SUMA

REVISTA SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS

n.º 43

JUNIO

2003

SUMA 43

junio 2003

Índice

Edita
Federación Española de Sociedades
de Profesores de Matemáticas

Diseño portada
Pablo Cano
Diseño interior
Concha Relancio y M.ª José Lisa
Maquetación
E. Palacián, J. Sancho, D. Sierra

Revista SUMA
ICE Universidad de Zaragoza
C. Pedro Cerbuna, 12
50009-ZARAGOZA

Tirada: 6.800 ejemplares
Depósito Legal: Gr. 752-1988
ISSN: 1130-488X
Impresión: INO Reproducciones. Zaragoza

Las ilustraciones de este número proceden de los números 20 a 43 de la propia revista SUMA.

SUMA 43
junio 2003

Relevo en SUMA

EDITORIAL

N*OVIEMBRE del 95, Suma 20,* Cuatro años por delante*: «contribuir a la permanente mejora de una línea que creemos acertada y garantizar que siga siendo la plataforma de intercambio que ha sido durante sus años de vida». Inician su aventura particular Emilio y Julio, sumados al camino iniciado por Rafael Pérez, en esta revista.*

Junio del 99: «Agradecemos a los socios y suscriptores el aprecio demostrado en sus comunicaciones que nos ha alentado a continuar en esta labor, sin dudarlo, una de las más gratificantes a las que hemos dedicado nuestro esfuerzo». Con estas modestas palabras respondían E&J a la decisión unánime y satisfacción de la Junta directiva por su decisión de continuar al frente de la revista.

Junio del 2003, me gustaría que las palabras anteriores, volvieran a repetirse, pero...

Con este número que ahora estás leyendo se cierra el periodo más largo y fecundo de esta Revista.

No soy yo el más indicado para escribir esta despedida a la dirección más duradera, hasta ahora de nuestra revista. Con ellos me une una gran amistad, antes, durante y después de su paso por esta dirección.

La revista SUMA, allá por el 95 no estaba en sus mejores momentos. Entonces, casi tímidamente Julio y Emilio me dijeron que estaban dispuestos a asumir colegiadamente la dirección de la revista. La idea me pareció excelente, como eran socios de la Sociedad Aragonesa, me correspondió presentarlos a la Junta de aquel momento.

Algunas suspicacias, reticencias, a la bicefalia entonces. Hoy después de ocho años se ha demostrado que ha sido una fórmula estupenda, tanto que se va a volver a repetir.

En el primer haber de Emilio y Julio hay que poner la rigurosidad a la hora de editar la revista, casi sin erratas, y siempre puntuales con la fecha de envío. Si algún retraso hubo, creo que no se les puede achacar a ellos, sino o bien a algún ocupado colaborador, o incluso a problemas de distribución o correos.

En segundo lugar quiero destacar, la calidad de la revista, desde el primer número que ellos prepararon, tanto por las elecciones de las portadas –gracias también a José Luis Cano por sus colaboraciones–, como por las ilustraciones, como por la tipografía elegida.

No quiero olvidar a Javier Pola, que desde la trastienda, con su trabajo callado y eficaz ha colaborado especialmente en actualizar las listas de socios y suscriptores de la revista. Vaya también mi agradecimiento al equipo colaborador: consejo de redacción, consejo editorial, maquetación y diseño.

Sobre todo creo que han hecho todos ellos el trabajo con cariño, con un cariño enorme a muchas cosas: en primer lugar a sus compañeros de profesión, y en segundo a la obra bien hecha, en este caso la revista bien hecha.

GRACIAS, por vuestro trabajo, «Bon viatge per als guerrers que al seu poble són fidels». Esperamos que sigáis colaborando con esta revista y con esta Federación en lo sucesivo.

Gracias para Julio y Emilio y ENDABAN, para Inmaculada y Franchi.

Si hace 8 años recibí con alegría la idea de Emilio y Julio, con la misma recibí la primera llamada, hace algunos meses de Francisco Martín Casalderrey (del que como veis sé su nombre completo: Franchi), en la que me sugería la posibilidad de renovar la dirección de SUMA, en bicefalia de nuevo con Inmaculada Gil.

De Franchi, os puedo decir que le conozco desde hace años, pues fue de los fundadores de la Sociedad Aragonesa, vicepresidente, yo era su chófer. Pero es además socio de otras sociedades de la Federación, por razones diversas. Inmaculada, pertenece al Grupo Azarquiel de Matemáticas de Madrid, también es veterana en su dedicación a la enseñanza de las matemáticas. Ambos tienen larga experiencia. Sólo tienen un problema, un reto: mantener y mejorar la revista que ahora reciben plenamente consolidada en el mundo de la educación matemática.

Espero que dentro de cuatro, o mejor de ocho o doce años, podamos decir que esta revista sigue siendo el referente más importante para los profesores de matemáticas de este país.

Quan surts per fer el viatge cap a SUMA,
has de pregar que el camí sigui llarg,
ple d'aventures, ple de coneixences

Vuestra es ahora la voz y la palabra.

Florencio Villarroya

Presidente FESPM

SUMA 43
junio 2003, pp. 5-6

Han pasado ocho años

Julio Sancho Rocher
Emilio Palacián Gil

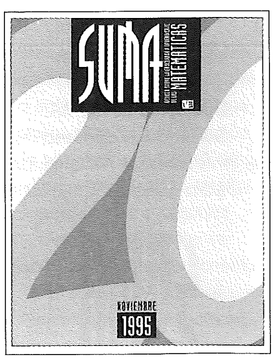
DESPEDIDA

EN NOVIEMBRE DE 1995 apareció el número 20 de SUMA. Con él nos estrenamos en una apasionante aventura, la de dirigir la revista de la Federación, que había nacido hacía siete años en Granada de la mano de Rafael Pérez y que en una segunda etapa dirigió Sixto Romero. Era un proyecto ya cuajado y que era preciso continuar.

En ese número 20 escribíamos un artículo, a modo de presentación, titulado «Cuatro años por delante», en el que exponíamos nuestras ilusiones, nuestro proyecto y también, aunque de forma muy velada, nuestra preocupación por la responsabilidad que asumíamos. Finalizábamos esta presentación con las siguientes palabras:

> Deseamos, con la colaboración de socios, suscriptores y lectores, poder cumplir una buena parte de estas intenciones y que dentro de cuatro años, en el número 31 de SUMA, podamos despedirnos y que al pasar esta bonita aventura a otros compañeros de la Federación siga siendo tan atractiva y sugerente como nos pareció a nosotros cuando presentamos el proyecto que ahora empieza a materializarse.

Y pasaron los cuatro años y llegó el número 31 y la aventura nos seguía pareciendo tan atractiva y sugerente como al principio, lo que nos llevó a presentar otro proyecto por un nuevo periodo de cuatro años y ya han pasado los ocho años... Y, aunque SUMA nos sigue pareciendo tan atractiva y sugerente como en el noventa y cinco, es ya hora de pasar el relevo a otros compañeros de la Federación.



Las razones por las que decidimos no presentarnos a la reelección por un nuevo periodo son muy claras. No vamos a ocultar un cierto cansancio personal, pero el motivo fundamental es nuestra firme convicción de que una empresa de este tipo hay que dejarla cuando la ilusión está todavía intacta, cuando las cosas van saliendo razonablemente bien, cuando no se nos cuestiona..., y no esperar a que la rutina llegue, a que el entusiasmo se vaya diluyendo, a realizar las cosas de forma mecánica... en definitiva a llegar a hacer una SUMA vulgar y sin nigún interés. Resulta bastante difícil, y es cuestión de tiempo, crear y consolidar una revista del tipo de la nuestra, pero conseguir que vaya languideciendo y al final desaparezca es muy fácil.

Ahora podría ser el momento de hacer balance de la revista en este periodo, con sus luces y sus sombras, pero esta tarea la dejamos a los lectores, que con seguridad lo harán con mayor objetividad.

Lo que sí queremos dejar patente de forma explícita es nuestra gratitud a muchas amigas y amigos que han prestado su ayuda para que SUMA haya seguido adelante:

A los sucesivos presidentes, secretarios generales y demás cargos unipersonales de la Federación, así como a todos los presidentes de las sociedades que, desde la Comisión Ejecutiva y la Junta de Gobierno, han confiado siempre en nosotros, nos han alentado constantemente y nos han dejado hacer nuestra tarea con entera libertad y sin la más mínima injerencia.

Al Consejo Editorial, Consejo de Redacción y al grupo de asesores, que con sus atinados consejos nos han guiado en la siempre difícil tarea de seleccionar los materiales que han sido publicados; sus recomendaciones han servido en no pocas ocasiones para que los autores rehiciesen su trabajo y así mejorasen notablemente.

A los autores (en ocasiones con un amplio currículo a sus espaldas y en otras con su ilusionante primer trabajo) que nos han confiado sus originales y que, en definitiva, han sido los verdaderos protagonistas de esta historia. No podemos olvidarnos de aquellos a los que no hemos podido publicar sus artículos por la imprescindible selección que hemos debido realizar, al aumentar paulatinamente durante este periodo el número de trabajos recibidos.

A todas aquellas personas a las que hemos solicitado colaboraciones en temas muy diversos: artículos en los primeros momentos en que escaseaban; recensiones de materiales y libros (en especial las «largas» que iniciaban la sección y que sabíamos que constituían un verdadero compromiso); coordinación y elaboración de la sección de informes: crónicas (sobre todo, hemos mareado a los coordinadores de olimpiadas, jaem y seminarios); artículos y crónicas con motivo de algún acontecimiento o efemérides; material gráfico para ilustraciones, etc.

A los amigos que hace cuatro años les vendimos la idea de los «rincones» y a lo largo de estos once últimos números han cumplido escrupulosamente con su tarea sin fallar en un solo número.

Finalmente, nos vamos a permitir citar algunos nombres propios. Florencio Villarroya, «culpable» de alguna manera de habernos metido en este lío, ha estado a nuestra disposición para todo, desde coordinar un informe, hacer recensiones o escribir algún editorial, pasando por cedernos fotografías, hasta ser «mozo del almacén». José Javier Pola, que no teniendo nada que ver con las matemáticas pero mucho con la amistad, ha llevado de forma admirable la difícil y engorrosa tarea de la administración y distribución. Daniel Sierra, que reúne en su persona la faceta de matemático y la de profesional de las artes gráficas, ha maquetado con escrupulosidad una buena parte de la revista. Y es de justicia agradecer a nuestras familias la paciencia que han tenido con nosotros en estos años; no sabemos si comparten eso de que SUMA «es una aventura sugestiva y gratificante», por si acaso no lo hemos preguntado nunca, pero sí es cierto que han dejado de ver bastantes películas y se han quedado en casa algunos fines de semana; Reyes y María José: muchas gracias por vuestra comprensión.

Ya sólo nos resta pasar los trastos a nuestros sucesores. Cuando nos enteramos de que Inmaculada Fuentes y Francisco Martín Casalderrey habían decidido presentar su proyecto para aspirar a la Dirección de SUMA, se nos diluyó cualquier incertidumbre sobre el futuro de la revista. Conocemos desde hace bastante tiempo a los dos y sabemos de sus cualidades; sus ganas de trabajar, capacidad, imaginación, afabilidad e ilusión están fuera de toda duda. Además, es seguro que para ellos SUMA es también una aventura sugestiva y gratificante. Inma y Franchi (perdón, Francisco) ¡mucha suerte! y a todos ¡hasta siempre!

Emilio Palacián
Julio Sancho
Directores de SUMA.
Sociedad Aragonesa
de Profesores de Matemáticas
«Pedro Sánchez Ciruelo»

SUMA

SUMA 43
junio 2003, pp. 7-21

Una experiencia de Enseñanza Asistida por Ordenador*

Alfredo Méndez Alonso

En este trabajo se pretenden mostrar los resultados de una experiencia que se realizó con el objetivo principal de valorar la efectividad del ordenador como recurso didáctico, en relación con la enseñanza clásica de la lección magistral, contrastando así la validez de unos programas referidos a unidades didácticas que pretendían la comprensión de conceptos matemáticos. También se muestran análisis adicionales y algunas características que se deberían de tener en cuenta a la hora de diseñar herramientas informáticas con fines educativos.

ARTÍCULOS

PARA UNA PRIMERA etapa de recogida de información, sobre los alumnos que participaron en las experiencias, se utilizaron diferentes pruebas (analizadas en *Descripción de la experiencia*), y teniendo como base dichas pruebas y el conocimiento de los profesores que impartían clase, fueron seleccionados los diferentes grupos experimentales (los que aprenderían los temas a través de los programas tutoriales).

Los alumnos seleccionados para recibir la enseñanza a través de los programas informáticos rellenaron un cuestionario sobre diversas facetas relacionadas con «la informática». Cabe destacar que los alumnos mostraban poco interés respecto de estos temas, en contra de la sensación generalizada de que las nuevas tecnologías interesan a la mayoría de los adolescentes.

Pese a la falta de interés por aplicaciones informáticas relacionadas con la enseñanza/aprendizaje, la experiencia fue acogida favorablemente, incluso con entusiasmo, seguramente por la novedad. Pero esta motivación inicial fue decayendo poco a poco. La razón que mencionaban los alumnos era la preocupación ante el fracaso en las notas, pero yo creo que también existía una gran inseguridad al enfrentarse ante conocimientos nuevos y de una forma diferente.

Finalizadas las experiencias y transcurridos unos días para que los estudiantes pudieran repasar los conceptos estudiados con los dos tratamientos de enseñanza, se realizaron las pruebas finales de conocimiento, que fueron diseñadas por los profesores de secundaria que participaban en la experiencia.

También merece la pena destacar que los alumnos que realizaron la experiencia con herramientas informáticas se

* Este trabajo está elaborado con los datos del Proyecto C9548595 de OTT de la UPM subvencionado por la Secretaría General de Educación y Formación Profesional del MEC.

dieron cuenta de que apreciaban mucho la labor del profesor en el aula, ya que no sólo era capaz de resolver dudas sobre aspectos del tema que se explicaba, además relacionaba dichos contenidos con otros anteriores y de otras asignaturas.

Se recoge aquí una explicación de la fase de intervención, así como de todos los problemas que se presentaron.

Con los resultados obtenidos y tras el análisis de las experiencias y los primeros resultados, se detectaron los inconvenientes producidos en la experiencia y las posibles mejoras que se podían hacer en los programas utilizados. De todo ello se da cuenta en este artículo en las secciones *Análisis estadístico de los datos, Estudio comparativo de la experiencia* y *Sugerencias.*

Descripción de los programas utilizados

Los programas informáticos que consideramos fueron aquellos que se podían encontrar sin dificultad en tiendas de informática no excesivamente especializadas, y en establecimientos como grandes superficies. Analizamos material didáctico presentado en el *III Congreso de Tecnologías Aplicadas a la Enseñanza de la Electrónica,* celebrado en Madrid, donde se exhibieron diversas herramientas de software que, si bien no estaban orientadas a los temas objeto del estudio, nos sirvieron para conocer las características y los problemas que suelen aparecer en este tipo de aplicaciones, indicándonos las posibles modificaciones que se deberían considerar para su mejora. También participamos en un grupo de trabajo del Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad Politécnica de Madrid, donde se analizan diversas herramientas informáticas orientadas a la enseñanza de materias específicas del campo de las Matemáticas en la universidad, grupo de trabajo que continúa en la actualidad, aunque en general el material tiene un nivel considerablemente superior al que deseábamos. Con el fin de completar el trabajo de recogida de información se realizaron diversas búsquedas a través de Internet.

De las aplicaciones disponibles seleccionamos dos, que se presentaron en sendos Trabajos Fin de Carrera desarrollados bajo la tutela de la Profesora D.ª Rosario Franco, adscrita al Departamento de Matemática Aplicada de la EUIT de Telecomunicación. Los programas informáticos que se eligieron para las experiencias fueron el trabajo fin de carrera titulado *Estudio de funciones* (Villalba, 1998), y el proyecto fin de carrera titulado *La derivada: concepto y aplicaciones* (Aguirrebeña, 1997), si bien tuvimos que hacer pequeñas modificaciones para adaptarlos a los niveles educativos de los alumnos que realizarían las experiencias.

Con los resultados obtenidos y tras el análisis de las experiencias y los primeros resultados, se detectaron los inconvenientes producidos en la experiencia y las posibles mejoras que se podían hacer en los programas utilizados.

En las aulas de informática del instituto, donde se desarrolló la experiencia, los ordenadores no tenían lector CD-Rom, lo cual era una limitación muy importante a la hora de elegir los programas tutoriales de intervención, por lo que el soporte del software son disquetes; los dos programas tratan el área concreta de las matemáticas que se deseaba experimentar, esto representaba una ventaja para el alumno que realizaba la experiencia, ya que, en el caso de utilización de otros programas hubiera tenido que recibir instrucciones de localización y hubiera perdido tiempo en buscar el contenido concreto.

Descripción de la unidad didáctica La derivada: concepto y aplicaciones

Los objetivos generales son:

1. Que la unidad didáctica sirva como una alternativa a las clases tradicionales.
2. Aprendizaje del concepto de derivada y sus aplicaciones de forma amena y fácil de entender a través del ordenador.
3. Interfaz amigable, es decir mecanismo de comunicación entre el usuario y el sistema que permita acceder fácilmente a cualquier parte de la aplicación, seleccionar temas o conceptos que desee estudiar, siempre apoyado con imágenes, fondos y gráficos que motiven al alumno a estudiar la unidad didáctica.
4. Que la unidad didáctica sirva de introducción a las nuevas tecnologías y a las posibles unidades didácticas posteriores.

Los objetivos específicos son:

1. Calcular la tasa de variación media e instantánea distinguiéndolas.
2. Calcular la derivada de una función en un punto.
3. Analizar el concepto de derivada de una función en un punto.
4. Interpretar geométricamente la derivada de una función en un punto.

5. Calcular derivadas sucesivas de una función.
6. Manejar el álgebra de derivadas.
7. Relacionar los conceptos de derivada y continuidad de una función en un punto. Para lo cual, los contenidos se agrupan en temas independientes entre sí, y el orden en que aparecen son los que podemos ver en la figura 1.

Cada tema contiene:

1. Gráficas que permiten dotar a los temas de dinamismo, vistosidad y colorido. Es un elemento importante para el proceso de aprendizaje de los diferentes conceptos que aparecen en la unidad y hace que éste sea lo más ameno y divertido posible (ver figura 2).
2. Problemas resueltos que sirven al alumno para comprender los conceptos matemáticos estudiados y estructurados en tres partes: enunciado, planteamiento y solución. El alumno puede retrasar el planteamiento o la solución del problema hasta que él lo haya intentado realizar.
3. Anexo de problemas prácticos. Al final de todos los temas, hay una colección de problemas donde el alumno puede seguir mejorando y aplicando los conocimientos adquiridos en el estudio de la unidad. No tienen solución para obligar al alumno a resolverlos. Son problemas eminentemente de cálculo.
4. Anexo de problemas para aplicar. Aquí, para resolverlos, se deben aplicar todos los conceptos aprendidos hasta el momento en los diferentes temas de la unidad. No están resueltos y son más complicados que los anteriores.
5. Anexo de cuestiones teóricas, cuyo objetivo consiste en mostrar al alumno aquellos aspectos relativos al desarrollo teórico más importante de los conceptos matemáticos que ha aprendido.

Toda la unidad se estructura a través de una pantalla donde reside el menú principal de la aplicación...

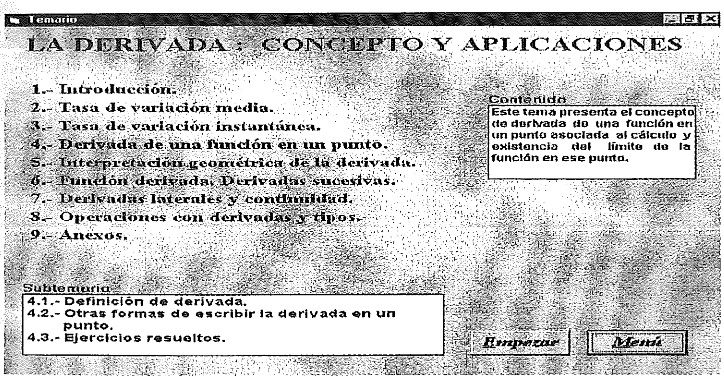


Figura 1

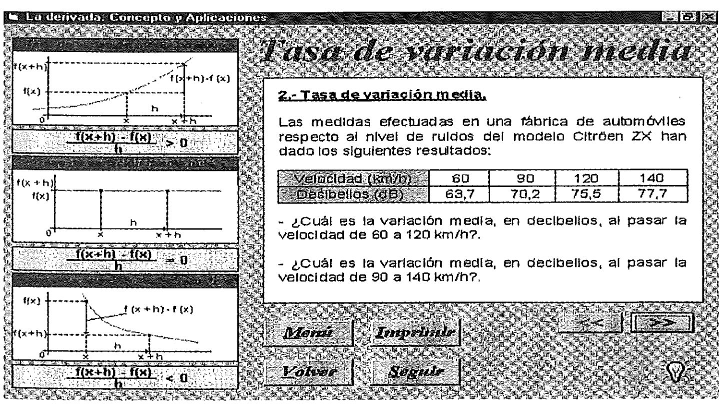


Figura 2

En la unidad teórica aparecen otros anexos que son Reglas de Derivación y Derivadas de funciones elementales.

El lenguaje de programación elegido es Microsoft Visual Basic, ya que permite la creación de aplicaciones bajo entorno Windows consiguiendo que la aplicación sea compatible con estos sistemas operativos. Toda la unidad se estructura a través de una pantalla donde reside el menú principal de la aplicación, y en todas las pantallas está disponible una pantalla de ayuda sencilla, que permite conocer en todo momento qué es lo que se puede hacer en las pantallas de la unidad. También esta pantalla explica el funcionamiento de los botones que están presentes en cada pantalla.

Descripción de la unidad didáctica Estudio de funciones

Los objetivos generales son:

1. Que la unidad didáctica sirva de introducción a este tipo de tecnologías.
2. Que la unidad didáctica sirva como una alternativa a las clases impartidas con el método tradicional.
3. Enseñar el concepto de función de forma amena y fácil de entender a través del ordenador.
4. Interfaz amigable, que permita acceder fácilmente a cualquier parte de la aplicación, seleccionar temas o conceptos que desee estudiar, siempre apoyado con imágenes, fondos y gráficos que motiven al alumno a estudiar la Unidad Didáctica.

Mientras que los objetivos específicos son:

1. Identificar y calcular el dominio y la imagen de una función dada.

2. Reconocer mediante su gráfica las propiedades básicas de las funciones.
3. Operar don funciones.
4. Representar funciones elementales.
5. Reconocer y usar las funciones elementales.
6. Conocer las propiedades de las funciones elementales.

Cada uno de los siguientes conceptos forman un tema dentro de la unidad didáctica. Los temas son:

- Concepto de función. Dominio e imagen de una función. Representación de funciones. Determinación de funciones. Operaciones con funciones.
- Propiedades básicas de las funciones: simetría, periodicidad, acotación, y crecimiento y decrecimiento.
- Funciones elementales: polinómicas, racionales, trigonométricas, hiperbólicas, exponencial y logarítmica.
- Test de autoevaluación

Cada tema contiene:

1. Gráficas, para explicar con mayor claridad tanto los conceptos como los ejemplos y los ejercicios del tema. Son un elemento muy importante en esta unidad debido al tema que se estudia, pues muchas funciones se pueden definir a través de su gráfica.
2. Ejemplos, que apoyan las explicaciones de los conceptos del tema y ayudan a su comprensión.
3. Ejercicios, en los que se mostrará el enunciado únicamente y tras un tiempo adecuado, suficiente para que el alumno haya intentado realizar el ejercicio por su cuenta, se muestra su resolución.

Al final de la unidad hay un test de autoevaluación dividido en test teórico y test práctico. Cuando se realiza el test teórico se van mostrando de una en una, 50 cuestiones teóricas y se da al usuario la opción de que conteste verdadero o falso dentro de un tiempo determinado. Si el usuario contesta correctamente al menos 35 cuestiones, entonces se considera *apto* y pasa a ser evaluado por el test práctico. Si no alcanza los 35 aciertos finaliza el test, se le comunica que no ha alcanzado un nivel de conocimientos mínimos. Cuando se realiza el test práctico, en la ventana se van mostrando las diferentes cuestiones con las opciones correspondientes (*A, B, C*...) para que el usuario pueda elegir la correcta. Al acabar el test práctico, cada acierto se valora con 0,25 puntos y se le comunica al alumno la nota obtenida.

Al igual que el otro programa de intervención, está realizado con Microsoft Visual Basic, pero en este caso la unidad didáctica se estructura en forma de ventanas pues así se facilita enormemente la organización de los distintos contenidos matemáticos. Un ejemplo de pantalla es la figura 3.

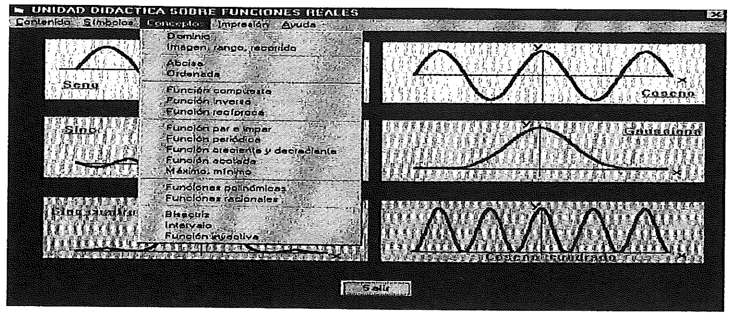


Figura 3

Al final de la unidad hay un test de autoevaluación dividido en test teórico y test práctico.

La «barra de menús» consta de los siguientes menús:

- *Menú contenido,* que variará según la ventana donde aparezca y se utilizará para que el usuario pueda desplazarse por las diferentes ventanas de los diversos contenidos matemáticos.
- *Menú símbolos,* es un menú que será siempre igual para todas las pantallas de la unidad y contiene los diferentes símbolos utilizados en la unidad.
- *Menú conceptos,* es un menú que es igual en todas las pantallas de la unidad donde aparece. Contiene en sus opciones los conceptos más utilizados en la unidad. Cuando el usuario elija un concepto, se mostrará en pantalla un mensaje que exponga una definición breve y clara del concepto solicitado.
- *Menú impresión,* es un menú que será siempre igual para todas las pantallas de la Unidad donde aparezca.
- *Menú ayuda,* que incluye opciones sobre aspectos generales de la aplicación, sobre el significado de los diferentes símbolos que aparecen, sobre los conceptos, sobre las opciones de impresión y sobre el funcionamiento del programa.

Descripción de la metodología utilizada

Para la realización de la experiencia se eligieron cuatro grupos de diferentes clases: uno de 4.° de ESO, uno de 1.° de

Bachillerato de Ciencias Sociales y dos de 1.° de Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud, cada uno de ellos bajo la responsabilidad de un profesor de secundaria.

Después de haber sido elegido el software con el que se iban a realizar las prácticas, se realizaron las oportunas variaciones en ellas para adaptarlas a los niveles educativos. Se optó porque cada profesor de los cursos considerados impartieran los temas con los mismos contenidos teóricos, nomenclatura y ejemplos que los que estudiaran los alumnos del grupo experimental.

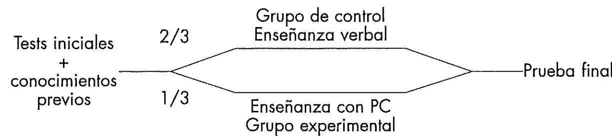
Por los temas elegidos, se decidió que el programa referente a funciones sería sobre el que realizarían las pruebas los alumnos del curso 1.° B de Bachillerato LOGSE modalidad de Ciencias Sociales y Humanidades, y el curso de 4.° de ESO de Matemáticas opción B. Los alumnos de los cursos 1.° D y 1.° E, de primero de Bachillerato LOGSE, modalidad de Ciencias de la Naturaleza y la Salud, seguirían sus prácticas con el programa sobre derivadas.

Por la naturaleza de los temas a tratar y la cantidad del programa que se debía haber impartido, hasta el comienzo de la toma de datos, se decidió realizar las prácticas a la vuelta de las vacaciones de Semana Santa.

Cada aula informática del instituto contaba con diez puestos individuales, por lo que tan sólo podíamos seleccionar a diez alumnos de cada curso para el grupo experimental, lo que implicaba que al final del experimento tendríamos pocos elementos para evaluar. Con tan poca cantidad de muestras consideramos la posibilidad de dos personas por puesto, pero además de las distracciones que podrían sufrir, al final de la experiencia no podríamos saber si los alumnos del grupo experimental aprendían del compañero o de la aplicación que utilizaban.

Cada curso fue dividido en dos grupos: el grupo de control, que recibía la enseñanza de tipo tradicional y que constituía aproximadamente, las dos terceras partes del total; y el grupo experimental, que recibía la enseñanza, exclusivamente, a través de las herramientas informáticas mencionadas y que eran diez alumnos de cada grupo, aproximadamente la tercera parte del curso. Por lo que las prácticas seguirían el siguiente diagrama:

Después de haber sido elegido el software con el que se iban a realizar las prácticas, se realizaron las oportunas variaciones en ellas para adaptarlas a los niveles educativos.



Los datos que recopilamos fueron:

1. Nota media de todas las asignaturas de la evaluación inmediatamente anterior a la realización del experimento, se denota por *Nota previa*.

2. Un test de inteligencia, modelo Test D-70 de Dominós, de Kowrousky y Rennes. Dicho test mide la capacidad de abstracción, la comprensión de relaciones y la capacidad de acomodación conceptual. A la variable la llamamos *Test de inteligencia*. Se incluyó para tener una observación comparativa de los alumnos de dichos cursos con el resto de la población de la misma edad, y resultó ser una observación adicional de cada alumno que no quedaba reflejada en las otras variables.

3. Un examen de conocimientos previos, que se realizó en cada grupo individualmente, y que llamamos *Conocimientos previos*. Estas pruebas fueron elaboradas y calificadas por el profesor de cada curso.

4. Un test de *Actitud ante la informática,* que fue rellenado por los alumnos del grupo experimental de cada curso, y cuyos resultados se agruparon en las variables «se ha tenido contacto con la informática», «el ordenador facilita el aprendizaje», «el ordenador es ameno, entretiene», «el alumno siente interés por la informática», «se tiene curiosidad por las aplicaciones informáticas» y «se está en desacuerdo con la informática didáctica». Este test está concebido teniendo como base otro elaborado por los profesores del departamento universitario y que se había utilizado anteriormente para un proyecto de informática educativa en la UPM.

5. Un examen final común en cada grupo, referido a los temas desarrollados, que llamaremos *Calificación final*. Los profesores que elaboraron las cuestiones de un curso no impartían clase en él, si bien los exámenes de cada curso los corregía el profesor encargado del mismo.

6. Una Guía de observación de los programas utilizados, que realizaron únicamente los alumnos de los grupos experimentales. Dicho test constaba de 25 preguntas con 5 respuestas cada una y de una pregunta abierta. Este dato fue fundamental para la evaluación del software utilizado como recurso didáctico.

Se pensó en realizar otras actividades, que una vez analizadas no fueron tenidas en cuenta. De entre ellas citaremos dos:

a) Dar a cada alumno del grupo experimental fotocopias de la parte que se debía estudiar cada día. Se desestimó por considerar que era un refuerzo que no tenían los grupos de control.

b) Repartir entre todos los alumnos de cada curso una colección de problemas. Dichos problemas se corregirían en clase y, a los alumnos del grupo experimental, se les entregarían fotocopias con las correcciones. También se desechó la idea, ya que al final no evaluaríamos los conocimientos adquiridos mediante las herramientas informáticas.

Estos grupos fueron informados detalladamente de la experiencia que se quería realizar y de qué forma se haría. La experiencia fue acogida, en general, con entusiasmo. *El grupo de 4.°*, seguramente el más heterogéneo en cuanto al alumnado, no presentó ningún temor al uso del ordenador, ya que la mayoría habían cursado o estaban cursando la asignatura de Informática. Ningún alumno de este grupo rechazó la posibilidad de ser elegido para acudir a la sala de ordenadores en lugar de permanecer en su aula habitual de Matemáticas.

Los dos primeros cursos de *Bachillerato de Ciencias* acogieron igualmente la experiencia con entusiasmo, si bien demostraron una cierta inquietud por saber cómo iban a ser elegidos los alumnos que estudiarían la unidad didáctica con el PC. Se les informó, igual que al resto de los grupos, que se haría un sorteo que sería inapelable, con el fin de evitar sesgos de ningún tipo y tener una muestra representativa. Quizás el grupo más reticente a aceptar la experiencia fue el de *1.° de Bachillerato de Ciencias Sociales*, probablemente por ser un grupo poco habituado al uso del ordenador, y tal vez su recelo hacía las Matemáticas, no sólo desde el punto de vista escolar, sino también a nivel particular. No obstante y a pesar de mostrar su deseo de permanecer en clase con su profesor, no hubo una gran oposición a aceptar el resultado del sorteo.

Como ya hemos indicado, antes del comienzo de la fase experimental realizamos una serie de tests y pequeños exámenes. En este período hay que destacar el alto grado de interés y colaboración que prestaron todos los alumnos de todos los grupos. Este interés, seguramente, se debía a la motivación que representa todo aquello que resulta novedoso.

Una semana antes del comienzo de la fase experimental del proyecto, se comunicó a los grupos quienes eran los diez alumnos que debían acudir a la sala de ordenadores durante su hora habitual de Matemáticas mientras durase la experiencia.

En este período hay que destacar el alto grado de interés y colaboración que prestaron todos los alumnos de todos los grupos. Este interés, seguramente, se debía a la motivación que representa todo aquello que resulta novedoso.

Era tiempo de realizar un nuevo test que mediría la actitud ante el ordenador de los alumnos que en breve se iban a sentar delante de un PC para estudiar el nuevo tema. Una vez más, estos alumnos contestaban al test con interés, pero sus ánimos se crisparon cuando supieron que el profesor que les acompañaría sería un nuevo tutor cuya misión era resolver los posibles problemas relativos a la forma de correr las aplicaciones, y algunas explicaciones respecto a la forma de utilizar la herramienta informática, eludiendo realizar cualquier tipo de aclaración sobre los contenidos matemáticos que aparecieron en las unidades consideradas. Esto suponía, desde el punto de vista de los alumnos seleccionados, un agravio comparativo con el resto de sus compañeros, por lo que se procedió a justificar este hecho explicándoles que precisamente se pretendía evaluar la eficacia de estos programas cuando un alumno los utiliza solo, frente a la enseñanza tradicional en el aula. A pesar de comprender los motivos, algunos siguieron mostrándose recelosos.

En las primeras sesiones hubo respuesta del alumnado en cuanto al trabajo personal, que fue decayendo porque ellos consideraban que no era suficiente para alcanzar los objetivos matemáticos del curso. No hemos de olvidar que este decaimiento aumenta según se avanza en el curso académico. La explicación era que los programas informáticos resultaban demasiado rígidos, por lo que era difícil la adaptación a la diversidad, y trajo como consecuencia que algunos alumnos podían seguir el software mientras que a otros les resultaba imposible; estos últimos alumnos echaban en falta el apoyo de un profesor que resuelve cuantas dudas matemáticas les surgen, y que con cierta regularidad hace una evaluación del alumnado y retoma los conceptos y procedimientos que no quedan demasiado claros.

Muchos alumnos ocuparon gran parte de su tiempo copiando en sus cuadernos la información teórica y los ejercicios del programa; les resultaba difícil asimilar los conceptos siguiendo únicamente la lectura de la información en pantalla, sin un profesor que interpretase lo escrito.

Dada la proximidad del final de curso y a la vista de la cada vez más palpable angustia que se creaba en el grupo experimental, se decidió, salvo en el grupo de 4.° de ESO acortar un poco la fase experimental y comenzar cuanto antes el repaso en clase de lo estudiado, esta vez con el grupo completo, según estaba previsto.

Con la realización de un nuevo test de evaluación de los programas, por parte de los alumnos del grupo experimental, y de las diversas pruebas objetivas que cada profesor utilizó para la evaluación del alumnado, se dio por concluida la fase experimental.

En resumen, las dificultades surgidas se derivan básicamente bien de la falta de autosuficiencia del alumnado para estudiar una unidad didáctica solos, bien de la angustia que les crea el temor a un suspenso difícilmente recuperable en su opinión.

Análisis estadístico de los datos

El número de estudiantes considerados fue de 128, aproximadamente 32 por curso, de los cuales 40 de ellos constituyeron los cuatro grupos experimentales. Dadas las diferencias entre cursos, grupos y software empleado, los análisis que realizamos se subdividen en diferentes apartados. Primero analizamos las observaciones previas a la realización de la experiencia, después comparamos las calificaciones obtenidas en la prueba final y, por último, las opiniones del grupo experimental sobre el software empleado.

Los análisis estadísticos habituales sobre este tipo de experimentos incluyen una metodología de análisis de la varianza para estudiar los diferentes métodos de enseñanza, pero en este caso hemos preferido realizar, simplemente, un examen de los datos, aunque cuando el tamaño de la muestra lo permite hemos añadido algún otro. Se puede argumentar que es necesario un análisis más formal, pero en este caso no nos parecía técnicamente correcto, ya que con muestras tan pequeñas es de dudosa validez la verificación de la hipótesis de que dicha muestra proviene de una población con distribución normal.

Análisis de los datos iniciales

Primero analizaremos los resultados de las tres primeras variables (*nota previa, test de inteligencia* y *conocimientos previos*). El resumen de dichos datos se presenta en la tabla 1, donde las primeras columnas describen el grupo y la variable, las siguientes sirven para describir un valor alrededor del cual se concentran los datos y el grado de concentración de los mismos, y el último grupo de columnas es para dar una idea de la forma en que se distribuyen.

Para que los alumnos de los grupos de control y experimental sean representativos de la misma población, utilizamos los datos de esta tabla, así como los gráficos boxplot (ver figura 4).

Grupo	*Variable*	*N*	*Media*	*Mediana*	*Desviación típica*	*Rango*	*Asimetría estándar*	*Curtosis estándar*
1.° B	Nota previa	33	5,417	5,5	1,051	4	–1,025	–0,016
1.° D	Nota previa	35	4,570	4,375	1,914	8	0,644	–0,952
1.° E	Nota previa	29	5,591	5,625	1,287	6	0,625	–0,220
4.° ESO	Nota previa	30	5,822	5,575	1,180	5	2,616	1,391
1.° B	Test de inteligencia	31	30,806	30	3,198	8	0,917	1,640
1.° D	Test de inteligencia	29	32,000	31	3,495	14	1,031	–0,296
1.° E	Test de inteligencia	28	31,607	31,5	3,107	14	–1,281	0,699
4.° ESO	Test de inteligencia	29	30,586	30	2,771	10	0,020	–0,827
1.° B	Conocimientos previos	32	2,969	3	1,596	6	0,360	–0,922
1.° D	Conocimientos previos	34	6,456	6,5	1,281	5	–0,353	–0,466
1.° E	Conocimientos previos	25	5,960	6	1,428	5	–0,797	–0,853
4.° ESO	Conocimientos previos	31	4,194	4	1,289	4	1,677	1,959

Tabla 1

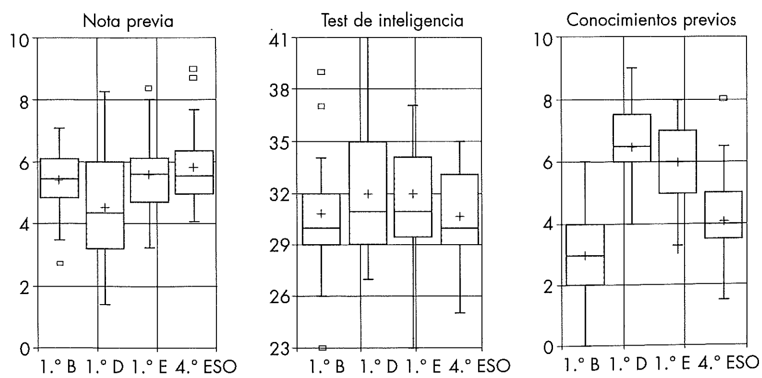


Figura 4

Como puede observarse no existen diferencias significativas entre los grupos considerados, salvo en el examen de conocimientos previos. En el Box-Plot de dicha variable se observa que la dispersión de las puntuaciones obtenidas es semejante entre todos los grupos, pero que las puntuaciones del grupo 1.° B son más bajas, y con mayor dispersión, que la del resto de grupos.

En las calificaciones de las notas previas se debe destacar la mayor dispersión en el grupo 1.° D, así mismo se observa que en los otros tres grupos aparecen estudiantes que destacan del grupo (uno en 1.° B, otro en 1.° E y dos en 4.° ESO).

A todos los alumnos, como ya hemos dicho, se les aplicó un test de Dominós. Se aprecia que no existen diferencias significativas, aunque hay dos sujetos que tienen cierta tendencia al alza dentro de su grupo (1.° B).

Ya hemos mencionado que, en general, no vamos a poder verificar la hipótesis de que las muestras provienen de poblaciones normales, puesto que el número de alumnos por grupo es muy reducido, pero sí hemos realizados gráficos que representan la distribución y la distribución normal que mejor las aproxima, para las tres variables (figura 5). Como puede verse, las notas previas son las que mejor se ajustan, y el test de inteligencia y las calificaciones del examen de conocimientos previos tienen discrepancias debido, fundamentalmente, a que dichas variables toman valores enteros. La simetría y la concentración de los datos nos permitirían aproximar dichas variables por distribuciones normales.

la base de las tres variables analizadas y contando con el conocimiento que tenía cada uno de los profesores del Instituto sobre el grupo al que impartía clase.

La primera comparación la hicimos con la variable *nota previa* y entre cada curso. Resumimos los datos de la variable *nota previa* en la tabla 2, donde todas las columnas contienen las mismas características reseñadas en la tabla 1, salvo la segunda columna que muestra el grupo de control o el grupo experimental y que el rango ha sido excluido por ser los grupos de diferente tamaño.

Curso	*Grupo*	*N*	*Media*	*Mediana*	*Desviación típica*	*Asimetría estándar*	*Curtosis estándar*
1.° B	Control	23	5,223	5,25	1,004	–0,959	0,666
1.° B	Experimental	10	5,862	6,187	1,147	–1,011	–0,336
1.° E	Control	25	4,432	4,125	2,067	0,68	–0,882
1.° E	Experimental	10	4,912	4,437	1,505	0,84	–0,81
1.° D	Control	29	5,59	5,625	1,287	0,625	–0,22
1.° D	Experimental	10	5,312	5,187	1,418	0,507	–0,063
4.° ESO	Control	30	5,822	5,575	1,179	2,616	1,391
4.° ESO	Experimental	9	4,961	4,95	0,483	–0,006	0,89

Tabla 2

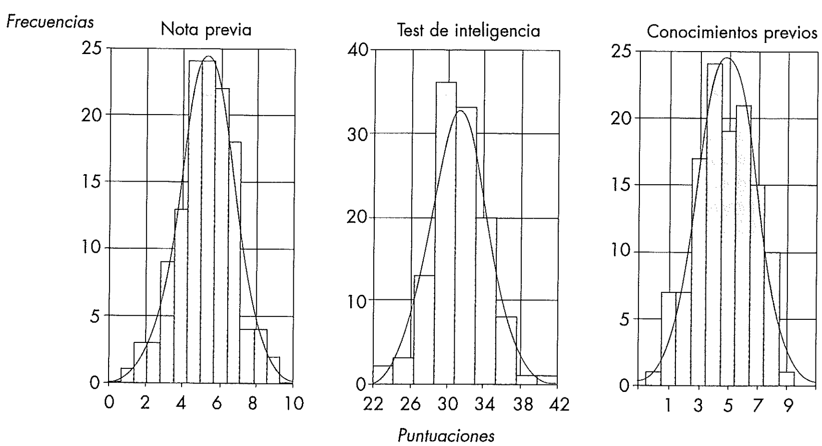


Figura 5

Comparaciones entre los grupos de control y experimental

Dadas las discrepancias entre los cuatro grupos decidimos que los alumnos del grupo experimental (un tercio del total del grupo), debían ser representativos del grupo al que pertenecían, por lo que se realizó una selección sobre

También consideramos los diferentes gráficos box-plot (figura 6) y realizamos contrastes de hipótesis, pero no los incluimos aquí por no considerarlos suficientemente fiables.

Se observa que para los tres cursos de primero de Bachillerato los gráficos para el grupo de control y el grupo experimental son similares, los más parecidos son para el curso de 1.° E, y en los otros dos cursos parecen levemente superiores las calificaciones del grupo experimental. Sin embargo, en el curso de 4.° de ESO las conclusiones no son las mismas ya que las distribuciones de las notas previas presentan una desviación hacia valores superiores, tanto en el grupo de control como en el experimental, y la diferencia más notable surge al observar la concentración en las puntuaciones del grupo experimental. Con respecto a los alumnos del grupo de control de 4.° de ESO sólo podemos concluir que es bastante semejante al de

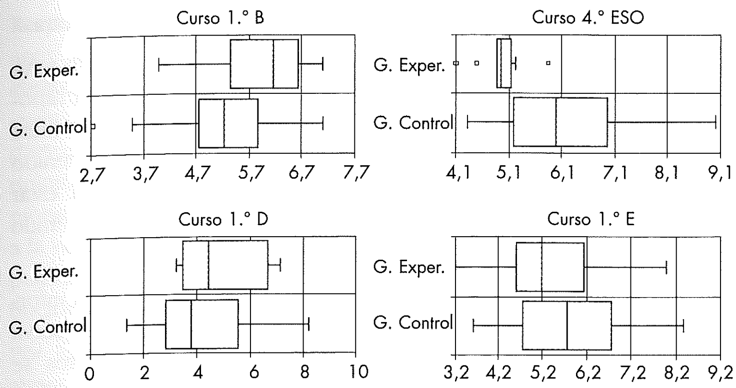


Figura 6

los grupos de primero, pero existen diferencias entre las distribuciones de las notas previas del grupo de control y del grupo experimental del 4.° curso de la ESO que supusimos debida al azar.

Realizando los mismos análisis para las puntuaciones obtenidas con el test modelo D-70, obtenemos la tabla 3, análoga a la anterior, y los gráficos box-plot para esta variable (figura 7).

Los datos de la tabla muestran que en todos los cursos las características entre el grupo experimental y el grupo de control son similares, conclusión que se hace extensiva al contemplar los gráficos box-plot. El curso de 1.° B es el que presenta mayor parecido entre los dos grupos, y con mayor simetría dentro de los mismos; en el curso de 1.° D existe asimetría indicando que las puntuaciones tienden a ser superiores a la media, en el curso de 1.° E existen asimetrías indicando que las puntuaciones tienden a ser menores que la media; por último, en el curso de 4.° ESO las puntuaciones muestran una dispersión que parece concentrar las puntuaciones alrededor de dos valores.

Para los datos recopilados sobre las notas de una prueba de *conocimientos previos* de las materias que se iban a desarrollar con las herramientas informáticas consideramos que había dos programas, diferentes exámenes y diferentes profesores que debían calificar, y, por los resultados conjuntos analizados, se podía pensar que esta variable era la más subjetiva de las analizadas hasta ahora. Los datos aparecen en la tabla 4 y los gráficos box-Plot de cada curso en la figura 8.

Como puede verse las formas de agruparse los valores entre los dos grupos de cada curso son parecidas a las distribuciones de la variable *nota previa*. La conclusión fue que la distribución de las calificaciones del grupo de control y del grupo experimental eran similares, salvo en el curso 1.° E que no difiere en forma, pero sí en la concentración alrededor de valores altos del grupo experimental.

Curso	*Grupo*	*N*	*Media*	*Mediana*	*Desviación típica*	*Asimetría estándar*	*Curtosis estándar*
1.° B	Control	21	30,619	30,0	3,294	–0,101	0,778
1.° B	Experimental	10	31,2	30,5	3,120	2,5	2,951
1.° E	Control	20	32	31,5	3,811	0,972	–0,227
1.° E	Experimental	9	32	31	2,872	0,15	–0,934
1.° D	Control	28	31,607	31,5	3,107	–1,281	0,699
1.° D	Experimental	10	32,1	31,981	2,846	-1,142	–0,337
4.° ESO	Control	29	30,586	30,0	2,771	0,02	–0,827
4.° ESO	Experimental	8	30,25	29,5	2,712	0,389	0,321

Tabla 3

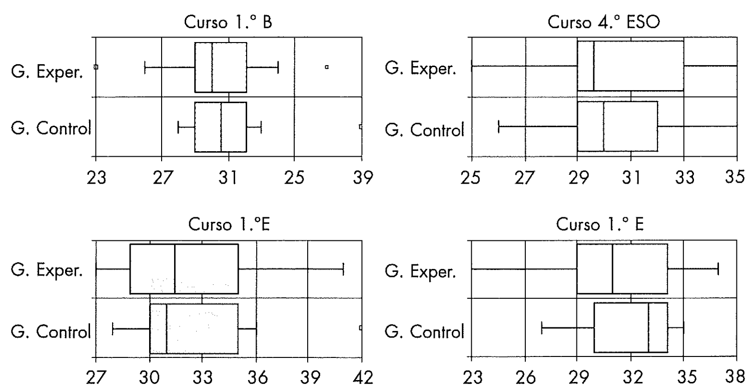


Figura 7

Curso	*Grupo*	*N*	*Media*	*Mediana*	*Desviación típica*	*Asimetría estándar*	*Curtosis estándar*
1.° B	Control	22	3,045	3	1,759	0,076	–0,951
1.° B	Experimental	10	2,8	2,5	1,229	0,602	–0,351
1.° D	Control	24	6,479	6,5	1,289	–0,298	–0,342
1.° D	Experimental	10	6,4	6,25	1,329	–0,227	0,059
1.° E	Control	25	5,96	6	1,428	–0,797	–0,853
1.° E	Experimental	7	6,857	7	1,069	–0,834	0,142
4.° ESO	Control	31	4,194	4	1,289	1,677	1,959
4.° ESO	Experimental	9	4,111	4	0,697	1,563	0,508

Tabla 4

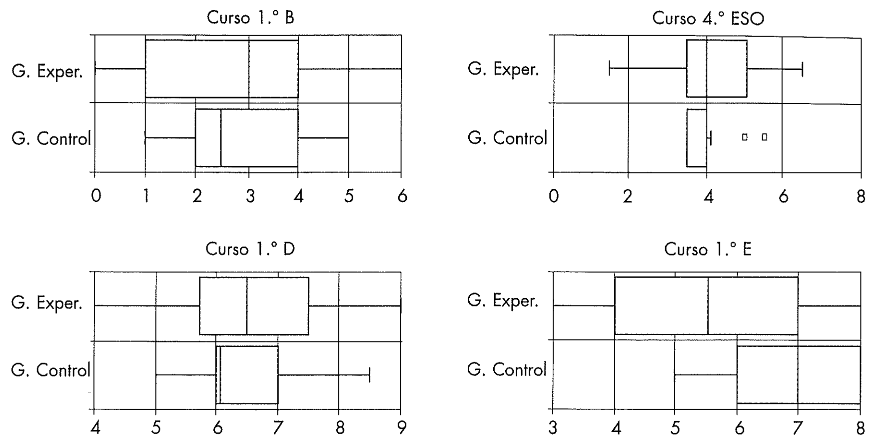


Figura 8

Actitud del grupo experimental ante la informática

Otra variable considerada fue la opinión que tenían los alumnos del grupo experimental sobre cuestiones referentes a la informática.

Para dicho estudio se consideraron 66 preguntas con cuatro posibles respuestas, «Muy poco de acuerdo», «Un poco de acuerdo», «Bastante de acuerdo» y «Muy de acuerdo», y que se agruparon en seis categorías –que definimos a continuación–, aunque algunas preguntas pertenecen a más de una categoría, por lo que estas variables no son independientes. Las características observadas fueron:

1. Tipo A. El alumno ha tenido contacto con la informática (26 preguntas).
2. Tipo B. El alumno considera que el ordenador facilita el aprendizaje (8 preguntas).
3. Tipo C. El alumno considera el uso del ordenador ameno y entretenido (13 preguntas).
4. Tipo D. El alumno siente interés ante la informática (12 preguntas).
5. Tipo E. El alumno siente curiosidad por las aplicaciones informáticas (30 preguntas).
6. Tipo F. El alumno está en desacuerdo con el uso del ordenador en aspectos didácticos (14 preguntas).

Las principales características las resumimos en la tabla 5, que contiene las mismas columnas que otras tablas precedentes, y donde hemos incluido el rango por tener todas las variables el mismo tamaño.

Incluimos el gráfico Box-Plot de todas las variables definidas, considerando las opiniones de los alumnos de todos los grupos experimentales (figura 9).

Merece la pena destacar que no existe semejanza entre los seis tipos considerados, ya que ninguna distribución tiene sus parámetros similares a los de otra.

En cuanto al contacto que habían tenido con la informática existía una bipolarización entre el 40 % de los alumnos que afirmaban que no habían tenido contacto y que el 53 % afirmaba estar bastante de acuerdo en haber tenido contacto con la informática.

Referente a su opinión sobre si la informática facilita el aprendizaje, se observa que la concentración de los datos se produce alrededor de los dos valores centrales —37 % para el menor y el 33 % para el mayor—, pero la diferencia con respecto de la categoría A es que no se bipolarizan, sino que el 70 % de las observaciones se reparten en valores altos.

La opinión mayoritaria es que el uso del ordenador no es ameno: el 53 % en torno a valores de muy poco de acuerdo, y poco de acuerdo el 27 %. También se destacan unas posturas muy radicales, por las que algunos alumnos consideraban el uso del ordenador muy ameno y divertido.

La mayoría de las respuestas, el 70 %, indicaban poco, o escaso, interés por parte de los alumnos respecto a temas relacionados con la informática, si bien existían posturas de mucho interés hacia estos temas, más o menos los mismos alumnos que consideraban el uso del ordenador ameno.

Categoría	*N*	*Media*	*Mediana*	*Rango*	*Desviación típica*	*Asimetría estándar*	*Curtosis estándar*
Tipo A	30	2,16	2,36	2,00	0,58	0,21	-1,17
Tipo B	30	2,22	2,27	2,13	0,61	-1,09	-0,77
Tipo C	30	1,88	1,69	2,50	0,7	2,42	0,51
Tipo D	30	1,89	1,75	2,25	0,56	2,95	1,87
Tipo E	30	2,21	2,24	1,92	0,51	0,17	-0,77
Tipo F	30	1,82	1,79	1,64	0,34	1,32	1,15

Tabla 5

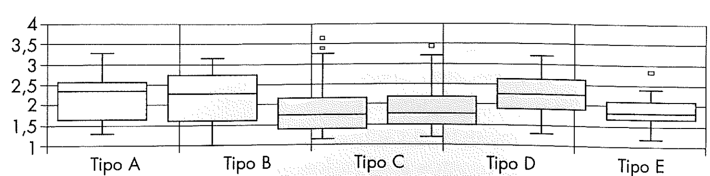


Figura 9. Actitud ante la informática

Respecto a la curiosidad que sentían ante aplicaciones informáticas, debe destacarse que es la variable que más cuestiones tenía en el test, por lo que se disponía de más datos para formar la opinión, pero la distribución de las opiniones es más simétrica que las demás y a la vez la de mayor variación en las respuestas; es la más parecida a una distribución normal.

Por último, la característica de que el alumno estaba en desacuerdo con el uso del ordenador en aspectos didácticos, tenía la vertiente de saber su opinión sobre este tema y, además, comprobar si el test había sido contestado coherentemente. No detectamos ninguna discrepancia severa en las contestaciones, y comprobamos que la distribución de las respuestas era aproximadamente simétrica. Confirmamos que las personas que sentían curiosidad ante aplicaciones informáticas estaban de acuerdo, con reparos, en la utilización didáctica de este tipo de herramientas, mientras que los alumnos que no tenían esta curiosidad estaban en desacuerdo con los fines didácticos del software especializado.

Análisis de las calificaciones finales

Es la última variable recopilada para todos los alumnos y con la que pretendíamos comparar los dos métodos de enseñanza.

El estudio se realiza sobre las calificaciones de un examen común en cada curso, si bien de cada curso dicho examen fue diferente y calificado por profesores diferentes, por lo que cabe esperar que las distribuciones de las notas en cada curso sea diferente. Los exámenes de cada curso fueron elaborados por profesores que no impartían clase en dicho curso, para evitar en alguna medida la influencia subjetiva del profesor del curso.

Analizaremos además, unas pruebas de verdadero/falso y multi-respuesta que realizaron exclusivamente los alumnos del curso de 1.° B.

Características generales

En primer lugar consideramos el conjunto de todas las calificaciones finales de todos los alumnos y de todas los cursos. Mostramos las gráficas box-plot y de proximidad a una distribución normal, donde la distribución tiene media 4,66 y desviación típica 2,22 (figura 10).

La distribución de las calificaciones es asimétrica y no se ajusta mal a una distribución normal, pero al ser exámenes diferentes, la única conclusión es que el conjunto de todas las calificaciones parecen comportarse normalmente y con calificaciones concentradas en valores centrales. Realizamos, a continuación, un análisis comparativo entre las calificaciones finales de cada curso, cuyas principales características estadísticas las resumimos en la tabla 6.

También consideramos los gráficos box-plot entre los cuatro cursos y los dos programas (figura 11).

Como puede apreciarse no existen analogías entre los cursos ni entre los temas de estudio, pero tampoco existen diferencias exageradas entre ellos. Si se realizan análisis de

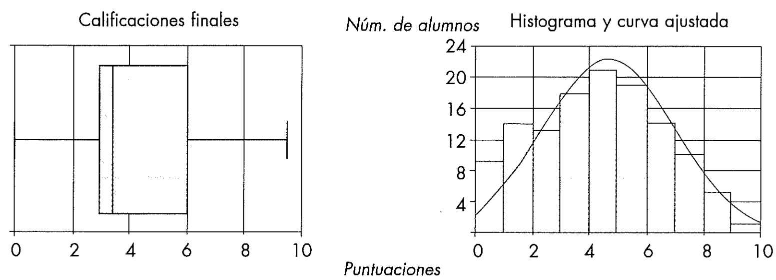


Figura 10

Curso	*N*	*Media*	*Mediana*	*Rango*	*Desviación típica*	*Asimetría estándar*	*Curtosis estándar*
1.° B	33	4,305	4,4	7,9	2,02	−1,114	−0,469
1.° D	33	5,288	5,0	8,5	1,992	0,347	0,146
1.° E	28	6,107	6,5	7,0	1,931	−0,711	−0,746
4.° ESO	31	3,097	3,0	7,0	1,85	2,264	0,598

Tabla 6

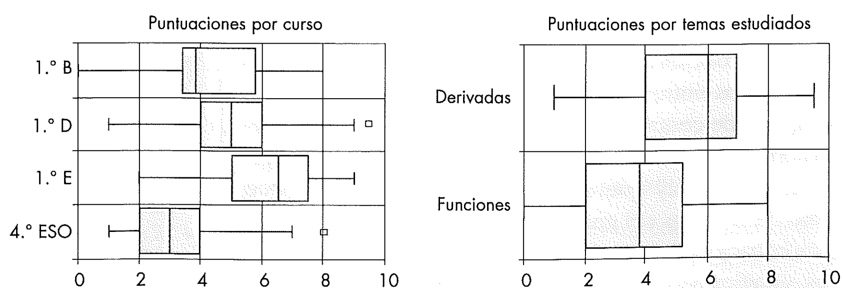


Figura 11

la varianza, considerando como tratamientos los cuatro cursos, o los dos temas estudiados, también se comprueban diferencias estadísticas entre ellos, aunque como ya se ha comentado no se puede asegurar que se cumplan las hipótesis que se deben verificar para utilizar esta técnica correctamente.

Si consideramos las calificaciones finales de los grupos de control y experimental obtenemos la tabla 7 y la figura 12. En esta figura aparece el gráfico box-plot y los intervalos de confianza, con nivel del 99 %, para las medias de las calificaciones finales. También realizamos un análisis de la varianza considerando los dos métodos de enseñanza, aunque recordamos que no es muy fiable (tabla 8).

Curso	*N*	*Media*	*Mediana*	*Desviación típica*	*Asimetría estándar*	*Curtosis estándar*
Control	86	4,88	5,0	2,24	–0,17	–1,27
Experimental	39	4,19	4,1	2,14	0,48	–0,64

Tabla 7

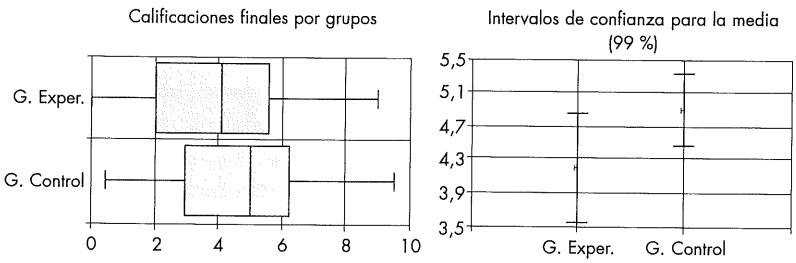


Figura 12

Fuente de variación	*Suma de cuadrados*	*Grados de libertad*	*Media de cuadrados*	*F*	*P-valor*
Entre grupos	12,7149	1	12,7149	2,61	0,1089
En cada grupo	599,868	123	4,8769		

Tabla 8

La tabla 8 indica que la principal fuente de variación es dentro de los grupos, y por ser el P-valor mayor que 0,01 debemos concluir que no existen diferencias estadísticas significativas entre las medias de las calificaciones finales del grupo de control y del experimental. Es la misma conclusión que se puede observar con los gráficos de la figura 12, si bien hay que destacar un pequeño sesgo hacia abajo de las notas del grupo experimental. Realizamos más comprobaciones y resultó que tampoco existían diferencias significativas entre las medianas, ni entre las desviaciones típicas.

Por lo que concluimos que las distribuciones de las calificaciones finales de los grupos de control y grupos de experimentación en cada grupo pueden considerarse semejantes, aunque las calificaciones del grupo experimental eran sensiblemente inferiores.

Análisis por cursos

Para completar nuestro estudio y puesto que los exámenes fueron diferentes realizamos un análisis semejante al anterior pero en cada curso. Las principales características estadísticas de la variable calificaciones finales en cada curso son las que se muestran en la tabla 9.

Los gráficos box-Plot de cada curso se muestran en la figura 13 .

Puede apreciarse que las distribuciones en todos los cursos y en todos los grupos son bastante simétricas y semejantes. Las distribuciones en 1.° B y 1.° E presentan concentración de calificaciones alrededor de valores altos en el caso de los grupos de control, y valores centrales en el caso de los grupos de experimentación, mientras que en el curso de 4.° de la ESO, las calificaciones del grupo de control se agrupan en torno a valores medios y las del grupo experimental se agrupan alrededor de valores bajos. Hay que destacar que las notas del curso 1.° B están más concentradas que en el resto de los grupos, y que el grupo experimental de 4.° de ESO también muestra el agrupamiento de las notas, como ocurría en el caso de las variables de *conocimientos previos* y *notas previas*.

Curso	*Grupo*	*N*	*Media*	*Mediana*	*Desviación típica*	*Asimetría estándar*	*Curtosis estándar*
1.° B	Control	23	4,542	5,1	2,062	–1,068	–0,402
1.° B	Experimental	10	3,76	3,95	1,911	–0,854	0,26
1.° E	Control	23	5,63	6	1,996	0,112	0,449
1.° E	Experimental	10	4,5	5	1,841	0,345	0,126
1.° D	Control	18	6,333	7	1,847	–0,74	–0,563
1.° D	Experimental	10	5,7	5,5	2,111	–0,165	–0,268
4.° ESO	Control	22	3,273	3	1,907	1,867	0,684
4.° ESO	Experimental	9	2,667	2	1,732	1,49	0,287

Tabla 9

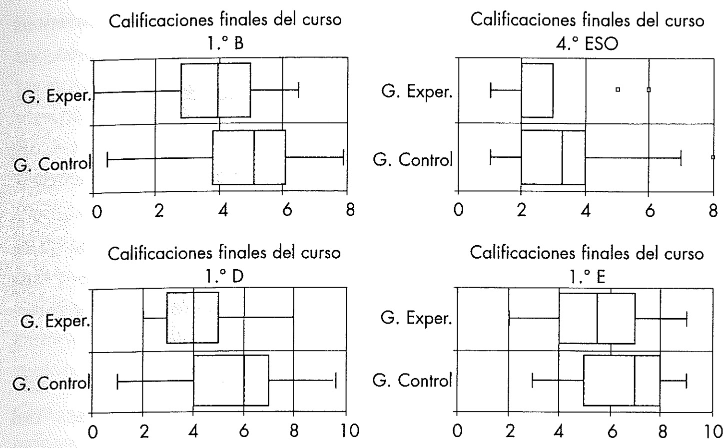


Figura 13

Presentamos los resultados en la tabla 10 y en los gráficos box-plot de la figura 14, para los grupos de control y experimental, del examen de multi-respuesta y verdadero/falso.

En el examen de multirrespuesta la única diferencia apreciable entre los dos grupos es la concentración de las notas, pero en el examen de V/F se aprecia que las calificaciones del grupo de control son inferiores a las notas del grupo experimental. Con métodos de análisis de la varianza no se aprecian diferencias entre los grupos para ninguno de los dos exámenes adicionales.

Examen	*Grupo*	*N*	*Media*	*Mediana*	*Desviación típica*	*Asimetría estándar*	*Curtosis estándar*
Multirrespuesta	Control	23	4,58	4,66	2,45	–0,3	–0,48
Multirrespuesta	Experimental	9	4,51	4,66	1,90	–0,9	–0,58
Verdadero/Falso	Control	23	3,56	4	1,88	0,87	–0,46
Verdadero/Falso	Experimental	9	4,67	5,5	1,09	–1,24	0,11

Tabla 10

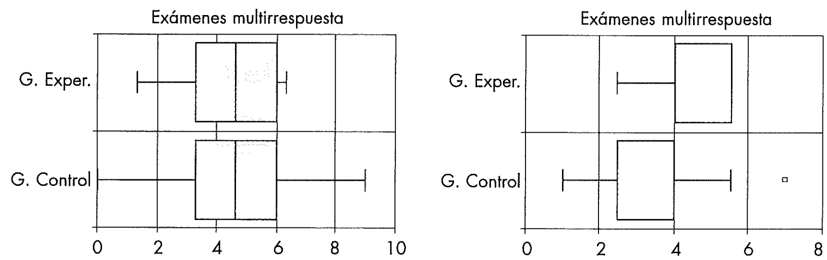


Figura 14

Los cuatro cursos muestran una autosemejanza con el análisis global de las calificaciones finales por grupos, es decir. existe una tendencia a calificaciones más bajas en el grupo experimental que en el grupo de control, y cuando utilizamos técnicas de análisis de la varianza en cada curso, comparando los dos métodos de enseñanza, concluimos que no existen diferencias significativas ni entre la media, ni la mediana, ni la variabilidad, ni la distribución de las calificaciones de cada grupo.

Análisis adicional

En el curso de 1.° B, y a modo de prueba, se diseñaron dos pruebas adicionales para todos los alumnos del curso, que se realizó junto con el examen al que están acostumbrados los alumnos. Una de las pruebas contenía preguntas que se contestaban con verdadero/ falso», la otra prueba contenía cuestiones con multi-respuesta, con cuatro posibilidades cada una. La razón de incluir este tipo de pruebas es que, en las aplicaciones informáticas que utilizaron los alumnos de los grupos experimentales se plantean cuestiones en términos de Verdadero/Falso y con diferentes posibilidades. Puesto que suponía un esfuerzo adicional para los alumnos, se prefirió probar sólo en un curso.

Evaluación del software empleado en la experiencia

Elaboramos un test de 26 preguntas relativas a los diferentes aspectos que debía tener un software educativo. Las primeras 25 preguntas tenían cinco opciones, a saber: siempre, frecuentemente, a veces, casi nunca y nunca; última pregunta era de tipo abierto. Dada la preocupación de los alumnos del grupo experimental ante la posibilidad de que pudieran suspender todo el curso académico por culpa de la experiencia abordada y pese a que se les aseguró que no podría darse esa eventualidad, decidimos que rellenaran los cuestionarios después de conocer sus calificaciones en la evaluación correspondiente, con el fin de evitar, en el grado de lo posible, la influencia entre las notas con la evaluación del software utilizado.

En los resultados generales tuvimos en cuenta una opinión no recogida en ninguna encuesta de las entregadas y que tuvo una gran influencia, «la preocupación ante la posibilidad de fracasar en el examen». Esta opinión fue comunicada verbalmente, de forma individual y colectiva, a los profesores de cada uno de los cursos que participaba en el proyecto.

El software sobre *funciones* fue mejor valorado que el de *derivadas.* Una posible explicación es que la preparación para abordar los conceptos de funciones son menos que los requeridos para la comprensión del tema sobre derivadas, y que el programa sobre derivadas tenía un nivel algo superior al necesario para el grado de aprendizaje de los alumnos de primero de Ciencias de la LOGSE.

A continuación presentamos los aspectos más destacados de cada uno de los programas.

Estudio de funciones

Los aspectos destacados como positivos de esta herramienta informática han sido:

i. No es preciso tener muchos conocimientos de informática para manejar el programa y su manejo no distrae para el aprendizaje de los conceptos.

ii. Es sencillo familiarizarse con la estructura en que están presentados los conceptos en las pantallas; cada una de las pantallas no abruma con muchos contenidos y tiene una ayuda apreciable.

iii. Permite ir al ritmo que cada uno pretende, da tiempo para pensar y, sobre todo, provoca preguntas a los usuarios.

iv. Plantea ejemplos explicativos de los conceptos enseñados y desarrolla la mayoría de los pasos intermedios en las operaciones.

Los aspectos negativos más destacados han sido:

i. Es necesario más esfuerzo para adquirir los conocimientos y más tiempo que el que se emplea en las clases presenciales.

ii. Es preciso un aumento de la comunicación entre el usuario y el programa.

iii. Proporciona pocos estímulos adicionales, y es deseable conocer el nivel de conocimientos que se va adquiriendo.

iv. Se desean aplicaciones informáticas con más efectos multimedia, sonidos e imágenes, para que sean más entretenidos.

La derivada: concepto y aplicaciones

Los aspectos destacados como positivos de este programa han sido:

i. No es preciso tener muchos conocimientos de informática para el manejo del programa, es sencillo familiarizarse con la forma de «navegar» por las pantallas y encontrar temas de consulta.

ii. Permite ir al ritmo deseado por cada usuario, deja tiempo para asimilar conceptos y, al igual que la otra aplicación, plantea preguntas.

El software sobre funciones fue mejor valorado que el de derivadas. Una posible explicación es que la preparación para abordar los conceptos de funciones son menos que los requeridos para la comprensión del tema sobre derivadas...

iii. Tiene en cuenta conocimientos adquiridos en cursos anteriores.

iv. Plantea ejemplos explicativos de los conceptos considerados.

Los aspectos destacados como negativos son:

i. Falta un sistema de consulta para temas tratados previamente y un desarrollo mayor de los pasos intermedios.

ii. Proporciona pocos estímulos adicionales y faltan indicaciones del nivel de conocimientos que se van adquiriendo.

iii. Falta establecer más comunicación entre el usuario y el programa.

iv. Se desean programas con más efectos multimedia de sonido e imagen.

Los aspectos negativos de ambos programas han sido, en lineas generales, los mismos lo que quizás se deba al carácter innovador que presenta la enseñanza mediante herramientas informáticas.

Estudio comparativo de la experiencia

Debido a los cursos seleccionados ya existe, por parte de los alumnos, inclinación en la selección de diferentes asignaturas (primero de Bachillerato LOGSE de Ciencias Sociales y de Ciencias de la Naturaleza) lo que hace que sean apreciables las diferencias entre los cursos, con respecto a las notas previas y a los conocimientos previos de los temas tratados, mientras que las diferencias son más moderadas en el test de inteligencia, ya que no tienen nada que ver con las notas de los diferentes ejercicios realizados.

Los grupos experimentales de los tres cursos de primero de Bachillerato LOGSE, en las dos modalidades, son análogos a los grupos de control respectivos, en las tres variables consideradas (notas previas, conocimientos previos y test de inteligencia). En el curso de 4.° de ESO ocurre lo mismo, salvo en la distribución de las notas previas, donde en el grupo experimental tienen una enorme concentración.

Si bien no se puede afirmar rotundamente que existen discrepancias entre las notas finales de los grupos de control y experimental, se aprecia que las notas finales de los grupos experimentales son, moderadamente, inferiores a las de los grupos de control respectivos. Sin embargo y particularizando los resultados para el grupo 1.° B, si el examen es del tipo verdadero/falso, o multirrespuesta, los resultados son sensiblemente mejores que las del grupo de control.

Con relación al uso de herramientas informáticas como medio de aprendizaje, destacaremos que el mayor problema que suscitó la experiencia fue la inseguridad de los alumnos al encontrarse sin las explicaciones que reciben en clase, no sólo ante las explicaciones del tema que se trata, sino en dudas que surgen con relación a conocimientos anteriores, problema que desaparece paulatinamente a medida que madura la persona.

Los alumnos que fueron seleccionados para participar en las prácticas habían tenido contacto con la informática en una amplia mayoría, y consideraban aconsejable el uso del ordenador en el proceso de aprendizaje, pero su curiosidad por temas informáticos era bastante moderada. Merece la pena hacer constar que una porción apreciable de los encuestados mostraba una gran inclinación hacia estos temas.

Los programas utilizados no precisan conocimientos informáticos para su uso, plantean ejemplos explicativos y permiten ir estudiando al ritmo que cada uno desee, aunque precisan de más esfuerzo individual. Se eecha en falta mayor comunicación entre usuario y programa, más efectos multimedia y una ayuda, en el software, de amplio espectro.

Sugerencias para el uso de herramientas informáticas

Es obvio que la educación ha de enfocarse hacia el uso de las nuevas tecnologías multimedia y las comunicaciones, pero estas aplicaciones informáticas educativas no deben sustituir completamente la figura del profesor.

Es obvio que la educación ha de enfocarse hacia el uso de las nuevas tecnologías multimedia y las comunicaciones, pero estas aplicaciones informáticas educativas no deben sustituir completamente la figura del profesor.

A la hora de diseñar las aplicaciones informáticas se deberían de tener en cuenta los niveles educativos donde se pueden utilizar, pero también debería valorarse la dotación de equipos, el mantenimiento y disponibilidad de los mismos, así como el entorno de los alumnos a los que va dirigido. No es lo mismo el enfoque que debe darse al tema de derivadas para los alumnos de Ciencias Matemáticas o para los alumnos de Ingeniería Industrial, por ejemplo.

Si se utilizan programas informáticos, estos debían ser de amplio espectro, interactivos con el usuario, flexibles y que permitan al usuario orientar su estudio conociendo el grado de aprendizaje que va adquiriendo.

La utilización del software educativo se debe considerar como una herramienta más del material educativo del que puede disponer el alumno para su aprendizaje. Con las nuevas facilidades que proporcionan las nuevas tecnologías es de esperar que se pueda desarrollar un software mucho más sofisticado que el empleado en esta experiencia y que incluya explicaciones sobre conceptos propios del tema, conceptos previos necesarios para abordar el tema que hay que desarrollar e indicadores que permitan al profesor, y por otra parte al alumno, conocer el grado de adiestramiento que adquiere el alumno.

Alfredo Méndez
EUI Telecomunicaciones
Universidad Politécnica
de Madrid

Referencias

AGUIBERREÑA, J. M. (1998): *La derivada: Conceptos y aplicaciones*, Proyecto Fin de Carrera de la EUIT de Telecomunicación, Madrid.

CASTILLEJO BRULL, J. L. y VÁZQUEZ GÓMEZ (1987): «Educar para el siglo XXI: Criterios de evaluación para el uso de la Informática educativa». *Fundesco*, Madrid.

CORRAL, A. (1993): «Las matemáticas: fundamento de un desarrollo equilibrado», *Revista del ICE de la Universidad Autónoma de Madrid*, n.° 5.

FERRÁN VIRGOS (1989): «El ordenador ante el proceso educativo: Más que un medio tecnológico», *Didáctica de las Ciencias experimentales y sociales*, n.° 2, 63-74.

INCE (1996): *Tercer estudio internacional de Matemáticas y Ciencias*, Ministerio de Educación y Cultura.

INCE (1997): *Diagnóstico del sistema educativo,* Ministerio de Educación y Cultura.

INSTITUTO DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN DE LA UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID (1983): *Una semana sobre Informática en la Ingeniería y en la enseñanza,* Universidad Politécnica de Madrid, Madrid.

MAUDL, H. y A. LESGOLD (1988): *Learning issnes for intelligent tutoring systems*, Springer-Verlag, Nueva York.

Solomón, C. (1987): *Entornos de aprendizaje con ordenadores*, Paidos/Mec, Barcelona.

SQUIRES, D. y A. McDOUGAL, (1997): *Como elegir y utilizar software educativo,* Moreta, Madrid.

VÁZQUEZ, G. (1989): «Los educadores y las máquinas de enseñar». *Fundesco*, Madrid.

VILLALBA, S. (1997): *Estudio de Funciones*, Proyecto Fin de Carrera de la EUIT de Telecomunicación, Madrid.

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Comisión Ejecutiva

Presidente: Florencio Villarroya
Secretario General: José Luis Álvarez García
Vicepresidente: Serapio García
Tesorera: Claudia Lázaro

Secretariados:
Prensa: Antonio Pérez Sanz
Revista SUMA: Emilio Palacián/Julio Sancho
Relaciones internacionales: Carmen Azcárate/Luis Balbuena
Actividades: Xavier Vilella Miró
Publicaciones: Ricardo Luengo González

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidente: Joan Gómez y Urgellés
Apartado de Correos 1306. 43200-REUS (Tarragona)

Organización Española para la Coeducación Matemática «Ada Byron»
Presidenta: Xaro Nomdedeu Moreno
Almagro, 28. 28010-MADRID

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»
Presidente: Salvador Guerrero Hidalgo
Apartado 1160. 41080-SEVILLA

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo»
Presidente: Florencio Villarroya Bullido
ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12.
50009-ZARAGOZA

Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»
Presidente: José Joaquín Arrieta Gallastegui
Apartado de Correos 830. 33400- AVILÉS (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»
Presidenta: Dolores de la Coba
Apartado de Correos 329. 38201-LA LAGUNA (Tenerife)

Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas
Presidente: Constantino de la Fuente
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Villalar, s/n.
09006-BURGOS

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García
Avda. España, 14, 5ª planta. 02006-ALBACETE

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidenta: Remedios Peña Quintana
IES Francisco de Goya. C./ Caravaca, s/n.
30500-MOLINA DE SEGURA (Murcia)

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Ricardo Padrón
Apartado de Correos 103.
SANTIAGO DE COMPOSTELA

Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»
Presidente: Ricardo Luengo González
Apartado 590. 06080-BADAJOZ

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»
Presidenta: Carmen da Veiga
C/ Limonero, 28
28020-MADRID

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: Begoña Martínez Barreda
CPR de Santander. C./ Peña Herbosa, 29.
39003-SANTANDER

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidenta: Luis Serrano Romero
Facultad de Educación y HUmanidades
Ctra. Alfonso XIII, s/n. 52005-MELILLA

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea Tornamira
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.
Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra.
31006-PAMPLONA

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Despacho 305. Facultad de Educación.
Universidad Complutense. 28040-MADRID

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas
Presidente: Javier Galarreta Espinosa
C.P.R. Avda. de la Paz, 9. 26004-LOGROÑO

Sociedade Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)
Presidente: Manuel Díaz Regueiro
Apartado 4188. 15080-A CORUÑA

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departament de Didàctica de la Matemàtica.
Apartado 22045. 46071-VALENCIA

SUMA 43
junio 2003, pp. 23-30

La complejidad de la educación y de la construcción del saber

Bruno D'Amore

CONOCIMIENTO es la información sin uso; el saber es la acción deliberada para hacer del conocimiento un objeto útil frente a una situación problemática. De donde se deduce que el aprendizaje es una manifestación de la evolución del conocimiento en saber. Por lo que el aprendizaje consiste en dar la respuesta correcta antes de la situación concreta.

Con esta imagen, tan profunda, se expresaba hace algunos años Ricardo Cantoral a propósito del debate, de un tiempo para acá muy acalorado en todo el mundo, sobre lo que significa en verdad *saber*.

Como veremos, la terminología ha tomado hoy otra dirección, no ciertamente unívoca. Creo que existe la necesidad de partir desde muy lejos, para buscar clarificar al menos la elección terminológica, y para iniciar el debate sobre este tema, que se prevé efectivamente siempre muy apasionado, especialmente en Italia, en el momento en el que está por iniciarse una revisión, finalmente moderna, del sistema escolar completo.

Naturalmente, las «definiciones» que siguen no pueden ser impecables: se trata simplemente de un intento por dar claridad y para circunscribir los problemas, tan complejos sin perdernos en un mar de acepciones...

Este artículo trata de «definir» algunos de los conceptos didácticos más importantes, utilizando como referencia la didáctica matemática. Solamente es un intento de dar claridad y de circunscribir los problemas a los que se enfrentan los docentes.

Contenido

Un contenido es una porción limitada de saber, restringida a un cierto ámbito y limitada a un cierto sujeto, a un cierto tema específico, a un cierto elemento de tal saber.

Desde ahora advierto que toda acepción del sustantivo «disciplina» se refiere sólo al ámbito curricular.

El sustantivo *contenido* puede vincularse con uno de los siguientes adjetivos: disciplinario, metadisciplinario, pluridisciplinario, multidisciplinario, interdisciplinario, a-disciplinario, no disciplinario, y quizás otros.

Para cada elemento de esta clasificación, se hace necesario un breve comentario:

- *Contenido disciplinario*: porción limitada de un saber específico y circunscrito a un área identificable con el nombre de una disciplina.
- *Contenido metadisciplinario*: porción limitada de un saber de segundo nivel relativo a una disciplina; por ejemplo: expectativas sobre esa disciplina, imágenes de la disciplina o de partes de ella; en todo caso, la acepción más general podría ser: reflexión sobre la disciplina.
- *Contenido pluridisciplinario*: porción limitada de saber constituido por un conjunto de contenidos cada uno de los cuales se reconoce como atribuible a una disciplina; las disciplinas que intervienen están consideradas, por así decirlo, afines.
- *Contenido multidisciplinario*: porción limitada de saber constituido por un conjunto de contenidos cada uno de los cuales se reconoce como atribuible a una disciplina; las disciplinas que intervienen son consideradas no afines.
- *Contenido interdisciplinario*: porción limitada de saber constituido por un sistema o estructura en la que se mezclan e interactúan saberes específicos provenientes de disciplinas diferentes.
- *Contenido a-disciplinario*: porción limitada de saber en el que inciden contenidos disciplinarios pero sin el involucramiento explícito de una disciplina; por ejemplo, se trata de un contenido en el interior de una situación a-didáctica, es decir no explícitamente didáctica.
- *Contenido no-disciplinario*: porción limitada de saber que no tiene ninguna relación con alguna disciplina reconocida como tal.

Conocimiento

Un conocimiento es, al mismo tiempo:

- la reelaboracion de contenidos, hecha de manera autónoma, para lograr una meta;
- el resultado de tal elaboración.

Un conocimiento puede involucrar uno o más contenidos.

Competencia

Competencia es un concepto complejo y dinámico:

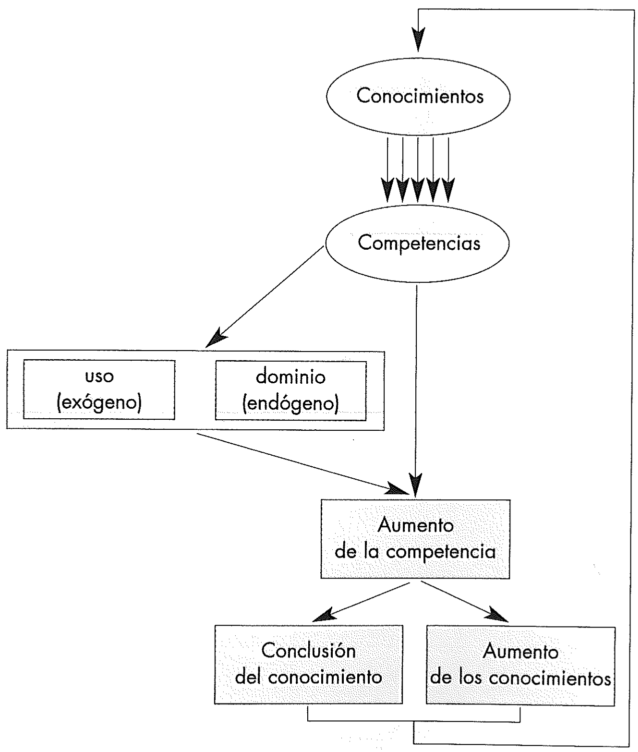
- complejo: se trata del conjunto de dos componentes:
  — uso (exógeno);
  — dominio (endógeno).

...la competencia engloba en sí misma como objeto no sólo los conocimientos que intervienen, sino también factores meta-cognoscitivos...

incluso elaborativos, interpretativos y creativos, de conocimientos que ligan contenidos diferentes.

- dinámico: el uso y el dominio no son la única expresión de la competencia; la competencia engloba en sí misma *como objeto* no sólo los conocimientos que intervienen, sino también factores meta-cognoscitivos: la aceptación del estímulo para usarlos, el deseo de hacerlo, el deseo de completar los conocimientos que se revelan, en la prueba de los hechos, insuficientes y, por lo tanto, el deseo mismo de aumentar la propia competencia.

Un esquema, a pesar de ser limitado, puede ilustrar, al menos en parte, la complejidad del fenómeno:



Una paradoja del aprendizaje

Se puede poner en evidencia una interesante paradoja, elemento base para la discusión sobre el fenómeno del aprendizaje: mientras existen conocimientos de contenidos puramente disciplinarios, es decir conocimientos puramente disciplinarios, no existe una competencia puramente disciplinaria, porque la competencia engloba dentro de sí como mínimo factores metacognitivos, afectivos y, la mayor parte de las veces, la competencia es el resultado de más conocimientos interconectados; y, sin embargo, las bases cognoscitivas de una competencia son necesariamente disciplinarias.

En efecto, el «lugar cultural» en el que tiene fundamento la construcción de una competencia es la disciplina: tal construcción es el resultado de la acción didáctico-educativa del maestro, el cual necesariamente debe fundar todo conocimiento y, por lo tanto, el estímulo a la competencia en el interior de un sistema disciplinario.

Eso da a las disciplinas un doble papel educativo:

- por un lado, almacén de contenidos que deben elaborarse y transformarse en conocimientos primero y competencias después;
- por otro lado, quien piensa que el significado educativo de una disciplina se puede relegar al interior de la disciplina misma, cumple un gravísimo error didáctico; atención a querer restringir el resultado de la acción didáctica al interior de una sola disciplina: la disciplina se enseña para permitir la construcción de conocimientos destinados a estimular la construcción de competencias que deben necesariamente, como hemos visto, traspasar la disciplina misma (de otra manera su función educativa disminuye).

Todo aumento de competencia comporta un reequilibrio de las competencias precedentes y una adaptación; pero se necesita recordar siempre que las competencias son estructuras complejas y dinámicas en las cuales, y a través de las cuales, la mente se organiza. Tiene sentido entonces pensar que un aumento de competencia es un reequilibrio de la mente.

...el «lugar cultural» en el que tiene fundamento la construcción de una competencia es la disciplina: tal construcción es el resultado de la acción didáctico-educativa del maestro...

La educación

Existe una fuerte relación entre las funciones educativas de las disciplinas (verdaderas forjadoras de conocimientos, y, por lo tanto, estímulos y objetivos inmediatos de las competencias), y la educación general en sentido llano (digamos transversal); eso depende del hecho de que las competencias son, por su misma naturaleza, dinámicas y complejas y no se pueden reducir a una única disciplina; presuponen y crean conexiones entre conocimientos y sugieren nuevos usos y nuevos dominios, lo que significa que «las competencias generan competencias».

A la educación general de un individuo contribuyen, en igual medida y con igual fuerza, el conjunto de las competencias y la capacidad de verlas desde fuera, en acción. Además, algo que por ahora llamo «disponibilidad a la implicación personal» que retomaré más adelante.

Hasta ahora voluntariamente he mantenido confusos (y lo haré también enseguida) aquellos que una vez se llamaban el «saber (algo)» y el «saber hacer (algo)»; esto porque, dentro de las competencias y, aún más, en el interior de las conexiones señaladas, aquellos que eran considerados una vez los dos aspectos de la competencia hoy se prefiere verlos en realidad mezclados e inseparables: sería como decir, para usar una terminología ya no en boga, que en el interior de las competencias relativas a un cierto objeto de «saber» se halla ya implícito todo el mundo de los «saber hacer» relacionados con ese objeto.

Capacidad

La capacidad es la expresión específica externa de carácter activo de cada competencia individual.

Se pueden estructurar así, precisamente de acuerdo con las conexiones hechas posibles, las capacidades «superiores», es decir, aquellas que distinguen, en el mundo animal, al ser humano. Al hacer esto, se deben casi olvidar las disciplinas individuales y pensar que las capacidades son expresiones múltiples que, aun pudiendo hallar especificación ejemplar en el interior de una disciplina, la deben traspasar para ponerse más en el mundo de la educación general que no en el mundo del cognitivo específico.

La siguiente lista no quiere ser una taxonomía; está escrita a manera de ejemplo, es puramente indicativa y no tiene ninguna pretensión de ser completa; proviene de mi experiencia de didacta; la distinción en niveles toma en cuenta también sólo una hipótesis personal que puede ser totalmente cuestionada.

- Nivel 1: saber describir
saber resumir
saber indicar o escoger
...

- Nivel 2: saber argumentar
  saber resolver
  saber proponer
  ...
- Nivel 3: saber modelizar
  saber conjeturar
  saber definir
  saber confrontar
  ...
- Nivel 4: saber demostrar
  saber prever
  ...
- Nivel 5: saber meta-argumentar (saber defender una propia opinión)
  saber poner en evidencia las competencias de las que se está haciendo uso
  saber reconocer las competencias faltantes en una situación problemática
  ...

Competencia y capacidad como hecho privado, singular, personal

En su estructura, increíblemente compleja, competencia y capacidad están intrínsecamente y profundamente conectadas con el individuo para el que se nombran.

Nos hallamos aquí más cercanos a una concepción pragmática, que no realista, del aprendizaje pensado como teoría; en el sentido de que me parece necesario rechazar diariamente la hipótesis según la cual existen competencias o capacidades en sí mismas, a las cuales o hacia las cuales se debe conducir al alumno, como en un recorrido didáctico hipotético, ya pre-escrito, pre-establecido, lineal, jerárquico. Mi idea es que haya necesariamente recorridos distintos y personales, ya que el individuo entra a formar parte de manera profunda de la naturaleza misma de la competencia, interpretándola. No existe una semántica objetiva o una lógica objetiva de una competencia, sin embargo, existe un uso, una interpretación, una fenomenología.

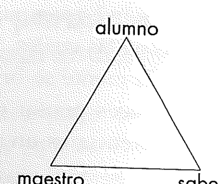
Puesto el ser humano, cada específico ser humano, en el interior del complejo sistema de la competencia y de la capacidad, entonces la única valoración comparativa posible de ellas no puede ser diacrónica, es decir relativa a algo que podemos llamar «evolución de las capacidades», o de una *cierta* capacidad, de *aquel* individuo.

Para no arriesgar a perderse en mil sinuosidades frente a la inaccesibilidad de una objetivización de las competencias y de las capacidades, lo que se puede hacer es establecer «modelos» de competencias y conocimientos esperados que, por simplicidad, pueden pensarse en versión disciplinaria o no. Es en su interior donde tiene sentido establecer modalidades lingüísticas esperadas, valoraciones diacrónicas de evolución del lenguaje, buscando tomar en cuenta tanto la capacidad de hacer uso de lenguajes específicos para una determinada competencia, como la capacidad de elaborar autónomamente aquel lenguaje.

Pero no hay que perder de vista jamás el hecho de que eso es posible con la condición de proporcionar modelos y recordar, más adelante, que aquel tipo de análisis permanece en el interior del modelo o de los modelos elegidos y no constituye un absoluto para esa persona.

Una ulterior consideración. En este momento, en el que existe una cierta tendencia a querer privilegiar los aspectos «transversales» a-disciplinarios, se necesita en cambio reivindicar con fuerza el hecho, desde mi punto de vista adquirido de la investigación en didáctica especial, de que todo *conocimiento es un conocimiento situado;* sin embargo, por su misma naturaleza, las competencias y las capacidades son sistemas dinámicos complejos que abrazan más disciplinas curriculares y argumentos meta-disciplinarios (afectivos, metacognitivos, etc.).

Por lo que el hecho educativo es de carácter meta, ya sea con respecto a las disciplinas, o con respecto al sistema mismo de las disciplinas, pero vive, se nutre, obtiene linfa del currículo disciplinario. Esto desde cualquier punto de vista. Sólo para permanecer en el ambiente de la escuela, el estudiante vive sus horas divididas por materias, sus expectativas divididas por materias; y el maestro es maestro de una determinada materia a la que hace referencia, y debe hacerlo, para toda acción educativa y didáctica. No es posible en ningún caso huir del complejo sistémico que se llama «triángulo de la didáctica», en el que cada componente tiene la misma relevancia que los otros dos:



No existe una semántica objetiva o una lógica objetiva de una competencia, sin embargo, existe un uso, una interpretación, una fenomenología.

La evaluación

La evaluación es la expresión, por parte del docente, de un juicio sobre cada alumno en referencia, al menos, de dos componentes de la educación:

- el conjunto de las capacidades alcanzadas;
- el grado de implicación personal (tanto en sentido específico, como general).

Restringiendo aún más, y de manera definitiva, toda la argumentación anterior al mundo de la escuela, resulta evidente que todo acto educativo es un hecho puramente subjetivo, difícilmente evaluable fuera del complejo sistémico del individuo, de la persona.

Por lo que la evaluación es sólo, en parte, la certificación individual de las competencias.

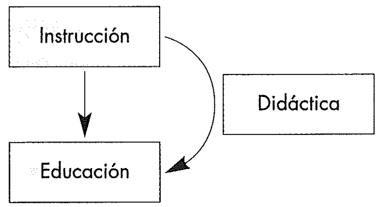
Se necesita desarrollar en el estudiante, como fin último de la educación, el gusto por hacer uso de las propias competencias, a implicarse en el proceso de construcción del propio conocimiento, del propio saber, de la propia educación, a aceptar la devolución.

El grado de aceptación de la devolución por parte del alumno también corresponde, en alguna medida, a la evaluación de la calidad de la profesionalidad docente, del logro del éxito didáctico del profesor.

Pero si el estudiante se hace cargo personal de la construcción de las propias competencias y capacidades, debe existir también el nacimiento y el desarrollo del gusto de la autoevaluación por parte del estudiante, y una distribución de la carga de la responsabilidad de la evaluación, no sólo en el docente, sino en la pareja en relación: maestro-alumno.

El objetivo de la acción educativa es la continua ruptura del contrato didáctico, ruptura que permite la devolución; sólo así se inicia la construcción del saber y, por lo tanto, se logra la educación; esto permite:

- Elevar el nivel de los conocimientos y, en consecuencia, de las competencias (este punto es delicado: no es bajando los niveles de conocimientos esperados como se favorece el aumento de las competencias y de las capacidades).
- Construir una óptica de los créditos con métodos objetivos, pero compartidos y predeterminados (la aceptación de la implicación personal es también la aceptación de la propia evaluación con referencia a las metas puestas conjuntamente).



Por núcleo fundacional de una determinada disciplina podremos entender unos contenidos clave para la estructura misma de la disciplina, no tanto en el plano meramente didáctico, sino en el plano fundacional, epistemológico.

Núcleos fundacionales

Como se ha visto, contenidos y conocimientos son la base para la construcción de competencias y capacidades, en su significado complejo.

Su mejor elección –la modalidad de su elección– constituye un punto esencial de todo el nuevo sistema. Hasta ahora la escuela se ha comportado como si al alumno se le debiera proponer una especie de vasta enciclopedia de los posibles contenidos de las disciplinas individuales, se necesita meditar esta fase con extremo cuidado.

Por ser base propulsora de la construcción de competencias y capacidades, los contenidos y los consiguientes conocimientos deben responder a requisitos de interés, aceptación, satisfacción de curiosidades intelectuales; ahora, nunca son los contenidos individuales específicos, restringidos a casuísticas microscópicas, los que mueven la curiosidad del alumno y le permiten lograr competencias deseables. Se trata entonces de elegir contenidos que constituyan, el corazón, el *núcleo* alrededor del cual coagular otros posibles contenidos, en el interior de un tema disciplinario que provenga de un interés didáctico. En otras palabras, más que desplegar y mostrar una larga lista de contenidos, lo que se necesita hacer es tamizar con extremo cuidado y con mucha astucia didáctica aquéllos que ahora se llaman los «núcleos fundacionales», disciplina por disciplina.

Por núcleo fundacional de una determinada disciplina podremos entender unos contenidos clave para la estructura misma de la disciplina, no tanto en el plano meramente didáctico, sino en el plano fundacional, epistemológico.

Se trata de elaborar estrategias didácticas en las que el estudiante es atraído no a examinar cadenas de contenidos, sino a participar en la construcción de sus propias competencias a partir de conceptos elegidos de manera tal que constituyen un interés por sí mismos, y desarrollos que involucren y amalgamen otros contenidos considerados clave en el desarrollo de la disciplina (la historia y la epistemología de las disciplinas individuales pueden ayudar mucho en esta fase).

Enseñar por núcleos fundacionales, más que por contenidos, significa tejer una red conceptual, estratégica y lógica fina e inteligente, no ciertamente reducir las demandas; es más, ¡la elección del núcleo es un modo para probar la resistencia de los retos culturales! Todo concepto es en realidad, como debe ser, la meta de un complejo sistema a mallas: por otra parte, no existen conceptos totalmente aislables y son parte de un concepto redes de relaciones más que «objetos» conceptuales individuales.

La clásica posición docente de exposición continua de conceptos que hay que aprender, se sustituye por lo tanto por la propuesta de implicación personal (devolución) a cada estudiante; tal aceptación debería ser lo más autónoma posible, aceptada por parte de cada alumno que se implica, es decir, que asume en primera persona la construcción señalada antes (implicación), aceptando romper las complejas mallas del contrato didáctico.

Más que de sistema de enseñanza-aprendizaje, aquí se trata, sobre todo, de un complejo sistema de acciones que prosiguen entre situaciones didácticas y a-didácticas, en las que el estudiante acepta su papel no sólo de repetidor pasivo de lo que le ha sido enseñado, sino de actor protagonista de la construcción. A esto debe agregarse, como decía antes y como corolario, la educación al gusto de la implicación, de la asunción de responsabilidad aprenditiva, de reto, de evaluación casi autónoma de los resultados alcanzados.

Continuidad

En este punto, en un sistema escolar con más fases, no se necesitará ya hablar de *continuidad* de un ciclo a otro, sino de algo mucho más simple, la *prosecución* de los estudios: lo que caracteriza a un ciclo con respecto a los que le preceden es la mayor profundidad crítica, el análisis crítico más puntual de los contenidos (y, en consecuencia, de las competencias alcanzadas).

Qué significa evaluar competencias matemáticas

En la competencia, lo que juega un rol fundamentalmente no es tanto (o no es sólo) el conjunto de los conocimientos sobreentendidos, es también la disponibilidad a «arriesgar» (cognitivamente, entiendo), haciendo uso de conocimientos provisorios, con el fin de resolver una situación de apariencia, con los conocimientos ya poseídos (digamos aquéllos de la zona de desarrollo efectivo de Vigotski), no se alcanza a resolver.

Si el estudiante no acepta el juego, si no acepta la responsabilidad, no se da la construcción del aprendizaje, no se da la resolución del problema.

Desde mi punto de vista, uno de los componentes más significativos del valor y del nivel de una competencia es de carácter «afectivo»: la *disponibilidad a hacer uso de ella*[1]. ¿Qué sería una competencia sin el deseo, sin la voluntad, sin el gusto de hacer uso de ella?

De una competencia forman parte tanto los conocimientos que están en su base, como los utilizados en situaciones no rutinarias, esto es, en aquellas en las cuales el estudiante está obligado a jugarse sus propias cartas, a implicarse personalmente.

Repito esta frase con mayor lentitud. El maestro intenta la *devolución*, esto es, intenta asignarle al estudiante, a cada uno individualmente, la responsabilidad de hacerse cargo de la construcción de su propio aprendizaje o de la solución de un problema. El estudiante acepta esta responsabilidad, es decir, se *implica* directamente en la *construcción* o en la *resolución*. Alcanza, y busca entonces en el maestro la confirmación del resultado positivo de su tarea; la búsqueda en el maestro porque es éste el titular del senso social del conocimiento, es él (o ella) que la institución-escuela puso a salvaguardia y sigilo de los aprendizajes, es él (o ella) quien confirma la *institucionalización del conocimiento*.

Por tanto, sea en la situación didáctica general (que puede ser de tipo didáctico o de tipo adidáctico, y para mayor precisión sobre estos puntos reenvío a D'Amore, 1999*b*; Martini, 2000), sea la situación contingente, relativa, esto es, a la específica apuesta cognitiva que se pone en juego, la intervención de lo afectivo es decisiva. Si el estudiante no acepta el juego, si no acepta la responsabilidad, no se da la construcción del aprendizaje, no se da la resolución del problema.

Esto nos devuelve a dos palabras claves de lo afectivo, que tienen un papel decisivo en todo el «juego» de la didáctica: *motivación* y *volición*, no siempre presentes entre los profesores; la *motivación* es necesaria para tener la disposición de aceptar el papel de estudiante implicado; pero la *volición* es aquella que permite realmente pasar a la

1 Cuando se escribe «afectivo» muchos piensan de inmediato en los primeros niveles de escolarización. Pero una y otra vez he escrito, dicho y demostrado, que lo afectivo está presente en modo determinante en cualquier nivel escolástico. Con una frase banal: *No hay cognitivo sin afectivo*, a cualquier nivel, incluida la educación superior, y la universidad.

acción. ¡Mucha motivación, pero sin ninguna volición, conducen a un resultado vacío o nulo!

Por tanto, en la evaluación de las competencias son varios los puntos que entran en juego:

- los «conocimientos» puestos en escena y sin los cuales la competencia estaría vacía de «contenidos»;
- la capacidad de «usar conocimientos»;
- la capacidad de «usar transversalmente los conocimientos», fuera de su contexto de contenidos;
- la capacidad de «arriesgar», haciendo uso de conocimientos no del todo asimilables, en la zona de desarrollo próximo y no en la zona de desarrollo afectivo;
- la «motivación» para entrar en juego como estudiante que se hace cargo, gracias a la «volición» que transforma el deseo en acción;
- el deseo, el gusto, la voluntad de hacer uso de los propios conocimientos para resolver la situación y construir nuevos conocimientos.

Se necesita comenzar admitiendo que los alumnos son cazadores de «contenidos» y no los evitan absolutamente: los buscan, los apresan, los hacen propios, los elaboran, los manipulan...

Si existen contenidos, entonces existen también «conocimientos», aquellos puestos en escena en la reelaboración de los contenidos, en su conexión también relacional, en la estructuración del cognitivo. El alumno, una vez que asimila y hace propios los contenidos, los aplica a su forma de participación en la vida social, en el juego, en las conversaciones, en los conocimientos que son verdaderos y propias reelaboraciones estructurales de los contenidos.

Y aquí hemos concluido los dos primeros puntos de la evaluación:

- Qué contenidos posee el alumno.
- Cómo los usa estructuralmente en los conocimientos que pone en el campo.

Pero lo mejor de los conocimientos es que no se limitan a ser usados en el propio, específico y a veces restringido campo de acción, sino también «transversalmente», más aún, esta capacidad transversal es propiamente aquella que revela la inventiva, la creatividad.

¡Mucha motivación, pero sin ninguna volición, conducen a un resultado vacío o nulo!

Y estamos, por tanto, en el tercer punto de la evaluación:

- Cómo el alumno usa transversalmente los conocimientos que posee.

En este punto entran en juego los «riesgos»: ¿qué riesgo hay que afrontar siempre y sólo, por cuanto correctamente, ejercicios repetitivos, para la confirmación de capacidades ya existentes, en la zona de desarrollo efectivo? Se requiere que el alumno se enfrente a problemas nuevos, no a ejercicios, para medir su capacidad de lanzarse, de arriesgar, haciendo uso de conocimientos no del todo asimilados.

Y estamos, por tanto, frente al cuarto punto de la evaluación:

- ¿El alumno está dispuesto a arriesgar, frente a una situación nueva que no puede resolver haciendo uso únicamente de los conocimientos efectivamente alcanzados?

«Motivación» y «volición» son factores de extrema importancia y, más aún, son factores que deben entrar en juego, de modo pertinente. El maestro puede hacer mucho para favorecer una correcta motivación, pero a ésta debe corresponder la volición por parte del alumno.

Así mismo, la parte de mayor intensidad afectiva, es decir aquella relativa a la «voluntad», al «gusto», al «deseo», de poner en evidencia los propios conocimientos para resolver dichas situaciones, con placer, se constituye en un aspecto esencial de evaluar; especialmente en los primeros niveles escolares, ésta no debe ser confundida con una exhibición vacía, debe coincidir con una verdadera y propia colaboración con el «juego didáctico» del profesor. Pero más que la indagación de la gratificación, es el serio y determinado deseo de alcanzar la tarea: resolver una situación problemática, proponer soluciones personales, participar en la construcción de un recorrido cognitivo, participar en una discusión.

Y estamos por tanto en el sexto y último punto de la evaluación, punto que requiere que el maestro verifique si, frente a situaciones lúdicas de un cierto tipo, de un cierto respiro, el alumno, cada alumno en forma individual, responde proponiendo sus propias soluciones coherentes y significativas.

La evaluación podría así considerarse como una rejilla que el maestro deberá elaborar, competencia por competencia:

- si una competencia C supone los conocimientos c_1, c_2, ..., c_n se trata de evaluar el dominio, por parte del alumno de los mismos conocimientos c_1, c_2, ..., c_n;
- la capacidad por parte del alumno de usar los conocimientos c_1, c_2, ..., c_n en las situaciones en las cuales éstos tienen un sentido;

- la capacidad de usar algunos de estos conocimientos en modo transversal, esto es, fuera de las situaciones en las cuales han sido estrechamente vinculados o hechos propios;
- la disponibilidad que muestra el alumno de arriesgar cognitivamente, en la zona de desarrollo próximo, en el sentido en que se ha dicho antes;
- motivación y volición demostradas por el alumno durante la actividad;
- el gusto, el deseo, la voluntad mostrados por el alumno en la utilización de sus propios conocimientos a fin de resolver la situación y construir nuevos conocimientos.

Ahora espera a los maestros, en situaciones de clase, jugarse esta carta; reunidos en grupos de trabajo y fijadas algunas competencias que se entienden realmente evaluables, deberán elaborar una rejilla de evaluación coherente y atendible, creando ejemplos que puedan ser utilizados en diversas situaciones de aula. La reunión de tales rejillas, validadas y haciéndolas objetivas a partir de la repetición en diversas situaciones, consignará a la escuela militante, un instrumento que parece ser, al día de hoy, de un nivel potencialmente altísimo.

Una objeción de fondo

Una obvia objeción de fondo a todo esto, y especialmente a todo lo que concierne a la evaluación de la capacidad, es que todo es vago, se basa sobre cuestiones profundamente personales, no objetivas.

Es verdad, acepto y participo en primera fila de la crítica.

Pero, por otra parte, no es posible no estar de acuerdo en que *todos* los intentos a escala planetaria por llegar a una evaluación objetiva, no basada sobre juicios personales del maestro o de cualquier evaluador humano, influenciable y, por tanto, no objetivo, han tenido resultados vanos: son fallidos los intentos por alcanzar test objetivos, sea cual sea la forma, test cerrados etc., de una nación en particular o comunes a todas las naciones.

Hago alarde y fuerza para sostener mi precedente tesis, a partir de un artículo, aparecido recientemente, de Howard Gardner, «The testing obsession», (31 de diciembre de 2000), en el cual el famoso psicólogo denuncia y ridiculiza la «obsesión del test» que ha invadido toda América y está invadiendo Europa, en la vana esperanza de poder alcanzar un sistema de evaluación lo más imparcial posible, independiente de los juicios de los seres humanos (Gardner, 2000).

Un reciente análisis personal[2] del sistema usado en Colombia para las pruebas del ICFES[3] (al terminar educación básica y media) me han llevado a la convicción que en tales pruebas «objetivas» se mide sólo la … fortuna que ha tenido un estudiante de haber encontrado en el transcurso de su formación académica profesores que han desarrollado exactamente esos contenidos *(contenidos,* lo escribo aquí a propósito con la intención de ser provocativo) que el mismo estudiante encontrará en el test, dado que el sistema complejo que regula y determina la capacidad no es probable en modo alguno sin observaciones personales.

Entonces, no será tampoco «objetivo» lo que caracteriza mi propuesta, pero de cualquier manera no puede serlo en caso alguno.

Además, tiempo atrás estoy intentando colocar al ser humano en el centro de sus propias experiencias: cognitivas, de aprendizaje, de conocimientos; por tanto, esta posición es coherente con el esfuerzo perseguido. No es un caso que la institucionalización del saber construido sea hecha por el maestro, dado que él es reconocido por parte del alumno y por parte de la noosfera como el depositario del saber.

A pesar de los riesgos «contractuales» que ocurren en el aula, a pesar del riesgo de que el estudiante no acceda al saber sino a través de la figura mediatriz del maestro, a pesar del riesgo de la escolarización de los saberes (D'Amore, 1999*a*), yo prefiero una relación humana a una verificación pre-diseñada, masificada para cada caso y para cada mente (pre-diseñada por seres humanos, en un delirio de omnipotencia predictiva). ¡A menos, claro está, que cambie de modo estructural y significativo toda la arquitectura escolar, con maestros que estén al corriente en forma explícita y muy detallada de las competencias esperadas!

2 Mis comentarios sólo atañen a la matemática, se sobreentiende.

3 Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior.

Bruno D'Amore
Departamento
de Matemáticas.
Universidad de Bolonia.
Facultad de Ciencias
de la Formación.
Universidad de Bolzano.

Referencias bibliográficas

D'AMORE, B. (1999*a*): «Escolarización del saber y de las relaciones: efectos sobre el aprendizaje de las matemáticas», *Relime*, en prensa.

D'AMORE, B. (1999*b*), *Elementi di didattica de lla matematica*, Pitagora, Bolonia.

D'AMORE, B. y M.I. FANDIÑO PINILLA (2001): «Un acercamiento analítico al "triángulo de la didáctica"», *Educación Matemática*, en prensa.

GARDNER, H. (2000): «The testing obsession», *Los Angeles Times*, 31 de diciembre de 2000 (también: http://www.latimes.com/news/comment/20000231/t0001124383.html)

MARTINI, B. (2001): *Didattiche disciplinari*, Pitagora, Bolonia.

SUMA 43
junio 2003, pp. 31-37

Los orígenes del método de mínimos cuadrados

Gabriel Ruiz Garzón

ARTÍCULOS

El principal objetivo de este artículo es mostrar la génesis histórica del método de mínimos cuadrados relacionada con el problema de la medición del arco del meridiano terrestre y la introducción del Sistema Métrico Decimal.

LOS ANTECEDENTES

En los actuales manuales de Estadística se suele plantear el método de mínimos cuadrados como una importante y singular técnica relacionada con el problema del ajuste, consistente en obtener la ecuación de una curva que, bajo determinado criterio, se «acerque» o «adapte» lo mejor posible a los puntos observados de una distribución bidimensional.

Sin embargo, en sus comienzos, el método de mínimos cuadrados era una técnica geodésica. Como explicaremos más adelante, era una técnica para resolver sistemas de ecuaciones donde el número de ecuaciones superaba al de incógnitas.

Varios son los antecedentes alejados de la Estadística que generaron el método de mínimos cuadrados: el problema de la figura de la Tierra y, ligado a él, la medición del arco del meridiano terrestre, y a su vez relacionado con este último, el problema de la introducción del Sistema Métrico Decimal.

Los matemáticos debemos tratar estos temas al unísono y no como si fueran compartimentos estancos. La visión conjunta de todos estos problemas es mucho más enriquecedora para el alumno. Este artículo quiere colaborar a ese objetivo.

Los dos principales métodos para determinar la figura de la Tierra son los experimentos con el péndulo y las medidas del arco del meridiano terrestre.

Que la Tierra no era una esfera perfecta se sabía porque a un péndulo cerca del ecuador le afectaba menos la gravedad que al mismo péndulo en París. Newton demuestra en los *Principia* (1687), que la Tierra tiene que ser achatada por los polos y si definimos la *elipticidad* ρ como

$$\rho = \frac{E - P}{P}$$

donde E es el radio ecuatorial y P es el radio polar, encuentra que $1/\rho = 230$.

Doménico Cassini, director del Observatorio de París, piensa que el achatamiento se produce en el ecuador y no en los polos. Si el grado cerca del ecuador es más pequeño que cerca del Polo, entonces la forma de la Tierra es la predicha por Newton.

En 1735 la Academia Francesa envía una expedición a Perú, encabezada por Bouguer, y otra a Laponia, encabezada por Maupertuis, para medir la longitud del arco y compararla con la medida del arco en París.

Pierre Bouguer (1698-1758), fue profesor de Hidrografía en el Havre. En la expedición a Perú estuvo acompañado por Godin y La Condamine. Bouguer fue el primero en regresar a París y el primero en comunicar los resultados de la expedición a la Academia, lo que le granjeó las enemistades de sus compañeros de viaje.

Por cierto, Louis Godin (1704-1760) murió en Cádiz siendo director de la Academia de Guardias Marinas de la Armada.

Por otra parte, Maupertuis (1698-1759) fue discípulo de los Bernoulli en Basilea. En su viaje a Laponia estuvo acompañado por Alexis Claude Clairaut (1713-1765), matemático y físico de gran precocidad, que ingresó en la Academia de las Ciencias de París a la edad de dieciséis años. En su viaje a Laponia demostraron la idea de Newton sobre la forma de la Tierra.

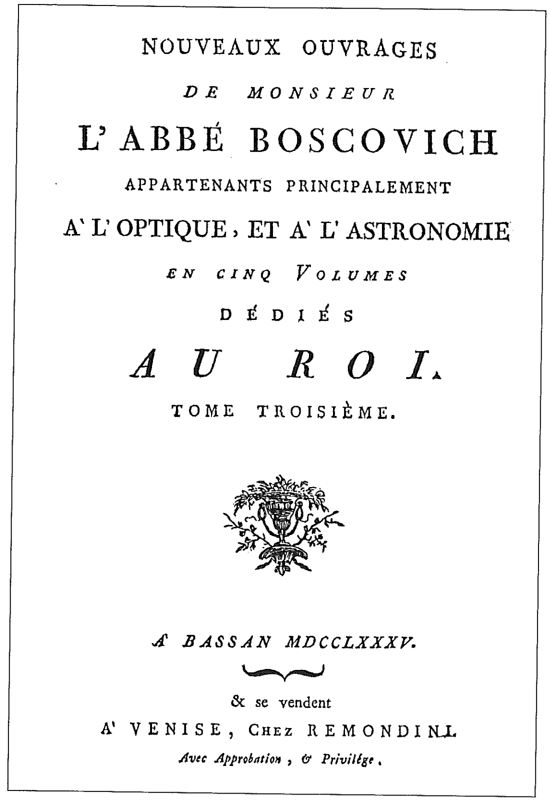
Pero no fue el único intento. En Italia, el Papa Benedicto XIV comisionó al sacerdote jesuita serbio Giuseppe Ruggiero Boscovich (1711-1787), para llevar a cabo ciertas medidas del arco del meridiano. Boscovich propuso el método que Laplace bautizó como «método de situación», para diferenciarlo del «método de mínimos cuadrados», «éste último mucho más ventajoso que el primero», en palabras del sabio francés.

Mientras el método de mínimos cuadrados propuesto por Legendre minimiza la suma de los errores al cuadrado, el método propuesto por Boscovich minimiza la suma del valor absoluto de los errores.

Pero este problema de la medición del arco del meridiano está relacionado con la introducción del Sistema Métrico Decimal.

En 1790 la Convención Nacional decide introducir un nuevo sistema métrico que acabe con la disparidad de medidas que existían en todos los países. Unos planteaban como medida de longitud la de un péndulo que marca el segundo en los 45° de latitud, a través de la conocida fórmula física que liga la longitud del péndulo l con su período T.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$


NOUVEAUX OUVRAGES

DE MONSIEUR

L' ABBÉ BOSCOVICH

APPARTENANTS PRINCIPALEMENT

A' L' OPTIQUE, ET A' L' ASTRONOMIE

EN CINQ VOLUMES

DÉDIÉS

AU ROI.

TOME TROISIÈME.

A' BASSAN MDCCLXXXV.

& se vendent

A' VENISE, CHEZ REMONDINI.

Avec Approbation, & Privilège.

Figura 1

Mientras el método de mínimos cuadrados propuesto por Legendre minimiza la suma de los errores al cuadrado, el método propuesto por Boscovich minimiza la suma del valor absoluto de los errores.

Pero esta medida se desestimó entre otras razones porque dicha longitud depende de la latitud en la que nos encontremos. La definición que se adopta es tomar como unidad de longitud la diez millonésima parte del cuadrante de un meridiano terrestre, el llamado metro (del griego *metron* = medida). Por tanto, se debía medir la longitud de una subsección de ese arco y se decide medir el que va desde Dunquerque a Montjuïc (Barcelona). Delambre medirá el tramo de Dunquerque a Rodez y Méchain de Rodez hasta Barcelona. Méchain morirá en 1804, cerca de Castellón de la Plana, revisando los cálculos ya realizados. Previamente, Méchain había participado junto a Cassini IV y a Legendre en el proyecto de triangulación entre los observatorios de Greenwich y París.

Con los cálculos de Delambre y Méchain hemos elaborado la tabla 1 que nos da la longitud S de los cuatro segmentos consecutivos del arco de meridiano que atraviesa París, medidos en módulos (1 módulo ≅ 12,78 pies), los grados de latitud *d* y la latitud del punto medio *L* de cada segmento de arco (figura 2).

La medición del meridiano Dunquerque-París-Barcelona fue ampliada en 1817 hasta Formentera por Biot y Arago.

	Módulos *S*	Grados *d*	Punto medio *L*
De Dunquerque a Pantheon	62472,59	2,18910	49° 56' 30"
De Pantheon (París) a Evaux	76145,74	2,66868	47° 30' 46"
De Evaux a Carcassone	84424,55	2,96336	44° 41' 48"
De Carcassone a Barcelona	52749,48	1,85266	42° 17' 20"

Tabla 1

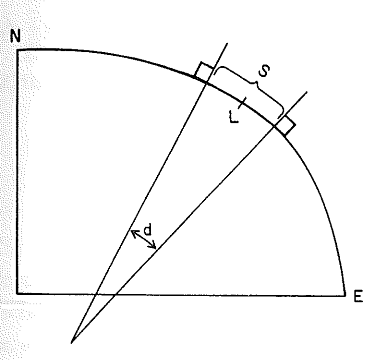
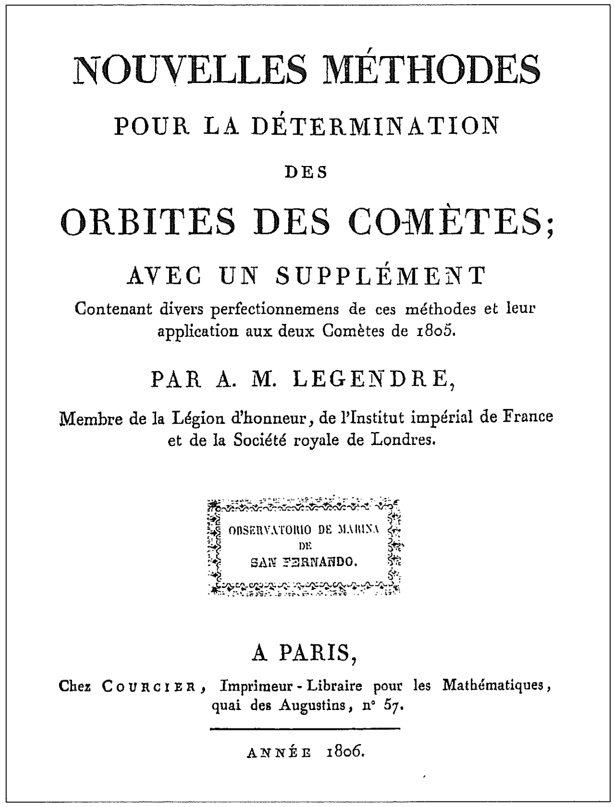


Figura 2



NOUVELLES MÉTHODES

POUR LA DÉTERMINATION

DES

ORBITES DES COMÈTES;

AVEC UN SUPPLÉMENT

Contenant divers perfectionnemens de ces méthodes et leur application aux deux Comètes de 1805.

PAR A. M. LEGENDRE,

Membre de la Légion d'honneur, de l'Institut impérial de France et de la Société royale de Londres.

OBSERVATORIO DE MARINA DE SAN FERNANDO.

A PARIS,

Chez COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

ANNÉE 1806.

Figura 3

El desarrollo

Hemos visto que el papel de la Astronomía ha sido muy importante en el origen y desarrollo del método de mínimos cuadrados. Legendre publica el método en 1805 en un apéndice del libro sobre la órbita de los cometas: *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes.*

En 1801, el astrónomo italiano Joseph Piazzi, descubrió el asteroide al que le pusieron el nombre de Ceres. A causa de la situación desfavorable del asteroide respecto del Sol, sólo pudieron practicarse las observaciones durante cuarenta días.

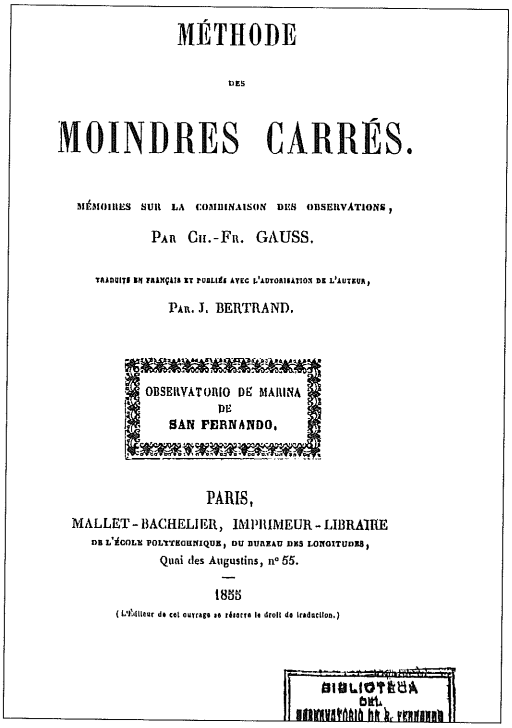
Al haberlo perdido tan pronto, los astrónomos se enfrentaron al problema de calcular sus posiciones a partir de pocas observaciones. Gauss desarrolló un sistema para el cálculo de órbitas, método que se utiliza hoy en día para seguir satélites artificiales, basado en el método de mínimos cuadrados. Gauss calculó la trayectoria de Ceres de tal manera que cuando el asteroide apareció por el otro lado del Sol, los astrónomos lo encontraron cuándo y dónde Gauss les había dicho.

...el método de mínimos cuadrados no fue creado para la Estadística. Es un método geodésico, creado para ayudar a los astrónomos.

En el método de mínimos cuadrados de Legendre no hay probabilidad. Sólo cuatro años más tarde, cuando Gauss publica sus resultados en *Theoria motus corporum coelestium,* se encuentran conceptos de Estadística como la distribución normal o también llamada «ley de los errores». Legendre y Gauss mantuvieron una agria disputa sobre la prioridad en el descubrimiento del método de mínimos cuadrados (ver García Azcárate, 2002).

Luego, el método de mínimos cuadrados no fue creado para la Estadística. Es un método geodésico, creado para ayudar a los astrónomos.

El método de mínimos cuadrados se formulaba de la siguiente manera: sean p funciones lineales V_1, V_2, V_3, ..., que dependen de m incógnitas x, y, z,...; sean W_1, W_2, W_3,..., los valores observados de esas funciones y


MÉTHODE

DES

MOINDRES CARRÉS.

MÉMOIRES SUR LA COMBINAISON DES OBSERVATIONS,

PAR CH.-FR. GAUSS.

TRADUITS EN FRANÇAIS ET PUBLIÉS AVEC L'AUTORISATION DE L'AUTEUR,

PAR J. BERTRAND.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Augustins, n° 55.

1855

(L'Éditeur de cet ouvrage se réserve le droit de traduction.)

Figura 4

supongamos que esos valores están afectados de los errores $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$, es decir,

$$V_1 - W_1 = \varepsilon_1$$
$$V_2 - W_2 = \varepsilon_2$$
$$V_3 - W_3 = \varepsilon_3$$
$$\ldots$$

La principal dificultad que tenía que salvar el método es que el número de ecuaciones (p) superaba al número de incógnitas (m).

Gauss supone que la ley de probabilidad de ocurrencia del error era

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2}$$

y por tanto la probabilidad de que ocurran los p errores a la vez es de

$$P = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^p e^{-h^2\left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \cdots + \varepsilon_p^2\right)}$$

De la ignorancia de dónde se producen esos errores Gauss piensa en sustituirlos donde la probabilidad anterior ofrezca su valor máximo, es decir, donde la suma de errores $\Phi = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \ldots + \varepsilon_p^2$ sea mínima.

Para mayor claridad en la exposición, y sin perder generalidad, consideremos un sistema de $p = 3$ ecuaciones con $m = 2$ incógnitas solamente.

Pongamos pues

$$V_1 = a_1x + b_1y + c_1$$
$$V_2 = a_2x + b_2y + c_2$$
$$V_3 = a_3x + b_3y + c_3$$

donde

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= a_1x + b_1y + (c_1 - W_1) = a_1x + b_1y + d_1 \\ \varepsilon_2 &= a_2x + b_2y + (c_2 - W_2) = a_2x + b_2y + d_2 \\ \varepsilon_3 &= a_3x + b_3y + (c_3 - W_3) = a_3x + b_3y + d_3 \end{aligned} \qquad [1]$$

El sistema de ecuaciones anterior está formado por las llamadas *ecuaciones de condición.*

Como hemos expuesto anteriormente, debe ser mínima la suma de errores al cuadrado

$$\Phi = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 =$$
$$= \left(a_1x + b_1y + d_1\right)^2 + \left(a_2x + b_2y + d_2\right)^2 + \left(a_3x + b_3y + d_3\right)^2$$

y para que eso ocurra y determinar x e y, se tiene que satisfacer que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$$

O sea,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \left(a_1x + b_1y + d_1\right)a_1 + \left(a_2x + b_2y + d_2\right)a_2 + \left(a_3x + b_3y + d_3\right)a_3 = 0$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \left(a_1x + b_1y + d_1\right)b_1 + \left(a_2x + b_2y + d_2\right)b_2 + \left(a_3x + b_3y + d_3\right)b_3 = 0$$

que de una manera más simplificada quedaría

$$\begin{aligned} \left(\sum a_i^2\right)x + \left(\sum a_ib_i\right)y + \sum a_id_i &= 0 \\ \left(\sum a_ib_i\right)x + \left(\sum b_i^2\right)y + \sum b_id_i &= 0 \end{aligned} \qquad [2]$$

que conforma el *sistema de ecuaciones normales,* un sistema ya con igual número de ecuaciones que de incógnitas y donde los errores han desaparecido.

Además como se tiene que

$$\sum a_ib_i = \frac{1}{2}\left[\sum\left(a_i + b_i\right)^2 - \sum a_i^2 - \sum b_i^2\right]$$
$$\sum a_id_i = \frac{1}{2}\left[\sum\left(a_i + d_i\right)^2 - \sum a_i^2 - \sum d_i^2\right]$$
$$\sum b_id_i = \frac{1}{2}\left[\sum\left(b_i + d_i\right)^2 - \sum b_i^2 - \sum d_i^2\right]$$

todos los coeficientes del sistema de ecuaciones normales o son sumas de cua-

TABLE I.

Carrés des nombres, depuis le nombre 0,000 jusqu'au nombre 12,000, réduits a quatre chiffres décimaux.

— XXVIII —

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	0,2500	2,2500	6,2500	12,2500	20,2500	30,2500	42,2500	56,2500	72,2500	90,2500
51	0,2601	2,2801	6,3001	12,3201	20,3401	30,3601	42,3801	56,4001	72,4201	90,4401
52	0,2704	2,3104	6,3504	12,3904	20,4304	30,4704	42,5104	56,5504	72,5904	90,6304
53	0,2809	2,3409	6,4009	12,4609	20,5209	30,5809	42,6409	56,7009	72,7609	90,8209
54	0,2916	2,3716	6,4516	12,5316	20,6116	30,6916	42,7716	56,8516	72,9316	91,0116
55	0,3025	2,4025	6,5025	12,6025	20,7025	30,8025	42,9025	57,0025	73,1025	91,2025
56	0,3136	2,4336	6,5536	12,6736	20,7936	30,9136	43,0336	57,1536	73,2736	91,3936
57	0,3249	2,4649	6,6049	12,7449	20,8849	31,0249	43,1649	57,3049	73,4449	91,5849
58	0,3364	2,4964	6,6564	12,8164	20,9764	31,1364	43,2964	57,4564	73,6164	91,7764
59	0,3481	2,5281	6,7081	12,8881	21,0681	31,2481	43,4281	57,6081	73,7881	91,9681
60	0,3600	2,5600	6,7600	12,9600	21,1600	31,3600	43,5600	57,7600	73,9600	92,1600
61	0,3721	2,5921	6,8121	13,0321	21,2521	31,4721	43,6921	57,9121	74,1321	92,3521
62	0,3844	2,6244	6,8644	13,1044	21,3444	31,5844	43,8244	58,0644	74,3044	92,5444
63	0,3969	2,6569	6,9169	13,1769	21,4369	31,6969	43,9569	58,2169	74,4769	92,7369
64	0,4096	2,6896	6,9696	13,2496	21,5296	31,8096	44,0896	58,3696	74,6496	92,9296
65	0,4225	2,7225	7,0225	13,3225	21,6225	31,9225	44,2225	58,5225	74,8225	93,1225
66	0,4356	2,7556	7,0756	13,3956	21,7156	32,0356	44,3556	58,6756	74,9956	93,3156
67	0,4489	2,7889	7,1289	13,4689	21,8089	32,1489	44,4889	58,8289	75,1689	93,5089
68	0,4624	2,8224	7,1824	13,5424	21,9024	32,2624	44,6224	58,9824	75,3424	93,7024
69	0,4761	2,8561	7,2361	13,6161	21,9961	32,3761	44,7561	59,1361	75,5161	93,8961
70	0,4900	2,8900	7,2900	13,6900	22,0900	32,4900	44,8900	59,2900	75,6900	94,0900
71	0,5041	2,9241	7,3441	13,7641	22,1841	32,6041	45,0241	59,4441	75,8641	94,2841
72	0,5184	2,9584	7,3984	13,8384	22,2784	32,7184	45,1584	59,5984	76,0384	94,4784
73	0,5329	2,9929	7,4529	13,9129	22,3729	32,8329	45,2929	59,7529	76,2129	94,6729
74	0,5476	3,0276	7,5076	13,9876	22,4676	32,9476	45,4276	59,9076	76,3876	94,8676
75	0,5625	3,0625	7,5625	14,0625	22,5625	33,0625	45,5625	60,0625	76,5625	95,0625
76	0,5776	3,0976	7,6176	14,1376	22,6576	33,1776	45,6976	60,2176	76,7376	95,2576
77	0,5929	3,1329	7,6729	14,2129	22,7529	33,2929	45,8329	60,3729	76,9129	95,4529
78	0,6084	3,1684	7,7284	14,2884	22,8484	33,4084	45,9684	60,5284	77,0884	95,6484
79	0,6241	3,2041	7,7841	14,3641	22,9441	33,5241	46,1041	60,6841	77,2641	95,8441
80	0,6400	3,2400	7,8400	14,4400	23,0400	33,6400	46,2400	60,8400	77,4400	96,0400
81	0,6561	3,2761	7,8961	14,5161	23,1361	33,7561	46,3761	60,9961	77,6161	96,2361
82	0,6724	3,3124	7,9524	14,5924	23,2324	33,8724	46,5124	61,1524	77,7924	96,4324
83	0,6889	3,3489	8,0089	14,6689	23,3289	33,9889	46,6489	61,3089	77,9689	96,6289
84	0,7056	3,3856	8,0656	14,7456	23,4256	34,1056	46,7856	61,4656	78,1456	96,8256
85	0,7225	3,4225	8,1225	14,8225	23,5225	34,2225	46,9225	61,6225	78,3225	97,0225
86	0,7396	3,4596	8,1796	14,8996	23,6196	34,3396	47,0596	61,7796	78,4996	97,2196
87	0,7569	3,4969	8,2369	14,9769	23,7169	34,4569	47,1969	61,9369	78,6769	97,4169
88	0,7744	3,5344	8,2944	15,0544	23,8144	34,5744	47,3344	62,0944	78,8544	97,6144
89	0,7921	3,5721	8,3521	15,1321	23,9121	34,6921	47,4721	62,2521	79,0321	97,8121
90	0,8100	3,6100	8,4100	15,2100	24,0100	34,8100	47,6100	62,4100	79,2100	98,0100
91	0,8281	3,6481	8,4681	15,2881	24,1081	34,9281	47,7481	62,5681	79,3881	98,2081
92	0,8464	3,6864	8,5264	15,3664	24,2064	35,0464	47,8864	62,7264	79,5664	98,4064
93	0,8649	3,7249	8,5849	15,4449	24,3049	35,1649	48,0249	62,8849	79,7449	98,6049
94	0,8836	3,7636	8,6436	15,5236	24,4036	35,2836	48,1636	63,0436	79,9236	98,8036
95	0,9025	3,8025	8,7025	15,6025	24,5025	35,4025	48,3025	63,2025	80,1025	99,0025
96	0,9216	3,8416	8,7616	15,6816	24,6016	35,5216	48,4416	63,3616	80,2816	99,2016
97	0,9409	3,8809	8,8209	15,7609	24,7009	35,6409	48,5809	63,5209	80,4609	99,4009
98	0,9604	3,9204	8,8804	15,8404	24,8004	35,7604	48,7204	63,6804	80,6404	99,6004
99	0,9801	3,9601	8,9401	15,9201	24,9001	35,8801	48,8601	63,8401	80,8201	99,8001

Figura 5

drados o se reducen a sumar y restar dichas sumas de cuadrados. Los libros de texto de final del siglo XIX (ver Faá de Bruno, 1869), venían provistos de tablas donde fácilmente se podrían conseguir esas sumas (figura 5).

Seguidamente daremos algunos ejemplos que ilustran el método de mínimos cuadrados.

Ejemplo 1

Los problemas que muestran las relaciones entre la longitud del arco, la latitud, la elipticidad son no lineales. Existen muchas maneras de convertirlos en lineales. Una buena aproximación utilizada por Boscovich en 1755, Laplace en 1780, y Legendre en 1805, viene dada por la ecuación:

$$a = x + y\,\mathrm{sen}^2 L \qquad [3]$$

donde $a = S/d$ es la longitud del arco en módulos por grado de latitud, x es la longitud de un grado en el ecuador e y es el exceso de un grado en el polo sobre uno del ecuador.

Boscovich utilizando el método de situación, halló la misma elipticidad que la aquí encontrada por el método de mínimos cuadrados.

Se trataría de encontrar las constantes x e y por mínimos cuadrados.

Con los resultados de las observaciones de Delambre y Méchain que figuran en la tabla anterior, sustituidas en la ecuación anterior [3], dan las siguientes cuatro ecuaciones de condición:

$$\begin{aligned} x + y(0,585821) - 28538,02476 &= 0 \\ x + y(0,543800) - 28533,11000 &= 0 \\ x + y(0,494705) - 28489,46804 &= 0 \\ x + y(0,452752) - 28472,29389 &= 0 \end{aligned}$$

Si aplicamos el método de mínimo cuadrados, esas cuatro ecuaciones se pueden sustituir por las siguientes dos ecuaciones del sistema de ecuaciones normales [2]:

$$\begin{aligned} 4x + y(2,077078) - 114032,8967 &= 0 \\ 2,077078x + y(1,088621) - 59219,24971 &= 0 \end{aligned}$$

O, de una manera más simplificada:

$$\begin{aligned} x + y(0,5192695) - 28508,22418 &= 0 \\ x + y(0,5241117) - 28510,84538 &= 0 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son

$$x = 28227,13109$$
$$y = 541,3241$$

y por lo tanto

$$a = 28227,13109 + 541,3241\,\mathrm{sen}^2 L$$

y como la elipticidad ρ se puede calcular a través de

$$\frac{1}{\rho} = \frac{3x}{y} + \frac{3}{2}$$

y como el cuadrante del meridiano es

$$\text{cuadrante del meridiano} = 90\left(x + \frac{y}{2}\right)$$

con los valores calculados se puede demostrar que la elipticidad

$$\frac{1}{\rho} = 157,93$$
$$\text{cuadrante del meridiano} = 2564801,37 \text{ módulos}$$

Por cierto, Boscovich utilizando el método de situación, halló la misma elipticidad que la aquí encontrada por el método de mínimos cuadrados.

Legendre en *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes,* con los mismos datos del arco del meridiano terrestre medido sobre Francia, entre Dunquerque y Barcelona, y utilizando el método de mínimos cuadrados sobre una ecuación similar a [3], halla unos valores de

$$\frac{1}{\rho} = 148$$

cuadrante del meridiano = 2564800 módulos

Y por tanto, el metro debe valer 0,2564800 módulos ≅ 3,28 pies. Por cierto, que el actual metro está basado en los resultados encontrados por Laplace incorporando la medida del arco en Perú y a través de un algoritmo que minimiza el error máximo, encontrando un valor para el cuadrante del meridiano de 2565370 módulos y por tanto un valor del metro igual a 0,256537 módulos, algo mayor que el valor hallado por Legendre.

Y también es verdad que Gauss descubre más o menos independientemente de Legendre el método mínimos cuadrados y, al igual que éste último, utiliza los datos del mismo meridiano para sus cálculos y halla en este caso que

$$\frac{1}{\rho} = 187$$

cuadrante del meridiano = 2565006 módulos

Del manual de Faá de Bruno (1869) son los siguientes ejemplos que ilustran el método de mínimos cuadrados.

Ejemplo 2

Se sabe que el estudio de las oscilaciones del péndulo en diversas latitudes lleva a los físicos a concluir que la longitud del péndulo que marca el segundo depende de la latitud del lugar, según la siguiente Ley de Clairaut

$$\lambda = x + y\,\mathrm{sen}^2\psi \qquad [4]$$

donde las constantes x e y son las longitudes que necesitamos encontrar.

Diversos observadores célebres efectuaron sendos experimentos y sus datos se resumen en la tabla 2.

...el actual metro está basado en los resultados encontrados por Laplace incorporando la medida del arco en Perú y a través de un algoritmo que minimiza el error máximo...

Lugar de la observación	*Latitud del lugar* ψ	*Longitud del péndulo* λ	*Nombre del observador*
Quito	0° 0′	0,990564 m	Bouguer
Petit-Goave	18° 27′	0,991150 m	Bouguer
París	48° 24′	0,993867 m	Biot et Mathieu
San Petersburgo	58° 15′	0,994589 m	Mallet
Laponia	67° 4′	0,995325 m	Clairaut et Maupertuis

Tabla 2

Los resultados de estas observaciones, sustituidas en la ecuación anterior [4], dan las siguientes cinco ecuaciones de condición:

$$x + y(0,00000) - 0,990564 = 0$$
$$x + y(0,10016) - 0,991150 = 0$$
$$x + y(0,56672) - 0,993867 = 0$$
$$x + y(0,72307) - 0,994589 = 0$$
$$x + y(0,84829) - 0,995325 = 0$$

Si aplicamos el método de mínimo cuadrados, esas cinco ecuaciones se pueden sustituir por las siguientes dos ecuaciones del sistema de ecuaciones normales [2]:

$$x + y(0,44765) - 0,993099 = 0$$
$$x + y(0,70306) - 0,994548 = 0$$

cuyas soluciones son

$$x = 0,990555 \text{ m}$$
$$y = 0,0056786 \text{ m}$$

y por lo tanto

$$\lambda = 0,990555 + 0,0056786\,\mathrm{sen}^2\psi$$

También en aquella época eran comunes los estudios de presión atmosférica. Por ejemplo, Blas Pascal, los hizo en la ahora renombrada mítica cumbre ciclista del Puy-de-Dôme, pero el protagonista del siguiente ejemplo es el canónigo de Alejandría Parnisetti.

Ejemplo 3

Las variaciones diurnas de la presión atmosférica dependen de la temperatura del lugar. Con los datos aportados por Parnisetti, de la media de los valores barométricos y termométricos medios durante los años 1861-1865, donde el primer miembro de la igualdad expresa las variaciones barométricas desde las 9 de la mañana hasta las 3 de la tarde, expresadas en centésimas de milímetro, y los segundos miembros representan las temperaturas medias en grados centesimales, damos las ecuaciones de condición que aparecen en la tabla 3

Aplicando el método de mínimos cuadrados, se encuentra que la presión barométrica p depende de la temperatura t, en Alejandría, de la siguiente manera

$$p = 81 + 2,2t$$

Enero	73 = x + y(–0,37)
Febrero	93 = x + y(2,93)
Marzo	98 = x + y(9,97)
Abril	126 = x + y(14,58)
Mayo	113 = x + y(12,54)
Junio	115 = x + y(22,54)
Julio	140 = x + y(25,12)
Agosto	136 = x + y(24,50)
Septiembre	131 = x + y(20,30)
Octubre	109 = x + y(14,00)
Noviembre	90 = x + y(7,00)
Diciembre	100 = x + y(2,15)

Tabla 3

lo que prueba una cierta influencia directa de la temperatura en la presión.

Ejemplo 4

El método de mínimos cuadrados nos va a servir para determinar la diferencia de longitud entre dos lugares. A este efecto, se emplearán unos cronómetros que se transportan de un lugar al otro intercambiándose. Es evidente que un cálculo exacto de la diferencia de hora de los cronómetros indicará la diferencia de longitud buscada entre los dos lugares.

Seguidamente con los resultados de las observaciones y sin entrar en muchos detalles, daremos las siguientes ecuaciones de condición para obtener la distancia en longitud de los observatorios de Pulkowa y Dorpat, a saber:

$$\begin{aligned}
0,508x - y - 0,096z &= +0,096\\
0,544x + y - 0,312z &= -0,386\\
0,540x - y + 0,294z &= -0,049\\
0,522x + y - 0,193z &= -0,386\\
0,521x - y - 0,195z &= -0,078\\
0,510x + y + 0,114z &= +0,179\\
0,571x - y + 0,032z &= -0,343\\
0,579x + y - 0,079z &= -0,006\\
0,511x - y - 0,356z &= -0,348\\
0,535x + y + 0,345z &= +0,508
\end{aligned}$$

de dónde aplicando el método de mínimos cuadrados, se deducirán fácilmente las siguientes ecuaciones normales:

$$\begin{aligned}
+2,860x + 0,038y - 0,229z &= -0,444\\
+0,038x + 10,000y + 0,196z &= +0,630\\
-0,229x + 0,196y + 0,534z &= +0,496
\end{aligned}$$

El tratamiento que recibe el método de mínimos cuadrados en nuestros manuales de Estadística actuales está alejado de los importantes problemas que lo gestaron, como el cálculo exacto de la figura de la Tierra o la introducción del metro patrón, que ocuparon y preocuparon a matemáticos durante siglos.

para las cuales las soluciones son:

$$x = -0,036$$
$$y = 0,046$$
$$z = 0,874$$

Luego, como hemos podido observar, la presentación del método de mínimos cuadrados difería sustancialmente de la actual. No sólo en los temas a los que se aplica, geodésicos y físicos, sino en la forma de tratarlo: Consistía en «un método para resolver un sistema de ecuaciones donde el número de ecuaciones supera al número de incógnitas y donde las ecuaciones provienen de observaciones afectadas por errores desconocidos».

Las conclusiones

Llegada la hora de hacer balance, se puede decir que con este artículo hemos pretendido:

a) Acercar la Historia de las Matemáticas a nuestras aulas. El tratamiento que recibe el método de mínimos cuadrados en nuestros manuales de Estadística actuales está alejado de los importantes problemas que lo gestaron, como el cálculo exacto de la figura de la Tierra o la introducción del metro patrón, que ocuparon y preocuparon a matemáticos durante siglos.

b) Posibilitar que estos temas, el método de mínimos cuadrados y la introducción del Sistema Métrico Decimal, puedan ser tratados al unísono y no como compartimentos estancos alejados uno del otro.

Una vez más la interdisciplinariedad ha ganado la batalla.

Gabriel Ruiz
Escuela Universitaria
de Estudios Empresariales
Universidad de Cádiz.
Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
«Thales»

Bibliografía

BOSCOVICH, R.J. (1785): *Opera pertinentia ad opticum et astronomiam maxima ex parte nova, et omnia huiusque inedita in quinque tomos distributa,* Chez Remondini, Venecia.

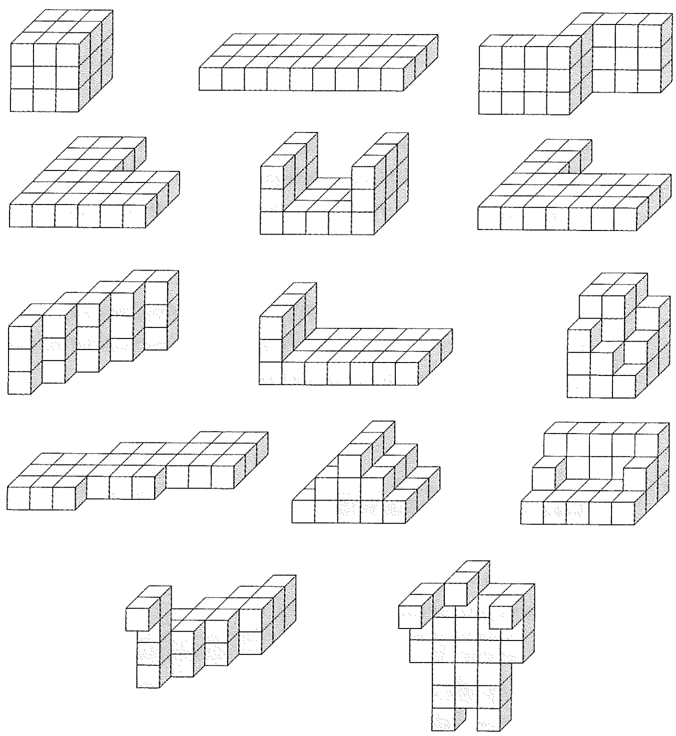
FAÁ DE BRUNO, F. (1869): *Traité Élémentaire du Calcul des Erreurs, avec des tables stéréotypées,* Gauthier-Villars, París.

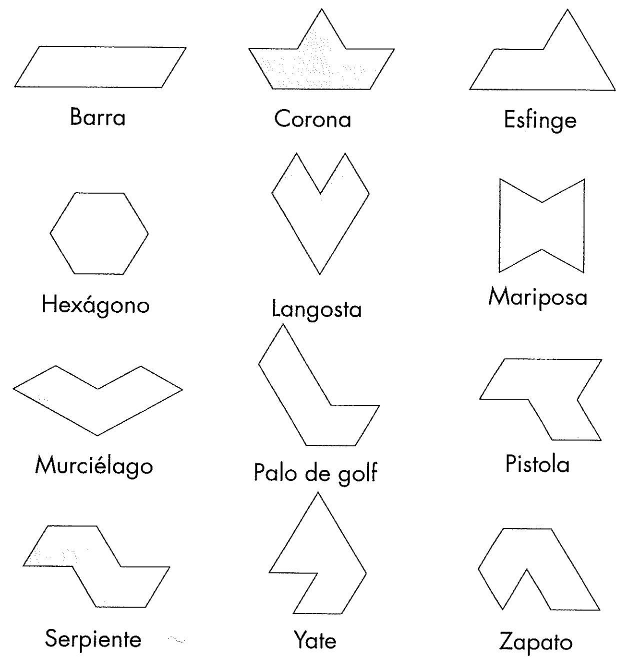
GARCÍA AZCÁRATE, A. (2002): *Legendre: La honestidad de un científico,* Col. La Matemática en sus personajes, n.° 11, Nívola, Madrid.

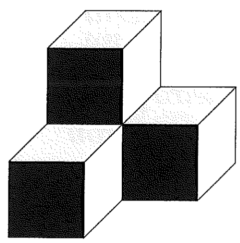
GAUSS, C.F. (1855): *Méthode des Moindres Carrés. Memoire sur la combinasion des observations,* Mallet-Bachelier, París.

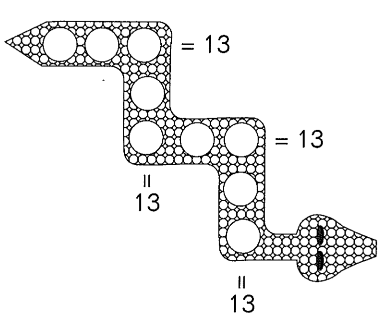
LEGENDRE, A.M. (1806): *Nouvelles Méthodes pour la Détermination des Orbites des Comètes,* Chez Courcier, París.

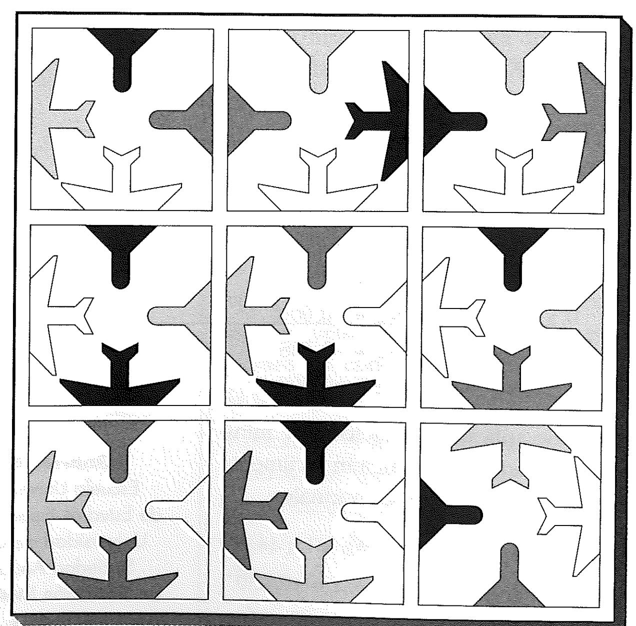
STIGLER, S.M. (1986): *The History of Statistics: The Measurement of Uncertainty before 1900,* The Belknap Press of Harvard University Press, Massachusetts.




Barra
Corona
Esfinge
Hexágono
Langosta
Mariposa
Murciélago
Palo de golf
Pistola
Serpiente
Yate
Zapato




= 13
= 13
13
13



SUMA 43
junio 2003, pp. 39-42

La particularización como estrategia de descubrimiento de nuevos resultados: un ejemplo en geometría

Marcelino J. Ibañes Jalón

La finalidad de este artículo es presentar la demostración matemática como medio de *descubrimiento* cuando se aplica adecuadamente la *estrategia de particularización*. Consta de tres partes: en la primera se exponen algunos de los resultados obtenidos en Ibañes (2001), en la segunda se deducen nuevos resultados por particularización a partir del análisis de una demostración, y en la tercera se establece la conexión entre ambas familias de teoremas.

ARTÍCULOS

ENTRE LAS FUNCIONES de la demostración matemática –De Villiers (1993)–, destaca la de facilitar el descubrimiento de nuevos resultados. El propio De Villiers (1995) muestra un ejemplo de demostración en geometría que sirve para obtener otro teorema. Ibañes (2001) se sirve de esta idea y, empleando distintas estrategias de descubrimiento –expuestas en Polya (1996)–, obtiene sistemáticamente, a partir de un teorema, una familia de numerosos nuevos resultados. En este artículo nos centramos en una de esas estrategias de descubrimiento, la particularización, para obtener una segunda familia de teoremas, emparentados a su vez con los de la primera.

Primera familia de teoremas

En este apartado resumimos los resultados obtenidos en Ibañes (2001), con el fin de facilitar al lector la conexión de ese trabajo con el que se presenta ahora. Los teoremas expuestos en aquel son casos particulares del teorema de Varignon:

Teorema 1.1

En un *cuadrilátero,* al unir consecutivamente los puntos medios de los lados, se obtiene un *paralelogramo* (figura 1).

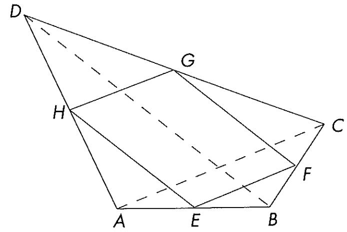


Figura 1

El punto de partida es el siguiente resultado para un rectángulo:

Teorema 1.2

En un *rectángulo* (una clase de cuadriláteros con diagonales iguales), al unir consecutivamente los puntos medios de los lados, se obtiene un *rombo* (una clase de cuadriláteros con diagonales perpendiculares) (figura 2).

Un análisis de la demostración, en combinación con las estrategias de descubrimiento *generalización, particularización, dualidad* y *conjunción,* nos permite obtener muchos otros resultados, poniendo así de manifiesto la finalidad de *descubrimiento* de las demostraciones matemáticas. A continuación, se exponen los que más nos interesan tener ahora en cuenta.

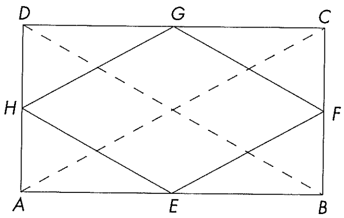


Figura 2

Por *generalización* del teorema 1.2 se obtiene este otro:

Teorema 1.3

En un *cuadrilátero equidiagonal* (cuadriláteros con diagonales iguales), al unir consecutivamente los puntos medios de los lados, se obtiene un *rombo* (una clase de cuadriláteros con diagonales perpendiculares) (figura 3).

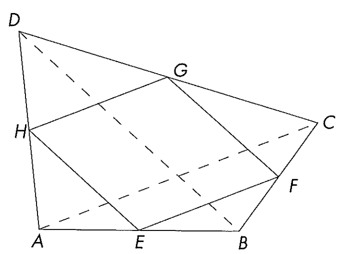


Figura 3

Aplicando la *dualidad* se tiene el siguiente:

Teorema 1.4

En un *cuadrilátero ortodiagonal* (cuadriláteros con diagonales perpendiculares), al unir consecutivamente los puntos medios de los lados, se obtiene un *rectángulo* (una clase de cuadriláteros con diagonales iguales) (figura 4).

Y, mediante la *conjunción* de los dos últimos, se deduce una nueva proposición:

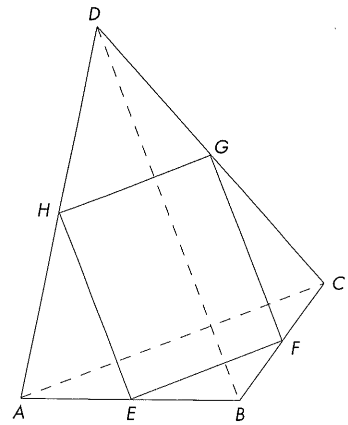


Figura 4

Teorema 1.5

En un *cuadrilátero equiortodiagonal* (cuadriláteros con diagonales iguales y perpendiculares), al unir los puntos medios de los lados, se obtiene un *cuadrado* (una clase de cuadriláteros con diagonales iguales y perpendiculares) (figura 5).

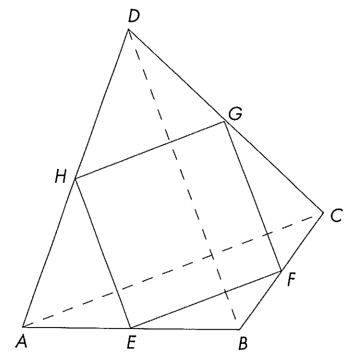


Figura 5

Segunda familia de teoremas

En este apartado nos centramos en una estrategia concreta, la de *particularización*, con el fin obtener nuevos resultados, iniciando el proceso en el análisis de una demostración, que es –como en el caso anterior– la fuente de descubrimiento. El punto de partida es el siguiente teorema que presenta cierta analogía con el de Varignon:

Teorema 2.1

En un *cuadrilátero,* al unir alternativamente los puntos medios de los lados y

En este apartado nos centramos en una estrategia concreta, la de particularización, con el fin obtener nuevos resultados, iniciando el proceso en el análisis de una demostración, que es –como en el caso anterior– la fuente de descubrimiento.

los de las diagonales, se obtiene un *paralelogramo* (figura 6).

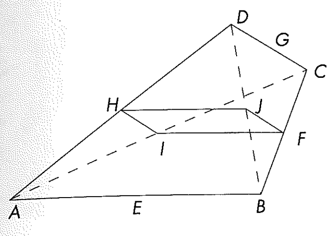


Figura 6

Demostración

Hay dos cuadriláteros que se obtienen al unir alternativamente los puntos medios de los lados y los de las diagonales de un cuadrilátero dado *ABCD:* el *EIGJ* y el *IFJH* (figura 6). Razonaremos sobre este último. Considerando el triángulo *ABC*, se deduce que $IF \parallel AB$ y $|IF| = 1/2|AB|$; y, del triángulo *ABD,* se infiere que $HJ \parallel AB$ y $|HJ| = 1/2|AB|$. Por lo tanto, $IF \parallel HJ$ y $|IF| = |HJ|$. De la misma manera, del triángulo *ACD* se obtiene que $IH \parallel CD$ y $|IH| = 1/2|CD|$; y, del triángulo *BCD,* se deduce que $FJ \parallel CD$ y $|FJ| = 1/2|CD|$. En consecuencia, $IH \parallel FJ$ y $|IH| = |FJ|$. De todo ello, resulta que *IFJH* es un paralelogramo.

Estrategia de particularización

Obsérvese que la causa de que *IFJH* sea un paralelogramo es que *IF* y HJ son paralelos a *AB* y que *IH* y *FJ* son paralelos a *CD.* Por lo tanto, para buscar *particularizaciones* interesantes debemos considerar relaciones significativas entre *AB* y *CD.*

La primera, consiste en suponer que $AB \parallel CD$, con lo que el paralelogramo *IFJH* degenera en un segmento, por lo que puede enunciarse el siguiente teorema:

Teorema 2.2

En un *cuadrilátero con dos lados paralelos,* al unir alternativamente los puntos medios de los otros dos lados y los de las diagonales, se obtiene un segmento (figura 7).

La segunda relación significativa es $|AB| = |CD|$ que implica que *IFJH* es un rombo, obteniéndose el teorema que se enuncia a continuación:

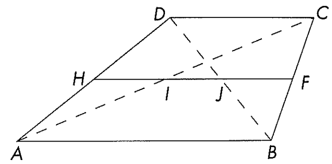


Figura 7

Teorema 2.3

En un *cuadrilátero con dos lados opuestos iguales,* al unir alternativamente los puntos medios de los otros dos lados y los de las diagonales, se obtiene un rombo (figura 8).

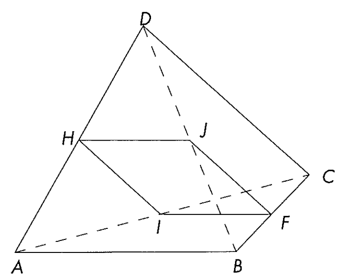


Figura 8

Una tercera relación es $AB \perp CD$, lo que conduce a que *IFJH* sea un rectángulo, quedando probado el siguiente teorema:

Teorema 2.4

En un *cuadrilátero con dos lados opuestos perpendiculares,* al unir alternativamente los puntos medios de los otros dos lados y los de las diagonales, se obtiene un *rectángulo* (figura 9).

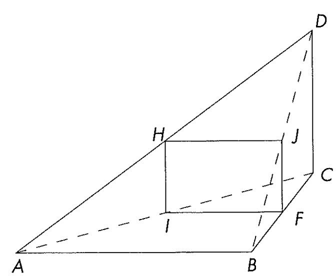


Figura 9

En cuarto lugar, la conjunción de las relaciones $|AB| = |CD|$ y $AB \perp CD$, produce la consecuencia de que *IFJH* sea un cuadrado, desprendiéndose el teorema que sigue:

Teorema 2.5

En un *cuadrilátero con dos lados opuestos perpendiculares e iguales*, al unir alternativamente los puntos medios de los otros dos lados y los de las diagonales, se obtiene un *cuadrado* (figura 10).

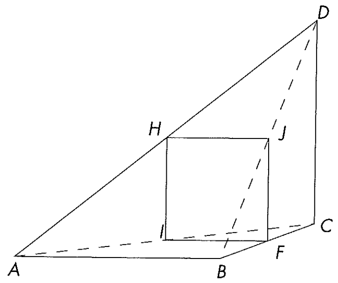


Figura 10

Y, en quinto y último lugar, si en el segundo caso ($|AB| = |CD|$), suponemos además que estos lados forman un ángulo de 60°, entonces obtenemos este último teorema de la familia:

Teorema 2.6

En un *cuadrilátero con dos lados opuestos iguales formando un ángulo de 60°*, al unir alternativamente los puntos medios de los otros dos lados y los de las diagonales, se obtiene un *rombo constituido por dos triángulos equiláteros* (figura 11).

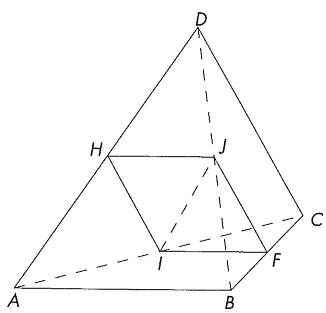


Figura 11

Observación

Los teoremas expuestos en este artículo son ciertos para toda clase de cuadriláteros, aunque en las figuras se hayan representado convexos. Como muestra, en la figura 12, exponemos las correspondientes al teorema 2.1 para cuadriláteros no convexos y no simples.

Dualidad de ambas familias

Finalmente, debe destacarse una interesante relación entre los teoremas de las dos familias estudiadas. Si considera-

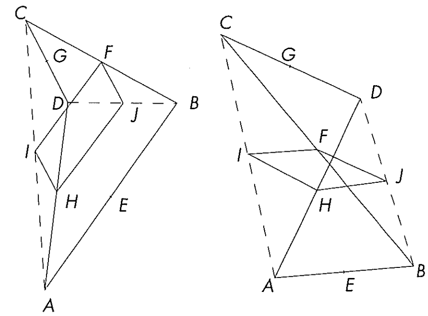


Figura 12

mos como *duales* los términos: *diagonales* y *par de lados opuestos*, los teoremas de ambas familias resultan duales, por lo que pueden obtenerse los de una familia siempre que los de la otra ya hayan sido establecidos. A continuación, se vuelven a enunciar los teoremas afectados resaltando esta dualidad.

Primera familia	*Segunda familia*
Teorema 1.3. En un cuadrilátero con *diagonales iguales*, al unir consecutivamente los puntos medios de los lados, se obtiene un *rombo*.	***Teorema 2.3.*** En un cuadrilátero con *dos lados opuestos iguales*, al unir alternativamente los puntos medios de los otros dos lados y los de las diagonales, se obtiene un *rombo*.
Teorema 1.4. En un cuadrilátero con *diagonales perpendiculares*, al unir consecutivamente los puntos medios de los lados, se obtiene un *rectángulo*.	***Teorema 2.4.*** En un cuadrilátero con *dos lados opuestos perpendiculares*, al unir alternativamente los puntos medios de los otros dos lados y los de las diagonales, se obtiene un *rectángulo*.
Teorema 1.5. En un cuadrilátero con *diagonales iguales y perpendiculares*, al unir los puntos medios de los lados, se obtiene un *cuadrado*.	***Teorema 2.5.*** En un cuadrilátero con *dos lados opuestos iguales y perpendiculares*, al unir alternativamente los puntos medios de los otros dos lados y los de las diagonales, se obtiene un *cuadrado*.

Marcelino J. Ibañes
Instituto Vega del Prado
Valladolid

Referencias bibliográficas

IBAÑES, M. (2001): «Un ejemplo de demostración en Geometría como medio de descubrimiento», *Suma*, n.° 37, 95-98.

POLYA, G. (1966): *Matemáticas y razonamiento plausible*, Tecnos, Madrid.

VILLIERS, M. de (1993): «El papel y la función de la demostración en matemáticas», *Épsilon*, n.° 26, 15-30.

VILLIERS, M. de (1995): «An alternative introduction to proof in dynamic geometry», *Micromath Spring*, n.° 11(1), 14-19.

SUMA 43
junio 2003, pp. 43-45

Una interpretación gráfica alternativa de las soluciones de la ecuación de segundo grado

Leonor Giménez Fernández
Eduardo L. Giménez-Fernández

Comúnmente, la intuición gráfica de las soluciones de la ecuación de segundo grado consiste en la intersección de una parábola con el eje horizontal. En este trabajo se presenta una interpretación gráfica alternativa. Por un lado, en el caso de que el término independiente no sea nulo, la ecuación de segundo grado se puede descomponer en dos funciones: una recta y una hipérbola equilátera. La intersección o no de ambas funciones determina la existencia de dos, una o ninguna solución. Asimismo, esta representación alternativa nos ofrece una intuición de cómo los valores que toman los coeficientes de la ecuación de segundo grado afectan a la existencia de alguna solución. Por otro lado, si el término independiente es nulo, la ecuación de segundo grado se puede descomponer en dos funciones: el producto de dos polinomios de primer orden, y la función nula. En este caso siempre existen dos soluciones reales: las intersecciones de ambas rectas con el eje de abcisas, una de las cuales toma valor cero.

ARTÍCULOS

LAS SOLUCIONES de la ecuación de segundo grado

La ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

para unos valores reales $a \neq 0$, b y c, puede tener dos, una o ninguna solución real. Para entender intuitivamente este resultado comúnmente se representa gráficamente al polinomio como una función parabólica

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Las soluciones, o raíces de este polinomio f(x), coinciden con los puntos de corte de esta función con el eje de abcisas.[1] (Ver figura 1.)

A continuación se propone otro tipo de intuición gráfica. La ecuación de segundo grado puede transformarse en

$$x(ax + b) = -c \qquad [1]$$

A continuación estudiaremos las posibles soluciones para dos posibles casos, dependiendo si el término independiente c toma valor nulo o no.

Existencia de solución y los valores de los parámetros para $c \neq 0$

Si $c \neq 0$, entonces [1] puede representarse como

$$ax + b = -c/x$$

El primer miembro, que denominaremos función $g(x) = ax + b$, es una recta.[2] El segundo miembro, la función $h(x) = -c/x$, es una hipérbola equilátera (ver figura 3).

Cualquier solución λ verificará $g(\lambda) = h(\lambda)$, y será una raíz del polinomio. La representación gráfica nos permite entender por qué existe alguna o ninguna solución. Si la recta corta dos veces a la hipérbola habrá dos soluciones (ver figura 4a y 4b). Si es tangente sólo habrá una solución (figura 4c), y en otro caso no existirá solución (figura 4d).

Este método gráfico alternativo nos ofrece una intuición de que los valores que toman los parámetros a, b y c afectan a la existencia de alguna solución. Para el análisis gráfico supondremos que $c > 0$, con lo que las hipérbolas siempre estarán situadas en el segundo y cuarto cuadrante. En primer lugar, si la pendiente de la función $g(x) = ax + b$ es negativa, es decir si $a < 0$, siempre van a existir dos soluciones, una raíz positiva y otra negativa, independientemente del valor que tome la ordenada en el origen b.

En segundo lugar, supongamos que la función $g(x)$ tiene una ordenada en el origen nula, $b = 0$, y que su pendiente

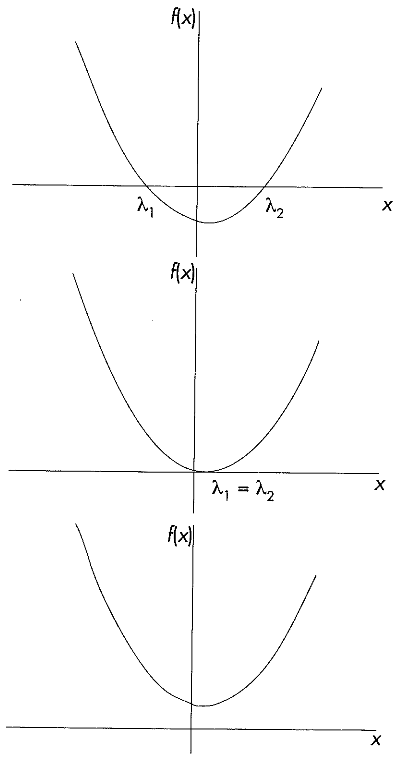


Figura 1. Solución gráfica: raíces de $f(x) = ax^2 + bx + c$

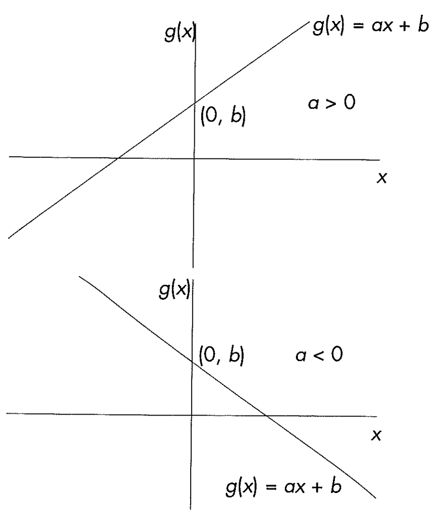


Figura 2. Representación gráfica de la recta

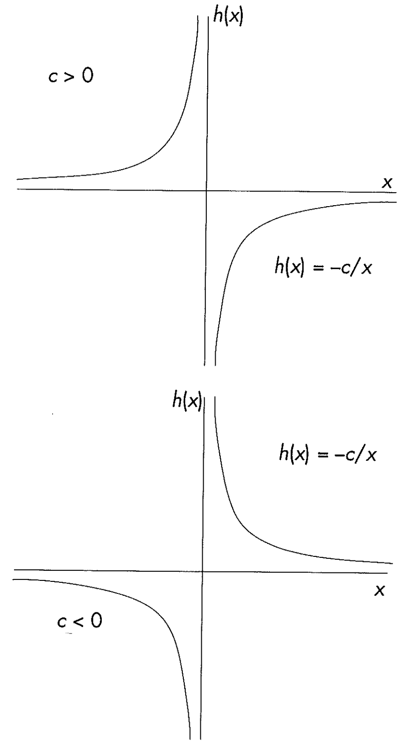


Figura 3. Representación gráfica de la hipérbola equilátera

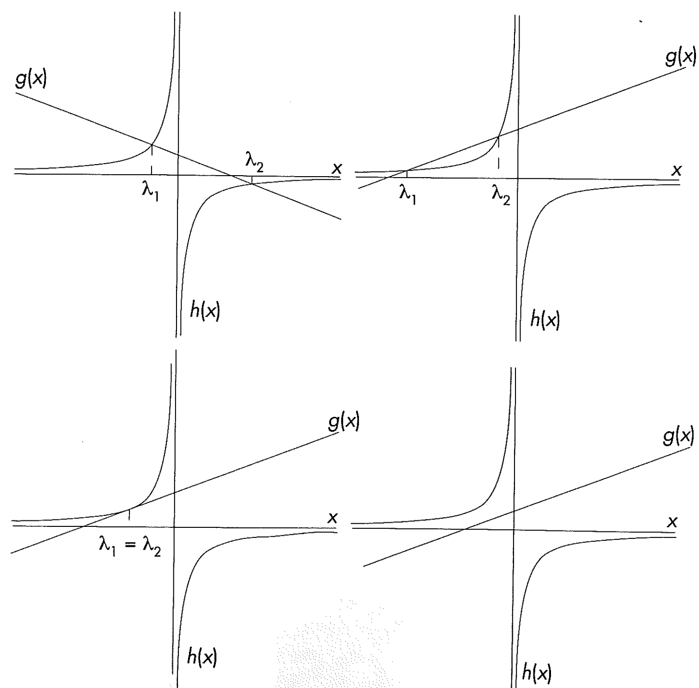


Figura 4. Solución gráfica $g(x^*) = h(x^*)$

1 Un número λ es una raíz del polinomio $f(x) = ax^2 + bx + c$, si cuando es sustituido en el polinomio lo anula, es decir, si $x = \lambda$ implica que $f(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

2 Recordemos el significado de los parámetros de la recta. Por un lado b es la ordenada en el origen, es decir, el valor que toma la segunda coordenada cuando la primera toma valor 0. Por tanto, la recta corta al eje de ordenadas en $(0, b)$. Por otro lado, a es la pendiente de la recta, que coincide con la tangente del ángulo que forma la recta con el eje de abcisas. Si $a > 0$ la recta es creciente, y si $a < 0$ la recta es decreciente (ver figura 2).

es positiva, $a > 0$. En este caso, la función $g(x) = ax$ es creciente y nunca existirán soluciones reales (figura 5). Ésta es la razón por la que $x^2 + 1 = 0$ no tiene raíces reales.

Finalmente, a medida que se incrementa (o disminuye) la ordenada en el origen, es decir, valores positivos (negativos) de b, la función $g(x)$ se va desplazando hacia arriba (abajo). En el caso de $a > 0$ existirá un valor de b, que denotaremos por $\bar{b}$ (análogamente $\underline{b}$) para el cual la recta representada por la función $g(x) = ax + \bar{b}$ (análogamente, $g(x) = ax + \underline{b}$) es tangente a la hipérbola representada por la función $h(x)$, por tanto existirá una única solución, que será negativa (positiva). A valores de la ordenada mayores $b > \bar{b} > 0$ (análogamente menores $b < \underline{b} < 0$) existirán dos raíces negativas (positivas). (Ver figura 6 y tabla 1.)

Los resultados serían análogos en el caso de $c < 0$, pero para dos valores críticos de b diferentes (que denotamos $\bar{\bar{b}}$ y $\underline{\underline{b}}$ en la tabla 1).

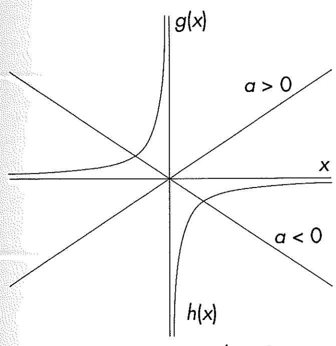


Figura 5. Caso $b = 0$

Existencia de solución y los valores de los parámetros para c = 0

Si $c = 0$, entonces [1] puede representarse como

$$i(x)\, g(x) = H(x)$$

donde $i(x) = x$ es la función identidad cuya representación gráfica es la bisectriz de los cuadrantes primero y tercero, y $H(x) = 0$ es la función nula cuya representación gráfica es el eje de abcisas. Cualquier solución λ que verifique $i(\lambda)\, g(\lambda) = H(\lambda)$ será una raíz del polinomio. Gráficamente se obtendrán en la intersección de cada una de las funciones $i(x)$ y $g(x)$, ambas que representan dos rectas, con el eje de abcisas. Por tanto si $c = 0$, cero siempre va a ser raíz de la ecuación de segundo grado, $\lambda_1 = 0$, pues la función $i(x) = x$ siempre interseca con el eje de abcisas en el origen (0, 0). La otra raíz, λ_2, se encuentra en la intersección de la función g(x) con el eje horizontal (ver figura 2), y siempre existirá para cualquier valor de b y para un valor de $a \neq 0$. (Recuérdese que si $a = 0$ la ecuación deja de ser de segundo grado.) En conclusión, si $c = 0$ siempre existen dos soluciones reales, una de ellas nula. (Ver tabla 1.)

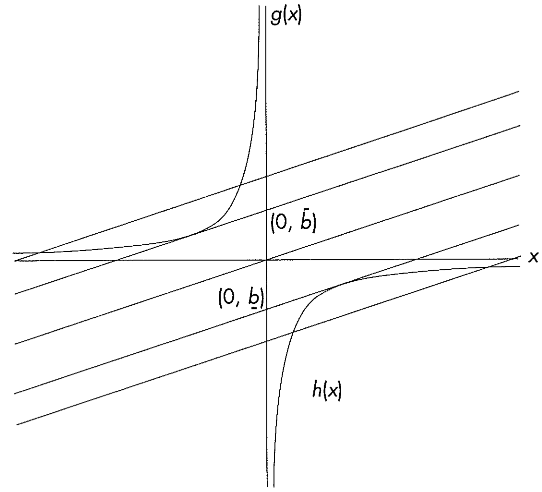


Figura 6. Casos $\bar{b} > 0$ y $\underline{b} > 0$

Caso c > 0	$(-\infty, \underline{b})$	$\underline{b} < 0$	$(\underline{b}, \bar{b})$	$\bar{b} > 0$	$(\bar{b}, +\infty)$
$a > 0$	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	no existe solución	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	$\lambda_1, \lambda_2 < 0$
$a < 0$	Siempre existen soluciones $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$				

Caso c = 0	$b < 0$	$b = 0$	$b > 0$
$a > 0$	$\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 > 0$	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$	$\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 < 0$
$a < 0$	$\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 < 0$	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$	$\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 > 0$

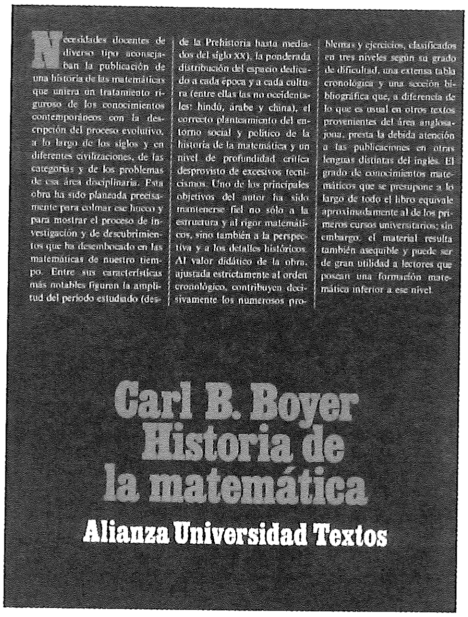
Caso c < 0	$(-\infty, \underline{\underline{b}})$	$\underline{\underline{b}} < 0$	$(\underline{\underline{b}}, \bar{\bar{b}})$	$\bar{\bar{b}} > 0$	$(\bar{b}, +\infty)$
$a > 0$	Siempre existen soluciones $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$				
$a < 0$	$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	no existe solución	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$

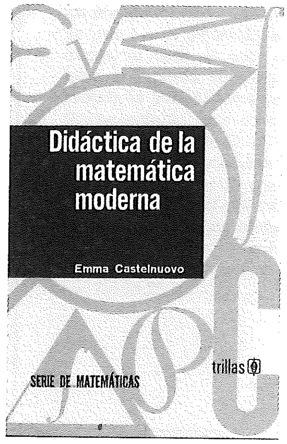
Tabla 1. Signo de las soluciones reales para cada valor de los parámetros $a \neq 0$, b y c

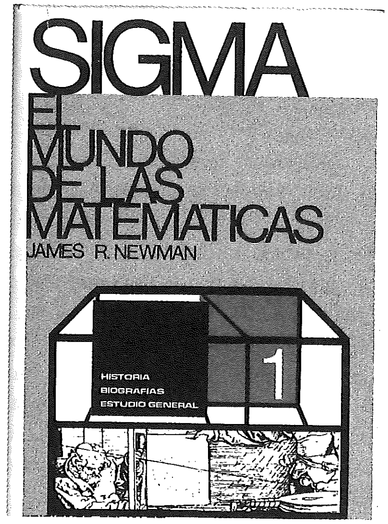
Conclusión

Se presenta una intuición gráfica alternativa que permite entender el papel crucial de los valores de los parámetros de la ecuación de segundo grado, $a \neq 0$, b y c a la hora de obtener dos, una o ninguna solución. Este análisis gráfico podría extenderse a otras ecuaciones, como a la de tercer grado y entender las condiciones para la existencia de soluciones.

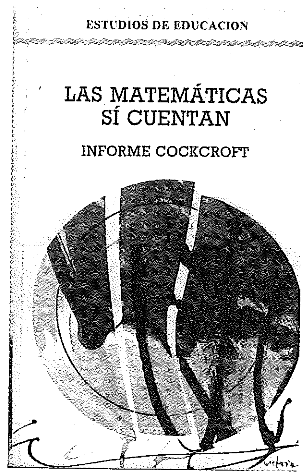
Leonor Giménez
IE.S. Escolas Proval. Nigrán
Eduardo L. Giménez
Universidade de Vigo

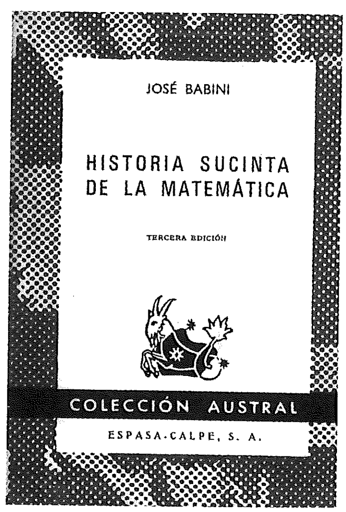

Necesidades docentes de diverso tipo aconsejaban la publicación de una historia de las matemáticas que uniera un tratamiento riguroso de los conocimientos contemporáneos con la descripción del proceso evolutivo, a lo largo de los siglos y en diferentes civilizaciones, de las categorías y de los problemas de esa área disciplinaria. Esta obra ha sido planeada precisamente para colmar ese hueco y para mostrar el proceso de investigación y de descubrimientos que ha desembocado en las matemáticas de nuestro tiempo. Entre sus características más notables figuran la amplitud del periodo estudiado (desde la Prehistoria hasta mediados del siglo XX), la ponderada distribución del espacio dedicado a cada época y a cada cultura (entre ellas las no occidentales: hindú, árabe y china), el correcto planteamiento del entorno social y político de la historia de la matemática y un nivel de profundidad crítica desprovisto de excesivos tecnicismos. Uno de los principales objetivos del autor ha sido mantenerse fiel no sólo a la estructura y al rigor matemáticos, sino también a la perspectiva y a los detalles históricos. Al valor didáctico de la obra, ajustada estrictamente al orden cronológico, contribuyen decisivamente los numerosos problemas y ejercicios, clasificados en tres niveles según su grado de dificultad, una extensa tabla cronológica y una sección biográfica que, a diferencia de lo que es usual en otros textos provenientes del área anglosajona, presta la debida atención a las publicaciones en otras lenguas distintas del inglés. El grado de conocimientos matemáticos que se presupone a lo largo de todo el libro equivale aproximadamente al de los primeros cursos universitarios; sin embargo, el material resulta también asequible y puede ser de gran utilidad a lectores que posean una formación matemática inferior a ese nivel.
Carl B. Boyer
Historia de la matemática
Alianza Universidad Textos

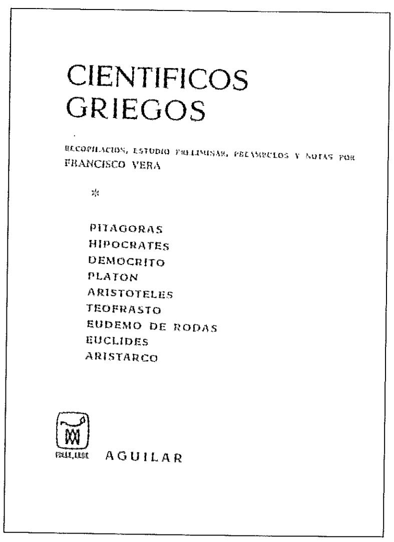

Didáctica de la matemática moderna
Emma Castelnuovo
SERIE DE MATEMÁTICAS
trillas

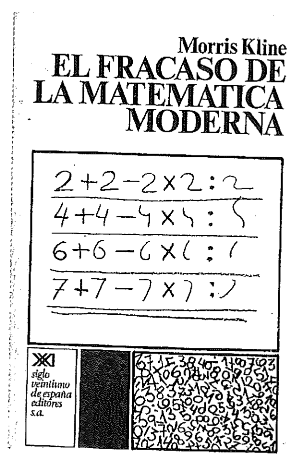

SIGMA
EL MUNDO DE LAS MATEMATICAS
JAMES R. NEWMAN
HISTORIA
BIOGRAFIAS
ESTUDIO GENERAL
1


MATEMÁTICAS DE BACHILLERATO
volumen 1


ESTUDIOS DE EDUCACION
LAS MATEMÁTICAS SÍ CUENTAN
INFORME COCKCROFT


JOSÉ BABINI
HISTORIA SUCINTA DE LA MATEMÁTICA
TERCERA EDICIÓN
COLECCIÓN AUSTRAL
ESPASA-CALPE, S. A.


CIENTIFICOS GRIEGOS
RECOPILACIÓN, ESTUDIO PRELIMINAR, PREÁMBULOS Y NOTAS POR FRANCISCO VERA
PITAGORAS
HIPOCRATES
DEMOCRITO
PLATON
ARISTOTELES
TEOFRASTO
EUDEMO DE RODAS
EUCLIDES
ARISTARCO
AGUILAR


Morris Kline
EL FRACASO DE LA MATEMATICA MODERNA
2+2-2x2:2
4+4-4x4:4
6+6-6x6:6
7+7-7x7:7
siglo veintiuno de españa editores s.a.

SUMA 43
junio 2003, pp. 47-56

Los puentes del Pisuerga en la ciudad de Valladolid

Elena Ortega
Tomás Ortega

Después de hacer un breve estudio sobre la evolución de ciertas características constructivas de los puentes, se hace un pequeño estudio desde la didáctica de la matemática de todos los puentes del Pisuerga a su paso por la ciudad de Valladolid, estudio que puede constituir una guía de taller de Matemáticas, para que sea desarrollado en otras ciudades con alumnos de segundo curso de bachillerato.

ARTÍCULOS

LA CONSTRUCCIÓN de puentes sobre los ríos es tan antigua como la propia arquitectura, y, sin duda, el hombre aprendió a construirlos de forma natural al encontrar ramas y árboles, que, arrancados por el viento, unían las dos orillas de pequeños cauces fluviales.

Los primeros puentes que se construyeron fueron de madera, pero el descubrimiento de la bóveda permitió construir puentes de piedra, que eran mucho más resistentes a las cargas que soportaban y más seguros frente a la fuerza del agua, sobre todo en las riadas. Los chinos construyeron puentes de piedra desde los tiempos más remotos, y los romanos desarrollaron su empleo de forma sistemática, construyendo viaductos o acueductos utilizando bóvedas de medio punto. En la Edad Media se siguieron construyendo este tipo de puentes con el mismo material y el mismo tipo de embovedados o con arcos de tipo mitral, materiales y técnicas constructivas que se siguieron empleando hasta la mitad del siglo XIX. A comienzos de este siglo se integra el hierro en su construcción y con ello proliferan estructuras muy variadas que se agrupan en tres tipos: puentes de vigas, puentes de arcos y puentes colgantes, clasificación que se establece por los empujes horizontales de las cargas.

- *Puentes de vigas:* en estos puentes, prácticamente, no se ejerce ningún empuje horizontal sobre sus apoyos.
- *Puentes de arco:* en estos puentes las cargas ejercen empujes horizontales sobre sus estribos.
- *Puentes colgantes:* en estos puentes las cargas ejercen empujes horizontales sobre sus anclajes.

Las estructuras de vigas en muchos casos, por utilizar engarces de tornillería, se componen de formas triangulares (de éstos los más famosos son los de Eiffel, como por ejemplo, el viaducto de Garabit, en Francia, y el puente sobre el Duero de Oporto, en Portugal).

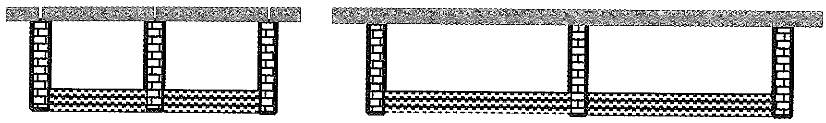


Figura 1. Puentes de vigas

La aparición del hormigón, a mediados del siglo XIX, desarrolló la construcción de estos puentes. Al principio, en los puentes de vigas, éstas se disponían de forma independiente, dispuestas una al lado de otras con una pequeña separación entre ellas, técnica que se sigue utilizando de luces unitarias moderadas, ya que si el río es muy ancho obliga a construir muchos pilares en su lecho. Esta técnica evolucionó y se comenzaron a construir utilizando vigas continuas mediante voladizos, lo que permiten obtener luces de un centenar de metros. También las vigas han evolucionado y en la actualidad se utilizan vigas de perfil de cajón, que están vaciadas en su interior.

Con los puentes de arco se consiguieron luces de mayor amplitud y con los puentes colgantes esta posibilidad aumentó considerablemente, y con la incorporación del acero se alcanzaron luces de hasta 500 m en los puentes de arco, como por ejemplo el puente de arco de Sidney, y de más de 1 km en los puentes colgantes, como por ejemplo el puente Golden Gate de San Francisco, cuyo tramo central tiene 1280 m de luz.

El hormigón pretensado data de mediados del siglo XX, y la integración del acero con este hormigón ha permitido mejorar la construcción de los puentes de arco y de los puentes colgantes, a la vez que se han desarrollado otros dos tipos de puentes: puentes de puntales oblicuos y puentes de tirantes. Los primeros apuntalan las vigas en la dirección más apropiada para soportar la carga y en los segundos, los cables de acero suspenden las vigas de hormigón pretensado, que son casi paralelos, adquiriendo la forma de un arpa.

Además de buscar la utilidad y seguridad vial, los puentes se han construido teniendo en cuenta criterios estéticos. La búsqueda de la belleza y la pureza de líneas han sido constantes a lo largo de la historia, y en ello ha jugado y juega un papel fundamental la geometría. Aparte de las técnicas y estilos de construcción esbozados, la geometría de los alzados es fundamental en la seguridad, tanto por las cargas que sus estructuras tiene que soportar como por la luz que consiguen, así como en la estética e integración con el medio; éste será el objeto de nuestro estudio en los diez puentes que tiene Valladolid sobre el río Pisuerga y que en orden cronológico son éstos: Mayor, Colgante, G. Regueral (del Poniente), García Morato, División Azul, Isabel la Católica, del Cabildo (Ronda Norte), Juan de Austria, Calatrava y Condesa Eylo.

La búsqueda de la belleza y la pureza de líneas han sido constantes a lo largo de la historia, y en ello ha jugado y juega un papel fundamental la geometría.

A continuación se hace un estudio de los puentes de Valladolid sobre el río Pisuerga. Este estudio se ha llevado a cabo sobre planos de los puentes suministrados por el Ayuntamiento de Valladolid, y desde aquí agradecemos al profesor Jesús Valverde su colaboración, sobre fotografías de los puentes y sobre mediciones de los mismos que se han llevado a cabo. Se describen las matemáticas elementales de los puentes uno a uno. Trabajos parecidos al que aquí se describe pueden ser llevados a cabo como *Talleres de Matemáticas* con alumnos de segundo curso de bachillerato en cualquier ciudad. Estas actividades, sin duda, son muy motivadoras para los alumnos.

El puente Mayor

Leyendas aparte, se trata de un puente medieval, y su construcción puede estar ligado al asentamiento cristiano en Valladolid que surge en una confluencia de vías de comunicación, aprovechando un vado del río Pisuerga. Este puente se ha reconstruido en numerosas ocasiones y la forma actual, que tiene diez ojos, todos ellos diferentes, data del siglo XIX. La longitud total del puente es de 166,84 m y la geometría frontal del mismo está delimitada por la líneas horizontales de la calzada y la de la superficie del agua, y por los arcos que componen las bóvedas, que son todos ellos circulares y se distribuyen de la siguiente forma:

- A e I son arcos de medio punto y, por tanto, el alzado son semicircunferencias.

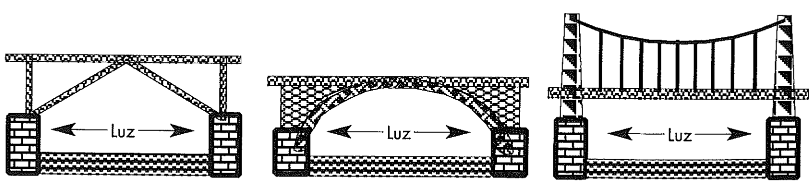


Figura 2. Formas de luz

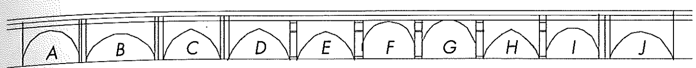


Figura 3. Alzado del Puente Mayor

- *B* y *J* son arcos de circunferencia menores de 180°.
- *C, D, E* e *I* son arcos mitrales y, por tanto, están formados por dos arcos de circunferencia que tienen su centro dentro de la luz del arco.
- *F* y *G* son dos arcos de medio punto peraltados.

La determinación de los arcos, centro, radio y amplitud, se hace sobre el plano facilitado por el Área de Urbanismo del Ayuntamiento de Valladolid, trazando sendas mediatrices a dos cuerdas, aplicando la propiedad de que las mediatrices de las cuerdas se cortan en el centro de la circunferencia de la que forma parte. Este plano está a escala 1:200 y midiendo sobre él se recuperan las dimensiones, sobre las que se aplican las correspondientes fórmulas para hallar el área del círculo, del sector circular y del triángulo (de Herón de Alejandría) se pueden determinar las áreas de luz de cada arco, lo que permite hallar el caudal que puede soportar el puente sin que las aguas rebasen el puente y, además, se puede hallar la superficie frontal de construcción, que multiplicada por el ancho de la calzada establece el número de metros cúbicos de material de construcción necesarios para realizar tal obra.

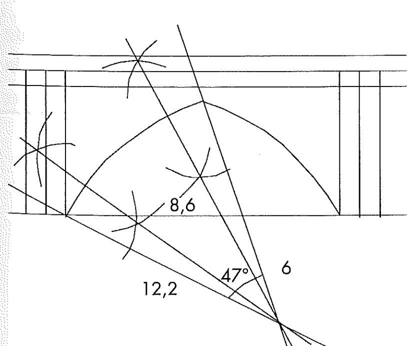


Figura 4. Determinación del centro, radio y amplitud del arco de centro *C*

El uso de una hoja de cálculo permite agilizar las operaciones, que, de otra forma, serían pesadas hasta con la calculadora. Las áreas de los ojos del puente son las que se muestran en la tabla 1, en la que también aparecen los datos de los elementos que las componen.

Ojo	*Radio*	*Área Semicírculo*								*Área del Ojo*
A	6,5	66,37								66,37
I	5,535	48,12								48,12
			Base	*Altura*	*Rectáng.*					
F	5,83	53,39	11,66	1	11,66					65,05
G	6,18	59,99	12,38	0,75	9,285					69,28
			Grados	*A. Sector*	*Lado 1*	*Lado 2*	*Lado 3*	*Semiper*	*A. Triáng*	
B	7,4	86,02	154	73,59	14,6	7,4	7,4	14,7	8,85	64,74
J	7,7	93,13	162	83,82	15,4	7,75	7,75	15,45	6,77	77,05
C	12,5	245,44	47	64,09	8,6	12,2	6	13,4	23,9	80,37
D	12	226,19	45	56,55	8,8	12	6	13,4	25,27	62,56
E	9	127,23	57	40,29	7,4	9	3,4	9,9	12,03	56,52
H	6,6	68,42	78	29,65	6,5	0,65	6,6	6,875	2,1	55,1
							Área total de los ojos en m²			645,16

El área total de los ojos supone que si la corriente de agua atravesara el puente a una velocidad de 10 km/h, el gasto que se produce en una hora sería de 0,64516 Hm^3.

Área del rectángulo delimitado por los pilares laterales, la calzada y el agua: $166,84 \times 8,7 = 1458,51$

Área del frontal de la obra construida: 806,35 m^2.

Además de la geometría frontal es digno de tener en cuenta la geometría de los pilares rompientes...

Además de la geometría frontal es digno de tener en cuenta la geometría de los pilares rompientes: los más antiguos tienen un rompiente angular (ángulo diedro muy agudo), mientras que los más modernos lo tienen cilíndrico, como muestra la figura 5, ya que en estas superficies resbalan mejor los troncos de árboles que arrastra la corriente de agua.

Desde un punto de vista algebraico, considerando un sistema cartesiano de representación {*O, X, Y, Z*}, siendo *OZ* el eje vertical, *OX* el eje horizontal siguiendo el sentido de

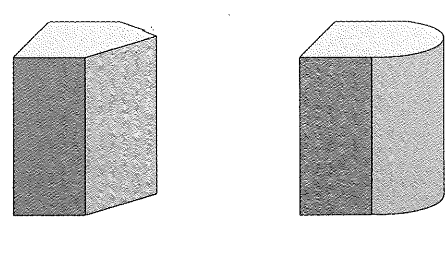


Figura 5. Rompientes diédricos y cilíndricos

la corriente, y OY el eje horizontal perpendicular a ambos. Un ejercicio interesante consiste en medir lo necesario para determinar las ecuaciones de los elementos arquitectónicos que componen el puente, cuyas ecuaciones son de los siguientes tipos:

- Plano de la carretera: $z = h$.
- Planos de las paredes anterior y posterior (los alzados): $x = k$.
- Planos de las rompientes: $ax + by = c$.
- Cilindros rompientes: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
- Cilindros que componen las bóvedas: $(z - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$.

Puente Colgante

La construcción de este puente data del año 1865 y en él se utilizan las técnicas más modernas de su época. No es un puente colgante, a pesar de que ése sea su nombre, sino un puente de arco. La estructura se construye mediante un entramado de vigas, que están enlazadas con tornillería componiendo triángulos, que son mixtilíneos en los bordes superiores, cuyos vértices superiores se engarzan en un arco circular que tiene un radio aproximado de 78 m y de unos 25°. La intersección de las vigas oblicuas con las verticales forman otro arco de radio sensiblemente mayor, que está empotrado en dos estribos de piedra de sillería.

En área del único ojo es ligeramente superior a la del Puente Mayor, pero tiene la ventaja de no tener ningún obstáculo en su interior que pueda retener ramas o troncos. El material de construcción no es comparable con el anterior, pero sí el gasto por hora. Considerando que la corriente de agua atravesara el puente con una velocidad de 10 km/h, el gasto que se produce en una hora sería de 6,51456 hm^3.

Desde un punto de vista algebraico, considerando un sistema de representación cartesiana, $\{O, X, Y, Z\}$, como en el Puente Mayor, los elementos arquitectónicos que componen el puente tienen ecuaciones de los tipos siguientes:

- Plano de la carretera: $z = h$.
- Planos laterales: $x = k$, $y = c$.

Un ejercicio interesante consiste en medir lo necesario para determinar las ecuaciones de los elementos arquitectónicos que componen el puente…

- Estribos: $x \geq 0$, $x \leq k$, $z \leq h$, $z \geq 0$, $y \geq p_1$, $y \leq p_2$; $x \geq 0$, $x \leq k$, $z \leq h$, $z \geq 0$, $y \geq q_1$, $y \leq q_2$.
- Arcos del puente: $x = 0$, $(y - a)^2 + (z - c)^2 = r^2$, $x = p$, $(y - a)^2 + (z - c)^2 = r^2$.
- Vigas verticales: $x = m$, $y = n$.
- Vigas oblicuas: $x = s$, $ay + bz = k$.

Además de estos elementos aparecen ortoedros en los pilares de piedra que soportan la estructura del puente.

Puente de Isabel la Católica o del cubo

Al igual que el puente anterior, se trata de un puente de hormigón armado construido en el año 1956 y las pruebas de carga se hicieron en 1960 (Gigoso y Sarabia, 1997). Este puente combina dos pares de arcos de hormigón armado con vigas independientes. Los cuatro pares de arcos abarcan todo el lecho del río y arrancan de unos estribos no muy altos. La longitud total del puente es de 113,86 m y la parte más alta desde la superficie de la calzada hasta la superficie del agua mide unos 12,5 m, teniendo un desnivel hacia las márgenes del río de unos 50 cm. Los arcos están construidos por dos cilindros circulares, el interior de 58,4 m de radio y un ángulo de 70° y el exterior de 64,5 m de radio y un ángulo de 63°, teniendo ambos su centro en el plano de simetría del puente. Al tener el arco superior el centro más bajo que el interior resulta un arco más delgado en la parte más alta.

El área del alzado que comprende la luz y la parte superior de la misma hasta la calzada es de unos 959 m^2, y para hallar

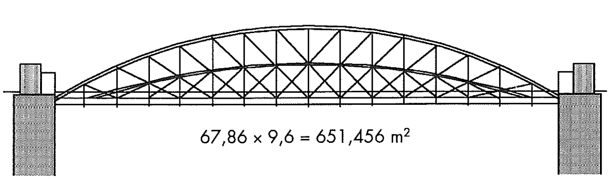


Figura 6. Alzado del Puente Colgante

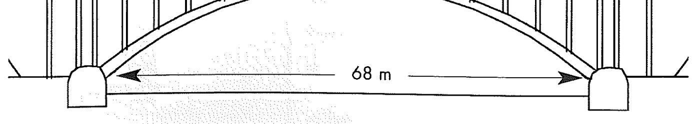


Figura 7. Alzado del Puente de Isabel la Católica

la zona frontal hueca hay que restar las áreas de los puntales y del arco:

- El área de los puntales está en torno a 18 m^2.
- El área del arco:
  sector exterior $A_a = 2287{,}22$;
  sector interior $A_e = 2113{,}15$.

En consecuencia el área frontal, sobre el lecho del río, libre de obstáculos es de unos 767 m^2, quedando aún los ojos laterales de las dos riberas, dimensiones que permiten el paso de 7,67 hm^3 a una corriente de agua con velocidad de 10 km/h. Con las áreas anteriores se pueden hallar el volumen de materiales de construcción empleados en la estructura, multiplicando las áreas por las respectivas anchuras de los elementos (arcos y puntales).

Desde un punto de vista algebraico, considerando un sistema de representación cartesiana, $\{O, X, Y, Z\}$, como en los puentes anteriores, los elementos arquitectónicos que componen el puente tienen ecuaciones de los tipos siguientes:

- Planos de la carretera: $ay + bz = c$.
- Planos laterales y planos de los tajamares: $x = k$, $y = c$.
- Puntales verticales: $m \le x \le n$, $p \le y \le q$.
- Las vigas (el plano que determinan) que enlazan los puntales están ligeramente inclinadas, pero la inclinación va variando para que la curva de la rampa sea suave; se trata de una interpolación lineal segmentaria. Sus ecuaciones son: $z = py + q$.
- Los arcos vienen determinados por las ecuaciones de los cilindros circulares: $h \le x \le k$, $y^2 + (z - c)^2 \ge r_1^2$, $y^2 + (z - c')^2 \le r_1^2$.
- El tramo que está colocado en el centro del puente debiera ser un *splin* cúbico, $z = ay^3 + by^2 + cy + d$, y, por tanto, sus coeficientes deber cumplir las relaciones:
  — $z(y_1) = z(y_2) = z_1$.
  — $z'(y_1)$ pendiente del tramo recto contiguo.
  — $z'(y_2)$ pendiente del tramo recto contiguo.

Calcular el área que corresponde a elementos constructivos de los alzados de forma aproximada es sencillo, pero calcularla de forma exacta es bastante más complicado, ya que aparecen elementos mixtilíneos.

Puente del Poniente

Es un puente de hormigón armado que se terminó de construir en 1960, fecha en que se hicieron las pruebas de carga (Gigoso y Sarabia, 1997). Este puente combina arcos de hormigón armado y vigas independientes. Tiene tres pares de arcos de circunferencia sobre el lecho del río, que arrancan de unos pilares elevados. Cada arco soporta seis puntales sobre los que descansan las vigas de la calzada con espacios huecos entre ellos, lo que permite el paso del agua en grandes avenidas. En los laterales, ya fuera del río, tiene tres bóvedas de medio punto, que en caso de grandes avenidas pueden evacuar gran cantidad de agua y que en períodos normales pueden servir para otros usos.

Los pilares que soportan los arcos tienen tajamares cilíndricos, que favorecen el deslizamiento de los materiales que arrastra la corriente. Los tres pares de arcos son iguales, pero los puntales van aumentando su longitud hacia el centro del río, con lo que se consigue una elevación de la calzada de unos 50 cm en su punto central. La zonas más altas de los arcos, en vez de puntales, tienen unas cuñas de hormigón armado sobre los que descansa la calzada.

La longitud total del puente es de 134,25 m, los tres ojos sobre el lecho del río son aproximadamente iguales, estando formados por arcos de circunferencia de unos 20 m de radio y una amplitud de unos 90°. La anchura formada por la luz de estos ojos y por los dos espolones que los separan es de unos 95 m.

Calcular el área que corresponde a elementos constructivos de los alzados de forma aproximada es sencillo, pero calcularla de forma exacta es bastante más complicado, ya que aparecen elementos mixtilíneos. Así, por ejemplo, aparecen cuadriláteros, *ABCD,* y triángulos, *PQR,* en los que uno de sus lados es un arco de circunferencia, y para calcular su área hay que restar las áreas del segmento circular, *DAE,* y del sector circular, *OPR,* del área del trapecio *ABCD* y del triángulo *PQR,* respectivamente.

Una manera de hacer cálculos aproximados consiste en considerar rectángulos y trapecios circulares que compensen las zonas irregulares y hallar el área de estas figuras.

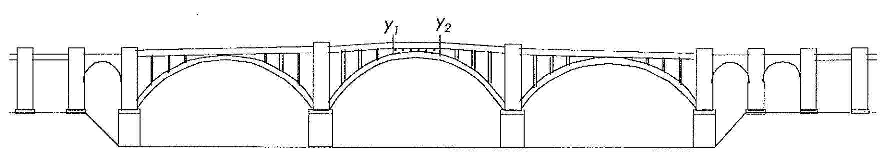


Figura 8. Alzado del Puente del Poniente

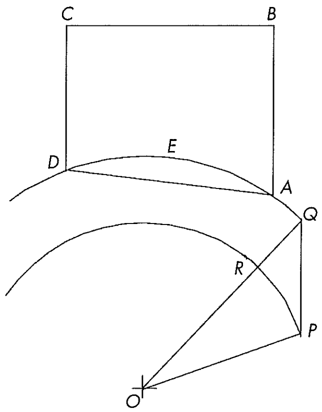


Figura 9. Detalle (deformado) de los alzados de puntales y terminación del arco

De esta forma el área de los alzados de estos elementos es el siguiente:

- Área de los 2 tajamares sobre el río: 31,96 m^2.
- Área de los 2 pilones sobre los tajamares del río: 36,44 m^2.
- Área de los 36 puntales: 12,80 m^2.
- Área de los 3 arcos: 135,52 m^2.
- Área del frontal sobre el río y bajo la calzada: 1032,12 m^2.
- Área de las vigas de la calzada 173,28 m^2.

Considerando el área de todos estos elementos, 216,72 m^2, la superficie total de los 3 ojos y de las zonas huecas está en torno a los 815,4 m^2, lo que daría un gasto de 8,154 hm^3 a la hora, con un flujo de corriente de 10 km/h.

Como los puntales son más estrechos que los arcos y éstos no ocupan todo el ancho del puente, para calcular el volumen de estos elementos de construcción hay que multiplicar el área lateral de estos elementos por la suma del ancho de los pares de arcos, en un caso, y por el ancho de los pares de puntales, en otro. De todas formas, el volumen no puede ser muy grande, ya que los espacios huecos son grandes, lo que supone un ahorro de material considerable.

Desde un punto de vista algebraico, considerando un sistema de representación cartesiana, $\{O, X, Y, Z\}$, como en los puentes anteriores, los elementos arquitectónicos que componen el puente tienen ecuaciones de los tipos siguientes:

- Planos de la carretera: $ay + bz = c$.
- Planos laterales y planos de los tajamares: $x = k$, $y = c$.
- Arcos del puente: $h \leq x \leq k$, $(y - a)^2 + (z - c)^2 \geq r_1^2$, $(y - a)^2 + (z - c)^2 \leq r_2^2$;
- Puntales verticales: $m \leq x \leq n$, $p \leq y \leq q$.

Las vigas (el plano que determinan) que enlazan los puntales y las cuñas sobre los arcos laterales están ligeramente inclinadas, pero la inclinación va variando para que la curva de la rampa sea suave; se trata de una interpolación lineal segmentaria.

- Las vigas (el plano que determinan) que enlazan los puntales y las cuñas sobre los arcos laterales están ligeramente inclinadas, pero la inclinación va variando para que la curva de la rampa sea suave; se trata de una interpolación lineal segmentaria. Sus ecuaciones son éstas: $z = py + q$.
- El tramo que está colocado en el centro del puente, y que corresponde a la cuña central, debiera ser un splin cúbico, $z = ay^3 + by^2 + cy + d$, y, por tanto, sus coeficientes deben cumplir las relaciones:
  - — $z(y_1) = z(y_2) = z_1$.
  - — $z'(y_1)$ pendiente del tramo recto contiguo.
  - — $z'(y_2)$ pendiente del tramo recto contiguo.

Puente de García Morato

Las pruebas de carga se hicieron en 1969 (Gigoso y Sarabia, 1997) y en su construcción se utiliza hormigón armado. Las vigas son independientes y, por esta razón, tiene un pilar en la corriente del río, ya que con este sistema no se pueden conseguir luces tan grandes. Aunque el puente tiene una longitud de 113,75 m, sobre el agua sólo están 93,55 m y se consiguen unos ojos que en total suman 992,63 m^2 de superficie frontal, lo que supone que si la corriente de agua atravesara el puente a una velocidad de 10 km/h, el gasto que se produce en una hora sería de 9,9263 hm^3.

Considerando los apoyos laterales, la superficie construida sobre el lecho sólo es de 441,62 m^2, lo que supone un ahorro de material de construcción de casi la mitad que en el Puente Mayor, y, sin embargo, se logran luces mucho mayo-

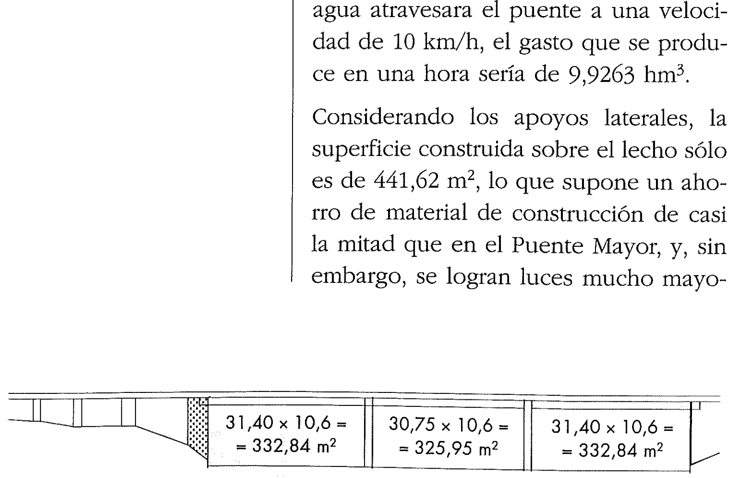


Figura 10. Alzado del Puente de García Morato

res, lo que favorece el «gasto» y dificulta la posibilidad de que los ojos se cieguen por acumulación de vegetación en los pilares.

En la margen izquierda aún hay 41,10 m de puente destinado a otros usos, pero en las grandes riadas evacuarían gran cantidad de agua. Los elementos arquitectónicos que intervienen tienen ecuaciones muy simples y ya han sido consideradas.

Puente de la División Azul

Este puente se considera «prácticamente terminado en 1969» (Gigoso y Sarabia, 1997) y no hay referencia sobre las pruebas de carga. En su construcción se utiliza hormigón armado. Y se utiliza una estructura de vigas continuas, con lo que se han conseguido luces mayores y ha posibilitado que los tajamares que soportan el puente sobre el agua sean dos pares de pilares independientes, siendo la longitud del entramado de vigas aproximadamente el mismo en los tres ojos que componen el puente.

Con esto, el volumen de material constructivo es mínimo y el volumen de paso de agua se optimiza, hecho que se puede apreciar en la figura 12.

La geometría de todo el puente es muy sencilla y los cálculos son aritméticos, ya que no hay ningún elemento curvilíneo.

De los alzados, por no repetir los comentarios de los puentes anteriores, sólo vamos a hacer una referencia a las ecuaciones de los pilares, que como ya hemos referido son de planta octogonal, y sus ecuaciones son: $x \leq a$, $x \geq b$, $y \leq c$, $y \geq d$, $y \leq x + p$, $y \leq x + q$, $y \geq -x + h$, $y \geq -x + k$. Sin embargo, sí que vamos a comentar la sección frontal del puente. En ella se aprecia que los pilares son prismas octogonales, que las vigas son vaciados de sección cuadrada, que aparecen voladizos laterales limitados por planos oblicuos de ecuación $ax + bz = c$, lo que permiten una vía muy ancha sin necesidad de tener que separar los pilares. La geometría de todo el puente es muy sencilla y los cálculos son aritméticos, ya que no hay ningún elemento curvilíneo.

Puente del Cabildo

Este puente se inauguró el 31 de diciembre de 1988 (Ayuntamiento de Valladolid, 1993), consta de tres arcos de hormigón armado, si bien, sólo el central está sobre el lecho. Éste descansa sobre dos pilares, que están separados 90 m. La longitud total es de 180 m, y, por tanto, éste es el puente más largo de Valladolid. La altura aproximada sobre el agua es de unos 10 m, y con un flujo de corriente de 10 km/h, en una hora se produce un gasto superior a los 10 hm^3. Considerando un sistema de ejes cartesianos centrados en el lecho del río, la parábola que determina el arco tiene por ecuación $y = 10 - ax^2$, y el valor de a se determina imponiendo la condición de que la parábola pase por los puntos de los pilares (–45, 9) o (45, 9). Así resulta que $a = 1/2025$.

La superficie frontal comprendida entre los ejes de los dos pilares viene dada por la integral definida,

$$\int_{-45}^{45} \left(12 - \frac{1}{2025} x^2\right) dx = 2\int_{0}^{45} \left(12 - \frac{1}{2025} x^2\right) dx$$

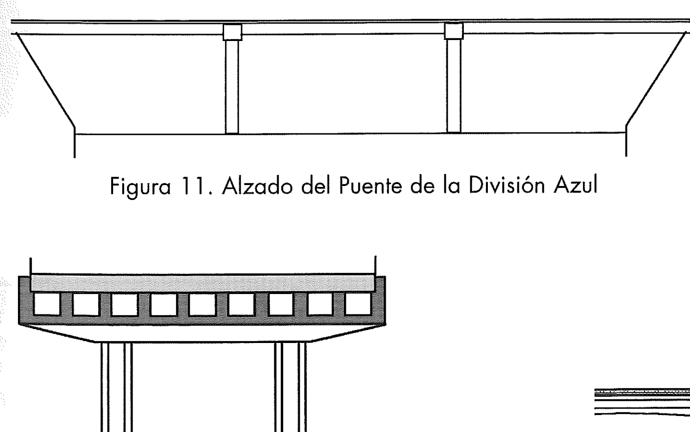


Figura 11. Alzado del Puente de la División Azul

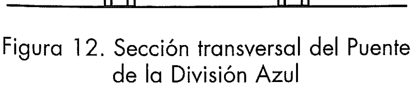


Figura 12. Sección transversal del Puente de la División Azul

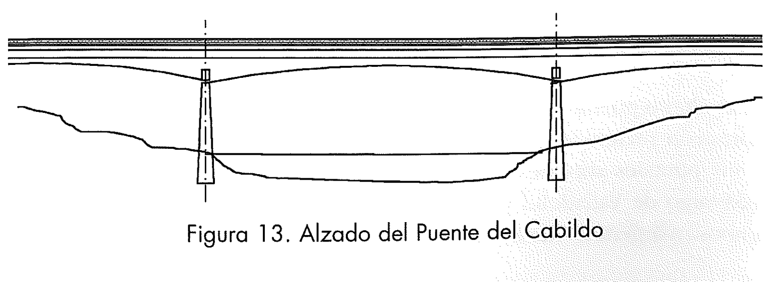


Figura 13. Alzado del Puente del Cabildo

Puente de Juan de Austria

Como reza en la placa del puente, se terminó en el año 1993 y consta de un arco parabólico de hormigón armado. Las dimensiones son parecidas al anterior, si bien, éste no tiene pilares, ya que el arco desciende hasta el lecho del río. Sin embargo, este puente tiene dos aberturas laterales que en caso de grandes avenidas evacuarían un caudal considerable. Las ecuaciones son similares a las del puente del Cabildo y los cálculos se hacen igual.

Puente de Calatrava

Las pruebas de carga se hicieron en mayo de 1999. Es un puente de tirantes, hecho con acero y hormigón pretensado. Aunque en la margen derecha el puente descansa en un soporte de hormigón, los tirantes soportan la mayor parte de las cargas del puente y del tráfico a tracción con un mástil que enlaza el extremo de los contrapesos. El puente tiene una longitud total de 156 m, siendo la luz del tramo atirantado de 120 m, lo que proporciona un gasto próximo a los 10 hm^3/h, considerando siempre un flujo de corriente de 10 km/h.

Los tensores son fuerzas y por lo tanto vectores que tienen su punto de acción en el puente, su línea de acción en rectas de ecuaciones $\{z = 0,\ y = mx + n\}$ y sentido hacia el punto en el que concurren. Es un ejercicio interesante obtener las ecuaciones de estas rectas midiendo distancias y ángulos, así como de los soportes de la estructura de los tirantes y de los tirantes del contrafuerte.

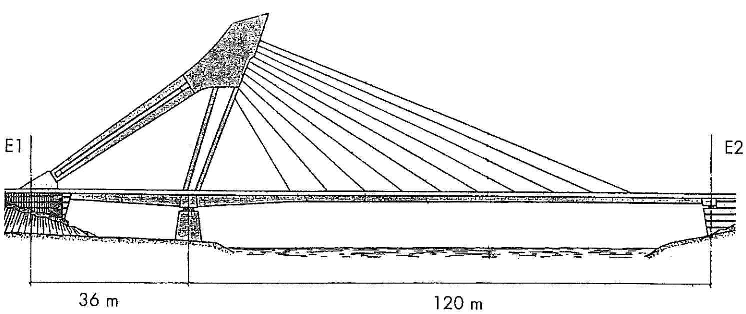
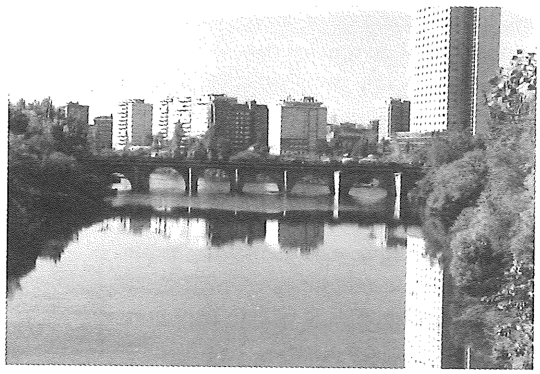


Figura 14. Alzado del Puente de Calatrava

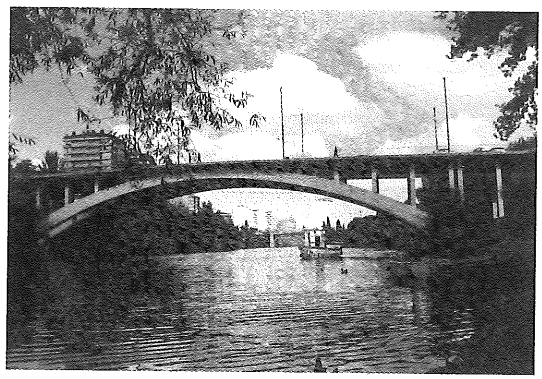
Puente de la Condesa de Eylo

Es el último puente de Valladolid. Es un puente hecho con hormigón pretensado, su estructura es de vigas continuas y sus puntales soportes están inclinados. El puente es el más largo de Valladolid y, para embocar con las calles de ambos márgenes, tiene una «doble curva» que enlaza



Puente Mayor

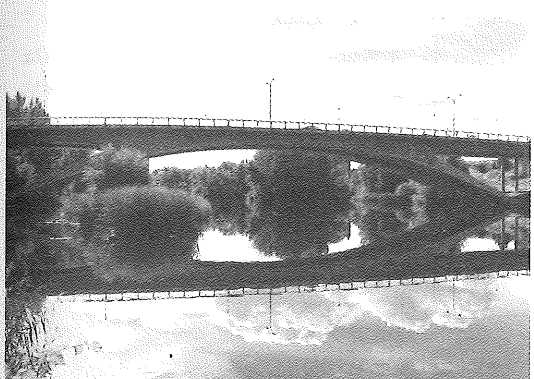
Puente colgante



Puente de Isabel la Católica

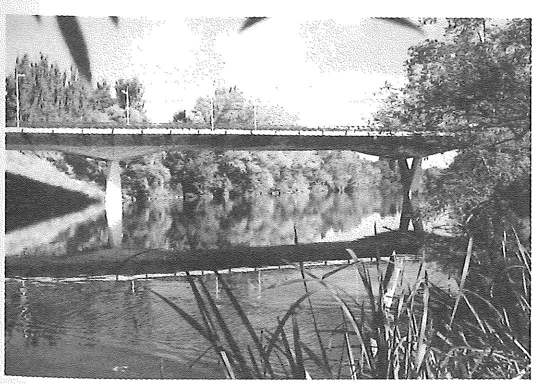
Puente de Poniente

Puente de la División Azul



Puente de Juan de Austria

Puente de Calatrava



Puente de la Condesa de Eylo

tangencialmente con ellas. Tiene una longitud proyectada de 130 m, lo que da una mayor longitud real, la luz entre los puntales centrales es de 50 m y en los laterales de sendos tramos de 39 m, recortados ambos por dos planos inclinados en las márgenes con una pendiente de 2/3. La altura de los puntales es de 6,8 m, lo que permite un gasto de 8,26 hm^3 de agua, desplazándose ésta a 10 km/h. La figura 15 reproduce el alzado de este puente.

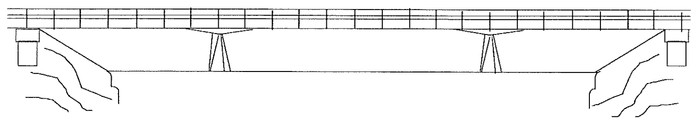


Figura 15. Alzado del Puente Condesa de Eylo

Más interesante resulta la planta, que se reproduce en la figura 16, que contiene dos curvas que son tangentes entre sí el centro y también con las rectas de las calles en las que emboca a unos 10 metros de los apoyos laterales.

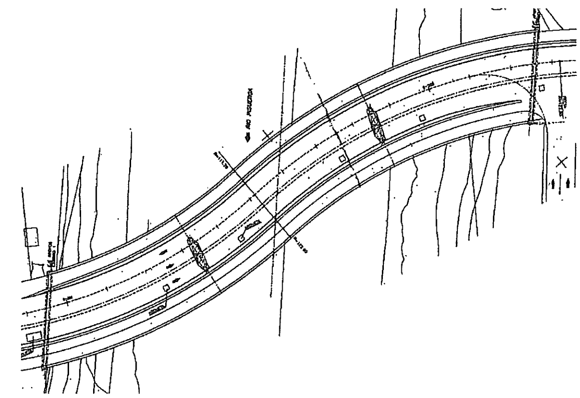


Figura 16. Planta del Puente Condesa de Eylo

Para que las curvas enlacen con suavidad tienen que coincidir, tanto ellas como sus derivadas en los puntos de enlace, es decir, deben ser *splines cúbicos.* Sin embargo, por razones de simetría estos empalmes también se consiguen mediante dos arcos de circunferencia, hecho que se muestra en la figura 17, que representa la línea central del puente —la mediana— y el trazado de los arcos de circunferencia que enlazan las calles. La planta de la figura 16 se ha solucionado de esta forma y, en la práctica, cuando el tráfico es lento, como en este caso, los empalmes se suelen resolver con arcos de circunferencia.

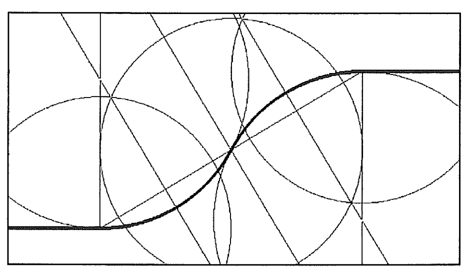


Figura 17: Enlace con dos arcos de circunferencia

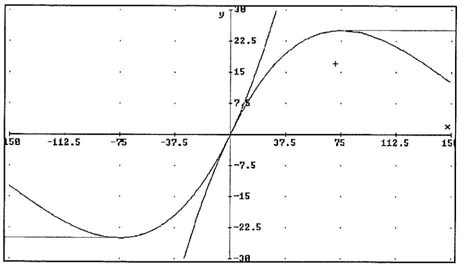


Figura 18: Enlace mediante dos esplines cúbicos

Para calcular los esplines se considera un sistema cartesiano con origen en el centro del puente, las dos curvas, medianeras del puente, que enlazan con las medianeras de las calles tienen que tener ecuaciones del tipo:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$y = px^3 + qx^2 + rx + s$$

y, además, considerando como unidad de medida el metro, se tienen que cumplir las siguientes condiciones:

Ambas deben pasar por (0, 0), lo que implica que $d = s = 0$. Las derivadas de ambas en (0, 0) deben ser iguales, lo que implica que $c = r$.

Además, la primera curva de la primera función debe pasar por (–75, 25) y su derivada en $x = -75$ debe ser 0, lo que implica, por una parte, que $25 = -421875a + 5625b - 75c$, y, por otra, que $0 = 16875a - 150b + c$.

Análogamente, la curva de la segunda función debe pasar por (75, 25) y su derivada en $x = 75$ debe ser 0, lo que implica, por una parte, que $25 = 421875p + 5625q + 75c$, y, por otra, que $0 = 16875p + 150q + c$.

Por otra parte, ambas curvas deben ser simétricas respecto del origen y, por tanto, para cualquier x del intervalo (–75, 0), entonces $-x$ está en (0, 75) y se debe cumplir que

$$ax^3 + bx^2 + cx = -(p(-x)^3 + q(-x)^2 + r(-x))$$

y, por tanto,

$$(a - p)x^3 + (b + q)x^2 + (c - r)x = 0,$$

lo que implica que $a = p$, $b = -q$ y $c = r$ (esta última identidad ya había sido obtenida).

Así se tiene el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} -25 &= -421875a + 5625b - 75c \\ 0 &= 16875a - 150b + c \\ 25 &= 421875a - 5625b + 75c \\ 0 &= 16875a - 150b + c \end{aligned}$$

Finalmente, se exige que la tangente a ambas curvas en el origen sea la perpendiclar a la recta que une los centros O1 y O2, de las circunferencias de la figura 17. Imponiendo que O1 = (–17, R–25) y que la circunferencia de ecuación,

$$(x + 75)^2 + (y - R + 25)^2 = R^2$$

pase por (0, 0), se obtiene que $R = 125$ y, por tanto O1 = (–15, 100). Análogamente, por simetría, O2 = (75, –100) y en consecuencia, como la pendiente de la recta que une ambos centros es:

$$m = \frac{-100-100}{75+75} = -\frac{4}{3}$$

la de la recta tangente a ambas circunferencias es $c = 3/4$. Por tanto, en el sistema inicial, las ocho incógnitas se reducen a dos en éste:

$$\begin{aligned} 25 &= 421875a - 5625b + 25 \\ 0 &= 16875a - 150b + 1/3 \end{aligned}$$

Cuya solución es $a = 1/67500$, $b = 1/150$. Como se sabía que $c = 3/4$ y que $d = 0$, los esplines que resultan son:

$$y = (1/67500)x^3 + (1/150)x^2 + (3/4)x$$
$$y = (1/67500)x^3 - (1/150)x^2 + (3/4)x$$

y siendo más precisos, la solución se puede escribir como una función definida a intervalos de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{67500}x^3 + \frac{1}{150}x^2 + \frac{3}{4} & x \in [-75, 0] \\ \frac{1}{67500}x^3 - \frac{1}{150}x^2 + \frac{3}{4} & x \in (0, 75] \end{cases}$$

Quedan abiertas otras cuestiones como cuál es la ecuación de las curvas que definen los bordes de la calzada —en el sentido de saber si son trasladadas de ésta—, y, una vez determinadas hallar el área de la calzada, suponiéndola plana.

Se puede estudiar la diferencias de comportamiento entre unos enlaces y otros, y se puede ir más lejos, ya que se podría pensar en curvas tales que su curvatura varíe de forma uniforme en función del arco: las *clotoides*, pero no se estudian aquí por razones obvias.

Elena Ortega
Tomás Ortega
Universidad de Valladolid

Bibliografía

ARNUNCIO, J.C. (1996): *Guía de Arquitectura de Valladolid*, Colegio de Arquitectos, Valladolid.

AYUNTAMIENTO DE VALLADOLID (1993): *Actualización del plan General de Ordenación Urbana de Valladolid,* Valladolid.

AYUNTAMIENTO DE VALLADOLID (1982): *Valladolid, guía histórica monumental y moderna*, Valladolid.

GIGOSO, P., y M. SARAVIA, (1997): *Arquitectura y Urbanismo de Valladolid en el siglo XX,* Ateneo de Valladolid, Valladolid.

MARTÍNEZ, V. (1892): *El Puente Mayor*, Biblioteca Histórica de la Universidad de Valladolid, Valladolid.

SUMA 43
junio 2003, pp. 57-60

Robótica y educación secundaria

M.ª José Haro Delicado
Antonia Redondo Buitrago

IDEAS Y RECURSOS

En este artículo presentamos una experiencia llevada a cabo con alumnos de Primaria y Secundaria en la construcción y programación de robots, organizada por la Universidad de Alicante en colaboración con universidades de todo el mundo formando parte de un proyecto inicial del Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT). Se comentan las actividades desarrolladas por los alumnos en seis proyectos que se describen analizándose las posibilidades didácticas que se derivan de ellos.

CUANDO HABLAMOS de la utilización de las nuevas tecnologías en la educación matemática, como recurso didáctico se suele pensar, casi exclusivamente, en el uso del ordenador y de la calculadora gráfica como herramientas que facilitan ciertas tareas en determinados procesos de enseñanza-aprendizaje. Sin embargo, hay otras ramas de la tecnología, por ejemplo la robótica, que permiten al alumno desempeñar un papel especialmente activo desarrollando su imaginación y creatividad a partir de la construcción y programación de un robot.

En este artículo presentamos una de las primeras experiencias llevadas a cabo con alumnos de Primaria y Secundaria en la utilización de robots. Se comentan las actividades desarrolladas por los alumnos en seis proyectos que se describen y se analizan las posibilidades didácticas que se derivan de ellos.

La experiencia fue organizada por la Universidad de Alicante y consistió en repartir sets de piezas de Lego, denominados Robolab, entre los centros colaboradores, con el fin de realizar en el aula proyectos con robots que permitieran desarrollar diferentes tipos de tareas. Para lograrlo los estudiantes debían diseñar el robot y programarlo. Por parte del profesorado se pretendía observar y analizar la respuesta de los alumnos y su implicación en este tipo de trabajo colaborativo.

El proyecto inicial surgió del MIT (Instituto Tecnológico de Massachusetts), que buscaba la colaboración de universidades de todo el mundo, y pudo contar con la de la Universidad de Alicante.

El paquete contenía gran cantidad de piezas de todo tipo y tamaño, entre las que había materiales de construcción, como ruedas, correas, deslizadores, engranajes, ejes y poleas, y materiales decorativos como antenas, ojos, alas... Además, se contaba con diferentes sensores de luz, de temperatura, de rotación y de contacto, así como bombillas y motores.

La pieza más importante es la llamada «ladrillo inteligente» o RCX (figura 1), que recoge y ejecuta las órdenes que se le transmiten mediante un transmisor de rayos infrarrojos desde el ordenador. El ladrillo puede admitir hasta cinco programas en su memoria, pero sólo los puede ejecutar de uno en uno.

Para programar el ladrillo se utiliza un lenguaje de programación muy básico e intuitivo basado en iconos (figura 2).

El software tiene tres partes:

- La fase «Administrator», desde la que se prepara el ladrillo para recibir los programas y se selecciona el puerto de comunicación con el ordenador a través del transmisor de rayos infrarrojos. Desde esta opción también se puede chequear el funcionamiento del ladrillo.
- La fase «Programmer», desde la que se realizan los programas propiamente dichos.
- La fase «Investigator», una de las más interesantes y con más posibilidades didácticas, porque permite explorar e investigar, capturando, con el RCX, datos que se reciben desde el exterior y después se transmiten al ordenador. Posteriormente, se puede realizar un tratamiento gráfico y estadístico de esos datos. Dentro de esta fase existe un área de cálculo desde la que se pueden realizar diferentes tipos de operaciones y cálculos con los datos como, por ejemplo, las operaciones aritméticas básicas, cálculo de extremos, derivadas, integrales y parámetros de centralización y dispersión. Todos los cálculos y manipulaciones realizadas sobre los datos se reflejan en la gráfica en el acto.

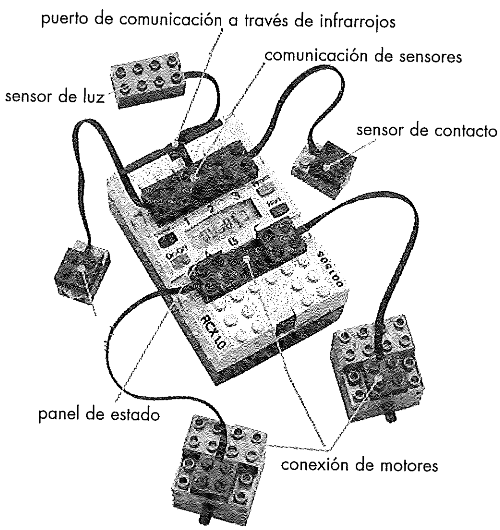


Figura 1

...el campo de aplicaciones didácticas que se abre al utilizar este paquete es increíble, en lo que se refiere, sobre todo, al análisis de funciones y al análisis de datos empíricos.

Desde esta fase se pueden efectuar comparaciones entre diferentes conjuntos de datos.

Por si esto fuera poco, desde el propio programa se pueden elaborar páginas donde presentar y describir el proyecto, incluyendo un enunciado, hipótesis, predicciones, imágenes, discusión de resultados y conclusiones finales. Permite, además, importar gráficos de formato jpeg desde nuestro ordenador.

Como se puede observar, el campo de aplicaciones didácticas que se abre al utilizar este paquete es increíble, en lo que se refiere, sobre todo, al análisis de funciones y al análisis de datos empíricos.

Todo ello sin hablar de los aspectos que se derivan del uso de nuevas tecnologías en el aula, que en este caso concreto permiten la construcción del conocimiento desde la experimentación, la interactividad y la manipulación, y en continuo contacto con la realidad, posibilitando la aplicación directa del estudio llevado a cabo con los datos a la resolución de problemas en diferentes

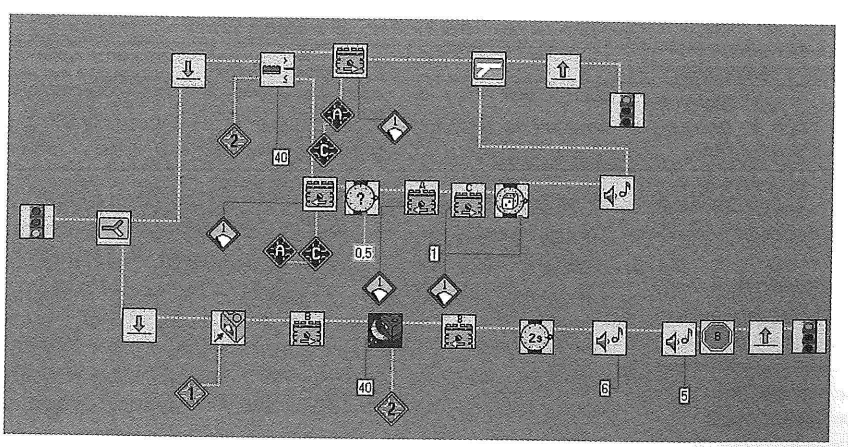


Figura 2

áreas. La experiencia se lleva a cabo dentro de un marco de aprendizaje colaborativo donde los logros compartidos son una muy importante fuente de motivación.

Centrándonos en la experiencia llevada a cabo con alumnos de secundaria obligatoria, con edades comprendidas entre los 14 y 16 años, los resultados no pudieron ser más halagüeños. Nos referiremos a un centro concreto, el IES La Mola, de Novelda, que desde el principio fue uno de los centros colaboradores más entusiastas. Los profesores participantes en la experiencia se reunían con sus alumnos periódicamente, un par de veces por semana, para trabajar en los diferentes proyectos. Primero se les informó de lo que se pretendía y después se pensó en qué proyecto se podría llevar a cabo. Una vez escogida la tarea a realizar, voluntariamente, los alumnos se situaban en un grupo u otro, según sus preferencias y afinidades: el de los «ingenieros» y el de los «programadores». Se discutía el diseño del robot y las características físicas que debía reunir para poder ejecutar la tarea seleccionada, y, a continuación, los ingenieros comenzaban su construcción y los programadores, que fueron previamente introducidos y adiestrados por los profesores en el manejo del software y lenguaje de programación, comenzaban a diseñar las instrucciones necesarias para que el robot ejecutara la tarea requerida. Cuando prototipo y programa estaban preparados comenzaba la fase de ensayos y corrección de errores, hasta conseguir el objetivo previsto.

Se completaron seis proyectos en total, que fueron los siguientes:

- Robot-coche con mando teledirigido para avanzar, moverse en diferentes direcciones y parar.
- Robot sube rampas. Era capaz de subir, llegar hasta el final de la rampa, girar 180° y descender por el mismo camino.
- Robot capaz de seguir una línea negra dibujada sobre cartulina blanca.

La experiencia se lleva a cabo dentro de un marco de aprendizaje colaborativo donde los logros compartidos son una muy importante fuente de motivación.

- Robot situado dentro de un círculo que al chocar contra una lata la atrapaba con sus pinzas, la empujaba fuera del círculo sin salirse él mismo de dicha zona y volvía a buscar más latas. Todo ello sin dejar de emitir una música programada por los propios alumnos.
- Robot que va avanzando y al alcanzar el ambiente virtual una determinada temperatura se detenía y comenzaba a aplaudir.
- Dos robots que se comunicaban entre sí, emitiendo uno de ellos señales que eran respondidas por el otro instantáneamente. Al terminar la comunicación ambos robots, previamente en reposo, se ponían en movimiento.

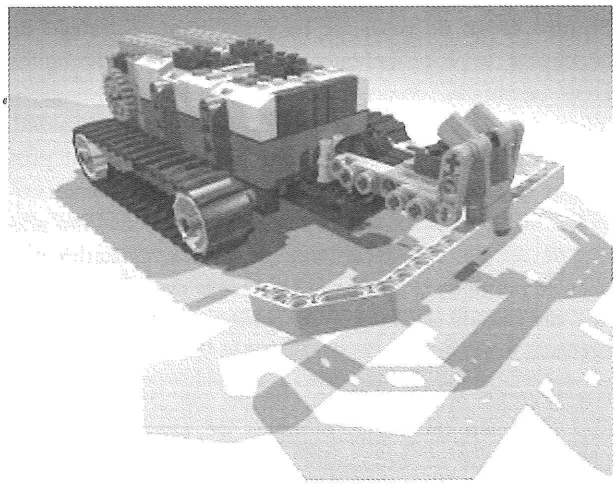


Figura 3

El trabajo fue arduo, pero en ningún momento hubo que animar a los alumnos puesto que los retos planteados y las ansias de superarlos eran suficiente motivación para ellos.

En tres ocasiones se reunieron todos los centros participantes en la Universidad de Alicante, para intercambiar experiencias y presentar lo logrado. En una de tales ocasiones asistió a la reunión un profesor del MIT, colaborador de Seymour Papert, que quedó impresionado por los logros obtenidos por los jóvenes estudiantes y el grado de concentración que conseguían cuando se imbuían en su trabajo.

Durante el presente curso se sigue trabajando en la misma línea, pero colaboran más centros, inicialmente eran cinco, y ahora son once, y se pretende introducir el trabajo con robots en el currículo y no como actividad extraescolar como se había venido desarrollando hasta ahora.

Estos sets de robótica han sido elaborados teniendo presentes los trabajos de Seymour Papert y sus «Mindstorms», basados en las teorías del desarrollo cognitivo de Piaget y, desde el punto de vista de la didáctica, sus aportaciones pueden ser muy importantes.

Permiten construir el conocimiento siguiendo procedimientos de naturaleza similar a la del método científico, formulando hipótesis y experimentando para aceptar o rechazar dichas hipótesis, y posibilitando la práctica del método de ensayo y error para reformularlas.

Permiten construir el conocimiento siguiendo procedimientos de naturaleza similar a la del método científico, formulando hipótesis y experimentando...

Mediante la programación se crean modelos que simulan la realidad y que al ser manipulados matemáticamente producen efectos o modificaciones aplicables a la misma. Por ejemplo, cada vez que se presiona un botón se suma una unidad al valor de una variable, posteriormente, el robot envía tantos mensajes como valor tenga la variable, valor que equivale a las veces que se ha presionado el botón.

En otro orden de cosas, se hace necesario el trabajo de conceptos y procedimientos pertenecientes a diferentes áreas científicas, como matemáticas, física, tecnología e informática, con lo cual se trabaja interdisciplinariamente. Mediante la realización de los programas y diseño de prototipos se desarrolla la capacidad lógica y de razonamiento abstracto. Al permitir el software la representación gráfica de los datos y de las modificaciones realizadas con ellos se permite desarrollar la formación de representaciones visuales de los conceptos como, por ejemplo, el de derivada e integral.

Los alumnos se familiarizan con las nuevas tecnologías que permiten transmitir, a través de rayos infrarrojos, órdenes desde un ordenador a un objeto no conectado físicamente con él, a la vez, se introduce a los alumnos en un lenguaje de programación simbólico que trabaja con unos pocos iconos que representan objetos concretos, como motores, luces, etc., e ideas más abstractas como generar valores al azar, aumentar o disminuir el valor de variables, etc.

Otro aspecto muy importante es el hecho de que en la base del lenguaje de programación utilizado están los procesos de iteración y recursividad, presentes en los sistemas dinámicos, que permitirán introducir a los alumnos, suavemente, en un campo de las matemáticas de total actualidad.

En otro orden de cosas, y como ya se ha indicado antes, el propio alumno construye y descubre el conocimiento a través del intento de dar solución a problemas reales que se le platean al principio o que le surgen a lo largo de la evolución de su trabajo, desarrollando, a la vez, su capacidad de organizar la información y de resolver problemas, su imaginación para encontrar modelos que simulen la situación real a la que han de dar respuesta y su habilidad y destreza para construir objetos que cumplan unos requisitos con los elementos disponibles.

Como final, el trabajo colaborativo se hace imprescindible, al ser necesaria la participación de «programadores» e «ingenieros» en el desarrollo de los proyectos y surgiendo, de manera inevitable, el intercambio de puntos de vista, la discusión y, en resumen, la comunicación.

Como última consideración pensamos que sería necesario hacer un hueco en los currículos y adaptarlos para posibilitar la introducción de la robótica en el aula, vista como una herramienta y no como un fin, elaborando proyectos desde los que se pudieran trabajar diferentes conceptos y procedimientos matemáticos desde las diferentes áreas implicadas.

Si se desea más información sobre el trabajo que se está llevando a cabo en la actualidad en la Universidad de Alicante, se puede visitar la dirección

<www.teddi.ua.es/lineastrabajo/robotica.asp>

Así mismo se puede encontrar información sobre los proyectos de robótica llevados a cabo en el MIT y sobre los trabajos de Seymour Papert en

<www.media.mit.edu>

o en

<www.papert.org/works.html>.

M.ª José Haro
IES Al-Basit. Albacete
Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»
Antonia Redondo
IES Diego de Siloé. Albacete
Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas.

SUMA 43
junio 2003, pp. 61-71

La construcción de bóvedas celestes en la asignatura de Astronomía

Carmen Rubio Benito
José Vitoria Ágreda

IDEAS Y RECURSOS

Continuando con la tradición de la construcción de esferas armilares para poder explicar y calcular muchos sucesos de astronomía de posición, y conscientes de que el aprendizaje más significativo requiere de práctica y manipulación por parte del alumnado, exponemos la construcción y utilización de hasta cuatro modelos diferentes de bóvedas celestes, realizadas en diversos cursos académicos por alumnos de la asignatura de Astronomía en 4.° curso de la ESO.

LOS AUTORES llevamos muchos años compartiendo, tanto nuestra afición a la observación de los cielos, en multitud de acampadas nocturnas, como el interés científico por nuestra formación académica de licenciados en ciencias físicas. Ambos somos también profesores de instituto, en diferentes centros, y entre ambos hemos desarrollado las ideas, tanto teóricas como prácticas, para llevar a cabo los modelos de bóvedas que a continuación describiremos. La experiencia práctica con los alumnos sólo ha podido desarrollarse en uno de los centros (IES Avempace, de Zaragoza), pues en el otro centro (IES Cabañas, de la Almunia de Doña Godina, Zaragoza), por su menor número de alumnado, no ha podido implantarse la asignatura optativa de Astronomía.

Justificación de la experiencia

La Astronomía, la primera ciencia de la humanidad junto con la geometría, es una ciencia eminentemente observacional. Los conocimientos logrados están basados en un acopio enorme de observaciones y en una atenta y racional interpretación de estos datos

Esto implica que en el aprendizaje de la astronomía en general (y de la asignatura de 4.° de la ESO en particular), haya bastantes conceptos que resultan muy difíciles de asimilar. Estas dificultades intrínsecas se deben a varios motivos:

En unos casos la dificultad está en la falta de visión espacial o en lo abstracto de determinados conceptos de geometría en tres dimensiones: meridianos y paralelos celestes, ángulos en el espacio, triángulos esféricos, distancias angulares…

En otros casos la dificultad está en entender movimientos de cuerpos celestes y, sobre todo, sus consecuencias que tienen lugar muy lentamente (escala de días, años o mucho más), por ejemplo, en la Tierra: rotación, traslación, precesión, nutación...

Otra dificultad está en no poder observar los fenómenos astronómicos más que desde un lugar del universo: nuestro planeta y, en concreto, desde nuestro lugar de observación.

A todo ello hay que añadir la dificultad (que no existía antaño) de la contaminación lumínica que impide, sobre todo a los habitantes de las ciudades, poder disfrutar y aprender de los cielos nocturnos.

Por ello, la Astronomía siempre ha utilizado modelos para explicar, situar, calcular e incluso predecir los diversos fenómenos astronómicos. Dichos modelos podemos clasificarlos en bidimensionales y tridimensionales.

- Los bidimensionales, como los antiguos astrolabios, los modernos planisferios y buscadores de estrellas, tienen la ventaja de tener un coste reducido y de ser fácilmente transportables, pero la representación plana de fenómenos espaciales siempre es distorsionada, esquemática y en ocasiones difícil de asimilar.
- Los tridimensionales, como las esferas armilares, planetarios, cúpulas para proyecciones, u otros modelos, son muy eficaces, pero son muy caros y nunca están a mano para utilizarlos en una clase de astronomía.

Por otro lado, siendo conscientes de que el aprendizaje más significativo requiere de práctica y manipulación por parte del alumnado, y de que la enseñanza teórica del profesor en exclusiva es poco eficaz para determinadas tareas, consideramos necesario involucrar a los alumnos en la concepción y fabricación de modelos útiles para asimilar los conceptos propios de la materia.

Todo ello nos ha llevado a la necesidad de aguzar el ingenio para construir modelos tridimensionales como las bóvedas celestes, con la representación del cielo y de la Tierra, que sean baratos y fáciles de construir por los propios alumnos.

...la Astronomía siempre ha utilizado modelos para explicar, situar, calcular e incluso predecir los diversos fenómenos astronómicos.

Los objetivos generales

La construcción y utilización de bóvedas celestes que representen el modelo de universo clásico de las dos esferas, ayuda de manera muy importante, y a veces decisiva, a aprender conceptos propios de la materia, como las constelaciones, a comprender las coordenadas celestes y sus elementos claves (polos celestes, ecuador, eclíptica, punto vernal, etc.), así como a entender las coordenadas locales (horizonte, cenit, meridiana...).

Un segundo grupo de objetivos para trabajar con las esferas celestes consiste en comprender los efectos de los movimientos celestes, principalmente los debidos a la rotación y traslación de la Tierra, así como la variación del lugar de observación (días, noches y su duración; orto, ocaso y culminación de los astros; las estaciones; medida del tiempo, etc.).

Además de éstos y otros objetivos conceptuales, la construcción y utilización de bóvedas celestes permite alcanzar destrezas procedimentales, como la construcción y utilización de planisferios y mapas celestes, la orientación por las estrellas, la localización en el cielo de un astro por sus coordenadas, la relatividad del sistema de referencia o lugar de observación, etc.

Un último bloque de objetivos que se pretenden conseguir con los alumnos en esta actividad es que adquieran actitudes positivas hacia el trabajo científico (la observación, paciencia y continuidad; la importancia de los modelos en las explicaciones científicas; la utilización de la geometría en el desarrollo de otras ciencias, etc.) hacia las visiones antiguas del cosmos y el progreso en el hecho cultural humano, y, en fin, a la importancia de la presencia de fenómenos naturales en la vida cotidiana (como la regularidad de muchas actividades humanas debido a los ciclos celestes).

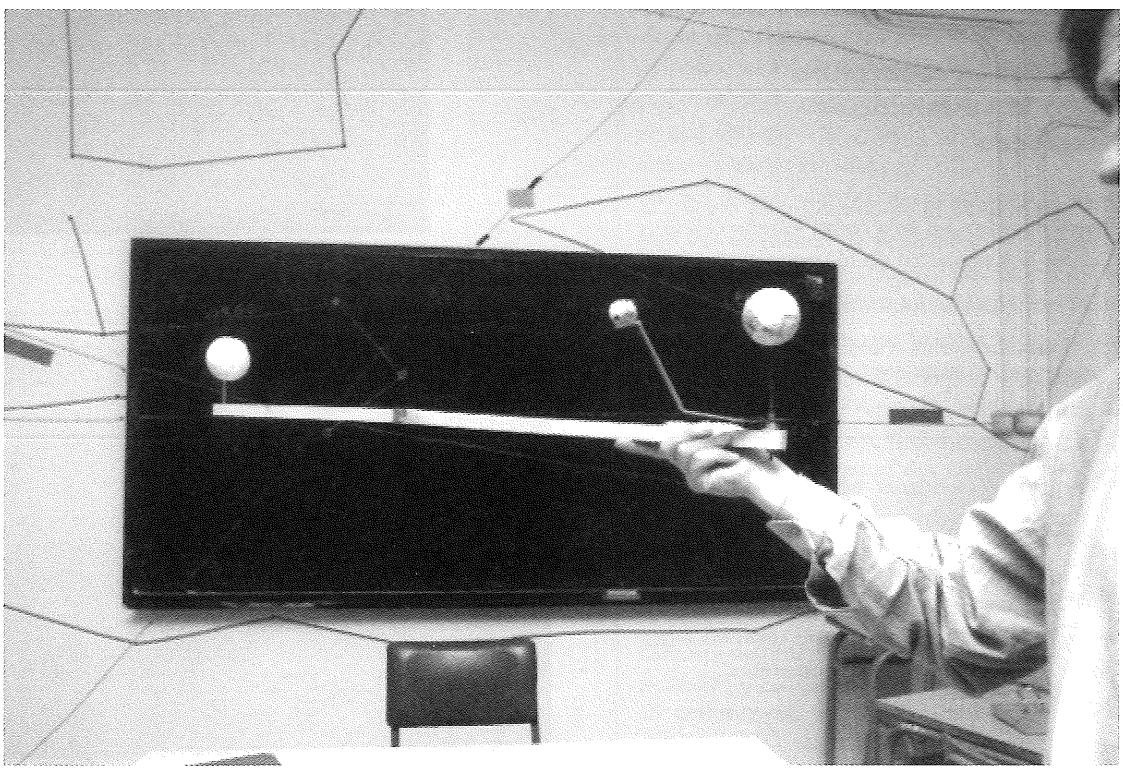
La teoría: el modelo de las dos esferas

Considerar que los cuerpos celestes están todos situados en una esfera perfecta concéntrica a otra esfera más pequeña, que es nuestro planeta, parece, y lo es, una simplificación excesiva de nuestro cosmos. Sin embargo, todos los conceptos clásicos de la astronomía de posición pueden representarse y visualizarse con el modelo de las dos esferas. Ello se debe a que la distancia a los objetos celestes es tan grande que los efectos de paralaje no han sido observados hasta la astronomía telescópica. Esto quiere decir que podemos considerar que todos los astros están a la misma distancia (colocados en la esfera o bóveda celeste), pues únicamente tienen interés su posición y movimientos angulares. El que la Tierra sea el centro del universo en este modelo, no quiere decir otra cosa sino que es nuestro lugar de observación.

...todos los conceptos clásicos de la astronomía de posición pueden representarse y visualizarse con el modelo de las dos esferas.

En un modelo completo de las dos esferas podemos y deberemos representar los siguientes elementos y conceptos:

1. Ligados a la esfera celeste:
   - Estrellas principales, clasificadas en tamaño según la magnitud.
   - Constelaciones (al menos con sus líneas esquemáticas).
   - La Vía Láctea.
   - Eje del mundo.
   - Polos norte y sur celestes.
   - Ecuador celeste.
   - Meridianos celestes y sus coordenadas: ascensión recta.
   - Paralelos celestes y sus coordenadas: declinación.
   - La eclíptica y las constelaciones zodiacales.
   - Los puntos equinocciales y solsticiales.
   - Punto aries (o punto vernal) y punto libra.
2. Ligados a la Tierra
   - Eje de la Tierra.
   - Polo norte y sur terrestres.



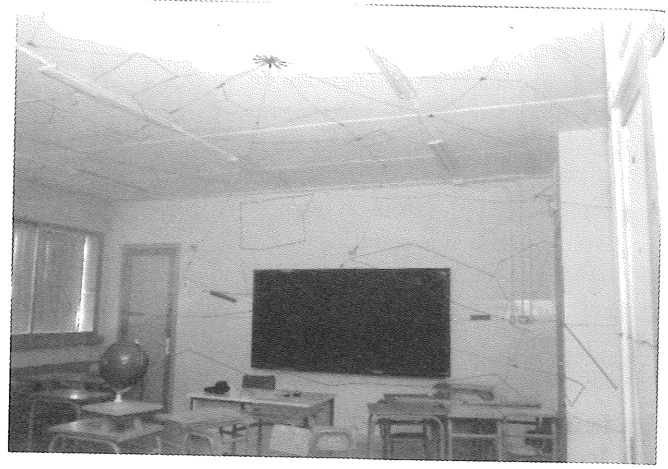
- Ecuador y paralelos terrestres (y coordenadas de latitud).
- Meridianos terrestres (y coordenadas de longitud).

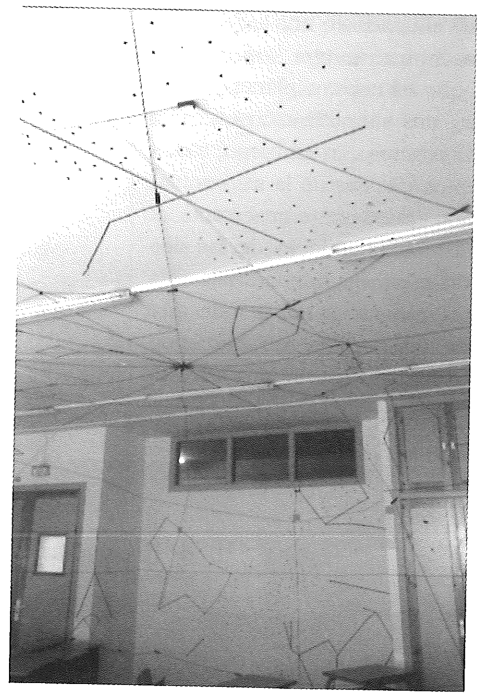
3. Ligados al lugar de observación, en la superficie terrestre.
   - El horizonte del lugar, con inclinación relativa y variable, según la latitud.
   - La vertical del lugar, con el cenit y el nadir.
   - El meridiano del lugar, la meridiana y el primer vertical.
   - Los puntos cardinales y su coordenada local: el azimut.
   - Los almucantarates y su coordenada local: la altura cenital.

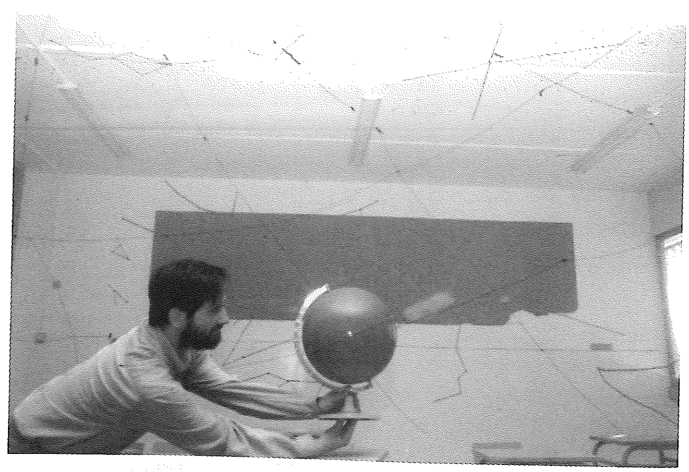
Además, el modelo de las dos esferas debe permitir la representación y observación de los movimientos principales de la Tierra y sus implicaciones en el cielo observado:

- *Un círculo horario*: para observar el movimiento de rotación terrestre, representado por el giro diario (de este a oeste) de la bóveda celeste.
- *Un circulo con los días del año*: para observar el movimiento de traslación, representado por el desplazamiento del Sol a lo largo de la eclíptica durante los diversos días del año.

Para el movimiento de precesión del eje de la Tierra, con la traslación del punto vernal, parece excesivo introducir otro artilugio pues es demasiado lento. Sin embargo, el modelo debe permitir fácilmente su explicación y comprensión.







El desarrollo de la actividad: la construcción de las diversas bóvedas

Curso 1994/195: La cuadratura del círculo... o la «esferización» del paralelepípedo

El primer primer planteamiento de bóveda celeste fue utilizar las paredes y el techo del aula como «esfera» celeste y un globo terráqueo convencional en el centro de la clase.

Las representaciones elegidas fueron las siguientes:

- *Elementos:* Líneas celestes (meridianos y paralelos celestes, ecuador y eclíptica) con cuerda fina (2 mm) de color azul, agarrada al techo y paredes con cinta aislante del mismo color azul y/o con grapas.
- *Estrellas:* pegatinas circulares engomadas de color negro, de distintos tamaños según la magnitud de las estrellas.
- *Líneas de las constelaciones:* cinta adhesiva de color rojo.
- *Sol, Luna y planetas:* con cartulina de diversos tamaños recortada y decorada adecuadamente.
- *Leyendas:* sobre pequeños recortes de cartulina de color naranja.

Como el globo terráqueo colocado en el centro de la habitación, ya disponía de una inclinación del eje de 23°, el plano de la eclíptica resultaba horizontal y el ecuador celeste aparecía con dicha inclinación. Los demás elementos se dispusieron en función de estas características. La prolongación del eje de la Tierra situaba a la estrella polar en el techo del aula, desplazada respecto al centro por la inclinación de los 23°. Se colocaron doce meridianos, partiendo de la polar, simulando su forma circular. El meridiano cero (y por tanto el punto vernal) quedaba en el centro de la pared del fondo. Con ello, el punto solsticial de verano aparecía en el centro de la pared a la derecha de los alumnos, el equinoccio de otoño se situaba en la pizarra, y el solsticio de invierno en las ventanas del aula.

Todo el trabajo corrió a cargo de los alumnos. En aquel curso el horario era de tres horas a la semana y esta asignatura la cursaban dos grupos distintos, por lo que para el montaje se dividió el aula en dos mitades, una para cada grupo. Entre el planteamiento y la construcción se utilizaron cuatro semanas, durante las cuales el entusiasmo de los alumnos iba en aumento al observar los resultados obtenidos.

Como valoración de esta actividad habría que señalar una serie de aspectos positivos: el resultado es vistoso y espectacular desde cualquier parte del aula; las constelaciones pueden ser observadas durante muchos meses por los alumnos. El profesor, o los alumnos, pueden mover con facilidad las cartulinas de la posición diaria del Sol, la Luna y planetas, de modo que se asimilan muy bien estos movimientos y sus consecuencias

Como aspectos negativos habría que señalar que el horizonte del observador y su variación con la latitud es difícil de representar. Igualmente, las coordenadas y distancias entre los meridianos (y los paralelos) sólo eran reproducibles cualitativamente. La ocupación total del aula en detrimento de otras asignaturas y el relativo deterioro que sufren las paredes y la pintura del aula fue criticado por algunas personas.

Curso 1996/97: Una verdadera cúpula para 12 personas

Para compensar estos últimos inconvenientes se decidió acometer otro tipo de bóveda que mantuviera las características de ser económica y de que, en aras de una metodología activa, pudiera ser resuelta y confeccionada por los alumnos. Además, debían mantenerse todos los elementos descritos anteriormente, mejorando su representación en cuanto fuera posible. Se optó por hacer una bóveda en polispán (polietileno expandido) de 2 cm de espesor que se vende para la construcción como aislante en planchas rectangulares de 1x2 m^2. La forma cuasi-esférica se lograría a modo de facetas, cortando la esfera en doce meridianos (cada 30°) y cinco paralelos (también cada 30°). Cada una de las 48 regiones delimitadas por los cortes de paralelos y meridianos sería un plano confeccionado con polispán. El tamaño total se decidió que fuera de 2,4 m de diámetro, con lo que sería factible colocarla en el fondo del aula, rasante con el techo, sobre caballetes de casi 1 m de altura, y con el polo norte celeste en la parte central más elevada. Bajo la cúpula cabían unas doce personas sentadas en sillas.

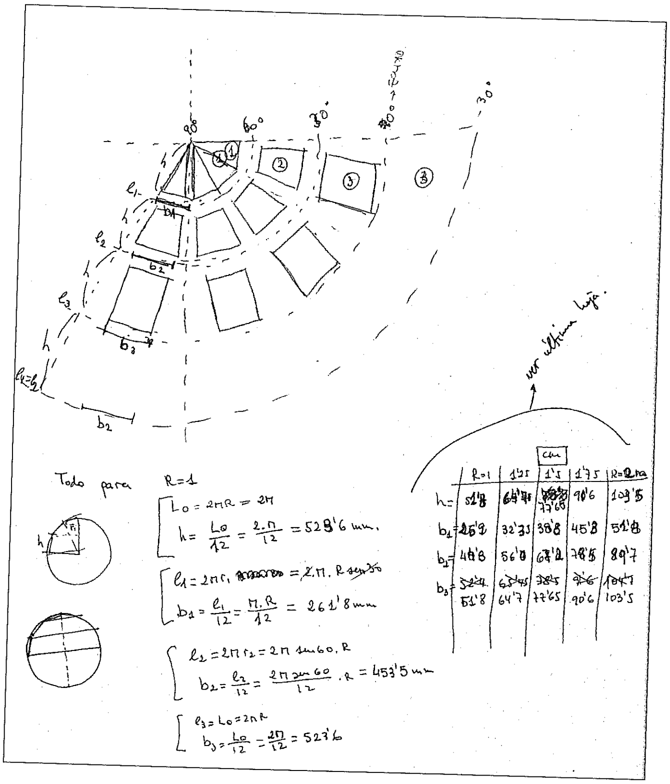
El cálculo para determinar el tamaño de las piezas es un ejercicio elemental de geometría que puede abordarse en una clase de 4.° de ESO. Para un valor R del radio interior de la esfera, la longitud del meridiano será $L = 2 \cdot \pi \cdot R$, por lo que la longitud de los lados «verticales» de cada faceta será de $h = \pi \cdot R/6$. La dimensión de las bases, o lados «horizontales» de las facetas vienen determinadas por las longitudes de los paralelos elegidos. En el caso del ecuador coincide con la longitud del meridiano, o sea $b_3 = \pi \cdot R/6$. Los paralelos de +30° y –30° tienen un radio $r = R \cdot \cos 30°$, siendo por tanto la longitud $L = 2 \cdot \pi \cdot R . \cos 30°$, y las bases de las facetas correspondientes

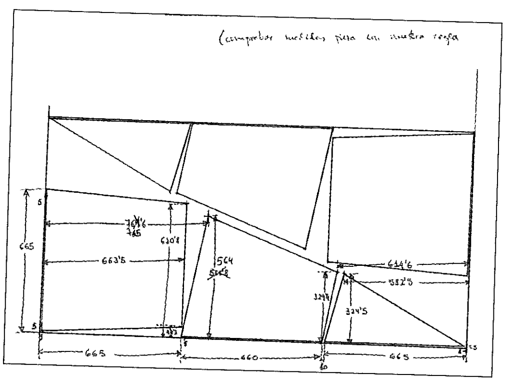
$$b_2 = (\pi \cdot R \cdot \cos 30°)/6$$

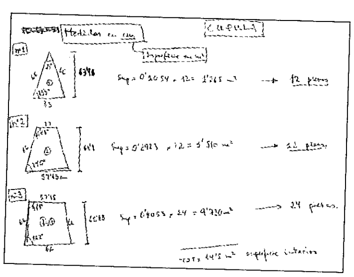
Correspondientemente, el paralelo 60° tienen un radio $r = R \cdot \cos 60°$, y las bases de las facetas medirán

$$b_1 = (\pi \cdot R \cdot \cos 60°)/6.$$

El valor elegido para el radio interior fue de 240 cm, como ya se ha dicho, por lo que el tamaño de las piezas resultante es el que aparece en las figuras adjuntas.







Los cortes de las 48 piezas diseñadas se realizan con sierra térmica de resistencia eléctrica. El corte debe efectuarse con un inglete interior de 15°, para que asienten perfectamente las piezas, dando la forma cuasi-esférica. Las piezas se pegan con un pegamento especial con disolvente de tolueno, pues los pegamento habituales de acetona disuelven el polispán. Las estrellas las dibujaron los alumnos sobre el polispán con rotuladores negros, dando distintos tamaños según la magnitud. Las líneas de las constelaciones con rotuladores azules, y la eclíptica y otras lineas y leyendas en color rojo. Para que los alumnos dibujaran con fidelidad cada una de las 48 facetas, se les proporcionó el correspondiente mapa celeste sacado del programa Voyager II para Macintosh (versión 1.0 de Carina Software, USA).

La Tierra se representó mediante una esfera también de polispán, de 10 cm de diámetro, decorada adecuadamente. Se colocó suspendida en el centro de la esfera celeste mediante un hilo desde la estrella polar.

Este nuevo modelo de bóveda tiene una mayor fidelidad con el modelo esférico, es fácil de realizar y más económica. Familiariza a los alumnos con las coordenadas esféricas, y con la representación de la esfera celeste en un planisferio. Es muy útil para que los alumnos adquieran visión espacial y muy adecuada para explicaciones en grupos reducidos.

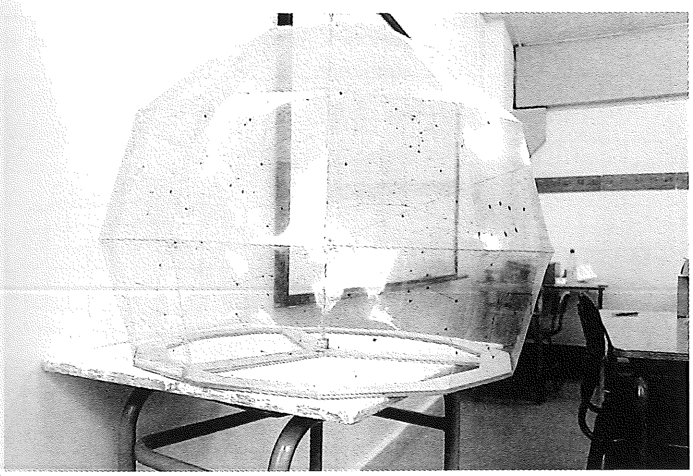
Este nuevo modelo de bóveda tiene una mayor fidelidad con el modelo esférico, es fácil de realizar y más económica.

Como aspectos negativos cabe reseñar que el material de construcción es demasiado delicado para estar expuesta a perpetuidad en un aula corriente y por las cualidades del polispán, se acumula gran calor en su interior. Además el horizonte de un lugar y las coordenadas locales son difíciles de representar.

Curso 1999/2000: La bóveda transparente para ser observada desde fuera

Se abordó la construcción de otro modelo de bóveda siguiendo la línea de metodología activa, economía de costes y máxima completitud en cuanto a elementos astronómicos que se iban a incluir. Se pretendían subsanar los inconvenientes anteriores, pero con la misma concepción teórica que el modelo anterior. Se trataba de construir una bóveda mas manejable, en torno al metro de diámetro, que necesariamente tendría que ser transparente para poder hacer observaciones y cálculos desde el exterior de la bóveda. La bóveda también sería cuasi-esférica, con 48 facetas, con los mismos meridianos y paralelos que la anterior. La principal novedad estaba en que a la esfera de la Tierra podría acoplársele un horizonte artificial, con inclinación variable según la latitud. Además, y esto resulta primordial, todo este conjunto debería accionarse desde el exterior, realizando el giro horario de la Tierra a voluntad. Con ello se simulan mucho mejor el giro diario de los cielos, los ortos, ocasos y culminaciones, y en general el aspecto del cielo en una hora y días determinados.

...a la esfera de la Tierra podría acoplársele un horizonte artificial, con inclinación variable según la latitud.



El tamaño se eligió para que las facetas transparentes se confeccionases con acetatos de trasparencias, que tienen el tamaño estándar DIN A4. Siguiendo el cálculo efectuado en la anterior bóveda, el tamaño de los lados de las facetas mayores debía ser $h = b_3 = \pi \cdot R/6 = 20{,}9$ cm; por lo que resulta para el radio de la esfera un valor de $R = 39{,}9$ cm (o sea, una bóveda de casi 0,8 m de diámetro).

La bóveda se construyó con acetatos de los utilizados para encuadernaciones manuales, que se venden en el formato DIN A4. Todos los elementos se dibujaron con rotuladores de colores especiales para transparencias. El trabajo se dividió por husos delimitados por meridianos celestes, entre seis grupos de alumnos. Cada grupo tenía que dibujar las estrellas, constelaciones, vía láctea, eclíptica, etc. correspondientes a ocho de las facetas que componían la bóveda. Cada grupo tenía que coordinarse con los grupos vecinos para hacer coincidir los elementos comunes. Las piezas finales se unieron mediante cinta adhesiva transparente. El eje consiste en una varilla (de rosca métrica, de 4 mm de diámetro) al que se acoplan tuercas y arandelas para sujetar la base, el punto superior (o polo norte celeste) y en el centro una bola de polispán de 5 cm de diámetro que representa la Tierra. Esta sujeción se realiza de tal manera que el conjunto eje y Tierra pueda hacerse girar a voluntad desde el exterior. La base se realizó en tablex de 2 mm, lo que permite poner o quitar a voluntad el horizonte. Dicho elemento se confeccionó también en tablex de 2 mm, en el cual se practicó una ranura en la semilínea meridiana norte con ganchos a diversas distancias, para ser introducida en la varilla roscada y colocada con diversas inclinaciones. Çon esto se puede simular el horizonte de las diversas latitudes del hemisferio norte. Además, en el horizonte se señalaron los puntos cardinales, para poder explicar todas las cuestiones relacionadas con la orientación.

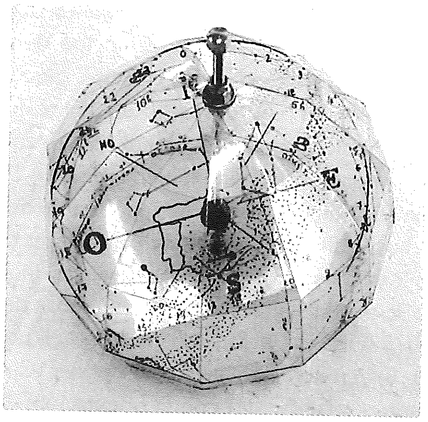
El trabajo se dividió por husos delimitados por meridianos celestes, entre seis grupos de alumnos.

Los aspectos positivos de esta bóveda son su fidelidad con el modelo esférico, ser de fácil realización y económica.Es muy útil para que los alumnos adquieran visión espacial y se familiaricen con las coordenadas esféricas. Tiene la posibilidad de llevar acoplado un horizonte graduable según la latitud del lugar de observación. La posibilidad de girar a voluntad, desde el exterior y muy fácilmente, la Tierra y el horizonte que se le acopla, permite explicar con sencillez, claridad y elegancia las cuestiones relacionadas con la rotación diaria de la Tierra.

Como aspectos negativos hay que señalar la dificultad que tienen algunos alumnos para observar las constelaciones desde fuera, por transparencia. (La visión directa desde afuera, hace que las formas de las constelaciones se vean al revés). Además la estructura, aunque bastante rígida, se deforma localmente con los golpes externos. No obstante, se repara con la misma facilidad. Si no se tiene cuidado los acetatos terminan cogiendo mucho polvo por el exterior, y son difíciles de limpiar.

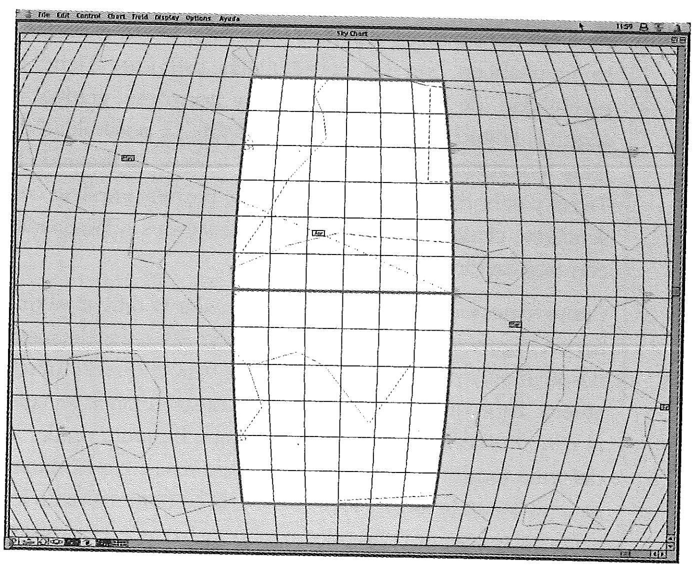
Curso 2000/01: Bóvedas individuales para cada alumno

El éxito de la bóveda construida el curso anterior nos llevó a plantearnos que cada alumno podría realizar su propia bóveda y quedársela en propiedad. Consistía en reducir el tamaño e introducir una serie de mejoras: el tamaño se estableció en 15 cm de diámetro. Las mejoras fueron introducidas en el horizonte, en las coordenadas locales y en los círculos horarios. Los días del año, señalando las diversas posiciones del Sol, vienen escritos en el exterior de la base. En el interior, paralelo a la base y girando solidariamente a la Tierra aparece el círculo con las 24 horas. El horizonte simula el de Zaragoza (o zonas próximas a la latitud de 41° N) y en él puede leerse el acimut. Además se añadió otro plano transparente para indicar el meridiano del lugar, con la vertical, el cenit y la coordenada de altura horizontal. Opcionalmente, se puede colocar algún almucantarate (por ejemplo el de 45° de altura).

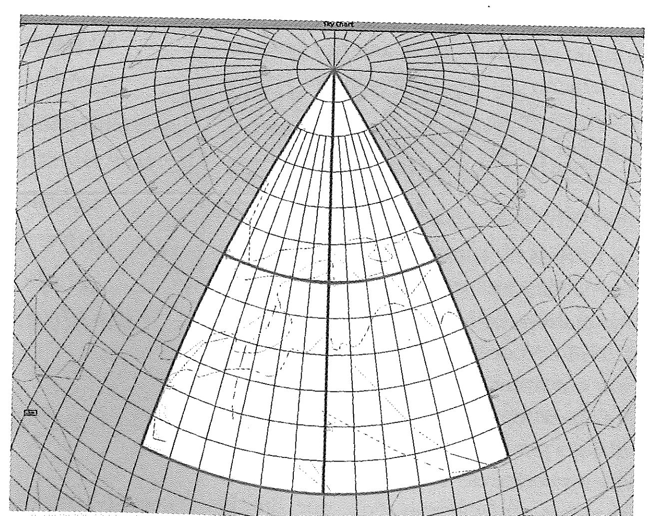


Por razones de tiempo los alumnos no participaron en el diseño de las piezas de la bóveda ni en el cálculos de los tamaños. No obstante sería interesante que realizaran dicho trabajo en coordinación con la asignatura de Matemáticas. A los alumnos se les entregaron cortadas las facetas que constituyen la esfera y la base de plástico rígida con el eje ya acoplado. Junto a estos materiales dispusieron también de planos de toda la esfera celeste (sacados de programa Voyager II para Macintosh), plantillas para los husos celestes y para el horizonte (ver planos) y diversos útiles, como rotuladores de colores para acetatos, alcohol para borrar errores, cinta adhesiva transparente para el montaje, etc. Trabajaron en grupos de cuatro y terminaron el trabajo en ocho sesiones. El orden de ejecución fue el siguiente:

Planos proporcionados a los alumnos
para la confección de diversas bóvedas



Modelo de dos facetas entre
los paralelos 30° norte y 30° sur

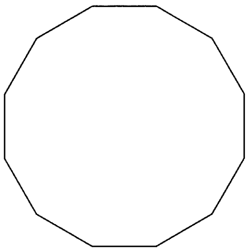


Modelo de cuatro facetas entre
el polo norte celeste y el paralelo 30° norte

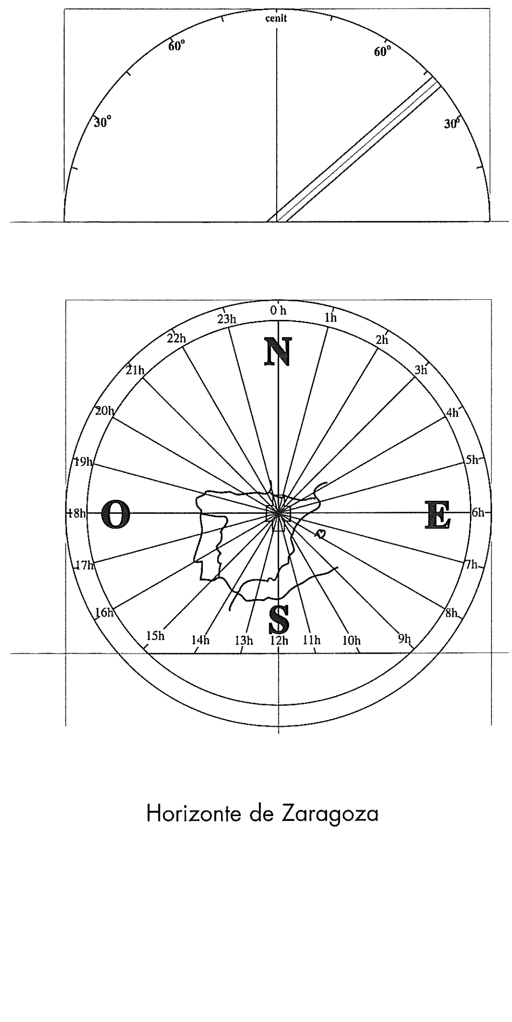
a) Dibujaron sobre acetatos los siguientes elementos: las estrellas (en azul) y las líneas (en verde) de 31 constelaciones del hemisferio norte y del hemisferio sur hasta el paralelo –30°, copiadas de los planos celestes. La Vía Láctea igualmente en azul. La eclíptica, el ecuador y las coordenadas celestes absolutas (de 12 meridianos y 4 paralelos) en rojo. Por el reverso se apuntaron en negro los meses del año, con tres fechas de cada mes, para indicar la posición del Sol a lo largo de la eclíptica.

b) Pegaron las diversas facetas con cinta adhesiva transparente, conformando la forma esférica.

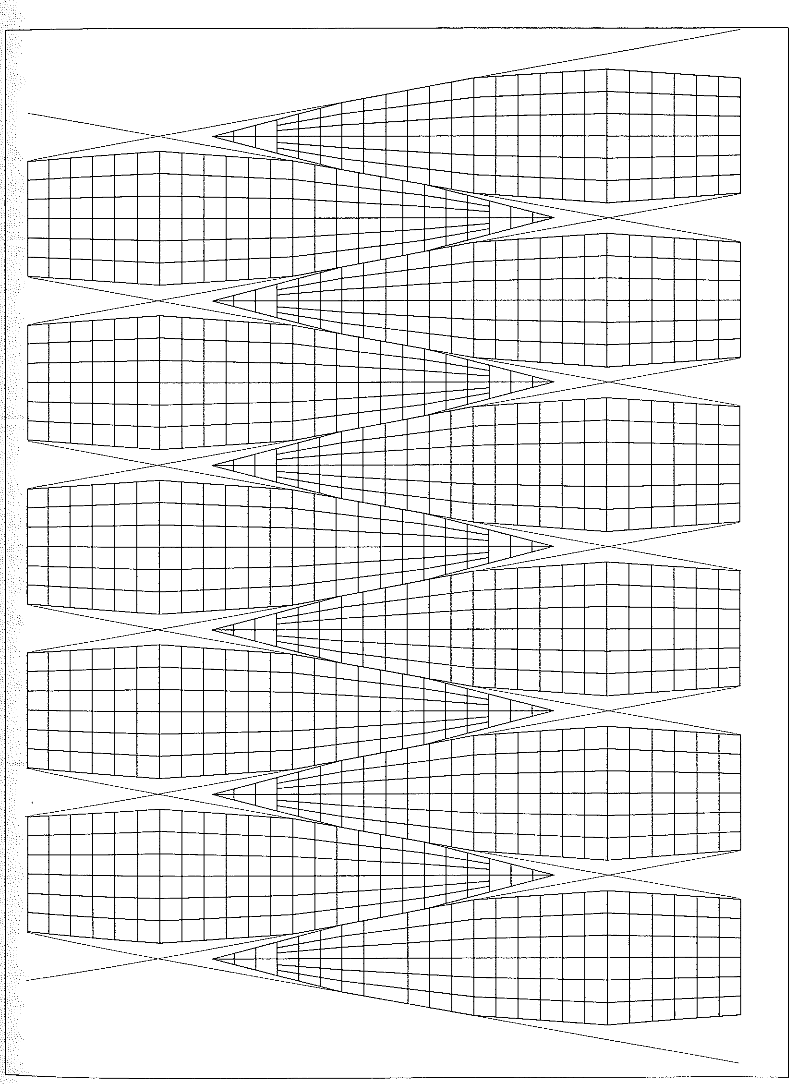
c) Calcaron el «horizonte de Zaragoza» con los puntos cardinales, el círculo horario para la base y el meridiano del lugar, según los modelos de las figuras adjuntas, todo ello de color negro.



Dodecágono de la base



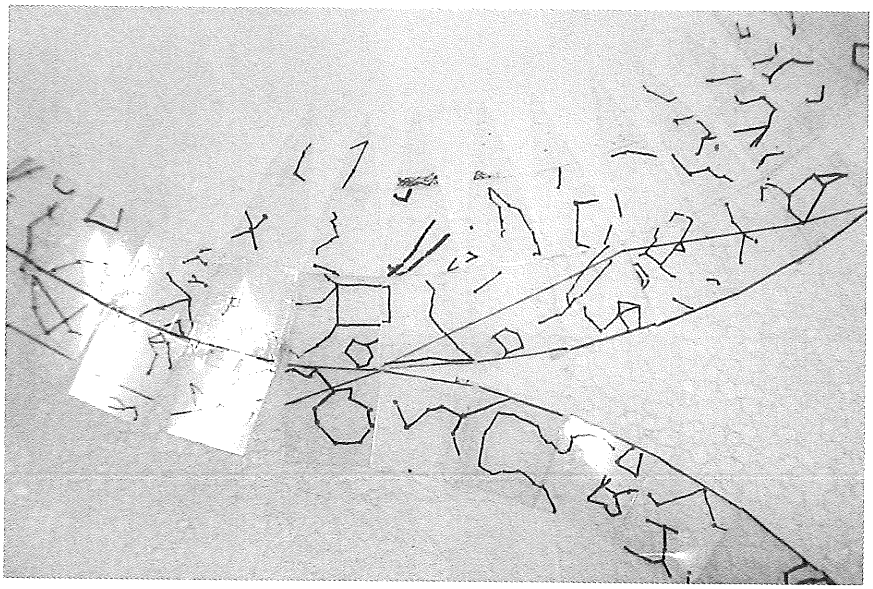
Horizonte de Zaragoza



Plantillas para recortar los acetatos y dibujar estrellas y constelaciones

d) Se montaron estos acetatos en el eje giratorio en su posición adecuada. El horizonte, con una inclinación de 41°, se fija en el centro de la esfera a dos tuercas fijas colocadas adecuadamente en el eje, mediante pasta adhesiva «Blu-Tack» de «Bostik». El círculo horario, abajo, paralelo a la base, se fija al horizonte con cinta adhesiva.

e) El último paso consistió en acoplar la esfera celeste al conjunto anterior, cerrando por abajo con cinta adhesiva y por arriba con arandela y pareja de tuercas apretadas, rematando el eje con una tuerca ciega decorativa.



Además de los aspectos positivos expuestos en bóvedas anteriores, este modelo permite ajustar la hora y el día para saber qué estrellas son visibles en cada momento. Pueden tomarse observaciones y datos de ortos y ocasos, midiendo el azimut. Además pueden medirse, sobre el meridiano de lugar, la altura cenital en el momento de la culminación, de cualquier astro. Pero indudablemente la gran ventaja es que los alumnos se llevan a casa un instrumento científico que pueden conservar y utilizar toda la vida.

El principal inconveniente que se observa es que la inclinación de horizonte no puede graduarse según la latitud.

La construcción de bóvedas celestes en Astronomía tiene un doble valor didáctico...

Resultado de la actividad y evaluación general

La construcción de bóvedas celestes en Astronomía tiene un doble valor didáctico: por un lado el del propio proceso de concepción y realización del modelo, y por otra parte el de su utilización posterior para observaciones, medidas y cálculos.

El proceso de concepción y realización

En nuestro trabajo, observamos que los aspectos científicos siguen dos caminos a veces divergentes, que pueden agruparse en «ciencia del aula o escolar» y la ciencia que recibe el reconocimiento social de «investigación». A lo largo de la historia del desarrollo científico, el uso de modelos dinámicos ha servido de apoyo al avance de las ciencias.

Nuestro objetivo, al desarrollar este tema, consistió en un intento de aproximar al alumnado de Secundaria a la obtención de un método de trabajo, que basado en un modelo práctico –escolar– le llevase a la comprensión de aspectos teóricos de más alto nivel, incluyendo en el proceso el uso de términos lingüísticos específicos.

Se plantea una doble finalidad, ya que presenta aspectos de actualización de la investigación en Ciencias y por otra parte se atiende a temas que pueden, desde un punto de vista divulgativo, estudiarse en la Enseñanza Secundaria.

La participación activa en la construcción del propio material de trabajo, aporta un acercamiento, no sólo a la asignatura, sino de modo general a la adquisición de estrategias cognitivas aplicables a otras ramas científicas. El proceso de modelización, personal y de grupo, da rendimiento en otras áreas del conocimiento y, por tanto, en el ámbito de formación de la etapa educativa en que nos movemos.

La utilización del modelo

Muchos conceptos, situaciones y cuestiones de Astronomía ponen en juego elementos y razonamientos de tipo geométrico. La utilización de la bóveda, a veces simplemente como modelo descriptivo, y otras incluso como una calculadora analógica, contribuye al desarrollo de la capacidad de comprensión espacial de los alumnos, y de algunas de sus abstracciones más dificultosas.

Mediante la colocación oportuna del Sol en la eclíptica (según el día del año) y del horizonte del lugar (según la latitud y la hora del día que se considere), los alumnos pueden deducir y resolver muchas cuestiones de astronomía de posición. Como muestra, he aquí una serie de cuestiones que habitualmente se le plantean al alumnado y resuelven mediante la utilización del modelo de las dos esferas construido:

- ¿En qué parte de la bóveda celeste la altura cenital de los astros disminuye continuamente y en que parte aumenta siempre?
- La latitud de Zaragoza es φ = 42°. Determinar la distancia angular del cenit de Zaragoza al polo Norte del mundo.
- ¿Qué ángulo forman el ecuador celeste y el horizonte para un observador situado a 41° de latitud norte? ¿Y para 80° norte?
- ¿En que dos casos permanece constante la altura de los astros a lo largo del día?
- ¿Donde está la estrella Sirio (α = 6h. 41 m.) el día 21 de marzo una hora después del ocaso solar? ¿Y el 22 de septiembre una hora antes del orto solar?
- ¿Cuál es la máxima declinación sur que puede tener una estrella para que sea visible desde Zaragoza?
- Desde un lugar la estrella Capella (δ = 46° de declinación) en el momento de su culminación inferior se ve justo en el horizonte. ¿Desde qué latitud está realizada la observación?
- En qué latitud se encuentra un observador que, el día del solsticio de invierno, mide una altura máxima del Sol ese día de 5°?
- ¿Cual es la altura del Sol al mediodía en Zaragoza el día del solsticio de verano?
- La eclíptica forma un ángulo de 23° 27' con el ecuador. El círculo polar ártico es el paralelo terrestre que dista del polo Norte exactamente esa misma distancia angular. ¿Por qué lugar del horizonte ve salir el Sol un observador situado en dicho círculo polar ártico los días de los equinoccios y de los solsticios?
- ¿Puede una estrella salir por el noreste y meterse por el noroeste? ¿Y si sale por aquel punto se podrá poner por el suroeste?
- ¿Entre qué puntos del horizonte salen los astros que permanecen visibles menos de 12 horas al día? ¿Entre qué puntos se pondrán?. ¿Y si permanecen más de 12 horas sobre el horizonte entre qué puntos saldrán y se pondrán?
- Dice un proverbio chino: «Cuando la cola de la Osa Mayor está dirigida por la tarde al este, estamos en primavera; cuando se dirige al sur es verano; si se dirige al oeste es otoño y si mira al norte es invierno». ¿Vale este proverbio para España?

...la realización y existencia de dichos modelos en la clase se ha revelado como una herramienta de un valor didáctico inestimable y altamente recomendable.

Conclusión y prolongación de la experiencia

La construcción de modelos de representación de la esfera celeste en relación a la Tierra es, y ha sido, a lo largo de la historia de la Astronomía, una herramienta fundamental, sino imprescindible, para comprender y calcular multitud de fenómenos propios de la materia.

Entroncando con la construcción de astrolabios, planisferios, esferas armilares, etc., los modelos propuestos en este trabajo tienen la virtud de ser fáciles de construir, económicos y de comprensión y utilización sencilla. Cualquiera de los modelos por el que se opte, tiene un gran atractivo para los alumnos, ayudando de manera fundamental a entender y asimilar los conceptos propios de la Astronomía.

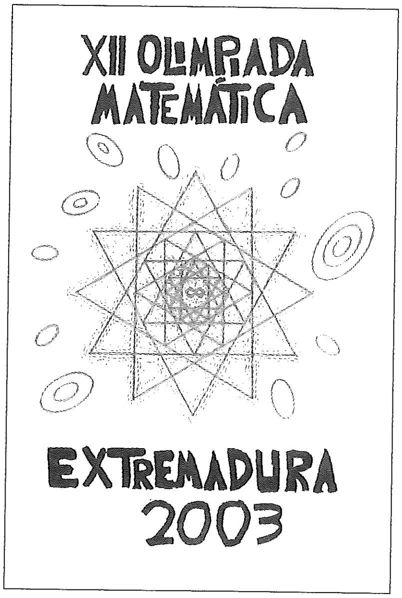
La experiencia del profesor así como las aptitudes y actitudes de cada grupo de alumnos, deben inclinarnos por la construcción de un modelo u otro. En cualquier caso, la realización y existencia de dichos modelos en la clase se ha revelado como una herramienta de un valor didáctico inestimable y altamente recomendable.

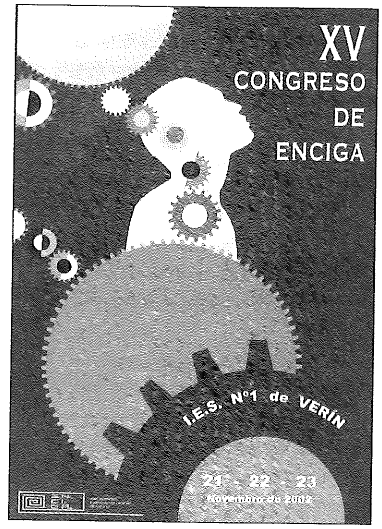
La prolongación de la experiencia está asegurada en nuestro centro mientras se mantengan las actuales condiciones laborales y de organización del centro. No obstante es nuestra intención hacer participar en la experiencia, de una manera real y efectiva, a otros departamentos. En este sentido las propuestas de trabajo próximas serían las siguientes:

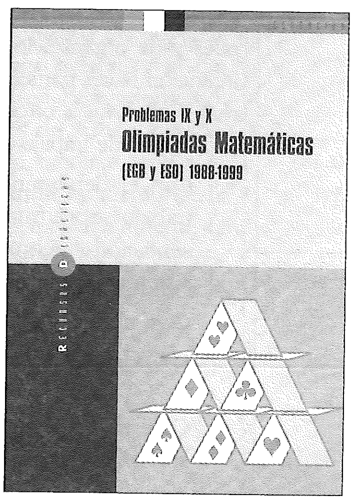
- Con el departamento de Matemáticas: propuesta de trabajo sobre trigonometría, sobre sistemas de representación y geometría del espacio y sobre cálculos en sistema sexagesimal.
- Con el departamento de Historia: desarrollo de los conceptos astronómicos en las diversas culturas antiguas y como avance hacia la cultura científica.
- Con el departamento de Lenguas Clásicas: trabajos sobre la mitología griega y romana.
- Con el departamento de Plástica: sobre sistemas de representación formales del espacio, concepciones artísticas, etc.
- Con el departamento de Tecnología: sobre desarrollo de proyectos constructivos, tratamiento de materiales, etc.

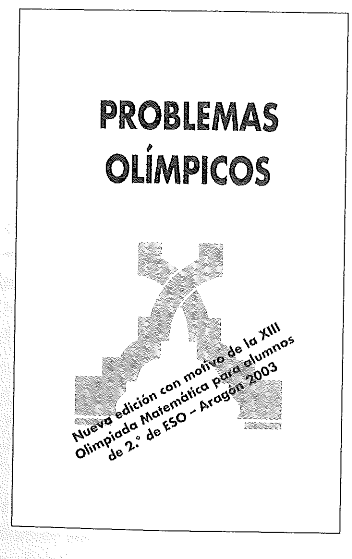
José Vitoria
IES Avempace. Zaragoza
Carmen Rubio
IES Cabañas.
La Almunia de Doña Godina
(Zaragoza)

PUBLICACIONES DE LAS SOCIEDADES









SUMA 43
junio 2003, pp. 73-77

La programación lineal con la hoja de cálculo Excel: una apuesta por las nuevas tecnologías

Juan José Prieto Martínez

La programación lineal es un tema muy importante dentro del bloque de Álgebra de las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales y es conveniente dar una idea clara y concisa en el aula de cuál es su campo de aplicación, ya que es posible que el alumnado se enfrente a ella en sus estudios superiores y la aplique en su trabajo futuro.
Los grandes avances en informática pueden hacer que los estudiantes de secundaria tomen mayor interés por determinados temas, en particular en el tema que aquí se está abordando.
Se ha realizado una prueba piloto con cuatro grupos de Segundo de Bachillerato: a dos grupos se les ha explicado programación lineal con materiales tradicionales, y a otros dos con ayuda del programa *Solver* de la hoja de cálculo *Excel*. Los resultados obtenidos han sido prometedores para muchos docentes que han seguido la prueba y pueden ser también un camino de esperanza para otros compañeros.

IDEAS Y RECURSOS

LAS MATEMÁTICAS como herramienta de trabajo en la vida cotidiana y con aplicaciones en problemas reales es un aspecto tratado cada vez más en nuestras aulas. Los docentes debemos intentar, en todos los niveles de la enseñanza secundaria, que los alumnos comprendan que las matemáticas surgen y son aplicadas en la vida real; de esta forma, quizás, podamos obtener como elemento motivador el aprendizaje de los conceptos y procedimientos fijados en la programación inicial de curso. Nosotros, los profesores, tenemos la obligación de enseñar a nuestros alumnos aspectos de actualidad o problemas que tuvo la humanidad y que fueron resueltos justamente mediante conceptos y procedimientos que corresponden con el tema que se imparte en clase. Que comprendan que lo explicado y estudiado en el aula es herramienta fundamental de trabajo para el día de mañana. Posiblemente, la actitud de algunos de nuestros estudiantes cambie.

La *programación lineal* es una técnica de modelado matemático, diseñado para optimizar el empleo de recursos limitados. La programación lineal se aplica con gran éxito en campos como el militar, la agricultura, la industria, la economía, las ciencias sociales, etc. La utilidad de la técnica es mayor a medida que las tecnologías han ido progresando y desarrollándose. De hecho, la programación lineal, debido a su enorme nivel de eficiencia computacional, es la base para el desarrollo de algoritmos de solución de otros tipos de modelos del área de la investigación operativa. Los cálculos son voluminosos y tediosos y, por consiguiente, requieren el empleo de los ordenadores. Los programas como el WinQSB, SPSS, StatGraphics o Solver de la hoja de cálculo Excel, están diseñados para mitigar la carga de los cálculos. No está de más enseñar a nuestros alumnos la existencia de estos programas y su utilización por parte de grandes empresas como herramienta de trabajo.

La práctica de resolución de un problema de programación lineal en un aula de informática de cualquier instituto de enseñanza secundaria tiene como objetivos fundamentales:

- Comprobar si los alumnos recuerdan el concepto y el procedimiento de resolución de inecuaciones aprendido en 4.° de ESO.
- Desarrollar procedimientos: búsqueda de inecuaciones equivalentes a una dada; interpretación gráfica en un sistema de coordenadas; aplicación de distintas técnicas y estrategias para resolver problemas de programación lineal.
- Desarrollar actitudes: reconocimiento y valoración crítica de los programas de ordenadores en la resolución de problemas de programación lineal; interés y curiosidad por la resolución de los citados problemas; confianza en las propias capacidades y perseverancia en la búsqueda de soluciones a problemas susceptibles de ser resueltos.
- Hacer hincapié en el concepto del valor de una función; en este caso de dos variables y con una estrecha relación con funciones económicas-matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. Usar la hoja de cálculo como herramienta en el desarrollo matemático es esencial hoy en día en el mundo laboral.
- Comprender el concepto de solución factible y solución óptima en un problema de programación lineal. Saber dibujar la región factible asociada.
- Fijar el concepto de «problema de programación lineal»: Maximizar o minimizar una función de dos variables (en este curso) restringida a un conjunto de inecuaciones también de dos variables, obteniendo al menos una solución o ninguna.

Programación lineal con Excel

Consideremos el siguiente problema (Selectividad en Andalucía, 2000):

> La región factible de un problema de programación lineal es la intersección del primer cuadrante con los tres semiplanos definidos por las siguientes inecuaciones:
>
> $(x/10) + (y/8) \leq 1$; $(x/5) + (y/8) \geq 1$; $(x/10) + (y/4) \geq 1$
>
> Calcula el mínimo de la función objetivo, $F(x, y) = 4x + 5y$, en el recinto anterior.

El citado problema puede formularse en una hoja de cálculo Excel. En la tabla 1 se muestra el modelo planteado asociado a dicho problema.

Se observa en la tabla que:

1. Los valores factibles (posibles de las variables que verifican todas las restricciones) u óptimos de X e Y están en las celdas B2 y C2, respectivamente. (Inicialmente toman el valor 1 para que puedan realizarse operaciones posteriores).
2. Los coeficientes de la función objetivo están en las celdas B4 y C4, y el valor de la función objetivo se encuentra en la celda G4.
3. Los coeficientes de las variables X e Y pertenecientes al conjunto de restricciones se hallan en las celdas B7, B8 y B9 para la variable X, y C7, C8 y C9 para la variable Y.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Variable X	Variable Y				
2	Valores óptimos de las variables	1	1				
3							Valor de F
4	Función Objetivo	4	5				B2*B4+C2*C4
5							
6	Restricciones:						
7	Primera	1/10	1/5		B2*B7+C2*C7	<=	1
8	Segunda	1/8	1/8		B2*B8+C2*C8	>=	1
9	Tercera	1/10	1/4		B2*B9+C2*C9	>=	1

Tabla 1

Desarrollar actitudes: reconocimiento y valoración crítica de los programas de ordenadores en la resolución de problemas de programación lineal; interés y curiosidad por la resolución de los citados problemas; confianza en las propias capacidades...

El alumno debe revisar la hoja de cálculo propuesta por tres motivos esenciales:

a) Para una mayor comprensión del problema de programación lineal.

b) Para comprobar la existencia de errores en la modelización. Éstos pueden llevar a conclusiones erróneas. Nótese que los procedimientos de corrección y precisión son siempre procedimientos que deben ser evaluados personalmente como positivos.

c) Para aprender a generalizar el procedimiento a otros contextos.

El primer paso para resolver el problema de programación lineal mediante la hoja de cálculo Excel es introducirse en el programa Solver. Éste se encuentra en el menu Herramientas dentro de la opción Complementos. En la pantalla aparecerá una caja (Solver Parameter) en la cual debe introducirse la siguiente información:

1. Celdilla donde se debe indicar el valor óptimo de la función objetivo. Dicha información debe registrarse en Set Target Cell (celda F4). Se escribirá o simplemente haciendo clic en la celda correspondiente.

2. Elegir si el problema trata de *maximizar* o *minimizar* una función.

3. Elección de las celdas donde se escribirán los valores óptimos de las variables. La citada información se registrará en By Changing Cells (B1 y C1).

4. Se deben agregar las restricciones. Para ello existe un recuadro en blanco junto a tres celdillas de elección en paralelo: Add..., Change, Delete. Eligiendo la primera, Add Contraint (añadir Restricciones) aparecerá una sub-caja donde se escribe la información de cada una de las restricciones en los siguientes campos:

   - Cell Reference: Valor total utilizado por las variables en cada restricción. Debe cumplirse por tanto la restricción de desigualdad (Celdas E7, E8 y E9).
   - Contraint: Elección del signo de la desigualdad. (<=, >= y >=).
   - «Celda en blanco»: Valor del término independiente (F7, F8 y F9).

Incorporada la información necesaria se debe hacer clic en OK de la citada subcaja para que aparezca de nuevo la caja inicial de Solver Parameter, mostrando la configuración completa del problema modelizado. Es ahora imprescindible indicar al programa que se trata justamente de un problema de programación lineal. Para ello elegimos la opción Opcion y posteriormente la opción Asume Linear Model. Haciendo clic una vez más en OK se vuelve de retorno a la caja inicial de Solver Parameter, estando listo el programa para resolver el problema.

Después que el programa ha realizado una serie de cálculos debe aparecer en pantalla una caja indicando los resultados del programa Solver (Solver Results). De esta forma se indica que el programa ha resuelto el problema encontrando una solución. Para que la transferencia de los resultados del programa Solver a la hoja de cálculo pueda ser una realidad hay que verificar la opción de mantener la solución del programa (Keep the Solver Solution).

Se ha pretendido evaluar el grado de motivación y autoestima de dos grupos (de 20 y 23 alumnos) de 2.° de Bachillerato al aprender programación lineal con la ayuda de las nuevas tecnologías...

Práctica con ordenador: una motivación para el aprendizaje

Se ha pretendido evaluar el grado de motivación y autoestima de dos grupos (de 20 y 23 alumnos) de 2.° de Bachillerato al aprender programación lineal con la ayuda de las nuevas tecnologías (serán denominados a partir de ahora *grupo B*), frente a otros dos grupos (de 19 y 23 alumnos) del mismo curso (denominados a partir de ahora como *grupo A*), y perteneciente a otro instituto de la misma localidad, que aprenden el citado tema con materiales didácticos tradicionales (libro, pizarra, etc.). La dedicación docente teórica-práctica por parte de los profesores de cada grupo se fijó en 8 horas para el grupo A y (8 + 3) horas para el grupo B, estas últimas 3 horas en dedicación exclusiva para explicarles como tratar la hoja de cálculo Excel en programación lineal. Es importante notar que este último grupo tiene conocimientos de informática, estudiados al menos en una asignatura optativa de informática en la ESO y otra en Bachillerato. A continuación se les planteó a los alumnos que resolvieran dos problemas de programación lineal individualmente en forma de examen, los cuales vienen dados al final de este trabajo en un anexo y con soluciones.

El grupo que no utilizó las nuevas tecnologías, resolvió el problema de manera individual en hojas de examen. El grupo B dispuso de una sala de ordenadores, uno para cada alumno. El problema pudieron resolverlo computacionalmente con la citada hoja de cálculo y manualmente. El tiempo de examen fue para estos alumnos de 60 minutos, mientras que para el otro grupo fue de 50. El motivo de que el grupo B dispusiera de 10 minutos más fue porque los alumnos tenían la posibilidad de entregar, además del examen escrito, explicaciones referentes a los ejercicios resueltos por ordenador en el mismo papel de impresión. Los alumnos que entregaron el ejercicio en estas condiciones serán evaluados satisfactoriamente, siendo muy importante de cara a la clasificación final del curso y la puesta a punto de la Selectividad.

Los resultados generales por parte de ambos grupos vienen graficados en la figura 1.

Se contempla que el grupo A obtuvo significativamente peores resultados que en el grupo B. La media (marcada con +) en el grupo A fue de 4,46 frente a 5,35 del grupo B.

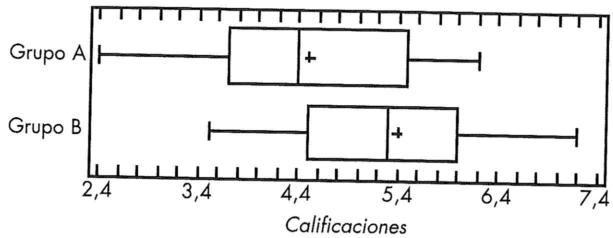


Figura 1. Resumen de las calificaciones en los grupos A y B

La otra medida de posición central (la mediana, representada por el segmento que divide a la caja) corrobora el significado de la media aritmética, dando un peso relevante en la docencia con las nuevas tecnologías. Obsérvese que la mediana en el primer caso está en torno al 4,4 frente al segundo caso que se encuentra próxima al 5,3. Nótese que las desviaciones típica fueron similares en ambos grupos (1,13 y 1,11, respectivamente). Es significativo indicar que el porcentaje de calificaciones suspensas es más alto en el grupo A. Por el contrario, en el grupo B se obtuvo un 50 % de alumnos con una calificación superior a la mediana. En cambio, esto no puede asegurarse para el grupo A. De hecho, aproximadamente un 65 % del grupo suspendieron. Es también interesante recalcar que las mejores calificaciones también fueron obtenidas por el grupo B; el 25 % obtuvieron una calificación superior o igual al 6; justamente es en torno a esta calificación la máxima obtenida en el grupo A. Por último, debemos notar la poca o ninguna existencia de notables y sobresaliente por parte de ambos grupos.

No solamente se pueden evaluar conceptos y procedimientos en una práctica de estas características, sino también hechos. La evaluación del domino adquirido adopta dos formas básicas: recordando mediante la enumeración y la selección en la tabla Excel que se dispone en una matriz, e identificando y reconociendo qué tipo de función y qué conjunto de restricciones se está tratando. «Identificar la información global y la específica de textos escritos auténticos sobre problemas reales» es ejemplo esencial de evaluación destinado a valorar el domino de ciertos hechos. La evaluación de hechos es, sin lugar a dudas, una de las prácticas más frecuentes en la actualidad, y, probablemente, será la que menos problemas plantee en el futuro. Sin embargo, es bueno tener en cuenta algo que puede tener gran importancia: no es lo mismo saber que recordar, y se recuerda la información en el mismo sentido en que ha sido enseñada. Por consiguiente, el aula de informática, el ordenador, la nueva disposición para el aprendizaje, pueden ser esenciales para captar nuevos conceptos poco motivadores de aprendizaje para nuestros estudiantes.

Los criterios de evaluación de conceptos son de distintos tipos: definiciones, comparaciones de ejemplos, aplicaciones de resolución de problemas, reconocimiento de ideas en la realidad, etc. Pero sería de desear en todos los casos que esas actividades fuesen las mismas que los alumnos y alumnas realizan para lograr el aprendizaje de los mismos conceptos. De ahí la gran importancia que suponen las nuevas herramientas de aprendizaje: las nuevas tecnologías.

La evaluación de hechos es, sin lugar a dudas, una de las prácticas más frecuentes en la actualidad, y, probablemente, será la que menos problemas plantee en el futuro.

A modo de conclusión

Prácticas como éstas tienen un cierto sentido curricular. El alumno ha de elaborar su respuesta: la tarea implica organizar los conocimientos que se poseen y expresarlos. Da pie a un estilo personal de respuesta. Permite comprobar directamente la calidad y características de la repuesta e indirectamente el tipo de operaciones y habilidades implicadas en su elaboración: no solo qué responden sino cómo han dado la respuesta y en qué actitud de trabajo individual o colectivo. Aspectos como posesión de vocabulario adecuado en los informes elaborados en el papel de impresión, capacidad para organizar la información, originalidad, creatividad, etc., pueden ser evaluados a través de esta técnica en la modalidad de visitar el laboratorio de informática. El manejo de los instrumentos informáticos, la organización del proceso de elaboración, el estilo personal, etc., son todos aspectos detectables a través de los ejercicios prácticos con ordenador.

Además, estas prácticas cumplen el doble papel de control de conocimientos y habilidades de los alumnos por un lado, y de información adicional sobre el ritmo de aprendizaje y sus incidencias (conceptos no comprendidos o mal asimilados, lagunas comunes o individuales, etc.). Abren la posibilidad de un posterior dialogo abierto en clase sobre la plausibilidad y corrección de cada una de las alternativas: por qué es correcta la correcta e incorrectas las que lo son. Es importante, además, utilizar los propios errores como material de trabajo (saber en qué ideas equivocadas se apoyan, qué matices les faltan o sobran para ser correctos, etc.).

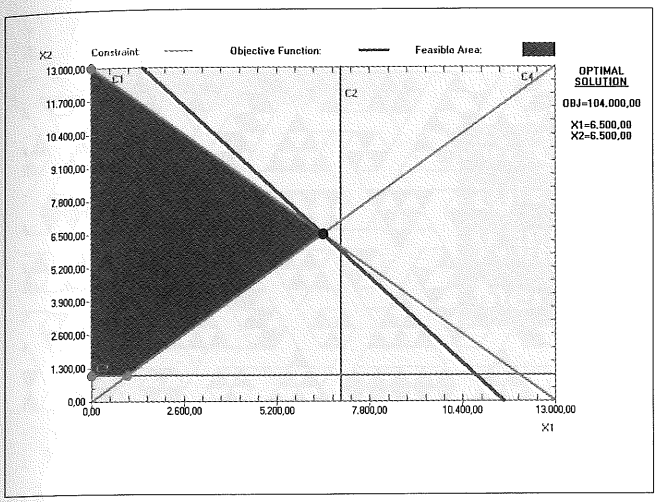


Figura 2

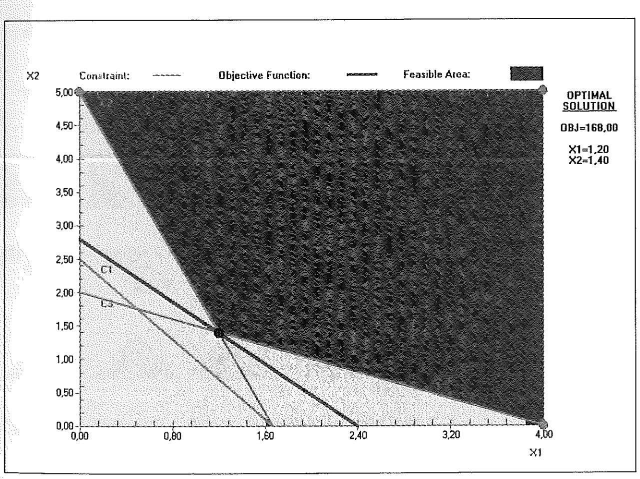


Figura 3

Juan José Prieto
IES Antonio de Nebrija.
Madrid

Anexo

Ejercicio 1

Se dispone de 13.000 euros para invertir en acciones de tipo A y B. Las del tipo A tienen un beneficio del 9 % y las del tipo B del 7 %. Se decide invertir un máximo de 7.000 euros en las de tipo A y como mínimo 1.000 euros en las de tipo B. Además, queremos que la inversión en las del tipo A sea menor o igual que la inversión en B. Se desea saber cómo se deben repartir las citadas inversiones para obtener el máximo interés.

Solución

Sean x e y los euros que invertimos en las acciones de tipo A y de tipo B, respectivamente. De la información del problema se deduce que las restricciones impuestas son:

$$x + y \leq 13.000;\ x \leq 7.000;\ y \geq 1.000;\ x \leq y;\ x \geq 0;\ y \geq 0$$

La función objetivo que se quiere maximizar es: $I(x, y) = (9/100)x + (7/100)y$

La solución se obtiene, como indica la gráfica de la figura 2, en el punto $(x, y) = (6.500; 6.500)$, cuyo valor de la función objetivo es 104.000. Nótese que los valores de los ejes de la gráfica están simplificados por 10.

Ejercicio 2

Imaginemos que las necesidades semanales mínimas, de una persona que tiene una determinada enfermedad, de unas sustancias químicas A, B y C son 5, 10 y 8 unidades, respectivamente. Una empresa farmacéutica ha realizado dos fármacos que contienen las citadas sustancias en las siguientes cantidades:

Información	*Sustancia A*	*Sustancia B*	*Sustancia C*	*Coste (kg)*
Fármaco A (kg)	3	6	2	70
Fármaco B (Kg)	2	2	4	60

Si pide el enfermo a su farmacéutico que haga un preparado semanalmente con los dos fármacos para que contengan las sustancias mínimas requeridas, ¿cuántos kilogramos de cada producto debe coger semanalmente el farmacéutico para que el enfermo tenga un coste mínimo?

Solución

Sean x e y los gramos que se requieren de los dos fármacos A y B, respectivamente.

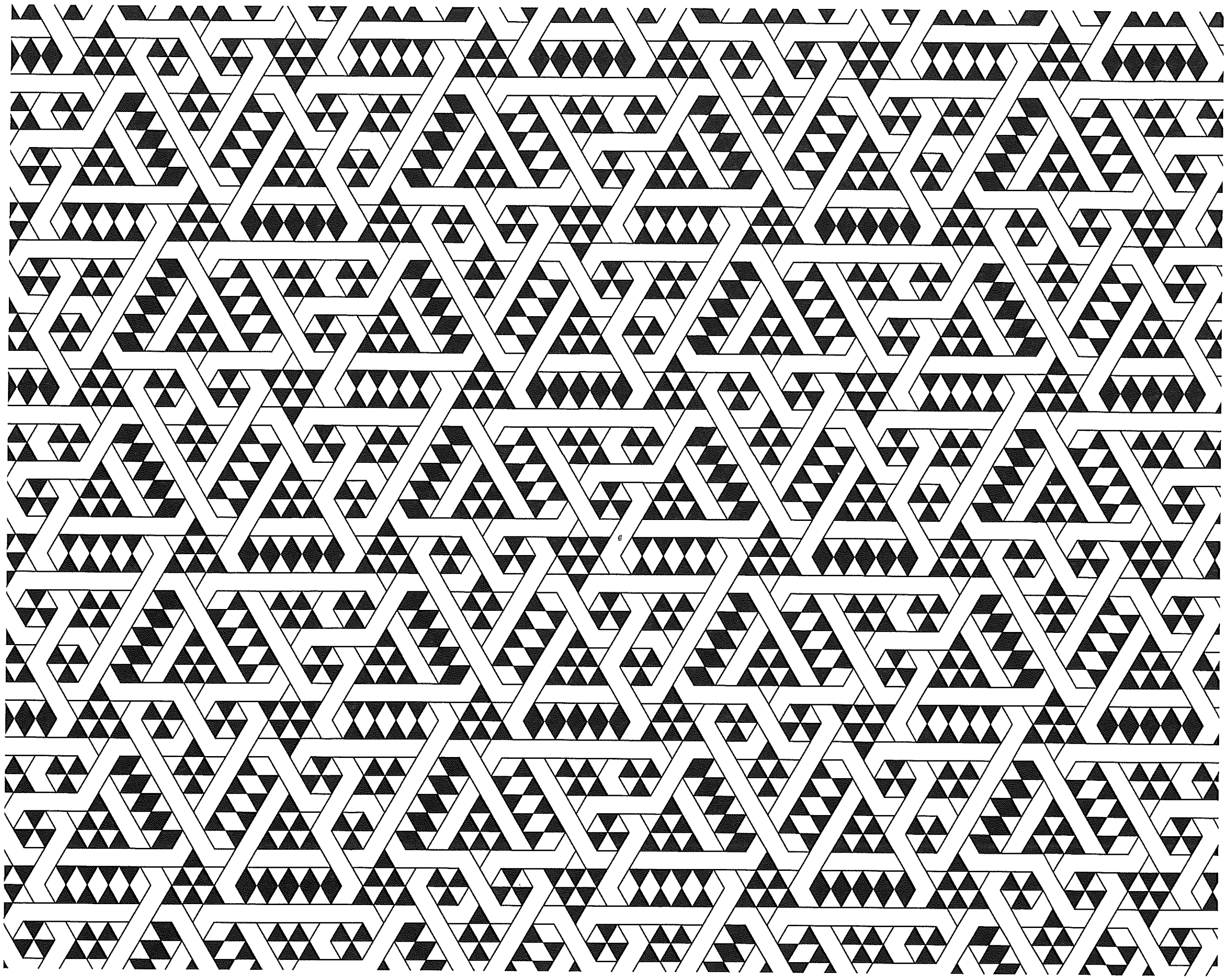
De la información del problema se deduce que las restricciones impuestas son:

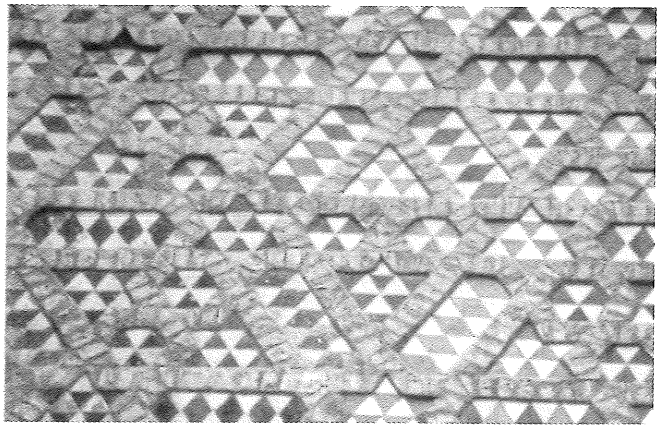
$$3x + 2y \geq 5;\ 6x+2y \geq 10;\ 2x + 4y \geq 8;\ x > 0;\ y \geq 0$$

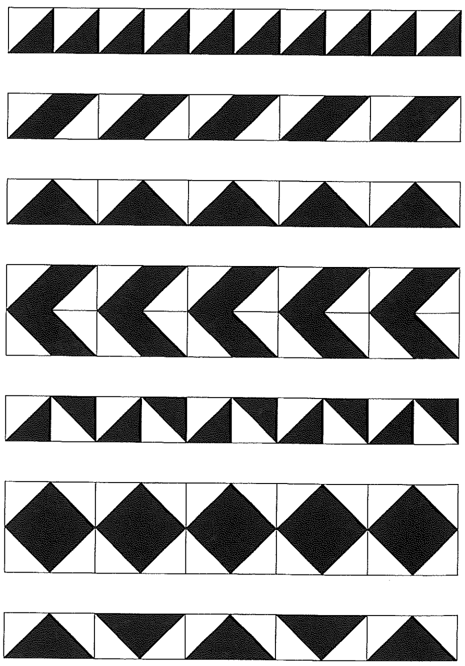
La función objetivo que se quiere minimizar es:

$$C(x, y) = 70x + 60y.$$

Como se contempla en la gráfica de la figura 3 adjunta el valor óptimo de la función es 168, la cual se minimiza para los valores (x, y)=(1,2; 1,4).







SUMA 43
junio 2003, pp. 79-86

Una visión de las Matemáticas*

José María Chamoso Sánchez
Luis M. Mulas Tavera
William B. Rawson
Mercedes Rodríguez Sánchez

UN DOCENTE preocupado por su trabajo suele mantenerse activo e inquieto para lograr la mejor forma de presentar los contenidos de su materia en el aula, utilizando los materiales adecuados y con una preparada organización. Y, para conseguirlo, las ideas pueden surgir en cualquier momento y lugar. Por ejemplo, se puede observar el entorno más inmediato para trabajar múltiples contenidos matemáticos mediante actividades de distinto nivel. Por ello se presenta una visión particular de las Matemáticas, un ejemplo de ruta matemática como recurso didáctico para utilizar con los estudiantes. Esa visión no sólo se refiere a observación, sino también a interpretación, aplicación y conexión de lo que se ve. Finalmente se exponen algunas sugerencias acerca de su aplicación en las aulas.

En este trabajo se presenta una visión particular de las Matemáticas, un ejemplo de *ruta matemática* como recurso didáctico para utilizar con los estudiantes. Esa visión no sólo se refiere a observación, sino también a interpretación, aplicación y conexión de lo que se ve. Finalmente se exponen algunas sugerencias acerca de su aplicación en las aulas.

IDEAS Y RECURSOS

Una visión de las Matemáticas del aula

Carlos se disponía a salir del Centro después de finalizar la jornada del primer día de curso. También era su primer día como docente, aunque ya había hecho varias sustituciones de forma esporádica en años anteriores. Era un joven dinámico, activo y con ganas de trabajar. Como toma de contacto, esta mañana había propuesto una tormenta de ideas a los estudiantes. Les preguntó qué les sugería la palabra «Matemáticas», con qué la asociaban y qué les recordaba. En definitiva, qué eran las Matemáticas para ellos. Las respuestas le dejaron preocupado y pensativo. La verdad es que las cosas se ven de forma distinta desde la perspectiva del docente que desde la del alumno.

---

* Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la Fundación Vicente y García Corselas.

Carlos imaginó la clase que perciben sus estudiantes:

> Las diez de la mañana y, como todos los días, es la hora de la clase de Matemáticas. Los alumnos están alborotados: no callan y no se acaban de sentar. Parece como si presintieran que los próximos minutos van a ser aburridos y pretenden retrasarlos lo más posible. La clase comienza y, como todos los días, cada estudiante abre su libro por la página correspondiente. El profesor corrige los ejercicios que mandó el día anterior y, posteriormente, explica la parte del tema que sigue a lo que se trató la última vez. Los alumnos cuchichean entre sí y cambian de postura constantemente. Una vez terminada la explicación, el docente consulta si hay alguna duda. No hay preguntas. Al parecer, todo se ha entendido perfectamente. A continuación, el profesor señala los ejercicios que están al final del apartado y, posteriormente, dice el nombre de varios estudiantes para que los hagan en la pizarra. Los demás los copian como pueden en su cuaderno. Un alumno observa que su reloj marca las diez y cincuenta y cinco. Una pequeña sonrisa se aprecia en su rostro acompañada de un suspiro de alivio. La clase está a punto de finalizar.

Carlos trató de recordar sus propias clases de Matemáticas como estudiante. Realmente sentía algo similar. Este recuerdo le impulsó a pensar en las características que tiene esa forma de enseñanza:

1. Es una manera cómoda de impartir la clase para el docente y de recibirla para el alumno.
2. Existe una única realidad presentada por el profesor con ayuda del libro de texto, que es seguido fielmente. Escasa utilización de otros materiales.
3. Los alumnos reciben el conocimiento.
4. Existe una reducida participación de los estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje, que se limita a la aplicación de la idea general presentada.
5. Se fomenta un aprendizaje memorístico, mecánico y poco significativo y, con ello, unas relaciones débiles entre los contenidos que se estudian.
6. Se consigue una mínima generalización del aprendizaje a distintos contextos y una escasa generación de nuevas ideas.
7. No motiva a la gran mayoría de los alumnos ni despierta su curiosidad por seguir aprendiendo.

Estas características pueden ser algunas de las causas por las que los estudiantes perciben las Matemáticas como algo lejano y relacionado exclusivamente con los libros de texto, y cuya única utilidad es proporcionar los contenidos suficientes para poder aprobar el examen correspondiente. ¿No se puede hacer nada para modificar esa actitud negativa de los alumnos hacia ellas? ¿Han de suponer necesariamente un aprendizaje poco atractivo y exento de funcionalidad?

Mientras Carlos caminaba reflexionando sobre estas ideas se le acercó Alicia, una compañera de Matemáticas del centro. A pesar del poco tiempo que hace desde que se conocen, ya se ha establecido una grata relación entre ellos. Carlos le contó sus inquietudes.

Estas características pueden ser algunas de las causas por las que los estudiantes perciben las Matemáticas como algo lejano y relacionado exclusivamente con los libros de texto, y cuya única utilidad es proporcionar los contenidos suficientes para poder aprobar el examen correspondiente.

Una visión de las Matemáticas en la calle

Alicia sonrió. Le explicó que existen muchos recursos que se pueden utilizar en la enseñanza de las Matemáticas, pero es necesario elegirlos según los objetivos que se pretenden alcanzar. Por ejemplo, los suyos son conseguir una clase participativa, dinámica y motivadora, además de promover que los alumnos desarrollen un aprendizaje significativo, funcional, razonado y aplicable en diferentes contextos. Otro objetivo más es mostrar a los estudiantes que las Matemáticas no se limitan exclusivamente a los libros de texto, sino que se pueden encontrar en su entorno cotidiano: sólo hay que aprender a mirar para verlas. Alicia también comentó que, para conseguirlo, realizaba *rutas matemáticas* según el trabajo de diversos autores (por ejemplo Ashworth, Cobden y Johns, 1991; Chamoso, Rawson y Rodríguez, 2000; Davies, 1995; Escreet, 1999; Pajak, 1990; Rawson, 1990; Rawson y Chamoso, 2000; Rodríguez, Chamoso y Rawson, en prensa; Rosenthal y Ampadu, 1999).

Dicho recurso didáctico consiste en utilizar el entorno real para enseñar contenidos matemáticos. Mediante una observación exhaustiva y reflexiva del contexto cercano, ya sea paseando por una calle, comprando en el supermercado o examinando un monumento, por ejemplo, se pueden entresacar contenidos matemáticos de la realidad. De esa forma se espera que el estudiante muestre interés por tales contenidos y los aprenda de manera significativa. También se pretende que intente descubrir otras Matemáticas en su entorno, extrayendo las aplicaciones que encuentre. Este modo de enseñar Matemáticas permite que el alumno sea protagonista de su propio aprendizaje y desarrolle hábitos de observación, análisis y reflexión sistemática de la realidad.

Alicia invitó a Carlos a caminar juntos por la calle en que se encontraban, por casualidad, en esos momentos: la Rua Mayor salmantina. Ambos dialogaban sobre la posibilidad de extraer, de cualquier contexto real, aplicaciones didácticas para la enseñanza en el aula de contenidos matemáticos. Para comprobarlo decidieron buscar, en esa misma calle, algunas de estas aplicaciones.

Observaron el escaparate que tenían delante (foto 1). En él se podía ver un expositor de anillos. Para localizar el más grande de todos ellos debía darse una referencia numérica que lo identificase: en la tercera fila, empezando por arriba, y en la cuarta columna, desde la izquierda. Si se hubiese tomado como origen de coordenadas el vértice inferior izquierdo del expositor, solamente habría sido necesario dar el par ordenado (4, 2) para distinguir el anillo elegido. Aunque ese par sería distinto si se considerase como origen de coordenadas el vértice superior derecho. O si lo fuese el centro del rectángulo.

Existían más actividades que podía sugerir ese expositor. Si se contaban los anillos que conformaban cada una de las 4 filas se comprobaba que eran 9. Por lo tanto, el expositor estaba compuesto por 36 anillos. Pero también se podía observar que había 9 columnas y 4 anillos por columna. También de esa forma se obtenían los 36 anillos, de modo que se verificaba la propiedad conmutativa de la multiplicación de números naturales. Para comprobar su veracidad no había más que contar los anillos de ambas formas.

¿Y si hubiese 14 columnas?

¿De cuántas formas se podrían colocar las 5 figuras?

¿Cuál es el menor número...?

Además, ¡qué buen ejemplo para explicar el concepto de multiplicación! Si en vez de 9 columnas hubiese 5, ¿cuántos anillos habría? ¿Y si hubiese 14 columnas? Estamos jugando con la tabla de multiplicación del 4, que podía ser la del 9 sin más que variar el número de filas en vez de hacerlo con las columnas. Por cierto, si imaginamos cada anillo numerado de izquierda a derecha y de arriba a abajo, ¿qué tienen en común los números de una misma columna? Estábamos recordando las peculiaridades de la multiplicación por nueve.

Detrás de ese expositor se veían cinco figuras navideñas ordenadas: María, José, el Niño Jesús, la mula y el buey. ¿De cuántas formas se podrían colocar las 5 figuras? Son variaciones de esos 5 elementos pero condicionadas por el siguiente orden: el Niño Jesús siempre ha de estar en el lugar central, la mula y el buey delante, y Jesús y María detrás. También podría considerarse la posibilidad de poner a éstos dos últimos delante y a los animales detrás. ¿Qué habría pasado si hubiese también un pastorcito? ¿Y si, además, estuviesen los tres Reyes Magos?

A la derecha del escaparate se veían unos guantes. Esto hizo recordar un problema conocido: en un cajón hay 10 calcetines negros y 10 blancos, todos sueltos; si no es posible observar el color de los calcetines, ¿cuál es el menor número de éstos que hay que sacar para garantizar que, al menos, haya 2 del mismo color? Y si, en las mismas condiciones, en el cajón hubiese 6 pares de guantes rojos y 6 pares de guantes azules, ¿cuál es el menor número de guantes que habría que extraer para garantizar que se tuviesen 2 del mismo color, uno para cada mano?

Enfrente de esta tienda se encontraba otro establecimiento que mostraba varias estrellas de cinco puntas en su parte superior (foto 2). ¡Era la famosa estrella pentagonal,

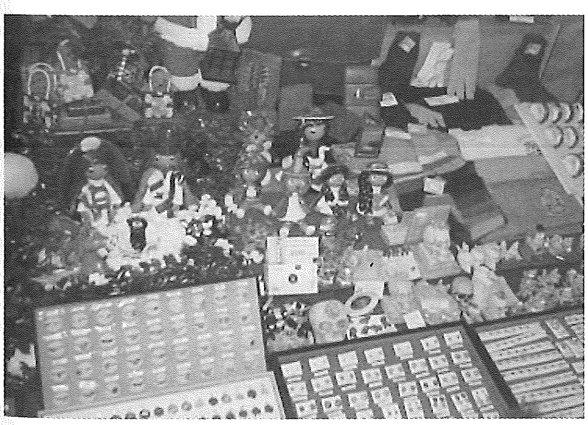


Foto 1

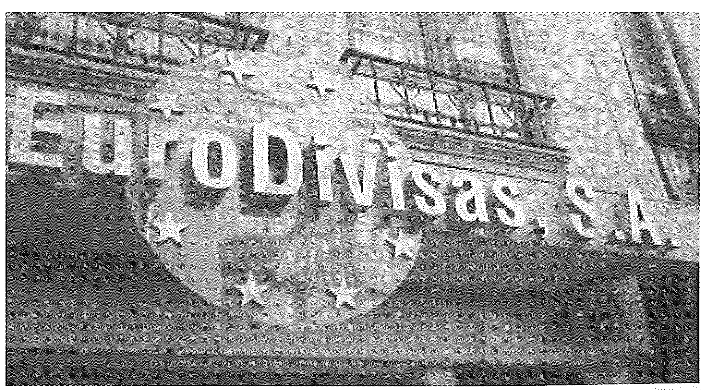


Foto 2

símbolo de los pitagóricos, aquéllos que dieron nombre al teorema más famoso de la historia! Esta figura se obtiene al trazar las cinco diagonales de un pentágono regular. Observar la estrella pitagórica sugirió calcular cuánto mide cada uno de sus ángulos. Esto se podía saber conociendo la medida de los ángulos de un polígono regular de cinco lados, cuyo valor se obtiene dividiendo el pentágono en tres triángulos y sumando sus ángulos (la suma de los ángulos de un triángulo cualquiera es un valor conocido que se puede calcular sin más que poner los ángulos uno a continuación de otro y observando lo que ocupan). También es posible hallarlo mediante la circunferencia en la que está inscrito el pentágono (por ejemplo, tomando como centro el punto de corte de las mediatrices de los segmentos que forman sus lados). De esta manera, las puntas de la estrella estarían sobre esa circunferencia y, por tanto, para calcular el ángulo que forman bastaría con calcular la mitad del arco comprendido entre sus lados.

Por cierto, si estiramos una concreta y cualquiera de las puntas de la estrella, ésta dejará de estar sobre el pentágono y decrecerá el valor de su ángulo. Se trata de un ángulo exterior a una circunferencia cuyo valor se puede calcular sin más que hallar la semidiferencia de los arcos comprendidos por sus lados. Naturalmente, variará en cada caso. Pero también se puede encoger la punta de la estrella de forma que quede un ángulo interior de la circunferencia, que también es calculable en cada caso (sería la semisuma de los arcos comprendidos por sus lados y las prolongaciones de éstos). Hasta ahora se ha pensado en estirar o encoger una de las puntas de la estrella mientras las demás permanecen sin modificar, aunque también se podría estirar una de sus puntas de forma que todas cambien de igual modo. En este último supuesto se puede estudiar el valor de la suma total de los ángulos de la estrella de cinco puntas modificada. ¿Es el mismo que el de la estrella inicial? ¿Eso ocurre en todos los casos?

El pentágono asociado a la estrella recuerda el logotipo de una cadena de televisión de una Comunidad Autónoma española (¿por qué es regular?). Parece que los puntos de corte de sus cinco diagonales forman otro pentágono, también regular, que permiten formar una nueva estrella pentagonal. Y así sucesivamente, cuantas veces se desee. Pero, además, se observan otras peculiaridades, como que cada uno de esos puntos de corte divide a la diagonal en dos segmentos distintos, de tal manera que la razón entre la diagonal completa y el mayor de los segmentos es la misma que la de éste y el segmento menor. Es la llamada «razón áurea», la misma que se repite varias veces en la fachada de la Universidad de Salamanca. Sabiendo esto, es posible calcular el área de la estrella en función del lado del pentágono.

Contiguo a este establecimiento había una librería con un suelo formado por figuras floreadas, donde los pétalos eran baldosines hexagonales (foto 3). Se observó que la primera capa estaba formada por 6 hexágonos, mientras que en la segunda había 12 (para todo ello prescindimos del hexágono central). En caso de que hubiera una tercera capa, ¿habría 18? ¿Y si hubiese cinco capas? Se trata de múltiplos de 6, es decir, de la tabla de multiplicar del 6. ¿Se puede también entender como una progresión aritmética de razón 6?

Foto 3

¿se podría encontrar un rectángulo parecido en el que el número de cuadrados del borde fuera igual al del interior?

En la entrada de la librería había un rectángulo formado por pequeños baldosines cuadrados. La línea exterior, de color más oscuro, tenía 21 cuadrados de largo y 13 de ancho. Por tanto el borde tenía 64 cuadrados. En el interior había 209. ¿Son semejantes esos rectángulos? Más todavía: ¿se podría encontrar un rectángulo parecido en el que el número de cuadrados del borde fuera igual al del interior? ¿O los lados tendrían que tener una cierta medida?

Un poco más adelante había una tienda de fotocopias en cuya cabecera se podía leer: «Fotocopias en el acto» (foto 4). Una actividad interesante sería buscar simetrías en las letras. ¿Hay alguna que tenga más de un eje de simetría? Es necesario buscar ejes adecuados. En la

Foto 4

fotografía se pueden descubrir otras letras que también permiten estudiar su simetría (se observa que el tipo de letra utilizado para la escritura condiciona su posible simetría).

De la puerta contigua a la tienda de fotocopias se podían extraer otros conceptos matemáticos. Por ejemplo, círculos concéntricos, simetrías, traslaciones y giros. También contenía una estrella hexagonal inscrita en una circunferencia, que se encontraba repetida varias veces en el balcón de esta fachada, en distinto tamaño. Esa estrella se forma con dos triángulos equiláteros en posiciones invertidas. No es difícil calcular las medidas de sus ángulos. Si se estira una de las puntas, ¿varía la suma total de los ángulos?

Se han visto estrellas de 5 y 6 puntas que han sugerido actividades matemáticas. ¿Se podría hacer lo mismo con estrellas de 7 puntas? Podemos conseguir estrellas de 7 puntas sobre una circunferencia dividida en siete partes iguales sin más que unir los vértices de tres en tres. ¿Y con otro número de puntas? ¿Se mantiene la suma de los ángulos de las puntas en todos los casos? ¿Se podría conseguir una fórmula general para las diversas estrellas?

Estas actividades confirman la utilidad que, para el estudio de las Matemáticas, pueden proporcionar objetos tan conocidos y apreciados por los alumnos como éste.

Avanzando un poco más a lo largo de la calle, Carlos y Alicia observaron varias bicicletas aparcadas frente a un edificio (foto 5). ¡Qué instrumento tan interesante para estudiar la circunferencia, sus componentes y medidas! Conocido el radio de una de sus ruedas se puede saber su perímetro o, lo que es lo mismo, se puede calcular el número de metros que avanza la bicicleta por cada vuelta completa que den sus ruedas. De igual manera, conocido el diámetro de su piñón y de su plato, es fácil hallar el espacio que recorre la bicicleta por cada vuelta completa de pedal (¿las vueltas que da el piñón son las mismas que las de la rueda?). Pero algunas de las bicicletas fotografiadas tenían varios platos y piñones, de tamaños diferentes, por lo que el avance será distinto según su combinación. Además, el armazón metálico permite estudiar la clasificación de ángulos en el plano, así como las posiciones relativas de dos rectas tanto en el plano como en el espacio. Sabiendo los diámetros de los platos y piñones de cada bicicleta se puede calcular su avance con cada combinación. Estas actividades confirman la utilidad que, para el estudio de las Matemáticas, pueden proporcionar objetos tan conocidos y apreciados por los alumnos como éste.

Foto 5

Continuando el paseo vieron a una persona que salía de un bloque de viviendas (foto 6). Es muy probable que no se diera cuenta de que la puerta que acababa de abrir podía servir, entre otras cosas, para demostrar el Teorema de Pitágoras en el caso particular de un triángulo rectángulo isósceles. No es difícil comprobar que ese triángulo es rectángulo ya que sus catetos coinciden con las semidiagonales de un cuadrado y su hipotenusa es uno de los lados de éste. Ambas diagonales dividen al cuadrado en cuatro partes iguales y, como la suma de los ángulos de todo cuadrado es 360°, cada parte forma un ángulo recto. La demostración del Teorema de Pitágoras se puede hacer considerando uno de los triángulos más pequeños

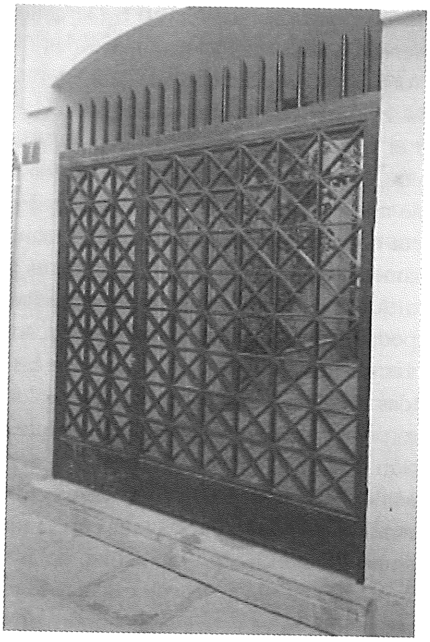


Foto 6

que se observan en la fotografía y comprobando que el área del cuadrado cuyo lado es la hipotenusa (exactamente, el formado por 4 triángulos) es lo mismo que la suma de las áreas de los dos cuadrados (uno por cateto) que tienen por lado cada cateto del mismo triángulo (un cuadrado formado por dos triángulos en cada caso). Este teorema también se puede comprobar utilizando cualquier triángulo rectángulo más grande de esa misma puerta, sin más que contar el número de triángulos. Y esa puerta puede servir para otras muchas actividades matemáticas.

Este teorema también se puede comprobar utilizando cualquier triángulo rectángulo más grande de esa misma puerta, sin más que contar el número de triángulos.

En un techo de la Casa de las Conchas se veía un mosaico formado por diversas piezas enlazadas unas con otras (foto 7). Si se observa una única fila, se puede comprobar que se necesitan 4 piezas para formar una figura, 7 piezas para dos, 10 para tres y así sucesivamente. De ahí se puede obtener un patrón. ¿Cuántas piezas serán necesarias para formar diez figuras enlazadas de una misma fila? ¿Y para otro número de figuras?

Únicamente se ha utilizado una fila, pero también se podían haber considerado dos filas de figuras. Si así fuese, sólo habría que fijarse en las figuras de dos en dos. De esta manera, para confeccionar 2 figuras necesitaríamos 7 piezas, para formar 4 harían falta 12 y así sucesivamente. ¿Qué ocurriría si se consideraran 3 filas de forma similar? ¿Y si se tuvieran en cuenta dos filas pero con diferente número de figuras cada una de ellas? De esta forma se obtendrían multitud de sucesiones cuyo término general variaría en cada caso.

Casi al final de la calle vieron una fachada con varios balcones, pertenecientes a las tres plantas de un edificio (foto 8). Se observó que dicha balconada podía servir para trabajar las fracciones: 7 de los 12 balcones que componían la fachada tenían las persianas bajadas, es decir, siete doceavos. Pero si en vez de fijarnos en los 12 balcones sólo consideramos los 8 de las dos primeras alturas, la proporción de balcones con las persianas bajadas cambia. También se pueden considerar fracciones equiva-

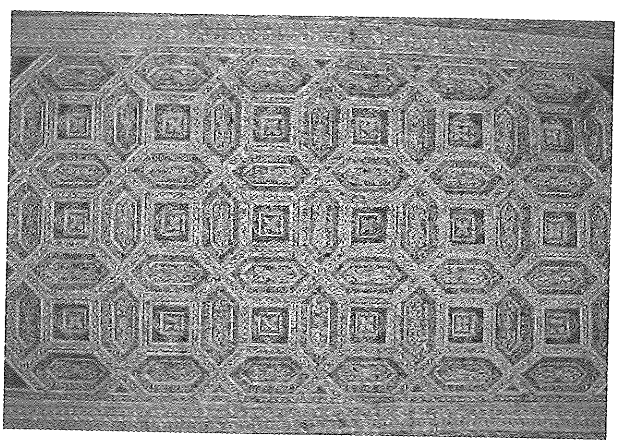


Foto 7

Foto 8

lentes sin más que fijarse en las persianas bajadas de la primera y tercera planta: son 4/8 o 1/2 según se considere el número de ventanas o toda la planta completa.

Al llegar a este punto, Carlos se encontraba mucho más animado. Habían surgido actividades muy diversas y de niveles muy diferentes: geométricas, numéricas, de medida, estadísticas... Agradeció a su compañera sus sugerencias y su estímulo, y mostró interés en repetir la experiencia para seguir dialogando acerca de esta forma de ver las Matemáticas. Por fin, ambos compañeros se despidieron.

Una visión de la experiencia

Carlos nunca había hablado sobre Matemáticas como lo hizo en este paseo, ni las había percibido de una forma tan directa y real. La verdad es que le causó una buena sensación. De toda la ruta matemática, lo que más le llamó la atención fue el enriquecedor diálogo que mantuvo con su compañera durante el recorrido. Pensó acerca de la posibilidad de trabajar las Matemáticas en sus clases de esta manera. Por ejemplo, podría llevar fotografías o vídeos que sugirieran actividades matemáticas para analizarlos con sus alumnos. Le gustaría descubrir su reacción ante esas actividades, es decir, cómo encajarían la idea, cómo se organizarían para adaptarla y cómo dialogarían entre ellos. Quizás esto les ayudaría a aprender mejor. Este material, por su carácter cercano, podría ofrecer un conocimiento más concreto sobre los diversos contenidos.

De igual manera, también consideró la posibilidad de organizar rutas matemáticas con sus estudiantes para estudiar diferentes conocimientos matemáticos fuera del aula, en la propia realidad. Podría aprovechar estas salidas para introducir nuevos contenidos gracias a la variedad de recursos que proporciona el entorno. También podría servir para que afianzaran aprendizajes ya adquiridos y, por tanto, favorecer su generalización a diferentes contextos y realidades. Si esto fuera posible, la estrategia de enseñar y aprender Matemáticas utilizando el entorno real más inmediato se convertiría en un recurso pedagógico de gran interés que los docentes deberían considerar. Los estudiantes dispondrían de múltiples ejemplos sobre la realidad para un mismo contenido, primeramente ofrecidos por su profesor y, después, descubiertos por ellos mismos. Así se facilitaría su comprensión y su aplicación de diferentes maneras, y se incrementaría su interés y motivación.

Este planteamiento llevó a Carlos a especular que, para que esa forma de trabajar con los alumnos fuese realmente productiva, debería ir acompañada de un trabajo previo y otro posterior en el aula. Sería necesario profundizar en el aprendizaje derivado de estas actividades a través del análisis, el razonamiento y la reflexión posterior. Además, el docente debería planificar cuidadosamente sus salidas. En primer lugar, tendría que decidir el recorrido: una calle, un supermercado o el propio recinto escolar. También sería importante tener claramente fijado el objetivo de la ruta para lo cual, en esos momentos, consideraba tres posibilidades: observar algunos detalles concretados de antemano, buscar aspectos relacionados con un tema o considerar válido cualquier contenido matemático. Todas estas decisiones concretas que el profesor tendría que tomar estarían condicionadas por dos aspectos básicos: el desarrollo evolutivo de los alumnos y su nivel de conocimientos previos. Según fueran las características de ambos condicionantes, así sería la complejidad de los contenidos que se trataría de estudiar (Rawson, 1990; Rawson y Chamoso, 2000).

Pero, durante esta reflexión, una duda le vino a la mente a Carlos: ¿los estudiantes serían capaces de extraer aplicaciones matemáticas del entorno? Era consciente de la dificultad que entrañaba ese proceso. Por este motivo pensó en la importancia que la mediación del profesor tendría para el éxito de una actividad de estas características. Su trabajo debería consistir principalmente en sugerir ejemplos y orientar las observaciones de los alumnos. El valor de esa mediación sería mayor cuanto menos habituados estuviesen los estudiantes a esta dinámica de trabajo. Inicialmente podría resultar difícil descubrir Matemáticas en el entorno, pero esta capacidad se desarrollaría progresivamente con la práctica.

Inicialmente podría resultar difícil descubrir Matemáticas en el entorno, pero esta capacidad se desarrollaría progresivamente con la práctica.

Al mismo tiempo, Carlos imaginaba las posibilidades de esa metodología para promover aprendizajes grupales entre sus alumnos. Si las actividades anteriores se hicieran en equipos de trabajo, se estaría desarrollando una dinámica de aprendizaje cooperativo que favorecería un continuo intercambio de ideas y razonamientos entre los componentes de cada grupo.

Conclusiones

La enseñanza de las Matemáticas se puede realizar de formas muy diferentes dependiendo de múltiples factores: por ejemplo, de los objetivos de la enseñanza, del grado de implicación docente, de la formación de éste y de sus deseos de innovar. Tradicionalmente las Matemáticas se han concebido como un objeto definido que hay que dominar. En cambio, en la actualidad se entienden más como una forma de pensamiento abierta, con margen a la creatividad, y respetando el ritmo y la autonomía de cada persona. Parece que, de esta última manera, se estimula la imaginación y el razonamiento propio, y se permite la multiplicidad de ideas. Es decir, se considera que no existe sólo una realidad ni un único camino para resolver los problemas.

No se puede olvidar que un trabajo en ese sentido exige un gran esfuerzo del profesor, que actúa como mediador entre el alumno y su aprendizaje pero dejando al primero el protagonismo del mismo. Para ello, parece adecuado que el aprendizaje se realice desde diversos contextos y compaginando diferentes recursos didácticos, con el fin de que sea más significativo, funcional y duradero. Quizás haya que tener en cuenta el entorno para la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas y, de esa forma, se pueda mejorar la actitud de los estudiantes hacia las mismas.

José María Chamoso
Facultad de Educación
Universidad de Salamanca
Sociedad Castellano-Leonesa
de Profesores de Matemáticas
Luis M. Mulas
Fundación Vicente y García
Coreselas
Universidad de Salamanca
William B. Rawson
School of Education
University of Exeter
Mercedes Rodríguez
EU Magisterio. Zamora
Universidad de Salamanca
Sociedad Castellano-Leonesa
de Profesores de Matemáticas

Referencias bibliográficas

ASHWORTH, F., D. COBDEN y J. JOHNS (1991): «Maths Trailing in Dorset», *Mathematics in School,* n.° 20, 1, 2-7.

CHAMOSO, J.M.ª, W.B. RAWSON y M. RODRÍGUEZ, (2000): «Conocimiento de Toro, utilizando sus cifras en el aula de Matemáticas», *Aula,* n.° 9/1997, 421-436.

DAVIES, L. (1995): «Starting Points from Mathematics Trails», *Mathematics in School,* n.º 24, 1, 9-11.

ESCREET, C. (1999): «The maths and science fun trail at Appleby Castle», *School Science Review,* n.° 80, 293, 102-108.

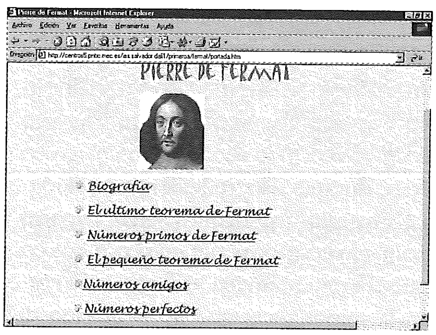
PAJAK, J. (1990): «The Stamford Mathematics Trial», *Mathematics in School,* n.° 19, 1, 36-38.

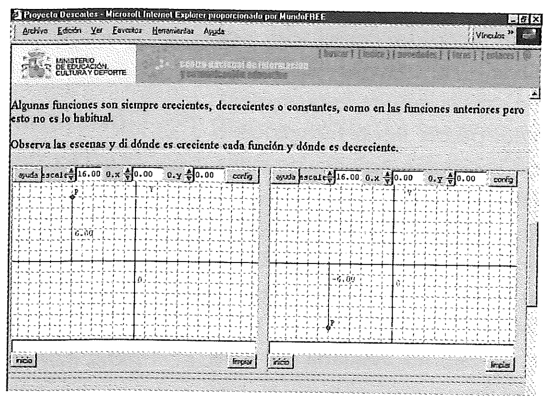
RAWSON, W.B. (1990): «Trails on Trial», *Mathematics in School,* marzo 1990.

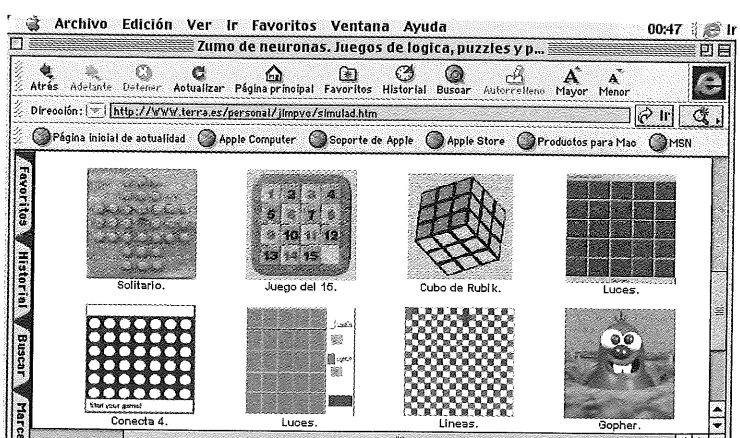
RAWSON, W.B., y J.M.ª CHAMOSO (2000): «Ruta Matemática en Toro», *Actas V Seminario Regional Castellano-Leonés de Educación Matemática,* sept. 98, Toro, 259-271.

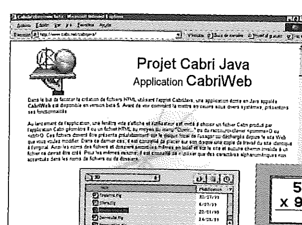
RODRÍGUEZ, M., J. M.ª CHAMOSO y W. B. RAWSON (2002): «Tres profesores de Matemáticas en el supermercado», *Suma,* n.° 39, 83-93.

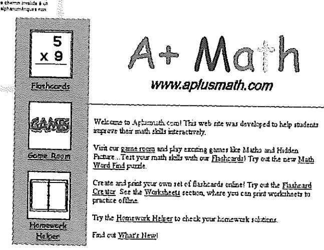
ROSENTHAL, M. M., y C. K. AMPADU, (1999): «Making Mathematics Real: The Boston Math Trail», *Mathematics Teaching in the Middle School,* n.° 5, 3, 140-147.











SUMA 43
junio 2003, pp. 87-88

Si ocho millones de personas...

Carmen González Martí

IDEAS Y RECURSOS

Se describe el proceso de investigación del alumnado al estudiar la veracidad de la frase «Si ocho mil millones de personas se ahogaran en el Mediterráneo, el nivel del agua subiría una décima de milímetro». Aparecen el orden en que razonan, los preconceptos erróneos, y algunas indicaciones que pueden guiar a quien quisiera llevar a cabo la experiencia.

LA SIGUIENTE actividad persigue que el alumnado se enfrente con un problema abierto, viéndose obligado a diseñar una estrategia y llevarla efectivamente a cabo, en un marco relativamente interdisciplinar. Surgirá la necesidad de utilizar determinados procedimientos matemáticos como herramienta ineludible para llevar a cabo la tarea. Todo ello bajo la supervisión constante del *sentido común*.

Planteamiento

> Si ocho mil millones de personas se ahogaran en el Mediterráneo, el nivel de agua subiría una décima de milímetro.

La cita pertenece a la novela *El primer siglo después de Béatrice* de Amin Maalouf (Alianza: 106). Voy a intentar exponer un aprovechamiento didáctico de la misma en un grupo de 3.° de ESO.

Primeras preguntas

¿Es cierto? ¿Tú qué crees? ¿Por qué?

Se invita a la clase, dividida en grupos pequeños, a señalar por escrito dos o tres comentarios con las primeras impresiones. Luego se leen en voz alta. Todos los grupos señalan que la afirmación es falsa. No lo justifican. Otros comentarios: *no hay ocho mil millones de personas, no se puede saber, no se podría medir.*

¿Cómo podríamos comprobarlo?

Los grupos se ponen de nuevo a trabajar. Se les anima a detallar el proceso a seguir, a estudiar su viabilidad, sin perder de vista el objetivo, a saber, valorar la veracidad de la cita.

Se acuerda, para empezar, calcular el volumen de una persona.

¿Qué volumen ocupa una persona?

Arquímedes no tarda en aparecer. *Se llena una bañera, me meto dentro, recojo el agua desbordada...* Como idea no está mal, pero su puesta en práctica echa para atrás a cualquiera con una mínima experiencia en el uso de la fregona.

¡Eureka! *Para conocer el volumen bastaría con dividir el peso medio de una persona por la densidad del cuerpo humano.* «Si tuviésemos patatas fritas, podríamos comer huevos con patatas,... si tuviésemos huevos» porque, ¿cuál es la densidad del cuerpo humano? En este punto, podríamos echar mano de la enciclopedia, pero el problema puede ser ordeñado más aún.

Se mete un muñeco hueco en un barreño... (y otra vez Arquímedes). La logística es desde luego más llevadera. La razón r entre la talla de un adulto y la del muñeco es fácil de hallar. «Sólo» queda convencer al público de que debemos multiplicar el volumen del muñeco por r^3 y no por r (con ánimo de incordiar: la semejanza entre un bebé y el muñeco es clara, pero, ¿es extrapolable a adultos?).

Todos los grupos han seguido un enfoque directo: calcular el volumen ocupado por una persona, para luego saber el correspondiente a los ocho mil millones de ahogados. Se les hace ver que el Mediterráneo no ha aparecido por ningún sitio y se guía el debate hasta la siguiente pregunta:

¿Qué volumen supone un aumento de 0,1 mm del nivel de agua del Mare Nostrum?

La profundidad del mar aparece inmediatamente, y cuesta bastante llegar a reconocer que es irrelevante. También se habla del perímetro y de la densidad del agua salada. Por fin llegamos a la superficie. Conocida la superficie de nuestro mar (3.081.850 km^2 según el Espasa), «sólo» toca pelear los cambios de unidad para llegar a $3{,}082 \cdot 10^{11}$ dm^3 que, divididos por los ocho mil millones de personas, arrojan un no muy claro 38,5 dm^3 por habitante. ¿Y ahora, qué?

¿Es razonable?

¿Abultas tú casi como 40 litros? Se calculan las medidas de un prisma o un cilindro con ese volumen y altura, digamos que 1,6 m (¿cuál es la altura media de las personas?) En el caso del prisma, se obtiene una base cuadrada de unos 15 cm de lado. ¡Es verosímil!

Conclusión

Con la excusa de Amin Maalouf, hemos mareado la notación científica, el cambio de unidades, las razones de semejanza, la estimación y comparación de áreas y volúmenes, y la enciclopedia; se han explorado y contrastado diferentes estrategias para abordar el problema, hemos hecho protocolos y los hemos puesto en práctica, han salido a la luz preconceptos erróneos, hemos discutido mucho... y además ahora *sabemos* que si ocho mil millones de personas se hundieran en el Mediterráneo...

Carmen González
IES La Serna
Fuenlabrada (Madrid).
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»

SUMA 43
junio 2003, pp. 89-90

¿A qué apuestas?

M.ª del Carmen Yélamo Blanco
M.ª Magdalena Yélamo Blanco

IDEAS Y RECURSOS

En este trabajo se presenta un juego que sirve para introducir y trabajar el concepto de probabilidad. Puede utilizarse en alumnos que no conozcan dicho concepto, basándose en la noción intuitiva de probabilidad, o bien, en aquellos alumnos que sí sepan calcular las probabilidades de los sucesos que aparecen en el juego.

EL JUEGO *¿A qué apuestas?* es un instrumento para introducir y practicar el concepto de probabilidad. Es un juego para dos jugadores.

Material necesario

Por cada par de jugadores, se necesita:

- Un tablero.
- Una baraja de cartas *¿A qué apuestas?*
- Un par de fichas de distinto color.
- Un par de dados cúbicos blancos.
- Un par de dados cúbicos de colores distintos.
- Un dado dodecaédrico.
- Una moneda.
- Una baraja de cartas española (40 cartas).

Reglas del juego

- Antes de empezar el juego, se barajan las cartas *¿A qué apuestas?*
- Se establece un turno de jugadores, empezando por el que tenga mayor puntuación al lanzar su dado blanco.
- El jugador que empieza el turno, tira su dado blanco y, a continuación, extrae una carta de la baraja *¿A qué apuestas?*, la lee y apuesta a uno de los dos sucesos que en ella se describen. El otro jugador apuesta obligartoriamente al otro suceso.
- El jugador realiza el experimento a que se refiere la carta elegida (lanzar un dado cúbico, lanzar un dado dodecaédrico, lanzar dos dados distintos, extraer una carta de una baraja española o lanzar una moneda tres veces consecutivas).
- Si el suceso al que apostó se verifica, avanza con su ficha el número de casillas indicado por su dado blanco.

- Si se cumple el otro suceso, el otro jugador avanza con su ficha un lugar, si en el dado se obtuvo 1, 2 o 3; dos lugares si se obtuvo 4 o 5; y tres lugares si se consiguió un 6.
- Si en la primera realización del experimento no se dan ninguno de los dos sucesos (los sucesos no son necesariamente complementarios), éste se repetirá hasta que ocurran uno de los dos.
- Acaba el turno del jugador, apartando la carta elegida a otro montón.
- Gana el jugador que antes consigue llegar a la meta.
- Si las cartas a extraer se acaban antes de llegar a la meta, se vuelven a barajar y se continúa el juego.

Observaciones

1. Este juego se enmarca en el aprendizaje del concepto de probabilidad. Concretamente en el cálculo de probabilidades de sucesos con la regla de Laplace. Se han considerado, por lo tanto, experimentos cuyos posibles resultados son todos equiprobables: lanzamiento de un dado cúbico, lanzamiento de un dado dodecaédrico, lanzamiento de dos dados cúbicos de distinto color, lanzamiento de una moneda tres veces consecutivas y extracción de una carta de una baraja española.
2. El objetivo es que el alumno aprenda a contar cuántos resultados posibles tiene un experimento y cuántos resultados son favorables al suceso cuya probabilidad queremos hallar.
3. Nivel: 2.º de ESO.
4. Debido a lo intuitivo del concepto, este juego puede llevarse a cabo antes de que el alumno conozca formalmente la regla de Laplace, y como introducción a ella. Pero quizás resulte más provechoso si se pone en práctica durante o al final del desarrollo de la unidad didáctica, después de haber trabajado algunos espacios muestrales presentes en el juego y que pueden resultarles de más dificultad, como los relativos al experimento del lanzamiento de dos dados distintos y al del lanzamiento de una moneda tres veces consecutivas.
5. Con el juego también se pone de manifiesto el concepto de probabilidad, de manera, que, aunque un jugador apostase siempre adecuadamente al suceso de más probabilidad y su compañero al de menos, podría perder, porque está presente el componente azar: que sea más probable no significa que vaya a ocurrir con seguridad. Esto ayuda a que no se desmotiven los alumnos menos aventajados, puesto que aunque se falle con cierta frecuencia al considerar el suceso más probable, es posible ganar.
6. El juego ayuda a repasar conceptos de divisibilidad como los de: número primo, número compuesto, divisor y múltiplo.
7. Se trabajan también el significado de algunas expresiones, que los alumnos de estos niveles no tienen suficientemente claras como: «al menos», «como mucho»,...

Las cartas

Algunos ejemplos de cartas son[1]:

En el lanzamiento de un dado cúbico:

¿A qué apuestas?

1. Salir al menos un 4
2. Salir un múltiplo de 3

En el lanzamiento de un dado dodecaédrico:

¿A qué apuestas?

1. Sacar un divisor de 42
2. Sacar un múltiplo de 4

En la extracción de una carta de una baraja española (40 cartas):

¿A qué apuestas?

1. Sacar bastos
2. Sacar figura

En el lanzamiento de dos dados cúbicos distintos:

¿A qué apuestas?

1. Sacar al menos un 3
2. Sacar doble

En el lanzamiento de una moneda tres veces consecutivas:

¿A qué apuestas?

1. Sacar un número impar de cruces
2. Sacar exactamente dos caras

El tablero

Puede servir cualquier tipo de tablero que tenga una salida y una meta como la oca o el parchís. Se recomienda que por cada carta haya aproximadamente dos casillas en el tablero.

Puede ocurrir que haya que barajar el mazo de cartas varias veces antes de finalizar una partida. Esto no es ningún inconveniente puesto que los experimentos son aleatorios. Más aún, es ventajoso pues ayuda al alumno a conocer mejor los sucesos descritos en las cartas y a corregir errores cometidos en turnos anteriores.

[1] Si desea utilizar este juego, ponemos a su disposición nuestro juego de cartas. Contacte con nosotros en: mmyybb@netcourrier.com

M.ª del Carmen Yélamo
IES La Campiña.
Guadalcacín.
Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»
M.ª Magdalena Yélamo
IES Andrés Benítez.
Jeréz de la Frontera.
Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»

SUMA 43
junio 2003, pp. 91-93

Pitágoras desde el círculo

Miquel Albertí Palmer

LAS VISUALIZACIONES del teorema de Pitágoras se basan en una comprobación del resultado haciendo encajar las piezas de un pequeño rompecabezas que se obtienen de partir en pedazos un cuadrado. Por ejemplo así:

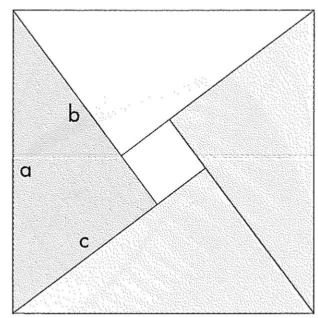


Figura 1

¿Por qué no se muestra nunca una visualización del teorema que tenga que ver con el círculo? ¿Es que no la hay?

Encuadrando

Podemos hacer el primer intento de encontrarla pensando en la figura 1. En ella se ven dos cuadrados, uno dentro de otro, de manera que el espacio que media entre ellos es una corona cuadrada. Si cambiamos ambos cuadrados por círculos obtendremos una corona circular. Copiando el proceder anterior se trataría ahora de partir esta corona en cuatro partes iguales y deducir el teorema a partir de sus áreas. Evidentemente puede hacerse esto de innumerables formas, pero la más sencilla y parecida al caso del cuadrado consistirá en trazar desde cuatro puntos equidistantes de la circunferencia exterior sendos segmentos a cuatro puntos también equidistantes de la circunferencia inte-

Cualquier prueba del teorema de Pitágoras se asocia siempre a un cuadrado. ¿No habrá alguna forma de ver el teorema a partir del círculo? Pues sí.

MISCELÁNEA

rior. Así la corona quedaría dividida en cuatro partes idénticas, pero si nos fijamos bien en la corona cuadrada nos daremos cuenta de que los segmentos que unen los cuadrados son tangentes a sus lados. Hagámoslo igual:

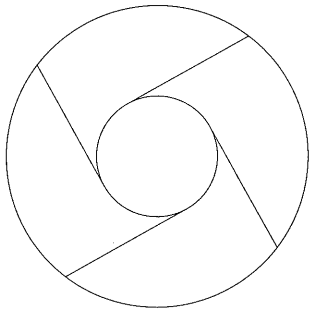


Figura 2

Dichos segmentos tangentes a la circunferencia interior tienen una relación especial con las circunferencias que forman la corona. Para verla señalemos también los radios de cada circunferencia:

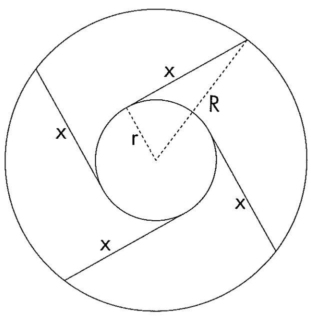


Figura 3

El triángulo rRx que aparece es rectángulo: r y x son perpendiculares puesto que x es tangente a la circunferencia pequeña. El área del círculo mayor es $A = \pi R^2$, y la del pequeño $a = \pi r^2$. Por tanto, el área de la corona será:

$$C = A - a = \pi(R^2 - r^2) = \pi x^2$$

Esta última igualdad se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras. Pero lo que yo quiero es precisamente lo contrario, ver el teorema en lugar de aplicarlo. Esto quiere decir que debería ser capaz de «ver» en el diseño de la figura 3 que el área de la corona circular es πx^2. Si lo consigo podré razonar así:

- El área de la corona es πx^2.
- Las áreas de los círculos son πR^2 y πr^2 respectivamente.
- Puesto que $C = A - a$, será: $\pi x^2 = \pi R^2 - \pi r^2$.
- Luego tenemos el teorema: ¡¡ $R^2 = x^2 + r^2$!!

Circulando

¿Y puede verse esto? ¡Veámoslo!

El cuadrado es estático, el círculo no. Mirando una circunferencia no podemos decir si se está quieta o gira alrededor de su centro. De hecho, una circunferencia se dibuja mediante un giro, movimiento que constituye su esencia. Por eso quizá no vayamos mal encaminados si enfocamos la búsqueda de una visualización circular del teorema de Pitágoras en este sentido.

Con este objetivo trazo ahora en la corona tres segmentos x, y, z que unan ambas circunferencias, pero que formen diferentes ángulos con la interior (x, tangente; y, perpendicular; z, ni lo uno ni lo otro) y la hago girar alrededor del centro común P:

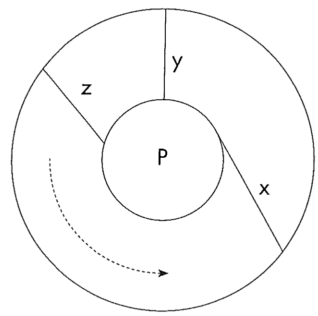


Figura 4

Al girar, x, y, z barren un área. Pero así como z e y la barren tanto por el hecho de girar como por el de trasladarse, en cambio x sólo barre área en razón de su giro ya que es tangente a la circunferencia interior. ¿Qué sucede al pintar con un pincel? Cuanto mayor es el ángulo que forma el pincel con el desplazamiento más grueso se pinta:

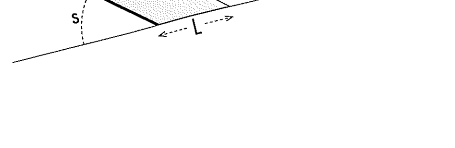


Figura 5

Una vez se ha trasladado una distancia L, el pincel o segmento M barre un área $A= L{\cdot}M{\cdot}\sin s$, el área del paralelogramo de ángulo s y lados M y L. En cambio, N barre un área nula como el ángulo que forma con la trayectoria. Si ésta no es rectilínea un pincel tangente a ella sólo pintará por el hecho de girar, no por trasladarse. Lo mismo le sucede a x, que gira como si todo el círculo interior fuera el centro ingente de su giro. ¿Y qué área describe un segmento al girar alrededor de un punto? ¡La del círculo que lo tiene por radio!:

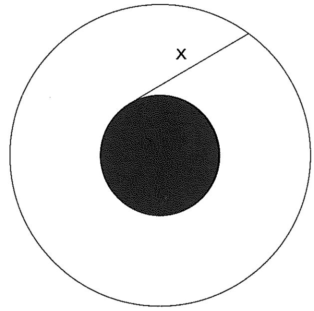
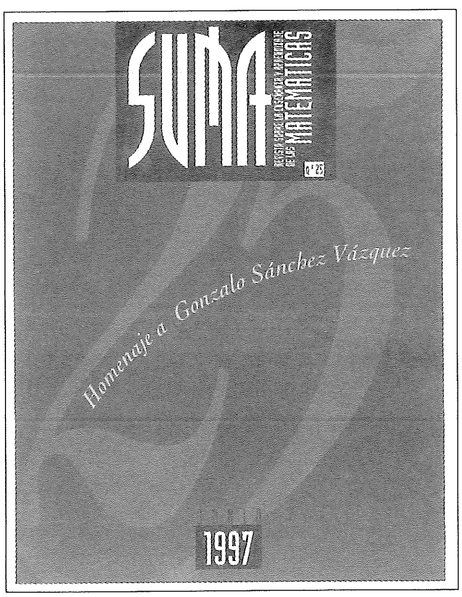
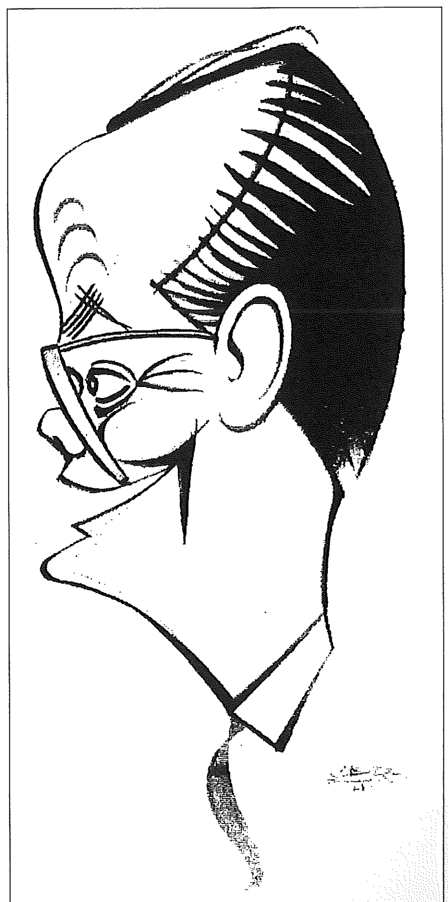


Figura 6

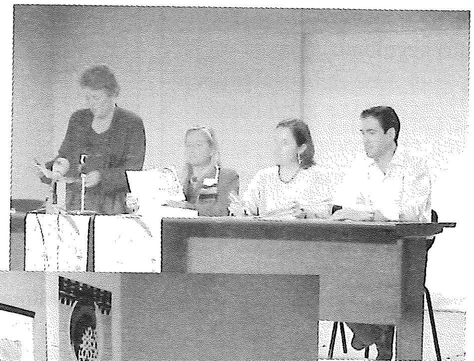
¡Lo veo! El área de la corona es $C = \pi x^2$ y de ahí se deduce el teorema de Pitágoras.

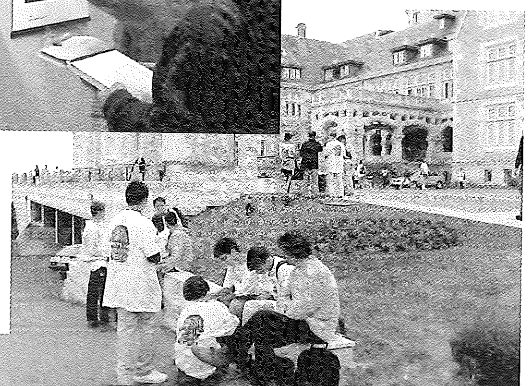
Miquel Albertí
IES Pau Vila
Sabadell (Barcelona).
Federació d'Entitats
per l'Ensenyament de les
Matemàtiques a Catalunya

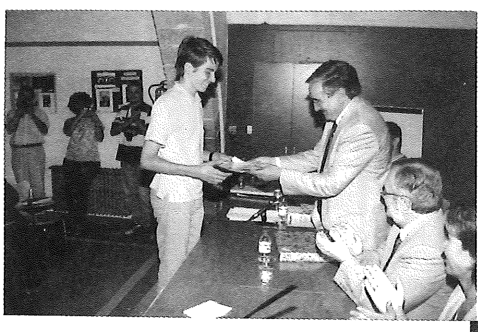





Las matemáticas
también tienen
historia







SUMA 43
junio 2003, pp. 95-101

¡Más teatro y menos matemáticas!

Ismael Roldán Castro
José Muñoz Santonja

MISCELÁNEA

Llevamos años utilizando los medios de comunicación en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Secundaria y Bachillerato. Desde el año 2000 investigamos especialmente el teatro como medio no convencional, aunque muy eficaz en los procesos aludidos. En este artículo se narran experiencias con espectáculos de teatro matemático realizadas con gran éxito ante públicos heterogéneos. Pensamos que las matemáticas pueden y deben emocionar a los espectadores no sólo en la vertiente formal de sus contenidos, sino también en la estética, sin olvidar los ingredientes esenciales de fantasía y humor.

EL TEATRO como recurso educativo

El teatro es fascinación. ¿Quién de nosotros no ha quedado atrapado en una historia teatralizada cuando hemos sido pequeños? Además hemos entrado en la trama que se nos narraba, gritando, llorando, aplaudiendo... según fuese la ocasión. Desde nuestra más tierna infancia hemos formado parte de la narración realizada por títeres, payasos, mimos, actores en general y nos hemos dejado arrastrar por el hilo argumental que éstos han hecho desfilar delante de nuestros ojos.

Esa capacidad de fascinación que posee el teatro lo convierte en un recurso muy eficaz en el campo educativo. Las posibilidades didácticas del teatro abarcan muchos aspectos y situaciones. Se pueden aprender a partir de una representación escénica comportamientos, actitudes y, a veces, conceptos y procedimientos. Es posible conocer épocas históricas, aprender habilidades sociales que nos permitan relacionarnos correctamente en sociedad, reforzar conceptos (como por ejemplo en las obras que se realizan en algún idioma extranjero que estén estudiando nuestros alumnos) y atender a muchos aspectos transversales de la enseñanza, como la coeducación, la educación en valores, el respeto medioambiental, la solidaridad con otras culturas, etc.

En muchos centros educativos existe una larga tradición de obras teatrales realizadas por los alumnos, lo que tiene una vertiente aún más positiva, pues las personas que participan en la realización de un montaje teatral desarrollan unas relaciones personales muy positivas, al tener que trabajar en un proceso costoso pero gratificante, como es una obra de teatro. Existen incluso concursos para grupos teatrales del alumnado de secundaria.

Hay gran cantidad de obras que se pueden escenificar en relación con multitud de materias. Por supuesto, el abanico más amplio de posibilidades serían las propias obras teatrales de la literatura, que permiten a los alumnos conocer esas obras maestras a través del trabajo de actores profesionales, o de los propios alumnos. También es muy corriente encontrar algunas obras en inglés o en francés, tradición que ya empieza en algunos colegios de primaria, donde en las fiestas de final de curso o en las semanas culturales, hay pequeñas obras preparadas por alumnos en los idiomas que están estudiando. Otro gran bloque de obras son escenificaciones de situaciones de actualidad (el tema de la inmigración, la llegada del euro, la violencia contra las mujeres, etc.) que permiten trabajar esos problemas posteriormente en clase. También existen obras que presentan la invención de grandes avances científicos o situaciones históricas importantes, y en este caso merecen especial interés aquellas que recrean aspectos de la cultura clásica, utilizándose incluso el latín o el griego en su puesta en escena.

Especial mención merece la figura de Carl Djerassi, catedrático de química y prestigioso científico que cambió el mundo cuando sólo contaba veintipocos años con el anticonceptivo oral o «píldora» como se hizo famosa. Ahora, con cerca de los setenta años, rico y famoso, progresa en una nueva carrera intelectual esta vez literaria. Define su nueva tarea como ciencia en la ficción subrayando que no es ciencia ficción. Escribe novelas y obras de teatro que utilizan la ciencia verdadera para informar al público y sus libros constituyen una estimulante lectura.

El teatro y las matemáticas

Como no podía ser menos, las matemáticas también tienen su pequeña parcela en el teatro. Aunque pueda parecer imposible, dado el halo de irracionalidad y abstracción que rodea a esta materia, también las matemáticas pueden ser escenificadas.

Nuestra experiencia nos indica que el teatro es un poderoso recurso para la didáctica y la divulgación de las matemáticas. Especialmente, por la capacidad de asombrar al poner en escena conceptos que se consideran abstractos, de atraer la atención y de motivar el interés del espectador, se convierte en una herramienta muy valiosa en nuestra materia.

Como contaba en una conferencia nuestro querido Claudi Alsina, todos los profesores tenemos algo de actores, pues cuando planteamos un problema y preguntamos inocentemente cuál será la forma de abordarlo, estamos haciendo teatro, ya que nosotros conocemos de sobra cómo desarrollarlo y cuál es la solución. Incluso debemos ser unos buenos actores, pues no es raro que tengamos que repetir la misma función en el mismo día, pero para espectadores distintos.

...todos los profesores tenemos algo de actores, pues cuando planteamos un problema y preguntamos inocentemente cuál será la forma de abordarlo, estamos haciendo teatro...

Hay muchos aspectos matemáticos que permiten ser teatralizados. Quizás el más evidente, y por eso más desarrollado, es el escenificar la vida y presentar la obra de algún famoso matemático. No sólo en nuestro país, sino en muchos otros países (Portugal, Italia, Argentina...) conocemos experiencias realizadas en centros educativos, donde los alumnos han preparado montajes sobre algún matemático, lo que les ha permitido explicar los conocimientos matemáticos de su época y las principales aportaciones a la ciencia de esos personajes.

También es posible encontrar ejemplos de montajes, donde se presentan aspectos matemáticos importantes para la vida cotidiana. Por ejemplo, la necesidad de unas unidades de medida comunes, o las dificultades del cambio al euro.

Pero lo que puede ser más difícil de concebir es que haya elementos matemáticos que puedan ser escenificados. Sin embargo, nosotros pensamos que, salvando las distancias, tan irreales pueden ser Macbeth o Romeo y Julieta como una potencia o una función.

En la literatura es posible encontrar narraciones en las que elementos matemáticos son los protagonistas. Por no insistir en referencias muy conocidas, como el libro *Planilandia* de Edwin Abbot, podemos citar dos libros separados en el tiempo. Por un lado la narración corta titulada *De cómo el número 7 se volvió loco* de Bram Stoker (2002) en la que el protagonista es el número 7 que sufre mucho por ser primo. Otro más reciente sería el cuento *¡Ojalá no hubiera números!* de Esteban Serrano (Serrano, 2002), en el que los regidores del país de los números deciden dejar al mundo sin números para castigar a un chaval que los aborrece. En clave de humor se cuentan las dificultades que aparecerían en la vida cotidiana si no hubiese números.

Existen ejemplos de escenificación de elementos matemáticos que han podido ser observados en la televisión. Por ejemplo, conocemos una producción de la antigua realizadora Yambo S.A., que dentro de una serie de programas llamada «Un castillo de cuentos» presentó una historia de título *La familia matemática*, en la que un alumno asqueado con las difíciles matemáticas que tenía que resolver, es abducido por su cuaderno de matemáticas, donde vive una familia de quebrados a los que ayuda, y en reciprocidad es ayudado a comprender los deberes que tenía señalados.

Por otro lado, existe un monólogo de Faemino y Cansado, englobado dentro de su serie televisiva de programas «El orgullo del tercer mundo», dedicado a contar una historia paradójica, pues como ellos mismos dicen «parece irreal, pero trata de dos números reales». En el monólogo se cuenta la historia del 6 y el 9 que eran hermanos, y de todos los números que se relacionan con ellos (fraccionarios, negativos, irracionales, etc.).

Si pensamos que los elementos de las matemáticas no pueden servir para contar una historia, es porque no hemos visto el corto de dibujos animados *El punto y la línea. Un romance matemáticamente simple.* Dirigido por Chuck Jones, uno de los grandes dibujantes de la Warner Broos (creador del Coyote y el Correcaminos, entre otros) en el que se narra la historia de una recta enamorada de un punto.

Los ejemplos anteriores se refieren a adaptaciones matemáticas realizadas por profesionales. Pero también los alumnos pueden representar obras de teatro, en las que algunos conceptos (en muchos casos geométricos) son mostrados formando parte de una historia. Varios ejemplos se encuentran reflejados en la bibliografía que acompaña a estas páginas.

Pero también los alumnos pueden representar obras de teatro, en las que algunos conceptos (en muchos casos geométricos) son mostrados formando parte de una historia.

El país de los vectores

De los dos autores de este artículo, Ismael Roldán, aparte de Licenciado en Física y profesor de Matemáticas, es licenciado en Arte Dramático. Fue fundador y durante cinco años actor profesional con el grupo Teatro de la Jácara de Sevilla. El mundo del teatro es algo que siempre ha llevado en la sangre y que, siempre que ha podido, se ha manifestado en sus clases. Conceptos como la composición de funciones han sido explicados en clase mediante la ayuda de una simple escenificación teatral.

Conocer las posibilidades del teatro para presentar elementos matemáticos nos animó a aceptar la invitación de Canal Sur TV, dentro de su programación educativa y más concretamente en «El Club de las Ideas». La productora sevillana Intermedia ya había grabado una experiencia realizada por Ismael en su centro pero ahora el reto se presentaba excitante, pues en lugar de tratarse de una grabación convencional nos propusimos un programa especial donde tendríamos que elaborar un guión para la televisión partiendo de una pieza teatral con contenidos matemáticos y dos actores.

Como la productora estaba preparando un programa monográfico sobre matemáticas y nuestra relación con el realizador y el cámara resultó desde el principio fluida y especialmente cordial, no tardamos en ponernos de acuerdo acerca del proyecto ilusionante de hacer teatro matemático para la televisión. Después de leer algunos textos que nos parecieron interesantes, como el citado libro *Planilandia* de Edwin Abbot, o algunas de las pequeñas piezas teatrales elaboradas por Claudi Alsina, optamos por elegir *El País de los Vectores*, un montaje realizado en plan diaporama por el profesor canario Martín Corujo en 1993. Tuvimos que adaptar el texto a una obra teatral para dos actores y grabarla de tirón el mismo día que comenzamos a ensayar el guión. Aquella tarde tendríamos que unir a la condición de Catedrático de Matemáticas de Pepe su espléndida capacidad interpretativa y teatral que no hacía más que comenzar y auguraba futuros éxitos para esta pareja tan singular. La experiencia resultó muy satisfactoria y recibimos la felicitación de los directivos de «El Club de las Ideas» así como de muchos conocidos que vieron aquel programa. Se emitió multitud de veces en Canal Sur TV (y se sigue emitiendo en la actualidad), e incluso vía satélite para la televisión educativa que se emite en los países de habla hispana.

Primer acto: El Año Mundial de las Matemáticas.

Durante el año 1998 se celebraron en Madrid unas jornadas de la sociedad APUMA (Asociación de Profesores Usuarios de los Medios Audiovisuales) y en ellas presentamos la experiencia que habíamos tenido con el programa citado anteriormente. Allí conocimos a Margarita Marín, profesora de la Escuela de Formación del Profesorado de Ciudad Real, que nos invitó a participar en el año 2000 en las Primeras Jornadas Regionales de Castilla La Mancha, que se celebraron en Ciudad Real. Se nos planteó el presentar una ponencia-taller sobre Matemáticas y Medios de Comunicación que constaría de una primera parte en plan conferencia para todos los asistentes seguida de un encuentro más práctico con actividades matemáticas para un grupo más reducido. Ismael tuvo la genial idea de realizar una obra teatral para esa primera parte preparando un guión formado por distintos sketches. La idea general del montaje era presentar una parodia de programa de televisión realizado con motivo especial del Año Mundial de la Matemáticas.

En la presentación, el conductor del programa (un flamante y bien parecido Pepe con traje y pajarita) hacía una entrevista a una figura emblemática de la educación matemática, en concreto a Ricardo Pichardo Esteso, un alumno de primero de ESO (interpretado por un Ismael con pantalón corto, zarcillo a la oreja y gorra juvenil al estilo break-dance) que, por supuesto, odiaba febrilmente las matemáticas. En el desarrollo del montaje se proyectaba una «publicidad matemática» que se diseñó expresamente para la ocasión y que consiguió la hilaridad del público; unas entrevistas que realizamos a grandes figuras de la comunicación como Carlos Herrera, Manuel Campo Vidal o Paco Lobatón, que tuvieron la gentileza de contarnos sus experiencias escolares con las matemáticas (por cierto que desde hace tiempo estamos detrás de entrevistar a Iñaki Gabilondo para ir completando las aportaciones de los grandes comunicadores del país), y una serie de pequeñas piezas teatrales tales como un telediario matemático, una tertulia en un café donde se repasaban todas las posibilidades de la prensa en la enseñanza matemática, y algunas piezas teatralizadas, donde los actores, por ejemplo, nos convertimos en una función y su asíntota en un idilio imposible de explicar con palabras con un final memorable. También hicimos una propuesta con expresión corporal escenificando el concepto de desigualdad y el de simetría.

Muchas de las pequeñas piezas presentadas resultaron además asequibles para cualquier persona aunque sus conocimientos matemáticos fuesen escasos o casi inexistentes.

Telediario matemático

El éxito del montaje fue extraordinario y su entrañable recuerdo perduró en el tiempo. Desde luego hay que destacar la ayuda prestada por Carmen Castro, la mujer de Pepe, y por el profesor de Educación Física de la Escuela de Formación del Profesorado de Ciudad Real, que se encargaron de los medios técnicos audiovisuales cuyo manejo y sincronismo a pesar de la complejidad inherente resultó brillante e impecable.

Los espectadores se vieron especialmente sorprendidos porque esperaban ver una conferencia tradicional de matemáticas y se encontraron con todo un espectáculo teatral multicolor cargado de humor y música, donde la función y su asíntota culminaban su historia bailando al ritmo de Los Sabandeños. Muchas de las pequeñas piezas presentadas resultaron además asequibles para cualquier persona aunque sus conocimientos matemáticos fuesen escasos o casi inexistentes.

El único regusto amargo que nos quedó de aquella experiencia no fueron las más de 100 horas que dedicamos a la preparación del espectáculo (escribir el guión inicial y las modificaciones posteriores, la selección de la música, elaboración de las diapositivas, realización y edición de un vídeo publicitario, la preparación del atrezzo y elección del vestuario, los múltiples ensayos, etc.) sino no haber podido representar el montaje en ningún otro lugar rentabilizando tanta ilusión y esfuerzo, pues aunque lo ofrecimos a través de la página web de la FESPM durante el Año Mundial de las Matemáticas, la única posibilidad real de repetirlo se nos fastidió por un problema médico, y otras muchas posibilidades no llegaron a fraguar al final. Deformados por la profesión diríamos que se trataba de un proyecto complejo con fuerte componente imaginaria y casi nula parte real....

Segundo acto: Con las matemáticas sí se juega

Cuando el gusanillo del teatro ya nos recomía por dentro, vino en nuestra búsqueda de nuevo Margarita Marín, que junto con el profesor José Luis Carlavilla habían organizado una serie de conferencias en la Universidad de Castilla-La Mancha para el año 2002. Recordaban la gran impresión que habíamos dejado en Ciudad Real en el 2000. Y como era previsible los actores-profesores aceptaron encantados la nueva invitación y por segunda vez nos pusimos manos a la obra. Para esta ocasión aprovechamos una serie de guiones que Ismael había preparado en los dos últimos años, y que iban a aparecer en forma de libro editado por la editorial Nivola con el título *Teatromático. Divertimentos teatrales matemáticos para todos los públicos.*

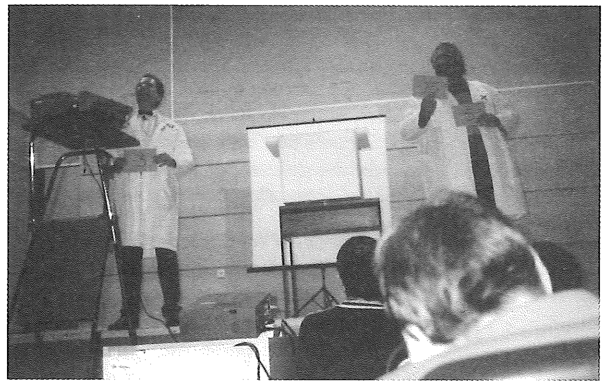
Aparte del material anterior, se realizaron guiones nuevos para crear una historia que sirviera de hilación a todo el montaje, y se metieron sketches que no habían salido publicados, como una apasionante historia de amor-odio entre una función y su variable (con amplia participación del público) y otras piezas, que al ser totalmente visuales y sin ningún texto, no aparecían en el libro.

El montaje volvió a ser todo un éxito y fuimos felicitados con efusión por los asistentes organizadores y medios de comunicación presentes el día del estreno que, contra todo pronóstico, prepararon una rueda de prensa espectacular con las matemáticas como invitada de honor.

Nos encontramos especialmente recompensados con el público asistente, pues además de la presencia de profesores y estudiantes de la Escuela de Formación del Profesorado, también asistieron alumnos de secundaria que fueron llevados por sus profesores para la ocasión. Todos disfrutaron del montaje y participaron activamente cuando se les requirió por parte de los actores creando momentos de auténtica catarsis y emociones compartidas.

En la actualidad estamos recomponiendo este último montaje (ya que se hizo especialmente para ser estrenado en Ciudad Real y existen muchas referencias a esa ciudad) para poder represen-

Todos disfrutaron del montaje y participaron activamente cuando se les requirió por parte de los actores creando momentos de auténtica catarsis y emociones compartidas.



Función y variable

tarlo en otros lugares y mantenemos el contacto con otros estamentos e instituciones para realizar alguna otra función, a ver si por fin sacamos provecho de la cantidad de esfuerzo y trabajo desarrollados en este proyecto.

El telediario matemático

Es muy difícil hacerse una idea clara de lo que significan estos montajes, pues en ellos resulta fundamental la puesta en escena, la música y las imágenes que la acompañan (cerca de 30 diapositivas). Sin embargo, para que el lector se acerque un poco al estilo y objetivo que perseguimos en el espectáculo procedemos a continuación a reproducir parte del telediario matemático en su parte más literaria:

La escena presenta una mesa típica de televisión (de las antiguas, sin los nuevos adelantos técnicos con pantallas inteligentes) donde se sientan dos actores, haciendo el papel de periodistas y leen con la entonación e impasibilidad propia del momento las noticias matemáticas, algunas de las cuales son las siguientes (el lector puede encontrarlas todas en *Teatromático*, libro reseñado en la bibliografía que se acompaña):

> SUCESOS. Tanto el Suceso A (alumnos ávidos de una matemática feliz) como el Suceso B (profesores empeñados en concebir su asignatura como una carrera de obstáculos), han demostrado ser incompatibles tras comprobarse que su intersección daba el conjunto vacío.
>
> Ecologistas geométricos comprometidos con la defensa y el respeto de la diversidad en la fauna poligonal, se vieron obligados a disuadir a una pandilla de cuadrados engreídos, que increpaban a una familia de ingenuos trapezoides procedentes de diferentes lugares del plano. Los trapezoides aseguraron a nuestros reporteros haber escuchado insultos xenófobos como: «cuadriláteros contrahechos, no tenéis paralelos lo que hay que tener». La ministra del medio: «Dodecágona Planita» ha declarado oficial-

mente que lo importante no es cómo se tengan, sino el uso que de ellos se haga.

El máximo galardón que otorga la Real Academia de Entes Matemáticos Dispersos, el Círculo Áureo, le ha sido impuesto al olvidado logaritmo. Con este acto se le reconoce su labor liberadora de las sufridas bases, quienes por fin se han visto aligeradas del peso secular que sobre ellas ejercían sus exponentes.

A partir del próximo milenio, el MEC y todas las comunidades autónomas con competencias educativas, obligarán a que todos los centros expliquen las cónicas desde una pedagogía pragmático-gastronómica más coherente con los postulados de la Logse. Los profesores y profesoras cortarán en clase círculos, elipses, hipérbolas y parábolas de la mejor caña del lomo ibérico español. Estas cañas serán consideradas a efectos administrativos como material fungible no inventariable.

En efecto, hay amores que matan. Esta es la razón por la que le ha sido concedido el diploma del abnegado sacrificio al profesor italiano Suplizzio Problematicae, actualmente de gira por España y con un agudo cólico nefrítico. El ínclito Suplizzio se ha hecho famoso por su lema: Problema, Problema, Problema. Aunque sus alumnos estaban hasta el copón, de tal forma amó los cálculos, que los hizo hasta en su riñón.

Los laboratorios «Gauss» han elaborado una nueva pastilla antidepresiva, el «valorín absoluto». Esta gragea cambia todo lo negativo a positivo en un plis-plas.

Los números decimales que hasta ahora habían vivido en el más injusto ostracismo, aborrecidos por la incomodidad de su uso, según un alto porcentaje de usuarios, y que desde hacía lustros recibían asistencia psiquiátrica por tanto odio a ellos dirigido, sufren desde el 1 de enero de 2002 una aguda hemorragia de placer, provocada por la inyección del euro en las redes comunitarias. Nunca imaginaron los decimales que volverían a reinar como céntimos altivos en bares, cines, mercados y ágoras diversas. Y como es de bien nacidos ser agradecidos levantan en Bruselas un monumento a su euro-santo patrón: San Redondeo, quien en estos momentos bate todos los récords de plegarias por su ecuanimidad en las aproximaciones.

La participación de los alumnos

En los apartados anteriores hemos visto cómo nosotros hemos realizado montajes donde se pueden representar conceptos matemáticos que se han adueñado de la escena y han contado sus historias directamente al público. Pero hay un aspecto que enriquece aún más esta experiencia, y es que sean los propios alumnos los que pongan en escena los elementos matemáticos que están estudiando en clase.

Es indiscutible que para que un espectáculo teatral tenga éxito debe conectar con los espectadores. Así, aunque nosotros podamos hacerlo mejor desde el punto de vista teatral, la conexión entre los jóvenes de la misma edad a veces es más fuerte, aunque el resultado final no esté tan pulido.

...hay un aspecto que enriquece aún más esta experiencia, y es que sean los propios alumnos los que pongan en escena los elementos matemáticos que están estudiando en clase.

Conocemos en concreto una experiencia realizada en Granada en el IES Padre Manjón allá por el mes de marzo de 2000. Este Instituto, haciendo alarde de una encomiable capacidad de organización y participación, consiguió dedicar un día completo en el Centro a las matemáticas con actividades múltiples y diversas. Un éxito cuyo detonante fue, sin duda, el departamento de matemáticas por el diseño tan atractivo de día festivo matemático que realizó pero que sin duda resultó ser una realidad gracias a la colaboración y participación del resto de profesores de los demás departamentos. Todo ello sin olvidar el equipo directivo que facilitó los medios para la consecución del proyecto. Y como colofón el estreno de dos piezas de teatro matemático en el salón de actos.

Ismael no podrá olvidar el entrañable recuerdo que le supuso asistir por invitación del Instituto al estreno de dos piezas de teatro matemático que poco antes había publicado en *Números* y *Epsilon*.

La primera actuación tuvo lugar a cargo de una joven actriz, alumna de tercero de ESO. Interpretó la pieza teatral: *La incógnita X*, un divertido monólogo no exento de dificultades interpretativas que narra las venturas y desventuras de este ser tan familiar para los alumnos y prácticamente inseparable en el devenir de su formación matemática. Por fin, una incógnita abandonaba su bidimensional plano de existencia lanzándose a comunicar sus sentimientos y emociones tras siglos de atribulados trasiegos por los diferentes miembros de infinidad de ecuaciones.

La segunda actuación constituiría el broche de oro final. Cinco alumnos también de tercero de ESO interpretaron magistralmente *La liberación de la potencia*. La elegancia del montaje quedaba de manifiesto en la puesta en escena. Dos de los alumnos interpretaron en directo un exquisito concierto para dos violines como fondo musical de los otros tres actores: la base, el exponente y el logaritmo. Comienza esta historia con un diálogo entre la base y su exponente. El exponente escucha con dolor y amargura las quejas de su injusta base que manifiesta lo insoportable que le resulta aguantarle encima suya durante toda una eternidad. El exponente reacciona con sosiego y templanza haciéndole ver a su base que realmente representa su clónica vanidad patológica y que debería, por tanto, serenarse y reflexionar antes de provocar conflictos conyugales. Sin embargo, la concordia no es posible y tienen la suerte de encontrarse casualmente con un logaritmo a quien dejan funcionar y les libera finalmente. Jamás se hubiese imaginado una potencia o un logaritmo de libro de texto haber vivido una experiencia semejante envueltos además en una atmósfera musical tan emocionante. Los aplausos inundaron durante varios minutos el repleto salón de actos del Instituto. Magníficos los alumnos-actores, genial el profesor de inglés que dirigió los ensayos y fantástica la colaboración de la APA del Centro que confeccionó el vestuario y la escenografía. Y que las matemáticas consiguieran esta auténtica transversalidad comunicativa entre áreas de conocimiento y estamentos tan diversos también constituyó motivo de gran satisfacción.

Creemos firmemente que el teatro es un poderoso recurso de divulgación matemática que puede romper la mala fama de abstracción, dificultad y alejamiento de la realidad que en muchos lugares tiene la matemática.

Antes de bajar el telón

Y para terminar, vamos a recalcar algunos puntos de los desarrollados en este artículo.

Creemos firmemente que el teatro es un poderoso recurso de divulgación matemática que puede romper la mala fama de abstracción, dificultad y alejamiento de la realidad que en muchos lugares tiene la matemática.

Pensamos que lo único que se debe utilizar es un poco de ingenio, algo de originalidad y, desde luego, unas adecuadas gotas de humor para que el resultado final del proceso sea gratificante. El teatro sirve para romper las barreras entre la pizarra y nuestros alumnos, pues tenemos comprobado que cuando ven escenificados algunos elementos matemáticos, no lo vuelven a olvidar en la vida, y cuando nos los encontramos por la calle, años después de haber abandonado los institutos, aún siguen recordando aquel aspecto que los impresionó, por lo que se salía de los cánones en los que muchas veces nos empeñamos en encorsetar a las matemáticas.

Animamos desde aquí a todos los compañeros con deseos de innovar, a poner en práctica pequeños montajes teatrales con sus alumnos, bien a partir de los guiones que aparecen en la bibliografía, o de otros que ellos mismos creen. Sería interesante que se publicaran en las revistas especializadas todos aquellos montajes relacionados con las matemáticas, para que quien quisiera pudiera organizar en sus centros, pequeñas obras de teatro matemático en las semanas culturales. Incluso la Federación podría proponer en algún año futuro que se dedicara el Día Escolar de las Matemáticas a obras teatrales matemáticas.

Ismael Roldán
José Muñoz
Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
«Thales»

Bibliografía

MARÍN RODRIGUEZ, M. (1999): «El valor del cuento en la construcción de conceptos matemáticos». *Números*, 39, 27-38.

MARTÍN CORUJO, J.A. (1993): «En el país de los vectores», *Números*, 23, 33-37.

MUÑOZ SANTONJA, J. e I. ROLDÁN CASTRO (1999): «Matemática lúdica televisada», *Educación y medios*, 9, 23-26.

PLASENCIA, I.C. y E.J. RODRÍGUEZ (1999): «En el país de la Reina Equilátera: una experiencia interdisciplinar en la escuela de Magisterio», *Números*, 37, 29-36.

PONZA, M.V. (1996): «La experiencia interdisciplinaria en la realidad educativa de hoy», *Suma*, 21, 97-101.

ROLDÁN CASTRO, I. y J. MUÑOZ SANTONJA. (1998): «Teatro matemático desde la TV», en *Actas de la VIII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática*, Jaén, 299-302.

ROLDÁN CASTRO, I. (1999): «Teatro y matemáticas», *Números*, 39, 21-26 y *Epsilon*, 50, vol. 17 (2), 2001.

ROLDÁN CASTRO, I. (2000): «¿Es posible comunicar las matemáticas desde la experiencia teatral?», *Comunicación y Pedagogía*, n.° 171, 31-36.

ROLDÁN CASTRO, I. (2002): *Teatromático. Divertimentos matemáticos teatrales para todos los públicos.*, Colección El rompecabezas n.° 3, Nivola, Madrid.

ROLDÁN CASTRO, I. (2002-2003): «Matemáticas, teatro y comunicación», *Diálogo*, n.° 237, 12-17.

SERRANO MARUGAN, E. (2002): *¡Ojalá no hubiera números!*, Colección El rompecabezas n.° 4, Nivola, Madrid.

STOKER, B. (2002): «De cómo el número 7 se volvió loco», en *El País del Ocaso y otros cuentos inquietantes para niños*, Valdemar, Madrid.

El catedrático de Análisis José Garay que pone música a los logaritmos

EDUCACIÓN ZARAGOZA ACOGE A 700 MATEMÁTICOS DEL 7 AL 9 DE SEPTIEMBRE

Locos por los números

Cuentos, magia, juegos de estrategia, mudéjar aragonés, nanas... En principio, ninguno de estos temas parece guardar mucha relación con las Matemáticas. Pero todos ellos aparecen en el programa de las X Jornadas para el aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas, que se celebran entre el día 7 y el 9 en Zaragoza.

NURIA CASAS Zaragoza

Nada menos que 700 matemáticos de todo el país se darán cita en la capital aragonesa del 7 al 9 de septiembre con el ánimo de intercambiar experiencias y analizar cómo mejorar la enseñanza de esta disciplina. Se trata de la mayor concentración de docentes de una misma materia que se da en todo el país, según expuso Emilio Palacián, miembro de la comisión organizadora.

El programa prevé un sinfín de contribución a la difusión de los temas científicos en general y matemáticos en particular, según destacó Fernando Corbalán.

Florencio Villarroya, presidente de la Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo», subrayó que en la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas se encuentran representadas 19 asociaciones pertenecientes a todas las Comunidades Autónomas, excepto al País Vasco y a Baleares.

Cano ilustra el cartel

Contenidos críticos

Por otro lado, a preguntas de los periodistas, Florencio Villarroya puso en entredicho los nuevos currículos de Matemáticas aprobados por el Ministerio de Educación y Cultura. A su modo de ver, suponen una vuelta al pasado, al sistema cerrado y tradicional. Según explicó, si la LOGSE apostaba por una fórmula más moderna de enseñar las Matemáticas, en la que los profesores van construyendo el programa a medida que trabajan con los alumnos, lo que propone el Ministerio es regresar al modelo tradicional.

En opinión de Villarroya, «eso no mejora la situación; lo que la mejora es el descenso del alumno por aula y el incremento de horas en la materia». En definitiva, según dijo, «no nos satisfacen los

ECONOMÍA EL PAIS TRA

La desviación de siete décimas sobre el objetivo inicial cuesta 270 millones de euros en salarios

Los precios subieron en 2001 un 2,7% por los alimentos, el turismo y el redondeo del euro

LA VANGUARDIA

SÁBADO, 19 DE ENERO DE 2002

La calderilla del euro comienza a ser arrinconada

Los obispos de Cataluña dicen no al preservativo en los institutos

Cela descansa bajo un olivo en

ECONOMIA

La determinación más o me... denominado «agujero» — as... mar a las cosas por su nombre... ñol de Crédito (Banesto) se ha... cifra más próxima a los 700.0... setas que al medio billón (50... pesetas) que en un principio...

La crisis de Banesto... 37.500 pesetas a cada...

Javier Mayar

Los accionistas sólo pagarán el... del plan de saneamiento de la en...

Está claro que Banesto no tiene el dinero suficiente para pagar su propia crisis vía ir a la quiebra, por lo que deberá ser ayudado de forma inexorable por el resto de los ciudadanos, bien con cargo a los impuestos o a los beneficios de los restantes...

que el Estado se gasta en un año en construir carreteras y otras obras públicas de interés colectivo. O lo que se gasta la Sanidad...

Hace poco, el diario económico «Cinco Días» publicaba una encuesta en la que trataba de indagar sobre quién debería pagar...

SUMA 43
junio 2003, pp. 103-105

Estudio geométrico del recinto interior del sepulcro romano de la Torre de San José (Villajoyosa, Alicante)

Vicente Ibáñez Orts

En este artículo se realiza un somero estudio geométrico de las tumbas denominadas Torre de San José (Villajoyosa) y Torre de Daimuz. El autor utiliza como punto de partida el trabajo realizado por Abad y Bendala sobre dichos sepulcros.

MISCELÁNEA

LA TUMBA TURRIFORME denominada Torre de San José es un sepulcro romano de mediados del siglo II d.C. Su estudio se debe a Abad y Bendala (1985). Este trabajo también comprende el sepulcro de la Torre de Daimuz (Gandía), del que tan sólo se tiene constancia por la bibliografía y unos pequeños restos dispersos, ya que se desmontó a principios del siglo XX.

Según estos autores, la Torre de San José es uno de los ejemplares mejor conservados del arte funerario romano en la península. Su origen hay que buscarlo en los modelos norteafricanos. Se trata de un sepulcro en forma de torre de planta aparentemente cuadrada, situada sobre un podio de cuatro peldaños y con columnas de orden corintio adosadas en sus ángulos. Su aspecto es sobrio, ya que carece de decoración entre los paños de pared delimitados por las columnas de esquina. Actualmente le falta la parte superior. Este monumento se encuentra acoplado a la vivienda del propietario del cámping Sertorium, en Villajoyosa, quedando dos lienzos de pared ocultos dentro del edificio y dos fuera (fotos 1 y 2). Se trata de un sepulcro ciego, ya que carece de puerta de entrada. Esto quiere decir que una vez depositados en su interior los cuerpos o las cenizas de sus promotores la tumba se cerró, quedando incomunicada con el exterior. Tan sólo se dejó una pequeña abertura para que los deudos cumpliesen con las libaciones y los ritos fúnebres.

El trabajo de Abad y Bendala es exhaustivo y poco más se puede añadir al mismo. En él recogen los dibujos de Antonio de Valcárcel, Conde de Lumiares, del siglo XVIII, y de A. de Laborde (1806), viajero romántico francés de comienzos del XIX. Aun así, desde un principio me llamó la atención que al observar la planta de la torre (figura 1) el espesor de las paredes es igual dos a dos. Las dimensiones del cuerpo principal en su arranque sobre el basamento escalonado son de 414 × 462 cm, lo que confirma su aspecto aparentemente cuadrado. La diferencia de valor corresponde a la distinta longitud de los paños entre columnas, que es de 48 cm, es decir, prácticamente un codo romano o 44,4 cm. Sin embargo, al observar la *cella* su aspecto es claramente rectangular, debido al diferente grosor de sus paredes. No es frecuente que un edificio se construya con muros de desigual espesor, por lo que inmediatamente surgió la idea de que este hecho se debía a algún tipo de relación geométrica entre sus medidas, que expresamente el arquitecto que lo construyó quiso incluir en su diseño. La Torre de Daimuz, por lo que se conoce de los dibujos que de ella se hicieron, tanto en su interior como externamente, es de planta casi cuadrada, hasta el punto de que hay que trazar en el plano de Laborde las bisectrices de sus ángulos para comprobarlo. El muro perimetral de cierre tiene el mismo tamaño en todas sus partes.

Tras los permisos pertinentes, pude visitar la torre para tomar personalmente sus dimensiones. Interiormente el monumento consta de una única *cella* que según Abad y Bendala mide 7,5 m de altura. En ella se han construido con posterioridad dos pisos. Uno a la altura de la entrada actual y otro superior al que se accede por una escalerilla y que hasta tiempos recientes sirvió de palomar. Se accede al interior de la *cella* por una pequeña abertura que ha quedado al quitar uno de los sillares, justo al nivel del primer piso. Con una escalera portátil se puede bajar a la parte inferior a través de un agujero que hay en una esquina. Ese lugar esta lleno de tierra y por excavar, por lo que se desconoce la profundidad del monumento.

Ya en su interior surgió un problema no previsto, ya que mientras el monumento en el exterior presenta un aspecto perfecto con sus gruesas piedras pulidas, en el interior, dado que una vez clausurado no se iba a volver a visitar, los sillares de piedra caliza no sólo no están pulidos, sino que cada uno presenta distinto tamaño. Por tanto se ajustaron por el exterior, sin importar que sobresalieran más o menos en la parte interior. Estos desniveles pueden llegar a diez centímetros (foto 3), por lo que decidí tomar las dimensiones del recinto interior justo en la base del arranque de la bóveda, donde empieza el arco (foto 4). Esta bóveda está formada por cinco dovelas de muy buena labra que están perfectamente integradas en el resto del monumento, como se puede apreciar en la figura 2. Las medidas que obtuve, junto con las propuestas por Abad y Bendala, son las siguientes:

Abad y Bendala	1,60 × 2,76
Ibañez	1,68 × 2,68

Mientras que la medida longitudinal corresponde a nueve pies romanos (2,68/29,6 = 9,054), la transversal no es un número entero (1,68/29,6 = 5,6757). Esto me daba pie a conjeturar que el rectángulo que forma la cella es áureo, es decir, conforme con el número Phi (ϕ). Este valor, tan apreciado por los pitagóricos, corresponde al número trascendente 1,618... (ver Ginka, 1978). Evidentemente, en

Esta bóveda está formada por cinco dovelas de muy buena labra que están perfectamente integradas en el resto del monumento...

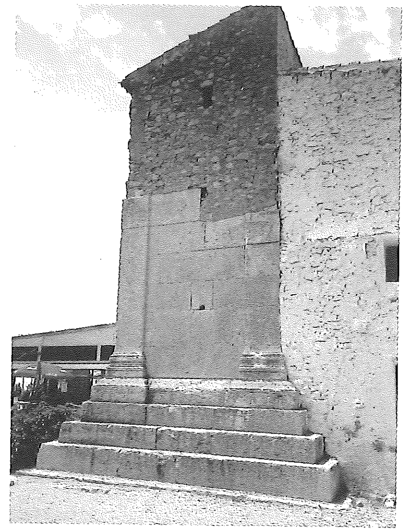


Foto 1. Vista frontal del sepulcro romano de Villajoyosa (Alicante). A la altura de la segunda y tercera hilada de sillares del cuerpo principal se distingue el pequeño orificio para las libaciones

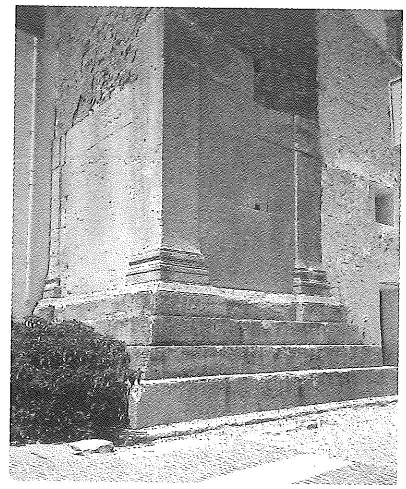


Foto 2. Vista lateral

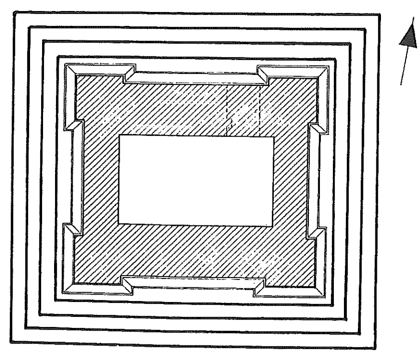


Figura 1. Planta de la Torre de San José según Abad y Bendala. Los grosores de las paredes son iguales dos a dos

Foto 3. Detalle del recinto interior del sepulcro. Se observa cómo los bloques de piedra caliza labrada sobresalen unos de otros

Foto 4. Bóveda de cañón formada por cinco dovelas que cerraba el sepulcro en su parte superior. En el arranque de la misma es donde hemos tomado las dimensiones del recinto interior

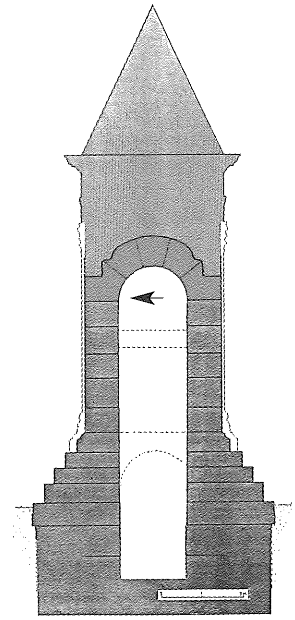


Figura 2. Hipotética reconstrucción del monumento con el último cuerpo en pináculo realizada por Abad y Bendala. Se observa como las cinco dovelas que conforman la bóveda están perfectamente integradas en el muro (la flecha indica el lugar de medición)

caso de ser así, se trataría de un juego geométrico propio de un buen arquitecto, muy conforme con el tratado de Vitrubio (1987) sobre el arte de la arquitectura y de la construcción, y con los cánones helenísticos. No cabe duda de que el saber geometría era una de las cualidades, quizás la mayor, que distinguía al autentico arquitecto del maestro de obras. Si calculamos el cociente entre sus dimensiones dividiendo 2,68 por 1,68 obtenemos 1,595, resultado que bien se puede redondear a 1,6. Este valor, ligeramente distinto de Phi, indica que en principio este número no estaba incluido en el diseño de la tumba.

Ahora bien, en muchas ocasiones los arquitectos de la antigüedad no empleaban directamente Phi, valor irracional, sino alguna de sus aproximaciones. En este aspecto es sabido que el número Phi se obtiene como límite de dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonaci. Esta sucesión es la siguiente: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... En ella, cada término se obtiene como suma de los dos anteriores. Como origen o semilla se parte de los valores más sencillos, 1 y 1. Si ahora consideramos el cociente entre dos términos consecutivos de esta sucesión: 3/2, 5/3, 8/5, 13/8 ... estas fracciones tienden al número Phi. Era frecuente en algunas ocasiones emplear alguno de estos primeros términos como una buena aproximación de Phi. En este aspecto 1,6 u 8/5 es el valor que resulta del cociente entre las medidas del rectángulo que conforma la *cella,* lo que nos da pie a conjeturar que la superficie interior de este monumento se ha trazado de acuerdo con este cociente, y por tanto con el número Phi, lo que de ser cierto honraría a su diseñador.

Vicente Ibáñez
Societat d'Educació Matemàtica
de la Comunitat Valenciana
«Al-Khwarizmi»

Bibliografía:

ABAD, L. y M. BENDALA (1985): «Los sepulcros turriformes de Daimuz y Villajoyosa. Dos munumentos romanos olvidados», *Lucentum,* n.° IV, 147-183.

GIYNKA, M.C. (1978): *El número de oro,* Poseidón, Barcelona.

LABORDE, A. (1806): *Voyage pintoresque et historique de l'Espagne,* París.

VITRUBIO, M. (1987): *Los diez libros de la arquitectura,* Altafulla, Barcelona.

X JORNADAS PARA EL APRENDIZAJE
Y LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

SUMA 43
junio 2003, pp. 107-111

El astrólogo y el Emperador del Ganges

Pablo Fernández Gallardo
José Luis Fernández Pérez

NOTA preliminar

El explorador y aventurero Sir Richard Francis Burton, traductor, entre otras obras, de *Las mil y una noches,* buscó ansiosamente durante años las Actas de las Audiencias del Emperador del Ganges, pero apenas logró recopilar algunos de los episodios que allí supuestamente se narraban.

Recientemente, un comunicante nos ha hecho llegar unos legajos, descubiertos en la Biblioteca Nacional y atribuidos a Ben Barri, judío zamorano que trabajó en la Escuela de Traductores de Toledo en el siglo xii, que contienen la transcripción al castellano de la versión árabe de estas legendarias Actas. Nuestro comunicante, cuyo nombre no nos permite desvelar, es persona culta e instruida, e intuyó el valor matemático de estos documentos. Así que nos animó a hacerlos públicos, acompañándolos de los comentarios pertinentes.

Una de las Actas más interesantes es la que recoge una discusión del Emperador con su astrólogo Sadaranujan. La versión de Ben Barri está escrita en un verso de retórica alambicada y pleno de retruécanos. Para comodidad del lector, nos hemos tomado la libertad de transcribirla en prosa y en español moderno, respetando, en todo, los detalles de la discusión. Hemos añadido, asimismo, una serie de notas que ilustran algunos de sus aspectos; algunas de ellas nos han sido remitidas por nuestro comunicante.

Un comunicante nos ha hecho llegar unos legajos, descubiertos en la Biblioteca Nacional y atribuidos a Ben Barri, judío zamorano que trabajó en la Escuela de Traductores de Toledo en el siglo xii, que contienen la transcripción al castellano de la versión árabe de las Actas de las Audiencias del Emperador del Ganges. Hemos añadido, asimismo, una serie de notas que ilustran algunos de sus aspectos.

Nota del comunicante

Las Audiencias del Emperador del Ganges eran registradas en Actas, con todo lujo de detalles, por los escribas del Notario Mayor, quien, a su vez, incorporaba jugosos comentarios sobre las reacciones del Emperador.

En aquel tiempo, tras su invención un siglo antes, el juego del ajedrez era ya la gran afición del Emperador y de toda

MISCELÁNEA

la Corte. Los nobles competían por tener a su servicio a los mejores equipos de ajedrecistas y sobre todo a los grandes maestros[1]. Los premios a los ganadores de los torneos eran generosos. El Emperador no era mal jugador, pero Sadaranujan, aunque nunca jugaba, siempre asistía a las partidas con un aire de superioridad que enojaba al Emperador. Un día, parece ser que harto de la actitud prepotente de Sadaranujan ante el ajedrez, lo hizo llamar a su presencia.

El Acta de la Audiencia

El Acta de la Audiencia, tras un largo preámbulo que no viene al caso, dice así:

El Emperador exige a Sadaranujan que explique su actitud ante el ajedrez. Sadaranujan contesta, con cierta displicencia:

—Mi Señor, no sé jugar al Ajedrez. Tan sólo conozco las reglas básicas. Pero es un juego que carece de interés, pues no encierra ningún misterio para mí.

Esta respuesta incomoda especialmente al Emperador:

—¿Cómo? Si así fuera, podrías hacerte inmensamente rico participando en los torneos de la Corte.

—Mi Señor, habéis de saber que mi alma no goza con la posesión de riquezas materiales. Por puro pensamiento, sin rebajarme a practicar el juego, he logrado averiguar su esencia. Y ese logro del espíritu humano[2] me basta como satisfacción.

—No entiendo. Me exasperas: ¿de qué esencia me hablas?

—Mi Señor, sé que existe el Gran Libro Blanco del Ajedrez o el Gran Libro Negro del Ajedrez[3]. No he logrado averiguar cuál de los dos existe o si existen los dos. Pero al menos uno de los dos existe.

Ante la seguridad de las respuestas de su astrólogo, la exasperación del Emperador da paso a la curiosidad, y también a la ambición de quizás convertirse en el mejor jugador del Imperio.

—¿Qué quieres decir?, ¿qué contienen esos libros?; ¿dónde están?

—Mi Señor, esos libros contienen las claves para jugar y nunca perder al Ajedrez. No aseguran la victoria, pero sí el camino para evitar la derrota. Estos libros existen en el mundo, pero no en nuestro vil mundo material, sino en el sublime mundo de las ideas, ese mundo de los filósofos del Lejano Poniente del que os hablé hace algún tiempo.

El Emperador ama el saber, y la filosofía se encuentra entre sus muchas aficiones. Las ideas de Platón, tan lejanas de la cultura tradicional de nuestro pueblo, le entusiasman. Ya empieza a advertir que lo que le pueda contar Saradanujan no va a mejorar su juego, pero promete ser muy interesante. Llama al Secretario de Cámara para que cancele la Audiencia Imperial y da orden de que no se le moleste.

El Emperador ama el saber, y la filosofía se encuentra entre sus muchas aficiones. Las ideas de Platón, tan lejanas de la cultura tradicional de nuestro pueblo, le entusiasman.

—Explícate. Soy todo oídos.

—Mi Señor, el Ajedrez es en realidad un juego muy sencillo. El azar no parece intervenir y toda la información que se requiere para cada jugada está a la vista en el tablero[4]. No es como en los juegos de naipes. El único problema es que el número de partidas posibles es enorme, pero finito[5]. Pero, con paciencia, dedicación y concentración, un equipo de entrenados calculadores podría hacer una lista de todas ellas[6]. Así que, si me permitís, voy a explicar mi argumentación con un juego más simple: el Shydarayata[7] con cuatro guijarros.

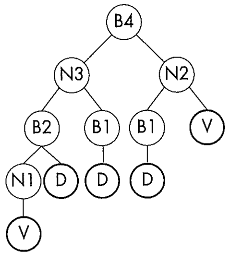
—No juegues con mi paciencia, Saradanujan. ¡Cómo vamos a comparar!, en ese juego es bien sabido que el negro gana siempre: si blanco quita uno, negro quita dos, y si blanco quita dos, negro quita uno.

—Mi Señor, de acuerdo. Hay muy pocas posibilidades, y por eso el análisis es tan directo. Pero si empezáramos con sesenta y cuatro guijarros, ¿cuál sería la regla? ¿Quién tendría ventaja, el jugador blanco o el negro? No permitáis, mi Señor, que las vacas os impidan ver el rebaño.

El Emperador, concentrado como está en seguir la argumentación de su astrólogo, no capta el tono impertinente de este último comentario[8].

—Bien. Es más difícil. Pero creo que podría hacerse un análisis parecido.

—Exactamente, mi Señor. Pero igual ocurriría con el Ajedrez. Si nos centramos en la esencia y no en los detalles,



Cascada 1

os podré explicar cómo. Todo se basa en representar el juego convenientemente y en empezar por el final. El juego entero se puede representar como una cascada[9]. Las posiciones finales del juego las hemos llamado V (victoria) o D (derrota) siguiendo el punto de vista de blanco, el primer jugador. Las posiciones del juego están todas representadas de esta manera. Por ejemplo, N2 significa que toca jugar a negro y que quedan dos guijarros.

El Emperador comienza a entusiasmarse, al comprender que hay un argumento general tras el análisis de aquel juego tan sencillo. Y aventura:

—Esta misma representación la podemos hacer si hubiera sesenta y cuatro guijarros.

Y, tras reflexionar un poco:

—Y también con el Ajedrez, sólo que ahora no emanarían dos torrentes de cada fuente[10], sino muchos: la cascada sería ahora mucho más larga y en cada fuente habría que escribir el tablero entero del Ajedrez en esa posición...

El silencio del astrólogo parece indicar que falta algo más. El Emperador lo mira inquisitivamente, pero el astrólogo, imperturbable, le sostiene la mirada. Por fin:

—¡Ah!, ya sé. Además, las posiciones finales serán ahora tres: V y D, como antes, y además T, por tablas.

El astrólogo quiere más...

—Muy bien, te concedo que se podría representar el Ajedrez de esta manera. Habrá que ir pensando en entrenar a los calculistas de la Corte. Pero, ¿a qué nos lleva todo esto?

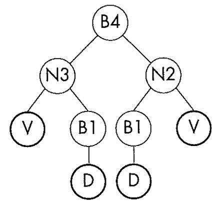
—Mi Señor, como os decía, el análisis procede ahora desde el fondo hasta la superficie. Fijaos en la fuente que está decorada con B2 en esta primera cascada: ¿qué valor tiene para el blanco?

Todo se basa en representar el juego convenientemente y en empezar por el final. El juego entero se puede representar como una cascada.

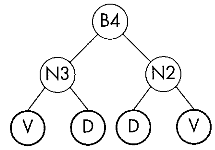
—V, sin duda, porque en esa tesitura el blanco juega a N1 y gana, y claro, no se le ocurriría jugar a D, pues eso le conduciría a la derrota segura.

—Muy bien, mi Señor, y ahora podemos ir recortando la cascada y...

—Déjame. Ya está.



Cascada 2



Cascada 3

Dibuja entonces una segunda cascada, y luego dice, al tiempo que dibuja una tercera, en rápida y entusiasta sucesión:

—Y claro, en N3 y N2 jugaría el negro a la posición que ahora es D. Y ya podemos afirmar que el blanco pierde y el negro gana.

—Ahí lo tenéis, mi Señor: el Libro Negro del Shydarayata con cuatro guijarros.

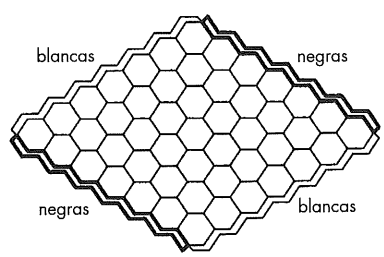
El Emperador despide al astrólogo Saradanujan con un adusto ademán, y queda absorto en sus pensamientos.

Aquí acaba el Acta que recoge la discusión del Emperador y el astrólogo en torno al ajedrez[11]. En otra de las Actas transcritas por Ben Barrí se describe una escena acaecida unos días después.

Segunda Acta

Tras el preámbulo de rigor, que de nuevo evitaremos al lector, el Acta comienza así:

El Emperador convoca al astrólogo a su presencia. Durante varias lunas ha estado meditando sobre la discusión en torno al Ajedrez y las maneras de analizar los juegos de mesa. Ha logrado resolver el juego del Virisiddhta[12], al que tan aficionados son los jóvenes príncipes. Sin embargo, el juego del Bransiddhta[13], el favorito de la Emperatriz y las demás damas de la Corte, ha resistido a todos sus intentos. El Emperador se dirige a su astrólogo:



—Mi estimado Sadaranujan, llevo tiempo meditando sobre la conversación que mantuvimos acerca de los caminos para analizar los diversos juegos, e intentado aplicar tus sabias enseñanzas al Bransiddhta. Sospecho que este juego se presta a un análisis similar, pero no termino de completarlo. Te ruego me ayudes. Te confieso, y confío en tu discreción, que me subleva el hecho de que mi dulce Señora, la Emperatriz, me derrote siempre en nuestras partidas.

—Mi Señor, vuestra confianza en mí me halaga, siendo como soy poco merecedor de tal distinción, pues apenas soy un humilde siervo de...

—Por Vishnú, al que ruego nos proteja y dé felicidad, deja esas consabidas fórmulas y háblame sobre el juego.

—Os ruego me perdonéis, mi Señor. El juego al que os referís no debería tener secretos para vos, que ya estáis versado en los resortes del pensamiento que permiten desentrañar la esencia de estos entretenimientos. Si me permitís una humilde observación, nuestra Emperatriz demuestra una gran astucia, pues supongo que siempre opta por ser la primera en jugar.

—Pues sí, tienes razón. ¿Es ésa la clave que le permite ganar siempre? Por utilizar tus términos, ¿es que acaso dispone del Libro Blanco del Bransiddhta?

—Mi Señor, lo único que puedo aseguraros es que tal libro existe, no así el Libro Negro.

—No tan rápido. Supongamos que construimos una cascada semejante a la que me mostraste para el juego del Shydarayata; sin duda habrá de constar de multitud de fuentes y torrentes... Pero una primera duda me asalta: ¿puede acaso el juego terminar en tablas?

—Mi Señor, tal posibilidad no existe, como bien podéis descubrir. Os ruego que penséis en los siguientes términos: el jugador blanco está construyendo un cauce para un río que una sus dos orillas, mientras que el jugador negro trata de levantar una presa de piedras que impida el paso de las aguas. Sólo logrará bloquear las aguas si su construcción le permite ir, pasando de piedra a piedra, de una de sus orillas a la otra.

—Lo que dices suena razonable, y me convence[14].

El Emperador medita durante unos instantes, y prosigue:

—Pero entonces, como la cascada es finita y sólo hay dos posibles finales, uno de los dos libros, quizás el Blanco o quizás el Negro deberá existir. ¿O acaso es posible que existan ambos? No, espera, procediendo hacia atrás, como tú me enseñaste, la primera fuente de la cascada sólo puede acabar con el símbolo del Blanco o del Negro, pero nunca con los dos a la vez. Ya veo: ¿y por qué aseguras que es el Libro Blanco el que existe, y no el otro?

—Mi Señor, os daré un argumento, que más parece un ardid, pero que comprobaréis que es sólido como el suelo que nos sostiene. Suponed que es el Libro Negro el que existe.

—¡Por Brahma, nuestro creador, que me confundes! ¿No es la existencia del Libro Blanco la que perseguís comprobar?, ¿y queréis partir de la existencia del Libro Negro?

—Mi Señor, este ardid no es invención mía, sino que es un fértil camino de constatación, que ya utilizaban los maestros del Lejano Poniente[15].

Esta invocación a sus adorados filósofos occidentales tranquiliza al Emperador, que concede:

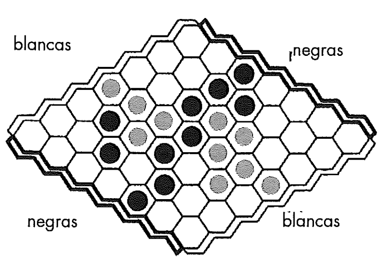
—De acuerdo, el Libro Negro existe. ¿Y qué?

—El jugador blanco hace un primer movimiento, no importa cuál. Y, a todos los efectos, actúa como si esa casilla elegida estuviera vacía. Así el Blanco se ha convertido en Negro y viceversa. Por tanto, podrá leer el Libro Negro y seguir sus preceptos.

El Emperador empieza a desesperarse ante lo intrincado del argumento, pero no desea hacerlo notar. Así que medita sobre el asunto y responde:

—Tengo una objeción: ¿qué ocurre si los mandamientos del Libro Negro exigen en algún momento elegir la casilla que Blanco tomó en primer lugar?

—Mi Señor demuestra gran perspicacia al plantearme esta dificultad. Si tal fuera el caso, Blanco volvería a escoger una casilla al azar, y de nuevo estaría en condiciones de leer el Libro Negro. Esto se haría tantas veces como fuera necesario. Siguiendo los mandatos del Libro Negro, como la casilla adicional sólo



¿No es la existencia del Libro Blanco la que perseguís comprobar?, ¿y queréis partir de la existencia del Libro Negro?

podría, en todo caso, ayudar a Blanco a completar su plan, es seguro que acabaría venciendo[16].

—No sé si acabo de captar lo que dices. Pero, si fuera cierto, el Libro Negro permitiría al Blanco conseguir la victoria... ¡Así estaríamos escribiendo las líneas de un Libro Blanco! Y habíamos convenido en que ambos no pueden existir simultáneamente.

—Mi Señor, habéis captado la esencia del argumento que utilizan los maestros del Lejano Poniente: esta situación absurda nos muestra sin lugar a dudas que ese supuesto Libro Negro no puede existir.

El Emperador considera que por esta sesión es suficiente y despide al astrólogo.

Epílogo

Nos consta la autenticidad del documento de Ben Barrí, aunque nunca sabremos a ciencia cierta si las Actas que transcribió son reales o no, pues, como nos señala nuestro comunicante, era entonces costumbre que los eruditos, como sin duda era nuestro personaje, utilizaran parábolas y hechos figurados para transmitir sus enseñanzas.

Pero, tanto si son creación de Ben Barri como si, efectivamente, son una transcripción de las Actas originales, el texto muestra un conocimiento preciso y profundo de lo que hoy conocemos como Teoría de Juegos[17]. ¿Cuántas veces más habrá sido así, cuántos redescubrimientos?

¿Serían Zermelo y Nash reencarnaciones del astrólogo Sadaranujan, o del mismísimo Ben Barrí?[18]

¿Serían Zermelo y Nash reencarnaciones del astrólogo Sadaranujan, o del mismísimo Ben Barrí?

Pablo Fernández Gallardo
J. Luis Fernández Pérez
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid

Notas

1 *Nota del comunicante:* Conviene recordar que en el Imperio del Ganges los torneos se disputaban con el mismo sistema de competición que la lucha canaria, en la que se van enfrentando sucesivamente un luchador por cada equipo. El luchador que pierde queda eliminado. Una *luchada* concluye cuando todos los luchadores de un equipo han sido eliminados. Normalmente, la luchada se decide en la confrontación final entre los dos *puntales,* generalmente los luchadores de mayor peso y fortaleza.

2 Aquí Sadaranujan se adelanta al célebre matemático alemán Jacobi en su famosa prescripción de que la razón de hacer Matemáticas era por el puro honor del espíritu humano. Loable actitud que, sin embargo, desmerece la asombrosa utilidad de las matemáticas (en palabras de Eugene Wigner, «the unreasonable effectiveness of Mathematies in the Natural Sciences»).

3 Hoy utilizamos la palabra estrategia; el Libro Blanco sería una estrategia que permitiría al jugador blanco forzar una victoria o unas tablas. Es decir, un protocolo preciso y prescrito de cómo reaccionar ante cualesquiera movimientos del adversario.

4 *Nota del comunicante:* Aunque en algunos de los juegos precursores del ajedrez moderno se utilizaba un dado para decidir qué pieza se movía (y se jugaba entre cuatro jugadores). El astrólogo parece referirse a una versión entre dos jugadores y sin dado, más parecida al juego actual. Por otra parte, las reglas de estas versiones primeras diferían de las actuales. Todavía en tiempos de Alfonso X, como se recoge en sus *Juegos de axedrez, dados y tablas,* la dama sólo podía desplazarse una casilla, en cualquier dirección, o el alfil dos casillas (aunque podía saltar por encima otras piezas). Las reglas que hoy utilizamos se fijaron, esencialmente, a partir del siglo XV.

5 Este comentario nos permite deducir que ya entonces el número de jugadas de una partida estaba limitado.

6 Aquí se equivocaba Sadaranujan. Ni con toda la potencia computacional que ahora nos ofrecen todos los ordenadores de la tierra podríamos completar esa tarea en un tiempo inferior al de toda la historia del Universo. Pero este error no resta validez a su argumentación.

7 *Nota del comunicante:* El Shydarayata era un juego del que gustaban los niños del Imperio. Consistía en disponer unos guijarros sobre una mesa y dos jugadores, blanco el que empezaba, y negro el otro, se turnaban en retirar uno o dos guijarros. El que quitaba el último perdía. Había muchas variaciones, varios montones, otras reglas para la retirada de guijarros... Hoy en día se conoce a este juego como el del Nim.

8 *Nota del comunicante:* Afortunadamente para el astrólogo, pues los arrebatos de ira del Emperador y sus consecuencias eran bien conocidos y temidos en todo el Imperio.

9 El manuscrito de Ben Barra no incluye ilustraciones de estas cascadas, así que nos hemos permitido dibujarlas a la manera en que hoy se representan, como árboles.

10 El lector habrá adivinado que las fuentes son los círculos y los torrentes las líneas que conectan una fuente de un nivel con una fuente del nivel inmediatamente inferior. En términos de hoy, los vértices y las aristas del árbol.

11 Muchos años después, Ernst Zermelo, matemático alemán del siglo XX, a quien debemos gran parte de la fundamentación actual de las Matemáticas, nos legaría un detallado análisis de juegos como el ajedrez o el Nim, que técnicamente se conocen como juegos con información completa y de competencia estricta. Zermelo renunció a su cátedra en Friburgo por oposición al nazismo. El húngaro John von Neumann y el austriaco Oskar Morgenstern fueron los primeros en formalizar lo que hoy conocemos como Teoría de Juegos, en su clásico *Theory of Games and Economic Behavior* (1944). Von Neumann también es bien conocido por sus aportaciones a la Lógica, la Mecánica Cuántica, la Teoría de los Procesos Estocásticos, la Inteligencia Artificial, etc. Todo un personaje. En palabras de otro húngaro ilustre, George Pólya, «Johnny ha sido el único estudiante que me llegaba a atemorizar. Si en el transcurso de una lección yo proponía un problema abierto, lo más probable es que él me viniera, a la salida de la clase, con la solución completa garabateada en un trozo de papel».

12 *Nota del comunicante:* El «juego de los tres espíritus», que hoy conocemos como las tres en raya.

13 Según nuestro comunicante, el «juego de los ríos». Hoy en día es conocido como el juego del Hex, y fue redescubierto por el poeta e ingeniero danés Piet Hein en 1942 y, posteriormente, por John Nash en 1948. Nash, tan de actualidad con motivo de la oscarizada película *Una mente maravillosa,* construyó el argumento que aquí anticipaba el astrólogo. Los trabajos de Nash en el campo de la Teoría de Juegos le valieron el Premio Nobel de Economía en 1994. El juego del Hex fue comercializado unos años después y popularizado por Martin Gardner en sus artículos divulgativos en los años 70. Dos jugadores van situando alternativamente fichas blancas y negras en el tablero; el que juega con blancas empieza, y gana aquél que consiga un *camino* de fichas de su color, consecutivas, que una las orillas de su color.

14 El razonamiento del astrólogo es intuitivamente obvio. Pero, como en muchas cuestiones topológicas, como por ejemplo el teorema de la curva de Jordan, que el lector podrá adivinar está muy relacionado con esta cuestión, una demostración rigurosa es complicada. En el artículo de David Gale «The Game of Hex and the Brouwer fixed-point theorem», *Am. Math. Monthly,* n.° 86 (1979), páginas 818-827, se puede encontrar una demostración de carácter combinatorio de este hecho, así como su relación con el teorema del punto fijo de Brouwer.

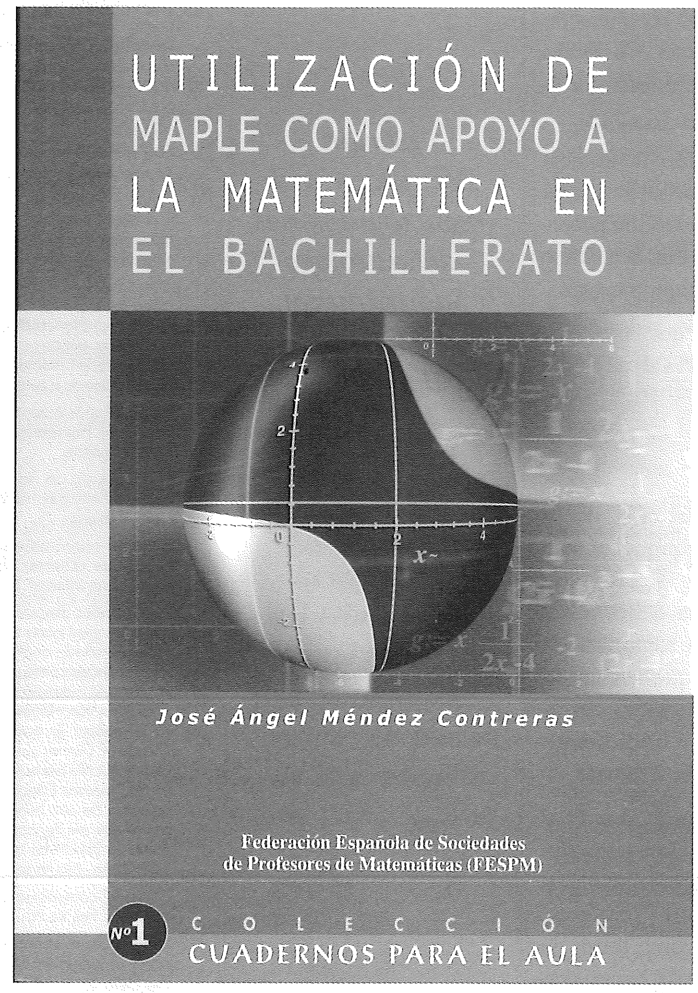
15 Un argumento de reducción al absurdo, como habrá adivinado el lector.

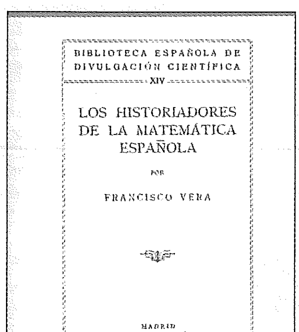
16 El lector debería reflexionar sobre los argumentos del astrólogo, pues son sutiles. Conviene señalar que la simetría del tablero desempeña un papel fundamental en ellos.

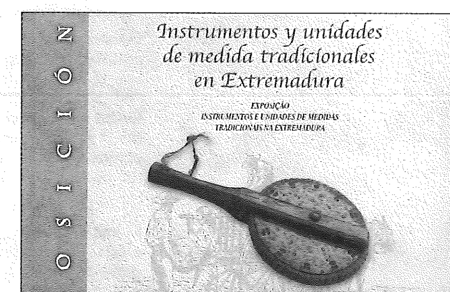
17 Para aquéllos que quieran profundizar en estas cuestiones, el libro de Ken Binmore *Fun and games: a text on Came Theory,* D. C. Heath, Lexington, Massachusetts, 1992, es una buena referencia.

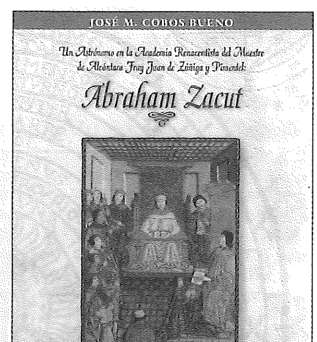
18 Si a estas alturas algún lector sigue preocupado por la identidad de nuestro misterioso comunicante, digamos que... digamos que es una reencarnación de Cide Hamete Benengeli.

PUBLICACIONES DE LA FEDERACIÓN









SUMA 43
junio 2003, pp. 113-114

Isoperímetros: El problema de los isoperímetros veinticuatro siglos después

Grupo Construir las Matemáticas*

TALLER DE PROBLEMAS

TODO TIENE UN FINAL, incluso una etapa de progreso y buen hacer como este último periodo de nuestra querida SUMA. Emilio y Julio han cumplido de sobra y pasan el testigo. Sirvan estas líneas introductorias a nuestra también última entrega isoperimétrica para mostrarles nuestro reconocimiento. Sobresaliente cum laude por unanimidad, amigos.

Si $\alpha(t)$ es una curva plana, parametrizada por el arco, regular en $[0, L]$, cerrada y simple entonces $-\alpha([0, L])$ tiene exactamente dos componentes conexas (divide al plano en dos partes, el interior a la curva y su exterior, tales que $\alpha([0, L])$ es su frontera común).

Este enunciado corresponde al teorema de la curva de Jordan, curva con la que se establece el problema con el que hemos mantenido esta sección de problemas: De todas las curvas de Jordan de longitud *L*, ¿cuál determina un interior con mayor área?; si existe, ¿cuál es su forma? En los números anteriores ya se ha presentado la solución y, sobre todo, posibles introducciones en la enseñanza de las Matemáticas. Para Secundaria y Bachillerato, presentábamos clases de Geometría, de Álgebra o de Análisis. Para la universitaria, motivaciones para el Cálculo de Variaciones y para poner de manifiesto la dificultad de solución para el problema de existencia de solución, y caben destacar dos de ellas, una debida a A. Hurwitz (1902), elegante y corta que utiliza ideas de la teoría de series de Fourier (Chern, 1967) y otra de E. Schmidt, la más sencilla de las conocidas, que utiliza la fórmula de Green para el área de un recinto plano (do Carmo, 1976).

El problema isoperimétrico se materializa en la desigualdad isoperimétrica: *si tenemos una curva de Jordan, de longitud* L *y área acotada por ella* A, *entonces* $L^2 - 4\pi A > 0$ *(la igualdad se da si y sólo si la curva es una circunferencia)*. También nos ocupamos de ella, analizando la forma óptima de las latas de bebidas que nos resultan habituales. En esta última

* Los componentes del Grupo Construir las Matemáticas son Rafael Pérez, Isabel Berenguer, Luis Berenguer, Belén Cobo, M.ª Dolors Daza, Francisco Fernández, Miguel Pasadas y Ana M.ª Payá.

colaboración queremos añadir otra aplicación de esta famosa desigualdad: *¿puede deducirse la forma de un tambor a partir de su sonido?* Si se tiene un dominio regular D de $\mathbb{R}^2$, cuya frontera está formada por curvas de Jordan, puede verse como una membrana vibrante sujeta por su frontera, es decir, ¡un tambor! Es lógico pensar que se pueden diseñar infinitos tambores atendiendo a la forma de su membrana. Las vibraciones de D son funciones de $F(u, v)$: $D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que

$$\Delta F + \frac{\partial^2 F}{dt^2} = 0 \quad y \quad F|\partial D \times \mathbb{R}$$

El problema de Stone-Weierstrass permite separar las variables y estudiar vibraciones de la forma

$$F(u, v) = f(u)g(v),$$

siendo f: $D \to \mathbb{R}$ y g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y se obtiene

$$(\Delta f)/f = -g"/g = \lambda$$

donde λ es una constante íntimamente relacionada con las vibraciones, puesto que $g" + \lambda g = 0$. ¿Cuál es conjunto de valores de λ para los cuales existe f, no nula, tal que

$$\Delta f = \lambda f \quad y \quad f|\partial D = 0?$$

Este conjunto es el *espectro de D,* entonces, nuestro problema puede formularse así: *¿queda un dominio caracterizado por su espectro?* O también, *si dos espectros coinciden, ¿los dominios asociados son iguales?* Lo que nos lleva a decir que si dos membranas vibrantes, D_1 y D_2, tienen las mismas frecuencias de vibración, ¡los dos tambores tienen igual sonido! El problema planteado al comienzo es el recíproco: si dos tambores emiten el mismo sonido, ¿tendrán la misma forma? En suma, ¿puede oírse la forma de un tambor?

El problema isoperimétrico resuelve el problema para tambores circulares: se puede oír la forma de un tambor circular; esto es, se puede distinguir por el sonido si un tambor es o no circular. Es decir, el espectro de un dominio determina su área A y la longitud de su borde L y sabemos que el dominio es circular si y sólo si $L^2 = 4\pi A$.

Como hemos tratado el problema isoperimétrico en tres dimensiones podemos preguntarnos acerca de la existencia de una desigualdad isoperimétrica sobre una superficie regular cualquiera (por ejemplo, sobre una esfera). En este caso la respuesta es negativa (a quien le interese este aspecto puede ver Osermann, 1975).

En el recorrido que hemos hecho de la mano del problema isoperimétrico, y también pensando en tres dimensiones, pasamos por la formulación correspondiente a panales de abejas y vimos que la celdilla de Fejes Tóth mejoraba a la construida por las abejas (aunque prácticamente no era interesante su realización). El siguiente enunciado sobre el problema isoperimétrico para panales es todavía un problema a la espera de solución:

> Dados dos números cualesquiera, *V* y *A*, hallar un panal de anchura *A* (distancia entre los dos planos paralelos que limitan el panal) cuyas celdillas tengan superficies de área mínima y encierren un volumen *V*.

Decididamente, la solución no es la aportada por las abejas ya que, al menos, la dicha de Fejes Tóth mejora la de aquellas. Esta formulación nos lleva considerar *superficies minimales.* Esto nos conduce a un grupo de investigación al que interesa el problema isoperimétrico en sus formulaciones actuales y de reconocido prestigio internacional. Se trata de grupos del Departamento de Geometría de la Universidad de Granada. Primero, M. Barros –del que hemos resumido en las notas anteriores parte de uno de sus artículos divulgativos que publicó sobre el tema (Barros, 1984)– y, después, A. Ros son los responsables de introducir la línea de investigación y dirigir los correspondientes grupos que viene aportando resultados del mayor interés. En la web <www.ugr.es/~ritore/preprints/int.pdf> hay información al respecto.

Fin (por nuestra parte).

Bibliografía

BARROS, M. (1984): «Algunas propiedades globales de curvas planas. Aplicaciones», *Epsilon*, n.° 2, 27-40.

CHERN, S. S. (1967): «Curves and surfaces in Euclidean spaces», *Studies in global Geometry and Análisis,* The Mathematical Association of America, 16-56.

CARMO, M. P. do (1976): *Geometría diferencial de curvas y superficies,* Alianza Universidad Textos.

OSERMANN, R. (1975): «Isoperimetric and related inequalities», *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics,* n.° 27, 207-215

SUMA 43
junio 2003, pp. 115-118

Las matemáticas en la prensa: el Premio Abel

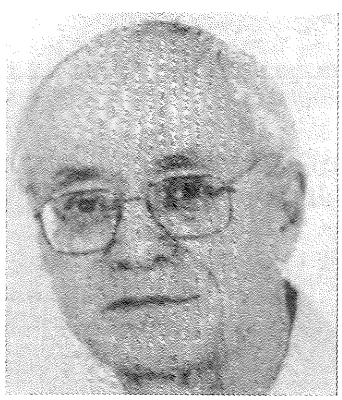
Fernando Corbalán

MATES Y MEDIOS

A LO LARGO DE ESTA SERIE de artículos que ahora termina he intentado aportar datos y puntos de vista para resaltar el hecho de que las matemáticas constituyen una parte importante de los medios de comunicación y, sobre todo, que una mirada con ojos matemáticos a los medios sirven para desenvolverse mejor entre el torrente de noticias que nos arrolla y poder tener una opinión propia.

Si es cierto lo anterior y que, como dice un libro publicado recientemente (*El lenguaje de las matemáticas*, de K. Devlin; Robinbook, Barcelona, 2002), «así como la sociedad quemó combustibles fósiles para propulsar las máquinas de la era industrial, en nuestra era actual de la información el combustible principal que quemamos son las matemáticas», la verdad es que los medios de comunicación de nuestro país en su conjunto no se han enterado de ninguno de los dos aspectos, y siguen en la era de los fósiles. Y es que si son constantes las constataciones de que las matemáticas no son objeto de interés de los medios, la 'casi' ausencia de una noticia que tendría que haber ocupado un lugar destacado vuelve a ponerlo de manifiesto.

Nos referimos a la concesión a Jean-Pierre Serre del primer Premio Abel de Matemáticas, el equivalente matemático del Nobel en otras disciplinas. El Premio Abel lo otorga la Academia de Ciencias y Letras noruega (que se encarga también del Nobel de la Paz) y tiene una dotación de unos 760.000 euros, similar a los Nobel. Fue instituido en 2002 para conmemorar el bicentenario del nacimiento del matemático noruego Abel, un siglo después de un intento similar que no llegó a buen puerto.



El jurado del premio estaba formado por Erling Stormer, de la Universidad de Oslo, John Macleod Ball de la de Oxford, Friedrich Hirzebruch, del Instituto Max Planck de Matemáticas alemán, David Mumford de la Brown University norteamericana y Jacob Palis, del Instituto Nacional de

ABEL
PRISEN

La Academia Noruega de Ciencias y Letras ha resuelto conceder el Premio Abel 2003 a

Jean-Pierre Serre
Colegio de Francia, París, Francia,

"por su papel central en la elaboración de la forma moderna de numerosas partes de las Matemáticas, en particular la Topología, la Geometría Algebraica y la Teoría de los Números".

El primer Premio Abel ha sido otorgado a Jean-Pierre Serre, uno de los grandes matemáticos de nuestros días. Serre es Profesor Honorario del Colegio de Francia de París. Durante más de medio siglo, ha contribuido notablemente al progreso de las Matemáticas, y lo sigue haciendo.

Los trabajos de Serre son de una amplitud, profundidad e influencia extraordinarias. Serre ha desempeñado un papel central en la elaboración de la forma moderna de numerosas partes de las Matemáticas, en particular:

- La Topología, que trata de la cuestión siguiente: ¿Qué es lo que se mantiene constante en geometría aún cuando se deforme la longitud?
- La Geometría Algebraica, que trata de la cuestión siguiente: ¿Cómo resolver geométricamente los sistemas de ecuaciones polinómicas?
- La Teoría de los Números, el estudio de las propiedades básicas de los números. Por ejemplo los números primos y la resolución de las ecuaciones polinómicas en el Último Teorema de Fermat.

Serre desarrolló métodos algebraicos revolucionarios para el estudio de la Topología, ocupándose en particular de las transformaciones entre hiperesferas. A él se debe una espectacular aclaración de los trabajos de los geómetras algebristas italianos mediante la introducción y el desarrollo de los sistemas algebraicos adecuados para determinar cuándo funcionaban sus construcciones geométricas. Esta potente técnica de Serre, con su nuevo lenguaje y su punto de vista inédito, inauguró una nueva edad de oro de la Geometría Algebraica.

Durante las últimas cuatro décadas, los magníficos trabajos de Serre y su visión de la Teoría de los Números han sido decisivos para dar a esta disciplina su éxito actual. Estos trabajos conectan y amplían en muchos aspectos las concepciones matemáticas introducidas por Abel, en particular su prueba de la imposibilidad de resolver las ecuaciones de quinto grado por radicales y sus técnicas de análisis para el estudio de las ecuaciones polinómicas con dos variables. Las investigaciones de Serre han sido centrales para abrir la vía a los descubrimientos recientes más destacados, inclusive la prueba por Wiles del Último Teorema de Fermat.

Si bien es cierto que Serre ha centrado sus esfuerzos en las matemáticas más abstractas, sus aportaciones han encontrado importantes aplicaciones. Determinados problemas prácticos que plantean el desarrollo de eficaces códigos de corrección de errores y la criptografía de llave pública se resuelven mediante ecuaciones polinómicas (en particular en los campos finitos), y los trabajos de Serre han profundizado realmente nuestra comprensión de este tema.

Jean-Pierre Serre nació en 1926 en Bages, Francia. Cursó estudios en la Escuela Normal Superior y obtuvo el título de Doctor en Ciencias por la Universidad de la Sorbona de París en 1951. Después de haber ocupado varios puestos en el Centro Nacional de Investigaciones Científicas, fue Profesor Asociado en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Nancy. En 1956, se le nombró Profesor del Colegio de Francia.

Serre es miembro de la Academia de las Ciencias de Francia. Es Gran Oficial de la Orden Nacional del Mérito y Comendador de la Legión de Honor. Ha sido nombrado miembro de varias Academias Nacionales, en particular las de Francia, Suecia, los Estados Unidos y los Países Bajos. Entre las distinciones con que ha sido galardonado están la Medalla Fields en 1954 (sigue siendo el receptor más joven), el Premio Gaston Julia en 1970, el Premio Balzan en 1985, el Premio Steele en 1995 y el Premio Wolf en 2000. Ha sido nombrado Doctor Honoris Causa por numerosas universidades, en último lugar la Universidad de Oslo, en 2002, en ocasión de la conmemoración del bicentenario del nacimiento de Niels Henrik Abel.

Det Norske Videnskaps-Akademi The Norwegian Academy of Science and Letters
A: Drammensveien 78, N-0271 Oslo, Norway | T: +47 22 12 10 90 | F: +47 22 12 10 99 | E: abelprisen@dnva.no | W: www.abelprisen.no

Matemática Pura e Aplicada (IMPA) brasileño. Y en el comunicado de concesión se señala que lo otorgan a Serre «por su papel central en la elaboración de la forma moderna de numerosas partes de las Matemáticas, en particular la Topología, la Geometría Algebraica y la Teoría de los Números». [Se adjunta la versión castellana de la Academia Noruega en la que aparece una pequeña biografía personal y profesional].

¿Cómo fue recogida esta noticia en la prensa española? La concesión se realiza el 3 de abril y en *El País* del día 4 aparece un artículo (no demasiado largo –menos de media página– ni en lugar destacado –página 40–) con la noticia y algunos comentarios de matemáticos españoles que ha trabajado con él, así como de sus estancias en Barcelona. Y más adelante (el 16 de abril) en el suplemento de Ciencias del mismo periódico hay un artículo de Pilar Bayer sobre el tema: «Serre, 'Nobel' de matemáticas». No es que me detenga demasiado con ese diario. Es que de mis pesquisas en la prensa de difusión nacional en un entorno de una semana de la fecha de concesión no he encontrado ninguna otra referencia ni grande ni pequeña (ha incluido *El Mundo*, *ABC*, *La Vanguardia* y también *Heraldo de Aragón* por ver si en la prensa 'regional' se colaba). Admito que puede estar en algún pequeño rincón que no he encontrado (o grande que no fui capaz de ver), pero desde luego no mereció un tratamiento destacado, similar al de la concesión de los Premios Nobel. Buscando disculpas pensemos que es tal vez por la novedad. Pero el hecho objetivo es que a los periódicos llegó una noticia de agencia que no se consideró con la suficiente importancia como para encontrale un espacio en el periódico. De forma que incluso para los interesados en el tema (como muchos profesores de matemáticas) pasó desapercibido un hecho importante, al menos para nuestro pequeño mundo.

Desconozco si el Premio apareció en los noticiarios radiofónicos o televisivos, porque como ya hemos indicado en otros artículos, son mucho más difíciles de seguirles la pista. Lo que nos vuelve a una de las grandes potencialidades de los medios de comunicación: la comparación en varios de ellos del tratamiento de un mismo acontecimiento. Y aunque sea una invasión de otra de las secciones de la revista (Recursos en Internet) nos conduce a un medio reciente (acaba de celebrar su primer decenio): las versiones digitales de los periódicos.

Pero antes de pasar a ese tema, para quien sea de su interés, doy algunas direcciones electrónicas en las que encontrar información sobre Serre y sobre el Premio Abel. En primer lugar está la propia dirección del Premio (www.abelprisen.no/index_english.html) con información sobre el mismo, que incluye una descripción comprensible de la importancia de los trabajos de Serre en diferentes campos de las matemáticas actuales. La asociación francesa de profesores APMEP (www.apmep.asso.fr) da amplia información sobre su vida, obra y temas conexos (se puede entrar desde la dirección con la palabra Serre o directamente en www.apmep.asso.fr/abel03.html). En la página de la AMS americana (http://www.ams.org) y en particular en su apartado http://www.ams.org/notices/200005/comm-wolf.pdf hay mucha información (en inglés) sobre Serre. En algún sitio en castellano también hay más cosas sobre Serre, como en www.matematicas.net, donde se puede ver una lista de Medallas Field en la que él está.

La prensa digital

Ya hemos dicho varias veces que una de las ventajas de la prensa es poder comparar posturas ante un mismo tema, que nos hacen ver que incluso la ventaja que proporcionan los datos matemáticos de que son indiscutibles, desaparece, puesto que ante un mismo hecho (y a veces incluso con la misma fuente de la noticia) nos dan números diferentes. La primera impresión al confrontarse con esa

Jean-Pierre Serre obtiene el primer 'Nobel' de matemáticas

La Academia de Ciencias noruega inaugura el galardón Abel

M.R.E., **Madrid**

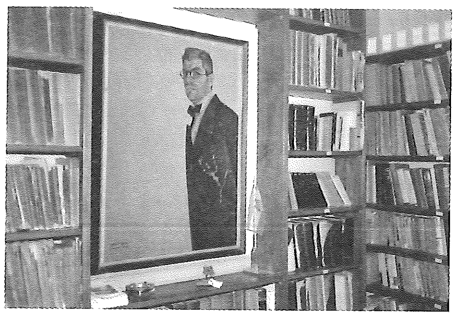
Con el apoyo de la Unión Matemática Internacional, la Academia Noruega de Ciencias y Letras anunció ayer el ganador del primer premio Abel de Matemáticas, dotado con 760.000 euros, que aspira a convertirse en el Nobel de esta disciplina. El prestigioso matemático francés Jean-Pierre Serre ha sido el ganador "por su papel central en la elaboración de la forma moderna de numerosas partes de las matemáticas, en particular la topología, la geometría algebraica y la teoría de números", según el jurado.

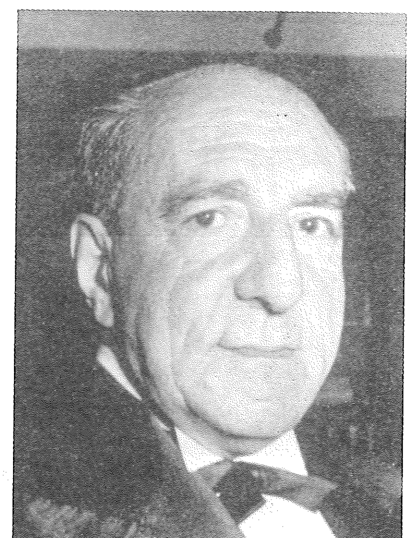
situación es que es un asunto de manipulación informativa: cambiar a conciencia los datos para inducir determinadas conclusiones. Pero si es un ejercicio que se hace con regularidad se comprueba la perseverancia en los 'errores' en la mayoría de los medios, con lo que parece razonable llegar a la conclusión de que es más bien ineptitud matemática (y es conveniente que sea cada uno de los alumnos quien llegue a esa conclusión).

Durante mucho tiempo existía el inconveniente de la dificultad de obtener varios periódicos de fecha del día o por lo menos próxima, sobre todo si queríamos que fueran de lugares geográficos lejanos, algo muy conveniente en estos tiempos de guerras y confrontaciones. Pero esa dificultad ha desparecido con las ediciones digitales y la conexión a Internet en las propias aulas. En 'tiempo real' podemos tener elementos de juicio para hacernos una idea más contrastada de los distintos puntos de vista, que no sólo no suelen ser coincidentes sino que con cierta frecuencia son contrapuestos. Y que en bastantes casos aportan datos diferentes sobre las mismas situaciones, con lo que nosotros (y nuestros estudiantes) tendremos que hacer algo que nadie hará por nosotros: pensar.

Y ya sólo queda encontrar formas fáciles de llegar a muchos medios de comunicación. Se puede acceder a ellos a partir de los servicios de algunas páginas web, pero, de todas las que conozco, la mejor con gran diferencia es la sueca 'Kiosken' (www.esperanto.se/kiosk/engindex.html), que enlaza con 15559 medios distintos de 213 países. Solamente con ella podemos hacernos una idea clara del reflejo en los medios de todo lo que pasa en el mundo.

[Y sólo queda la despedida. A lo largo de varios números he estado intentando ver la importancia de la utilización de los medios en la enseñanza en general y de las matemáticas en particular. Espero haber contribuido a lograr que en las clases de matemáticas haya un pequeño rincón para los medios. Gracias y hasta siempre].





SUMA 43
junio 2003, pp. 119-122

Rompecabezas del teorema de Pitágoras

Grupo Alquerque*

SIN DUDA, EL MATEMÁTICO más conocido en nuestro tiempo por las personas que no tienen una relación corriente con las matemáticas es Pitágoras (aunque algún alcalde de ciudad importante piense que no haya hecho mucho por ella). Quizás de su vida se conozca poco, no se sepa en qué época vivió, cuáles fueron sus estudios, pero lo que es indudable es que todo el mundo conoce el teorema que lleva su nombre, e incluso personas que perdieron hace mucho tiempo su relación con la escuela son capaces de repetir su enunciado.

Aparte de las comprobaciones numéricas y demostraciones algebraicas, existe una gran variedad de demostraciones geométricas, que pueden aprovecharse para montar juegos de rompecabezas.

El Teorema de Pitágoras era conocido antes que él por babilonios, hindúes, chinos o egipcios (al menos para ciertos triángulos rectángulos) y ha recibido a lo largo de la historia nombres muy significativos. Por ejemplo los hindúes lo llamaban el *Teorema de la Silla de la Esposa.* En la Edad Media se conocía como *Teorema Maestro de la Matemática* pues todo aquel que deseaba acceder a la categoría de maestro en matemáticas debía presentar una demostración propia (de ahí la gran cantidad de demostraciones geométricas existentes). En el siglo XVIII se conocía como el *Teorema del Puente de los Burros,* pues el que superaba ese Teorema entraba en el mundo del conocimiento matemático. Hoy en día se calcula que pueden existir cerca de 1.000 demostraciones, hechas no sólo por matemáticos, sino también por personajes tan diferentes como filósofos, monjes, políticos…

Puzzles de Pitágoras

Los siguientes juegos se basan en este conocido teorema. La forma de presentarlos es como un puzzle en el que partiendo de un triángulo rectángulo y al montar las piezas se puede formar por un lado el cuadrado

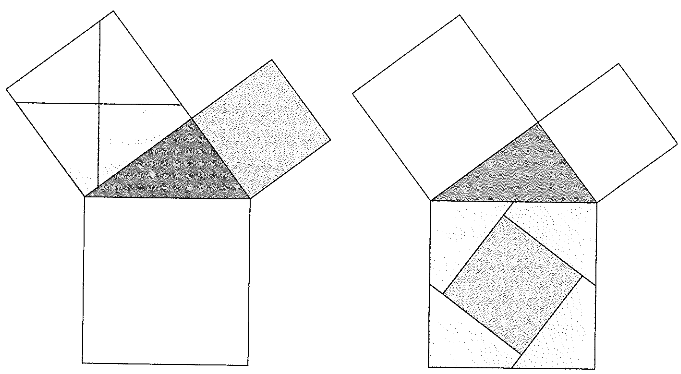
JUEGOS

* Los componentes del Grupo Alquerque de Sevilla son Juan Antonio Hans Martín (C.C. Santa María de los Reyes), José Muñoz Santonja (IES Macarena), Antonio Fernández-Aliseda Redondo (IES Camas), José Blanco García (IES Alcalá del Río) y Josefa M.ª Aldana Pérez (C.C. Inmaculado Corazón de María —Portacelli—).

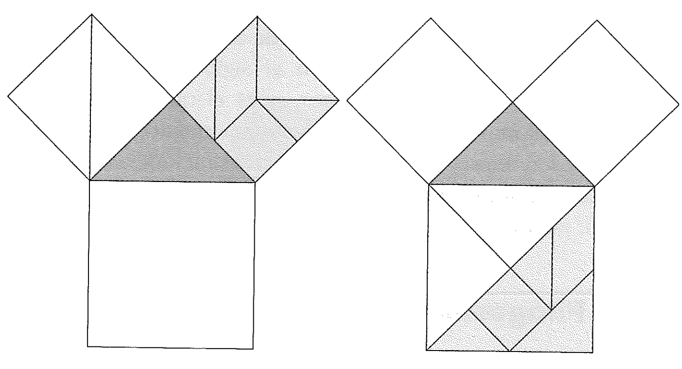
sobre la hipotenusa, y con las mismas piezas se construyen por otro los cuadrados sobre los catetos.

Estos rompecabezas se pueden usar en primaria como simples juegos para trabajar equivalencias de superficies, y en secundaria como complemento a las comprobaciones numéricas y demostraciones algebraicas.

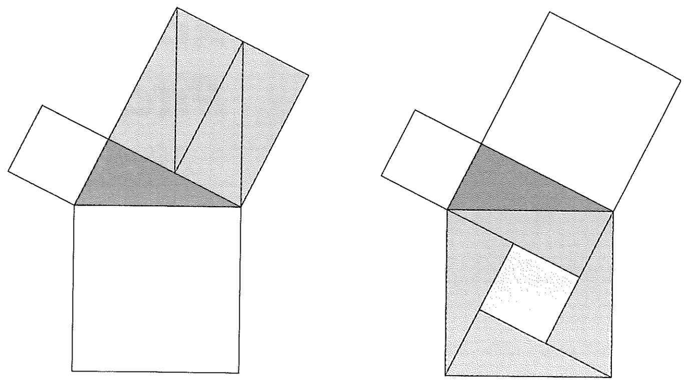
Tal vez la disección más conocida es la atribuida a Henry Perigal (1801-1898), corredor de bolsa londinense y astrónomo, y que se encuentra grabada en piedra en la lápida de su tumba en Essex. En ella se divide en cuatro partes el cuadrado construido sobre el cateto mayor a partir de su centro (que se puede hallar por intersección de las diagonales), trazando posteriormente por él una paralela y una perpendicular a la hipotenusa del triángulo.



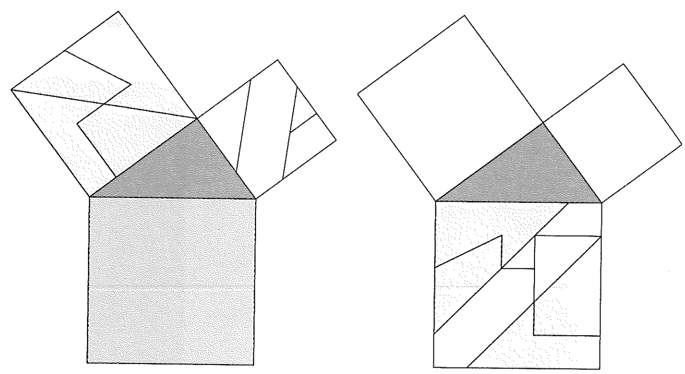
Otra demostración fácil de realizar utiliza las siete piezas del Tangram Chino. En este caso el triángulo sobre el que se trabaja no es un triángulo rectángulo cualquiera sino rectángulo e isósceles, y coincide con uno de los triángulos mayores del tangram.



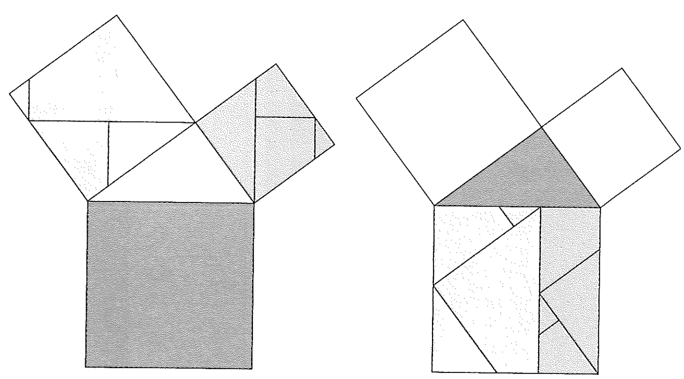
Posiblemente el puzzle más simple en su construcción se basa en la demostración realizada por el matemático y astrónomo hindú Bhaskara Akaria (1114-1185), autor del libro Lilavati dedicado a problemas aritméticos, geométricos y combinatorios. En él uno de los catetos ha de ser doble que el otro.



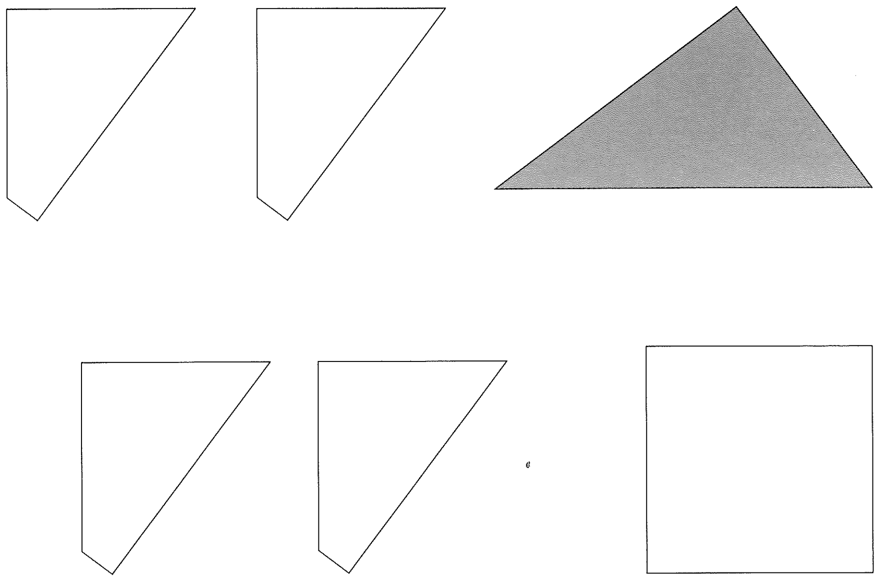
Hace unos años la Junta de Andalucía presentó la siguiente división como divulgación de la bandera de nuestra comunidad, ya que si el cuadrado sobre el cateto grande se dibuja de verde y el del pequeño de blanco, al montar el cuadrado sobre la hipotenusa aparece en diagonal la bandera de la comunidad andaluza (verde-blanco-verde).



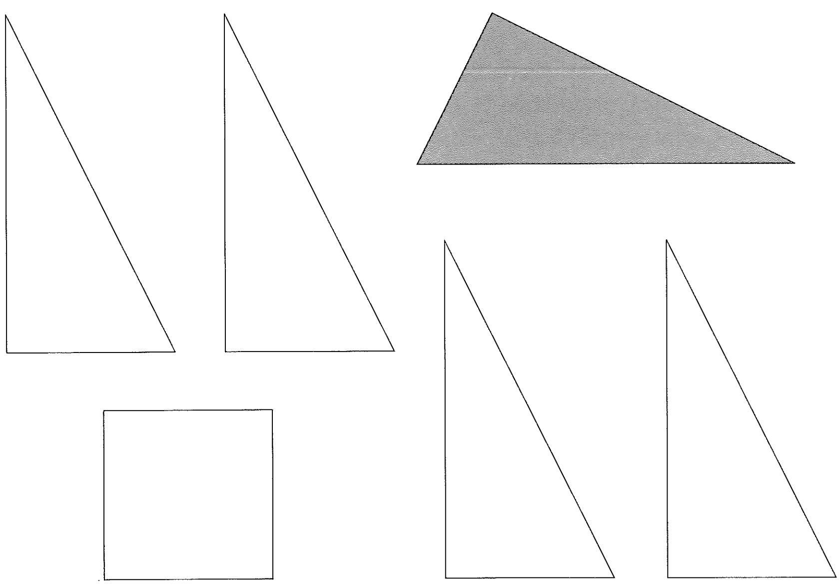
Por último presentamos otra demostración mediante rompecabezas del Teorema de Pitágoras que puede ser utilizada para demostrar asimismo el Teorema de los Catetos ya que el cuadrado sobre la hipotenusa queda dividido en dos rectángulos cuyas áreas son respectivamente el producto de la hipotenusa por la proyección de cada cateto sobre ella.



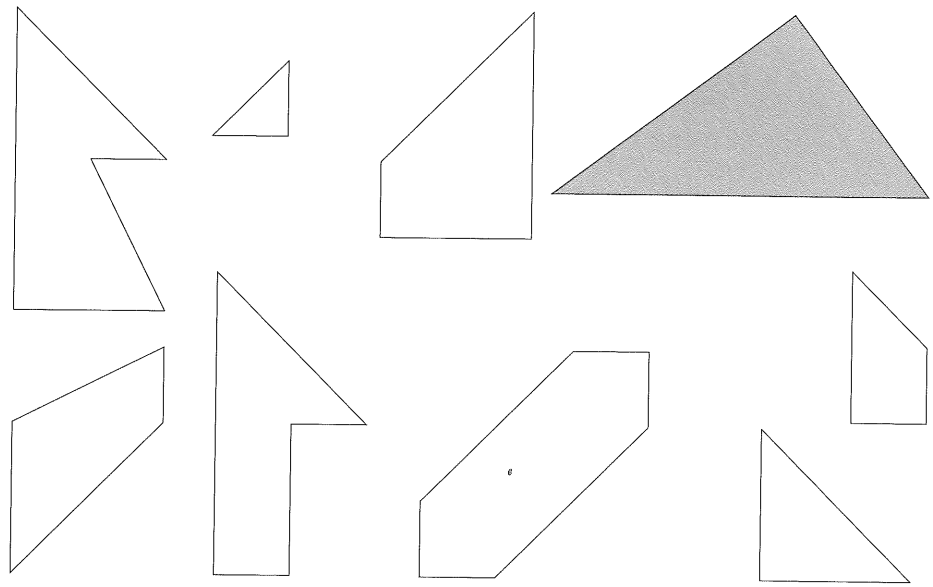
A continuación se acompañan las piezas necesarias para montar cada uno de los puzzles comentados (salvo el tangram chino) que pueden ser copiadas en cartulina y recortadas para jugar.



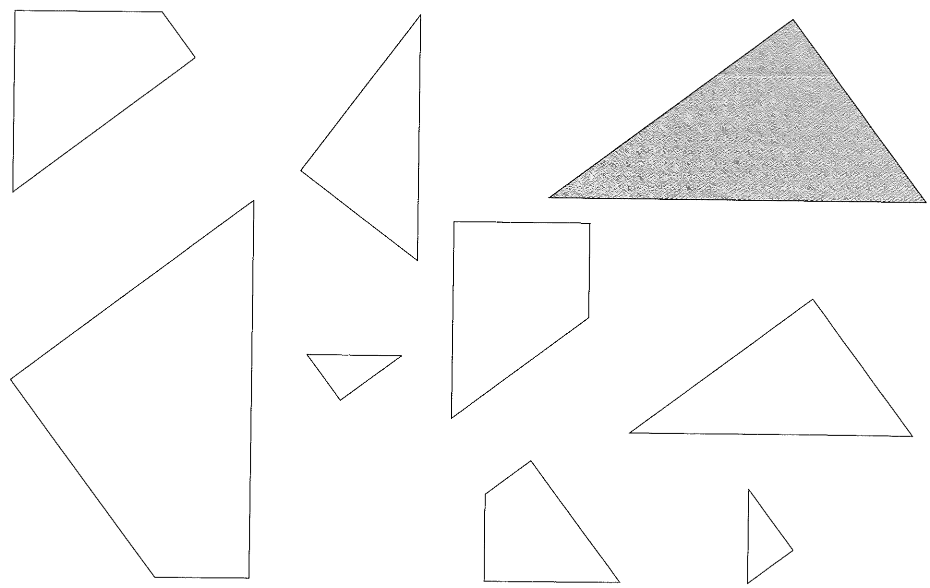
TEOREMA DE PITÁGORAS: *Demostración de Perigal* Grupo Alquerque



TEOREMA DE PITÁGORAS: *Demostración de Bhaskara* Grupo Alquerque



TEOREMA DE PITÁGORAS: *Bandera andaluza* Grupo Alquerque



TEOREMA DE PITÁGORAS: *Teorema de los catetos* Grupo Alquerque

SUMA 43
junio 2003, pp. 123-126

Matemáticas en Internet: cuatro años después

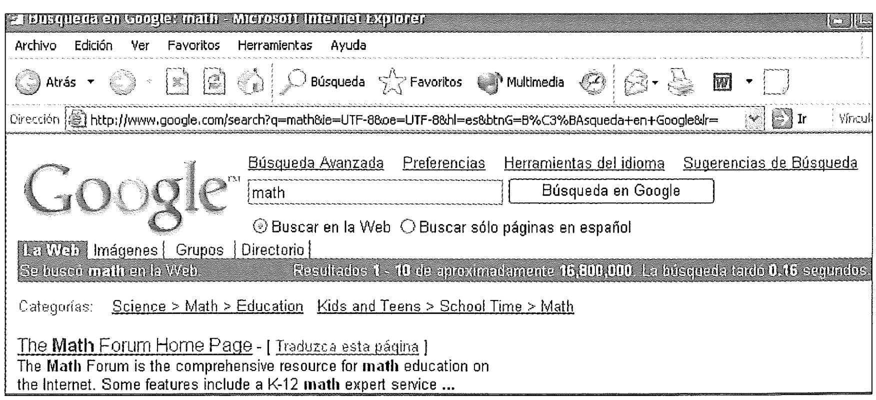
Antonio Pérez Sanz

RECURSOS EN INTERNET

EMPECÉ MIS COLABORACIONES en este rincón de *SUMA* hace casi cuatro años. Ahora, ante el inminente cambio en la dirección de la revista, el rincón de Recursos en Internet dará paso presumiblemente a otras secciones. Y si no, la LSSI lo hará innecesario dentro de poco.

Escribía yo, en un artículo titulado precisamente «Matemáticas en Internet», allá por 1999, la gran sorpresa de Nuria Torres, ficticia profesora de matemáticas destinada en un pueblo perdido de nuestra geografía, cuando al acercase por primera vez a Internet buscando recursos de Matemáticas para su clase y teclear en el buscador más popular de la época (Yahoo) la palabra MATH aparecía en su pantalla este mensaje: *Web Pages (1-20 of 1071228).* El buscador le avisaba que había encontrado ¡¡1.071.228 páginas con información de mathematics!!

Repetí la experiencia hace unos pocos días, cambiando de buscador, –ahora es más popular Google– para cuantificar qué había cambiado en estos cuatro años y mi gran sorpresa, constatable por todos vosotros, es que ahora el número de páginas web con ese término es de 16.880.000 páginas. En tan sólo cuatro años hemos pasado de un millón a casi 17 millones de páginas. Y la evolución de páginas en castellano es aún más espectacular. Si buscamos páginas con la palabra matemática sólo en castellano aparecen 176.000.

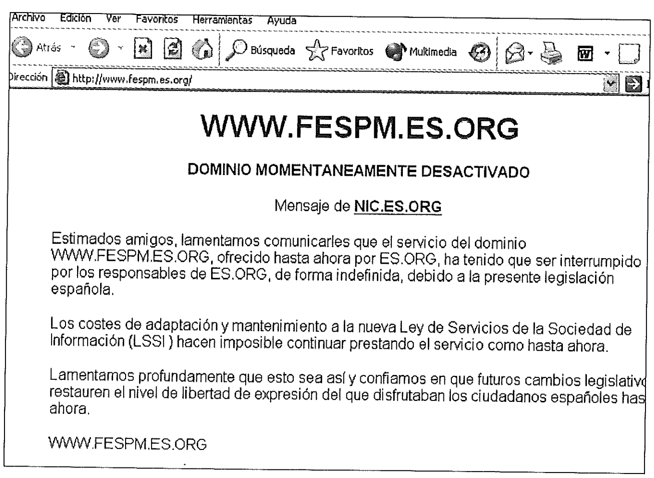


Pero si el factor de crecimiento en la cantidad se ha multiplicado por 2^4, en lo que respecta a la calidad de la información matemática el factor es mucho más grande. Y la actitud de los usuarios también. Lo que en un principio era una mera búsqueda de materiales ajenos, con el tiempo se ha convertido en un amplio, variado y cada vez más cuidado muestrario de contenidos matemáticos elaborados no sólo por instituciones oficiales, sino por centros educativos, profesores e incluso alumnos.

En estos últimos cursos las páginas de *SUMA* han sido testigo de estos cambios. Pero algo ha cambiado en nuestro país...

Poner murallas al campo. La LSSI

Los lectores que consultaban de vez en cuando la página web de la FESPM http://www.fespm.es.org, alojada en el servidor de IREDI, red gratuita, habrán podido comprobar que desde hace unos meses la dirección es inaccesible, como todas las que tuviesen esas extensiones. No es que hayamos renunciado a mostrar nuestra pequeña ventana al mundo de la red. Es que ha entrado en vigor la LSSI.



La LSSI, Ley de Servicios de la Sociedad de la Información, del Ministerio de Ciencia y Tecnología, http://www.setsi.mcyt.es/legisla/internet/ley34_02/sumario.htm, que nació como un intento «ingenuo» de transponer una normativa europea, se ha convertido en el ojo vigilante del Gran Hermano orwelliano, no el de Tele5. De entrada, miles de páginas como la nuestra han desaparecido, o se han tenido que ubicar en otra dirección, de golpe y porrazo.

A partir del 12 de octubre de 2002, fecha de entrada en vigor de la LSSI, escondido bajo lo que aparentaba ser una ley para la regulación de «ciertos aspectos jurídicos de los servicios de la sociedad de la información» subyacía un articulado que nos convierte a todos, de un plumazo, en «prestadores de servicios», en consumidores, usuarios y policías o ladrones. Todo ello a mayor gloria del comercio electrónico.

La Ley en principio va dirigida a páginas WEB comerciales y pretende que el comercio electrónico sea más seguro regulando derechos y deberes de los prestadores de servicios (WEB comerciales) y usuarios. Incluye un apartado fundamental que es el siguiente: «las WEB comerciales deberán identificar al prestador de servicios que es la persona o empresa que mantiene la WEB, en la misma estarán el nombre, apellido, NIF, dirección, y e-mail del responsable».

La no inclusión de los datos anteriores se castiga con una multa mínima de 3.000 euros.

En principio, la LSSI sólo afecta a páginas comerciales, pero tiene una trampa que hará estragos en Internet para el usuario que sólo pretende tener una página por vocación o por diversión, los profesores, alumnos, centros educativos e instituciones como las sociedades de profesores que, sin ánimo de vender nada, se limitaban a regalar información cultural y científica y que no podían o no querían pagar encima por ese acto generoso.

La LSSI es también aplicable a páginas no comerciales *alojadas en un servidor gratuito* que ponga banners comerciales, aunque al diseñador de la página esto le importe muy poco.

La LSSI afectará a usuarios que pongan en su página un *contador de páginas gratuito* con alguna referencia comercial.

La LSSI afectará a usuarios que pongan algún foro, chat, libro de visitas o algún otro elemento que contenga alguna *referencia comercial.*

La LSSI afectará a los usuarios que hagan algún enlace a alguna página comercial, aunque sea sólo para una referencia sin contenidos comerciales; por ejemplo, la página de Cabri Web, como Cabri es comercial, ya se vería afectada por la LSSI.

Con esto se puede comprobar que hacer una página personal o de un centro o sociedad a la que no le afecte la LSSI es muy difícil, casi imposible.

Es decir, todos somos comerciales; o lo que es lo mismo, estamos obligados a alojar la página en un servidor de pago y a introducir en ella los datos personales del autor como nombre y apellidos, domicilio, NIF, dirección de correo, etc. Imaginaos si ahora ya empezamos a tener nuestros correos saturados de publicidad no solicitada, qué ocurriría si todos nuestros datos apareciesen en nuestras páginas web.

Y cuidado con los correos. Los servidores están obligados a mantener en el servidor copia de nuestros e-mail durante un año a disposición de la autoridad pertinente. Tampoco está muy claro quién es esa autoridad: un juez, la policía, el MCyT, el gobierno local o central....

La LSSI y los centros educativos

Empezaba a ser cada vez más frecuente, y en estas páginas lo hemos podido comprobar, cómo los centros educativos pasaban de ser receptores de información a convertirse en emisores; cómo profesores y alumnos publicaban sus trabajos en Internet al alcance de compañeros y aficionados. Pues se acabó.

¿Qué pasará con las WEB de los Centros? Pues todas ellas se verán afectadas por la LSSI de una u otra forma. ¿Cómo es posible que algo tan didáctico se pueda considerar comercial? No tiene ningún sentido, pero es así; cualquier WEB de un Centro con una referencia inocente a cualquier programa informático, libro, revista... será comercial. Habrá que poner los datos del autor. Si éstos son del Centro no importa mucho, pero... ¿pedirán los datos del profesor como responsable?

¿Qué pasa si los alumnos hacen sus páginas? Pues, nada, a poner los datos de todos ellos. Esto es impensable, no se puede pedir a los alumnos que pongan sus datos personales. Consecuencia, los alumnos no tendrán páginas WEB, y posiblemente el Centro tampoco.

Un Centro no se puede arriesgar a una multa de más 3000 euros por una página WEB.

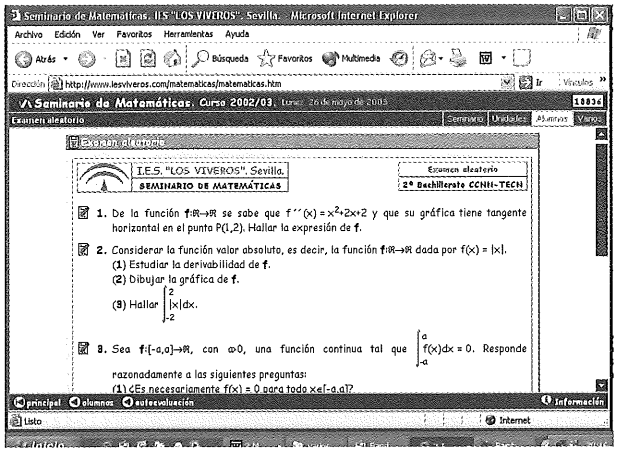
La cosa va tan en serio que ya hay alguna empresa que se anuncia en Internet con el siguiente reclamo: Legaliza tu web por 29 euros. Y es que es cierto: ¡¡todos somos ilegales!!

Adiós al uso creativo de Internet. A partir de ahora nos limitaremos a consultar la página oficial de la Consejería de Educación del Gobierno de nuestra Comunidad Autónoma o mejor aún, a ver la televisión, a ser posible TV1. ¡El Gran Hermano te vigila!

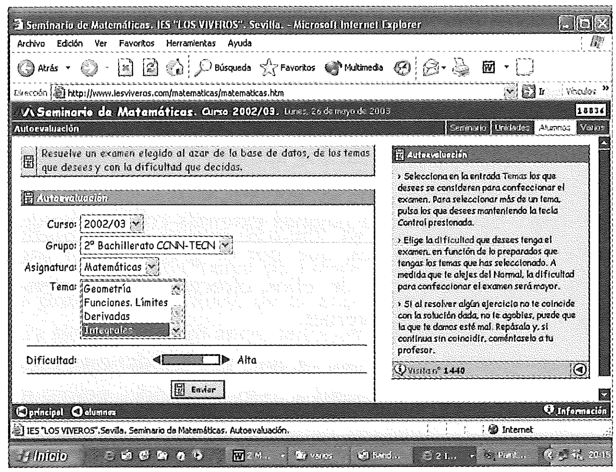
Rompiendo murallas

Por suerte, los profesores no tienen el BOE como lectura de cabecera, o no están dispuestos a esconder en un cajón virtual su trabajo elaborado con tanto esfuerzo y tantas horas, seguramente fuera de sus horarios lectivos.

Hoy presentamos un notable ejemplo. Las páginas del departamento de Matemáticas del IES Los Viveros de Sevilla. http://www.iesviveros.com/matematicas/matematicas.htm



En ellas encontramos además de un cuidado diseño, unos servicios y unos materiales de gran utilidad para los alumnos del centro y para cualquier visitante.



Las páginas constan de un menú principal con cuatro secciones:

- *Seminario*: con información de los autores, de las asignaturas, calendarios, libros...
- *Unidades:* con apuntes interactivos y con programas sobre unidades de los bachilleratos de Ciencias de la Naturaleza, Tecnológico y de Ciencias Sociales.
- *Alumnos*: con secciones privadas con informaciones de calificaciones y con material de contenido matemático para preparar las distintas unidades de varios cursos. Entre sus apartados hay que resaltar:
  - *Actividades*: amplias colecciones de ejercicios con sus soluciones.
  - *Paso a paso*: su objetivo es resolver un problema paso a paso, con ayudas, elegido entre los más de mil de los que consta la base de datos.

- *Autoevaluación*: permite al alumno plantearse exámenes aleatorios con el nivel de dificultad elegido por él mismo.
- *Correcciones*: ejercicios y problemas resueltos de exámenes variados y de selectividad.

• *Varios*: estsa sección ofrece desde la posibilidad de tener a los alumnos informados de las novedades del Seminario hasta excursiones por terrenos menos académicos de las matemáticas: enlaces, pasatiempos, juegos, chistes, curiosidades.

En fin, una página interesante para los profesores en esos momentos en que uno siempre anda buscando problemas distintos que proponer en clase, como para los alumnos de secundaria para acceder a un material clásico que permite su entrenamiento autónomo.

Un excelente trabajo y muchas horas de recopilación y elaboración de Julio Mínguez, Carmen Hernández, Ángel Jiménez-Caballeros, Ascensión Pulido, que han respondido con creces al reto de Antonio R. García Torres de entrar en el tercer milenio con tecnologías educativas ajustadas a los nuevos tiempos.

Cuando empezaron a hacer sus páginas aún no existía la LSSI, y en ellas no aparece por supuesto ni el NIF ni los DNI de los autores, y en los apuntes de Informática se citan varias marcas de programas comerciales y, por supuesto, hay enlaces a páginas externas con contenidos matemáticos interesantes, que por desgracia tienen banners publicitarios, uno de ellos ofreciendo, por cierto, «legalizar» páginas de Internet.

Estos profesores no cobran un euro por brindar este excelente muestrario de material a todo el mundo, pero... en cualquier momento, aunque aparecen las fotos del director y de los miembros de la Junta directiva, puede llamar a la puerta del IES un policía para notificarles que tienen una multa de 3.000 o de 6.000 euros.

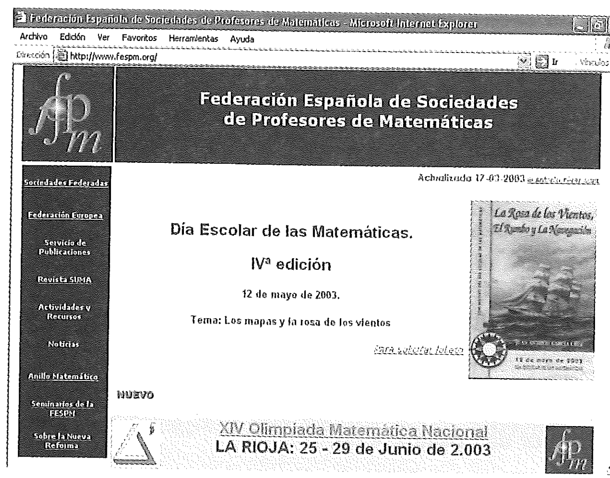
Porque estaremos en los inicios del tercer milenio, pero nuestros legisladores nos quieren hacer volver a unos tiempos, no tan remotos, en los que las palabras LIBERTAD DE EXPRESIÓN eran subversivas.

LA FESPM CAMBIA DE DOMINIO VÍCTIMA DE LA LSSI. LA NUEVA DIRECCION

Nueva dirección de FESPM: http://www.fespm.org

Correo: secretaria@fespm.org

presidente@fespm.org



En recuerdo

A LA DIVINA PROPORCIÓN

A tí, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura,
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.

A tí, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de mesura
que el Universo armónico origina.

A tí, mar de los sueños angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.

Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A tí, divina proporción de oro.

Rafael Alberti

SUMA 43
junio 2003, pp. 127-131

Un falso amanecer

Ángel Ramírez Martínez
Carlos Usón Villalba

Después de cada oscuridad viene el amanecer
Pero después de cada amanecer también viene la oscuridad
De un proverbio Gypsi[1]

EL 2003 NOS DESPERTÓ con la dolorosa noticia de la muerte de Ilona Lackova. Aunque podríamos hacerlo por su condición de pedagoga, no traemos aquí el recuerdo de la escritora eslovaca-romaní por su trascendencia en el mundo de las matemáticas, obviamente, sino por su triple condición de mujer, gitana[2] y luchadora. Destinada a vivir en la marginalidad, nunca aceptó impasible el papel de víctima que le asignaron, su nacimiento primero, y la guerra después. De los 600 niños y niñas del campamento de Velky Saris, cerca de Presov, fue la única en terminar sus estudios primarios. Excluida de la enseñanza secundaria, la II Guerra Mundial la alcanzó con 18 años. Sufrió en su propia carne el salvaje dominio fascista que le robó la vida de una de sus hijas gemelas y recluyó a su marido en un campo de trabajo. Recibió con alivio el dominio soviético y la promesa de una sociedad igualitaria. Fue entonces cuando escribió *El campamento gitano en llamas* y ejerció el cargo de inspectora cultural en la región de Presov. Pero, como en un falso amanecer, el estalinismo prohibió a los gitanos hablar su lengua y pudo comprobar con sus propios ojos cómo muchos seguían marginados, presas del hambre. Haciendo gala de esa vitalidad que la acompañó siempre, a los 50 años estudió Pedagogía y Periodismo en la Universidad de Praga y se dedicó a denunciar la situación de su pueblo hasta que, tras la Revolución de Terciopelo de 1989, fundó la Asociación Cultural de Ciudadanos Romaníes, editó la revista *Noticias Gitanas* y tradujo al checo algunos libros de cuentos. Aunque su principal obra literaria, por la que sin duda será recordada, es la autobiografía cuyo título encabeza este escrito.

En su memoria, queremos dedicar estos párrafos a las mujeres matemáticas. Ahora bien, desde este rincón, creemos que es hora de salir al encuentro de las matemáticas de mañana además de homenajear a las heroínas de ayer. Ese es el verdadero sentido de la historia: ayudar a construir el futuro. Pero, si nos atrevemos a considerar nuestra cultura occidental dividida en dos en función del género, podemos asumir el reto del artículo anterior y trabajar por una escuela inclusiva también en

DESDE LA HISTORIA

este aspecto. Ese objetivo sería suficiente para cubrir las pretensiones de estos párrafos.

Por alusiones...

Las citas que siguen a continuación hablan por sí solas y pueden ser además, suprimiendo el nombre del autor, una excelente propuesta didáctica para la hora de Tutoría. Hemos seleccionado aquellos pensadores que, en artículos anteriores, asociábamos con el desarrollo de las ideas en Occidente. Fruto de los estereotipos occidentales suele sorprender la positiva visión de Averroes frente a la de Comte, mucho más previsible y culturalmente cercana. En cuanto a Aristóteles, es cierto que podríamos haber elegido a otros filósofos griegos que, como Sócrates o Platón[3], tenían una concepción mucho más positiva de la valía femenina, pero sus planteamientos son representativos de una forma de entender el papel de la mujer que ha estado vigente hasta nuestros días.

> Cuál es la naturaleza y cuál la función del esclavo resulta claro de lo expuesto. El que siendo hombre no se pertenece por naturaleza a sí mismo, sino que es hombre de otro, ése es, por naturaleza esclavo. Y es hombre de otro el que, siendo hombre es una posesión, y una posesión como instrumento activo y distinto.[...]
>
> También en la relación del macho con la hembra, por naturaleza, el uno es superior; la otra, inferior; por consiguiente, el uno domina; la otra es dominada.[...]
>
> Sin embargo, está claro que, por naturaleza, unos son libres y los otros son esclavos. Y que a estos les conviene la esclavitud, y es justa. Aristóteles. *Política* Libro I. Siglo IV a. de C.

> Sin embargo, en estas sociedades se desconocen las habilidades de las mujeres, porque ellas sólo se utilizan para la procreación. Por tanto están destinadas al servicio de sus maridos y relegadas al cuidado de la procreación, la educación y la crianza. Pero esto impide sus [otras posibles] actividades. Como en estas sociedades las mujeres no se preparan para ninguna de las virtudes humanas, sucede que muchas veces se asemejan a las plantas en dichas sociedades. [Que, en ellas,] representen una carga para los hombres, es una de las razones de la pobreza de esas sociedades; en ellas llegan a doblar en número a los hombres, mientras que, al mismo tiempo y en tanto carecen de formación, no contribuyen a ninguna de las [otras] actividades necesarias, excepto en muy pocas como son el hilar y el tejer, las cuales realizan la mayoría de las veces cuando necesitan fondos para subsistir. Ibn Rusd (Averroes) siglo XII.

> Primero, como madre; a continuación, como hermana; luego, y sobre todo, como esposa; y por fin, como hija; accesoriamente, como criada. Bajo cada uno de estos cuatro aspectos naturales, la mujer está destinada a preservar al hombre de la corrupción inherente a la existencia práctica y teórica. Su superioridad afectiva le confiere espontáneamente este oficio fundamental, que la economía social desenvuelve cada vez más, separando al sexo amante de toda solicitud perturbadora, activa o especulativa August Comte, siglo XX.

Diosas y heroínas

La historia de la mujer en la ciencia, la literatura, el arte, la música... ha estado llena de personajes rupturistas[4] cuyo protagonismo, sin embargo, no ha conseguido cuajar hasta que la sociedad industrial capitalista no decidiera incorporarlas al mundo laboral y convertir en beneficio empresarial su creatividad y su trabajo.

La historia escrita, en general, ha sido una historia de hombres, redactada por hombres y pensada para un lector masculino. Es por eso por lo que se ha optado por una narración de hitos, en base a la documentación escrita, que ha excluido a las mujeres (y al 95% de la población) y ha elegido al «progreso» como paradigma. Una historia de «generales» que ha despreciado las contribuciones anónimas de quienes, con abnegada generosidad, han sacrificado sus vidas[5] para hacer posibles las victorias.

Esa historia olvida a veces que la mayor revolución científico-tecnológica no se produjo en el XVIII sino en el Neolítico. Podemos intuir que la presencia de la mujer en esos momentos fue decisiva, pero es cierto que ese punto de vista no deja de estar contaminado por los propios condicionantes de nuestro siglo. Llegados a ese extremo no podemos fiarnos más que de la tradición, oral primero y escrita después, esto es: de los mitos. En ellos, la presencia femenina no sólo resulta relevante sino que además su ámbito de actuación se ajusta a las previsiones iniciales.

De todos ellos nos quedamos con el de Dido por su testimonio de saber matemático. Su hermano, el rey Pigmalion de Tiro, mató a su marido, lo que la obligó a huir con su viudedad y la hacienda familiar al norte de África, donde decidió fundar la ciudad de Cartago. Como buena fenicia, ajustó con los propietarios de las tierras el precio de las que pudiera abarcar con una piel de buey. Cortó el cuero en finas tiras, las unió una a otra por los extremos, y trazó así una semicircunferencia cuyo diámetro era bañado por el mar. Hasta el siglo XIX no se conseguiría demostrar que, efectivamente, Dido abarcó la máxima superficie posible para un perímetro dado.

Pero, en esta historia de pioneras, también hubo sus heroínas. Otra cosa es que resulte difícil conseguir referencias bibliográficas de ellas. Por eso, cuando existen, hay que valorarlas sobremanera, porque al hecho de haber sobrevivido a los avatares de la historia se une el que lo hayan hecho también al desprecio masculino. Así por ejemplo, en la sociedad hispanomusulmana, en la que el *statu quo* de la mujer se distinguió, en general, por la carencia de los más elementales derechos individuales[6], algunas supieron aprovechar su ascendente aristocrático durante los reinos de taifas. Sirva como muestra la poetisa Wallada, quien llevó en Córdoba una vida de mujer liberada y cantó públicamente sus amores sin someterse a los escrúpulos morales de la época. Un poco más apartadas de la permisividad de la vida cortesana, Um al-Ala al-Sayyida al-Abdariyya y Umm al-Hasan también participaron de esa libertad de que gozaban algunas mujeres de la clase noble. La primera se dedicó a la enseñanza de niñas y fue conocida por su vasta cultura y profundo conocimiento de la lengua árabe, mientras la segunda compaginaba la medicina y la literatura.

No pretendemos hacer un recorrido, a través de la historia, de la mano de las mujeres que destacaron en Matemáticas –ya lo hicieron otras antes que nosotros y a sus estudios nos remitimos– pero sí reivindicamos su incorporación al aula y a la memoria histórica. Algunas tan señeras como Hipatia. Importante por sus trabajos científicos[7] que la sitúan en una posición de puente entre la ciencia alejandrina y la musulmana[8]. Pero, sobre todo, por haberse mantenido fiel a sus convicciones y por el valor con que las defendió: entre ellas, el paganismo y la certeza de que la enseñanza de la Filosofía y de las Matemáticas era independiente del credo de su alumnado. Hipatia fue ante todo una docente.

Entre las astrónomas, podríamos incorporar a la lista a Sofie Brahe (ª1556, 1643), Maria Cunitz (1610, 1664), Caroline Herschell (1750, 1848) o a Elisabeth Korpmann (1647, 1693) quien, después de perder en un incendio el trabajo de diez años, aún publicaría *Firmamentum sobieskanum* y *Prodromus astronomicae*, el mayor catálogo de posiciones de estrellas jamás compilado hasta ese momento y el último antes del uso del telescopio. Dentro del estricto campo de las Matemáticas, citaremos a María Agnesi, Sophie Germain (1776, 1831), Sofia Vasilievna Kovalevskaia (1850, 1891) y Emmy Noether (1882, 1935). A Ada Byron (1815, 1852) como pionera en el campo de la Informatica, pero también a Gabrielle-Émilie Le Tonnelier (1706, 1749) y a Anne Finch (1631, 1679)[9]. La primera por su influencia sobre Voltaire, a quien se adjudican gran parte de los honores que a ella corresponden. Y, la segunda porque sus *Principios de la más antigua y moderna filosofía* definieron el universo monádico de Leibniz.

Coeducación y autoestima

No creemos que nadie pueda negar la importancia de la mujer en el devenir histórico, moral, científico, ideológico, artístico... o en el ámbito familiar. Sin embargo, ha sido el varón quien ha luchado siempre por mantener una supremacía pública, a costa de despreciar la capacidad femenina y reducir su papel al de esclava, en perfecto paralelismo con la intelectualidad griega de la que tan orgullosos nos sentimos. En consonancia con ese empeño ha surgido el particular desarrollo de las concepciones filosóficas, científicas, económicas y sociales que analizamos someramente en el artículo anterior. Tras todo ello se ha edificado un concepto de la trascendencia personal, y colectiva, que se entiende en sentido individual, confundida con la fama o la preeminencia, y que tiene los libros de historia como meta[10].

Son las mujeres quienes han trasmitido los valores éticos y morales de nuestra niñez y han velado las armas de nuestro equilibrio emocional en la adolescencia, además de ser las guardianas de la norma en todo momento. Pero su sentido de la realización personal ha sido siempre diferente al masculino. Se ha centrado en el valor de las actitudes, disuelto permanentemente en el bienestar de los demás[11]. Se les reprocha muchas veces su falta de ambición. Una crítica certera si lo que se ambiciona es el conocimiento, la creatividad, la autonomía personal... pero, cuando se formula tal censura al sexo femenino, se hace desde la perspectiva tradicional del varón: como sinónimo de ansia de poder, de dinero, de dominio... Una avidez que tiene por sujeto y por objeto a uno mismo. Mejor dicho: a sus más bajas pasiones. ¿Qué es la realización personal, hasta dónde llega? ¿Hasta qué niveles necesitamos los varones alimentar nuestro ego? ¿Cuánta inseguridad hay tras ese horizonte de necesidades insatisfechas? De verdad: ¿es posible criticar la decisión de la astrónoma María Kirch de rechazar la invitación del zar Pedro el Grande para trabajar en su privilegiado observatorio y quedarse a cambio con su hijo Christfried en el de Berlín calculando calendarios? ¿Desde qué perspectiva? A esas alturas María había descubierto el cometa de 1702, que no lleva su nombre, y estudiado la aurora boreal, la conjunción del Sol con Saturno y Venus, así como la de Júpiter con Saturno, además de trabajar durante años en el magnífico observatorio del barón Von Krosigk[12].

Por contra: ¿No es fatuo en exceso pensar que Laplace trascendió como persona por haber escrito «su» *Mecánica Celeste*? No lo creemos. Es la constatación de lo que no hizo, del talante con el que afrontó la vida, lo que permite asegurar su fracaso. ¿No sería mejor educar en ese otro sentido de la trascendencia mucho más femenino y dedicar la vida a transmitir actitudes solidarias? Sin que eso implique minimizar el propio desarrollo autónomo y libre en lo que afecta a opciones y modelos[13], o se presuponga que se reserva el ámbito de lo privado para la mujer y el de lo público, que es como decir de las decisiones políticas, económicas, sociales, ..., para el hombre. Renunciar a todo ello sí es un sacrificio excesivo que anula a la persona y que, desde la masculinidad y la fuerza, se le ha exigido al género femenino. Potenciar esas actitudes es una forma de eliminar la diferencia de partida en la opinión y las aspiraciones entre uno y otro sexo, pero también de estimular la propia autoestima de las adolescentes –por efecto de la valoración externa– para poder defender sus particulares puntos de vista sin tener que apoyarse en modelos masculinos.

Sí, sí, ya, el mundo es como es y esto no pasa de ser una quimera... Pretender transformar la sociedad desde la escuela seguramente también, pero ese es nuestro único ámbito de actuación. Adoptar otra postura es doblegarse ante lo que nos viene dado. En cualquier caso nuestra meta es mucho menos utópica: nos conformamos con la reflexión, por parte del profesorado, acerca de la existencia de un sistema de valores distinto al dominante, en el que las chicas podrían sentirse más a gusto, y al que sería bueno acercar la cultura en general y la masculina en particular... Nos conformaríamos con ese grado de convencimiento y con poder escuchar en clase con más frecuencia: «¡y... ¿por qué no?!» de labios de una chica.

Educar la parte emocional

Es ésta una reflexión individual, qué duda cabe, pero creemos que es hora de que nos planteemos seriamente qué es la coeducación en este momento y, en particular, qué y cómo queremos educar en ella; en definitiva, de que la consideremos como un tema serio de investigación didáctica. Recopilar, analizar y discutir sobre comportamientos diferenciados es importante para ir más allá de la mera especulación, condicionada por el sesgo sexista de cada cual, y poder desmontar así determinadas actitudes que niegan la necesidad de un cambio; pero lo es, sobre todo, para eliminar barreras sociales, didácticas y profesionales y para modificar el comportamiento del profesorado frente a ellas. El objetivo final es claro y unitario: enseñar en libertad para la libertad; educar en igualdad para la igualdad; propiciar el hecho de que cada persona sea capaz de construir su futuro profesional, sus creencias y su escala de valores –que es como decir su ideología– así como sus relaciones humanas y su actitud ante la vida, desde la autonomía personal. Esa que se edifica desde la independencia de pensamiento y la seguridad en uno/a misma y en sus capacidades. En resumen construir una sociedad en la que no tenga sentido establecer diferencias en función del género, de la adscripción étnica o de las creencias religiosas de cada cual.

Pero, ¡cuidado!, la identificación personal con el papel de dominación o sumisión no es un constructo racional sino emocional. Por eso no es suficiente con hacer llamadas a la razón: por eso es necesario incidir en la parte más irracional del ser humano. Allí donde las ideas se construyen sobre prejuicios y existe un criterio único de interpretación del mundo y de valoración de las personas que lo habitan. Allí donde anidan el egoísmo y la egolatría pero también la intuición, la creatividad, la solidaridad, el compromiso... Afortunadamente, mal que les pese a algunos o algunas, como enseñantes sólo trasmitimos actitudes. Pero son estas actitudes y modelos los que resultan trascendentales para que las alumnas –y alumnos– se identifiquen y se sientan respetadas y respetables en ellos.

Pero, ¿tienen sexo las Matemáticas?

El devenir de los tiempos empuja a analizar sólo lo positivo del comportamiento femenino para ensalzarlo, pero esa es una posición que recrea de nuevo el papel de salvadores y víctimas. Resulta necesario buscar lo que se debe corregir y someterlo a discusión para poder poner en entredicho verdades firmemente asentadas. Por ejemplo: es un lugar común entre los y las enseñantes el mejor rendimiento escolar de las chicas frente al de los chicos. Pero, un hecho como éste, aparentemente positivo, quizás no lo es tanto como a priori pudiera parecer. Ocurre que el sistema educativo enseña la obediencia y la valora, y las chicas son obedientes en mayor medida, lo que genera un asumido vasallaje que se trasluce en su obsesión por «salir bien formadas» o, lo que es lo mismo, adecuadamente adaptadas a las exigencias del sistema. Potenciar otros valores quizás haga posible que las matemáticas del futuro consigan unas Matemáticas más femeninas y que esos cambios sean profundos tanto en su génesis como en el papel social que desempeñen.

Desde hace años venimos reivindicando propuestas imaginativas que supongan un reto para la racionalidad pero también para la creatividad, la emoción y la sensibilidad de las, y los, adolescentes. Resulta inaplazable que el alumnado asuma el protagonismo de su trabajo y generar así aulas en las que el profesorado hable menos y conceda mayor libertad y vida al pensamiento. Pero, para ello, es imprescindible que los currículos de matemáticas, de cada profesor y profesora, sean menos dogmáticos para que la clase deje de ser ámbito único para la obediencia algorítmica. Por eso defendemos que la coeducación pasa por una didáctica de resolución de problemas. Ahora bien, esa es una condición necesaria pero no suficiente. Es ineludible el trabajo de investigación del que hablábamos antes, pero mucho más modificar el contexto que se toma como referencia. Y es, en la definición de ese contexto, en la que el uso del lenguaje tiene más importancia de la que parecemos estar dispuestos a asumir[14].

Colofón didáctico

Por si somos capaces de sacar alguna enseñanza positiva de la experiencia, sirva este breve relato sobre educación de la que fuera la primera mujer ministra en Europa. No llegó a ir a la escuela y aprendió de su madre lo que no le enseñaron ni la vida ni su sentido común. A tenor de lo que cuenta la hija, aquella mujer, además de maestra, fue una excelente pedagoga:

... mi madre fue esencialmente mi educadora [...]. No me hizo aprender ni el abecedario ni las tablas de multiplicar. La gramática se me enseñó sin tener en cuenta el orden prefijado de los libros de texto oficiales. No sé si fueron los métodos pedagógicos de mi madre o mi facilidad natural para aprender, el caso es que progresé rápidamente y pronto gané el tiempo perdido con el inicio tardío de mi educación.

Debía observar un régimen especial de distribución del tiempo. La mañana estaba destinada al estudio. Las tardes eran libres. Tampoco me torturó con lecciones que debía aprender a toda costa. Cuando no entraba en mi cerebro sin esfuerzo, se dejaba para más adelante.

[...]] el método pedagógico de mi madre consistía esencialmente en despertar mi curiosidad, remitiéndome a las lecturas que podrían ampliar mis conocimientos. [...] Ningún límite tuve en mis lecturas. Lo pude leer todo y leí, por lo menos, todo lo que tuve a mi alcance.

[...] la gran inteligencia de mis padres consistía en ponerme sobre la pista de los autores que progresivamente iría comprendiendo. Era yo misma quien descubría y seleccionaba [...].

También entonces había «alternativas didácticas»:

Mi padre rompió con su hermana María, a la que había adorado, el día en que, al quedar viuda, bautizó a sus hijos y encerró al varón en un colegio de jesuitas. El niño [...] era un rebelde en el colegio y, a fuerza de castigos despiadados para domarlo, le hicieron morir[15].

Notas

1 En el siglo XIV, durante su hégira por Europa, algunos gitanos se asentaron en Epiro (Grecia). Al lugar se le llamó «Pequeño Egipto» por la fertilidad de sus cultivos. Esa denominación popularizó el toponímico Egipcianos, cuya traducción inglesa es Gypsies.

2 En el artículo anterior, «Hacer de las Matemáticas un lenguaje verdaderamente universal», hablábamos de transformar nuestros Institutos en Centros inclusivos. En ningún momento nombramos a los gitanos, para que fuera más evidente su situación de olvido respecto de la escuela española. Es muy raro que alguien se plantee que los gitanos forman parte de nuestra realidad multicultural. Hasta ese punto ha sido eficaz la marginalización educativa a la que están sometidos. ¡No, no, no busque disculpas en su absentismo! Es mucho peor refugiarse en el impermeable que nos ha alejado de su cultura.

3 No en vano aprendieron filosofía de ellas. Diotima, desde su magisterio, y Perictione, como madre, imbuyeron de pitagorismo a Platón. Por su parte, Aspasia, maestra del Sócrates, participó con Anaxágoras de la convicción de que la Luna y los planetas eran similares a la Tierra y ambos fueron perseguidos por impíos.

4 Muchas de ellas lo fueron simplemente por estar ahí, donde las convicciones sociales habían previsto que no estuvieran. Como señalara Margaret Alic en *El legado de Hipatia* (1995, Siglo XXI, Mexico): «... algunas fueron abiertamente feministas, pero la mayoría de ellas no eran ni revolucionarias ni defensoras de los derechos de la mujer».

5 Es cierto que la historiografía marxista no cae en este elitismo simplón, pero sí en la masculinidad. En cualquier caso, alguien debería hacer una historia estadística de los miles de obreros que perdieron la vida en aras del progreso y del enriquecimiento de los que subordinan la seguridad al beneficio.

6 No fue mucho mejor en el mundo cristiano. La evolución posterior de ambas civilizaciones sí ha marcado diferencias.

7 Escribió un comentario, en 13 libros, sobre la *Aritmética* de Diofanto en el que aporta soluciones alternativas y nuevos problemas. Un tratado, en 8 libros, sobre las *Cónicas* de Apolonio, en realidad una adaptación didáctica de las mismas. Todos sus libros los orientó en esa dirección. También redactó un *Canon Astronómico* y diseñó diferentes instrumentos técnicos: un astrolabio plano, un aparato para destilar agua y un higrómetro.

8 Un falso puente, si se prefiere, puesto que no hay constancia de que sus textos fueran utilizados en el mundo árabe.

9 Y muchas más: Jeanne Dumée, Nicole-Reine Étable de la Brière, Wilhelmine Bottcher, María Mitchel, Henrietta Swan... entre las astrónomas, Elena Cornaro y Mary Fairfax en Matemáticas o Grace Hopper en Informática.

10 El libro Guinness de los Records, los propios reality shows, el empeño por ocupar las páginas de los periódicos, las pantallas de televisión o las portadas de las revistas del corazón son «ejemplos-basura» de todo ello.

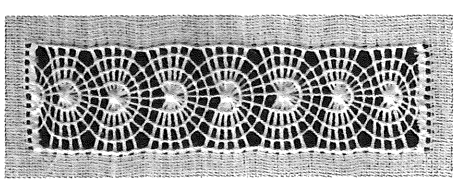
11 Sirvan como referencia las palabras de Carolina Herschel a su sobrino John, presidente de la Real Sociedad de Astronomía, tras recibir la medalla de Oro: «A través de mi larga vida no he acostumbrado ni deseado que se me concedan honores públicos; y ahora sólo tengo un deseo, el de poderme llevar tu buena opinión conmigo a la tumba. [...] Quienquiera que diga demasiado de mí, dice demasiado poco de tu padre y sólo me puede causar intranquilidad». Es cierto que tras estas palabras se trasluce una baja opinión de sí misma y éste es un aspecto negativo, pero resplandece mucho más su humildad y un concepto del trabajo y de la trascendencia del mismo mucho más saludable que el que se respira en muchas aulas de nuestros institutos y universidades.

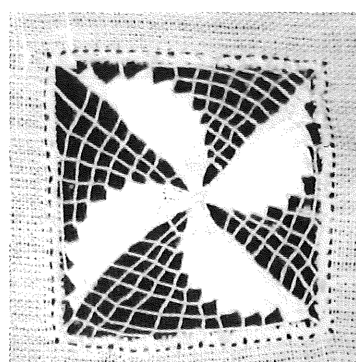
12 No sabemos con exactitud cuáles fueron las razones profundas de la decisión de María pero sirve como ejemplo de otras muchas que antepusieron y anteponen sus fidelidades a su triunfo personal. Bien diferente resulta esa renuncia cuando es la propia realización lo que está en juego. Como rechazables son las razones de fondo que hacen que sean las mujeres quienes, mayoritariamente, renuncian a su proyección personal y profesional para favorecer las de su pareja.

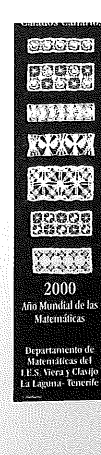
13 Queda la duda de saber si es posible el cambio sin que la mujer antes tome el poder y aplique reformas en esa dirección. Más aún, ¿permitirá el Poder que quien lo ejerza lo haga en contra de los principios del positivismo? ¿No se asegurará antes la sumisión de la Condoleezza Rice de turno?

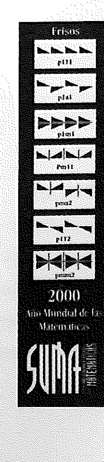
14 En ese sentido no podemos por menos que criticar algunos textos en los que, la excusa del inexistente género neutro, elimina cualquier referencia femenina. Sirva como ejemplo el «Seminario de reflexión sobre la enseñanza de las matemáticas» publicado en el n.° 37 de *Suma*, y del que elogiábamos en el artículo anterior su esfuerzo por definir un ámbito común de referencia. En las páginas 10 a la 14 no hay una sola referencia a una hipotética lectora, alumna o profesora. Quien haya experimentado en clase el cambio de actitud que se produce en las alumnas cuando se las nombra, no puede ser insensible a este problema.

15 Federica Montseny, 1987. *Mis primeros cuarenta años*. Plaza y Janés. Barcelona.









NUEVA DIRECCIÓN

Revista SUMA

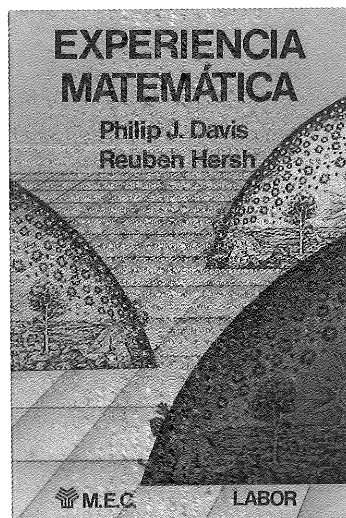
Apartado de Correos 19012

28080-MADRID

SUMA 43
junio 2003

Un clásico moderno

EXPERIENCIA MATEMÁTICA
Philip J. Davis y Reuben Hersh
Editorial Labor/MEC
1988, Barcelona
ISBN: 84-335-5138-8
314 páginas
Primera edición, en inglés:
The Mathematical Experience
Birkhäuser
Boston 1982



Con esta reseña termina una serie, que empezó hace ocho años –cuando Emilio y yo nos hicimos cargo de la edición de la revista SUMA–, dedicada a glosar algunos libros que hemos creído de un valor o significado especial, o que deberían tenerla, para los profesores de matemáticas. Seguro que todos los que hayáis seguido la serie, habréis coincidido alguna vez con nuestra opinión, aunque en otras ocasiones vuestro «clásico» hubiera sido otro, pero me atrevo a decir que el libro que hemos elegido para esta ocasión contará con un casi unánime consenso como uno de los clásicos recientes cuya lectura resulta imprescindible.

RECENSIONES

La edición española fue uno de los frutos de una corta etapa de colaboración entre el Ministerio de Educación y Ciencia y el sector privado que nos trajo la traducción, además, de algunos otros títulos importantes como *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos,* de Lauren B. Resnick y Wendy W. Ford (Paidós/MEC), *El lenguaje matemático en el aula,* de D. Pimm (Morata/MEC), *Didáctica de las matemáticas,* de A. Orton (Morata/MEC), *El aprendizaje de las matemáticas,* de Linda Dickson, Margaret Brown y Olwen Gibson (Labor/MEC) o *Pensar matemáticamente,* de John Mason, Leone Burton y Kaye Stacey (Labor/MEC). Sin duda, corrían otros vientos...

Después de los años de estudio académico, acabé por rechazar el estilo bourbakista con el que se nos presentaron las matemáticas; sentía la necesidad de saber dónde partía y a dónde conducía cada trayecto matemático, cómo se había llegado a elaborar ese aparato tan sofisticado y para resolver qué problemas. Llegué a experimentar que el verdadero aprendizaje lo conseguía cuando era yo mismo el que me enfrentaba a los problemas y descubría las soluciones y que, a partir de entonces, el estudio de los aspectos teóricos se volvía más provechoso. Tras finalizar los estudios, la práctica de la enseñanza me condujo a la conclusión de que la mera exposición clara de los hechos matemáticos por desgracia no tenía como consecuencia el aprendizaje de los contenidos por los alumnos. Así, finalmente, se me hizo imprescindible revisar mis puntos de vista sobre lo que eran las matemáticas, la construcción del conocimiento matemático y la forma en que éstas se enseñaban.

Por ello me impresionaron las palabras de Gian-Carlo Rota en la introducción cuando afirma que:

> Con frecuencia oímos que la matemática consiste fundamentalmente en la «demostración de teoremas». ¿Consiste acaso la labor del escritor en «escribir frases»? El trabajo del matemático es, en su mayor parte, un embrollo de conjeturas, analogías, ilusiones y frustraciones, y la demostración, en lugar de ser el núcleo del descubrimiento, es las más de las veces una forma de asegurarnos de que nuestra mente no nos está gastando malas pasadas. Pocas personas, si alguna, se habían atrevido a escribir tales cosas antes de Davis y Hersh. (p. 16)

Y empecé a leer, y leí devorando las páginas porque, sin duda, la lectura del libro de Davis y Hersh me ayudó a encontrar muchas de las respuestas que andaba buscando.

Coincidencias

Los autores declaran las intenciones con las que acometieron la redacción de su libro bien pronto:

> Este libro no tiene el propósito de presentar una exposición sistemática y autónoma de un corpus específico de material matemático, ni reciente ni clásico. Su ambición es, mas bien, la de capturar la inagotable variedad que ofrece la experiencia matemática. Las líneas maestras de nuestra exposición consistirán en mostrar la sustancia de las matemáticas, su historia, su filosofía y el modo en que se obtiene el conocimiento matemático. (p. 11)

Después de los años de estudio académico, acabé por rechazar el estilo bourbakista con el que se nos presentaron las matemáticas; sentía a necesidad de saber dónde partía y a dónde conducía cada trayecto matemático, cómo se había llegado a elaborar ese aparato tan sofisticado y para resolver qué problemas.

!Nada menos¡ Se trata de un programa ambicioso, un programa en el que la coincidencias con mis preocupaciones e intereses era plena.

El origen de *Experiencia matemática* hay que buscarlo en el encargo que recibieron los autores de impartir un semestre sobre fundamentos de las matemáticas. Había que comenzar planteando las cuestiones básicas y tratar de aclaralas antes de acabar el curso:

> ¿Qué es un número? ¿Qué es un conjunto? ¿Qué es una demostración? ¿Qué conocemos en matemáticas, y cómo lo conocemos? ¿Qué es el «rigor matemático»? ¿Qué es la «intuición matemática»?
>
> Al ir formulando estas preguntas me daba cuenta de que no conocía las respuestas. Ello no era sorprendente, desde luego, pues en cuestiones tan vagas, «filosóficas», no es de esperar que las matemáticas sean nítidas y tajantes, como las que buscamos en matemáticas. Siempre existirían diferencias de opinión acerca de cuestiones de esa naturaleza.
>
> Lo que me inquietaba e incomodaba era que yo no sabía cuál era mi propia opinión acerca de ellas. Peor todavía, no tenía base alguna, carecía de criterio para evaluar diferentes opiniones, para abogar en favor de un punto de vista o para atacar otro.
>
> Comencé a hablar con otros matemáticos acerca de la demostración, el conocimiento y la realidad en matemáticas, y descubrí que mi situación de confusa incertidumbre era típica. Descubrí igualmente una notable sed de conversación y análisis de nuestras experiencias y convicciones personales. (p. 21)

Preguntas similares a las que se hacen Davis y Hersh en las líneas anteriores rondaban por mi cabeza cuando terminaba los estudios, después de haber aprendido a dominar muchas técnicas y de conocer gran cantidad de resultados matemáticos. Esa sensación molesta de estar trabajando sobre la nada o al menos sobre algo cuya naturaleza desconocía, también la experimenté. Y, por supuesto, dí palos de ciego tratando de elaborar mis propias respuestas, aunque casi siempre con escasa capacidad para valorar tanto mis opiniones como las opiniones que leía en diversas fuentes o las que obtenía cuando hablábamos de estos temas.

No es extraño, por tanto, que sintiese que el libro estaba reclamando que lo leyera, ya que su contenido se dirigía directamente al fondo de mis preocupaciones y que era muy probable que en él iba a encontrar una descripción convincente de las matemáticas, de su objeto, de cómo se construyen y qué da validez a sus resultados.

El contenido

Vamos a repasar de forma breve el contenido de los ocho capítulos del libro.

El primer capítulo comienza abordando la pregunta ¿qué son las matemáticas?: históricamente comienzan concibiéndose como la ciencia de la cantidad y el espacio, pero con el tiempo, el énfasis que se le va dando a los aspectos deductivos van conduciendo a una concepción en la que lo importante no es sobre qué objetos trata la matemática sino más bien el hecho de que su estudio se ajuste al esquema hipotético-deductivo. Pero ni siquiera esta definición es definitiva sino que distintos pensadores irán formulando sus propias definiciones y a lo largo del libro serán analizadas algunas de ellas.

Luego sigue el análisis de otras preguntas: ¿Dónde se puede encontrar el conocimiento en matemáticas? ¿Qué es la comunidad matemática y quiénes y cuántos son los miembros que la constituyen? ¿Cuáles son las herramientas de este oficio?

En la última parte del capítulo se preguntan por la extensión del conocimiento matemático para lo que usan un símil muy sugerente: un gran océano de textos (por ejemplo, una gran biblioteca universitaria podría contener más de 60.000 volúmenes de matemáticas) que no parece dejar de crecer, puesto que las fuentes de nuevos problemas no muestran señales de estar agotándose. Dado que el número de libros que puede haber estudiado un matemático hasta su especialización está entre 60 y 70, resulta ser ésta la profundidad media del océano de conocimientos que es la matemática, la máxima que suelen alcanzar la gran mayoría de los matemáticos. Tal amplitud de conocimientos con esa profundidad media presenta un horizonte de subespecialidades muy amplio que hoy se estima que supera las 3.000. Con este panorama, sólo dentro de una de esas subespecialidades puede decirse que un matemático está capacitado para juzgar sobre el valor de lo que es interesante y lo que no lo es. Tan sólo unos pocos matemáticos excepcionales tienen capacidad y conocimientos para juzgar sobre distintos subespecialidades. Siendo esto así, ¿es posible aún hablar de una única ciencia?

¿Dónde se puede encontrar el conocimiento en matemáticas? ¿Qué es la comunidad matemática y quiénes y cuántos son los miembros que la constituyen? ¿Cuáles son as herramientas de este oficio?

Por otra parte, en este punto encontramos una nueva justificación para reflexionar en la dirección de los temas propuestos en el libro: para juzgar lo que es matemáticamente valioso no es posible basarse en el conocimiento de lo que es importante dentro de las matemáticas (nadie tiene una visión de conjunto que permita pronunciarse sobre ello), sino que los juicios:

> ...se fundan en la noción que tengamos de la naturaleza y propósito de la propia matemática. ¿En qué consiste el conocer algo en matemática? ¿Qué clase de significado encierran los enunciados matemáticos? Vemos así como los inevitables problemas del diario ejercicio de las matemáticas conducen, inexorablemente, a cuestiones ontológicas y epistemológicas fundamentales, a pesar de que muchos profesionales hayan aprendido a dejar de lado tales cuestiones, teniéndolas por irrelevantes. (p. 34)

El segundo capítulo se centra en las diversas formas que adquiere la experiencia matemática. Ésta, en primer lugar, se configura históricamente ya que en cada momento el estado de los conocimientos es el resultado de una compleja red de motivaciones e intereses personales y sociales, así como de las interpretaciones y posibilidades de las matemáticas disponibles.

Resulta francamente divertido el retrato que trazan del «matemático ideal», es decir paradigmático. Se trata de una persona que trabaja en un campo del que tan sólo unos pocos especialistas saben que existe y al que dedica toda su atención. No puede hablar de su tema con nadie cercano y tan sólo lo hace cuando se reúne en un congreso con el resto de sus colegas. Allí desearía llegar en alguna ocasión con la comunicación de un resultado crucial para la resolución del problema central de su especialidad: es su gran sueño. Le resulta muy difícil hacer comprender al resto del mundo la importancia de sus investigaciones, y no sólo eso, también tiene dificultades para convencer a los demás de que lo que el llama demostración no es algo subjetivo ya que afirma que una demostración es «un razonamiento que convence a quienes conocen bien la cuestión». Este retrato, en el que se sienten también reflejados, les lleva a poner los pies un poco más cerca de la tierra y afirmar que:

> ...nada de lo anterior demuestra que no estemos en lo cierto en nuestra convicción de que disponemos de un método fiable para el descubrimiento de verdades objetivas. Pero es preciso que nos detengamos un instante y caigamos en la cuenta de que, exceptuada nuestra capillita, a los demás les resulta incomprensible gran parte de lo que hacemos. No hay forma de que podamos convencer a un escéptico seguro de sí de que las cosas de que hablamos tienen sentido y, no digamos, «existencia». (p. 47)

Pero no se reduce a la figura y los pensamientos del matemático ideal la totalidad de la experiencia matemática. Y así lo demuestran los autores cuando nos dan otros ejemplos como la visión de un físico para el que es posible encontrar demostraciones empíricas de hechos matemáticos, o personajes atípicos como Shafarevich que espera que la matemática pueda servir para revelar una meta religiosa suprema. También hay heterodoxos, convencidos de que la comunidad matemática no les comprende, pero que ellos han logrado demostrar alguno de los teoremas pendientes e incluso «insolubles» con el que nadie había podido hasta ahora. ¿Quién que no haya trabajado en una publicación no ha recibido alguna «sorprendente» demostración del teorema de Fermat, o de que π es un número racional?

Termina el capítulo con una discusión sobre dónde hay que situar el origen de la creación matemática. ¿Se trata del fruto de la genialidad individual o por el contrario son las condiciones sociales y económicas las que lo desencadenan? Aunque hay autores que se colocan radicalmente en uno u otro de los extremos la mayoría busca una postura de equilibrio entre ambos. No obstante está por hacer una historia de las matemáticas que refleje esta postura.

El capítulo siguiente se dedica a explorar diversos aspectos externos de las matemáticas. Se empieza con la sugerente pregunta: ¿Por qué funcionan las matemáticas? A la respuesta platónica de que el universo se expresa en lenguaje matemático se contrapone cada vez con mayor fuerza la postura convencionalista de que la creación matemática genera «modelos» cuya utilidad se mide por su capacidad de explicar y predecir el comportamiento de los fenómenos. Un modelo matemático es algo provisional; puede ser bueno o malo para explicar los fenómenos a los que se enfoca, simple o demasiado complejo, bonito o antiestético, útil o inútil pero no se le calificará nunca como verdadero o falso:

> La verdad ha abdicado, en su trono reina ahora hoy la utilidad inmediata. (p. 62)

Después de analizar con un cierto detalle la naturaleza de los modelos matemáticos y su construcción, el resto del capítulo se dedica a una revisión de la gran variedad de usos de las matemáticas. En primer lugar se repasa su utilidad con respecto a las actividades científicas y tecnológicas, empezando en el propio campo matemático. Aunque no suele ser reconocido en las historias oficiales hay una serie de campos en los que las ideas matemáticas han jugado un papel interesante y a ellos dedican alguna atención en esta parte final del capítulo. Entre ellos se encuentran: el comercio y los negocios, la guerra, el misticismo numérico, la astrología y la religión.

El siguiente capítulo de *Experiencia matemática* está dedicado a analizar los aspectos internos que caracterizan la actividad matemática. Entre éstos está el *uso de símbolos*, con lo que se gana en precisión a la hora de representar las ideas matemáticas pero se pierde fidelidad y aplicabilidad a los problemas que les dieron origen; *la abstracción* que, tanto en su faceta de idealización de los objetos como en el de extracción de sus características comunes, son el inicio del pensamiento matemático; *la generalización*, que unifica en un mismo enunciado diversos hechos relacionados entre sí; *la formalización*, que en última instancia permite la manipulación y transformación de los símbolos tanto de forma mecánica como manual; *los objetos y estructuras matemáticas*, sobre los que se construye el discurso matemático y que plantean la cuestión de la naturaleza de su existencia; y *la demostración*, que proporciona la posibilidad de escrutinio y crítica de las afirmaciones y les confiere autoridad, revela una comprensión más profunda de los problemas y sugieren nuevos desarrollos y:

...una discusión sobre dónde hay que situar el origen de la creación matemática. ¿Se trata del fruto de la genialidad individual o por el contrario son las condiciones sociales y económicas las que lo desencadenan?

> ...es rito y celebración de la potencia de la razón pura. (p.118)

No terminan aquí los aspectos internos destacables. Los autores dedican su atención a revisar cuestiones como el papel del infinito, las nociones de recta y moneda justa.

La parte final del capítulo constituye uno de los apartados más sugerentes de todo el libro, ya que muestra, a través de atractivos ejemplos, el papel que tienen en la creación matemática cuestiones tales como la componente estética, la creación de orden a partir del caos, la diferencia entre la concepción dialéctica y la algorítmica de atacar un problema, la ambición por ampliar el grado de generalidad y abstracción en los resultados y finalmente el descubrimiento de relaciones entre objetos inicialmente muy distintos.

En el prefacio de la obra los autores afirman que el libro puede ser leído como una serie de ensayos independientes. De hecho, parte del material proviene de artículos publicados con anterioridad por los autores en otras publicaciones. Sin embargo, no hay duda de que existe un hilo conductor que le da una gran unidad. Así, en el quinto capítulo se exponen seis temas matemáticos que pretenden mostrar el corazón de la experiencia matemática, las propias matemáticas. Son:

- La teoría de grupos simples finitos, campo muy fructífero que se caracteriza por lo largo y prolijo de sus demostraciones.
- El problema de los números primos gemelos, que muestra la importancia del cálculo para construir juicios teóricos.
- La geometría no euclídea, una de las mayores rupturas de la historia de las matemáticas.
- La teoría de conjuntos no cantoriana, cuyas ideas han sido a la vez que fructíferas muy influyentes.

- El análisis no estándar, en el que se pone de manifiesto la sorprendente aplicación de la lógica matemática al análisis.
- El análisis de Fourier, fundamental en gran parte de la matemática pura y aplicada actual.

Empecé la lectura de sexto capítulo —cuyo título *Enseñar y aprender*— con la esperanza de que el material que hallaría estaría al nivel de lo que llevaba leído, pero además con el aliciente de que reflexionaba sobre los aspectos que para mí, como profesor de matemáticas, podían resultar más decisivos. El discurso de los autores se orienta fundamentalmente a la enseñanza de las matemáticas superiores, pero creo que es posible hacer una traslación a la enseñanza elemental de las matemáticas. Lo primero que me sorprendió es que, desde su perspectiva de profesores universitarios, se reclamaba una visión didáctica muy distinta a la que estamos acostumbrados a escuchar en nuestro entorno. Así, podemos leer el siguiente texto que es francamente revelador de su actitud:

> Es frecuente, sobre todo en las clases más elementales, que algún alumno sincero y confuso interrumpa la demostración, exclamando: «No veo por qué ha hecho lo que acaba de hacer. Y, además, no comprendo cómo se le pudo ocurrir hacer lo que ha hecho». Todos los profesores de matemáticas han tenido experiencias como ésta.
>
> El profesor se encara entonces con lo que podríamos denominar «una crisis de comprensión». ¿Qué tratamiento acostumbra a dársele? No muy bueno, desgraciadamente. Es posible que el profesor vuelva a presentar el punto oscuro de forma ligeramente distinta; es posible también que en su ansia por exponer una determinada cantidad de material deje de lado la objeción del estudiante, diciéndole que sin duda llegaría a comprenderla si se tomara la molestia de repasar la cuestión tranquilamente en casa. (p. 203)

El discurso de los autores se orienta fundamentalmente a la enseñanza de las matemáticas superiores, pero creo que es posible hacer una traslación a la enseñanza elemental de las matemáticas.

La lectura de las páginas siguientes muestra mediante un ejemplo cómo encarar una de estas crisis de comprensión. En ellas se reflexiona sobre las causas por las que les resulta difícil a los aprendices seguir las explicaciones de los textos de matemáticas y cómo el tono de los libros y de las explicaciones del aula tiene un aire dogmático o autoritario. Por último se analizan las causa de la resistencia y el rechazo de los alumnos ante las matemáticas a partir de ciertos niveles: ausencia de esfuerzo, carencia de experiencia y técnicas con las que enfrentarse a verdaderos problemas, falta de talento matemático, etc.

Una vez llegados a este punto en el libro se aborda la cuestión de la creatividad y de las formas en que ésta puede ser enseñada o acrecentada. Aquí los autores se fijan en algunos autores que a nosotros nos resultan muy familiares. Por ejemplo, destacan la obra de Pólya y de otros investigadores posteriores, que han desarrollado sus ideas acerca de las técnicas heurísticas. Concluyen su revisión de Pólya con una reflexión que después de estos años en los que se ha intentado poner en funcionamiento una didáctica de las matemáticas basada en la resolución de problemas resulta especialmente sugerente:

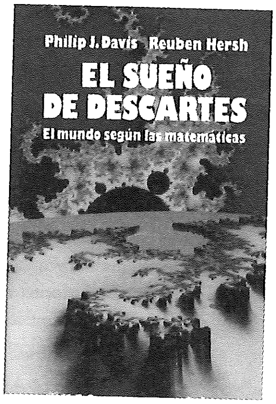
> Todo esto es muy bello, pero uno se pregunta, ¿será ésta la luz que despunta como la mañana, «el relámpago que sacia el deseo»? ¿No será meramente la sabiduría de quien acierta el lunes la quiniela? ¿Funcionan en clase estas ideas? Resulta difícil extraer conclusiones claras al evaluar las tentativas de convertir el programa de Pólya en didáctica práctica. Al parecer, la enseñanza requiere algo más que una buena idea de un maestro. (p. 215)

Muy interesante es el ejemplo en el que muestran cómo va creciendo un resultado a partir de una «semilla» inicial, siguiendo los pasos del modelo de creación de nuevas matemáticas de Lakatos (Tanto *Cómo plantear y resolver problemas* de Pólya, como el libro de Lakatos, *Pruebas y refutaciones,* han sido objeto de análisis en esta misma sección de la revista SUMA). La experiencia profesional de los autores con este tipo de acercamiento refleja también algunas de nuestra apreciaciones cuando planteamos a los alumnos situaciones abierta: desconcierto inicial que en los mejores alumnos se convierte en usa sensación de libertad fruto del control que tienen sobre el material matemático sobre el que están trabajando.

La parte final del libro, que integra el contenido de los dos últimos capítulos es la más filosófica de todo el texto. En el primero de ellos se da un repaso a las corrientes principales de la filosofía de las matemáticas: *el platonismo,* para el que los objetos matemáticos son reales y las matemáticas se dedican a descubrirlos, *el formalismo,* en el que no hay objetos matemáticos y la matemática consiste en axiomas, definiciones y teoremas y por último *el constructivismo* que considera que las únicas matemáticas válidas son las que pueden construirse mediante un proceso finito. Por otro lado, en el último capítulo se vuelven a examinar algunos ejemplos concretos de trabajo matemático tratando de extraer algunas lecciones filosóficas de ello: así se analizan el reforzamiento de la validez de una conjetura cuando puesta a prueba repetidas veces sale airosa, la existencia de «demostraciones probabilísticas» de la conjetura de Riemann, las demostraciones por ordenador del *teorema de los cuatro colores*, teoremas que como el de la clasificación de los grupos finitos simples que ocupan varios miles de páginas y por eso mismo escapan al análisis de los expertos matemáticos y otras.

Conclusión... y otra coincidencia

En resumen, *Experiencia matemática* proporciona el punto de vista de un profesional de las matemáticas que trata de explicarse, y explicar al público en general, cuáles son los materiales con los que éstas están construidas, de qué modo son creadas, qué criterios tenemos para reconocer el valor de sus resultados y también qué se siente al hacer matemáticas. Y lo hace de una forma excepcional.



Poco tiempo después los mismos autores publicaron *El sueño de Descartes* (Labor/MEC, Barcelona, 1989) que en cierto modo es una continuación del anterior trabajo pero desde otra perspectiva. Aquí se ocupan del impacto de las matemáticas al ser aplicadas al mundo exterior a ellas, es decir del mundo de las aplicaciones: cuándo éstas son beneficiosas, peligrosas o irrelevantes; de qué modo limitan nuestras vidas o transforman nuestra visión de la realidad. La lectura de este segundo libro complementa de forma excelente la del primero.

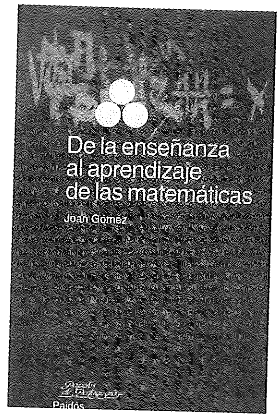
Al releer *Experiencia matemática,* sorprendentemente he encontrado una nueva coincidencia cuyo significado alcanza para mi todo su sentido después de estos últimos ocho años. En el libro, los autores emplean el «yo» como recurso estilístico a pesar de su autoría conjunta:

> De todos modos, la confusión de identidad no puede causar gran daño, pues, en términos generales, cada uno de los autores está de acuerdo con las opiniones de su colega.

Tan sólo puedo decir que puedo hacer mía esta afirmación y emplearla para resumir lo que ha sido el trabajo conjunto en la dirección de SUMA junto a Emilio. No se me ocurre una manera más clara de decirlo y tampoco una forma más conveniente de terminar este texto y esta etapa.

Julio Sancho

DE LA ENSEÑANZA AL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS



Joan Gómez
Paidós
Barcelona, 2002
ISBN: 84-493-1259-0
140 páginas

El tránsito de la enseñanza al aprendizaje no se realiza, utilizando palabras de la tecnología de la comunicación, en tiempo real. De hecho, podemos considerarlo como un camino, y como tal, es visto de manera muy distinta por diferentes personas. Habrá a quien le parezca un dulce paseo, a otros se les atragantarán las pendientes pronunciadas, algunos verán obstáculos insalvables donde los más afortunados encuentra un acicate. Así mismo, las formas de recorrer el camino son tan variadas como ópticas distintas existen: habrá quien quiera recorrerlo rápido, sin pérdidas de tiempo, a otros les gustará recrearse en el paseo, disfrutando cada detalle, incluso a algunos no les interesará lo más mínimo llegar al final. En definitiva, podemos utilizar las palabras del poeta Santos Isidro Seseña, identificando nuestro camino con su vida:

> Para algunos vivir es galopar
> un camino empedrado de horas,
> minutos y segundos.
> Yo más humilde soy
> y sólo quiero que la ola
> que surge del último suspiro de un segundo,
> me transporte mecido
> hasta el siguiente.

ACTAS X JAEM

El Comite Organizador de las X JAEM comunica, a todos los asistentes a las mismas, que la distribución de los dos volúmenes que corresponden a las Actas de las X JAEM se hará en los primeros días del próximo mes de Septiembre.

En este orden de cosas, *De la enseñanza al aprendizaje de las matemáticas* puede ser considerada una buena guía de viajes.

La obra está estructurada en dos bloques fundamentales, no secuencialmente presentados: el «marco teórico» y el «marco práctico». Además de los habituales preámbulo, prólogo, epílogo y bibliografía, el libro consta de cuatro capítulos, siendo el primero y el cuarto básicamente teóricos, los cuales flanquean a los dos más prácticos, actuando así de verdadero marco (tanto físico como teórico). Los dos capítulos prácticos son la parte más divulgativa de una obra que, si bien está escrita en un lenguaje sencillo y para cuya comprensión no se necesita una buena base matemática, está esencialmente dirigida a profesores de matemáticas.

El primero de los capítulos prácticos (el segundo del libro) es una miscelánea, rápidamente conducida por diferentes aspectos matemáticos de la vida cotidiana, que va desde los engaños pseudocientíficos de Hollywood a una interesante glosa de diferentes unidades de medida que incluye varias tablas de equivalencia y apuntes del desarrollo histórico que no omiten las unidades de medida más actuales. El segundo capítulo divulgativo se dedica exclusivamente al número de oro; tema este muy manido —pero siempre interesante— del que Joan Gómez hace una buena recopilación de distintos temas relacionados con él, incluidas algunas «cuentas» que no siempre aparecen en una obra de estas características y extensión.

En el aspecto más teórico, el autor aboga por una imagen optimista de las matemáticas que supere la visión aburrida y abstracta que tradicionalmente se tiene de ellas. Para ello considera imprescindible una nueva didáctica que haga desaparecer los métodos didácticos obsoletos, orientada hacia una formación multidisciplinar que suministre a los futuros profesionales (economistas, biólogos, fontaneros..., ¡o matemáticos!) los conocimientos matemáticos que vayan a necesitar. La apuesta metodológica de Joan Gómez es la modelización, esto es, se trata de plantear un problema de la vida cotidiana en términos matemáticos, resolverlo si es posible, y, finalmente, interpretar el resultado en el marco tangible en el que se establece el problema.

Para terminar, un breve comentario. El el capítulo II –el dedicado a las matemáticas en un día cualquiera– es de agradecer el pequeño detalle que supone que el autor presente algunas imágenes en las que aparecen productos del denominado comercio justo. Quizás es éste el último mensaje que podemos entresacar del texto: las matemáticas y sus profesionales ni pueden ni deben estar desconectados de la realidad (incluida la más dura) que nos rodea.

Daniel Sierra Ruiz

LA MEDIDA DE TODAS LAS COSAS. LA ODISEA DE SIETE AÑOS Y EL ERROR OCULTO QUE TRANSFORMARON EL MUNDO

Ken Alder
Ed. Taurus
Madrid, 2002
ISBN 84-306-0497-9
494 páginas

A finales del siglo XVIII la diversidad de unidades usadas para expresar las medidas era enorme. Éstas, no sólo diferían de un país a otro sino que también había diferencias entre los patrones de las distintas regiones e incluso de una localidad a la vecina. Incluso, bajo la misma denominación, existían muchas unidades cuyo valor era diferente. Esta situación dificultaba el intercambio de mercancías fuera de los mercados locales, y también afectaba a la comparación de resultados científicos. Desde entonces, han pasado más de 200 años desde entonces y aún hay podemos encontrar restos de estos sistemas de medidas locales en nuestro entorno.

Los sabios ilustrados se propusieron acabar con esta situación caótica mediante la introducción de un sistema universal de medidas que pusiera orden y concierto tanto al intercambio de mercancías como al de información científica: «Debería tratarse de un sistema que, al ser racional y coherente, indujera a sus usuarios a plantearse el mundo de una forma igualmente coherente y racional». La pretensión de universalidad que querían darle al nuevo sistema exigía que su unidad fundamental no se basase en la medición de algo local y por ello se propuso la medida del globo terrestre. Alder en *La medida de todas las cosas,* cuenta la historia de la determinación de la medida del meridiano, sobre la que se establecería la unidad de longitud del sistema métrico decimal, y la de la introducción de dicho sistema. Así mismo, muestra cómo el desarrollo de este proyecto ilustrado no hubiera sido posible sin el impulso que le dio la Revolución Francesa que permitió romper las cadenas con todo el pasado, también la enorme resistencia del pueblo, los comerciantes y la propia administración a usar el nuevo sistema y, por último, cómo la nación francesa fue la primera en rechazar el sistema cuando Napoleón reinstauró, para toda Francia, el sistema parisino de medidas usado durante el Antiguo Régimen.

Además de la historia de un importante hecho científico, el libro relata las peripecias por las que pasaron los dos astrónomos, Jean Baptiste Delambre y Pierre Méchain, que durante siete años –que incluyen los agitados años que van de 1792 a 1798– efectuaron las mediciones geodésicas que luego condujeron a determinar la medida del meridiano de París. Las dificultades que sufrieron y cómo las afrontaron constituyen una auténtica novela científica que no sólo ilustra sobre cómo se hacía la ciencia experimental en esa época sino que además entretiene. En el relato podemos ver a un Méchain atormentado por la presencia de unos datos que no concuerdan con lo esperado –dos medidas discrepante de la latitud de Barcelona–, y cuya ocultación le hará sufrir de una manera increíble que queda perfectamente reflejada por el autor.

La publicidad que acompaña al libro –e incluso su propio subtítulo– puede resultar engañosa y hacer pensar que lo que nos van a contar es la historia de una falacia científica, de un experimento amañado. Pero este punto de vista no es correcto. Delambre, que fue el responsable de la publicación de los datos de la expedición, presentó los datos discrepantes de Méchain, pero nos los achacó a un error de observación sino que los trató de explicar como un efecto de la irregularidad de la Tierra. Con ello empezaba a identificar las causas posibles de la discrepancia, aunque no de forma completa ya que le faltó un buen concepto del significado de «error». La revisión matemática de este concepto y el desarrollo de métodos precisos para su control nacería precisamente del análisis de estas tablas. Así Nicollet acabaría explicando que la precisión de las medidas de Méchain estaba viciada por la presencia de errores constantes que conducían a resultados inexactos, pero que mediante un análisis detallado de los datos era posible corregirlos. Laplace, Legendre y Gauss utilizarían más tarde las tablas de Delambre y Méchain para desarrollar el método de mínimos cuadrados. A partir de ese momento hay un cambio completo de perspectiva: no se trata ya de utilizar los datos para ajustar la excentricidad del elipsoide teórico, que era hasta entonces como se concebía la figura de la Tierra, sino de buscar la curva que mejor se ajusta a los datos experimentales y hasta qué punto es probable que la curva escogida sea la mejor. En este proceso, los sabios se convierten en científicos que no sólo saben diferenciar entre distintos tipos de error si que además serán capaces de enfrentarse al error de forma cuantitativa.

A lo largo de sus casi 500 páginas Ken Alder presenta a los personajes de esta historia en su relación con los acontecimientos y personajes científicos y sociales de su época y eso concede a la obra una dimensión aún mayor. Puestos a poner un pero, a mi me hubiese gustado que el autor hubiese desarrollado con mayor profundidad, que la que le dedica, la explicación de los aparatos y métodos geodésicos usados por Delambre y Méchain, el desarrollo de la teoría de errores o el método de mínimos cuadrados. Por cierto, que en el presente número de la revista puuede leerse un interesante artículo sobre el origen del método de los mínimos cuadrados.

A pesar de lo dicho en el párrafo anterior, quiero dejar claro que, en mi opinión, estamos ante un libro muy ameno e interesante y de lectura muy recomendable.

Julio Sancho

¡ÚLTIMA HORA!

Medalla de Oro de la Comunidad Canaria a la Sociedad «Isaac Newton»

El pasado 29 de mayo el Gobierno Canario hizo entrega a Luis Balbuena, como socio fundador, y Lola de la Coba, como actual presidenta, de la Medalla de Oro de la Comunidad a la Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas con ocasión de la celebración de su veinticinco aniversario.

Queremos hacer llegar a todos los miembros de la Sociedad Canaria nuestra más efusiva felicitación convencidos de que es compartida por todos los socios y socias de la Federación.

Simposio de la SEIEM

CONVOCATORIAS

VII Simposio de la SEIEM

La Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) se reúne anualmente, desde su constitución. Hasta el momento ha celebrado reuniones en la Universidad de Salamanca (1997), Universidad Pública de Navarra (1998), Universidad de Valladolid (1999), Universidad de Huelva (2000), Universidad de Almería (2001) y Universidad de La Rioja (2002).

La séptima edición se celebrará en Granada (Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada) los días 11, 12 y 13 de septiembre de 2003

El Comité Científico está formado por Tomás Ortega –Coordinador– (Universidad de Valladolid), Modesto Sierra (Universidad de Salamanca), Enrique de la Torre (Universidad de A Coruña), Encarnación Castro (Universidad de Granada), Pilar Orús (Universidad Jaume I) yBernardo Gómez (Universidad de Valencia).

El Comité local lo constituyen: Encarnación Castro (Coordinadora), Pablo Flores, Luis Rico y Angustias Vallecillos

Programa científico

El programa científico incluye las siguientes actividades:

I. Temas de debate

1. Gestión, Criterios de Calidad y Evaluación de la Investigación en Didáctica de la Matemática.
2. Didáctica de la Matemática en el Espacio Europeo de Educación Superior
3. La Investigación Histórica en Didáctica de la Matemática.

II. Comunicaciones

El Comité Científico del VII Simposio acordó dedicar parte de las sesiones del VII Simposio a la presentación de

Comunicaciones. Estos trabajos deben ser originales y no estar publicados previamente. Para su aceptación los trabajos serán sometidos a un proceso de revisión anónimo realizado por dos jueces, especialistas en las distintas líneas de investigación. Para la publicación en las Actas de un trabajo aceptado los firmantes deberán estar inscritos en el Simposio.

Los trabajos que pueden proponerse como Comunicaciones pueden ser:

Informes sobre estudios empíricos (observacional, etnográfico, experimental, cuasi-experimental y estudios de casos) .

Ensayos teóricos, históricos o epistemológicos.

Los revisores valorarán de manera especial: el marco teórico y la bibliografía relacionada, la metodología, descripción y discusión de resultados, claridad de la redacción y estructura del trabajo, y la relevancia del tema para la didáctica de la matemática. La decisión final de aceptar una Comunicación corresponde al Comité Científico del Simposio.

Enviar las comunicaciones antes del 30 de Abril de 2003, por correo electrónico, a Tomás Ortega ortega@am.uva.es

III. Reuniones de los Grupos de Investigación

Se celebrarán dos sesiones de trabajo de los Grupos de Investigación de la SEIEM, procurando no simultanear las sesiones de los grupos de contenido genérico (Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica, DMDC; Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor (CDPP), Investigación en Historia), con las sesiones de los grupos de contenido específico (Aprendizaje de la Geometría; Didáctica del Análisis; Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria; Pensamiento Numérico y Algebraico).

Las sesiones de los Grupos de Investigación estarán encaminadas a discutir los trabajos en curso en el seno del Grupo y la planificación de actividades para el próximo curso.

Edición de Actas

Está previsto que la edición de las Actas permita su entrega con la documentación del Simposio. Las Actas incluirán las ponencias presentadas en los temas de trabajos y las comunicaciones aceptadas.

Es necesario respetar los plazos establecidos en el calendario de Comunicaciones para que sea posible la edición de Actas en la fecha prevista.

Secretaría del VII Simposio de la SEIEM

Departamento de Didáctica de la Matemática

Facultad de Ciencias de la Educación.
Universidad de Granada.
Campus de Cartuja 18071 Granada

Para cualquier información e inscripción relacionada con el Simposio, dirigirse a Pablo Flores (UGR) pflores@ugr.es.

FE DE ERRATAS

En la sección «Convocatorias» del n.° 42 de SUMA (p. 137) es incorrecto el cuadro en el que se refleja el Comité de Programas de las XI JAEM. Debería haber aparecido el siguiente:

Comité de Programas XI JAEM

Xavier Vilella (Presidente)
Luis Balbuena
Concepción García
Juan Antonio García
Margarita Marín
Emilio Palacián
Manuel Pazos

NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, ICE de Universidad de Zaragoza, C./ Pedro Cerbuna 12, 50009 Zaragoza), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.

2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos en ningún caso serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.

3. Los gráficos, diagramas y figuras se enviarán en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. Así mismo, podrán incluirse fotografías. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.

4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de entre cinco y diez líneas, que no necesariamente tiene que coincidir con la Introducción al artículo. Debe ir escrito en hoja aparte. En ese mismo folio aparecerán los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede).

5. Si se usa procesador de texto, agradeceremos que además se envíe un disquette con el archivo de texto que contenga el artículo, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quiera incluir. La etiqueta del disquette debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda MS-Word (hasta versión 5.0) en Macintosh, o WordPerfect (hasta versión 5.1) en PC. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF.

6. En cualquier caso, tanto un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.

7. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.

8. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo.

9. La bibliografía se dispondrá al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:

   TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma,* n.° 20, 91-98.

   En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas,* Labor, Barcelona.

   En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2,* ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

10. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ...supone un gran avance (Hernández, 1992).

    Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ...según Rico (1993).

11. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como —en caso afirmativo— la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

BOLETÍN DE SUSCRIPCIÓN

Tarifa

	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	21 €	10 €
Centros	30 €	10 €
Europa	38,5 €	13,5 €
América y resto del mundo	$50 USA	$17 USA

Fotocopiar y enviar a: Revista SUMA. ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Deseo suscribirme a la revista SUMA:
Nombre y apellidos:. . . . .
Dirección: . . . . Tno.: . . . .
Población: . . . . CP: . . . .
Provincia/país . . . . CIF/NIF: . . . .

Importe

- [ ] Suscripción a partir del n.º______ (3 números)
- [ ] N.os sueltos:______________________

Total

- [ ] Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto).
- [ ] Transferencia bancaria (Ibercaja: 2085-0168-50-03-000415-98).
- [ ] Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista Suma.

Firma y fecha:

- [ ] Giro postal dirigido a Revista Suma.

Nombre y apellidos: . . . .
Código Cuenta Cliente
Entidad | | | | | Oficina | | | | | DC | | | Cuenta | | | | | | | | | | |
Banco/Caja . . . .
Agencia n.º: . . . . Dirección: . . . .
Población: . . . . Provincia: . . . .

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que periódicamente les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (Fecha y firma):

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

FESPM