SUMA

REVISTA SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

n.º 36

36

FEBRERO

2001

SUMA 36
febrero 2001

Índice

Directores
Emilio Palacián Gil
Julio Sancho Rocher

Administrador
José Javier Pola Gracia

Consejo de redacción
Jesús Antolín Sancho
Eva Cid Castro
Bienvenido Cuartero Ruiz
Faustino Navarro Cirugeda
Rosa Pérez García
Daniel Sierra Ruiz

Consejo Editorial
José Luis Aguiar Benítez
Javier Brihuega Nieto
M.ª Dolores Eraso Erro
Ricardo Luengo González
Luis Puig Espinosa

Edita
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Diseño portada
José Luis Cano
Diseño interior
Concha Relancio y M.ª José Lisa
Maquetación
E. Palacián, J. Sancho, D. Sierra

Revista SUMA
ICE Universidad de Zaragoza
C. Pedro Cerbuna,12
50009-ZARAGOZA

Tirada: 6.500 ejemplares
Depósito Legal: Gr. 752-1988
ISSN: 1130-488X
Impresión: INO Reproducciones. Zaragoza

3 **EDITORIAL**

ARTÍCULOS

5 La magia de las matemáticas.
Brian Bolt

17 Requeteoremas: reinventando Teoremas en Geometría con Cabri II.
José M. Pichel Cosme

23 Concepciones de los alumnos de secundaria sobre modelos probabilísticos en las secuencias de resultados aleatorios.
Luis Serrano, Carmen Batanero, J.J. Ortiz y *M.ª Jesús Cañizares*

33 En la búsqueda de lo importante en el aula de Matemáticas.
José M.ª Chamoso Sánchez y *William B. Rawson*

43 Matemáticas electorales: desproporcionalidad y alianzas.
Andrés Nortes Checa

51 Conjuntos convexos, funciones convexas y desigualdades clásicas.
Antonio Álvarez Álvarez

IDEAS Y RECURSOS

57 Experiencias didácticas de matemáticas con Internet.
Jesús Ángel Hernández Isla

67 ¿Paradoja matemática?
Lucía Puchalt Guillem

73 Estudio de funciones con Derive.
José de Francisco Estaire

77 Exposición de curvas y superficies: una experiencia extraacadémica universitaria
Juan Núñez Valdés, C. Aguilera, I. Fernández, M.J. Macías, A. Montaño, S. Pérez, I. Rivero, M.J. Romero, J.I. Sánchez y A.M. Serrato

MISCELÁNEA

85 Acerca del *Libro de arena* de Jorge Luis Borges
Miquel Albertí Palmer

ENTREVISTA

93 Ricardo Luengo: Secretario del Servicio de Publicaciones
Emilio Palacián

RINCONES

101 Taller de problemas: isoperimetros: Ficha didáctica en geometría. Métodos trigonométricos.
Grupo Construir las Matemáticas

107 Mates y medios: Radio y matemáticas.
Fernando Corbalán

109 Juegos: Sopa polinómica.
Grupo Alquerque

113 Recursos en Internet: Cabri e Internet
Antonio Pérez Sanz

117 Desde la Historia: Leyendo entre líneas la Historia
Carlos Usón Villalba y *Ángel Ramírez Martínez*

121 **RECENSIONES**

Científicos griegos (F. Vera). Matemática emocional (I.M. Gómez Chacón). Matemáticas y vida cotidiana (Revista *Ábaco*). Galois, revolución y matemáticas (F. Corbalán). Monográfico: Año Mundial de las Matemáticas (Revista *Cátedra Nova*). Sistemas métricos y monetarios (M. Vázquez Queipo). Paseos matemáticos por Logroño (C. Usón y J.M. de Blas). Las matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos (A. Martinón –editor–). En busca de Klingsor (J. Volpi).

133 **CRÓNICAS**

XI Olimpiada Matemática Nacional de la FESPM: Prueba por equipos. Proyecto «Talento matemático» (fin del primer bienio).

139 **CONVOCATORIAS**

X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (X JAEM). XIX Concurso de Resolución de Problemas. 53 Encuentro de la CIEAEM.

Las ilustraciones de este número corresponden al calendario del año 2001 realizado por la Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo».

Asesores

Pilar Acosta Sosa
Claudi Aguadé Bruix
Alberto Aizpún López
José Luis Álvarez García
Carmen Azcárate Giménez
Manuel Luis de Armas Cruz
Antonio Bermejo Fuentes
Javier Bergasa Liberal
María Pilar Cancio León
Mercedes Casals Colldecarrera
Abilio Corchete González
Juan Carlos Cortés López
Carlos Duque Gómez
Francisco L. Esteban Arias
Francisco Javier Fernández
José María Gairín Sallán
Juan Gallardo Calderón
José Vicente García Sestafe
Horacio Gutiérrez Fernández
Fernando Hernández Guarch
Eduardo Lacasta Zabalza
Andrés Marcos García
Ángel Marín Martínez
Félix Matute Cañas
Onofre Monzo del Olmo
José A. Mora Sánchez
María José Oliveira González
Tomás Ortega del Rincón
Pascual Pérez Cuenca
Rafael Pérez Gómez
Antonio Pérez Sanz
Ana Pola Gracia
Ismael Roldán Castro
Modesto Sierra Vázquez
Vicent Teruel Marti
Carlos Usón Villalba

SUMA
no se identifica necesariamente
con las opiniones vertidas
en las colaboraciones firmadas

SUMA 36
febrero 2001

Y después del Año Mundial de las Matemáticas, ¿qué?

EDITORIAL

FINALIZADO EL AÑO 2000, cumple hacer balance y, sobre todo, buscar perspectivas de futuro al gran esfuerzo hecho por la comunidad matemática española. Una primera apreciación, vistas las informaciones que nos llegan, es que en pocos países ha habido un volumen de actividad tan grande y que involucre a tantas personas e instituciones. Para la Federación, el AMM2000 no ha sido fruto de la improvisación, sino un paso más, importantísimo desde luego, de una trayectoria de trabajo y de crecimiento. Unidas nuestras fuerzas a las de otros sectores, la capacidad de movilización conjunta ha sido extraordinaria.

Uno de los objetivos fundamentales del AMM2000 fue presentar al gran público, al alumnado de todos los niveles, las facetas de las Matemáticas menos conocidas: su importancia para las personas y para la sociedad, su imbricación con otras ciencias, su belleza y su atractivo lúdico. Por desgracia, estos aspectos no suelen formar parte de la imagen escolar, rígida y aburrida, que la mayor parte de la población escolar y adulta guarda de su paso por las aulas.

Buena parte de las actividades del AMM2000 se han dirigido a cubrir este objetivo mediante exposiciones, conferencias, juegos, talleres, espectáculos, concursos de problemas, de narraciones o de fotografía, entre otros. Aunque la mayoría de nuestras Sociedades tenían ya experiencia en este tipo de actuaciones, el AMM2000 ha impulsado la creación de recursos nuevos y los ha dado a conocer al resto de la comunidad matemática y al gran público.

Los medios de comunicación de ámbito local han recogido estas actividades, llegando algunos a ceder espacios con fines divulgativos. También ha sido importante la respuesta en revistas generalistas o especializadas, y en menor medida en la gran prensa estatal, poco sensible a temas educativos. Sin embargo, la actuación de TVE ha sido decepcionante, a pesar de la proposición de apoyo presentada

por el Grupo Parlamentario Socialista ante el Comité de Control de RTVE y de las peticiones del CEAMM2000: la cobertura informativa ha sido casi inapreciable, e insuficiente la emisión y difusión de series científicas.

El papel de las instituciones en el desarrollo del AMM2000, respondiendo al llamamiento de las Cortes y de otros Parlamentos Autonómicos, ha sido muy desigual. El Ministerio de Educación, que debería de haber prestado un apoyo decisivo al CEAMM2000, del que formaba parte, se limitó a organizar o a financiar alguna actividad. No hubo dinero para el AMM2000, y sólo gracias al Consejo Superior de Investigaciones Científicas y a las aportaciones de algunas Sociedades, se contó con un mínimo apoyo burocrático. Por suerte, la mayor parte de las administraciones educativas autonómicas han sido más receptivas y han apoyado de modo decidido y eficaz la celebración del AMM2000 en sus territorios.

La falta de sensibilidad del MEC ante la educación matemática culmina con la gestación de un nuevo plan de estudios a espaldas del profesorado que ignora las recomendaciones de la Jornada Matemática en el Congreso de los Diputados, de la Real Academia de Ciencias o de los Seminarios de la Federación. Por tanto, en otro gran centro de atención del AMM2000, el reconocimiento de la importancia de la educación matemática, el balance no es positivo, aunque el camino no está cerrado: esperemos que los desarrollos curriculares que aborden las Comunidades Autónomas, equilibren las propuestas educativas, dotándolas de los aspectos más ricos, innovadores y actuales que el MEC ha ignorado y del suficiente número de horas para poderlos desarrollar debidamente.

Finalmente, el AMM2000 nos ha facilitado la confluencia con sectores de la comunidad matemática en los que sólo una minoría participaba antes en las Sociedades de Profesores. Hemos avanzado en la identificación de problemas comunes como la necesidad de mejorar el enfoque en las Licenciaturas de Matemáticas para adaptarlas a las nuevas necesidades, entre ellas la de formar al futuro profesorado de secundaria; la coordinación entre el Bachillerato y la Universidad y el necesario cambio de la imagen de las Matemáticas en la sociedad.

Metas y problemas comunes, hacen que coordinación entre el profesorado de todos los niveles de enseñanza sea cada vez más necesaria. El AMM2000 finaliza, pero nos deja cauces de relación estable, como son los convenios de cooperación suscritos entre Sociedades o la subcomisión española de ICMI, en la que confluimos la mayor parte de ella.

Una vez más, hay que agradecer el esfuerzo del profesorado en cada centro de enseñanza, en cada zona y en cada Sociedad en torno al 2000, que nos ha permitido disfrutar de las Matemáticas, compartirlas con la gente y seguir aprendiendo. Y animaros a seguir trabajando en esa misma línea, desde el convencimiento de que es una buena manera para mejorar nuestra educación matemática, objetivo prioritario de la FESPM.

María Jesús Luelmo

Presidenta de la FESPM

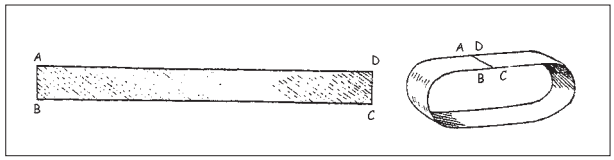
SUMA 36
febrero 2001, pp. 5-15

*La magia de las matemáticas**

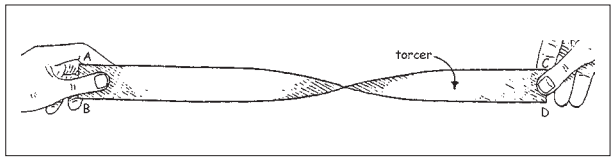
Brian Bolt

ARTÍCULOS

EXISTEN MUCHAS FORMAS de estimular el interés de los niños hacia las matemáticas. A una edad temprana éstos son, por naturaleza, curiosos y continuamente formulan la pregunta ¿por qué? Nuestra enseñanza a menudo mata su interés y su pregunta se transforma en ¿para qué tenemos que hacer esto? Durante el tiempo que voy a estar con vosotros compartiremos algunas ideas que estimulan el pensamiento matemático y que, sin duda, crean interés. Alguno de vosotros puede que ya las conozca, pero espero que la mayoría de estas ideas sean nuevas y las podáis añadir a vuestro repertorio.



¿Cuál fue la última vez que contásteis a vuestros alumnos las propiedades mágicas de una cinta de Möbius? Cuando una tira de papel larga y delgada se une por sus extremos como una correa, ésta tiene claramente dos aristas y dos caras distintas. Si usamos unas tijeras para cortarla longitudinalmente, se formarán dos cintas como la original. Ahora observemos la cinta que se forma cuando torcemos 180° un extremo de la tira de papel antes de unir sus extremos.

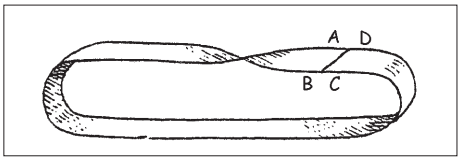


Curiosamente, esta nueva cinta tiene una sola arista. Si una mosca decidiera caminar por la arista de la tira de

* Conferencia leída con motivo del proyecto TIEM98 patrocinado por el Centr de Recerca Matemàtica del Institut d'Estudis Catalans.

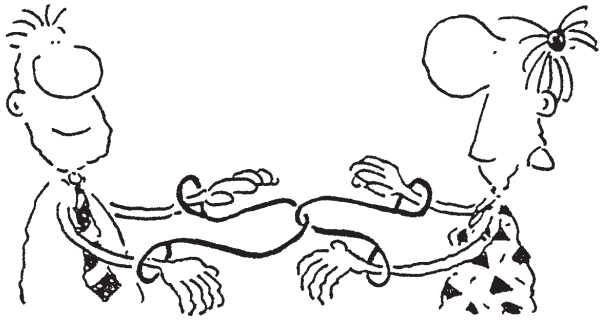
Traducción: Nùria Planas

papel, llegaría al punto de partida después de darle la vuelta dos veces siguiendo la única arista. Si empiezo a colorear la superficie y espero encontrar una parte interior y una parte exterior, me llevaré una gran sorpresa puesto que la cinta tiene una sola cara continua. ¿Qué sucederá si la corto longitudinalmente por la mitad?



¿Os ha sorprendido? ¡Hemos obtenido una única cinta dos veces más larga que la original! Ahora vayamos a por otra sorpresa. Esta vez cortaremos la cinta de Möbius longitudinalmente a un tercio de su arista, por lo que sólo volveremos al punto de partida después de dos circuitos. ¡Magia! Tenemos dos eslabones de una cadena, uno de los cuales es dos veces más largo que el otro. ¿Habríamos sido capaces de predecir el resultado? Bien, el lazo más largo de la cinta está formado por las dos aristas de la cinta de Möbius original y el lazo corto es la cinta Möbius mucho más estrecha.

Otro divertido truco de matemáticos consiste en atar juntas a dos personas mediante dos trozos de cuerda (como puede verse en la figura adjunta) y proponerles que traten de separarse sin desanudar ninguno de los nudos.



Es muy posible que los participantes acaben hechos un verdadero lío, pero con suerte podré demostraros lo fácil que resulta separarlos. Supongamos que las dos personas que aparecen en la figura son Jordi y Nuria. Nuria debe tomar su cuerda por la mitad y pasarla bajo el lazo de cuerda que rodea la muñeca derecha de Jordi, por la parte inferior de la muñeca y en la dirección que va del codo a la mano. A continuación, debe pasar un lazo de la cuerda sobre la mano de Jordi hacia la parte superior de la muñeca. ¡Ahora debe ser capaz de irse, separada por fin de Jordi! Sus propias muñecas estarán aún atadas pero ya no estará unida al otro. Nótese sin embargo, que si Nuria hubiese intentado pasar su cuerda a través del lazo que rodea la muñeca izquierda de Jordi, terminaría con su cuerda más enredada con la de éste que antes.

De hecho, hacer matemáticas está relacionado con la formulación de preguntas.

621
– 126
495
+ 594
1089

Experimentos como los anteriores deberían plantear una pregunta importante: «¿Qué sucede si…?». De hecho, hacer matemáticas está relacionado con la formulación de preguntas.

Ahora vayamos a por un truco numérico que supongo que todos conocéis, pero que siempre es fascinante para alguien que lo ve por primera vez. Tomemos cualquier número de tres dígitos, *abc*, y luego formemos otro número de tres dígitos cambiando el orden de los dígitos del primer número, *cba*. Restemos el número menor del mayor para encontrar la diferencia, que es otro número de tres dígitos, *pqr*. Sumemos *pqr* y *rpq* y el resultado es siempre 1089. Bueno, no siempre, ya que si al principio $a = c$, $pqr = 000$ y el truco no funciona.

¿Por qué funciona en la mayoría de los casos? ¡Probadlo con otro ejemplo! La solución puede explicarse fácilmente a través del álgebra pero el siguiente razonamiento nos proporciona una nueva visión:

$$621 - 126 = 601 - 106 =$$

$$= (6 \times 99 + 6 + 1) - (1 \times 99) + 1 + 6 =$$

$$5 \times 99 = 495$$

En este paso el dígito de las decenas es siempre 9 y los dos dígitos exteriores suman 9, por tanto, el número que se forme intercambiando la posición de los dígitos tiene la misma propiedad y es también un múltiplo de 99. Si pensamos veremos que la suma final siempre será

$$11 \times 99 = 1089.$$

Intentar extender este patrón a números de cuatro dígitos no es tan fácil ya que existen distintos resultados posibles, siendo, curiosamente, 10890 uno de ellos.

Si tuviera que dar una definición de Matemáticas diría algo parecido a esto:

Las Matemáticas son el reconocimiento, el análisis y el uso de patrones.

Quizás ya conocéis mis «Cartas de Lectura Mental», pero dejadme mostraros cómo funcionan. Pensad en un número del 1 al 31. Las cinco cartas que tengo aquí contienen estos números, pero cada carta sólo contiene la mitad de ellos. Cuando os muestre una carta tendréis que decir «SÍ» si contiene vuestro número y «NO» si no lo contiene. Seré capaz de deciros inmediatamente el número que habéis pensado. ¿Cómo funciona? Aquí tenéis las cartas:

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

2	3	6	7
9	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

Imaginad que tenéis una balanza pero sólo 5 pesas de: 1, 2, 4, 8 y 16 kg. Todos los pesos entre 1 kg y 31 kg pueden pesarse gracias a una única combinación de estas pesas. Tomemos 29 kg como ejemplo:

29 kg = 16 kg + 8 kg + 4 kg + 1 kg

ninguna otra combinación de pesas dará 29 kg.

Cada una de mis cinco cartas corresponde a una pesa, y los números que hay en ellas me dicen cuándo debo usar una pesa para una cantidad concreta. Por ejemplo, para 29 kg encontraréis que el 29 está en la carta que empieza por 16, en la que empieza por 8, en la que empieza por 4, en la que empieza por 1, pero no en la que empieza por 2.

```
  856413
  374938
  143586
  530227
+ 469772
---------
 2374936
```

Cuando vosotros decís «SÍ» a una carta, yo añado ese peso. Cuando decís «NO», ignoro ese peso. Para decidir qué números deben ir en cada carta sólo se debe hacer una tabla como la siguiente… y observad cuan interesante es el patrón de marcas que os ayudará a completarla rápidamente:

	16	**8**	**4**	**2**	**1**
1					℘
2				℘	
3				℘	℘
4			℘		
5			℘		℘
6			℘	℘	
7			℘	℘	℘
8		℘			
9		℘			℘
10		℘		℘	
11		℘		℘	℘
12		℘	℘		
13		℘	℘		℘
14		℘	℘	℘	
15		℘	℘	℘	℘
16	℘				
17	℘				℘

A continuación vamos a ver un truco de sumas. Tomemos dos números de 6 cifras. Parece justo que yo también añada uno. Ahora quiero que me deis otro número de 6 cifras y yo también añadiré uno e inmediatamente os daré el resultado de la suma de los cinco números. ¿Quiere alguien comprobar mi suma? ¿Cómo he podido hacer un cálculo tan rápido?

Ahora pensad en lo que conocía cuando escribí mi número. Había escrito dos de vuestros números. Escribí el mío fijándome en uno de vuestros números y relacionándolo con él. Si os digo que el mío está relacionado con vuestro primer número, ¿podéis ver la conexión? Bien, para formar mi número le resté a 9 cada uno de los dígitos de vuestro primer número; por lo tanto, 856413 + 143586 = 999999 = 1000000 – 1. De igual modo, escribí mi segundo número restando 530227 de 999999, por lo que 530227 + 469772 = 999999 = 1000000 – 1.

Con todo esto, cuatro de los cinco números que deben sumarse dan 2000000 – 2, por lo tanto la respuesta es 2 millones más el número no utilizado menos 2. Las parejas de números que se añaden para formar una secuencia de nueves se llaman *complementos a nueve*, y pueden usarse ingeniosamente para realizar una resta.

Supongamos que quiero restar 38769 de 72134. Sustituyo el segundo número por su complemento a nueve y hago una suma. Luego tacho el 1 que está al principio de la respuesta y lo añado a la cifra de las unidades. El número resultante es la respuesta que se requería. Para entender

el porqué, debéis ver que lo que he hecho es equivalente a 72134 + (99999–38769) – 100000 + 1. Este método funciona para cualquier resta y se conoce como la *resta a partir de la realización de una suma complementaria*.

```
  72134        72134
– 38769 →    + 61230
             (1)33364
                + 1
              33365
```

Ahora voy a contaros otro truco numérico. ¿Me dará alguien un número de seis cifras?

Voy a sumarlos por parejas pero sólo anotaré la cifra de las unidades, y lo haré línea a línea hasta obtener un solo dígito. Pero antes de empezar voy a predecir el número que va a quedar al final. A partir del número que me habéis dado espero terminar en el 9. Probémoslo de nuevo con otro número de seis cifras. ¿Alguien quiere darme un número? ¿Cómo lo hago?

```
5   7   4   2   8   9
  2   1   6   0   7
    3   7   6   7
      0   3   3
        3   6
          9
```

Bien, los dos números del centro no contribuyen para nada en la obtención del número final, por tanto, podemos ignorarlos. Si los dos números siguientes, a derecha o izquierda respectivamente, son ambos impares o pares también podemos ignorarlos y la respuesta final es la suma de los dos números exteriores. No obstante, si los dos dígitos son uno par y el otro impar, entonces debemos sumarle 5 a los dígitos exteriores para obtener la respuesta final.

```
a     b     c     d     e     f
  a+b   b+c   c+d   d+e   e+f
    …     …     …     …
      …     …     …
        …     …
      a+f+5(b+e)+10(c+d)
```

Esto queda claro cuando analizamos el truco algebraicamente y aparece el modelo del triángulo de Pascal mostrando cómo, de hecho, los dígitos del centro se multiplican por 10 y los que están a su lado por 5.

Los dos patrones numéricos bidimensionales siguientes pueden analizarse de muchas maneras. He tapado algunos números y la tarea consiste en decidir cuáles son.

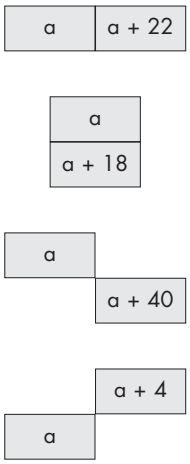
92	15	37	59	81	4	26	48	70
11	33	55	77	99	22	44	66	88
29	51	73	95	18	40	62	84	7
47	69	91	•	36	58	80	3	25
65	87	10	32	54	76	98	21	43
83	6	28	50	72	94	17	39	61
2	24	46	68	90	13	•	57	79
20	42	64	86	9	31	53	75	97
38	60	82	5	27	49	71	93	16
56	•	1	23	45	67	89	12	34
74	96	19	41	63	85	8	30	52

26	59	15	48	4	37	70
5	38	71	27	60	16	49
61	17	50	6	•	72	28
40	73	29	62	18	51	7
19	52	8	41	74	30	63
75	31	64	20	53	9	42
54	10	43	76	32	65	21
33	66	22	55	•	44	77
12	45	1	34	67	23	56
68	24	57	13	46	2	35
47	•	36	69	25	58	14

Esta idea la recogí en Barcelona en noviembre de 1995 cuando estaba dando una conferencia en el Museo de la Ciencia.

Esta idea la recogí en Barcelona en noviembre de 1995 cuando estaba dando una conferencia en el Museo de la Ciencia. Siempre que la he presentado ante una audiencia, parece que encuentran los números que faltan de forma distinta. Tomemos, por ejemplo, el número que está en en la cuarta fila y la cuarta columna. ¿Descubrísteis que se trata del 14? Si observáis las diferencias entre los números, restando de izquierda a derecha, veréis que siempre es 22, pero luego, cualquier número que sobrepase el 99 debe reducirse, restándole 99, como si fuera una esfera de reloj con los números del 1 hasta el 99.

Si observamos los números de arriba a abajo en las columnas veremos que se incrementan en 18, mientras que en las diagonales, de izquierda a derecha, se incrementan en 40. No obstante, el patrón más fácil se encuentra en las diagonales superiores de izquierda a derecha, donde los números se incrementan en 4. Así fue como contruí el patrón y también la forma más rápida de encontrar los números que están ocultos.



Vosotros mismos podéis construir un patrón similar, empezando con el número 1 donde queráis y recorriendo la diagonal NE. Cuando lleguéis al extremo se considerará que es continua en el extremo opuesto. El segundo patrón, que incluye los números del 1 al 77, se contruyó de forma pareciada, pero aquí saltando cada vez dos cuadros antes de sumar 8.

Voy a presentaros un juego muy simple. En primer lugar querría que dos de vosotros salierais aquí delante a jugar. ¡Os prometo que no será difícil! El juego se llama, *tres cartas total 18*.

En mi mano tengo las cartas 2, 3, 4, 5,… hasta el 10 de diamantes. No se necesitan las cartas para jugar, se puede simplemente escribir los números del 2 al 10 en un trozo de papel. Dos jugadores tomarán por turnos una de las cartas. La primera persona que tenga tres cartas que sumen 18 es la ganadora. Coger un 10 o un 8 no es una buena jugada, puesto que se deben tener tres cartas que sumen 18, aunque es posible haber cogido más de tres cartas antes de tener tres cuya suma sea 18.

9	**2**	**7**
4	**6**	**8**
5	**10**	**3**

Anotaré las cartas que escogéis para que podáis ver como funciona el juego. Cuando lo realizo con audiencias británicas, los hombres tienden a escoger los números más altos para empezar, mientras que las mujeres empiezan con los números más bajos. Pero, ¿cuáles son los mejores números, si es que los hay, para empezar el juego? ¿Cómo lo podemos descubrir?

Después de haber comprendido el juego estoy seguro de que muchos de vosotros querréis probarlo. Me gustaría hacerlo pero no tenemos demasiado tiempo y quiero compartir muchas más ideas con vosotros. Para analizar este juego parece claro que, en primer lugar, debéis buscar todas las combinaciones de tres cartas que sumen 18. Los niños encuentran esto bastante difícil, ya que no tienen ninguna estrategia para saber cuándo las han encontrado todas.

Mi estrategia es la siguiente: empiezo con el 10, el número más alto y busco cuál es el número más alto que le puedo añadir para sumar 18. Dado que el número más pequeño es 2, 6 debe ser el número más alto. Después reduzco 6 a 5 e incremento 2 en 3, y sigo teniendo un total de 18. No puedo repetir este proceso, luego escojo el 9 y le sumo el número más alto posible, que es 7. Luego procedo como antes, es decir, le resto 1 al segundo número y le sumo 1 al tercero, hasta que no puedo más. Después hago lo mismo con el 8.

10 + 6 + 2

10 + 5 + 3

9 + 7 + 2

9 + 6 + 3

9 + 5 + 4

8 + 7 + 3

8 + 6 + 4

7 + 6 + 5

De este modo encuentro que sólo hay 8 posibles combinaciones ganadoras. Si las analizamos con más detalle veremos que puede ser útil observar con qué frecuencia aparecen los números del 2 al 10 en una combinación ganadora. Los números 2 y 10 y también 4 y 8 sólo aparecen en dos de las ocho combinaciones ganadoras, pero el 6 aparece en 4, es decir, en la mitad de combinaciones ganadoras. Por tanto, el jugador que escoja el número 6 controla automáticamente la mitad de las posibilidades ganadoras.

Si esto no os resulta suficiente para ganar, fijaros en el cuadrado mágico de la izquierda.

Estoy seguro de que ya os habíais encontrado con los cuadrados mágicos anteriormente. Éste contiene los

nueve números del 2 al 10 y la suma de los tres números en cada fila, cada columna y cada diagonal es 18. Por lo tanto, las combinaciones ganadoras del juego de cartas corresponden a las filas, las columnas y las diagonales del cuadrado. Cada vez que escogéis un número estáis utilizando una de las casillas del cuadrado y para ganar necesitáis tener tres en raya. Por lo tanto, lo que estáis haciendo es jugar al *tres en raya*.

Si sabéis cómo fabricar cuadrados mágicos 3 × 3 podéis hacer tantos conjuntos de cartas como queráis para jugar con vuestros alumnos. Si deseáis, podéis poner fracciones o números negativos y hacer que el cuadrado, y por consiguiente el juego, sean tan difíciles como queráis.

Veamos lo sencillo que es construir un cuadrado mágico 3 × 3. El secreto es saber que el total mágico debe ser tres veces el número que pongamos en el centro. Supongamos que escribimos 8 en el centro, entonces el total mágico debe ser 24. A continuación escojo otros dos números y los sitúo en las dos esquinas superiores. Supongamos que he elegido el 2 y el 9, entonces el resto del cuadrado debe llenarse teniendo en cuenta que todas las líneas deben sumar 24. Por tanto, ahora el juego se jugaría usando los números 1, 2, 3, 7, 8, 9, 13, 14 y 15 y el objetivo sería conseguir tres cartas que sumaran 24.

2		**9**
	8	

T = 24 →

2	**13**	**9**
15	**8**	**1**
7	**3**	**14**

Una propiedad interesante que comparten todos los cuadrados mágicos 3 x 3 es el hecho de que la suma de los cuadrados de números que se hallan en las columnas exteriores y los de las filas exteriores da el mismo resultado. En el caso anterior, por ejemplo:

$$2^2 + 13^2 + 9^2 = 4 + 169 + 81 = 254$$

$$7^2 + 3^2 + 14^2 = 49 + 9 + 196 = 254$$

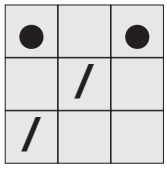
y

$$2^2 + 15^2 + 7^2 = 4 + 225 + 49 = 278$$

$$9^2 + 1^2 + 14^2 = 81 + 1 + 196 = 278$$

No puedo acabar esta parte sin mostraros una prueba del hecho de que el total mágico de un cuadrado 3 × 3 es tres veces el número central. Si los números del cuadrado son *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h* y *i*, y el total mágico es *T*.

a	**b**	**c**
d	**e**	**f**
g	**h**	**i**



Reconocer patrones semejantes en situaciones aparentemente distintas es una actividad crucial en matemáticas.

Entonces, tomamos las sumas de la fila central, y las dos diagonales:

$$a + e + i = d + e + f = g + e + c = T$$

y hacemos la suma:

$$(a + d + g) + 3e + (i + f + c) = 3T$$

$$T + 3e + T = 3T,$$

por lo tanto, $3e = T$.

Voy a mostraros ahora otros juegos, que a primera vista parecen ser bastante distintos, pero que si los analizamos en detalle veremos que tienen exactamente la misma estructura subyacente. Para un matemático son equivalentes al tres en raya, siguen el mismo modelo, por lo que se denominan *isomorfos*. Reconocer patrones semejantes en situaciones aparentemente distintas es una actividad crucial en matemáticas.

Diseñé el primero de estos juegos para un Taller de Matemáticas que se celebró durante unas Navidades. Dos jugadores tenían 9 cartas con palabras para escoger:

RUM	SOCK	BABY
HOLLY	XMAS	CRIB
CANDLE	TURKEYS	HOME

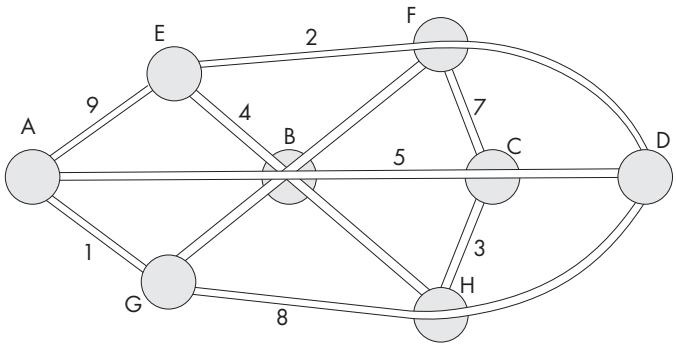
Por turnos debían escoger cartas, de una en una, con el objetivo de tener tres palabras con una letra en común. Por ejemplo, RUM, XMAS y HOME todas tienen una M. Este juego exige una mayor concentración que el juego numérico basado en un cuadrado mágico, aunque escogí las palabras minuciosamente para que formaran una cuadro de 3 × 3, en la que las palabras de cada fila, columna y diagonal tuvieran, tal y como muestro, una letra en común. Es importante que ninguna de las letras comunes aparezca en otras palabras, o que tres palabras que no estén en una misma fila puedan tener una letra en común.

S E

M	**XMAS**	**RUM**	**HOME**
Y	**BABY**	**TURKEYS**	**HOLLY**
C	**CANDLE**	**CRIB**	**SOCKS**
	A	R	O

Este juego es, como el anterior, isomorfo al tres en raya. Si se tienen las palabras adecuadas, descubrir las ocho combinaciones de grupos de tres palabras con una letra común y luego ver qué palabras son más importantes es un ejercicio interesante. Estoy convencido de que podréis hacer vuestro propio juego con palabras en español.

El siguiente juego tiene una apariencia muy distinta. El mapa adjunto pretende representar ocho ciudades que están entrelazadas por nueve autopistas.



Dos jugadores sobre el mismo mapa y, por turnos, usan colores para quedarse con una de las autopistas. El primer jugador que tiene tres autopistas que conducen a una misma ciudad es el que gana. Matemáticamente puede considerarse como dual de los juegos anteriores, sólo que aquí buscamos tres líneas que lleven a un punto en lugar de tres puntos de una línea. Debemos observar que hay tres autopistas que llegan a cada una de las ciudades, que corresponderían a tres números o a tres palabras en una línea dentro de un cuadro 3 × 3. La autopista central que cruza cuatro de las ciudades *A*, *B*, *C* y *D*, desempeña el mismo papel que el número central de un cuadrado 3 × 3 ya que utiliza en una sola jugada la mitad de las ocho ciudades. Por otro lado, una autopista que une sólo dos ciudades corresponde a los números que están en el centro de los lados de un cuadrado 3 × 3, ya que sólo están presentes en dos líneas.

Los cuadrados mágicos me fascinan y, probablemente, han fascinado a otros muchos antes que a mí. El primer cuadrado mágico que se conoce es un cuadrado mágico 3 x 3 que contenía los números del 1 al 9 y que se atribuye al emperador chino Yu, que reinó alrededor del año 2200 antes de Cristo. En 1514 Durero hizo un grabado, *La Melancolía*, que contiene un cuadrado mágico 4 × 4 con los números del 1 al 16 distribuidos de tal modo que el año de su realización aparece en el centro de la fila inferior.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Los cuadrados mágicos me fascinan y, probablemente, han fascinado a otros muchos antes que a mí.

En total existen 880 cuadrados mágicos 4 × 4 distintos que contienen los números del 1 al 16 y que fueron publicados por primera vez por el francés Frénicle en 1693. ¿Cómo logró encontrarlos todos? ¡A mí me costó tanto encontrar el primero!

En primer lugar, podemos observar que el total mágico debe ser 34 ya que los números del 1 al 16 formarán cuatro filas que suman el mismo total. Por lo tanto:

$$T = (1 + 2 + \ldots + 16)/4 = 34$$

Pero lo que me fascina es observar que conjuntos de cuatro números de los cuadrados que no están ni en las filas, ni en las columnas ni en las diagonales también suman 34. Tomemos el cuadrado de Durero que acabo de reproducir y fijémonos en las posiciones de los siguientes conjuntos:

{16, 13, 4, 1} {16, 3, 5, 10}

{3, 8, 14, 9} {16, 2, 7, 9}

{5, 9, 8, 12} {5, 3, 14, 12}

¿Existe algún conjunto simétrico de cuatro números que no sume 34? La cantidad de conjuntos que suman 34 es muy grande.

Una vez que hemos encontrado una solución, ¿cómo podemos encontrar otra a partir de ella? Si cambiamos el orden de las filas, se mantiene su total, pero el total de las diagonales normalmente cambia. Lo mismo ocurre con las columnas. No obstante, hay algunas permutaciones de filas o columnas que mantienen el total de las diagonales y nos dan, por lo tanto, una nueva solución. Las tres soluciones siguientes se han encontrado intercambiando pares de filas o de columnas, o ambas, partiendo del cuadrado mágico de Durero.

5	10	11	8
16	3	2	13
4	15	14	1
9	6	7	12

3	16	13	2
10	5	8	11
6	9	12	17
15	4	1	14

10	5	8	11
3	16	13	2
15	4	1	14
6	9	12	7

Este es un comienzo alentador, pero podemos hacer algo mejor con otra de las 880 posibilidades que H.E. Dudeney describió como «Diabólicas», puesto que eran incluso mucho más mágicas que las de Durero. Imaginemos el cuadrado mágico que muestro a continuación como si estuviera en un rodillo, de modo que la fila superior desapareciera y volviera a aparecer por la parte inferior. Este proceso puede repetirse tantas veces como sea necesario hasta que la fila superior haya estado en cada una de las cuatro posiciones. Del mismo modo, el cuadrado puede enrollarse lateralmente y las columnas desaparecer por la derecha y volver a aparecer por la izquierda. Estos movimientos se pueden combinar para conseguir que el número 1 esté en cualquiera de las 16 posiciones del cuadrado y cada movimiento retiene la propiedad mágica total. A continuación muestro algunas de las posibilidades:

1	14	2	12
15	4	9	6
10	5	16	3
8	11	2	13

15	4	9	6
10	5	16	3
8	11	2	13
1	14	7	12

4	9	6	15
5	16	3	10
11	2	13	8
14	7	12	1

5	16	3	10
11	2	13	8
14	7	12	1
4	9	6	15

Otro tipo de transformación que siempre convierte un cuadrado mágico en otro también mágico es la que en este caso se representa mediante $n \rightarrow 17 - n$

16	3	10	5
2	13	8	11
7	12	1	14
9	6	15	4

Aplicado al cuadrado de Durero se genera el mismo cuadrado, mientras que a partir del cuadrado diabólico se genera otro nuevo. No obstante, el problema sigue siendo: ¿cómo puedo encontrar un cuadrado para empezar con el que pueda generar varias transformaciones?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Mi método consiste en colocar los números del 1 al 16 en orden en un cuadro 4×4 y después cambiar los números centrales de las filas o columnas de los lados por los diametralmente opuestos. Éste es, esencialmente, el cuadrado mágico de Durero, y quizás fue así como lo descubrió. Al intentar buscar otro punto de partida, me dí cuenta de que podía poner los números del 1 al 16 en el cuadrado llenando primero dos columnas y luego las dos restantes; después se cambian los números que están entre los vértices por sus diametralmente opuestos.

1	**9**	**2**	10
3	4	11	**12**
5	6	13	**14**
7	**8**	**15**	16

1	15	8	10
14	4	11	5
12	6	13	3
7	9	2	16

1	**9**	**2**	10
3	11	4	**12**
5	13	6	**4**
7	**15**	**8**	16

1	8	15	10
14	11	4	5
12	13	6	3
7	2	9	16

1	**9**	**10**	2
3	11	12	**4**
5	13	14	**6**
7	**15**	**16**	6

1	16	15	2
6	11	12	5
4	13	14	3
7	10	9	8

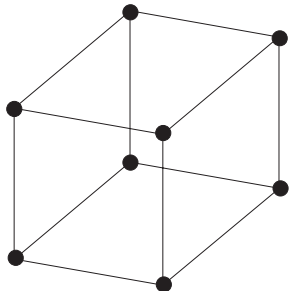
…un cuadrado mágico de 4 × 4 que está en la fachada de la Pasión del Templo de la Sagrada Familia de Gaudí.

Antes de finalizar este tema, me siento en la obligación de mostraros un cuadrado mágico de 4×4 que está en la fachada de la Pasión del Templo de la Sagrada Familia de Gaudí. En él, los números 10 y 14 aparecen dos veces mientras que los números 12 y 16 no están. Tiene un total mágico de 33. En este momento no tengo ninguna idea acerca del significado de la disposición de los números en el cuadrado. Sólo sé que es mágica. Por tanto, le estaré muy agradecido a quien pueda darme alguna información.

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

Otro de los temas que uso los sábados por la mañana en unas clases para niños de 13 años, cuyo objetivo es mejorar su competencia en matemáticas, está basado en el análisis y la resolución de una gran variedad de configuraciones mágicas. Para ilustrar las ideas en que se basa el curso, quisiera contaros un problema concreto, las estrategias para resolverlo y algunas de las nuevas ideas que descubrí.

Se deben poner los números del 1 al 8 en los vértices de un cubo de tal modo que la suma de los cuatro números que quedan en cada una de las seis caras dé el mismo resultado.



Es evidente que se podría buscar una solución usando inteligentemente estrategias de ensayo y error, pero es posible idear otras estrategias.

Supongamos que la suma de los cuatro vértices de cada cara sea T, entonces:

$$6T = 3(1 + 2 + 3 + \ldots + 8) = 3 \times 36$$

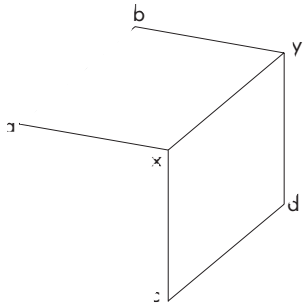
puesto que hay seis caras. Esto permite obtener el valor de $T = 18$ que es una información relevante.

Si se toman los números que quedan en dos caras contiguas. Como

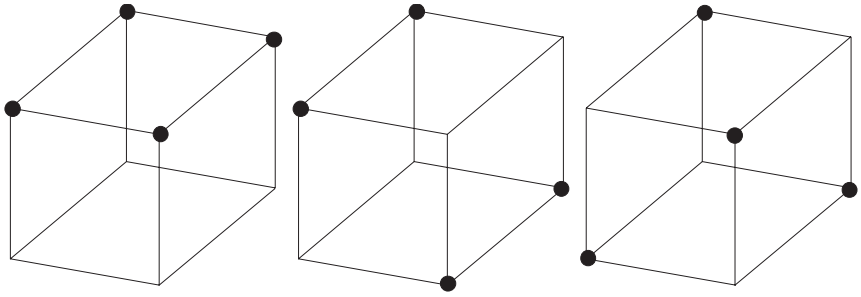
$$a + b + x + y = x + y + c + d,$$

se tiene que: $a + b = c + d$.

Podemos decir que los pares de números que están en aristas opuestas del cubo suman siempre lo mismo.



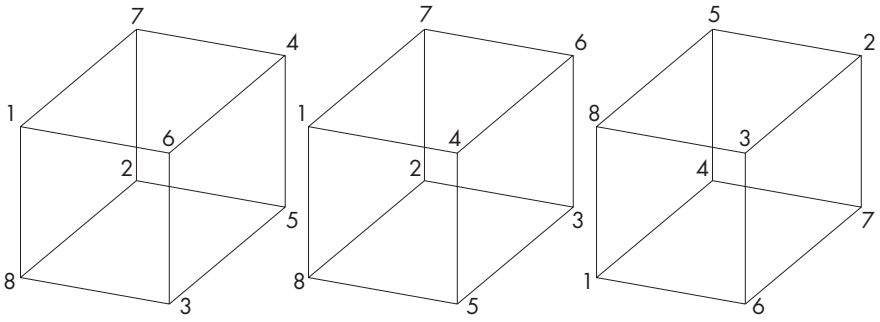
La siguiente parte de mi estrategia, que habitualmente es muy potente para solucionar problemas de este tipo, consite en considerar la posible distribución de los números primos. En primer lugar, sabemos que el total de la cara es par y necesitamos considerar sólo cómo colocar cuatro números impares en los vértices para conseguir este total. Sólo hay tres formas de hacerlo, y a partir de nuestro análisis previo, no tardaremos mucho en encontrar todas las soluciones.



La primera distribución posible con todos los números impares en una cara se debe rechazar ya que

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

y no 18. No obstante, en la segunda distribución posible, en la que los números pares se enparejan en aristas opuestas, es fácil ver que las parejas han de ser (1, 7) y (3, 5) en cierto orden ya que es la única manera de que su suma fuera igual ($1 + 7 = 3 + 5 = 8$), que es una condición necesaria. Esto hace que deban colocarse los cuatro números pares en el otro par de aristas paralelas opuestas, ordenados de tal modo que su suma sea 10. En la siguiente figura, a la izquierda, están las dos posibles soluciones:

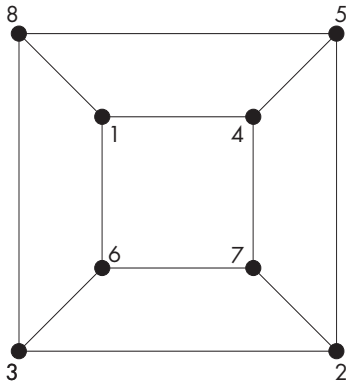


La tercera posible distribución de los números impares, en los vértices de un tetraedro regular, conduce a una tercera solución (cubo de la derecha en la figura anterior).

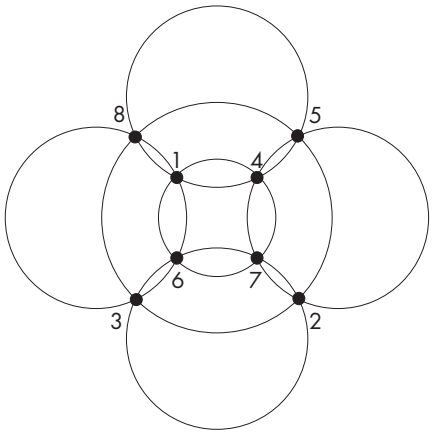
Una estrategia para generar nuevas soluciones a partir de las existentes en una configuración mágica de este tipo consiste en usar una transformación del tipo $n \to N - n$ en la que N sea el número siguiente al mayor de los números utilizados. En este caso $n \to 9 - n$ es la transformación que se necesita, aunque, en este caso, no genera ninguna solución nueva.

Hoy mientras estaba sentado en mi despacho en el CRM pensando en esta conferencia y mirando algunos de los modelos en 3D que había construido para mis conferencias sobre geometría, tuve varias ideas con las que pude visualizar una gran gama de problemas a partir del cubo, y me gustaría contároslas.

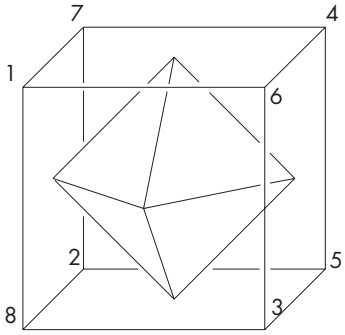
Imaginemos que estamos mirando un cubo a través de una de sus caras y proyectamos lo que vemos en un plano. Esto produce lo que se denomina un *diagrama de Schlegel*, una red en 2D que topológicamente tiene las mismas características que el cubo. Si mantenemos los mismos números que teníamos en los vértices del cubo en los correspondientes nudos de la red tendremos una figura en la que los números que están en la frontera de cada región tendrán la misma suma (18).

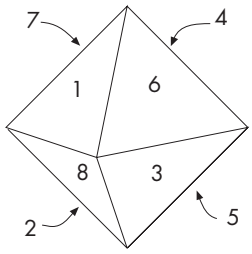


Pero al seguir reflexionando acerca de esta red se me ocurrió pensar que podría reemplazar las líneas rectas por seis círculos con la condición de que los cuatro números que quedan en cada círculo sumaran lo mismo. Existen muchas soluciones a este problema ya que en mi proyección inicial podía haber tomado cualquiera de las caras del cubo como punto de partida.

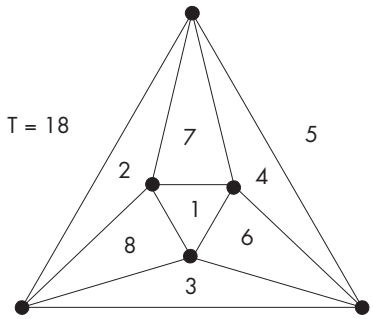


Siguiendo en esa línea, mi siguiente modelo fue un octaedro regular situado dentro de un cubo. Imaginemos que se ha formado al unir los puntos medios de las caras adyacentes del cubo. Ahora traslademos los números desde los vértices del cubo hasta las caras del octaedro. Esto nos da el modelo dual del modelo del cubo, pero ahora el problema consiste en colocar los números del 1 al 8 en las caras del octaedro para que la suma de los números de las cuatro caras alrededor de cada vértice sea la misma. El siguiente dibujo muestra una de las soluciones:





Mi siguiente movimiento fue considerar el diagrama de Schlegel del octaedro, que me dio la figura de más abajo. La distribución de los números del 1 al 8 en las regiones de esta nueva red es tal que los cuatro números que hay alrededor de cada vértice dan la misma suma. Pero esto implica tener un número (el 5 en el ejemplo) en la región exterior del triángulo. La pregunta que me formulé fue ¿cómo puedo encontrar una solución usando sólo los números del 1 al 7 en las regiones interiores para que la suma de los números en las regiones que se encuentren en un nudo de la red sea constante?



Si los números en las siete regiones son *a*, *b*, *c*, …, *g*, entonces queremos que:

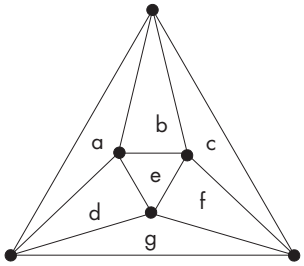
$$a + b + e + d = a + d + g$$

por lo tanto, $b + e = g$, y de igual modo,

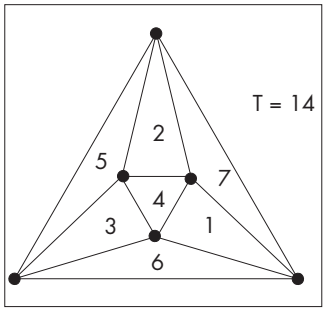
$$d + e = c$$

$$f + e = a$$

Con esta información encontramos una solución única en la que $T = 14$.



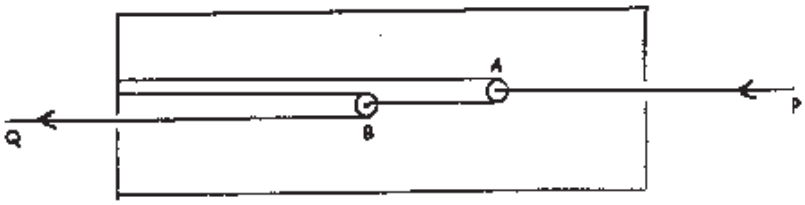
Vemos, pues, que a partir de estas ideas nace un nuevo puzzle numérico.



Para finalizar, veamos cómo funciona esta caja de trucos que llamo *La Fábrica de Cuerda de mi Mago*. La idea es que aparentemente fabrica cuatro veces más cuerda de la que engulle. La cuerda entra dentro de la caja por un extremo y sale por el otro lado cuatro veces más rápidamente.

Podría haber todo tipo de mecanismos dentro, como un tambor y un engranaje, pero no hay nada de eso ya que podría comprobarse que la caja es muy ligera. Hoy hice esta caja después de visitar a la secretaria del Centre de Recerca Matemàtica que me facilitó, en unos segundos, todo lo que necesitaba, papel, clips, cuerda, celo, tijeras y, por supuesto, una caja.

¿Cómo funciona? Si levanto la tapa podréis ver que el mecanismo básico es un sencillo sistema de poleas, para cuya fabricación usé simplemente un par de clips. Para ver por qué la razón es 4 en este caso, imaginad una cuerda *P* que se mueve 1 cm dentro de la caja. Para que esto suceda, la «polea A» debe moverse 1 cm hacia la izquierda y esto sólo ocurre si la cuerda a su alrededor se desplaza 2 cm hacia la derecha gracias a la «polea B»; para ello, la cuerda *Q* debe desplazarse 4 cm hacia la izquierda.



Durante años me han fascinado muchos aspectos de las matemáticas y espero que en el poco tiempo que he estado con vosotros haya sido capaz de compartir algunas de las cosas que han llamado mi atención.

Brian Bolt
University of Exeter

SUMA

ENVÍO DE COLABORACIONES

Revista SUMA
ICE Universidad de Zaragoza
Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Comisión Ejecutiva

Presidenta: María Jesús Luelmo
Secretario General: José Luis Álvarez García
Vicepresidente: Serapio García
Tesorera: Claudia Lázaro
Secretariados:
Prensa: Antonio Pérez Sanz
Revista SUMA: Emilio Palacián/Julio Sancho
Relaciones internacionales: Luis Balbuena/Florencio Villarroya
Actividades: Xavier Vilella Miró
Publicaciones: Ricardo Luengo González

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidente: Marta Berini López-Lara
Apartado de Correos 1306. 43200-REUS (Tarragona)

Organización Española para la Coeducación Matemática «Ada Byron»
Presidenta: Xaro Nomdedeu Moreno
Almagro, 28. 28010-MADRID

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»
Presidente: Salvador Guerrero Hidalgo
Apartado 1160. 41080-SEVILLA

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo»
Presidente: Florencio Villarroya Bullido
ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12.
50009-ZARAGOZA

Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»
Presidente: José Joaquín Arrieta Gallastegui
Apartado de Correos 830. 33400- AVILÉS (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»
Presidenta: Dolores de la Coba
Apartado de Correos 329. 38201-LA LAGUNA (Tenerife)

Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas
Presidente: Santiago Pascual
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Villalar, s/n.
09006-BURGOS

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García
Avda. España, 14, 5º planta. 02006-ALBACETE

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidenta: Remedios Peña Quintana
IES Francisco de Goya. C./ Caravaca, s/n.
30500-MOLINA DE SEGURA (Murcia)

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Luis Carlos Cachafeiro Chamosa
Apartado de Correos 103.
SANTIAGO DE COMPOSTELA

Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»
Presidente: Ricardo Luengo González
Apartado 590.
06080-BADAJOZ

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»
Presidenta: María Jesús Luelmo
C/ Limonero, 28
28020-MADRID

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: Ángela Núñez
CPR de Santander. C./ Peña Herbosa, 29.
39003-SANTANDER

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea Tornamira
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.
Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra.
31006-PAMPLONA

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Despacho 3517. Facultad de Educación.
Universidad Complutense. 28040-MADRID

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas
Presidente: Javier Galarreta Espinosa
C.P.R. Avda. de la Paz, 9. 26004 LOGROÑO

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departament de Didàctica de la Matemàtica.
Apartado 22045. 46071-VALENCIA

SUMA 36
febrero 2001, pp. 17-22

Requeteoremas: reinventando Teoremas en Geometría con Cabri II

José M. Pichel Cosme

ARTÍCULOS

En este trabajo se trata de responder a las preguntas: ¿Es posible desarrollar en la enseñanza básica un espíritu creativo de manera que un alumno o alumna se convierta en generador de información válida desde el punto de vista de las matemáticas? ¿Podemos desarrollar en el alumnado la creatividad científica?

UN ENFOQUE del aprendizaje en el que el alumno o alumna es un mero receptor de información, limita las posibilidades individuales y colectivas de contribuir al desarrollo de las ciencias. ¿Es posible desarrollar en la enseñanza básica un espíritu creativo de manera que un alumno o alumna se convierta en generador de información válida desde el punto de vista de las matemáticas? ¿Podemos desarrollar en el alumnado la creatividad científica?

Esta preocupación por la creatividad no es extraña en matemáticos profesionales, como en el caso de Hadamard cuando trata la naturaleza de la Invención o el de Wiener sobre la gestación y el cultivo de las Ideas. Desde otros campos científicos, de la llamada ciencia dura, también se ocupan del «extraño tema». Gerd Binnig es un físico que en 1986 recibió el premio Nobel por sus trabajos sobre el microscopio de efecto túnel. En su libro *Desde la Nada* reflexiona sobre la creatividad en el hombre y la naturaleza. Dice:

> … el mejor método para el aprendizaje es llegar a comprender el material mediante el juego, porque «resulta divertido», es placentero; por otro lado resulta que «el músculo creativo» tiene que ejercitarse. El pensamiento creativo debe aprenderse y practicarse. En mi caso resolví esa deficiencia dedicándome durante mis estudios a otras actividades que nutrían mi afición al juego. Compuse música, escribí versos y pinté cuadros. Hoy día me consta cuan valioso fue todo eso para mi –incluso para mi formación científica–, ya que los mecanismos que conducen a la creatividad en el arte son exactamente los mismos que conducen a la creatividad en la ciencia. El material es distinto, pero el juego que se entabla con él es el mismo.

Un proceso educativo orientado al desarrollo de la creatividad, necesariamente debe estar abierto a que se produzcan muchas «ideas basura», para poder encontrar las «ideas fértiles». Esta apertura a recibir de manera tolerante ideas nuevas, debe ir seguido por procesos de análisis estrictos, que permitan depurar las propuestas creativas. Aún más, la creatividad es un fenómeno colectivo; es raro

el tipo de personas eficaces al mismo tiempo produciendo ideas y depurándolas, ambas cualidades se encuentran más fácilmente en grupos. Y existen diferentes obstáculos a la creatividad: el dogmatismo, la falta de libertad, el dominio opresivo del conocimiento, el miedo y otras barreras psíquicas.

Tal como dice Binnig, es imprescindible educar a la gente en los procesos de investigación para que la condición «ser humano» progrese, ya que en definitiva:

> Creatividad es la capacidad de evolucionar, y sin evolución no habría vida ni tampoco humanidad.

La creatividad está ligada al concepto de belleza; las sensaciones durante un proceso creativo tienen que ver con la estética, tema no muy lejano a las Matemáticas. Un libro clásico habla del «placer estético de las matemáticas».

Y viceversa: la belleza está ligada a los procesos de creatividad, ya sea la que desarrolla la propia Naturaleza o del ser humano en los distintos campos científico, artístico o técnico; estos procesos creativos son básicamente idénticos sea cual sea el campo en el que operan.

Las increíbles antenas de la hembra del *Cerambiphidus betullinus*, las fractales formas de las hojas del helecho *Phegopteris vulgaris* o las formas geométricas de la pirita son modestos ejemplos de la creativa belleza de la Naturaleza.

¿Y la conducta estética del ser humano? Tan necesaria nos es que en épocas de restricción de libertades, en la profunda Edad Media, siempre quedo a salvo de los estrictos sistemas morales imperantes. Así los artesanos de la Alhambra realizan sus mosaicos usando todas las estructuras geométricas posibles ante la imposibilidad de otro tipo de representaciones; Escher se inspira en estas obras y elabora sus teselas; los matemáticos formulan la Teoría de Grupos Cristalográficos Planos; todo esto forma la Cultura Común de la sociedad y está ligado a la creatividad general, el desarrollo de diferentes lenguajes y la búsqueda apasionada de la belleza-verdad-conocimiento-comprensión y recreación de nuestro entorno.

¿La construcción de las matemáticas es una tarea reservada para unos pocos afortunados con altísima capacidad? Si la respuesta es sí, ser creativo en matemáticas, entonces, no estaría al alcance de un alumno normal en proceso de formación, salvo pequeñas libertades en aspectos procedimentales, estrategias y así. Lo conceptual, la elaboración de conceptos, la investigación de regularidades matemáticas originales, la formulación de «pequeños teoremas» no sería por tanto un objetivo de la formación matemática. ¿Sería posible cambiar esta actitud frente a las matemáticas?

Esto no es así en otras áreas, muy especialmente en las Lenguas. Cuando el profesorado se plantea sus objetivos de área se tiene como referencia el trabajo y la producción profesional, sin que la modestia de recursos de los aprendices, alumnos y alumnas jóvenes, sea una traba para experimentar con su creatividad. Los alumnos y alumnas escriben poesía, sin que sean poetas, fabulan una historia, sin que sean novelistas, interpretan un documento histórico sin que sean historiadores, dibujan, sin que sean pintores… En Matemáticas repiten procesos consolidados sin mucho margen para la alegría, salvo pequeñas cositas. ¿Sería posible que los alumnos y alumnas crearan matemáticas? Diversas propuestas recogidas en materiales innovadores, como el libro de Alsina sobre *Matemáticas de la Forma*, avanzan en este sentido, pero es necesario profundizar y ampliar este enfoque a la totalidad de la educación matemática.

Los alumnos y alumnas pueden reflexionar sobre el número, el infinito, el cero, inventar categorías de números, jugar a la criptografía, pueden inventar operaciones, estrategias, fabular en geometría, analizar en estadística, inventar problemas en topología, diseñar funciones, analizar juegos,…

La historia de las Matemáticas es una fuente de propuestas en este sentido. Escritos de Galileo, por ejemplo, aportan una idea del trabajo matemático de esa época. Por un lado los titubeos, errores conceptuales, y aciertos ponen al alcance de la comprensión de los alumnos el trabajo matemático, lo humanizan, pero sobre todo permiten que el alumnado sienta una cierta accesibilidad en la construcción de las matemáticas. Los alumnos y alumnas pueden reflexionar sobre el número, el infinito, el cero, inventar categorías de números, jugar a la criptografía, pueden inventar operaciones, estrategias, fabular en geometría, analizar en estadística, inventar problemas en topología, diseñar funciones, analizar juegos, «recrear» en fin; pero lo más interesante es el análisis de regularidades matemáticas en situaciones novedosas, en principio.

Veamos un ejemplo: algunas reflexiones de Galileo sobre la continuidad usan, digamos, métodos geométrico-dinámicos. Hace rodar hexágonos. En esa y posteriores épocas, y muy ligado al nacimiento del cálculo diferencial e integral, está el estudio de la cuadratura de la cicloide. ¿Cuál es la superficie que la cicloide limita sobre la recta por la que rueda sin deslizar una circunferencia de radio *r*? Como es sabido la respuesta es $3\pi r^2$, es decir el triple del área del círculo

que la genera. Para tener una idea sobre la respuesta al problema, Galileo comparaba, mediante una balanza, el peso de un círculo con el peso, recortado en el mismo material que el círculo, del área que abarcaba la cicloide. Tan heterodoxo procedimiento no daba una respuesta matemática, pero hacia más fácil saber por donde tirar. Las herramientas informáticas hoy nos permiten una capacidad de experimentación que ni soñaría el bueno de Galileo, y por añadidura posibilita que cualquier alumno de secundaria construya pequeños teoremas, encontrando regularidades que detectaría experimentalmente.

Idea: hagamos rodar polígonos regulares (para trabajar con alumnos de ESO, manipulativamente y con *Cabri* II)

Triángulo equilátero

Trazamos un triángulo y dibujamos las tres posiciones por las que pasa cuando rueda a lo largo de una recta. Para facilitar el ejercicio a los alumnos que tengan más dificultades de visualización espacial, se podría recortar el triángulo en papel o cartulina. Señalando el vértice izquierdo se sitúan las tres posiciones por las que pasa el vértice: inicial en la recta, media por encima de la recta y final otra vez en la recta. Trazado el triángulo resultante el ejercicio ahora es demostrar que el área es triple del área del triángulo inicial. Con *Cabri* se puede realizar el ejercicio pero es suficientemente trivial como para que cualquier alumno identifique la igualdad del área de los tres triángulos en que se descompone, llamémosle, el *trioide*: el área depende solo de la base y la altura, no de la forma (figura 1).

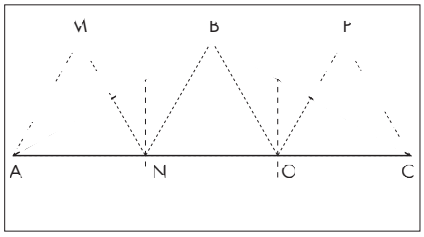


Figura 1

Las herramientas informáticas hoy nos permiten una capacidad de experimentación que ni soñaría el bueno de Galileo,

Cuadrado

Dibujamos un cuadrado, y seguimos el mismo procedimiento que antes. Al rodar el cuadrado pasa por cuatro posiciones, y el vértice inferior izquierdo en la posición inicial, define un cuadrilátero, al unir las cuatro posiciones, que llamaremos *tetroide* (figura 2).

El tetroide contiene dos cuadrados completos y dos medios cuadrados, luego de nuevo:

$$AEFC = 3 \cdot ADCB$$

El área del tetroide es triple de la del cuadrado.

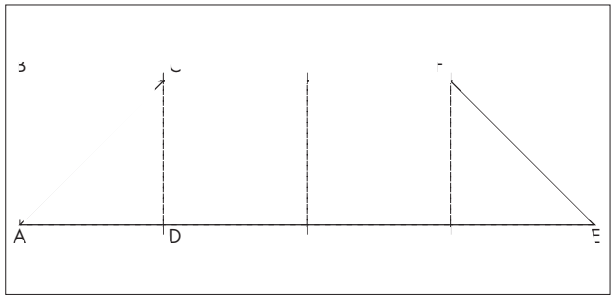


Figura 2

Pentágono

Seguimos el mismo procedimiento: dibujo del pentágono, elaboración del modelo en cartulina, trazado de las cinco posiciones del polígono al rodar, definición del polígono *pentoide*, trazado del movimiento con *Cabri*. Hacemos el análisis de la figura resultante (figura 3). (Si tenemos interés, podemos encontrar en ella la razón áurea.)

El pentoide contiene un pentágono central y dos figuras simétricas (pentágonos también).

Obviamente los triángulos AEA_1 y AED tienen la misma área y por tanto la misma que el triángulo FGH. Asi que el polígono $AFIA_2A_1$ tiene la misma área que el polígono. Luego:

$$AA_1A_2A_3A_4 = 3 \cdot AEDCB$$

El área del pentoide es triple de la del pentágono.

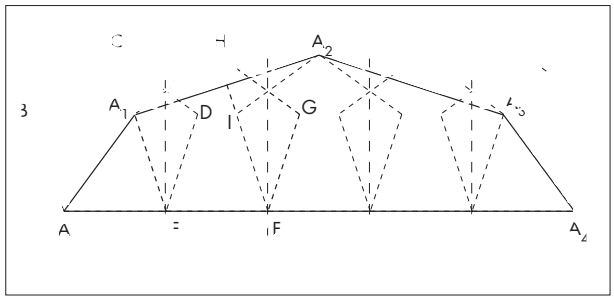


Figura 3

Hexágono

Construimos un hexágono en la forma habitual o bien usamos una parrilla de triángulos equiláteros, y hacemos rodar la figura. Obtenemos un *hexoide*. Analizamos el área por simple descomposición en triángulos (figura 4).

El hexoide contiene 16 triángulos equilateros y dos isósceles A_1EA_2 y $A_3E_1A_4$.

Obviamente $A_1EA_2 = A_1ED$.

Luego el hexoide tiene 18 triángulos y el hexágono 6.

El área del hexoide es triple de la del hexágono

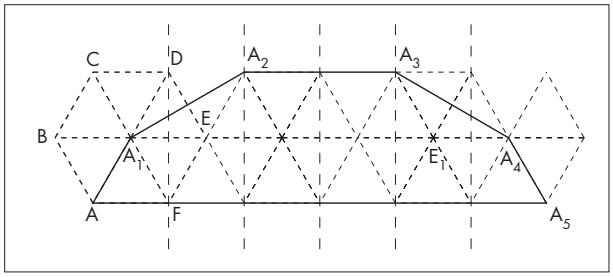


Figura 4

Hasta aquí sería el tipo de actividades que un alumno podría trabajar para comprobar la regularidad. A partir de aquí sería un ejercicio más complejo que en todo caso se podría abordar con *Cabri II*.

Tendríamos una oportunidad de hacer distinguir entre comprobación y demostración. La demostración no es el objetivo de esta propuesta didáctica, sino la Formulación de un pequeño teorema. Sigamos con el heptágono, el octógono,…

Heptágono

Construimos con *Cabri II* el *heptoide* (figura 5). Pedimos el área de ambas figuras. De nuevo el área del heptoide triplica la del heptágono

Proponemos esta actividad para los «mayores». De igual forma para el *octoide* (figura 6).

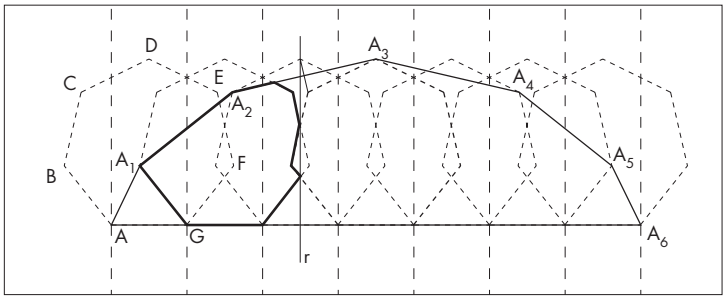


Figura 5

¡Admirable regularidad! Descompongamos las figuras, relacionemos de manera abierta. ¿Por qué la igualdad de tales áreas? ¿Por qué el alineamiento de tales vértices. Y en el límite, la bella Helena, la cicloide, ¿no encierra en sí misma un infinito de regularidad? Hablemos de las justas matemáticas de los siglos XVII y XVIII, el nacimiento de nuevas ciencias, el imperio del rigor…

Y ahora un poco de atrevimiento para formular un pequeño teorema:

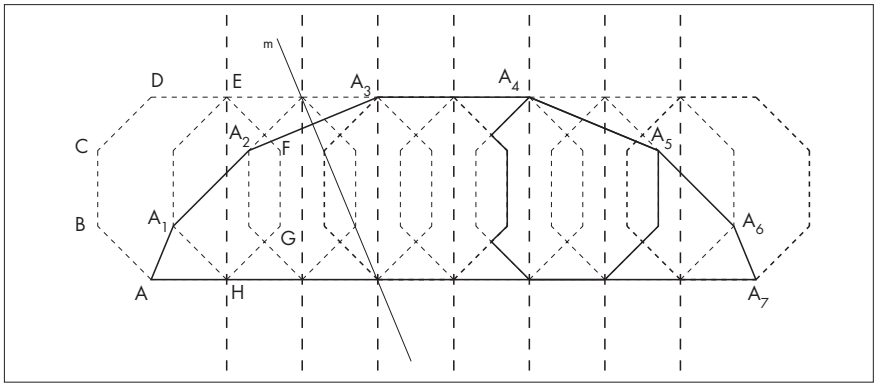


Figura 6

El área del *n*-polígono generado por un polígono regular de *n* lados al pasar por las *n* posiciones estables que se generan al rodar, sin deslizar, sobre una recta, es triple del área del polígono regular que lo genera.

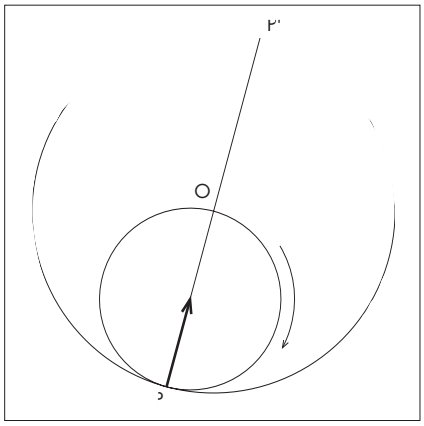


Figura 7

Tratando de explicar de manera creativa algo parecido a lo que en este escrito propongo, en una reciente reunión de las JAEM-99 en Lugo, recordé un *teorema clásico: Si por el interior de una circunferencia de radio* R *rueda sin deslizar otra circunferencia de radio* R*/2, un punto P de la circunferencia interior describe un diámetro* POP' (figura 7).

Idea: ¿Qué pasa si hacemos rodar polígonos regulares por el interior de la circunferencia? ¿En que condiciones estarán alineadas las sucesivas posiciones de un vértice?

Probamos que pasa si tratamos con polígonos de un número impar de vértices y uno de ellos está en el centro de la circunferencia (figura 8).

Parece que, en efecto, al igual que con circunferencias, el punto ocupa posiciones en el diámetro.

Probemos ahora con polígonos de un número par de vértices, tal que el punto medio de un lado esté en el centro de la circunferencia. Veamos con el cuadrado, exágono, el octógono…. (figura 9)

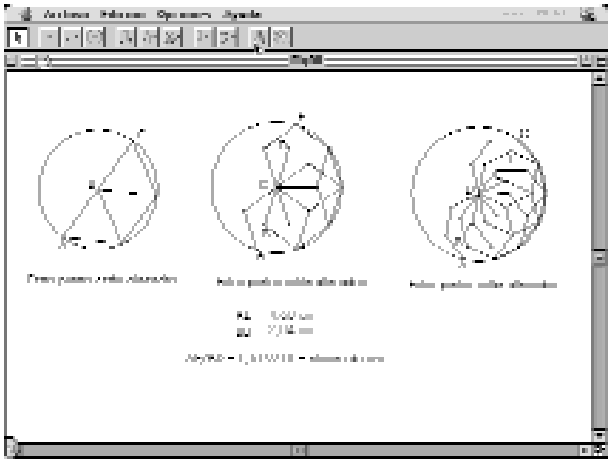


Figura 8

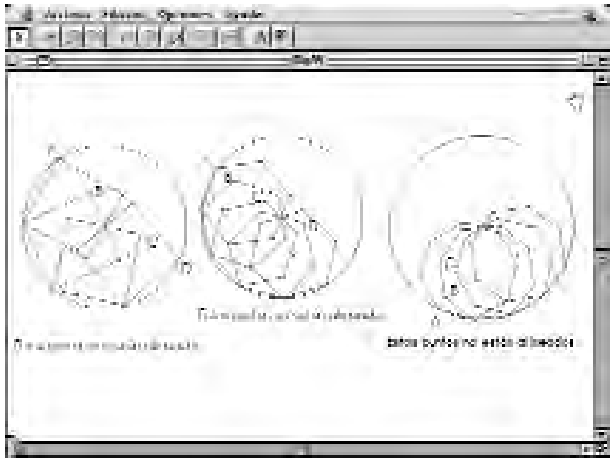


Figura 9

Nada, esto no va. ¿Y si volvemos atrás, a las circunferencias? Definamos los polígonos inscritos en una circunferencia, aunque no tangente interior, que pase por el centro de la mayor y tal que el los vértices de un lado del polígono estén en la circunferencia mayor. Mejor una imagen (figura 10).

Seguimos probando, veamos con el octógono (figura 11)

¡Bien! Ya estamos en condiciones de aventurar el *Requeteorema*:

> Si un polígono... las sucesivas posiciones de un vértice están sobre el diámetro

Demostraciones aparte, hemos cumplido lo que pretendíamos, formular pequeños teoremas con visos de verosimilitud, y quizás del análisis de la partición del diámetro según el polígono, se nos podría ocurrir…

José M. Pinchel
IES A Barcala
Cambre (A Coruña)

Bibliografía

ALSINA CATALÁ, C. (1993): *Matemáticas de la forma*, MEC-Edelvives, Zaragoza

BINNIG, G. (1996): *Desde la nada. Sobre la creatividad de la Naturaleza y del ser humano*, Galaxia Gutenberg-Círculo de lectores, Barcelona 1996.

BOYER, C. B. (1986): *Historia de la Matemática*, Alizanza Universidad Textos,Madrid.

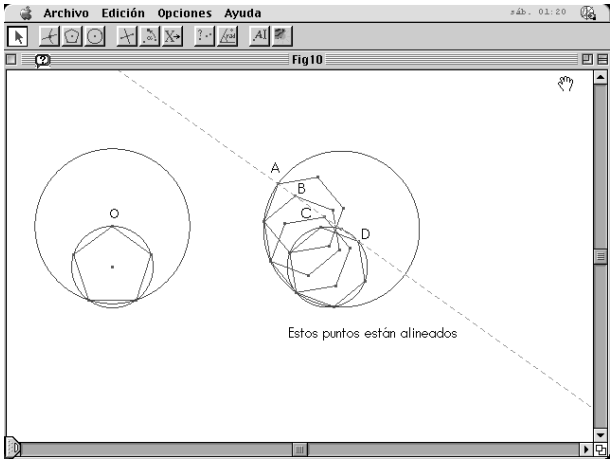


Figura 10

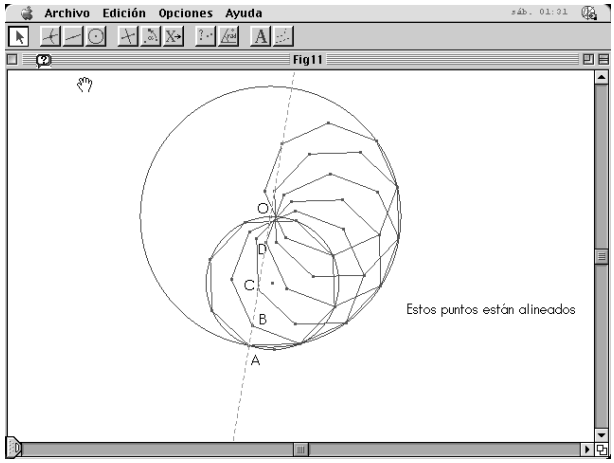


Figura 11

SUMA 36
febrero 2001, pp. 23-31

Concepciones de los alumnos de secundaria sobre modelos probabilísiticos en las secuencias de resultados aleatorios

Luis Serrano, Carmen Batanero, J. J. Ortiz, M.ª Jesús Cañizares

ARTÍCULOS

Presentamos aquí una investigación sobre concepciones aleatorias en estudiantes de secundaria. Las respuestas de 277 estudiantes de dos grupos, con edades de 14 y 17 años, sirven para identificar las propiedades asociadas a secuencias aleatorias y deterministas. En ellas encontramos la capacidad de los alumnos para reconocer modelos matemáticos subyacentes en las secuencias de los resultados aleatorios y su utilización en los juicios sobre aleatoriedad. Por ellos sugerimos al final algunas implicaciones para la enseñanza de la probabilidad en estos niveles iniciales.

EN LA ACTUALIDAD, se están desarrollando nuevos currículos de enseñanza primaria y secundaria, tanto en España como en otros países desarrollados, que reflejan un cambio en las creencias sobre cómo se debe enseñar la probabilidad. Mientras que, hasta hace unos años, la probabilidad se ha incluido de forma limitada a partir de los 14-15 años, enfatizando los métodos de cálculo combinatorio, los currículos actuales proponen adelantar la materia al comienzo de la Educación Secundaria Obligatoria e incluso en algunos casos a la Enseñanza Primaria. Sugieren, asimismo, utilizar actividades de enseñanza donde el estudiante primero haga predicciones sobre las posibilidades de obtener diferentes resultados en experimentos aleatorios sencillos con recursos tales como ruletas, dados o monedas, luego obtenga datos empíricos de estos experimentos y finalmente compare las probabilidades experimentales generadas con sus predicciones originales (MEC, 1992; NCTM, 1989).

Sin embargo, en sus investigaciones sobre razonamiento probabilístico, Konold (1995) sugiere que la simple realización de predicciones y su comparación con los datos obtenidos experimentalmente, no son suficientes para que los estudiantes cambien sus concepciones, ya que los datos raramente revelan con suficiente claridad todos los resultados y propiedades matemáticas que queremos mostrar a los alumnos, la atención de los estudiantes es limitada y la variabilidad de los datos normalmente se ignora. Puesto que los estudiantes tienen con frecuencia ideas incorrectas sobre la probabilidad y la aleatoriedad, Garfield (1995) indica que la enseñanza efectiva de la probabilidad debe apoyarse en el conocimiento previo sobre estas concepciones de los estudiantes, ya que, cuando se enseña algo nuevo, los estudiantes construyen este nuevo conocimiento conectando la nueva información con la que ellos habían asumido previamente como correcta. El cono-

cimiento de las concepciones y formas de razonamiento de los alumnos es, en consecuencia, un punto clave para asegurar el éxito de las nuevas propuestas curriculares.

En este artículo presentamos los resultados de un estudio de las concepciones de dos grupos de estudiantes (14 y 17 años) sobre los modelos probabilísticos que aparecen en las secuencias de resultados que se obtienen en un experimento aleatorio. El concepto de aleatoriedad ha recibido poca atención en el área de didáctica de la matemática, aunque las investigaciones psicológicas, tanto con niños como con sujetos adultos muestran concepciones incorrectas sobre este concepto y sesgos asociados en la toma de decisiones en situaciones aleatorias. Asimismo, la aleatoriedad presenta diversas interpretaciones, desde el punto de vista filosófico (Batanero y Serrano, 1995), lo que sin duda contribuye a la existencia de sesgos subjetivos en la percepción de la aleatoriedad.

Por ser el punto de partida de la teoría de probabilidades, muchos profesores pueden pensar que la aleatoriedad es un concepto simple. Sin embargo, cuando se analiza con detalle, se puede mostrar la complejidad del concepto y la multitud de modelos matemáticos asociados al mismo. Un punto importante en este análisis es que en el concepto de aleatoriedad podemos separar dos componentes: el proceso de generación de los resultados aleatorios (experimento aleatorio) y la secuencia de resultados obtenida (secuencia de resultados aleatorios). Puesto que con los ordenadores y calculadoras podemos obtener tablas de números «aleatorios» mediante algoritmos deterministas, la aleatoriedad de una secuencia de resultados, debe analizarse independientemente del proceso que la genera.

Desde el punto de vista del proceso, el experimento aleatorio más simple posible es aquél que sólo presenta dos resultados posibles, es repetible en las mismas condiciones y los resultados de pruebas sucesivas son independientes. Este experimento tan simple, que sin embargo se puede aplicar a un sinnúmero de situaciones prácticas (lanzamiento de monedas, sexo de un recién nacido, éxito en una prueba, etc.), da origen a una multitud de modelos probabilísticos, entre otros la distribución binomial, geométrica y el teorema de Bernoulli que afirma la convergencia de las frecuencias relativas de los resultados posibles a la probabilidad teórica de los mismos (Serrano y otros, 1991). Una dificultad práctica es decidir con seguridad si se cumplen las condiciones teóricas, es decir, que las pruebas sucesivas son realmente independientes y que se realizan en las mismas condiciones.

Se han usado dos formas de definir y estudiar la aleatoriedad de una secuencia de resultados (Fine, 1973). La primera es debida a Von Mises y parte de la idea de que en una secuencia aleatoria es imposible encontrar sus reglas o patrones; por tanto, no podemos predecir sus resultados para, por ejemplo, apostar sobre ellos y ganar en un juego de azar. Ello implica que la frecuencia relativa de cada uno de los resultados se conserva invariante en cualquiera de sus subsucesiones. Esta idea se usa en los test de aleatoriedad que tratan de estudiar la concordancia entre las frecuencias observadas y esperadas de distintos resultados en las tablas de números aleatorios. Sin embargo, puesto que en un contraste estadístico siempre hay posibilidades de error, es imposible estar completamente seguros de la aleatoriedad de una sucesión particular. Simplemente aceptamos la aleatoriedad de una secuencia porque ha pasado con éxito las pruebas disponibles.

El concepto de aleatoriedad ha recibido poca atención en el área de didáctica de la matemática, aunque las investigaciones psicológicas, tanto con niños como con sujetos adultos muestran concepciones incorrectas sobre este concepto y sesgos asociados en la toma de decisiones en situaciones aleatorias.

Otro enfoque para definir la aleatoriedad de una sucesión, debido a Kolmogorov, se basa en su complejidad computacional, que es la dificultad de describirla o almacenarla en un ordenador, mediante un código que permita recuperarla posteriormente. En este enfoque, una secuencia sería aleatoria si no podemos codificarla en forma resumida, es decir, la única forma de codificarla es listando todos sus elementos. El mínimo número de símbolos necesarios para codificar una secuencia nos daría una medida de su aleatoriedad, por lo que la definición establece una jerarquía en el grado de aleatoriedad de diferentes secuencias y la aleatoriedad perfecta sería un concepto teórico, aplicable sólo a secuencias de infinitos resultados.

Percepción subjetiva de la aleatoriedad

Estas dos definiciones muestran la contradicción fundamental subyacente en las secuencias aleatorias que explica los problemas psicológicos asociados. Por un lado, la aleatoriedad implica que cualquier secuencia de resultados es posible cada vez que realizamos el experimento, pero por otro sólo las secuencias de resultados sin patrón aparente se consideran verdaderamente aleatorias (Hawkins y otros, 1991). Muchos sesgos en la percepción de la aleatoriedad provienen de la aceptación

de una de estas dos propiedades y el olvido de la complementaria.

La percepción subjetiva de la aleatoriedad de los adultos ha sido investigada extensamente por los psicólogos (por ejemplo, Wagenaar, 1972; Falk, 1981; Bar-Hillel, 1991) usando una variedad de tareas que son clasificadas en un estado reciente de la cuestión por Falk y Konold (1997) en dos tipos principales. El primer tipo (generación de resultados aleatorios) consiste en pedir a los sujetos que escriban la secuencia de resultados que esperarían obtener al repetir un número dado de veces un experimento aleatorio, tal como lanzar una moneda. El segundo tipo (tarea de reconocimiento) consiste en ofrecer a los sujetos una serie de secuencias de resultados y pedirle su opinión sobre cuáles de ellas fueron generadas aleatoriamente.

Como resultado de estas investigaciones se han encontrado sesgos sistemáticos, como la falacia del jugador, por la que se espera que cambie el tipo de suceso de una racha larga en la que no ha aparecido dicho suceso. Las secuencias generadas por los sujetos tienen demasiadas alternancias y rachas muy cortas, respecto a lo esperado teóricamente. En las tareas de reconocimiento, se rechazan las secuencias con rachas largas de un mismo resultado. Además de varios mecanismos psicológicos, como la representatividad local (Kahneman y otros, 1982) que podrían explicar estos sesgos, Falk (1981), Falk y Konold (1997) creen que la consistencia de los sujetos en las diversas tareas sugiere la existencia de concepciones erróneas subyacentes sobre la aleatoriedad, aunque no las han investigado explícitamente.

Investigaciones sobre la percepción de la aleatoriedad por los niños

Una cuestión de interés para el profesor de matemáticas es si estos segos son espontáneos o se adquieren como consecuencia de un enfoque inadecuado en la enseñanza de la probabilidad. La investigación de la percepción de la aleatoriedad por los niños comenzó con Piaget e Inhelder (1974), quienes creen que la noción de aleatoriedad precisa del razonamiento proporcional y combinatorio y la idea de causalidad, que se adquieren durante la adolescencia. Piaget e Inhelder creen que, una vez alcanzada esta etapa, los sujetos perciben la ley de los grandes números, que explica a la vez la regularidad global y la variabilidad particular de cada experimento aleatorio. Sin embargo, esta teoría es discutida por Green (1983, 1989, 1991), cuyas investigaciones con niños entre 11 y 16 años probaron que los niños eran muy exactos al reflejar la equiprobabilidad de los distintos resultados en tareas de generación de resultados aleatorios. Sin embargo, la independencia de ensayos no era captada por los niños, que produjeron series con rachas demasiado cortas de un mismo resultado, respecto a lo que esperaríamos en un proceso aleatorio. La percepción de la aleatoriedad no mejoraba con la edad y, aunque los niños basaban su decisión en consideraciones sobre el patrón de la secuencia, impredecibilidad de los resultados, número de rachas y frecuencias de resultados, estas propiedades no siempre se asociaron correctamente con la aleatoriedad o el determinismo.

La investigación de la percepción de la aleatoriedad por los niños comenzó con Piaget e Inhelder (1974), quienes creen que la noción de aleatoriedad precisa del razonamiento proporcional y combinatorio y la idea de causalidad, que se adquieren durante la adolescencia.

Descripción de la investigación

Los resultados que presentamos forman parte de un estudio amplio sobre las concepciones de 277 alumnos de secundaria sobre la aleatoriedad y la probabilidad. Aproximadamente la mitad de los alumnos cursaban 1.° de Bachillerato (n = 147), con una edad de entre 14 y 15 años y no habían comenzado el estudio de la probabilidad. El resto, cursaba el Curso de Orientación Universitaria (n = 130) y habían estudiado probabilidad, con un enfoque clásico, en 1.° y 3.° curso de bachillerato, aproximadamente 2 semanas en cada uno de los cursos, siendo su edad de 17-18 años. Participaron cinco centros de la ciudad de Melilla. Los datos se recogieron durante una de las horas de clase de matemáticas, por medio de un cuestionario.

El fin de nuestra investigación fue completar los trabajos de Green y de Toohey (1995) y extenderlo a los alumnos de 17-18 años, ya que Shaughnessy (1996) sugiere el interés de evaluar cómo varían las concepciones de los alumnos sobre un mismo contenido con la edad y no hay muchos datos disponibles sobre el intervalo de edad 14-18. Las preguntas que nos planteamos son las siguientes:

¿Cuáles son las características de las secuencias y distribuciones aleatorias generadas por los alumnos? ¿Cuáles de ellas coinciden con las propiedades matemáticas? ¿Varían estas características en los dos grupos de alumnos? ¿Cuáles son los argumentos que los alumnos usan para considerar una secuencia como aleatoria o no aleatoria? ¿Cambian con las variables de tarea de los ítems?

Los resultados que presentamos en este trabajo se refieren a cinco ítems. En los cuatro primeros se evalúa la capacidad de los alumnos para discriminar modelos matemáticos en las secuencias de resultados aleatorios. En el último ítem los alumnos deben escribir una secuencia de acuerdo a cómo piensen que sería si se hubiese obtenido mediante un procedimiento aleatorio. Nos hemos limitado al caso más simple: un experimento aleatorio (lanzar una moneda) con sólo dos resultados posibles, que, además son equiprobables. En Serrano, Batanero y Cañizares (1999) analizamos también la discriminación de modelos aleatorios en el plano por parte de estos mismos estudiantes y en Batanero y Serrano (1999) resumimos el resultado obtenido en las tareas de reconocimiento tanto de sucesiones, como de distribuciones aleatorias. En consecuencia, este trabajo completa los resultados expuestos en los dos anteriores.

Discriminación de propiedades en la secuencias aleatorias

En los cuatro primeros ítems de nuestro cuestionario se pide al alumno su opinión sobre si una serie de secuencias son o no producidas por un mecanismo aleatorio, así como las razones en las que basa su respuesta. A continuación reproducimos estas tareas, en las que hemos considerado dos variables de tarea, que se refieren a la secuencia presentada: a) La proporción de caras: en los ítems 1 a 3 esta proporción es muy cercana a la probabilidad teórica ($P(H)$ = 0,53 en el ítem 1, P(H) = 0,48 en los ítems 2 y 3, mientras que en el ítem 4 la proporción de caras sólo es igual a 0,30); b) La longitud de las rachas de un mismo resultado, y, en consecuencia, la proporción de alternancias (cambio en el tipo de resultado, de cara a cruz o de cruz a cara). Esta proporción es el cociente entre el número de alternancias y la longitud de la secuencia y es muy cercano al valor teórico 0,5 en los ítems 1 ($P(A)$ = 0,54), 2 y 3 ($P(A)$ = 0,51). Por el contrario, $P(A)$ = 0,74 en el ítem 2, que tiene demasiadas alternancias (rachas muy cortas) para que la secuencia pueda ser considerada aleatoria.

Por tanto, desde el punto de vista normativo, consideraríamos que la respuesta correcta a los ítems 1 y 3 es que el niño jugaba correctamente, mientras que la respuestas correcta en los ítems 2 y 4 es que el niño hacía trampas. Sin embargo, y puesto que en un contraste de aleatoriedad siempre hay una probabilidad pequeña de que la secuencia no sea aleatoria, incluso cuando haya superado las pruebas de aleatoriedad, nuestro interés no sólo se centra en si las respuestas de los alumnos coinciden o no con la respuesta normativa, sino en cuáles son las propiedades de las secuencias que asocian a la idea de aleatoriedad.

Enunciado: Se pidió a algunos niños que lanzaran una moneda 40 veces y anotaran los resultados obtenidos. Algunos lo hicieron correctamente y otros hicieron trampas. Indicaron *C* para la cara y + para la cruz. Estos son sus resultados.

En los cuatro primeros ítems de nuestro cuestionario se pide al alumno su opinión sobre si una serie de secuencias son o no producidas por un mecanismo aleatorio, así como las razones en las que basa su respuesta.

María:

+ + + *C* + *C C* + + + *C* + *C C C C C* + *C* + *C* + + *C* + *C C* + + + + *C C C* + *C C* + *C C*

Daniel:

C + *C* + + *C C* + *C* + *C C* + + *C* + + *C C* + + *C* + *C C* + + *C* + *C* + *C* + *C* + + *C* +

Martín:

C + + + *C* + + *C C C* + *C* + + + + + *C* + *C* + *C C* + *C* + + *C C C C* + + + *C* + + *C C C*

Diana:

C + + + *C* + + *C* + *C* + + + *C* + + + + *C C* + + + *C* + + *C* + + *C* + + + + *C* + + + *C* +

Item 1: ¿Hizo María trampas? ¿Por qué?

Ítem 2: ¿Hizo Daniel trampas? ¿Por qué?

Ítem 3: ¿Hizo Martín trampas? ¿Por qué?

Ítem 4: ¿Hizo Diana trampas? ¿Por qué?

En la tabla 1 presentamos las respuestas de los alumnos. Podemos ver que la mayoría considera las sucesiones aleatorias, excepto en la 4, que tiene una frecuencia de 12 caras, bastante diferente de la frecuencia teórica esperada. En total 54 alumnos de 14 años y 30 de 17 consideran aleatoria la secuencia del ítem 2, a pesar del sesgo que hemos introducido en la longitud de las rachas. Este resultado confirma la opinión de Green (1991), de que para los alumnos

Sucesión		*Respuesta*	*Edad = 14*	*Edad = 17*
1. María:	$P(H)$ = 0,53	Aleatoria	60	58
	$P(A)$ = 0,54	No aleatoria	34	27
		No sabe	6	15
2.Daniel:	$P(H)$ = 0,48	Aleatoria	58	63
	$P(A)$ = 0,74	No aleatoria	37	23
		No sabe	5	14
3. Martín:	$P(H)$ = 0,48	Aleatoria	53	56
	$P(A)$ = 0,51	No aleatoria	42	29
		No sabe	5	15
4. Diana:	$P(H)$ = 0,30	Aleatoria	36	37
	$P(A)$ = 0,51	No aleatoria	56	48
		No sabe	8	15

Tabla 1. Porcentajes de respuestas a los ítems 1- 4

es más difícil reconocer las propiedades de las rachas que las propiedades de las frecuencias. La semejanza de los porcentajes de alumnos que consideran aleatorios los ítems 1, 2 y 3 indica que para ellos lo más importante para decidir si una secuencia es aleatoria es la similaridad entre las frecuencias de los dos resultados posibles.

En todos los ítems, al realizar un contraste Chi-cuadrado de independencia entre la respuesta y el grupo de estudiantes, obtuvimos diferencias significativas entre los grupos (el valor *p* fue igual a 0,0011, 0,0045, 0,0028 y 0,0192 en los ítems 1 a 4), puesto que una proporción mayor de estudiantes de 17 años consideró la secuencia aleatoria o no dio respuesta, lo que también coincide con los resultados de Green. Este autor sugiere que los estudiantes mayores son más cautos en su respuesta porque aprecian mejor la variabilidad de los resultados aleatorios.

Pedimos a los estudiantes justificar sus respuestas. Los argumentos se clasificaron según el siguiente esquema, tomado de Green, quien estudió los porcentajes globales de los diferentes argumentos, pero no la variación en los diferentes ítems debida a la edad.

a) *La secuencia sigue un patrón regular*. Este argumento hace referencia al orden de aparición de las caras y cruces en la secuencia y a la regularidad del mismo:

> No hizo trampas, porque hay una secuencia bastante regular de caras y cruces, que es lo más probable que ocurra.
>
> Podría haber hecho trampas, porque el resultado es muy uniforme; las caras y las cruces casi se alternan.

b) *Hay un patrón irregular en la secuencia*. En este caso se percibe la irregularidad del patrón de la sucesión. Una parte de los alumnos que dan el argumento a) o b) muestran una concepción de la aleatoriedad correcta, percibiendo la aleatoriedad como complejidad, o ausencia de patrón. Un ejemplo es el siguiente:

> No hizo trampas, porque la secuencia no sigue ningún orden.

c) *Las frecuencias de los diferentes resultados son bastante parecidas*. Aquí los estudiantes se refieren a las frecuencias, como en los casos siguientes:

> Porque el número de caras y cruces está muy balanceado.
>
> La proporción de caras y cruces es muy similar.
>
> Los resultados se acercan al 50 %.

d) *Las frecuencias de los distintos resultados son bastantes diferentes*. Es el contrario al argumento previo. Tanto c) como d) los estudiantes basan su decisión en la comparación de las frecuencias observadas y la distribución de probabilidad teórica, lo que indica que los alumnos tienen una modelo matemático correcto de dicha distribución y han sido capaces de aplicar intuitivamente un razonamiento similar al que se sigue al realizar un contraste de hipótesis. En los casos citados se observa una concepción de la probabilidad frecuencial subyacente, mientras que en otros, el alumno usa una concepción clásica de la probabilidad:

> La probabilidad de cara debería ser igual que la de cruz.

e) *Hay rachas largas*. Aquí los estudiantes muestran concepciones erróneas respecto a la idea de independencia entre ensayos sucesivos:

> Porque hay muchas cruces seguidas.

Se aprecia también aquí el uso de la heurística de la representatividad (Kahneman, Slovic y Tversly, 1982).

f) *No hay rachas*. Es el opuesto al argumento anterior, y por tanto sugiere una concepción correcta por parte del alumno. Por ejemplo:

> Hay muy pocas secuencias de caras.

g) *Es impredecible; es aleatorio*. Estos alumnos argumentaron la impredecibilidad del resultado, debido a la naturaleza aleatoria del experimento:

> ¡Así es la suerte! Aunque lances correctamente la moneda, puedes obtener estos resultados, porque es un juego.
>
> Cuando lanzas una moneda no hay resultado seguro; la aleatoriedad juega un papel muy importante.

En estos resultados se vislumbra, a veces, bien el «enfoque en el resultado aislado» descrito por Konold o creencias en mecanismos causales. Sin embargo, con nuestros datos, este punto es difícil de asegurar y sería necesaria una investigación más profunda usando entrevista u otro tipo de tareas.

Como mostramos en la tabla 2, la mayor frecuencia aparece en los argumentos basados en la impredecibilidad o suerte, que no fueron obtenidos con mucha frecuencia por

	María		*Daniel*		*Martín*		*Diana*	
Argumento	14	17	14	17	14	17	14	17
Patrón regular	6	3	44	18	7	4	10	2
Patrón irregular	13	5	9	1	18	10	8	5
Frecuencias/probabilidades iguales	4	12	5	23	0	10	3	2
Frecuencias diferentes	9	8	0	4	9	7	13	27
Rachas	21	13	4	5	24	18	22	16
No se puede predecir	35	33	31	29	32	28	31	28
No da argumento	12	26	7	20	10	23	13	20

Tabla 2. Porcentajes de argumentos en los items 1-4 según edad

Green (1991). También observamos variaciones en los distintos ítems: patrón regular en Daniel, patrón irregular en María y Martín; frecuencias iguales en María, Martín y Daniel, diferencia de frecuencias en Diana, rachas largas en María, Martín y Diana. Esto muestra la capacidad de los estudiantes para discriminar las características que hemos hecho variar en las sucesiones.

En cada ítem realizamos un contraste Chi cuadrado de independencia entre argumento y grupo de estudiante obteniendo los siguientes valores significativos (p igual a 0,001; 0,002; 0,0001 y 0,02 en los ítems 1 a 4). Los alumnos más jóvenes se refieren mayormente al patrón de la secuencia y las rachas, mientras que los de 17 años usaron más a menudo argumentos frecuenciales.

Los argumentos también se diferencian según la consideración aleatoria o no de la sucesión (tabla 3). Los valores p en el contraste Chi cuadrado de independencia entre argumento y respuesta fueron todos menores a 0,001. El principal argumento para apoyar la aleatoriedad fue la impredecibilidad. El patrón irregular, rachas largas y no coincidencia de las frecuencias de caras y cruces se asociaron con la no aleatoriedad.

El patrón irregular, rachas largas y no coincidencia de las frecuencias de caras y cruce se asociaron con la no aleatoriedad.

	María		*Daniel*		*Martín*		*Diana*	
Argumento	*Real*	*Falso*	*Real*	*Falso*	*Real*	*Falso*	*Real*	Falso
Patrón regular	5	6	12	81	1	13	13	3
Patrón irregular	14	2	8	1	23	5	7	7
Frecuencias/probabilidades iguales	10	6	19	6	7	2	5	1
Frecuencias diferentes	5	18	3	1	4	18	5	35
Rachas	2	53	4	6	4	54	4	33
No se puede predecir	52	12	43	5	48	5	51	18
No da argumento	12	3	11	0	13	3	15	3

Tabla 3. Clasificación de los argumentos según se considere la secuencia aleatoria o no aleatoria

Generación de secuencias de resultados aleatorios

Nuestro cuestionario fue completado con la siguiente tarea de generación de una secuencia aleatoria de caras y cruces. Nuestro interés sobre el ítem es analizar las características que los alumnos asignan a las secuencias aleatorias y estudiar su variación en los dos grupos de alumnos, así como comparar los resultados en las tareas de generación con los obtenidos en las tareas de reconocimiento. Se proporcionó al alumno una plantilla con 50 cuadros para completar, dándole las siguientes instrucciones:

Ítem 5: Supón que estás lanzando una moneda 50 veces, sin hacer trampas. Escribe una secuencia de 50 lanzamientos (sin lanzar realmente la moneda). Pon *C* o *X* en cada cuadro (*C* quiere decir que obtienes una cara y *X* que obtienes una cruz).

Una vez recogidos los datos, hicimos un estudio estadístico de las características de las sucesiones generadas por los escolares de esta muestra, que se describen a continuación, comparándolas con los modelos matemáticos esperados en una secuencia aleatoria. Si una de estas propiedades aparece en las sucesiones generadas por los estudiantes, pensamos que dicha propiedad ha sido identificada por el alumno a lo largo de su experiencia con los juegos de azar y la observación de secuencias de resultados aleatorios. Las propiedades analizadas son las siguientes:

Número total de caras que presentan las secuencias escritas por los alumnos

Una propiedad importante desde el punto de vista matemático en las sucesiones de Bernoulli es la convergencia empírica de las frecuencias a la probabilidad teórica, explicada mediante el Teorema de Bernoulli. En la figura 1 presentamos el número de caras en las secuencias producidas por los dos grupos de alumnos (Grupo 1: 18 años; Grupo 2= 14 años).

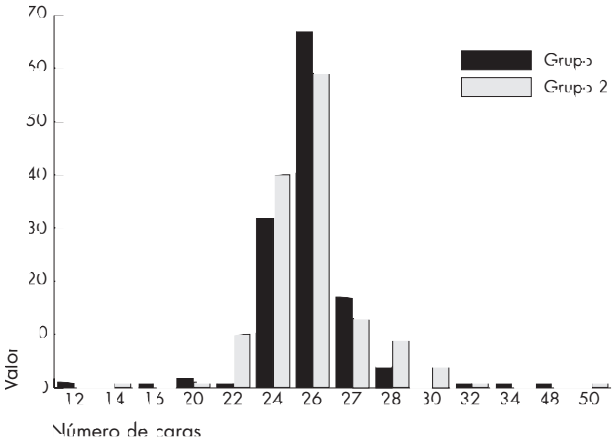


Figura 1. Frecuencias del número de caras en las secuencias producidas por los alumnos

En general, los alumnos han reflejado la frecuencia relativa teórica de caras y cruces, ya que el número de caras se agrupa alrededor de 23 a 27 para la mayor parte de alumnos y el valor teórico esperado sería 25 caras. El valor medio del número de caras en las secuencias producidas por los alumnos (25,285 en el primer grupo y 25,259 en el segundo) se aproxima mucho al valor esperado. Sin embargo, los alumnos no reflejan suficientemente la variabilidad aleatoria, ya que la dispersión de la distribución de las secuencias producidas por los alumnos es menor que la teórica. Puesto que se trata de secuencias de 50 resultados, se sigue una distribución binomial $B(50, 0,5)$, cuya media es 25, varianza 12,5 y desviación típica 3,54. La desviación típica de la distribución de las secuencias producidas por los alumnos de 14 años es 2,99, menor que la esperada teóricamente, aunque no tan pequeña como en la muestra piloto o en las investigaciones de Green. Del mismo modo, la desviación típica de la distribución de las secuencias producidas por los alumnos de 18 años es 3,023. No se observan diferencias con la edad en la apreciación de esta variabilidad.

… los alumnos han reflejado la frecuencia relativa teórica de caras y cruces […] sin embargo, no reflejan suficientemente la variabilidad aleatoria, ya que la dispersión de la distribución de las secuencias producidas por los alumnos es menor que la teórica.

Consistencia entre las dos mitades

También estudiamos el número de caras en cada una de las dos partes de la secuencia producida por los alumnos, para estudiar la consistencia entre las dos mitades de la misma. Hemos analizado la distribución del número de caras en cada una de las mitades de las secuencias, observando que estas distribuciones son altamente consistentes, ya que los valores medios y desviaciones típicas fueron muy similares en las dos partes de la secuencia producida. Se diría que el alumno intenta reproducir localmente el comportamiento global de la secuencia. Sin embargo, el coeficiente de correlación entre el número de caras en la primera y segunda mitad de la secuencia ha sido $r = -0,1147$, lo que indica que no hemos encontrado una asociación entre estas dos variables. El alumno intenta mantener una frecuencia dada en el total de la secuencia, pero no hay una relación directa ni inversa entre el número caras de un mismo alumno en los dos trozos de la secuencia.

La longitud de la racha más larga

En las investigaciones de Green se vio que, en general, los alumnos subestiman la longitud de las rachas de un mismo resultado. Presentamos en la figura 2 la longitud de la racha más larga en las sucesiones producidas en nuestro caso por los dos grupos de alumnos, a fin de compararlas con los resultados obtenidos por Green.

Al estudiar la figura 2, vemos que los alumnos producen rachas cortas. Aunque, con frecuencia máxima, los alumnos producen rachas de 4 ó 5 elementos, un porcentaje importante de alumnos no pasa de rachas de 2-3 sucesos, mientras que, en la distribución teórica, la máxima probabilidad es para la longitud de la racha más larga es de 5 ó 6 elementos. Aparecen también los sujetos que Green denomina «alternantes» (11 casos) que alternan entre cara y cruz en toda la secuencia, la mayor parte alumnos de 18 años. Aparecen también los «replicantes» que producen

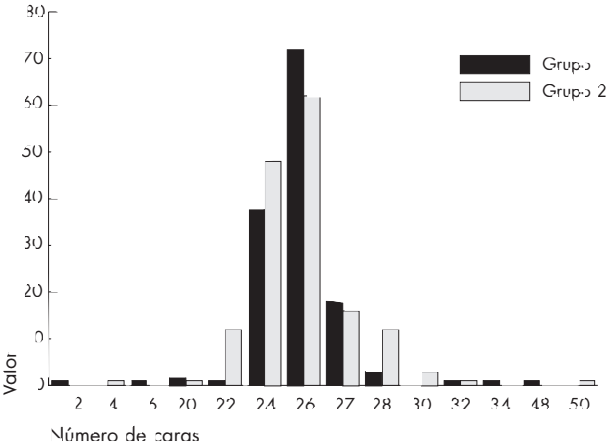


Figura 2. Frecuencias de la longitud de la racha más larga

una sola racha o una racha muy larga de 24, 25 e incluso 50 resultados seguidos iguales. Todos estos datos parecen apuntar a dificultades en la percepción de la independencia de los experimentos repetidos.

Para autores como Bar-Hillel y Wagenaar (1993) o Shaughnessy (1992), la heurística de la representatividad podría explicar la alta tasa de alternancias en las tareas de simulación de secuencias aleatorias. La característica de equiprobabilidad de los dos resultados, junto con alguna irregularidad en el orden de aparición, se espera que aparezcan no sólo a largo plazo, sino en segmentos cortos; la insistencia por la «aleatoriedad» en pequeñas sucesiones acarrea la «no aleatoriedad» en sucesiones largas.

Número de rachas

Una variable relacionada con la anterior es el número total de rachas producidas en las secuencias de los alumnos. que en nuestro caso fue, en general, alto. El valor esperado teórico del número de rachas es 25,5, mientras que en nuestros alumnos obtenemos un valor medio superior de 30,015 y un porcentaje alto de alumnos que producen 35 o más rachas. Hay también alumnos que producen una única racha, o unas pocas, aunque, al igual que en la investigación de Green han sido muy escasos.

Todos estos resultados coinciden con los de Green, incluso en el caso de nuestros alumnos de dieciocho años. Por ello confirman la hipótesis de este autor de que las propiedades que los alumnos atribuyen a las secuencias aleatorias no cambian con la edad.

Implicaciones para la enseñanza de la Estadísticia

En nuestro estudio hemos mostrado cómo los alumnos son capaces de reconocer modelos matemáticos en las secuencias de resultados aleatorios y los utilizan para realizar un juicio sobre la aleatoriedad de las mismas y en las tareas de generación de secuencias aleatorias, aunque, en ocasiones las concepciones sobre la aleatoriedad no correspondan a las que tratamos de enseñarles. Esto es comprensible debido a las enormes dificultades psicológicas y filosóficas ligadas a la idea de aleatoriedad y a la complejidad de este concepto.

Sin embargo, es importante que, gradualmente los alumnos vayan adquiriendo una idea lo más completa y correcta posible de las características de la aleatoriedad, ya que este concepto tiene muchas aplicaciones en la vida real, particularmente en las situaciones de muestreo y en el diseño de experimento en áreas diversas. Asimismo, las técnicas de simulación, fáciles de implementar con los ordenadores y que se aplican a la solución de muchos problemas en diferentes profesiones y ciencias, se basan en la idea de aleatoriedad.

En nuestro estudio hemos mostrado cómo los alumnos son capaces de reconocer modelos matemáticos en las secuencias de resultados aleatorios y los utilizan para realizar un juicio sobre la aleatoriedad de las mismas y en las tareas de generación de secuencias aleatorias, aunque, en ocasiones las concepciones sobre la aleatoriedad no correspondan a las que tratamos de enseñarles.

Por otro lado, los diseños curriculares sugieren que la enseñanza de la probabilidad se base precisamente en la experimentación con dispositivos como dados, ruletas, monedas, etc., donde los alumnos tendrán abundantes ocasiones de recoger datos sobre secuencias de resultados aleatorios. Estas actividades deben, sin duda, reforzarse y aprovecharlas para analizar las características de las mismas y ayudar al alumno a construir progresivamente unas intuiciones correctas sobre la aleatoriedad. Estamos de acuerdo con Hawkins y otros (1991), cuando indican que se dedica, en general, poco tiempo al análisis de los experimentos aleatorios y al estudio de sus características y que ello puede ser el origen de muchas concepciones erróneas en el campo de la probabilidad.

La experimentación, registro y análisis de las secuencias producidas con dispositivos diversos como monedas, dados, ruletas, chinchetas, etc., puede servir para integrar el estudio de la probabilidad con el de la estadística. La introducción gradual de los conceptos y notación probabilística servirá para explicar matemáticamente las regularidades observadas en los datos recogidos. Esperamos que, a partir de estas experiencias, los alumnos adquieran las características esenciales de los fenómenos aleatorios y descubran progresivamente los diferentes modelos probabilísticos implícitos en las secuencias de resultados aleatorios.

Referencias

BATANERO, C. y L. SERRANO (1995): *Aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas*, UNO, 15-28.

BATANERO, C. y L. SERRANO (1999): «The meaning of randomness for secondary school students», *Journal for Research in Mathematics Education*, n.° 30(5), 558-567.

BAR-HILLEL, M. y W. A. WAGERAAR (1991): «The perception of randomness», *Advances in Applied Mathematics*, n.° 12, 428-454.

FALK, R. (1981): «The perception of randomness», *Proceedings of the V PME Conference*, Grenoble, 222-229.

FALK, R. y C. KONOLD (1997): «Making sense of randomness: Implicit encoding as a basis for judgment», *Psychological Review*, n.° 104, 310-318.

FINE, T. L. (1973): *Theories of Probability: An examination of foundations*, Academic Press, New York.

GARFIELD, J. B. (1995): «How students learn statistics», *International Statistical Review*, n.° 63(1), 23-54.

GREEN, D. R. (1983): «A Survey of probabilistic concepts in 3000 students aged 11-16 years», en D. R. GREY y otros (eds.), *Proceedings of the I International Conference on Teaching Statistics, vol. 2*, University of Sheffield, 766-783.

GREEN, D. R. (1989): «Schools students' understanding of randomness», en R. MORRIS (ed.): *Studies in Mathematics education, vol 7: The Teaching of Statistics,* Unesco, París, 27-39.

GREEN, D. R. (1991): *A longitudinal study of pupil's probability concepts. Technical report ME90/91,* University of Technology, Loughborough.

Luis Serrano
J. J. Ortiz
Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Facultad de Educación y Humanidades (Melilla)
Carmen Batanero
M.ª Jesús Cañizares
Facultad de Educación. Campus Cartuja (Granada)

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»

HAWKINS, A., F. JOLLIFFE y L. GLICKMAN (1991): *Teaching Statistical Concepts*. Longman, London.

KAHNEMAN, D., P. SLOVIC y A. TVERSKY (1982): *Judgement under uncertainty: heuristics and biases*, University Press, Cambridge.

KONOLD, C. (1995): «Confessions of a coin flipper and would-be instructor», *The American Statistician*, n.° 49 (2), 203-209.

M.E.C. (1992): *Matemática. Secundaria Obligatoria*, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid.

N.C.T.M. (1989): «Curriculum and evaluation standars for school Mathematics», *Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics*.

PIAGET, J. y B. INHELDER (1974): *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant*, Presses Universitaires de France, París.

SHAUGHNESSY, J. M. (1996): «Emerging research issues in the teaching and learning of probability and statistics», *ICME 8*, Sevilla.

SERRANO, L., C. BATANERO y M. J. CAÑIZARES (1999): «Concepciones sobre distribuciones aleatorias planas en alumnos de secundaria», *Epsilon*, n.° 43-44, 149-162.

SERRANO, L., C. BATANERO y J. D. GODINO, (1991): «Sucesiones de ensayos de Bernoulli y procesos estocásticos asociados», *Actas de las V Jornadas Andaluzas de Educación Matemática*, Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, Universidad de Granada, 233-245.

TOOHEY, P. G. (1996): *Adolescent perceptions of the concept of randomness*, Master Thesis, University of Adelaide.

Es el famoso juego de *muertos y heridos*.
¿Qué nombre sale?

ENERO 2001

LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES	SÁBADO	DOMINGO
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Mi rostro está hecho con las letras de la palabra EULER. ¿Sabrías encontrarlas?

Calle Limonero, 28 - 28020 Madrid
Teléfono y Fax: 91 459 11 19
smpm@smpm.es
www.smpm.es

- Haz, malla, nabla, par, palabra, rama, tabla,...
- Derivada, unidad, indeterminada, medida, coordenada, redondear, radicando, dependiente, independiente,...
- Álgebra, altura, biunívoca, teorema, periódica, potencia, coordenada, cota, topología, curva, suma, simetría, prisma, evoluta,...

- Límite, mil, logaritmo, normal, lado, Bessel, lógica, exagonal, Lagrange, centesimal,...
- Ocho, octaedro, octógono, operación, optimización, orden, original, ortocentro, óvalo,...
- Averroes, Avicena, Bubnov, Castelnuovo, Moivre, De Vries, Graves, Kelvin, Lavoisier, Roberval, Viète, Vitruvio,...
- Dos, siete uno ocho dos ocho uno ocho dos ocho cuatro...
- Abel, Barrow, Cantor, Diofanto, Euclides, Fourier, Gauss, Hamilton, Itard, Jacobi, Klein,...
- Apotema, baricentro, tractriz, logaritmo, regla, abeliano, racional, vectorial, extrapolación, exponencial, exaquisoctaedro, goniométrica, antisimétrica, circunferencia,...
- Arco, cicloide, coclase, decaedro, decágono, escala, factorial, incógnita, sucesión, rectángulo,...
- Voltaire, Viète, Tropfke, Hermite, Steele, Babbage, Rolle, Oresme, Méré, Legendre, Heine,...

MARZO 2001

LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES	SÁBADO	DOMINGO
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

Encuentra en la figura las letras de una matemática

Calle Limonero, 28 - 28020 Mad
Teléfono y Fax: 91 459 11 19
smpm@smpm.es
www.smpm.es

SUMA 36
febrero 2001, pp. 33-41

En la búsqueda de lo importante en el aula de Matemáticas

José M.ª Chamoso Sánchez
William B. Rawson

ARTÍCULOS

Se quiere explicar cómo se concibe el desarrollo de una enseñanza de Resolución de Problemas o de Investigaciones en el aula de Matemáticas. Para ello, se presentan diversos extractos de transcripciones de estudiantes de 10-11 años, obtenidas en clase de Matemánticas, cuando estaban resolviendo problemas. Con ellas se descubre cómo trabajan de forma similar a como lo hace un matemático cuando se enfrenta a un problema: construyen, experimentan, se apoyan, divergen, preguntan, corrigen, comprueban, explican, dirigen, contestan, suponen, generalizan,…

EN LOS TEXTOS ESCOLARES surgen, hoy en día, diferentes términos como *problema abierto*, *problema cerrado*, *problema,* e incluso *investigación,* situados en epígrafes como «situaciones y problemas», «actividades», «curiosidades», «investigaciones», «piensa un poco»… Y aparecen diferentes acepciones del significado de «Resolución de Problemas» e «Investigaciones».

Todos esos epígrafes diferentes nos plantean una cuestión inicial. ¿Por qué son necesarios tan diversos términos? Es posible que sea para llamar la atención del joven lector. Podría ser para hacer sutiles distinciones: por ejemplo, en un nivel básico hay que distinguir entre la forma de clasificar un problema y las diversas maneras de resolverlo. También se puede considerar la distinción usual entre «Resolución de Problemas» e «Investigación». Lo primero de ello se refiere al hecho de intentar conseguir la solución de un determinado problema utilizando las estrategias y técnicas que parezcan convenientes, o a través de una labor investigadora. Y se suele llamar «Investigación» cuando, además, se anima a ser curioso, a buscar estrategias alternativas, a considerar qué sucedería si se cambian ciertas condiciones o a intentar generalizar el problema.

> Sin embargo, en términos abiertos es acertado entender Resolución de Problemas como una actividad convergente donde los estudiantes tienen que conseguir una solución de un determinado problema, mientras que Investigación debería ser visto como una actividad más divergente. En una investigación se anima a los estudiantes a pensar en estrategias alternativas, a considerar qué sucedería en una determinada línea de acción, o a ver si ciertos cambios cambiarían los resultados (H.M.I., 1985: 42).

Es interesante esa distinción, aunque en ocasiones nos damos cuenta de que durante la resolución de un problema realizamos una labor característica de lo que se llama investigación en el sentido anterior. Eso también ocurre con frecuencia cuando experimentamos con estrategias alternativas.

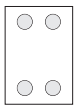
Es decir, en la práctica realmente estamos trabajando en una actividad convergente. Parece que esas expresiones se utilizan para referirse a la idea de que *los alumnos trabajen creando sus propias matemáticas*, en contraposición a la de trabajar en cuestiones o ejercicios que consisten en la aplicación automática de una destreza o algoritmo previamente aprendido. Llamémoslo investigación, por ejemplo.

Todo ello es importante, pero nos preguntamos: ¿eso es lo importante?

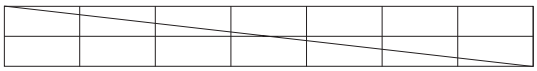
Ejemplos de investigaciones que se pueden proponer en un aula

En diversas fuentes y diferentes libros existen gran cantidad de ejemplos de actividades como las siguientes:

1. *Las chinchetas.* ¿Cuántas chinchetas se necesitan para fijar distintas hojas de papel sobre un tablero? Cada hoja de papel es igual a las demás, y para quedar fija acordamos que necesita una chincheta en cada esquina.

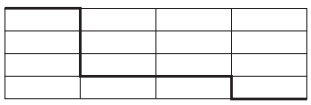


2. *La diagonal de un rectángulo.* ¿Cuántas líneas corta la diagonal de un rectángulo?



3. *Los colores de la bandera*. Una bandera cuadrada está dividida en cuatro partes iguales. ¿Cuántas banderas diferentes se pueden representar de esta forma cuando únicamente es posible utilizar dos colores distintos?

4. *Los números y las cuatro operaciones.* ¿Cuántos números distintos se pueden formar con cuatro cuatros y las operaciones +, –, x, :? ¿Y con cualquier operación?
5. *Los cuadrados.* ¿Cuántas formas distintas se pueden confeccionar con 3 cuadrados unidos al menos con un lado?
6. *Los sellos*. Si tenemos muchas estampillas de 3 pts. y 5 pts., ¿se pueden conseguir hacer todos los valores hasta 50 pts.?
7. *Los números de las casas.* Se tienen los números 2, 5 y 7. ¿Cuántos números de casas se pueden conseguir usando estos tres números solamente una vez?
8. *Las rutas.* ¿Cuántas rutas distintas hay de *A* a *B*?



¿Cuántas formas distintas se pueden confeccionar con 3 cuadrados unidos al menos con un lado?

Escoge un número cualquiera: si es par, divídelo por dos; si es impar, súmale uno. Repítelo cuantas veces puedas. ¿Qué ocurre?

9. *Números pares e impares.* Escoge un número cualquiera: si es par, divídelo por dos; si es impar, súmale uno. Repítelo cuantas veces puedas. ¿Qué ocurre?
10. *La calculadora.* Supongamos que tienes una calculadora cuyos únicos botones que funcionan son 4, 3, –, x, =. ¿Qué números se pueden conseguir?

Éstas, y otras muchas, se pueden encontrar en diversos textos, y cada profesor tiene su propia opinión y sus preferencias sobre la eficacia de cada una de ellas. Todas son importantes pero, sin embargo, nos preguntamos: ¿eso es lo importante?

Diversas clasificaciones de investigaciones

Se pueden considerar los ejemplos anteriores y trabajarlos como investigaciones. Éstas se pueden clasificar de diversas formas. Una de ellas podría ser la de Burghes (1984), que distingue cuatro tipos:

a) *Investigaciones Eureka:* se caracterizan por necesitar una idea adecuada («feliz idea») para resolver el problema, sin la cual pocos progresos útiles pueden hacerse. Ejemplo: el cuadrado mágico.

b) *Investigaciones del tipo escaleras mecánicas*: aquéllas que no dependen de una idea sino que permiten lograr ciertos progresos a lo largo de la investigación. Ejemplo: la diagonal de un rectángulo.

c) *Problemas de decisión*: obtenidos originariamente de situaciones reales en las cuales se deben efectuar decisiones sin que exista evidencia clara de cuáles serían las más adecuadas. Ejemplo: las rutas.

d) *Problemas reales*: aquéllos que tienen relación directa con el ciudadano, pero que el contexto en que se encuentran tiene poco que ver con Matemáticas. Ejemplo: los sellos.

Otra posibilidad sería clasificarlas según el objetivo de las mismas (Rawson y Chamoso, 1999):

a) para contactar con la vida diaria,

b) para introducir un concepto nuevo,

c) para desarrollar y fortalecer conceptos conocidos,

d) para desarrollar el razonamiento y la explicación.

También se podría hacer de forma similar a como lo hace Corbalán (1994) cuando se refiere a juegos que, según él, pueden ser:

a) *De conocimiento*, aquéllos que hacen referencia a uno o varios de los tópicos habituales de los programas de Matemáticas (cita ejemplos numéricos, de geometría y de probabilidad).

b) *De estrategia*, en los que se trataría de poner en marcha uno o varios procedimientos típicos de resolución de problemas o los modos habituales de pensamiento matemático (como el Nim o el Sol y Sombra).

Existen otras muchas posibilidades de organización. Todas ellas son importantes, pero nos preguntamos: ¿eso es lo importante?

¿Qué es lo importante?

Gairín Sallán (1996), en su artículo *Del dicho al hecho…* y basándose en su experiencia, hace un gran esfuerzo por explicar dos argumentaciones diferentes de la demostración de las estrategias de resolución de un ejemplo concreto: inicialmente de forma «dicha», con la necesidad de utilizar unos conocimientos matemáticos elevados, de la misma forma que lo haría cualquier libro de texto, y posteriormente de forma «hecha», con demostraciones que se pueden esperar de un alumno trabajando de forma similar a como lo hacen los matemáticos. Pero quizás sería más cercano si pudiésemos descubrir cómo funciona la mente de cada estudiante cuando trabaja, en vez de cómo cree el profesor que funciona dicha mente cuando desarrolla una cierta actividad.

Nos referimos a investigación como un viaje con ideas hasta donde se pueda, de forma libre, con diálogo y discusión entre los estudiantes.

Nos referimos a investigación como un viaje con ideas hasta donde se pueda, de forma libre, con diálogo y discusión entre los estudiantes. Es importante elegirlas de forma adecuada para utilizarlas en el momento concreto. Aunque el insertar varias de ellas anteriormente ha sido únicamente con la pretensión de su inclusión en el artículo como elemento complementario y decorativo, ello no ha sido óbice para que la lista definitiva haya sido confeccionada después de arduas discusiones. Por ejemplo, había pensamientos divergentes acerca de la pertinencia del problema de la calculadora, a pesar de considerarlo muy interesante y de utilizarlo frecuentemente como elemento de enseñanza en clase. Pero se recordó que en cierta ocasión había tenido resultados interesantes con un alumno: se trataba de un estudiante que no solía hacer los deberes, pero ante el reto propuesto por el profesor de si se podían construir con esos botones todos los números hasta el 100, no sólo llegó al día siguiente con el problema resuelto, sino que se presentó con un delicioso folio doble, escrito por los dos lados, en el que se comprobaba que era posible hacerlo hasta el número 132. Normalmente no le gustaba repetir actividades similares, pero en esta ocasión lo hizo gustoso porque él tenía el control del trabajo que efectuaba. Es decir, no sólo llegó con los deberes hechos, sino que llevó realizado más de lo que se le había solicitado. Quizás en otras ocasiones se había utilizado como problema rutinario y no se habían descubierto sus ventajas. Quizás no era tan importante el problema en sí, sino la forma de su utilización.

Otra investigación que presentó opiniones encontradas dignas de mencionar en relación con su inclusión fue la de los sellos. Su simplicidad parecía que no daba más de sí que ser prácticamente un ejercicio, aunque permitiese, por ejemplo, generalizar cambiando los datos del enunciado. Nuestra sorpresa fue grande al caer por casualidad en esos momentos en nuestras manos el libro de Gardiner *The Art of Investigation* (1989), escrito para lectores con un cierto nivel de conocimientos en Matemáticas y en el que, después de una seria introducción en que trata de explicar qué entiende por investigación, se centra en dos casos concretos para ejemplarizarlos de forma práctica. Uno de ellos es el mencionado de los sellos, al que dedica 50 densas páginas tratando de explotar las posibilidades del mismo (tablas, múltiplos y divisores, ecuaciones diofánticas, construcciones geométricas, áreas...). Quizás no se había pensado suficientemente el problema y sus posibilidades.

Interesante es la de la diagonal del rectángulo. Se ha experimentado en el aula y ha servido para demostrar que no se debe subestimar la capacidad de raciocinio de los estudiantes debido a su corta edad. Se ha hecho de la siguiente forma: se ha observado con vídeo una clase de 20 per-

sonas de 10-11 años trabajando en varios grupos. Se ha presentado la misma investigación a alumnos de Magisterio y a profesores en activo, para que trabajen con ella y descubran sus dificultades. Posteriormente se les ha puesto el vídeo. Se ha utilizado como estímulo el usar el mismo tópico en diversos ambientes. Muchos docentes piensan que realizar esas investigaciones suele ser demasiado difícil para los alumnos de esos años, y que nunca lo harán. Pero pueden comprobar en el vídeo que no es así en realidad pues, si se les permite, nunca se puede suponer lo que los chicos son capaces de hacer. Lo que es cierto es que no se llegará a saber la capacidad que puede alcanzar una persona si no se le da la oportunidad de discutir alternativas, si únicamente preguntamos contenidos, si nos restringimos a seguir las indicaciones de un libro de texto.

Se había acordado que en la explicación inicial del planteamiento de la investigación la profesora hablara poco, hiciera preguntas muy breves y dejara el trabajo para los estudiantes. Con posterioridad se les dejaba actuar, en grupo, con dos profesores pendientes únicamente de comprobar si una pregunta adecuada en forma de sugerencia era necesaria en algún caso. Se observaron conversaciones en los grupos de alumnos como las que siguen:

Niña A: *Eso es porque es exactamente lo mismo.*

Niña B: Si tú cortas este pedazo en dos partes y lo doblas por la mitad, entonces…

Niña C: No te preocupes acerca de eso: si es más ancho ocurre exactamente lo mismo. Si es más estrecho también.

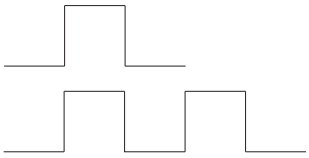
Y conjeturan:

Niña D: *Se suman los lados de las cajas menos dos, eso es igual al número de cortes.*

Después de esta hipótesis alguien observa que hay un caso especial que no la cumple, el 1 x *n*. Por tanto, hay que seguir hasta que se llega a soluciones parciales.

Es decir, se observa que aparecen muchas oraciones condicionales, el método de investigación de formular conjeturas. Y son capaces de separar lo que necesitan de lo que no necesitan. Esto, realizado por estudiantes de 10-11 años, hace que parezca que realmente se esté trabajando en forma de investigación de la misma forma que lo haría un investigador: observan primero, explican lo que observan y conjeturan una fórmula general que comprueban con posterioridad. ¿No es eso lo que queremos?

Veamos otro caso. Se trata de construir puertas con palillos o bloques. Una es posible hacerlo con 5, dos con 9, tres con 13 y así sucesivamente.



…se observa que los estudiantes resuelven:

Construyendo…

Experimentando…

Apoyando…

Divergiendo…

Preguntando…

Deduciendo…

Corrigiendo…

Se pregunta: ¿cuántas barras son necesarias para construir 10 puertas? ¿Y en general? Se ha experimentado en clase y grabado en vídeo a dos alumnos. En la transcripción de la conversación se ha podido descubrir lo que los alumnos hacen: construyen, experimentan, se apoyan, divergen, preguntan, deducen, corrigen, comprueban, explican, dirigen, contestan, suponen, generalizan. Es decir, se observa que los estudiantes resuelven:

- *Construyendo*, en lo que tiene que ver con el desarrollo de la estructura, ya sea manipulativa o numéricamente: «...Si multiplicamos por 5, será igual 10 veces», «Pon a continuación encima el capuchón del bolígrafo», «Comprueba el 4 de nuevo. Quitamos 1, quitamos 2, 4 igual... pero sólo quitas 1, ¿no? (mientras construye)»...
- *Experimentando*, intentando ver lo que ocurre en algunos casos particulares: «Intentemos para 17», «Intentémoslo con otro»...
- *Apoyando* afirmaciones de lo que se ha dicho, aunque no se sea plenamente consciente del procedimiento: «Sí, por tanto tenemos que ir bien ahora», «De acuerdo, correcto. Y eso para el número que tú quieras»...
- *Divergiendo*, discrepando, mostrando nuevos caminos que puedan abrir nuevas posibilidades del problema: «¿Funcionará también para los números impares?»...
- *Preguntando*, como parte fundamental del proceso de resolución del problema, en que los alumnos examinan cómo se compone la estructura: «¿Era 6 el siguiente?», «Sí... ¿y si aplicamos esto para 10?»...
- *Deduciendo* (de una experiencia particular los estudiantes utilizan el lenguaje para expresar relaciones que reconocen): «10 tiene que ser 41, porque si añadimos cuatro cada vez no sería 42»...
- *Corrigiendo*, lo que demuestra cierta capacidad de razonamiento y que entienden una cierta parte del

problema: «45 no puede estar bien», «Tiene que estar confundido entonces. Quizás sea 8»...

- *Comprobando* para verificar el correcto desarrollo del razonamiento: «Vamos a comprobarlo», «Vamos a comprobar 8 de nuevo. 4 igual a 17, 5 igual a 21»...
- *Explicando*, enlazando experiencias pasadas y presentes con los razonamientos que se están llevando a cabo: «Acabamos de resolverlo para 4. Si consideramos eso anterior por 2, hace 18, quitamos 1, es 17. Por tanto se cuenta por 2 y quitamos 1...», «Será 61 porque mira, añadiendo 41 igual a 62, pero recuerda, esto es cuando estamos quitando 2»...
- *Dirigiendo* la acción de otras personas con el fin de instruir, demostrar y formalizar la estrategia que se está utilizando: «...por tanto si quitas 2 ahí y 3 allí, ¿qué quitarías para 6? Probemos el 6», «No, haz 9»...
- *Contestando* de forma crítica y justificada las afirmaciones realizadas, añadiendo otros puntos de vista: «No puede ser 33, tiene que ser 32. Tienes que quitar otra, ¿recuerdas?», «No, haz 9. Debería ser 37. Si 8 es 33 y añadimos 4, será 37»...
- *Suponiendo*, formulando hipótesis y conjeturas: «10 podría ser igual a 42 entonces», «73 debería funcionar»...
- *Generalizando*, estudiando qué ocurriría en cualquier caso: «Por tanto tenemos que averiguar qué sería para cualquier secuencia de cualquier número»...

En esas situaciones, además de lo anterior se observan circunstancias interesantes dignas de mencionar:

a) *Los estudiantes toman la iniciativa.* Se observa cómo son los alumnos los que tienen el control. Por ejemplo, aparece una mala notación pero fue decidida por ellos. En el problema de las diagonales no parece correcto poner 2 x 3 = 3, con el sentido de *largo x ancho = n.º de cortes de la diagonal del rectángulo*. Pero fue su elección. En otras circunstancias se han observado representaciones parecidas: en el de las puertas escribían 2=9. ¡Qué dirían los padres si lo vieran! El sentido está bien, pero sólo es entendible si nos situamos en el contexto de su resolución. Lo aceptamos como una forma corta, cómoda y sencilla de expresarse sobre el papel. La ventaja de permitir que los alumnos experimenten sus representaciones da oportunidad al profesor de hablar con ellos sobre su significado. Hay que explicarles que tienen que pensar por qué escriben y quién va a leer lo que escriben.

...

Comprobando...

Explicando...

Dirigiendo...

Contestando...

Suponiendo...

Generalizando...

b) *Resolución de dudas.* De la misma forma surgían imprecisiones cuando la diagonal pasaba por un vértice común a cuatro cuadrados, ya que se podía entender que se debía contar una o dos veces (es decir, era punto común de una línea vertical y otra horizontal). Fue un buen momento que aprovechó el profesor para animar un diálogo entre los estudiantes para llegar a un tipo de acuerdo, en el que se habló de qué es una línea, qué se entiende por punto de corte, concepto de tangencia... Finalmente decidieron cómo considerarlo, y lo hicieron como quisieron (de hecho un curso lo consideró como un único punto de corte y otro como dos).

c) *La importancia del profesor.* En una ocasión en que se estaba trabajando de forma similar, después de que el profesor planteara la investigación a dos alumnos, al dejarles que lo resolvieran observaba cómo a los cinco minutos estaban convencidos de que habían resuelto el problema. Pero se mantuvo callado, paciente, aguantó sin decir nada con gran valentía y obtuvo su recompensa: los chicos, de forma conjunta pero solos, sin que el profesor añadiera una sola palabra, retomaron el problema hasta que obtuvieron la respuesta correcta y una generalización de la que ambos estaban convencidos (después de treinta minutos). Con posterioridad se les vio mucho más animados al hacer un segundo problema. Esto también nos lleva a plantear y meditar que, en muchas ocasiones, esta forma de trabajar lleva mucho tiempo. Pero, aunque se emplee más tiempo del que se suele disponer en otros casos, los estudiantes han trabajado hasta el último momento y, lo que es más importante, han resuelto el problema.

d) *Errores de los alumnos en el proceso.* La corrección del profesor es la reacción inmediata que surge en la mente de éste, pero para los estudiantes puede ser más positivo abstenerse y comprobar si son capaces de resolver las dificultades por sí mismos, de forma que descubran el camino que se puede seguir y la solución adecuada.

e) *Utilización de material.* Los estudiantes emplean elementos manipulativos para formarse una idea de la

solución y formalizarla, aunque todo depende de la dificultad de encontrar ésta. Por ello parece importante proporcionar a los alumnos oportunidades de utilizar instrumentos concretos que puedan ayudar a familiarizarse con el problema y a buscar una solución, de manera que les ayude a establecer una relación entre el pensamiento y la acción. Ello también puede servir para comprobar resultados parciales obtenidos o la solución final, lo que ayuda a conseguir pequeños éxitos.

f) *La importancia de la distribución de los recursos.* Se pudo observar en el caso mencionado en el apartado *c* cómo el chico que tenía bolígrafo y papel, que en principio parecía ser el más apocado y tímido, era el que iba tomando la iniciativa convirtiéndose en el auténtico director. Eso se ha comprobado en otras ocasiones al realizar experimentos en un aula, distribuida en diversos grupos de 4 o 5 personas trabajando en la misma investigación de forma paralela: a cada miembro de algunos grupos se le dio un papel con el problema, en otros se dejó un par de hojas para todos los componentes y en otros casos únicamente una para todo el equipo. Pues fue precisamente esa forma de reparto la que marcó la posterior manera de trabajo de cada grupo, lo cual afecta posteriormente a la calidad del diálogo y discusión de las respuestas: los que tenían una para cada miembro del equipo trabajaron de forma casi exclusivamente individual; cuando se les había dado dos, se hicieron dos subgrupos, y cuando había una única para todo el grupo el trabajo era realmente de un único equipo conjunto.

g) *Trabajo en grupo.* Se veía una motivación grande durante la resolución de un problema cuando explicaban el proceso a un compañero. También es interesante observar cómo cada grupo trabajaba en un ambiente de respeto, con lo cual cada uno de sus miembros desempeñaba un papel significativo. En los ejemplos anteriores se puede comprobar el alto nivel de participación y aportación de ideas. El respeto mutuo ayuda a expresar esas ideas en un ambiente confortante y en una sociedad democrática. Esto es esencial porque cada componente presenta peculiaridades distintas: uno prefiere informar, otro preguntar, algunos son muy hábiles en concretar los puntos principales, otros prefieren bromear…

h) *La importancia de la superación de etapas.* Conseguir pequeños éxitos proporciona alegría y confianza en la experiencia. Además, esas fases superadas deben servir al profesor para que considere el grado de consecución obtenida. Y celebrar ante la clase la superación de etapas puede aprovecharlo para motivar a los alumnos: el pensamiento se estimula cuando hay que explicar el proceso de llegar a una solución.

i) *Poca expresión escrita.* Los estudiantes normalmente no escriben mucho, y lo que escriben no suele expresar normalmente lo que han pensado. No suele ser significativo. Tampoco lo hacen ordenadamente. Éste es un aspecto de la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas sobre el que se necesita mucha información. Rawson (1997), Mitchell y Rawson (1998, 2000) han estudiado distintas posibilidades que utilizan los alumnos de Primaria cuando escriben sobre Matemáticas. De esos estudios sobresalen las pocas ocasiones del desarrollo normal del aula en los que los profesores ayudan y dirigen a sus alumnos en la destreza de escribir el proceso de resolver problemas de distintas formas.

En algunos momentos del difícil camino diario de la enseñanza nos preguntamos si los estudiantes son capaces de realizar una cierta actividad, y organizarse y pensar para lograr una respuesta adecuada. Y parece muy claro: lo hacen siempre que se les dé oportunidad de hacerlo.

Todo ello surge de las oportunidades que brotan del diálogo, de la interacción de los estudiantes cuando se comunican. Por ejemplo, en el caso de las puertas, los estudiantes hicieron un trabajo de generalización muy bueno, pero fue porque estaban en situación de hacerlo. Y los alumnos no eran especialmente brillantes; eran de nivel medio. En algunos momentos del difícil camino diario de la enseñanza nos preguntamos si los estudiantes son capaces de realizar una cierta actividad, y organizarse y pensar para lograr una respuesta adecuada. Y parece muy claro: lo hacen siempre que se les dé oportunidad de hacerlo.

Pero, ¿qué es lo realmente importante?

Existen diversas formas de entender el significado de las Matemáticas, así como diferentes puntos de vista de cómo se pueden realizar los procesos de aprendizaje con relación a ellas. Por ejemplo, algunos consideran que tiene que haber

una solución para cada problema. Para ellos las Matemáticas consisten en encontrar respuestas a los problemas, y su enseñanza suele ir dirigida a conseguir resultados, es decir, a obtener la respuesta correcta.

En contraposición a la consideración de que el aprendizaje no es más que instrucción, otros tienen un punto de vista de las Matemáticas como algo de naturaleza creativa que requiere iniciativa, imaginación, reflexión y flexibilidad. Sin embargo consideran la Resolución de Problemas como identificar la categoría del problema, seleccionar la estrategia adecuada y aplicarla. Es indudable que se deben enseñar y conocer estrategias, pero hacerlo de esta forma convertiría las Matemáticas en algo similar a una mera aplicación de unas reglas de manera mecánica.

Otra posibilidad es entender las Matemáticas como un proceso que enfatiza la necesidad de entender, siguiendo los procedimientos y destrezas de un investigador. En ese caso se deberían presentar los problemas como algo que estimule el trabajo de los estudiantes, así como una oportunidad para que los resolutores puedan desarrollar un método de trabajo efectivo. De esa forma, las actividades servirían como experiencias que desarrollen estrategias, permitan formular conjeturas y tabular los resultados, identifiquen los objetivos, animen a la discusión y a conseguir acuerdos conjuntos... Así, Resolución de Problemas enfatiza la naturaleza interactiva de las Matemáticas y favorece que los alumnos tomen decisiones para conseguir los objetivos que se pretenden. Con ello pasan de ser pasivos receptores del conocimiento a estudiantes activos. Esto hace que presenten una amplia diversidad de respuestas. También pretenden presentar situaciones que les permitan generalizar de acuerdo con sus niveles de desarrollo. Esta habilidad de generalización supone un paso importante, ya que ser capaz de adquirir una destreza en determinadas condiciones es algo bien distinto que mostrar diferentes destrezas en la misma situación, o la misma destreza en diferentes situaciones. Todo ello no elimina el valor de dominar las destrezas del cálculo, pero debe ser con la finalidad de considerarlas como herramientas básicas para la solución de problemas.

Otra posibilidad es entender las Matemáticas como un proceso que enfatiza la necesidad de entender, siguiendo los procedimientos y destrezas de un investigador. En ese caso se deberían presentar los problemas como algo que estimule el trabajo de los estudiantes, así como una oportunidad para que los resolutores puedan desarrollar un método de trabajo efectivo.

Bruno D'Amore (1997) relata, en su artículo *¿Las imágenes mentales de los textos de las situaciones-problema influencian su resolución?*, la reveladora frase que le dio un estudiante de diez años ante un problema del que no entendía exactamente el enunciado:

> Lo importante no es comprender, sino resolver el problema.

Pero, realmente, ¿qué es lo que pretendemos con la educación? Recordar, comprender y ser capaz de utilizar esos recuerdos, pero no situados en tres niveles diferentes, sino presentes en cada situación y en cualquier actividad humana.

No se debe confundir educación con memorización porque, en realidad, saber con precisión que Felipe II fue Rey de España, el número de años que vivió, la extensión de sus dominios bajo su mandato y el nombre de sus hijos no parece demasiado relevante. Eso se puede consultar en cualquier libro que trate sobre el tema, pero una enciclopedia con piernas no suele entenderse como una persona bien preparada. Quizás sea más importante conocer qué tuvieron que ver esos hechos con el desarrollo de la humanidad, en su momento y en lo relacionado con la situación actual. Aunque tampoco se puede caer en el polo opuesto identificando la educación como mero raciocinio. Según Bruner (1962: 34):

> Enseñar no es crear pequeñas bibliotecas vivientes, sino más bien que los estudiantes piensen por ellos mismos, matemáticamente, a considerar cuestiones como lo hace un historiador, a tomar parte en el proceso de construir el conocimiento. El conocimiento es un proceso, no un resultado.

También se debe distinguir educación de mecanización, porque hacer hincapié en trabajar en una larga lista de sumas puede ser una actividad matemática trivial. Esas actividades necesariamente no hacen a los estudiantes ser especialmente competentes cuando utilizan números. Quizás también sería interesante tener en cuenta cómo cada persona interpreta su significado. Veamos un ejemplo que puede mostrar esa distinción entre educación y mecanización. Se necesita imaginación para convertir una página de sumas en una actividad que estimula la acción de pensar. Para ello hay que mirar dicha página con una visión nueva. Por ejemplo, un profesor inquieto puede sugerir, en primer lugar, hacer las sumas que no se pueden realizar fácilmente de forma mental. Posteriormente se trata de inventar el relato de un problema donde la solución:

- esté comprendida entre las respuestas de la primera y la última suma de cada fila de sumas,

- esté entre la solución más grande y más pequeña de cada fila,
- es mayor/menor que la solución más/menos grande de cada fila de sumas,
- es mayor/menor que la mitad de las soluciones mayores de cada fila...

Muchos alumnos y profesores comentan que lo que hacen normalmente los estudiantes es preparar un examen, y eso se suele hacer habitualmente «el día antes». También se habla de atender a la diversidad, ya que cada alumno debe mantener su propio ritmo y conseguir sus resultados. Luchar contra eso es más fácil si se intenta que los estudiantes piensen por sí mismos. Con ello querríamos comentar y criticar el conocido proverbio chino:

> Escucho y olvido, veo y recuerdo, hago y comprendo.

Según nuestro criterio habría que incluir una palabra entre hago y comprendo: reflexiono.

En los libros de texto de hace años se utilizaban los nombres *mental, algoritmo y problema*. Ahora las cosas han cambiado, y parece que la sociedad actual demanda enseñar a pensar en un contexto cada vez más competitivo. Pero en muchas facetas y situaciones de nuestra vida actuamos de la primera forma que se nos ocurre, sin comprender y sin ni siquiera intentar comprender. Es decir, lo que se hace es resolver problemas prácticos de forma inmediata, y posteriormente observar el éxito o fracaso de dichas acciones. Sin embargo, cuando actuamos como docentes lo hacemos de forma reflexiva, de manera que la compresión de un problema precede a la actuación ante el mismo. Nos gustaría que los estudiantes siguiesen un camino similar.

Se habla de unas Matemáticas reflexivas, que los estudiantes tengan una actitud crítica, pero ¿qué significa eso?

Y eso, ¿cómo se hace?

Parecen adecuadas las investigaciones (o cualquier otra denominación), entendidas como una forma de trabajar que intenta establecer un ambiente donde despierta el pensamiento. Lo difícil es medir «cuánto son de buenas». Lo importante es utilizarlas como un medio y no como un fin. Hasta que no se hagan no se sabe ni qué pueden ser ni a qué pueden llegar. Se busca que los estudiantes cojan confianza al enfrentarse a cualquier problema. Y a los jóvenes hay que animarles a investigar cuando estudian Magisterio, cuando aprenden a enseñar. Según Halmos, (1991: 33):

> Un profesor debe mostrar a sus alumnos cómo resolver problemas –y resolver problemas es hacer investigación, que puede y debe hacerse en muchos niveles diferentes– y un profesor debe ser capaz de reconocer en sus alumnos la habilidad para investigar, para poder animarles y darles consejos adecuados.

…se debería presentar a los estudiantes la posibilidad de aplicar lo que conocen en posibilidades cambiantes y no familiares, lo que permite que sigan sus propios caminos matemáticos y desarrollen sus propias ideas.

En esta situación, se debería presentar a los estudiantes la posibilidad de aplicar lo que conocen en posibilidades cambiantes y no familiares, lo que permite que sigan sus propios caminos matemáticos y desarrollen sus propias ideas. Para ello la presentación ocupa un lugar importante, especialmente para favorecer el interés y la motivación. E incluso puede ser interesante un periodo de preparación. También sería favorable que fuesen fácilmente entendibles y abordables. Situar a los estudiantes en grupos puede animar el trabajo cooperativo, pero eso no asegura que la discusión tenga lugar.

También hay que tener en cuenta que:

> Sobre la metodología en base a la resolución de problemas desearíamos añadir que tan importante como la resolución de problemas consideramos que es la «propuesta» de nuevos problemas, es decir, que los alumnos lleven al aula problemas de la vida real o imaginados, para los que hay que buscar el planteamiento matemático. El hecho de extractar el esquema matemático de situaciones problemáticas, dándoles forma tratable matemáticamente de acuerdo con modelos conocidos, es muy importante y debe ser estimulado. Es la mejor forma de estimular la creatividad» (Santaló, 1992: 86-87).

Polya solía decir que si no se puede resolver un problema se debería elegir una parte del mismo o buscar otro problema que parezca más sencillo, que no se sepa resolver, y entonces resolverlo. Luego resolver problemas es buscar problemas o, mejor, hallar el planteamiento correcto de los mismos. El mismo principio se aplica en la enseñanza. Se comenta de Sócrates, considerado por muchos uno de los mejores profesores de todos los tiempos, que decía:

> ¡no les cuentes cosas, pregúntales! No les resuelvas los problemas, plantéaselos. La mejor manera de enseñar no es dictar, sino preguntar, identificar nuevas metas y justificar los hechos.

Ya se ha explicado nuestro pensamiento de que no tiene sentido buscar el método por excelencia, sino que es más conveniente elegir en cada momento el adecuado, dependiendo de la actividad que se pretende realizar y de las características del grupo concreto de alumnos. No existen varitas mágicas. Cualquier estrategia de trabajo puede tener su importancia, pero en la actualidad se sigue investigando por qué ciertas metodologías consiguen mejores resultados que otras, con la intención de continuar mejorando.

Sí, sí. Pero eso, ¿cómo se hace?

Referencias

AMORE, B. D. (1994): «Lápices-Orettole-Przxetqzyw ¿Las imágenes mentales de los textos de las situaciones-problema influencian su resolución?, *Suma,* n.° 17, 111-116.

BRUNER, J. S. (1962): *The Process of Education*, Harvard University Press.

José M.ª Chamoso
Facultad de Educación
Universidad de Salamanca
Sociedad Castellano-Leonesa
de Profesorado
de Matemáticas
William B. Rawson
School of Education
University of Exeter
England

BURGHES, D. (1984): «Mathematical investigations». *Teaching Mathematics and its Applications*, n.° 3, 2, 47-52.

CORBALÁN, F. (1994): *Juegos matemáticos para Secundaria y Bachillerato*, Síntesis, Madrid.

GAIRÍN SALLÁN, J. Mª (1996): «Del dicho al hecho...», *Suma*, n.° 21, 41-54.

GARDINER, A. (1989): *Discovering Mathematics. The Art of Investigation*, Oxford Science Publications, New York.

HALMOS, P. R. (1991): «¿Qué es un matemático?», *Epsilon,* n.° 20, 33-40.

H.M.I. (1985): *Mathematics from 5 to 16. Curriculum Matters 3,* Department of Education and Science, HMSO, London.

MITCHELL, C. H. y W. B. RAWSON (1998): «Developing Mathematical Reasoning at Key Stage 1 and 2», *Paper delivered at the British Educational Research Association Annual Conference*, The Queen's University of Belfast, 27-30 August.

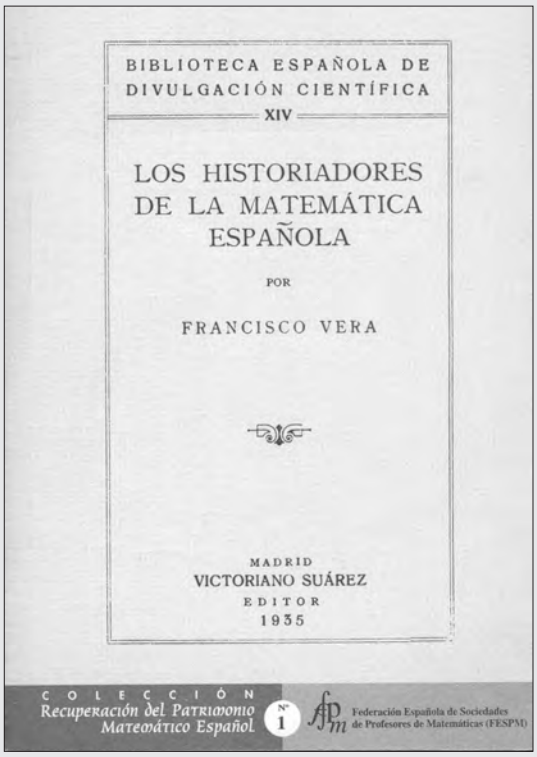
MITCHELL, C. H. y W. B. RAWSON (2000): «Using Writing to Scaffold Children's Explanations in Mathematics'», en KOSHY (ed.): *Mathematica for Primary Teachers*, Routledge, London, 182-195.

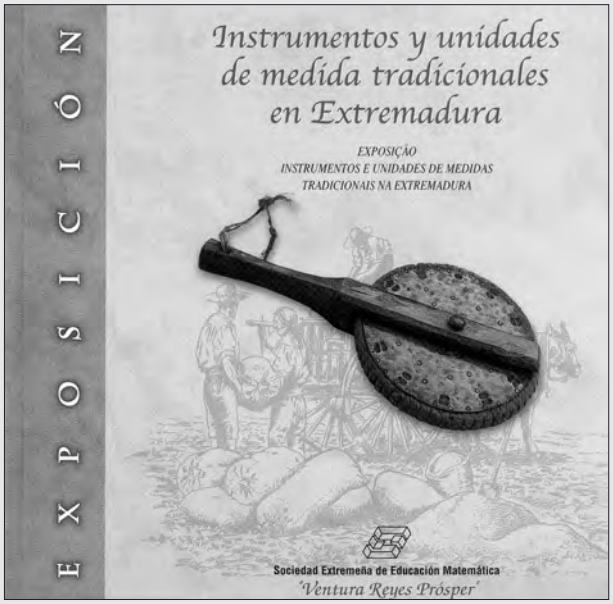
RAWSON, W. B. (1997): «Working with Writing Frames in Mathematics», *Education 3 to 13*, n.° 25, 1, 49-54.

RAWSON, W. B. y J. M.ª CHAMOSO (1999): «¿Hacia formas de investigación en clase de Matemáticas?», *Actas de las IX JAEM,* septiembre 99, Lugo.

SANTALÓ, L. A. (1990): «Entrevista al profesor Santaló», *Epsilon,* n.° 18, 81-87.

PUBLICACIONES DE LA FEDERACIÓN





SUMA 36
febrero 2001, pp. 43-49

Matemáticas electorales: desproporcionalidad y alianzas

Andrés Nortes Checa

ARTÍCULOS

Las matemáticas electorales son una fuente de información valiosa en el estudio de la proporcionalidad/desproporcionalidad numérica. De ahí que partiendo del caso de las elecciones autonómicas catalanas de 1999, en donde un partido que obtiene menos votos que otro, sin embargo, tiene más escaños, nos introducimos en la aplicación del método D'Hondt que regula el proceso electoral en nuestro país, viendo los resultados que se obtendrían de utilizar un procedimiento proporcional.
Debido a que en las elecciones locales la mayoría absoluta es difícil de conseguir, esto nos sirve para hacer una irrupción en las alianzas postelectorales y determinar algún índice de poder.

LAS MATEMÁTICAS en la vida cotidiana es un aspecto tratado cada vez más en nuestras aulas. Los alumnos han de ver en los niveles de la enseñanza obligatoria las aplicaciones inmediatas que tienen las matemáticas que ellos estudian, sirviéndoles como elemento motivador a su aprendizaje. Por otra parte, los docentes tenemos la obligación de enseñarl a nuestros alumnos todos aquellos aspectos relacionados con el cada día y que son motivo de noticias diarias en los medios de comunicación.

Cuando se aproxima una campaña electoral son muchos los periódicos que encargan a empresas especializadas sondeos de opinión que publican con grandes titulares en sus páginas. Tras las elecciones, bien sean generales, autonómicas o locales, también hay grandes titulares en los periódicos mencionando los partidos con mayoría absoluta, relativa e incluso de las posibles coaliciones que permiten que gobierne un partido que no ha alcanzado la mayoría relativa o minoría mayoritaria. Todo esto es motivo de interés para la ciudadanía en general y los alumnos que estudian la enseñanza obligatoria tiene la necesidad, por una parte, y la obligación, por otra, de adquirir ese mínimo de conocimientos que les proporcione una alfabetización matemática.

En el caso de las matemáticas electorales que vamos a tratar en sus aspectos iniciales, vamos a desmenuzar esos conceptos que si bien son repetidos con cierta insistencia no llegan a ser aprehendidos por la mayoría de los individuos.

¿Quién no ha oído hablar de la Ley D'Hondt o de las coaliciones políticas o de las circunscripciones o de las cuotas de poder? Pero, ¿sabemos exactamente su alcance y lo que supone cada uno de esos términos?

En el aula se puede tratar este aspecto como aplicación de la «proporcionalidad/desproporcionalidad numérica y, según el nivel donde nos encontremos, podemos ajustar su contenido.

Como punto de partida, podemos considerar las Elecciones Catalanas de 1999. El periódico *El País* del 18 de octubre de 1999 encabezaba su primera página con el siguiente titular: «Pujol gana en escaños y Maragall obtiene más votos». ¿Cómo es posible esto?

Consultando los datos, éstos fueron los resultados en número de votos y de escaños de estos dos partidos:

Partido	*Barcelona*	*Tarragona*	*Girona*	*Lleida*	*TOTAL*
CiU	833.168 (31)	116.974 (8)	137.079 (9)	91.199 (8)	1.178.420 (56)
PSC	948.202 (36)	96.632 (6)	82.502 (5)	55.963 (5)	1.183.299 (52)

Tabla 1

De haber sido el reparto de escaños de forma proporcional, los resultados habrían sido los siguientes:

Partido	*Barcelona*	*Tarragona*	*Girona*	*Lleida*	*TOTAL*
CiU	35,14% (30)	41,30% (7)	48,55% (8)	48,10% (7)	100% (52)
PSC	39,99% (34)	34,11% (6)	29,22 % (5)	29,51% (4)	100% (49)
Total	100% (85)	100% (18)	100% (17)	100% (15)	100% (135)

Tabla 2

Y si se hubiera considerado Cataluña como una sola circunscripción. Los resultados habrían sido estos otros:

Partido	*Cataluña*	*En %*	*N.º escaños*
CiU	1.178.420	38,05%	51
PSC	1.183.299	38,21%	52
Total	3.097.122	100%	135

Tabla 3

Desproporcionalidad de la ley D'Hondt

Sin embargo, nada de esto último ha ocurrido porque en nuestro país la *Ley Orgánica de Régimen Electoral General* (LOREG) que regula el proceso electoral establece una desproporcionalidad. Para poder conocer el grado de desproporcionalidad que genera un sistema electoral y poder compararlo con cualquier otro es preciso acudir a algún indicador para cuantificarlo. Todos los indicadores tienen en cuenta la diferencia que se establece entre el porcentaje de votos y el porcentaje de escaños que recibe cada candidatura, distinguiéndose unos de otros en la forma en que se computan esas diferencias. La desproporcionalidad del sistema electoral español, según indican Oñate y Ocaña (1999), está entre las más elevadas si se compara con las que se registran en los sistemas electorales del entorno, siendo superior a la registrada en cualquier otro país que utilice un sistema de representación proporcional, sistema teóricamente utilizado en nuestro país.

…en provincias de pocos habitantes como Soria o Huesca, el número de votos para obtener un escaño es muy inferior al de Madrid o Barcelona.

En nuestro país los escaños se distribuyen entre los partidos según el método D'Hondt (o D'Hont), participando solamente aquellos que hayan superado el 3% de los votos válidos emitidos en la circunscripción. A continuación se ordenan de mayor a menor en una columna las cifras de votos obtenidos por los partidos y se divide el número de votos de cada uno entre 1, 2, 3, … hasta un número igual al de escaños correspondientes a la circunscripción, atribuyéndose los escaños a las candidaturas que obtengan los cocientes mayores en el cuadro.

Refiriéndonos al Congreso de Diputados los 350 escaños se reparten entre 50 distritos que coinciden con la demarcación provincial atendiendo a un doble criterio: a cada provincia corresponde un número inicial de dos escaños y el resto de escaños se atribuye de forma proporcional a cada población (en el caso de Ceuta y Melilla se atribuye un escaño a cada circunscripción). Por eso en provincias de pocos habitantes como Soria o Huesca, el número de votos para obtener un escaño es muy inferior al de Madrid o Barcelona.

En las Elecciones Generales del 12 de marzo de 2000, con una población de derecho de 39.852.651 habitantes y un Censo de 33.969.640 votantes, los resultados al Congreso de los Diputados arrojaron 183 diputados para el PP, 125 para el PSOE, 15 para CiU, 8 para IU, 7 para el PNV, 4 para Coalición Canaria y 3 para el Bloque Nacionalista Galego, mas 5 escaños para otras cinco candidaturas. El porcentaje de votos y los escaños que habrían obtenido estos siete partidos, de ser el reparto proporcional, sin aplicar la Ley D'Hondt, y considerando una sola circunscripción, hubiera sido el que se refleja en la tabla 4.

	PP	PSOE	CiU	IU	PNV	CC	BNG	Total
Votos	10.321.178	7.918.752	970.421	1.263.043	353.953	248.261	306.268	22.814.467
%	44,52	34,16	4,19	5,45	1,53	1,07	1,32	100
D'Hont	183	125	15	8	7	4	3	350
Propor.	156	120	15	19	5	4	5	350

Tabla 4

De haber sido el reparto de escaños de forma proporcional y con una circunscripción única estas 7 candidaturas en lugar de alcanzar entre todas ellas 345 diputados habrían conseguido 324 diputados, dando de esta forma más representación a los partidos minoritarios. La candidatura más castigada por el hecho del número de circunscripciones y la aplicación de la Ley D'Hondt ha sido IU, mientras que el más favorecido ha sido el PP ya que en estas circunstancias se habría quedado con 156 escaños, no alcanzando la mayoría absoluta (176 diputados).

De aquí que una primera conclusión es que la Ley D'Hondt favorece a los partidos más votados y desfavorece a los partidos menos votados, y que el mayor número de circunscripciones favorece a los partidos más votados.

¿En qué medida es justa o injusta la desproporcionalidad existente? Pues debido a que la desproporcionalidad de la Ley D'Hondt favorece a los partidos mayoritarios y desfavorece a los partidos minoritarios, los electores se acomodan a este criterio y optan por los partidos grandes bajo la hipótesis del «voto útil». De esta forma los índices de desproporcionalidad se reducen al lograr menos apoyo de los electores los partidos medianos y pequeños.

Como segundo aspecto significativo es que, si bien favorece a los dos primeros partidos el reparto de escaños según la LOREG, desfavorece a los situados en tercero y cuarto lugar según el número de votos, tal como se deduce de la tabla 4.

Por último, el que haya dos escaños fijos para cada provincia o circunscripción electoral y el resto sea establecido de forma proporcional a la población, hace que el tamaño del distrito sea el elemento que mayor consecuencia tiene en la desproporcionalidad que genera la aplicación de la Ley Orgánica del Régimen Electoral General en nuestro país.

…hace que el tamaño el distrito sea el elemento que mayor consecuencia tiene en la desproporcionalidad que genera la aplicación de la Ley Orgánica del Régimen Electoral General en nuestro país.

Aplicación de la ley D'Hondt

Hemos elegido la circunscripción de Murcia en las Elecciones Generales al Congreso del 12 de marzo de 2000, para aplicar La Ley D'Hondt. Éstos son los datos aportados por el Ministerio del Interior (2000)

Electores:	917.354	
Votos Totales:	674.516	73,53%
Votos en Blanco:	7.185	1,07%
Votos Nulos:	3.832	0,57%
Abstención:	242.838	24,67%
Votos Válidos:	670.684	
Votos a Candidaturas:	663.499	

Partido	Eleg.	Votos	%
PP	6	389.564	58,08
PSOE	3	217.179	32,38
IU	—	41.842	6,24

Tabla 5

La tabla de cocientes es la siguiente:

Partido	1	2	3	4	5	6	7	8	9
PP	**389564**	**194782**	**129855**	**97391**	**77913**	**64927**	55652	48696	43285
PSOE	**217179**	**108590**	**72393**	54295	43436	36197	31026	27147	24131
IU	41842	20921	13947	10461	8368	6978	5977	5230	4649

Tabla 6

obtenida dividiendo el número de votos de cada partido entre 1, 2, 3, ... y eligiendo los nueve cocientes mayores (señalados en negrita).

De haber sido el reparto proporcional y excluyendo las candidaturas que no alcanzan el 3%, el escrutinio habría sido: 5 diputados para el PP, 3 para el PSOE y 1 para IU.

Elecciones autonómicas

La fórmula D'Hont se aplica también en las elecciones autonómicas y locales. Para las autonómicas cada comunidad establece el número de circunscripciones o distritos en que se divide, así como el tamaño de la Asamblea o número de escaños. El número de distritos suele coincidir con el número de provincias de cada comunidad: Andalucía (8), Aragón (3), Cantabria (1), Galicia (4)...; sin embargo, en otras como Asturias o Murcia, que son uniprovinciales se subdividen en 3 y 5 circunscripciones, respectivamente. Todas las comunidades autónomas, excepto Asturias, Baleares, Canarias y Murcia, han establecido distritos coincidentes con las demarcaciones provinciales utilizando para el reparto de escaños entre los partidos la fórmula D'Hondt. Además los sistemas electorales repiten los elementos completados en la LOREG, excepto en la cláusula de exclusión que varía entre el 3% y el 5% en el ámbito del distrito o de la comunidad autónoma.

Vamos a analizar el caso de la Comunidad de Murcia que está dividida en 5 distritos ya que los resultados habrían sido distintos de haberse considerado como circunscripción única.

En las Elecciones a la Asamblea Regional de Murcia de 13 de junio de 1999 estos fueron los resultados generales, facilitados por el INE:

Electores:	911.054	
Votos totales:	616.397	67,66%
Abstención:	294.657	32,34%
Votos en Blanco:	8.839	1,43%
Votos Nulos:	4.327	0,70%
Votos Válidos:	612.070	
Votos a Candidaturas:	603.231	

Partido	*Eleg.*	*Votos*	*%*
PP	26	323.446	52,84
PSOE	18	219.798	35,91
IU	1	42.839	7,00
Otros	—	17.148	2,8

Tabla 7

Vamos a analizar el caso de la Comunidad de Murcia que está dividida en 5 distritos, ya que los resultados habrían sido distintos de haberse considerado como circunscripción única.

Al ser cinco distritos, éstos han sido los resultados en cada uno de ellos:

Partido	*Eleg.*	*Votos*	*%*
PP	4	41.591	43,59
PSOE	3	41.485	43,48
IU	—	7.923	8,30
Otros	—	3.171	3,32

Tabla 8. *Distrito 1*: Lorca
(Votos Válidos: 95.410)

Partido	*Eleg.*	*Votos*	*%*
PP	6	68.782	54,58
PSOE	4	42.353	33,61
IU	—	7.601	6,03
Otros	—	5.423	4,30

Tabla 9. *Distrito 2*: Cartagena
(Votos Válidos: 126.014)

Partido	*Eleg.*	*Votos*	*%*
PP	13	174.476	56,30
PSOE	7	103.039	33,25
IU	1	19.915	6,43
Otros	—	7.760	2,50

Tabla 10. *Distrito 3*: Murcia
(Votos Válidos: 309.897)

Partido	*Eleg.*	*Votos*	*%*
PP	2	24.892	46,90
PSOE	2	23.466	44,21
IU	—	3.728	7,02
Otros	—	505	0,95

Tabla 11. *Distrito 4*: Noroeste
(Votos Válidos: 53.078)

Partido	*Eleg.*	*Votos*	*%*
PP	2	13.811	49,91
PSOE	1	9.349	33,79
IU	—	3.672	13,27
Otros	—	289	1,04

Tabla 12. *Distrito 5*: Altiplano
(Votos Válidos: 27.671)

Aplicada la fórmula D'Hondt por distritos, el número de votos necesarios para obtener diputados ha sido el siguiente:

Partido	*Distrito 1*	*Distrito 2*	*Distrito 3*	*Distrito 4*	*Distrito 5*
PP	10.398	11.464	13.421	12.446	6.906
PSOE	13.828	10.588	14.720	11.733	9.349
IU	—	—	19.915	—	—

Tabla 13

Si por el contrario se hubiera considerado la Comunidad Autónoma de Murcia como un solo distrito, aplicando el método D'Hondt habría resultado:

Partido	*Elegidos*	*Votos/diputado*	*Votos*	*%*
PP	25	12.938	323.446	52,84
PSOE	17	12.929	219.798	35,91
IU	3	14.280	42.839	7,00
Otros	—	—	17.148	2,80

Tabla 14

Este caso corrobora que los partidos situados en tercer lugar por número de votos salen desfavorecidos al aumentar el número de distritos. En caso de distrito único IU habría obtenido tres escaños, mientras que con los cinco distritos actualmente establecidos por ley, sólo le correspondió un escaño. Mientras que al PP y al PSOE cada escaño lo obtendría con algo más de 12.900 votos, IU lo hubiera obtenido con 14.280.

También es importante destacar la diferencia entre votos necesarios para obtener un escaño. El PP en el distrito 5 necesita solo 6.906 votos, mientras que IU en el distrito 3 necesitó 19.915 votos, casi el triple.

Elecciones locales

Las elecciones locales para elegir representantes en los ayuntamientos de nuestro país se rigen también por la LOREG. Una vez efectuada la votación y el escrutinio, la elección de concejales se hace atendiendo a los mismos criterios que hemos descrito anteriormente. Sin embargo, hay dos aspectos importantes que merecen ser destacados, por un lado, que sea cual sea el número de habitantes de la localidad y de electores, el número de concejales elegidos siempre lo es en número impar; y por otro, que al ser los concejales representantes de muy variadas candidaturas es difícil obtener mayorías absolutas y se hace necesario, en muchos casos, las coaliciones o alianzas entre distintas fuerzas políticas.

El poder, como vemos, está relacionado con el número de formas que una persona o grupo político puede convertir una derrota en victoria al unirse a una coalición perdedora para hacerla ganadora.

Aquí es donde entra en juego un aspecto muy importante de las Matemáticas electorales, y es el tema de las coaliciones o alianzas políticas para facilitar la gobernabilidad en aquellos ayuntamientos en donde una candidatura no llega a obtener mayoría absoluta.

Tres casos sencillos de la vida cotidiana, aportados por Garfunkel (1999) nos van a introducir en el significado del índice de poder.

- Caso 1. Una empresa pertenece a dos personas A y B, la primera con el 60% de las acciones y la segunda con el 40%. La mayoría se alcanza con el 51%, por lo que el índice de poder de A es del 100% mientras que el de B es del 0%
- Caso 2. Una empresa pertenece a tres personas A con el 49%, B con el 48% y C con el 3%. Ninguno tiene la mayoría del 51%, pero que pueden conseguir si se alían A con B, A con C o B con C. Por tanto, las tres personas tienen el mismo índice de poder, el 33,3%
- Caso 3. Una empresa pertenece a cuatro personas A con 26%, B con 26%, C con 26% y D con 22%. Aunque el porcentaje de las acciones de D no difiere mucho con el del resto, no puede alcanzar la mayoría si se une con A con B o con C. Por el contrario, A con B, A con C y B con C sí que obtienen mayoría, por tanto el porcentaje de poder de A, B y C es del 33,3%, mientras que el de D es del 0%.

El poder, como vemos, está relacionado con el número de formas que una persona o grupo político puede convertir una derrota en victoria al unirse a una coalición perdedora para hacerla ganadora.

La cuota necesaria para ganar en los casos anteriores es del 51% y, en general, se obtendrá de la siguiente manera:

Sea un sistema de votación con pesos o ponderado representado por $[q: w(A), w(B), w(C),...]$, en donde $q = E[(w(A)+w(B)+w(C)+...)/2] + 1$, es la cuota necesaria para ganar y $w(A)$, $w(B)$, $w(C)$,... son los pesos para los distintos grupos.

Para aplicar las alianzas a la vida política y desarrollar algún caso, hemos recurrido a las elecciones locales de 1999 en la Comunidad Autónoma de Murcia (BOE de 27 de junio de 1999). Analizados los 45 municipios que la componen, hemos seleccionado aquellos en donde era

posible establecer alianzas entre distintos grupos políticos. Estos fueron los casos:

- Águilas: PP (7), PSOE (4), IU (2), MIRA (6), UCAP (1), PDIA (1)
- Alhama: PP (7), PSOE (6), IU (2), PADE (2)
- Cieza: PP (10), PSOE (9), IU (2)
- Fortuna: PP (5), PSOE (4), IU (1), PADE (2), PDNI (3)
- Jumilla: PP (10), PSOE (9), IU (2)
- Mazarrón: PP (5), PSOE (4), IU (1), PIXM (7)
- Moratalla: PP (5), PSOE (6), IU (2)
- Puerto Lumbreras: PP (8), PSOE (8), IU (1)
- Torre Pacheco: PP (8), PSOE (5), IU (1), AITP (7)
- Torre Cotillas: PP (8), PSOE (7), IU (2)
- Totana: PP (10), PSOE (7), IU (4)

Si consideramos el caso de Cieza o de Jumilla [11: 10, 9, 2], las coaliciones ganadoras son PP-PSOE, PP-IU y PSOE-IU ya que en las tres se alcanza la mayoría absoluta (11), por lo que el índice de poder de cada partido es el mismo, el 33,3%.

También podríamos haber obrado así:

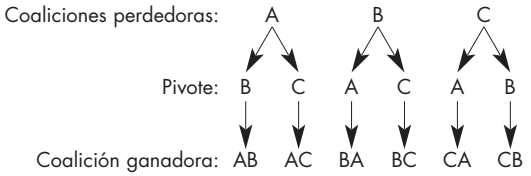


Figura 1

El número de veces que cada partido actúa de pivote para convertir una coalición perdedora en ganadora es 2, de ahí que el índice de poder sea el mismo para cada uno de los tres partidos, es decir 1/3, o del 33,3%.

Este *Índice* de poder calculado se denomina *de Banzhaf* en donde el poder de un grupo político es proporcional al número de combinaciones en que dicho partido es comodín o pivote para convertir una coalición perdedora en ganadora. En este caso todas las coaliciones o partidos tienen la misma ponderación, independientemente de su tamaño.

Otros casos como Moratalla [7: 5, 6, 2], Puerto Lumbreras [9: 8, 8, 1], Torre Cotillas [9: 8, 7, 2] y Totana [11: 10, 7, 4] corren la misma suerte que los anteriores. Cada partido tiene el mismo índice de poder aunque la situación de Puerto Lumbreras parezca injusta ya que a un porcentaje de escaños del 47,06% y a otro de 5,88% les corresponde el mismo índice de poder, del 33,3%, puesto que el Índice de Banzhaf no tiene en cuenta el tamaño de cada partido.

Vamos a desarrollar ahora el caso de Alhama. Para ello formamos todas las coaliciones perdedoras. Para convertirlas en ganadoras necesitamos un pivote o comodín (otro partido) que al cambiar su voto cambie el resultado de la votación. Se tiene: [*q*: *u*(*A*), *u*(*B*), *u*(*C*), *u*(*D*)], es decir [9: 7, 6, 2, 2] (figura 2).

El número de veces que cada grupo político hace de comodín es:

Grupo político:	A	B	C	D
Pivote n.° veces:	6	2	2	2

de ahí que el Índice de poder sea: (6, 2, 2, 2), o en porcentaje (50; 16,67; 16,67; 16,67).

Se tendrá pues:

Partido	*Nº concejales*	*% Concejales*	*% Poder*
PP	7	41,76	50
PSOE	6	35,29	16,67
IU	2	11,76	16,67
PADE	2	11,76	16,67

Tabla 15

Este Índice de poder calculado se denomina de Banzhaf en donde el poder de un grupo político es proporcional al número de combinaciones en que dicho partido es comodín o pivote para convertir una coalición perdedora en ganadora.

Aunque hemos analizado las coaliciones o alianzas en el caso de las elecciones locales, también es aplicable a las generales y autonómicas. Sin embargo es en el caso de las locales donde mayor y variada aplicación tienen.

Un caso interesante que dejamos como entretenimiento al lector de este artículo es el cálculo del Índice de poder en el Ayuntamiento de Águilas: PP(7), PSOE (4), IU (2), MIRA (6), UCAP (1), PDIA (1) con seis grupos políticos. En este caso se tiene: [*q*: *w*(*A*), *w*(*B*), *w*(*C*), *w*(*D*), *w*(*E*), *w*(*F*)], es decir: [11: 7, 4, 2, 6, 1, 1] y en donde las coaliciones perdedoras son: A, B, C, D, E, F, AC, AE, AF, BC, BD, BE, BF, CD, CE, CF, DE, DF, EF, ACE, ACF, AEF, BCE, BCF, BEF, CDE, CDF, CEF, DEF, BCEF y CDEF, obtenidas viendo todas las posibles combinaciones y señalando aquellas que no alcanzan los 11 votos que constituye la mayoría absoluta.

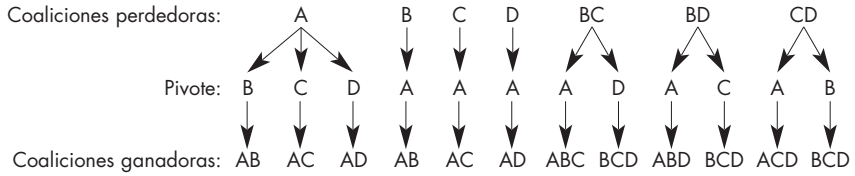


Figura 2

A modo de conclusión

A la vista de nuestras reflexiones corroboramos la afirmación de Nulart (2000), que un análisis global de los resultados de las siete elecciones generales habidas en nuestro país muestra una baja proporcionalidad entre el número de votos y el número total de escaños recibidos por cada partido. Nosotros lo hemos analizado en el caso de las Elecciones Generales del 12 de marzo de 2000 y en las autonómicas y locales de 13 de junio de 1999 en la Comunidad de Murcia. Pero además hemos constatado la enorme desproporcionalidad existente en el coste de un diputado en número de votos en distintas circunscripciones en el caso de la Comunidad Autónoma de Murcia, que llega a ser de hasta tres veces, y consultando Ministerio del Interior (2000) vemos que mientras que en Soria con 3 diputados, el PP con 31.883 y el 58,47% obtenía 2 diputados a un coste de 15.942 votos y el PSOE con 17.436 y el 31,98% obtenía 1 diputado, en Barcelona, el «coste» del número de votos por diputado del PSC era de 75.800, el de CiU de 74.840, el del PP de 112.847, el de ERC de 131.114 y el de IPCV de 103.778.

La desproporcionalidad, por un lado achacable al método D'Hondt, pero también debido a la existencia de muchas circunscripciones pequeñas, hace que los dos partidos más votados de ámbito nacional reciban más de su cuota proporcional, mientras que el tercer partido de ámbito nacional queda grandemente afectado en los escaños que recibe y los demás partidos de ámbito nacional, tienden a desaparecer. De ser los repartos proporcionales y de circunscripción única ya hemos visto cómo quedaría modificada su estructura de número de escaños.

Por último, las coaliciones políticas, en donde tan slo hemos efectuado un esbozo con la aplicación del Índice de Banzhaf a las últimas elecciones locales de la Comunidad Autónoma de Murcia, ponen de manifiesto el enorme atractivo que tiene la aplicación de la matemática cotidiana en el desarrollo de los contenidos de la enseñanza obligatoria.

La matemática electoral es una aplicación para que los alumnos reflexionen sobre la contextualización de los contenidos de matemáticas en la enseñanza obligatoria y den respuesta a situaciones como la que presentábamos al principio de este trabajo ¿cómo es posible que un partido que globalmente tiene más votos que otro, sin embargo tenga menos diputados? La desproporcionalidad de D'Hondt y las muchas circunscripciones electorales en nuestro país tienen la respuesta.

Andrés Nortes
Departamento de Didáctica de las Ciencias Matemáticas y Sociales
Facultad de Educación.
Universidad de Murcia
Sociedades Andaluza, Canaria y Murciana

Bibliografía

ESPINEL, M.ª C. (1999): «El poder y las coaliciones», *Suma*, n.° 31, 109-117.

ESPINEL, M.ª C. (1999): «Sistema de reparto de poder en las elecciones locales», *Números*, nº 39, 13-19.

GARFUNKEL, S. (Director) (1999): *Las matemáticas en la vida cotidiana*, Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid, Madrid.

MINISTERIO DEL INTERIOR (2000): *Elecciones a Cortes Generales 2000*, Colección Documentos Electorales, n.° 9, Madrid.

NULART, D. (2000): «Las matemáticas en la vida política», en *Jornada Matemática 21.1.00*, Congreso de los Diputados, Madrid.

OÑATE, P. y F. A. OCAÑA (1999): *Análisis de datos electorales*, Colección Cuadernos Metodológicos, n.° 27, CIS, Madrid.

SUMA 36
febrero 2001, pp. 51-56

Conjuntos convexos, funciones convexas y desigualdades clásicas

Antonio Álvarez Álvarez

ARTÍCULOS

En este artículo se presenta una propuesta para introducir el concepto de función convexa de un modo diferente al habitual, complementario a éste, que se apoya en la relación entre convexidad de funciones y conjuntos convexos, y que no requiere que la función sea derivable. Además, permite obtener, de forma sencilla y unificada, las desigualdades numéricas clásicas a partir de la convexidad de ciertas funciones

LA TEORÍA DE FUNCIONES y conjuntos convexos incorpora elementos del análisis, la geometría, el álgebra, etc., y tiene numerosas aplicaciones en programación lineal, problemas clásicos de extremos, teoría de juegos... por lo que es de interés especialmente en matemática aplicada.

Una de las ideas fundamentales de esta teoría es la conexión natural que existe entre la noción de función convexa (que en el Bachillerato se estudia generalmente como una noción puramente analítica[1], y bajo el requisito más o menos explícito de derivabilidad) y la de conjunto convexo (que suele aparecer asociada a la de polígono en el estudio de la geometría plana que se hace en la ESO). Utilizando esta conexión, es posible –como se muestra en este artículo– introducir la convexidad de funciones de una forma distinta, complementaria a la habitual, que permite resaltar el carácter geométrico de la convexidad.

En segundo lugar, veremos cómo las desigualdades clásicas –tan útiles en la resolución de problemas, especialmente en los de Olimpiadas Matemáticas– pueden obtenerse de forma muy sencilla a partir de la convexidad de funciones, entendida del modo al que aquí nos referimos. Es más, algunas de esas desigualdades (por ejemplo, la que relaciona la media aritmética con la media cuadrática de una colección finita de números positivos) no son más que una traducción del hecho de ser convexa una determinada función elemental (en el ejemplo citado, la función x^2, en $\mathbb{R}^+$).

Sólo se pretende con este artículo mostrar algunas ideas que, tratadas adecuadamente, son susceptibles de ser empleadas en el aula en la etapa de Bachillerato –también en niveles superiores–; por ello la exposición se limita al ámbito natural de trabajo en la Enseñanza Secundaria (geometría plana, funciones reales de variable real), renunciando a todo tipo de generalizaciones posibles.

Conjuntos convexos

Intuitivamente, un conjunto C convexo es aquél que contiene el segmento que une dos puntos cualesquiera de C.

Una definición formal, bien conocida, es:

Un subconjunto C de $\mathbb{R}^2$ decimos que es *convexo* si para cualesquiera $x, y \in C$, y para todo número real λ con $0 < \lambda < 1$ se tiene:

$$(1 - \lambda x) + \lambda y \in C.$$

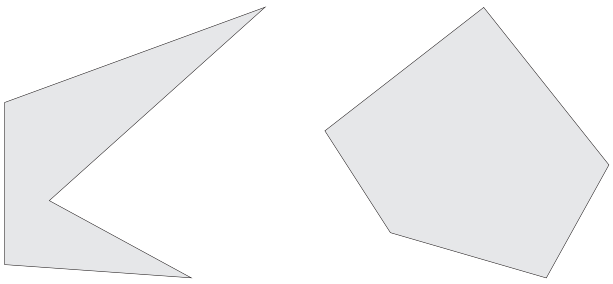


Figura 1

Hagamos algunas observaciones sobre esta definición:

- Nada cambia si a λ exigimos $0 \leq \lambda \leq 1$.
- La definición puede reescribirse así:

  C es *convexo* si $\alpha x + \beta y \in C$ para cualesquiera $x, y \in C$, y para todo $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, con $\alpha + \beta = 1$.

El empleo de herramientas informáticas puede ser muy útil para hacer ver a los alumnos cómo esta definición responde a la noción intuitiva.

Los alumnos no tendrán problema en reconocer que rectas, segmentos, polígonos regulares o círculos son conjutos convexos del plano. No obstante, es fácil probar que la intersección de una colección arbitraria de conjuntos convexos es un conjunto convexo. Dos consecuencias destacables de este resultado son:

a) El conjunto de las soluciones de cualquier sistema de ecuaciones e inecuaciones lineales con dos (n) incógnitas es un convexo de $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^n$).

b) Tiene sentido definir la envoltura convexa de un subconjunto cualquiera M de $\mathbb{R}^2$ como la intersección de todas las partes convexas de $\mathbb{R}^2$ que contienen a M. Es, obviamente, el conjunto convexo más pequeño que contiene a M.

De a) se deduce que semiplanos, rectas, segmentos, triángulos, polígonos regulares, son conjuntos convexos del plano. De b) se tiene, por ejemplo, que todo círculo es también convexo por ser envoltura convexa de la correspondiente circunferencia.

El empleo de herramientas informáticas puede ser muy útil para hacer ver a los alumnos cómo esta definición responde a la noción intuitiva.

Funciones convecas

Podemos ya presentar la convexidad de una función. Diremos que una función es *convexa* cuando la región de los puntos del plano que se encuentran en la gráfica de la función o por encima de ella es un conjunto convexo.

O, con un mayor grado de formalismo:

Sea I un intervalo. Sea f: $I \to \mathbb{R}$. Llamamos *epígrafo de f*, y lo denotamos *epi*(f), al subconjunto de $\mathbb{R}^2$:

$$epi(f) = \{(x, z): x \in I, f(x) \leq z\}$$

De una función f: $I \to \mathbb{R}$. decimos que es *convexa* si *epi*(f) es un conjunto convexo de $\mathbb{R}^2$. Y decimos que es *cóncava* si $-f$ es convexa.

Por tanto, de ciertas funciones sencillas, cuyas gráficas son bien conocidas (si disponemos de calculadoras gráficas, esto sirve para todas), podemos decir inmediatamente si son convexas o no. Por ejemplo, $f(x) = ax + b$ es convexa y cóncava.

Puede probarse como ejercicio que toda función convexa y cóncava es afín.

Las siguientes funciones son convexas (y no cóncavas):

- $f(x) = |x|$.
- $f(x) = x^n$, con n par.
- $f(x) = a^x$, con $0 < a < 1$ o $a > 1$.
- $f(x) = -\log_a(x)$, con $a > 1$.

Las siguientes funciones no son convexas en su dominio ($\mathbb{R}$), pero sí lo son en los intervalos que se citan:

- $f(x) = \text{sen}(x)$, en $I = [(2k - 1)\pi, 2k\pi]$, con k entero.
- $f(x) = x^n$ (n impar), en $I = [0,+\infty)$.

El dominio de la función $f(x) = 1/x$ no es un intervalo, pero la restricción de esta función a $\mathbb{R}^+$ es convexa.

Como se observa, la definición de función convexa que hemos utilizado es de naturaleza geométrica y no recurre al

1 Durante la elaboración de este artículo he encontrado la definición de función convexa que aquí se analiza, primero en el libro de texto *Matemáticas I*, de COU, de J. R. Vizmanos y M. Anzola, editado por SM, y, ya al final, en *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 2*, del Equipo Arrixaca, editado por Santillana.

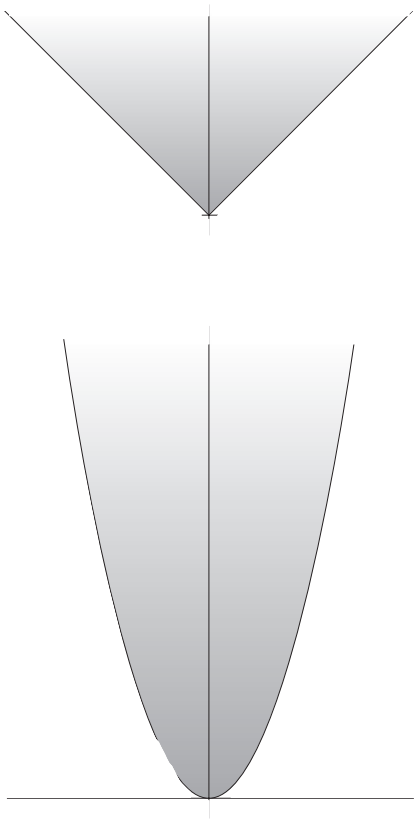


Figura 2. Dos funciones convexas: $|x|$, x^2

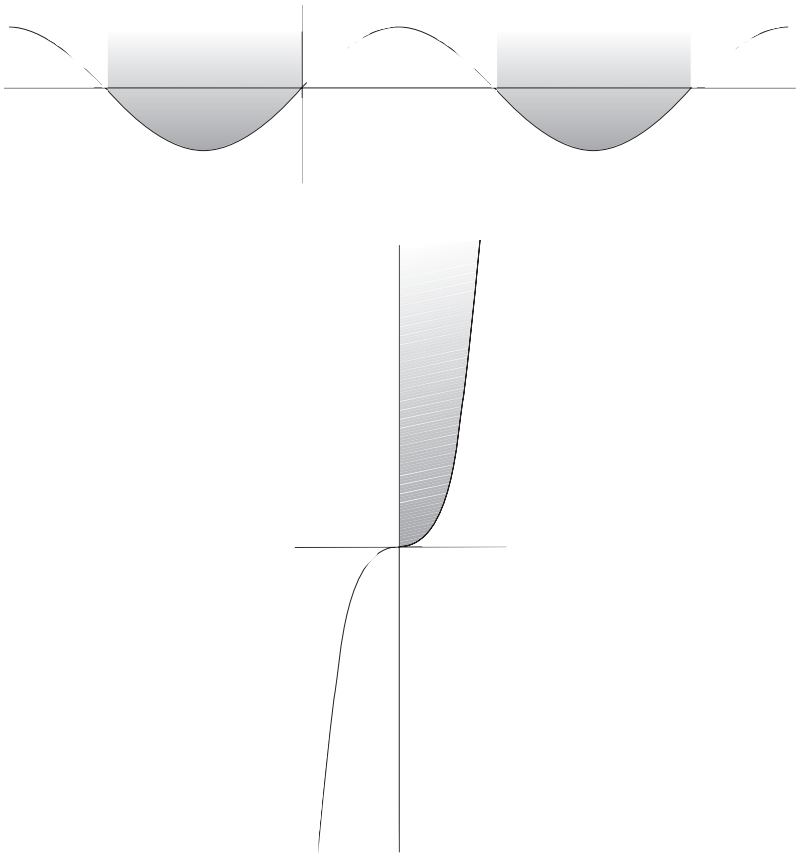


Figura 4. sen x es convexa en $[(2k-1)\neq, 2k\neq]$, con k entero
x^3 es convexa en $[0, +\infty]$

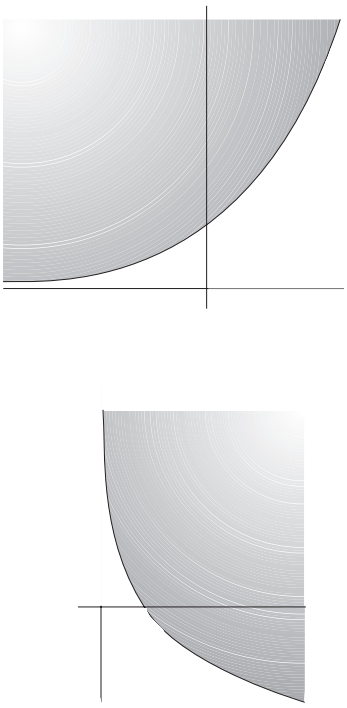


Figura 3. 2^x y $-\log_2 x$ son convexas

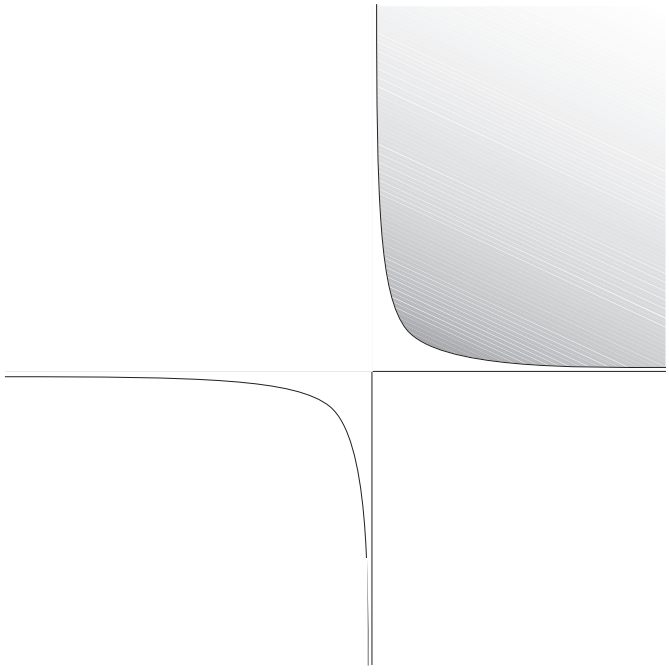


Figura 5. $1/x$ es convexa en $\mathbb{R}^+$

concepto de derivada. De hecho, una función puede ser convexa y no ser derivable en algún punto del intervalo de definición *I*, como le ocurre a la función valor absoluto en $x = 0$. Incluso, una función convexa puede no ser continua en los extremos de *I*. Es el caso de:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & a < x < b \\ \infty, & x = a \text{ o } x = b \end{cases}$$

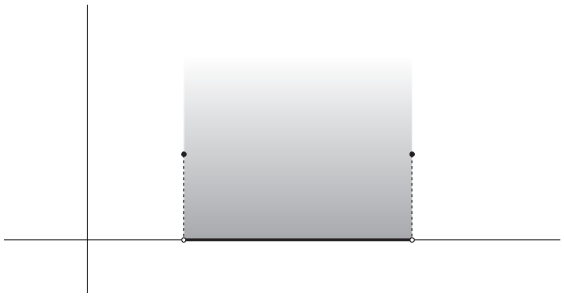


Figura 6. Función convexa no continua

Puede probarse, eso sí, que una función convexa definida en *I* es continua en todo punto de *I* que no sea extremo de *I* (Aparicio y Payá, 1985).

Así pues, el concepto de función convexa que se propone es una generalización del que se usa habitualmente (que requiere la existencia de derivada) y, sin embargo, no sólo no pierde la posibilidad de ser interpretado geométricamente, sino que su naturaleza geométrica es manifiesta. Además, las nociones de conjunto convexo y de función convexa aparecen, así, relacionadas de forma natural.

El siguiente teorema es una útil caracterización de las funciones convexas, que algunos autores adoptan como definición. Como puede apreciarse en la figura 7, tiene una clara interpretación geométrica, que puede servir para justificar el teorema si se desea obviar su demostración, que, no obstante, aquí se expone.

Teorema 1

Sea $f: I \to \mathbb{R}$, donde *I* es un intervalo. Entonces *f* es convexa en *I* si y sólo si

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y), \ 0 < \lambda < 1,$$

para todo *x*, *y* de *I*.

Demostración

⇒) Sean $x, y \in I$ arbitrarios. Obviamente, $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ pertenecen a *epi*(*f*), que es convexo. Por tanto,

$$(1 - \lambda)(x, f(x)) + \lambda(y, f(y)) =$$
$$= ((1 - \lambda)x + \lambda y, (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y))$$

pertenece a *epi*(*f*), para todo λ comprendido entre 0 y 1, de donde se tiene la propiedad de arriba.

⇐) Sean $(x, z), (y, t) \in epi(f)$. Entonces $f(x) \leq z, f(y) \leq t$.

Así se tiene que:

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) +$$
$$+ \lambda f(y) \leq (1 - \lambda)z + \lambda t, \ \forall \ \lambda \in (0, 1).$$

Y entonces:

$$((1 - \lambda)x + \lambda y, (1 - \lambda)z + \lambda t) =$$

$$= (1-\lambda)(x, z) + \lambda(y, t) \in epi(f),$$

para todo λ con $0 < \lambda < 1$; es decir, *epi*(*f*) es convexo.

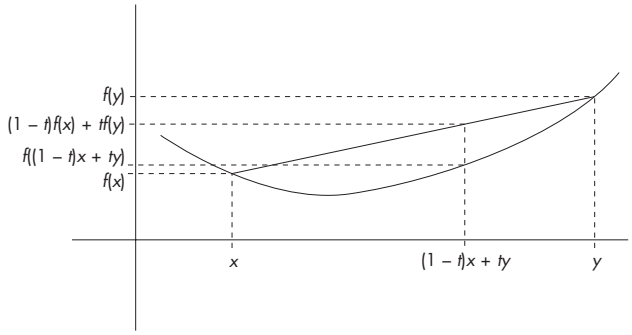


Figura 7

…las nociones de conjunto convexo y de función convexa aparecen, así, relacionadas de forma natural.

El teorema anterior sugiere hacer la siguiente definición:

Sea $f: I \to \mathbb{R}$, donde *I* es un intervalo. Decimos que *f* es estrictamente convexa si:

$$f((1 - \lambda x) + \lambda y) < (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

con $0 < \lambda < 1$, para todo *x*, *y* de I, con $x \uparrow y$.

Pero, como se ha dicho, esta forma de presentar la convexidad de funciones es complementaria de la usual: obviamente no podemos prescindir del potente criterio de la derivada segunda. Volvamos a él en este punto:

Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en *I*. Entonces *f* es convexa si y sólo si $f''(x) \geq 0$ para todo *x* de *I*.

La demostración de esta propiedad, uti-

lizando el teorema 1, sobrepasa el nivel de un curso de Bachillerato. Puede consultarse la demostración en Aparicio y Payá (1985) o en Webster (1994). En Rockafellar (1970) se encuentra una demostración distinta de un resultado algo más restrictivo (exige continuidad a la derivada segunda).

De forma análoga, puede demostrarse que si $f''(x) > 0$ para todo x de I, entonces f es estrictamente convexa en I. Sin embargo, el recíproco no es cierto. Por ejemplo, la función $f(x) = x^4$ es estrictamente convexa y $f''(0) = 0$.

Estas dos propiedades habrán de justificarse, por tanto, apelando a la intuición de los alumnos, como, por otra parte, es lo habitual.

Convexidad y desigualdades clásicas

Un aspecto muy interesante de la introducción a la convexidad que aquí se ha propuesto es que permite mostrar de un modo muy sencillo la íntima relación que existe entre las desigualdades numéricas clásicas y la convexidad de ciertas funciones elementales, relación que suele pasar desapercibida.

La pieza clave es el teorema 1, del que se pueden deducir de forma sencilla y unificada algunas de las desigualdades clásicas; por ejemplo, las que relacionan las distintas medias –que obtendremos aquí–, y otras como la desigualdad de Minkowski, la de Hölder, etc.

El esquema que seguiremos para obtener desigualdades es muy simple: habiendo comprobado que una determinada función es convexa, aplicaremos el teorema 1 y obtendremos la desigualdad correspondiente. Para saber si una función es convexa podemos recurrir, si no conocemos su gráfica, al criterio usual que caracteriza a las funciones convexas dos veces derivables.

Vamos a obtener ya las desigualdades anunciadas:

Un aspecto muy interesante de la introducción a la convexidad que aquí se ha propuesto es que permite mostrar de un modo muy sencillo la íntima relación que existe entre las desigualdades numéricas clásicas y la convexidad de ciertas funciones elementales, relación que suele pasar desapercibida.

a) La función $-\ln: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es estrictamente convexa. Es decir, para todo $x, y > 0$ se verifica:

$$-\ln((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)(-\ln x) + \lambda(-\ln y),\ 0 < \lambda < 1.$$

Y la igualdad sólo es cierta si x = y.

Por ser ln (estrictamente) creciente, esto equivale a:

$$x^{1-\lambda} \cdot y^{\lambda} \leq (1-\lambda)x + \lambda y,\ 0 < \lambda < 1. \qquad [1]$$

Tenemos así que la conocida desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética ponderadas de dos números positivos x e y equivale a la convexidad de $-\ln x$.

En particular, para $\lambda = 1/2$:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \qquad [2]$$

donde la desigualdad es estricta salvo que $x = y$.

b) La función x^2 es (estrictamente) convexa. Esto es:

$$((1-\lambda)x + \lambda y)^2 \leq (1-\lambda)x^2 + \lambda y^2,\ 0 < \lambda < 1,$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Como es (estrictamente) creciente en $\mathbb{R}^+$:

$$(1-\lambda)x + \lambda y \leq ((1-\lambda)x^2 + \lambda y^2)^{1/2},\ 0 < \lambda < 1, \qquad [3]$$

para todo $x, y > 0$.

Es decir, la convexidad de x^2 en $\mathbb{R}^+$ se *traduce* en la desigualdad entre las medias aritmética y cuadrática ponderadas de dos números positivos.

En particular, para $\lambda = 1/2$:

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \qquad [4]$$

donde sólo se alcanza la igualdad si $x = y$.

c) Razonando del mismo modo, la convexidad de $1/x$ en $\mathbb{R}^+$ nos dice que la media armónica de dos números positivos es menor o igual que la media aritmética. No obstante, aplicando [2] a $1/x$ y $1/y$, podemos probar algo mejor: que la media armónica es también menor o igual que la geométrica:

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}\frac{1}{y}}} = \sqrt{xy} \qquad [5]$$

Al igual que antes, la igualdad es cierta si y sólo si $x = y$.

d) Llamemos $h(x, y)$, $g(x, y)$, $m(x, y)$ y $q(x, y)$ a las medias armónica, geométrica y aritmética y cuadrática, respectivamente, de dos números positivos x, y.

Sean $0 < x \leq y$. Es inmediato comprobar que

$$x \leq h(x, y)\ ,\ q(x, y) \leq y$$

En resumen:

$$x \leq \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \leq y \quad [6]$$

esto es,

$$x \leq h(x, y) \leq g(x,y) \leq m(x,y) \leq q(x,y) \leq y$$

Y todas las desigualdades son estrictas a menos que $x = y$.

Extensión al caso finito. La desigualdad de Jensen

Hemos obtenido las desigualdades anteriores como aplicación del teorema 1, que caracteriza a las funciones convexas mediante una propiedad (desigualdad) en la que intervienen sólo dos números x, y de un intervalo I. Cabe objetar que podrían haberse obtenido más fácilmente por otros medios. Por ejemplo, la desigualdad [2] es consecuencia inmediata de ser $(x - y)^2 \geq 0$. Sin embargo, como vamos a ver, la desigualdad del teorema 1 equivale a su extensión al caso de una colección finita de números x_1, ..., x_n de I, por lo que casi con el mismo esfuerzo podríamos haber deducido directamente las correspondientes extensiones de las desigualdades anteriores para un número finito de números positivos. (No lo hemos hecho así buscando una mayor simplicidad en la notación y pensando en su posible uso en el aula.)

Teorema 2 (Desigualdad de Jensen)

Sea $f: I \to \mathbb{R}$. Sean $x_1, \ldots, x_n \in I$ y sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$, tales que $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$. Entonces f es convexa en I si y sólo si:

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n).$$

La demostración de este teorema es un buen ejemplo de prueba por inducción, que podría ser empleado en el 2.° curso de Bachillerato.

Utilizando la desigualdad de Jensen en lugar de la del teorema 1, se obtienen las correspondientes extensiones de todas las desigualdades anteriores.

Conclusión

Como ya se ha dicho, la forma de introducir la convexidad de funciones que se ha descrito no pretende sustituir a la forma habitual; más bien, se ha buscado aportar un enfoque distinto, complementario, del que podríamos destacar, resumiendo, varios aspectos interesantes:

- Hace hincapié en la naturaleza geométrica del concepto de función convexa.
- Permite mostrar a los alumnos cómo una misma idea o concepto puede ser abordado desde perspectivas diversas.
- Permite un acercamiento puramente intuitivo o una exposición más formalizada.
- Supone un ejemplo simple y elegante de generalización de un concepto.
- Permite mostrar la estrecha relación que existe entre la convexidad y las desigualdades numéricas, así como obtener de forma sencilla y unificada las desigualdades clásicas entre medias.

…la forma de introducir la convexidad de funciones que se ha descrito no pretende sustituir a la forma habitual; más bien, se ha buscado aportar un enfoque distinto, complementario…

Antonio Álvarez
IES José de Mora Baza (Granada).
Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»

Bibliografía

APARICIO DEL PRADO, C. y R. PAYÁ ALBERT (1985): *Análisis Matemático I*, Universidad de Granada.

BALBAS, A. y J. A. GIL (1990): *Programación Matemática*, AC, Madrid.

BECKENBACH, E. F. y R. BELLMAN (1965): *Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin.

DEMIDOVICH, B. P. (1985): *5000 problemas de Análisis Matemático*, Paraninfo, Madrid.

FERNÁNDEZ VIÑA, J. A. y E. SÁNCHEZ MAÑES (1979): *Ejercicios y complementos de Análisis Matemático I*, Tecnos, Madrid.

HARDY, G., J. E. LITTLEWOOD y G. PÓLYA (1952): *Inequalities*, Cambridge University Press.

PÉREZ DE MADRID, A. y C. GARCÍA ARRIBAS (1986): «Métodos para resolver problemas. Las Olimpiadas Matemáticas. Su preparación», *Epsilon*, n.° 6/7, 100-111.

ROCKAFELLAR, R. T. (1970): *Convex Analysis,* Princeton University Press.

SPIVAK, M. (1981): *Cálculo Infinitesimal*, Reverté, Barcelona.

WEBSTER, R. J. (1994): *Convexity*, Oxford University Press.

SUMA 36
febrero 2001, pp. 57-65

Experiencias didácticas de matemáticas con Internet

Jesús Ángel Hernández Isla

IDEAS Y RECURSOS

En el artículo se plantean dos prácticas con las siguientes pautas: se comienza con una noticia de prensa que genera la búsqueda de información en *Internet* (proceso de investigación) para, a continuación, realizar un estudio de los datos obtenidos (proceso cuantitativo) y, posteriormente, analizar los resultados (proceso cualitativo). Se trata de prácticas interdisciplinares, ya que se realizan estudios demográficos (currículo de Geografía) y se analizan parámetros económicos (currículo de Economía), en las que deben utilizarse como herramientas los conocimientos matemáticos y la hoja de cálculo *Excel*. Estas dos prácticas se han desarrollado en el primer curso del Bachillerato de Ciencias Sociales y son una muestra de las posibilidades que tiene esta línea de trabajo para aplicarlas en el cuarto curso de ESO y en el Bachillerato de Ciencias Sociales.

LAS PRÁCTICAS que a continuación se desarrollan tienen como objetivos fundamentales:

- Usar técnicas elementales de matemáticas en el análisis de cualquier tipo de suceso de la vida cotidiana.
- Buscar información en *Internet* que permita obtener, observar, analizar, manipular y contrastar el suceso en cuestión.
- Utilizar la calculadora y la hoja de cálculo como herramienta en el desarrollo matemático.

En el diseño de las prácticas se han tenido en cuenta varios factores:

1. Debe resultar atractiva y motivadora: mediante noticias de prensa local (próxima al alumnado) se propone una labor de investigación. El uso de ordenadores y de *Internet* resulta un elemento motivador en sí mismo, pero el proponer búsqueda de información de carácter demográfico o económico hace más atractiva la labor de investigación.
2. Debe ser estética: la redacción y presentación juega, aunque no lo parezca, un papel importante en el desarrollo de la práctica; es conveniente recordar al alumnado qué se debe hacer, dejar espacios para la anotación de datos, representación de gráficas y obtención de conclusiones.
3. Deben evitarse los problemas técnicos: la navegación por *Internet* y el manejo de la hoja de cálculo pueden enturbiar el desarrollo de la práctica. Para ello es conveniente dedicar una clase previa en el caso de que los alumnos no cursen la asignatura de Tecnología de la Información. Este criterio debe ser fundamental a la hora de crear los grupos de trabajo en el aula de informática.
4. Deben graduarse los niveles de resolución de un problema: elaborar la práctica de menor a mayor dificul-

tad permite que cada grupo, independientemente de la destreza que tenga, obtenga conclusiones. Para ello en el proceso de análisis de la información, se establecen distintos niveles de resolución:

Nivel 1: Estudio de gráficas y tablas.

Nivel 2: Observación de la pendiente de las gráficas: relación del crecimiento y decrecimiento más o menos «suave» en función del porcentaje.

Nivel 3: Comprobación numérica y mediante gráficos.

Nivel 4: Contrastar datos y analizar cómo se obtienen.

Las herramientas empleadas en cada nivel son:

Niveles 1 y 2: Web del INE.

Niveles 3 y 4: Calculadora y Hoja de Cálculo.

Otro aspecto que debe ser tratado es la evaluación, para ello se proponen las siguientes pautas:

- *Cuaderno de aula:* El profesor anota el desarrollo de la práctica en el aula de informática. Observa las deficiencias que se producen en el desarrollo para una posterior reformulación de la práctica o una dinamización del grupo diferente a la inicial.
- *Resolución de la práctica:* En ella se observa el grado de cumplimiento de los objetivos.
- *Encuesta a los alumnos:* En ella se debe valorar la aportación de la práctica y la consecución de los objetivos.

En este artículo se desarrollan dos prácticas, pero el lector entenderá que se pueden diseñar muchas más sin mayor problema: estudio del IPC, gasto medio trimestral de la familia, estudios estadísticos relacionados con sanidad, educación, medio ambiente...

Práctica 1. Análisis de población

Introducción

En la prensa local apareció la información de la figura 1.

Parece lógico pensar que un lugar para obtener y ampliar dicha información es el Instituto Nacional de Estadística (INE):

http://www.ine.es

La búsqueda sobre *población* se puede realizar desde diferentes lugares de la *web* del INE.

I) En la *Base de Datos Tempus*: Podemos encontrar en Acceso por temas los siguientes temas o categorías:

- *Territorio y medio ambiente.*

…se pueden diseñar muchas más [prácticas] sin mayor problema: estudio del IPC, gasto medio trimestral de la familia, estudios estadísticos relacionados con sanidad, educación, medio ambiente…

EL NORTE DE CASTILLA
Miércoles, 23 de diciembre de 1998

Castilla y León, la región en la que más baja el número de habitantes

Europa Press. MADRID

Castilla y León ha sido la comunidad donde se ha producido un mayor descenso de población de los últimos cinco años, con una disminución del 1,5%, según el Anuario Comercial de España 1999 de La Caixa, presentado ayer por el director del Servicio de Estudios de la entidad, José María Carrau.

Las comunidades que experimentaron un incremento de población de más del 4% en los últimos cinco años fueron Canarias, con un 7,5%, Islas Baleares, con un 7,2% y Murcia, 4,9%. Por contra, las comunidades que registraron una mayor disminución fueron Castilla y León, 1,5%, Asturias, 0,6%, el País Vasco, 0,3% y Aragón, 0,1%.

Figura 1

- *Población.*
- *Sociedad.*
- *Economía.*
- *Agricultura.*
- *Industria.*
- *Servicios.*

y dentro del tema de Población los siguientes apartados y divisiones:

- *Censo y padrón.*
  - — *Población de hecho y de derecho.*

- *Movimientos naturales de población.*
- *Movimientos migratorios.*
- *Empleo y paro.*
- *Análisis demográficos y de población.*
  - — *Proyecciones y estimaciones intercensales.*

Detallaremos brevemente aquellas divisiones que nos pueden ser útiles en las actividades que posteriormente se propondrán:

I.a) *Proyecciones y Estimaciones Intercensales:* Sobre las cifras del censo de 1991 se ha realizado una estimación hasta el año 2005. Se pueden representar gráficamente las estimaciones por años.

I.b) *Población de hecho y de derecho:* Basada en Censos, Padrones y rectificaciones anuales. La población de hecho está dada de 10 en 10 años. La población de derecho es anual desde 1985 hasta 1995.

I.c) *Movimientos naturales de población:* Se obtienen resultados sobre Nacimientos, Matrimonios y Defunciones anuales entre 1975 y 1996.

II) En Información Estadística tenemos información sobre distintos temas:

- *Todos.*
- *Población.*
- *Sociedad.*
- *Economía.*
- *Industria.*
- *Servicios.*

En el tema de Población se puede obtener distintos apartados; los de interés para las actividades que vamos a desarrollar son los siguientes:

II.a) *Censo de Población y Padrón Municipal. Cifras de Población a 1/1/98:* se obtiene la población por Municipios, Provincias, Capitales de Provincia y Comunidades Autónomas con fecha 1/1/98.

II.b) *Análisis y Proyecciones Demográficas. Proyecciones de la Población de España calculadas a partir del Censo de 1991:* se realizan hipótesis sobre la evolución de la mortalidad, natalidad y migración, realizando predicciones de población por Comunidades Autónomas y Provincias.

Actividades

Actividad 1

Vamos a contrastar los datos de la información aparecida en la prensa. Para ello buscaremos información relativa a la población de las Comunidades Autónomas de Castilla y León, País Vasco, Baleares y Canarias entre los años 1994 y 1998.

Tarea 1

Dentro de la base de datos *Tempus* en *Proyecciones y estimaciones intercensales* en la opción *Población a 1 de julio por sexo y comunidad autónoma de residencia* [I.a]. Busca información sobre la predicción de población en las comunidades autónomas que queremos estudiar y represéntala entre los años 1989 y 2003. Imprime las 4 gráficas (opción página horizontal).

Observa las gráficas, ¿están en consonancia los resultados con la noticia del periódico?

Tarea 2

Haz un análisis comparativo sobre las pendientes de las gráficas en su parte intermedia (1994-1998) de Castilla y León con el País Vasco por un lado y de Baleares y Canarias por otro. Realiza un comentario sobre lo que observes:

Castilla y León–País Vasco	*Baleares–Canarias*

Tarea 3

La información sobre la predicción de población de todas las comunidades autónomas y provincias puedes encontrarlas en *Información Estadística* tema de *Población* y apartado de *Análisis y Proyecciones Demográficas (Proyecciones de población a 1 de julio)* [II.b]. Imprime los datos por Comunidades.

En la hoja de cálculo, rellena la tabla adjunta:

Sobre estimaciones	Castilla y León	País Vasco	Baleares	Canarias
Población 1994				
Población 1998				
Diferencia				
Índice de Variación				
Porcentaje crecimiento				

Recuerda que:

- El índice de variación se calcula:

$$I.V. = \frac{Población\ 1998}{Población\ 1994}$$

- El porcentaje de crecimiento se obtiene de restar 1 al índice de variación (En formato de Celda poner el número en porcentaje).

Tarea 4

Observa si los resultados que has obtenido coinciden con los del artículo del periódico. Comenta el resultado:

Tarea 5

Realiza el mismo estudio que en la tarea 3 pero con valores obtenidos de Censos y no de predicciones.

La información relativa al año 1994 puedes tomarla *de Población de hecho y de derecho* [I.b], mientras que la información del censo de 1998 puedes tomarla de *Censo de Población y Padrón Municipal. Cifras de Población a 1/1/98* [II.a].

Sobre el Censo	Castilla y León	País Vasco	Baleares	Canarias
Población 1994				
Población 1998				
Diferencia				
Índice de Variación				
Porcentaje crecimiento				

Tarea 6

Realiza un comentario sobre los resultados y saca conclusiones generales:

Actividad 2

Los datos relativos a Proyecciones y Estimaciones Intercensales son estimaciones; podemos plantearnos dos nuevas cuestiones:

i) El error relativo que se comete.

ii) La correlación con los datos reales.

Tarea 7

Calcula el error relativo entre la población de derecho y la estimada de Castilla y León entre los años 1991 y 1995. Para ello rellena la siguiente tabla en la hoja de cálculo.

Castilla y León	1991	1992	1993	1994	1995
Población de derecho					
Población estimada					
Error absoluto					
Error relativo					

Recuerda que:

- El error absoluto es:

$$E.A. = |Valor\ exacto - Valor\ aproximado|$$

- El error relativo es:

$$E.R. = E.A. / Valor\ exacto$$

(En Formato de Celda poner el número en porcentaje).

Tarea 8

Representa en *XY*-Dispersión la nube de puntos Población de derecho-Población estimada y calcula el coeficiente de correlación lineal (*función = = COEF.DE.CORREL(B2:F2; B3:F3)*). Comenta el resultado.

Actividad 3

Una conclusión que hemos sacado de la *Actividad 1* es la disparidad de situaciones que se dan en las distintas comunidades autónomas, es decir, el comportamiento no es homogéneo. Veamos ahora si ocurre lo mismo entre las provincias de nuestra comunidad.

Tarea 9

Dentro de la base de datos *Tempus* en *Proyecciones y estimaciones intercensales* en la opción *Población a 1 de julio por sexo y provincia de residencia* [I.a]. Busca información sobre la predicción de población en las provincias de León, Palencia, Valladolid, Salamanca y Segovia, entre los años 1971 y 2005.

Imprime las 5 gráficas y estudia qué analogías y diferencias encuentras con la gráfica de nuestra comunidad. Escribe las conclusiones que obtengas:

Tarea 10

¿La coincidencia de tantas provincias hace pensar que la evolución de la población es homogénea o es porque han utilizado parámetros semejantes en la estimación de la población?

Actividad 4

La estimación de la población se realiza tomando como base el Censo de 1991 y teniendo en cuenta la evolución de los tres fenómenos demográficos: *mortalidad, fecundidad y migración*. (Ver *Metodología* del apartado [II.b]).

> Para el cálculo de los efectivos futuros de población por sexo y edades a nivel nacional, autonómico y provincial, se ha empleado el método de componentes, que es el utilizado en la práctica totalidad de los países del contexto occidental.
>
> La aplicación del método de componentes responde al siguiente esquema: partiendo de la población residente en un cierto ámbito geográfico y en un instante dado, se trata de obtener la correspondiente a fechas posteriores bajo ciertas hipótesis sobre la evolución que van a experimentar los tres fenómenos demográficos, mortalidad, fecundidad y migración, que determinan su crecimiento y estructura por edades.
>
> ...Los efectivos de población, por sexo y edad, en cada uno de los ámbitos geográficos considerados, deducidos de la explotación exhaustiva del Censo de Población de 1991, constituyen la población base o de partida, formulándose las hipótesis sobre la evolución futura de la mortalidad, la fecundidad y la migración resumidas en la presente página. La exposición detallada de la metodología puede encontrarse en la publicación mencionada en la presentación, tanto para el total nacional, como para las comunidades autónomas y las provincias.

En esta actividad estudiaremos si las predicciones siguen un comportamiento «regular» a través de los años. Estudiaremos el porcentaje de crecimiento desde el año 1994 hasta 1998 tomando como referencia el año 1994 de las Comunidades Autónomas de la *Actividad 1.*

Tarea 1

En la hoja de cálculo rellena la siguiente tabla:

	*Estimaciones**				*Porcentaje de crecimiento*			
Año	*Castilla-León*	*País Vasco*	*Baleares*	*Canarias*	*Castilla-León*	*País Vasco*	*Baleares*	*Canarias*
1994								
1995								
1996								
1997								
1998								

* Usar la tabla de la tarea 3

Recuerda que:

- El porcentaje de crecimiento en el año *t* respecto al año 1994 es:

$$PC.de.1994.a.t. = \frac{P_t}{P_{1994}} - 1 = \frac{P_t - P_{1994}}{P_{1994}}$$

donde P_t es la población en el año *t. En Formato de Celda poner dicho número en porcentaje.*

Tarea 12

Selecciona en la tabla las columnas de años y porcentaje de crecimiento de las 4 comunidades (*columnas A, F, G, H, I*). Representa gráficamente dichos valores, eligiendo el tipo de gráfico de *líneas*. Imprime la gráfica.

Observa su comportamiento y saca conclusiones.

A la vista del resultado obtenido, haz una predicción para el año 1999.

Práctica 2. Parámetros económicos

Introducción

Es usual encontrar en la prensa referencias a los conceptos de tasa de desempleo o paro, población activa, población ocupada, parada, etc. Todos ellos son empleados por la EPA (Encuesta de Población Activa) y el INEM (Instituto Nacional de Empleo).

Para buscar información sobre la EPA o el INEM, podemos hacerlo en la WEB del INE a través de:

I) En la *base de datos Tempus*, en *Acceso por tema* de *Población*, podemos encontrar el apartado de *Empleo* y *Paro*. Dentro de este apartado tenemos las secciones:

- Encuesta de población activa.
- Estadísticas de empleo del INEM.
- Relaciones laborales.

I.a) Encuesta de población activa (EPA): La realiza el INE y su periodicidad es trimestral. La muestra la componen 64.000 familias.

I.b) Estadística de Empleo del INEM: Datos registrados por el citado organismo.

II) En *Información Estadística* en el tema de *Población*, aparece una referencia a la EPA. Si seleccionamos *Metodología*, podemos conocer en profundidad cómo se hace la EPA, así como los concepto de población activa, ocupados, parados, inactivos…

De igual manera se pueden obtener archivos en formato *Excel* con toda la información por trimestre.

Conceptos

Haremos un breve resumen sobre los conceptos:

- *Población activa*: Población de 16 o más años que está trabajando o en expectativas de trabajar. No se incluyen jubilados, amas de casa ni estudiantes. La población activa se divide en:
  - *Ocupados*: Personas que desempeñan un trabajo retribuido.
  - *Parados*: La parte de población activa que no encuentra trabajo.

Tasa de actividad = Población activa / Población total

Tasa de Paro = Parados / Población activa

La información puedes obtenerla en Metodología sobre la EPA:

http://www.ine.es/htdocs/daco/daco43/notaepa.htm

Actividades

Actividad 1

Analizaremos la EPA del 4.° trimestre de 1998.

Tarea 1

Busca en la base de datos TEMPUS, información sobre la EPA de 3.er y 4.° trimestre de 1998 para completar la siguiente tabla:

	EPA 3.er Trimestre			*EPA 4.° Trimestre*		
	Total	*Hombres*	*Mujeres*	*Total*	*Hombres*	*Mujeres*
Población 16 años o más						
Activos						
Ocupados						
Parados						
Inactivos						
Servicio Militar o P.S.S.						

Tarea 2

En la tabla adjunta, calcula la tasa de actividad y paro de la EPA del 4.° trimestre por sexos; determina también la variación de los *totales* sobre el trimestre anterior: diferencia y porcentaje.

	EPA 4.° Trimestre			*Variación trimestre anterior*	
	Total	*Hombres*	*Mujeres*	*Diferencia*	*Porcentaje*
Población 16 años o más					
Activos					
Ocupados					
Parados					
Inactivos					
Servicio Militar o P.S.S.					
Tasa de actividad					
Tasa de paro					

Recuerda que

$$Diferencia = EPA\ 4.° - EPA\ 3.°$$

$$Porcentaje = \frac{EPA\ 4.°}{EPA\ 3.°} - 1$$

Tarea 3

Dentro de I*nformación estadística* en la parte relativa a la EPA [II] puedes obtener un archivo (*epa0498.xls*) sobre la EPA del 4.° trimestre en formato de la hoja de cálculo *Excel*. Guarda el archivo en la carpeta de *Mis documentos*.

Comprueba que los datos que has calculado coinciden con los que aparecen en la primera hoja.

Tarea 4

En la 6.ª hoja del archivo anterior se tienen los datos de Ocupados, Parados, Tasa de actividad y de paro por sexos, provincias y comunidades Autónomas, según la estructura de la tabla adjunta.

	Ambos sexos				Varones				Mujeres			
	Ocupado	Parado	Tasa actividad	Tasa paro	Ocupado	Parado	Tasa actividad	Tasa paro	Ocupada	Parada	Tasa actividad	Tasa paro
Total												
Autonomía												
Provincia												

Determina la provincia y la comunidad con más tasa de paro, total y por sexos.

¿Cuáles son las que tienen menos?

Nota: Puedes realizar la búsqueda seleccionando la tabla entera y ordenando según la columna que corresponda.

Otra forma más gráfica, es representar en diagrama de barras las provincias en el eje *X* y la tasa de paro que proceda en el eje *Y*.

Tarea 5

Utilizando la función *COEF.DE.CORREL(«datos de la primera variable»; «datos de la segunda variable»)* determina si existe correlación entre la tasa de paro de mujeres y de hombres en todo el territorio. Comenta este hecho:

Actividad 2

Contrasta los resultados de la EPA con los datos registrados por el INEM.

Tarea 6

Busca en *Movimientos laborales registrados en las oficinas de empleo del INEM,* el paro registrado por sexos en diciembre de 1998 y determinar la tasa de paro por sexos.

	INEM-Diciembre de 1998		
	Total	*Hombres*	*Mujeres*
Población activa			
Parados			
Tasa de paro			

Tarea 7

Realiza un estudio comparativo de las tasas de paro de la EPA y del INEM. ¿Qué observas?

Explica las razones por las cuales la tasa de paro de la EPA es superior a la del INEM.

Tarea 8

Reflexiona sobre el modo de «toma de datos» de la EPA y del INEM. ¿Qué diferencias encuentras?

Jesús Á. Hernández
IES Jorge Guillén. Villalón de Campos (Valladolid).
Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas

JO! REY, AGÁCHESE

– DIJO EL GRAN GALEOTO DÁNDOLE EN EL PUÑO DE LA ESPADA PARA ESQUIVAR EL GOLPE.

La frase que dijo el gran Galeoto encierra todas las letras del nombre y apellido de un español que aun siendo matemático no es conocido por ello.

MAYO 2001

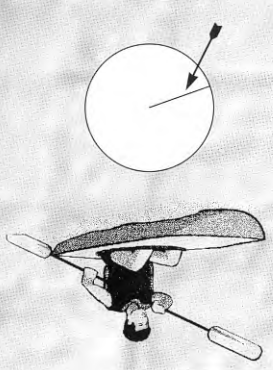
LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES	SÁBADO	DOMINGO
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

La caricatura está hecha con las letras del nombre de un matemático. Localízalas estudiando los tipos de transformaciones realizadas.
¿De quién se trata?

Calle Limonero, 28 - 28020 Madrid
Teléfono y Fax: 91 459 11 19
smpm@smpm.es
www.smpm.es

Jeroglífico

100



¿Quién es?

JUNIO 2001

LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES	SÁBADO	DOMINGO
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	

La caricatura está hecha con las letras del nombre de una matemática. Localízalas estudiando los tipos de transformaciones realizadas.
¿De quién se trata?

Calle Limonero, 28 - 28020 Mad
Teléfono y Fax: 91 459 11 19
smpm@smpm.es
www.smpm.es

SUMA 36
febrero 2001, pp. 67-71

¿Paradoja matemática?

Lucía Puchalt Guillem

IDEAS Y RECURSOS

Tal vez sea una paradoja o tal vez no, pero los alumnos disfrutaron de la actividad tanto por activa como por pasiva. Aprendieron, repasaron, bailaron y cantaron matemáticas. ¿Cómo que cantaron? ¿Se pueden cantar las matemáticas? Pero, ¿ESO de cantar no se hace en la clase de música?, ¿cómo que cantar en matemáticas? no, no. No es cantar en matemáticas, es cantar las matemáticas.

LA ACTIVIDAD que voy a contar es una experiencia propia que realizamos en el instituto. Voy a intentar describir cómo empezó todo y cómo, sin apenas proponémerlo, involucré a medio centro en la actividad.

Casi siempre resulta difícil plantear una actividad que motive a los alumnos y los haga pensar, los haga trabajar en grupo y, al mismo tiempo, les resulte atractiva la idea. Y que, además, intervengan distintos departamentos didácticos simultáneamente.

Terminaba el primer trimestre y los alumnos estaban ya más pensando en el descanso de Navidad, que en la clase de matemáticas. Casi todos estaban realizando la actividad que les había planteado, cuando vi a una alumna con unos auriculares escuchando música, tal fue mi indignación que automáticamente le requisé el radiocasete y le advertí que cuando su madre viniera a por él se lo devolvería.

Ese día iba a ser pesado, ya que tras la jornada de las clases nos esperaba una interminable tarde de sesiones de evaluaciones, con la gran fortuna de tener que asistir a la primera y a la última. Después de la primera sesión, subí al departamento y arreglando mi estantería apareció el radiocasete y pensé, mira que bien oiré música mientras espero a la siguiente evaluación. Cuando empecé a escuchar la música que tenía grabada la casete, no pude más que pensar ¿cómo les puede gustar una música tan dura y tan árida? Y en ese mismo instante pensé: seguro que si las matemáticas se las explicásemos cantando las entenderían mejor.

No pude ni escuchar un minuto más de la canción, así que fui a tomarme un café. Allí coincidí con otros compañeros que estaban esperando a la próxima evaluación igual que yo. En la tertulia del café le comenté al profesor de Lengua:

–¿Qué te parece si organizamos una Parodia Matemática?

–¿Qué? –me respondió.

–Sí, que adapten una canción, utilizando la música cambien la letra, e incluyan un tema matemático.

–¿Crees que se puede hacer?, debe ser muy difícil –me dijo.

–A mí se me ocurre utilizando la canción *Depende* de *Jarabe de Palo,* que podrían hacer algo muy sencillo como

«Depende, de qué depende
la prioridad de las operaciones
primero…»

Estando en esta conversación apareció el profesor de Música y le preguntamos si nos ayudaría. Y le pareció una idea estupenda. Además, que el tema se adaptaba perfectamente a su programación, ya que tenía previsto realizar algunas adaptaciones musicales.

Yo, como jefe de mi área propondría la actividad a mi seminario y el de Lengua haría lo mismo con el suyo (el departamento de Música, es unipersonal).

Y así empezó todo.

Nos pusimos manos a la obra y planificamos la actividad para todos los 3.° de Educación Secundaria (los grupos de tercero tienen música como asignatura obligada y en cuarto es optativa). Estaba finalizando el trimestre, y les comentamos a los chavales que para la próxima evaluación tenían que realizar una Parodia Matemática y que íbamos a evaluar el trabajo desde tres áreas, Matemáticas, Lenguaje y Música. Les comentamos que podían realizar la actividad tanto en grupo como individualmente y que el máximo de componentes por grupo sería de cuatro alumnos.

En algunas clases la idea les resultó tan fascinante que sólo con relacionar parodia con matemáticas empezaron a improvisar y a cantar matemáticas en la clase de matemáticas. Sin embargo hubo clases en las que les tuve que tararear el «Depende…» para que entendieran lo que les estaba pidiendo.

Las canciones las entregaban a su profesor de matemáticas, escritas con la referencia de la canción utilizada y luego grababan la canción en una cinta junto con la música. Cuando se valoró el contenido matemático, el mismo profesor se lo entregaba al departamento de Lengua, y éste, una vez valorado su contenido, al de Música.

Así que el trabajo lo valoramos en la segunda evaluación, matemáticas y lengua, y en la tercera, lo valoró música.

De todas las canciones de una clase, el profesor de música junto con los alumnos, eligieron la canción que más les gustaba, para representar al grupo y luego poder interpretarlas en la fiesta de final de curso.

La parte de interpretar las canciones fue voluntaria, e incluso el autor no tenía por qué coincidir con alguno de los intérpretes. Cada grupo tendría su representación.

El profesor de música estuvo trabajando aspectos propios de su currículo, y los alumnos al mismo tiempo estudiaron matemáticas en la clase de música e hicieron música en la clase de matemáticas. Paradoja o no, así fue.

Las canciones fueron calificadas de forma distinta, en cada área…

La creatividad de los alumnos hizo que la actividad pudiera implicar a otras áreas como el área de Plástica. Algunos grupos presentaron una carátula de la cinta, que dicha área pasó a valorar (figuras 1 y 2).

Así pues, Sras y Srs empieza «La Parodia Matemática". (A continuación, leerán, ya que no pueden escuchar el trabajo que realizaron los alumnos. Sería recomendable que si pueden conseguir las canciones de referencia, lean mientras suena la música.)

Las canciones fueron calificadas de forma distinta, en cada área, de manera que las de mayor contenido matemático, no coincidían con la mejor adaptación musical y viceversa. De las de más contenido matemático, quisiera destacar:

Figura 1

Figura 2

Título: *La ecuación Matemática*
Autor: *Rafael Redondo Martínez*
Curso: *ESO 3C*
Basada en la canción «El tractor amarillo»

Pa pa pa pa pa, pa pa pa pa pa, pa pa pa pa pa, pa pa pa pa pa,
Me miraste con ojos de gacela cuando vistes mi ecuación,
Me pusistes cara de asombrada cuando vistes aquello tan largo,
Sabes bien que soy muy listo y que sólo sé de matemáticas.
Cuando llegue el próximo domingo voy a traerlo para impresionarte.

Estribillo
Tengo una ecuación muy larga que es lo que se lleva ahora,
Tengo una ecuación muy larga que es la última moda,
Hay que solucionar la ecuación primero los paréntesis.
Que es la forma más rápida de solucionar una ecuación.
Pa pa pa pa pa, pa pa pa pa pa, pa pa pa pa pa, pa pa pa pa pa,
Después la multiplicación o la división, con sus respectivas fórmulas,
Se separa la x de los otros números. Pero se cambian los signos,
Cuando cambian de lado,
Se despeja la x y se resuelve la ecuación

Estribillo

Tengo una ecuación muy larga que es lo que se lleva ahora,
Tengo una ecuación muy larga que es la última moda,
Hay que solucionar la ecuación primero los paréntesis.
Que es la forma más rápida de solucionar una ecuación.

Título: *Las fracciones*
Autora: *Ana Bonilla*
Curso: *ESO 3D*
Basada en la canción «Allá en el rancho grande»

Allá en el instituto
Allá donde estudiaba
Había una profesora
Que alegre me enseñaba
Que alegre me enseñaba
Te voy a enseñar las fracciones,
Como me las enseñaron en su día,
Empezaremos por las sumas y seguiremos por las restas
Para sumar fracciones, se halla el denominador
Y seguidamente se hlla el numerador
Allá donde yo estudiaba
Allá donde yo iba
Había una profesora
Que claramente me decía
Que claramente me decía
Por último se suman los numeradores
Pero una cosa queda muy clara,
Que el denominador se queda igual

Para restar se hace lo mismo
Pero cambiando el signo,
Porque en vez de sumarlos
Lo que haría sería restarlos

En esto consisten las sumas
Las sumas y las restas, si esto lo dominas
Ya estás preparada para complicarlo,
Lo podemos complicar
Poniendo paréntesis y quebrados
Pero esto no lo voy a explicar
Porque esta canción ya ha terminado.

Título: *Explica me como sumar monomios*
Autoras: *Davinia Cordero y Natalia Gómez*
Curso: *ESO 3A*
Basada en la canción de los Mojnos Escocidos «Chow-Chow»

Mi profe # sa inventao una nueva forma de sumar,
Que tiene un viaje de letras y números para sumar
A esto se le llama *monomio* y solo, se puede sumar,
Cuando éste es semejante con la misma parte literal
Y yo le digo…

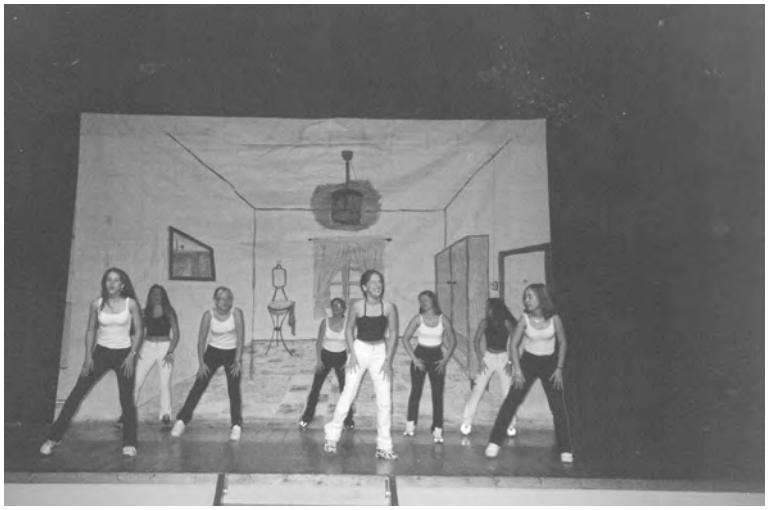
Estribillo
¡Explica me como sumar monomios!
¡Explica me! (bis 3)

Al número se le llama coeficiente, y la letra parte literal
To monomio tiene un grado que se le pone al final
Y mi profe # dice que le da mucha alegria
Cuando sale a la pisarra
Y la escuchamos tos los días
Y yo le digo…

Estribillo

Cuando nosotros no lo entendemos,
lo vuelve a explicar,
to las veces que hagan falta hasta poderlos sumar
Y cuando llega el verano y logramos aprobar,
Nuestra profe # dice que podemos descansar
Y yo le digo…

Estribillo



Título: *Números enteros*
Autoras: *Natalia Conde y Ana Belén Abad*
Curso: *ESO 3A*
Basada en la canción de Malu «Dime al oído»

Por si acaso me estuvieras escuchando
Tú que ahora has decidido aprender
Y de pronto tú verás que no es tan fácil
Como tu piensas aaaaa…

Sólo espero que te dé buen resultado
En la resta y en la suma de enteros,
Ya que suele ser un poco extraño
El que puedas resolverlo de esta manera
Y cuando tienen igual signo se deben sumar
Y a diario tú, debes ir estudiando

Cuantas veces he pensado cómo lo debería poner
Y por fin lo resolví y ahora todo es más fácil

Ya lo aprendí, las cosas buenas que me has enseñado
Y mi deber haré, mi deber haré
Que sepas que se resta si no es el mismo signo, niño
Yo no quiero olvidar
Las cosas buenas que me has enseñado y mi deber haré

Yo que nunca di importancia a la enseñanza,
Me daba miedo ponerme a estudiar,
Me estoy poniendo ya las pilas
Necesito aprobar este trimestre
Y tan fácil me parece ahora todo,
Y me costaba comprender las matemáticas
Pero trataba de esforzarme y tú, para ayudarme me lo volvías a enseñar

En fin quería que supieras que ya lo aprendí
Las cosas buenas que me has enseñado
Y mi deber haré, mi deber haré
Que sepas que algo de esto te queda por aprender, niño

Te enseñaré la resta de enteros,
Si me estás oyendo, dime que me estás oyendo
Que sepas que se resta si no es del mismo signo, niño.
Yo no quiero olvidar,
Las cosas buenas que me has enseñado y mi deber haré

Título: *De Matemáticas*
Autor: *Pablo Alcalá*
Curso: *ESO 3A*
Basada en la canción de Manolo Tena «Pájaros de barro»

Para poder hacer un problema, hay que seguir
Estos pequeños pasos, para poder realizarlo.

Primero hay que elegir la incógnita,
Segundo se traduce el problema
Si puede ser al lenguaje matemático,
Y tercero, se resuelve la ecuación
Y cuarto, se da el resultado
Y quinto, se comprueba

Luego hay cuatro métodos
Uno es de Igualación,
Que consiste en despejar,
la misma incógnita de las dos ecuaciones,
y luego se igualan los resultados,

Luego está el de sustitución,
consiste en despejar,
una de las dos incógnitas,
en una de las dos ecuaciones
y sustituir en la otra ecuación.

Está el método de reducción
Consiste en eliminar
Una de las dos incógnitas
Y para ello se multiplican las ecuaciones
Por un número distinto de cero y luego,
se suman o se restan
los resultados,

Y luego,
está el método gráfico
que éste consiste en dibujar las gráficas
que representan las dos
ecuaciones y el punto
donde se cortan es la solución del sistema.

Cuando sepas esto ya sabrás
resolver ecuaciones y sistemas

La canción que a continuación presentamos fue una de las pocas que tanto el profesor de Música, como el de Matemáticas valoraron positivamente; además fue una de las más votadas y representó a ESO 3A en el festival de fin de curso.

Título: *Las traducciones de ecuaciones*
Autoras: *María González, Sara Romero, Tania Trapero, María Andrés y Sandra Muñoz*
Curso: *ESO 3A*
Basada en la canción de Venga Boys «Boom, Boom, Bomm»

Oh oh oh oh oh oh oh oh oh oh oh oh oh oh
Oh oh oh oh oh oh oh oh oh oh oh oh oh oh,

Las mates no las soporto, las traducciones de
Ecuaciones, ya no puedo aguantar más voy a catear

Oh oh oh oh voy a catear
Oh oh oh oh ya no aguanto más
Oh oh oh oh voy a reventar
Oh oh oh oh

Bum, Bum, Bum, el doble de un número es igual a 2 por x es, 2 por x
Bum, Bum, Bum, el triple de un número es igual a 3 por x es, 3 por x

Oh oh oh oh voy a catear
Oh oh oh oh ya no aguanto más
Oh oh oh oh voy a reventar
Oh oh oh oh no me gusta estudiar
Oh oh oh oh al final me voy a ir
Oh oh oh oh

Bum, Bum, Bum, la mitad de un número es igual a x entre dos
Bum, Bum, Bum, el cuadrado de un número es igual a x elevado a dos
Bum, Bum, Bum, el cubo de un número es igual a x elevado a tres

Las mates son un rollo voy a explotar de tanto estudiar

Oh oh oh oh oh oh oh oh oh oh oh oh oh oh
Oh oh oh oh oh oh oh oh oh oh oh oh oh oh,

Bum, Bum, Bum, la diferencia de dos números es igual a x menos y
Bum, Bum, Bum, la razón entre dos números es igual a x partido y

Valoración de la paroodia matemática

Conseguimos unas 40 canciones, con *más o menos* contenido matemático, entre todos los grupos. Algunos parodiaron la clase de matemáticas, como clase, no los contenidos matemáticos y otras consiguieron adaptar contenidos matemáticos a sus canciones.

La mayoría de los autores de las canciones, aprendieron el contenido matemático que incluían en sus temas. Y el resto tarareaba, a todas horas, las canciones más pegadizas con su contenido matemático. Además todo el centro asistió a la representación de las canciones y, pasivamente, se quedaron con la copla.

- El Departamento de Matemáticas se coordinó con los departamentos de Lengua Castellana, Música, Plástica y Extraescolares.
- El Departamento de Lengua se encargó de valorar tanto el estilo lingüístico de las canciones, como los errores ortográficos.
- El Departamento de Música se encargó de que los alumnos oyeran las canciones que habían hecho sus compañeros y eligieron una que representara al curso. Trabajó los aspectos propios de su currículo con estas canciones y *así repasaron en la tercera evaluación conceptos básicos de matemáticas vistos en la primera y segunda evaluación*. También se encargó, con mi colaboración, de los ensayos y de todos los problemas técnicos de la grabación de las canciones, pruebas, etc.
- Diseñamos unos diplomas (figura 3) de mención honorífica para todos aquellos alumnos que colaboraron en la representación de las canciones (ya que fue totalmente voluntaria esta parte; incluso la coreografía fue diseñada por ellos mismos y supervisada por el profesor de Música).
- El Departamento de Plástica fue el último en colaborar y por eso no dio tiempo a desarrollar su participación en la actividad pero sí de empezar una coordinación interdisciplinar muy interesante, ya que a la vista de los trabajos presentados por los alumnos pensamos que podían realizar las carátulas de sus canciones y al mismo tiempo trabajar la educación para el consumidor, un eje transversal.
- Además me gustaría proponer para el próximo curso, al Departamento de Educación Física su colaboración y pedirles que valorasen el trabajo de coreografía que han de realizar los alumnos para realizar las actuaciones.

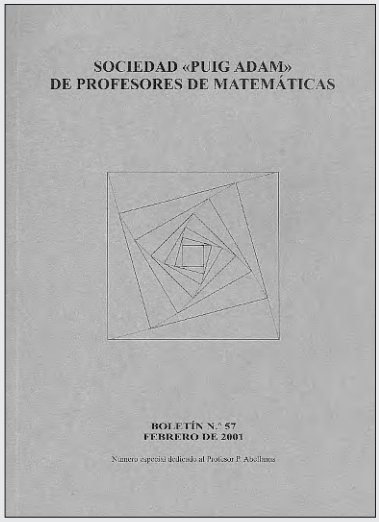
Se propuso la actividad de una manera improvisada y se resolvieron los problemas según se fueron presentando.

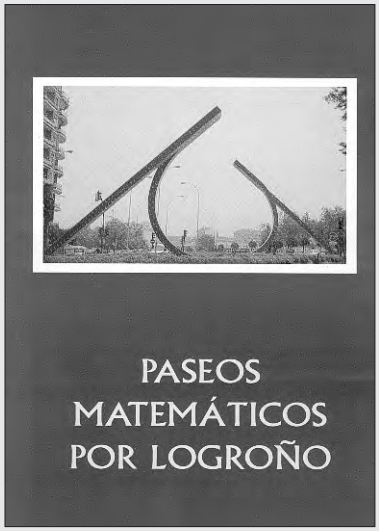
Pero, la experiencia ¿fue una Paradoja? Juzgue, usted mismo.

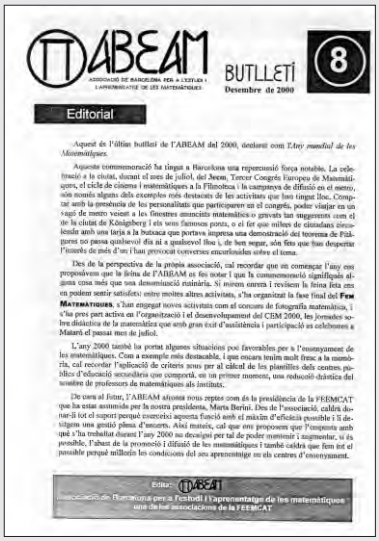
Figura 3

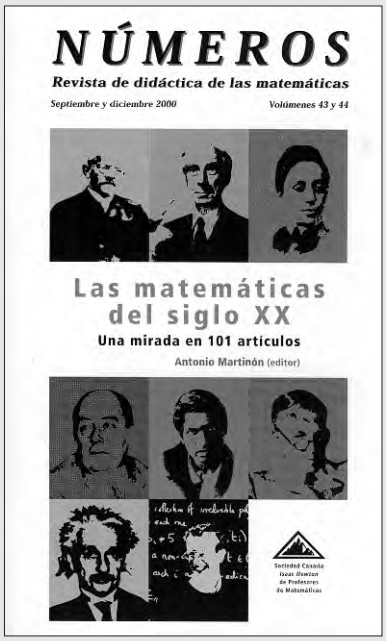
Lucía Puchalt
IES Pere Boïl
Manises (Valencia)
Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»

PUBLICACIONES DE LAS SOCIEDADES









SUMA 36
febrero 2001, pp. 73-76

Estudio de funciones con Derive

José de Francisco Estaire

IDEAS Y RECURSOS

Se presenta un módulo para *Derive* que permite ir más allá del simple dibujo de la gráfica de una función. Tan sólo basta cargarlo y definir en él la función *F*(*x*) sobre la que se quiere aplicar, para que las funciones que lo integran proporcionen sus elementos característicos: asíntotas, máximos y mínimos, inflexiones,...

EL ORIGEN de este artículo está en no haber preparado debidamente una clase.

La historia es la siguiente. Había terminado, en 2.°de Ciencias Sociales, el tema «Trazado de Funciones» y realizado algún ejercicio de aplicación, así que decidí hacer un ejercicio completo en el que se trataran todos los apartados estudiados. Del libro de texto, en la sección de ejercicios propuestos seleccione:

Representar la función

$$y = \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^2 - 2x - 4}$$

Calculamos las asíntotas, la derivada primera y después de simplificarla obtuvimos:

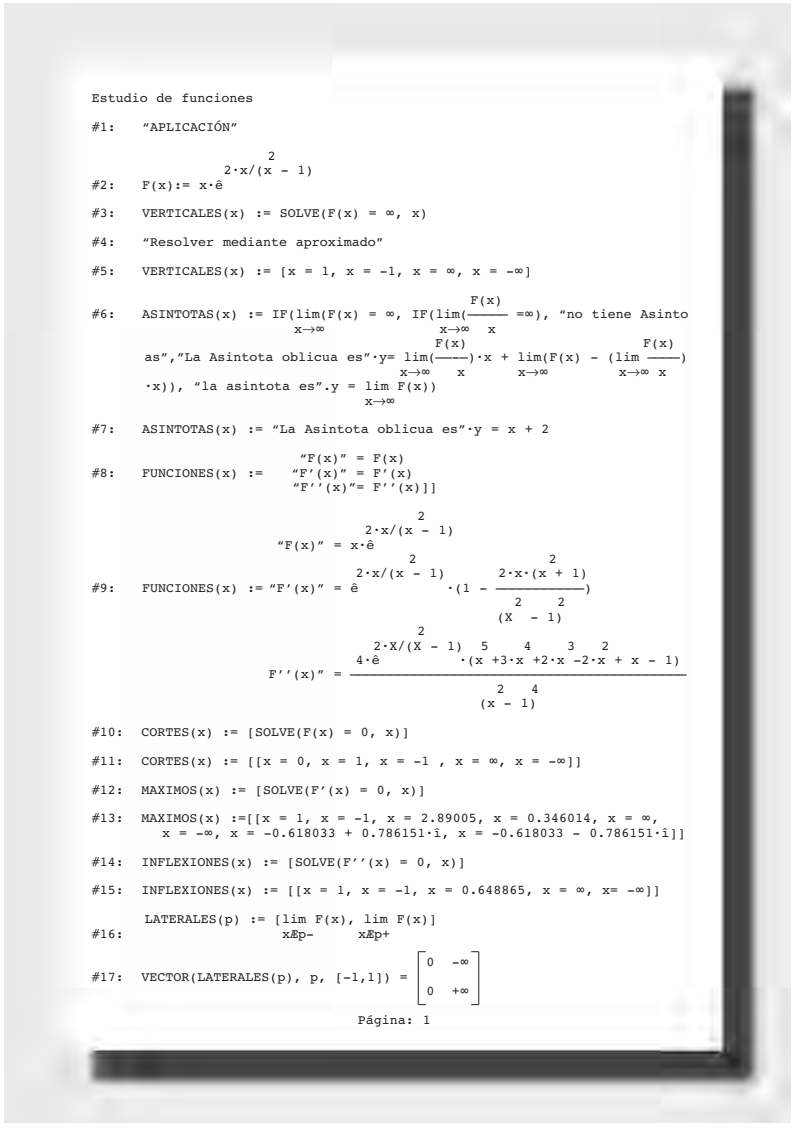
$$y' = \frac{x^4 - 6x^3 - 15x^2 - 4x - 6}{\left(x^2 - 3x - 4\right)^2}$$

El paso siguiente fue solucionar y' = 0. Al tratar de anular el numerador dije: «Ahora buscaremos por Ruffini las raíces del numerador y cruzaremos los dedos para que sean divisores del termino independiente». Comenzamos a probar los divisores de 6 sin éxito. En ese momento sonó el timbre que indicaba el final de la clase y me despedí diciendo: «No hay que preocuparse, pues si las raíces son irracionales mi amigo *Derive* nos las encontrará».

Cuando fui a casa abrí el programa y le suministré la función. Calculé la derivada primera, por si hubiera habido algún error en la simplificación, comprobé que no había ocurrido y mande que resolviera la ecuación y' = 0. Como sospechaba las raíces eran irracionales; obteniendo:

[x= 7'95956, x = –1'85656, x = –0'0514983 + 0'63512 i, x = –0'0514983 – 0'63512 i]

Al tener el programa abierto represente la función, pero eche en falta los elementos característicos como asíntotas,



máximos, mínimos, inflexiones... estas ausencias fueron las que me llevaron al deseo de tener un programa tal que, conocida la función permitiese el cálculo de los elementos necesarios para el estudio e interpretación de dicha función, de forma que el trabajo de cálculo solo se hiciera una vez. Para definir las funciones que calculan los apartados deseados tuve que utilizar algunas de las funciones predefinidas en *Derive*, las funciones utilizadas han sido:

SOLVE ; LIM ; IF ; VECTOR ; INSERT_ELEMENT

Recordemos su sintaxis:

SOLVE([F(x, y) = a, G(x,y) =b] ,[x, y]): resuelve el sistema $F(x, y) = a$, $G(x, y) = b$, en las variables x e y.

SOLVE(F(x), x): resuelve la ecuación $F(x)=0$, en la variable x.

LIM(F(x), x, a): calcula el límite de la función $F(x)$ cuando la variable x tiende hacia a. El valor a puede ser mas o menos infinito.

Si queremos calcular los límites laterales cuando x tiende hacia a la sintaxis es:

LIM(F(x), x, a, 1) y LIM(F(x), x, a, –1), que calculan el límite de $F(x)$ cuando x tiende hacia a, siendo x >a (derecha) y siendo $x < a$ (izquierda).

IF(«Condición C», realizar A si se cumple la condición C, realizar B si no se cumple la condición C). Abreviadamente IF(C, A, B).

La función VECTOR puede generar un vector o un vector cuyas componentes sean vectores (una matriz).

VECTOR(Función o funciones en la variable *n*, variable *n*, Valores que toma *n*)

VECTOR ([x, F(x)], x, [1, 2 ,5, 9]) genera la matriz cuyas filas son: [1 ,F(1)] , [2 ,F(2)] , [5 ,F(5)] , [9 ,F(9)]

Si queremos que la primera fila de una matriz A no sea numérica y que tenga por valores el encabezamiento de una tabla, debemos insertar una primera fila con dichos encabezamientos mediante INSERT_ELEMENT.

INSERT_ELEMENT([fila a insertar], A, K), siendo A el vector o matriz en la que vamos a insertar la fila y K la posición en la que se realizara la inserción. Como en la primera fila queremos que figure un texto y no un cálculo debemos colocar entre comillas cada elemento de la fila insertada.

Una forma de realizar el estudio es mediante los siguientes pasos:

1.° Definir la función a estudiar

F(x) := «función objetivo»

2.° Cálculo de las asíntotas verticales

VERTICALES(x) := SOLVE(F(x) = ∞, x)

Resuelve la ecuación para la variable x. En algunas funciones (principalmente en las definidas a trozos) no efectúa el cálculo correctamente.

3.° Asíntotas horizontales y oblicuas

ASINTOTAS(x) := IF (LIM(F(x), x, ∞) = ∞, IF(LIM(F(x)/x = ∞, x, ∞), «No tiene Asíntotas», «La Asíntota oblicua es» y = LIM(F(x)/x, x, ∞) * x + LIM(F(x) – LIM(F(x)/x, x, ∞) * x, x, ∞)) , «La Asíntota horizontal es» y = LIM(F(x), x, ∞))

En nuestro caso si el limite de $F(x)$ es infinito calcula A = límite de $F(x)/x$. Si no es infinito calcula B = « a Asíntota horizontal es» y = Valor del Límite.

Cuando se cumple la condición nos conduce a otro IF en el que la condición es: si el límite de $F(x)/x$ es infinito, entonces A = «no tiene Asíntotas», si el cociente no es infinito se cumplirá B = «la Asíntota oblicua es» $y = mx + b$

4.° La función, su derivada primera y su segunda derivada

Las agrupamos en una matriz de 3×1. Cada fila de la matriz debe ir entre corchetes y el texto que queremos que aparezca tiene que ir entrecomillado.

FUNCIONES(x) := [[«F(x)»=F(x)], [«F'(x)» = = F'(x)], [«F"(x)»=F"(x)]]

Esta matriz permite trabajar con cada fila independientemente.

5.° Puntos de corte. Posibles máximos, mínimos y puntos de inflexión

Resolvemos las ecuaciones $F(x) = 0$, $F'(x) = 0$, $F''(x) = 0$. Para ello utilizaremos la función SOLVE entre corchetes ya que de esta forma obtenemos las soluciones como componentes de un vector.

CORTES(x) := [SOLVE(F(x) = 0, x)]
MAXIMOS(x) := [SOLVE(F'(x) = 0, x)]
INFLEXIONES(x) := [SOLVE(F"(x) = 0, x)]

6.° Límites laterales

Si queremos calcular los límites laterales en algunos puntos $p_1, p_2, p_3, \ldots$ que consideremos interesantes (puntos de discontinuidad, asíntotas verticales, …). Les agruparemos en un vector p.

LATERALES(p) := [LIM(F(x), x, p, −1), LIM(F(x), x, p , 1)]
VECTOR(LATERALES(p), p, [p], p_2, p_3, ...]) =

La última instrucción calcula los límites laterales en los puntos p_1, p_2, p_3, … mediante la función LATERALES(p). La variable de la función es p y no x. El resultado es una matriz de dos columnas e i filas, siendo la primera columna el límite por la izquierda en cada punto p_i y la segunda columna es el límite por la derecha.

Estudio de Funciones

#18: PUNTOS(x) := [-2, -1, -0.5, 0, 0.346014, 0.5, 0.648865, 1, 2, 2.89005, 3]

#19: TABLA_MINIMA(x) := INSERT_ELEMENT(["x", "F(x)", "Signo de F'(x)", "F'(x)"], VECTOR([x, F(x), SIGN(F'(x)), F'(x)], x, PUNTOS(x)),1)

#20: TABLA_MINIMA(x):=

"x"	"F(x)"	"Signo de F'(x)"	"F'(x)"
-2	-0.527194	1	0.849368
-1	?	?	?
-0.5	-1.89683	1	12.224
0	0	1	1
0.346014	0.157642	±1	0
0.5	0.131798	-1	-0.322174
0.648864	0.0689785	-1	-0.47852
1	?	?	?
2,	7.58733,	-1,	-4.6367
2.89004	6.34347	±1	0
3	6.35099	1	0.132312

#21: TABLITA(x) := VECTOR([x, F(x)], x, PUNTOS(x))

#22: TABLITA(x) :=

-2	-0.527194
-1	?
-0.5	-1.89683
0	0
0.346014	0.157642
0.5	0.131798
0.648864	0.0689785
1	?
2	7.58733
2.89004	6.34347
3	6.35099

Página: 2

7.° Puntos de estudio y valoración (máximos, inflexiones, ...)

Agrupamos todos los puntos en una función.

PUNTOS (x) := [puntos de estudio y valoración separados por comas]

8.° Tabla de valores de la función y su derivada

En cada punto de estudio podemos calcular $F(x)$, el signo de la primera derivada y el valor de $F'(x)$. Una forma de conseguirlo es mediante una matriz que llamaremos TABLA_MINIMA. Esta matriz tendrá en la primera fila, como encabezamiento: x, $F(x)$, signo de $F'(x)$ y $F'(x)$ y en las filas siguientes las tabulaciones de las funciones en los puntos deseados.

TABLA_MINIMA(x) := INSERT_ELEMENT([«x», «F(x)», «Signo de F'(x)», «F '(x)»], VECTOR([x, F(x), SIGN(F'(x)), F'(x)], x, PUNTOS(x)), 1)

TABLA_MINIMA, mediante el valor de $F'(x)$ y su signo a la izquierda y derecha de un punto en el que se anula la derivada, permite dilucidar si en ese punto existe máximo o mínimo. El estudio del signo a la izquierda y derecha de un punto es fundamental, pues a veces al estudiar el signo en las soluciones de $F'(x) = 0$ no da signo cero, pues da un valor pequeño a la derivada en el punto y por tanto tiene signo positivo o negativo.

9.° Tabla de valores de la función

Si queremos representar un punto no es posible con TABLA_MINIMA(x), pues tiene cuatro columnas. Necesitaremos una tabla en la que únicamente figuren la variable x y el valor de $F(x)$. Esto lo conseguimos mediante la función TABLITA(x)

```
TABLITA (x) := VECTOR([x, F(x)], x, PUNTOS(x))
```

En nuestro caso la función es un vector de dos componentes $[x, F(x)]$, la variable es x y los valores que tomará serán los puntos que hemos seleccionado para el estudio y que figuran en PUNTOS(x).

10.°

Guardamos en la carpeta de *Math* de *Derive* el archivo «Estudio de Funciones» (siendo su extensión *.mth*). Cada vez que queramos estudiar una función llamaremos al archivo, indicamos quien es $F(x)$, copiamos las funciones de estudio y posteriormente bastara con llamarlas para obtener los resultados.

Al aplicar el algoritmo anterior a diversas funciones he notado que en las definidas a trozos al resolver la ecuación: derivada primera = 0 , a veces no se obtienen todas las soluciones, la forma mas eficaz es resolver la primera derivada de cada trozo y seleccionar los puntos que están en el intervalo de definición. En estas funciones el cálculo de las asíntotas verticales suele dar algún problema.

Apliquemos todo lo anterior al estudio de la función (ver figuras):

$$y = xe^{2x/\left(x^2 - 1\right)}$$

José de Francisco Estaire
IES Andrés Laguna
Segovia

Bibliografía

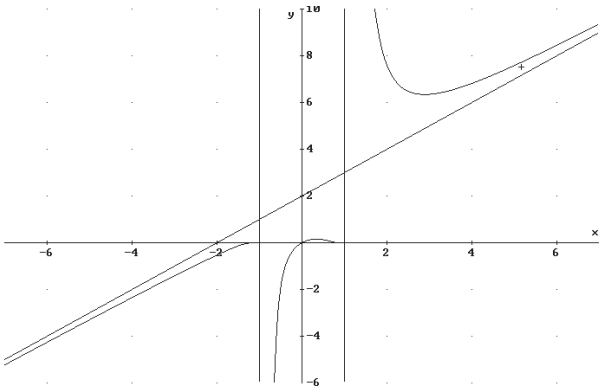
GARCÍA, A. (1994): *Prácticas de matemáticas con* Derive, Alfonsa García, Madrid.

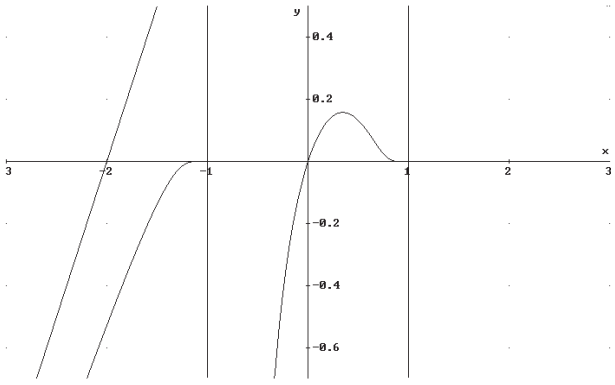
GUZMAN, M y B. RUBIO (1993): *Análisis Matemático –3– Sucesiones y series de funciones, números complejos,* Derive*, aplicaciones*, Pirámide, Madrid.

IBAÑEZ JALÓN, M, M. F. PÉREZ MARTÍNEZ, A. J. POBLACIÓN SAEZ y A. SUÁREZ BARRIO (1999): *Práctias de matemáticas de Bachillerato con* Derive *para* Windows, Ra-Ma, Madrid.

KUTZLER, B. (1996): *Introducción a* Derive *para* Windows , Derisoft, Valencia. [*Manual de* Derive, traducción de LLORENS FUSTER, J. L. (1998).]

PÉREZ, C. y C. PAULOGORRÁN (1998): *Matemática práctica con* Derive *para* Windows, Ra-Ma, Madrid.





SUMA 36
febrero 2001, pp. 77-84

Exposición de curvas y superficies: una experiencia extraacadémica universitaria

Juan Núñez Valdés, C. Aguilera, I. Fernández, M.J. Macías, A. Montaño, S. Pérez, I. Rivero, M.J. Romero, J.I. Sánchez y A.M. Serrato

IDEAS Y RECURSOS

En este artículo se comenta una experiencia extraacadémica realizada por un grupo de alumnos universitarios de Matemáticas, juntamente con su profesor, en el marco de la Semana de las Matemáticas organizada por la Facultad de Matemáticas de Sevilla para conmemorar el Año Mundial de las Matemáticas (Año 2000). La citada experiencia consistió en la realización y montaje de una Exposición de Curvas y Superficies, cuyos objetivos generales, desarrollo y conclusiones finales constituyen la base de este trabajo.

ASÍ COMO suele ser habitual encontrar artículos relativos a experiencias extraacadémicas realizadas por alumnos de Educación Primaria o Secundaria en las páginas de revistas especializadas en Educación, Didáctica o Metodología, no suele ser frecuente, por el contrario, encontrar estos mismos trabajos cuando los sujetos son alumnos universitarios, sobre todo en el caso de las disciplinas científicas.

El presente artículo, que viene a paliar en algo la consideración anterior, trata sobre una experiencia extraacadémica realizada, a instancias del profesor, por un grupo de 9 de sus alumnos universitarios del curso de la asignatura *Geometría III* (Geometría Diferencial de Curvas y Superficies) de la licenciatura de Matemáticas, en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla (año académico 1999-2000). Esta experiencia tuvo lugar dentro de los actos programados durante la Semana de las Matemáticas (semana del 27 de marzo al 2 de abril de 2000) organizada por la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla en conmemoración del Año Mundial de las Matemáticas (Año 2000).

Lo que en principio fue un simple comentario por parte del profesor a la totalidad de sus alumnos del citado grupo en el sentido de que le gustaría que su clase de Geometría participase como tal, de forma activa, en dicha Semana, realizando una actividad inicialmente sin determinar, si bien relacionada de alguna forma con el temario de la asignatura, se convirtió posteriormente en el firme compromiso por parte de un grupo reducido de estos alumnos de idear, planificar, organizar y, en definitiva, realizar una Exposición sobre Curvas y Superficies, que es la que seguidamente se pasa a comentar.

El presente artículo se estructura en seis secciones. En la primera, se señalan los objetivos que nos marcamos al inicio de la experiencia. En la segunda, tercera y cuarta sec-

ciones se tratan, respectivamente, las cuestiones referentes a la preparación y montaje, decoración externa y contenidos de la Exposición. En la sección quinta se comentan algunas curiosidades y anécdotas surgidas al hilo de la misma, dedicándose finalmente la sexta sección al tratamiento de la valoración final y conclusiones extraídas por nosotros mismos a la finalización de la misma.

Objetivos de la Exposición

El principal objetivo que nos propusimos fue el de a*cercar la Geometría Diferencial de Curvas y Superficies* a compañeros, profesores y demás visitantes interesados en el tema y hacerlo, además, de una forma seria y rigurosa aunque no exenta de un tratamiento algo más informal y ¿por qué no decirlo? también lúdico del tema.

Para ello, pensamos que la Exposición no solamente debería mostrar algunas de las curvas y superficies que habíamos estudiado en clase de Geometría e indicar sus principales propiedades, sino que al mismo tiempo debería presentarlas además de una manera física y tangible, que permitiese al visitante observarlas con el mayor detenimiento posible, considerar en ellas todos los conocimientos teóricos previamente estudiados y también, en gran parte de los casos, poder manipularlas o incluso «crear» en el ordenador sus «propios» cuerpos geométricos. A tal fin, deseábamos que los visitantes no sólo *vieran* sino que también participaran de manera activa en la Exposición.

Un segundo objetivo fue, cómo no, aprovechar el año en el que nos encontrábamos, para aportar nuestro pequeño granito de arena, como parte integrante de la Facultad de Matemáticas, participando activamente en los actos de la Semana de las Matemáticas organizada por la misma, ayudando a promocionar de esta forma el conocimiento y el uso de las Matemáticas en todo el mundo, y a mostrar a la sociedad la presencia permanente de las Matemáticas en diferentes hábitos de nuestra vida y resaltar su importancia en el desarrollo científico, tecnológico y cultural, tal como se recogía en los objetivos generales del Año Mundial de las Matemáticas, que celebrábamos en ese año 2000.

Un tercer objetivo fue el de calibrar si las actividades extraacadémicas universitarias (sobre todo en las áreas científicas), tan denostadas por lo general tanto por profesores como por alumnos, deberían ser más tenidas en cuenta por ambos estamentos a fin de conseguir la tan ansiada formación integral, no sólo teórica y de conocimientos, del alumnado de estas licenciaturas.

Pasamos a continuación a detallar la actividad realizada y los logros obtenidos, que nos permitirán concluir si los objetivos inicialmente propuestos se cumplieron o no.

…la Exposición no solamente debería mostrar algunas de las curvas y superficies que habíamos estudiado en clase de Geometría e indicar sus principales propiedades, sino que al mismo tiempo debería presentarlas además de una manera física y tangible, que permitiese al visitante observarlas con el mayor detenimiento posible…

Preparación y montaje

Con respecto a la preparación y montaje en sí de la Exposición, debemos comentar que resultó más complicado y que nos llevó más tiempo del que en principio habíamos considerado.

Así, nuestras primeras ideas sobre el contenido fueron variando desde la primera de nuestras reuniones hasta prácticamente el mismo momento de la inauguración. De hecho, todo lo que finalmente se expuso fue fruto de intensos debates y reuniones en los que se cambiaban, se ampliaban e incluso se desechaban numerosos proyectos inicialmente previstos y que después, por diferentes razones, no pudieron llevarse a cabo.

Por otra parte, el aula que nos había sido asignada por la Facultad, aunque bastante amplia, estaba lógicamente ocupada por las correspondientes mesas y sillas, que necesariamente tuvimos que redistribuir, para facilitar el paso libre y sin obstáculos de los visitantes. Además, había que colocar los carteles informativos, figuras, dibujos, cuerpos geométricos, etc., de forma que todos ellos estuviesen bien a la vista y que no se estorbasen unos a otros. Al respecto, cabe mencionar la gran dificultad que nos supuso el traslado hasta el aula de una preciosa y extensa colección de cuerpos geométricos propiedad de la Facultad (donada por un familiar de un profesor de la misma hace ya bastante tiempo) que se guardaban en unos estantes cerrados, construidos expresamente para ello, que fue necesario trasladar tal cual, desde su lugar habitual, la Sala de Juntas de la Facultad, hasta el aula, entre cuatro o cinco de nosotros, con el mayor cuidado para evitar posibles golpes o deterioros entre ellos. También fue relativamente complicado el traslado y posterior montaje en el aula de dos ordenadores gentilmente prestados por miembros de la Facultad, que hubo de realizarse con el máximo cuidado.

Además, el tiempo de que dispusimos para ello fue más bien escaso, habida cuenta que la mayor parte de la tarea anterior hubo de hacerse durante las

primeras horas de la mañana del lunes de esa misma semana, dado que hasta la última hora lectiva de la tarde del viernes anterior hubo clases en el aula asignada y durante el fin de semana no pudimos acceder a ella.

Decoración externa

En un principio, la Exposición estaba reducida sólo y exclusivamente al aula destinada para ella, situada en la segunda planta de la Facultad. Por ello, decidimos ampliar algo el espacio y se nos ocurrió decorar la Facultad con algunas figuras geométricas gigantes, que fuesen «abriendo boca» a los visitantes. Así, pensamos en distribuir a lo largo del camino que llevaba al aula una serie de elementos geométricos que pudieran ser apreciados a simple vista a medida que el visitante se fuese acercando y que, por otra parte, constituyesen por sí mismos parte del material que se deseaba exponer. Estos elementos fueron confeccionados manualmente por nosotros mismos, con materiales habituales en nuestro quehacer cotidiano, como papel de aluminio, cables, latas de refrescos vacías, periódicos, alambres, etc. Ciertamente, atraídos por estas figuras gigantes, fueron muchos los que se decidieron a visitar la Exposición, saliendo muy complacidos finalmente de la misma.

Las dos primeras figuras en aparecer a la vista del visitante, una vez dentro de la Facultad eran una espiral logarítmica y una banda de Mobius…

Las dos primeras figuras en aparecer a la vista del visitante, una vez dentro de la Facultad eran una *espiral logarítmica* (Do Carmo, 1976: 23) y una *banda de Mobius* (Do Carmo, 1976: 118). La primera, realizada con cables y chinchetas se situó al lado del cartel anunciador de la Exposición y la segunda, construida con periódicos y cartulina, que permitían mostrar la no orientabilidad de esta superficie (Do Carmo, 1976), se colgó del techo de la entrada de la Facultad, por cierto con grave riesgo de algunos de los que lo hicieron, por motivos de un inoportuno vértigo, no convenientemente superado en esos momentos.

…se colocó una enorme catenaria de 30 metros de longitud, confeccionada con papel de aluminio…

También en la entrada de la Facultad se colocó una enorme *catenaria* (Do Carmo, 1976: 37), de 30 metros de longitud, confeccionada con papel de aluminio (evidentemente, hubo de dársele una cierta «anchura» por razones obvias de confección). Se colgó entre dos de los puentes de la Facultad, estirándose en primer lugar el rollo de papel y descolgándolo después muy poco a poco, quedando finalmente una figura muy bonita tanto por su tamaño como por su color.

Al final de una de las escaleras que conduce a la primera planta de la Facultad se colocó un *cilindro* (Do Carmo, 1976: 77) de aproximadamente metro y medio de altura, realizado con 266 latas de refrescos vacías (14 columnas de 19 latas cada una), que nos habían sido graciosamente donadas por personas de la Facultad que las habían ido depositando en una gran caja que a tal fin habíamos colocado nosotros en el vestíbulo de entrada, por cierto, bajo un enorme cartel indicador en el que les pedíamos que nos «diesen la lata». Para ensamblarlas y unirlas fueron necesarios 6 metros de cable, dos cartones circulares grandes, que constituían las bases, un perchero adosado a uno de ellos, que mantenía la figura en pie y, sobre todo, muchísima paciencia y un poco de habilidad para darle la forma adecuada, habida cuenta de que en la geometría actual, el «cilindro abombado» aún no tiene la categoría de superficie regular. Al lado de este cilindro, al igual que en la práctica totalidad de figuras presentadas, aparecía un cartel explicativo de la figura en sí y de sus principales propiedades.

Seguidamente, a la entrada del aula, en la segunda planta, se colgaron unas *hélices* de alambres de distintos colores (Do Carmo, 1976: 17), que habían sido confeccionadas haciéndolas girar alrededor de la pata de una mesa. Por

cierto que estas hélices, aparte de actuar como tales en la Exposición, sirvieron de improvisados, pero no menos divertidísimos, columpios a los personajes de menor edad de los colegios que nos visitaron, lo cual, con toda sinceridad, nosotros nunca hubiéramos podido llegar a imaginar.

De esta manera, y bajo la mirada virtual de todas estas figuras, el visitante llegaba finalmente, siguiendo los carteles indicativos, a la puerta de entrada del aula que encerraba la Exposición. En ese lugar fue donde se colocó la última de las figuras gigantes: un *toro* (Do Carmo, 1976: 73) colgado del techo por una cuerda (o mejor, su representación en forma de neumático de coche) que también, como le ocurrió al cilindro, acabó un poco abollado por culpa de los niños que visitaban la Exposición (ya se sabe, el «juego del toro»).

Contenidos

El contenido de la Exposición ha estado centrado en dos aspectos básicos:

1. Exposición de Curvas y Superficies, mediante modelos reales, pósters, carteles, etc.
2. Generación de curvas y superficies mediante programas de ordenador.

Y otros dos aspectos complementarios:

3. Historia de las Matemáticas, mediante pósters, paneles, carteles, etc.
4. Mujeres matemáticas, mediante fotografías y paneles.

…algunas superficies estaban hechas de hierro y se apoyaban en peanas de madera, lo que permitía hacerlas girar manualmente y apreciar, de esta forma, su volumen y sus principales propiedades…

Referente al primer aspecto básico, algunas superficies estaban hechas de hierro y se apoyaban en peanas de madera, lo que permitía hacerlas girar manualmente y apreciar de esta forma su volumen y sus principales propiedades, tal como ocurría con los casos de la superficie esférica, cilindro, cono, paraboloides, hiperboloide de una hoja y de dos, etc. (Do Carmo, 1976). Como ejemplo de lo que decimos, el hiperboloide de una hoja estaba hecho con hilos de colores, lo que permitía observar su propiedad de ser una superficie doblemente reglada, al aparecer de forma claramente visible las dos familias de rectas diferentes que la constituyen.

Aparte las superficies anteriormente citadas, que pueden considerarse como las más conocidas, también se encontraban en la Exposición otras menos frecuentes, hechas algunas de ellas en cartulinas de diferentes colores, mediante técnicas manuales, que también provocaron un gran interés entre los asistentes por conocer sus propiedades, la mayor parte de las cuales eran expuestas al visitante por los propios alumnos encargados de la Exposición. Entre ellas podemos citar la bipirámide triangular elongada, el tetraedro truncado, el cubo truncado y la seudoesfera.

Aparte de lo anterior, y tal como ya se ha comentado, contábamos en la Exposición con una gran cantidad de cuerpos poliédricos, entre ellos los cinco sólidos de Platón (poliedros regulares) y numerosísimos poliedros irregulares, algunos de ellos estrellados, que forman parte de la colección donada a la Facultad de Matemáticas, de la que antes se ha hablado. Por evidentes razones de seguridad, estos últimos cuerpos geométricos permanecían guardados en sus estantes cerrados y únicamente podían observarse, pero no manipularse.

Con respecto al segundo aspecto básico de la Exposición, tal como se ha comentado ya anteriormente, nuestro objetivo es que las visitas no se conformasen sólo con mirar, sino que participasen de manera activa en la Exposición. Para ello se contaba con dos ordenadores y programas adecuados de simulación y representación de curvas y superficies (*Mathematica*, *Maple V* y *Poly*) que permitían la visión tridimensional de los *sólidos de Platón*, *sólidos de Arquímedes*, sólidos de Catalán, etc., así como también su manipulación mediante movimientos rígidos y la visión de su desarrollo en planta (véase, por ejemplo, Cordero y otros, 1995) y el programa *Poly*, fabricado por *Pedagogery Software*.

Los dos aspectos complementarios se incluyeron en la Exposición a petición de algunos de sus organizadores. Ambos estaban muy relacionados y, en particular, el tema de los grandes acontecimientos matemáticos, ordenados cronológicamente, tuvo una gran aceptación, sobre todo por parte del alumnado de la Facultad. Aunque éste es otro tema, que no es oportuno aquí y ahora considerar, la Historia de las Matemáticas no es una disciplina que se imparta en nuestra Facultad y en nuestra opinión sí debería serlo. La gran aceptación antes indicada así como el hecho de que a lo largo del curso se impartan varios seminarios y cursos de forma voluntaria sobre el tema así también lo atestiguan.

Del tema de las Mujeres Matemáticas se encargó personalmente una de las organizadoras de la Exposición. Utilizando una serie de fotografías y las correspondientes biografías, dio a conocer a los visitantes la extraordinaria labor que realizaron desde el punto de vista matemático, determinadas mujeres que iban desde Hipatia de Alejandría, nacida cerca del año 370 d.C. y considerada «primera mujer matemática» de la Antigüedad (aunque obviamente el término «matemático» resultase algo ambiguo por aquellos tiempos) hasta Grace Murray Hooper, matemática y física, nacida a principios de siglo, nombrada «Distinguished fellow of the British Computer Society» y primera y única mujer almirante en la U.S. Navy. Entre ellas, y cronológicamente, Emilie de Breteuil (marquesa du Chatelet), María Gaetana Agnesi, Caroline Hershel, Mary Fairfax, Ada Augusta Lovelace, Sonya Corvin-Krukovsky (esposa, luego viuda de Vladimir Kovalevsky), Sophie Germain y Emmy Noether, considerada por el gran Albert Einstein como «la más grande, significativa y creativa Genio matemático producida en la historia del desarrollo educativo de las mujeres».

…contábamos en la Exposición con una gran cantidad de cuerpos poliédricos, entre ellos los cinco sólidos de Platón (poliedros regulares) y numerosísimos poliedros irregulares, algunos de ellos estrellados…

Curiosidades y anécdotas

Hay que entender que en una semana y expuestos a todo tipo de visitantes en general, profesores y alumnos de la Facultad, profesores y alumnos de otras facultades, especialmente de las situadas en el campus, profesores y alumnos de institutos y colegios, acompañantes, etc., nos han ocurrido bastantes curiosidades y anécdotas, cuya mención global sería muy extensa. Por razones obvias de espacio, nos limitamos a continuación a comentar las dos o tres que creemos más interesantes, por las consecuencias y aplicaciones posteriores que pudieran originar.

Así, una de las primeras curiosidades que nos ocurrió fue cuando un visitante de la Exposición, alumno creemos de la Facultad, preguntó a los organizadores que estaban en aquel momento en labores de «guías» de la Exposición si sabían qué se obtenía al cortar la Banda de Mobius longitudinalmente por su mitad. Estos contestaron, quizás sin meditarlo mucho, que se obtendrían *dos bandas de Mobius*. El visitante no sólo se limitó a responderles negativamente, sino que pasó directamente a la acción para hacerles ver, construyendo él mismo una banda con una tira de papel que traía preparada y cortándola con unas tijeras que también traía, que lo que se obtenía era *otra banda de Mobius con dos rizos*. Ya no preguntó nada más, sino que volvió a cortar de igual forma esta nueva banda para hacerles ver a los organizadores que lo que se obtenía ahora eran *dos bandas de Mobius con dos rizos cada una, enlazadas*.

Esta primera curiosidad hizo que posteriormente estudiásemos este tipo de hechos con mayor detenimiento,

encontrando que esta propiedad no sólo es característica de la Banda de Mobius, sino que se verifica en general en todas aquellas bandas generadas mediante vueltas o rizos. Así, dada una banda con n medios rizos, con n impar, al cortarla longitudinalmente por su mitad quedará una nueva banda con $2n + 2$ medios rizos, mientras que si la banda tiene $2k$ medios rizos, al cortarla longitudinalmente por su mitad quedarán 2 bandas con $2k$ medios rizos cada una, enlazadas k veces (Gardner, 1984).

Al respecto, se nos ocurre citar aquí una poesía (en su versión original en inglés), que aparte explicarnos clara y concisamente el hecho anterior, nos relaciona de alguna forma la *banda de Mobius* con la no menos conocida *botella de Klein:*

> A mathematician confined
> that a Mobius band is one-side,
> and you will get quite a laugh
> if you cut one in half.
> For it stays in one piece when divided.
>
> A mathematician named Klein
> thought the Mobius band was divine
> Said he: if you glue
> the edges of two,
> you will get a weird bottle like mine.

Otra de las anécdotas nos sucedió cuando una chica que visitaba la Exposición comentó que se había llegado porque había visto el cartel anunciador y se había preguntado cómo de un tema tan abstracto (según ella) como las curvas y superficies se podía montar una Exposición. Cuando acabó su visita, nos dijo que se había dado cuenta de su error y que se había sorprendido muchísimo de que algo que para ella era tan obtuso, como la Geometría, estuviese tan presente en la vida cotidiana. De hecho, se podría decir que esa chica fue una de las personas que más se interesó por cómo se habían construido las figuras expuestas y por las dificultades aparecidas en su construcción.

…una poesía [que] nos relaciona de alguna forma la banda de Mobius con la no menos conocida botella de Klein…

Al hilo de lo comentado anteriormente, decir que como nosotros mismos tuvimos que «construir» algunas curvas y superficies para exponer, tuvimos que rechazar la realización de algunas de ellas, que aunque teníamos muy clara su idea intuitiva, iban a ser muy difíciles de obtener. Así, en particular, tuvimos que desechar la construcción de un *cono gigante* (nuestra idea era que acompañase al cilindro gigante, que sí fue construido), por no disponer de una idea concreta de cómo hacerlo, así como por no saber tampoco de qué medios y recursos nos íbamos a valer para hacerlo. Decir también como anécdota, que una vez ya transcurridos dos días de la Exposición, dos de nosotros tuvimos claro cómo haberlo hecho y con qué, pero, desgraciadamente, ya era tarde. Todo ello hizo que la muy extensa lista inicial de curvas y superficies que deseábamos exponer quedara algo

más reducida, por lo que tuvimos que buscar otras más sencillas de construir en libros especializados, Internet, y también pedir la colaboración de otros profesores de la Facultad que nos facilitaron modelos propiedad de sus departamentos (a todos los cuales, por cierto, aprovechamos para agradecerles desde aquí, muy sinceramente, la colaboración que nos prestaron, cosa que ya hicimos, personificándolos simbólicamente, en la Ilma. Sra. Decana de la Facultad). Eso hizo que pudiéramos construir curvas no tan usuales para el público en general, como la *clotoide* y la *curva de Agnesi* y superficies poliédrica no usuales, como las truncadas o la bipirámide cuadrangular. Por cierto que también deseamos personalizar en la Decana nuestro agradecimiento al resto de personas de la Facultad: conserjes, limpiadoras, personal de copistería, Biblioteca, Aula de Informática y compañeros del Aula de Cultura de la Facultad (estos últimos nos cedieron amablemente parte de su espacio para almacenar el material), sin cuya ayuda hubiésemos encontrado muchas más dificultades para llevar a buen puerto nuestras intenciones.

Además, referente a lo anterior, debemos decir que uno de los puntos que nos resultaron más difíciles y divertidos a la vez fue la búsqueda de los materiales adecuados que íbamos a emplear en la construcción de las curvas y superficies que deseábamos. Para algunas de ellas, como las gigantes ya citadas (catenaria, cilindro y banda de Mobius), así como para algunos poliedros usuales, las propuestas fueron múltiples: cartón, tela, papel, latas de refrescos vacías, alambre e incluso se propuso «tricotar» alguna de ellas. Sin embargo, superficies como la *silla de montar* (Do Carmo, 1976: 165) o el *toro* o el *elipsoide* (Do Carmo, 1976: 73) nos pusieron en un apuro, por lo difícil que sería encontrar un material con el que construirlos, aunque estén tan presentes en la vida real en forma de donuts, ruedas, etc. Eso nos hizo ver la íntima relación existente entre la Geometría y la propia vida real, tan alejada de los textos científicos actuales de las asignaturas.

La visita de los alumnos de primaria y secundaria, por el contrario, nos sirvió a su vez para darnos cuenta de la dificultad de explicar determinados conceptos matemáticos a un nivel sensiblemente inferior al que habitualmente solemos emplear.

Valoración final y conclusiones

Nunca imaginamos que lo que en principio fue sólo fue un pequeño proyecto, llegase a producir tanto interés, como corrobora el número de visitas recibidas. El recuento final superó con creces todas nuestras expectativas más optimistas. Más de 260 personas a nivel individual, la mayoría de ellos alumnos de la licenciatura, si bien es importante constatar la presencia de bastantes profesores de la Facultad (conocemos estos datos porque al final del recorrido se registraban las visitas en unos folios preparados al efecto) y numerosos grupos de entre 40 y 50 alumnos de los colegios e institutos y centros de primaria y secundaria de Sevilla, capital y provincia, que acudían al Salón de Juegos Matemáticos (otra de las actividades de la Semana de las Matemáticas), y aprovechaban para visitar también la Exposición, dan fe del éxito incuestionable de la misma. Esta gran afluencia de público hizo que se tuviese que ampliar algunos días el horario inicialmente establecido, que era de 10 a 12 de la mañana y de 17 a 19 horas por las tardes, de lunes a viernes.

Esta heterogeneidad de los visitantes, en cuanto a su nivel de conocimientos, también fue para nosotros motivo de comentario. Nuestros compañeros y profesores tendían a hacer gala de sus conocimientos, acompañando nuestras explicaciones con sus particulares «aclaraciones». Por supuesto, esto, lejos de resultar negativo, sirvió para un enriquecimiento general de unos y de otros. La visita de los alumnos de primaria ysSecundaria, por el contrario, nos sirvió a su vez para darnos cuenta de la dificultad de explicar determinados conceptos matemáticos a un nivel sensiblemente inferior al que habitualmente solemos emplear. En este caso, la posibilidad de relacionar las curvas y superficies con objetos de la vida real (tal como ya se ha indicado anteriormente), nos ha sido de un valor incalculable para salir adelante en nuestras explicaciones y para conseguir, no sólo que ellos nos entendieran, sino incluso que ellos mismos nos sorprendiesen a nosotros con sus ajustados y por lo general, correctos comentarios y apreciaciones.

Otro de los logros obtenidos ha sido a nuestro entender, haber conseguido abrirnos un pequeño hueco entre los actos oficiales de la Semana de las Matemáticas, organizados por la Facultad para la celebración del Año Mundial de las Matemáticas, en nuestra calidad mayoritaria de alumnos de la misma (excepto, lógicamente, el profesor firmante). Esta Exposición, junto con una «gymkhana» también organizada por nosotros, han sido los dos únicos actos organizados prácticamente por alumnos, si bien debemos hacer constar una presencia numerosa de ellos colaborando en la realización de otro tipo de actos. De hecho, recibimos muchas felicitaciones del profesorado asistente a la Exposición, sorprendiéndose en algunos

casos de que hubiesen sido mayoritariamente alumnos y además universitarios, los organizadores de la misma.

Otra de las conclusiones a las que llegamos es constatar la variedad existente de distintas formas de entender la Geometría por personas de diferentes edades y conocimientos en Matemáticas. En particular, si a un alumno de tercer curso de la licenciatura se le pregunta qué es un elipsoide, probablemente nos contestará que es la superficie de revolución generada por una elipse al girar alrededor de una recta contenida en su plano. Un alumno de primaria, obviamente, no va a entender esto pero si se le dice que un elipsoide es (salvando las distancias) un balón de rugby, probablemente no tenga problemas en entender el concepto. Y lo mismo ocurre con la superficie esférica y el balón de fútbol o con el cono y el capirote de nazareno. De ahí que como ya se ha indicado, los alumnos visitantes de estas edades mostrasen mayor interés y entusiasmo en las figuras geométricas «representadas» mediante objetos cotidianos, tales como el cilindro de latas, las hélices de alambre o el neumático de coche que en esas mismas figuras representadas como tales. También tuvieron mucho éxito, esta vez para todo tipo de edades y conocimientos, los programas de ordenador utilizados, que mostraban las figuras desde diferentes perspectivas, las desarrollaban en el plano o las cambiaban de color, entre otras acciones, todo lo cual era muy divertido y sobre todo didáctico.

Como «propuestas de mejora» para una futura repetición de esta actividad, aparte por supuesto de pensar en aumentar el contenido de figuras presentadas y de nuevos programas informáticos que permitan una mejor visualización y manipulación de las mismas, nos atreveríamos a sugerir las siguientes:

1. Incrementar el grado de participación activa de los visitantes. Para ello podría disponerse de «materiales de construcción»: papel, cartulina, pegamento, plásticos, cables, etc. y animar a los visitantes a fabricar sus propias figuras.
2. En la línea anterior, instalar un taller de «papiroflexia» con las pertinentes instrucciones de utilización.
3. Mostrar en grandes paneles o pósters la identificación entre estas figuras y determinados objetos de la vida real, tal como ya se ha hecho, si bien de palabra, en esta ocasión. En este sentido, un ejercicio interesante que realizamos los dos últimos días fue el de mostrar las figuras expuestas una a una y pedirle al visitante que nos dijese «a qué se parecían». Es sorprendente la constatación de los «parecidos» que resultan.
4. La posibilidad de acompañar la Exposición con una música de fondo adecuada, así como entregar un pequeño folleto al visitante en el que se explique el contenido de la Exposición también creemos que contribuiría grandemente a mejorarla en todos los aspectos.

…este tipo de actividades extraacadémicas siempre resultan beneficiosas para el alumno que las realiza, tanto para ampliar conocimientos y ver la materia de clase desde otro punto de vista, como a nivel personal…

Juan Núñez
Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Matemáticas
Universidad de Sevilla.
Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»
Carmen M.ª Aguilera
M.ª Inés Fernández
María José Macías
Ana C. Montaño
Salvador Pérez
Inmaculada Rivero
María José Romero
José I. Sánchez
Ana María Serrato

Pensamos, finalmente, que este tipo de actividades extraacadémicas siempre resultan beneficiosas para el alumno que las realiza, tanto para ampliar conocimientos y ver la materia de clase desde otro punto de vista, como a nivel personal, ya que ayudan a tener una mejor relación con los compañeros de clase y entre estos y el profesor. Somos conscientes de que este tipo de actividades son mucho más frecuentes en enseñanza no universitaria y que brillan prácticamente por su ausencia en la Universidad y también pensamos que este hecho se debe tanto a los propios alumnos, que alegan una supuesta falta de tiempo o desinterés por todo lo que no sea preparar los exámenes, como del profesorado, que mayoritariamente, creemos, no se preocupa de fomentarlas y de colaborar en ellas, pero sin embargo, la realidad demuestra que siempre resultan positivas y que deberían tenerse en cuenta para conseguir la formación integral del alumno universitario que se pretende y por ello las defendemos. De hecho, estamos totalmente convencidos de que esta actividad que nosotros hemos llevado a cabo nos va a servir en un futuro a los que de nosotros nos dediquemos a la enseñanza, como una primera aproximación de cómo ven nuestros alumnos de primaria y secundaria la Geometría en particular y las Matemáticas en general, y de cómo organizar para ellos actividades de este tipo o similares, que de una forma interactiva y práctica, permitan visualizar, tocar, manipular y, en una palabra, «hacer» Matemáticas.

Bibliografía

CORDERO, L, FERNANDEZ, M. y GRAY, A. (1995): *Geometría Diferencial de Curvas y Superficies con Mathematica*, Addison-Wesley Iberoamericana.

DO CARMO, M. (1976): *Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*, Alianza Universal Textos, Prentice-Hall Inc.

GARDNER, M. (1984): *Festival Mágico-Matemático*, Alianza Editorial, Madrid.

SUMA 36
febrero 2001, pp. 85-92

Acerca del Libro de arena *de Jorge Luis Borges*

Miquel Albertí Palmer

MISCELÁNEA

Muchas veces en clase he trazado de extremo a extremo de la pizarra una línea blanca a la que he puesto por nombre $\mathbb{R}$. Este gesto invita a pensar que $\mathbb{R}$, el conjunto de los números reales, se parece mucho a una fila india de puntos muy apretados. Pero los matemáticos sabemos que no es así, pues hay infinitos de diversa índole.
El infinito del *Libro de arena* borgiano es numerable, el infinito real no. El continuo real no es ni debe imaginarse como una hilera muy tupida de puntos suspensivos, sino más bien como... ya se verá.

EN *EL LIBRO DE ARENA* podemos ver cómo el conocimiento de algunos de los conceptos que se estudian en las Matemáticas no son exclusivos de los matemáticos y que pueden ser expuestos y explicados por autores de otros campos. Considero este relato un excelente ejemplo no del concepto de infinito, sino de su casi indomable carácter y un magnífico contraste con el punto de vista (¿más riguroso?) que de él podemos dar los matemáticos.

En la primera parte, como indica su título, comento el texto de Borges. Bajo una óptica no del todo matemática quiero mostrar qué conjunto de números se amolda al libro borgiano de acuerdo con las referencias explícitas que nos brinda el relato. En la segunda parte me he tomado la libertad (con la única intención de mostrar un ejemplo entretenido) de readaptar el cuento de Borges (caso discreto) al caso continuo. En ella incluyo la que quizá sea la manera más apropiada de imaginarse la recta real.

Comentario al *Libro de arena*

> La línea consta de un número infinito de puntos; el plano, de un número infinito de líneas; el volumen, de un número infinito de planos; el hipervolumen, de un número infinito de volúmenes...[1]

Nada más empezar su relato Borges quiere convencernos de que éste merece el crédito que le otorgará. Para ello se vale de la exposición del *leitmotiv* geométrico con el que se construyen los espacios multidimensionales, o sea, una verdad matemática. Con ella Borges ubica al lector en un ámbito cuyo carácter formal resulta difícil de refutar y pretende asignar a su cuento un valor de verdad muy superior al de otros relatos de tipo fantástico, cosa que después subraya minimizando el grado de veracidad atribuible a éstos diciendo que tal pretensión es inherente a todo relato de este tipo:

1 Esta cita y todas las que siguen proceden de BORGES, J.L. (1996): *El libro de arena*, Alianza Editorial, Madrid.

> Afirmar que es verídico es ahora una convención de todo relato fantástico;

Y se reafirma en ello por dos veces. Al repitir el mismo calificativo (*verídico*) en lugar de una expresión más simple («lo es») y al escribir en cursiva el verbo de su réplica (hecho que por otra parte invita a interrogarse por el significado del mismo):

> el mío, sin embargo, *es* verídico.

A partir de aquí, lo cotidiano del acontecimiento (un vendedor visita al narrador con la intención de venderle un libro) y lo corriente del lugar donde se desarrolla la escena (en casa) también contribuirán a la veracidad del cuento porque un acontecimiento así lo hemos vivido muchos.

Borges habla de un libro que tiene una infinidad de páginas, concepto este que ya fue introducido en la obertura y que constituye la esencia de la historia:

> El número de páginas de este libro es exactamente infinito.

Ahora bien, ¿de qué tipo es este infinito? ¿Se trata de un infinito numerable como el de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Q}$? ¿O tal vez piensa más en un infinito no numerable como el de $\mathbb{R}$?

En el argumento geométrico que inicia el relato se dan cita los dos conceptos que otorgan al infinito su carácter. Por un lado, infinito es sinónimo de cantidad ilimitada, un cardinal mayor que cualquier cardinal finito por enorme que éste sea; y por otro, es sinónimo de potencialidad ilimitada porque partiendo de un objeto primigenio tenemos la posibilidad de generar tantos como queramos con la aplicación reiterada de una operación. En este sentido es la ilimitada posibilidad de reiteración la que da al infinito su talante. Tras los tres puntos suspensivos que siguen la exposición iterativa del comienzo no se albergan únicamente los sucesivos espacios multidimensionales, sino también el argumento mismo que permite su construcción:

> de un número infinito de volúmenes... (sic)

Un lector matemático seguramente tendrá la impresión de haberse topado antes, y muy a menudo, con algún objeto semejante al que protagoniza la historia. Los seres fundamentales de las Matemáticas son los conjuntos de números. Es precisamente al estudiar uno de estos conjuntos ($\mathbb{N}$, el conjunto de los números naturales) donde el matemático se enfrenta por vez primera con la idea de un cardinal infinito.

Los números naturales ($\mathbb{N}$) no son infinitos porque no se acaban nunca, sino porque el procedimiento que permite construirlos y que consiste en sumar una unidad al último natural construido se puede aplicar de nuevo para generar otro, y otro, y otro...: 1, 1+1 = 2, 2+1 = 3, 3+1 = 4, ...

Un lector matemático seguramente tendrá la impresión de haberse topado antes, y muy a menudo, con algún objeto semejante al que protagoniza la historia.

Lo que me interesa es ver qué conjunto numérico se ajusta al ejemplar borgiano.

Las páginas del libro llevan una numeración desordenada, arbitraria:

> Me llamó la atención que la página par llevara el número (digamos) 40.514 y la impar, la siguiente, 999. La volví, el dorso estaba numerado con ocho cifras.
>
> No sé por qué están numeradas de ese modo arbitrario. Acaso para dar a entender que los términos de una serie infinita admiten cualquier número.

y ese desorden las hace comparables a la arena de un desierto:

> Me dijo que su libro se llamaba el Libro de Arena, porque ni el libro ni la arena tienen ni principio ni fin.

Al contar un desierto nosotros determinamos el principio cogiendo un grano de arena (al que llamaremos uno, el primero) de la ingente polvareda. ¿Y el fin? Bueno, el final,… ¿Acaso lo hay? Si nos imaginamos el espacio infinito, ¿dónde estoy? ¿En qué punto del espacio me hallo? ¿En medio? ¿Muy cerca de la orilla? No, cerca de la orilla no puedo estar porque si el espacio es infinito carece de ella. O sea:

> Si el espacio es infinito estamos en cualquier punto del espacio. Si el tiempo es infinito estamos en cualquier punto del tiempo.

Esta ambigüedad induce el desorden con el que se han numerado las páginas del libro. Pero hay más. Lo que me interesa es ver qué conjunto numérico se ajusta al ejemplar borgiano. El comprador aprecia en él una propiedad sorprendente:

> Me pidió que buscara la primera hoja. Todo fue inútil: siempre se interponían varias hojas entre la portada y la mano. Era como si brotaran del libro.

Hojeando el libro uno no puede dar nunca con la primera página, o el primer folio. Esto no sucedería si las páginas del volumen se correspondieran con los números naturales porque aunque infinitas siempre habría una que sería la primera y otra que sería la última. Si tomamos un intervalo de números naturales $[m, n]$, donde m representa la portada del libro y n la contraportada, la primera hoja será m+1 y la última, n–1.

En cambio en $\mathbb{Q}$, el conjunto de los números racionales, sí que se da esa extraña imposibilidad. En $\mathbb{Q}$ no se puede elegir el primer elemento de un intervalo abierto de números racionales. Si suponemos que x es el primer número racional del intervalo abierto (0, 1) nos encontramos con la sorpresa de que $x/2$ es otro número racional que le precede. Sucede pues igual que en el libro. Si sus hojas están numeradas con números racionales y $[p, q]$ es el intervalo que las representa (p es la portada y q la contraportada) resulta que siempre se interpone alguna hoja entre p y cualquier $p+r$ por pequeño que sea r. De hecho, no sólo una, sino infinitas:

$$p+r/2,\ p+r/4,\ p+r/8,\ \ldots,\ p+r/2^n,\ \ldots$$

Los números reales también poseen esta propiedad, pero si Borges hubiera querido expresar con más claridad que las páginas se correspondían con ellos quizás hubiera dado alguna indicación más explícita, como por ejemplo decir que alguna de las páginas del libro portaba la cifra $\neq$, e, o $\sqrt{2}$. Lo cierto es que no da pie a pensar en eso ya que todos los números explícitamente mencionados en el texto son naturales.

El rasgo diferencial entre los cardinales de $\mathbb{R}$ y de $\mathbb{Q}$ es la numerabilidad. $\mathbb{R}$ no es numerable; $\mathbb{Q}$, sí. Que un conjunto sea numerable quiere decir que sus elementos, pese a ser una infinidad, se pueden contar igual que contaríamos los de un conjunto finito: 1, 2, 3, 4, 5, ... Y contar significa establecer una correspondencia 1-1 entre $\mathbb{N}$ y los elementos del conjunto en cuestión. Puesto que $\mathbb{Q}$ es numerable, además de compartir el mismo cardinal infinito, comparte con $\mathbb{N}$ el carácter de su infinidad, una infinidad contable. El infinito de $\mathbb{R}$ es de otro tipo porque no se puede contar.

¿Será que las páginas del libro obedecen entonces a un talante de tipo real? Tampoco. En tal caso el libro no se podría ni abrir porque abrirlo significaría cortarlo: los reales forman el llamado continuo, no hay resquicios entre sus puntos.

$\mathbb{Q}$ es el conjunto que se ajusta al *Libro de arena*.

$\mathbb{Q}$ es el conjunto que se ajusta al Libro de arena.

La infinidad es también responsable de transmutar un hecho corriente y banal, como hojear un libro y fijarnos por un instante en una de sus páginas, en todo un acontecimiento debido a la nula probabilidad de dar con la misma página al abrirlo de nuevo:

> Fue entonces que el desconocido me dijo:
> —Mírela bien. Ya no la verá nunca más.
> Había una amenaza en la afirmación, pero no en la voz.
> Me fijé en el lugar y cerré el volumen. Inmediatamente lo abrí. En vano busqué la figura del ancla, hoja tras hoja.

La primera idea que nos pasa por la cabeza al querer demostrar que los elementos de un conjunto tienen una determinada propiedad es observar si todos, mirándolos uno por uno, la poseen. Trabajo razonablemente aplicable a los conjuntos finitos de cardinal pequeño, pero del todo absurdo en el caso de un conjunto infinito:

> Comprobé que las pequeñas ilustraciones distaban dos mil páginas una de otra. Las fui anotando en una libreta alfabética, que no tardé en llenar. Nunca se repitieron.

Enseguida uno se da cuenta de lo inapropiado del proceso. No tiene fin porque de algo que no sucede en veinte mil casos no podemos inferir que nunca se repetirá. Si un conjunto es infinito y conocemos la ley generadora de sus elementos o la propiedad que los caracteriza es esta ley o propiedad la que hemos de atacar en nuestra demostración. $\mathbb{N}$ es un conjunto generado por una ley inductiva y es mediante demostraciones por inducción como se consiguen muy buenos resultados.

El nuevo dueño, convencido del prodigio, se ve obligado a aceptar la existencia de un objeto que minutos antes hubiera tildado de imposible. La insólita y palpable realidad

del libro transmuta en irreal el universo a su alrededor, todo lo que hasta este momento él había tomado inconscientemente por realidad común. Realidad e irrealidad permutadas:

> De nada me sirvió considerar que no menos monstruoso era yo, que lo percibía con ojos y lo palpaba con diez dedos con uñas. Sentí que era un objeto de pesadilla, una cosa obscena que corrompía la realidad.

En la vida que llamamos real a menudo nos cuesta creer cosas y hechos que vemos, sentimos o padecemos. Entonces expresamos nuestra incredulidad diciendo que las cosas no pueden ser así, rechazamos la súbita realidad:

> —Esto no puede ser.
>
> —No puede ser, pero es.

Nos cuesta aceptarla. Y más si somos conscientes de la ambigüedad del término existencia: cuando los matemáticos dicen que algo existe no lo hacen en el mismo sentido que un filósofo o un biólogo, aunque los objetos del primero no sean tan tangibles y palpables como los del segundo[2]. La existencia matemática es potencial como la de los números y el libro de arena constituye un buen ejemplo de ello: ¿qué me resulta más difícil como matemático, aceptar la existencia de semejante libro o la de un punto fijo para toda aplicación continua del intervalo [0, 1] en sí mismo?

Aceptar la nueva realidad supone para el comprador del relato un esfuerzo, una especie de acto de fe, al que no está acostumbrado. Un acto que nadie dudaría en calificar como propio de los campos menos rigurosos de la cultura, impropio de una persona valedora de un juicio sano y objetivo. Pero tengamos presente que a pesar del prestigio del reino del rigor y de la objetividad del que disfrutan, también en el mundo matemático se hacen actos de fe. Sirva como ejemplo el axioma de elección. Si lo aceptas puedes seguir adelante y hacer grandes Matemáticas; de lo contrario, gran parte de las Matemáticas desaparecen o deberían ser revisadas y puedes pasar a engrosar las listas del paro.

> Siento un poco de alivio, pero no quiero ni pasar por la calle México.

El cabello de plata

> Me dijo que su libro se llamaba el *Libro de Arena* porque ni el libro ni la arena tienen ni principio ni fin. (J. L. Borges)

La línea consta de un número infinito de puntos; el plano, de un número infinito de líneas; el volumen de un número infinito de planos; el hipervolumen, de un número infinito de volúmenes… Si antes al menos lo creía así, ahora lo dudo. Pero no es ésta la mejor manera de iniciar mi relato. Asegurar que es verídico sería caer en la tradición de cualquier relato fantástico; el mío, sin embargo, lo *es*.

En la vida que llamamos real a menudo nos cuesta creer cosas y hechos que vemos, sentimos o padecemos. Entonces expresamos nuestra incredulidad diciendo que las cosas no pueden ser así, rechazamos la súbita realidad…

Yo no vivo solo, pero lo estaba cuando una tarde, hace unos meses, sonó el timbre de casa. Abrí y entró un desconocido. Era un hombre alto, de rasgos imprecisos. No soy miope, por tanto no fue culpa de la miopía que yo los viera así. Todo su aspecto era de pobreza decente. Iba de gris y traía una valija gris en la mano. Enseguida sentí que era extranjero. Al principio lo creí joven; después advertí que me había engañado su pelo aviejado, como rubio. En el curso de nuestra conversación, que no duraría una hora, supe que procedía de las Órcadas. Mientras hablábamos no podía quitarme de la cabeza la idea de que ya nos habíamos visto antes en algún otro lugar.

Le señalé el sofá. El hombre tardó un rato en hablar. Exhalaba melancolía, como yo ahora.

—Ya no vendo biblias –me dijo.

No sin pedantería le contesté:

—En esta casa no hallará ninguna, así que como puede ver ha venido al lugar apropiado.

Al cabo de un silencio me contestó.

—No vendo biblias, pero puedo mostrarle algo que tal vez le interese. Lo adquirí en los confines de Amritsar.

—¿En Amritsar? Hace algunos años estuve allí. Quizás fue ese el lugar donde le vi por primera vez.

—No sé. Para serle sincero también usted me recuerda a alguien, aunque a alguien más viejo, cosa extraña y del todo imposible. Pero no me haga caso, tal vez rememore en usted a un antiguo cliente. De un tiempo a esta parte soy incapaz de afinar bien mis recuerdos.

Abrió la valija y la dejó sobre la mesa. Era un estuche largo y delgado, forrado de cuero y tela. Sin duda había pasado por muchas manos.

—¿Se trata de un taco de billar o de un florete? Mucho me temo que tiene que

2 ¿Debería decir tal vez: más irreales que los del segundo?

ser difícil encontrar algo así en la ciudad de la que me habla –le dije.

Lo abrí. En efecto se trataba del estuche de un taco, pero no era un bastón lo que se alojaba en el surco de terciopelo. Un hilo brillante y rectilíneo colmaba toda su longitud. Pensé que al cogerlo conservaría la tensión, pero cuando lo pellizqué para sacarlo del hueco me sorprendieron su docilidad, casi líquida, y su extrema finura que lo hacía apenas visible. Colgado de mi índice gravitó lacio como lo haría una cadena de incontables y diminutos eslabones, pero al recorrerlo de punta a punta las yemas de mis dedos no percibieron en él ningún enlace. Nunca habría podido imaginar que algo tan liviano y sutil pudiera comportarse así. Me preguntaba qué podía ser. Para decir alguna cosa a punto estuve de manifestar que era una cuerda de guitarra, pero en el último instante me acordé de su origen y me corregí:

Un hilo brillante y rectilíneo colmaba toda su longitud.

—¿Una cuerda de sitar?

—Podría decirse así.

—Bueno, si no lo es no sé qué otra cosa puede ser.

—Un cabello. Fíjese en el material.

Me acerqué el hilo hasta que los ojos desenfocaron la mirada. Era tan poco tangible que no podía decidir si era de crin, de tripa o de acero. Perplejo, se lo pregunté:

—Lo llaman el cabello de plata aunque nadie sepa con exactitud si lo es.

—Lo llaman el cabello de plata aunque nadie sepa con exactitud si lo es.

—Tal vez mirándolo por un microscopio.

Sonrió y bajó la mirada como quien ha de repetir una historia por enésima vez:

—Ya lo examinaron en Delhi.

—¿Y qué vieron?

—Lo mismo. Se supone que las lentes tenían que aumentar su grosor mas el cabello permaneció igual.

¿Me estaba tomando el pelo? En cualquier caso conviene andarse con ojo con todo lo procedente del subcontinente.

—¿Me permite afinarlo?

Me respondió con un gesto y una sonrisa burlona que en aquel momento no supe interpretar.

Sustituí la prima de mi guitarra por aquel cabello nunca visto y giré la clavija para afinarlo. De reojo le veía que me observaba y tuve la impresión de que yo no era el primero en vivir aquella escena. Su cara reflejaba la paciencia y resignación propias del conocedor del desenlace. Cuando me pareció que la cuerda estaba un poco más tirante me decidí a pulsarla. La nota que emitió fue grave, lánguida, un lamento claro y limpio. Fue entonces que el desconocido me dijo:

—Escúchela bien. Ya no la oirá nunca más.

Había una amenaza en la afirmación, pero no en la voz.

Al pulsarla de nuevo sonó más grave aún, efecto habitual en las cuerdas nuevas o en desuso. Tenía que afinarla enseguida si no quería olvidarme de la primera. Fue en balde. Cuanto más creía que me aproximaba al sonido anterior notaba o bien que el color no era el mismo o bien que no había acertado con precisión suficiente el grado de tensión. El error cometido era muy pequeño, menor que un octavo de tono, pero a pesar de oírlo me resultaba del todo imposible corregirlo. Entre tanto, el sonido primigenio empezaba a evaporarse de mi mente. Enfadado, giré y giré la clavija sin parar. Sólo me detuve minutos después, cuando un nido enorme se había formado en el clavijero. Mientras tanto la cuerda apenas mostraba signos de haberse tensado. Para ocultar mi desconcierto, le dije:

—¿Se trata de una cuerda mágica?

—No, simplemente es así. Por mucho que la estire no logrará romperla.

—¿Y si la corto?

—No importa. Entonces cada pieza heredará la misma virtud. Puede hacer seis cuerdas de este cabello para vestir su guitarra. ¡Qué digo seis, tantas como quiera!. Aunque lo corte en pelillos de un milímetro estos poseerán la infinita elasticidad del cabello entero.

Luego bajó el tono de voz como para confiarme un secreto:

—Lo adquirí en un pueblo de las montañas, a cambio de unas rupias y de la última de mis biblias, la de Wiclif en letra gótica. Su poseedor no sabía tocar. Supongo que en el cabello vio una reliquia. Me contó que perteneció a un gurú sij que había alcanzado la iluminación. Lo llamaba el cabello de plata, porque los sijs llaman *the silver cord* a la conexión más delicada y sutil que une el cuerpo físico con los planos superiores del espíritu. Sólo cuando morimos se rompe. Por lo tanto su vida es tan breve o larga como la de nuestro cuerpo. Algunos maestros indios son capaces de abandonar temporalmente su cuerpo y adoptar otros estados de consciencia. Es el cordón de plata el que los mantiene ligados al mundo, gracias a él pueden ir y venir una y otra vez sin que importe la distancia a la que se

halle el plano espiritual que visitan porque el hilo puede estirarse a voluntad y sin límite.

—Esto no puede ser.

—No puede ser, pero es. Si quiere puede quedarse aquí sentado en su sofá con un extremo del cabello entre los dedos. Yo me iré con el otro extremo hasta donde quiera. Podría dar la vuelta al planeta y encontrarme de nuevo aquí con usted sin que el cabello apenas hubiera aumentado su tensión.

—Usted es religioso, sin duda.

—Sí, soy presbiteriano. Mi conciencia está clara. Estoy seguro de no haber estafado al nativo cuando le di la palabra del señor a trueque de su pelo diabólico.

Le aseguré que no tenía nada que decir al respecto y le pregunté si estaba de paso por estas tierras. Me respondió que en unos días pensaba volver a su patria. Fue entonces cuando supe que era escocés, de las islas Órcadas. Le confesé que a Escocia yo ni la conocía ni le tenía especial estima.

Mientras hablábamos mis dedos seguían explorando y jugando con el cabello elástico. Con falsa indiferencia le pregunté:

—¿Usted se propone ofrecer este curioso ejemplar a un museo?

—No. Se lo ofrezco a usted –replicó, y fijó una suma elevada.

—¿Por qué a mí?

—La naturaleza del objeto así lo requiere: usted es músico y matemático. Por eso he venido.

—¿No será usted de los que opinan que ambas disciplinas están estrechamente ligadas, verdad?

—Perdone que le corrija. Yo diría *íntimamente* ligadas.

—Tanto da. Yo no lo creo así.

—Entonces vive usted, perdóneme el atrevimiento, en un absurdo.

—Posiblemente, pero ello me concede el privilegio de opinar con lo que se llamaba antes conocimiento de causa. Reconozco que las bases de la música se cimientan en un tipo de estructura susceptible de ser estudiado desde un punto de vista abstracto o matemático. No es nada del otro mundo pues ocurre con la mayoría de las cosas. Incluso admito que partiendo de estas bases estructurales pueden componerse obras maestras. Pero al hacerlo así el compositor trabaja los sonidos como un herrero en su fragua, como un científico en su laboratorio y no me negará que es otra la esencia de la música.

—Acaba de explicarse a sí mismo el motivo de mi visita.

Le contesté, con toda sinceridad, que agradecía su consideración, pero que la cantidad exigida era inaccesible para mí y me quedé pensando. En pocos minutos había urdido mi plan.

¿Era posible que aquel cabello casi imperceptible fuera un pedazo de recta real? ¿Quién había bautizado como reales los números menos tangibles? ¿Quizás fue alguien que conocía la existencia de objetos como el que yo acababa de obtener?

—Le propongo un canje –le dije–. Usted obtuvo ese ejemplar por unas rupias y por su última biblia; yo le ofrezco el monto de mi sueldo, que acabo de cobrar, y dos libros: la *Astronomía* de José Comas Solá del año 57, el libro que me incitó a iniciarme en el estudio de la matemática, y el *Liber Embadorum* de Abraham bar Hiyya Ha-Nasi, la primera álgebra escrita en Europa por el matemático y astrónomo barcelonés del siglo XI. No puedo ofrecerle ejemplares más apreciados.

—El mejor regalo es el que más nos duele hacer –murmuró.

Fui a buscarle el dinero y los libros.

—Trato hecho, pero guárdese el dinero –me dijo.

Me asombró que no regateara y que se arrepintiera de haberme pedido dinero. Más tarde comprendí que había entrado en casa con el ánimo de desprenderse del cabello.

Charlamos de la India, del encanto de Oriente y de los cambios económicos y sociales que allí se avecinan. Era ya de noche cuando se marchó. No lo he vuelto a ver ni sé su nombre, pero estoy seguro de haberlo visto o leído antes en algún lugar. Al despedirse tuve la certeza de que él también lo sabía.

Me acosté y no pude pegar ojo. A las tres o las cuatro de la madrugada encendí la luz y examiné otra vez el cabello. Había en él algo que me resultaba conocido, familiar. Estuve dándole vueltas al coco durante un buen rato hasta que al fin cayó: el *continuo*. Un escalofrío me subió por el espinazo. ¿Era posible que aquel cabello casi imperceptible fuera un pedazo de recta real? ¿Quién había bautizado como reales los números menos tangibles? ¿Quizás fue alguien que conocía la existencia de objetos como el que yo acababa de obtener? Sin duda soñaba. Tenía que estar soñando. Me mordí el labio inferior hasta sangrar. Me acordé de *El Libro de Arena*. ¿Quién sabe si Borges mintió y ni el vendedor ni el libro existieron nunca

fuera de su imaginación? Igual que los objetos matemáticos siempre habían existido en las mentes de sus pensadores. *Pienso, luego existo*, dijo el filósofo. Y lo que pienso, ¿también existe? Si es cierto, entonces puedo ser un pensamiento y existir en la mente de alguien. ¿Cómo distinguirme de ese otro yo pensado? *Círculos ruinosos* que encierran y cobijan la locura. ¿Seguro que no estaba soñando? ¿Estaba convencido de que la sangre que manaba de mi labio no era soñada? Pero alguien me había visitado y vendido el cabello. De esto no cabía duda porque poseía una prueba por muy extraña que fuera. Al fin y al cabo no debería sorprenderme de ver cosas como aquella acostumbrado como estaba a convivir a diario con *espacios de Banach, grupos de Lie, geometrías de Lobachevsky, conjuntos de Mandelbrot* y otros monstruos. Al revés, debería estar contento de toparme al fin con un ejemplar vivo de aquellas abstracciones. Pasé en vela el resto de la noche, pensando:

Se acostumbra a representar $\mathbb{R}$ *como una recta, un segmento para ser precisos, de puntos que se suponen ínfimos y bien enganchados los unos con los otros, sin resquicios:*

$\mathbb{R}$

¿Es ésta una imagen adecuada de $\mathbb{R}$*? Al mirar este segmento, ¿de qué manera pensamos en él? Cuando vemos un segmento nos lo imaginamos como una hilera de puntos bien dispuestos. Tan minúsculos y pegados que si hacemos una ampliación de algún trozo de dicho segmento tendremos exactamente la misma visión:*

$\mathbb{R}$

[0, 1]

¿De verdad podemos imaginar que por grande que sea la ampliación el segmento no cambiará de aspecto? Para dibujar segmentos el lápiz, bolígrafo, tiza, pincel, lo que sea, recorre una longitud de un extremo al otro de la hoja, mesa, pizarra o cualquier superfície. Al trazar el segmento la punta del instrumento pasa por muchos puntos de los infinitos que también forman el área dónde se escribe, y los señala de manera ordenada, uno tras otro. Si hemos de ser sinceros hemos de reconocer que representando $\mathbb{R}$ *de esta manera nos hacemos la idea de que ¡dibujamos* $\mathbb{N}$ *de forma que no quede ningún espacio entre los números que lo forman! Prueba de esto es la sorpresa que tenemos al efectuar las ampliaciones mencionadas. Si hago un gráfico de* $\mathbb{N}$*, por muy juntos que coloque sus puntos, al ampliar una parte, ésta mostrará espacios entre ellos:*

Y lo que pienso, ¿también existe? Si es cierto, entonces puedo ser un pensamiento y existir en la mente de alguien. ¿Cómo distinguirme de ese otro yo pensado?

…debería estar contento de toparme al fin con un ejemplar vivo de aquellas abstracciones.

1 10 100 $\mathbb{N}$

[1, 100]

No así en $\mathbb{R}$*. Una imagen más apropiada para él sería la de una cinta elástica. Un elástico puede aumentar o disminuir su longitud sin perder ni adquirir punto alguno. Aún así el elástico Real es un poco especial: puede estirarse a voluntad hasta el infinito sin perder grosor (porque no lo tiene) ni romperse. Difícil imaginárselo, pero fácil de probar porque mediante la función*

$$f: (-1,1) \to R \qquad x \to f(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

el intervalo (-1,1), un pedacito del continuo, se estira indefinidamente:

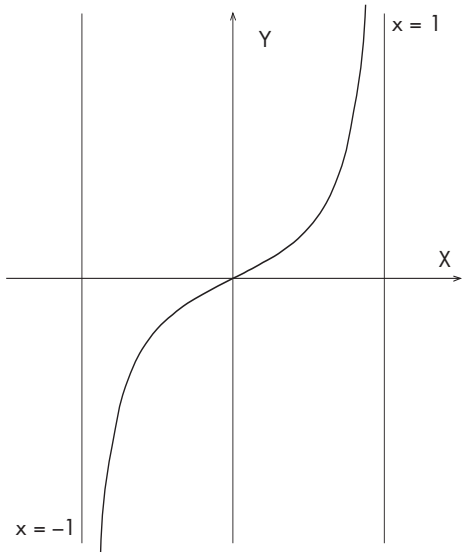


Figura 1

Cualquier parte de $\mathbb{N}$ posee un primer elemento, entre dos números naturales consecutivos (he aquí el quid de la cuestión) no hay otro. Así el número natural más pequeño del intervalo (1, 100), el menor de todos ellos es el 2. No ocurre lo mismo ni tan siquiera con los racionales. ¿Cuál es el menor número racional del intervalo (0, 1)? No lo podemos ni nombrar porque si le llamamos A resulta que A/2 aún es un racional más pequeño: tenemos una contradicción que proviene de suponer su existencia. Pensemos en una cinta elástica sostenida entre dos puntos: tampoco tiene primer elemento dado que siempre puede estirarse un poquito más y aquel que antes parecía ser el primero se ha alejado ahora del extremo. Por desgracia las cintas elásticas llegan a romperse si se las tensa demasiado, en cambio $\mathbb{R}$, como el cabello de plata, no. En el gráfico anterior se ve de hecho cómo mediante la función f se ha deformado el segmento-intervalo (-1, 1) hasta transformarse en la curva.

Otra dificultad a la hora de visualizar los conjuntos de números como $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, etc. es que éstos representan la esencia espacial en el mundo de las matemáticas y estamos acostumbrados a ver el espacio siempre colmado de materia. Al pensar en un cubo muy probablemente nos haremos la idea de una caja vacía, de paredes finísimas y transparentes, ¿pero está realmente vacía?, ¿no contiene nada?, ¿ni aire siquiera? Todo lo que vemos en el mundo es visible por la materia que contiene, es ésta la que le da forma. Como visualización del espacio serviría un cubo cuya ilimitada docilidad le permitiera ser deformado en cualquier dirección, como el segmento que representaba $\mathbb{R}$, y hueco por completo, lleno de nada: una bolsa que cuando se vacía no ocupa lugar alguno, pero en la que cabe todo el Universo gracias a su ilimitada elasticidad.

…y después el recelo de que el cabello no fuera infinitamente elástico.

Miquel Albertí
IES Pau Vila
Sabadell (Barcelona)

No hemos de imaginarnos $\mathbb{R}$ como una hilera tupida de puntos suspensivos. No lo es.

No mostré a nadie mi tesoro. Al goce de poseerlo se agregó el temor de que lo robaran, y después el recelo de que el cabello no fuera infinitamente elástico. De noche, durante los breves intervalos que me concedía el insomnio, soñaba con él. Soñaba que ataba un extremo a una pata de la mesa del comedor, salía de casa con el otro en la mano y corría calle abajo hasta quedar sin resuello. El cabello no mostraba indicios de tensión. ¿Era que se había desatado del otro lado? Volvía atrás y habiendo comprobado que no era el caso me despertaba empapado de sudor.

No quería ser la víctima de mis inquietudes ni sentirme ligado a aquella cuerda de afinación imposible. Recordé haber leído que el mejor sitio para ocultar una hoja es un bosque. Aproveché uno de los lapsos de insomnio para perderlo en la frondosa cabellera de mi amada. No encendí la luz ni traté de escudriñar entre las sombras qué jirones lo habían alojado. Por la mañana coincidimos en el baño. Ella se quejó:

—¡Vaya! Me ha salido otra cana.

Sin mirarla, le dije:

—Ya lo sé. Es preciosa.

SUMA

SUSCRIPCIONES

Particulares: 3.500 pts. (3 números)
Centros: 5.000 pts. (3 números)
Número suelto: 1.700 pts.

Revista SUMA
ICE Universidad de Zaragoza. c/ Pedro Cerbuna, 12. 50009 ZARAGOZA
Fax: 976 76 13 45.
E-mail: suma@public.ibercaja.es

Se ruega a los suscriptores y a los socios de la Federación que para cualquier comunicación sobre envío de ejemplares atrasados, reclamaciones, suscripciones… se haga por correo, fax o mail. No se podrán atender este tipo de comunicaciones por teléfono.

SUMA 36
febrero 2001, pp. 93-100

Ricardo Luengo: Secretario del Servicio de Publicaciones

Emilio Palacián

ENTREVISTA

La FESPM ha creado su Servicio de Publicaciones y ha designado a Ricardo Luengo responsable del mismo.
En esta entrevista Ricardo Luengo habla sobre este importante proyecto de la Federación, desgranando sus ideas sobre las múltiples facetas y detalles de su nuevo cometido.

HACE, aproximadamente, un año la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) creó su Servicio de Publicaciones y designó, después de una convocatoria pública entre sus socios, a Ricardo Luengo González como responsable del mismo.

Ricardo Luengo es Doctor en Matemáticas y Catedrático de Escuela Universitaria del área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Extremadura, en cuyo ICE ha sido Jefe de División de Investigación y responsable de Publicaciones, así como Director de la Escuela de Magisterio de Badajoz.

Posee una amplia experiencia docente tanto en la Enseñanza Media, como en la Universidad y ha impartido un gran número de cursos de formación para el profesorado y ha participado en más de sesenta congresos y jornadas nacionales e internacionales presentando ponencias y comuni-

Ricardo Luengo

caciones y pronunciando en algunos de ellos conferencias plenarias.

El campo editorial no le es ajeno, pues además de haber sido, como ya he señalado, responsable de las Publicaciones del ICE de Extremadura y de haber escrito él mismo más de una docena de libros y de medio centenar de artículos ha sido miembro fundador y director de la Revista de Investigación y Docencia *Campo Abierto* y pertenece a varios comités de redacción de revistas de educación de ámbito nacional.

Es presidente de la Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper» desde su fundación en 1990 y en los últimos años, vicepresidente y presidente, sucesivamente, de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Éstas son algunas pinceladas del perfil profesional de Ricardo Luengo que en modo alguno pretenden ser, ni siquiera, una síntesis de su currículum que, con ser muy importante, queda oscurecido por sus características personales. Ricardo es una persona comprometida con sus ideas y coherente con ellas, tenaz, trabajador, dialogante en extremo, nada dogmático, con un gran sentido del compañerismo y de la amistad, dispuesto a colaborar con quien sea… en definitiva, como dicen ahora nuestros alumnos, es «una persona legal».

Pues con él vamos a hablar del Servicio de Publicaciones de la Federación que ha comenzado a andar. Esta conversación está hecha de forma poco ortodoxa, en parte a través del correo electrónico y en parte en el transcurso de los descansos que tuvimos en la última Junta de Gobierno de la Federación.

—Una primera pregunta previa y personal, ¿por qué te has metido en este «tinglado» del Servicio de Publicaciones?

—Porque creo que es necesario que exista este servicio, que por otra parte tienen algunas sociedades. Yo tenía experiencia como coordinador de las publicaciones del ICE de mi Universidad y dejaba el cargo de Presidente de FESPM, por lo que quedaba más libre y algunos compañeros me animaron a presentarme al concurso convocado por FESPM en SUMA, presenté mi proyecto y la Junta de Gobierno de FESPM lo aprobó y me otorgó su confianza.

—En la actualidad, y a diferencia de tiempos pasados, existen iniciativas privadas que editan un número apreciable de títulos dedicados a las matemáticas, a su enseñanza, a su divulgación, etc. Estoy pensando, por ejemplo, en Síntesis, Proyecto Sur, Nivola, Rubes, Graò, ¿aún hay espacio para que la Federación se lance a publicar?

—Es cierto que existen iniciativas privadas que editan libros de matemáticas, divulgación y enseñanza de las matemáticas, pero existen libros que nunca podrían ser editados por la iniciativa privada, porque interesan a un reducido número de personas y no es rentable su edición. Y, sin embargo, son libros muy interesantes para los profesores y para la contribución de la matemática a la cultura. La matemática forma parte también de la cultura, como la historia o el arte y otras materias. Si la iniciativa privada no lo puede hacer tendrán que hacerlo las instituciones públicas y los colectivos directamente interesados en que estos documentos sean editados; de lo contrario se perderán y, en mi opinión, tenemos todos el deber de contribuir a que no se pierda nuestro patrimonio matemático. Es grande el hueco que deja la iniciativa privada y es grande también la tarea que tenemos por delante.

La matemática forma parte también de la cultura, como la historia o el arte y otras materias.

Lo ideal sería, y de hecho se está haciendo en la medida de lo posible, aunar los esfuerzos de la iniciativa privada y la pública. En el proyecto de la FESPM está contemplada esta colaboración entre nuestro servicio y la iniciativa privada y, de hecho, estamos conversando con editoriales comerciales con el fin de que esta colaboración se materialice en realizaciones concretas.

—¿Cuál es la filosofía general del Servicio de Publicaciones de la Federación?, ¿cuáles son sus objetivos?

—El Proyecto de SP sintoniza en su filosofía general, en sus fines y objetivos con lo que marcan los estatutos de la FESPM. La elaboración del Proyecto se hizo después de la reforma de estatutos y está por tanto totalmente adaptado a los mismos.

…tenemos todos el deber de contribuir a que no se pierda nuestro patrimonio matemático.

De acuerdo con los fines de FESPM, el SP tiene una doble tarea: por una parte, la de publicar los documentos (en cualquier formato, no sólo libros) que por su calidad y utilidad para los profesores merezcan no perderse y pasar a formar parte de nuestro patrimonio cultural matemático, poniendo esta documentación a disposición de nuestros asociados y de los profesores en general.

Por otro lado, no olvidemos que FESPM agrupa sociedades. Algunas tienen su servicio de publicaciones propio y están haciendo desde él una gran labor, pero

otras no disponen de este servicio (y por su tamaño y circunstancias no es previsible que lo puedan tener) por lo que no poseen un cauce para canalizar sus iniciativas. Ese cauce lo pueden encontrar en el SP de la FESPM. Además es conveniente no duplicar esfuerzos (y también sumarlos) para abordar otros proyectos, por lo que en el Consejo Editorial están los responsables de los SP de las sociedades para lograr esa labor de coordinación.

—¿Qué tipos de libros se van a editar? ¿hay colecciones previstas?

—En cuanto a qué publicaciones se van a editar, quiero hacer la puntualización de que no sólo se contempla editar libros. Sin desdeñar la publicación en papel, debemos estar abiertos a otros soportes de futuro (vídeo, CDROM, DVD, publicación directa en Internet, etc.), lo cual ya se está haciendo por parte de las sociedades (recordemos las actas de las JAEM de Lugo en CD-ROM, entre otros casos).

Una primera «fuente» de publicaciones es la documentación y conclusiones que generan las actividades propias de la Federación…

Una primera «fuente» de publicaciones es la documentación y conclusiones que generan las actividades propias de la Federación (Olimpiadas Nacionales, Debates, Seminarios, Documentos de toma de posición de FESPM frente a problemas generales del Estado relativos a la Enseñanza de las Matemáticas, Guías de Exposiciones de la Federación etc.). En este sentido, tenemos una asignatura pendiente como es la publicación de las actas de las JAEM de Castellón, hueco que vamos a llenar para completar toda la colección de las JAEM, porque creemos forma parte del patrimonio de la FESPM.

Sería interesante también editar publicaciones dirigidas a la formación del profesorado en Educación Matemática. (libros y documentos relativos a temas tanto de actualización en Matemática, como de Didáctica de las Matemáticas).

Podríamos editar asimismo publicaciones de autores extranjeros traducidos al castellano, que se consideren de mucha importancia en el ámbito de la Educación Matemática, y que traten de paliar la dificultad que tiene la mayoría de los profesores españoles para leer las obras originales en otros idiomas distintos al castellano.

También podrían publicarse materiales curriculares y unidades didácticas generadas por los propios profesores de aula…

También podrían publicarse materiales curriculares y unidades didácticas generadas por los propios profesores de aula, con la calidad adecuada, quizá mediante la resolución de concursos convocados al efecto por la propia FESPM.

En todo caso, deberíamos hacer publicaciones dirigidas al público en general, dirigidas hacia la popularización de las Matemáticas, que ayudaran a los profesores a realizar esta tarea.

Recoger nuestro patrimonio histórico-cultural matemático debe ser otra de nuestras preocupaciones y publicar obras inéditas de autores matemáticos españoles, reediciones de las ya publicadas, u obras de otros autores que versen sobre nuestros matemáticos.

La investigación que se está produciendo hoy en día en el campo matemático y en el de la Didáctica de la Matemática debe proyectarse sobre la práctica docente, los avances que se produzcan deben llegar al aula, por ello sería interesante publicar (quizá en colaboración con departamentos, ICE, SEIEM, etc.) investigaciones o resúmenes de investigaciones que sean de aplicación directa a la docencia o que den ideas potentes que puedan ser llevadas al aula.

Quizá fuera bueno publicar un *Handbook* anual que recogiera un conjunto de los mejores trabajos generados durante ese año en Educación Matemática, dando entrada a trabajos de profesores extranjeros de prestigio, pero con al menos un 60% de trabajos de autores españoles.

Por supuesto, debemos hacernos eco de los eventos ocasionales importantes y hacer la contribución de FESPM a ellos. Por ejemplo, publicaciones relativas a la conmemoración del año 2000 como año internacional de las Matemáticas, La Educación Matemática en el siglo XX, La Educación Matemática ante el cambio de milenio, prospectiva de la Educación Matemática para la década del 2000, para el siglo XXI, etc.

En todo caso hay que estar abierto a las futuras demandas y necesidades sentidas por el profesorado, que podrán ser colmadas mediante las correspondientes publicaciones

—Una de las tareas difíciles de un editor consiste en la elección de títulos, ¿cómo se van a seleccionar? Me figuro, bueno lo sé, que hay un comité de redacción, ¿quién lo forma y cómo funciona?

—Efectivamente, creo que esa es una labor difícil y de mucha responsabilidad. Afortunadamente no recae sólo sobre una persona.

Tengo que explicar primeramente que el SP no es un «organismo autónomo», es un servicio de la FESPM, su responsable es un «secretario de publicaciones» vocal de la

Comisión Ejecutiva y ello implica que la primera dependencia es justamente de dicha Comisión Ejecutiva y en última instancia de la Junta de Gobierno de la Federación.

La Junta de Gobierno aprueba las líneas y criterios generales de publicación y el proyecto de presupuesto anual. Todo ello constituye un marco de actuación dentro del cual nos debemos mover. Además las publicaciones concretas serán aprobadas por la Comisión Ejecutiva, ateniéndose a las líneas y criterios generales establecidos por la Junta de Gobierno y a propuesta del vocal secretario de Publicaciones.

No obstante, y en similitud con la revista SUMA, se cuenta con un Consejo Asesor Editorial. En él están integrados un representante de cada servicio de publicaciones existente en las sociedades federadas, un representante de SUMA, el vocal de prensa y el vocal de Actividades y dos miembros designados por la Junta de Gobierno de la FESPM. Sus funciones son de la mayor importancia porque prepara las propuestas concretas que yo hago, como vocal de publicaciones, a la Comisión Ejecutiva y a la Junta de Gobierno y hace los informes claves a la hora de la toma de decisiones por los órganos de Gobierno de la FESPM.

—Si un socio de la Federación dispone, por ejemplo, de unos buenos materiales de clase, o ha llevado a cabo una investigación que piensa que puede ser interesante para otros colegas, o ha escrito una buena divulgación sobre cualquier tema, en definitiva, si alguien quiere publicar algo en la Federación, ¿qué pasos debe seguir?

—La Junta de Gobierno de FESPM (en su sesión de 3 de febrero de 2001) ha aprobado un procedimiento para la propuesta de publicaciones por parte tanto de las sociedades, como de cualquier asociado, a FESPM. La propuesta puede hacerse tanto por una persona física como por una sociedad federada. En todos los casos deben dirigirla al SP que recepciona la propuesta y la envía al Consejo Asesor. El Consejo Asesor realiza el preceptivo informe y la Comisión Ejecutiva de FESPEM decide sobre la viabilidad o no de la edición. Es conveniente que los proponentes nos hagan llegar todos los datos y condiciones que estimen oportunos, aunque si fuera necesario se le solicitarían los datos adicionales pertinentes y se mantendrían los contacto necesarios para ultimar las condiciones de edición.

El plazo quedó abierto desde el momento de su aprobación el pasado día 3 de febrero por lo que ya se pueden hacer propuestas de publicación.

—Hay sociedades federadas que ya disponen de un servicio de publicaciones, ¿qué tipo de relaciones van a existir entre los servicios de las sociedades y el de la Federación?

—Las sociedades con servicio de publicaciones están haciendo una gran labor y estamos en contacto con sus responsables. En fecha próxima vamos a tener un Consejo de Publicaciones y allí estarán representados estos servicios. Creo que las relaciones serán excelentes porque vamos a partir del respeto a su autonomía y a la labor que están haciendo, y esa labor debe ser potenciada y coordinada. Hay que tener en cuenta que no son la «competencia», sino parte de nosotros mismos y cualquier éxito editorial que tengan es mérito suyo pero es un prestigio para toda la Federación. Por eso pensamos que el SP de FESPM puede ser bueno para todas las sociedades, para las que tienen servicio de publicaciones porque serán potenciadas y para las que no tienen este servicio porque tendrán un cauce para la coedición con el SP de FESPM. En resumen, debemos considerar que da prestigio y debe ser un orgullo para una sociedad federada que en sus publicaciones figure el respaldo y el logotipo de la Federación.

…pensamos que el SP de FESPM puede ser bueno para todas las sociedades, para las que tienen servicio de publicaciones porque serán potenciadas y para las que no tienen este servicio porque tendrán un cauce para la coedición con el SP de FESPM.

—Un Servicio de Publicaciones, aunque sea modesto, es evidente que no lo puede llevar una única persona, ¿quién te ayuda en ello? ¿Con qué infraestructura inicial contáis?

—Se contempla en el proyecto una Secretaría, que está integrada actualmente por un tesorero, un asesor técnico y otra persona que se ocupa de las tareas administrativas, de gestión, mantenimiento de stock, envíos etc. El problema es que somos todos socios que trabajamos cada uno en su ámbito, muy ocupados y que trabajamos en estos temas «por amor al arte» por lo que cada uno hace lo que buenamente quiere y puede. Si el servicio cobra importancia y movimiento, vamos a necesitar alguien con mucha dedicación y encontrar esto no es fácil. De momento estamos cubriendo los objetivos porque nos basamos en la infraestructura y en la estructura y potencial humano de la Sociedad Extremeña de Educación Matemática. Sin este apoyo no sería viable el servicio. Por eso me parece bien que el Servicio no sea «autónomo» y que detrás de él haya el apoyo de una sociedad federada, que ahora coincide ser la Extremeña, pero que en otra ocasión será cualquiera otra.

—Tu primer «hijo» en el Servicio de Publicaciones ha sido un facsímil de Vera, Los historiadores de la matemática española*, que, por cierto, ha quedado precioso. Sé que tienes una cierta «veneración» por tu paisano Vera; en un momento en el que se está reivindicando, con toda justicia, algunos matemáticos españoles, como Rey Pastor o Puig Adam, ¿qué papel ha tenido Vera en la matemática española?*

—En realidad la publicación de Francisco Vera ha sido fruto de la estrecha labor que hemos mantenido el profesor José M. Cobos y yo. Él es un gran especialista en Vera (y ya ha publicado varios libros suyos, me estoy acordando por ejemplo de *Evolución del pensamiento científico* editada por la Editora Regional de Extremadura y otros) y ha coincidido su interés por este autor con nuestro proyecto de iniciar una colección titulada «Recuperación del patrimonio matemático español». Esta colección va en la línea que apuntabas de reivindicar, también yo creo que con toda justicia, la labor de los matemáticos españoles; pero no sólo los más conocidos nacional o internacionalmente (como los que has citado), sino además los que tenemos en cada región y de los que estamos también orgullosos, como es el caso de Vera, Reyes Prósper, o Roso de Luna en Extremadura, como los hay sin duda en el resto de las regiones españolas.

En cuanto a la pregunta que me formulas con respecto al papel de Vera en la matemática española, voces mucho más autorizadas que la mía consideran a Vera como uno de los más grandes historiadores de la Ciencia que ha habido en España. Su obra es ingente, pues Vera publicó más de 35 obras sobre Matemáticas, Historia de la Ciencia y Filosofía Científica. Fue un defensor acérrimo de los valores científicos hispánicos. Era un hombre polifacético (matemático, periodista, funcionario del Tribunal de Cuentas, filósofo y fundamentalmente historiador de las ideas científicas), que se vio, como muchos otros españoles, perseguido por sus ideas. Fue republicano, masón y teósofo (por influencia de Mario Roso de Luna) y sobre todo profundamente liberal; aunque anticlerical, era tolerante y antidogmático. Fue condenado a muerte, por aquellos mismos que preconizaban la reconciliación, entre otras causas, por el crimen de haber escrito el código criptográfico del ejercito leal a la República. La caída de la República hace que, como muchos otros, Vera salga al exilio, pero… no voy a contar aquí su vida, los interesados pueden encontrar un resumen de su vida y obra en el prólogo del libro.

Vera es uno de los más grandes historiadores de la Ciencia que ha habido en España. Su obra es ingente, pues Vera publicó más de 35 obras sobre Matemáticas, Historia de la Ciencia y Filosofía Científica.

—En relación con la pregunta anterior, y para ahorrarnos una recensión en SUMA, ¿podrías hacer un breve comentario sobre Los historiadores de la matemática española?

—La obra, *Los historiadores de la matemática española*, que se ha editado en facsímil está publicada originalmente en 1935 y se trata de una conferencia que da Vera en el Ateneo madrileño el 15 de febrero de 1935. Vera que ya había publicado, en 1933, sus cuatro volúmenes de *Historia de la Matemática en España*, hace un recorrido por las aportaciones que los historiadores de la Matemática han hecho a esta ciencia. No quisiera comentar más sobre el libro sino animar a todos a que disfruten con su lectura.

—Piensas que en el futuro se podrían publicar otros facsímiles de Vera, como los cuatro volúmenes de La historia de la Matemática en España*, o las breves historias de la Matemática o la Geometría, que en su día publicó Losada y que hoy son libros difíciles de encontrar, incluso en las librerías de viejo.*

—Sería interesante hacerlo, tenemos acceso a los originales e incluso a material inédito. Pero el SP es un servicio de la Federación y no sólo de la Sociedad Extremeña de

Educación Matemática y no sería adecuado dedicar los pocos recursos existentes sólo a autores extremeños. Hay también otros autores oriundos de otras regiones españolas cuya obra también debemos rescatar. Hemos empezado por Vera, ahora seguirán otros autores, pero no hay que descartar la posibilidad de volver en otra ocasión a editar una de sus obras.

—Es obvio que un libro es un vehículo para expresar unas ideas, del tipo que sean, y por ello es esencial el contenido del mismo. Pero a los amantes del libro, entre los que creo encontrarme y pienso que tú también, los libros nos gustan también como objetos: el diseño, la maquetación, el tipo de papel, la encuadernación, el tipo de letra, la corrección tipográfica, sintáctica y hasta ortográfica son importantes. Hoy día se editan libros preciosos, en matemáticas basta pensar en los de Nivola, y otros desastrosos, que se caen de las manos (evidentemente, no vamos a citar ejemplos). ¿Qué piensas de este aspecto formal de los libros?, ¿qué importancia va a tener en los que edite el Servicio de Publicaciones?

—Por supuesto pienso que lo primero es el contenido de un libro, sin ello no habría libro. Sin embargo, ocurre como con la pintura: un buen lienzo gana muchísimo si tiene un buen marco que lo realce. De la misma manera pienso que influyen mucho los factores que has citado. Yo también me encuentro entre los amantes de los libros y por eso hemos dedicado mucha atención y muchas horas a la edición de los dos libros editados por el SP hasta el momento: El libro de Vera y el libro coeditado con la Sociedad Extremeña *Instrumentos y Unidades de Medida tradicionales en Extremadura*.

Tanto en uno como en otro la edición se ha cuidado al máximo. En este último, el libro presenta un formato original, escrito a dos columnas (es una edición bilingüe castellano-portugués) con inclusión de unas 100 fotografías de gran calidad y a todo color y un papel de bastante calidad. En el caso del libro de Vera, hemos cuidado mucho el diseño en el que se han tenido que conjugar los elementos que van a ser comunes y que identifican la colección con el logotipo de FESPM y con el tipo de edición (fascimilar) que debe contener, también en portada, elementos procedentes de la edición original. Con todo se ha logrado un conjunto armónico, sobrio pero elegante. El papel es de suficiente gramaje y las páginas superan ampliamente en limpieza a la edición original, gracias a los adelantos técnicos de los que disponemos hoy en día. Pero todo esto no hubiera sido posible sin la sensibilidad y la profesionalidad del personal de Tecnigraf, que no ha regateado esfuerzos, medios, ni tiempo hasta que la obra quedó a gusto de todos.

…el SP es un servicio y no una editorial comercial, por lo tanto deben de primar los criterios de utilidad, calidad y contribución a la creación de patrimonio antes que los fines económicos.

Pero creo que ha merecido la pena, y vamos a seguir así; estamos recibiendo muchas felicitaciones por la edición y creo que hemos empezado a caminar, pero queda mucho camino por delante.

—El libro de Vera, al ser el primero editado por el Servicio de Publicaciones, ha sido enviado de forma gratuita a todos los socios de la Federación. Pero, parece claro que con el presupuesto que tiene la Federación esto no va a ser posible con los siguientes libros que se publiquen. ¿Cuál va a ser el procedimiento de financiación del Servicio?

—Considero que el SP es UN SERVICIO y no una editorial comercial, por lo tanto deben de primar los criterios de utilidad, calidad y contribución a la creación de patrimonio antes que los fines económicos. Esto no quiere decir que alguna publicación concreta pueda ser rentable, algunas sociedades federadas tienen publicaciones que producen beneficios económicos, pero no es la tónica general, ni lo que a mi juicio debe de primar en nuestro Servicio. ¿Quiere lo anterior decir que debe ser un Servicio que cueste muy caro a la FESPM? Creo que no, se debe de buscar que la publicación se autofinancie, y esto es posible asociándose a otra entidad (como las coediciones) y pidiendo por el documento a nuestros socios el precio estricto de coste (y en algunos casos menos si se consigue una subvención mediante el convenio con las otras entidades). Y hay entida-

des públicas y privadas dispuestas a ello (Consejerías Autonómicas, Universidades, Cajas de Ahorro mediante su obra social, etc.). En principio, las puertas a las que hemos llamado se han abierto. La edición del libro de Vera se financia en un 50% gracias a la sensibilidad hacia la recuperación del patrimonio que tiene el Consejo Social de la Universidad de Extremadura.

En resumen, y respondiendo a la pregunta que se me formula, hay que ir a una financiación múltiple con aportaciones por patrocinio de entidades públicas o privadas, convenios de coedición, derechos de publicidad y, naturalmente también, por financiación a través de los recursos propios de FESPM. No se descarta la venta de las propias publicaciones, para nuestros socios a precio de coste y para los no socios con unos precios muy moderados tendentes a la recuperación de la inversión y no a la generación de beneficios.

—Excepto en el caso de las editoriales potentes, el mayor problema que tiene el mundo editorial es el de la distribución y comercialización, como tú bien sabes, ya que has sido responsable de las publicaciones del ICE de Extremadura. Los almacenes de editoriales institucionales o semiinstitucionales están abarrotados de libros, en muchos casos muy interesantes, debido a este problema de distribución. ¿Cómo lo va a afrontar tu equipo?

—Efectivamente ese es el mayor problema de las editoriales comerciales y para nosotros es también un problema serio que hay que considerar. Sin embargo, tenemos una circunstancia que juega a nuestro favor y es que la Federación trabaja fundamentalmente para un público muy concreto e integrado en una estructura (la de la propia FESPM y sus sociedades) y la noticia de una edición puede llegar con seguridad a toda la población-objetivo (el conjunto de los aproximadamente 5.500 asociados en España). Los canales de publicidad para llegar a esta población son la revista SUMA (que reciben todos los socios) y la inclusión en la web de FESPM que conocen también nuestros socios. En todo caso el alcance de la web es mucho mayor (se supone que mundial) y por ello hemos decidido comenzar por ahí y el Consejo Editorial analizará la marcha del proceso y pasado un tiempo prudencial se podrán establecer las correcciones oportunas. En cuanto al stock no nos produce todavía agobio, dado que estamos comenzando, pero es evidente que habrá que planteárselo. En todo caso, vamos a tratar de ajustar el número de ejemplares a la demanda; en nuestro caso lo tenemos más fácil que una editora comercial por estar la población-objetivo muy definida y localizada.

La Federación ha cambiado mucho en los últimos años. Ha cambiado su estructura y organización interna; ha habido un periodo de transición […] Actualmente considero que ese periodo de adaptación ha terminado, tenemos unos nuevos estatutos aceptados por todos y una nueva estructura que está funcionando bien, en mi opinión.

—¿Cómo piensas que aceptarían los socios de las distintas sociedades un aumento de la cuota anual que pagan, por ejemplo mil o mil quinientas pesetas más, y que esa cantidad fuese destinada al Servicio de Publicaciones de la Federación con la contrapartida de recibir cada año, de forma gratuita, dos o tres libros de los que se publicasen? ¿No se solucionarían de esta forma dos cuestiones a la vez: la financiación y la distribución?

—Debo decir, que esta cuestión escapa a mis competencias y a las del Servicio. Sería una opción, desde luego, pero no la creo necesaria por el momento. Se ha planteado en la Junta de Gobierno de FESPM, creo recordar, pero se vieron algunos inconvenientes: hay socios que pertenecen simultáneamente a dos o más sociedades, convenios de reciprocidad con otras etc. y se plantearían problemas de doble recepción de los libros, doble aumento de cuotas y algunos otros problemas. Como responsable del SP para mí sería lo más cómodo, pero como Presidente de una sociedad federada y como miembro de la Junta de Gobierno de FESPM tengo que decirte que no sería fácil, al menos por el momento adoptar esta decisión.

—Cambiemos de tema, debido a tu gran experiencia en el campo de la educación y a que conoces perfectamente el funcionamiento de las sociedades y de la Federación, ya que llevas bastantes años de presidente de la Sociedad Extremeña y has sido vicepresidente y presidente de la Federación, para terminar esta entrevista desearía hacerte una pregunta: ¿cómo ves el presente y, sobre todo, el futuro de la Federación?

—La Federación ha cambiado mucho en los últimos años. Ha cambiado su estructura y organización interna; ha habido un periodo de transición en el que los estatutos existentes no servían ya de marco para nuestro funcionamiento, debido sobre todo a la inclusión de nuevas sociedades y a las circunstancias que atraviesa la educación en nuestro país. Actualmente considero que ese periodo de adaptación ha terminado, tenemos unos nuevos estatutos aceptados por todos y una nueva estructura que está funcionando bien, en mi opinión.

La introducción en la sociedad española y en el sistema educativo de las nuevas tecnologías y de Internet ha faci-

litado mucho la comunicación y eso posibilita llegar a nuestros socios y organizar más y mejor las actividades.

Vosotros habéis conseguido editar con calidad y regularidad la revista SUMA ya desde hace años y en el año 2000 hemos colgado en la red la web de la Federación. Hemos tenido años muy intensos y emblemáticos en los que la Federación y sus sociedades «han dado la talla» (estoy recordando ICME en 1996 y recientemente el año 2000, año mundial de las matemáticas) pero, sobre todo, hemos mantenido también con regularidad nuestras actividades tradicionales como son los Seminarios, las JAEM y las Olimpiadas Matemáticas. Y todo ello a pesar de tener una subvención cada año reducida a la mitad de nuestro propio Ministerio (el último año la subvención era de la ridícula cantidad de 500.000 pts, mientras que a otros colectivos privados se les multiplicaba por diez y por más las subvenciones recibidas de gobiernos anteriores).

Yo soy optimista ante el futuro de FESPM. Tenemos un colectivo de asociados muy numeroso y de gente muy interesada (un gran capital humano), una estructura que funciona, canales de comunicación eficaces, un conjunto de actividades consolidadas y representación nacional e internacional (con proyección en Europa y en Iberoamérica). Hemos conseguido también un prestigio y una consideración por parte de colectivos como las facultades de Matemáticas, RMSE, Sociedades de Investigación, etc. Y, sobre todo, una actitud de respeto mutuo y de colaboración. Y tenemos por delante los retos que nos plantea este nuevo siglo y milenio. Por último, tenemos también la miopía de un ministerio que no nos considera para nada, no se da cuenta de que representamos a un colectivo de unos 5500 profesores distribuido por todo el país y la potencia y la fuerza que esto significa. Y yo espero que en el futuro nos miren con otros ojos o bien que sean otros ojos los que nos miren.

—*Muchas gracias, Ricardo. Desde SUMA te deseamos que este proyecto del Servicio de Publicaciones que has expuesto se haga realidad. Estamos plenamente convencidos de que así será, lo que fortalecerá en buena medida a nuestra Federación.*

Emilio Palacián
Codirector de SUMA

J A E M
X JORNADAS PARA EL APRENDIZAJE
Y LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Página Web X JAEM

www.unizar.es/ice/jaem

SUMA 36
febrero 2001, pp. 101-106

Isoperímetros: Ficha didáctica en geometría. Métodos trigonométricos

Grupo Construir las Matemáticas*

TALLER DE PROBLEMAS

EN LA ENTREGA del n.° 35 nos preguntábamos si la evolución histórica del problema nos podría servir de guía para planificar una actuación en clase, siguiendo el modelo Van Hiele. ¿Cómo describir este modelo en pocas líneas?

1. Se basa en la idea de que cada persona tiene un nivel de pensamiento y conocimientos frente a cualquier actividad matemática, independientemente de su edad y su desarrollo evolutivo.
2. Cada nivel supone una forma de comprensión, un modo de pensamiento particular, de manera que una persona sólo puede razonar sobre conceptos matemáticos adecuados a su nivel de pensamiento en cada momento.
3. Se distinguen cinco *niveles de pensamiento*:

   Nivel 0, predescriptivo, básico o visual.

   Nivel 1, de reconocimiento visual, descriptivo.

   Nivel 2, de análisis, teórico.

   Nivel 3, de clasificación, de relación.

   Nivel 4, de deducción formal.
4. El proceso de la enseñanza debe orientarse a facilitar el progreso de una persona que esté en el nivel n al $n + 1$, para ello la planificación debe estar adecuada a su nivel de razonamiento.
5. ¿Cómo se puede determinar el nivel de cada cual frente a una misma tarea?

   Aquí surgen las *fases* de actuación en el aula:

   1. Consulta o *diagnóstico*, para determinar el nivel de pensamiento. El uso de materiales manipulativos es recomendable en esta fase, puesto que ayudan a los estudiantes a explicitar conocimientos que de otro modo dificilmente pondrían de manifiesto.

* Los componentes del Grupo Construir las Matemáticas son Rafael Pérez, Isabel Berenguer, Luis Berenguer, Belén Cobo, M.ª Dolores Daza, Francisco Fernández, Miguel Pasadas y Ana M.ª Payá.

2. *Orientación dirigida*. Actividades muy estructuradas, encaminadas a conducir a los estudiantes a la construcción de nuevos conocimientos (contenidos mínimos) a partir del nivel en el que se encuentran. El trabajo en grupo puede facilitar el avance en esta fase.
3. *Explicitación* , para comunicar los resultados del trabajo. Esto requiere una reflexión individual sobre lo que se sabía y lo que se ha aprendido y la organización de todos los resultados obtenidos.
4. *Orientación libre*. Es el momento de la atención a la diversidad, de actividades menos estructuradas y más abiertas.
5. *Integración*. Organización y presentación formal de los nuevos aprendizajes, por parte del profesorado.

Actividades y objetivos

El objetivo de la actividad que se propone es la introducción del método trigonométrico para resolver problemas.

A lo largo de la ESO, también pueden sacarse a colación, además del entrenamiento en heurísticos, el método de los lugares geométricos, el de las transformaciones y el de las coordenadas.

La actividad que vamos a presentar aquí se encuentra entre los niveles de pensamiento 2 y 3 descritos arriba y está pensada para 3.° o 4.° de ESO.

Observaciones:

1. Tal y como pondremos de manifiesto en la octava entrega, este problema puede tener una primera aproximación en el primer ciclo de la ESO de la mano de la función cuadrática.
2. Con esta entrega, la quinta y la referida antes, pretendemos mostrar cómo se puede abordar *un mismo problema* desde los diferentes bloque de contenidos del currículo de Matemáticas, así como el carácter cíclico del aprendizaje, al presentarse a lo largo de toda la ESO.
3. Para colegas «nerviosos(as)» (sí, aquellos(as) que ya han echado mano del cálculo de derivadas) está prevista la novena entrega, propia de un curso de Bachillerato.

El problema

> Dispones de un listón de madera de 3 m de longitud para enmarcar un cuadro. ¿Cuál es la lámina de mayor superficie que puedes enmarcar?

Diagnóstico

Se pregunta a la clase:

> ¿Qué significa la palabra perímetro?

Se pretende, además de comprobar las ideas previas de cada alumno o alumna, la utilización correcta del lenguaje que vamos a usar en esta actividad.

> Sobre un geoplano ortométrico y uno isométrico y una cuerda de longitud dada, formar, al menos, tres poligonales cerradas con área diferente.
>
> Trasladar los resultados sobre papeles pautados y anotar, para cada dibujo, las medidas de los lados, suponiendo que la «cuerda» tuviese 3 metros de longitud.
>
> ¿Qué tienen en común todas las figuras?

Respuesta prevista:

Igual perímetro = *iso-perimétricas*. Comentar la etimología de este término y buscar analogías con otros términos que incluyan el prefijo *iso*.

> ¿Cuál es el perímetro de un rectángulo?
>
> Si conoces el valor de un lado, ¿puedes deducir el del otro?

Mediante estas actividades se deben detectar los niveles de pensamiento del grupo para ajustar el punto de partida del trabajo y tratar de unificar el lenguaje.

Comentario:

1. Observar si funciona el principio de conservación de la cantidad y no la forma.
2. Observar si se detectan variaciones entre las áreas de las figuras.

Actuación (tratamiento de la diversidad):

Si alguien de la clase está en la situación 1, entonces *el problema está lejos de sus posibilidades* y habrá que proponer actividades adecuadas para que supere ese nivel. En este punto se pueden formar grupos de trabajo de integración, formados por personas de los dos niveles, teniendo en cuenta que conviene que haya más del nivel 1 que del 2 en cada grupo.

Si se está en situación 2, seguir avanzando en la propuesta que se presenta.

1ª Orientación dirigida

Organizar la clase en grupos de 4 personas.

> Para el paralelogramo, que es un caso más sencillo, vamos a analizar diferentes posibilidades de construcción del marco y calcular la superficie de la lámina que admite en los distintos casos.
>
> El listón de que disponemos mide 3 m, luego todas las láminas deben tener el mismo perímetro y se verifica que: 2·lado mayor + 2·lado menor = 3. Para simplificar, vamos a llamar L a la longitud del lado mayor de rectángulo y l a la del lado menor y así podemos decir que $2L + 2l = 3$.
>
> Haremos una indagación sistemática y para ello, cada grupo va a dar cuatro valores a L y a rellenar la siguiente tabla en la que aparecen láminas de distintas dimensiones.

Lado mayor, L				
Lado menor, l				
Área, $L \times l$				

Observación:

Es aconsejable trabajar con calculadoras, para evitar que se «pierda» el problema que nos interesa entre cálculos engorrosos. El objetivo ahora no es el entrenamiento en cálculo.

Entre todos los rectángulos posibles, parece intuirse que el cuadrado es el que tiene mayor área, pero, ¿*cómo validar esta hipótesis*? El ejemplo no demuestra, hay que generalizar.

Si la lámina es cuadrada, el lado será la cuarta parte de este perímetro. Podemos expresar las áreas de cualquier rectángulo y del cuadrado en función de L y l, e intentar averiguar cuál de ellas es mayor.

El área del cuadrado es igual a lado x lado, luego, será:

$$\frac{(2L+2l)^2}{4} \quad \left(\frac{L+l}{2}\right)^2$$

y la de cualquier rectángulo será $L \times l$. ¿Cuál de las dos será mayor?

Debes comparar $\left(\frac{L+l}{2}\right)^2$ con $L \times l$, o lo que es lo mismo $\frac{L+l}{2}$

con $\sqrt{L \cdot l}$, que no son otra cosa que la *media aritmética* y la *media geométrica* de L y l, respectivamente, que en cada caso son números construibles con regla y compás.

¿Cuál de las siguientes desigualdades es cierta:

$$\frac{L+l}{2} < \sqrt{L \cdot l} \quad \text{o} \quad \frac{L+l}{2} > \sqrt{L \cdot l} \ ?$$

Estos resultados, como desigualdades algebraicas, se verán en la quinta entrega.

1.ª Explicitación

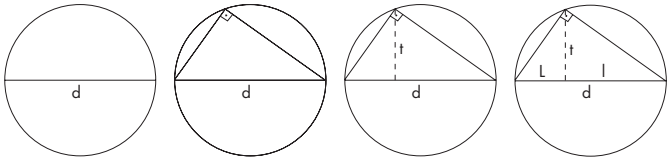
Cada grupo redactará un informe organizando todo el trabajo realizado, en el que se explique claramente los resultados obtenidos. Dicho informe será expuesto por un miembro del grupo a la clase.

En este momento volvemos a la orientación dirigida para avanzar un poco más en el problema. Para hacer la comparación anterior se puede utilizar una estrategia: Hacer una representación gráfica. Organizamos la siguiente actividad en torno a esta idea.

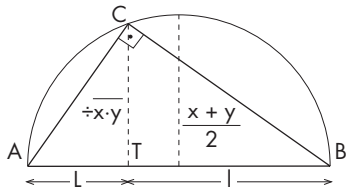
2.ª Orientación dirigida

1. Haz una circunferencia de diámetro cualquiera (represéntalo con la letra *d* de diámetro).
2. Dibuja un triángulo rectáng ulo cuya hipotenusa sea *d*.
3. Traza la altura del triángulo sobre *d* (la representaremos con la letra *t*, de altura)
4. La hipotenusa queda dividida en dos trozos de longitudes desconocidas, represéntalas con las letras *L* e *l*.

Como $L + l = d$, $\frac{L+l}{2}$ será igual al radio. Observa que t es menor o igual que el radio, ¿cuánto vale?



En la figura, el segmento CT representa geométricamente a la media geométrica de los segmentos L y l: $\sqrt{L \cdot l}$



La media aritmética de estos segmentos, $\frac{L+l}{2}$. viene representada geométricamente por cualquiera de los radios de la circunferencia en la que está inscrito el triángulo *ABC*; en particular, el paralelo al segmento *CT*.

¿Cuál de las dos medias es mayor? ¿Cuándo serán iguales?

La igualdad se da cuando $L = l$. Es decir cuando el rectángulo es un cuadrado. En este caso, el cuadrado tiene de lado 3/4 m, y su área será de 9/16 m² (0.56 m²).

2ª Explicitación

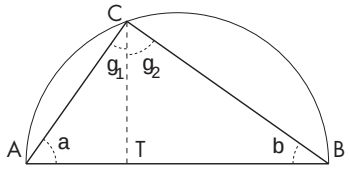
Idem a Explicitación 1.

Orientación libre

Resultado

Entre los cuadriláteros con igual perímetro, el cuadrado es el que tiene área máxima.

Un triángulo en el uno de sus lados sea el diámetro de una circunferencia y el vértice exterior a ese lado sea un punto cualquiera de la circunferencia, es rectángulo y el diámetro es la hipotenusa. Utilizando este resultado, sabemos que el triángulo *ABC* de la figura es un triángulo rectángulo, de modo que los ángulos $\alpha + \beta = 90°$.



Los triángulos *ATC* y *BTC* son también rectángulos, luego se verifica que $\alpha + \gamma_1 = 90°$ y $\beta + \gamma_2 = 90°$, de donde, $\gamma_1 = 90° - \alpha$ y $\gamma_2 = 90° - \beta$.

Como $\alpha + \beta = 90$, se tiene que: $\alpha = 90 - \beta$ y $\beta = 90 - \alpha$. Por tanto, $\alpha = \gamma_1$ y $\beta = \gamma_2$, y los dos triángulos *ATC* y *BTC* son semejantes.

Por tratarse de triángulos semejantes, los lados homólogos serán proporcionales. Entonces:

$$\frac{CT}{AT} = \frac{TB}{CT}$$

de donde $CT^2 = AT \cdot TB$, o bien $CT = \sqrt{AT \cdot TB}$. Dicho de otra manera, la altura de un triángulo rectángulo sobre la hipotenusa es *media proporcional*, o *media geométrica*, entre los segmentos en que ésta queda dividida.

Sobre el triángulo anterior, también se verifica la igualdad:

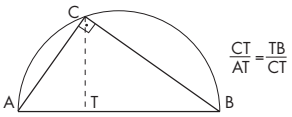
$$\frac{AT}{AC} = \frac{AC}{AB}$$

Dicho de otra manera, en un triángulo rectángulo uno de los catetos es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ésta.

Integración

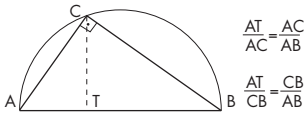
Teorema de la altura

La altura, relativa a la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es media proporcional entre los segmentos en que divide a esta.



Teorema del cateto

Cualquiera de los catetos de un triángulo rectángulo es media proporcional entre la hipotenusa y la proyección de éste sobre ella.

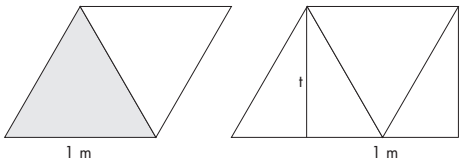


¿Qué ocurrirá si la lámina tiene forma de triángulo equilátero, de pentágono regular, o de cualquier otro polígono regular? ¿Cuál de ellas tendrá área máxima, manteniendo igual el perímetro?

3ª Orientación dirigida

Dibujar, a escala, un triángulo de 3 m de perímetro. Completar el dibujo con otro triángulo igual, hasta obtener un paralelogramo.

Se puede convertir este paralelogramo en un rectángulo, trasladando la mitad de uno de los triángulos al otro extremo del conjunto, como muestra la figura:



El rectángulo tiene 1 m de base. Utilizando el teorema de Pitágoras, y puesto que el triángulo trasladado es rectángulo, se puede calcular la altura, *t*, del rectángulo:

$$1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + t^2, \text{ luego } t^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2, \text{ y } t = \sqrt{\frac{3}{4}} = 0{,}87 \text{ m}$$

El área del rectángulo es el producto de la base por la altura; es decir, $1 \cdot 0{,}87 = 0{,}87$ m^2. El área del triángulo inicial será la mitad de la del rectángulo, es decir 0.435 m^2.

3ª Explicitación

Idem a Explicitación 1.

Resultado

En general, para calcular el área de un triángulo cualquiera, podemos convertirlo en un paralelogramo uniendo dos iguales, y éste en un rectángulo de igual área multiplicando las medidas de dos de sus lados diferentes. Si a una la llamamos *base* y a la otra *altura*, queda el área del rectágulo como el producto de la base por la altura.

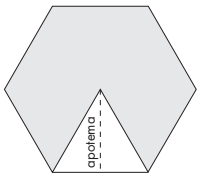
De este modo, *el área de un triángulo cualquiera será la mitad de la base por la altura.*

Se compara el área del triángulo equilátero con la del cuadrado, la de éste es mayor.

Vamos a seguir calculando áreas de otros polígonos regulares, ¿cómo hacerlo? Se puede utilizar una técnica llamada de la *triangulación*. Se organiza la siguiente orientación dirigida con esta idea.

4ª Orientación dirigida

Dibujar un hexágono regular y buscar su centro. Unirlo con los seis vértices del hexágono. ¿Cuántos triángulos se obtienen? ¿Son iguales? Si se conoce el área de uno de ellos, ¿se puede calcular el área del hexágono? ¿Cómo?



Una altura de cualquiera de estos triángulos es la apotema del hexágono y la base correspondiente, el lado. El área del triángulo será:

$$\text{Área del triángulo} = (\text{lado} \times \text{apotema})/2$$

$$\text{Área del hexágono} = 6 \times \text{Área del triángulo} =$$

$$= 6 \cdot (\text{lado} \times \text{apotema})/2$$

El perímetro del hexágono es la suma de los seis lados, con lo que la fórmula anterior quedaría:

$$\text{Área del hexágono} = (\text{perímetro} \times \text{apotema})/2$$

¿Cómo se calcularía el área de un octógono regular? ¿Y la de cualquier otro polígono regular?

4ª Explicitación

Idem a Explicitación 1.

¿Qué sucederá con el pentágono regular de 3 m de perímetro?

5ª Orientación dirigida

Observa que para calcular el área de cualquier polígono, se puede descomponer éste en triángulos y sumar las áreas de todos ellos.

Dibuja un pentágono regular de 3 m de perímetro. Busca su centro y únelo con los cinco vértices. Obtienes cinco triángulos isósceles iguales, cuya base mide 3/5 m. Calcula su área.

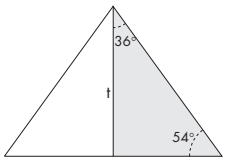
¿Cómo saber el valor de r?

Aparece un nuevo problema: calcular el área de un triángulo del que sólo conocemos un lado.

Una aplicación de la trigonometría es el cálculo del área de un triángulo isósceles del que conocemos la longitud del lado desigual y el ángulo opuesto.

En cada uno de los triángulos que resultaron al descomponer el pentágono regular el lado desigual mide 3/5 m, es decir 0,60 m, o 60 cm y su ángulo central, será de 360°/5 = 72°. El área de este triángulo será el producto de su base, 60 cm, por la altura, que desconocemos.

Dibujar este triángulo, utilizando una escala 1:10. Traza la altura relativa al lado desigual. De este modo obtienes un triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos miden 36° y 54° y el cateto menor 3 cm.



Utilizando, por ejemplo, el ángulo de 36° podemos escribir tan 36° = 3/*t*, siendo *t* la altura del triángulo. En la calculadora averiguamos el valor de tan 36° = 0,73, y sustituyendo tenemos que 0,73 = 3/*t*.

Si despejamos el valor de *h*, tenemos que *t* = 3/0,73, *t* = 4,2 cm, que deshaciendo la escala nos da una altura del triángulo de 42 cm. Ya que conocemos la altura, podemos calcular el área del triángulo:

Área de triángulo = (60 × 42)/2 = 1260 cm^2 = 0,126 m^2

Volvemos al problema inicial de calcular el área de un pentágono regular de 3 m de perímetro, para ello se puede multiplicar el área anterior por cinco triángulos iguales en los que se había descompuesto.

Área del pentágono = 0,63 m^2.

5ª Explicitación

Idem a Explicitación 1.

Comparar este resultado con las áreas calculadas antes del triángulo equilátero y del cuadrado y ordenarlas de menor a mayor, ¿qué se puede conjeturar acerca del área de estos polígonos regulares del mismo perímetro?

6ª Orientación dirigida

Siguiendo los mismos razonamientos utilizados en el caso del pentágono regular, completar la siguiente tabla.

Polígono	Perímetro	Longitud del lado	número de lados	Área
Triángulo equilátero	3 m	1 m	3	0,435 m^2
Cuadrado	3 m	0,75 m	4	0,56 m^2
Pentágono regular	3 m	0,60 m	5	0,63 m^2
Hexágono regular	3 m	0,50	6	
Heptágono regular	3 m			

A la vista de los resultados de la tabla, ¿qué se puede conjeturar?

6ª Explicitación

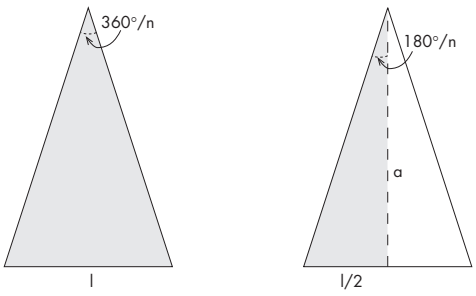
Idem a Explicitación 1.

Para generalizar, ¿cómo calcular el área de un polígono regular de *n* lados sabiendo que la longitud del lado es *l*?

7ª Orientación dirigida

Partimos de un polígono regular de *n* lados, y longitud del lado *l*.

1. Descomponerlo en *n* triángulos iguales.
2. Calcular el área de uno de ellos. Considerar como base el lado, *l*, del polígono y como altura la apotema, *a*.



Área del triángulo = (*l* × *a*)/2

3. Calcular la longitud de la apotema, *a*, utilizando la trigonometría.

$$\tan\frac{180°}{n} = \frac{l/2}{a} \text{ fi } a = \frac{l/2}{\tan\frac{180°}{n}} = \frac{l}{2\cdot\tan\frac{180°}{n}}$$

4. El área del triángulo es:

$$A_{triángulo} = \frac{l\cdot\frac{l}{2\cdot\tan\frac{180°}{n}}}{2} = \frac{l^2}{4\cdot\tan\frac{180°}{n}}$$

5. El área del polígono es *n* veces la del triángulo:

$$A_{polígono\ regular} = n\cdot\frac{l^2}{4\cdot\tan\frac{180°}{n}}$$

6. Ahora bien, lo que realmente permanece constante es el perímetro de cada polígono y no el valor del lado. Por tanto, hay que expresar el área en función del perímetro y del número de lados.

$$A_{polígono\ regular} = n\cdot\frac{(3/n)^2}{4\cdot\tan\frac{180°}{n}} = \frac{9}{4n\cdot\tan\frac{180°}{n}}$$

7. Haciendo uso de una calculadora científica, verificar los valores de las áreas de los polígonos que figuran en la tabla anterior.

8ª ¿Cuál es el área para *n* = 100? ¿Se refuerza la conjetura que se hizo al final de la 6ª orientación dirigida?

Observación para el profesorado:

Si se calcula el límite de la expresión del área cuando *n* tiende a infinito, resulta $9/4 \neq m^2$, que coincide con el área del círculo de perímetro igual a 3 m.

7ª Explicitación

Idem a Explicitación 1.

Resultado

Para un perímetro fijo, el polígono regular de mayor área es aquel que tiene mayor número de lados.

Orientación libre

Conjetura

Si el número de lados del polígono regular aumenta indefinidamente, la figura plana de mayor área, con un perímetro fijo será la circunferencia.

Otras posibilidades para orientación libre:

¿Por qué sólo se tratan polígonos regulares?, ¿qué ocurre con los irregulares?

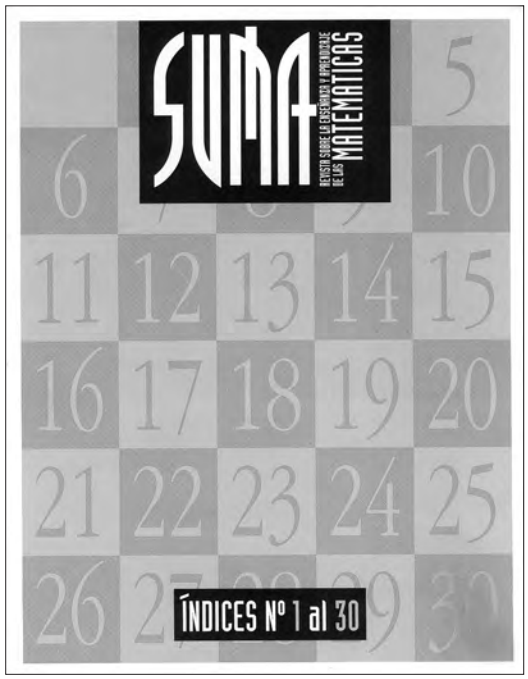
Estos aspectos los retomaremos con «otras» herramientas.

Se puede invertir la cuestión:

Para un área fija, ¿cuál es la figura de menor perímetro?

Quienes diseñaron la forma de las latas para bebidas lo sabían bien. Es decir, se plantearon el problema siguiente:

¿Qué forma ha de tener un recipiente de altura (ancho estándar de una mano) y volumen (33 cl) dados para que se gaste la menor cantidad de aluminio (material para la fabricación de latas



SUMA 36
febrero 2001, pp. 107-108

Radio y matemáticas

Fernando Corbalán

MATES Y MEDIOS

NO HAY QUE EMPEÑARSE mucho ni dar razonamientos sofisticados para estar de acuerdo que entre todos los Medios de Comunicación Social (MCS) el menos apropiado para servir de soporte a las matemáticas es la radio. Porque por sus ondas pueden transmitirse ideas y situaciones que tengan que ver con los números, pero en cuanto pasemos a la geometría, ¿de qué posibilidades dispondremos para visualizar situaciones planas y mucho peor si nos involucramos en las tres dimensiones? Desde luego, que el reto es complejo y quizás por eso mismo atractivo. Y recordando que durante años (que incluso podríamos extender a siglos) el soporte principal de la enseñanza (luego se supone que del aprendizaje) de las matemáticas ha sido la pizarra (que tampoco es que sea ni muy apropiado ni muy sugestivo) igual se podría hacer algo al respecto. Tal vez valdría la pena intentarlo.

Echando un vistazo al mundo que nos rodea, la verdad es que no hay demasiados ejemplos de la conexión radio-matemáticas. Yo conozco en algún lugar de Iberoamérica emisiones regulares de radio destinadas a la enseñanza a distancia de diversas materias (y también de matemáticas) que tienen vida propia. Hay que situarlas en un contexto de suplencia de clases presenciales, y se trata de clases orales iguales o muy parecidas a las tradicionales en las aulas, pero transmitidas por radio ante la imposibilidad de la presencia directa. Y, en cualquier caso, contando con un soporte escrito de complemento a lo que se transmite por las ondas. Algo difícil de trasladar a nuestro entorno.

Aquí el ejemplo más completo de programas regulares de radio sería la serie «Ingéniatelas con Thales» que los compañeros de Huelva llevaron a cabo a finales de los años ochenta, transmitida por Radio Cadena Española (ya desaparecida) y en las que se hacía un despliegue que involucraba a la propia emisora, a un colegio de EGB y a todos los posibles oyentes de ese u otros niveles que podían comunicarse con los estudios por teléfono. En ella se proponían problemas (tanto de tipo «académico» como «recreativo») que «en tiempo real» eran resueltos y emitidos por la emisora. Existen publicaciones de la Sociedad Thales con el título del programa que da completa información del mismo.

Pero lo cierto es que el tiempo pasó y (al menos que yo conozca) no hay ningún programa matemático en la radio actual (más allá de ocasionales entrevistas o presentaciones de libros). Ni incluso en una cadena como Radio 5 Todo Noticias que parece un soporte idóneo para ello, puesto que, además de ser pública y sin grandes pretensiones de audiencias masivas, alberga espacios cortos de los temas más diversos (inmobiliarios, científicos, del mar, del campo,...). Y a pesar de ofertas al respecto, tanto de quien suscribe como de otros compañeros, pero que no acaban de cuajar. Pienso que es una de las tareas que la Federación como tal tendría que tomar como un reto a alcanzar: si queremos que las matemáticas dejen de estar confinadas en el gueto escolar, si pretendemos una presencia de nuestra materia en la sociedad, siguiendo la línea del Año Mundial que acaba de finalizar, es urgente que aparezca con naturalidad en los MCS (que incluyen a la radio).

Algo sobre radio y matemáticas

Pero una vez lanzado el desafío, nos vamos a detener en las relaciones de la radio con las matemáticas. Porque es un medio que tiene gran incidencia en el alumnado, sobre todo, las llamadas radio-fórmulas musicales, compañero diario habitual de un elevado porcentaje de adolescentes y jóvenes. Lo que hace interesante *a priori* los temas relacionados con ellas.

Las radio fórmulas son una buena oportunidad para tratar en la práctica, y con temas interesantes para el alumnado, de la diferencia entre encuestas y opiniones particulares vestidas con un envoltorio de seriedad. En todas ellas se dan cada semana y se repiten cada día hasta la saciedad listas de discos destacados (sean «principales» o con otros nombres).¿Cómo se hacen y qué son? Son listas conformadas con la apariencia de encuestas pero que, en realidad, se hacen entre los «comentaristas» o «expertos» de la propia emisora: opiniones con apariencia de encuestas (de las que nunca se dice muy claro el método con el que se confeccionan).

Y una situación parecida sucede en los noticiarios de TV y de radio, sobre todo en temas locales o regionales, cuando hay algún hecho ante el que la ciudadanía se posiciona de formas distintas. Es frecuente hacer en esos casos entrevistas en la calle a varias personas que manifiestan opiniones contradictorias sobre el tema en cuestión, casi siempre en el mismo número. Con «informaciones» de ese tipo lo que parece suceder es que hay opiniones contrarias y aproximadamente el mismo número de personas están de acuerdo con cada una de ellas, algo que en absoluto permite deducir una práctica de ese tipo. Estamos de nuevo ante opiniones, no estadísticas. No es pues un procedimiento fiable.

No hay que sacar en consecuencia algo bastante extendido en la sociedad (que lo recoge en frases hechas del tipo «por medio de la estadística siempre sale lo que uno quiere» o «la estadística es la ciencia que hace que si yo me como dos bocadillos y tú ninguno cada uno hayamos comido un bocadillo»), porque incluso referidas a los MCS hay estudios estadísticos completamente serios, tales como los de audiencia de las diferentes cadenas de TV, de radio o de difusión de medios escritos (por la OJD –Oficina de Justificación de la Difusión– o el EGM –Estudio General de Medios–), de los que dependen, entre otros, los precios de la publicidad en esos medios (aunque de sus resultados hagan a veces las cadenas de radio y televisión unas interpretaciones sesgadas, comparando cosas diferentes y con manipulaciones de los datos que los hace parecer contradictorios, que habrá que mirar con cuidado, pero que es una cuestión que no trataremos ahora).

Así pues, por terminar, aunque por el momento no sea soporte de informaciones o comentarios estrictamente matemáticos, la radio puede ser un buen medio para ver las utilizaciones y limitaciones de la Estadística, y las falsificaciones que se hacen pasar por tales sin ser de ninguna fiabilidad.

SUMA

ENVÍO DE COLABORACIONES

Revista SUMA
ICE Universidad de Zaragoza
Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

SUMA 36
febrero 2001, pp. 109-111

Sopa polinómica

Grupo Alquerque*

JUEGOS

ESTE JUEGO está diseñado para que jueguen desde uno hasta cuatro jugadores, y cada grupo debe tener un tablero y dieciséis tarjetas con polinomios como las que vienen a continuación.

Tablero

$x - 1$	$x + 1$	$x - 2$	$2x + 3$	$1 - x$
$x - 1$	x	$x - 7$	$x - 2$	$x + 4$
$x + 2$	$5x + 2$	$x + 3$	$x + 1$	$x - 2$
$x + 6$	x	$x^2 + 1$	$3x - 2$	$2x^2 + 1$
$3x^2 + 2$	x	$-2x - 1$	$x + 1$	$-x^2 - 1$
$x - 3$	$4x - 1$	$x + 2$	$x - 2$	$3 - x$

* Los componentes del Grupo Alquerque de Sevilla son Juan Antonio Hans Martín (C.C. Santa María de los Reyes), José Muñoz Santonja (IES Macarena), Antonio Fernández-Aliseda Redondo (IES Camas), José Blanco García (IES Alcalá del Río) y Josefa M.ª Aldana Pérez (C.C. Inmaculado Corazón de María –Portaceli–).

Tarjetas

1 $x^3 - 2x^2 - x + 2$	2 $x^3 + 3x^2 + x + 3$
3 $2x^3 + x^2 - 7x - 6$	4 $x^3 - 3x + 2$
5 $x^3 + 2x^2 - 3x$	6 $6x^3 - 4x^2 + 3x - 2$
7 $-x^3 + 7x - 6$	8 $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
9 $4x^3 - x^2$	10 $5x^3 + 7x^2 + 2x$
11 $-2x^3 - 5x^2 - 2x$	12 $-2x^3 - 5x^2 - 23x + 6$
13 $3x^3 - 9x^2 + 2x - 6$	14 $-x^3 + 3x^2 + 4x - 12$
15 $3x^3 - 5x^2 - 4x + 4$	16 $x^3 + x$

Reglas del juego

1) Se barajan las 16 tarjetas y se colocan boca abajo sobre la mesa y cada jugador, por turno, elige una tarjeta hasta totalizar cuatro de ellas.
2) Los jugadores factorizan sus polinomios, y buscan, en la sopa de factores que aparece en el tablero, los factores consecutivos de cada factorización y los marcan.
3) Gana el jugador que consigue marcar primero las descomposiciones de sus cuatro polinomios, en un tiempo fijado de antemano. Si nadie lo ha conseguido será ganador el que más polinomios haya descompuesto.

Explicación del juego

Esta actividad se basa en el conocido pasatiempo de «Sopa de Letras», un juego clásico que puede readaptarse y ser utilizado en clase de Matemáticas. Según la clasificación utilizada por el profesor Fernando Corbalán pertenecería a los *Juegos de Procedimiento Conocido con Modificaciones*, pues sus reglas generales son conocidas por los alumnos fuera del ámbito escolar. En nuestra adaptación proponemos que los alumnos trabajen la factorización de polinomios por lo que las palabras se sustituyen por polinomios y las letras de la sopa por factores.

Los objetivos que pretendemos con este juego son los siguientes:

1) Factorizar polinomios de grado tres con dificultades de todo tipo (raíces reales simples, raíces dobles o triples, factores del tipo $(ax + b)$, factor x, factores $(x \pm a)$), usando factores comunes, el teorema del factor o la regla de Ruffini.
2) Comprobar que hay polinomios que no pueden factorizarse totalmente en factores de grado 1, razonando el porqué.
3) Trabajar el cálculo mental.
4) Trabajar la relación raíz (o solución o cero) de un polinomio con la de factor y viceversa.
5) Resolver ecuaciones.

La presentación de esta actividad permite modificaciones sobre la que hemos presentado. Así, los polinomios que aparecen en las tarjetas no tienen por qué ser todos de grado tres, se pueden colocar de distintos grados aunque entonces habría que modificar la regla 3), pues la suerte en la elección puede hacer que se necesite más tiempo según los polinomios que toquen. También se pueden modificar los polinomios no incluyendo factores de grado superior a uno.

Una dificultad que presenta el juego tal como está planteado son aquellos polinomios cuyos coeficientes principales son negativos, pues al descomponer en factores el alumno debe decidir en cuál de los tres tiene que incluir el signo menos y para ello tiene que fijarse muy bien en el tablero. Esto puede simplificarse poniendo todos los polinomios con coeficiente principal positivo.

La dinámica del juego también puede cambiarse, modificando las reglas de juego que podrían ser las siguientes:

1) Las tarjetas se barajan y se colocan boca abajo sobre la mesa.
2) El jugador que tiene el turno toma una tarjeta y descompone el polinomio, señalando los factores en la sopa. Si lo hace correctamente se anota un punto y pasa el turno al siguiente jugador y la tarjeta utilizada es eliminada del juego.

3) Si el jugador no sabe descomponer el polinomio pierde su turno y no se anota ningún punto. El jugador siguiente tiene la oportunidad de descomponer el polinomio ganando un punto extra por rebote. En caso de no hacerlo pasaría a su siguiente.

4) Si el jugador que le toca se equivoca en su descomposición y algún contrincante lo descubre, el jugador pierde su turno y el contrario se anota un punto por haber hecho correctamente la descomposición.

5) La partida acaba después de haber dado cuatro rondas, pasando por todos los jugadores. Gana quien tenga más puntuación.

También podría jugarse sin tarjetas, solamente utilizando el tablero. Jugarían dos alumnos y cada uno de ellos con el tablero por delante, construiría cuatro polinomios eligiendo dos o tres factores del tablero. Después los jugadores se intercambian los polinomios para factorizarlos y señalarlos en la sopa de factores. El primero que consiga señalar los cuatro polinomios gana la partida.

Con esta modalidad, antes de la factorización hay que repasar las operaciones de suma, resta y producto de polinomios.

Hay una última variante que podemos presentar. Una vez consolidada la factorización y conocidas las reglas del juego, éstas se pueden variar para trabajar el concepto de raíz (o solución o cero) de un polinomio, y relacionarlo con los factores de ese mismo polinomio, de modo que en vez de buscar en la sopa los factores del polinomio correspondiente se busquen sus raíces reales.

De esta forma, al descomponer por ejemplo el primer polinomio:

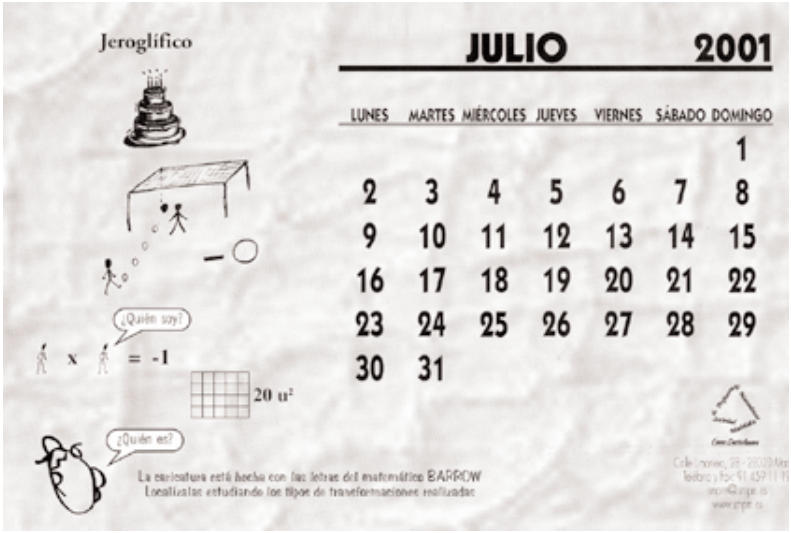
$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-2)$$

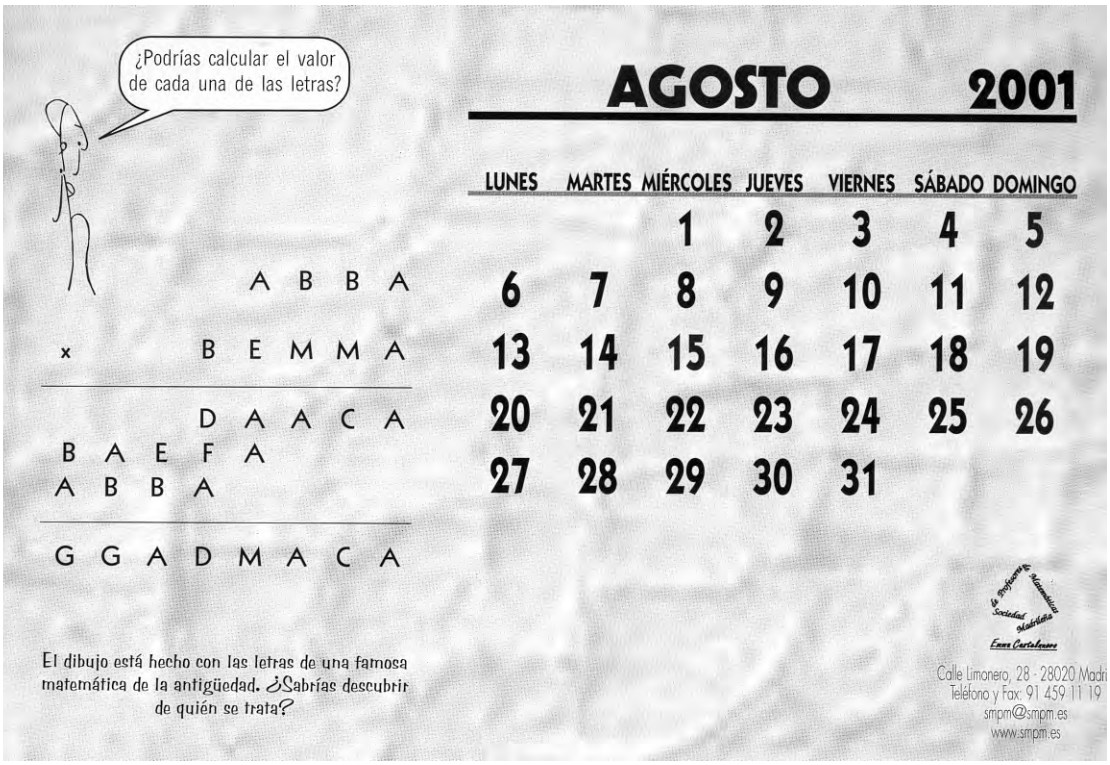
señalamos sus raíces en el siguiente tablero.

1	**–1**	**2**	**–3/2**	**1**
1	**0**	**7**	**2**	**–4**
–2	**–2/5**	**–3**	**–1**	**2**
–6	**0**	**–1**	**2/3**	**–1/2**
–2/3	**0**	**–1/2**	**–1**	**–1**
3	**1/4**	**–2**	**2**	**3**

Sopa de raíces

En esta modalidad hay polinomios, como el segundo, que sólo tienen una raíz real y, por lo tanto, sólo se marcaría una casilla en la sopa; y otros, como el noveno, con raíces múltiples donde se marcaría la misma raíz tantas veces como su multiplicidad.




¿Podrías calcular el valor de cada una de las letras?
A B B A
x B E M M A
D A A C A
B A E F A
A B B A
G G A D M A C A
El dibujo está hecho con las letras de una famosa matemática de la antigüedad. ¿Sabrías descubrir de quién se trata?
AGOSTO 2001
LUNES MARTES MIÉRCOLES JUEVES VIERNES SÁBADO DOMINGO
1 2 3 4 5
6 7 8 9 10 11 12
13 14 15 16 17 18 19
20 21 22 23 24 25 26
27 28 29 30 31
Calle Limonero, 28 - 28020 Madri
Teléfono y Fax: 91 459 11 19
smpm@smpm.es
www.smpm.es

Sopa de letras
B I N O M I O D E C O
I D W O I D C R O O R
L E X Y N A H S E T T
L A B O A T O B H A E
O L N M R O I A D Q M
N E O N E S Z P I A I
Z R G R A D O F E R R
J E M A U N I O N I E
Ñ C V Z E H R A Y S P
Q T L C F I D B N T L
B A S E J N A Ñ C A H
En esta sopa de letras hay 18 conceptos matemáticos. También se esconde el nombre de un matemático al tomar de cada fila y columna una única letra. Hay que tener en cuenta que las letras de AGRUPAR están contenidas en el nombre buscado y las de CISOIDE y ZENON no.
Theano
SEPTIEMBRE 2001
LUNES MARTES MIÉRCOLES JUEVES VIERNES SÁBADO DOMINGO
1 2
3 4 5 6 7 8 9
10 11 12 13 14 15 16
17 18 19 20 21 22 23
24 25 26 27 28 29 30
Calle Limonero, 28 - 28020 Mad
Teléfono y Fax: 91 459 11 19
smpm@smpm.es
www.smpm.es

SUMA 36
febrero 2001, pp. 113-115

Cabri e Internet

Antonio Pérez Sanz

RECURSOS EN INTERNET

LA APARICIÓN hace ya unos cuantos años del programa Cabri-Géomètre supuso para muchos profesores y profesoras la apertura de una ventana de esperanza en el camino de ver y de enseñar la Geometría de una forma diferente. El éxito de la filosofía del programa radicaba en la idea de poder contar con una pizarra electrónica en la que construir objetos geométricos tan habituales como trazar rectas, segmentos, perpendiculares, ángulos, triángulos, circunferencias, cónicas... y medir en forma directa longitudes, ángulos y áreas, se convertían en cosas tan simples como pulsar con el ratón en un icono.

Los principios fueron duros, el programa exigía contar con co-procesador matemático en los ordenadores, algo por otra parte poco frecuente en los centros educativos. Pero con el paso del tiempo las aulas empezaron a contar con ordenadores más potentes y algunos profesores se lanzaron a la aventura de explorar y explotar un recurso didáctico de primera magnitud.

El programa hubiese sido el sueño de los grandes geómetras de la historia desde Arquímedes y Apolonio hasta el prolífico Euler: ver los grandes teoremas geométricos del plano y verlos de forma dinámica.

Desde hace ya unos cuantos años, ¡cómo pasa el tiempo!, algunos profesores nos han deleitado en las JAEM y en las Jornadas de las distintas sociedades y en los curso de los CEP con aplicaciones visuales cada vez más interesantes, más vistosas y más complejas. De la simple construcción del baricentro, el ortocentro, el incentro y el circuncentro de un triángulo y poder comprobar la existencia real de la recta de Euler en cualquier triángulo –¡con nuestros propios ojos!– pasamos a las maravillosa e increíbles máquinas matemáticas de José Antonio Mora y Onofre Monzó, cuya página web ya comentamos en el número 33 de SUMA (http://teleline.terra.es/personal/joseantm). Su generosidad al brindarnos cientos de aplicaciones ya construidas con Cabri y susceptibles de ser «bajadas» y copiadas para ser utilizadas en el aula abrió una brecha en la resistencia del profesorado ante este tipo de recursos.

Pero Cabri tenía un problema nada desdeñable, su autismo, su dificultad de exportar sus gráficos y sus animaciones a otras aplicaciones más familiares para el usuario.

Y esto se notaba en las páginas web que trataban de este programa. A lo sumo en ellas podíamos ver una pantalla estática de una fase de la construcción o de la construcción final. Muchos estábamos esperando la herramienta para poder ver en Internet las increíbles animaciones generadas con Cabri.

Bueno, pues parece que el tiempo de espera toca a su fin.

Los creadores de CABRI han lanzado un proyecto, el Proyecto Cabri Java, que permite disfrutar de las aplicaciones con animaciones y la posibilidad de manipulación de los objetos geométricos a través de cualquier navegador de Internet mediante applets de Java.

A partir de ahora, cualquier usuario de Cabri puede traducir sus aplicaciones al lenguaje Java y colgarlas de su página web. La geometría en movimiento por fin en la red y al alcance de cualquiera.

La idea es simple: una aplicación llamada Cabri Web que traduce directamente un fichero de Cabri a un fichero HTML con un applet de Java incluido.

La aplicación está todavía en fase de pruebas y está disponible en la red en esta dirección:

http://www.cabri.net/cabrijava/

con manual incluido.

Y lo mejor es que no se requiere, como muchos estarán pensando, ser un experto en lenguaje JAVA, ni siquiera dominar el HTML. La aplicación se encarga de todo.

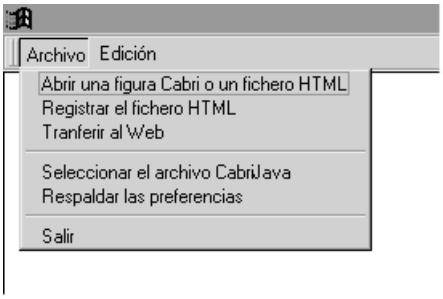
Para empezar a crearte tus propios applets necesitas bajarte de esta dirección dos aplicaciones, ambas versiones beta. Por un lado el traductor que se llama CabriWeb.jar, un fichero de 180 Kb y por otro la máquina virtual, un fichero de 144 Kb llamado CabriJava.jar que es el que te permitirá ver el fichero de Java dentro de una página web.

Por cierto, es aconsejable bajarse también el fichero CabriWeb.bat para ahorrarte problemas para arrancar la aplicación.

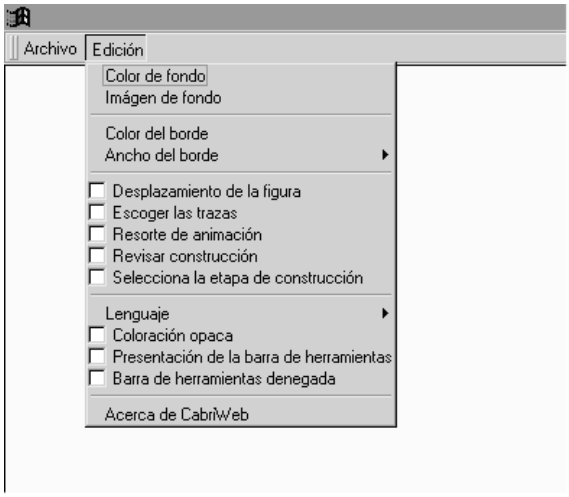
¡A trabajar!

Una vez con estas herramientas en tu ordenador empezar a trabajar es fácil.

1. Inicia CabriWeb.bat con el explorador de windows. Te arrancará el programa traductor Cabriweb.jar y te aparecerá una pantalla como esta, pero en francés (puedes cambiar el idioma al español con el menú Edición seleccionando el lenguaje):



   El menú edición te permitirá personalizar la página web que vas a crear, seleccionando el color o la imagen de fondo, el borde de la ventana de Java, las trazas, animaciones, etc.



   Si no tocas nada obtendrás un applet con las mismas características del fichero de Cabri con el que trabajes.

2. Vete al menú Archivo y pulsa la opción Abrir una figura Cabri que hayas construido previamente. Tendrás en tu pantalla una imagen como si hubieses abierto el programa Cabri.

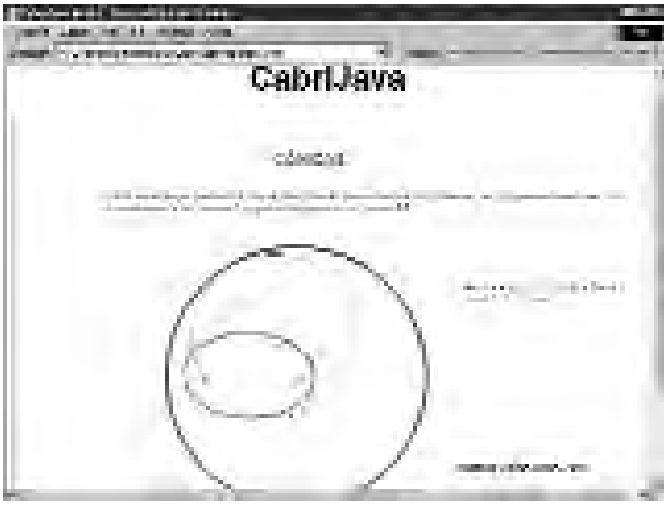
3. En este mismo menú tienes que seleccionar la opción Seleccionar el archivo CabriJava. Esta opción incrustará en el fichero HTML que vas a crear, la indicación de dónde ha de buscar la máquina para activar la aplicación Java.
4. Por último, pulsa la opción Registra el fichero HTML y ponle un nombre corto (de ocho letras o menos; no sé por qué, pero con nombres largos da problemas) y sálvalo en tu disco duro.

Y ya está, ya tienes creado un fichero HTML que podrás ver con Internet Explorer o Netscape.

Lo puedes colgar en tu página web o salvarlo en un disquete para utilizarlo en clase. Eso sí, ten cuidado de copiar también el motor CabriJava.jar en la misma ubicación que hayas definido antes. El resultado... una página parecida a la figura adjunta.

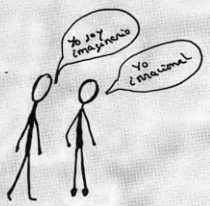
Pero con todas las animaciones que hayas definido y las principales herramientas de Cabri accesibles pulsando dos veces con el ratón en cualquier punto de la ventana del applet.

¡Ánimo y a poblar la red de aplicaciones dinámicas de geometría! Porque seguimos en la batalla de... «hacer visibles las matemáticas».



Jeroglífico

50



1/2

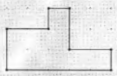
NOVIEMBRE 2001

LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES	SÁBADO	DOMINGO
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

Los trazos del dibujo son las letras de NEWTON. ¿podrías identificarlas?

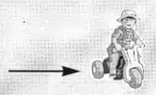
Calle Limonero, 28 - 28020 Mad
Teléfono y Fax: 91 459 11 19
smpm@smpm.es
www.smpm.es

Dibuja:
$y = -(x-5)^2$ si $x \in [5-\sqrt{2}, 5+\sqrt{2}]$
$y = -1$ si $x \in [4,6]$



16 u

Quita a un triángulo rectángulo la hipotenusa

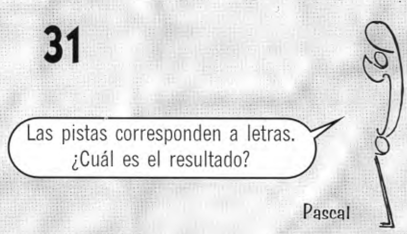


Equivalente a la letra Ω aplicándole un giro.

Pi, bit, dividir, Brill, lim, Bring, Gibbs, Ivins, Ricci, Smith,...

DICIEMBRE 2001

LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES	SÁBADO	DOMINGO
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						



Calle Limonero, 28 - 28020 Madr
Teléfono y Fax: 91 459 11 19
smpm@smpm.es
www.smpm.es

SUMA 36
febrero 2001, pp. 117-120

Leyendo entre líneas la Historia

Carlos Usón Villalba
Ángel Ramírez Martínez

DESDE LA HISTORIA

PARA QUÉ se hace la Historia[1]? ¿Por qué se estudia? En el comienzo de *La revolución permanente*, advierte Trotsky: «Se ha confirmado de nuevo que lo que aparentemente consiste en remover antiguas discusiones, habitualmente viene a satisfacer una necesidad social presente, de la cual no se tiene conciencia, y que en sí no tiene nada que ver con los debates pasados». Es decir: se recurre a la Historia porque se quiere interpretar el presente y programar el futuro. Pero si la motivación es ésta, habría que decir más bien «se construye la Historia» en lugar de «se acude a la Historia». O, si se quiere, para ser dialécticos, una síntesis de las dos: a partir de un incierto pasado se elabora una reconstrucción racional que va variando con el tiempo

La decepción egipcia

La tradicional tendencia francesa al enciclopedismo tiene una bonita plasmación en la *Historia general de las ciencias*, dirigida por René Taton. Los treinta años transcurridos desde la primera edición no han mermado su interés para un primer acercamiento a un período histórico concreto. En el capítulo dedicado a la matemática de «una de las civilizaciones más plenas de la historia» (*sic*), la egipcia, encontramos la siguiente valoración:

> Basta leer los problemas tratados por los escribas egipcios para comprender la decepción que experimenta un matemático moderno ante tal ciencia. Y la decepción es tanto mayor cuanto que el título (está hablando del papiro de Ahmes[2]) anuncia en exergo: «Reglas para estudiar la naturaleza y para comprender todo lo que existe, todo misterio, todo secreto.

Un párrafo sin desperdicio. En unas pocas líneas han quedado recogidos varios de los tópicos desde los que se observa la evolución de las matemáticas en el pasado.

1) Olvidémonos de dos obviedades que no suelen ser tenidas en cuenta:

a) Nunca tendremos seguridad de que nos ha llegado la mejor producción de cada época.

b) Han tenido más probabilidad de perdurar las obras dedicadas a la docencia que a la investigación pura, puesto que han sido, son y serán más numerosas.

Dejémoslas de lado y preguntémonos si tenemos derecho a decepcionarnos. Derecho «histórico», queremos decir.

Tenemos derecho, por ejemplo, a deplorar la pintura del siglo XIX si nos parece peor que la del XX, pero sería ridículo exigir hoy a los artistas del XIX que hubieran pintado de manera distinta, según los cánones artísticos e ideológicos de un arte más actual, porque no habrían podido hacerlo. Salvo en cuestiones metafísicas, el mismo hecho de plantearse una pregunta supone, al menos, cierta confianza en la existencia de una respuesta. Dicho de otra forma: los seres humanos nos planteamos en cada momento aquellos problemas que podemos empezar a resolver[3] (el final del camino puede quedar aún muy lejos).

Nuestro derecho, por tanto, se limita a valorar personalmente de acuerdo a nuestros gustos y preferencias; no es extensible a opinar desde la lejanía, desde la autoridad que concedemos a los modelos que hoy consideramos válidos, sobre lo que en matemáticas debería haber sido hecho.

Nuestros gustos son gustos actuales. Los compartimos con un subconjunto del conjunto de personas que se dedican hoy a las matemáticas. Es decir: como también nos advertiría con toda probabilidad Trotsky, nuestros gustos están condicionados históricamente. Los griegos, por ejemplo, desde Heródoto a Aristóteles, ensalzaron a los egipcios (¿Nos decepcionamos de los griegos por no haberse decepcionado?). La ciencia árabe, minusvalorada por algunos historiadores en el siglo XX, fue codiciada por sectores intelectuales del siglo XII.

La consciencia de este condicionamiento no implica un relativismo estético o moral paralizantes, pero sí el mantenimiento de una cierta perspectiva reductora de la soberbia.

2) ¿Qué interpretación damos a la expresión «matemático moderno»? En 1966 podría ser equivalente a matemático bourbakista. La vigencia de este enfoque explicaría claramente la decepción.

El estructuralismo y el formalismo ignoran la historia. No les interesa la vida tal cual ha transcurrido y transcurre, el proceso de creación personal y colectivo que la impulsa, que evita su estancamiento. Puesto que lo importante es la ordenación teórica de objetos teóricos, la Historia sólo es aceptable en la medida en que se ajuste a ese juego platónico. Desde esta perspectiva Descartes se habría equivocado, porque si en vez de proponer su geometría analítica hubiera inventado el álgebra lineal, nos habría hecho ganar dos siglos.

3) La decepción ante el título del papiro de Ahmes es todo un patético ejemplo de incomprensión hacia el pasado. Incluso en la Edad Media y en el Renacimiento las obras de matemáticas mantienen alguna resonancia esotérica en sus títulos. ¿No es ello una muestra entrañable de la sorpresa que el mundo de los números y de las figuras ha producido[4] a los seres humanos?

¿Cómo no maravillarse (¡atención!, queremos decir «sentir la maravilla») ante una relación que aparece continuamente, plasmada en casos particulares, si se intentan hacer operaciones con fracciones al estilo egipcio: $1 - (1/2 + 1/4 + 1/8 + ... + 1/2^n) = 1/2^n$? Nada extraño desde un punto de vista algorítmico, por supuesto, pero ¡qué capacidad de evocación tiene! Podemos interpretar como conservador el título del papiro de Ahmes, pero también encierra una ingenua sorpresa y el deseo, inherente a nuestra naturaleza, de encontrar la solución definitiva, la luz que nos permita controlar el azar.

4) Pero la incomprensión es más profunda: no afecta sólo al aspecto formal del título de la obra sino que manifiesta una fuerte falta de respeto a los tanteos, las dudas, la lentitud de los comienzos. Es el empeño en avanzar con rapidez lo que frustra al historiador. Se ha dicho muchas veces que el conocimiento de la Historia es una buena ayuda para comprender el porqué de los bloqueos que aparecen en los procesos de enseñanza-aprendizaje. ¿Por qué no tomar en cuenta el recíproco de esta afirmación y utilizar lo mucho que sabemos sobre lo que cuesta (también a nosotros) construir conocimiento propio y conocimiento colectivo para ponderar la valoración sobre el pasado?

5) En relación con lo anterior, resulta inevitable dejar que fluya por la mente una duda: ¿han hecho Matemáticas, antes de escribir Historia, los historiadores de las matemáticas? ¿Han sentido el placer de un proceso creativo en matemáticas? Sentir no quiere decir comprender racionalmente cómo se produce, sino vibrar con él de manera que deje una huella permanente que actúe como referencia interpretativa.

Exigir una determinada metodología y una determinada presentación a las obras de matemáticas no quiere decir que se comprendan los entresijos de la creación en matemáticas. Puede ser simplemente una muestra de acrítica aceptación de la ideología oficial. Resulta sorprendente encontrar todavía popes universitarios que afirman que en matemáticas se crea deductivamente, encadenando axiomas, teoremas y corolarios.

¿Existe creatividad en la obra de al-Khwarizmi?

En realidad, no es necesario personalizar la pregunta. La aportación de los matemáticos islámicos medievales ha

sido habitualmente menospreciada, sobre todo en la literatura anglosajona. Sin llegar a las destempladas ironías del ensalzado Bell (1949)[5], se les suele acusar, velada o explícitamente, de que no eran «suelo fértil»[6], lo que habría determinado su papel histórico de traductores y transmisores de las obras griegas a territorios genéticamente mejor abonados. Más respetuosa es la historiografía francesa[7], a la que se puede recurrir no sólo para buscar enfoques más democráticos, sino además para comprobar que la nómina de matemáticos árabes en la Edad Media no se reduce a un par de nombres, sino que es increíblemente amplia e interesante.

No vamos a entrar a discutir contra argumentos tan toscos. Bell, por lo demás, se muestra destemplado (y de forma muy agria) casi siempre. Nos interesa más continuar las reflexiones anteriores. Hemos observados tres críticas a la obra de al-Khwarizmi:

a) Su álgebra es retórica y no emplea simbolismos. Una actitud imperdonable porque Diofanto ya había dado un paso en esa dirección.

b) No inventó nada nuevo, porque los babilonios ya habían avanzado con seguridad en la resolución de las ecuaciones de 2.° grado.

c) Su obra sobre álgebra es un conjunto de «recetas, reglas, fórmulas y procedimientos» (Paulos, 1993).

6) El primer simbolismo acabado del que tenemos noticia hasta ahora es el de al-Qalasadi (Baza, s. XV), un siglo antes que Viète y Descartes. En cualquier caso, seis siglos después de al-Khwarizmi. Es cierto que no se pide a este último que saltara esos seiscientos años, sino sólo que no retrocediera respecto a Diofanto. Boyer (1986), más moderado, considera improbable que llegara a conocer la obra del alejandrino, pero piensa que no aprovechó los intentos de notación sincopada del hindú Brahmagupta.

Mil años después las exigencias parecen de nuevo fuera de lugar. Quien avanza en una dirección tiene unas preocupaciones prioritarias que le hacen desatender otras. ¿Censuraremos hoy a Fourier por sus apresuradas (desde el punto de vista del rigor) teorías? ¿Por qué no pensar que el trabajo de sistematización de las reglas del álgebra por al-Khuwarizmi abrió la puerta que definitivamente llevaría al lenguaje simbólico? ¡Qué afición a encorsetar en procesos rectilíneos los avances, individuales y colectivos! El pensamiento es errático en sus tareas y se ve muy motivado por la necesidad. ¿No es razonable que se busque un simbolismo cuando hace falta y no antes?

Sólo existe la línea recta en las ideológicas interpretaciones de los censores históricos del estructuralismo y del formalismo, para los cuales la Historia debe estar al servicio de una matemática siempre en progresivo desarrollo hacia la dirección por ellos marcada.

7) Más razonable nos parece censurar a al-Khwarizmi de conservadurismo por no haber sido coherente con su divulgación del sistema numérico hindú. Todos los números de su libro sobre álgebra aparecen escritos, redactados en árabe. En cualquier caso, no conviene perder de vista que la sociedad musulmana medieval, como la cristiana, opuso mucha resistencia a la difusión del nuevo sistema numérico (Ifrah, 1997) y recordar cómo la Historia le ha perdonado sin problemas a Gauss haber mantenido en secreto sus avances en geometría no euclídea, por miedo a que pudieran suscitar reacciones adversas.

8) Desde las más antiguas tablillas de arcilla conocidas hasta al-Khwarizmi hay tres milenios. Desde las más recientes, mil quinientos años. ¿Se habría inventado la Arqueología en el siglo IX? ¿Admitimos, negada esta posibilidad, que la tradición matemática se habría mantenido por algún extraño procedimiento? Lo que parece muy probable es que convivieran en la época sistemas artesanales de resolución de problemas, como la regla de la doble falsa posición (se sabe que los chinos la manejaban desde épocas muy antiguas), con los procedimientos algebraicos que empezarían a abrirse paso. La creatividad de al-Khwarizmi (suponiendo que fue el primero), estaría en haber optado, con acierto, por lo que consideró métodos generales de trabajo. Su libro sobre álgebra no contiene ni una sola referencia a la falsa posición[8]. Ahí reside, nos parece, su modernidad: en haber sabido marcar un nuevo camino.

9) El modelo «recetario» para la transmisión del conocimiento matemático tiene una tradición antiquísima. No sería difícil conjeturar explicaciones variadas que expliquen su éxito. Más perverso es que haya pervivido en parte, como puede verse en muchos libros de texto. En cualquier caso es absolutamente comprensible que desagrade a un matemático actual. Se nos ocurren dos observaciones sobre esta cuestión.

En primer lugar, la exposición al estilo euclídeo, que es lo que se demanda con la crítica, tiene una componente fuerte de recetario. No se discute que sea preferible; sólo advertimos contra ella, aunque sea a riesgo de violentar mentes más prestigiadas que las nuestras. Traemos a Lakatos (1978) en nuestro apoyo.

Desde un punto de vista histórico, hay que recordar que el modelo «recetario» tuvo un amplio desarrollo en la Edad Media para múltiples temas, tanto en la sociedad musulmana como en la cristiana. Las recopilaciones de cuentecillos con finalidad moral[9] están llenas de sucesiones de dichos enlazados, configurando una forma de transmisión de conocimientos que parece acorde con unos siglos que sustentaron su sabiduría en la Revelación. Todavía algunas de las aritméticas publicadas en España en el s. XVI siguen el mismo modelo. Nos preguntamos en definitiva, repitiéndonos, si tiene sentido decepcionarse históricamente

con un autor (salvamos de nuevo, por supuesto, el gusto personal) porque se exprese en los términos de su época.

Hacia una mayor tolerancia en la interpretación de la Historia

El genio individual puede ser mayor en unos que en otros, pero el momento histórico es quien define el campo de juego en el que se manifestará. El individuo, por su parte, puede contribuir con su trabajo a la modificación de ese marco. La obra de al-Khwarizmi, al margen de cómo está redactada, lo hizo, y por ello su presencia en los manuales de historia. Pero nadie escapa a los condicionantes de su tiempo. ¿Acaso es imaginable Gauss en el s. IX? ¿Cuántas personas no han podido desarrollar mayores empresas por las condiciones ambientales?

Así pues, la creatividad está condicionada históricamente. También lo está, por la ideología dominante en cada época, el concepto que se tiene de ella. En la nuestra ha primado una visión de las matemáticas como algo independiente de la realidad, autosuficientes, autojustificadas en su persecución de mundos perfectos del limbo platónico. En consecuencia, los manuales dejan entrever interpretaciones que valoran por encima de otras cosas el correcto encauzamiento en esa dirección, penalizando las dudas, menospreciando los rodeos. La teoría por encima de la vida, por encima de la aventura, individual y colectiva. ¿Contribuirá el auge actual de la matemática aplicada a modificar este enfoque?

Obras citadas

BEL, E.T. (1949): *Historia de las matemáticas*, FCE.

BOYER, C.B. (1986): *Historia de la matemática*, Alianza.

IFRAH, G. (1997): *Historia universal de las cifras*, Espasa.

JOSEPH, G.G. (1996): *La cresta del pavo real*, Pirámide.

LAKATOS, I. (1978): *Pruebas y refutaciones*, Alianza.

PAULOS, J.A. (1993): *Más allá de los números*, Tusquets.

TATON, R. (director) (1971): *Historia general de las ciencias (tomo I)*, Destino.

Notas

1 «Historia» es una palabra que admite variados matices en su significado. Un aspecto de esta polisemia es la marcada diferencia que ofrece según se escriba con mayúscula o con minúscula: desde la magnificencia del pasado, sucedido o escrito, hasta la sencillez de un cuento. Las dudas que sentimos nos han hecho elegir en muchas ocasiones la mayúscula en este escrito.

2 Más nombrado en los textos como papiro de Rhind, en una muestra de hasta donde llega el «democrático» enfoque eurocéntrico de la Historia. Aunque se conoce el nombre del redactor de la obra, se usa para referirse a ella el del comprador de la misma 3500 años después.

3 Dice Chomsky que caracteriza al ser humano su capacidad para plantearse problemas para los que no tiene respuesta. Obviamente nos referimos a problemas científicos, que son más sencillos.

4 Ha producido, produce y (esperemos) seguirá produciendo. Basta observar las reacciones de estudiantes de Primaria y Secundaria cuando el Ángel de los Números no está encerrado en las pizarras, como lamentaba Alberti, y sobrevuela libremente el aula.

5 «Además de sembrar para siglos la fértil semilla de la guerra, trajeron consigo...»; «...nunca se incluyó entre los conocimientos que había de tener un caballero, y ni siquiera un erudito, el dominio del árabe...».

6 Véase la cita de Kline recogida por G. Gheverghese Joseph (1996, pág. 28).

7 La misma *Historia General de las Ciencias*, de R. Taton, por ejemplo.

8 Que sí aparece todavía en algunos textos italianos del Renacimiento.

9 Véase, por ejemplo, la *Disciplina Clericalis* de Pedro Alfonso.

SUMA

SUSCRIPCIONES

Particulares: 3.500 pts. (3 números)
Centros: 5.000 pts. (3 números)
Número suelto: 1.700 pts.

Revista SUMA
ICE Universidad de Zaragoza. c/ Pedro Cerbuna, 12. 50009 ZARAGOZA
Fax: 976 76 13 45.
E-mail: suma@public.ibercaja.es

Se ruega a los suscriptores y a los socios de la Federación que para cualquier comunicación sobre envío de ejemplares atrasados, reclamaciones, suscripciones... se haga por correo, fax o mail. No se podrán atender este tipo de comunicaciones por teléfono.

SUMA 36
febrero 2001

La matemática griega

RECENSIONES

CIENTÍFICOS GRIEGOS
Francisco Vera (Recopilación, estudio preliminar, preámbulos y notas)
2 volúmenes
Editorial Aguilar
Madrid, 1970
998+1190 páginas

Pocas veces una obra, como *Científicos Griegos*, que se define a sí misma como una antología, extracto de las aportaciones más significativas de la ciencia griega, produce en el lector la sensación de tener entre las manos un verdadero mirador desde el que se observa, si no con la nitidez del primer plano sí con la visión que proporciona un punto desde el que se puede apreciar la enorme aportación de la ciencia griega a la cultura occidental y a la estructura del pensamiento científico actual.

La obra se ocupa de toda la ciencia griega, ya que recoge obras, además de las de los grandes matemáticos, que es lo que aquí nos interesa, las de Hipócrates, Teofrasto, Nicandro,

Dioscórides o Galeno, Platón, Aristóteles. De este modo, aparecen textos de médicos y naturalistas junto a textos de los grandes filósofos. Francisco Vera ha seleccionado de la obra inmensa de la ciencia griega textos en los que estos autores manifiestan sus opiniones sobre las matemáticas en general, la geometría, la aritmética, la astronomía, la cosmografía, etc.

Es un hecho destacable que las obras seleccionadas de los matemáticos, aparecen, muchas veces, completas, con multitud de anotaciones realizadas en lenguaje algebraico que facilitan al lector actual, en gran medida, la comprensión del razonamiento geométrico de la matemática griega.

Francisco Vera ha seleccionado los escritos que mejor definen el pensamiento científico griego desde el siglo VI antes de Jesucristo, en el que aparecieron los primeros naturalistas jonios, hasta el siglo V de nuestra era, en el que la ciencia griega se diluyó entre el practicismo romano, que comenzó a erosionarla desde el momento en que Egipto, y Alejandría con él, se convirtió en una colonia del Imperio de Augusto.

Científicos Griegos es una antología en cuanto que selecciona veintitrés autores y, de ellos, las obras y fragmentos que mejor revelan sus ideas y el quehacer científico en Grecia y permiten conocer el legado que de ella hemos recibido. No obstante, por poner el ejemplo de los *Elementos* de Euclides, la selección realizada por Francisco Vera es muy amplia, ya que aparecen todas las proposiciones de los *Elementos* que se recoge en una edición de los mismos, tan prestigiosa como la *Opera Omnia* de J.L Heiberg y M. Menge (1883-1916), aunque omite la demostración de unas pocas proposiciones ya que considera que el método empleado en su prueba es el mismo que el utilizado en alguna de las anteriores (tal es el caso de las proposiciones entre otras 61-65, 67-69, 80-84, 92-95,98-102, 105-107, 112-115 del libro X).

No es extraño que en una antología se trate de aligerar un poco la enorme dificultad conceptual de un libro que, como el libro X de los *Elementos* de Euclides ha sido considerado la *cruz de los matemáticos* desde que así lo denominó Simon Stevin (1548-1620). Este libro contiene la teoría generalizada de la proporción, el algoritmo de Euclides y los inconmensurables, el método de exhausción, y llega a reconocer hasta trece líneas irracionales distintas.

La figura de Francisco Vera se ha visto reconocida, en el año 2000, año mundial de las matemáticas y su obra, como matemático, historiador y filósofo de la ciencia, está siendo cada vez más valorada. En el año 2000 se ha publicado una excelente edición facsímil de su obra *Los historiadores de la matemática española* (1935), editada por Ricardo Luengo y José M. Cobos y publicada por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas con el patrocinio del Consejo Social de la Universidad de Extremadura. En el prólogo de este libro los editores hacen una biografía de Vera y muestran una lista exhaustiva de sus libros y artículos publicados y hasta una serie de escritos inéditos. Del prólogo de esta obra hemos extraído una buena parte de sus datos biográficos.

Francisco Vera ha seleccionado los escritos que mejor definen el pensamiento científico griego desde el siglo VI antes de Jesucristo, en el que aparecieron los primeros naturalistas jonios, hasta el siglo V de nuestra era, en el que la ciencia griega se diluyó entre el practicismo romano, que comenzó a erosionarla desde el momento en que Egipto, y Alejandría con él, se convirtió en una colonia del Imperio de Augusto.

Biografía de Francisco Vera

Francisco Vera y Fernández de Córdoba nació en Alconchel (Badajoz), en 1888, fue uno de los historiadores de la ciencia más importantes que ha dado España y fue un científico y divulgador de gran relieve en el panorama de la ciencia española del momento. A lo largo de su vida escribió cerca de setenta obras relacionadas con las Matemáticas, la Historia de la Ciencia y Filosofía de la Ciencia. Prueba de la importancia y prestigio que llegó a alcanzar es que formó parte del comité de recepción de Einstein, cuando éste visitó España en el año 1923. Francisco Vera, que, además de matemático, era redactor del periódico *El Liberal*, escribió la crónica periodística de las tres conferencias que pronunció en España el sabio alemán.

Con la caída de la República en España se exilió a Francia para luego pasar a la República Dominicana, después a Colombia y, finalmente, a Argentina donde murió el 31 de julio de 1967. Francisco Vera fue un reconocido republicano, masón y teósofo (por influencia de Mario Rosso de Luna) y fue condenado a muerte, entre otras causas, por haber escrito el código criptográfico del ejercito leal a la República. Su estancia en Argentina coincidió con la estancia de Julio Rey Pastor (1988-1962). Dos personajes importantes de la ciencia española del momento coincidieron en el país sudamericano y entre los dos hubo muy pocas relaciones.

Julio Rey Pastor era, seguramente, el matemático más prestigioso en España y en Argentina. Cuando llegó Francisco Vera a Buenos Aires en el año 1943, Rey Pastor, afincado en ese país desde 1924, con prestigio conseguido por ser el máximo exponente de la matemática argentina, a través de sus magníficos libros y por la hélade de discípulos, ya sabios e influyentes en ambos países. José Babini, Juan Blaquier, Juan Carlos Vignaux, Sixto Ríos, Ricardo San Juan, Luis Santaló o Manuel Balanzat forman parte de esa larga lista de discípulos.

Se ha insinuado que entre Julio Rey Pastor y Francisco Vera existieron desavenencias, pero Cobos Bueno y Luengo González afir-

man en el prólogo de la obra *Historiadores de la Matemática Española* que entre los dos siempre existió un respeto mutuo como lo atestiguan diversos testimonios dejados por los propios autores. No obstante, hubo dos hechos que los mantuvieron distantes que fueron, por una parte, el discurso inaugural del curso 1913 en la Universidad de Oviedo en el que el matemático riojano cuestionaba la existencia de matemáticos en la historia de España, opinión que no era compartida por Vera, y, por otra, el apoyo que Rey Pastor prestó a la dictadura de Primo de Rivera.

La posición ante la política y una posición enfrentada ante a una polémica que se suscitó a finales del siglo XVIII, que se prolongó a lo largo del siglo XIX y que se ha conocido como la *Polémica de la Ciencia Española* marcó distancias entre estos dos españoles en Argentina. La *Polémica de la Ciencia Española* dividió al mundo cultural y científico español entre los que pensaban que España no había aportado nada a la ciencia universal y los que destacaban el gran número de aportaciones de los españoles a la ciencia y a la cultura. En todo caso no deja de resultar, cuando menos en principio, chocante la postura de ambos frente a la ciencia española: Julio Rey Pastor, que apreciaba el régimen político español de cualquier tipo (Primo de Rivera, República, franquismo) y cuya estancia en Argentina fue voluntaria, no apreciara la ciencia española, mientras que un exiliado obligado por motivos políticos, siguiera haciendo patria fuera de su país destacando la labor de los científicos españoles.

La posición ante la política y una posición enfrentada ante una polémica que se suscitó a finales del siglo XVIII, que se prolongó a lo largo del siglo XIX y que se ha conocido como la Polémica de la Ciencia Española marcó distancias entre estos dos españoles [Vera y Rey Pastor] en Argentina.

Francisco Vera destacaba la actividad científica de los investigadores españoles del pasado y del presente, tal es el caso del elogio que le hizo a José María Plans y Freyre (1878-1934) en su crónica del *Liberal* a la tercera conferencia de Einstein:

> El Sr. Plans ha estudiado la famosa y ya popular teoría desde que Einstein publicó sus primeros trabajos en 1905 y ha dirigido los trabajos de investigación de sus discípulos en el Seminario Matemático para redactar varias tesis doctorales sobre Relatividad. Los que creen que en España se reciben las noticias con lamentable retraso, poniendo las tristes pinceladas de su pesimismo sobre el resurgimiento de la ciencia española, tienen en el Sr. Plans, hombre tan modesto como sabio, el ejemplo vivo de que en la silenciosa oscuridad luminosa de los gabinetes de estudio de los catedráticos que no bullen, que no gritan, que viven en voz baja la vida de la populachería, se trabaja, como trabaja el Sr. Plans, por el porvenir de esta España científica tan amada y tan mal comprendida.

De este modo en 1923 hacía alusión a la *Polémica de la Ciencia Española* y destacaba el buen momento de la ciencia en nuestro país.

Los científicos griegos

Realizar un comentario que recoja la opinión sobre cada uno de los aspectos que esta obra ofrece al lector es imposible a no ser que se quiera hacer un resumen o un comentario extenso y, para hacer eso, saldría el lector ganando leyéndose el libro entero, que, por otra parte, le recomiendo ardientemente.

Comienza Vera con un estudio preliminar en el que los períodos históricos tradicionales en que se divide la historia de Grecia, helénico, helenístico y grecorromano no le parecen adecuados para encuadrar la historia de la ciencia. Para un encuadre más adecuado la divide en seis partes también arbitraria, que se solapan en el tiempo, pero permiten distinguir localizaciones geográficas y presentar una visión, según Vera, más acorde para localizar, en el tiempo y en el espacio, el pensamiento científico griego. Los seis períodos son:

- *Período Jónico*. Período en el que florecieron, con Thales en Mileto, Heráclito y Anaxágoras en Efeso y en Cnido y Cos, una serie de doctrinas médicas que unificó la escuela hipocrática. Acaba este período hacia el 494 a. de C., fecha en que Mileto cayó en poder de Darío.
- *La Magna Grecia*. Apareció en Sicilia y el sur de Italia. Allí surgieron Pitágoras, hacia el 530, Parménides, hacia el 500, apareció el atomismo con Leucipo y Demócrito y surgieron las paradojas que suscitó la aparición del infinito cuando las cotejó Zenón de Elea con la teoría atómica
- *La época de los sofistas*. Se extiende desde mediados del siglo V hasta el siglo III, marcada por la figura de Sócrates. En esa época los sofistas perfeccionaron los métodos de argumentación y, por ejemplo, Hipócrates de Quíos escribió los primeros *Elementos de geometría* que habían de culminar en los *Elementos* de Euclides.
- *La escuela de Atenas:* Desde el siglo V, con la Academia de Platón, hasta el año 300 en que acaba el liceo de Aristóteles. Marcada por las aportaciones geniales de Platón y Aristóteles.
- *Período Alejandrino:* Desde el siglo III a. de C. hasta el siglo I d. C. es la época de mayor brillantez científica y está representada por las obras de Euclides, Arquímedes, Eratóstenes, Hiparco y Erasístrato.
- *Época de la decadencia:* Se extiende desde la época de Augusto hasta que el califa Omar quemó los libros de la Biblioteca de Alejandría en 641. En esta época florecieron Diofanto, Pappo y Galeno.

ÍNDICE

Tomo I

Explicación previa

Estudio preliminar (Francisco Vera)

- ***Período jónico.***
- ***La Magna Grecia.***
- ***Época de los sofistas.***
- ***Las escuelas de Atenas.***
- ***Período alejandrino.***
- ***Época de decadencia.***

Bibliografía

Pitágoras
- La Década.
- Onomatomancia aritmética.
- Juicio entre adversarios.
- Versos dorados.

Hipócrates
- Juramento hipocrático.
- Aforismos.
- Sobre la medicina antigua.

Demócrito
- Cosmología.
- Matemática.
- Astronomía.
- Meteorología.
- Biología.
- Las sensaciones.
- Las cualidades sensibles.

Platón
- Teoría de las ideas.
- Aritmología pitagórica.
- El número nupcial.
- Aritmética.
- Geometría.
- Astronomía.
- Música.
- La ciencia del «Teeteto».
- Cosmología, Física y Biología del «Timeo».

Aristóteles
- Naturaleza de la ciencia.
- Matemática.
- Astronomía.
- Cosmología.
- Física.
- Historia de los animales.
- De la generación de los animales.
- De los meteoros.

Teofrasto
- Clasificación de las Plantas.
- Plantas de hojas perennes y hojas caducas.
- División de las plantas según su germinación.
- Contra el finalismo.
- Influencias sobre la maduración.
- El fuego.

Eudemo de Rodas
- Cuadratura de las lúnulas.

Euclides
- Elementos de Geometría.

Aristarco
- Tamaños y distancias del Sol y de la Luna.
- Comentario de Pappo.

Tomo II

Arquímedes
- Sobre la esfera y el cilindro.
- Medida del círculo.
- Sobre conoides y esferoides.
- Sobre las espirales.
- Del equilibrio de los planos o de sus centros de gravedad.
- El Arenario.
- El problema de los bueyes.
- De la cuadratura y la parábola.
- Sobre los cuerpos flotantes.
- El método.

Apolonio de Pérgamo
- Las cónicas.

Eratóstenes
- Medida de la Tierra.
- Duplicación del cubo.

Nicandro
- Zeríaca.
- Alexifármaca (medicamentos preventivos o profiláctica).

Hiparco
- Posición de algunas estrellas.
- Cálculo de la hora nocturna.
- Teoría de los planetas.

Teodosio de Trípoli
- Las esféricas.

Herón de Alejandría
- Paralelogramo de los movimientos.
- Equilibrio sobre un plano inclinado.
- Momento estático.
- Las cinco máquinas simples.
- Máquinas compuestas.
- Cálculo de la raíz cúbica.
- Ángulo de incidencia y ángulo de reflexión.
- El odómetro.
- El vacío.
- La eolipila.
- Apertura de las puertas de un templo encendiendo fuego sobre un altar.

Dioscórides
- Materia médica.

Ptolomeo
- Geografía y corografía.
- Fundamentos de la geografía.
- Construcción de la esfera celeste y sus principales paralelos.
- Plan del «Almagesto».
- Habitabilidad de la zona tórrida.
- Hipótesis de los planetas.
- Inscripción de Canopo.
- Refracción de la luz.

Galeno
- Procedimientos anatómicos.
- Los huesos.
- La disección de los músculos para los principiantes.
- La bilis negra.
- La sangría: Contra Erasístrato.

Nicómaco de Gerasa
- Introducción a la Aritmética.

Pappo
- Colección matemática.

Diofanto de Alejandría
- Aritmética.

Proclo de Licia
- La esencia matemática.
- La geometría como rama de la matemática.
- Geómetras anteriores a Euclides.
- Los «Elementos» de Euclides.
- Problemas y teoremas.
- Naturaleza del ángulo.
- Postulados y axiomas.
- El postulado de paralelismo.

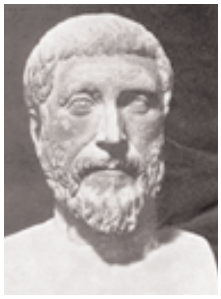
Estructuración de la obra

La obra *Científicos Griegos* consta de una explicación previa en la que explica el encargo que le hizo de la obra el editor Manuel Aguilar y las dificultades que tuvo para dar forma a la antología que le había pedido. Insistiendo, sobre todo, en las dificultades que se derivan de la traducción. Le sigue un detallado *estudio preliminar* de toda la obra en el que justifica la elección de los diferentes autores y la selección de sus obras. A continuación, da una nota sobre las traducciones que se han hecho o utilizado para construir la obra y la autoría de las mismas. Las traducciones de Aristóteles, Platón, Nicandro e Hipócrates han sido hechas por Francisco de Paula Samaranch (n.1930), la del Dioscórides está copiada de Andrés Laguna (1494-1560), traducción que ya fue elogiada por Cervantes en el *Quijote* (Parte II, cap. XVIII) y las obras de Galeno han sido traducidas por Aníbal Ruiz Moreno (1907-1960). Las traducciones de las demás obras y fragmentos fueron realizadas por Francisco Vera, así como las notas a pie de página, tanto de las traducciones propias como de las ajenas. Acaba esta parte introductoria con una amplia bibliografía sobre la historia de Grecia.

Cada uno de los veintitrés científicos griegos seleccionados va precedido de un *preámbulo*, que es un estudio que sitúa al autor dentro de su época y que aporta unas indicaciones precisas para comprender su obra. El preámbulo de cada autor va seguido de una bibliografía específica de cada uno de ellos, que comprende traducciones anteriores de sus obras, ediciones críticas de las mismas y artículos y libros publicados por otros autores sobre ellos y su obra.

El contenido matemático de la obra

Es difícil resumir el contenido de una obra tan amplia, pero sí se puede plasmar la sensación que produce encontrarse ante el monumento al saber humano que es la ciencia griega. Francisco Vera ha sabido seleccionar las obras de los autores adecuados para apreciar la evolución de esta ciencia en el pueblo heleno.



Pitágoras

Arquímedes

…la obra puede ser que no aporte gran cosa a especialistas en Historia de la Ciencia, pues es una antología y de cada uno de los libros que seleccionó Francisco Vera se habían editado ya en 1970 excelentes ediciones críticas de todas ellas; pero, […] pone al alcance del científico actual y del estudioso un material abundante, muy anotado y bien seleccionado.

Comienza con una selección de textos de Pitágoras que contienen la *Década*, *Onomatomancia Aritmética* y *Juicio entre Adversarios* en los que se pueden apreciar el misticismo con el que los pitagóricos trataban los números, a los que atribuían propiedades de adivinación del porvenir y un cierto esoterismo.

A continuación, se exponen fragmentos de las obras de Platón y de Aristóteles sobre las Matemáticas, la Aritmética, la Geometría y la Música para abordar la obra de Eudemo de Rodas (fl. 320 a. C.), que fue discípulo de Aristóteles y, siguiendo la línea erudita del Liceo, escribió una *Historia de la Geometría* de la que se conservan fragmentos. El fragmento que selecciona y traduce Francisco Vera es el de la *Cuadratura de las Lúnulas* de Hipocrates de Quío, que es un ejemplo de las preocupaciones que ocuparon a los matemáticos en el período sofista.

El período Alejandrino está representado por Euclides, Arquímedes y Apolonio. Los *Elementos* de Euclides en los que, como se ha dicho antes, aparecen todas las proposiciones salvo algunas demostraciones de las mismas, está presentado con claras anotaciones sobre el significado y alcance de las diferentes proposiciones. Las obras de Arquímedes aparecen aclaradas con notas a pie de página y un lenguaje más actual, al igual que los siete libros de *Las cónicas* de Apolonio.

La obra acaba con una selección de la *Aritmética* de Nicomaco de Gerasa, que sirvió como base de la aritmética medieval, otra selección de *Colección Matemática* de Pappo, que aunque no sea completamente original constituye una colección de teoremas, resultados y anécdotas que nos permiten adivinar el nivel que alcanzó la escuela de Alejandría hacia el año 300 de nuestra era como finalmente la *Aritmética* de Diofanto con amplias anotaciones y una selección de comentarios de Proclo sobre temas de matemáticas.

En suma, la obra puede ser que no constituya una obra para especialistas en Historia de la Ciencia, pues es una antología y de cada uno de los libros que seleccionó Francisco Vera se habían editado ya en 1970 excelentes ediciones críticas de todas ellas; pero, para el matemático, la obra constituye un medio de acercarse a la ciencia griega con muchas introducciones históricas y, a través de los textos más significativos de la ciencia griega, pone al alcance del científico actual y del estudioso un material abundante, muy anotado y bien seleccionado.

Víctor Arenzana Hernández
Javier Arenzana Romeo

MATEMATICA EMOCIONAL
Inés Mª Gómez Chacón
Narcea
Madrid, 2000

Con este título tan sugerente y con subtítulo «Los afectos en el aprendizaje matemático», nos presenta la profesora Gómez Chacón su último trabajo matemático en el que a lo largo de 276 páginas hace un repaso de la afectividad, las emociones, las creencias… todo ello en relación con la educación matemática.

La autora define el contenido de su libro en el primer párrafo de la introducción al decir que «Matemática emocional es un libro que trata de las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas» y para ello establece tres partes bien diferenciadas. La primera la dedica a planteamientos teóricos del aprendizaje matemático desde la perspectiva afectiva, incluyendo un primer capítulo dedicado a Afectividad y matemáticas, un segundo a Emociones y matemáticas y un tercero a Configurar un marco teórico de la dimensión emocional en educación matemática. Desde la primera página se plantea una serie de preguntas a las que irá respondiendo a lo largo de los capítulos, para lo que establece como concepto central, el dominio afectivo; como descriptores básicos creencias, actitudes y emociones, así como el significado de los afectos en matemáticas tanto como sistema regulador, como un indicador o como fuerzas de inercia o vehículos del conocimiento matemático.

Introduce a continuación algunas teorías psicológicas y sociológicas en relación con la emoción, para lo cual establece un cuadro muy intuitivo para evitar al lector perderse y desarrolla posteriormente la perspectiva cognitivista de Mandler y de Weiner que han influido en las investigaciones en educación matemática y afecto, completándolo con algunos de los elementos que caracterizan las teorías constructivistas.

Por último, dentro del marco de planteamientos teóricos de la primera parte del libro, configura un marco teórico de la dimensión emocional en educación matemática haciendo una propuesta de integración afecto y cognición, ya que según la autora «nuestro deseo es poner de manifiesto la necesidad de articular afecto y contexto», describiendo como dimensiones del estado emocional del resolutor de problemas: magnitud y dirección, duración, nivel de consciencia, nivel de control, estructuras de afecto en el sujeto y escenarios, terminando por afirmar que

> la cualidad e intensidad del afecto puede tener gran influencia en el éxito o fracaso de muchos intentos del proceso de transferencia.

La segunda parte del libro está dedicada a dar respuesta a cuestiones planteadas en la dimensión emocional de los alumnos y en la utilización en el aula de esta perspectiva, para lo cual empieza desarrollando las creencias en educación matemática, aportando referencias a estudios muy recientes en este dominio. Siguiendo a McLeod establece los cuatro ejes en relación a las creencias (sobre las matemáticas, sobre uno mismo, sobre la enseñanza de la matemática y sobre el contexto social al que pertenecen los alumnos), ejemplificándolo con casos prácticos en los que pone de manifiesto lo que para los alumnos significa conocer matemáticas y el significado social de su aprendizaje. Nos presenta pormenorizado el caso de Adrián que le sirve de soporte para desarrollar las características del modelo de análisis que utiliza para conocer las reacciones emocionales de los estudiantes en el aula. Y para poder diagnosticar el afecto local (estados de cambio de sentimientos o reacciones emocionales durante la resolución de una actividad matemática a lo largo de la sesión de clase) la profesora Gómez Chacón establece la «estructura local afecto-cognición», que posteriormente completa con el afecto global, viendo la necesidad de considerar la perspectiva de la identidad social en los procesos de aprendizaje matemático, presentando un interesante cuadro sobre escenarios, conductas y repercusión en el aprendizaje y comentándolo con algunos ejemplos y la posición adoptada por tres alumnos en el grupo social, concluyendo con estas palabras «La imagen meramente racional y fría del aprendizaje matemático como una disciplina dura deja paso a la posibilidad de un aprendizaje en que el ejercicio racional está inmerso en un cúmulo de otros elementos: afectos, usos, creencias…». Por último establece las relaciones significativas entre cognición y afecto y su utilización en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas destacando dentro del Mapa de Humor de los Problemas (instrumento icónico que establece un código para expresar diferentes reacciones emocionales experimentadas por el estudiante en el transcurso de la actividad matemática): curiosidad, desconcierto, aburrimiento, prisa, bloqueado, come la cabeza, desesperación, animado, confianza, de *abuty*, diversión, gusto, indiferencia, tranquilidad. Concluye esta segunda parte con unas implicaciones didácticas fruto del estudio llevado a cabo con un grupo de alumnos del Centro Taller Fuencarral en las clases de Matemáticas.

En la tercera parte la autora hace una propuesta de formación del profesorado para la educación emocional en matemáticas,

presentando el curso de formación que viene impartiendo desde 1994 para propiciar una formación sobre la dimensión emocional en matemáticas con tres objetivos fundamentales: Proporcionar un conocimiento de los diferentes aspectos que pueden bloquear/estimular el aprendizaje en matemáticas, realizar un acercamiento de los contenidos actitudinales y presentar propuestas didácticas de enseñanza/aprendizaje/evaluación de la dimensión afectiva en matemáticas en el aula.

De la lectura de este libro cabe apreciar dos bloques, por un lado el que conforman las dos primeras partes y por otro la tercera parte. Para las dos primeras le sirve de punto de partida la investigación realizada en su Tesis Doctoral, reflexionando en torno a la búsqueda de propuestas alternativas para estudiantes que fracasan en la matemática escolar, mientras que en el segundo bloque desarrolla de forma pormenorizada el curso «Actitudes, afectividad y motivación en Matemáticas». Como anexo presenta una serie de cuestionarios utilizados en el diagnóstico y se completa el libro con una extensa y actualizada bibliografía.

De este interesante trabajo, fruto de la investigación y de la práctica docente en matemáticas, interesa su lectura detenida, reflexionada y debatida con los compañeros y alumnos, para poder aportar un eslabón más en la lucha contra el fracaso escolar en matemáticas que nos invade a todos los niveles y que desilusiona con frecuencia al docente educativo.

Y qué mejor forma de terminar esta reseña con las propias palabras de la autora:

> la ansiedad, el miedo, el temor y la desesperación son estados afectivos esencialmente indeseables …[y]…. el reto del educador/a es irrumpir e interrumpir los sentimientos negativos como paso previo a la necesaria reconstrucción afectiva/cognitiva que deben tener lugar para el avance del estudiante encontrando caminos didácticos que favorezcan estos aspectos (pág. 154).

A buen seguro que el modelo propuesto por la profesora Gómez Chacón al plantearse «metas afectivas locales» ayudará a una mejor transmisión de los conocimientos en la Educación Matemática.

Andrés Nortes Checa

MATEMÁTICAS Y VIDA COTIDIANA
Revista *Ábaco*
2.ª época, 25-26
Gijón, 2000
ISSN: 0213-6252
138 páginas

Con motivo del Año Mundial de las Matemáticas, la revista *Ábaco* que, aunque el nombre tiene resonancias matemáticas, es una «Revista de cultura y ciencias sociales» ha dedicado un número extra doble a la publicación de los textos de las conferencias de un ciclo, organizado por la Sociedad Asturiana de Educación Matemática Agustín de Pedrayes, con el apoyo de la Fundación Municipal de Educación y Universidad popular del Ayuntamiento de Gijón.

La edición, muy cuidada y excelentemente presentada (a pesar de estar algún párrafo cambiado de lugar), está a cargo de Josetxu Arrieta, presidente de la Sociedad Asturiana.

El Presidente del Gobierno de Asturias, y sin embargo profesor de Matemáticas, inició el ciclo de conferencias con una titulada «Las matemáticas ante su Año Mundial: perspectivas y retos». Después de destacar el papel de dicha disciplina en la filosofía y en las ciencias naturales y sociales, realiza un breve recorrido histórico sobre las matemáticas y su enseñanza en nuestro país, con una referencia explícita a Asturias y a Agustín de Pedrayes.

«¿Sirven para algo las matemáticas?» es la pregunta que trata de responder Claudi Alsina en su artículo-conferencia. Tras comentar los diez usos esenciales que para el autor deberían darse a las matemáticas (resolver, elegir, cambiar de hábitos, interpretar, planificar, defenderse, reclamar, aclarar, criticar y dialogar), explicita las cincuenta aplicaciones matemáticas que todo ciudadano debería saber.

Miguel de Guzmán presenta el artículo «Las Matemáticas y la estructura de la naturaleza». En él, describe la concepción de la matemática que nos ha llegado de los pitagóricos, y trata de desentrañar el significado del pensamiento matemático como quehacer para entender mejor «las raíces y fuentes de la naturaleza», en expresión pitagórica, analizando las diferentes posturas, formalismo y realismo, en torno a esta cuestión.

El siguiente artículo, «Las Matemáticas como disciplina científica», está a cargo del filósofo Gustavo Bueno. Se relacionan las matemáticas con las disciplinas, considerándola como la disiciplina por antonomasia y estudiando su relación con las disciplinas científicas en general. Todo ello desde una concreta concepción de la ciencia, desde la teoría del cierre categorial, teoría que rechaza las otras tres concepciones y modulaciones de las ciencias, tanto las descripcionistas y adecuacionistas como las teoricistas.

Fernando Corbalán conduce por rutas matemáticas al «Descubrimiento de TERAMATES: la tierra de las Matemáticas». Se ocupa de las primeras noticias de su descubrimiento, algo de historia, opiniones sobre la misma, tanto de nativos, los llama-

dos matemáticos, como de visitantes entusiastas e incluso escépticos al respecto, además de proporcionar una guía rápida para descubrir TERAMATES a nuestro alrededor.

En «Taller de juegos matemáticos. Otras clases de Mates» se explica, por parte de su coordinador Antonio González García, una actividad realizada por la Sociedad Asturiana que consistió en la realización de más de 60 talleres de juegos matemáticos con el título de «Otras clases de mates» en centros de primaria y secundaria de Asturias.

En el último artículo, el Secretario General de la Federación, José Luis García, relata la historia de la Sociedad Asturiana, dentro del contexto del fenómeno asociativo del profesorado de matemáticas que se ha dado en España en los últimos veinte años.

Emilio Palacián

GALOIS. REVOLUCIÓN Y MATEMÁTICAS
Fernando Corbalán
Nivola libros y ediciones
Madrid, 2000
ISBN:84-930719-4-3
124 páginas

El libro del profesor Fernando Corbalán cuenta la biografía del matemático francés Evaristo Galois (1811-1832), que en los pocos años que vivió tuvo tiempo de llevar, por una parte, una vida novelesca de activista republicano frente a la monarquía de Luis Felipe de Orleans y, por otra, la labor de investigación y estudio de un genial matemático, que abrió los estudios del álgebra a nuevos horizontes cuando consiguió la solución de un problema con el que se habían enfrentado los más brillantes matemáticos durante cerca de tres siglos.

El autor ha sabido describir de una forma clara y precisa y con estilo literario francamente brillante la vida del genial matemático francés. La obra está dividida en siete capítulos. En la introducción describe la orientación que ha dado a la obra y sus intenciones expositivas diciendo:

> Esperamos que después de la lectura de este libro, que en definitiva es una biografía novelada (al menos en parte) con argumentos que tocan en bastantes momentos las matemáticas, entiendas un poco mejor la vida en las primeras décadas del siglo XIX; que hayas profundizado un poco en la historia del álgebra, en la que, como en los distintos aspectos del saber humano, los avances se logran con el esfuerzo conjunto de hombres y mujeres de todas las épocas y lugares; que hayas comprobado que todos somos tributarios de los esfuerzos de las generaciones que nos preceden; y por fin que te hayas emocionado con un joven apasionado por las matemáticas, en las que encuentra resultados importantes, y a la vez desesperado ante la resistencia de los mayores y de los sabios oficiales.

A lo largo del libro se puede apreciar la personalidad del joven Galois, idealista, comprometido, estudioso de aquello que le gustaba (las matemáticas), con sus deseos de entrar en la Escuela Politécnica para estudiar con los mejores matemáticos, con su radicalismo político que le llevó a formar parte del grupo extremista *Societé des amis du people*, con su ansiedad vehemente por ver publicados sus trabajos por la Academia Francesa. Todo ello está expuesto con documentación adecuada y con una exposición clara y compartimentada con la que el lector puede hacerse cargo de la personalidad de Galois y de la trascendencia de su obra.

El segundo capítulo está dedicado a una síntesis de la historia de Francia comenzando en su Revolución, de 14 de Julio de 1789 y la venida del imperio napoleónico. Asimismo contextualiza estos hechos con la vida de Galois y la situación en España, que en el año de su nacimiento, 1811, era uno de tantos territorios europeos que dependían de Napoleón.

El tercer y cuarto capítulos describen la biografía científica y política de Galois. Su procedencia familiar y primeros estudios en el Liceo Louis le Grand. Cómo en el Liceo, hacia 1827, descubrió las matemáticas a través de *Eléments de Géometrie* de Legendre, que le abrió el camino hacia la lectura de obras como *Teoría de Funciones analíticas* y *Lecciones sobre cálculo de funciones* de Lagrange, libros con los que entró en contacto con la teoría de ecuaciones, materia en la que llevaría a cabo aportaciones importantes en los años siguientes. Pero fue en 1828 cuando estudió con el profesor Richard, buen profesional, al tanto de las últimas investigaciones matemáticas que le proponía a Galois trabajos matemáticos que él iba haciendo con regularidad. Precisamente a instancias de este profesor envió sus trabajos a la Academia de Ciencias y nunca fueron publicados por el informe negativo de Poisson, que los calificó de oscuros e incompletos y porque Cauchy nunca emitió un juicio sobre ellos para autorizar su publicación.

El autor narra también cómo fueron sus actividades políticas que le llevaron a ser expul-

sado de la Escuela Normal por una carta que apareció en la *Gazette* firmada por un alumno de la misma. Por su militancia fue encarcelado en 1831 y siguió sus investigaciones matemáticas en prisión. Cumplió la condena en abril de 1832 y murió por un tiro de pistola recibido en un duelo el día 30 de mayo de ese mismo año.

El libro también recoge el relato pormenorizado de cómo la víspera del duelo, el día 29 de mayo, escribió tres cartas. Una dirigida a todos los republicanos, otra probablemente, a sus compañeros de causa política Napoleón Lebon y Vincent Duchâtelet a los que les anuncia su muerte al día siguiente y otra, más larga a Auguste Chevalier, que fue el testamento de sus descubrimientos matemáticos en la que demuestra la condición que permite decir cuándo una ecuación algebraica es resoluble por radicales. En la misma le pedía a Chevalier que hiciera publicar esa carta en la *Revista Enciclopédica* y que pidiera opinión a Gauss o a Jacobi sobre la importancia de esos teoremas.

Concluye el autor el libro con una serie de hipótesis sobre quién pudo ser el hombre que mató en duelo a Galois y cuáles pudieron ser los motivos del mismo con una serie de interesantes reflexiones de tipo detectivesco que dan al libro una dimensión más novelesca. Finalmente, hace una somera introducción a las ecuaciones de segundo, tercer y cuarto grado y una descripción de las aportaciones matemáticas de Galois a la teoría de ecuaciones algebraicas.

La obra termina con una serie de ocho problemas históricos de álgebra extraído de las obras de Euler, Newton, Erdös, Polya, Juan Justo y Vallejo.

Considero que la lectura de la obra es muy recomendable para los alumnos de Secundaria y Bachillerato porque aporta la visión de un científico joven, comprometido y brillante matemático en relación con la sociedad que le tocó vivir. La vida de Galois tiene un cierto aire de romanticismo heroico que el autor ha sabido plasmar muy bien en el libro.

Víctor Arenzana Hernández

MONOGRÁFICO: AÑO MUNDIAL DE LAS MATEMÁTICAS
Cátedra Nova
Revista de Bachillerato
N.os 11 (junio 2000)
y 12 (diciembre 2000)

En el Año Mundial de las Matemáticas, la revista Cátedra Nova, que publica la Asociación Nacional de Catedráticos de Bachillerato, bajo la dirección de Julián Martín Martínez, Catedrático de Literatura del IES Zurbarán de Badajoz, ha publicado dos monográficos (Enero n.° 12; Diciembre n.° 13) sobre este evento.

Han abierto sus páginas monográficamente a los profesores de matemáticas, aunque cualquier momento, como indican en la introducción, sería bueno para hablar de la importancia de las Matemáticas, hecho que sintetizan citando a Cervantes cuando en la segunda parte del Quijote hace que su protagonista señale meridianamente que el hombre «ha de saber matemáticas porque a cada paso se le ofrecerá tener necesidad de ellas».

Cátedra Nova se hace eco de la inquietud de los profesionales de la enseñanza manifestada en el «Congreso de la Educación Secundaria a debate» en que reiteradamente se puso de manifiesto la necesidad de reconocer el carácter instrumental de las matemáticas y la imperiosidad de dar un número suficiente de horas a esta asignatura.

Cada volumen de cuatrocientas páginas, es un mosaico de colaboraciones de profesores de diferentes lugares del estado. En cada uno de los dos volúmenes se tratan diferentes aspectos de las matemáticas así como otros muchos temas relacionados con la enseñanza y sus diversas áreas.

Con referencia a las Matemáticas, en el número 11, correspondiente al mes de Junio, se publican los artículos:

- Han pasado cien años (Alicia Delibes).
- La formación matemática de los alumnos de Educación Secundaria (M.ª Dolores de Prada Vicente).
- Cultura, historia y matemáticas: el tema de la medida (Luis M. Casas García, Ricardo Luengo González y Cipriano Sánchez Pesquero).
- Una ciudad sin ruidos (Valentín Gómez Escobar y Juan Miguel Barrigón Morillas).
- Percepción del espacio urbano (Antonio Tobarra).
- Acerca de los criterios de divisibilidad (M.ª Jesús Villar Rubio).
- Un apunte metodológico: las inecuaciones algebraicas de grado superior (Fernando del Valle García).
- Los signos del zodiaco en la astronomía griega (Antonio Arribas de Costa).

- El cálculo de la fecha del día de Pascua (M.ª Jesús Villar Rubio).
- La cuarta dimensión: materialización eléctrica de figuras tridimensionales (Fernando del Valle García).

En el segundo monográfico, revista número 12 de Diciembre, aparecen:

- Enseñar deleitando (Julián Martín Martínez).
- Los cursos de El Escorial.
- El curso de Matemáticas (Enrique Fernández Cara y Joaquín Hernández Gómez).
- Matemáticas y medios de comunicación (Fernando Corbalán).
- El arte Mudéjar en Aragón como motivador del estudio de la geometría (Florencio Villarroya).
- Matemáticas y sistemas electorales (Eugenio Hernández).
- Aplicaciones elementales ligadas a las ecuaciones diferenciales y aspectos históricos (Manuel Delgado).
- Algunas aplicaciones del cálculo computacional a la enseñanza de las matemáticas (Roberto Rodríguez del Río).
- Una breve introducción a las matemáticas de la transmisión de información: La teoría de códigos (Adolfo Quirós Gracián).
- El número de oro (Andrés Ruiz Merino).
- Anecdotario Matemático (Fco. Javier Peralta Coronado).

Ricardo Luengo González
Cipriano Sánchez Pesquero

SISTEMAS MÉTRICOS Y MONETARIOS
V. Vázquez Queipo
Servicio de Publicaciones.
Diputación de Lugo
Lugo, 2000
ISBN:84-8192-175-0
357 páginas

Este libro cuyo título completo reza *Ensayo sobre los Sistemas métricos y monetarios de los pueblos antiguos desde los primeros tiempos históricos hasta el final del Califato de Oriente* es la traducción, debida a Manuel Calvo López, del tomo segundo de la edición francesa de 1859.

Ha sido enviado recientemente a todos los asistentes a las IX Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, ya que fue la contribución de la Diputación de Lugo a las IX JAEM. El primer tomo de este libro fue entregado en formato digital en el CD ROM de dichas Jornadas.

PASEOS MATEMÁTICOS POR LOGROÑO
Carlos Usón y Juan M. de Blas
Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas
Logroño, 2000
32 páginas

La Sociedad Riojana en colaboración con la Casa de las Ciencias de Logroño y el Comité Riojano del Año Mundial de las Matemáticas ha editado este fascículo, que siguiendo otras iniciativas análogas, hace un recorrido matemático urbano por la ciudad de Logroño.

Para preparar al lector a los tres paseos ciudadanos a que son invitados, los autores inician su trabajo con unos breves textos, a modo de ensayos, cuyos títulos son más que sugerentes:

- El cálido abrazo de la complicidad.
- Una mirada inteligente.
- Pero… ¿hay álgebra en las aceras?
- La menos sensual y más cotidiana de las curvas.
- Navegar en un mar de calma.
- La acogedora caricia de la proporción.
- La inquietante incertidumbre de la aritmética.
- Parábolas, catenarias y otros apacibles monstruos.
- Un torreón con ventanas a la calle.
- El seductor descaro de la geometría.
- La caricia poética.

Finalizan estas páginas con unos apéndices (Matemáticos riojanos; Curvas especiales; Relojes de Sol; Teselaciones del plano y del espacio; Grandes números; y Estructuras algebraicas) y unas bellas fotografías matemáticas.

Emilio Palacián

LAS MATEMÁTICAS DEL SIGLO XX UNA MIRADA EN 101 ARTÍCULOS
Números
Volúmenes 43 y 44
Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas
Coedición con Nivola
524 páginas

Antonio Martinón ha coordinado el equipo de editores integrado por José Luis Aguiar, Luis Balbuena, Alicia Bruno, Juan Antonio García Cruz, José Manuel Méndez, Casiano Rodríguez León, José Sabina, Rodrigo Trijillo y Fidela Velázquez, que por encargo de la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas son responsables de este número especial de la revista *Números*, con motivo del Año Mundial de las Matemáticas. En él participan 106 autores que a través de los 101 breves artículos se han esforzado por hacer asequible a un público no especialista:

> …el arte propio de esta ciencia, la belleza de sus creaciones, la que se puede contemplar en sus teorías, teoremas y demostraciones. Los problemas que en el pasado surgieron como desafíos a la inteligencia del ser humano, así como otros nuevos que en el siglo se han planteado, están en la base de la investigación desarrollada en estos años, habiendo sido muchos de ellos definitivamente resueltos.

Frente a otros libros de divulgación matemática, aquí no se rehuye tratar temas que han movido la investigación matemática pura, yendo más allá de aquellos que han tenido más resonancia en los medios de comunicación y los libros de divulgación, como los fractales, el caos, el teorema de los cuatro colores, el último teorema de Fermat… Así que también se puede leer una breve introducción a los 23 problemas de Hilbert, motor de la investigación matemática de todo el siglo, una sencilla explicación de la conjetura de Poincaré, de la paradoja de Banech-Tarski, o de la hipótesis del continuo. O introducciones a alguna de las numerosas ramas que han proliferado en la matemáticas del siglo XX: el análisis de datos, geometría simpléctica, la optimización combinatoria, el teorema de Black-Stokes…

Pero siendo una revista de educación matemática, el alcance de esta obra no podía limitarse a dar un repaso a los aspectos relacionados con la investigación matemática. Tambien se encuentran numerosos artículos dedicados a la enseñanza de las matemáticas, buena parte de ellos escritos por miembros de las sociedades federadas en la FESPM, como puede dar idea la siguiente lista:

- La importancia de lo tangible en el aula de matemáticas (J. Giménez).
- Los libros de texto de matemáticas (B. Gómez).
- El papel de la historia de las matemáticas en la enseñanza (M. Sierra).
- Algunos aspectos de matemáticas recreativas (F. Corbalán).
- De la instrucción matemática a la educación matemática (F. Velázquez).
- La formación de profesores de primaria desde la didáctica de las matemáticas (Mª V. Sánchez, S. Llinares, M. García, I. Escudero).
- Resolver problemas: ayudar a los alumnos a pensar por sí mismos (Mª Luz Callejo).
- Didáctica de las matemáticas y formación de los profesores de matemáticas de secundaria (S. Llinares, Mª V. Sánchez, M. García, I. Escudero).
- El desarrollo de la educación estadística en el siglo XX y perspectivas futuras (C. Batanero).
- El precálculo, un eslabón necesario entre las funciones y el análisis (C. Azcárate).
- Sentido numérico (A. Bruno).
- Una mirada hacia las «matemáticas modernas» (. J. Hernández).
- Arquitectura del siglo XX y clases de matemáticas (C. Alsina).
- La consolidación de la educación matemática como disciplina científica (J.D. Godino).
- Una visión de la didáctica de la matemática en Francia (F. Villarroya).
- Jean Piagel y su influencia en la educación (M.M. Socas).
- El papel dinamizador de las sociedades de profesores de matemáticas en España (Mª J. Luelmo).
- Congresos internacionales de Educación Matemática: del IV al VIII (L. Balbuena).
- Universidad, investigación y didáctica de la matemática en España (L. Rico).
- Los ordenadores en la enseñanza de las matemáticas (A. Gutiérrez).
- Las publicaciones de las sociedades (E. Palación).
- . Las dimensiones políticas y educacionales de la etnomatemática (U. D'Ambrosio).
- El sentido del ICMI hoy (M. de Guzmán).
- Luis Antonio Santaló: matemático, científico, educador (N. Vázquez de Tapia).

A través de los distintos artículos de esta obra se pretende mostrar el papel central de las matemáticas en la cultura del siglo XX, tanto desde la educación, como en su relación con las otras ciencias de la naturaleza y la tecnología, con las ciencias sociales, en la constitución del pensamiento moderno, en el arte… Y también mediante su presencia en los cambios políticos, sociales y económicos del siglo XX. Las matemáticas aparecen así como una tarea humana. Para ello algunos artículos se dedican a la biografías personales y científicas de algunos de los hombres y mujeres que más han destacado en las matemáticas del siglo XX.

En palabras de Antonio Martinón, en este libro «…hay de todo, aunque, desde luego, no está todo». Con ello se quiere decir que no hay que esperar un manual sobre la historia de la matemática, de sus aplicaciones prácticas y de la educación matemática en el siglo XX. Su pretensión es más bien impresionista ya que, enfocando su mirada sobre unos cuantos aspectos, pretende dar una ponorámica de lo que han sido las matemáticas en el siglo XX. Y creo que lo consigue…

Julio Sancho

EN BUSCA DE KLINGSOR
Jorge Volpi
Seix Barral
Barcelona, 1999
ISBN:84-322-0788-8
444 páginas

Esta novela no se publicó al calor del Año Mundial de las Matemáticas, –recibió el premio Biblioteca Breve del año 1999–, pero bien podría haber cabido dentro de esa pequeña eclosión del genero de «novelas matemáticas» que ha surgido en este último año. En este caso se trata de novelar el esfuerzo de desarrollo científico relacionado con la consecución del arma atómica.

Desde mi punto de vista estamos ante una novela de más fuste que otras recientes de este género, sobre todo en lo tocante a su calidad literaria y a la profundidad del pensamiento del autor. Más allá de cubrir ciertas pretensiones didácticas, reflexiona sobre las relaciones de la ciencia con el mal. Y qué mejor escenario para esta reflexión que la época nazi y la complicidad de los científicos alemanes con el horror nazi. Además de un tema interesante, tenemos un tratamiento literario brillante, una narración en la el autor nos hace desear saber lo que va a ocurrir, unos personajes creíbles y bien dibujados…

La novela tiene dos personajes principales. Un joven físico americano, Francis P. Bacon, enrolado en el ejercito después de un breve paso por el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton y un matemático aleman, Gustav Links, de la Universidad de Leipzig, donde trabaja en uno de los problemas del *Programa de Hilbert*, nada menos que *Hipótesis del Continuo*. Para presentarlos, el autor describe su formación y el campo en el que trabajan, y así vemos como al joven y brillante físico recién licenciado le entrevista J. von Neumann para decidir si debe ser admitido en Princeton y le plantea un problema de teoría de juegos. Luego será su colaborador. Su paso por el Instituto de Estudios Avanzados le lleva a convivir con grandes de la ciencia como Einstein o Gödel. Mientras Links, que es el narrador del relato, explica el porqué de su pasión por el infinito, mediante el relato de la vida de Cantor. Luego, a lo largo de la guerra, será uno de los colaboradores de Heisemberg en el programa atómico alemán.

Estos dos personajes entran en contacto a causa de la misión que le encomiendan al americano. Una vez finalizada la guerra, hay que capturar al asesor científico de Hitler que controló el programa de investigaciones atómicas del III Reich. La investigación los llevará a entrevistarse con prestigiosos científicos, sobre todo físicos, que participaron en la génesis de la *Teoría Cuántica*. Desfilarán por el relato, Planck, Heisenberg, von Laue, Schröedinger, Bohr,… que tomarán la palabra y hablarán de Mecánica Cuántica, pero también de las relaciones entre ellos, de las mezquindades dentro de la vida científica y de su papel en la guerra y sus relaciones con el poder. Y acaban convirtiéndose en los auténticos personajes de la novela, atrapados en dilemas muy humanos.

Quizá pueda parecer que se trata de una «novela de física», más que de matemáticas, pero creo que no debemos olvidar que en el programa de Hilbert, uno de los 23 problemas era el de axiomatizar la física matemática y que éste es el tema científico de la novela; y, por tanto, completamente inserto dentro de la matemática del siglo XX.

Para mi gusto la novela tiene baja un poco su nivel cuando describe las vidas de los personajes de ficción, Bacon y Links, ya que a veces parece que estemos leyendo un «best seller», pero ello no desmerece del nivel general que es sobresaliente.

Julio Sancho

SUMA 36
febrero 2001

Olimpiada: prueba por equipos

CRÓNICAS

XI Olimpiada Matemática Nacional de la FESPM

Prueba por equipos

BENVINGUTS!! BIENVENIDOS!!

Acabáis de llegar a nuestra ciudad, Sant Feliu de Guíxols, perteneciente a la comarca del Baix Empordà, para realizar la última prueba por equipos. Tranquilos, será fácil y durará poco: de las 10h30 a las 12h30 aproximadamente. Después podréis disfrutar un poquito del mar, el sol y la tranquilidad de esta ciudad. Pero, además, nos gustaría que también pudieseis saber un poco más de nosotros, los *guixolenses*, de nuestra ciudad y de nuestra historia. Todos los historiadores están de acuerdo en aceptar que el término Sant Feliu procede de la antiquísima tradición que sitúa el martirio del cristiano Feliu, originario de África, en nuestra población. De hecho, en los primeros documentos del s. X ya se la denomina así. Probablemente el origen de la palabra *guíxols* deba buscarse en una lengua prerroma-

na hablada, el ibero, ya que en la llamada Punta del Guíxols se encontraba un primitivo poblado ibérico. Las pruebas que hemos seleccionado se relacionan con la historia de la ciudad, y también muy próximos entre sí para que no os canséis caminando. Todas ellas se realizarán en el Paseo Marítimo.

LAS TRES PRUEBAS

La prueba práctica se divide en tres partes: La fuente del Paseo Juli Garreta, El Casino de la Constancia y El espigón del Fortim.

Como formamos un grupo muy numeroso, haremos lo siguiente: De los 12 grupos de 4 alumnos más acompañante, una tercera parte, del grupo n.° 1 al n.° 4 comenzarán por la primera prueba; del 5 al 8, por la 2.ª, y del 9 al 12, por la 3.ª. A continuación, los grupos que han terminado la primera prueba harán la 2.ª; los de la 2.ª, la 3.ª, y así sucesivamente. Pensad en distribuiros bien el tiempo (unos 40 minutos como máximo por prueba).

Cada grupo dispondrá del siguiente material:

- una cinta métrica;
- un portafolios con clip;
- papel blanco, lápiz y goma;
- 3 hojas del cuestionario a rellenar;
- un pequeño plano de la zona.

Lo primero que tenéis que hacer es rellenar los datos de la última hoja.

Prueba 1. Los jardines de Juli Garreta

Durante la fiesta mayor de 1932, el president Macià inauguró en estos jardines el monumento dedicado a Juli Garreta, obra del escultor Enric Monjo.

Juli Garreta (1875-1925) fue músico y compositor de sardanas.

Su producción musical fue celebrada y aplaudida por eminentes personalidades y músicos de renombre mundial, como Pau Casals, Strawinsky, entre otros.

En estos jardines de Juli Garreta nos encontramos con otro monumento, la máquina n.° 1 del *carrilet* de Sant Feliu, el primer ferrocarril de vía estrecha de 75 cm que hubo en España y que inauguró la línea Sant Feliu-Girona el año 1892.

Juli Garreta

La fuente del Paseo

Cerca veréis una fuente de 6 surtidores. Es simétrica, «casi-rectangular», pero con las 4 esquinas curvadas hacia adentro.

Bien, deseamos conmemorar el 125 aniversario del nacimiento del compositor y para ello queremos embellecer la fuente poniendo mármol sobre su borde. Éste cuesta 14.500 ptas el metro cuadrado.

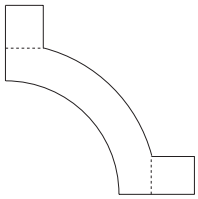
Se trata de calcular cuánto le costará al Ayuntamiento esta obra (en lo que se refiere al gasto de mármol, se entiende). Os recomiendo que hagáis previamente un croquis de la fuente a escala, por ejemplo, 1:100.

Aquí tenéis una fotografía de la fuente.

Pasos que hay que seguir

1. Dibujad un croquis sobre el papel milimetrado a escala 1:100.
2. Tomad las medidas de los 4 lados rectos, tanto interiores como exteriores, con la cinta métrica (no lo hagáis por piezas de piedra porque no son todas iguales).
3. Considerad los 4 tramos curvos como si fueran 1/4 de corona circular. Medid con la cinta la longitud del arco interior, multiplicadlo por 4 y hallaréis la longitud de la circunferencia pequeña, de la cual podéis deducir el radio.
4. Sumad el grosor del borde (igual en todo lugar) al radio hallado y obtendréis el radio del exterior.
5. Con una simple resta de las áreas de los círculos, obtendréis el área buscada.

6. Ojo con las uniones: prolongad la circunferencia exterior tal como indica la línea de puntos de la figura.



7. Finalmente sumad las áreas que obtengáis y hallad el precio total del mármol.

Prueba 2. El Casino del Nois

En el paseo de Sant Feliu de Guíxols nos encontramos con el casino de la *Constancia*, llamado popularmente el «Casino dels Nois», que vendría a ser antiguamente el casino de los obreros (local social donde se reunían y discutían...), para distinguirlo del casino de los señores.

Se trata del edificio más insólito de toda la arquitectura guixolense; su aspecto nos hace pensar en la arquitectura árabe o mozárabe. Tuvo una primera construcción en 1888 y fue diseñada por *General Guitart*, aunque su cofradía arranca del 17 de enero de 1851. Posteriormente se hicieron ampliaciones (1899 y 1928).

El Casino dels Nois es un edificio cantonero de planta, piso y desván que en la esquina posee una tribuna circular de dos pisos que acaba en una cúpula de tres niveles de altura cubierta de mosaico blanco y azul. Las paredes del edificio están profusamente decoradas con celosías, arabescos,... Las aberturas de la planta baja acaban todas con un arco de herradura, algunas marcadas entre columnas al estilo andaluz. En cambio, las aberturas del piso acaban en arco de herradura apuntado.

En el interior del edificio, hay un café con un rincón encarado al mar muy interesante decorado con tres arcos de herradura. Merece la pena mencionar la excepcional biblioteca que se conserva en el piso superior del edificio, lugar de lectura muy frecuentado y utilizado hasta mediados del siglo XX por obreros y clases populares de la ciudad en la época de mayor industrialización.

El Casino de la Constancia

Bien, un profesor os esperará en la entrada del recinto para acompañaros al primer piso, donde hay un amplio local en el que disponéis de mesas y sillas para trabajar. Se trata de que contestéis a las siguientes preguntas que hacen referencia a fechas históricas de Sant Feliu y a otros números interesantes. Para poderlas contestar necesitaréis fijaros en una serie de elementos que encontraréis cerca de vosotros:

1. *¿Cuál es la distancia entre Sant Feliu y la frontera con Francia?* Pista: Cuenta el número de puertas del piso que dan al exterior y después el número total de columnas; las cifras en este orden te darán el resultado.
2. *La sociedad tipo casino más antigua que se fundó en Sant Feliu se llamaba «La Unión». ¿En qué año se fundó?* Pista: El triple del número de rosetones de yeso que hay en el techo (de los cuales cuelgan focos) y el número de barrotes de la baranda que habéis encontrado subiendo a mano derecha, y en este orden, os darán la fecha.
3. *¿Cuántos kilómetros cuadrados tiene el municipio?* Pista: Sumad una unidad al número de lados que tiene la curiosa estrella que hay en los rosetones de yeso del techo.
4. *La costa guixolense es muy recortada. ¿Sabríais decirnos su longitud total en kilómetros?* Pista: Divide por tres el número de flores de yeso con 5 pétalos que encontrarás en algún lugar sobre la única pared con arcos y columnas adornadas con figuras de yeso, y súmale 2 unidades.
5. *¿En qué año del siglo XX el president de la Generalitat Josep Irla (guixolense) tuvo que marcharse al exilio?* Pista: Sólo necesitas saber las dos últimas cifras: sal un momento a la terraza y verás una casa señorial muy antigua, la Casa Patxot, que actualmente es la sede de la Cámara de Comercio; de los dos números que ocupa el edificio en la calle, escoge el primero.

6. *En este Casino, el dels Nois, se ve por primera vez en televisión el partido Barça-Madrid, ¿podéis decirme en qué año?* Pista: Evidentemente te faltan las dos últimas cifras de un año del siglo XX, éstas las obtendrás sumando los dos números que ocupa la casa Patxot en la calle y restando 22.

7. *Para terminar, vamos a ver cómo estáis de historia y de cuadrados mágicos: El virrey D. Juan de Austria ataca la bahía guixolense incendiando el arrabal de Tueda. ¿En qué año sucedió tal hecho? Este suceso no pertenece al siglo XX, sino a mucho antes.* Pista: La fecha te la darán los números que faltan de izquierda a derecha y de arriba abajo del siguiente cuadrado mágico de suma 15 (un cuadrado mágico tiene la particularidad de que suman lo mismo filas, columnas y diagonales. ¡Compruébalo!):

8		
3	**5**	**7**
		2

Prueba 3. El Fortim

Edificio del Salvamento

Situado encima del peñón dels Guíxols, proyectado por el maestro de obras Pius Prujà y construido en 1889-1890. En 1886 se constituyó la delegación local de la Sociedad Española de Salvamento de Náufragos.

El poblado ibérico dels Guixols

El primer núcleo de población propiamente estable (urbano), poblado ibérico autóctono de marcada influencia griega, lo hallamos emplazado en el promontorio dels Guíxols del s. IV aC. El lugar era muy estratégico. La punta dels Guíxols es una pequeña colina granítica que, adentrándose en el mar, separa la bahía de Sant Feliu en dos playas, la de *Calassanç* y la actual playa conocida en la antigüedad como el puerto de *L'Abric* (abrigo). El nombre de Guíxols es un topónimo que parece ser proviene de los iberos allí situados.

Leyenda del martirio de Sant Feliu l'Africà

La leyenda más tradicional ha sido la del martirio de Feliu l'Africà en la Punta dels Guíxols, lugar que más tarde se conocerá con los nombres de *Fortim* y *Salvament*. Sant Feliu, nacido en África, predicó el cristianismo en estas tierras a principios del siglo IV. Se dice que fue llevado al Turó dels Guíxols o del Fortim, donde hoy está el edificio del Salvament, y desde allí, por el acantilado, fue arrojado, con una rueda de molino atada al cuello, al fondo del mar, por la banda de Calassanç, donde los ángeles lo recogieron y lo pasaron al puerto de l'Abric, a través de la cueva o grieta (dicen que producida por el impacto de la rueda de molino) que hay debajo del peñón, llegando sano a la playa opuesta (la actual).

Desgraciadamente, hoy, el Club Náutico nos impide verla.

El espigón del Fortim

Bien, pues al final del paseo, yendo al Salvament, veréis un *pequeño espigón* restaurado que se adentra hacia el mar, cuya vista aérea nos ofrece aproximadamente la forma que vemos en la página siguiente.

Nos hemos apuntado a un campo de trabajo durante el verano para restaurar las paredes laterales interiores del espigón con piedras que imitan ser *antiguas*, de dimensiones 40 cm x 20 cm. Taparemos también los desagües que haya. Tenemos que colocar las piedras de la forma que nos indica la figura de

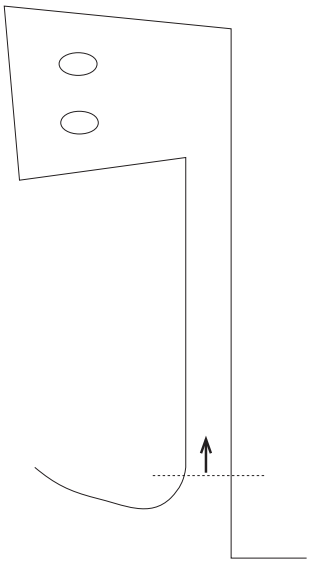
más abajo. Intentad no romper muchas, ya que partir una losa es tarea muy laboriosa.

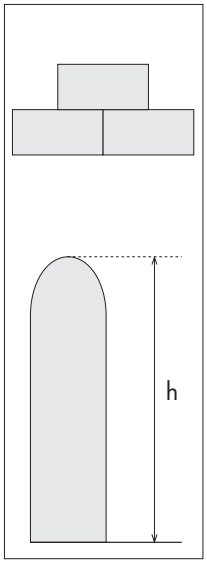
¿Cuántas piedras de estas dimensiones necesitaremos? ¿Cuántas piedras tendremos que partir como mínimo?

Pasos que hay que seguir:

1. Calculad primero la altura de la pared interna del espigón: Tomad la altura en 3 puntos distintos del recorrido y calculad la media aritmética. Como la pared acaba en un borde redondeado, tomad la altura máxima, apoyando el portafolios de forma horizontal encima del muro. (Ved figura de sección transversal del muro).
2. Luego medís el perímetro: Empezad el recorrido como indica la flecha. Allí habrá un profesor por si tenéis dudas.
3. Para que trabajéis mejor, os recomendamos que una vez tomadas las medidas, hagáis un croquis a escala, por ejemplo 1:100.
4. Calculad el área en metros cuadrados y divididla por el área de la losa del tipo citado anteriormente, y obtendréis el número total de losas necesarias.
5. Haced un croquis en el papel de cuántas losas quedarán partidas. Especificad el número.

PLANO DE SITUACIÓN
0: Plaza del Monasterio
1: Jardines de Juli Garreta
2: Casino dels Nois
3: Espigón del Fortim





Proyecto «Talento matemático» (fin del primer bienio)

Hace dos años, escribí para el boletín de la Asociación «Emma Castelnuovo» de Madrid (n.° 14, abril 1999) y para SUMA (n.° 30, febrero 1999) una «crónica» bastante superficial de la presentación del proyecto «Talento matemático».

Confesada de antemano mi condición de «infiltrado» (ni matemático, ni español) y mi implicación personal en el proyecto (como padre de una y profesor de otro de los integrantes del primer grupo de alumnos elegidos), en mi comentario intenté ser rápido y evitar la pedantería.

Me arriesgaba a ser poco serio y superficial, pero me interesaba más dejar claro un punto que me parecía condivisible para los profesores de matemáticas que se reconocen en las propuestas de la Asociación:

> Que el proyecto tuviera el objetivo de enriquecer la experiencia escolar de los participantes y no el de acelerarla o sustituirla.

En este sentido, evaluaba positivamente la experiencia alemana y, en consecuencia, la que iba a empezar en Madrid, inspirada en ella, que me parecían totalmente coherentes con el trabajo que intentamos, con muchas dificultades por parte de la institución, desarrollar en las aulas.

Por eso, pedía al director del proyecto, Miguel de Guzmán, y he continuado haciéndolo en todas las ocasiones en las que han reunido a los padres, que se establecieran relaciones entre el grupo de profesores involucrados en el proyecto y los profesores que trabajan cada día en las aulas con alumnos de la misma edad.

En junio de 2000, el primer grupo de alumnos terminó la fase presencial, que los tuvo ocupados cada mañana de sábado tres horas durante dos años.

Se les ofrece ahora continuar en relación con el grupo de profesores que ha llevado el proyecto, reuniéndose un par de veces al año y, aún más, a través de una página de Internet, abierta a todos, que estará lista en muy pocos días.

Este grupo ha sido sustituido por otro grupo, y el proyecto, terminada la fase experimental, ha encontrado una financiación por parte de la Fundación Airtel y parece destinado a implantarse en otras comunidades.

La página web permitirá a los muchos compañeros que están interesados en las actividades del proyecto tener acceso directo a parte del material utilizado y poder charlar con profesores y alumnos.

Espero que Miguel de Guzmán y su grupo presenten a los compañeros el resultado de su excelente trabajo y las propuestas de nuevas actividades.

Por mi parte, desde mi punto de observación muy secundario, puedo sólo valorar muy positivamente el proyecto:

- los chicos y las chicas han trabajado a gusto y con una extraordinaria continuidad;
- la relación con los profesores ha sido excelente;
- el material propuesto, interesante;
- el aprendizaje ha resultado significativo y la motivación en relación con las matemáticas se ha mantenido y, en muchos apartados, que en la escuela normalmente se descuidan, ha mejorado.

Creo que el mejor síntoma del éxito del proyecto sea el que los ex alumnos están encontrando a faltar esas mañanas del sábado, cuando tenían que levantarse más temprano que sus compañeros y esforzarse tres horas en torno a extrañas cuestiones que, una vez resueltas, dejan una muy peculiar sensación de euforia.

A juzgar por la participación en la última reunión, sábado 16 diciembre, también a los padres nos falta algo.

Así, que un sentido ¡Enhorabuena! a todo el equipo de profesores y mucha suerte para el futuro de las actividades.

Guido Ramellini

Metro de Barcelana

También en el Metro de Barcelona han conmemorado el Año Mundial de las Matemáticas, como puede verse en este bono:

SUMA 36
febrero 2001

X JAEM

CONVOCATORIAS

X JORNADAS para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas

Las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (X JAEM), convocadas por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y organizadas conjuntamente por la Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo» y el Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Zaragoza, se celebrarán en Zaragoza los días 7, 8 y 9 de septiembre de 2001.

Los actos plenarios tendrán lugar en el Auditorio de Zaragoza y el resto en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza, situada en el Campus de la Plaza de San Francisco.

Programa científico

El Comité de Programas ha elaborado el siguiente programa constituido por conferencias plenarias, ponencias, comunicaciones, zoco matemático y talleres, que girará en torno a ocho núcleos temáticos básicos.

Dentro de estos temas caben acercamientos desde: el tratamiento de la diversidad, aspectos históricos, investigación didáctica, experiencias, recursos, gestión del aula, resolución de problemas, etc., así como desde los diversos niveles educativos.

CONFERENCIAS PLENARIAS

- LUIS BALBUENA. Reflexiones y retos en la Educación matemática.
- M.ª ANTONIA CANALS. Educación Matemática en las primeras edades.
- MARTIN KINDT. ¿Probar o no probar?, es la cuestión.

PONENCIAS

Núcleo temático 1
La modelización como actividad matemática

- MIQUEL ALBERTÍ. Kepala kelapa o de cómo salvar discontinuidades y picos.
- CARMEN BATANERO. Aleatoriedad: modelización, simulación.
- JAVIER PÉREZ FERNÁNDEZ. Matemáticas fuera de las Matemáticas.
- JULIO SANCHO. Modelización de problemas de población.

[Moderadores: Víctor Arenzana y Félix Matute]

Núcleo temático 2
¿Qué pasa con la demostración?

- CARMEN AZCÁRATE. Definiciones, demostraciones, ¿por qué?, ¿cuándo?, ¿cómo?
- JOSÉ M.ª GAIRÍN. Aprender a demostrar: los juegos de estrategia.
- TOMÁS RECIO. La mecánica de la demostración y la demostración mecánica.
- VICENTE RIVIÈRE. Convencer y formalizar: papel y límites de la demostración en secundaria.

[Moderadores: Rafael Escolano y José Luis García Rodrigo]

Núcleo temático 3
Lenguaje visual y geometría

- PEDRO HUERTA. El lenguaje geométrico en la formación de profesores.
- ARTURO MANDLY. La geometría como base del conocimiento matemático.
- FRANCISCO MARTÍN CASALDERREY. Forma y proporción. Visión matemática de algunas obras de arte.
- ANTONIO PÉREZ SANZ. Matemáticas, historia e imagen: un trinomio cuadrado perfecto.

[Moderadores: José M.ª Bandrés y Gloria Blasco]

Núcleo temático 4
Funciones: una confluencia de lenguajes

- JORDI DEULOFEU. Las funciones en la educación secundaria: ¿para qué?, ¿cómo? Aportaciones de la investigación.
- JUAN M.ª GARCÍA DOZAGARAT. ¿Qué se aprende del lenguaje de las funciones?
- EDUARDO LACASTA. ¿Son los gráficos cartesianos un soporte intuitivo privilegiado del aprendizaje de funciones?
- XARO NOMDEDEU. Funciones para las caracolas.

[Moderadoras: Pilar González y Rosa Pérez]

Comité Nacional de programas

José Luis Álvarez (Presidente)
Antonio Aranda
Carmen Azcárate
Xaro Nomdedeu
Emilio Palacián
Vicente Rivière
Julio Sancho

Núcleo temático 5
Azar: la matemática de lo posible

- JUAN ANTONIO GARCÍA CRUZ. Inferencia y significación estadística
- MANUEL PAZOS. La probabilidad en la escuela, ¿una casualidad?
- ANTONIO PÉREZ JIMÉNEZ. Probabilidad: historia y aprendizaje.
- ANNA POL. Más allá de la asignación de probabilidades: comprender el azar.

[Moderadores: M.ª Dolores Castán y José M.ª Sorando]

Núcleo temático 6
Números: significado y destrezas

- EVA CID. Modelos concretos en la enseñanza de los números negativos.
- BERNARDO GÓMEZ. Las concepciones escolares de los números decimales.
- CARLES ROMERO CHESA. Sobre algunos entornos de significado para los números reales.
- JOSÉ ROMERO SÁNCHEZ. ¿Son fascinantes las matemáticas? El número.

[Moderadores: Pilar Fernández y Eusebio Rodríguez]

Núcleo temático 7
Álgebra: ¿cuándo? ¿cómo?

- ANTONIO GONZÁLEZ GARCÍA. Razones y sinrazones de los contenidos algebraicos en la ESO y su tratamiento: lo que hay y no debería haber y lo que no hay y sí debería haber.
- CARLES LLADÓ. La dependencia funcional como campo de problemas para el estudio del álgebra.
- LUIS PUIG. Signos con los que operar en el nivel de la expresión: un componente de la historia del álgebra.
- FIDELA VELÁZQUEZ. Una propuesta de tránsito gradual de la Aritmética al Álgebra.

[Moderadores: Esperanza Infante y Carlos Usón]

Núcleo temático 8
Medida: de la regla a la trigonometría

- LUIS BERENGUER. Instrumentos de medida no convencionales para primaria y ESO.

- MARTA BERINI. Ángulos, longitudes y proporcionalidad: su aplicación a la construccción de tablas de orientación y al cálculo de la latitud de un lugar.
- Mª JESÚS LUELMO. Medir en secundaria: algo más que fórmulas.
- CARLOS MEDEROS. Aparatos de medida astronómica y trigonometría.

  [Moderadores: M.ª Ángeles Arroyo y Javier Galarreta]

COMUNICACIONES

- Los asistentes podrán presentar comunicaciones a los distintos núcleos temáticos, preferentemente.
- La extensión máxima de cada comunicación será de cinco páginas (alrededor de 10.000 caracteres).
- El plazo de admisión de comunicaciones finalizará el 15 de abril de 2001.
- Antes del 15 de junio de 2001 se confirmará a los autores si la comunicación ha sido aceptada por el Comité de Programas.
- Normas más precisas para el envío de originales se remitirán a quien las solicite o pueden verse en la página web de las X JAEM.

ZOCO MATEMÁTICO Y TALLERES

En estas JAEM, y retomando la experiencia de las III y IV JAEM, se vuelve a convocar el Zoco Matemático, un espacio para presentar físicamente todo tipo de materiales didácticos, pósters, etc., con la presencia de los autores, con los que se podrá departir sobre sus trabajos. Además, los participantes podrán proponer la impartición de algún taller.

El plazo para presentar propuestas en estas secciones finalizará el 1 de mayo de 2001. Quien desee participar en ellas, deberá solicitar las normas correspondientes, por el mismo procedimiento que para las comunicaciones.

Otras actividades

En el transcurso de las JAEM tendrán lugar otras actividades: Programa cultural, Exposiciones, Videomaratón, Estands y presentaciones comerciales…

Comisión Organizadora

Emilio Palacián (Coordinador)

Jesús Antolín

José M.ª Gairín

Ana Pola

Julio Sancho

Inscripciones

Para inscribirse en las X JAEM es preciso enviar a la Secretaría de las Jornadas (X JAEM. ICE Universidad de Zaragoza. c/ Pedro Cerbuna, 12. 50009-Zaragoza) la ficha de inscripción adjunta cumplimentada, junto con el justificante de pago de la cuota de inscripción, que puede hacerse por los siguientes procedimientos:

- Talón nominativo a favor de «FESPM: X JAEM».
- Transferencia a la cuenta de Ibercaja n.º: 2085 0168 55 0330014972
- Giro postal.

El periodo de inscripción finalizará el 30 de abril de 2001 para las cuotas reducidas, y desde esa fecha hasta el 30 de junio para las normales. Las cuotas de inscripción son las siguientes:

	Cuotas reducidas (Antes del 30/4/01)	Cuotas normales (Después del 30/4/01)
Socios de la FESPM	10.000 pts.	14.000 pts.
No socios	17.000 pts.	22.000 pts.

Fecha límite: 30 de junio de 2001.

Asistencia limitada a 800 personas.

Anulaciones: Sólo serán atendidas aquellas solicitudes de reembolso de inscripción realizadas antes del 30 de junio de 2001.

Alojamiento

Para todas las cuestiones relacionadas con viajes y reserva de alojamiento, dirigirse a la Agencia Oficial de Viajes de las Jornadas:

Tívoli Congresos
c/ Verónica, 16
50001 ZARAGOZA
Tel.: 976 200 368; Fax: 976 201 404
Correo: congresos@viajestivoli.com

Secretaría JAEM

X JAEM.
ICE Universidad de Zaragoza
c/ Pedro Cerbuna, 12
50009 ZARAGOZA
Fax: 976 76 13 45
Correo electrónico: xjaem@posta.unizar.es
página web: www.unizar.es/ice/jaem

XIX Concurso de Resolución de Problemas

Está convocado por la Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas y el Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras.

Bases del Concurso

Primera: Los alumnos podrán participar en el Concurso en tres niveles:

a) Primer nivel: alumnos de 3.° de ESO.

b) Segundo nivel: alumnos de 4.° de ESO.

c) Tercer nivel: alumnos de 1.° Bachillerato (3.° BUP y 2.° y 3.° de FP II).

Segunda: Las pruebas consistirán en la resolución de Problemas de Matemáticas (los mismos para todos los concursantes de un mismo nivel) y se realizarán en la mañana del sábado 23 de junio del 2001 a partir de las 10 horas.

Tercera: A los mejores de cada nivel, se concederán diplomas y premios.

Cuarta: Los Centros que deseen presentar alumnos (hasta un máximo de seis) deberán realizar la preinscripción antes del dia 21 de Mayo del 2001, dirigiéndose por carta al presidente de nuestra sociedad:

Prof. Javier Etayo Gordejuela
Departamento de Algebra
Facultad de Ciencias Matemáticas
28040-Madrid

En la preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados. Si algún centro desea presentar más de seis alumnos, debe solicitarlo antes de la fecha mencionada anteriormente.

Quinta: Los centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales individuales en las que se haga constar que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas, así como el curso en que están matriculados en el año académico 2000-2001.

Nota importante: Los dos primeros clasificados de cada nivel son invitados a participar en la Olimpiada Rioplatense de Argentina, en diciembre de 2001 (en el supuesto de que se consigan becas para pagar los billetes hasta Buenos Aires).

53 Encuentro de la CIEAEM

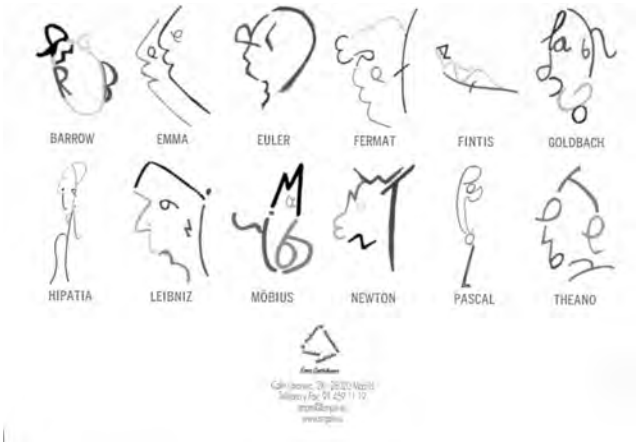
Por problemas organizativos la reunión de la CIEAEM prevista en Rodas (Grecia), ha cambiado de lugar y de fechas. El 53 Encuentro de la CIEAEM, sobre el tema «Mathematical literacy in the digital era» tendrá lugar en Verbania (Italia, Lago Mayor), desde el 21 al 27 de julio de 2001.

La fecha límite de envío de comunicaciones es el 28 de Febrero. Se puede encontrar más información en la web

www.dm.unito.it/cieaem53/index.html

o escribiendo a la Coordinadora, Prof. Luciana Bazzini,

bazzini@dm.unito.i



NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, ICE de Universidad de Zaragoza, C./ Pedro Cerbuna 12, 50009 Zaragoza), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.
2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos en ningún caso serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.
3. Los gráficos, diagramas y figuras se enviarán en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. Así mismo, podrán incluirse fotografías. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.
4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de entre cinco y diez líneas, que no necesariamente tiene que coincidir con la Introducción al artículo. Debe ir escrito en hoja aparte. En ese mismo folio aparecerán los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede).
5. Si se usa procesador de texto, agradeceremos que además se envíe un disquette con el archivo de texto que contenga el artículo, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quiera incluir. La etiqueta del disquette debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda MS-Word (hasta versión 5.0) en Macintosh, o WordPerfect (hasta versión 5.1) en PC. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF.
6. En cualquier caso, tanto un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.
7. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.
8. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo.
9. La bibliografía se dispondrá al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:

   TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma,* n.° 20, 91-98.

   En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas,* Labor, Barcelona.

   En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2,* ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.
10. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: …supone un gran avance (Hernández, 1992).

    Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: …según Rico (1993).
11. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como —en caso afirmativo– la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

BOLETÍN DE SUSCRIPCIÓN

Tarifa

	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	3.500 pts.	1.700 pts.
Centros	5.000 pts.	1.700 pts.
Europa	38,5 €	13,5 €
América y resto del mundo	$50 USA	$17 USA

Fotocopiar y enviar a: Revista SUMA. ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Deseo suscribirme a la revista SUMA:
Nombre y apellidos:. . . . . .
Dirección:. . . . . Tno.: . . . . . .
Población: . . . . . CP: . . . . . .
Provincia/país . . . . . CIF/NIF: . . . . . .

Importe

☐ Suscripción a partir del n.°_____ (3 números) _____

☐ N.os sueltos:_____ _____

Total _____

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto).

☐ Transferencia bancaria (Ibercaja: 2085-0168-50-03-000415-98).

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista Suma. Firma y fecha:

☐ Giro postal dirigido a Revista Suma.

Nombre y apellidos: . . . . . .
Código Cuenta Cliente
Entidad | | | | | Oficina | | | | | DC | | | Cuenta | | | | | | | | | |
Banco/Caja . . . . . .
Agencia n.°: . . . . . Dirección: . . . . . .
Población: . . . . . Provincia: . . . . . .

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que periódicamente les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (Fecha y firma):

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

FESPM