrollada en el Congreso de los Diputados el día 21 de enero.

Jornada matemática en el Congreso de los Diputados

El primer gran acontecimiento para celebrar el Año Mundial de las Matemáticas (AMM2000) ha sido la Jornada matemática desarrollada en el Congreso de los Diputados el día 21 de enero. Esta iniciativa es fruto de una propuesta del grupo socialista, refrendada unánimemente por la Comisión Mixta de Investigación Científica y Desarrollo Tecnológico, en la que se invitaba a instituciones y medios de comunicación a apoyar y difundir las actividades del AMM2000.

En la sesión de apertura, junto al Presidente del Congreso de los Diputados, intervinieron Ángel Martín Municio, Presidente de la Real Academia de Ciencias y José Luis Fernández, Presidente del Comité Español del Año Mundial de las Matemáticas 2000 (CEAMM2000), quien expuso muy acertadamente los objetivos que nos hemos marcado este año para nuestro país.

Durante la Jornada se desarrollaron tres conferencias. La primera de ellas, a cargo de Jacques-Louis Lions (Colegio de Francia) y con el título «¿Es posible describir en lenguaje matemático e informático el mundo de lo inanimado y del ser vivo?». Presentó a través de ejemplos bien elegidos e ilustrados, cómo la combinación de modelos matemáticos y ordenadores que efectúan cálculos con una rapidez insospechada hace años, hace posible la simulación de fenómenos muy complejos y prácticamente en tiempo real. Citó, entre otros, el caso de la corrección de trayectorias de satélites y el del aprendizaje de técnicas quirúrgicas mediante simulaciones muy realistas.



Publicación editada por el Congreso de los Diputados, que recoge las intervenciones de la *Jornada matemática*, celebrada el 21 de enero de 2000. Edición a cargo de: Jesús Ildefonso Díaz, José Luis Fernández, Antonio Martinón, Teresa Riera

David Nualart i Rodón (Universidad de Barcelona) habló sobre «Las matemáticas en la actividad política». Analizó los diferentes modelos que existen de asignación de escaños a las circunscripciones electorales y de reparto de escaños entre los partidos políticos en función del número de votos obtenidos. Resultó de especial interés su descripción de diferentes «índices de poder» que, en una toma de decisiones, posee una persona o colectivo, dependiendo del número de votos que posea y del procedimiento de votación.

«José Echegaray y la matemática como instrumento de regeneración» fue el tema de la tercera conferencia, a cargo de José Manuel Sánchez Ron (Universidad Autónoma de Madrid). Glosó la figura de José Echegaray, diputado y ministro, fundador del Banco de España, ingeniero y profesor, más conocido como dramaturgo premiado con el Nobel de Literatura. El conferenciante destacó los esfuerzos realizados por Echegaray para conocer las Matemáticas que se hacían fuera de nuestras fronteras y para difundirlas en España, en el convencimiento de que constituían un elemento básico para el progreso científico, industrial y social.

Otro acto central de esta Jornada matemática fue la mesa redonda sobre «La enseñanza de las matemáticas en España», moderada por Miguel de Guzmán (Real Academia de Ciencias) y con la participación de Luis Balbuena (IES Viera y Clavijo), María Jesús Luelmo (IES San Mateo), María Victoria Sánchez (Universidad de Sevilla), Sebastià Xambó (Universidad Politécnica de Cataluña).

Tanto el moderador como los ponentes coincidieron en señalar tres puntos claves o necesidades prioritarias, que se sintetizan en el recuadro adjunto, como conclusiones.

Durante toda la Jornada contamos con la asistencia de miembros de los dos Parlamentos, y con la participación especial de los diputados Antonio Martinón y Teresa Riera, organizadores directos de la misma y a quien desde aquí quiero expresar mi agradecimiento. A la generosa iniciativa del Congreso de los Diputados, que cursó invitaciones a una buena parte de los centros de enseñanza de toda España, respondió una gran afluencia de público proveniente de distintos sectores de la comunidad matemática: profesorado de todos los niveles educativos, investigadores, didactas de la matemática, parte del cual tuvo que seguir la Jornada en salas dotadas con grandes pantallas de vídeo.

Creo que es un éxito para todas las instituciones que participamos en la celebración del AMM2000 que este primer gran acto del año haya tenido lugar precisamente en el Congreso de los Diputados, centro neurálgico de la vida de una sociedad democrática, permitiendo que las Matemáticas reciban –al menos durante unas horas– la atención social, cultural y política que le corresponden.

María Jesús Luelmo

Representante de la FESPM
en el Comité Español para el AMM2000

...es un éxito para todas las instituciones que participamos en la celebración del AMM2000 que este primer gran acto del año haya tenido lugar precisamente en el Congreso de los Diputados, centro neurálgico de la vida de una sociedad democrática, permitiendo que las Matemáticas reciban –al menos durante unas horas– la atención social, cultural y política que le corresponden.

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN ESPAÑA: CONCLUSIONES

Los componentes de la mesa redonda sobre la enseñanza de las Matemáticas en España, tras haber discutido internamente las ponencias presentadas por cada uno, han decidido unánimemente resaltar como prioritarios los tres puntos siguientes:

1. La necesidad de cambios profundos en nuestra educación matemática en lo que respecta a los niveles obligatorios, con especial atención al tiempo de dedicación a la matemática y a la diversidad de intereses de los alumnos.
2. La necesidad de efectuar importantes transformaciones en la preparación del profesorado de primaria y secundaria en lo que respecta a la formación relacionada con la matemática y su didáctica a fin de que nuestro sistema educativo pueda hacer frente con competencia a los cambios necesarios. Para ello será preciso estimular la investigación en educación matemática.
3. La necesidad de establecer un amplio diálogo de la comunidad matemática con los diferentes agentes sociales a fin de llegar a acuerdos explícitos sobre las competencias básicas necesarias a la ciudadanía y sobre los modos de hacer posible que sean alcanzadas. Para ello será necesario que se cree un organismo adecuado o una comisión especial que apoye y estimule tal diálogo. Dicho organismo debería identificar asimismo los problemas que afectan a nuestra universidad en lo que se refiere a la docencia en el nivel superior y promover las medidas oprtunas para su solución

Miguel de Guzmán

Luis Balbuena

María Jesús Luelmo

María Victoria Sánchez

Sebastià Xambó

24 CONGRESO DE LA S.B.P.M.e.f. (Sociedad Belga de Profesores de Matemáticas de expresión francesa)

En la Abadía de Floreffe (Bélgica) se ha desarrollado durante los últimas días de vacaciones estivales del profesorado belga este congreso, 24 al 26 de agosto de 1998, que se celebra anualmente, con asistencia de unos 280 profesores, incluidos algunos franceses, suizos, un croata (Berislav), y yo mismo, en representación de la FESPM.

El tema principal del congreso era «¡Nuestras dificultades diarias frente a los programas y a las capacidades».

Destacamos que el horario del congreso como todos los años es bastante distendido, las sesiones comenzaban a las 9 de la mañana hasta las 12 con una pausa a mitad de media hora para el café, se reanudaban a las 14 horas, para terminar a las 17, o incluso antes.

El lunes 24 de agosto a las 9 y media se abría el congreso con la sesión de apertura, a cargo del presidente, Jacques Navez.

Después, el champán de bienvenida, seguido de la primera conferencia plenaria a cargo de Tilleuil Philippe: «El jardín de senderos que se bifurcan».

Por la tarde a partir de las catorce horas hubo dos sesiones de tres comunicaciones en paralelo, una de R. Gossez y J. Sengier sobre «Enseñar matemáticas con una TI 92», otra del presidente de la SBPMef, Jacques Navez, sobre «Estudio sólido de ángulos» y una tercera sobre «Geometría Mudéjar» que presenté yo. En mi comunicación hice una breve presentación de la historia de España en relación con la convivencia de tres culturas y religiones, fruto de la cual nació, entre otras cosas el arte mudéjar. Dentro de este arte expuse sus características generales insistiendo después en las decoraciones geométricas que aparecen: especialmente los óculos, es decir círculos en los que se inscriben figuras poligonales regulares, de las que podemos encontrar con un número variable de lados: cuatro, cinco, seis, siete, nueve y doce (es decir la tradición matemática islámica sabía construir con regla y compás algunos polígonos regulares, y de manera aproximada otros muchos), y los lazos, de seis, de cuatro y de ocho, siguiendo la denominación de los historiadores del arte.

Simultáneamente se presentaba en este Congreso la Exposición «Geometría Mudéjar en Aragón: patrimonio de la Humanidad»...

Simultáneamente se presentaba en este Congreso la Exposición «Geometría Mudéjar en Aragón: patrimonio de la Humanidad» que yo mismo había preparado el año 1997 para las jornadas culturales del IES Miguel Catalán, y que estuvo durante las JAEM de Salamanca. (Aprovecho la ocasión para indicar que esta exposición está a disposición de todos aquellos centros escolares o culturales que la quieran presentar, basta con solicitármela y que esté disponible de fechas).

Por la tarde, en el segundo periodo, J.L Tison, antiguo alumno de la escuela Décroly habló sobre «La Antártida y los cambios globales», es un glaciarólogo dedicado a estudiar los cambios climáticos producidos en la Antártida, a partir del grosor de las capas de hielo que se forman anualmente, advirtiéndonos que en este momento no se puede hablar científicamente en serio de un recalentamiento del planeta, pues geológicamente hablando los periodos de tiempo son bastante largos. Además intervinieron A. Bajart, que habló de «Subconjuntos borrosos. Lógica borrosa y sus aplicaciones», y la Escuela Superior del Rey Balduino que presentó los trabajos de final de curso en matemáticas.

El martes 25 se dedicó toda la mañana a comunicaciones, en dos periodos horarios de una hora y quince minutos, con tres sesiones simultáneas a la vez. En el primero intervinieron, C. Docq sobre «Situarse en el espacio y representar los sólidos», D. De Bock sobre «La ilusión de la linealidad», y C. Félix sobre «Euler y las fracciones continuas». En la segunda estaban J. Sengier y R. Gossez, con la TI 92, J. Descy hablando de «Estadística en 2.° curso de secundaria», y un Forum sobre «Capacidades terminales».

En la primera sesión de la tarde, el grupo CREM presentó sus líneas de investigación, P. Pacquay, habló de «Problemas de interpolación: funciones splines y curvas de Bézier», y N. Joelants y C. Villers, hablaron sobre «Pitágoras, más que un teorema». Estos mismos profesores y su grupo de trabajo presentaban en este congreso una exposición sobre el teorema de Pitágoras, muy interesante en una gran cantidad de paneles.

La última parte de la tarde se dedicó a la Asamblea general de la Sociedad, incluyendo un debate entre los asistentes sobre el tema central del congreso.

Por la noche, a partir de las cinco, un concierto y visita cultural a la Abadía de Floreffe. Por la noche el banquete oficial del congreso.

El miércoles 26, dos nuevas sesiones matinales de comunicaciones: R. Gerardy, «De la Pascalina a Deep Blue»; G.

Lasters, «Números relacionales en geometría»; y M. Roelens, «Hace 500 años, un curso de matemáticas fue inmortalizado en un lienzo...» que representa a Luca Pacioli, enseñándole el libro XIII de Euclides a su alumno, quizá un tal Albert Durer, pues se encontraba en Venecia en 1495, mostrándole los teoremas necesarios para construir un dodecaedro. Interesante comunicación que incluyó un estudio sobre poliedros regulares y semirregulares. La segunda incluía a R. Midavaine «Sobre estadística», seguía el cursillo de la TI 92, y una exposición de la «Enseñanza de las matemáticas en Argentina» por G. Hansen.

Después de comer, por la tarde, una comunicación de Vermeylen y De Neef, sobre «El aprendizaje de la regresión lineal con ayuda de Cabri-Géomètre y Derive».

A las 3 y media de la tarde se celebró la sesión de clausura del congreso.

Además, como en todos los congresos, había exposiciones de material escolar, tanto de casas comerciales como de grupos de investigación de didáctica de las matemáticas de Bélgica francófona.

Florencio Villarroya

Representante de la FESPM

SUMA 33
febrero 2000

XI Olimpiada de la FESPM, IX Congreso «Thales», Año 2000: Aragón...

XI Olimpiada Matemática Nacional de la FESPM

En el mítico 2000 tendrá lugar la XI Olimpiada Nacional Matemática, convocada por la FESPM (Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas) y que este año organiza la FEEMCAT (Federación dí Entitats per a lí Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya).

De las diferentes entidades que componen la FEEMCAT, tres de ellas, APMCM (Associació de profesores de matemàtiques de les comarques meridionals), ADEMGI (Associació díensenyants de matematiques de les comarques gironines) y ABEAM (Associació barcelonina dí ensenyament de matemàtiques) han asumido la organización práctica y planificación de la antes mencionada olimpiada.

Hay que destacar que la planificación y organización de la olimpiada no sería posible sin el trabajo ilusionado y desinteresado de muchos profesores, la colaboración económica de diferentes organismos públicos y empresas privadas y la dedicación de los miembros del comité organizador (M. Luisa Girondo, Josep Borrut, Marià Cabo, Elisabet Saguer, Pilar Xifra, Teresa Pagès, Francesc Borrell, Marta Berini y Pilar Figueres).

Este acontecimiento tendrá lugar los días 23 al 29 de junio, en Tarragona, Barcelona y Girona. Durante los tres primeros días las actividades se desarrollaran en las comarcas de Tarragona, un día se dedicará a hacer una visita cultural a Barcelona, las últimas actividades se realizarán en las comarcas de Girona.

Entre participantes, profesores acompañantes, invitados y miembros de la organización un centenar de personas convivirán durante seis días disfrutando de las matemáticas, conociendo Cataluña y realizando diferentes actividades lúdico culturales.

CONVOCATORIAS

Entre los objetivos de esta celebración matemática destacamos los siguientes:

- Fomentar entre los estudiantes el gusto por las matemáticas y mostrar facetas de la matemática que difícilmente pueden tener lugar en el aula.
- Favorecer las relaciones de amistad entre los jóvenes de diferentes comunidades autónomas.
- Conocer Cataluña.
- Favorecer el intercambio de experiencias, proyectos y debates entre el profesorado asistente con la esperanza de que se haga extensivo a toda la comunidad educativa.

El programa que exponemos a continuación muestra, a grandes rasgos, las muchas actividades que se realizarán, aunque pueden existir variaciones.

Están previstas dos posibles horas de llegada el día 23 a partir de las 18 horas en Comarruga (Tarragona) pudiendo disfrutar de una verbena de Sant Joan en la playa. El día 24 por la mañana podrán llegar los que así lo dispongan y sobre las 12 habrá el acto inaugural de la Olimpiada, seguido de una sesión de *Magia Matemática* a cargo de Lluis Segarra. Por la tarde se realizará la prueba individual seguida de una sesión de *Geometría Mojada* a cargo de Anton Aubanell.

El día 25 está prevista una visita a la Tarragona Romana, para después comer en Port Aventura y disfrutar del parque.

El día 26 está reservado a Barcelona con diferentes visitas al Port Olimpic, paseo en golondrina, visita al Acuario... por la noche salida hacia Girona.

El día 27 es el día de la prueba colectiva en el marco de la Costa Brava, en Sant Feliu de Guixols.

El día 28 está dedicado a la ciudad de Girona, con una visita guiada por el barrio judío, el río Oñar... es una visita inspirada en las leyendas de Girona, a primera hora de la tarde una visita al Museo del Cine. Este día está prevista una sesión a cargo de Joan Carles Ferrer. Por la noche la fiesta de despedida

El día 29 por la mañana se entregarán los diplomas, premios a los participantes y se dará por finalizada la XI Olimpiada Nacional Matemática.

Actividades paralelas: Concurso de fotografía matemática. Exposición sobre las diez olimpiadas anteriores, Juegos matemáticos,...

Este programa puede sufrir modificaciones pero estamos seguros de que será una olimpiada interesante matemáticamente hablando y en el campo turístico-cultural muy atractiva para participantes y acompañantes.

FEEMCAT

...estamos seguros de que será una olimpiada interesante matemáticamente hablando y en el campo turístico-cultural muy atractiva para participantes y acompañantes.

IX Congreso sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas «Thales»

Con el lema «Matemáticos y Matemáticas para el tercer milenio: de la abstracción a la realidad», se celebrará en San Fernando los días 7, 8, 9 y 10 de septiembre de 2000, organizado por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales» dentro de las actividades del Año Mundial de las Matemáticas.

Avance de programa

a) Conferencias

- La innovación tecnológica. ¿Revolución didáctica?
- Las matemáticas en la sociedad moderna.
- El valor cultural de las matemáticas.
- ¿Enseñar entreteniendo? El difícil camino de las matemáticas escolares.
- El Observatorio de San Fernando y las Matemáticas.
- Las Matemáticas de los sentidos.
- El legado matemático del siglo XX.
- La enseñanza a distancia. Una mirada al futuro.
- Perspectivas profesionales del profesor de Matemáticas.
- La cuarta hora de las matemáticas.
- Enseñar matemáticas. De la realidad a la abstracción.

b) Grupos temáticos

- Nuevas tecnologías en la educación matemática.
- Matemáticas en Infantil y Primaria.
- Matemáticas en Secundaria y Bachillerato.
- Matemáticas en la Universidad.
- Recursos didácticos en el aula.
- Tratamiento de la diversidad en el aula.
- Historia de las Matemáticas y su enseñanza.
- Formación inicial y permanente del profesor de matemáticas.
- Educación a distancia.
- Experiencias en el aula.
- Transversalidad en matemáticas.
- Evaluación en matemáticas.
- Desarrollo curricular.

- Olimpiadas y concursos.
- Otros temas de interés.

c) Talleres

- Calculadoras.
- Matemática recreativa.
- Elaboración de materiales.
- Azar.
- Software educativo.
- Otros.

d) Otras actividades

- Exposiciones, paneles, etc.
- Actividades sociales.

Podrán presentarse comunicaciones, paneles, exposiciones y talleres. Para la presentación de trabajos deberá enviarse antes del 30 de abril de 2000 la ficha correspondiente. Una vez aceptado el trabajo deberá remitirse antes del 31 de mayo de 2000.

Para enviar trabajos o solicitar más información, dirigirse a:

Carlos O. Suárez Alemán
IES «J.M. Caballero Bonald»
Nuestra Sra. del Traspaso, s/n
11406 Jerez de la Frontera (Cádiz)
Tlf.: 956-336213. Fax: 956-334802
E-mail: PURICARL@teleline.es

I Congreso Regional de Educación Matemática

Se celebrará en Ciudad Real los días 24, 25 y 26 de marzo de 2000, con motivo del Año Mundial de las Matemáticas. La organización corre a cargo de la EU de Magisterio de Ciudad Real y el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Castilla la Mancha.

El contenido del Congreso girará, básicamente, en torno a tres conferencias plenarias y cuatro talleres de trabajo de desarrollo simultáneo. Las conferencias estarán a cargo de Rafael Pérez, Pilar Turégano y Pablo Perdegal.

Los talleres tienen por títulos:

- Generación de conceptos lógicos en Educación Infantil, por José Antonio Fernández Bravo.
- Matemática recreativa, por Luis Ferrero.
- Las matemáticas en el arte de M. Escher, por Javier Brihuega.
- Utilización de recursos audiovisuales en matemáticas, por Ismael Roldán y José Muñoz.

En el transcurso del Congreso se presentará la Sociedad Castellano Manchega de Profesores de Matemáticas...

En el transcurso del Congreso se presentará la Sociedad Castellano Manchega de Profesores de Matemáticas, por parte de Serapio García y Juan Emilio García.

Más información se puede obtener en la página:

htpp://www.uclm.es/general.htm

XVIII Concurso de resolución de problemas de matemáticas

Convocado por la Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas y el Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y Filosofía y Letras. Se regirá por las siguientes bases:

1. Podrán participar en el Concurso alumnos de BUP, ESO y FP en tres niveles:
   a) Primer nivel: alumnos de 3.° ESO.
   b) Segundo nivel: alumnos de 4.° ESO.
   c) Tercer nivel: alumnos de 3.° BUP, 1.° Bachillerato y 2.° y 3.° FPII.
2. Las pruebas consistirán en la resolución de problemas y se realizarán en Madrid, en un solo día, el sábado 17 de junio de 2000 a partir de las 10 horas.
3. Se concederán diplomas, acompañados de los premios correspondientes, a los mejores de cada nivel.
4. Los centros que deseen presentar alumnos (hasta un máximo de seis) han de realizar la preinscripción antes del 17 de mayo de 2000, dirigiéndose por carta a:

   Prof. Javier Etayo. Departamento de Álgebra
   Facultad de CC. Matemáticas. 28040 Madrid

   En esta preincipción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos preseleccionados. Si algún centro desea presentar más de seis alumnos, debe solicitarlo antes de la fecha mencionada anteriormente.
5. Los centros entregarán a los alumnos que envíen credenciales individuales en las que se haga constar que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento de Matemáticas, así como el curso en que están matriculados en el año académico 1999-2000.

Nota: Los dos primeros clasificados de cada nivel son invitados a participar en la VIII Olimpiada Rioplatense, que está previsto celebrar en diciembre de 2000 en Argentina (ello en el supuetso de que se consigan becas para pagar los billetes hasta Buenos Aires).

I Concurso de narraciones escolares «Y tú, ¿cómo lo ves?»

Con motivo del Año Mundial de las Matemáticas, Nivola libros y ediciones, S.L., convoca este concurso dirigido a jóvenes entre 12 y 18 años, cuyo objetivo es fomentar la lectura entre los jóvenes y estimular la capacidad de expresar por escrito ideas y pensamientos, además de impulsar la formación de una visión integradora de la ciencia en relación con su entorno cultural e histórico.

El concursante ha de expresar su punto de vista sobre la obra y la vida de un matemático, sobre su época histórica, su personalidad o cualquier otro aspecto relacionado con él o con sus coetáneos. Tiene que intentar transmitir cómo lo ha visto y qué opinión crítica le merece después de haber leído su biografía.

Más información sobre premios, plazos, fallo del concurso, etc. puede obtenerse en la página www.nivola.com o a través del teléfono 91 8045817.

International Conference on Technology in Mathematics Education (ICTME)

Se celebrará en julio del 5 al 7 de este año en la Universidad Americana del Líbano, en Beirut. La conferencia va dirigida a educadores, profesores e investigadores para el intercambio de experiencias sobre el uso de la tecnología tanto a nivel universitario como de secundaria.

El programa incluye sesiones plenarias impartidas por profesores invitados de conocido relieve en este campo. comunicaciones, y grupos de discusión, así como talleres sobre el uso de la tecnología.

Las fechas límites para la presentación de trabajos son:

- Abstracts (1 página): 30/3/2000.
- Comunicaciones completas (máximo 7 páginas): 5/7/2000.

Para mayor información se puede visitar la siguiente página Web:

http//www.lau.edu.lb/news-events/conferences/ictme/index.htm

Año 2000: Aragón

Entre otras hay previstas las siguientes actividades:

- Maratón de cuentos matemáticos: «Cuenta con las matemáticas». Organiza Seminario de Bibliotecas de IES en colaboración con la SAPM.
- Un articulo mensual sobre matemáticas en el *Heraldo de Aragón.* (Coord. F. Corbalán).

El concursante ha de expresar su punto de vista sobre la obra y la vida de un matemático, sobre su época histórica, su personalidad o cualquier otro aspecto relacionado con él o con sus coetáneos.

- En el *Heraldo Escolar* (suplemento de *Heraldo de Aragón*) se va a publicar la «Historia de las Matemáticas». (Coord. J. M. Sorando).
- Un ciclo de conferencias en el Centro Cultural de Ibercaja, están previstas conferencias de R. Pérez, J. Pastor, C. Alsina y J. Samsó. (Coord. F. Corbalán).
- Conferencia de Miguel de Guzmán. Organiza el Centro Pignatelli.
- Exposiciones «Geometría Mudéjar en Aragón» (Coord. F. Villarroya) y «Máquinas de calcular» (Coord. Á. Ramírez).
- Concurso de Caballeros Enig-matemáticos (coordinado por A.I. Ayala)
- Concurso de fotografía matemática que organiza el IES Andalán.
- Olimpiada Matemática para alumnos de 2.° de la ESO (Coord. J. Antolín).
- Curso «Matemáticas: Año 2000». Organizado por el ICE. Intervienen: J. Bastero, R. Pérez, M.T. Lozano, E. Cid y E. Lacasta. (Coord. E. Palacián).
- XVI Cursos sobre Aspectos Didácticos en la Enseñanza Secundaria. Matemáticas. Organizado por el ICE. (Coord. E. Palacián).

En Huesca:

- Concurso de fotografía matemática en la ciudad con la colaboración del ayuntamiento.
- Varias exposiciones.
- Una colaboración semanal en el Escolar del *Diario del Altoaragón.*
- Un miniespacio radiofónico semanal en radio Huesca.

En Barbastro:

- Ciclo de conferencias, organizadas por la UNED. Intervienen: M. Hormigón, J. Garay, R. Ardanuy, E. Palacián y J.M. Correas. (Coord. L.M. Subías).

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo»

NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, ICE de Universidad de Zaragoza, C./ Pedro Cerbuna 12, 50009 Zaragoza), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.

2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos en ningún caso serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.

3. Los gráficos, diagramas y figuras se enviarán en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. Así mismo, podrán incluirse fotografías. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.

4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de entre cinco y diez líneas, que no necesariamente tiene que coincidir con la Introducción al artículo. Debe ir escrito en hoja aparte. En ese mismo folio aparecerán los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede).

5. Si se usa procesador de texto, agradeceremos que además se envíe un disquette con el archivo de texto que contenga el artículo, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quiera incluir. La etiqueta del disquette debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda MS-Word (hasta versión 5.0) en Macintosh, o WordPerfect (hasta versión 5.1) en PC. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF.

6. En cualquier caso, tanto un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.

7. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.

8. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo.

9. La bibliografía se dispondrá al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:

   TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma*, n.° 20, 91-98.

   En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas*, Labor, Barcelona.

   En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2,* ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

10. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ...supone un gran avance (Hernández, 1992).

    Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ...según Rico (1993).

11. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como —en caso afirmativo— la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

BOLETÍN DE SUSCRIPCIÓN

Tarifa

	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	3.500 pts.	1.700 pts.
Centros	5.000 pts.	1.700 pts.
Europa	$40 USA	$14 USA
América y resto del mundo	$50 USA	$17 USA

Fotocopiar y enviar a: Revista SUMA. ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Deseo suscribirme a la revista SUMA:
Nombre y apellidos:. . . . .
Dirección:. . . . . Tno.: . . . .
Población: . . . . CP:. . . . .
Provincia/país . . . . CIF/NIF: . . . .

	Importe
☐ Suscripción a partir del n.º ______ (3 números)	
☐ N.^{os} sueltos: ________________________	
Total	

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto).

☐ Transferencia bancaria (Ibercaja: 2085-0168-50-03-000415-98).

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista Suma.

Firma y fecha:

☐ Giro postal dirigido a Revista Suma.

Nombre y apellidos: . . . .
Código Cuenta Cliente
Entidad |_|_|_|_| Oficina |_|_|_|_| DC |_|_| Cuenta |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|
Banco/Caja . . . .
Agencia n.º:. . . . . Dirección: . . . .
Población: . . . . Provincia: . . . .

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que periódicamente les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (Fecha y firma):

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

FESPM