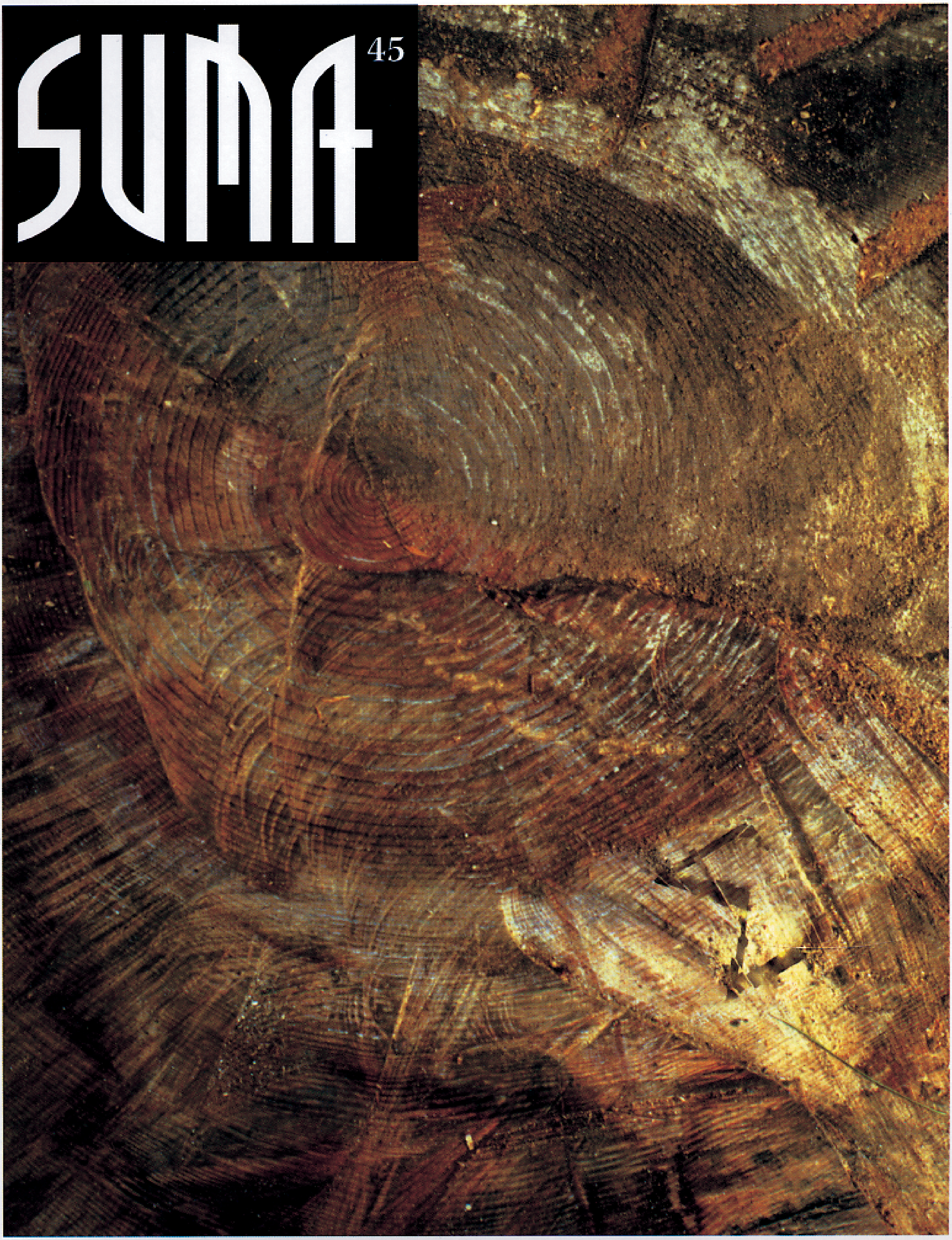
SUMA 45



SUMA. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las MATEMÁTICAS MADRID · FEBRERO 2004 · N.º 45 · ISSN 1130-488X

SUMA
Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las MATEMÁTICAS
45
Febrero 2004

Edita
FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS (FESPM)

Diseño de la portada
Javier Alvariño
Diseño interior
Raquel Fraguas (NIVOLA)
Maquetación
A. Alamillo y F. Martín
Summaries
M. Manso de Zúñiga
P. Satrústegui
Revista Suma
Apdo. 19012
E-28080-Madrid
España
Fax:+(34) 912 911 879
Tirada: *6400 ejemplares*
Deposito legal: *Gr 752-1988*
ISSN: *1130-488X*

SUMA 45
Febrero 2004

Iniciamos con este número la publicación de una colección que hemos titulado ***monografías de SUMA****. Editar con una cierta periodicidad algún número monógrafico era una de la ideas que incluimos en nuestro proyecto para la dirección de la revista y que ahora, por primera vez, vemos cumplida.*

Las ***monografias de SUMA****, no tendrán una periodicidad fija, aunque intentaremos que aparezca una cada curso. Estarán dedicadas a un tema de interés, que servirá de hilo conductor de la monografía, para profundizar en él más allá de lo que permite la extensión de un artículo de SUMA.*

La profesora Emma Castelnuovo es muy querida por muchos profesores de matemáticas españoles, que hemos tenido oportunidad de verla, de escucharla y de aprender de ella en varias ediciones de las JAEM y en otras muchas reuniones y congresos, ha trabajado con profesores españoles y, como es sabido, una de las sociedades de nuestra Federación, la Sociedad de Profesores de Matemáticas de Madrid lleva su nombre.

Emma Castelnuovo cumplió noventa años en Diciembre del 2003 y hemos considerado que la mejor forma de felicitarla en nombre de todos era difundiendo sus ideas. A ella dedicamos esta primera monografía de SUMA. Hemos recogido textos de distintas procedencias y momentos de su vida, presentándolos en un orden cronológico. Al leerlos se aprecia la vigencia de sus ideas, desde los primeros escritos de los años de la posguerra, hasta los más recientes. Seguimos así aprendiendo de esta amiga y colega. Por ello, empezar las monografías de SUMA con ideas de emmatemática castelnuovo *ha sido una gran satisfacción.*

Sus compañeros italianos para felicitarla de una forma especial, organizaron un acto con la intención de que tuviera repercusión fuera del entorno de los amigos *—como nos dice Carla degli Esposti en su artículo* Un encuentro especial- *y reconocer y agradecer publicamente su labor docente y su aportación a la Enseñanza de la Matemática. A esta iniciativa se sumó el Alcalde de Roma, Walter Veltroni, que la hizo suya. El 12 de diciembre en el Campidoglio tuvo lugar el acto de homenaje, en el que estuvo representada nuestra Federación. Dedicamos unas páginas de la revista a este acto, dando también unas pinceladas sobre otros aspectos de Emma que ayudarán a conocerla mejor. La interveción que ella hizo, sin embargo, aparece como último de los artículos de la monografía. En la sección Biblioteca se comentan algunas de sus publicaciones.*

También desde este editorial queremos felicitar a Emma por su cumpleaños y decirle en su lengua: Tanti auguri, professoressa, tanti auguri, cara amica.

A vosotros, lectores de SUMA, os deseamos que disfruteis leyendo sus escritos.

En otro orden de cosas, con este número termina la transición del anterior equipo de dirección al nuevo y queremos desde aquí pedir disculpas por algunas pequeñas disfunciones que sabemos se han producido en relación con el seguimiento de algunos artículos remitidos. El sistema de doble referenciación que se sigue con cada artículo recibido hacen que el proceso de aceptación sea largo y que, en determinados momentos, la cola de espera dure más de lo deseado. Todos estos problemas se iran subsanado en los próximos números.

Seguimos animando a los profesores de matemáticas a remitirnos sus trabajos, especialmente las experiencias innovadoras de clase, el trabajo cotidiano de búsqueda de soluciones a los problemas de enseñar matemáticas en todos los niveles educativos que muchos de vosotros hacéis cada día. SUMA ha de servir para compartirlo con los demas lectores y para que todos aprendamos de los otros. Vencer un cierto pudor a contar lo que se hace permite compartirlo. ■

SUMA 45
Febrero 2004, pp. 5-16

Emma Castelnuovo cumple noventa años

Crónica mundana del homenaje a Emma Castelnuovo en Roma

Roma, doce de diciembre de 2003: Emma Castelnuovo cumple noventa años y a las cuatro de la tarde, en la sala de la Protomoteca del Campidoglio, el alcalde de Roma, Walter Veltroni, toma la palabra y abre el acto de homenaje a su antigua profesora. "Soy alcalde de Roma porque he sido alumno de Emma Castelnuovo" —sostiene. Y podría ser cierto, si todos los que están reunidos en el salón hubiesen votado por él, porque el salón es enorme y está lleno. Hay gente de pie y otros que no pueden entrar, esperan fuera. Mucha más gente de la que los organizadores esperaban. Casi parece que los romanos podrían clasificarse en dos grupos: los que fueron y los que no fueron alumnos de Emma. No sabría decir cuál de los dos grupos sería más numeroso.

"Soy alcalde de Roma porque he sido alumno de Emma Castelnuovo" —dijo Walter Veltroni.

Guido Ramellini
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas "Emma Castelnuovo"

Fuera de la sala el día es esplendoroso y, de la terraza del Campidoglio, Roma nos brinda una vista impresionante sobre siglos de historia. Puedo hasta sacar una foto panorámica sin que aparezca una sola antena de televisión. Dentro la visión es igual de interesante. Los presentes somos personas de todas las edades, generaciones que han aprendido de Emma siendo sus alumnos o sus compañeros de profesión.

Veltroni recuerda los rasgos de su profesora: seriedad, rigor, compromiso. No había fácil camaradería, ni concesiones a las modas: al encuentro se llega trabajando juntos, compartiendo objetivos, realizando proyectos significativos para el desarrollo humano de las personas implicadas. Otros alumnos que tomarán la palabra después confirmarán la naturaleza de la relación con Emma, seria y rigurosa, pero profunda y emotiva; lo expresarán con palabras de respeto y agradecimiento, de admiración y cariño.

En la mesa toma la palabra Francisco Martín Casalderrey, que cuenta la importancia y la vigencia de la obra de Emma fuera de Italia. En los pasillos laterales antiguos compañeros del Instituto *Tasso* se reconocen, se saludan, se pasan antiguas fotos: en algunas los chicos llevan todos corbata, las chicas delantales negros. Francisco va adquiriendo soltura conforme lee su intervención en un italiano más que correcto. Los presenten escuchan y le aplauden largamente cuando termina con las únicas palabras en español: “Emma, te queremos”.

La intervención ha gustado: no sé cuantos de los presentes sabían del prestigio que la obra de Emma ha merecido en el mundo. La intervención de Francisco lo ha hecho “tangible”.

Desde la mesa, Carla Degli Esposti, colaboradora de Emma y alma de la organización del homenaje, pasa la palabra a Edoardo Lugarini (en representación de La Nuova Italia, editora de casi todos los libros de Emma) y a Paolo Mieli, antiguo alumno y director del grupo editorial que gestiona ahora los derechos de sus publicaciones.

El primero recuerda vivamente, leyendo párrafos concretos de cartas, la negativa tajante de Emma a que se publicasen las soluciones de los problemas de sus libros de textos. “De ninguna manera puedo aceptarlo, porque eso iría en contra de la metodología que defiendo. La solución nunca es lo importante sino el proceso y, por tanto, que más da que el resultado sea este o aquel valor concreto”. El segundo afirma que pocas veces en su vida ha sido consciente de encontrase ante un genio y que una de éstas fue cuando conoció como alumno a Emma. La compara con Mozart. Añaden recuerdos personales que cruzan años importantes de la historia reciente de Italia, entre luchas, ganas de reconstruir (sin olvidar), de mejorar (sin olvidar), de perdonar (sin olvidar).

Y le toca el turno a otra maestra de maestros, Clotilde Pontecorvo, que, desde la Facultad de Ciencias de la Educación de Roma, ha tenido muchas ocasiones de contacto con Emma, de compartir trabajo, de intercambiar ideas. Lamentó, la profesora Pontecorvo, no haber traído el famoso cordel de Emma, que tanto la impresionó en unos de sus primeros encuentros. En seguida Emma llegó a socorrerla, sacando el cordel de uno de sus bolsillos. No iba a ser la última vez.

> *Miele afirma que pocas veces en su vida había sentido la sensación de encontrase ante un genio y que una de esas fue cuando conoció como alumno a Emma Castelnuovo. La compara con Mozart.*

La última intervención de la mesa fue la de Tullio De Mauro, insigne lingüista y ministro de la Educación con el Gobierno anterior. Como tal, invitó a Emma a formar parte del grupo de trabajo con el que, después de más de setenta años, se pretendía estudiar una reforma global del sistema educativo italiano. Fue una llamada histórica: la anterior que Emma había recibido de este mismo Ministerio ¡se remontaba a más de veinte años! (Esto dice mucho sobre unas cuantas cabezas ilustradas que se han sucedido en el cargo).

De Mauro no fue alumno de Emma y a este hecho atribuía, en su intervención, su prematuro cese del cargo ministerial. Rememoró la primera reunión de ese grupo de trabajo, formado por más profesores de universidad que docentes de escuela. Eran muchas las cosas que se debían decidir y estas son las típicas situaciones donde todo el mundo habla, pocos escuchan y las brillantes ideas de gente que ha dedicado su vida a la enseñanza se pierden en la aglomeración. Entonces Emma, que había permanecido callada hasta el momento, se levantó, sacó del bolsillo (¿el mismo?) el cordel y hizo que el selecto y restringido grupo de trabajo experimentara un primer día de clase en una escuela secundaria.

Después de haber discutido, contestado, fallado, revisado y comprobado sus opiniones, según les sugerían las variaciones dinámicas del cordel, tenían las ideas un poco más claras sobre el camino que recorrer para reformar la didáctica. Pero llegó el verano, los profesores volvieron a sus universidades y a sus elucubraciones (mientras la derecha ganaba las elecciones) y, como en el homenaje de Emma estuvieron presentes sólo dos profesores universitarios, creemos que el resto debe de estar todavía muy ocupado. Naturalmente, la reforma que ahora afecta a la escuela italiana nada tiene que ver con el trabajo de los dos ministros anteriores y de esos grupos de trabajo.

> *Las intervenciones de antiguos alumnos nos hicieron recorrer las etapas más significativas de la carrera y de la vida de Emma: la escuela hebraica de Roma, en los terribles años de las leyes raciales, la posguerra, hasta los 70 con las dos exposiciones de matemáticas del 1971 y 1974.*

Las últimas intervenciones fueron de representantes de antiguos alumnos que nos hicieron recorrer las etapas más significativas de la carrera y de la vida de Emma: de la escuela hebraica de Roma, en los terribles años de las leyes raciales, pasando por la posguerra hambrienta —en todos los sentidos—, hasta los años y los alumnos de las dos exposiciones de matemáticas: 1971 y 1974. Lo que contaban sus *chicos* y *chicas* nos devolvían la Emma que conocemos y queremos, la que tantas veces nos ha regalado su aportación educativa, sin fisuras entre los aspectos profesionales y personales, la que afirma cada vez que enseñar es ante todo un acto profundamente humano.

A Emma le tocaba concluir. Durante el acto la había mirado muchas veces su cara, intentando robarle, sin apreciables resultados, un señal de conmoción. Encendió el retroproyector y sacó del maletín sus transparencias. Le tocaba finalmente el turno y vimos nuevamente una profesora de matemáticas, de las buenas, de las que hablan poco —para dejar hablar a los alumnos—, ¡Qué tomáramos nota! nos dijo.
Volvió a sacar del bolsillo el cordel y, una vez más, gozamos de una clase auténticamente magistral de matemáticas. El aula estaba llena. La poca gente que se había marchado había sido sustituida por los que por fin habían conseguido entrar en el salón de actos. Los alumnos atentos y entregados, la profesora experta e inspirada, los argumentos mantenían la vigencia de siempre y nos llevaban de las matemáticas a la historia, del arte a la arquitectura y de la física a las ciencias ambientales, así que volvimos a clase hasta cuando, sin sonar el timbre, terminó Emma y nos ofrecieron compartir su tarta de cumpleaños. De esto no contaré nada porque es de mala educación escribir con la boca llena.

> *Emma volvió a sacar del bolsillo el cordel y, una vez más, gozamos de una clase auténticamente magistral de matemáticas. El aula estaba llena. Los alumnos atentos y entregados, la profesora experta e inspirada, los argumentos mantenían la vigencia de siempre.*

Al día siguiente, el grupo de los españoles estuvo invitado a comer en casa de Emma. Era la ocasión para entregarle nuestros regalos y los de la Federación y para profundizar la relación con sus más cercanos colaboradores.

Fue una reunión muy interesante, también a nivel profesional, porque resultó importante conectar las experiencias que, a través de los grupos de trabajo de la distintas sociedades de profesores, se están desarrollando en España y las que discípulos de Emma están realizando en Italia.
Los que estábamos allí hablábamos distintos idiomas, pero una misma lengua.

Espero que esta crónica mundana, a la que le toca ser escueta y le gustaría ser “ligera”, pero no superficial o frívola, sirva a los lectores para sentir que, de algún modo, han formado parte de ese homenaje a Emma en Roma. ■

Sono sindaco di Roma perchè sono stato alunno di Emma Castelnuovo

SOY ALCALDE DE ROMA PORQUE HE SIDO ALUMNO DE EMMA CASTELNUOVO. Para todos nosotros el contacto con la profesora Castelnuovo ha sido quizás una de las primeras experiencias de formación adulta. La escuela media, es una etapa un poco extraña, algo situado entre la primaria y el liceo, en ese periodo de la vida en el que estamos a caballo entre ser niños y ser grandes. Todo en un tiempo especialmente significativo, en el que el sistema de relaciones que se establece, horizontalmente entre los compañeros de clase y verticalmente con los profesores, es algo muy importante.

La profesora Emma Castelnuovo tenía dentro de sí algunas cosas que podían parecer contradictorias pero que, al menos a mí, en ese tiempo de mi vida, me despertaban la curiosidad y aprovecho esta ocasión para decírselo. No se puede decir que fuese una profesora de las que se esfuerzan para crear un clima digamos post sesenta y ocho dentro de la clase, en el sentido de que no había ese aire de relación tan directa e inmediata que después, con el paso de los años se formó, y que yo veo todavía hoy en las escuelas a las que voy. Había severidad. Una severidad que nacía del rigor; pero al mismo tiempo esta percepción, que a un muchacho podía alejarle del profesor, estaba no diré mitigada, sino compensada y superada por la fascinación intelectual de su persona. Emma Castelnuovo encontraba las llaves para hablar y escribir de las matemáticas y de la geometría de modo que, incluso para aquellos de nosotros menos dados a aprender estas difíciles ciencias, con ellas conseguía abrirnos mundos que antes aparecían como incomprensibles e invencibles.

Si tuviera que decir cual fue la primera profesora que me abrió la mente ella es sin duda la profesora Emma Castelnuovo. No porque a través de ella haya entendido la segunda guerra mundial o la Edad Media y el Renacimiento, sino porque a través de ella entendí las formas, la lógica, entendí esa extraordinaria experiencia, que después he vuelto a redescubrir, que es la filosofía de los números, todo lo que está encerrado dentro de la esencia de los números , que hoy se ha convertido en un filón literario, de desigual calidad pero de éxito seguro, que ha conquistado a un público de lectores cada vez más vasto.

Por todo esto me siento en deuda con la profesora Castelnuovo: por esta bellísima experiencia que como todas las improntas permanece para toda la vida. Y además, puesto que los alumnos hablan de los profesores, el saber que Emma Castelnuovo había construido su vida, años atrás, sobre una historia con páginas muy duras por la persecución que sufrió, hacía que ante nosotros su figura se cargase de significado, de valores y también de afecto. Nos sentíamos, por tanto, empujados al respeto intelectual, a esa forma de deferencia que venía de la severidad y del rigor que eran especialmente útiles porque estaban unidos a su capacidad de enseñar, capacidad a la que nos hemos quedado particularmente liagos.

> *Había severidad. Una severidad que nacía del rigor; pero al mismo tiempo esta percepción estaba, no diré mitigada, sino compensada y superada por la fascinación intelectual de su persona.*

Y creo que puedo afirmar que si esta tarde nos hemos visto casi obligados a cerrar las puertas de entrada a esta sala, es porque todo lo que ella ha hecho en estos años ha pervivido en las personas que la han conocido como estudiantes y después como colegas. Todos ellos tenemos muchas razones para estarle agradecidos.

En el *Campidoglio* hemos adquirido esta feliz costumbre de felicitar a los grandes romanos, poco importa si han nacido o no aquí, hijos de nuestra comunidad que cumplen años. Creo que una ciudad debe ser también esto. Una ciudad es también una comunidad y en una comunidad se tiene la fuerza de cultivar el sentido de la gratitud.

Y ahora y sobre la base de esa gratitud, que en mi caso es personal, más allá de aquella que tengo el deber y también el placer de representar, deseo expresarle a usted profesora y a todos vosotros que estáis aquí la gratitud de una ciudad, de los hombres y de las mujeres de esta ciudad, por la gran labor que usted ha hecho en las escuelas romanas y en el mundo a través de la cual usted ha abierto la mente a generaciones de romanos y nos ha ayudado a cada uno de nosotros a conocer y a entender mejor el mundo. Gracias. ■

Walter Veltroni
Alcalde de Roma

Traducción de **Francisco Martín Casalderrey**

Emma Castelnuovo, la matemática se hace tangible*

Antes de empezar quiero agradecer la amable invitación del alcalde Veltroni para estar aquí, participando en este acto de homenaje a Emma, lo que me ha permitido volver una vez más a Roma, esta ciudad que tanto amo, en la que he pasado seis años de mi vida y que llevo siempre en mi corazón.

Me siento feliz de poder participar en este acto en el que celebramos la ya larga vida de Emma Castelnuovo, con tantos colegas profesores de matemáticas, con tantos antiguos alumnos de Emma, con tantas personas distintas unidas ahora porque compartimos algo: el sentirnos orgullosos de podernos considerar amigos de Emma.

Me abruma un poco la responsabilidad de hablaros de la trascendencia de la obra y de la persona de Emma en el exterior y de, a través de mi voz, hacer llegar a Emma y a todos vosotros, la voz y el sentimiento de tantos otros que desde fuera de Italia la hemos conocido y hemos aprendido de sus ideas, de su experiencia, y sobre todo de ella como ser humano.

Hablar sobre Emma Castelnuovo es una tarea más difícil de lo que pudiera parecer y esto es así porque la sola mención de su nombre despierta en mí, y tengo la seguridad de que también en muchos de vosotros, fuertes sentimientos. Nadie que haya podido oír la voz de Emma —y en esto los españoles hemos sido muy afortunados porque la hemos podido escuchar expresándose en un correctísimo español, cargado de sonoridades italianas— nadie que la haya escuchado —decía— ha podido permanecer indiferente.

> *Nadie que haya podido oír la voz de Emma ha podido permanecer indiferente.*

Y somos muchos los que la hemos oído hablar. Emma, viajera incansable, ha recorrido el mundo dejándose escuchar y oyendo a los demás, enseñando y aprendiendo de los otros, mirando la realidad con esos ojos penetrantes, ojos matemáticos que filtran lo que ven y destilan lo que captan y lo reconvier-

* texto de la intervención en el acto de homenaje a Emma Castelnuovo en Roma, el 12 de diciembre de 2003.

Francisco Martín Casalderrey
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas "Emma Castelnuovo"

ten en ideas útiles para enseñar matemáticas, que generosamente comparte con quien la escucha.

La proyección de Emma en el exterior es extensísima. Desde muy joven inició sus viajes profesionales a Francia. En el 1950-51 viaja a Bélgica para conocer y visitar la Universidad Libre y la escuela de Ovide Decroly. El ambiente de esas aulas en las que el profesor hablaba poco y los alumnos trabajaban solos, como ella misma ha confesado, influyó mucho en su ideas. En 1957, comienza sus contactos con España a través de su amigo el profesor Pedro Puig Adam. Eran tiempos difíciles para nosotros los españoles. Aislados en el oscuro túnel de la dictadura frasquista no alcanzábamos a ver la luz. Y este aislamiento llegaba a todos los ámbitos incluido, por extraño que parezca, el de la didáctica de las matemáticas. Personas como el profesor Puig Adam intentaban una cierta apertura al exterior y Emma fue una de las personas que aportó aires nuevos en ese proceso, que, la muerte prematura de Puig Adam, truncaría hasta que al final de los 70 llegó de la democracia. Argentina, Cuba, Costa Rica, México, Canadá, Venezuela, Republica Dominicana, son algunos de las etapas de este viaje permanente de Emma para mostrar sus ideas. Señalaré especialmente Níger, probablemente uno de los países más pobres del mundo, donde enviada por la UNESCO dio lecciones en dos años durante periodos de 20 días en cada ocasión. Las marcas de este viaje se han hecho patentes en muchas lecciones suyas posteriores.

Emma sabía entonces llevarnos más allá de las nubes, al reino mágico de la realidad, de la realidad cotidiana, guiados siempre por su forma de ver y sentir la matemática.

Y Emma viaja siempre con un amplio equipaje de objetos, como el faro de un coche con el que demostrar las propiedades de la parábola, ya desde antes de que las antenas parabólicas nos invadiesen; con un cilindro formado por muchos hilos para mostrarnos las secciones cónicas; cargada de transparencias para retroproyector con las que ilustra sus ideas, escritas con esa letra clara, limpia y picuda que los grafólogos dicen que es signo de vitalidad e ingenio y también de carácter. Pero también cargada de viejos saberes aprendidos de los libros y de las personas como Guido Castelnuovo y Federigo Enriques, como Lucio Lombardo Radice y tantos otros ilustres profesores de matemáticas que ha tenido la fortuna de conocer y que contribuyeron, incluso por vía genética, a que Emma creara sus ideas.

La Emma viajera, como el Ulises de Kavafis, muestra en su rostro las huellas de los lugares visitados, manteniendo siempre la mirada en el destino del viaje, su Ítaca particular: el aprendizaje y la enseñanza de la matemática.

En España Emma ha recorrido casi todos los rincones en los que se ha hablado de enseñanza de las matemáticas. Y no sólo para hacerse escuchar, pronunciando conferencias en ese tono tan personal que la caracteriza, sino también confundiéndose entre la gente, preguntando humildemente desde el público cuando intervenía cualquier profesor que se alzaba, desde la tiza y contaba su experiencia cotidiana. Polemizando también cuando no estaba de acuerdo con las afirmaciones de más de un supuesto pope de la profesión que, iluminado, abandonaba el suelo de la realidad para esconderse en las nubes. Emma sabía entonces llevarnos *al di là delle nuvole*, al reino mágico de la realidad, de la realidad cotidiana, guiados siempre por su forma de ver y sentir la matemática.

Emma defiende una concepción de la educación matemática viva, pragmática, cercana.

Permítaseme, ahora, hacer una pequeña digresión, que inevitablemente me obligará a recoger alguna vivencia personal, pero al hablar de Emma y de sus trabajos de toda una vida sobre la enseñanza de las matemáticas, las fronteras entre los ámbitos profesional y personal quedan siempre inevitablemente difuminadas.

Conocí a Emma Castelnuovo hace casi 22 años en Sevilla. Poco después, en el verano del 1983, la volví a encontrar en Lisboa. Se celebraba allí el XXXV Encuentro de la Comisión Internacional para el Estudio y la Mejora de la Enseñanza de las Matemáticas (CIEAEM). En España acababa de empezar un fuerte movimiento asociacionista entre el profesorado de matemáticas que conduciría a la creación de la Federación Española de Profesores de Matemáticas. Viajar era una forma de enterarnos de lo que fuera se hacía, de conocer a personas como el holandés Hans Freudenthal o el francés Guy Brousseau, el italiano Paolo Boero, o la misma Emma. Recuerdo perfectamente la viva impresión que me causó una fortísima discusión pública entre Brousseau y ella, que mostraban dos posturas, dos concepciones de la educación matemática, no diré que contrapuestas, pero al menos dibujadas en distinta clase de pizarra y con distinta tiza. Una de ellas era una concepción teorizante y, digamos, estructural; la otra, la de

Emma, y claramente se verá que no soy neutral, viva, pragmática, cercana. Ambos derrochaban dosis de entusiasmo, de vitalidad, de convicción. Se veía que cada uno creía vehementemente en lo que decía y lo demostraban sus gestos, sus voces que se alzaban y a veces hasta gritaban sin disimulo. Esa discusión, de la que un grupo de españoles fuimos testigos, influyó largamente en mí a lo largo de los años.

Pasado el tiempo, consolidada en nuestro país la democracia, el movimiento de renovación pedagógica de los profesores de matemáticas había crecido paralelamente y era fuerte y sólo en alguna región, como el caso de Madrid, no existía una sociedad que los agrupara. La idea de crear en Madrid una de estas sociedades de profesores surgió en el año 90. Cada una de las Sociedades regionales existentes había adoptado un nombre, de un gran matemático, como la Sociedad Canaria Isaac Newton, o la andaluza que se denomina Tales. En la Sociedad madrileña estuvimos un tiempo buscando un nombre, pero ninguno de los propuestos terminaban de satisfacernos, hasta que, de repente, alguien dijo Eureka: la llamaremos "Emma Castelnuovo". Todas las discusiones previas acabaron: hubo unanimidad. Ningún nombre mejor que el de Emma, nadie podía expresar mejor lo que juntos queríamos compartir tantos profesores. La Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas se siente orgullosa de llamarse "Emma Castelnuovo" y hoy cuenta con más de 300 socios en la región de Madrid, —un pequeño grupo de los cuales hemos venido hoy aquí para felicitar a Emma y compartir con vosotros este acto—. Traemos con nosotros el testimonio de gratitud y de felicitación de toda la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, formada por más de 6000 docentes de toda España, desde Navarra a Andalucía, desde las Islas Canarias a Aragón, desde Galicia a Cataluña, pasando por todos los rincones de nuestro país, que han querido expresamente sumarse a esta celebración.

Las actividades de Emma en España han sido muchísimas y sería poco oportuno recordarlas una a una aquí. No obstante, no puedo dejar de señalar al menos una y quizás por razones personales, elegiré el grupo de trabajo que, formado por una veintena de profesores y profesoras y coordinado por Emma, trabajó durante dos años preparando la exposición de materiales didácticos titulada "2000, piezas matemáticas", que con motivo de la celebración del año mundial de las matemáticas tuvo lugar en Madrid. Durante esos dos años trabajamos intensamente, guiados por Emma, elaborando materiales que sirvieran para enseñar matemáticas, para hacer que las ideas se hicieran tangibles. Hoy día esa muestra recorre nuestras escuelas y nuestros institutos, posibilitando así que muchos alumnos sigan aprendiendo con las ideas de Emma.

Revisando lo escrito hasta aquí para esta contribución me doy cuenta que la palabra tiza ha aparecido dos veces, es natural. Emma ha sido siempre una profesora de tiza, en el sentido más real del término, impartiendo clases en la Scuola Media *Tasso*, y en ese sentido siempre ha estado ligada a la clase directa, al trabajo con sus alumnos, entre sus alumnos.

Pero Emma es mucho más que una profesora de tiza y esto por dos motivos. Primero, porque su labor se ha extendido mucho más allá del aula, con un compromiso permanente con los alumnos en primer lugar, y después con la enseñanza de las matemáticas y con los docentes de matemáticas, convenciéndonos a los que la hemos escuchado de que sólo con experiencias basadas en la realidad concreta y literalmente tangible se construyen ideas matemáticas útiles y duraderas y que, además, esta afirmación es cierta a cualquier edad y a cualquier nivel de enseñanza.

Emma Castelnuovo es más que una profesora de tiza también porque Emma es la profesora de lo tangible, de la visualización, de la geometría intuitiva, de las cazuelas y de las sombras, de las hormigas, del anillo de cordel extendido entre los dedos para poder pensar sobre el área de los rectángulos isoperimétricos.

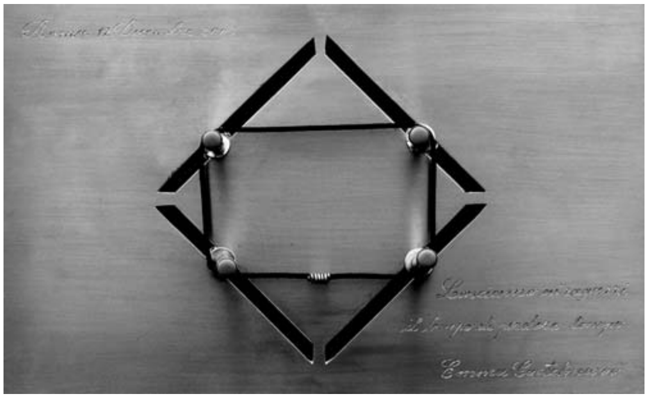
Cuántas miradas de superioridad, de los que piensan que 'tocar' las matemáticas no sirve para nada, habrá tenido que soportar en su ya larga vida, de aquellos que piensan que enseñar matemáticas es enseñar a simplificar castillos de naipes de expresiones algebraicas. A muchos de ellos, sin embargo, tras escucharla, se les empezaron a romper muchos de sus esquemas. Y es que Emma convence y escucharla es siempre un placer. Leer sus libros también. Con Emma la matemática se hace tangible para el que la enseña y sobre todo para el que la aprende.

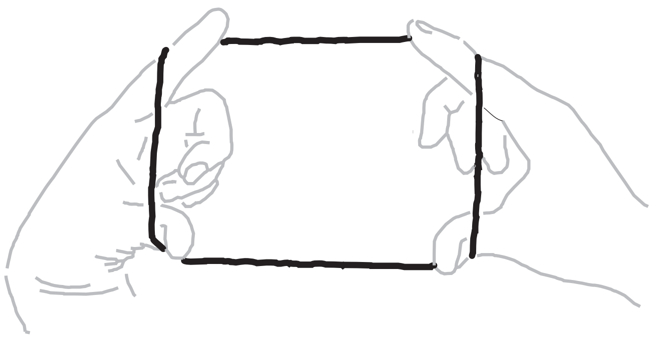
Emma eres una mujer fuerte y trasmites esa fuerza con tus gestos.
Emma eres una mujer inteligente y lo demuestras con tu mirada.
Emma eres una mujer sabia y eso lo descubrimos en tus ideas.
Emma eres una mujer luchadora, lo indica la trayectoria de tu vida.
Emma eres una mujer solidaria, lo has demostrado con los hechos.
Emma, finalmente quiero decirte que, eres una mujer joven, y esto lo comprobamos viéndote todos día a día.

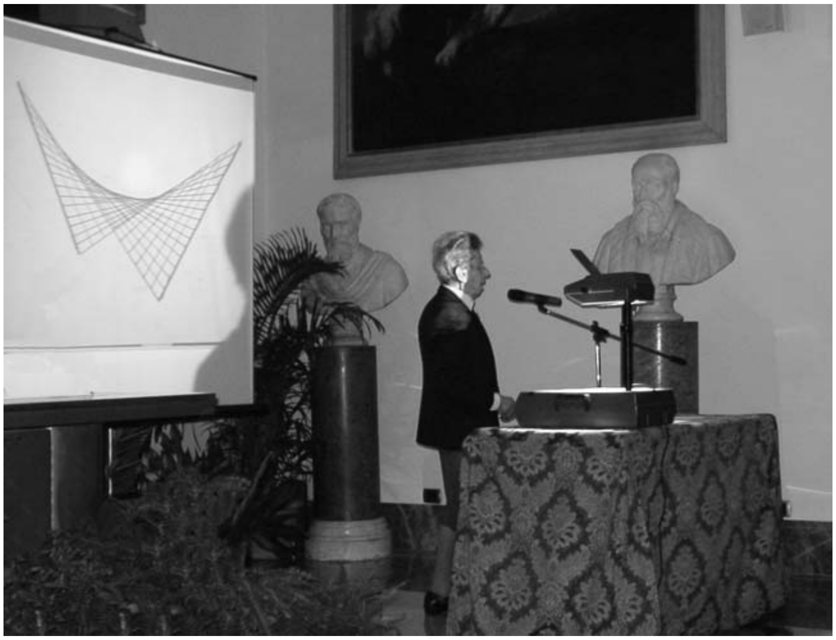
Te queremos Emma.
Ti vogliamo bene, Emma.

Tanti auguri.
■


E. LUGARINI
W. VELTRONI







Un encuentro especial

Roma, Mayo 1971, por la tarde, en casa de Augusto, mi novio. Hay ruido, pero no me molesta: también en mi familia somos muchos y estoy acostumbrada a las voces que se mezclan, a los tonos altos de las discusiones, que suben hasta cuando no interviene mi madre. Pero hoy el ruido es verdadero alboroto, algo insólito ha ocurrido: el hermano menor ha traído a casa la invitación para una Exposición de Matemáticas que tendrá lugar en su escuela, la Media[1] *Tasso*, en la sección A, la misma en la que antes de él estudiaron todos sus hermanos.

Yo soy estudiante del tercer año de la Facultad de Matemáticas de Roma, en el Instituto Guido Castelnuovo, y esta "exposición" me intriga mucho, lo mismo que el nombre de la profesora que la organiza: Emma Castelnuovo. Me pregunto qué será lo que unos chiquillos de EGB expondrán: puede que sea algún teorema aprendido de memoria, o actuarán en una representación delante de los padres satisfechos. Mi experiencia escolar no me sugiere otra cosa y decido ir a verla.

Mucho tiempo ha pasado ya de aquel día de mayo, pero sigue costándome expresar lo que me pasó cuando subí al cuarto piso del Instituto *Tasso* y me encontré delante de aquellos chiquillos que se habían hecho con todas las aulas del piso y presentaban a un gran público, con extrema soltura, unas máquinas más o menos simples que ellos mismos habían construido. Con un lenguaje y razonamientos simples desarrollaban conceptos matemáticos complejos, incluso ante ilustres profesores universitarios, como Lucio Lombardo Radice o Bruno De Finetti. Las matemáticas nos llevaban a hablar de arte, de historia, de economía, de geografía, de física, de botánica, de química; en fin, que se notaba un gran amor por la vida a través de una matemática que todo el mundo entendía y que estaba ligada a la realidad.

¡Fue como una revelación! Ese día entendí que debía revisar con nuevos ojos todo lo que había estudiado hasta entonces, entendí que el pensamiento matemático era otra cosa, distinta al enfoque rígido en el que había sido educada.

Augusto y yo estamos casados desde hace treinta años y nuestros hijos, Luca y Federico, han estudiado las matemáticas de la Media en los libros de Emma Castelnuovo.

Carla degli Esposti
Centro Territoriale di Formazione Permanente
"Nelson Mandela"
Roma

Traducción de **Guido Ramellini**

Aquel día Emma Castelnuovo había entrado con gran fuerza, sin ella saberlo, en mi vida, y tenía unas enormes ganas de conocerla, porque quería entender más las matemáticas y la forma de enseñarlas.

Pedí una cita y ella me recibió a las ocho en punto, en una sala de profesores vacía, como siempre pasa en un colegio donde las clases empiezan a las ocho y media.

Me dice: "Entiéndame, señorita, me complace mucho que usted quiera hacer una experiencia en mis clases, pero podré aceptarla en prácticas sólo si consigue ganar uno de los *premios Guido Castelnuovo* que el Instituto de Matemáticas otorga a seis estudiantes meritorios y a punto de graduarse en la especialización de didáctica."

Aún siendo estudiante de la especialización de didáctica, nadie me había hablado de estas becas. Me lancé sobre los libros y conseguí superar muchos exámenes; a principios de octubre obtuve la beca y entré tímidamente en las clases de la sección A y B del *Tasso*. Sentada en el pupitre, entre aquellos jóvenes alumnos, empecé finalmente a entender. A entender que hasta entonces había vivido de fantasías, que enseñar es un verdadero arte, que es fundamental conocer a fondo una disciplina, que se necesita rigor y humanidad en la relación con los alumnos. Y aún más: que las matemáticas pueden llegar al cerebro empezando por las manos, que es necesario utilizar un lenguaje simple, pero eficaz para hablar a los chicos, que mirar el mundo con los ojos de las matemáticas crea verdaderas emociones.

Aquellos nueve meses en un pupitre, alumna entre alumnos, fueron una experiencia excepcional, y no me avergüenzo de confesar que alguna vez, cuando *la profesora Castelnuovo* formulaba una pregunta, intentaba esconderme porque yo, a punto de graduarme en matemáticas, no sabía contestar, mientras que los chiquillos sentados a mi alrededor intervenían y discutían animadamente; entonces me relajaba. Estaba aprendiendo que para los adultos es más difícil llegar directamente al meollo de un concepto, que es necesario que te eduquen a entrenar la intuición, a saber mirar una forma geométrica, a no tener prejuicios cuando se observa.

Cuando me licencié, decidí dedicarme a enseñar en la Escuela Media, aún cuando la mayoría de mis amigos y compañeros escogían trabajar en los niveles más altos o en la Universidad; quería hacer que los chicos de una edad tan crítica como la preadolescencia se apasionaran por una disciplina considerada a menudo hostil y causa de tanto fracasos y frustraciones, que desafortunadamente acompañan a las personas toda su vida.

Después de la licenciatura, tuve muchas ocasiones de seguir frecuentando a Emma Castelnuovo. En su casa, durante los famosos encuentros matemáticos, que a veces duraban un día entero, en un clima de amistad y afabilidad, encontré a grandes matemáticos italianos y extranjeros: Lucio Lombardo Radice, Bruno De Finetti, Paul Libois, Hans Freudenthal, Paul Sauvy, Tamàs Varga... ¿Y qué decir de los viajes de estudio a Bruselas, organizados por el Instituto Matemático de Roma?

Tardábamos en tren casi 24 horas y en el día que duraba el viaje, Emma (de aquí en adelante la llamaré así, porque fue en esa ocasión cuando nos invitó a tratarla de tú) contaba mil experiencias. Llegábamos a la Escuela Decroly, para entrar en las aulas y asistir a sus clases, para después ir a las exposiciones que el Profesor Paul Lebois organizaba con sus estudiantes de la Universidad Libre de Bruselas: abstrusas ecuaciones tomaban encantadoras formas geométricas y me quedé verdaderamente encantada delante de los modelos construidos por aquellos "artesanos matemáticos".

> *Con Emma empecé a entender que enseñar es un verdadero arte, que es fundamental conocer a fondo la disciplina, que se necesita rigor y humanidad*

En 1973 Emma me confía un grupo de sus alumnos del último año[2] para profundizar con ellos las transformaciones topológicas, tema de mi tesis y uno de los argumentos escogidos para la gran exposición de aquel año.

Con cuarenta de aquellos alumnos, a final de agosto, salimos de viaje hacia Bruselas y Lausana para llevar la exposición a la Escuela Decroly, junto con Daniela, Paola, Mario, Raimondo y el inolvidable Mario Carroza. Me parece oír aún la voz de un alumno que, llegado al final de su exposición en italiano, mira con expresión perpleja al gran público francófono y, guiñándoles el ojo, les pregunta en un correcto francés: "Je comprìs? ... Je comprìs? ..", ¡sin entender porque todo el mundo se tronchaba! ¡Poder de las matemáticas! Acercar lugares y gente, estrechar amistades, sentirse solidarios, conocer el mundo, ¡encaminarse hacia la vida!

Emma Castelnuovo, aparentemente tan lejana y austera, era en realidad muy próxima e importante para los alumnos y para mí, joven profesora, que me empapaba como una esponja de su método, su forma de tratar a los alumnos, su manera de entender la profesión. Ella seguía de lejos a sus alumnos hasta que se hacían adultos y, en caso de que lo necesitaran, estaba dispuesta a escucharles, sin escandalizarse, sin prejuicios, libre de los normales miedos de los padres, capaz así de mirar objetivamente a la realidad y aconsejar.

En 1979 Emma se jubila y en la *Accademia dei Lincei*[3] se organiza una gran exposición de sus trabajos y de los de su amiga Lina Manzini Proia, también jubilada. Me llaman una vez más para que ayude en la preparación; vuelvo a encontrarme con los alumnos del viaje a Bruselas: ellos están estudiando en la universidad, yo mientras tanto he tenido mi primer hijo y estoy esperando el segundo, pero las matemáticas de Emma Castelnuovo siguen ligándonos.

Gano las oposiciones para enseñar en la escuela media y consigo tener una plaza estable en un mismo instituto, dar continuidad a mi trabajo. Tengo suerte una vez más: en muchas clases utilizan el texto de Emma y hay un grupo de profesores muy atentos a la didáctica y abiertos a la colaboración. Mi llegada al colegio y mi experiencia directa con Emma actuaron de catalizador dentro del pequeño grupo y, aprovechando los huecos del horario, organizamos reuniones de autoformación, en las que cada uno se hacía cargo de contar a los otros de qué manera trabajaba determinados temas en clase.

Quería encontrar mi recorrido personal, mi forma de comunicar a mis alumnos la pasión por las matemáticas y demostrar, de cara al exterior, que las matemáticas sirven para entender la realidad, para entrar en los problemas del mundo, ofreciéndote al mismo tiempo instrumentos para encontrar soluciones.

Nació en ese momento una estrecha colaboración con Elio di Odoardo, un compañero realmente capaz. Unos años después, con los alumnos de los últimos años, organizamos un trabajo de investigación se inspiraba en el libro *Los límites del desarrollo*, de Meadows y otros investigadores del Massachusetts Institute of Tecnology, publicado a cargo del Club de Roma. Habíamos escogido un tema de enorme calado y, a primera vista, lejano de las matemáticas, porque estaba normalmente asociado a la política, a la economía, a la ecología y a otras materias similares. Además, parecía difícil que chicos de trece años pudieran enfrentarse a una problemática tan complicada, pero constituyó para nosotros una gran ocasión para conducirlos a adquirir instrumentos matemáticos y conseguir objetivos de más amplio alcance.

El objetivo cultural era tomar conciencia de los problemas que estábamos estudiando: entender e intentar que entendieran la existencia del dramático problema del subdesarrollo, de la divergencia entre Norte y Sur del mundo, entender e intentar que entendieran los límites de un desarrollo sólo cuantitativo y concentrado en una reducida área geográfica. Al acabar el trabajo, organizamos una exposición para describir la situación futura de nuestro planeta, y aquellos chicos de 13-14 años, utilizando un lenguaje muy simple, explicaron a un atento público de profesores y padres cuestiones de economía y estadística, utilizando diferentes tipos de funciones.

Una forma distinta de poner en práctica las enseñanzas de Emma Castenuovo y que a lo largo de los años he aplicado otras dos veces organizando investigaciones de tipo estadístico-económico relacionados con problemas sociales, siempre con alumnos del último curso, una vez sobre la deuda de los países en desarrollo y otra vez sobre los flujos migratorios de y hacia Italia. Es decir, unas matemáticas para leer la realidad, para formar a las personas, para sensibilizarlas hacia la solidaridad, para educar para la integración. Y cada vez montando una exposición pública, en donde los alumnos se transformaban en profesores y quienes sufrían alguna minusvalía pudieran también expresar sus sentimientos y sus logros. Y cada vez Emma estaba presente entre el público, para preguntar y felicitar a los alumnos.

Un día, después de un tiempo en el que sólo nos habíamos hablado por teléfono alguna vez, Emma nos invitó a su casa a Paola Gori y a mí para decirnos si nos interesaba ayudarla a revisar los ejercicios de sus libros para la escuela media. Aceptamos encantadas porque nos parecía algo extraordinario trabajar con un texto que consideramos “sagrado”. Un año después, cuando la Nuova Italia[4] le propone escribir una nueva edición de sus libros, nos presenta al doctor Sergio Piccioni, director editorial, expresándole la intención de confiarnos el cuidado del cuaderno de ejercicios, dada su situación de jubilada, mientras que Paola y yo seguíamos en contacto diario con los alumnos. Empieza de esta manera un período muy intenso de trabajo. Emma Castelnuovo pesa cada palabra que escribe y antes de escribirla vuelve a leerse textos de muy variado género: filósofos griegos, pintores flamencos, arquitectos modernos ...; retoma recortes de periódicos conservados cada vez que le había parecido que presentaban datos o noticias interesantes; llama a Correos, a los ferrocarriles, a bancos, a la UNESCO, a la FAO..., interpela a expertos en medicina, economía, música, botánica... porque todo lo que escribe debe ser rigurosamente verdadero, comprobado y actual, y nada se deja al azar. El profesor que escoge el texto y el estudiante que lo utiliza deben tener en las manos un instrumento ágil, comprensible, impregnado de cultura, que le haga entender cómo el pensamiento matemático se ha desarrollado a través de los siglos, un instrumento que pueda sobre todo enseñar a los alumnos a construir sus modelos, a observar lo que les circunda, a descubrir a través de situaciones reales los paradigmas fundamentales de las matemáticas.

Recuerdo que Paola y yo escribíamos los ejercicios cada una por su cuenta, para después confrontarlos entre nosotras antes de someterlos a Emma. ¡Cuántas horas hemos pasado comprobándolos! Cambiando a veces una palabra, en el intento de que el lenguaje fuera más accesible para los chicos de todos los ámbitos sociales, para acompañarlos gradualmente a descubrir un mundo demasiadas veces, voluntariamente, presentado de una forma rígida y lejana de la vida.

Quiero decir algo más en relación a la preparación de los textos. Teníamos todas muy poca experiencia y una docente experta como Emma hubiera podido corregirlo todo, eliminar partes, imponer su punto de vista. En el fondo, eran "sus libros". Por el contrario, nos escuchaba muy atentamente y con respeto, como le habíamos visto hacer con sus alumnos, poniendo en práctica también con nosotras la famosa frase: "Demos a los chicos el tiempo de perder el tiempo". No éramos chicas y hemos podido disfrutar de esta manera de trabajar, que nos hacía sentir cómodas, a su altura; así, día tras día, ejercicio tras ejercicio nos hacíamos más seguras, más preparadas y más maduras.

Mi colaboración con Emma se ha transformado en el transcurso de los años en una gran amistad que supera el ámbito matemático. Porque Emma es así: consigue ser cercana en profundidad, con una delicadeza y una atención que te sorprenden cada vez. Con ella puedes empezar hablando de temas de alta matemática, que consigue presentarte como si fueran simplezas, para terminar discutiendo, delante de una taza de té y de unos pastelitos exquisitos, de las cosas de la vida de cada día: los hijos, los padres, la salud; a intercambiar consejos como se hace con una madre, una tía, una hija.

Y para mi, que soy muy glotona y finjo siempre que estoy a dieta, tiene la misma frase: "Carla, puedes decir lo que quieras, que ya sé que no puedes resistirte... acabarás comiéndote todos."

Pasa el tiempo y nos encontramos otra vez escribiendo una nueva edición de los libros, organizando conjuntamente cursos y talleres para profesores, hasta llegar a los últimos, realizados con los amigos de Pescara, de Florencia, de Cenci, sobre el uso de materiales para la enseñanza de las matemáticas.

Empieza el año 2003: el día 12 de diciembre Emma cumplirá 90 años. Queridísima Emma, ¿qué podemos regalarte para tu cumpleaños? Nos gustaría organizar algo grandioso, que tuviera repercusión fuera del entorno de los amigos. Después de mucho pensar, toma cuerpo la idea de vernos con el alcalde de Roma, Walter Veltroni, que fue alumno de Emma, e intento obtener una cita. El alcalde, en cuanto sabe la fecha, se declara entusiasta, y me agradece la información, se pone una mano sobre el corazón y dice que para su admirada profesora debemos hacer todo lo que podamos y hace propia la iniciativa. Cierto, se organizará desde el *Campidoglio*[5] la fiesta de homenaje a esta ilustre ciudadana de Roma. Se le encarga a Massimo Salvatori, consultor del alcalde, la organización del encuentro. Es una gran suerte: conozco a Massimo desde los tiempos del Liceo y sé que me apoyará todo lo que pueda y nos dejará libres de decidir casi todo: el título del acto, la estructura del programa, los ponentes que invitaremos, hasta la presentación gráfica de la invitación y la leyenda del pastel. En el mes de Marzo, por fin, nos ponemos en marcha para la empresa que nos ha ocupado, a Paola y a mi, unos cuantos meses.

> *Y aún más:*
> *que las matemáticas pueden*
> *llegar al cerebro empezando por*
> *las manos,*
> *que es necesario utilizar un*
> *lenguaje simple, pero eficaz para*
> *hablar a los chicos,*
> *que mirar el mundo con los ojos*
> *de las matemáticas crea*
> *verdaderas emociones.*

El 12 de diciembre se quedará para siempre impreso en mi corazón: el salón de la Protomoteca está lleno, hasta sobrepasar los límites de la seguridad, durante toda la duración del homenaje, mi emoción como presentadora oficial del acto, la bienvenida del alcalde, los ponentes de altísimo nivel, las notas de Mozart, los antiguos alumnos con sus testimonios que han conseguido que los ojos resplandecieran de emoción. Y finalmente, la intervención de Emma que, con el famoso problema del cordel, ha recorrido las páginas más emotivas de los últimos sesenta años de historia italiana, de *su historia*. Cuando termina de hablar, todos nos hemos levantado, aplaudiendo entusiastas. Después, aquella multitud jubilosa de amigos, parientes, compañeros, alumnos de todas las edades, más o menos famosos, que se apiñaba alrededor de una profesora verdaderamente especial, para abrazarla, para felicitarla, para que los reconociera, después de tantos años, para celebrar con ella su cumpleaños delante de una gran tarta con un delicado ornamento de pequeñas rosas en el centro.

Las luces del salón del Campidoglio se acaban de apagar y ya me espera otra emocionante aventura: ha nacido la *Fondazione Emma Castelnuovo per la didattica della matemática*. ■

NOTAS DEL TRADUCTOR

[1] La escuela Media italiana corresponde a los antiguos cursos de 6º, 7º y 8º de la EGB, es decir, los actuales 4º de Primaria y 1º y 2º de la ESO. En el artículo mantendremos la denominación italiana.

[2] IIIª media, 2º de la ESO.

[3] Prestigiosa y antigua institución cultural italiana que el padre de Emma, Guido Castelnuovo, fue encargado de reconstituir después de la IIª Guerra Mundial y presidió de 1946 a 1947.

[4] Editorial que ha publicado todos los textos escolares de Emma Castelnuovo

[5] Sede del Ayuntamiento de Roma

SUMA 45
Febrero 2004, pp.17-28

La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza

Con argumentos apoyados en numerosos textos de ilustres matemáticos, pedagogos, historiadores y profesores, se reclama una función didáctica para la Historia de las Matemáticas como instrumento de comprensión de sus fundamentos y de las dificultades de sus conceptos para así responder a los retos de su aprendizaje. La Historia es fuente de inspiración, autoformación y orientación en la actividad docente y al revelar la dimensión cultural de la Matemática, el legado histórico permite enriquecer su enseñanza y su integración en el conjunto de los saberes científicos, artísticos y humanísticos que constituyen la Cultura.

The author claims the didactic utility of the History of Mathematics, as a tool to understand its foundations and the difficulties of its concepts and, hence, to ease the learning. This idea is held in numerous writings from illustrious mathematicians, educators, historians and teachers. History is a source of inspiration, self-learning and orientation in the teaching activity; as it reveals the cultural dimension of Mathematics, this legacy allows to enrich its teaching and its integration in the set of humanistic, artistic and scientific knowledge that constitute the Culture.

Ningún tema pierde tanto cuando se le divorcia de su historia como las Matemáticas.
E.T. Bell (1985).

No olvidar el origen concreto de la Matemática ni los procesos históricos de su evolución.
P.Puig Adam (1951).

Asumimos como axioma el aforismo tradicional que reza: *hay que conocer el pasado para comprender el presente* del que resulta por permutación de los verbos una máxima de muchos historiadores: *hay que comprender el pasado para conocer el presente*. Si el conocer y el comprender el pasado componen el saber, ellos debieran ser la brújula que oriente nuestra manera de actuar y transformar la realidad.

Llevando estos pensamientos a nuestro ámbito de la Enseñanza de la Matemática, suscribimos sin más ambages la aludida cita de Bell (1985, p.54): *Ningún tema pierde tanto cuando se le divorcia de su historia como las Matemáticas.*

Son múltiples y de muy diversa tipología las razones que se pueden aducir para justificar o al menos aconsejar que la Historia de la Matemática debe ser un elemento importante a considerar en la Didáctica de la Matemática. Serán argumentos que iremos desplegando a lo largo de este artículo, tomando como línea programática algunos textos de importantes matemáticos, pedagogos e historiadores del último siglo: Poincaré, Klein, Toeplitz, Köthe, Bell, Courant, Puig Adam, Lakatos, Kline, Santaló... y las reflexiones de otros profesores que han ido aportando, en los últimos tiempos, numerosas ideas al respecto.

> *Si el conocer y el comprender el pasado componen el saber, ellos debieran ser la brújula que oriente nuestra manera de actuar y transformar la realidad.*

Pedro Miguel González Urbaneja
I.E.S "Sant Josep de Calassanç" de Barcelona
Associació de Barcelona per a l'estudi i aprenentatge de les Matemàtiques

La Historia de la Matemática permite conocer las cuestiones que dieron lugar a los diversos conceptos, las intuiciones e ideas de donde surgieron, el origen de los términos, lenguajes y notaciones singulares en que se expresaban, las dificultades que involucraban, los problemas que resolvían, el ámbito en que se aplicaban, los métodos y técnicas que desarrollaban, cómo fraguaban definiciones, teoremas y demostraciones, la ilación entre ellos para forjar teorías, los fenómenos físicos o sociales que explicaban, el marco espacial y temporal en qué aparecían, cómo fueron evolucionando hasta su estado actual, con qué temas culturales se vinculaban, las necesidades cotidianas que solventaban. En suma, conocer, en sentido kantiano, el tránsito de las intuiciones a las ideas y de éstas a los conceptos.

> Ningún tema pierde tanto cuando se le divorcia de su historia como las Matemáticas.
> *Bell (1985, p.54)*

Para Nolla (2001, p.1):

> Los conceptos y las ideas matemáticas que se tratan en la Enseñanza Secundaria, son presentados a los alumnos de una forma cerrada y acabada. Se olvida que han surgido después de un largo proceso de gestación, en las que las intuiciones más fecundas con otras estériles, han configurado sus presentaciones sucesivas. A lo largo de la Historia, estas ideas han sido generadas por diversos tipos de problemas, prácticos o teóricos, pertenecientes a la propia matemática o a otras disciplinas. El conocimiento de estos problemas, y el estudio de la evolución de su tratamiento y de los nuevos problemas que han generado, proporciona los fundamentos para la comprensión de las ideas y conceptos que de ellos han resultado.

Según Guzmán (1992, IV, p.16):

> la historia nos proporciona una magnífica guía para enmarcar los diferentes temas, los problemas de los que han surgido los conceptos importantes de la materia, nos da luces para entender la razón que ha conducido al hombre para ocuparse de ellos con interés. Si conocemos la evolución de las ideas de las que pretendemos ocuparnos, sabremos perfectamente el lugar que ocupan en las distintas consecuencias, aplicaciones interesantes que de ellas han podido surgir, la situación reciente de las teorías que de ellas han derivado, etc.

Bajo el punto de vista de la eficacia pedagógica, no sólo a corto, sino a medio y largo plazo, además de transmitir un elenco de conocimientos, resultados estereotipados de las exposiciones cerradas y acabadas de la ciencia estática de los manuales que ocultan el zigzagueante camino de la creación científica, se debería despertar en el estudiante, futuro profesional, científico o técnico, unas actitudes y unos hábitos metodológicos acordes con el método científico. Como señala Kline (1978, p.49), en su popular obra *El fracaso de la Matemática moderna* (citando a Klein, 1927):

> Enseñar científicamente sólo quiere decir inducir a pensar científicamente, de ningún modo enfrentar al alumno, desde el principio, con fríos sistemas científicamente pulidos.

En parecido sentido vuelve a reflexionar Kline (1992, p.16) en su excelente texto de Historia de las Matemáticas:

> Las cuidadas y ordenadas exposiciones que se hacen en los cursos habituales no muestran en absoluto los conflictos del proceso creativo, las frustraciones, y el largo y arduo camino que los matemáticos han tenido que recorrer para llegar a construir una estructura importante. [...], el conocimiento de cómo han avanzado los matemáticos dando traspiés, a veces en la oscuridad más absoluta, hasta llegar a reunir las piezas individuales de sus resultados, debería animar a cualquier principiante en la investigación.

La Historia de la Ciencia con sus grandezas y miserias, sus momentos estelares y sus épocas oscuras, pone de manifiesto el proceso dinámico de la actividad científica como desarrollo a veces penoso y sinuoso, pero siempre abierto y vivo, en proceso permanente de cambio, y cuyo conocimiento, además de estimular los valores científicos y el espíritu crítico, puede propiciar en el estudiante el desarrollo de la creatividad por emulación, es decir, un impulso hacia la intervención en el devenir de la ciencia mediante la investigación, como hemos visto que insinúa Kline.

> *Sabios que han sido excelentes pedagogos [Poincaré, Klein, Toeplitz, Köthe, Bell, Courant, Puig Adam, Lakatos, Kline, Santaló...] han ponderado la importancia que tiene la Historia de la Matemáticas en la calidad de su enseñanza.*

Sin embargo, a pesar de que gran parte del profesorado asume de forma teórica estos planteamientos, en la práctica docente y como consecuencia de la formación universitaria recibida por los profesores, la Matemática llega a los alumnos como un producto dogmático, cerrado y acabado. En la enseñanza superior esta situación tiene su explicación en la propia naturaleza de las Matemáticas, ya que como explica Poincaré (1963) mucha investigación consiste a menudo en retomar teorías anteriores y refundirlas en un marco nuevo, bajo un enfoque más potente y general que explica mejor (como casos particulares) los resultados ya conocidos y que propicia el descubrimiento de otros nuevos, en la línea de la célebre frase del artífice de la Geometría Algebraica moderna A. Grothendieck, *simplificar generalizando*, de modo que como señala Maza (1994): [...], *se impone la lógica de la generalización matemática y un estilo deductivista que oculta el proceso de construcción original de la Matemática*. Así ha sucedido, por ejemplo, con la tendencia hacia la algebrización de la Geometría, que ha reconvertido las diversas Geometrías Clásicas en meros casos particulares o ejemplos concretos del Algebra Lineal (Dieudonné, 1971 p. 7; Piaget, 1978, p. 275).

Como escribe Houzel (1977, p.VI.3): *Las reelaboraciones sucesivas que la Matemática hace de las teorías precedentes, atenúan su historia, y aquí hay que buscar una de las principales razones que provocan el que las Matemáticas sean, en un alto grado, negadoras de su propia historia*. Cohen (1968, p.159) apunta la misma idea basándose en el *carácter acumulativo de la ciencia*, que supone que *todo el trabajo útil del pasado esté incorporado a cualquier tratado actual, de modo que se puede prescindir de la obra original*. Navarro (1980, p.12) va más allá al referirse a la actitud de muchos científicos hacia su ciencia, señalando que *situados en la frontera del conocimiento, orgullosos del carácter innovador de su tarea, muchos sabios ven la reflexión sobre el pasado como una tarea inútil y entorpecedora*.

Profesores de formación científica con vocación humanista, se interesan por la historia de la disciplina que imparten y ha empezado una institucionalización de los estudios de Historia de la Matemática.

Por fortuna, sabios que han sido excelentes pedagogos han ponderado en sus escritos y manifestaciones la importancia que tiene la Historia de las Matemáticas para mejorar la calidad de la transmisión del conocimiento matemático. Mencionemos en primer lugar al profesor L. Santaló, un eminente matemático contemporáneo muy preocupado por la educación matemática. En su obra *La matemática: una filosofía i una tècnica* (Santaló, 1993) aplica su erudito conocimiento de la Historia de las Matemáticas a la encomiable tarea de desentrañar de una forma fascinante la esencia de la Matemática, y no sólo como ciencia sino también como arte y como técnica. Con anterioridad, en su obra *La Educación matemática hoy* (Santaló, 1975), se apoya en la Historia de las Matemáticas para facilitar la comprensión de la evolución dinámica de las ideas que han llevado a los conceptos y técnicas que conforman el contenido de la educación matemática actual. Según Santaló (1975), la Matemática ha formado parte siempre de todo sistema educativo, y remontándose al mundo helénico enfatiza que en la antigua Grecia los primeros pilares de la Educación eran la Aritmética y la Geometría, como describe Platón en *La República*.

Asimismo, a título de ejemplo, citemos varios textos de R.Courant, colaborador de Klein y de Hilbert, y coautor de la obra *¿Qué es la Matemática*?, una de las exposiciones más atractivas de las ideas y métodos de la Matemática elemental (se recomienda la recensión de Sancho (1998) en el nº 29 de SUMA). En el prólogo de la primera edición, Courant (1971, p. IX) escribe en la primera frase de la obra: *Desde hace más de dos milenios, una cierta familiaridad con la Matemática ha sido considerada como parte indispensable de la formación intelectual de toda persona cultivada*. Más adelante, en el mismo prólogo, Courant afirma que: *un contacto real con el contenido de la Matemática viva es necesario* y se puede experimentar en *algunos libros espléndidos de historia y biografía*... En la introducción de la obra, el autor alude a la Historia de las Matemáticas como instrumento para comprender ¿Qué es la Matemática?, frase que da el título a esta magnífica obra en la que los conceptos y problemas aparecen de forma viva y natural, y muchas veces en su contexto histórico que se confronta con la forma actual, y explicados con rigor pero tratados de forma heurística y apelando a la intuición.

También en el prefacio de un texto de Análisis Matemático, redactado en un claro estilo heurístico, Courant (1974) insiste nuevamente sobre las ideas apuntadas más arriba:

> La Matemática presentada como un sistema de verdades, acabado y ordenado, sin referencia al origen y propósito de sus conceptos y teorías tiene su encanto y satisface una necesidad filosófica. Pero esta actitud introvertida en el campo de la Ciencia, no es adecuada para los estudiantes que buscan independencia intelectual más que adoctrinamiento. Menospreciar las aplicaciones y la intuición lleva al aislamiento y a la atrofia de la Matemática.

En el prólogo de la interesante obra de Carl B.Boyer *The History of the Calculus and its conceptual development*, Courant es todavía más categórico en torno a la necesidad de conjurar el purismo abstractivo mediante la búsqueda de las raíces históricas de la Matemática (Boyer, 1949):

> Los maestros, estudiantes, y los amantes del estudio en general, que quieran comprender realmente las fuerzas y las formas de la Ciencia, han de tener alguna comprensión del estado presente del conocimiento como un resultado de la evolución histórica. De hecho la reacción contra el dogmatismo en la enseñanza científica ha despertado un interés creciente hacia la Historia de la Ciencia. Durante las décadas recientes se han hecho grandes progresos en la investigación de las raíces históricas de la Ciencia en general y de la Matemática en particular.

Otros matemáticos interesados por los problemas de la Enseñanza de las Matemáticas y preocupados por la ocultación del proceso histórico lanzaron también sus avisos. Lakatos (1978) escribe:

> Las Matemáticas se presentan como un conjunto siempre creciente de verdades eternas e inmutables, en el que no pueden entrar los contraejemplos, las refutaciones o la crítica. El tema de estudio se recubre de un aire autoritario.[...]

> El estilo deductivista esconde la lucha y oculta la aventura. Toda la historia se desvanece, las sucesivas formulaciones tentativas del teorema a lo largo del procedimiento probatorio se condenan al olvido mientras que el resultado final se exalta al estado de infalibilidad sagrada.

La perspectiva histórica permite dar una visión panorámica de los problemas matemáticos para calibrar con mayor precisión la importancia de los temas, quedando así mejor articulados dentro del contexto general.

También Kline (1978, p.47) basándose en el devenir histórico, abunda en incisivos y claros argumentos contra una enseñanza de las Matemáticas elementales puramente deductiva:

> [...] Durante los siglos en los que se edificaron las ramas más importantes de las Matemáticas no había un desarrollo lógico para la mayor parte de ellas. Aparentemente la intuición de los grandes hombres es más poderosa que su lógica. [...]. Parece claro que primeramente se aceptaron y utilizaron los conceptos que tenían mayor significado intuitivo [...]. Los menos intuitivos [...] necesitaron de muchos siglos para su creación o para su aceptación. Además cuando fueron aceptados no fue la lógica lo que indujo a ello a los matemáticos, sino los argumentos por analogía, el significado físico de algunos conceptos, [...] y la evidencia intuitiva.

El estilo que refleja gran parte de la literatura matemática y los libros de texto, donde se escamotea el proceso histórico es censurado por Kline (1978, p.52), que cita a Poincaré, al plantear la siguiente pregunta: ¿*Es posible entender una teoría si desde el primer momento se le da la forma definitiva que impone una lógica rigurosa, sin mencionar para nada el camino por el que ha llegado a adoptar esta forma*?. La contestación es categórica: *No, realmente no es posible entenderla; incluso resulta imposible retenerla si no es de memoria*.

La exclusiva exposición deductiva tiene negativas consecuencias sobre los estudiantes que se sienten engañados al hacerles creer que las Matemáticas han sido creadas por grandes genios que a partir de unos principios y por vía exclusivamente lógica obtenían los teoremas y su demostración impecable. El estudiante, que naturalmente no puede funcionar de esta manera se llega a sentir humillado, acomplejado y desconcertado. Para Kline (1987, pags.54,59,60):

> Es intelectualmente deshonesto enseñar la interpretación deductiva como si se llegara a los resultados por pura lógica [...] Esa interpretación destruye la vida y el espíritu de las Matemáticas [...], y aunque tenga un atractivo estético para el matemático sirve de anestésico para el estudiante.

También para Droeven (1980, p.53):

> El esquema de exposición de la enseñanza: definiciones, teoremas, pruebas, sufre de una amnesia histórica, pues al ignorar las génesis históricas de los conceptos matemáticos que involucra, induce a una amnesia conceptual en el alumno, el cual no puede reencontrar los obstáculos del conocimiento matemático que han tenido que vencer esos conceptos para presentarse de una manera tan racional y aséptica.

Todavía es frecuente presumir de una ideología que concibe las ciencias (y sobre todo la Matemática) como cuerpos de doctrina universales e intemporales de verdades perpetuas, de modo que por su carácter eterno, las ciencias escaparían a la historia. La Historia de la Matemática subvierte esta creencia, como ilustra Del Río (1993, p.37) con numerosos casos de problemas históricos: [...]. *Estos ejemplos nos muestran que la importancia de un concepto o de un teorema es algo contextual, relativo al estado de la ciencia en ese momento y, por tanto, la eternidad de las verdades matemáticas es una cualidad relativa*. En sentido parecido, tras una larga argumentación, escribe Cañón (1993, p.402): *Los resultados de la Matemática son producción cultural,* [...], *son relativos a un contexto socio-histórico*. Spengler (1998, p.144) va mucho más allá cuando escribe:

> No hay una Matemática, hay muchas Matemáticas. [...] El espíritu antiguo creó su Matemática casi de la nada. El espíritu occidental, histórico, había aprendido la Matemática antigua, y la poseía, aunque sólo exteriormente y sin incorporarla a su intimidad; hubo, pues, de crear la suya modificando y mejorando, al parecer, pero en realidad aniquilando la matemática euclidiana, que no le era adecuada. Pitágoras llevó acabo lo primero; Descartes lo segundo.

Para Spengler no hay una Matemática que se desarrolle linealmente y cuyo contenido vaya acumulándose a través de los siglos, sino que hay tantas Matemáticas como culturas.

Por fortuna, en la actualidad, muchos profesores de formación científica con vocación humanista, se interesan por la historia de la disciplina que cultivan e imparten y hace ya algunos años que ha empezado a abrirse paso una incipiente institucionalización en algunas facultades científicas universitarias de los estudios de Historia de la Ciencia y de la Matemática, incluso en los niveles de Doctorado y se organizan tanto en los Institutos de Ciencias de la Educación de las Universidades como en los Centros de Profesores y Recursos, una gran variedad de Conferencias, Cursos y Seminarios, cuyo contenido versa sobre los más diversos aspectos de los temas históricos, muchos de los cuales se encargan de poner de manifiesto los seculares y recíprocos vínculos de la Matemática con los demás aspectos disciplinares de la Cultura y el Pensamiento. Así sucedió desde luego en el 2000, Año Mundial de las Matemáticas. Y en el ámbito institucional digno es de señalar la relevante actividad que desde hace más de una década desarrolla en Canarias el *Seminario Orotava de Historia de la Ciencia*, dirigido por el Profesor J. Montesinos.

Por otra parte, en la actualidad podemos disfrutar en nuestro propio idioma de abundantes textos de Historia general de las Matemáticas (Boyer, Kline, Bell, Babini, Mankiewicz, Vera, Colerus, Dunham, Ríbnikov, Wussing, Argüelles, Montesinos, y otros), de Historias del Cálculo Infinitesimal (Babini, Grattan-Guinness, González, Durán...) e incluso textos de Historia de las Matemáticas a través de sus personajes (Pitágoras, Arquímedes, Jayyan, Cardano y Tartaglia, Fermat, Descartes, Newton, Los Bernouilli, Euler, Monge, Lagrange, Legendre, Laplace, Galois, Kolmogórov), que publica la editorial Nivola desde hace varios años, escritos por Profesores con gran experiencia e inquietudes didácticas. También en otros idiomas próximos (francés e inglés) podemos disponer de famosas obras relativamente accesibles (Heath, Smith, Struik, Eves, Cajory, Loria, Brunschvicg, Dhombres, Itard, Rouse Ball, Scott, y otros).

Es un clamor la preocupación docente por enriquecer culturalmente la Matemática para reconvertirla en una disciplina cultural en el más amplio sentido. A este fin sirve como instrumento básico la Historia de las Matemáticas.

Debemos mencionar, asimismo, la impresionante fuente de la red Internet, donde con potentes buscadores podemos encontrar, de forma rápida (aunque no siempre fiable), información sobre Historia, Educación, Biografía, Iconografía, Temas, Problemas, Tópicos, Teoremas, Fórmulas, Paradojas, Errores, Periodos, Ramas, Civilizaciones, Regiones, Textos, Cronologías, Bibliografías, Etimologías, Curiosidades, Anécdotas, Citas, Animaciones, etc.

Queremos rendir especial tributo al texto de Boyer (1986), un auténtico fenómeno editorial en muchos países, desde hace más de medio siglo. Con él empezamos (en sus ediciones en inglés y en italiano) y con él continuamos como fuente casi inagotable de erudición histórica. Como escribe Medero (2003, p.122) en la recensión de esta obra en la Revista SUMA:

> [...] es un libro que deben tener a mano todas las personas cuya relación con la Matemática sea de índole didáctica, sobre todo los profesores de Bachillerato si, como es de suponer, se pretende presentar los contenidos de Matemática no como algo acabado, atemporal, sin relación con una época y una sociedad determinada, sino, por el contrario, como una disciplina viva y relacionada con la cultura imperante. [...] Este libro es un buen manual para preparar introducciones históricas para cada uno de los temas del currículo de Matemáticas de Bachillerato, en las que se puedan estudiar los orígenes y la evolución hasta la formulación actual de los conceptos propios de la Matemática.

La Historia de las Matemáticas como recurso didáctico. El método genético

Por muchas razones, no resulta fácil concretar las formas de aplicar La Historia de las Matemáticas en el ámbito escolar, ya que depende, entre otros muchos factores, del nivel educativo, de los temas y problemas concretos, de los conocimientos históricos del profesor, de su interés por la interdisciplinariedad, de su iniciativa y capacidad para realizar lo que Chevallard (1985) y Gascón (1997, pp.13, 20) llaman *transposición didáctica*, en este caso la adaptación, reconstrucción, recreación y transformación del saber histórico institucionalizado (como conocimiento útil) en saberes a enseñar, dentro de los recursos históricos seleccionados previamente como viables en el aula, y, además, sin caer en exposiciones anacrónicas que falsean el pasado en el intento de describirlo e interpretarlo con los instrumentos actuales de nuestra notación, lenguaje y términos matemáticos (González, 1992, pp.16-17).

Pero antes de señalar diversas concreciones y asumiendo con Guzmán (1992) que la inmersión creativa en las dificultades del pasado alimenta la posibilidad de extrapolación hacia el futuro, hagamos dos reflexiones generales. No parece difícil demostrar que la perspectiva histórica permite, por una parte, dar una visión más panorámica de los problemas matemáticos para calibrar con mayor precisión la importancia de los diversos temas, que quedan así mejor articulados dentro de un contexto general. En este sentido escribe Kline (1992, p.16): *la historia puede dar la perspectiva global del tema y relacionar las materias no sólo unas con otras sino también con las líneas centrales del pensamiento matemático*. Además, el estudio de la historia permite conocer la aparición de dificultades epistemológicas que presentan una gran similitud con las que atraviesan los estudiantes, y por tanto, como escribe Maza (1994, p.24): facilita *la determinación de obstáculos epistemológicos en el aprendizaje de los alumnos*, que como cuestión filosófi-

La Historia de la Matemática pone de manifiesto la dimensión cultural de las Matemáticas y su notable impacto en la Historia del Pensamiento.

ca general sobre la Didáctica es, sin duda, de gran importancia. Volveremos sobre algo tan trascendente, a propósito del *método genético*.

La forma de utilizar la Historia de las Matemáticas como un instrumento didáctico colaborador puede llevarse a cabo de

> *Más allá de su reconocido carácter instrumental, la Historia de las Matemáticas incardina esta actividad peculiar del intelecto en el conjunto armónico de los saberes científicos, artísticos y humanísticos que constituyen la Cultura.*

muy diversas maneras. Se puede, por ejemplo, preceder mediante una introducción histórica la exposición de cada tema, situando en los contextos científico y cultural el origen y la evolución de los problemas que se van a abordar. Se pueden añadir a los apuntes que se entregan a los alumnos indicaciones, breves resúmenes o notas históricas. Se puede también a lo largo del desarrollo de la clase y en cualquier momento indicar brevemente a qué matemáticos o corriente matemática se debe la introducción de un concepto nuevo, la demostración de un teorema o la resolución de un problema. En este ámbito hay un repertorio de importantes cuestiones que se prestan de forma especial a ser tratadas siguiendo su evolución histórica: el Teorema de Pitágoras (cuya aparición en el horizonte histórico matemático pero también en el horizonte escolar señala el primer salto intelectual entre los confines de la especulación empírica y los dominios del razonamiento deductivo, ya que con él sobreviene el fenómeno histórico y escolar de la demostración, de modo que se trata de un auténtico paradigma para la Matemática y sobre todo para la Educación matemática (González, 2001a), los cuerpos platónicos, los números poligonales, la Divina Proporción, el número π, la resolución de ecuaciones algebraicas, las tangentes a las curvas, y sobre todo el problema de la cuadratura de curvas donde puede uno remontarse a Arquímedes, cuyo método mecánico apunta hacia los indivisibles, mientras su método de exhaución prefigura los límites de la aritmetización del Análisis (González, 1993). En ambos problemas (tangentes y cuadraturas), en una lenta transición de siglos de creatividad matemática, una brillante pléyade de matemáticos va alumbrando métodos y técnicas infinitesimales de un inconmensurable valor heurístico e intuitivo (González, 1992), que ponen en entredicho el rigor, y que obligan a plantearse trascendentes cuestiones epistemológicas acerca de la relación entre procesos de descubrimiento-invención y métodos de exposición-demostración.

Pero quizá la forma más directa de implicar a la Historia de las Matemáticas en su Didáctica sea ensayar en algunos temas que se presten a ello, a juicio del profesor, la aplicación del **método genético**, que extraído de la Biología, intenta reconstruir el *clima psicológico* que envuelve a cada momento creador que haya supuesto un salto cualitativo en la Historia de las Matemáticas.

El término **genético** aparece por vez primera en el apéndice sexto de la obra *Fundamentos de la Geometría* (Hilbert, 1996, pp.244-245), donde el célebre matemático le concede *un alto valor pedagógico y heurístico* y lo contrapone al método axiomático.

La aplicación del método genético en la enseñanza, que ha sido reivindicado por grandes matemáticos y profesores de Matemáticas, pretende demostrar que, para la perfecta comprensión de un concepto determinado, el alumno ha de repetir a grandes rasgos el proceso histórico que se ha desarrollado hasta la formulación actual del concepto. Poincaré (1963, p.99), describe sucintamente la naturaleza del método genético: *Los zoólogos pretenden que el desarrollo embrionario de un animal resume en un tiempo muy corto toda la historia de sus antepasados desde los tiempos geológicos* [principio biogenético]. *Parece que sucede lo mismo en el desarrollo de los espíritus. El educador debe hacer pasar al niño por donde han pasado sus padres; más rápidamente pero sin saltarse ninguna etapa. De esta manera la historia de la ciencia debe ser nuestra primera guía.* Ya en la Introducción de la obra aludida de Poincaré (1963, p.12), este sabio describe su filosofía de la genética cultural: *Reflexionar sobre la mejor manera de hacer penetrar las nociones nuevas en los cerebros vírgenes, es al mismo tiempo reflexionar sobre la manera en que estas nociones han sido adquiridas por nuestros antepasados y por consiguiente sobre su verdadero origen, es decir, en el fondo, sobre su verdadera naturaleza*.

También F. Klein desarrolla una argumentación genética en su interesante texto destinado a la formación de los aspirantes al Magisterio *Matemática elemental desde un punto de vista superior* (Villarroya (1996) ha realizado una recensión de esta obra en el nº21 de la Revista SUMA). En efecto, al final del primer volumen Klein (1927, pp.399-400) manifiesta:

> [...] Este principio [biogenético], creo yo, debiera ser seguido también, al menos en sus líneas generales, en la enseñanza de la Matemática lo mismo que en cualquiera otra enseñanza; se debería conducir a la juventud, teniendo en cuenta su natural capacidad y disposición, lentamente hasta llegar a las materias elevadas y, finalmente, a las formulaciones abstractas, siguiendo el mismo camino por el que la humanidad ha ascendido desde su estado primitivo a las altas cumbres del conocimiento científico [...]. Un inconveniente fundamental para la propagación de tal método de enseñanza, adecuado al alumno y verdaderamente científico es, seguramente, la falta de conocimientos históricos que se

> nota con sobrada frecuencia. Para combatirlo gustosamente me he detenido en consideraciones históricas [...]; así ha podido verse cuán lentamente han ido formándose todas las ideas matemáticas, cómo han surgido en forma confusa, pudiera decirse que de procedimientos, y sólo después de un largo desarrollo han llegado a tomar la fuerza rígida y cristalizada de la exposición sistemática.

O. Toeplitz es otro de los creadores del **método genético** que lo aplica en uno de los textos más famosos sobre el Cálculo Infinitesimal y su historia, la obra *The Calculus, a genetic aproach*. En el prefacio de la edición alemana (incorporado a la versión americana), su discípulo G.Köthe cita la descripción que Toeplitz había hecho en un artículo sobre la naturaleza del *método genético* (Toeplitz, 1963, pp.V-VI):

> [...] Si nos remontáramos a los orígenes de estas ideas, perderían esa apariencia mortecina de hechos precisos pero disecados y recuperarían de nuevo su frescor, su pujanza y su apariencia vibrante. [...] El método genético es la guía más segura para este ascenso suave [en el estudio del Cálculo], que de otra manera no es fácil de encontrar. Seguid el curso genético que es el camino que ha seguido el hombre en su comprensión de las Matemáticas, y veréis que la humanidad ha ido ascendiendo gradualmente desde lo más simple a lo más complejo. Importantes desarrollos ocasionales pueden ser tomados generalmente como indicadores de progresos metódicos precedentes. Los métodos didácticos pueden beneficiarse enormemente del estudio de la historia.

En su argumentación contra la exclusiva interpretación deductiva, Kline (1978, pp.48, 49) se apoya en la evidencia histórica y se adhiere incondicionalmente al **método genético**:

> Cada persona debe pasar aproximadamente por las mismas experiencias por las que pasaron sus antepasados si quiere alcanzar el nivel de pensamiento que muchas generaciones han alcanzado. [...]. No se puede dudar de que las dificultades que los grandes matemáticos encontraron son también los obstáculos en los que tropiezan los estudiantes y no puede tener éxito ningún intento de acabar con estas dificultades a base de palabrería lógica.

No sólo las dificultades son las mismas sino que los estudiantes deberán superarlas aproximadamente de la misma manera en que lo hicieron los matemáticos a lo largo de la historia, familiarizándose de forma gradual con los nuevos problemas, empezando por el nivel intuitivo, que va fraguando de forma progresiva métodos, técnicas, ideas y conceptos.

Naturalmente esta repetición del proceso histórico no debe entenderse al pie de la letra. En la construcción de la Ciencia se recorren, muchas veces de forma tortuosa, caminos que a veces se desandan, de modo que el curso didáctico del desarrollo de la Ciencia no puede tener carácter lineal. Sin ocultar al alumno la forma paulatina y sinuosa de la creación científica, hay que conducirle por caminos rectos, para no hacerle perder tiempo. Según Nolla (2001) la aplicación del **método genético** en el binomio enseñanza-aprendizaje realiza una reconstrucción de la Historia que permita encontrar las preguntas esenciales que generan las ideas y conocer las necesidades que motivaron en su momento histórico la introducción de un concepto nuevo, así como las dificultades intrínsecas inherentes al alumbramiento de algunas ideas y a la resolución de algunos problemas, dificultades, que, como señalaba Kline se manifiestan, asimismo, de forma rotunda en el aprendizaje de los mismos conceptos y en la resolución de los mismos problemas.

A título de ejemplo, si los números negativos no aparecieron hasta el milenio de historia matemática, y si fueron necesarios otros mil años hasta que fueran aceptados por los matemáticos, podemos estar seguros de que los estudiantes tendrán dificultades con los números negativos. Tan significativos como éste son los dos siguientes ejemplos, uno en el ámbito del Álgebra y otro en el del Cálculo. Echando una ojeada a la Historia del Álgebra podremos comprender fácilmente las dificultades que tienen nuestros alumnos con el nivel de abstracción que exige el manejo de las letras que representan las incógnitas (Malet, 1984); son las mismas dificultades que han padecido los matemáticos durante más de veinte siglos, en el tránsito desde el *Álgebra Retórica* de los griegos de la época clásica al *Álgebra Simbólica* de Vieta (perfeccionada en cuanto a la notación por Descartes y Newton), pasando por las etapas intermedias del *Álgebra Sincopada* de Diofanto de Alejandría, por los desarrollos de los árabes y por el famoso *Arte de la Cosa* de los algebristas renacentistas italianos, del Ferro, Tartaglia, Cardano, Ferrari y Bombelli (Martín Casalderrey, 2000). Análogamente, la historia nos permite entender las terribles dificultades padecidas por nuestros alumnos en la comprensión de los conceptos de límite y continuidad. Y en este ejemplo el periodo histórico de dificultades es todavía superior, abarcando prácticamente desde el nacimiento de la Matemática racional hasta final del siglo XIX, es decir, desde los intentos de escamotear el proceso infinito en Matemáticas, llevado a cabo por los griegos mediante el *Postulado de Arquímedes* y el *Método de exhaución*, hasta la reformulación sobre bases rigurosas del nuevo Análisis, emprendida en el siglo XIX por Cauchy, Weierstrass, Dedekind y otros matemáticos, pasando, como etapas intermedias, por las reflexiones de la Escolástica medieval sobre el infinito y el continuo, que propiciaron la eclosión durante el siglo XVII de los métodos infinitesimales, que, unificados y generalizados por Newton y Leibniz, desembocaron en el descubrimiento del Cálculo Infinitesimal por ambos (González, 1992).

La Historia de las Matemáticas como fuente de vocación, motivación, orientación, inspiración y autoformación del profesor de Matemáticas

El estudio de la Historia de las Matemáticas puede ser un elemento importante en la autoformación permanente del profesor así como una de las fuentes principales de inspiración en la orientación de la actividad docente. La enseñanza no es sólo una vocación o una profesión, puede ser también un arte, y es indudable que el conocimiento de la Historia de las Matemáticas con sus momentos sublimes y gloriosos y sus períodos sombríos y baldíos, influirá decisivamente en el espíritu del profesor y en su actitud hacia la propia Matemática; y como escribe Malet (1983): *bien sabemos que la actitud del Profesor hacia la materia que explica es una de las enseñanzas más importantes que transmitimos al alumno*. Las motivaciones para enseñar Matemáticas y desde luego la manera como se enseñan pueden verse muy positivamente influenciadas por esa nueva actitud que crea el conocimiento de la Historia. Vamos a justificar estas consideraciones con los siguientes argumentos:

a. El conocimiento de la Historia favorece la comprensión profunda de los problemas matemáticos, a través de la intelección del proceso real de creación de los conceptos, del contexto en que aparecen, de las ideas que los propician, de las cuestiones que resuelven, de las reformulaciones que sufren, etc., de modo que la Historia puede ser una fuente de información para *presentar su evolución y estudiar las diversas aproximaciones al concepto actual, que se presentará como el paradigma vigente, por utilizar la famosa terminología de T.Kuhn* (Malet, 1983)
b. Las Matemáticas tienen una fuerza creativa interna que se manifiesta en el devenir histórico en un magnífico espectáculo de creación continuada y en un vasto despliegue intuitivo que al ser proyectados en el aula podrían inducir un clima de investigación y así contribuir a alcanzar uno de los objetivos formativos esenciales: el desarrollo del espíritu creativo del alumno, que Puig Adam (1955) reclama en el quinto precepto de su **Decálogo**: *Enseñar guiando la actividad creadora y descubridora del alumno*. La visión histórica puede apoyar una propuesta de aprendizaje activo. Citando a Gil (1980) al *extraer de la historia de la ciencia la problemática que, debidamente presentada a los alumnos, les permitiera redescubrir, a través de una actividad investigadora, los conocimientos que la enseñanza tradicional trasmite ya elaborados*, se podría tender a alcanzar uno de los objetivos de la enseñanza de cualquier ciencia, a saber, enseñar, en alguna forma, a elaborar ciencia.
c. La Historia de las Matemáticas revela los ingentes esfuerzos desplegados por sucesiones de generaciones matemáticas en la formación de algún concepto nuevo o en la resolución de algún problema importante, que, a la hora de tratarlo en la clase, el profesor con su arrogancia dogmática y autoritaria puede creer, de espaldas a la historia, que debe ser trivial para el alumno. Ya mencionamos antes a título de ejemplo las dificultades intrínsecas del concepto de límite y continuidad o del manejo de las letras en las ecuaciones, pero los ejemplos son múltiples. El profesor que esté al corriente de la Historia, además de aprovechar el legado histórico para enriquecer su actividad docente, al conocer y comprender las dificultades de los contenidos impartidos manifestará una actitud prudente, precavida y paciente y encontrará sugerencias y apoyos que faciliten la introducción de los nuevos conceptos.
d. La Historia de las Matemáticas puede ofrecer al Profesor un campo inagotable de estímulos para mantener su interés en una autoformación continuada para perseverar en el estudio de la propia Matemática, lo cual contribuirá a mantener un nivel adecuado a las exigencias curriculares y a desarrollar las necesarias capacidades de actualización y renovación pedagógicas.
e. A pesar de la proliferación en múltiples ramas, la Matemática tiene su unidad propia. Para Kline (1992, pp.15-16): *La manera más segura de combatir los peligros que amenazan nuestra fragmentada ciencia quizá sea la de llegar a conocer los logros, tradiciones y objetivos de la Matemática en el pasado, para poder dirigir las investigaciones por vías fructíferas*. Kline cita a Hilbert: *La Matemática es un organismo para cuya fuerza vital es condición necesaria la unión indisoluble de sus partes.*
f. La Historia de la Matemática subvierte la extendida creencia de que el rigor es el supremo valor de la Matemática que debe imponer una vía única de razonamiento para llegar a los resultados. Bajo estas concepciones las clases se vuelven frías, secas y dogmáticas y son estériles para un porcentaje elevado de alumnos. La Historia nos muestra que se ha llegado a los mismos resultados matemáticos por caminos muy diferentes y no siempre correctos y que nuevos modos de razonar se apoyan sobre otros pasados, que deben ser a su vez modificados para el tratamiento de nuevos problemas.
g. Para muchas personas, en general, y para muchos estudiantes, en particular, la Matemática, que es la más antigua y, como decía Gauss, *la reina de las ciencias* no es considerada como una disciplina cultural más, sino como un simple lenguaje al servicio de las demás ciencias y algo más grave, se la concibe como el arma utilizada por el sistema educativo para filtrar selectivamente al alumnado (esto es patente en las carreras universitarias de tipo técnico), lo que provoca sobre la Matemática una extendida aversión además de un cierto aislamiento, que contradice el tercer precepto del Decálogo de Puig Adam (1955): *Presentar la Matemática como una unidad en relación con la vida natural y social*. Por todo ello es un verdadero clamor la preocupación en el ámbito docente matemático por desdogmatizar y enriquecer culturalmente la Enseñanza de la Matemática, para reconvertirla en una disciplina cultural en el más amplio sentido de la palabra. A este fin sirve como instrumento básico la Historia de las Matemáticas, como veremos enseguida.
h. La Matemática recreativa se nutre en buena parte de problemas que han tenido cierto interés a lo largo de la Historia de la Matemática. Ésta es, pues, un manantial de problemas

curiosos que pueden ser tratados de forma lúdica como actividades al margen de la clase y en el marco de las actividades culturales complementarias. A pesar de la escasa audiencia que suelen concitar las Matemáticas, alentadas con anterioridad mediante una propaganda atractiva y presentadas en forma de *Taller de Matemática recreativa* (González,1989), estas actividades constituyen *Experiencias en el Aula* (González, 1988) que pueden tener un gran atractivo para los alumnos. Algunos temas que se prestan a ser desarrollados en estos talleres podrían ser la ingente cantidad de curiosidades numéricas, los cuadrados mágicos, los números poligonales (que combinan de forma visual las dos esencias de la Matemática elemental, el número y la forma), aspectos históricos, aritméticos y geométricos del Teorema de Pitágoras, el omnipresente número de oro en su relación con la Divina Proporción y su incidencia sobre el Arte, las múltiples curiosidades sobre polígonos y poliedros, el famoso número π, los tres problemas geométricos clásicos (la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo), las inquietantes paradojas sobre el infinito, aspectos artísticos de la Geometría Proyectiva elemental, etc. Pero también en el marco de la clase pueden encajar coyunturalmente aspectos de la Matemática recreativa. Para Rodríguez (1980, pp.53-56):

> Las inclusiones de asuntos o tratamientos propios de la Matemática recreativa (con sus resultados chocantes con la intuición ordinaria, el rigor suavizado, y la aparición notable de referencias históricas) en los cursos ordinarios son tónicos excelentes que entendemos ayudan al alumnado a seguir adelante.

En sentido similar escribe Rodríguez (1987, p.VII):

> Los recursos lúdicos y notas históricas, compartidos entre maestros y alumnos, resultan a veces inmejorable medio de orientar el interés o aliviar la tensión de la clase de Matemáticas. De ahí la atención, cada vez mayor, que se les otorga en la Didáctica.

La Historia de la Matemática como instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza

Las Matemáticas constituyen una de las grandes manifestaciones del Pensamiento con un desarrollo milenario relacionado estrechamente con los grandes hitos del conocimiento y de la cultura. Conocida es la implicación de la Matemática con las Ciencias de la Naturaleza, la Tecnología y el Arte; pero sus vínculos con la Filosofía, la Educación, el Lenguaje, la Literatura, la Belleza, la Religión, la Mística, la Política, etc., hacen de ella una manifestación de la racionalidad humana que, navegando a lo largo de la Historia en todos los confines del Pensamiento, vertebra la Cultura, desde las más remotas civilizaciones hasta la inexorable informatización del mundo actual. La permanente interacción del desarrollo matemático con cualquier actividad humana hacen de esta ciencia uno de los grandes logros culturales de la humanidad.

La Historia de la Matemática pone de manifiesto la dimensión cultural de las Matemáticas y su notable impacto en la Historia del Pensamiento. A título de ejemplo vamos a describir de forma muy sintética algunas relaciones e influencias recíprocas que a lo largo de la Historia ha establecido y mantenido la Matemática con ciertas disciplinas, en particular las que en sentido académico acostumbramos a denominar humanísticas: Filosofía, Artes, Religión, Educación, Política, Literatura y Poesía:

> *La Historia de la Matemática es punto de convergencia e intimidad entre Ciencias y Humanidades. La ignorancia o el desprecio de la topología de este terreno compartido alimenta la estéril polémica sobre las dos culturas.*

Matemática y Filosofía. La Matemática y la Filosofía tienen unas raíces históricas comunes en el horizonte pitagórico del siglo VI a.C. que conocemos relativamente bien a través de la Filosofía platónica y de *La Metafísica* de Aristóteles. Aparte de cuestiones propiamente filosóficas como el concepto de verdad en Matemáticas, la naturaleza del rigor y la idea de la demostración (consustancial con la Matemática y elemento esencial en el tránsito del mito al logos), podríamos concretar en tres figuras esenciales:

- Pitágoras: *el número es la esencia de todas las cosas,* es un pronunciamiento metafísico que en el curso de los siglos conducirá al galileano *la naturaleza está escrita en caracteres matemáticos* y tiene plena vigencia en la actualidad a través de la digitalización informática (González, 2001a).
- Platón: en muchos de sus *Diálogos* (*República, Leyes, Menón, Timeo, Teeteto...*) se sitúa a la Matemática como propedéutica del estudio de la Filosofía y fundamento de todo el saber humano (González, 2001b) y en el frontispicio de **la Academia** rezaba: *No entre nadie ignorante en Geometría*. Además, *Dios geometriza el mundo* por eso el lenguaje matemático es imprescindible para descifrar sus secretos, como aseguraba Galileo.
- *El sueño de Descartes* de la matematización del mundo (Davis, 1989). La certidumbre matemática. La unión del Álgebra y la Geometría como germen de un nuevo sistema filosófico. La Matemática como base racional del pensamiento cartesiano. Implicaciones recíprocas entre *El Discurso del Método, La Geometría* y *Las Reglas para dirección del espíritu.* El Análisis y la Síntesis como preceptos cartesianos.

Matemática y Artes. Música, Pintura, Arquitectura...

- La Matemática como Arte: Platón, Poincaré, Hadamard, Hardy, Santaló...
  El binomio de Newton es tan bello como la Venus de Milo. (F. Pessoa)
- Los saberes matemáticos en las Artes. El artista como geómetra.
- Arte, Geometría y Pensamiento. Armonía, Belleza y Proporción: Pitágoras, Aristóteles, Vitrubio, Pacioli, Leonardo, L.Alberti, Durero, Barbaro, Palladio, Rafael.
- El fundamento matemático de la armonía musical.
- Las Proporciones pitagóricas en el Arte:
  Proporciones conmensurables. Consonancias musicales. L. Alberti, Boticelli, Palladio.
  Proporciones inconmensurables. Sección áurea: la Divina Proporción en el Arte.
- Simbolismo y diseño poliédrico: Leonardo, Durero, Piero della Francesca, Pacioli, Escher, Gaudí, Dalí.
- Reminiscencias pitagóricas en Dalí y Gaudí.
- El Arte Fractal: Benoit Mandelbrot, Gastón Julia...

Matemática, Religión, Teología y Mística. Origen sacro de la Geometría. Simbología religiosa geométrica. El Pentagrama místico pitagórico. Los *Sulvasutras* hindúes. La Geometría del espacio popular y del espacio sagrado. El Pitagorismo como Religión. El Pitagorismo fundamento filosófico e ideológico del Cristianismo. San Agustín y San Isidoro. La Geometría instrumento divino de creación y configuración (Pitágoras, Platón, Kepler...). El Dios geómetra como Arquitecto supremo del universo. El *Argumento ontológico* de San Anselmo. El *Horror al infinito* de los griegos y el Dios cristiano medieval. La Divina Proporción y los atributos de la divinidad (L.Pacioli). El simbolismo místico del Dodecaedro. La duda metódica de Descartes y Dios en *El Discurso del Método.* El misticismo de Pascal y su apuesta probabilística sobre la existencia de Dios. La máxima de Kronecker: *Dios creó los números naturales y todo lo demás* [en Matemáticas] *es obra del hombre.* Rusell y las *pruebas* de la existencia de Dios...

Matemática y Educación.

- Pitágoras: Acuñación del término *Mathema* con el significado de *lo que se enseña y se aprende*, es decir lo formativo, *lo enseñable por antonomasia*.
- Arquitas de Tarento: la Matemática como componente esencial del currículum escolar según el *Cuadrivium pitagórico* (Aritmética, Geometría, Música y Astronomía), sancionado por Platón en *La República* y de vigencia secular.
- Platón: La Matemática como un instrumento esencial para la educación e instrucción de la juventud (*Republica*, VII, 521-527).
- *Como herederos del mundo clásico, nosotros, profesionales de la transmisión del conocimiento matemático, enfatizamos con vehemencia las cualidades de las Matemáticas: la capacidad para manejar la cantidad y la extensión, la regularidad y la disposición, la estructura y la implicación, la inducción y la deducción, la observación y la imaginación, la curiosidad y la iniciativa, la lógica y la intuición, la invención y el descubrimiento, el análisis y la síntesis, la generalidad y la particularidad, la abstracción y la concreción, la interpolación y la extrapolación, la decisión y la construcción, la belleza y la utilidad, la armonía y la creatividad, la interpretación y la descripción... siempre bajo la acción del entendimiento y el imperio de la voluntad. Estas cualidades inherentes a las Matemáticas alimentan su función informativa: adquirir un conjunto de conocimientos que permitan familiarizarse con el mundo natural circundante, con herramientas para interpretar el mundo físico, natural y social, en términos cuantitativos y abstractos, pero sobre todo, por imperativo platónico, la función formativa: desarrollar el pensamiento crítico y el rigor científico, inculcar una disciplina mental con la que operar sobre cualquier tipo de pensamiento o de situación y a través de la resolución de problemas desarrollar la iniciativa personal y la fortaleza para vencer obstáculos, estimulando la voluntad. La Matemática incide así decisivamente sobre el binomio entendimiento-voluntad que es la matriz del espíritu humano, de ahí la implicación trascendental que como en los tiempos de Platón tiene hoy y siempre la Matemática en la Educación*. (González, 2001b, p.15).

Matemática, Política y Sociedad.

- Platón: La Matemática herramienta básica para la formación del hombre de Estado (*La República*, *Las Leyes*).
- Matemática y Revolución Francesa: la Enciclopedia de Diderot y D'Alembert (cuyo Discurso Preliminar de gran contenido histórico, científico y matemático, es redactado por éste) prepara el ambiente de una Revolución social y política con gran protagonismo de los matemáticos (Monge, Carnot, Condorcet, Lagrange, Legendre, Laplace...) que propician una Revolución educativa institucional con la creación de las instituciones educativas de enseñanza superior (la Escuela Politécnica y la Escuela Normal), producen una Revolución didáctica (programas de asignaturas, libros de texto), fundan la figura del matemático profesional como Profesor funcionario asalariado del Estado e introducen el Sistema Métrico Decimal. Condorcet, fundador de la Matemática Social y artífice de los *manuales del maestro* crea un espíritu socio-político con la máxima: *Esclareced las ciencias morales y políticas con la luz del Álgebra*. Napoleón como matemático y como político: *Las obras de Matemáticas contribuyen a la ilustración de la nación; El avance y la perfección de las Matemáticas están íntimamente ligados a la prosperidad del Estado.*
- La Estadística como instrumento esencial de la acción política del Estado como indica su propia etimología.

Matemática y Literatura. *Diálogos* (Platón), *De propria vita* (Cardano), *Pensamientos* (B. Pascal), *Alicia en el País de las Maravillas* (L. Carroll), *Una infancia rusa* (S. Kovaleskaya), *Planilandia* (E.Abbott), *Apología de un matemático* (G. H. Hardy), *El Aleph* (J.L.Borges), *Kepler* (A. Koestler), *El hombre que calculaba* (M.Tahan), *El tío Petros y la conjetura de Goldbach (*A.Doxiadis), *El teorema del loro* (D. Guedj*), El diablo de los números* (H. M. Enzensberger), *El enigma de Fermat* (S.Singh), *El sueño de Descartes* (P. J. Davis), *Érase una vez un número* (J. A. Paulos), *La mesura del món* (D. Guedj*), Damunt les espatlles dels gegants* (J. Pla)...

Matemática y Poesía. Platón, Pitágoras, Dante, O. Kayyan, Pacioli, Weierstrass L. Carroll, Hausdorff, P. Valery, Poincaré, Hardy, R. Alberti...

Como vemos en esta breve incursión de la Matemática en los Saberes, la Historia de las Matemáticas pone de manifiesto los vínculos recíprocos entre la Matemática y la Filosofía, el Arte, las Ciencias Sociales y en general cualquier manifestación de la Cultura, sirviendo de puente entre la cultura humanística y la científica como dice Campedelli (1970). Si esto es así, al situarnos en el ámbito docente, encontramos muy acertadas la palabras de Gómez (2002, p.119, 120):

> La educación matemática tendría que ser una auténtica educación en humanidades, en la que los estudiantes conocieran el papel que representan las Matemáticas en nuestra cultura y en la sociedad. [...] Enseñar Matemáticas como si estuviesen aisladas es una distorsión del conocimiento. Convendría enseñar Matemáticas yendo más allá de las propias Matemáticas: considerando sus relaciones y buscando su sintonía con las corrientes principales del pensamiento. Esta nueva actitud motivaría a los estudiantes, crearía nuevas aplicaciones y abriría nuevas vías de debate.

La Historia de las Matemática como lugar de encuentro entre las ciencias y las humanidades, es un instrumento magistral para enriquecer culturalmente su enseñanza.

Por supuesto que la Historia de las Matemáticas ante todo muestra ostensiblemente la más conocida relación entre las Matemáticas y sus aplicaciones externas, las ciencias en general y las diversas técnicas (en cuya interacción han surgido gran cantidad de ideas matemáticas importantes), y, desde el punto de vista sociológico, permite conocer las fuerzas sociales y productivas que contribuyeron a su desarrollo. Pero con base en la Historia de la Matemática hemos visto que la Matemática es mucho más que un lenguaje y una herramienta. No queremos infravalorar, ni mucho menos, la condición instrumental de la Matemática, ya que tiene un valor trascendente, toda vez que buena parte de los alumnos así la concebirán y en ese sentido la aplicarán en su futura vida académica, profesional y personal. Pero, con cierto espíritu platónico, nos proponemos dignificar la condición de la Matemática, más allá de su reconocido carácter instrumental, para allende la ciencia, incardinar esta actividad peculiar del intelecto humano en el conjunto armónico de los saberes científicos, artísticos y humanísticos que constituyen la Cultura, pues como escribe Boyer (1949, Prefacio): *La Ciencia es tanto un hábito de pensamiento como una forma de vida y las Matemáticas son tanto un aspecto de la Cultura como una colección de algoritmos*. Hay que subrayar que la Historia de la Ciencia, en general, y la de las Matemáticas, en particular, son privilegiados puntos de encuentro donde convergen e intiman la Ciencia y las Humanidades. La ignorancia o el desprecio de la topología de este terreno compartido alimenta la estéril polémica sobre las dos culturas. Como contrapunto escribe Lusa (1984, p.5): *la escisión de los saberes, no sólo en dos, sino en mil culturas, hace necesario el fortalecimiento de elementos integradores que estimulen la interdisciplinariedad y el reencuentro de los saberes*. La Historia de la Ciencia marca un camino seguro hacia esa reintegración cultural.

Conclusiones.

En la Historia de las Matemáticas el profesor puede encontrar un medio de autoformación para la comprensión profunda de las Matemáticas y sus dificultades de transmisión lo que permitirá suavizar el camino que conduce de la Enseñanza al Aprendizaje; un instrumento para desarrollar la capacidad de renovación y adaptación pedagógicas y una metodología que permita plantear activamente el aprendizaje como un redescubrimiento. Como dice Kline (1978): *se puede comprimir la historia y evitar muchos de los esfuerzos y trampas inútiles, pero no es posible darla de lado*. Además, la Historia de las Matemáticas es una fuente inagotable de material didáctico, de ideas y problemas interesantes y también, en un alto grado, de diversión y recreo intelectual, en suma de enriquecimiento personal, científico y profesional, que el profesor puede aprovechar para motivar su labor de transmisión del conocimiento, desdramatizando la Enseñanza de las Matemáticas. Finalmente la Historia de las Matemáticas como lugar de encuentro entre las ciencias y las humanidades, es un instrumento magistral para enriquecer culturalmente la Enseñanza de la Matemática e integrarla de forma armónica e interdisciplinar en el currículum académico. ■

REFRENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BELL, E.T. (1985): *Historia de las Matemáticas*. Fondo de Cultura Económica. México.

BOYER, C.(1949): *History of the Calculus and its conceptual development*. Dover, New York.

BOYER, C. (1986): *Historia de las Matemáticas*. Alianza Universidad Textos (AUT/94), Madrid.

CAMPEDELLI, L. (1970): *Fantasía y Lógica en la Matemática*. Labor, Barcelona.

CAÑÓN, C. (1993): *La Matemática, creación y descubrimiento*. U.P. Comillas. Madrid.

CHEVALLARD, Y. (1985): *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

COHEN, I. (1968): *La imaginación humana y la naturaleza, Fronteras del conocimiento*. Eudeba, Buenos Aires.

COURANT, R. y ROBBINS, H. (1971): *¿Qué es la Matemática?* Aguilar, Madrid.

COURANT, R. y JHON, F. (1974): *Introducción al cálculo y al análisis matemático*. Limusa. México.

DAVIS, J. y HERSH, R. (1989): *El sueño de Descartes, el mundo según las Matemáticas*. Labor, MEC, Barcelona.

DEL RÍO, J. (1997): Historia de las Matemáticas. Implicaciones didácticas, *SUMA*, n.º26, 33-38.

DIEUDONNÉ, J. (1971): *Algebra Lineal y Geometría elemental.* Selecciones científicas, Madrid.

DROEVEN, E.(1980): Propuesta para un aprendizaje no ahistórico de las Matemáticas. *Actas del Simposio sobre "La Historia de las Ciencias y la Enseñanza"*. 53-56, Valencia.

GASCÓN, J. (1997): Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar matemáticas en secundaria a estudiar matemáticas en la Universidad. *SUMA*, n.º26, 11-21.

GIL, D. (1980): Papel de la historia de la ciencia en un planteamiento activo del aprendizaje. *Actas del simposio sobre "La historia de las ciencias y la enseñanza"*, 21-24, Valencia.

GÓMEZ URGELLÈS, J. (2002): *De la enseñanza al aprendizaje de las Matemáticas*. Paidós (Papeles de Pedagogía). Barcelona.

GONZÁLEZ URBANEJA, P. (1988): Experiencias en el Aula. *Comunidad Escolar*, n.º 197. MEC Madrid.

GONZÁLEZ URBANEJA, P. (1989): Taller de Matemática recreativa. *Cuadernos de Pedagogía*, n.º 166, 6566. Barcelona.

GONZÁLEZ URBANEJA, P. (1992): *Las raíces del Cálculo Infinitesimal en el siglo XVII*. Alianza Univ., n.º 716, Madrid.

GONZÁLEZ URBANEJA, P. ; VAQUÉ, J (1993): *El método relativo a los teoremas mecánicos de Arquímedes.* Pub. Univ. Aut. de Barcelona, Ed. Univ. Politècnica de Catalunya. Col. Clásicos de las Ciencias. Barcelona.

GONZÁLEZ URBANEJA, P. (2001*a*): *Pitágoras, el Filósofo del número*. Nivola, Madrid.

GONZÁLEZ URBANEJA, P. (2001*b*): La implicació de la matemàtica en l'educació, segons Plató. *Butlletí* 09/2003 ABEAM.

GUZMÁN, M. (1992): Tendències innovadores en educació matemàtica. *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, núm 7, 7–33. Barcelona.
http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/tendencia/ensen.htm

HILBERT, D. (1996): *Fundamentos de la Geometría*. CSIC, Madrid.

HOUZEL, C. (1977): Historia de las Matemáticas y Enseñanza de las Matemáticas. En Bibiloni (y otros) *Materiales para una discusión sobre la enseñanza de la historia de la ciencia y su posible uso didáctico*. VI.1-VI.10.ICE, Univ. Barcelona, 1982.

KLEIN, F. (1927): *Matemática elemental desde un punto de vista superior*. Vol.I Biblioteca Matemática, Madrid.

KLINE, M. (1978): *El fracaso de la Matemática moderna*. Siglo XXI, Madrid.

KLINE, M. (1992): *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Vol.1. Alianza Universidad, n.º 715, Madrid.

LAKATOS, I. (1978): *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Alianza Universidad n.º 206, Madrid.

LUSA, G. (1984): Seminario Permanente de Historia de la Matemática. *Butlletí de la secció de matemàtiques*, n.º 16, Institut d'Estudis Catalans, Barcelona.

MALET, A. y otros (1983): Història de les matemàtiques: cultura y didàctica. *Papers de Batxillerat*, n.º 3, 7477.

MALET, A. ; PARADIS, J. (1984): *Els orígens i l'ensenyament de l'àlgebra simbòlica*. Edicions de la Universitat de Barcelona.

MARTÍN CASALDERREY, F. (2000): *Tartaglia y Cardano. Las Matemáticas en el Renacimiento italiano*. Nivola, Madrid.

MAZA, C. (1994): Historia de las Matemáticas y su enseñanza: un análisis. *SUMA*, n.º17,17-26.

MEDEROS, C. (2003): Un clásico de historia. *SUMA*, n.º 42, 121-122.

NAVARRO, V. (1980): Introducción de las *Actas del Simposio sobre "La Historia de las Ciencias y la Enseñanza"*, 11-17. Valencia.

NOLLA, R. (2001): *Estudis i activitats sobre problemes clau de la Història de la Matemàtica. Per a una aproximació genètica al tractament de les idees matemàtiques.* Memòria de Llicència d'estudis. Generalitat de Catalunya.
http://www.xtec.es/sgfp/llicencies/200001/resums/rnolla.htm

PIAGET, J. y otros (1978): *La Enseñanza de las Matemáticas modernas*. Alianza Universidad, n.º 207, Madrid.

POINCARE, H. (1963): *Ciencia y método*. Espasa Calpe, Col. Austral n.º 409, Madrid.

PUIG ADAM, P. (1951): Decálogo de la Didáctica Matemática Media, *Gaceta Matemática*, 1ª serie, tomo 7, n.º5-6, Madrid.

RODRIGUEZ, A.L. (1980): La hora de la Matemática Recreativa en el Bachillerato actual. *Revista de Bachillerato*. Cuaderno monográfico n.º 5 sobre Matemáticas, 5356.

RODRIGUEZ, R. (1987): *Cuentos y cuentas de los matemáticos*. Reverté. Barcelona, 1987.

SANCHO, J. (1998): Este libro es una obra de arte, *SUMA*, n.º29, 121-126.

SANTALÓ, L. (1975): *La Educación matemática hoy*, Teide, Barcelona.

SANTALÓ, L. (1993): *La matemática: una filosofía y una técnica*. Eumo, Vic- Girona.

SPENGLER, O. (1998): *La decadencia de Occidente*. Cap.I.1. Austral, Madrid.

TOEPLITZ, O. 1963, *The Calculus, a Genetic Approach*. University of Chicago Press.

VILLARROYA, F. (1996): Klein y la Enseñanza de las Matemáticas, *SUMA*, n.º21, 107-113.

SUMA 45
Febrero 2004, pp.29-34

Una propuesta para la aproximación intuitiva de funciones por polinomios en la ESO y el Bachillerato

Se extiende el concepto de aproximación de un número real *al de* aproximación de una función*. En la primera fase, a partir de la suma de una progresión geométrica, se obtienen casos particulares de funciones polinómicas que aproximan un tipo concreto de funciones racionales. En la segunda fase se encuentran funciones polinómicas que aproximan cualquier función continua. El profesor utiliza la historia de las Matemáticas como recurso didáctico haciendo comentarios que recuerdan la evolución histórica de la aproximación de funciones en series de potencias. Este recorrido es el mismo que van a seguir los alumnos.*

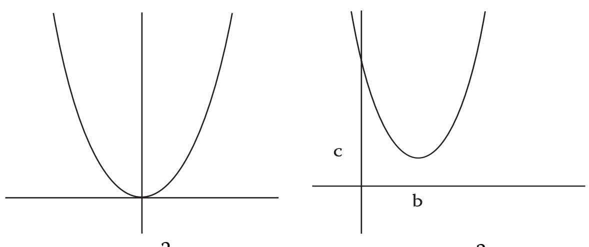
The concept of approximation of a real number *is extended to that of* approximation of a function*. In the first phase, from the addition of a geometric progression, particular cases of polynomial functions are obtained which approximate certain type of rational functions. In the second phase, polynomial functions that approximate any continuous function are found. The teacher uses the History of Mathematics as a didactic resource making remarks which remind of the historic evolution of the approximation of functions in series of powers. This is the same route that the students are going to follow.*

El problema general de la aproximación es omnipresente en las matemáticas, una disciplina que curiosamente, por otro lado, tradicionalmente ha sido considerada como la ciencia de la exactitud.

La situación más elemental en la que se presenta la necesidad de hacer una aproximación aparece al enfrentarse al problema de la medición. Por ejemplo, si queremos medir el "lugar" que ocupa un determinado cuerpo en el espacio, es decir la magnitud "volumen", pretendemos asociar a ese cuerpo un número y estamos por tanto dando un tratamiento aritmético a una situación que en principio es únicamente geométrica. Así pues la aproximación aparece como un puente natural entre la Geometría y la Aritmética.

Otras veces el problema planteado no puede resolverse en la forma que fue formulado y tenemos que obtener la solución a través de una aproximación. Por ejemplo, en Análisis es frecuente sustituir un proceso infinito (suma o integración) o un proceso infinitesimal (diferenciación) por una aproximación finita. En este caso la aproximación es el enlace entre el razonamiento finito e infinito.

La mayor parte de la aproximación hecha en Análisis numérico consiste en aproximar una determinada función por alguna combinación, frecuentemente lineal, de funciones construidas a partir de una clase particular de funciones. La clase de las funciones polinómicas tiene especial interés por varias razones. Por un lado, las calculadoras y los ordenadores sólo pueden realizar sumas y multiplicaciones, y estas son precisamente las únicas operaciones que aparecen en los polinomios, que por su sencillez, pueden ser manipulados, en general, y diferenciados e integrados, en particular, sin ninguna dificultad. Además en la aproximación polinómica, cuando se realiza un cambio en el origen de coordenadas o en la escala de la variable, éste conlleva un cambio en los coeficientes utilizados, pero no en la forma de la aproximación.



$f(x)=x^2$ $\qquad$ $f(x)=a(x-b)^2+c$

Antonia Redondo Buitrago
IES Diego de Siloé. Albacete
Mª José Haro Delicado
IES Al-Basit. Albacete

Y lo que es más importante, toda función continua o seccionalmente continua en un intervalo se puede aproximar por un polinomio con tanta precisión como queramos. Este resultado se conoce en Análisis numérico con el nombre de Teorema de Weierstrass y no es más que un caso particular de un teorema más abstracto, el Teorema de Stone-Weierstrass, que dice:

> Dado un espacio métrico E compacto y el espacio vectorial $C_R(E)$ de las funciones continuas en E con valores reales (por tanto acotadas), si A es una subálgebra de $C_R(E)$ que contiene a las funciones constantes y separa puntos de E (es decir, para cada x, y pertenecientes a E existe una función f de A tal que $f(x)<>f(y)$), entonces A es densa en el espacio de Banach $C_R(E)$.

En efecto, si E es en particular un subconjunto compacto de R^n, espacio métrico compacto con la métrica inducida, tomando como subálgebra A, la de los polinomios, entonces toda función continua de E con valores reales es el límite de una sucesión de polinomios que converge uniformemente a ella.

El problema de la aproximación de funciones por medio de polinomios no aparece de forma explícita en el currículo de la ESO ni en el del Bachillerato, pero como se verá en el desarrollo de este trabajo, aparece de forma natural en el tratamiento elemental de las progresiones geométricas y esto nos permitirá trabajar algunos aspectos de forma intuitiva, muy asequible y sin tener que apoyarnos necesariamente en el concepto de derivada (Polinomios de Taylor).

Lo interesante y verdaderamente sugerente es que en una fase tan temprana del aprendizaje y de una forma tan sencilla se puedan establecer los fundamentos de conceptos y técnicas abstractas de Análisis funcional. Los alumnos no tienen porqué ser conscientes de esto, pero nosotros como profesores sí debemos serlo y pensamos que estamos obligados a no desaprovechar la ocasión que se nos presenta.

La metodología de nuestra propuesta se fundamenta en las teorías que utilizan el enfoque histórico (Rico, 1997) como recurso didáctico, pues entendemos que el aprendizaje de los alumnos puede motivarse y facilitarse, en la medida en que seamos capaces de reproducir las situaciones que condicionaron la aparición de las ideas implicadas, intentando posteriormente recorrer con ellos un itinerario similar al seguido en la aparición, desarrollo y formulación del concepto objeto de estudio.

Las teorías cognitivas nos dicen que la evolución natural del conocimiento matemático en la mente del individuo, sería en condiciones normales, paralela o similar a la que siguió el pensamiento colectivo a lo largo de la Historia de las Matemáticas. Por ejemplo, a lo largo de la historia se introdujeron antes los números racionales positivos, que ya eran conocidos por los babilonios, egipcios y griegos, que los números negativos y es precisamente ese el orden en el que se produce la evolución del concepto de número en la mente de un niño.

Las actividades que presentamos no constituyen una Unidad didáctica, sino que deben ser consideradas en el contexto del tratamiento de la diversidad, como un bloque de actividades de recapitulación y ampliación que implican contenidos de diversas partes de la asignatura (progresiones-inecuaciones-funciones-aproximación-límites-derivada). El proceso se secuencia en dos niveles de manera que puede iniciarse, si se estima oportuno, en cuarto curso de la ESO, y completarse en el primer curso de Bachillerato.

Nivel 1. (Cuarto curso de la ESO opción B)

Objetivos: Extender el concepto de *aproximación de un número real* al de *aproximación de una función*. Obtener casos particulares de polinomios que aproximan algunas funciones racionales.

Conocimientos previos: Aproximación de un número real. Polinomios. División de polinomios. Progresiones geométricas. Suma de los términos de una progresión geométrica. Inecuaciones. Concepto de función. Gráfica de una función.

Materiales: Ordenador (con programa Derive) o Calculadora gráfica.

La aproximación de una función por una serie de potencias aparece muy pronto en la historia de las Matemáticas relacionadas con las progresiones geométricas de razón menor que la unidad. Aristóteles ya admitió que estas series tienen suma finita y esta será nuestra situación de partida.

Empezaremos considerando la progresión geométrica 1, r, r^2, r^3..., de razón $-1 < r < 1$, y recordando la fórmula de la suma de todos los términos de dicha progresión:

$$1+r+r^2+r^3+\ldots=\frac{1}{1-r} \quad , \quad -1<r<1$$

Podemos decir por tanto que cuando es $-1 < r < 1$, los valores de 1, $1 + r$, $1 + r + r^2$.... son aproximaciones de

$$\frac{1}{1-r}$$

o bien recíprocamente, que

$$\frac{1}{1-r}$$

se puede aproximar por 1, $1 + r$, $1 + r + r^2$, ..., $1 + r + r^2 +\ldots + r^n$ y la aproximación es tanto mejor cuanto mayor sea el valor de n, por supuesto, siempre que $-1 < r < 1$.

Si cambiamos en esa expresión la *r* por *x* y escribimos la igualdad en sentido contrario,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \qquad , \quad -1 < x < 1$$

como el símbolo *x* se suele utilizar para representar la variable independiente de una función, la igualdad anterior adquiere una nueva dimensión para los alumnos (la notación en este caso conlleva información implícita) y están en condiciones de realizar la primera actividad.

Actividad 1

a) Interpreta lo que puede representar la igualdad

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \qquad , \quad -1 < x < 1$$

cuando consideras la función

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

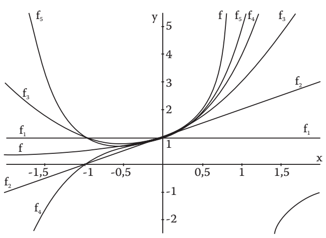
b) Representa con el ordenador la función

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

y las funciones

$f_1(x) = 1$, $f_2(x) = 1 + x$, $f_3(x) = 1 + x + x^2$, $f_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3$....

Compara la interpretación que has dado en el apartado anterior y la que sugiere la observación de las gráficas.



Los alumnos están habituados a hablar de números aproximados y, de forma natural, proponen y/o aceptan que las funciones $f_n(x)$ podrían considerarse *aproximaciones de f(x)*. La observación de las gráficas muestra que la aproximación no sería válida para cualquier valor de *x* sino sólo cuando $-1 < x < 1$. Este hecho fundamental no debe pasar desapercibido para el alumno porque es la primera vez que se enfrenta al concepto de intervalo de convergencia de una serie.

Actividad 2

Las siguientes funciones también se pueden aproximar por polinomios. ¿Sabrías encontrarlos? ¿Para que valores de la variable x *son satisfactorias las aproximaciones que obtienes?*

$$f(x) = \frac{2}{1-x},\; g(x) = \frac{5}{1-x^2},\; h(x) = \frac{3}{1-4x^2},\; k(x) = \frac{1}{1+x}$$

Confirma tus afirmaciones representando con el ordenador las gráficas de cada función y sus correspondientes aproximaciones.

Las funciones *f(x)*, *g(x)* y *h(x)* son respectivamente, la suma de las progresiones geométricas:

$2, 2x, 2x^2, 2x^3\ldots$, para $-1 < x < 1$.

$5, 5x^2, 5x^4, 5x^6\ldots$, para $-1 < x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

$3, 12x^2, 48x^4, 192x^6\ldots$, para $-1 < 4x^2 < 1 \Leftrightarrow -1/2 < x < 1/2$.

Para la función *k(x)* puede ser necesaria la indicación $1 + x = 1 - (-x)$. En ese caso la progresión sería

$1, -x, x^2, -x^3, x^4\ldots$, para $-1 < -x < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

Los alumnos pueden investigar aproximaciones de funciones no tan *cómodas* como las anteriores, por ejemplo

$$f(x) = \frac{1}{2x-1} \qquad g(x) = \frac{1}{x-2} \qquad h(x) = \frac{2x^2+1}{1-x}$$

Las únicas dificultades que se van a encontrar son de carácter algebraico, pero no es un inconveniente porque toda ocasión es buena para trabajar este tipo de contenidos:

$$\frac{1}{2x-1} = \frac{-1}{1-2x} = -1 - 2x - 4x^2 - 8x^3 - \ldots,$$
$$\text{para} \quad -1 < 2x < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{x-2} = \frac{-1}{2-x} = \frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \ldots,$$
$$\text{para} \quad -1 < \frac{x}{2} < 1 \Leftrightarrow -2 < x < 2$$

$$\frac{2x^2+1}{1-x} = -2x - 2 + \frac{3}{1-x} = -2x - 2 + \left(3 + 3x + 3x^2 + 3x^3 + \cdots\right) =$$
$$= 1 + x + 3x^2 + 3x^3 + 3x^4 + \ldots, \quad \text{para} \quad -1 < x < 1$$

También se puede proponer la obtención de la aproximación de las funciones consideradas anteriormente, mediante la *división larga*, utilizada en el siglo XVII por J. Gregory y N. Mercator.

Este procedimiento consiste en hacer la división de un polinomio por otro de grado superior, ordenando los términos de los polinomios en orden creciente según los grados de dicho polinomio:

$$\begin{array}{ll} 1 & \big| \, 1+x \\ \underline{-1-x} & 1-x+x^2-\cdots \\ / - x & \\ \quad \underline{x+x^2} & \\ \quad / + x^2 & \\ \qquad \underline{-x^2-x^3} & \\ \qquad / - x^3 & \\ \qquad \vdots & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 1 & \big| \, 1+x^2 \\ \underline{-1-x^2} & 1-x^2+x^4-\cdots \\ / - x^2 & \\ \quad \underline{x^2+x^4} & \\ \quad / + x^4 & \\ \qquad \underline{-x^4-x^6} & \\ \qquad / - x^6 & \\ \qquad \vdots & \end{array}$$

La primera división la utilizó Mercator en 1670 para obtener el desarrollo de la función *ln*(1 + *x*) de la forma

$$\ln(1+x)=\int_0^x \frac{du}{1+u}=\int_0^x\left(1-u+u^2-\cdots\right)du=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$$

Por la misma época, Gregory había encontrado el desarrollo de la función , utilizando el mismo procedimiento

$$\operatorname{arctg} x=\int_0^x \frac{du}{1+u^2}=\int_0^x\left(1-u^2+u^4-\cdots\right)du=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots$$

Es importante hacer notar que el procedimiento de la *división larga* permite obtener polinomios que aproximan a la función, pero no nos dice nada sobre los valores de *x* para los que la aproximación es válida.

El gran L. Euler, alrededor de 1730, cometió muchos errores en sus trabajos sobre la suma de series, pues él, como los demás matemáticos de su época, no tenía claro el concepto de convergencia de una serie. Según él, puesto que

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$$

haciendo x = -1, se obtenía que 1 - 1 + 1 - 1 + ... = 1/2. Nosotros sabemos que la serie 1 - 1 + 1 - 1 +..., diverge puesto que la sucesión de sumas es 1, 0, 1, 0.... Los alumnos pueden mejorar a Euler previendo que su razonamiento es erróneo, ya que los infinitos términos de la progresión geométrica de razón -1 no se pueden sumar. Estos errores históricos vuelven a evidenciar la prudencia con que se debe manipular los desarrollos en serie de una función.

Todos los casos considerados proporcionan aproximaciones de la función en los alrededores del cero; en la siguiente actividad se obtienen aproximaciones en un entorno de otro punto.

Actividad 3

Observa que las siguientes funciones:

$$f(x)=\frac{1}{1-x} \qquad g(x)=\frac{1}{1+x}$$

pueden escribirse también así

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=\frac{1}{2-x-1}=\frac{1}{2-(x+1)}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{x+1}{2}\right)}$$

$$g(x)=\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2+x-1}=\frac{1}{2-(1-x)}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1-x}{2}\right)}$$

Utiliza esto para obtener otros polinomios distintos a los encontrados en las Actividades 1 y 2 que también puedan ser considerados aproximaciones de esas funciones. ¿Cuáles son ahora los valores de x *para los que es correcta la aproximación?. Comprueba los resultados representando con el ordenador las funciones y sus correspondientes polinomios.*

En este caso se obtiene que

$$\frac{1}{1-x}=\frac{1}{2}+\frac{(x+1)}{4}+\frac{(x+1)^2}{8}+\ldots,$$
$$\text{para} \quad -1<\frac{x+1}{2}<1 \Leftrightarrow -3<x<1$$

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}+\frac{(1-x)}{4}+\frac{(1-x)^2}{8}+\frac{(1-x)^3}{16}+\ldots=$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{(x-1)}{4}+\frac{(x-1)^2}{8}-\frac{(x-1)^3}{16}+\ldots,$$
$$\text{para} \quad -1<\frac{1-x}{2}<1 \Leftrightarrow -1<x<3$$

Podemos razonar en general con los alumnos para ver que se puede encontrar el desarrollo de una función racional cualquiera del tipo

$$f(x)=\frac{m}{px+q}$$

en cualquier punto a<>-q/p. Observaremos en primer lugar que el coeficiente p se puede considerar siempre mayor que cero (si no lo es basta con multiplicar numerador y denominador por -1), entonces

$$\frac{m}{px+q}=\frac{m}{q+pa+p(x-a)}=\frac{\frac{m}{q+pa}}{1-\left[-\frac{p(x-a)}{q+pa}\right]}$$

y la función admite el desarrollo

$$f(x)=\frac{m}{q+pa}-\frac{mp}{(q+pa)^2}(x-a)+$$
$$+\frac{mp^2}{(q+pa)^3}(x-a)^2-\frac{mp^3}{(q+pa)^4}(x-a)^3+\cdots$$

siempre que se verifique

$$-1 < -\frac{p(x-a)}{q+pa} < 1$$

Resolviendo esta inecuación obtenemos el intervalo de convergencia de esta serie geométrica

$$\left|-\frac{p(x-a)}{q+pa} < 1\right| <=> |p(x-a)| < |q+pa| <=>$$
$$<=> -|q+pa| < px - pa < |q+pa|$$

es decir

$$a - \frac{|q+pa|}{p} < x < a + \frac{|q+pa|}{p}$$

Este razonamiento tan elemental nos permite obtener el desarrollo de cualquier función racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

cuyo denominador sea un polinomio que solo tenga raíces reales simples, pues basta con hacer la división indicada

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & C(x) \end{array} \qquad f(x) = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

y descomponer posteriormente la función *R(x)/Q(x)* en suma de fracciones simples. Cada una de ellas nos proporciona un desarrollo en serie de potencias con su correspondiente intervalo de convergencia. Cuando *x* pertenece a la intersección de todos ellos, las series se pueden sumar término a término y al sumar *C(x)*, que está formado por un número finito de monomios distintos de cero, obtendremos el desarrollo definitivo para cualquier *a* del dominio de la función.

También se puede presentar algún caso en el que la aproximación de la función sea válida para cualquier valor de *x*, por ejemplo

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Una comprobación con el ordenador sería suficiente en 4º de la ESO, pero si los alumnos son de Bachillerato podría además encontrarse el desarrollo de la función a partir del binomio de Newton y de la igualdad

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

En efecto, el binomio

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

se puede escribir de la forma

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{x}{n} + \binom{n}{2}\frac{x^2}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{x^3}{n^3} + \cdots \binom{n}{n}\frac{x^n}{n^n}$$

es decir

$$1 + x + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{x^3}{3!} + \ldots +$$
$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{x^n}{n!}$$

al hacer tender $n \to \infty$ todos los paréntesis tienden a uno y obtenemos que

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Este razonamiento aparece en un trabajo de N. Abel (1802-1829) con la matización *suponiendo que la serie fuera convergente* y es el mismo que llevó a Euler a definir el número e de la forma

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

Nivel 2. (Primer curso de Bachillerato)

Objetivos: Iniciar la construcción del esquema conceptual *Toda función continua en un intervalo [a, b] se puede aproximar por polinomios*. Encontrar polinomios de grado n que aproximen funciones n veces derivables (Polinomios de Taylor).

Conocimientos previos: Nivel 1. Derivada de una función en un punto. Utilización de la derivada para el estudio de propiedades locales de una función.

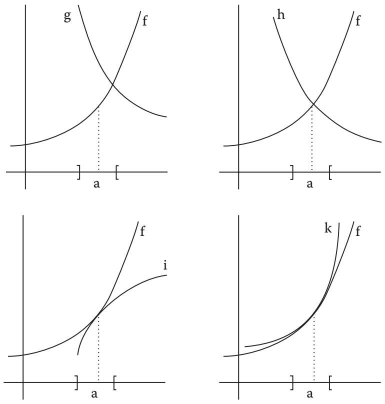
Materiales: Ordenador (con programa Derive) o calculadora gráfica.

En este nivel nos enfrentaremos al problema general. *Dada una función cualquiera ¿se pueden encontrar polinomios que la aproximen?*

Actividad 4

a) Observa estas gráficas y di cuál de las funciones g(x), h(x), j(x) *o* k(x) *te parece que aproxima mejor a la función* f(x) *en los alrededores del punto* a. *Describe los factores que han influido en tu elección.*

b) Estudia el comportamiento de las funciones en a *(valor, crecimiento, forma...). ¿Qué conclusiones sacas?*



Intuitivamente los alumnos eligen sin ninguna duda la función *k(x)* y afirman que la función *g(x)* es la que *menos se parece* a la *f(x)* en las proximidades del punto *a*. Para empezar los valores asignados por *f(x)* y *g(x)* son distintos en *a*, además *f(x)* es creciente, *g(x)* es decreciente y por si fuera poco, tienen distinta concavidad. La función *h(x)* coincide en *a* con la *f(x)* pero, igual que en el caso anterior, se diferencian en su crecimiento y concavidad, es decir en el valor de su primera y segunda derivada en el punto *a*. La tercera función considerada, *i(x)* tiene a su favor que coincide con *f(x)* en *a*, es decir, *f(a)= i(a)*, y comparten la misma recta tangente en ese punto, por tanto *f'(a)= i'(a)*, pero aunque ambas son crecientes, no tienen el mismo tipo de concavidad. Esta claro que la función *k(x)* elegida, cumple *f(a)= k(a)*, *f'(a)= k'(a)* y en el caso de que los valores de *f''(a)* y *k''(a)* fueran distintos, desde luego son del mismo signo.

Surgen inevitablemente las preguntas: *¿Qué condiciones debería cumplir una función que fuera todavía mejor aproximación? ¿Cuál sería el polinomio de grado n que mejor aproxima a la función f(x)?*

Para contestar a estas cuestiones podemos considerar, por ejemplo, un polinomio de grado 2, $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, y empezar observando que por sucesivas divisiones entre $x - a$, se puede escribir de la forma $b_0 + b_1(x - a) + b_2(x - a)^2$, con $b_0 = P_2(a)$, sea cual sea el valor de a.

Luego si esperamos que se cumpla $f(a) = P_2(a)$, debemos elegir $b_0 = f(a)$, y el método clásico de determinación de coeficientes nos lleva a elegir

$$b_1 = f'(a) \quad b_2 = \frac{f''(a)}{2!}$$

para que se cumpla también $f'(a) = P'_2(a)$ y $f''(a) = P''_2(a)$.

Si el razonamiento se hubiera hecho en general habríamos obtenido el polinomio

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

es decir, el polinomio de Taylor de grado *n* en el punto *a*, y la forma en que lo hemos encontrado garantiza su unicidad. Además es obvio que el polinomio de Taylor de una función polinómica es el mismo polinomio que interviene en su expresión algebraica.

Recordemos que estos polinomios fueron encontrados por B. Taylor (1715) a partir de otros muy conocidos en su época, los polinomios de interpolación de Newton.

Actividad 5

Escribe los polinomios de Taylor de grado 1, 2, 3... en el punto de las funciones de las actividades 1 y 2 y compara con las aproximaciones que se obtenían allí.

Encuentra los polinomios de Taylor de la función

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

en a=-1 *y de*

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

en a=1 *y compáralos con las aproximaciones dadas en la actividad* 3.

Con esta actividad queda de manifiesto que, desde el principio, hemos estado hablando de los polinomios de Taylor. Podemos terminar proponiendo a los alumnos otras funciones para que encuentren sus correspondientes aproximaciones. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOURBAKI, N., (1976): *Elementos de historia de las matemáticas*, Alianza Universidad, Madrid.

BOYER, C.B., (1986), *Historia de la matemática*, Alianza Universidad Textos, Madrid.

COLLETE, J.P, (1985): *Historia de las matemáticas (I y II)*. Siglo XXI de España Editores S.A., Madrid.

KLINE, M., (1992): *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, Alianza Universidad, Madrid.

PERALTA, J. (1995): *Principios didácticos e históricos para la enseñanza de la matemática*. Madrid: Huerga y Fierro.

REY PARTOR, J. y BABINI, J. (1985): *Historia de la Matemática (Vol. 1 y 2)*, Editorial Gedisa, Barcelona.

RICO, L. (1997): *Los organizadores del currículo de matemáticas, en la Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*, Barcelona, Horsori.

SUMA 45
Febrero 2004, pp.35-40

Viaje a la teoría analítica de números desde un problema elemental

El trabajo que presentamos es una experiencia desarrollada por los autores y que consiste en trabajar a diferentes niveles (Secundaria, Bachillerato y Universidad) los conceptos que, de forma natural, aparecen al utilizar la generalización como estrategia de resolución de problemas. Con esta estrategia y resolviendo problemas de los libros de texto de Bachillerato, se estudian algunas propiedades de la Teoría de Números. Esta experiencia permite, además, realizar un trabajo interdisciplinar física-matemáticas.

This essay accounts for a practical experience carried out by its authors at different levels (Secondary, both Compulsory and Non-Compulsory, and University studies) and consists of dealing with concepts which show up naturally when generalization is used as the approach to problem solving. Some of the properties of the Number Theory are here researched through this approach as well as through solving problems in Non-Compulsory Secondary Education textbooks. Besides, this experience allows for physics and mathematics cross-curricular work.

Hay diferentes formas de presentar la Matemática tanto a nivel docente como de investigación. Sin duda, la presentación rigurosa y formal de los resultados (hasta de los más fecundos) suele resultar poco agradable a ojos de los estudiantes (incluidos los más aventajados), e incluso el matemático profesional agradece la exposición de la motivación que hay siempre detrás, subyaciendo a cada resultado abstracto. Así por ejemplo, al introducir en el aula la función logarítmica, tenemos dos opciones: a partir de su definición como función inversa de la función exponencial, o bien introducirla de forma natural a partir de un problema motivador, como puede ser el ejemplo histórico desde el cual surge la misma (Boyer, pág. 396).

Muy buenos ejemplos en este sentido se encuentran a partir de la generalización de problemas sencillos. En efecto, en numerosas ocasiones, la generalización de un problema elemental conduce a estudiar problemas de naturaleza compleja que se adentran en terrenos propios de la matemática superior como la Teoría Analítica de Números, la Teoría de Juegos… Esta forma de actuar permite trabajar, en todos los niveles educativos, una de las estrategias más importantes que se enseñan en la *Resolución de problemas*: llegar a la generalización a partir de casos particulares.

Las páginas que siguen de este trabajo presentarán la generalización de un problema, que resultará familiar en su plan-teamiento básico a aquellos lectores que desarrollan su trabajo como profesores de matemáticas en Bachillerato. Este artículo pretende:

1. Potenciar una parte del quehacer matemático a nivel docente consistente en desarrollar los programas de matemáticas a partir de problemas que motiven los aspectos teóricos que se introducen.

2. Proponer un problema que puede ser tratado y aprovechado en distintos niveles educativos: en el instituto para estudiar las implicaciones físicas que puede tener el carácter irracional de un número y a nivel universitario para estudiar el carácter irracional de ciertos valores de la función trigonométrica coseno. En este último caso, se invita al lector a consultar el magnífico libro (Cilleruelo-Córdoba) donde en el teorema 6.11 de la página 123 se caracterizan los valores irracionales de la función $\tan(\pi x/4)$, un problema parecido, pero en absoluto equivalente, al que trataremos nosotros.

Juan Carlos Cortés López
Universidad Politécnica de Valencia.
Gema Calbo Sanjuán
IES Els Évols, L'Alcúdia, Valencia.

Planteamiento y reslución del problema original.

El enunciado original del problema es:

Dos móviles A *y* ***B*** *parten al mismo tiempo de un vértice (en la figura 1, el vértice es el 1) de un cuadrado de lado l con velocidad constante e idéntica. El móvil* A *recorre el perímetro del cuadrado (en sentido antihorario en la figura 1), mientras que el móvil B realiza el trayecto por la diagonal. ¿En qué instante de tiempo coincidirán ambos móviles?*

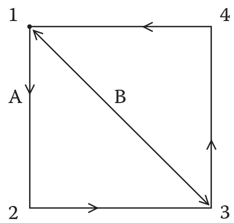


Figura 1. Problema original: movimiento sobre un cuadrado

Está claro que, de encontrarse los móviles lo harán en los vértices 1 o 3, y al partir del origen en el mismo instante y con la misma velocidad constante, la condición de encuentro es que coincidan sus espacios recorridos. Las distancias recorridas por el móvil *A* en sus diferentes pasos por el vértice 3 siguen la progresión aritmética de primer término *2l* y diferencia *4l*: {*2l, 6l, 10l, 14l...*}; mientras que las distancias recorridas por el móvil *B* en sus diferentes pasos por el vértice número 3 siguen la progresión aritmética de primer témino $\sqrt{2}l$ y diferencia $2\sqrt{2}l : \left\{\sqrt{2}l, 3\sqrt{2}l, 5\sqrt{2}l, 7\sqrt{2}l, \ldots\right\}$, por lo que habrá encuentro en el vértice 3 si estas dos sucesiones tienen algún término en común, es decir, si:

$$\exists m,n \in IN \cup \{0\} : (2+4m)l = (1+2n)\sqrt{2}l \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{2+4m}{1+2n} \quad (1)$$

La irracionalidad del número $\sqrt{2}$ nos indica que esta condición no puede darse, y por lo tanto los móviles nunca podrán encontrarse en el vértice 3.

Razonándo del mismo modo se llega a que la condición de encuentro en el vértice 1 es:

$$\exists m,n \in IN \cup \{0\} : (4m)l = (2n)\sqrt{2}l \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{2m}{n} \quad (2)$$

Por el mismo argumento que antes, tampoco en este caso podrán encontrarse los móviles.

Camino de la generalización

Proponemos ahora generalizar este sencillo problema. Para ello tenemos distintas opciones. Caminar hacia una generalización matemática de sabor geométrico, en el siguiente sentido: estudiar el problema con otros polígonos regulares, continuando este análisis con el pentágono, hexágono… o realizar una generalización física de sabor cinemático, en el siguiente sentido: estudiar el problema suponiendo que los móviles no parten en el mismo instante, o que llevan movimientos rectilíneos uniformes con distinta velocidad, o que llevan movimientos rectilíneos uniformemente acelerados... y encontrar condiciones sobre las magnitudes físicas (velocidad, aceleración...) que caractericen cuándo habrá encuentro. La riqueza interdisciplinar de este problema se pone de manifiesto aquí (y lo seguirá haciendo en lo que sigue, pero en el contexto matemático), y pensamos que lo hace todavía más interesante para llevarlo al aula, sobre todo con aquellos alumnos que cursan la asignatura de Física.

Nosotros en este trabajo abordaremos la generalización matemática que nos brindará la oportunidad de realizar un viaje a través de la matemática a distintos niveles de enseñanza: secundaria, bachillerato o incluso una asignatura propia de la licenciatura de Matemáticas como es la Teoría de Números. Como veremos, y dependiendo del estrato educativo en el que desarrollemos este problema-investigación, tendremos ocasión de tratar diferentes temáticas: números irracionales, propiedades geométricas de los polígonos, trigonometría, funciones, sucesiones aritméticas, estrategias de resolución de problemas, números complejos...

Empecemos ya abordando el problema para el caso del pentágono. Es suficiente observar la figura 2, para comprender el nuevo enunciado.

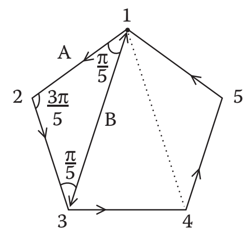


Figura 2. Formulación del problema sobre un pentágono

En principio, tiene sentido que los móviles se puedan encontrar en los vértices {1,3} y {1,4}. Analizaremos en detalle el primer caso, pues como luego veremos el otro caso es muy sencillo de tratar conociendo la solución del primero.

En primer lugar necesitamos calcular el valor de la longitud d de la diagonal que une los vértices 1 y 3. Para ello utilizamos que el ángulo común de un pentágono regular es $3\pi/5$ radianes, y que por la simetría del polígono, el triángulo de vértices numerados 123 es isósceles, y en consecuencia los ángulos de los vértices 1 y 3 de dicho triángulo deben ser $\pi/5$ radianes. Basta ahora aplicar el teorema del coseno a dicho triángulo para calcular *d*:

$$d^2 = 2l^2\left(1-\cos\frac{3\pi}{5}\right) \Rightarrow$$

$$d = 2l\sqrt{\frac{1-\cos\frac{3\pi}{5}}{2}} = 2l\,\mathrm{sen}\frac{3\pi}{10} = 2l\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10}\right) = 2l\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

donde hemos aplicado las fórmulas:

$$\mathrm{sen}\ \alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}};\ \mathrm{sen}\ \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

Introduciremos ahora la conocida representación trigonométrica del número aúreo:

$$\Phi = 2\cos\frac{\pi}{5}$$

(siendo $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$) con lo cual: $d = l\Phi$

Así, razonando como en el caso del cuadrado se llega a que la condición de encuentro en el vértice 3 es

$$\exists m,n \in IN \cup \{0\} : (2+5m)l = (1+2n)\Phi l \Leftrightarrow \Phi = \frac{2+5m}{1+2n} \quad (3)$$

La conocida irracionalidad del número de oro (heredada de la de $\sqrt{5}$) nos indica que los móviles nunca se encontrarán en el vértice 3. Por la misma razón los móviles nunca se encontrarán en el vértice 1, pues debería cumplirse que

$$\exists m,n \in IN \cup \{0\} : (5m)l = (2n)\Phi l \Leftrightarrow \Phi = \frac{5m}{2n} \quad (4)$$

lo cual es imposible.

El otro caso, es la posible coincidencia de los móviles en los vértices {1,4}. Por la simetría del pentágono regular se deduce que la longitud de la diagonal que une los vértices 1 y 4 es también $d = l\Phi$, por lo tanto, la imposibilidad de encuentro también en este caso se deduce cambiando el sentido de recorrido (ahora horario) del móvil *A*, ya que por simetría, el problema es el mismo que el resuelto al estudiar la posibilidad de encuentro en los vértices {1,3}.

La técnica utilizada para resolver el problema con el pentágono es de sencilla generalización y permite encarar ya el caso de un polígono regular de *k* lados. Representamos en la figura 3 el enunciado del problema.

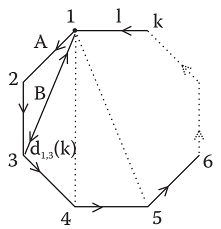


Figura 3. Formulación general del problema

Por analogía a los casos particulares anteriores, analizamos el caso en el que el encuentro puede darse en los vértices {1,3}. Necesitamos previamente calcular el valor $d_{1,3}(k)$ de la longitud de la diagonal que une estos vértices. El argumento es el mismo que para el pentágono:

$$\left(d_{1,3}(k)\right)^2 = 2l^2\left(1-\cos\left(\frac{k-2}{k}\pi\right)\right) \Rightarrow$$

$$d_{1,3}(k) = 2l\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{k-2}{k}\pi\right)}{2}} = 2l\,\mathrm{sen}\left(\frac{k-2}{2k}\pi\right) = 2l\cos\frac{\pi}{k}$$

Por lo tanto existirá coincidencia de ambos móviles en el vértice 3 si se cumple que

$$\exists m,n \in IN \cup \{0\} : (2+mk)l = (1+2n)2l\cos\frac{\pi}{k} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{k} = \frac{2+mk}{2(1+2n)} \quad (5)$$

y se dará el encuentro en el vértice 1 si se verifica:

$$\exists m,n \in IN \cup \{0\} : (mk)l = (2n)2l\cos\frac{\pi}{k} \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{k} = \frac{mk}{4n} \quad (6)$$

Antes de continuar debería comprobarse que estas condiciones coinciden para $k = 4$ y $k = 5$ con las establecidas anteriormente para el estudio del problema sobre el cuadrado y el pentágono regular, respectivamente. Si en (5) hacemos $k = 4$, obtenemos la condición (1); si en (6) hacemos $k = 4$, obtenemos la condición (2). Si en (5) hacemos $k = 5$, obtenemos la condición (3); si en (6) hacemos $k = 5$, obtenemos la condición (4).

Observemos que la respuesta a la generalización del problema nos conduce a estudiar una cuestión muy general perteneciente a la Teoría Analítica de Números:

¿Para qué valores de k, cos(π/k) *es un número racional?* (7)

Algunos casos particulares de especial interés

Por el interés docente que tiene el estudio del hexágono, el heptágono o el octógono regulares, nos detendremos en su análisis, ya que, al igual que el pentágono nos permite introducir una de las constantes más importantes que se presenta en la naturaleza y en el arte: el número de oro, veremos que el octógono nos permitirá introducir la proporción cordobesa usada en la construcción de mezquita de Córdoba (De la Hoz). El estudio de estos polígonos regulares también posibilita la presentación de algunas técnicas polinómicas sencillas e interesantes para estudiar la irracionalidad de algunos números expresados en forma trigonométrica.

Hemos visto antes que la condición de encuentro en los vértices {1,3} para el hexágono está caracterizada en términos de la racionalidad del valor

$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

por lo que no podrá darse nunca la coincidencia de ambos móviles en dichos vértices.

Sin embargo, para el caso del heptágono el problema es más complicado, pues no es conocido el valor de *cos(π/7)*. En realidad no necesitamos saber tanto, basta conocer si es racional o irracional. Una forma de averiguarlo es la siguiente: construimos un polinomio cuyas raíces sean *cos(2π/7)*, *cos(4π/7)* y *cos(6π/7)*, por ejemplo,

$$p(x)=\left(x-\cos\frac{2\pi}{7}\right)\cdot\left(x-\cos\frac{4\pi}{7}\right)\cdot\left(x-\cos\frac{6\pi}{7}\right)$$

Observemos que llamando

$$\alpha=\cos\frac{2\pi}{7}+i\cdot\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}$$

y utilizando la fórmula de De Moivre y que *cos(2π - x) = cos x*, *sen(2π - x) = -sen x* se tiene

$$\cos\frac{2\pi}{7}=\frac{\alpha+\alpha^6}{2}$$
$$\cos\frac{4\pi}{7}=\frac{\alpha^2+\alpha^5}{2}$$
$$\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{\alpha^3+\alpha^4}{2}$$

por lo que

$$p(x)=\left(x-\frac{\alpha+\alpha^6}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{\alpha^2+\alpha^5}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{\alpha^3+\alpha^4}{2}\right)=$$
$$=x^3-\frac{\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6}{2}x^2+$$
$$+\frac{(\alpha+\alpha^6)(\alpha^2+\alpha^5)+(\alpha+\alpha^6)(\alpha^3+\alpha^4)+(\alpha^2+\alpha^5)(\alpha^3+\alpha^4)}{4}x-$$
$$-\frac{(\alpha+\alpha^6)(\alpha^2+\alpha^5)(\alpha^3+\alpha^4)}{8}$$

Ahora utilizando que se cumple $\alpha^7 = 1$, se tiene que

$$1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^6=\frac{\alpha^7-1}{\alpha-1}=0\Rightarrow\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^6=-1$$

y que $\alpha^t = \alpha^r$ siendo r el resto de dividir t por 7, se llega a la simplificación

$$p(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}$$

Por construcción sabemos que las raíces de *p(x)* son los números reales: *cos(2π/7)*, *cos(4π/7)* y *cos(6π/7)*. Por otra parte, sabemos que, de tener *p(x)* raíces racionales, éstas deben ser algunos de los valores

$$\left\{\pm1,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{4},\pm\frac{1}{8}\right\}$$

Sin embargo, es inmediato comprobar que ninguno de estos valores es cero de *p(x)*, por lo tanto se deduce que *cos(2π/7)*, *cos(4π/7)* y *cos(6π/7)* son números irracionales.

Ahora es sencillo ver que *cos(π/7)* es irracional. En efecto, supongamos, por reducción al absurdo, que

$$\cos\frac{\pi}{7}=\frac{a}{b}\in Q$$

(siendo Q el conjunto de los números racionales), entonces aplicando la fórmula del coseno del ángulo doble:

$$\cos 2\alpha = 2(\cos\alpha)^2 - 1$$

llegamos a una contradicción:

$$\cos\frac{2\pi}{7}=2\left(\cos\frac{\pi}{7}\right)^2-1=2\frac{a^2}{b^2}-1\in Q$$

y antes hemos probado que

$$\cos\frac{2\pi}{7}\notin Q$$

Todo ello prueba que en el caso del heptágono los móviles nunca coincidirán ni en el vértice 1 ni en el 3.

El análisis del problema en el caso del octógono nos conduce a caracterizar la respuesta en términos de la irracionalidad del número real *cos(π/8)*. En este caso, sí es muy sencillo calcular la expresión radical de dicho valor trigonométrico, basta aplicar la fórmula del coseno del ángulo mitad:

$$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

que como es sencillo probar (por reducción al absurdo) hereda su carácter irracional del número $\sqrt{2}$, por lo que tampoco coincidirán los móviles en este caso.

Para terminar, podemos aprovechar el contexto para introducir el número cordobés (también irracional):

$$C=\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

a través de la relación:

$$\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}C$$

y conectarlo con su presencia en el arte musulmán en la arquitectura de la ciudad de Córdoba (Aranda y otros).

Solución del problema general

Abordamos en esta sección la respuesta a la solución del problema general que, como ya se señaló, se basa en responder la cuestión planteada en (7). Así, los móviles sólo se encontrarán en los polígonos regulares cuyo número de lados k sea tal que *cos(π/k)* sea racional. Adentrándonos ya, en una pregunta propia de la Teoría Analítica de Números, a continuación veremos que:

$$\cos\frac{\pi}{k} \text{ es racional} \Leftrightarrow \text{n} = 1,2,3 \qquad (8)$$

por lo que la respuesta al problema de los móviles es que nunca se podrán encontrar.

En efecto, si

$$k \in \{1,2,3\} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{k} \in \left\{-1,0,\frac{1}{2}\right\}$$

Veamos que en cualquier otro caso, los valores son irracionales. Para ello dividiremos el conjunto de los naturales que nos resta por analizar,

$$A = \{k \in IN : k > 3\}$$

en cuatro subconjuntos disjuntos:

$A_1 = \{k > 3 : k \text{ impar}\}$
$A_2 = \{k > 2, \text{ par} : k = m \cdot 2^n, m \text{ impar y } m > 3\}$
$A_3 = \{k > 2, \text{ par} : k = 2^n\}$
$A_4 = \{k > 2, \text{ par} : k = 3 \cdot 2^n\}$

Obsérvese que

$$A = \bigcup_{i=1}^{4} A_i$$

Analicemos cada caso.

Caso 1
Supongamos que $k \in A_1$ y consideremos *cos(π/k)*. Por la fórmula de De Moivre:

$$\left(\cos\frac{\pi}{k} + i\cdot\sin\frac{\pi}{k}\right)^k = -1 \qquad (9)$$

Por el desarrollo del binomio de Newton: (10)

$$\left(\cos\frac{\pi}{k} + i\cdot\sin\frac{\pi}{k}\right)^k = \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}\left(\cos\frac{\pi}{k}\right)^{k-r}\left(i\cdot\sin\frac{\pi}{k}\right)^r \qquad (10)$$

De (9) y (10), se obtiene (11)

$$\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}\left(\cos\frac{\pi}{k}\right)^{k-r}\left(i\cdot\sin\frac{\pi}{k}\right)^r = -1$$

La parte real del sumatorio corresponde a los valores de r pares: $r = 2k$, así tomando partes reales en (11), resulta

$$\sum_{r=0}^{\frac{k}{2}}\binom{k}{2r}\left(\cos\frac{\pi}{k}\right)^{k-2r}\left(i\cdot\sin\frac{\pi}{k}\right)^{2r} = -1 \qquad (12)$$

y como

$$\left(i\cdot\text{sen}\frac{\pi}{k}\right)^{2r} = \left(\left(i\cdot\text{sen}\frac{\pi}{k}\right)^2\right)^r = \left(-\left(\text{sen}\frac{\pi}{k}\right)^2\right)^r = \left(\left(\cos\frac{\pi}{k}\right)^2 - 1\right)^r$$

sustituyendo esto en (12)

$$\sum_{r=0}^{\frac{k}{2}}\binom{k}{2r}\left(\cos\frac{\pi}{k}\right)^{k-2r}\left(\left(\cos\frac{\pi}{k}\right)^2 - 1\right)^r = -1$$

Llamando $x = \cos(\pi/k)$, esta última expresión se escribe como

$$\sum_{r=0}^{\frac{k}{2}}\binom{k}{2r}x^{k-2r}\left(x^2-1\right)^r + 1 = 0$$

El término independiente de esta ecuación polinómica en x es 1. Como se buscan soluciones $x = \cos(\pi/k)$ racionales de esta ecuación, es decir, del tipo $x = a/b$, con enteros ($b \neq 0$), se debe cumplir que a/b divida al término independiente, i.e., que a divida a 1, luego $a = \pm 1$. Así, $x = \cos(\pi/k) = \pm(1/b)$. Pero, si $k > 3$, se tiene que $\cos(\pi/k) > 1/2$, luego $b = 1$, y en consecuencia $\cos(\pi/k) = 1$, de lo cual se deduce que $\pi/k = 0$, que conduce a la contradicción: $\pi = 0$. Por lo tanto, en el caso en que $k \in A_1$, se tiene $\cos(\pi/k) \notin Q$.

Caso 2
Supongamos que $k \in A_2$. Entonces aplicando la fórmula del coseno del ángulo doble tenemos: (13)

$$\begin{aligned}\cos 2\frac{\pi}{m\cdot 2^k} &= 2\left(\cos\frac{\pi}{m\cdot 2^k}\right)^2 - 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos\frac{\pi}{m\cdot 2^{k-1}} &= 2\left(\cos\frac{\pi}{m\cdot 2^k}\right)^2 - 1\end{aligned} \qquad (13)$$

Por tanto, si $\cos\frac{\pi}{m\cdot 2^k}$ es racional, aplicando (13) se deduce que $\cos\frac{\pi}{m\cdot 2^{k-1}}$ también es racional, y aplicando reiteradamente este razonamiento de descenso en el exponente de 2, se llegará a *cos(π/m)* es racional, siendo m impar, pero esto es imposible, pues contradice la conclusión obtenida en el caso 1.

Caso 3
Supongamos que $k \in A_3$. Entonces, aplicando como en el caso 2 la fórmula del coseno del ángulo doble, tenemos que si

$cos(\pi/2^k)$ es racional, entonces $cos(\pi/2^{k-1})$ también es racional, este razonamiento de descenso nos conduce a la contradicción:

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ es racional.}$$

Caso 4

Supongamos que $k \in A_4$. Podemos aprovechar de nuevo el razonamiento hecho del caso 2: si

$$\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^k}$$

es racional, entonces

$$\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^{k-1}}$$

es racional, y en particular, a través del razonamiento recurrente llegaremos a que

$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

debe ser racional, lo que constituye un absurdo, debido al carácter irracional de $\sqrt{3}$.

Esto completa la prueba de (8) y justifica la respuesta antes dada relativa al problema de los móviles.

Conclusiones

Este trabajo pretende unirse a la línea de otros, como los de Aledo (2000) y Cortés (2002) que tienen como origen un problema sencillo, y que a través del proceso natural de la generalización permiten profundizar, hasta niveles a priori insospechados, en otras ramas de las Matemáticas. En este sentido, pretende ser una experiencia concreta, susceptible de ser aprovechada en diferentes niveles educativos, desde la enseñanza secundaria hasta la enseñanza universitaria, para introducir de forma motivada aspectos teóricos como pueden ser el estudio genérico de los números irracionales o la caracterización de ciertos valores de la función trigonométrica coseno. Desde el punto de vista interdisciplinar, puede servir para mostrar las consecuencias físicas que puede tener la característica abstracta y genuinamente matemática de la irracionalidad de un número.

Para terminar, subrayamos que dejamos abierto el problema en varias líneas. Desde el punto de vista matemático, puede abordarse el estudio del problema cuando el móvil *B*, se mueve por la diagonal que une los vértices {1,4}, {1,5} ... Obsérvese que la cuestión es tratable a partir de los desarrollos dados en este trabajo, pero que por simetría, no es necesario llegar a estudiar el caso en que *B* viaja por la diagonal formada por {1, k – 1}, pues es el mismo estudio que el que hemos hecho nosotros entre {1,3}. Como se señaló antes, desde la óptica de la cinemática podemos suponer una gran variedad de casuísticas en función del tipo de movimiento que lleve cada móvil. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALEDO SÁNCHEZ, J.A. y CORTÉS LÓPEZ, J.C. (2000): *Una aplicación de una idea arquimediana*, Puig Adam, nº 59, 58-68.

ARANDA BALLESTEROS F.D., DOMINGUEZ RUBIO I. y FERNÁNDEZ MORALES J. (1995): *La proporción cordobesa, algunas actividades para el aula*, VII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática "Thales", 85-96. Córdoba.

BOYER C.B. (1986): *Historia de la Matemática*, Ed. Alianza Universidad. Madrid.

CORTÉS LÓPEZ, J.C., CALBO SANJUAN, G. Y LÓPEZ PELAYO, F. (2002): *Desigualdades para funciones f que satisfacen la ecuación funcional f(x,y)=g(f(x),f(y))*, Puig Adam, nº 59, 46-51.

DE LA HOZ ARDERIUS R. (1995): *La proporción cordobesa*, VII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática Thales, 67-84. Córdoba.

SUMA 45
Febrero 2004, pp.41-52

Efectos del *autismo temático* sobre el estudio de la Geometría en Secundaria*

II. La clasificación de los cuadriláteros convexos

En este trabajo consta de dos partes. En esta segunda parte del trabajo se pone de manifiesto que la clasificación de los cuadriláteros convexos, tal como se estudia en la Secundaria, constituye un ejemplo prototípico de cuestión matemática completamente desconectada de los problemas geométricos relativos a la determinación y construcción de figuras que le podrían dar sentido. Se proponen diversos criterios alternativos de clasificación y se explica en qué forma cada una de las nuevas clasificaciones modificaría la organización global del currículum de geometría.

The present work is being published in two parts. This is the second part, which makes clear that the classification of convex quadrilaterals as studied at secondary school constitutes a prototypical example of a mathematical question completely disconnected from the geometrical problems relating to the determination and construction of figures that could give it sense. Some alternative classification criteria are being proposed and the way they could modify the general organisation of the geometrical curriculum is being developed.

En la primera parte de este artículo se utilizó la siguiente jerarquía de niveles de codeterminación didáctica (Chevallard, 2001):

Sociedad → Escuela → Disciplina → Área → Sector → Tema → Cuestión

Esta cadena hace referencia a los sucesivos niveles de estructuración, tanto de las organizaciones matemáticas (lo que se estudia) como de las organizaciones didácticas (las formas de organizar el estudio), que van desde el nivel más *genérico*, la sociedad, al más *específico*, una cuestión matemática concreta que se propone para ser estudiada.

A partir de este esquema se dice que una *cuestión matemática* puede estudiarse *con sentido* en la Escuela, si:

(1) Proviene de las cuestiones que la Sociedad propone que se estudien en la Escuela.

(2) Aparece en ciertas situaciones que llamaremos *umbilicales* porque están en la raíz central de las matemáticas.

(3) Conduce a alguna parte, esto es, está relacionada con otras cuestiones que se estudian en la Escuela sean éstas matemáticas, lingüísticas, biológicas o musicales.

En caso contrario se dice que la cuestión carece de *sentido* porque ha desaparecido la *razón de ser* de su estudio en la Escuela. También se dice que es una cuestión encerrada en sí misma (o *muerta*) porque se ignora el *por qué* y el *para qué* de su estudio escolar. Resulta, en resumen, que la *razón de ser* del estudio de una cuestión depende de su conexión con todos los niveles de organización.

Se llama *autismo temático* al fenómeno didáctico que se manifiesta en el encierro de la institución escolar (currículum, documentos oficiales y libros de texto) en el *nivel temático* y al que, como tal fenómeno, el profesor también está sujeto. Se produce así una escisión entre *lo matemático* y *lo pedagógico*, entendido como el ámbito de actuación del profesor.

*Este trabajo ha sido realizado en el marco del proyecto BSO2000-0049 de la DGICYT. Una primera versión del mismo ha sido publicada en Gascón (2003). Agradezco al editor, Emilio Palacián, las facilidades que ha dado para que este texto pueda publicarse en SUMA.

La primera parte de este artículo se publicó en Suma 44.

Josep Gascón
Universitat Autònoma de Barcelona
Departament de Matemàtiques
gascon@mat.uab.es

Sociedad → Escuela → [Disciplina → Área → Sector] → [Tema → Cuestión]

Ámbito de "lo matemático" — *Ámbito de actuación del profesor*

La principal conclusión de la primera parte de este artículo puede enunciarse como sigue: el autismo temático provoca la *desaparición escolar de las razones de ser* (del *por qué* y el *para qué*), no sólo de muchas organizaciones matemáticas enseñadas en el nivel temático, sino incluso de ciertos sectores, como la geometría analítica y hasta de áreas completas de la matemática, como la propia geometría.

Desaparición escolar de la razón de ser de la clasificación de los cuadriláteros

En esta segunda parte de este artículo me propongo analizar con cierto detalle un segundo ejemplo de la incidencia del *autismo temático* sobre el estudio actual de la geometría en Secundaria. Analizaré cómo se estudia la cuestión de la *clasificación de los cuadriláteros convexos* en la E.S.O. y mostraré que se ha perdido completamente la razón de ser (el *por qué* y el *para qué*) del estudio de esta cuestión. Sin pretender dar una explicación definitiva ni encontrar las causas últimas de los fenómenos didácticos indeseables que surgen en el estudio escolar de los tipos de cuadriláteros, señalaré brevemente las relaciones que existen entre dichos fenómenos y el autismo temático. Más adelante mostraré otras maneras posibles de acceder al estudio de la clasificación de los cuadriláteros que permiten recuperar el sentido de la OM generada en torno a dicha cuestión.

La *clasificación de los cuadriláteros convexos*, tal como se estudia en Secundaria, constituye un ejemplo paradigmático de cuestión que surge en el nivel temático (en el tema *tipos de polígonos*) completamente desconectada de las situaciones que le podrían dar *sentido*. En efecto, las citadas clasificaciones se reducen a meras *taxonomías* completamente ajenas a las cuestiones geométricas que aparecen en las *situaciones umbilicales* de *determinación y construcción de figuras* y, por tanto, sin ninguna relación con cuestiones tales como: ¿Cuáles son los elementos que determinan un tipo determinado de figuras?, ¿Existen diferentes sistemas de elementos que determinan el mismo tipo de figuras?, ¿Cuál de ellos es el más adecuado para utilizarlo en determinada situación de construcción?

> Así, por ejemplo, los paralelogramos pueden caracterizarse, dentro de la clase de cuadriláteros, de diferentes maneras equivalentes: (1) Por tener los dos pares de lados opuestos iguales; (2) Por tener dos lados opuestos iguales y paralelos; (3) Por tener los dos pares de ángulos opuestos iguales (Puig Adam, 1947, pp. 66-67).

Es obvio que en cada situación en la que se trata de construir una figura geométrica de la que forme parte un paralelogramo deberá utilizarse aquella manera de caracterizar los paralelogramos que sea la más pertinente, en función de los datos conocidos y de las restricciones que imponga la situación en cuestión.

Las clasificaciones de los cuadriláteros que aparecen en los textos de Secundaria se basan en el criterio del *paralelismo de los lados* (en algunos casos se añade también el criterio de la perpendicularidad de lados) y en el hecho de que los lados tengan o no tengan la *misma longitud* (también se usa, en ocasiones, la amplitud de los ángulos).
Por regla general los cuadriláteros se clasifican, en Secundaria, en tres grandes clases (ver, por ejemplo, el texto de De la Haza, Marqués y Nortes, 2002):

> *Una* cuestión matemática *puede estudiarse con* sentido *en la Escuela, si proviene de las cuestiones que la sociedad propone que se estudien en la escuela, aparece en ciertas situaciones que llamaremos* umbilicales *porque están en la raíz central de las matemáticas, o bien si conduce a alguna parte, esto es, está relacionada con otras cuestiones que se estudian en la Escuela sean éstas matemáticas, lingüísticas, biológicas o musicales.*

(1) *Trapezoides* (no tienen lados paralelos).

(2) *Trapecios* (tienen dos lados paralelos).

(3) *Paralelogramos* (tienen los lados paralelos dos a dos).

A su vez los *Trapecios* de clasifican en tres subclases:

(2.1) *Trapecio rectángulo* (tiene un ángulo recto).

(2.2) *Trapecios isósceles* (tiene los dos lados no paralelos de la misma longitud).

(2.3) *Trapecios escalenos* (no tiene ningún ángulo recto y las longitudes de los lados no paralelos son diferentes).
Los *Paralelogramos*, por otra parte, se clasifican en cuatro subclases:

> *La principal conclusión de la primera parte de este artículo es que el autismo temático provoca la* desaparición escolar de las razones de ser*, no sólo de muchas organizaciones matemáticas enseñadas en el nivel temático, sino incluso de ciertos sectores, como la geometría analítica y hasta de áreas completas de la matemática, como la propia geometría.*

(3.1) *Romboide* (no tiene todos los lados iguales ni todos los ángulos iguales).

(3.2) *Rombo* (tiene los cuatro lados iguales).

(3.3) *Rectángulo* (tiene los cuatro ángulos rectos).

(3.4) *Cuadrado* (tiene los cuatro lados iguales y los cuatro ángulos rectos)

Otros textos como, por ejemplo, el de Anzola Vizmanos, Bargueño y Peralta (2002), hacen esencialmente la misma clasificación, pero no incluyen la clasificación de los *Trapecios.* Por el contrario algunos textos añaden a las clasificaciones anteriores una clasificación de los *Trapezoides* según que tengan dos parejas de lados consecutivos iguales (*Cometa*) o bien no exista *ninguna característica común entre los lados* (*Otros trapezoides*) (Cañadilla y otros, 2002).

En resumen, podemos resaltar las siguientes características de este tipo de clasificaciones:

(a) Aparecen entremezclados arbitrariamente diversos criterios de clasificación (en este aspecto la clasificación de los *Trapecios* es la más llamativa). En algunos casos las clases de cuadriláteros se definen de forma inclusiva (los *Cuadrados* son *Rombos* y *Rectángulos*) y, en otros casos, en forma no inclusiva (ni los *Rombos* ni los *Rectángulos* son *Romboides*).

(b) En ningún caso se pone de manifiesto la relación que existe entre las diferentes clases de formas que van apareciendo (¿los *Trapecios escalenos* constituyen una clase de cuadriláteros más general o más particular que los *Romboides*? ¿Y con respecto a los *Otros trapezoides*?) ni cómo se ha de modificar una clase de formas (por ejemplo, los *Trapecios rectángulos*) para convertirse en otra (como, por ejemplo, los *Rombos*).
(c) En ningún caso se toman en consideración los grados de libertad de cada una de las clases de formas cuadrangulares (¿Cuántos grados de libertad tienen los *Trapecios escalenos*? ¿Y los *Romboides*?) ni, por tanto, el número mínimo de elementos *independientes* que serían necesarios para determinar cada clase de formas.

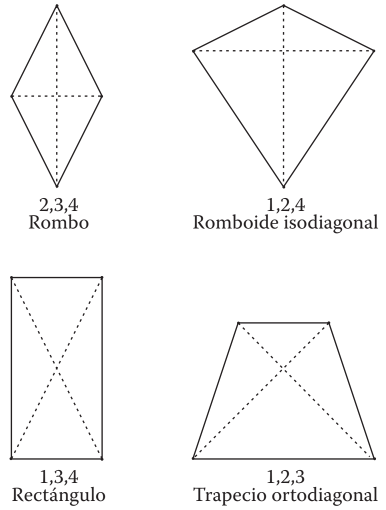
No es de extrañar que este tipo de clasificaciones, omnipresente en los libros de texto, esté asociado a fenómenos didácticos indeseables entre los que cabe citar los errores sistemáticos y persistentes que cometen los alumnos y cuya explicación no debería buscarse, por tanto, en *dificultades cognitivas* o *faltas de motivación* de éstos[1].

La uniformidad abrumadora de las clasificaciones descritas pone de manifiesto la desaparición completa de la *razón de ser* o *sentido* (el *por qué* y el *para qué*) de esta cuestión. En lo que sigue mostraré que es posible recuperar el sentido del estudio de la clasificación de los cuadriláteros conectándola con la problemática de la determinación y construcción de ciertos tipos de figuras geométricas. Dicha conexión puede hacerse, por ejemplo, a través del *sector* de los *movimientos del plano* o, mejor, vía el *estudio del cambio de forma de las figuras*. En el primer caso se conecta la clasificación de los cuadriláteros con la determinación de figuras según su tipo de simetría (caracterizado por el grupo de simetría de la figura) y con la utilización de los movimientos del plano como técnicas constructivas que dejan invariantes ciertos elementos de una figura dada; en el segundo caso (del que propondré dos ejemplos) la clasificación de los cuadriláteros se relaciona con las posibles evoluciones de las clases de formas y con la modificación sistemática de los elementos que las determinan.

> *Incluso planteándose la cuestión de la clasificación desde el propio ámbito de los cuadriláteros es posible proponer criterios más sistemáticos y coherentes que, a posteriori, proporcionarán un* sentido geométrico *a la clasificación obtenida, porque permitirán relacionarla con el estudio del cambio de forma de los cuadriláteros convexos.*

Un criterio alternativo sin salirse del ámbito de los cuadriláteros

Incluso planteándose la cuestión de la clasificación desde el *propio ámbito de los cuadriláteros*, es decir, sin hacer depender explícitamente dicha cuestión de otras cuestiones más genéricas que surjan en los niveles superiores de la jerarquía, es posible proponer criterios más sistemáticos y coherentes que, a posteriori, proporcionarán un *sentido geométrico* a la clasificación obtenida porque permitirán relacionarla, como veremos, con el estudio del *cambio de forma de los cuadriláteros convexos*.



Gráfica n.º 2

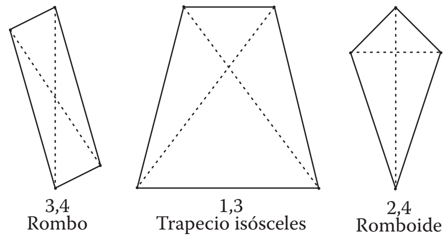
Así, por ejemplo, si caracterizamos las diagonales del cuadrado mediante cuatro propiedades o *axiomas*, podremos ir eliminando sistemáticamente dichas propiedades para construir clases de formas cada vez más amplias y menos *simétricas* y describir de esta manera una cierta evolución de las formas cuadrangulares. Podemos considerar que las diagonales del cuadrado satisfacen las cuatro propiedades siguientes:

D1: Las dos diagonales tienen la misma longitud.
D2: Las diagonales se cortan perpendicularmente (forman cuatro ángulos iguales).
D3: El punto de intersección de las diagonales divide a ambas en la misma proporción.
D4: El punto de intersección divide a una de las diagonales en dos partes iguales.

Si ahora eliminamos uno de los axiomas, que pueden interpretarse como restricciones, obtendremos 4 clases de formas cuadrangulares. Dos de estas clases, *rombos* y *rectángulos*, son muy conocidas, pero las dos restantes no aparecen en los libros de texto de Secundaria (Ver Gráfica n.º 2).

D2+D3+D4 = *Rombos.*
D1+D2+D4 = *Romboides*[2] *isodiagonales.*
D1+D3+D4 = *Rectángulos.*
D1+D2+D3 = *Trapecios ortodiagonales.*

Estas cuatro clases de formas cuadrangulares son simplemente infinitas, esto es, tienen un grado de libertad. Esto significa que dentro de la clase de los rombos, por ejemplo, basta dar un parámetro para determinar cada una de las formas concretas de rombo.

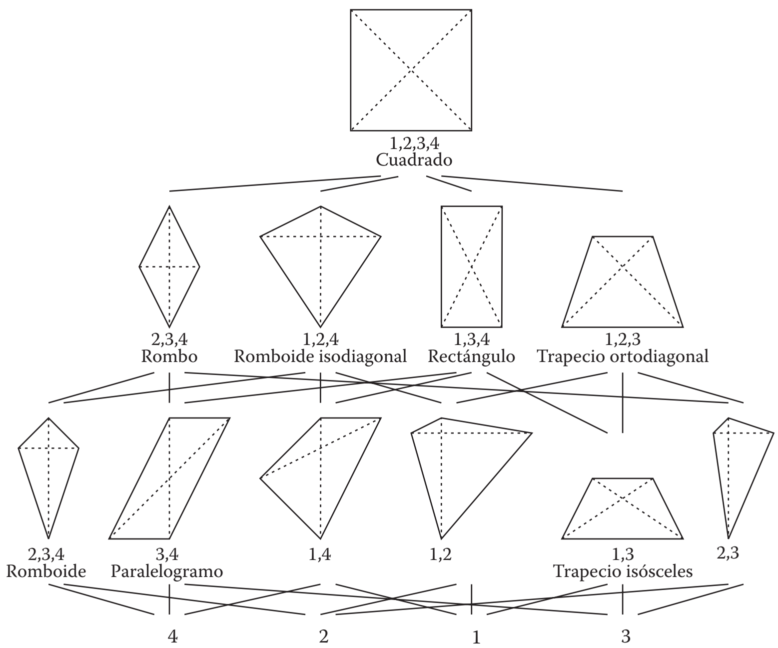


Gráfica n.º 3

Si ahora eliminamos sistemáticamente dos de las restricciones sobre las diagonales obtenemos seis nuevas clases de formas cuadrangulares de entre las cuales únicamente dos de ellas aparecen habitualmente en los libros de texto de Secundaria: los *paralelogramos* y los *trapecios isósceles*. Aparecen, asimismo, los *romboides* en el sentido de Rey Pastor antes citado (Ver Gráfica n.º 3).

D3+D4=*Paralelogramos.*
D+D3=*Trapecios isósceles.*
D2+D4=*Romboides.*

Las tres clases de formas cuadrangulares restantes (definidas, respectivamente, por D1+D4; D1+D2 y D2+D3) no tienen, todavía, un nombre asignado. Estas seis clases de formas cuadrangulares son doblemente infinitas, esto es, tienen dos grado de libertad. Esto significa que dentro de la clase de los romboides, por ejemplo, basta dar dos parámetros para determinar cada una de las formas concretas de romboide.



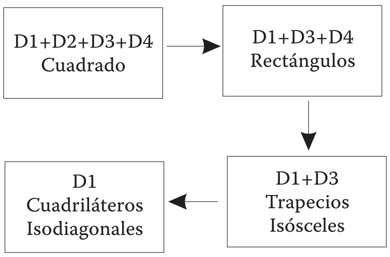
Gráfica n.º 4

Para concluir esta clasificación habría que describir las cuatro clases de formas cuadrangulares que se definen, respectivamente, por cada una de las restricciones. Podemos asignar un nombre provisional a dos de dichas clases:

D1 = *Isodiagonales*.
D2 = *Ortodiagonales*.

No asignaremos, por el momento, ningún nombre a las dos clases de formas restantes (definidas, respectivamente por D3 y D4). Es obvio que cada una de estas cuatro clases de formas tiene tres grados de libertad y que, por último, si no se impone ninguna de las restricciones, obtenemos la clase de todas las formas cuadrangulares[3]. En el siguiente esquema se presenta la clasificación completa dibujando en cada caso un cuadrilátero que, cumpliendo los axiomas que definen la clase de formas correspondiente, no cumple el resto de los axiomas. Así, por ejemplo, se dibuja un rectángulo (= D1+D3+D4) que no cumple D2, para que no sea cuadrado, y un paralelogramo (= D3+D4) que no cumple D2, para que no sea rombo, ni tampoco D1, para que no sea rectángulo (Ver Gráfica n.º 4).

Pero esta representación estática de la clasificación de las formas cuadrangulares esconde el carácter evolutivo de la misma. De hecho, si interpretamos el esquema global como un diagrama en árbol que parte del cuadrado, tenemos 24 (= 4´3´2) direcciones a lo largo de las cuales puede evolucionar la forma del cuadrado. Alguna de estas direcciones son relativamente conocidas como, por ejemplo, la siguiente:



Pero la inmensa mayoría de las 23 restantes direcciones de evolución de las clases de formas (así como las múltiples combinaciones que pueden realizarse con ellas) son totalmente desconocidas y no se estudian en Secundaria. Para llevar a cabo un estudio sistemático de esta clasificación propongo utilizar una Calculadora Simbólica[4] que permita visualizar todos estos cambios progresivos de la forma de los cuadriláteros. El estudio sistemático de esta clasificación permitirá generar un Campo de Problemas y hasta una Organización Matemática que puede ser estudiada en Secundaria.

Existe otro aspecto de la dinámica de esta clasificación que queda oculto con el diagrama general. Se trata de la variabilidad interna que encierra cada una de las 16 (= 1+4+6+4+1) clases de formas cuadrangulares que resultan. Salvo el *cuadrado*, que contiene una única forma, cada una de las 15 clases de formas restantes contiene infinitas formas cuadrangulares diferentes. De nuevo propongo utilizar una Calculadora Simbólica (como, por ejemplo, WIRIS) que permita explorar, analítica y gráficamente los límites de variabilidad de las formas dentro de cada clase.

Así, por ejemplo, para determinar cada una de las formas de la clase *romboides* podemos definir dos parámetros: el primero mediría la razón entre las longitudes de las dos diagonales del romboide; el segundo mediría la razón entre las longitudes de los dos segmentos en que queda dividida la diagonal del romboide que no queda forzosamente bisecada. Al variar conjuntamente los valores de dichos parámetros (dentro de los límites admisibles) tendríamos todas las formas posibles de los romboides. Es fácil ver que esta idea puede extenderse a la clasificación completa, mostrando que *fijar una forma cuadrangular equivale a fijar los valores de cuatro parámetros* y que la forma *cuadrado* se obtiene dando el valor "1" a todos ellos. Análogamente, cada una de las clases de formas puede interpretarse como el resultado de asignar el valor "1" a uno, dos o tres de los parámetros en cuestión (según se trate, respectivamente, de clases de formas con tres, con dos o con un solo grado de libertad) dejando libres los restantes. Al dejar libres los valores de los cuatro parámetros se obtiene la clase universal que incluye a todos los cuadriláteros.

> *Para determinar cada una de las formas de la clase romboides podemos definir dos parámetros: uno que mida la razón entre las longitudes de las dos diagonales del romboide y otro que mida la razón entre las longitudes de los dos segmentos en que queda dividida la diagonal del romboide que no queda forzosamente bisecada.*

Cada una de las clases de formas cuadrangulares obtenidas puede caracterizarse, a su vez, mediante su *grupo de invariancia* entendido como el grupo de transformaciones del plano que la deja invariante como clase de formas. Si, por ejemplo, ***F*** designa la clase de formas que hemos denominado de los *trapecios ortodiagonales*, le asociamos el grupo, ***G(F)***, de las transformaciones del plano que convierten cualquier trapecio ortodiagonal en otro trapecio ortodiagonal (aunque cambien la forma de éste). Es claro que se trata de un grupo que contiene al grupo, ***S***, de las semejanzas y que, en el caso de la forma cuadrada, ***F* = *C***, se tiene ***G(C)* = *S***. En total, los 16 grupos de invariancia así obtenidos formarán un retículo de subgrupos de transformaciones del plano con una estructura de orden parcial análoga a la que constituyen las clases de formas cuadrangulares de la que proceden.

En la clasificación basada en el tipo de simetría se obtienen, en concreto, siete clases de formas cuadrangulares distribuidas en cinco categorías: el cuadrado, los rectángulos y rombos, los paralelogramos, los trapecios isósceles y romboides y los cuadriláteros sin ningún tipo de simetría.

Una clasificación ligada al sector de los movimientos del plano

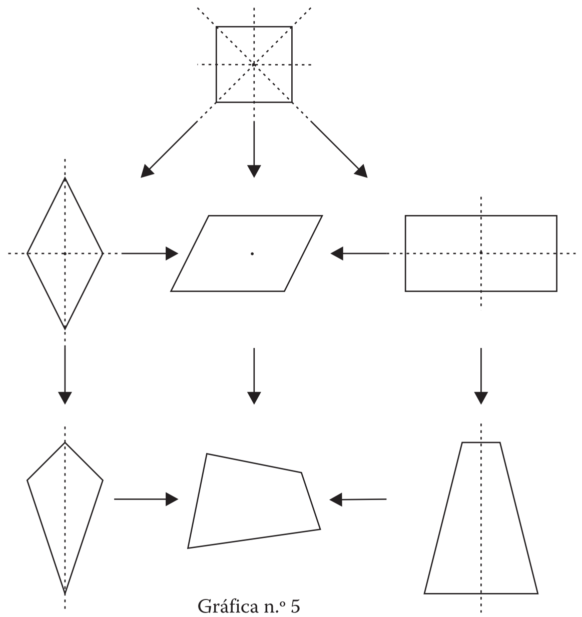
En la Enseñanza Secundaria española actual se estudia, en el sector de las *Traslaciones, giros y simetrías en el plano*, el centro de simetría y los ejes de simetría de algunas figuras, pero sin relacionarlo directamente con la cuestión de la clasificación de los polígonos ni, tampoco, con las cuestiones que aparecen en las situaciones que hemos considerado umbilicales en la geometría elemental. La ausencia de un tema en el que se estudien los *Tipos de simetría de una figura*, que permitiría construir una sucesión de niveles de organización que conectase funcionalmente el *sector* de los movimientos con las citadas cuestiones, hace que sea muy improbable que el cálculo de los elementos de simetría de ciertas figuras pueda servir ni como criterio de clasificación de éstas, ni como técnica para determinar y, en su caso, construir figuras geométricas. De hecho, muy pocos libros de texto de la E.S.O. incluyen explícitamente el tema de los *Tipos de simetría de una figura* y su utilización sistemática para clasificar los cuadriláteros. No podemos dejar de citar, como excepción, el texto de tercero de E.S.O. de Bosch, Compta, Gascón, Urbaneja y Lamarca (1996), pp. 51-57.

De nuevo se pone de manifiesto que las cuestiones que pueden ser estudiadas y, lo que es más importante, la *manera concreta de cómo pueden ser estudiadas*, depende muy fuertemente de su conexión con los niveles *superiores* de organización (*temas*, *sectores* y *áreas*) y de las relaciones que se establezcan entre éstos. En efecto, si los movimientos del plano se utilizaran, entre otras cosas, para estudiar el *tipo de simetría de las figuras geométricas* (lo cual no implica que tenga que introducirse explícitamente la noción de *grupo de simetría de una figura*), entonces podría darse una primera razón de ser a la clasificación de las formas cuadrangulares porque los tipos de simetría pueden proporcionar, como veremos, criterios de determinación de clases de formas (sean éstas cuadrangulares o no). Además, existen múltiples construcciones geométricas que requieren la construcción previa de una figura que contiene a un cuadrilátero. Dichas construcciones suelen utilizar la existencia de elementos que quedan invariantes al aplicar ciertas simetrías o rotaciones (Puig Adam, 1947, pp. 208-212).

En la clasificación basada en el tipo de simetría se obtienen, en concreto, siete clases de formas cuadrangulares distribuidas en cinco categorías. En la primera categoría aparece una única clase de formas que, además, contiene una única forma: el *Cuadrado*. Es el cuadrilátero que tiene simetría *diédrica* o *compuesta* de orden 4 (queda invariante por cuatro simetrías y cuatro rotaciones). En la segunda categoría aparecen las dos formas cuadrangulares que tienen simetría compuesta de orden 2 (quedan invariantes por dos simetrías y dos rotaciones): los *Rectángulos* y los *Rombos*. La tercera categoría de formas cuadrangulares consta únicamente de una clase de formas, los *Paralelogramos*. Son los cuadriláteros que tienen simetría *rotatoria* de orden 2 (quedan invariantes por dos rotaciones). La cuarta categoría posee dos clases de formas cuadrangulares: los *Trapecios isósceles* y los *Romboides* (en el sentido de la definición de Rey Pastor que algunos textos denominan *cometas*); se trata de los cuadriláteros que tienen simetría *bilateral*, esto es, que quedan invariantes mediante una simetría axial. En la quinta y última categoría se sitúan los *Cuadriláteros sin ningún tipo de simetría*, si los definimos en sentido no inclusivo como aquellos que *únicamente* quedan invariantes mediante la transformación Identidad. Pero si, siguiendo la lógica interna de esta clasificación, situamos en la quinta categoría las formas cuadrangulares que quedan invariantes por la Identidad, tenemos que ésta contiene a todos los cuadriláteros.

La introducción del tema de los Tipos de simetría de una figura y su utilización para clasificar las formas cuadrangulares permite relacionar cada clase de formas cuadrangulares con la forma de figuras geométricas cualesquiera y, por tanto, formular criterios de determinación de las figuras en términos de su tipo de simetría.

Consideradas como conjuntos, estas siete clases de formas cuadrangulares no están totalmente ordenadas por inclusión, pero sí están relacionadas según una ordenación parcial perfectamente definida (Ver Gráfica n.º 5).



Gráfica n.º 5

La introducción del tema de los *Tipos de simetría de una figura* y su utilización para clasificar las formas cuadrangulares amplía el tipo de actividad matemática que es posible llevar a cabo en torno a dicha clasificación porque, entre otras cosas, permite relacionar cada clase de formas cuadrangulares con la forma de figuras geométricas cualesquiera y, por tanto, formular criterios de determinación de las figuras en términos de su tipo de simetría: ¿Hasta qué punto podemos cambiar la forma de una figura sin cambiar su tipo de simetría? Si queremos modificar, en base a ciertos criterios, el tipo de simetría de una figura, ¿qué tipo de transformaciones podemos aplicar a la figura en cuestión? En particular, pueden plantearse cuestiones tales como las que siguen (Bosch, Compta, Gascón, Urbaneja y Lamarca, 1996, pp. 82-83):

(1) ¿Cómo se ha de modificar un romboide para dibujar un pentágono que sólo tenga un eje de simetría?

(2) ¿Existe algún pentágono que tenga simetría compuesta de orden 2?

(3) Dibuja un hexágono que sólo tenga dos ejes de simetría de manera que éstos sean perpendiculares. Puedes hacerlo modificando un rombo. ¿Cuál es el tipo de simetría de este hexágono?

(4) ¿Existen hexágonos con simetría bilateral? ¿Y con simetría compuesta de orden 3? ¿Y con simetría rotatoria de orden 3? Dibuja ejemplos de los casos posibles.
(5) Modificando un hexágono que sólo tenga un eje de simetría, dibuja un heptágono que tenga un único eje de simetría. ¿Existen heptágonos más simétricos que éste y, a su vez, menos simétricos que el heptágono regular?

(6) Dibuja un octógono que sólo tenga dos ejes de simetría y con la propiedad adicional de que éstos sean perpendiculares. ¿Cuál es su tipo de simetría?

(7) Dibuja octógonos que tengan simetría compuesta de órdenes 1, 2, 4 y 8.

(8) Modificando adecuadamente un trapecio isósceles, dibuja un hexágono que sólo tenga un eje de simetría. Modificando este hexágono, dibuja un octógono que también tenga un único eje de simetría.

(9) Dibuja hexágonos que tengan simetría compuesta de órdenes 1, 2, 3 y 6.

(10) Dibuja una figura que no sea un polígono y que tenga el mismo tipo de simetría que el triángulo equilátero. Haz lo mismo con el cuadrado y con el hexágono regular.

¿Qué se entiende en Secundaria por *figura geométrica*? Estudio del cambio de forma de las figuras

Las figuras geométricas planas que se estudian inicialmente en Secundaria se consideran determinadas por elementos (puntos, segmentos, arcos de circunferencia, etc.) que están fijos en el plano. En particular, los polígonos se consideran determinados por la sucesión ordenada de sus vértices y se sobreentiende que éstos son puntos fijos del plano. Cuando se avanza un poco en el estudio (a partir de tercero de E.S.O.) se considera la *posición de una figura* (aunque esta noción suele quedar implícita), como la que viene dada por la posición de los elementos que la determinan (por ejemplo, los vértices en el caso de los polígonos). Se estudian entonces, parcialmente, los *cambios de posición de las figuras*. Normalmente se supone que dos figuras son *iguales*, esto es, la *misma* figura, si pueden superponerse de manera que coincidan todos sus elementos. Los textos más rigurosos definen, excepcionalmente, *figuras iguales* como aquellas “[...] entre las cuales se puede establecer una transformación biyectiva que conserva la distancia entre los puntos” (Bailo, Casals, Gomà y Tudurí, 1996, p. 52). Posteriormente se aplican traslaciones, giros y simetrías axiales a determinadas figuras y se afirma que de esta manera se obtienen siempre *figuras iguales*. En este momento se ha cambiado la noción inicial de *figura geométrica* al considerar que una figura puede cambiar de posición.

Pero una vez que se supone que una figura puede cambiar de posición, se plantea el estudio de los *cambios de tamaño* de las figuras geométricas. Este estudio que, de nuevo, sólo se realiza parcialmente en la Enseñanza Secundaria, permite mostrar algunas propiedades de las figuras geométricas que no dependen del tamaño de éstas. Surge, aunque de una manera bastante implícita, la noción de *forma de una figura **F***, entendida como lo que tienen en común todas las figuras *semejantes* a ***F***. Se considera, por ejemplo, que todos los cuadrados son la misma figura y que todas las circunferencias son, también, la misma figura. De nuevo, se está ampliando la noción de *figura geométrica* al considerarla independientemente de su tamaño.

Dado que la geometría de Secundaria toma como objeto de estudio las *relaciones internas* entre los *elementos* de lo que se supone que son *figuras geométricas*, la cuestión de lo que sea una *figura geométrica*, y de los criterios que se utilicen para construir las figuras geométricas que se estudiarán, es central porque determina el contenido de toda la actividad matemática. Pero, subrepticiamente, junto al cuadrado, al círculo y al triángulo equilátero, aparecen presuntas *figuras geométricas* (como, por ejemplo, triángulo escaleno, rombo, rectángulo áureo, triángulos en posición de Tales, trapecio, triángulo rectángulo, hexágono equilátero, etc.) que, en realidad, son clases de formas integradas por infinitas formas diferentes con uno o más grados de libertad. En la práctica se está ampliando, de nuevo, la noción de figura geométrica pero, esta vez, de una manera arbitraria aceptando que es independiente de *ciertos cambios de forma* completamente descontrolados.

Puede mostrarse que se utilizan criterios diversos y, en general, bastante arbitrarios, para agrupar las diferentes formas que pasan a integrar lo que a partir de este momento se considera como una *figura geométrica*. Mientras que algunas agrupaciones responden a una propiedad geométrica crucial en las situaciones de construcción de figuras (así, por ejemplo, los *triángulos rectángulos* se agrupan porque están caracterizados por el Teorema de Pitágoras), otras agrupaciones obedecen a propiedades geométricamente más banales (por ejemplo, los *trapecios* tienen en común, entre otras cosas, una fórmula para calcular el área).

Aparece así una *cuestión* que está en el origen de las situaciones ligadas a la determinación y construcción de figuras geométricas. Se trata de lo que se entiende en cada momento por *figura geométrica*: *¿Con qué criterios se agrupan diferentes formas para designarlas con un único nombre* (y considerarlas, de hecho, como una misma *figura*)?[5] *¿Cuáles son los posibles cambios de forma dentro de cada una de las figuras geométricas*? Toda la actividad geométrica elemental depende de la respuesta que se dé a estas cuestiones.

Utilizando el lenguaje de los grupos de transformaciones del plano:

$$\{\mathbf{I}\} \subset \mathbf{M} \subset \mathbf{S} \subset \mathbf{G} \subset \mathbf{TP}$$

podríamos decir que en Secundaria se estudia parcialmente el efecto del grupo de los movimientos, **M**, y el de las semejanzas, **S**, a fin de mostrar algunos aspectos del *cambio de posición* y del *cambio de tamaño* de las figuras y estudiar algunas propiedades invariantes por semejanzas; pero nunca se estudia el efecto de los grupos de transformaciones, **G**, que contienen al de las semejanzas. Por tanto, no se considera el *cambio de forma* de las figuras y, en consecuencia, no se analiza ningún proceso dinámico global de dichas formas, lo que comporta que los criterios de clasificación de las mismas sean estáticos, parciales y, a menudo, arbitrarios. Aparecen así nuevos aspectos de las limitaciones y hasta incoherencias de las OM *geométricas* que se estudian en Secundaria y, en particular, de las que se generan en torno a la clasificación de los cuadriláteros.

> *¿Con qué criterios se agrupan diferentes formas para designarlas con un único nombre y considerarlas, de hecho, como una misma* figura*? ¿Cuáles son los posibles cambios de forma dentro de cada una de las figuras geométricas? Toda la actividad geométrica elemental depende de la respuesta que se dé a estas cuestiones.*

Determinación de la forma, dejando libre el tamaño y la posición

Vamos a describir una posible evolución de las formas cuadrangulares convexas y, a partir de ella, obtendremos criterios para caracterizar las diferentes clases de formas así como las relaciones entre ellas. Junto a este aspecto más *cualitativo* de la discusión podría introducirse un aspecto más *cuantitativo* consistente en el *estudio de las dependencias entre las medidas de los diferentes elementos de los cuadriláteros* (lados y ángulos, especialmente) que determinan su forma. Este estudio nos conduciría a la noción de *función* y, como dice Emma Castelnuovo, a la "utilización natural del plano cartesiano y de las gráficas" (Castelnuovo, 1981, p. 7).
En este caso, en lugar de empezar dando la clasificación de las formas cuadrangulares que se obtiene al final del estudio, vamos a describir brevemente una *actividad matemática* a lo

largo de la cual se analizan ciertos aspectos elementales de los cuadriláteros y que culmina en una posible clasificación. Se trata de una experimentación matemática que puede llevarse a cabo con alumnos de tercero de ESO (aunque también puede realizarse con alumnos de niveles superiores, incluso universitarios, con la condición de que dejen en suspenso, temporalmente, sus conocimientos escolares). Sería muy interesante disponer de una materialización y un control de los cambios de forma de los cuadriláteros, tanto dentro de cada clase de formas, como en el paso de una a otra clase, aunque la experimentación que describiré a continuación también puede realizarse con lápiz y papel.

Buscamos un conjunto de elementos o características del cuadrilátero, a ser posible independientes (esto es, que no contenga elementos superfluos o redundantes) que determinen la forma del cuadrilátero, dejando libre el tamaño y la posición. Denominaremos *sistema básico* a un conjunto de elementos que cumpla dichas condiciones y centraremos la discusión en investigar si los sucesivos conjuntos de elementos constituyen un sistema básico. De hecho, en la clasificación basada en las propiedades de las diagonales, se ha utilizado implícitamente el *sistema básico* formado por: (1) La razón entre la longitud de las diagonales; (2) la razón entre los ángulos que forman las dos diagonales; (3) la razón entre las razones de los segmentos en que quedan divididas ambas diagonales; (4) la razón entre los segmentos en que queda dividida una diagonal. Si las cuatro razones toman el valor "1", tenemos el cuadrado.

Consideraremos, sucesivamente, los siguientes conjuntos de elementos:

(1) *La posición de los cuatro vértices del cuadrilátero.*

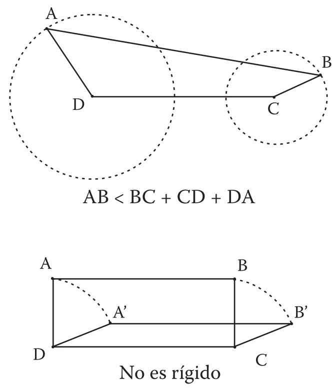
Ante todo se observa que no son independientes, esto es, la posición de los 4 vértices no puede elegirse arbitrariamente en el plano. Además, los vértices no determinan la forma del cuadrilátero, a menos que se fije el orden de los mismos. Surgen nociones nuevas que no tenían sentido en los triángulos: *cuadrilátero convexo*[6], *cuadrilátero entrelazado*, *vértices y lados consecutivos (versus opuestos)* y *diagonal*.

(2) *La posición ordenada* (A, B, C, D) *de los cuatro vértices.*

No constituyen un sistema básico puesto que, además de determinar la forma, también determinan la posición y el tamaño del cuadrilátero (Ver Gráfica n.º 6).

(3) *Las longitudes ordenadas* (AB, BC, CD, DE) *de los cuatro lados.*

No son independientes (por ejemplo, la longitud del lado mayor no puede ser mayor que la suma de las longitudes de los otros tres). Además, no determinan la forma puesto que el cuadrilátero no es un polígono rígido (Ver Gráfica n.º 7).



Gráfica n.º 7

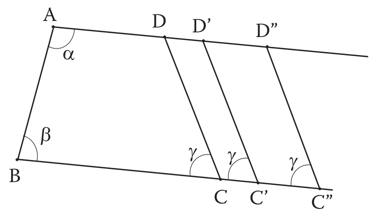
(4) *Las amplitudes ordenadas* (α, β, γ, δ) *de los ángulos.*

No son independientes puesto que su suma es siempre igual a cuatro rectos. Además no determinan la forma (puesto que, por ejemplo, existen rectángulos que no son cuadrados).

(5) *La amplitud de tres ángulos* (α, β, γ) *y la longitud de un lado* AB.

Además de no dejar completamente libre el tamaño, este conjunto de elementos tampoco determina la forma (Ver Gráfica n.º 8).
(6) *La amplitud de tres ángulos* (α, β, γ) *y las longitudes de dos lados opuestos* AB y CD = C'D' = C"D".

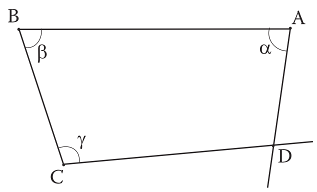
Este sistema de elementos no determina la forma del cuadrilátero (Ver Gráfica n.º 9).



Gráfica n.º 9

(7) *La amplitud de tres ángulos* (α, β, γ) *y las longitudes de dos lados consecutivos* AB y BC.

Se trata de un sistema de elementos que determina la forma del cuadrilátero, pero también determina completamente el tamaño del mismo (dejando libre la posición). Para obtener un *sistema básico* basta sustituir las longitudes de los dos lados consecutivos por la razón AB/BC entre ellos. Disponer de un sistema básico significa que, fijados valores concretos para cada uno de los elementos de dicho sistema, queda determinada una forma cuadrangular concreta. Así, por ejemplo, si fijamos los valores siguientes: $\alpha = 64^o$, $\beta = 85^o$, $\gamma = 100^o$ y AB/BC = 1.75, tenemos definida una forma cuadrangular concreta (Ver Gráfica n.º 10).



Gráfica n.º 10

Nueva clasificación dinámica de las formas cuadrangulares

Si queremos elaborar una clasificación de las formas cuadrangulares a partir del sistema básico descrito, debemos ir debilitando sistemáticamente las condiciones que definen al cuadrado y que expresaremos mediante los cuatro axiomas siguientes:

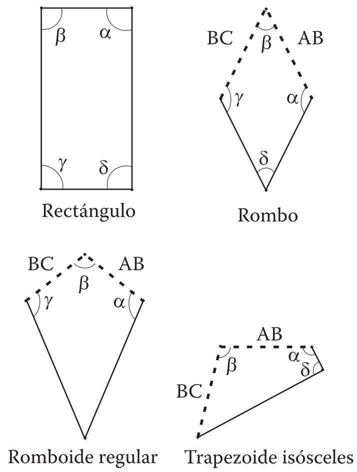
$$\alpha = \gamma;\ \ \beta = \delta;\ \ \alpha = \beta \ \text{ y } \ AB = BC.$$

De manera análoga a la clasificación descrita anteriormente, basada en los axiomas que cumplen las diagonales del cuadrado, obtendremos un total de 16 (1+4+6+4+1) clases de formas cuadrangulares. De nuevo hay que decir que la elección de estos axiomas para caracterizar el cuadrado es relativamente arbitraria y que las clases de formas cuadrangulares que obtendremos dependerán, en cierta medida, de dicha elección.

Si eliminamos sucesivamente uno de los axiomas, aparecen las cuatro primeras clases de formas cuadrangulares. Cada una de ellas está determinada por tres de los axiomas citados; dos de estas clases de formas son muy conocidas y las otras dos son relativamente nuevas.

$\alpha = \gamma$; $\beta = \delta$ y $\alpha = \beta$ (*Rectángulos*).
$\alpha = \gamma$; $\beta = \delta$ y AB = BC (*Rombos*).
$\alpha = \gamma$; $\alpha = \beta$ y AB = BC (*Romboides regulares*[7]).
$\beta = \delta$; $\alpha = \beta$ y AB = BC (*Trapezoides isósceles*[8]).

Junto a los Rectángulos y Rombos, que son clases de formas cuadrangulares simplemente infinitas que ya aparecían en la clasificación basada en las diagonales, aparecen ahora dos nuevas clases de formas cuadrangulares simplemente infinitas: los Romboides regulares, en lugar de los Romboides isodiagonales, y los Trapezoides isósceles, en lugar de los Trapecios ortodiagonales (Ver Gráfica n.º 11).

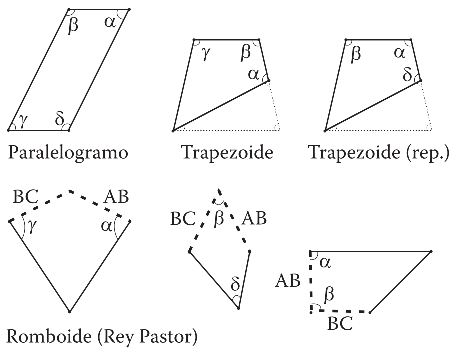


Gráfica n.º 11

Si ahora eliminamos dos de los axiomas de todas las maneras posibles obtenemos seis nuevas clases de formas. Las cuatro primeras son las siguientes.

$\alpha = \gamma$ y $\beta = \delta$ (*Paralelogramos*).
$\alpha = \gamma$ y $\alpha = \beta$ (*Trapezoides*).
$\alpha = \beta$ y $\beta = \delta$ (*Trapezoides*).
$\alpha = \gamma$ y AB = BC (*Romboides*).

Las dos últimas, definidas respectivamente por ($\beta = \delta$ y AB = BC) y por ($\alpha = \beta$ y AB = BC) no tienen todavía un nombre asignado. De nuevo constatamos que, junto a los Paralelogramos y los Romboides (en el sentido de Rey Pastor) que son clases de formas cuadrangulares doblemente infinitas que ya aparecían en la clasificación basada en las diagonales, aparecen nuevas clases de formas cuadrangulares doblemente infinitas (Ver Gráfica n.º 12).



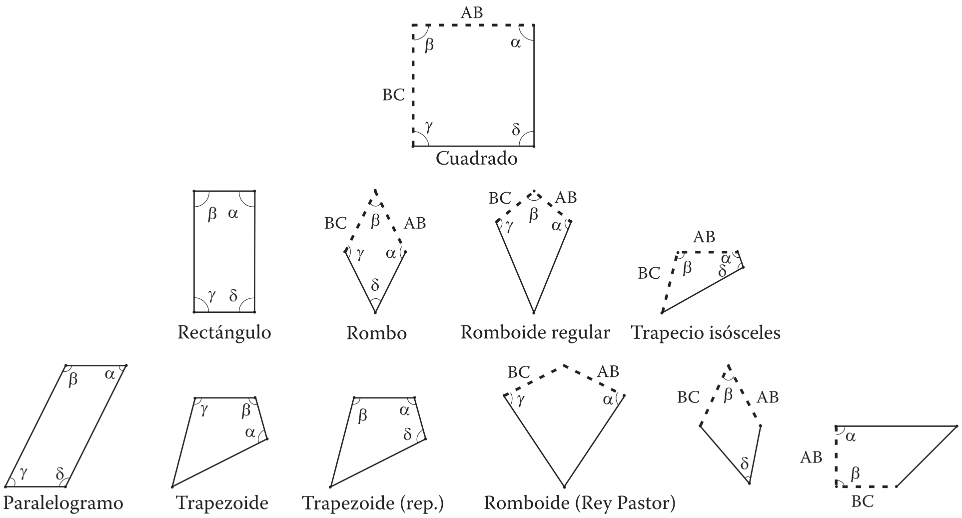
Gráfica n.º 12

Para completar esta clasificación faltan por citar las cuatro clases de formas cuadrangulares que están determinadas, respectivamente, por cada una de las condiciones o axiomas ($\alpha = \gamma$); ($\beta = \delta$); ($\alpha = \beta$) y (AB = BC). No asignaremos nombre a ninguna de ellas ni las representaremos gráficamente. Se trata de clases de formas que tienen, por tanto, tres grados de libertad. No coinciden con ninguna de las clases que se habían obtenido en la clasificación basada en las propiedades de las diagonales. Y, por último, si no se impone ninguna de las cuatro restricciones obtenemos, como siempre, la clase universal de todas las formas cuadrangulares (ver Gráfica n.º 13).

A modo de conclusión

En esta segunda parte del artículo se han analizado algunas de las respuestas posibles a la cuestión de la clasificación de los cuadriláteros convexos. He mostrado que en el currículum de la E.S.O. dicha cuestión *aparece en el nivel temático*, no proviene de los niveles superiores de la jerarquía (sector, área y disciplina) ni *conduce a ninguna parte*. Podemos afirmar, por lo tanto, que se trata de una cuestión encerrada en sí misma, *muerta*.

Hemos visto que la cuestión de la clasificación de los cuadriláteros puede hacerse emerger en el ámbito de ciertas situaciones umbilicales de la geometría de la enseñanza secundaria, esto es, de situaciones en las que se aborda la *problemática de la determinación y la construcción de figuras geométricas* (y hasta de la noción misma de *figura geométrica*). De esta manera, cada una de las clasificaciones que se proponen puede entenderse como un *estudio del cambio de forma de los cuadriláteros* que permitiría recuperar la razón de ser del estudio de esta cuestión en la E.S.O. Se trata de una propuesta que, de poderse llevar a cabo, incidiría mucho más allá del nivel temático y provocaría una reestructuración profunda de los diferentes sectores y hasta de algunas áreas completas del currículum de matemáticas. ■



Gráfica n.º 13

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANZOLA, M.; VIZMANOS, J.R.; BARGUEÑO, J.; PERALTA, J. (2002): *Matemàtiques 1. Primer cicle ESO*, Ed. Cruilla, Barcelona.

BAILO, C.; CASALS, R.; GOMÀ, A.; TUDURÍ, J. (1996): *Vector 3. Matemàtiques*, Ed. Teide, Barcelona.

BOSCH, M.; COMPTA, A.; GASCÓN, J.; LAMARCA, J.M.; URBANEJA, P.M.G. (1996): *Matemáticas. 3º ESO*, Ed. Almadraba, Madrid.

BOSCH, M.; FONSECA, C.; GASCÓN, J. (en prensa): Incompletitud de las Organizaciones Matemáticas Locales en las Instituciones Escolares, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (pendiente de publicación).

CAÑADILLA, J. L. y otros (2002): *Matemàtiques Primer d'ESO*, Castellnou Ed., Barcelona.

CASTELNUOVO, E. (1981): *La Geometria*, Ed. Ketres, Barcelona.

CHEVALLARD, Y. (2001): Aspectos problemáticos de la formación docente, *XVI Jornadas del SI-IDM*, Huesca. Recuperable en http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. (1997): *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, ICE/Horsori, Barcelona.

DE LA HAZA, C.; MARQUÉS, M.; NORTES, A. (2002): *Matemàtiques (1r d'ESO)*, Grup Promotor Santillana, Madrid.

FONSECA, C.; GASCÓN, J. (2000): Reconstrucción de las organizaciones matemáticas en las organizaciones didácticas, *XIV Jornadas del SIIDM*, Cangas do Morrazo, abril del 2000. Recuperable en http://www.ugr.es/local/jgodino.htm

GASCÓN, J. (1997): Cambios en el contrato didáctico. El paso de estudiar matemática en secundaria a estudiar matemática en la universidad, *Suma*, 26, 11-21.

GASCÓN, J. (2002): Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados?, *Suma*, 39; 13-25.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS (Cont.)

GASCÓN J. (2003): Efectos del "autismo temático" sobre el estudio de la Geometría en Secundaria. In Palacián, E. (ed.) *Aspectos didácticos de matemáticas*, Zaragoza, Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Zaragoza (en prensa).

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE, (2001a): *Enseñanza Secundaria Obligatoria. Enseñanzas mínimas*, Edita Secretaría General Técnica, Subdirección General de Información y Publicaciones, Madrid (Real Decreto 3473/2000 de 29 de diciembre).

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE, (2001*b*): *Bachillerato. Enseñanzas mínimas*, Secretaría General Técnica, Sub. Gral. de Información y Pub., Madrid (R. D. 3474/2000 de 29 XII).

PIAGET, J. GARCIA, R. (1982): *Psicogénesis e historia de la ciencia*, Siglo XXI (4a. edición), México DF.

POSTMAN, N. (1995): *El fin de la educación*, EUMO-Octaedro, Barcelona (1999).

PUIG ADAM, P. (1947): *Curso de Geometría Métrica (tomo I)*, Biblioteca Matemática, Madrid (citado por la 11ª edición de 1973

NOTAS

1 Así, por ejemplo, la mayoría de estudiantes que han concluido la Enseñanza Secundaria (E.S.O y Bachillerato), y que están empezando sus estudios matemáticos a nivel universitario, consideren que no existe ningún *Rectángulo* que sea un *Rombo* y ni siquiera acepten que pueda existir algún *Rectángulo* que sea un *Cuadrado* (Fonseca y Gascón, 2000 y Bosch, Fonseca y Gascón, en prensa).

2 Utilizo una definición de *romboide*, hoy en desuso, equivalente a la que dio Rey Pastor: un *romboide* es un cuadrilátero que tiene un eje de simetría que pasa por dos de sus vértices. Desde el punto de vista de las propiedades de las diagonales podríamos definir los romboides como aquellos cuadriláteros cuyas diagonales se cortan perpendicularmente (D2) y, además, el punto de intersección de dichas diagonales divide a una de ellas en dos partes iguales (D4). Como dice Puig Adam (1947, p. 68), se trata de una noción "más útil que la aplicación clásica que de esta palabra se hace para designar un paralelogramo que no sea rombo ni rectángulo, y que carece de interés".

3 Es claro que la elección de los *axiomas* que satisfacen las diagonales del cuadrado es relativamente arbitraria y que de ella dependerán, en cierta medida, las clases de formas cuadrangulares que aparecerán posteriormente. Surge aquí un problema interesante: si el sistema de axiomas que caracteriza las diagonales del cuadrado está formado por *axiomas independientes* ¿en qué medida las clases de formas que irán apareciendo al debilitar dichas condiciones dependerán del sistema de axiomas elegido?

4 La Calculadora Simbólica WIRIS, disponible en la red en la dirección http://calculadora.edu365.com (a la que se puede acceder a través del portal www.edu365.com del Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya) ha implementado una aplicación que permite ir modificando (debilitando en nuestro caso) sistemáticamente las restricciones que cumplen las diagonales del cuadrado para recorrer cualquiera de las 24 direcciones de evolución de las formas cuadrangulares así como cualquiera de las combinaciones que se pueden realizar con ellas. Existe una versión de demostración en español www.wiris.com/demo/es. Agradezco a Ramon Eixarch, que es uno de los autores de este instrumento, el trabajo minucioso y preciso que ha llevado a cabo (usando la Calculadora WIRIS) para dibujar todas las gráficas que figuran en este artículo.

5 El hecho de que esta cuestión no se tenga en cuenta para organizar el currículo de la geometría en Secundaria tiene relación con las discontinuidades entre los estadios que Piaget y García (1982) denominan, respectivamente, *intra-figural* y *inter-figural*. En Gascón (1997) se analiza estas discontinuidades relacionándolas con el paso de estudiar geometría en la Enseñanza Secundaria a estudiar geometría en la Enseñanza Universitaria.

6 En lo que sigue, *cuadrilátero* significará *cuadrilátero convexo*.

7 Se trata de los *Romboides* definidos anteriormente, en el sentido de Rey Pastor, con la propiedad adicional de que la amplitud del ángulo b también coincide con la de $\alpha = \gamma$.

8 Se trata de una nueva clase de formas cuadrangulares que no había aparecido hasta el momento. En lugar de utilizar la noción clásica de *trapezoide* para designar los cuadriláteros que no tienen lados paralelos (noción ésta que carece de interés), llamamos *Trapezoides* (ver Gráfica n.º 12) a los cuadriláteros que tienen tres ángulos iguales $\alpha = \beta = \delta$; si, además, cumplen la condición AB=BC, entonces les llamaremos *Trapezoides isósceles* (ver Gráfica n.º 11). Los *Trapezoides* también pueden definirse combinando las nociones de *trapecio isósceles* y *triángulo isósceles*. En efecto, es fácil demostrar que uniendo un trapezoide y un triángulo isósceles se puede construir un trapecio isósceles y, recíprocamente, que todo trapezoide puede construirse eliminando un triángulo isósceles de un trapecio isósceles (ver Gráfica n.º 12).

SUMA 45

Febrero 2004, pp.53-58

Impacto del uso de Maple en el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal

Maple es un potente programa de Cálculo Simbólico, cuyas aplicaciones al proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática son innumerables. El presente trabajo pretende cuantificar los efectos de su uso en la enseñanza del Álgebra Lineal atendiendo a dos variables: el grado de acierto y el tiempo empleado en la resolución de los ejercicios. Los resultados que se obtienen aconsejan el uso del programa.

Maple is a powerful Symbolic Calculus programme with countless applications to the process of Maths learning and teaching. This paper is meant to quantify its effects on the teaching of Linear Algebra with regard to two variables: the degree of accuracy and the time devoted to problem solving. The results obtained make it a highly recommendable programme.

El estudio se realizó en la materia de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II con 35 alumnos y alumnas de 2º de Bachillerato de Ciencias Sociales.

Objetivos y contenidos

Los objetivos y contenidos que se plantearon fueron los mismos que cuando no se utilizan medios informáticos en el estudio de estas unidades didácticas.

Temporalización

El tiempo que se empleó en el estudio de la unidad didáctica de Matrices y Determinantes fue de 16 sesiones de cincuenta minutos cada una sin la utilización de Maple y de tres sesiones con Maple. La unidad didáctica de Sistemas de Ecuaciones Lineales dispuso de la misma distribución de tiempos.

El *coste* adicional de tiempos se vio compensado con una mejor comprensión de los conceptos, ya que no hubo que estar tan pendiente de los cálculos como cuando se ha usado exclusivamente el método tradicional. Sin embargo fue ineludible el adiestramiento de los alumnos en las técnicas de cálculo convencionales debido a las Pruebas de Acceso a la Universidad.

Me pareció evidente (como ya se hará patente más tarde) tras la finalización del estudio de las unidades didácticas correspondientes, que el día que se universalice el uso de los sistemas de cálculo simbólico en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el Bachillerato, por una parte disminuirán los tiempos de aprendizaje y, por otra, los conceptos aprendidos serán más fiables y duraderos, pues se comunicarán desprovistos de la maraña que, no pocas veces, supone todo el lío de cuentas que los acompaña. Es parecido a cuando los árboles no dejan ver el bosque. No en vano, cuando los alumnos se pierden en peleas con las cuentas, muchas veces inútiles, se extravían de la visión global del tema y acaban cayendo demasiado a menudo en el hastío y el aburrimiento.

A la memoria de Almudena Jiménez y Abel Pimentel

José Ángel Méndez Contreras
IES Cuatro Caminos
Don Benito. Badajoz

Metodología

La metodología que se puso en práctica al usar Maple como recurso didáctico buscó en todo momento conseguir el aprendizaje autónomo del alumnado, pues este es un programa que les puede ser de gran utilidad en los estudios universitarios. Para ello, además del material correspondiente a las unidades didácticas de Álgebra Lineal, se le proporcionó a cada alumno un resumen de las sentencias necesarias (incluidas en Méndez 2002) para el desarrollo de toda la materia de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, intentando provocar su uso a lo largo del curso con la menor intervención posible del profesor.

Evaluación

Para evaluar el impacto que tuvo la utilización de Maple en el proceso de enseñanza y aprendizaje del bloque de Álgebra Lineal correspondiente a Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II de 2º de Bachillerato de Ciencias Sociales se prepararon unas hojas de ejercicios que los alumnos y las alumnas deberían realizar *a mano* y *a máquina*, comparándose después los resultados obtenidos, considerando dos aspectos: el tiempo utilizado y el grado de acierto.

Es conveniente indicar que primero se realizaban y se corregían los ejercicios de las hojas de trabajo con Maple, para después pedirles la resolución manual.

Además se provocó el debate entre los alumnos para comprobar su grado de satisfacción con el nuevo recurso utilizado. En este aspecto me fue grato comprobar el aumento de motivación que los alumnos aseguraban haber experimentado, así como la mejor comprensión de los conceptos abordados. Estas sensaciones se hicieron posteriormente efectivas al evaluar los resultados de las pruebas.

Hojas de trabajo

A continuación se exponen las hojas de trabajo que utilizamos para comprobar el impacto del uso de Maple como recurso didáctico. Seguidamente se detalla su resolución utilizando el programa (Méndez 2001) y el análisis y valoración de los resultados.

MATRICES Y DETERMINANTES:

Ejercicio 1
Calcula 3A + C - 2B y 3A - 2C + (3A + C - 2B), dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&4&5\\6&7&8\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}8&7&6\\5&4&3\\3&2&1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}-2&3&2\\0&2&1\\-5&6&-1\end{pmatrix}$$

Solución
> *with(linalg):*
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
> *A:=matrix([[1,2,3],[3,4,5],[6,7,8]]);*

$$A:=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&4&5\\6&7&8\end{bmatrix}$$

> *B:=matrix([[8,7,6],[5,4,3],[3,2,1]]);*

$$B:=\begin{bmatrix}8&7&6\\5&4&3\\3&2&1\end{bmatrix}$$

> *C:=matrix([[-2,3,2],[0,2,1],[-5,6,-1]]);*

$$C:=\begin{bmatrix}-2&3&2\\0&2&1\\-5&6&-1\end{bmatrix}$$

> *evalm(3*A+C-2*B);*

$$\begin{bmatrix}-15&-5&-1\\-1&6&10\\7&23&21\end{bmatrix}$$

> *evalm(3*A-2*C+(3*A+C-2*B));*

$$\begin{bmatrix}-8&-5&4\\8&14&23\\35&32&47\end{bmatrix}$$

Comentario

Tiempo	Maple	Sin Maple
Media	7 min. 12 seg.	8 min. 34 seg.
Desviación típica	3 min.	3 min. 30 seg.
Nivel de acierto		
Media	9,15	7,85
Desviación típica	1,69	1,78

1. En la resolución a mano los alumnos tenían clara la forma de operar, los fallos se producían en las operaciones básicas.

2. Hubo un total de 22 alumnos y alumnas que resolvieron el ejercicio sin ningún error utilizando Maple, mientras que sin el programa la cifra ascendió a 12.

3. Los errores más comunes utilizando Maple fueron: la introducción equivocada de datos, el olvido de los paréntesis o de la orden *evalm* y no guardar el resultado.

4. La diferencia en los tiempos de resolución no es significativa, aunque no hay que olvidar que para ellos y ellas Maple es un *recién conocido*, mientras que el lápiz y el papel son ya *viejos amigos*.

Ejercicio 2
Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcula AB, B^tM^{-1}, M^3+M^2, $3M^4N$, det M, det N.

Solución
> with(linalg):
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
> A:=matrix([[-2,0,1],[1,-1,5]]);

$$A := \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

> B:=matrix([[3,1],[0,1],[-1,2]]);

$$B := \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

> M:=matrix([[1,2,1],[2,-1,-2],[1,1,1]]);

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

> N:=matrix([[-1,1,-2],[0,1,0],[-1,-1,-1]]);

$$N := \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

*> evalm(A&*B);*

$$\begin{bmatrix} -7 & 0 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$$

*> evalm(transpose(B)&*inverse(M));*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{-3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{9}{4} \end{bmatrix}$$

> evalm(M^3+M^2);

$$\begin{bmatrix} 12 & 10 & 0 \\ 4 & -2 & -4 \\ 12 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

*> evalm(3*M^4&*N);*

$$\begin{bmatrix} -48 & 123 & -126 \\ 0 & -27 & 30 \\ -48 & 102 & -108 \end{bmatrix}$$

> det(M);

-4

> det(N);

-1

Comentario

Tiempo	Maple	Sin Maple
Media	10 min. 15 seg.	18 min. 34 seg.
Desviación típica	3 min. 8 seg.	4 min. 32 seg.
Nivel de acierto		
Media	9	5,6
Desviación típica	1,48	1,67

1. Lo más llamativo es que 19 alumnos y alumnas resuelven el ejercicio perfectamente ayudándose del programa, mientras que sin él ninguno lo consigue.

2. Los errores en la resolución a mano provienen otra vez de las operaciones básicas.

3. Parece significativo el hecho de que dos alumnos tardasen en averiguar la solución con Maple menos de un minuto.

4. Al utilizar el programa sigue habiendo alumnos que se confunden en la introducción de los datos.

5. La diferencia de tiempos y resultados es ostensible en este ejercicio.

Ejercicio 3
Determina el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{pmatrix}$$

atendiendo al valor de t.

Solución
> with(linalg):
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace

> A:=matrix([[t,2,2],[2,t,0],[1,t,t]]);

$$A := \begin{bmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{bmatrix}$$

> det(A);

$$t^3\text{-}2t$$

*> solve(t^3-2*t=0);*

$$0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$$

> A:=matrix([[0,2,2],[2,0,0],[1,0,0]]);

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> rank(A);

2

>A:=matrix([[sqrt(2),2,2],[2,sqrt(2),0],[1,sqrt(2),sqrt(2)]]);

$$A := \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2 & 2 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

> rank(A);

2

> A:=matrix([[-sqrt(2),2,2],[2,-sqrt(2),0],[1,-sqrt(2),-sqrt(2)]]);

$$A := \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 2 & 2 \\ 2 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

> rank(A);

2

Comentario

Tiempo	Maple	Sin Maple
Media	10 min. 30 seg.	10 min. 45 seg.
Desviación típica	3 min. 27 seg.	4 min. 23 seg.
Nivel de acierto		
Media	7,75	7,25
Desviación típica	2,49	2,67

1. Los resultados son prácticamente iguales en cuanto a tiempo y resultados.

2. Los errores que se realizan más habitualmente con Maple son los siguientes: calculan el rango de la matriz *A* con la orden *rank(A)* sin tener en cuenta la presencia del parámetro *t*, olvidan el estudio de alguno de los casos que resultan de resolver la ecuación *det(A) = 0* o introducen incorrectamente los datos.

3. Sin embargo los fallos en el resolución clásica son otros: equivocación en el cálculo del determinante de *A*, en la resolución de la ecuación *det(A) = 0* o en la determinación del rango de *A* para los casos 0, $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$. Es decir, el análisis cuantitativo de resultados es similar, mientras que el cualitativo es bastante diferente.

Ejercicio 4
Dada la matriz cuadrada de orden 4,

$$A = \left\{ a_{ij} = \frac{1}{i+j} \right\}$$

calcula su inversa y comprueba después que el resultado es correcto.

Solución
> with(linalg):
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace

> A:=matrix(4,4,(i,j)->1/(i+j));

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

> B:=inverse(A);

$$\begin{bmatrix} 200 & -1200 & 2100 & -1120 \\ -1200 & 8100 & -15120 & 8400 \\ 2100 & -15120 & 29400 & -16800 \\ -1120 & 8400 & -16800 & 9800 \end{bmatrix}$$

*> evalm(A&*B);*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comentario

Tiempo	Maple	Sin Maple
Media	2 min. 30 seg.	25 min. 34 seg.
Desviación típica	1 min. 5 seg.	5 min. 46 seg.
Nivel de acierto		
Media	9,65	4,75
Desviación típica	1,15	2,67

1. Los resultados que aparecen en el cuadro hablan por sí mismos, tanto si tenemos en cuenta el tiempo utilizado como el índice de error.

2. El total de alumnos y alumnas que obtienen de forma perfecta la solución con Maple asciende a veintinueve. Ninguno consigue resolverlo a mano.

3. En la resolución a mano la gran mayoría de la clase tiene claro el significado del concepto de matriz inversa y el algoritmo a seguir para calcularla, sin embargo, todos y todas cometen, antes o después, fallos en las operaciones.

Sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicio 1
Discute y resuelve, en caso de ser posible, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + 2y - z - t &= 1 \\ 2x - y + 2z - t &= 2 \\ x + 2y + 3z + 2t &= -1 \\ x + 2y + 7z + 3t &= -3 \end{aligned}$$

Solución
> with(linalg):

> A:=matrix([[1,2,-1,-1,1],[2,-1,2,-1,2],[1,2,3,2,-1],[1,2,7,3,-3]]);

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 7 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

> gaussjord(A);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{10} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Comentario

Tiempo	Maple	Sin Maple
Media	2 min. 58 seg.	23 min. 27 seg.
Desviación típica	1 min. 19 seg.	4 min. 14 seg.
Nivel de acierto		
Media	8,83	5,23
Desviación típica	2,48	2,13

1. Los resultados y sus causas son similares a los obtenidos en el ejercicio 4 del bloque de matrices. Nuevamente estamos ante un ejercicio de difícil solución manual y de solución extremadamente sencilla utilizando Maple.

2. Sin usar Maple, en esta ocasión ningún alumno llega a la solución correcta, aun teniendo claro el algoritmo a utilizar, mientras que ayudados del programa obtienen el resultado correcto 31 alumnos y alumnas.

3. Otra vez los errores provienen de la falta de atención a la hora de introducir los datos.

Ejercicio 2

Discute el siguiente sistema de ecuaciones que sigue teniendo en cuenta el valor de a. Resuélvelo para el caso a = 2:

$$ax + y + z = 4$$
$$a - ay + z = 1$$
$$x + y + z = a + 2$$

Solución

> *with(linalg):*

Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace

> *A:=matrix([[a,1,1,4],[0,-a,1,1-a],[1,1,1,a+2]]);*

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -a & 1 & 1-a \\ 1 & 1 & 1 & a+2 \end{bmatrix}$$

> *gaussjord(A);*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{a-2}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{2a^2-3}{a^2-1} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{a^3+a^2-2a-1}{a^2-1} \end{bmatrix}$$

> *solve(a^2-1=0);*

1, -1

> *A:=matrix([[2,1,1,4],[0,-2,1,1-2],[1,1,1,2+2]]);*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

> *gaussjord(A);*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{7}{3} \end{bmatrix}$$

Comentario

Tiempo	Maple	Sin Maple
Media	5 min. 20 seg.	8 min. 57 seg.
Desviación típica	2 min. 13 seg.	2 min. 48 seg.
Nivel de acierto		
Media	6,61	6,01
Desviación típica	2,33	3,12

1. La media en la resolución con Maple baja ostensiblemente debido a la repetición por parte de diez alumnos y alumnas del mismo fallo: en la segunda ecuación no pasan a la derecha del igual la *a*, con lo cual al ejecutar la orden *gaussjord* obtienen un resultado diferente al requerido.

2. Además siete alumnos se olvidan de resolver el sistema de ecuaciones para el caso *a* = 2. Esto no ocurre en la resolución a mano que se produce con posterioridad.

Conclusiones finales

1. Los alumnos y las alumnas volvieron a repasar los conceptos para realizar la prueba, motivados por el nuevo recurso, produciéndose como consecuencia mejores resultados en la resolución a mano de los ejercicios propuestos.

2. Es visible la efectividad de Maple a la luz de los resultados obtenidos en tiempos y grado de acierto, especialmente en los ejercicios que necesitan de mayor número de operaciones.

3. Hay problemas de Álgebra Lineal que aparecen en las Pruebas de Acceso a la Universidad de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, donde lo *difícil* es determinar las matrices o los sistemas de ecuaciones que hay que utilizar para su resolución. Después, todo se reduce a simple cálculo, por lo que el uso de Maple nos permitiría resolver muchos más en el aula.

4. La universalización del uso de Sistemas de Cálculo Simbólico posibilitará la mejor comprensión de los conceptos, la reducción de los tiempos de aprendizaje y la inclusión de otros conceptos matemáticos que actualmente no se pueden abordar en Bachillerato debido al tiempo que se emplea en el cálculo.

5. Por último, sólo decir que si algún/a lector/a no esta convencido/a a priori de las bondades que Maple ofrece a la hora de estudiar Matemáticas, basta con que realice *a mano* y *a máquina* cualquiera de los ejercicios que se proponen y compare tiempos y resultados. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BORREGO J., CRUCES J. y otros: *Iniciación a la Matemática Superior*

CRUCES J.: *Ejercicios y Problemas Resueltos de Matemáticas: Álgebra Lineal*

MÉNDEZ CONTRERAS J.A.(2002): *Utilización de Maple como apoyo a la Matemática en el Bachillerato*. FESPM.

SUMA 45
Febrero 2004, pp.59-67

Una caracterización de π obtenida al resolver un problema en clase

La resolución de auténticos problemas, lamentablemente, no es frecuente en clases de matemáticas; sin embargo, su práctica proporciona un efecto muy beneficioso para los alumnos y constituye una buena fuente de información para el profesor sobre los procesos de aprendizaje. Se relata la experiencia realizada por el autor al proponer a alumnos universitarios de primer ciclo un problema -que generó otros- en el que se pedía analizar una suma infinita de radicales superpuestos. Como consecuencia se obtuvo una nueva expresión de la fórmula de Viète para el cálculo de π, así como una caracterización de dicho número.

The resolution of authentic problems, regrettably, is not frequent in classes of mathematics; however, its practice provides a very beneficial effect for the pupils, and constitutes a good source of information for the teacher on the learning processes.In the present article is reported the experience accomplished by the author upon proposing to first cycle university pupils a problem - which at the same time generated others - where it wasrequested to analyze an infinite sum of superposed radicals. As a result it was obtained a new expression of the formulation of Viète for the calculation of π, as well as a characterization of such a number.

En la amplia literatura existente sobre resolución de problemas matemáticos, el concepto de problema se identifica con el planteamiento de situaciones no familiares en las que existen dificultades, pero que pueden ser resueltas mediante aplicaciones significativas (no mecánicas) del conocimiento matemático. Se entiende, por tanto, que para resolver verdaderos problemas se precisan procedimientos matemáticos creativos, esto es, no reducibles a la práctica de meras rutinas; lo que les diferencia de los ejercicios, que se solucionan sin más que reproducir y aplicar métodos y algoritmos rutinarios.

Por otro lado, la actividad matemática desarrollada en la resolución de un problema, puede verse enriquecida si éste es capaz de generar a su vez otros problemas (Bouvier *et al.* 1986, p. 308) o se presenta mediante una formulación algo vaga que permita realizar nuevas conjeturas (Blanco 1993, p. 40). En este último caso se trataría de problemas próximos a pequeños trabajos de investigación, que estarían en sintonía con los denominados problemas abiertos, en los que la descripción de las situaciones de partida y/o de llegada no son expresadas con total exactitud (Penhkonen 1995, p. 95).

Aun así, a pesar de la potencialidad que conlleva la práctica de la resolución de problemas, hasta el punto de que el National Council of Supervisors of Mathematics, por ejemplo, ha situado a aquélla como la primera de las doce componentes esenciales de la enseñanza de las matemáticas del siglo XXI, no obstante, su planteamiento es poco común en las clases de matemáticas. De esta manera, no suele tenerse en cuenta la utilidad de ese recurso para que los propios alumnos puedan detectar determinados errores, superen bloqueos, sientan la necesidad de demostrar sus conclusiones, desarrollen en forma constructiva el espíritu crítico, adquieran la impresión de hacer de verdad algo creativo en matemáticas...; como tampoco, que resulta ser una buena fuente de información para el profesor sobre los métodos de razo-

> *El concepto de problema se identifica con el planteamiento de situaciones no familiares en las que existen dificultades, pero que pueden ser resueltas mediante aplicaciones significativas.*

Javier Peralta
Facultad de Formación de Profesorado y Educación
Universidad Autónoma de Madrid

namiento empleados por los alumnos y acerca de cuáles son los errores, estrategias y obstáculos más comunes.

Por supuesto, estos argumentos siguen siendo válidos en el ámbito de la enseñanza universitaria, donde pueden estimularse, de igual modo, la imaginación y la intuición, además de favorecerse los procedimientos de investigación usuales en matemáticas (inducción, generalización, analogía, establecimiento de conjeturas, técnicas de demostración, etc.). Y es en ese marco donde tuvo lugar la experiencia a la que me voy a referir; concretamente con ocasión del desarrollo de un curso sobre historia de la matemática para estudiantes universitarios de ciencias de primer ciclo. La metodología de trabajo consistía en exponer cada tema y posteriormente proponer uno o varios problemas -en el sentido mencionado- relacionados con el mismo, que debían resolver los alumnos -era una clase poco numerosa- distribuidos en grupos de tres. He de decir además que yo casi nunca había resuelto totalmente con anterioridad tales problemas, con el propósito de poder observar con mayor libertad las dificultades y los progresos de los estudiantes.

Debido a esta última circunstancia, sobre todo al principio tenía una cierta sensación de inseguridad, pues se suscitaban conjeturas o problemas colaterales inesperados y se formulaban preguntas a las que no sabía responder en el acto. Con el tiempo, sin embargo, pude ir apreciando cuáles eran algunas de las consecuencias de esta práctica, como la riqueza de ideas que surge del trabajo en grupo o que quedara constancia delante de los alumnos que el profesor no tenía por qué saber "todo"; además, claro está, me permitió conocer mejor su forma de razonar. A cambio, ciertamente, tuve que trabajar mucho más que si se tratara de una clase organizada de manera tradicional, lo que sin duda redundó en que todos -estudiantes y profesor- aprendiéramos. En cualquier caso, hay que añadir que hubo que dedicar asimismo un tiempo adicional a la búsqueda de dichos problemas, que no siempre fui capaz de encontrar.

Propuesta de un problema

Distintos algoritmos infinitos utilizados en el siglo XVI, como las fracciones continuas y las sumas y productos infinitos, suelen ser considerados los precursores del cálculo infinitesimal; si bien, los razonamientos de índole infinitesimal son casi tan antiguos como la propia matemática, y ya se encuentran rasgos de ello en el método exhaustivo de Eudoxo (s. IV a. C.), puesto en práctica por Arquímedes (s. III a. C.).

Precisamente, a raíz de la obtención de las conocidas expresiones de π de Leibniz, Wallis, Viète ... , observé que, así como en las dos primeras π se presenta de forma relativamente sencilla (como suma infinita y producto infinito, respectivamente, de fracciones elementales), en cambio, en la fórmula de Viète aparecen productos de expresiones radicales ciertamente incómodas de manejar. Aunque, claro está, no me parecía que pudieran suprimirse las raíces, sí creía posible eliminar sus denominadores; toda vez que, a simple vista, lo consideraba factible con sus primeros factores.

La idea inicial para el planteamiento del correspondiente problema –que enseguida enunciaré- fue, por tanto, tratar de hacer una modificación en la fórmula de Viète, cambiando las expresiones de la forma

$$\sqrt{\frac{1}{2}},\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}},\ldots$$

por otras del tipo

$$\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\ldots$$

En relación con ello, se me ocurrió entonces, también, intentar la generalización de estas últimas expresiones; esto es, estudiar la suma infinita:

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots}}}, \quad a>0$$

teniendo en cuenta su aparente presencia en dos casos particulares (parece ser que si a=2 intervendrá en la obtención de π y, si a=1, en una expresión del número áureo, ϕ).

Fue a partir de tales reflexiones como ideé el siguiente problema, que deliberadamente -la razón ya ha sido indicada en la introducción- no quise enunciar en forma cerrada:

Estudia la expresión: (1)

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots}}}, \quad a>0$$

¿En algún caso particular podría utilizarse para el cálculo de π?

Resolución del problema

Estudio de una suma infinita
En virtud de una de las sugerencias didácticas de más frecuente uso en la resolución de problemas, como es comenzar por casos particulares, y con mayor razón aún en este ejemplo concreto, en el que, como se indica, será preciso tener presente alguno de ellos, los alumnos empezaron enseguida observando qué sucedía si a tomaba el valor 1. Con una calculadora fueron obteniendo:

$$\sqrt{1}=1$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1}}=1,414213562\ldots$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}} = 1{,}553773974...$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}} = 1{,}598053182...$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}} = 1{,}611847754...$$

...

es decir, "parecía ser" que se tratara de una sucesión monótona creciente.

Aunque algunos alumnos creían suficiente esa sospecha para poder afirmarlo, otros opinaban que era precisa una demostración formal; si bien -como requerían los primeros- no disponían de ejemplos concretos en los que, verificándose un aserto en casos particulares sucesivos, fallara en cambio en el caso general. Me ví obligado entonces a hacer un largo paréntesis para proponer el siguiente ejemplo -ciertamente, muy alejado del problema en cuestión- : *el valor numérico del polinomio $p(x)=x^2-x+41$ para $x=0,1,2,...$, ¿es siempre un número primo?* Una vez resuelto (como es sabido, la respuesta es afirmativa si x=0,1..., 40, pero no lo es para x=41), fue admitido unánimemente que en matemáticas no basta con "fiarse de las apariencias".

Y, ¿cómo probar formalmente entonces que la anterior sucesión (r_n), n=1,2,..., es, en efecto, una sucesión monótona creciente?

Después de varios intentos, algunos grupos quedaron bloqueados, y fue preciso, en primer lugar, hacer las siguientes indicaciones: ¿cuál es la expresión de la sucesión? ¿es posible definir una sucesión mediante una relación entre sus términos? Ello fue suficiente para que consiguieran expresar (r_n) por recurrencia: (2)

$$r_n = \sqrt{1+r_{n-1}},\, r_1 = \sqrt{1}$$

y así definida no les fue difícil demostrar su monotonía.

A continuación, pregunté: ¿la sucesión es divergente? ¿tiene límite?, y, en caso afirmativo: ¿cómo se calcula? ¿conocéis alguna otra sucesión en la que se hayan tenido que realizar razonamientos de este estilo? Aunque estas preguntas bastaron para la mayoría de grupos, hubo uno en que no se recordaba casi nada de las propiedades de las sucesiones ni de la construcción del número *e*, por lo que se les propuso su estudio, mientras los demás grupos trabajaban en silencio.

Finalmente, todos fueron capaces de demostrar por inducción que la sucesión estaba acotada superiormente por 2 (a la vista de los valores de sus primeros términos) y todos, menos el grupo mencionado anteriormente -a pesar del estudio complementario que acababan de realizar, su conocimiento y manejo de las sucesiones seguía siendo insuficiente- calcularon su límite l resolviendo la ecuación: (3)

$$l = \sqrt{1+l}$$

lo que condujo a que $l=\phi$ (la otra solución,

$$\phi' = \left(1-\sqrt{5}\right)/2$$

carece obviamente de sentido).

Así pues: (4)

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}} = \phi$$

Para estudiar el caso siguiente, correspondiente a a=2, los alumnos consideraron de modo análogo la sucesión (s_n), n=1,2,..., siguiente: (5)

$$s_n = \sqrt{2+s_{n-1}},\, s_1 = \sqrt{2}$$

que ya no tuvieron dificultad en probar que es monótona creciente y está acotada superiormente por 2. Procediendo de manera similar a la anterior, esto es, razonando por analogía (buscando similitudes entre el método o la solución de un problema conocido ya resuelto y el que tratamos de resolver), llegaron a que su límite es 2: (6)

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}} = 2$$

Los dos casos particulares dieron la pauta para abordar el general con a>0 arbitrario, y los alumnos construyeron la sucesión (t_n), n=1,2,..., siguiente: (7)

$$t_n = \sqrt{a+t_{n-1}},\, t_1 = \sqrt{a}$$

Así como les fue sencillo probar que se trata de una sucesión monótona creciente, no lo fue tanto hallar una cota superior. Tras alguna reflexión, los diversos grupos propusieron como posibles cotas superiores: 2, a, 2a, y a+1 (nótese que la primera posibilidad fue fruto de un incorrecto razonamiento por analogía -la búsqueda de regularidades con los dos casos particulares anteriores, en los que 2 era una cota superior, les indujo a pensar que también lo sería en el caso general- ; en las otras tres, sin embargo, se admitía que las cotas debían depender de a, aunque me daba la impresión de que se habían limitado a buscar apresuradamente tales expresiones simples, sin comprobar que fueran cotas). No obstante, en cuanto hicieron los cálculos oportunos, probaron por inducción que, de las cuatro propuestas, sólo a+1 era cota superior (tuve ocasión de percibir entonces que existían problemas en la resolución de inecuaciones, tales como :

$$\sqrt{a} < a \text{ o } \sqrt{a} < 2a$$

y, en general, con el uso de desigualdades).

Como consecuencia, quedó demostrado que si a>0, la sucesión es convergente y, repitiendo el proceso seguido anteriormente para calcular el límite, comprobaron de igual modo que el límite de la sucesión (t_n) es

$$\left(1+\sqrt{1+4a}\right)/2$$

esto es: (8)

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots}}} = \left(1+\sqrt{1+4a}\right)/2$$

Por ejemplo:

$$\sqrt{0{,}25+\sqrt{0{,}25+\sqrt{0{,}25+\ldots}}} = \left(1+\sqrt{2}\right)/2$$

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}} = 3, \sqrt{11+\sqrt{11+\sqrt{11+\ldots}}} = \left(1+3\sqrt{5}\right)/2, \ldots$$

Relación con la fórmula de Viète

Tras un largo debate previo, se llegó finalmente a la conclusión de que, de las fórmulas conocidas para el cálculo de π, solamente en la de Viète: (9)

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ldots$$

sus factores guardan cierta analogía con un caso particular de (1): el correspondiente a a=2.

Habría entonces que tratar de transformar expresiones de la forma:

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\ldots}}}$$

en otras del tipo:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$$

Comparando tales expresiones en casos particulares:

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{4\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}, \ldots$$

parece ser que cada suma parcial de la primera es la mitad de la correspondiente a la segunda.

Pregunté si ello era suficiente para poder afirmar que la igualdad era válida en el caso general; y ahora todos los grupos ya estuvieron de acuerdo en que no, pues era necesario probarlo formalmente. Les invité entonces a que así lo hicieran, sin ninguna otra indicación por mi parte.

Me di cuenta entonces de que la comparación de ambas sucesiones les resultaba difícil sin crear previamente una “organización” conveniente en el problema. Solamente un grupo avanzaba en la dirección adecuada, pero los demás necesitaban una ayuda para concebir un plan; por lo que me vi obligado a decirles que trataran de poner en práctica las ideas de Polya.

Todos los grupos se dieron cuenta poco después de que ya habían estudiado algo relacionado con este problema, pues la segunda sucesión era la (s_n) vista antes e, igualmente, casi todos entendieron que era necesario introducir una notación adecuada para manejar la primera sucesión, extremo que hube de sugerir explícitamente a dos grupos que no habían caido en ello. Con este planteamiento, todos definieron la sucesión (s'_n) del siguiente modo: (10)

$$s'_n = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s'_{n-1}}, s'_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

que había que comparar con (s_n) de (5).

Procedieron luego por el método de inducción, y como $s'_1=s_1/2$, y si $s'_{n-1}=s_{n-1}/2$, de la misma forma:

$$s'_n = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s'_{n-1}} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}s_{n-1}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+s_{n-1}} = \frac{1}{2}s_n$$

con lo que quedó demostrado realmente que: (11)

$$s'_n=s_n/2$$

Entonces, la fórmula de Viète, que puede expresarse: (12)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{s'_1\ldots s'_n}$$

igualmente cabe ser presentada de esta forma: (13)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{s_1\ldots s_n}$$

o bien: (14)

$$\pi = \lim_{n\to\infty} u_n$$

siendo (u_n), n=1,2,..., la sucesión de término general: (15)

$$u_n = \frac{2^{n+1}}{s_1\ldots s_n}$$

Finalmente, la forma (9), que es como habitualmente se expresa la fórmula de Viète, puede también presentarse, por tanto, del siguiente modo: (16)

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdots\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}{2}\cdots$$

Análisis de la solución
Algunos alumnos mostraron en este momento la conveniencia de examinar la solución obtenida, tal como sugiere Polya (1986, p. 53), y ya habíamos hecho en otros casos. Esta visión retrospectiva, consistente en "reexaminar el resultado y el camino que les indujo a ella" (*ibid.*, p. 35), es fundamental en el proceso de descubrimiento, pues, además de permitir la detección de errores o la sustitución de una hipotética vía larga y complicada por otra más corta y simple, puede abrir nuevas líneas de investigación en el problema planteado o, acaso, una vez sintetizados los pasos realizados, ser de utilidad en otras ocasiones al volver a ponerlos en práctica.

En el problema que nos ocupa, recordemos que partiendo de la expresión (1), el razonamiento por analogía nos ha llevado a la fórmula de Viète, que finalmente hemos sido capaces de expresar de otra forma equivalente al considerar en aquélla el caso particular a=2. Pero, dejando momentáneamente de lado la analogía algebraica -o analítica- con la fórmula de Viète, ¿qué significado tiene ésta? ¿de dónde surge?

En la revisión del proceso de deducción de la mencionada fórmula -véase por ejemplo Peralta (1996, pp. 92-93)-, se observa que se ha obtenido al pretender hallar las áreas de los polígonos regulares inscritos en la circunferencia unidad, a los que, partiendo del cuadrado, se les va duplicando sucesivamente el número de lados. De este modo, el área del polígono "tiende" al área del círculo; o sea, a π. Por tanto, la fórmula de Viète se sustenta en las ideas del método exhaustivo de Eudoxo.

Aunque mayoritariamente los alumnos realizaban bien los cálculos, algunos no designaban de forma conveniente los elementos del problema para la posterior generalización de los resultados.

El hecho de haber llegado a este punto me parece crucial, pues es a partir de esta reflexión como puede plantearse una nueva línea de investigación en el aula, es decir, el problema enunciado era a su vez generador de otros problemas (lo que -he de confesar- yo no había pensado al proponerlo, pero sin embargo ahora ofrecía otras posibilidades). Con todo, para establecer una conclusión y concebir un camino a seguir, hubo que hacer un debate entre los distintos grupos y realizar alguna insinuación sobre una posible dirección. Finalmente, algunos alumnos sugirieron volver a utilizar el método de Eudoxo, pero calculando ahora perímetros en vez de áreas, para ver si existía o no analogía con la expresión (16) [o (9)]; lo que les pareció bien a los restantes.

Otra línea de investigación

Cálculo de perímetros
Se procedió entonces a hallar los perímetros de los polígonos regulares inscritos en la circunferencia unidad, a los que se les duplica reiteradamente el número de lados, empezando por el cuadrado. Lógicamente, los estudiantes comenzaron a trabajar por los casos más sencillos: cuadrado, octógono regular ...

Observé entonces que, aunque mayoritariamente los alumnos realizaban bien los cálculos, algunos no designaban de forma conveniente los elementos del problema para la posterior generalización de los resultados. En realidad, ya había comprobado algo parecido en problemas de modelización, esto es, cuando se trata de dotar a un sistema de esquemas estructurados con una organización matemática; pero no pensé que en casos como éste, en que la situación de partida es indudablemente matemática, el hecho de tener que adoptar una notación adecuada fuera un auténtico obstáculo para su resolución. No obstante, una pequeña sugerencia en este sentido y, posteriormente, las ideas que algún alumno transmitió a sus compañeros de grupo, fueron suficientes para desatascar la situación de los diferentes grupos.

Designando por l_n y P'_n, respectivamente, el lado y al semiperímetro del polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia, obtuvieron:

$$l_4=\sqrt{2},\ P'_4=2\sqrt{2};$$
$$l_8=\sqrt{2-\sqrt{2}},\ P'_8=4\sqrt{2-\sqrt{2}};$$
$$l_{16}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ P'_{16}=8\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}};\ldots$$

Y probaron después por inducción que: (17)

$$l_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-l_n^2}}$$

Por otra parte, los índices de la sucesión de semiperímetros (4, 8, 16 ...) se correspondían con el número de lados de sus respectivos polígonos, pero indiqué que parecía más conveniente ordenar sus términos de la forma habitual (1, 2, 3 ...), y no hubo problemas en realizar el cambio de notación:

$$P_n = P'_{2^{n+1}}$$

Así, la sucesión (P_n) de semiperímetros convergía a π, como era de esperar: (18)

$$P_1 = 2\sqrt{2} = 2{,}82847125...;$$

$$P_2 = 4\sqrt{2-\sqrt{2}} = 3{,}061467459...;$$

$$P_3 = 8\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 3{,}121445152...;$$

$$...$$

$$P_n = 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\overset{n}{\dots}+\sqrt{2}}}}$$

Esto es: (19)

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\overset{n}{\dots}+\sqrt{2}}}}$$

Dos nuevas ideas

A continuación, se suscitaron dos ideas, que animé a que desarrollaran de forma independiente los grupos en los que había surgido cada una de ellas, a lo que se dedicaron -a una y otra- los restantes equipos:

1) Comparar el valor de los términos de las dos sucesiones convergentes a π: (P_n) obtenida en (18), y (u_n) definida en (15). Calculando estos últimos:

$$u_1 = \frac{4}{s_1} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2{,}828427125...;$$

$$u_2 = \frac{8}{s_1 s_2} = \frac{8}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 3{,}061467459...;$$

$$u_3 = \frac{16}{s_1 s_2 s_3} = \frac{16}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} = 3{,}121445152...$$

$$...$$

parece que se deduce que las sucesiones (P_n) y (u_n) son coincidentes.

2) Hubo un grupo de alumnos que no se limitó a hallar los perímetros, sino que, a la vista de las reflexiones hechas más arriba, fue calculando simultáneamente las áreas, para tratar de establecer asimismo relaciones entre ambas expresiones.

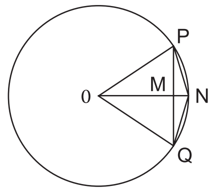
Empezando el estudio por casos particulares, llegaron en esa tentativa a una conclusión que me comunicaron (en voz baja), y me sorprendió: "el área del octógono regular coincide con el semiperímetro del cuadrado inscrito". Pregunté si estaban absolutamente seguros de ello, con lo que volvieron a repasar sus cálculos sin prestar atención a nada más, y poco después, probablemente cegados por su "descubrimiento", se reafirmaban en su aserto.

Les invité entonces a que dijeran a los demás grupos su resultado, esperaran un poco a que entendieran su contenido, y luego trataran de convencerles de ello. Como transcurrido un tiempo nadie planteó objeción alguna, comenzaron a hacer los cálculos oportunos para probar su tesis.

He de decir al respecto que no era la primera vez que escuchaba aseveraciones de este estilo; así por ejemplo, en cierta ocasión en una clase de Educación Secundaria, al estudiar la inecuación $x^2>x$, donde x representaba la medida de la longitud del lado de un cuadrado, un alumno preguntó si siempre que $x>1$ el área de un cuadrado era mayor que su perímetro; pero no esperaba encontrarme con este tipo de confusiones en la universidad [según se dice en Bouvier et al. (1996, p. 200), matemáticos de cierto renombre, como Anatolius (s. III a. C.), también han incurrido en errores similares]. Siendo así, me pareció que debía intervenir, pues sería difícil que sin una indicación por mi parte llegaran a detectar su equívoco.

Formulé entonces la siguiente pregunta: ¿qué es mayor, la distancia de Madrid a Sevilla o la superficie del estadio de fútbol del Real Madrid? ... Aunque casi sin pensarlo hubo quien respondió que la primera, enseguida se dieron cuenta de lo absurdo de la afirmación, así como de aquella que comparaba el área del octógono con el semiperímetro del cuadrado. En consecuencia, hube de proceder a revisar los conceptos de cantidad, magnitud y unidades de longitud y de superficie, que no todos tenían claros.

Reflexionando sobre la proposición anterior, una vez que los alumnos la enunciaron correctamente, esto es, en términos de medidas de cantidad de longitud y de superficie, he de reconocer que no conocía ese resultado; que, por otra parte, parecía poder ser generalizado. Los alumnos no tuvieron entonces grandes dificultades en proceder a su demostración, toda vez que ya habían realizado antes razonamientos de este estilo [identidad (17)]. Y, en efecto:



si

$$l_n = \overline{QP} \quad \text{y} \quad l_{2n} = \overline{QN} = \overline{NP}$$

designando por A_n el área del polígono regular inscrito de n lados, se tiene:

$$A'_{2n} = 2n \cdot area(OPN) = 2n \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{ON} \cdot \overline{MP} = n \cdot \frac{1}{2} l_n = P'_n$$

Por tanto, $A'_{2n} = P'_n$; o también, llamando

$$A_k = A'_{2^{k+1}},$$

$$A_{n+1}=P_n \qquad (20)$$

Puesta en común

Llegados a este punto, hubo una puesta en común de las dos conclusiones a las que se había llegado. De su confrontación y posterior debate parecía deducirse que ambos resultados eran en realidad el mismo: al primero de ellos se había llegado aritméticamente (tan solo operando con los términos de las dos sucesiones implicadas), mientras que el segundo se había conseguido geométricamente (comparando las medidas de las cantidades de longitud y superficie de los semiperímetros y las áreas, respectivamente).

Su coincidencia, en efecto, queda en evidencia al revisar la demostración de la fórmula de Viète, pues el área del polígono regular inscrito de 2^{n+1} lados es:

$$A_{n+1} = A_{2^{n+2}} = \frac{2}{s'_1 \ldots s'_n}$$

lo que en virtud de (11) y (15), significa que: (21)

$$A_{n+1}= u_n$$

Como consecuencia de (20), se tiene finalmente: (22)

$$u_n=P_n$$

En resumen, casi todos los grupos habían llegado, tan solo con pequeñas sugerencias mías a que: (23)

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\overset{n}{\cdots}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\overset{n}{\cdots}+\sqrt{\frac{1}{2}}}}} =$$

$$= \frac{2^{n+1}}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\overset{n}{\cdots}\sqrt{2+\sqrt{2+\overset{n}{\cdots}+\sqrt{2}}}} =$$

$$= 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\overset{n}{\cdots}+\sqrt{2}}}}$$

Por tanto, la fórmula de Viète puede expresarse indistintamente de las siguientes formas: (24)

$$\frac{2}{\pi} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\overset{n}{\cdots}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\overset{n}{\cdots}+\sqrt{\frac{1}{2}}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\overset{n}{\cdots}\sqrt{2+\sqrt{2+\overset{n}{\cdots}+\sqrt{2}}}}{2^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}+\overset{n}{\cdots}+\sqrt{2}}}}$$

Una visión retrospectiva

Al realizar de nuevo una visión retrospectiva de todo el proceso seguido en la resolución del problema (recordemos que fue muy productivo este análisis cuando obtuvimos el primer resultado), una vez obtenido que: (25)

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\overset{n}{\cdots}+\sqrt{2}}}}$$

y teniendo en cuenta que hemos partido de la expresión (1), cabía preguntarse si la sucesión (v_n) que se definirá a continuación sería o no convergente y, en caso afirmativo, cuánto valdría su límite (se supone que $a> 0$): (26)

$$v_n = a^n\sqrt{a-\sqrt{a+\sqrt{a+\overset{n}{\cdots}+\sqrt{a}}}}$$

Para poder manejar esta expresión, y tal como se hizo en otros momentos, fueron algunos los que sugirieron que también ahora sería oportuno introducir una notación adecuada. Si definimos la sucesión auxiliar (t'_n) en función de la sucesión (t_n) de (7), (27)

$$t'_n = \sqrt{a-t_{n-1}},\ n\ge 2;\ t'_1 = \sqrt{a}$$

los términos de (v_n) resultan ser: (28)

$$v_n = a_n \times t'_n \quad , \quad n=1,2, \ldots$$

Una vez ordenadas así las cosas, ¿qué hicieron los alumnos para hallar el límite de la sucesión (v_n)?:

- Aquellos que habían mostrado un peor dominio de las sucesiones, no pudieron casi ni comenzar a calcularlo, debido a la profusión de sucesiones involucradas.

- La mayoría afirmaba que el límite era 0 si $a<1$, infinito si $a>1$ (debido en ambos casos a la influencia del primer factor de v_n) y dudaban qué sucedía si $a=1$.

- Tan solo un grupo -por iniciativa de uno de sus componentes- se dedicó a estudiar cuál era el límite del segundo factor de v_n . En virtud de (8), llegó a que:

$$\lim_{n\to\infty} t'_n = \sqrt{a-\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}}$$

pero no sabía como seguir.

Pedí que explicaran a los demás lo que habían conseguido, y que todos estudiaran la existencia de este último límite (se entiende que perteneciente a **R**).

No costó mucho probar que debía ser

$$a-\frac{\left(1+\sqrt{1+4a}\right)}{2}\ge 0$$

de donde dedujeron que $a \ge 2$. Por el contrario, si $a<2$ la sucesión (t'_n) no tiene límite y, en consecuencia, tampoco la (v_n)

(en realidad -precisé yo-, en tal caso, la sucesión ni siquiera está definida; así, puede comprobarse que si a=1, v_n no es un número real si $n \geq 3$; si a=1,9, v_n no es un número real si $n \geq 4$ etc.).

Por otro lado, si $a \geq 2$ la sucesión (a^n) es divergente [también lo es si a>1, aunque, como ya se ha estudiado, si a<2 no existe el límite de la sucesión (v_n)]; pero al ser (v_n) producto de dos funciones, si la otra tendiera a un número k distinto de 0, (v_n) sería divergente. ¿Cuál es entonces la única posibilidad de que (v_n) sea convergente?, pregunté.

Casi todos los grupos contestaron correctamente -salvo aquel que se manejaba peor con las sucesiones, que en toda esta parte no le resultó fácil presentar iniciativas: la única posibilidad de que (t'_n) tienda a cero es que:

$$a = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$$

Como la solución válida de esta ecuación es a=2, todo ello significa que (v_n) sólo puede ser convergente en este caso. Se ha visto, además, que efectivamente en ese supuesto el límite de v_n es π.

Se ha demostrado, por consiguiente, que:

"Si a>0,

$$\lim_{n\to\infty} a^n \sqrt{a-\sqrt{a+\sqrt{a+\overset{n}{\cdots}}}}$$

es finito si y sólo si a=2; en tal caso, dicho límite es π. La sucesión es divergente o no tiene límite si y sólo si a>2 ó 0<a<2, respectivamente".

Por otro lado hice ver a los alumnos que esta propiedad tan especial del número π puede considerarse que en cierto modo guarda un cierto parecido con la siguiente, bien conocida, exclusiva asimismo del número e, el otro número equiparable en importancia a π:

"Si a>0,

$$\lim_{n\to\infty}\left(a+\frac{1}{n}\right)^n$$

es finito y distinto de cero si y sólo si a=1; en tal caso, dicho límite es e. La sucesión es divergente o su límite es cero si y sólo si a>1 ó 0<a<1, respectivamente".

Aunque, como es sabido, existen otras analogías entre dichos números, más claras sin duda que la anterior: la denominación de los dos corresponde a Euler; Lambert probó en 1767 la irracionalidad de π, y también de e^m para m racional; las demostraciones de la trascendencia de ambos tuvieron lugar en la misma época (en 1873 la de e y en 1882 la de π, debidas a Hermite y Lindemann, respectivamente) y con técnicas muy similares; en la expresión decimal de ninguno de ellos se ha encontrado regularidad alguna; los dos surgen de manera natural: π al hallar el área de un círculo y e al acumular continuamente el interés producido por un capital etc.

La resolución de problemas en grupos bajo guía del profesor y el debate posterior, puede favorecer en los alumnos el desarrollo del espíritu crítico y el convencimiento de que es necesario justificar las respuestas.

Reflexión final

Recordemos, sin embargo, que cuando planteé el problema había previsto tan solo llegar a una nueva presentación de la fórmula de Viète: la reflejada en (16); no sospeché, en cambio, que pudiera conducirnos también a otra expresión diferente: la que aparece en (19) y en la última parte de (24). Mucho menos supuse que se hiciera patente la singular propiedad de π mencionada más arriba que, en cierto modo, se asemeja a otra correspondiente al número e.

Hay que tener en cuenta que, como se ha visto, los resultados se consiguieron a raíz de la propuesta de un problema – que a su vez generó otros- con todo su potencial creativo; aunque no fue un problema del todo abierto, al menos en el sentido de Bouvier *et al.* (1986, p. 341). Sin embargo, el enfoque que en ese texto y otros muchos se da a los problemas abiertos está dirigido fundamentalmente a alumnos de enseñanza secundaria, y su planteamiento suele realizarse en un dominio conceptual más familiar a aquéllos; mientras que en este caso se ha tratado de estudiantes universitarios y se ha desarrollado en un contexto de nociones esencialmente matemáticas, y con recursos más técnicos. A pesar de lo cual, y con independencia de los resultados obtenidos, la metodología heurística empleada creo que dio sus frutos, y los alumnos realmente trabajaron en matemáticas de forma creativa; además, yo tuve información de primera mano sobre sus errores y modos de razonamiento.

Puedo decir que obtuve las siguientes conclusiones:

- El problema, en realidad, la cadena de problemas originada a raíz del primero, constituyó un entorno adecuado para el aprendizaje y el uso de conceptos matemáticos (radicales, sucesiones, límites...) y de la historia de la matemática (método exhaustivo, diversas expresiones de π a lo largo de la historia...). Además permitió relacionar distintas nociones de la matemática, lo que en algún momento pudo permitir apreciar su unidad intrínseca.

- Los alumnos que no habían adquirido un dominio suficiente de las sucesiones no fueron capaces, en términos generales, de aprovechar activamente las posibilidades que ofrecía el problema, a pesar de haber tenido la ocasión de repasar, en el transcurso del mismo, cuestiones referentes a aquéllas. En mi opinión, este hecho sirve para corroborar dos ideas: el hecho de la jerarquización y carácter acumulativo de las matemáticas y la necesidad de contar con un período de tiempo de asimilación, interiorización y manipulación de los conceptos antes de profundizar en los mismos.

- Existen lagunas en el uso de desigualdades y en la resolución de inecuaciones estudiados en el bachillerato, incluso en alumnos universitarios de ciencias. También las hay en los conceptos de cantidades, magnitudes y medidas.

- La analogía y la generalización son dos de los recursos más eficaces en la resolución de problemas (al menos así ha sucedido con el aquí planteado). Con todo, a veces no siempre resulta evidente discernir qué elementos son transferibles por analogía o generalización de un problema a otro [así ocurrió al tratar de hallar una cota superior de la sucesión (t_n) definida en (7)].

- La resolución de problemas en grupos bajo guía del profesor y el debate posterior -como el del ejemplo que hemos estudiado-, puede favorecer en los alumnos el desarrollo del espíritu crítico y el convencimiento de que es necesario justificar las respuestas. Así sucedió en este caso en los distintos momentos en que se convino que era preciso probar formalmente las predicciones -generalmente por el método de inducción- que "parecían" ciertas. Por otro lado, cabe decir que, una vez suscitada la preocupación por la demostración rigurosa en los asertos iniciales, los alumnos que antes no eran conscientes de ello, asumieron por sí solos esa necesidad en los procesos siguientes. A todo ello hay que añadir, obviamente, que los estudiantes reforzaron sus técnicas de demostración.

- Debo hacer constar la importancia que me parece tiene el saber organizar un problema matemáticamente con una notación adecuada, y lo beneficioso que puede ser para los alumnos las indicaciones que en ese sentido haga el profesor. El poco *coste* que supondría a éste fomentar esa aptitud, creo que en cambio redundaría muy favorablemente en los estudiantes, hasta el punto de ser suficiente para desbloquear no pocas situaciones.

  Hay que recalcar el alcance del análisis retrospectivo de un problema (también, como en este caso, para generar otros); y, más en general, la validez del método de Polya de resolución de problemas que, a pesar de sus muchos años de vigencia, sigue -en mi opinión- teniendo actualmente una innegable importancia.

- La tarea desarrollada por algún alumno destacado fue realmente inestimable para el trabajo de sus compañeros de grupo. Su cercanía intelectual a los demás –mismo lenguaje, mayor confianza, parecidos intereses ...- seguramente fuera más beneficiosa para los otros –y para él mismo, al tener que afianzar sus conocimientos y mejorar su expresión para hacerse entender- que la labor que en ese sentido pudiera realizar el propio profesor, indudablemente más alejado de la forma de ser de los estudiantes. El trabajo en grupo, por tanto, fue muy provechoso.

- Por último, debo manifestar que, como consecuencia del trabajo desplegado a lo largo del problema: organización matemática de la situación, concepción de un plan -fruto de una metodología heurística-, realización correcta de los cálculos necesarios y empleo de las técnicas de demostración adecuadas (como respuesta a la necesidad de justificar rigurosamente las predicciones), los alumnos tuvieron la impresión de que la actividad matemática desarrollada había sido creativa; opinión que yo también comparto. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BLANCO, L. J. (1993): *Consideraciones elementales sobre la resolución de problemas*. Universitas, Badajoz.

BOUVIER A. et al. (1986): *Didactique des Mathématiques*. Le dire et le faire. Cedic/Nathan, Paris.

PENHKONEN, E. (1995): *Introduction: Use of open-ended problems*. ZDM, 95(2), 55-57.

PERALTA, F. J. (1996): *Una incursión en los números irracionales y algunas ideas para obtener aproximaciones de los mismos*. Universidad Autónoma de Madrid (Cuadernos del ICE), Madrid.

POLYA, G. (1986): *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas, México.

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Comisión Ejecutiva

Presidente: **Florencio Villarroya Bullido**
Secretario General: **Josep Sales Rufí**
Vicepresidente: **Serapio García Cuesta**
Tesorera: **Claudia Lázaro**

Secretariados:
Prensa: **Ismael Roldán**
Revista SUMA: **Francisco Martín Casalderrey/Inmaculada Fuentes Gil**
Relaciones internacionales: **Carmen Azcárate/Sixto Romero**
Actividades: **Xavier Vilella Miró**
Publicaciones: **Ricardo Luengo González**

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemátiques a Catalunya
Presidente: Joan Gómez i Urgellés
UPC Vilanova i la Geltrú, 08800 Barcelona

Organización Española para la Coeducación Matemática "Ada Byron"
Presidenta: Mª Carmen Rodríguez
Almagro, 28. 28010 Madrid

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"
Presidente: Salvador Guerrero Hidalgo
Paseo del Limonar 2, 29016-Málaga

Sociedad Aragonesa "Pedro Sánchez Ciruelo" de Profesores de Matemáticas
Presidente: Florencio Villarroya Bullido
ICE Uni. de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009 Zaragoza

Sociedad Asturiana de Educación Matemática "Agustín de Pedrayes"
Presidente: José Joaquín Arrieta Gallastegui
Apartado de Correos 830. 33400 Avilés (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "Isaac Newton"
Presidenta: Lucía Henríquez Rodríguez
Apartado de Correos 329. 38208 La Laguna (Tenerife)

Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas
Presidente: Constantino de la Fuente
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Víllalar, s/n. 09006 Burgos

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García Cuesta
Avda. España, 14, 5ª planta. 02006 Albacete

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidente: Bienvenido Espinar Cepas
CPR II. Avda. Reina Sofía n.º1. 30009 Murcia

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Manuel Rodríguez Mayo
Apartado de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper"
Presidente: Ricardo Luengo González
Apartado 590. 06080 Badajoz

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas "Emma Castelnuovo"
Presidenta: Carmen da Veiga
C/ Limonero, 28, 28020 Madrid

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: Begoña Martínez Barrera
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidente: Luis Serrano Romero
Facultad de Educación y Humanidades Ctra. Alfonso XIII, s/n. 52005 Melilla

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas Tornamira" Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea Tornamira
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.
Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra.
31006 Pamplona

Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Despacho 305. Facultad de Educación.
Universidad Complutense. 28040 Madrid

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas “A prima”
Presidente: Javier Galarreta Espinosa
C.P.R. Avda. de la Paz, 9. 26004 Logroño

Sociedade Galega do Profesorado de EducaciónMatemática (AGAPEMA)
Presidente: Manuel Díaz Regueiro
Calle García Abad, 3, 1ºB. 27004 Lugo

Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi"
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departament de Didáctica de la Matemática.
Apartado 22045. 46071 Valencia

SUMA 45
Febrero 2004, pp. 69-78

Siete puentes, un camino: Königsberg

En este trabajo se presenta el problema de los puentes de Konigsberg, resuelto por Leonhard Euler, en 1735, como herramienta didáctica que se puede utilizar para introducir a los alumnos en el estudio de la Combinatoria. Se indican también las primeras nociones elementales de la Teoría de Grafos, adaptadas al nivel de conocimiento de estos alumnos, y se comentan algunas aplicaciones de esta teoría a la resolución de problemas relacionados con el que sirve de base al trabajo, como puede ser el problema de dibujar una figura sin levantar el lápiz del papel.

This article deals with the problem of Königsberg bridges *solved by Leonhard Euler in 1735 as the teaching tool for students' introduction to combinatory analysis. Elementary knowledge of the Grafos Theory at student level is also pointed out, as well as some applications of this theory to the solving of problems related to the one central to this work, as can be figure drawing without raising the pencil from the writing paper.*

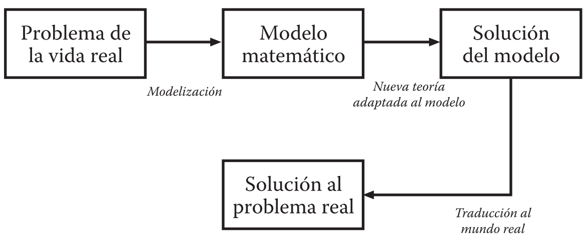
> *Euler calculaba sin aparente esfuerzo, como los hombres respiran o las águilas se sostienen en el aire.*
>
> ***Arago***

Es un hecho constatado que en enseñanza universitaria, cuando en la licenciatura de Matemáticas se presentan a los alumnos las primeras nociones de la Teoría de Grafos, base de la Matemática Discreta, tan en boga actualmente, el Profesor suele recurrir en su primera clase a comentarles el Problema de los Puentes de Königsberg , a fin de lograr varios objetivos a la vez.

En primer lugar, para señalarlo como uno de los problemas —que junto a otros de similar importancia como puedan ser el *Problema de los 4 Colores*, resuelto mediante ordenador por K. Apple y W. Haken, en 1976 o el *Problema sobre Planaridad de Grafos*, resuelto por Kuratowski en 1930 (véase Biggs y otros, 1986: 180 y 147, resp.)— dio lugar al nacimiento de la Teoría de Grafos.

En segundo lugar, como herramienta muy apropiada para ir introduciendo al alumno en los conceptos más básicos de esta teoría, como puedan ser los de *grafo* en sí, *vértices*, *aristas*, *incidencia* y *adyacencia*.

Y finalmente, aunque según el dicho inglés no lo menos importante (*the last, but not the least*), para mostrar a sus alumnos lo que significa un proceso de *modelización* en el que un matemático cuando se le presenta un problema de la vida real lo modeliza, es decir, prescinde del significado físico real de los elementos del problema (zonas de la ciudad y puentes en este caso), crea una nueva teoría matemática adecuada a este modelo (la Teoría de Grafos, en este caso), resuelve el problema según los fundamentos de esta teoría, y posteriormente traduce la solución obtenida (en grafos) a la situación real de partida, es decir, cuando en esquema, realiza las siguientes operaciones:



Juan Núñez Valdés. *Universidad de Sevilla*
María Alfonso Pérez,
Silvia Bueno Guillén,
Mª del Rocio Diánez del Valle,
Mª del Carmen de Elías Olivenza

El origen de este artículo surge de la realización individual de un trabajo sobre los Puentes de Königsberg, por parte de cuatro de sus autoras, alumnas de la asignatura de libre configuración: "Introducción a la Teoría de Grafos y sus Aplicaciones", cursada en la licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Sevilla, durante el primer cuatrimestre del curso 2002-03 e impartida por el autor que resta, profesor del Departamento de Geometría y Topología de la Facultad de Matemáticas de esa Universidad.

Una vez le fueron presentados estos cuatro trabajos por separado al profesor, éste le propone a las alumnas realizar un trabajo unificado conjunto que con la incorporación de algunos aspectos metodológicos y didácticos no sólo contribuyese a mejorar la impartición de la citada asignatura en años venideros, sino que también pudiese servir como una introducción amena y sencilla a la combinatoria que se enseña en Secundaria.

Fruto de todo ello es el artículo que se presenta, que se ha estructurado como sigue: tras esta introducción, se indican los objetivos que los autores se han planteado relacionados fundamentalmente con su aplicación a la introducción de la combinatoria en Secundaria. En las siguientes secciones se ofrecen unas breves pinceladas históricas sobre la ciudad de Königsberg y sobre tres de sus más destacados ciudadanos de los últimos 300 años: el filósofo Immanuel Kant, el físico Gustav Robert Kirchoff y el matemático David Hilbert.

Posteriormente se aborda el núcleo fundamental del artículo. Se exponen el Problema de los Puentes de Königsberg y la solución al mismo (ingeniosa, como se verá) dada por Euler en 1735 y puede observarse el proceso de modelización ideado por Euler para resolver una situación concreta y la formulación de una nueva teoría matemática, la Teoría de Grafos, como base de esta resolución. Como complemento, también se presenta una breve biografía de L. Euler.

Finalmente, se recogen, de forma breve, otros problemas relacionados con el de los Puentes de Königsberg , que pudieran servir al alumno para compararlos con otros parecidos o incluso para inventarse él mismo otros similares.

Objetivos y motivación

La motivación que nos ha llevado a escribir estas líneas obedece a dos razones. La primera de ellas, la de utilizar la historia de las matemáticas para la introducción de determinados temas del currículo.

Si además, en nuestra opinión, esta introducción histórica no sólo se limita a dar unos cuantos datos biográficos del matemático o científico autor de algún resultado que se vaya a ver en clase, sino que además, el profesor explica a los alumnos cómo surgió ese resultado, sus antecedentes, las dificultades que en esa época existían para obtenerlo y su relación con otros resultados, tanto de Matemáticas como de otras disciplinas, seguro que la motivación de los alumnos a la hora de recibir esas enseñanzas y su interés por las mismas aumentan de forma notable y su predisposición para estudiarlas es bastante más elevada que si todo esto no se hubiese llevado a cabo.

La segunda de las razones está relacionada con la anterior; de hecho, pudiera decirse que son complementarias. Si además de todo lo comentado anteriormente, el profesor puede aprovechar esta explicación histórica para introducir el tema presentándo a los alumnos una situación que, aunque pareciera que no tiene nada que ver con lo que después se va a explicar, facilite el que piensen por ellos mismos y sean capaces de ir elaborando ese tema. Esta experiencia es positiva y el profesor habrá conseguido, generalmente con menos esfuerzo del habitual, que los alumnos se hayan motivado más y que los conocimientos sobre ese tema se hayan afianzado de manera más fuerte que en otras condiciones.

Por otra parte, sabido es que la combinatoria es una de las partes de las Matemáticas que a los alumnos de secundaria más les agrada, aunque ciertamente les resulte difícil resolver los problemas. Este tema les gusta por las connotaciones que la combinatoria tiene sobre la vida real. Así, los enunciados de los problemas de combinatoria suelen reflejar situaciones que el alumno, o bien ha experimentado personalmente, o bien entiende que aparecen en la realidad. Los inconvenientes que encuentran a la hora de resolver los problemas, no son las fórmulas en sí, sino las dificultades que surgen a la hora de decidir en las cuestiones que se les plantean si influye o no el orden y si hay o no repetición.

El Problema de los Puentes de Königsberg cumple, en nuestra opinión, los dos requisitos considerados anteriormente, para que el profesor de secundaria pueda realizar una introducción de la combinatoria, sencilla, amena, asequible de entender y fácilmente manipulable por los alumnos, en el sentido esto último de ir ellos mismos probando y obtener deducciones y conclusiones acerca de las preguntas que el profesor plantea sobre el tema.

El alumno, a la vez que el profesor va narrando la historia, puede ir averiguando por sí mismo si existe el camino que se plantea, si la solución, caso de existir, es única o no, si este problema es parecido a otros que pudieran ocurrírsele y en definitiva, si en lugar de llegar a la solución considerando todas las posibilidades, es capaz de formular una estrategia que lleve a la misma de una forma más simple, rápida y lógica a la vez. Todo ello, como puede observarse, son objetivos del estudio de la combinatoria en Secundaria. Si además de todo esto, el profesor logra que los alumnos comprendan la importancia del proceso de modelización en Matemáticas, es decir, de abstraerse de la realidad y dejar de considerar los aspectos irrelevantes del problema para centrarse en los esenciales, mejor que mejor.

Por todo ello, los objetivos que nos hemos planteado son los siguientes:

1. Utilizar la historia de las Matemáticas como herramienta de apoyo para las clases de Matemáticas de Secundaria (este objetivo es extrapolable a la enseñanza universitaria).
2. Ofrecer una introducción amena, sencilla y agradable al estudio de la combinatoria en la Enseñanza Secundaria.
3. Estimular la capacidad de pensamiento y de razonamiento del alumnado de Secundaria con problemas más o menos ingeniosos, distintos de los tradicionales.
4. Facilitar enunciados parecidos al de los puentes de Königsberg para que el alumno intente solucionarlos mediante el uso de estrategias personales.
5. Proporcionar un primer ejemplo, sencillo, de lo que se denomina proceso de modelización en Matemáticas.

Finalmente, antes de terminar esta sección, nos gustaría comentar una nueva posibilidad de utilizar el contenido de este artículo en una actividad no inicialmente prevista por los autores a la hora de redactarlo. Esta posibilidad pudiera ser considerada también como un objetivo más a alcanzar tras su lectura.

La ciudad de Königsberg

La palabra “Königsberg ” significa en alemán “Colina Real”. La ciudad de Königsberg (en algunos textos se escribe Koenigsberg) , actualmente llamada Kaliningrado, se encuentra a orillas del Mar Báltico, en territorio ruso y a unos 50 kilómetros de la frontera con Polonia. Hasta mediados del siglo pasado, Königsberg pertenecía a la nación de Prusia, estando situada al este de la misma. La ciudad estaba atravesada por el río Pregel, que en la actualidad se denomina Pregolya.

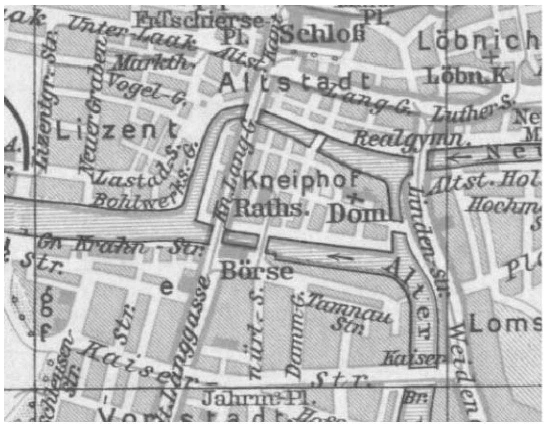
Königsberg tiene su origen en una fortaleza del siglo XIII (aproximadamente hacia 1255) construida por los caballeros teutónicos. Su función era ser el centro de la lucha para expulsar a los eslavos fuera de Prusia e instaurar el régimen germánico. Fue destruida en 1263 por los prusianos, y posteriormente reedificada en 1268. Posteriormente, Königsberg entró a formar parte de la Liga Hanseática en el siglo XIV, hacia 1365. Desde el siglo XVI al XVII albergó a los maestres de la orden teutónica y a los duques de Prusia.

La ciudad sufrió mucho durante la guerra de los siete años, donde la ocuparon primero los rusos, en el siglo XVIII, tras la batalla de Frienland, y luego los franceses, en el siglo XIX. Durante todo ese tiempo y hasta 1945, Königsberg fue la capital de Prusia Oriental, habiendo también pertenecido al Imperio Alemán y al III Reich.

Durante las dos guerras mundiales, Königsberg fue duramente atacada y seriamente dañada. Muchos de sus edificios históricos fueron derrumbados por bombardeos. En 1946, en la Conferencia de Berlín, la ciudad pasó a manos de la antigua URSS, que le cambió el nombre, un año después, por el de Kaliningrado.

La reciente cumbre Unión Europea-Rusia ha confirmado las discrepancias sobre el futuro de Kaliningrado, que probablemente se transformará pronto en un enclave ruso dentro de la Unión Europea.

Königsberg en tiempos de Euler



Kaliningrado, siglo XX

Entre sus principales construcciones se encuentra la **Universidad Albertina**, fundada en 1544 por el duque de Prusia, Alberto de Brandenburgo. Esta universidad pronto se convirtió en un importante centro de estudios al que asistía un gran número de estudiantes por el espíritu de la reforma que predominaba. En el siglo XVII, decayó su importancia debido a las largas guerras y por las continuas disputas teológicas, aunque después, bajo la protección de los reyes prusianos, la universidad alcanzó un nuevo período de esplendor, sobre todo en tiempos del filósofo nacido en la propia ciudad, Immanuel Kant.

La **catedral**, iniciada en el año 1325, es de estilo fundamentalmente gótico alemán. En su interior hay numerosas esculturas y pinturas del renacimiento flamenco. El **palacio** es obra de Von Unfried. En él fueron coronados los principales reyes de Prusia, como Federico III, en 1701 y Guillermo I, en 1861.

Ciudadanos destacados nacidos en Königsberg

En la ciudad de Königsberg nacieron tres de las personalidades científicas y filosóficas más importantes de los últimos tres siglos, contando con el actual. En concreto y por orden cronológico, el filósofo I. Kant, el físico G.R. Kirchoff y el matemático D. Hilbert vieron la luz por primera vez en esta ciudad y pasaron en ella los primeros años de sus vidas. Ofrecemos a continuación en esta sección unas breves notas biográficas de todos ellos.

IMMANUEL KANT, para muchos uno de los más grandes filósofos de todos los tiempos y el pensador más influyente de la era moderna, nació en Königsberg en 1724.

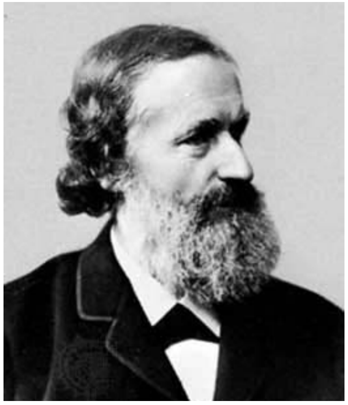
Tras realizar sus estudios primarios, Kant ingresó en la Universidad, donde gustaba del estudio de los autores clásicos. También se dedicó a estudiar física y matemáticas.

La muerte de su padre hizo que Kant tuviese que abandonar sus estudios y ganarse la vida como tutor privado. En 1755, reanudó sus estudios universitarios y obtuvo el doctorado. Posteriormente, impartió clases en la universidad y dio conferencias de ciencias y matemáticas, para llegar paulatinamente a disertar sobre casi todas las ramas de la filosofía.

Durante este periodo, sus escritos y conferencias hicieron que se ganara una gran reputación como filósofo, aunque ello no bastó para que se le concediera una cátedra, que no logró hasta 1770, cuando se le designó profesor de lógica y metafísica. En años posteriores continuó con su labor docente, atrayendo un gran número de estudiantes a su ciudad natal.

Sus nada ortodoxas enseñanzas religiosas le crearon problemas con el gobierno de Prusia, hasta el punto de que el rey, Federico Guillermo II, le llegó a prohibir impartir clases sobre asuntos religiosos, orden que Kant obedeció hasta la muerte del monarca. Ya una vez retirado, en 1978, Kant publicó un epítome con sus ideas en materia religiosa.

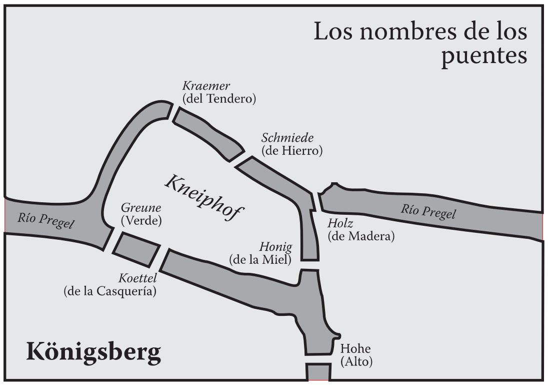
Sus principales obras son: "Los Fundamentos de la Metafísica de las Costumbres", "La Crítica del Juicio" y "Primeros Principios Metafísicos de las Ciencias de la Naturaleza". Kant murió el 12 de Febrero de 1804 en su ciudad natal, donde había pasado toda su vida.



GUSTAV ROBERT KIRCHOFF, físico alemán nacido en Königsberg en 1824, era hijo de un abogado. A los 18 años entró en la universidad de su ciudad, obtuvo el doctorado cinco años después y recibió una beca para continuar estudios de postgraduado en París, adonde no pudo viajar por la revolución de 1848. Fue profesor en Berlín y también en las universidades de Breslay y Heidelberg.

Entre sus descubrimientos científicos más importantes citamos la formulación en 1845 de sus leyes relativas a las corrientes eléctricas en las redes de conductores, sus aportaciones a la física de las radiaciones, que le acreditan como creador del análisis espectral, y su contribución al conocimiento de la constitución íntima de la materia. En 1859 comunicó a la Academia de Berlín la presencia de sodio en el Sol, abriendo de esta forma un nuevo capítulo de la Física: la Astrofísica. Ese mismo año, estableció la ley que lleva su nombre.

En 1860 realizó unas investigaciones sobre las transformaciones del calor en energía luminosa y a partir de 1864, trabajó en diversas cuestiones de la Física, tales como las descargas eléctricas oscilantes, la velocidad del sonido en los tubos sonoros o las características del éter (que entonces se creía existente). Murió en 1887 en Berlín.



DAVID HILBERT. Este eminente matemático alemán nació en Königsberg el 23 de enero de 1862.

Estudió en el instituto y en la Universidad de su ciudad, doctorándose bajo la dirección del profesor Lindemann en 1885. Seguidamente, se incorporó al profesorado de dicha Universidad en 1886, llegando a obtener el título de catedrático. En 1895, reclamado por Klein, consiguió la cátedra de matemáticas en la Universidad de Gottingen, donde continuó toda su carrera profesional.

Hilbert trabajó muchas ramas de la matemática pura y aplicada, como la teoría de la relatividad, la teoría de invariantes, el análisis funcional (son especialmente conocidos sus Espacios de Hilbert), las ecuaciones integrales y el cálculo de variaciones, entre otras. Estos trabajos influyeron de forma notable en la geometría, aumentando su prestigio al participar en el Segundo Congreso Internacional de Matemáticos, celebrado en París a finales del siglo XIX. En su intervención, propuso sus 23 problemas abiertos, muchos de los cuales han sido resueltos abriendo nuevos campos en la matemática.

Se retiró en 1930, siendo nombrado ciudadano de honor de la ciudad de Königsberg . Murió en Gottingen, en 1943. Su lema fue: “Nosotros debemos conocer, nosotros conoceremos”.

El problema de los puentes de Königsberg

Como ya se ha comentado, en el siglo XVII la ciudad de Königsberg estaba atravesada por el rio Pregel (actualmente llamado Pregolya), que se dividía en el Viejo y en el Nuevo Pregel. Este río formaba dos islas a su paso por la ciudad, una de las cuales, la más pequeña, se llamaba la isla Kneiphof.

Para unir las cuatro partes de la ciudad separadas por la geografía, existían siete puentes.

Se cuenta que los domingos por la mañana y los días de fiesta, los habitantes de la ciudad salían a pasear (presumiblemente, para tomar el sol, habida cuenta del frío que debía hacer en Königsberg , dada su situación geográfica) y se entretenían tratando de resolver el siguiente problema: **¿Es posible recorrer todas las zonas de la ciudad, atravesando todos los puentes, una y sólo una vez cada uno de ellos?**

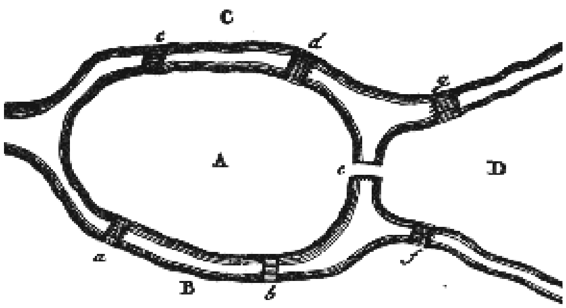
Mientras unos negaban la posibilidad de hacerlo y otros dudaban, nadie sostenía que fuese posible hacerlo realmente. De hecho, es un dato histórico que un comité de jóvenes de la ciudad visitó, en 1735, a Leonhard Euler, matemático suizo nacido en Basilea en 1707, para pedirle que resolviera el conflictivo problema.

La solución de Euler al problema de los puentes de Königsberg

Euler, una vez enterado del problema, se dedicó por completo al estudio del mismo, dando una solución simple e ingeniosa, que servía también para cualquier número de puentes.

Para empezar, Euler formuló el problema de la siguiente manera: “En la ciudad de Königsberg, en Prusia, hay una isla *A* llamada Kneiphof, rodeada por los dos brazos del río Pregel. Hay siete puentes *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* y *g*, que cruzan por los dos brazos del río. La cuestión consiste en determinar si una persona puede realizar un paseo de tal forma que cruce cada uno de estos puentes sólo una vez”.

A los pocos meses Euler presentó un voluminoso informe a la Academia rusa de San Petersburgo, en el que afirmaba haber demostrado la imposibilidad de tal ruta. Posteriormente, publicó un artículo titulado *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* (Euler 1736), en el que resolvía el problema en el caso general, obteniendo condiciones generales para la existencia de soluciones para cualquier problema del mismo tipo. Este artículo es considerado por varios autores como el nacimiento de la Teoría de Grafos, utilizada actualmente en una gran cantidad de aplicaciones, y también como una de las primeras manifestaciones de una *nueva Geometría* en la que únicamente importa la posición de los objetos y no sus medidas. Ya Leibniz había sido el primero en hablar de *geometriam situs*, o geometría de la posición y que actualmente se llama Topología.



Según Euler, todo se basaba en utilizar una notación adecuada. Para ello, Euler llamó *A*, *B*, *C* y *D* a las distintas regiones de Königsberg. El camino que va desde *A* hasta *B* puede ser por el puente *a* o por el *b*, pero Euler lo designó por *AB*. Una vez allí, para ir a *D*, se sigue el camino *BD*, designando la trayectoria total por *ABD*, y así sucesivamente hasta recorrer todas las zonas y puentes, de manera que al final se obtendrá una combinación de ocho letras. Sin embargo esta notación tiene un inconveniente, y es que no tiene en cuenta que para ir de una zona a otra puede que exista más de un puente.

Además, en dicha combinación de letras, el camino *AB* debería aparecer dos veces, ya que también está el *BA*; el camino *CA* habría de aparecer otras dos veces; y tan sólo una los caminos *AD*, *BD*, y *CD*. Por lo tanto, las letras *A*, *B*, *C*, *D*, deben formar una serie de ocho letras, apareciendo el número requerido de veces las combinaciones de las mismas.

Euler vio que esta situación concreta no era posible, ya que, por ejemplo, si se empieza en la región *A*, si esta región sólo conectara con el puente *a*, como puede que se llegue o se venga de ella, la letra *A* aparecería una vez en la combinación de 8 letras. Si hubiera tres puentes que condujeran a la zona, entonces la letra *A* aparecería dos veces. Pero como llegan cinco puentes, en este caso, *A* debe aparecer tres veces en esa sucesión. Similarmente, *B* estaría dos veces; al igual que *D* y *C*. Pero entonces, ya tendríamos nueve letras en la sucesión, cuando para ser la ruta posible únicamente deberían haber ocho. Euler dedujo entonces que no se podía realizar la travesía requerida a través de los siete puentes de Königsberg .

Sin embargo, y como dijimos anteriormente, Euler no se contentó sólo con solucionar esta situación concreta, sino que se dedicó por completo al estudio del problema en general, obteniendo una solución que servía también para cualquier número de puentes.

Para ello, el procedimiento que siguió Euler consistió en lo siguiente: en primer lugar, apuntó en un papel el número de puentes más uno (ocho, en el caso de Königsberg). Después, abajo a la izquierda formó una columna con todas las letras de las regiones (*A*, *B*, *C* y *D*, en este caso). A su derecha, formó una segunda columna con el número de puentes que salen de cada una de las correspondientes zonas (5, 3, 3 y 3, en este caso), marcando con un asterisco aquellas letras de las que salen un número par de puentes. A continuación realizó las siguientes operaciones con los números de la segunda columna: si el número de la segunda columna (número de puentes que llegan a una determinada región) es impar, lo aumentó en una unidad y lo dividió entre dos. Si el número es par, lo dividió entre dos. Euler colocó finalmente a la derecha una tercera columna con las cuentas anteriormente especificadas (3, 2, 2, 2, en nuestro caso).

Euler dedujo entonces que el problema sólo tendría solución si la suma de los números de la última columna es menor o igual que el número inicialmente puesto. Más concretamente, si esta suma es igual al número inicial (8, en este caso), la ruta comienza en una zona no marcada con asterisco, y si es menor, en una señalada. Obsérvese que en el caso de Königsberg , esta suma es nueve, no menor o igual que ocho, por lo que no hay solución al problema de los puentes de Königsberg .

Vamos a realizar, con la perspectiva y conocimientos actuales, algunas observaciones al procedimiento seguido por Euler en su razonamiento, que nos muestran bien a las claras su extraordinaria inteligencia, intuición, agudeza mental y cuantas otras buenas cualidades deseemos atribuirle, con la seguridad de quedarnos cortos en estas apreciaciones e incluso de ser incapaces de captar, en toda su intensidad, la enorme capacidad de razonamiento de tan ilustre personaje. Puede observarse que:

- La suma de los números de la segunda columna, es siempre par, ya que su mitad refleja el número de puentes.
- Si la suma de dichos números se aumenta en dos unidades y luego se divide entre dos, el resultado es el número escrito en la parte superior de la tabla construida.
- Si los números de la segunda columna son todos pares, la tercera columna, formada por las mitades de ellos, sumará una unidad menor que el número escrito inicialmente de la tabla (con lo que la ruta será siempre posible)
- Si en la segunda columna hay sólo dos números impares, la ruta requerida será también siempre posible, porque la suma de la tercera columna coincidirá con el número inicial.
- Si hay más de dos números impares en la segunda columna, la ruta no será nunca posible, pues la suma de la tercera columna superará siempre al número inicialmente escrito.

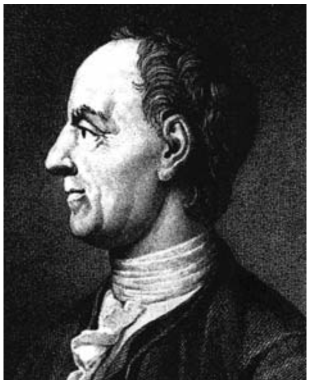
Por tanto, como reglas para cruzar todos los puentes una sola vez, se tienen:

- Si hay más de dos regiones a las que conducen un número impar de puentes, la ruta no será posible.
- Si sólo hay dos regiones a las que llega un número impar de puentes, la ruta se podrá realizar, comenzando en una de esas regiones.
- Si no hay regiones a las que conduzcan un número impar de puentes, la ruta pedida se podrá realizar, comenzando en cualquier punto.

Empleando un lenguaje más actual y propio de las Matemáticas, la solución dada por Euler se podría enunciar así: *La condición necesaria y suficiente para que tal ruta exista es que el número de zonas de la ciudad a las que le llega un número impar de puentes sea 0 (en cuyo caso la ruta será cerrada, es decir, comenzará y acabará en la misma región) o 2 (en cuyo caso la ruta será abierta, es decir, comenzará en una región y terminará en otra distinta).*
Hay que indicar que, en realidad, Euler sólo demostró la condición necesaria en su artículo de 1735, quizás porque para él, la condición suficiente era trivial. Esta condición suficiente tuvo que esperar casi siglo y medio para ser probada, lo que hizo Carl F. Hierholzer, en 1873 (Hierholzer, 1873).

Como anécdotas y antes de terminar esta sección con una breve biografía de Leonhard Euler, señalaremos que en 1875 los alemanes construyeron un nuevo puente en la ciudad de Konisberg, situado entre las zonas B y C, con lo cual ya sí era posible realizar la ruta comentada, si bien el camino era abierto, es decir, no se llegaba al mismo punto de partida. Diremos también que sólo cuatro de los puentes originales de Königsberg en 1735 sobrevivieron a la segunda guerra mundial. Los de Schmiede y Koettel fueron destruidos durante la guerra, los de Kraemer y Greune, fueron reconstruidos por los rusos, que los unieron en la carretera de Leninsky Prospekt y el de Honing fue reconstruido por los alemanes en 1935, por lo que sólo los puentes de Holz y Hohe se conservan actualmente indemnes.

Leonhard Euler



Leonhard Euler es uno de los más grandes científicos de nuestra historia. Su obra aborda todos los campos de las matemáticas y también en astronomía, óptica, acústica y mecánica. Era un hombre entrañable, animoso y alegre, que además, poseía una gran energía en su trabajo.

Euler nació el 15 de abril de 1707 en Basilea (Suiza). Su padre, pastor calvinista, deseaba que su hijo siguiera sus pasos, por lo que Euler inició estudios de Teología. Sin embargo, el mismo padre, que había recibido formación matemática de Jakob Bernoulli (1654-1705), reconoció enseguida el talento de su hijo y abandonó su idea de convertirlo en clérigo. Así, el joven Leonhard estudió en la Universidad de Basilea, teología, lenguas orientales, medicina, astronomía, física y matemáticas, teniendo como profesor de esta última disciplina a Johann Bernoulli (1667-1748). A los 17 años, Euler recibe una mención honorífica de la Academia de las Ciencias de París, por un trabajo sobre la mejor disposición de los mástiles de un barco. No sería ésta la primera vez, ya que Euler consiguió en doce ocasiones dicha mención.

En 1727, fue invitado por la emperatriz Catalina I para que ocupara un puesto en la Academia de San Petersburgo (hoy Leningrado), donde ya trabajaban sus amigos, los hermanos Daniel y Nikolaus Bernoulli, como profesores de matemáticas. Durante el viaje, Euler se entera de la muerte de Nikolaus por lo que a poco de llegar, estuvo a punto de volverse, aunque finalmente no lo hizo. En 1730 ocupa la cátedra de Filosofía Natural y en 1733 sucede a su amigo Daniel, que abandona Rusia para hacerse cargo de una cátedra de Matemáticas en Basilea.

Se decía que Euler producía memorias en media hora, entre la primera y segunda llamada a comer y que componía a menudo sus memorias con un bebé en su regazo mientras que los niños mayores jugaban a su alrededor.

Euler publica incesantemente en la revista de la Academia. Fue el iniciador del análisis matemático y de la geometría analítica de tres dimensiones y hacía cálculos sin ningún esfuerzo aparente. Aplicó también el cálculo matemático a la Astronomía, llegando a resolver un problema astronómico en sólo tres días, cuando en opinión de los astrónomos se hubiesen necesitado varios meses para hacerlo. No obstante, forzó tanto la vista en resolver ese problema que sufrió la pérdida de la visión de un ojo a los 30 años (hecho que le haría ganarse el apodo de cíclope) y sufrió de ceguera casi total durante los últimos 17 años de su vida.

En 1741, recibe otra invitación, esta vez de Federico el Grande de Prusia, para incorporarse a la Academia de Berlín, en donde pasa 25 años. Cuando sus relaciones con el rey se deterioran, acepta en 1766 un nuevo ofrecimiento de Catalina la Grande y vuelve a Rusia.

Euler es considerado una de los autores más prolíficos de la historia. A lo largo de su vida publicó más de 500 libros y artículos. Añadiendo su obra póstuma, se alcanza la cifra de 886 trabajos.

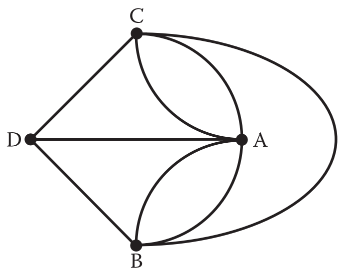
Euler contribuyó al avance de la ciencia, introduciendo y popularizando algunas notaciones en matemáticas: Utilizó la letra *e* para indicar la base del logaritmo neperiano, la letra griega π para designar la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, y la letra *i* para designar la unidad imaginaria.

También en Geometría encontramos huellas de Euler. Utilizó las letras minúsculas *a, b, c* para los lados de un triángulo y las mayúsculas para los vértices y ángulos *A, B, C* opuestos a cada uno de los lados. Llamó *R, r, s*, respectivamente, a los radios de la circunferencia circunscrita, inscrita y al semiperímetro del triángulo. Demostró que el ortocentro (punto donde se cortan las alturas de un triángulo), el baricentro (punto donde se cortan las medianas) y el circuncentro (punto donde se cortan las mediatrices), están alineados, formando la llamada Recta de Euler. Entre sus obras más famosas se encuentran *Introducción al análisis de los infinitésimos*, en 1748, *Instituciones de cálculo diferencial*, en 1755, e *Instituciones de cálculo integral*, en 1768.

Leonhard Euler murió, trabajando hasta el último día, en San Petersburgo el 7 de septiembre de 1783.

Los puentes de Königsberg y la teoría de Grafos

De lo visto anteriormente puede colegirse que la resolución por Euler del problema de los puentes de Königsberg constituye un claro ejemplo de un proceso de modelización. En primer lugar, Euler reemplazó el mapa de la ciudad por un simple *diagrama de puntos* (representando con las letras *A*, *B*, *C* y *D*, las zonas de la ciudad) y *aristas* entre ellos (que representaban los siete puentes. Así, la arista *a* unía las zonas *A* y *B*, la *d*, la *A* y la *C* y así sucesivamente, tal como se observa en la figura). Este diagrama constituye el germen de lo que posteriormente se conocería como *grafo*, razón por lo que muchos autores consideran a Euler como el *padre* de la Teoría de grafos.



Básicamente, un grafo consiste en un conjunto finito de vértices (puntos) y un conjunto finito de aristas (líneas) entre ellos. En un grafo, dos vértices se dicen *adyacentes* si ambos son extremos de una arista. Toda arista es *incidente* con sus vértices extremos y dos aristas se dicen *incidentes* si ambas comparten un vértice común. Se denomina *valencia* (o *grado*) de un vértice al número de vértices adyacentes con él o bien al número de aristas incidentes con él. Por convenio, un vértice no se considera adyacente consigo mismo y los vértices de valencia 0 se denominan vértices aislados.

Relativo a los problemas de incidencia y adyacencia, tiene especial importancia el denominado *Lema del apretón de manos* (Handshake Lemma), según el cual en todo grafo el número de vértices con valencia impar es par.
Un *camino* en un grafo es una sucesión consecutiva de vértices y aristas del grafo, comenzando por un vértice, del tipo v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, ..., v_{r-1}, e_r, de tal manera que cada arista e_i una los vértices v_{i-1} y v_i.

Veamos cómo a partir únicamente de estos dos conceptos básicos, el problema de los puentes de Königsberg puede ser reformulado usando terminología de Teoría de Grafos: el objeto del problema es encontrar un camino (no necesariamente cerrado) sobre un grafo que contenga cada arista del grafo una y sólo una vez. En Teoría de Grafos, un camino de este tipo se denomina, como era de esperar, camino euleriano y Euler probó entonces que el grafo de Königsberg no posee un camino euleriano.

La Teoría de Grafos también permite la resolución de problemas relativos a campos tan separados como puedan ser la lingüística, la investigación operativa, la electricidad, la genética, la sociología, etc. Para una visión más general de los aspectos básicos de esta teoría se puede consultar Bollobas (1985) o Harary (1969).

La Teoría de grafos permite la resolución de problemas relativos a campos tan separados como puedan ser la lingüística, la investigación operativa, la electricidad, la genética, la sociología, etc.

Otros problemas relacionados con el de los puentes de Königsberg

Dibujar una figura sin levantar el lápiz del papel.
El concepto de camino euleriano en un grafo, definido anteriormente, así como la consideración del denominado Lema del Apretón de Manos, permiten dar una interpretación geo-

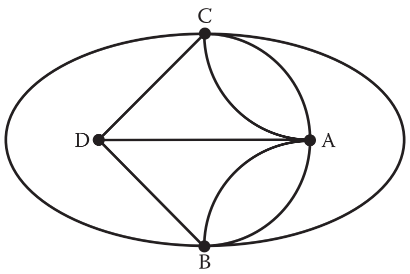
métrica intuitiva y simple de los grafos eulerianos como aquellos grafos que se pueden dibujar sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma arista, permitiéndose sin embargo pasar dos veces por el mismo vértice. En particular, se tienen:

- Todo grafo que no tenga vértices de valencia impar se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma arista. Más concretamente, se puede dibujar empezando desde cualquier vértice, y el dibujo será cerrado, es decir, que termina en el mismo vértice dónde empezó.

- Si un grafo tiene exactamente dos vértices de valencia impar, entonces se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma arista, pero en este caso hay que empezar siempre en uno de esos dos vértices y terminar en el otro. Este es el caso en el que se añade un puente más al problema de los puentes de Königsberg

- Si un grafo tiene 4 ó más vértices de valencia impar, entonces no se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma arista.

Estas sencillas reglas permiten resolver la situación que se planteó en la ciudad de Königsberg , en 1875, cuando se construyó un nuevo puente que unía la orilla *B* con la *C*. ¿Era posible entonces hacer un recorrido de forma que se pase una y solo una vez por cada uno de los puentes? Veamos el grafo que se tiene ahora en este caso:



Ahora hay dos vértices de valencia par (*B* y *C*) y dos con valencia impar (*D* con tres y *A* con 5). Por tanto, sí es ya posible el recorrido, siendo estos dos vértices de valencia impar los vértices inicial y final. Además, el camino es abierto, ya que se empieza en un punto y se termina en otro distinto. Un posible camino podría ser por ejemplo: DCBDACABA.

El juego icosaédrico.
En 1859, Sir William Rowan Hamilton inventó un juego: "The Icosian Game", que consistía en ponerle el nombre de una ciudad a cada uno de los 20 vértices de un dodecaedro. El jugador debía encontrar un camino cerrado que pasara por todas esas ciudades y además exactamente, una y sólo una vez por cada una de ellas (véase Biggs y otros, 1986: 32).

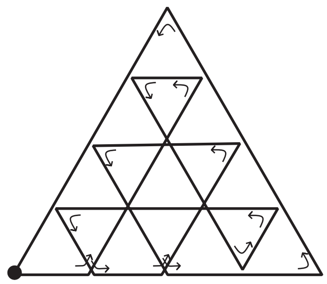
Puede observarse que este juego es muy parecido al de los Puentes de Königsberg , aunque en este caso los papeles de los vértices y de las aristas estén intercambiados entre sí.
El camino anteriormente descrito recibe ahora, en Teoría de Grafos el nombre de ciclo hamiltoniano, para diferenciarlo del ciclo euleriano, ya reseñado.

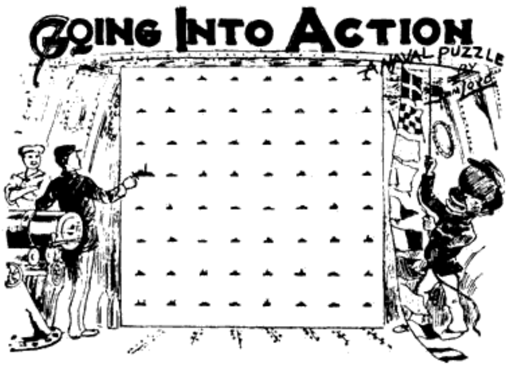
Es similar a éste es el probblema del "salto del caballo", consistente en situar un caballo en cualquier casilla de un tablero de ajedrez y ser capaz de pasar, con el salto del caballo, por todas las restantes 63 casillas del tablero, y además, una sola vez por cada una de ellas. Este problema fue resuelto por Vandermonde, en 1771 (Biggs y otros, 1986: 32).

Algunos pasatiempos de Sam Loyd.

El problema consiste en dibujar el símbolo griego haciendo la menor cantidad posible de cambios de dirección.

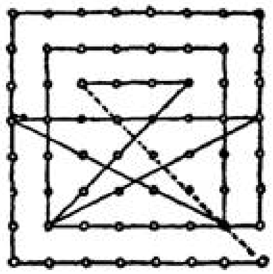
SOLUCIÓN. Puede dibujarse con una línea continua, con trece cambios de dirección:





El problema consiste ahora en conseguir que el barco grande hunda a los sesenta y tres navíos enemigos y regrese al punto de partida con el menor número posible de trazos rectos.

SOLUCIÓN. Ésta es una de las posibles soluciones:



■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BIGGS, N.L., LLOYD, E.K. and WILSON, R.J. (1986): *Graph Theory* 1736- 1936. Clarendon Press. Oxford.

BOLLOBAS, B. (1985): *Graph Theory* . Springer-Verlag, 2ª Edición.

EULER, L. (1736): "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis." *Commentarii Academice Scientarum Imperialis Petropolitane* 8, 128-140.

HARARY, F. (1969): *Graph Theory*. Addison Wesley, Reading, Mass.

HIERHOLZER, C. (1873): "On the possibility of travesing a line-system without repetition or discontinuity", *Mathematische Annalen* 6, 30-32.

SUMA 45
Febrero 2004, pp.79-86

Razonamiento numérico en problemas de promedios

En este trabajo presentamos los resultados de un cuestionario formado por cuatro problemas abiertos, a través de los cuales evaluamos la comprensión de la idea de media aritmética. Analizamos los componentes del significado que asigna una muestra de 53 alumnos de Educación Secundaria a este concepto, y, en particular, su comprensión de propiedades numéricas de este concepto.

We present results from a questionnaire with four open-ended problems, through which we evaluate students' understanding of arithmetic mean. The components of the meaning that 53 secondary school students assign to this concept are analysed, in particular the understanding of numerical ideas behind them.

Las medidas de posición central, en general, son muy utilizadas en estadística, tanto por su propiedad de convertirse en representantes del conjunto de datos, como también por ser la referencia para el estudio de otros temas; un ejemplo de ello es el de la dispersión. El concepto de media es básico para trabajar temas de inferencia estadística, mientras que el concepto de mediana, como estadístico de orden, juega un papel muy importante en la estadística no paramétrica, que tiene un gran interés cuando las distribuciones de partida no se ajustan a la distribución normal, cuando analizamos datos cualitativos u ordinales o cuando nos encontramos con muestras pequeñas. Asimismo es muy utilizada en el análisis exploratorio de datos. Por otro lado, la comprensión de las ideas de promedio forman parte de la cultura estadística básica, o *cultura que nos lleva a la imagen del subconjunto mínimo de habilidades básicas que esperamos de todos los ciudadanos en contraposición a un conjunto más avanzado de conocimientos y capacidades que sólo algunos pueden adquirir* (Gal, 2002).

En este trabajo continuamos nuestras investigaciones sobre las dificultades que los alumnos de Educación Secundaria Obligatoria tienen con las medidas de posición central (Cobo, 1988; 2001; Cobo y Batanero, 2000). Aunque este tema ya se contemplaba en los anteriores planes de estudio, el mayor énfasis que ahora se hace sobre las actividades de análisis exploratorio de datos nos lleva a replantearnos la forma en que son introducidos.

Cuando queremos reflexionar sobre la dificultad que el aprendizaje de ciertos conceptos tiene para los alumnos, es necesario comenzar por hacer un análisis epistemológico de su significado. Como indica Godino (1996), *el problema de la comprensión está íntimamente ligado a cómo se concibe el propio conocimiento matemático. Los términos y expresiones matemáticas denotan entidades abstractas cuya naturaleza y origen tenemos que explicitar para poder elaborar una teoría útil y efectiva sobre qué entendemos por comprender tales objetos. Esta explicitación requiere responder a preguntas tales como: ¿Cuál es la estructura del objeto a comprender? ¿Qué formas o modos posibles de comprensión existen para cada concepto? ¿Qué aspectos o componentes de los conceptos matemáticos es posible y deseable que aprendan los estudiantes en un momento y circunstancias dadas? ¿Cómo se desarrollan estos componentes?* (pag. 418).

El propósito de nuestro trabajo, es llevar a cabo una evaluación de la comprensión de la media aritmética que tenga en cuenta estos principios. Nos centraremos en la idea de media

Belén Cobo
IES Los Neveros. Huétor Vega. Granada.
Carmen Batanero
Universidad de Granada. Granada.

aritmética, que, aunque aparentemente es simple, tiene un carácter complejo. Un análisis profundo de los elementos en que podemos descomponer el significado de este concepto puede contribuir al diseño de propuestas didácticas que permitan diversificar el tratamiento y mejorar los resultados del proceso de enseñaza-aprendizaje. Siguiendo a Batanero y Godino (2001), vamos a considerar las siguientes entidades primarias como constituyentes del significado de la media:

- *Problemas y situaciones* que inducen actividades matemáticas y definen el campo de problemas de donde surge el objeto. Un ejemplo sería repartir una cantidad en forma equitativa, que es el tipo de problema que hemos planteado en este trabajo.

- *Procedimientos, algoritmos, operaciones*. Cuando un sujeto se enfrenta a un problema y trata de resolverlo, realiza distintos tipos de prácticas, que llega a convertir en rutinas con el tiempo. Prácticas características en la solución de problemas de promedios serían sumar una serie de valores y dividir por el número de sumandos, elaborar una tabla de frecuencias, ordenar los datos (para calcular la mediana) o realizar una representación gráfica de los datos.

- *Representaciones materiales* utilizadas en la actividad matemática (términos, expresiones, símbolos, tablas, gráficos, etcetera).

- *Conceptos y proposiciones*. Las definiciones y propiedades características y sus relaciones con otros conceptos.

- *Demostraciones* que empleamos para probar las propiedades del concepto y que llegan a formar parte de su significado.

Nos centraremos particularmente en describir el razonamiento numérico de los estudiantes y analizar la forma en que puede afectar la resolución de problemas de promedios. Argumentaremos que muchas dificultades en el trabajo con promedios puede deberse a un razonamiento numérico insuficiente.

Investigaciones previas

A pesar de que la media es uno de los principales conceptos estadísticos, y base en la construcción de otros, como la media geométrica y la varianza, los estudiantes no muestran una buena comprensión de este concepto.

Por ejemplo, aunque el cálculo de la media ponderada parece sencillo, Pollatsek, Lima y Well (1981) encontraron que los estudiantes que ingresan en la universidad, especialmente los que no han seguido un Bachillerato científico, no identifican fácilmente las situaciones en las cuales se debe calcular una media ponderada ni seleccionan correctamente las correspondientes ponderaciones. Li y Shen (1992) indican que cuando los datos se agrupan en intervalos, los estudiantes olvidan con frecuencia que cada uno de estos grupos debería ponderarse de modo distinto al calcular la media y se limitan a calcular la media de todas las marcas de clase, error que también es encontrado por Carvalho (1998; 2001).

En otros casos el algoritmo se aplica de forma mecánica sin comprender su significado. Cai (1995) encontró que mientras la mayoría de alumnos de 12-13 años son capaces de aplicar adecuadamente el algoritmo para calcular la media, sólo algunos saben determinar un valor desconocido en un conjunto pequeño de datos para obtener un valor medio dado. Gattuso y Mary (1998) sugieren que el contexto y forma de representación influyen en la dificultad de los problemas de promedio.

> *El problema de la comprensión está íntimamente ligado a cómo se concibe el propio conocimiento matemático. Los términos y expresiones matemáticas denotan entidades abstractas cuya naturaleza y origen tenemos que explicitar para poder elaborar una teoría útil y efectiva sobre qué entendemos por comprender tales objetos.*

Mevarech (1983) sugiere que una explicación posible de los errores en el cálculo de promedios es que los estudiantes suelen creer que un conjunto de números, junto con la operación media aritmética constituye un grupo algebraico, satisfaciendo los cuatro axiomas de clausura, asociatividad, elemento neutro y elemento inverso. Estas y otras propiedades fueron analizadas por Strauss y Bichler (1988) con niños de 8 a 12 años, indicando que los alumnos comprenden intuitivamente algunas propiedades, por ejemplo, que la media es un valor comprendido entre los extremos de la distribución o que el valor medio está influenciado por los valores de cada uno de los datos. Por ello, la media no tiene elemento neutro.

En referencia a la comprensión de propiedades, Batanero, Godino y Navas (1997), observaron que los profesores de primaria en formación, encuentran dificultades en el tratamiento de los ceros y valores atípicos en el cálculo de promedios, en identificar las posiciones relativas de media, mediana y moda en distribuciones asimétricas, y en la elección de la medida de tendencia central más adecuada en una determinada situación y el uso de los promedios en la comparación de distribuciones.

Watson y Moritz (2000), analizan el significado intuitivo dado por los niños al término *promedio* y hallan un gran número de niños para los cuales el promedio es simplemente un valor en el centro de la distribución (es una idea próxima al concepto de mediana). Pocas veces se relaciona la palabra *promedio* con la moda y menos aún con la media aritmética. Las siguientes definiciones de *promedio* fueron obtenidas en entrevistas a niños realizadas por Watson y Moritz (2000): *Significa igual, que es normal, no eres realmente bueno, pero tampoco malo.*

En nuestra opinión, los resultados de las investigaciones que hemos descrito sobre la media muestran también que el conocimiento de las reglas de cálculo por parte de los estudiantes no implica necesariamente una comprensión real de los conceptos subyacentes. Si los alumnos adquieren sólo el conocimiento de tipo computacional es probable que cometan errores predecibles, salvo en los problemas más sencillos.

Además, el proponer el algoritmo de cálculo prematuramente puede influir negativamente en la comprensión del concepto. Por ello se debería trabajar sobre las ideas intuitivas que tienen los alumnos para ayudarles a desarrollar caminos nuevos que les permitan enriquecer los conceptos que ya tienen asimilados. A la misma conclusión llega Tormo (1993) en un estudio realizado con alumnos de 12 a 15 años.

Señalamos también que estas investigaciones se han centrado en puntos aislados de la comprensión, como por ejemplo el cálculo o la comprensión de propiedades. En nuestro trabajo estamos considerando los cinco tipos de comprensión de nuestro modelo teórico y su relación. En lo que sigue presentaremos unos primeros resultados de este trabajo.

El estudio

Nos basamos en los resultados de un cuestionario pasado a una muestra formada por 24 alumnos y 29 alumnas de primer y cuarto cursos de Educación Secundaria Obligatoria, respectivamente, cuyas respuestas se clasificaron teniendo en cuenta los elementos de significado de la media que usaron los alumnos, a partir de sus respuestas a un cuestionario que describimos en la sección siguiente.

	4º ESO		1º ESO	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto
Media como reparto	11 (37,9)		8 (34,7)	2 (8,7)
Media como representante	2 (6,9)		1 (4,3)	
Cálculo media datos aislados	5 (17,2)		4 (16,4)	
Media no es operación interna	3 (10,3)	1 (3,4)	3 (13)	1 (4,3)
Media en el rango de variación		1 (3,4)		
Confunde media y moda		3 (10,3)		

Tabla 1. Frecuencias y (porcentajes) de elementos usados en el Ítem 1a.

Una vez recogidos los datos, se realizó un análisis de contenido de las respuestas dadas a cada una de las preguntas planteadas en los diferentes ítems de la prueba. Puesto que las respuestas eran abiertas, no se limitan a dos opciones (correctas/incorrectas) sino que se pidió a los alumnos que las razonaran, al justificarlas tenían libertad para emplear los diferentes elementos de significado previstos en el análisis a priori de los ítems.

A continuación presentamos los problemas propuestos y la clasificación de las respuestas obtenidas en cada uno, con ejemplos de las mismas y análisis de los resultados. Sólo tendremos en cuenta las respuestas aportadas, ya que algunos alumnos no respondieron algunos de los ítems.

Valor medio como operación

Nos hemos interesado, en primer lugar por la comprensión de los alumnos y alumnas sobre las propiedades numéricas de la media, cuando consideramos a ésta como un valor obtenido al operar en un conjunto numérico. Al contrario que otras operaciones que los alumnos conocen como la suma o el producto, la media no es una operación interna en el conjunto de los números enteros. El siguiente ítem trata de evaluar la comprensión de esta propiedad.

Ítem 1. *Un periódico dice que el número medio de hijos por familia en Andalucía es 1,2 hijos por familia.*

a. Explícanos qué significa para ti esta frase.

b. Se han elegido 10 familias andaluzas y el número medio de hijos entre las 10 familias es 1,2 hijos por familia. Los García tienen 4 hijos y los Pérez tienen 1 hijo, ¿cuántos hijos podrían tener las otras 8 familias para que la media de hijos en las diez familias sea 1,2? Justifica tu respuesta.

En el apartado a) queremos que los alumnos expresen con sus propias palabras su interpretación de un valor medio cuyo resultado es no entero, a pesar de que la variable de referencia sea entera. Ha sido tomado de Watson (2000) y se han obtenido los siguientes tipos de respuesta, que tienen en cuenta, tanto el cálculo, como las propiedades que usan los alumnos:

- Respuestas en que se indica el algoritmo de cálculo correcto de la media de una variable discreta con datos aislados: *que han sumado y lo*

	4º ESO		1º ESO	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto
Inversión del algoritmo de la media	7 (24,1)		6 (26,1)	2 (8,7)
Dar una distribución de media dada	11 (37,9)		8 (34,7)	
Media como operación interna		1 (3,4)		
Errores de cálculos aritméticos		3 (10,3)		
Otros errores		8 (27,3)		4 (17,3)

Tabla 2. Frecuencias y (porcentajes) de elementos usados en el Ítem 1b.

han dividido y le han salido 1,2.

- Respuestas correctas, con idea de media como representante de los datos: *pienso que significa que el número representativo de hijos por familia.*

- Correcto, con idea de media como reparto equitativo: *quiere decir que al menos cada familia tiene un hijo, algunos tienen 2 o 3, y otras no tienen ninguno, pero al hacer esa media sale ese porcentaje.*

- Correcto, enfatizando que la media no es una operación interna. Para ilustrar puede servir el mismo ejemplo anterior.
- Incorrecta, confundiendo media y moda: *que han hecho la media y lo más frecuente es entre 1 o 2 hijos en Andalucía.*

- Incorrecta, confundiendo media y valor mínimo: *cada familia tiene como mínimo 1,2 hijos.*

En la tabla 1 se presenta un resumen de los resultados obtenidos en la que hacemos notar que la mayor parte de los alumnos realiza un cálculo correcto y reconoce diversas propiedades numéricas de la media (reparto equitativo; no ser operación interna), aunque también en algunos casos se presentan algunos errores, éstos son poco frecuentes. No se observan diferencias entre los dos grupos de alumnos.

Obtención de un conjunto numérico que produzca un valor promedio

En el apartado b) del ítem anterior los alumnos deben construir una distribución de datos que tenga un valor medio dado. Esta actividad es relativamente compleja, puesto que supone, además del conocimiento del algoritmo de cálculo de la media, la comprensión de la idea de distribución, como propiedad de un colectivo. Hemos encontrado las siguientes respuestas:

a. Respuesta correcta, basada en la inversión del algoritmo de cálculo de la media, pero sin dar una distribución concreta que cumpla la condición impuesta. En su lugar, se da la suma total de los datos: *Las otras 8 familias tienen que sumar un total de 7 niños. Porque al hacer esa media necesitamos 12 niños.*

b. Encontrar una o varias distribuciones que tengan como media el valor dado: *De las 8 familias, que 7 de ellas tengan 1 hijo y la octava que no tenga hijos...*

c. Incorrecta, con errores de cálculo, aunque con un planteamiento algebraico de inversión del algoritmo correcto.

d. Incorrecta por no tener en cuenta la propiedad del la media de no ser operación interna puesto que aportan una distribución de valores no enteros, no acorde a la situación planteada: *Podrían tener dos niños. Porque la media es de 9'6 niños entre las 8 familias*:

Familia	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª
N.ª hijos	2	1	1	1,6	1	1	1	1

e. Otros errores, como no dar una distribución con estas condiciones, sino el valor de una media no pedida en el enunciado:

Garcías-4	Familia	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª
Pérez-1	N.ª hijos	2	1	1	1,6	1	1	1	1

Podrían tener un hijo por familia, pero no sabrá explicar por qué. Creo que es porque de 10 familias que elijo, cojo 8 y los divido me da 1,25. Pero no es correcto.

Hemos presentado los resultados de la segunda parte del ítem 1 en la Tabla 2. También en este caso la mayor parte de los estudiantes presenta un razonamiento numérico correcto. Una tercera parte han invertido el algoritmo de la media y otra tercera parte han dado una distribución que se ajusta a lo pedido mostrando una comprensión de las ideas de distribución, y media como reparto equitativo, pero sin llegar a la inversión del algoritmo. Los principales errores se producen porque no se ha comprendido el enunciado y se da un valor no pedido de la media, errores de cálculo y en algún caso no se comprende que la media no es una operación interna.

Cálculo de medias ponderadas

La ponderación correcta en el cálculo de la media, supone capacidad de aplicar la ley distributiva al sumar un conjunto de valores numéricos repetidos y también percibir que la operación promedio no tiene la propiedad asociativa. Para comprobar si los alumnos comprenden estas propiedades y las aplican al cálculo de la media ponderada hemos utilizado el siguiente ítem:

Ítem 2. *Maria y Pedro dedican una media de 8 horas cada fin de semana a hacer deporte. Otros 8 estudiantes dedican cada semana una media de 4 horas a hacer deporte.*

a. ¿Cuál es el número medio de horas que hacen deporte cada fin de semana los 10 estudiantes?

b. María y Pedro dedican además 1 hora cada fin de semana a escuchar música y los otros 8 estudiantes, 3 horas. ¿Cuál es el número medio de horas que escuchan música los 10 estudiantes?

c. ¿Cuál sería el número medio de horas que estos 10 estudiantes dedican, cada fin de semana, entre las dos actividades: hacer deporte y escuchar música?

En el primer apartado, las respuestas obtenidas han sido:

Elementos usados	4º ESO Correcto	4º ESO Incorrecto	1º ESO Correcto	1º ESO Incorrecto
Cálculo de media con datos aislados (Am1) (DM2)	5 (17,2)			5 (21,7)
Cálculo de media ponderada (Am2) (DM2)	11 (37,9)	7 (24,1)	2 (8,7)	4 (17,4)
Errores varios no relacionados con los promedios		1 (3,4)		4 (17,4)
Total	16 (45)	3 (10,3)	2 (8,7)	13 (56,5)

Tabla 3. Frecuencias y (porcentaje) de elementos usados en el 2a.

a. Correcta, pero en lugar de ponderar, los alumnos reproducen los datos aislados y calculan la media de una variable discreta con datos aislados.

b. Correcta, mediante el cálculo de una media ponderada, directamente a partir de los datos del problema.

c. Incorrecta, al calcular la media sin ponderar los pesos relativos a cada valor de la variable, por no comprender adecuadamente que la media no tiene la propiedad asociativa: *1,2 horas de media.*

Elementos usados	4º ESO Correcto	4º ESO Incorrecto	1º ESO Correcto	1º ESO Incorrecto
Cálculo de media con datos aislados	5 (17,2)			
Cálculo de media ponderada	11 (37,9)	1 (3,4)	3 (13)	2 (8,7)
Definición de media ponderada	5 (17,2)	5 (17,2)		
Definición de media	11 (37,9)		3 (13)	1 (4,3)
Propiedad asociativa		1 (3,4)		
Conocimiento del algoritmo de la media		4 (13,8)		
Errores no relacionados con los promedios		5 (17,2)		3 (13)

Tabla 4. Frecuencias y (porcentaje) de elementos usados en el 2b.

d. Incorrecta, por un planteamiento incorrecto del problema, por ejemplo, aplicar incorrectamente una proporcionalidad: *He hecho los cálculos con proporciones y con el resultado he sumado las medias (7 dias)/4h= (2dias) /1,1 h; 1,1h+8h= 9,1h.*

Los resultados (Tabla 3) revelan que una parte de los estudiantes muestra dificultades en ponderación, por lo que asocian incorrectamente la propiedad asociativa a la operación de promediar, haciendo una generalización incorrecta de esta propiedad que ellos conocen para la suma y el producto.

Elementos usados	4º ESO Correcto	4º ESO Incorrecto	1º ESO Correcto	1º ESO Incorrecto
Media de suma como suma de medias	3 (10,3)			2 (8,7)
Cálculo de media ponderada	4 (13,8)	5 (17,2)	2 (8,7)	2 (8,7)
Media no es asociativa		4 (13,8)	4 (17,4)	

Tabla 5. Frecuencias y (porcentaje) de elementos usados en el Ítem 2c.

Asimismo, encontramos un número importante de otros errores, por aplicación incorrecta de razonamiento proporcional, debido a que el enunciado del problema guarda una cierta semejanza con los enunciados relacionados con dicho tema.

Los resultados del apartado b) son similares a los del apartado anterior, como se muestra en la Tabla 4 y se observan los mismos tipos de respuestas.

Operaciones con promedios

Por último, en el apartado c) del ítem 2 los alumnos deben ser capaces de operar con promedios para hallar la media de la suma. Queremos ver si los alumnos comprenden y son capaces de aplicar la propiedad de que la media de la suma de variables es igual a la suma de las medias. Encontramos las siguientes respuestas:

- Respuesta correcta, aplicando la propiedad de que la media de las sumas de dos variables coincide con la suma de las medias: *Decidan 1.6 horas cada fin de semana a hacer deporte y escuchar música*, tras haber calculado previamente las medias de las dos variables: 1,2 y 0,4, respectivamente.

- Correcta, haciendo un cálculo de media ponderada, pero sin aplicar la propiedad anterior, ya que los alumnos calculan primeramente la variable suma de las dos dadas y luego calculan la media de dicha variable.

- Incorrecta, al no considerar que el cálculo de la media, como operación algebraica, es asociativa, cuando no lo es: teniendo en cuenta que las medias de las variables calculadas previamente son 4.8 y 2.4, respectivamente. *(4,8 + 2,4)/2 = 3,6.*

- Incorrecta, con errores varios en el cálculo de una media ponderada de las dos variables consideradas: *4,5 horas + 0,875 horas = 5,375 horas; 5,375 horas:10 estudiantes = 0,5375 horas.*

Nuevamente encontramos los principales problemas en la ponderación y la propiedad asociativa, por lo que estos resultados sugieren que estas dos propiedades son difíciles para los alumnos. En este caso el problema ha resultado difícil, pues han sido pocos los alumnos que llegan a una solución final correcta.

- Incorrecta, con un error subyacente de obviar el hecho de que la media permite hacer un reparto equitativo: *Fue menor ya que al final tendrán que tener todos la misma cantidad.*

Fueron pocos los alumnos que manifiestan un error en este ítem, aunque menos de la mitad de los alumnos dan la solución correcta y parecen comprender la propiedad de la suma de desviaciones, por lo que el problema resultó difícil.

La suma de las desviaciones a la media

Una interpretación posible de la media es como reparto equitativo, y otra como mejor estimación de una cantidad desconocida, en presencia de errores de medida. Estas dos interpretaciones se apoyan en la propiedad de que la suma de las desviaciones de los datos a la media es nula. Es decir, cada dato que está por encima de la media, debe compensarse con otros por debajo de ella. El siguiente ítem tomado de Tormo (1993) trata de evaluar la comprensión de esta propiedad.

	4º ESO		1º ESO	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto
Media como reparto equitativo	2 (6,9%)	3 (10,3%)	4 (17,4)	
Medio en el centro de gravedad	2 (6,9%)		3 (13)	9 (39,1)
Suma de desviaciones	6 (20,7%)		1 (4,3)	5 (21,7)

Tabla 6. Frecuencias y (porcentaje) de elementos usados en el Ítem 3.

Ítem 3. *Cuatro amigos se reúnen para preparar una cena. Cada uno de ellos trajo harina para hacer la masa de las pizzas. Como querían hacer cuatro pizzas del mismo tamaño, los que habían traído más harina regalaron a los que llevaban menos. ¿La cantidad de harina regalada por los que habían traído mucha fue mayor, menor o igual a la recibida por los que habían traído poca? ¿Por qué piensas eso?*

En este ítem se han obtenido las respuestas que siguen:

- Correcta, considerando la media como una cantidad equitativa al hacer un reparto en una distribución uniforme o centro de gravedad de una distribución: *Es igual porque al final se quedaron todos con la misma harina.*
- Correcta, aplican la propiedad *la suma de desviaciones sobre y bajo la media son iguales: Es igual porque la cantidad de harina que dan los que tienen mucha es igual a la cantidad de harina que los que la reciben.*

Ítem	4º ESO (n=29)	1º ESO (n=24)
1a	21 (72,4%)	16 (66,7%)
1b	18 (62,1%)	16 (66,7%)
2a	16 (45%)	2 (8,3%)
2b	16 (45%)	3 (12,5%)
2c	7 (24,1%)	6 (25%)
3	8 (27,7%)	5 (21,3%)
4	13 (44,8%)	10 (43,5%)

Tabla 8. Dificultad comparada de los ítems. Frecuencias (porcentajes) de respuestas correctas.

Obtener una distribución para una media dada

Finalmente hemos insistido en la idea de distribución para analizar si los alumnos pueden dar una distribución de valores, conocida la media y el máximo.

Ítem 4. *Tenemos seis números y el más grande es el 5. Sumamos estos números y dividimos la suma por seis. El resultado es 4. ¿Te parece posible? ¿Por qué?*

	4º ESO		1º ESO	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto
Cálculo de media con valores aislados	13 (44,8%)	2 (6,9%)	10 (43,5)	1 (4,3)
Dar una distribución para pedia dada	13 (44,8%)	3 (10,3%)	10 (43,5)	8 (34,7)
Media perteneciente al rango	13 (44,8%)		10 (43,5)	

Tabla 7. Frecuencias y (porcentaje) de elementos usados en el Ítem 4.

Las respuestas obtenidas en esta pregunta fueron las que exponemos a continuación:

- Correcta, haciendo uso del cálculo de la media de un conjunto de valores aislados (AM1), tras buscar una distribución que cumplan la condición impuesta:

$$\frac{5+3+4+4+4+4}{6}=\frac{24}{6}=4$$

- Incorrecta, al aplicar un algoritmo de cálculo incorrecto: *Si es posible, porque sí se puede hacer. Por ejemplo, cogemos cuatro veces el 5 y una vez el 4, lo sumamos y lo dividimos entre 6 y el resultado es 4.*
- Incorrecta, dando una distribución que no se corresponde con la condición pedida, o planteando que es imposible que exista una distribución así: *No es posible porque entre 6 números donde el mayor es 5 no pueden sumar 24.*
- Incorrecta, respondiendo algo sin relación con el problema planteado: *No es posible porque en todo caso saldría –4 y no 4.*

En este caso una proporción importante de alumnos da una solución correcta al problema, aunque también se producen errores, incluso en el cálculo de la media.

Dificultad comparada de las tareas

Por último, en la tabla 8 presentamos el porcentaje de respuestas correctas en cada ítem y grupo de alumnos para analizar la dificultad relativa de las tareas.

Los resultados muestran que el ítem 1 ha sido el que más fácil ha resultado, tanto su apartado a como el b, puesto que han sido los que más respuestas correctas han obtenido, tanto en 1º de ESO, como en 4º. Por el contrario, el ítem 3, junto con el 2c han sido los que han obtenido menor número de respuestas correctas, lo que permite deducir que han resultado difíciles a los alumnos.

En cuánto a los resultados comparados de alumnos de 4º y 1º se pueden observar diferencias significativas en los dos primeros apartados del ítem 2, relacionados con la ponderación en el cálculo de la media, mientras que en los otros aparecen unos resultados similares, lo que nos lleva a pensar que este problema presenta mucha más dificultad para los estudiantes de 1º de E.S.O. que para los de 4º, de los cuales casi la mitad muestran un buen dominio.

Conclusiones

La idea de media es aparentemente sencilla, pero nuestro trabajo indica que los estudiantes deben aplicar multitud de ideas numéricas en la resolución de estos problemas, tales como la propiedad distributiva de suma y multiplicación, o la inversión del algoritmo de la media. Asimismo deben discriminar las propiedades que aún siendo válidas para la suma y multiplicación no se generalizan para la operación de promediar.

En este trabajo hemos evaluado cómo los alumnos de secundaria usan ideas numéricas en los problemas de promedio, resultando las siguientes conclusiones:

- Hay una buena comprensión de la media ya que, en la pregunta 1b no sólo se aplica correctamente la idea de media, sino que el 62.1 % de los alumnos de 4º y un 66.7% de 1º, fue capaz de invertir el algoritmo de cálculo para resolver un problema o bien de hallar una distribución con una media dada. Este resultado no concuerda con el obtenido por Cai(1995) que hemos comentado arriba, quizás la razón de que aquí aparezca menos dificultad, como apuntan Gattuso y Mary (1998) se deba al contexto utilizado para presentar el problema, muy próximo a la vida cotidiana de los estudiantes. Esta idea queda reafirmada con los resultados de la pregunta 4, sólo alrededor de un 40% de alumnos de los dos cursos fue capaz de dar una distribución de valores que produzca una media dada, porcentaje menor que el obtenido en la cuestión anterior, muy similar, pero aquí se trata de un ejercicio exclusivamente numérico, sin contextualizar. Por otro lado, el porcentaje de respuestas correctas es sensiblemente menor que el correspondiente al cálculo correcto de la media, lo que es lógico teniendo en cuenta que éste problema supone un razonamiento inverso a partir tanto del propio concepto de media, como del algoritmo de cálculo, lo que requiere un buena comprensión previa del tema.

> *Algunos alumnos no comprenden que la media no es una operación interna en el conjunto de referencia por lo que su valor puede no tener sentido en el contexto dado. Será necesaria la interpretación de la media como una operación y no como valor de dicha operación*

- En la misma línea de los resultados obtenido por Mevarich (1983), sólo un 10.3% de los alumnos de 4º y un 13% de los de 1º entiende que la media no es una operación interna en el conjunto de los números enteros, lo que revela que se trata de una propiedad difícil de comprender para estudiantes muy habituados a trabajar con operaciones que sí son internas en el conjunto donde se realizan.

- En torno a la mitad de los alumnos de 4º es capaz de resolver problemas de media ponderada dando ponderaciones adecuadas, mientras que en 1º, sólo alrededor de un 10% lo realiza correctamente, siendo ésta la principal diferencia encontrada entre los dos grupos de estudiantes. Este resultado revela que la ponderación no es una operación fácil para los estudiantes más jóvenes, sin embargo, con el paso del tiempo, esta dificultad va remitiendo, bien por la propia enseñanza o bien porque se han ido adquiriendo habilidades numéricas y de razonamiento que contribuyen a la mejora de los resultados. Esta dificultad permanece, incluso, en edades más avanzadas, según las investigaciones realizadas por Pollatsek, Lima y Well (1981).

- Sólo un 27.7% de alumnos de 4º y un porcentaje ligeramente menor de los de 1º comprende la propiedad de la suma de desviaciones, por lo que no son conscientes de que al promediar una cantidad la suma de la cantidad que se debe dar para igualar a la media es igual que la suma de los que se recibe en los casos debajo de la media.

- Finalmente, el que la media de la suma de dos variables es igual a la suma de las medias solo se aplicó correctamente por, aproximadamente, una cuarta parte de los alumnos, lo que revela una comprensión deficiente de esta propiedad.

Hemos encontrado, además, errores de cálculo y aplicación incorrecta de otras propiedades, por lo que consideramos que todas estas propiedades deben ser objeto de enseñanza, contextualizadas en situaciones próximas y comprensibles para los alumnos. Errores éstos que presentan, según indican Batanero, Godino y Navas (1997), incluso los estudiantes, universitarios, de profesorado de primara.

Pensamos que las dificultades respecto a la propiedad asociativa, que subyace en el cálculo incorrecto con medias ponderadas, indica que el conocimiento de esta propiedad en la suma y multiplicación puede ser un obstáculo para comprender las propiedades de los promedios.

Algunos alumnos no comprenden que la media no es una operación interna en el conjunto de referencia por lo que su valor puede no tener sentido en el contexto dato (e.g. número medio de hijos). Será necesaria la interpretación de la media como una operación (reparto equitativo) y no como valor de dicha operación, lo que supone un nivel de razonamiento numérico alto para los estudiantes de secundaria. Las operaciones con promedios son, en realidad, operaciones compuestas, lo que requiere un razonamiento numérico de segundo nivel. En consecuencia, el profesorado debe atender al razonamiento numérico de sus estudiantes y a su diversidad para asegurar el éxito de los objetivos educativos. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BATANERO, C. (2000): “Significado y comprensión de las medidas de tendencia central”, *Uno*, n.º 25, 41-58.

BATANERO, C., y GODINO, J. (2001): “Developing new tools in statistics education research”, *Proceedings of the 53rd Session of the International Statistical Institute*, Bulletin of ISI (Tome LIX, Book 2, 137-142), ISI, Seul.

BATANERO, C., GODINO, J. y NAVAS, F. J. (1997): “Evaluación de concepciones sobre la noción de promedio en maestros de primaria en formación”, Trabajo presentado en las VII Jornadas Logse, Evaluación Educativa.

CAI, J. (1995): “Beyond the computational algorithm. Student’s unsderstanding of the aritmetic average concept”, *Proceeding of the 19th PME Conference* (v.3, 144-151), Ed. L. Meira, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil.

CARVALHO, C. (1998): “Tarefas estadísticas e estratégias de resposta”, Comunicación presentada en el VI Encuentro en Educación Matemática de la Sociedad Portuguesa de Ciencias de la Educación, Castelo de Vide, Portugal.

CARVALHO, C. (2001): “Interaçao entre pares: Contributos para a promoçao do desenvolvimento l'ogico e do desempenho estatístico no 7º ano de escolaridade”, Tesis Doctoral, Universidad de Lisboa, Lisboa.

COBO, B. (1998): “Estadísticos de orden en la enseñanza secundaria”, Memoria de Tercer Ciclo, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

COBO, B. (2001). Problemas y algoritmos relacionados con la media en los libros de texto de secundaria. Jornadas Europeas de Enseñanza y Difusión de la Estadística. Palma de Mallorca: Instituto Balear de Estadística.

COBO, B y Batanero, C. (2000): “La mediana en la educación secundaria ¿Un concepto sencillo?”, *Uno*, 23, 85-94.

GAL. I. (2002): “Adult's statistical literacy. Meanings, components, responsibilities”, *International Statistical Review*, 70 (1), 5-64.

GODINO, J. D. (1996): “Mathematical concepts, their meanings and understanding”, *Proceedings of the 20th PME Conference* (v.2, 417-424), Ed. L. Puig y A. Gutiérrez, Universidad de Valencia, España.

GODINO, J. D., & Batanero, C. (1994): “Significado personal e institucional de los objetos matemáticos (Institutional and personal meaning of mathematical objects)”, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 14(3), 325-355.

GODINO, J. D., & Batanero, C. (1997): “Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education”, *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (177-195), Ed. A. Sierpinska, & J. Kilpatrick, Dordrecht: Kluwer.

MEVARECH, Z.R. (1983): “A deep structure model of students'statistical misconceptions”, *Educational Studies in Mathematics*, 14, 415-429.

POLLATSEK, A., LIMA, S. y WELL, A.D. (1981): “Concept or Computation: Students'understanding of the mean”, *Educational Studies in Mathematics*, 12, 191-204.

STRAUSS, S. y BICHLER, E. (1988): “The development of children's concepts of the arithmetic average”, *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (1), 64-80.

TORMO, C. (1993): “Estudio sobre cuatro propiedades de la media aritmética en alumnos de 12 a 15 años”, Memoria de Tercer Ciclo, Universidad de Valencia.

WATSON, J. M. y MORITZ, J. B. (2000): “The longitudinal development of understanding of average”, *Mathematical Thinking and Learning*, v1 (2/3).

SUMA 45
Febrero 2004, pp. 87-91

En el entorno del teorema Kou-Ku (II)

Nos son tan habituales algunas cosas que no nos sorprendemos ante ellas ni nos paramos a pensar acerca de su significado profundo o sobre la maravilla de su gestación, perdida a veces en la noche de los tiempos. Considerado en abstracto, como una relación entre superficies de figuras descontextualizadas, ¡no es nada evidente el teorema de Pitágoras!, pero hay muchos problemas de tipo práctico que obligan a pasar obligatoriamente por el ángulo recto. ¿Cómo construir si no, por ejemplo, un edificio de una mínima prestancia? Las divulgaciones al uso han justificado siempre su origen en la necesidad de medir terrenos después de las crecidas de los grandes ríos en cuyas orillas se asentaron las primeras civilizaciones sedentarias. Se supone también que habría que definir retículas ortogonales y que ello llevaría a catalogar ternas de números que permitieran construir ángulos rectos. Cuando se contempla desde un montículo la hermosa anarquía distributiva que el devenir de los tiempos ha producido en nuestros campos, parece claro que ese afán regulador sólo puede darse bajo un fuerte poder centralizado. Así pues, quizás haya que incluir el teorema Kou-Ku —junto, por ejemplo, el monoteísmo y los primeros códigos legislativos— entre las primeras consecuencias de la aparición del Estado (con mayúsculas, claro).

Sea como fuere, la acumulación de conocimiento empírico sobre las características de los triángulos con un ángulo recto, condujo a las tres situaciones heurísticas posibles:

- Catálogo de casos particulares para la resolución de problemas prácticos. Probablemente sea lo que ocurrió en Egipto.

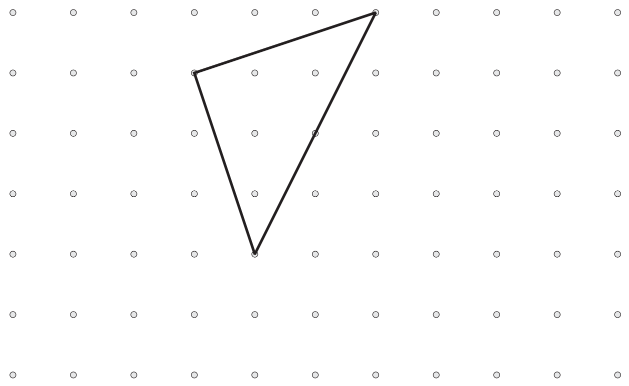
- Elaboración de métodos generales, pero no necesariamente exhaustivos, de búsqueda de soluciones. A este planteamiento —un programa de trabajo muy actual, pero desarrollado sin ordenadores— responde la famosa tablilla nº 322 de la colección de Plimpton[1]. Cinco columnas por quince filas de números cuneiformes tallados en arcilla. Tres de las columnas contienen ternas racionales pitagóricas. Si se sigue el método de Diofanto [para cualquier par de enteros m y n, los números $2mn$, m^2-n^2 y m^2+n^2 cumplen la relación de Pitágoras], sólo hay 16 ternas pitagóricas con las condiciones $n \leq 60$ y $30^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$, siendo α uno de los ángulos agudos del triángulo. A la luz de la información que proporciona la tablilla, no está nada claro cuál fue el procedimiento seguido por los matemáticos babilonios para generarlas, pero ¡15 de esas 16 ternas están en la tablilla de Plimpton![2] ¿Casualidad? En cualquier caso es obligado recordar que fue fabricada entre el 1800 y el 1650 a. de C., que Diofanto trabajó en el s. III de nuestra era y que su producción se inserta mejor en la tradición matemática de Mesopotamia que en la griega.

- Resolución teórica del problema. La opción más apreciada por la especulación que busca alejarse de necesidades prácticas. Sin ella no habría matemáticas, pero sin el ejercicio de diseño de la anterior no serían útiles.

Un teorema difícil

Nuestros alumnos y alumnas no sienten ninguna necesidad vital de inventar nada sobre los triángulos rectángulos, y en estos casos la didáctica tradicional recurre a la revelación descendida desde la tarima: planteamiento y resolución en abstracto sin tanteos empíricos previos. Ello dificulta que el teorema —sin haber pasado por un período en el que sólo haya sido conjetura— pueda ser vivido como un problema interesante. Si no se quiere recurrir a esto, ¿qué otra cosa se puede hacer sino iniciar un proceso que motive a buscar relaciones numéricas entre los catetos y la hipotenusa? Ocurre que los adolescentes de nuestras aulas no están al servicio de ningún faraón ni tienen terrenos de contornos borrados por río alguno. Siempre queda la posibilidad de una simulación: empezar midiendo superficies en tramas cuadradas y, a partir de ahí, calcular sus perímetros. Veamos un ejemplo.

Angel Ramírez Martínez
Carlos Usón Villalba
historia.suma@fesp.org



- *Describe este triángulo justificando tus afirmaciones.*
- *¿Cuánto mide su superficie?*
- *¿Y cuánto su perímetro? Piensa - recuerda un poco: hemos sido capaces de calcular la longitud de algunas distancias difíciles.*

"Habíamos sido capaces" —estamos hablando de grupos de 1º ó 2º de ESO— por el procedimiento de construir el cuadrado cuyo lado es la longitud a medir y contar el número de cuadraditos que caben en su interior (figura 1), así que se esperaba que llegaran a $2\sqrt{10}+\sqrt{20}$.

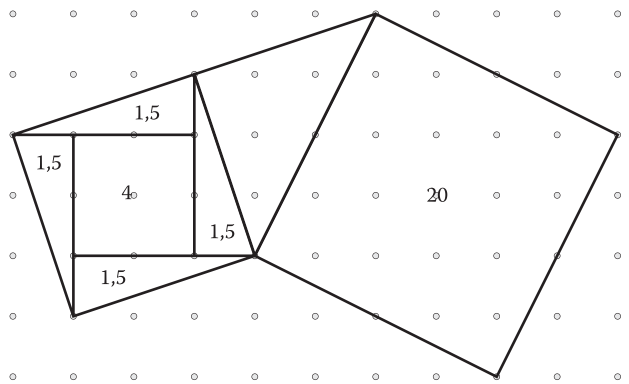


Figura 1

Pero hay algunas cuestiones, habitualmente desatendidas, que complican este tipo de ejercicios. En primer lugar, el dibujo de los cuadrados: pasad la trama en 3º ó 4º ESO y comprobaréis que bastantes más alumnos y alumnas de los esperados tienen dificultades para trazar la perpendicular a un segmento desde un punto dado, sea exterior o no al propio segmento. No digamos nada si proponemos hacerlo en papel sin cuadricular. Pero, ¡atención!, hay que recordar que esto no es así porque sean especialmente malvados/as o inútiles (no añadimos el porqué, ya sabéis lo que diríamos). Una segunda dificultad —¿cómo superarla?— está en la conexión entre la superficie y la longitud. El hecho de que el lado de un cuadrado de área 25 mide 5, es algo que se comprueba a simple vista en la trama. Pero que si el área es 2, el lado mide $\sqrt{2}$, esto roza lo esotérico. ¡No exageramos! No hay ningún apoyo tangible para un número tan extraño como *1,414213567...* salvo la calculadora y el hecho de que si $5 \times 5 = 25$, "algo tiene que haber que dé 2".

¿El resultado de todo esto? Como tantas otras veces será imposible saberlo, porque el Sistema (el educativo y el Otro) tiene prisa y además, por lo general, impedirá continuar el trabajo y por lo tanto hacer las comprobaciones oportunas el curso próximo. Por nuestra parte, detectamos ya algunas dificultades no previstas. Por ejemplo: para calcular el perímetro de un rectángulo muchos alumnos y alumnas (¡demasiados!) contaban los cuadritos de su superficie y extraían con su calculadora la raíz cuadrada. ¿Había que haberlo previsto? Bueno... se aprende probando pero, sobre todo, se les están cruzando en el camino indeseables actitudes asumidas después de tantos años de adoctrinamiento procedimental: ¡qué bien aprendido queda aquello de que si repites se te premia! ¿Deberían estar alerta y no aplicar mecánicamente métodos anteriores a situaciones nuevas? Puede uno desesperarse pero, analizando en perspectiva, no hay más remedio que intentar desactivar estas bombas lapa adheridas al librepensamiento. Además, la utilización inconsciente de este tipo de actitudes depende mucho del grupo y de las relaciones entre sus individualidades.

Cuando forzamos el salto y propusimos elaborar un cuadro en la pizarra con datos recogidos sobre medidas de los lados de triángulos de los tres tipos,

Acutángulos			Rectángulos			Obtusángulos		
a	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*

hubo bastantes que no intentaron conjetura alguna... o no se atrevieron a verbalizarla. Es verdad que el puzzle de Liu Hui[3] aclaró bastante una conexión que había resultado —así nos lo pareció— excesivamente inesperada, pero ante la petición, unos días después, de buscar grupos de tres números que permitieran dibujar triángulos rectángulos, reaparecieron las dificultades: sumaban los lados en lugar de sus cuadrados.

Nada de esto es grave si no se pretende saltar deprisa obstáculos epistemológicos que son muy naturales. En realidad, hay que admitir que el proceso fue quizás un tanto artificial, forzado a destiempo para que el profesor, al no atreverse a recomendar a su departamento que volviera a trabajar el teorema kou-ku el curso próximo con este grupo, pudiera escribir en su resumen final que sí, que Pitágoras había sobrevolado el aula como la Programación había previsto. Acostumbrados a que lo hiciera sin ser nosotros los responsables del primer contacto, la experiencia de estos años nos indica que el teorema kou-ku es difícil. Mucho más difícil de lo que parece suponer una práctica docente que lo reduce a las primeras de cambio a una simple, abstracta y descontextualizada relación numérica, independiente incluso —como nos demuestra el trato con alumnos y alumnas año tras año— de la particular relación entre áreas que estuvo en su origen.

Extensiones del contexto de aplicación del teorema

I

Hay algunas cosas que casi nuca se hacen en las aulas de Secundaria, no sólo con el teorema Kou-Ku sino con casi todos. Una de ellas es generalizarlo, ampliando su contexto de aplicación y modificando para ello su enunciado en función de los datos que hayamos decidido cambiar en la situación inicial. Sí que hemos visto en algún texto escolar —y siempre en una de esas notas a las que habitualmente no se hace caso— dibujos parecidos al de la figura 2, pero ninguno como el de la figura 3.

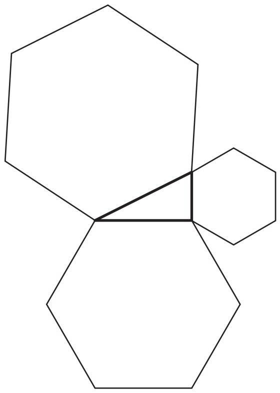


Figura 2

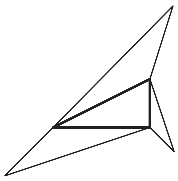


Figura 3

Llamando *a*, *b*, *c* a los lados del triángulo rectángulo, las áreas de las figuras construidas sobre cada uno de ellos serán proporcionales, con el mismo factor de proporcionalidad (k) puesto que se trata de figuras semejantes, a las de los cuadrados construidos sobre cada uno de ellos. Es decir, las áreas de las tres figuras serán ka^2, kb^2 y kc^2, y puesto que el teorema es válido para cuadrados queda también demostrado para figuras semejantes. Una argumentación de este tipo, tan contundente, es demasiado abstracta, poco tangible, y quizás deberemos dejar tiempo en clase para alguna comprobación experimental previa, tanto sobre las superficies de las figuras como sobre la relación entre éstas y sus cuadrados. Estamos pensando, en cualquier caso, en 4º de ESO. Es cierto que el primer contacto con el teorema Kou-Ku se ha producido dos años antes, pero no es bueno que termine la reflexión en el caso particular de los cuadrados ni se puede pretender generalizar inmediatamente, porque es necesario disponer de tiempo para asimilar ideas y porque la ampliación a un nuevo contexto requiere controlar las características de éste.

Pero detengámonos un poco en el razonamiento anterior. Es obvio que no lo hemos recogido aquí por su novedad, sino para comentar la elegante vuelta de tuerca que le permite a Polya utilizarlo en sentido contrario para demostrar el teorema inicial de Pitágoras. Primero advierte que la relación de igualdad entre áreas se cumple trivialmente para un grupo particular de figuras semejantes: los dos triángulos rectángulos en que la altura sobre la hipotenusa divide a cualquier triángulo rectángulo, y él mismo (figura 4).

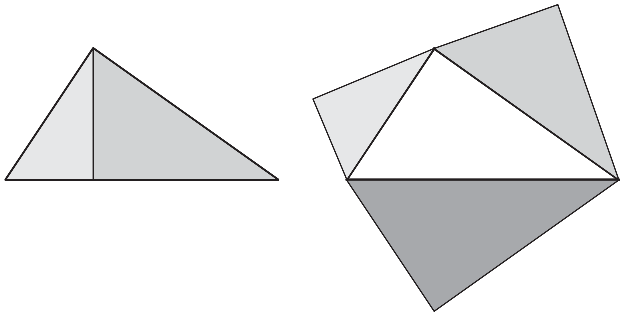


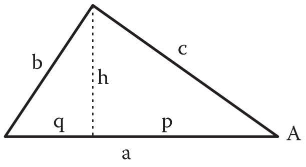
Figura 4

Pero, puesto que los tres son figuras semejantes, sus áreas se podrán expresar en función de los cuadrados construidos sobre sus hipotenusas con el mismo factor de proporcionalidad. Así pues, $ka^2 = kb^2 + kc^2$, de donde $a^2 = b^2 + c^2$.

Si el puzzle de Perigal con el que empezamos esta serie de artículos es nuestra prueba favorita desde la Geometría para el teorema Kou-Ku, la de Polya es nuestra preferida desde la Lógica. ¿Ante qué maravillarnos más? ¿Ante la sutileza del maestro de la Resolución de Problemas o ante la infinita variedad de matices encerrados en una figura de aspecto tan ingenuo?

II

De momento hemos ampliado el campo de figuras que podemos dibujar sobre los lados del triángulo, pero hay otras cosas que pueden variar. La generalización más natural es sin duda la extensión del teorema a triángulos de cualquier tipo, lo que nos lleva, al menos en la enseñanza secundaria, al llamado teorema del coseno. De nuevo, un resultado reducido a una fórmula numérica y al que se le suele quitar gran parte de su carga interpretativa sobre la forma de los triángulos. ¿Acaso una demostración aritmética del tipo de la sugerida en la figura 5 aporta claridad sobre el porqué del resultado que afirma el teorema? ¿Dónde está la superficie que hay que añadir o restar para igualar el cuadrado de un lado con la suma de los de los otros dos?



$$b^2 = h^2 + q^2 = \\ = h^2 + (a-p)^2 = \\ etc.$$

Figura 5

Antes de ver cómo describe Euclides esa reducción o incremento de áreas, recordemos su demostración del teorema de Pitágoras. Ya comentamos en el artículo anterior que se basa en que el cuadrado de la hipotenusa queda dividido por la altura que cae sobre ella en dos rectángulos, que son iguales respectivamente a los cuadrados de sus catetos correspondientes, tal y como muestran los colores de la figura 6. Habitualmente nos referimos a este hecho llamándolo Teorema del cateto (figura 7).

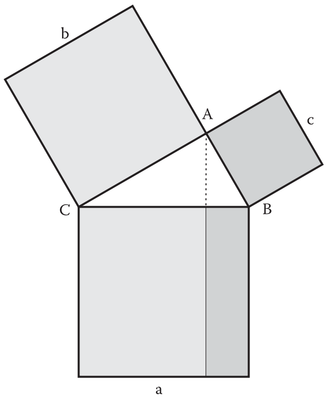
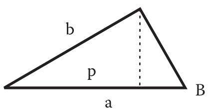
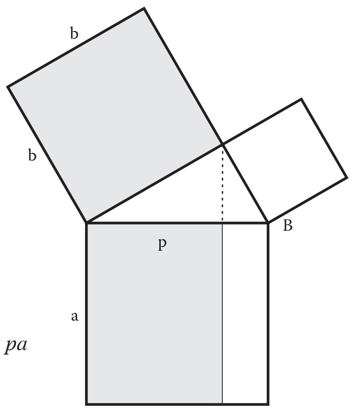


Figura 6



$$\frac{p}{b} = \frac{b}{a}$$



$$b^2 = pa$$

Figura 7

En las proposiciones 12 y 13 del libro II de los *Elementos*, Euclides afirma:

> En un triángulo obtusángulo, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es mayor que los cuadrados sobre los lados que forman el ángulo obtuso en dos veces el rectángulo contenido por uno de estos lados, aquel sobre el que cae la perpendicular trazada por otro de los vértices y la línea recta cortada en él por dicha perpendicular hacia el exterior desde el ángulo obtuso.
>
> En un triángulo acutángulo, el cuadrado del lado opuesto al ángulo agudo es menor que los cuadrados sobre los lados que forman el ángulo agudo en dos veces el rectángulo contenido por uno de estos dos lados, aquel sobre el que cae la perpendicular trazada por otro de los vértices y la línea recta cortada en él por dicha perpendicular desde el otro ángulo.

Se acompañan estos dos párrafos con un dibujo que no "retrata" la situación que describe. Se podía haber esperado que así fuera, visto el carácter tan figurativo de los enunciados, pero sólo es el punto de partida para su habitual argumentación deductiva. Seguramente, un hindú de su misma época habría añadido un *¡Mira!* al dibujo—fotografía y habría evitado la descripción escrita. Si queremos comprender el porqué "físico" de la relación entre áreas asegurada por las proposiciones 12 y 13, necesitamos esa "fotografía". Lo que afirma Euclides es que si el triángulo es acutángulo hay que restar a los cuadrados de los catetos los rectángulos en blanco de la figura 8. Obsérvese (figura 9), que $AQ = c \cos A$ y que $AR = b \cos A$.

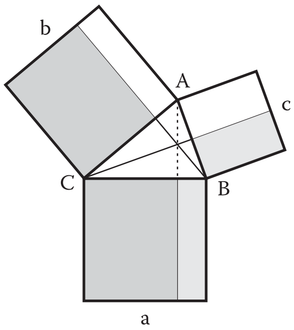


Figura 8

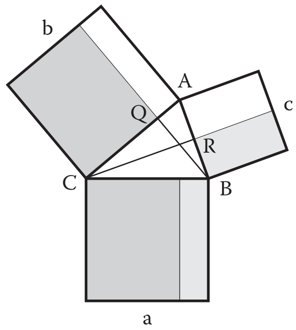


Figura 9

Si el triángulo es obtusángulo, hay que añadir a los cuadrados de los catetos los dos rectángulos más oscuros de las figuras 10 y 11. Ahora, $AQ = -c \cos A$ y $AR = -b \cos A$.

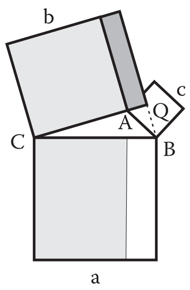


Figura 10

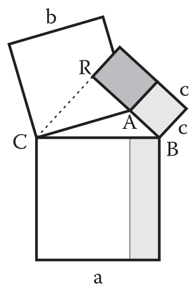


Figura 11

Si cambiamos de posición las dos superficies añadidas (figura 12) podemos verlas en el mismo dibujo sin que se superpongan.

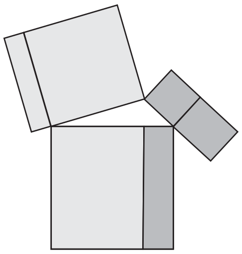


Figura 12

Uno de los más interesantes traductores y matemáticos del Bagdad del siglo IX, Thabit ibn Qurra, generalizó de una manera distinta el teorema Kou-Ku a triángulos cualesquiera. Pero de esto nos ocuparemos en el siguiente artículo. ■

Notas sobre el artículo anterior

Convertida "la red" en el archivo por excelencia, en el Archivo —machaconamente recomendado por el Poder—, la tentación de creer (¡atención!, no hemos escrito pensar sino creer) que allí está todo[4] y en mayor cantidad que en ningún otro archivo, se ha vuelto muy fuerte. Así que "mira qué bien que encontramos al Perigal en Internet". Pero lo cierto es que el nombre de Henry Perigal dormía en nuestras estanterías en varias publicaciones que asocian a su inventiva el "puzzle de Dudeney" para demostrar el teorema Kou-Ku. Lo hace Bruno Munari (1999), que afirma que Perigal era astrónomo aficionado. Greg N. Frederickson (2000) aporta además el intervalo de su vida (1801-1899), y prefiere fijarse en que era corredor de bolsa, como la página web que habíamos consultado. Se ve que fue las dos cosas, astrónomo y corredor de bolsa. A saber. Lo sorprendente es que nos preocupemos de estas minucias. Quizás nos estén sentando mal las colaboraciones en SUMA.

Más nos interesa la conexión que establece Frederickson entre el puzzle de Perigal y dos mosaicos superpuestos de cuadrados (figura 13). Uno de ellos, con figuras de dos tamaños, nos será fácilmente reconocible por haberlo pisado en muchos suelos de casas antiguas.

NOTAS

1 Hubo un tiempo en que las potencias coloniales rapiñaban a la vez recursos naturales y producción artística o intelectual de los países colonizados. Quizás a veces se intentaran guardar las formas "legales". La colección Plimpton se conserva en la Universidad de Columbia.

2 Véase G. Gheverghese Joseph (1996)

3 Véase la figura 11 del artículo anterior de esta Sección, en el número 44 de SUMA.

4 ¿Qué quiere decir esta palabra?, todo. ¿Qué debería querer decir?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

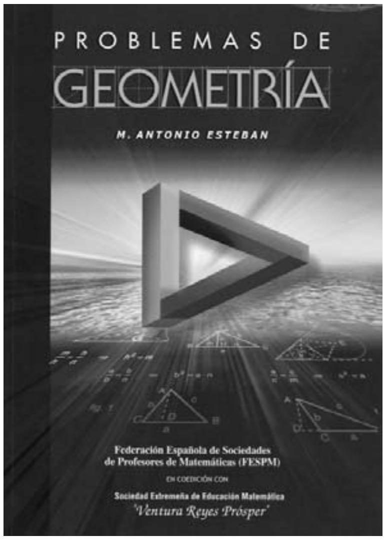
EUCLIDES (1991): *Elementos*. Gredos, Madrid.

GHEVERGHESE JOSEPH, G. (1996): *La cresta del pavo real*. Pirámide, Madrid.

FREDERICKSON, G. N. (2000): "L'art des dissections géometrique". *En Jeux mathématiques*, número especial de *La Recherche*, mayo-junio 2000, págs. 44-46.

MUNARI, B. (1999): *El cuadrado*. Gustavo Gili, México. (la edición italiana es de 1978).

Publicaciones de la FESPM. Novedades



PROBLEMAS DE GEOMETRÍA.

M. Antonio Esteban

En coedición con la Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper"
Cáceres, 2004
ISBN 84-931776-5-2
172 PÁGINAS.

ACTAS DE LAS V JAEM

El Servivio de Publicaciones de la FESPM ha publicado en CD-ROM las *Actas de las V Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*, celebradas en Castellón de la Plana del 20 al 23 de marzo de 1991. Con esta publicacón la coleción de Actas de las JAEM queda completa. Los asistentes a aquellas Jornadas las pueden solicitar gratuitamente rellenando y envíando el siguiente boletín a **Servicio de Publicaciones FESPM, Apdo. 590, 06080-Badajoz**.

Actas de las V Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas
Castellón de la Plana, 1991

Como ASISTENTE a las V JAEM deseo recibir el CDROM con las Actas en la siguiente dirección:

Apellidos ____________ Nombre ____________

C/, Plz. ____________ N.º ____________

Ciudad (Provincia) ____________ C.P. ____________

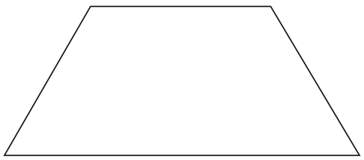
Correo-e ____________

SUMA 45
Febrero 2004, pp. 93-96

Dividir en partes iguales

Hay conceptos matemáticos, frecuentes en la vida cotidiana, que creemos fáciles de adquirir y en los que no profundizamos todo lo que debiéramos. Nos referimos a *la mitad de..., un tercio de..., la cuarta parte de....*

Solemos relacionar estos conceptos con el bloque aritmético, y trabajamos con los alumnos el cálculo algorítmico, el cálculo mental y el uso de la calculadora. Pero, ¿qué ocurre si lo aplicamos a la Geometría y nos referimos a figuras planas? Por ejemplo: dividir la siguiente figura en dos partes exactamente iguales, luego en tres y por último en cuatro partes.



Como podemos comprobar en cuanto nos enfrentemos a este reto la evidencia se nos esconde, la calculadora no nos sirve y aparecen las dificultades.

Presentación

Dada una figura, trazar las líneas rectas, quebradas o curvas que sean necesarias, para que dividan a dicha figura en partes exactamente iguales (en forma y superficie).

La realización de esta actividad conlleva:

- Estudiar la figura.
- Trazar a lápiz las líneas necesarias para dividirla en las partes que se piden.
- Comprobar, midiendo, recortando si es necesario o razonando si las partes obtenidas son iguales.

Todo esto exige y potencia en nuestros alumnos capacidades importantísimas en su desarrollo personal e intelectual, que todas las áreas del currículo deberían tener en sus objetivos generales, como son:

1. Atención y observación: Hay que dedicar un tiempo a analizar la figura, ver los segmentos que la determinan y los ángulos que producen.

2. Discriminación: Separar claramente los trozos iguales que queremos obtener.

3. Percepción visual: Dice Lev Vigotsky, pedagogo ruso (1896-1934): “El proceso entero de la resolución de un problema está básicamente determinado por la percepción”. Esta frase expresa la importancia de la estimulación perceptiva para el conjunto de los aprendizajes, y por ello hay que trabajar aspectos importantes de la percepción visual, como la coordinación vasomotora, la discriminación figura-fondo, la constancia de forma, las posiciones en el espacio y las relaciones espaciales.

En general, *vemos lo que sabemos ver*, y esto implica operaciones complejas como son: la selección (que aísla lo que interesa dejando todo el resto como ‘fondo’); la clasificación (que ordena, jerarquiza y categoriza); la evaluación (que asigna valor y pondera para actuar); el simbolismo (que significa y abstrae) y la autoconsciencia del entorno.

4. Imaginación y creatividad: Representar mentalmente las posibles divisiones antes de utilizar el lápiz y la regla.

5. Paciencia y constancia: No rendirse abandonando el problema ante la primera dificultad. Estas cualidades no están trabajadas en muchos de nuestros alumnos y rápidamente surgen comentarios como: “Maestro, esto no me sale”, “No lo veo, maestro”, “Es muy difícil”...

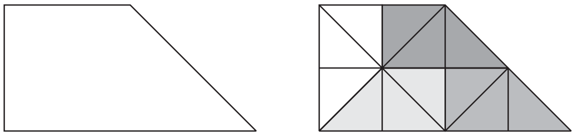
Grupo Alquerque de Sevilla

Constituido por:
Juan Antonio Hans Martín
José Muñoz Santonja
Antonio Fernández-Aliseda Redondo
juegos.suma@fespm.org

Para evitar estos comentarios, a lo largo del desarrollo de la actividad, hemos de ir dando a los alumnos estrategias de resolución:

- Medir los segmentos que forman el perímetro de la figura.
- Cuadricular o triangular la figura, pues permite conocer la superficie que ha de tener cada uno de los trozos buscados y descartar, por tanto, cortes que no lo cumplan.
- Contar los cuadrados o triángulos y repartirlos.
- Girar la hoja, para ver la figura desde otro punto de referencia.
- Buscar su eje de simetría.

Un ejemplo de triangulación para dividir en cuatro partes iguales se da en el siguiente trapecio rectángulo.



En general, "vemos lo que sabemos ver", y esto implica operaciones complejas como la selección, la clasificación, la evaluación, el simbolismo y la autoconsciencia del entorno.

Desarrollo de la actividad

El trabajo a realizar lo podemos dividir en tres niveles de dificultad, y cada uno de ellos con dos apartados a desarrollar:

Nivel 1: Dividir las figuras en dos partes exactamente iguales en forma y tamaño.

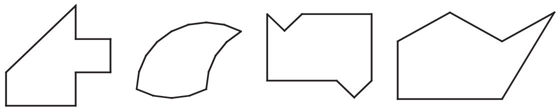
Nivel 2: Dividir las figuras en tres partes exactamente iguales en forma y tamaño.

Nivel 3: Dividir las figuras en cuatro partes exactamente iguales en forma y tamaño.

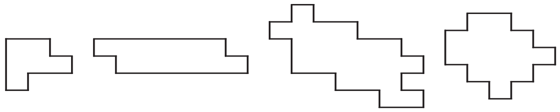
Actividad a: Dada una hoja con dibujos de figuras dividirlas mediante el trazado de líneas rectas, quebradas o curvas en dos (tres o cuatro) partes exactamente iguales en forma y tamaño. Trazar las líneas con regla y bolígrafo, y colorear una de las partes obtenidas.

Actividad b: Diseñar y dibujar en una hoja con trama cuadrada figuras que puedan ser divididas en dos (tres o cuatro) partes exactamente iguales en forma y tamaño

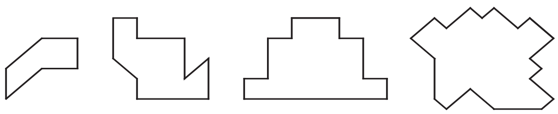
Ejemplo de actividad 1a:



Ejemplo de actividad 2a:



Ejemplo de actividad 3a:



Las actividades "b" pueden ser intercambiadas entre los alumnos, y de esta manera aumentar el banco de figuras disponibles y evaluar el nivel de dificultad de las piezas diseñadas por los compañeros.

Las capacidades que exige y potencia esta actividad son atención y observación, discriminación, percepción visual, imaginación, creatividad, paciencia y constancia.

Para finalizar

Una variante de estas actividades consiste en pedir que las partes que se obtengan sean semejantes a la figura original. Esto sólo es posible en algunas figuras y aunque parezca añadir una dificultad mayor, no suele ser así, pues la semejanza conserva los ángulos y esto facilita la localización de los trozos. Como ejemplo sirve el del trapecio rectángulo visto anteriormente.

Estas actividades de dividir en partes iguales, que son verdaderos problemas, son frecuentes en las competiciones y olimpiadas matemáticas que se celebran a lo largo de la geografía española. Profundizando en el enunciado pueden convertirse en pequeñas investigaciones que proponer a los alumnos de nivel más avanzado. Como ejemplo proponemos dos problemas propuestos para la 1ª fase de la XIII Olimpiada Matemática Provincial de Albacete (2002), el primero para 12/14 años y el segundo para 14/16.

<u>Partes iguales</u>

Dividir un cuadrado en tres, cuatro, cinco... partes iguales. ¿Para qué casos existe más de una solución? Si en lugar de dividir el cuadrado en partes iguales tan sólo se requiere que las partes sean equivalentes, ¿existen otras soluciones?

<u>Dividir triángulos</u>

¿Es posible dividir un triángulo equilátero en 4 triángulos equiláteros?

¿Es posible dividir un triángulo equilátero en 5 triángulos equiláteros?

Demostrar que cualquier triángulo equilátero se puede dividir en n triángulos equiláteros, para cualquier $n>5$.

Hay conceptos matemáticos, frecuentes en la vida cotidiana, que creemos fáciles de adquirir y en los que no profundizamos todo lo que debiéramos. Nos referimos a “la mitad de...”, “un tercio de...”, “la cuarta parte de...”.

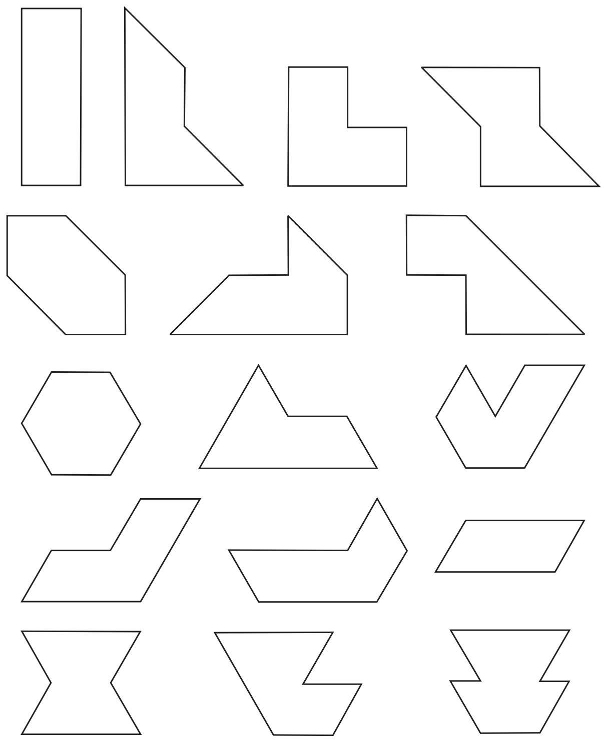
Material necesario

- Regla, lápiz, goma, bolígrafo negro y lápices de colores.
- Hojas con las figuras dibujadas.

Plantillas de hojas con figuras dibujadas

Nombre

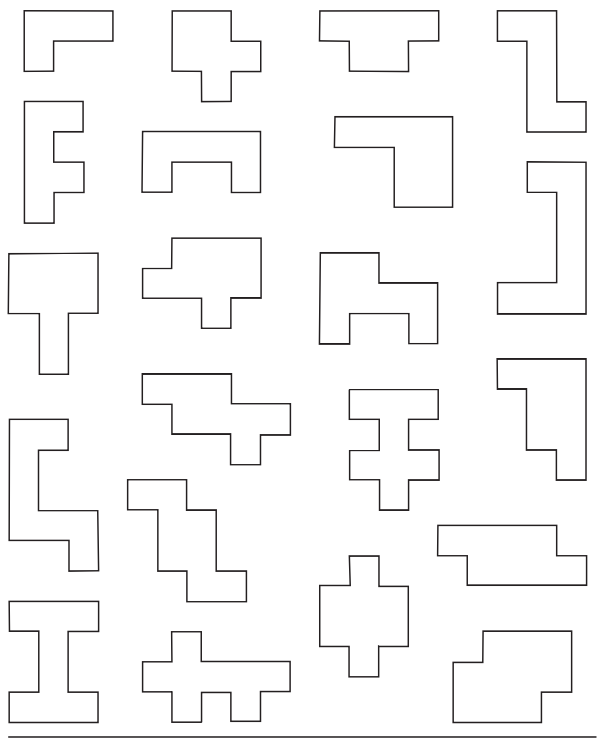
Divide las figuras en dos partes iguales



El juego en clase de Matemáticas Grupo Alquerque-Sevilla

Nombre

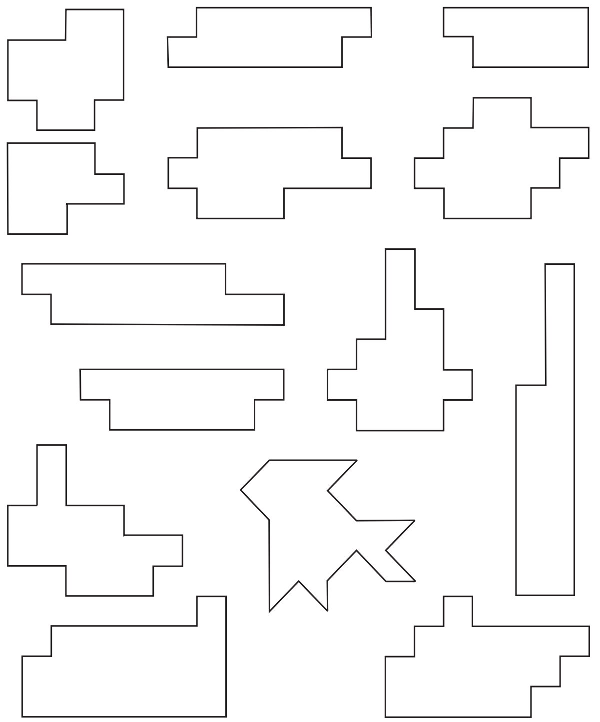
Divide las figuras en dos partes iguales



El juego en clase de Matemáticas Grupo Alquerque-Sevilla

Nombre

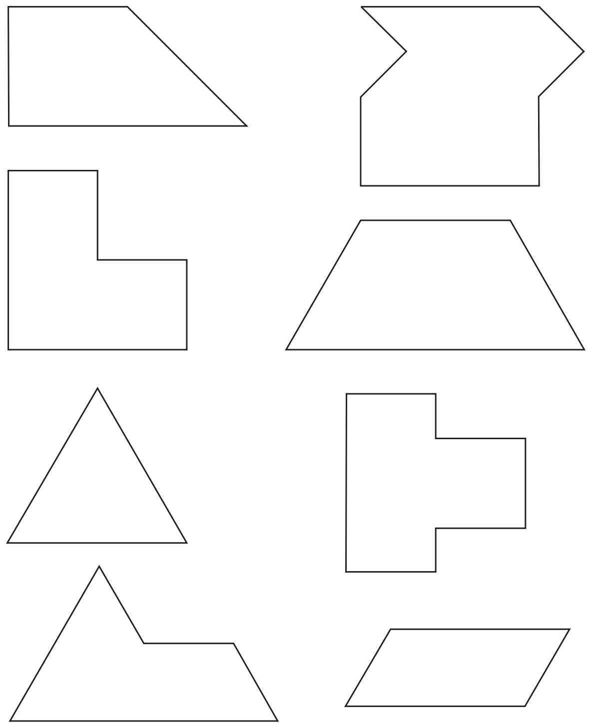
Divide las figuras en tres partes iguales



El juego en clase de Matemáticas Grupo Alquerque-Sevilla

Nombre

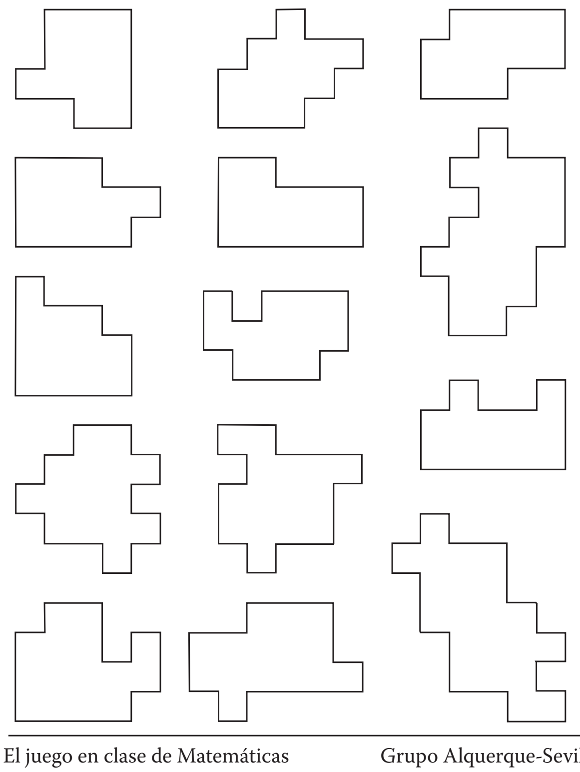
Divide las figuras en cuatro partes iguales



El juego en clase de Matemáticas Grupo Alquerque-Sevilla

Nombre

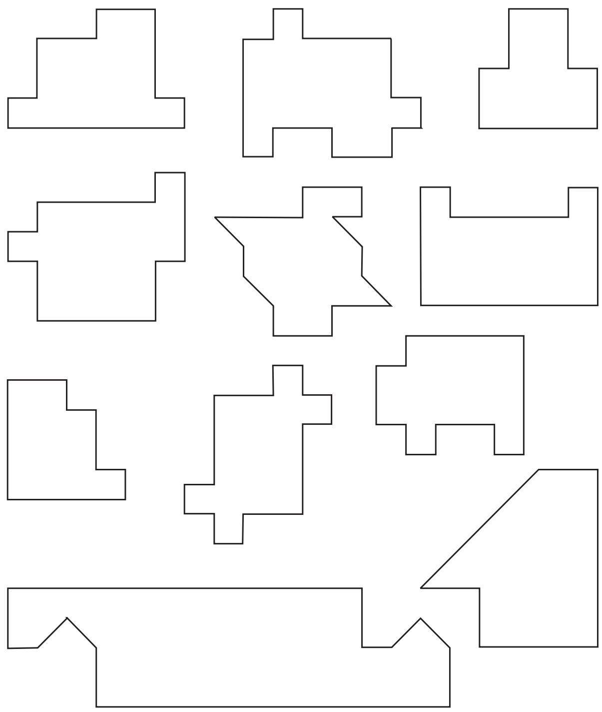
Divide las figuras en tres partes iguales



El juego en clase de Matemáticas Grupo Alquerque-Sevilla

Nombre

Divide las figuras en cuatro partes iguales



El juego en clase de Matemáticas Grupo Alquerque-Sevilla

SUMA 45
Febrero 2004, pp. 97-104

iMÁTgenes 4, 5 y 6

¿Dónde están las cosas? ¿Dónde estoy yo? Aquí. Estoy aquí y ahora. Doy un paso y ya no estoy, ni aquí ni ahora, sino más lejos, y después.

¿Qué distancia me separa de mí mismo? Ninguna, cero, nada.O cuarenta mil kilómetros, la cintura del planeta. O pi multiplicado por veinte mil millones de años luz, el perímetro del Universo, más o menos. O la longitud de la trayectoria de un vuelo imaginario y arbitrario que partiendo de mi, aquí y ahora, volviera a mí, aquí, pero después: ¿Un dedo? ¿Un metro? ¿El infinito?

¿Qué determina la distancia entre las cosas? La distancia no es entre cosas, es entre dos cosas. No se mide entre tres, cuatro, cinco o mil objetos, sino entre uno y otro. Fundamental es considerarlos al unísono, como una pareja. Una pareja en la que no importa quién es primero porque en la distancia no cabe el orden en la consideración: P *dista de* Q *tanto como* Q *dista de* P. *Tampoco es necesario que los objetos de la medida sean de la misma naturaleza. Pueden medirse distancias entre las cosas más extrañas: entre un gato y un coco, entre una pulga y un zapatilla, entre un cojinete de la rueda de un camión y la cola de una sardina en alta mar...*

Y Barcelona, ¿dónde está? Aquí mismo, a cero kilómetros, para un barcelonés. A veinte mil kilómetros, casi al otro lado del mundo, para un pescador de las islas Tonga. A quince kilómetros de Sabadell, para un sabadellense. Pero a quince kilómetros de Sabadell está Terrassa. Sí, Barcelona está a quince kilómetros, pero al sudeste, según el sabadellense. Entonces, la distancia no nos dice dónde están las cosas, crea una circunferencia de ambigüedad alrededor del sujeto. Precisarla significa darle un sentido.

¿Y con el sentido ya sabe uno localizar las cosas? Un barcelonés no dista nada de su ciudad. Puede pasearse por ella arriba y abajo, kilómetros arriba y kilómetros abajo, hacia el este, hacia el oeste, y aún así sigue estando en Barcelona.
Yo lo sé bien: ahí es donde vivo. ¿Cómo es posible? ¿Acaso el cero es capaz de incluir algo? ¿Un lazo inmenso en el cual todas las cosas encerradas no distan nada de cualquier otra? ¿Un pacto secreto entre el espacio y la materia?
Y los geógrafos, ¿qué opinan de la distancia? Barcelona, ciudad con latitud y longitud determinadas con precisión de grados desde Tonga: 175ºE, 21ºN. Pero más difícil de concretar desde Sabadell. ¿Quizá 0º2'E, 0º12'S? Con precisión de ... ¿Hasta dónde llega la precisión de un barcelonés? Sus ciudadanos no necesitan situar la ciudad, ya están en ella. Pero tendrá un centro. ¿Dónde está el centro de Barcelona? ¿En la Plaça de Catalunya? ¿En la de Sant Jaume? Sea en un sitio o en otro, ¿qué adoquín o baldosa lo representa? ¿Qué fragmento de baldosa? ¿Qué punto? Lo busco, pero no lo encuentro. Cuanto más me acerco, menos lo veo. Se me escurre de la mirada como un pez de entre las manos. ¿Será que Barcelona no tiene centro? ¿Será que su centro está en todas partes?

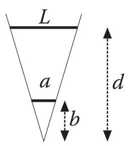
Sólo hay un modo de saber dónde está Barcelona: Alejarse de ella, cuanto más lejos, mejor. Hasta que la lejanía la transforme toda entera en el punto que antes buscaba. Barcelona transfigurada en algo sin partes. Barcelona entera en un punto euclidiano. Sólo entonces podré afirmar que se encuentra a la distancia que la separa de mí.

Tal vez debería visitar las islas Tonga.

Miquel Albertí
imatgenes.suma@fespm.org

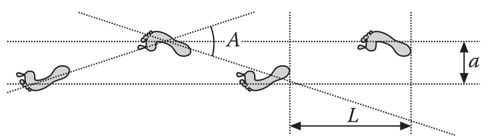
El concepto de distancia es fundamental en Matemáticas. En ¡Altius, lentius, longius! hablé acerca de la aparente disminución del tamaño de las cosas según la distancia que nos separa de ellas. Esto hace que la distancia determine la forma en que percibimos las cosas. A mis ojos, el planeta que piso es un plano, una bola de superficie esférica desde la Luna o un puntito diminuto desde Saturno.

Un aspecto muy interesante relacionado con la distancia no fue considerado en la iMATgen nº1. Supongamos que conocemos la longitud L de un objeto que está lejos de nosotros. Extendemos el brazo hasta una distancia b de nuestro ojo, justo cuando el ancho a del pulgar cubre por completo el objeto. ¿A qué distancia d se encuentra este?



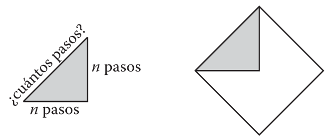
Basándonos en la semejanza de triángulos, d=aL/b. Por ejemplo, si con el brazo extendido (b=70 cm) nuestra pulgada (a=2,5 cm) coincide con la longitud aparente de un automóvil (L=4 m), sabemos que se encuentra a unos 14,3 m.

En *El vacío que habla* se vio cómo una huella puede decir bastante, tanto del pie que la produce como del pie de quien la mira. Dos huellas de distinto pie de la misma persona hacen un paso, pero del pie al paso hay mucho más que la longitud de este. Es una nueva entidad en la que pueden considerarse nuevas medidas y proporciones. En el paso pueden observarse tres magnitudes principales: su longitud, la distancia entre la huella de uno y otro pie; su anchura, la distancia que separa el pie izquierdo del derecho; y la apertura, el ángulo con el que los pies se abren al caminar:



Comparando las medidas y proporciones de un paso ajeno con las nuestras sabremos si es relativamente corto, largo, exageradamente largo, como en un salto, o imposible. Incluso podríamos conjeturar la estatura de quien lo dio.

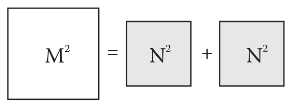
Cuantificar la distancia significa establecer una unidad con qué medirla. Tanto el pie como el paso han jugado ese papel a lo largo de la Historia. En Stairway to heaven hablé de las escaleras y de cómo éstas adaptaban su forma a la pendiente a superar. De entre todas las pendientes que los matemáticos han tenido que superar, ninguna resultó tan difícil como la determinada por un ángulo de 45º. Su medición supuso la primera gran crisis del conocimiento matemático. Supongamos que se necesitan n pasos para recorrer la base de una rampa en forma de triángulo rectángulo isósceles. ¿Con cuántos pasos salvaremos su pendiente? Si m es el número de pasos necesarios para ascender hasta arriba, m y n se relacionan según $2n^2=m^2$, ya que se forman dos cuadrados, uno doble del otro:



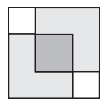
Busquemos un número de pasos que permita esta relación:

n=1 $2{\cdot}1^2=2$ no es un cuadrado,
n=2 $2{\cdot}2^2=8$ tampoco,
n=3 $2{\cdot}3^2=18$ tampoco,
......
n=100 $2{\cdot}100^2=20000$ tampoco,
......

¿Etcétera? No podemos escribir etcétera. ¿Podemos afirmar que $2n^2$ nunca será un cuadrado sea cual sea n? Supongamos que continuando la serie anterior llegásemos a encontrar un número natural N para el cual $2N^2$ fuera un cuadrado. Entonces, este número N sería el más pequeño que posee la propiedad de que $2N^2=M^2$. Por tanto, un cuadrado de lado M sería equivalente a la suma de otros dos de lado N:



Sobreponiéndolos así:



Vemos que la intersección de los cuadrados grises de lado N produce un nuevo cuadrado más oscuro de lado menor que debe ser equivalente a la suma de los dos cuadrados blancos de las esquinas. Hemos hallado un cuadrado menor que el de lado N equivalente a la suma de otros dos. Esto contradice que el de lado N fuera el más pequeño.

Dos pisadas, un paso. Dos pasos, un paseo. Dos paseos, una compañía. A quien le guste caminar sabrá que no hay camino, como dijo el poeta, que el camino, como las Matemáticas, se hace al andar. Quien quiera realizar andaduras matemáticas que lo haga en compañía. Llegará más lejos, aprenderá más deprisa y lo pasará mejor. Aunque no sea olímpico, también este es un buen lema. ■

iMATgen 4

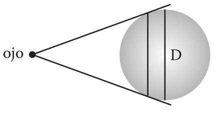
Un contraluz, pero no un atardecer, ni un amanecer. Más bien hacia el mediodía. En primer plano el perfil oscuro de una persona sobre un escollo marino. Un escollo cualquiera junto a una costa cualquiera. ¿Un adulto? No, comparada con los otros miembros de su cuerpo, la cabeza tiene un tamaño desproporcionado para tratarse de un adulto. Este rasgo es propio de los niños. ¿Alguien de otro continente? Quizá sí, quizá no. Tanto da. Puede que sea un niño. También podría ser una niña, pero si lo fuera probablemente llevaría el cabello mucho más largo. Aunque no tendría por qué ser así. Por el perfil de su figura nos figuramos que no lleva ropa. Al fondo, también a contraluz, una embarcación pequeña con la vela henchida y una persona a bordo. ¿Está muy lejos? ¿Cómo saberlo? ¿Cómo calcularlo? ¿Acaso importa?

Detrás de la barca acaba todo. Acaba el mar y empieza el cielo. Hasta hace pocos siglos también ahí acababa el mundo. Es lo más lejos que se ve, el distintivo más característico del planeta: el horizonte. Conocer el mundo significa rebasarlo, ir más allá aunque sepamos que cualquier horizonte es inalcanzable porque no es fijo. Movernos es mover el horizonte. Cuando avanzo hacia él o cuando retrocedo, cuando me pongo de puntillas o cuando me agacho, cuando salto, así cambia mi horizonte. Pero no del mismo modo. En unas ocasiones tan solo se aleja o acerca, en otras se amplia o reduce. Desde niño el horizonte mediterráneo me ha parecido un modelo de línea recta, nítida y firme pese estar hecha de agua. Es esta línea la que da carácter a la fotografía. Sin ella, la imagen perdería toda su fuerza.

Comprender esta imagen significa entender el horizonte, saber cómo se forma, cómo es y cómo se percibe. Si no es rectilíneo, ¿por qué lo parece? He ahí las preguntas que transforman esta imagen en iMATgen.

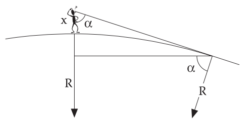
Empecemos modelizando la superficie del planeta en una esfera perfecta. Cada punto del horizonte viene determinado por la intersección de nuestra mirada, una recta de luz, con ella. Una línea luminosa tangente a la esfera en el lejano perfil del mundo. Girando sobre nuestros pies sin separar la mirada del confín de la esfera que es el mundo, nos damos cuenta de que el horizonte es una circunferencia, el perfil de la base del cono que nuestra mirada acaba de trazar mediante este giro.

Aún cuando la altitud sea suficiente como para ver de golpe todo el horizonte, su diámetro nunca igualará el del planeta. La Luna y el Sol son un poco mayores de como los vemos. Lo mismo vale para todas las cosas esféricas por pequeñas que sean: naranjas, bolas de billar, canicas, etcétera:



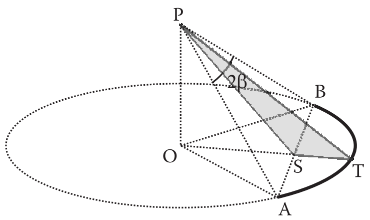
Pese a que el horizonte visible es un arco circular tampoco lo percibimos así. La luz que llega de este arco hasta el ojo forma un cono de visión. El estudio de las secciones cónicas nos dice que lo que percibimos es el resultado de la intersección de este cono con el plano horizontal, es decir, un arco elíptico.

¿Y por qué el horizonte de la fotografía se ve rectilíneo si no lo es? Se debe a que desde estaturas oculares x tan pequeñas el ángulo de incidencia de la visual con el plano horizontal es minúsculo:

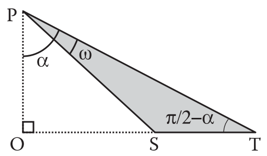


$$\frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen}\left(\frac{R}{R+x}\right) \underset{x \to o}{\longrightarrow} 0$$

En la figura siguiente se ha resaltado el fragmento visible del horizonte circular observable desde P con una amplitud o ángulo de visión igual a 2β. El triángulo APB viene determinado por este ángulo de visión que nos permite ver el arco ATB del horizonte:



Desde P, el 'grosor' del horizonte se aprecia con un ángulo ω en el vértice P del triángulo sombreado PST:



Aplicando trigonometría elemental a los triángulos *PST*, *OSB* y *PSB*:

$$\frac{\overline{ST}}{\text{sen }\omega} = \frac{\overline{PS}}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$

Tomando R=6367500 m como radio medio terrestre, x=1 m (más o menos como en la fotografía) y β=13.25º (la imagen fue tomada con un objetivo de 80 mm, lo que equivale a una abertura de unos 26,5º), se obtiene $\omega \approx 0{,}0008782º$. ¡Menos de una milésima de grado! Que la visión humana adolece de una capacidad semejante se confirma recordando algo de lo expuesto en la iMATgen nº. 1 sobre lo pequeñas que se ven las cosas al aumentar la distancia que nos separa de ellas. Si el ojo fuese capaz de distinguir lo que ve con un ángulo tan diminuto seríamos capaces de distinguir una manchita circular de 1 milímetro de diámetro desde una distancia d=0,5·cot($\omega/2$). O sea, desde ¡¡¡65,242 metros!!!

El ciego pregunta a quien contempla el horizonte:

—Explícame eso del horizonte.
—¿Cómo hacerlo? Lo siento, pero tu no puedes verlo.
—Ya, pero cuéntame cómo es. Para mí horizonte es sinónimo de lejano. Que algo esté en el horizonte, ¿no quiere decir que está muy lejos?
—Sí. En el límite del mundo. El horizonte es un arco de circunferencia enorme.
—¿Si miraras una plaza de toros desde muy lejos sería un horizonte?
—No hombre, no.
—¿Entonces?
—No sé, tendrías que verlo. No sé cómo explicártelo.
—Tú, ¿con qué ves?
—Con los ojos.
—¿Y yo? ¿Sabes con qué veo yo?
—No puedes ver. Creo que te haces una idea de las cosas cuando las tocas.
—¡Eso es! Llévame hasta el horizonte y lo tocaré.
—Imposible. Si te llevo, el horizonte se va.
—¿Cómo que se va? ¿Acaso es un bicho? ¡Anda ya! Te lo estás inventando todo.
—No me lo invento. El alcance de la vista determina el horizonte. La luz que llega a mis ojos desde allí lo hace en línea recta. Si te mueves, el horizonte se mueve contigo.
—Cada vez lo entiendo menos.
—Ya sé lo que haremos. Agáchate.
—¿Para qué voy a agacharme?
—Tu agáchate y verás.
—¿Cómo qué veré? No te cachondees, ¿eh?
—No es cachondeo. Agáchate y verás.
—¿Así?
—Muy bien. Ahora extiende bien los brazos, todo lo que puedas, y ábrelos hasta que sólo las puntas de tus dedos toquen el suelo.
—¿Así?
—Perfecto. Ahora gira sobre el punto donde estás hasta dar una vuelta entera, pero manteniendo siempre los dedos en contacto con el suelo.
—¿Así?
—Eso es. ¿Qué percibes? ¿Qué forma has descrito?
—Percibo el suelo con las yemas de mis dedos y he trazado una circunferencia sobre él. Si abro más los brazos, ya no lo toco.
—Ahí lo tienes, ¡este es tu horizonte!
—¡Ya lo veo! Si mis brazos fueran más largos, podría abrirlos más y ampliar mi horizonte, es decir, su radio. Si me pongo de pie, el horizonte desaparece porque ya no lo toco, no lo percibo.
—Exacto, pero puedes recuperarlo con el bastón.
—Ah, claro. Entonces tanteo el horizonte.
—¡Formidable! Lo has pillado.
—Entonces, mi horizonte es de tierra y puedo tocarlo, pero el tuyo, si está en el mar, será de agua, ¿no?
—¿De agua? ¡Ah, Claro! En el mar el límite de la vista está en el agua. Mi horizonte es líquido. Nunca había reparado en ello.
—Y no puedes tocarlo como yo. El tuyo es visual, el mío es táctil.
—Tienes razón. ¡Qué envidia me das!

El título de esta iMATgen será ***El horizonte del ciego***. Este diálogo es una ficción basada en la conversación que mantuve con Manasés Baeza, ciego de nacimiento y alumno de 1º de bachillerato del IES Vallès de Sabadell. Mientras preparaba este trabajo me pregunté sobre la idea que pueden tener las personas ciegas del horizonte. Hablé de ello con Pilar Estivill, de la ONCE y profesora de apoyo de Manasés. Me propuso que se lo preguntara a él mismo. Así lo hice. Manasés respondió que no lo tenía muy claro, que relacionaba esta palabra con la idea de algo muy lejano, que la había leído en textos literarios, pero que no se hacía una idea precisa de lo que era. Para él horizonte venía a ser un sinónimo de lejanía. Le hablé del horizonte del modo referido en el diálogo. Si Manasés veía mediante el tacto, su tacto determinaba su horizonte. Confesó no haberlo pensado así y que se había hecho una idea más clara de lo que era. Con el título de esta iMATgen quiero agradecerle lo que me enseñó. ■

iMATgen 5

El molino de esta imagen muy bien podría ser uno de los gigantes contra los que peleó don Quijote. Según cuenta Cervantes, el ataque del caballero de la triste figura acabó mal. El viento puso en movimiento las aspas del molino, éstas zarandearon al caballero y a su corcel quedando ambos maltrechos. El viento es invisible. No sale en las fotos. Sólo un vestigio indica su presencia. Pero es lo que anima el molino. Al girar sus aspas un mecanismo hace girar también una gran rueda de piedra que tritura el grano. El de la fotografía está en un lugar de la Mancha que nunca olvidaré. Forma parte de un grupo de siete gigantes que se yerguen imponentes junto al castillo de Consuegra, en la provincia de Toledo.

Hoy en día vuelven a construirse molinos de viento en todas partes. No sólo en la Mancha. Y también son blancos, pero ya no se hacen de piedra y madera. Su apariencia estilizada es consecuencia de su gran estatura. Vistos de cerca, habrían parecido gigantes a los que así le parecieron al caballero andante. Su función ya no es moler grano, consiste en transformar el viento en corriente eléctrica, un invisible en otro invisible.

Los matemáticos nos parecemos bastante al Quijote en el sentido de que nos complicamos la vida en aventuras que más a menudo de lo que desearíamos no importan a nadie ni comportan, a corto plazo, beneficio alguno. A veces nos resulta difícil decir si los objetos a los que nos enfrentamos son reales o fruto de nuestra imaginación, si son gigantes o molinos. No suelen faltar multitudes de Sancho Panzas, generalmente quienes más nos quieren, insistiendo en que recobremos el sentido y toquemos la tierra con los pies. Pero al fin y al cabo, no hacemos mal a nadie peleando contra molinos. Y salimos del lance mucho mejor de lo que salió Don Quijote. ¿O tal vez no?

La imagen muestra un cielo azul con algunas nubes, unos campos hacia el horizonte, el molino plantado en un suelo pedregoso, con sus aspas desnudas, sin tela, y unas sombras en su pared. Sombras tan precisas indican que la fotografía fue tomada en un día soleado. Y las formas de estas sombras, ¿por qué son las que son? Al concluir la escritura de esta pregunta hemos pasado de imagen a iMATgen. Estas sombras en la pared convexa de la construcción recuerdan formas parabólicas, ¿pero lo son?

El molino es un cilindro encalado. Las aspas son segmentos de madera cuya sombra traza curvas espectaculares en el cuerpo del gigante. La sombra de un segmento es un plano. La línea de sombra sobre el molino surge de la intersección de este plano con el cilindro. ¿De qué curva se trata?

Desde la perspectiva de la geometría analítica, habría que ver qué tipo de curva obtenemos al resolver un sistema de ecuaciones formado por un cilindro y un plano secante. Tomemos un caso de lo más sencillo, el cilindro de radio 1 del espacio tridimensional cuyas generatrices son paralelas al eje z ($x^2+y^2=1$) y el plano $x+y+z=1$ que pasa por los puntos (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1):

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

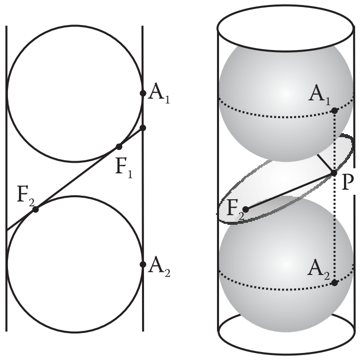
La resolución de este sistema nos conduce a $2x^2+z^2-2x-2z-2xz=0$. ¿Qué curva del espacio representa esta ecuación? En base a los valores de los coeficientes de x^2, y^2, z^2, xy, yz, xz y del término independiente de esta expresión, la geometría analítica nos dice que se trata de una elipse. ¿Pero entendemos que esto sea así? Este es un ejemplo extraordinario del juego matemático. Un objeto queda determinado al conocer los valores numéricos de una serie de parámetros mediante los cuáles cuantificamos su fisonomía. Pero yo no hallo consuelo en esta justificación. Para comprender que las sombras de la pared del molino son elípticas necesito relacionar más directamente con la realidad que las produce. Si son elipses, ¿dónde están sus focos?

Beskin (1977, pp. 80-83) demuestra la cuestión partiendo de una concepción de la elipse no relacionada con los focos, sino con la circunferencia. En efecto, una elipse es una circunferencia achatada contra uno de sus diámetros, lo que determina su excentricidad. Su razonamiento es demasiado largo para incluirlo aquí. Primero prueba que la proyección de la circunferencia en un plano no perpendicular al que la contiene es una elipse. Luego se basa en este resultado para demostrar que la sección del cilindro circular que se obtiene mediante un plano no paralelo a las generatrices es una elipse cuya excentricidad está relacionada con el coseno del ángulo formado por ambos planos.

Apostol (1977) incluye en su *Calculus* (pp. 611-612) una demostración que considera preciosa y elegante de que la intersección de un plano con un cono es una elipse:

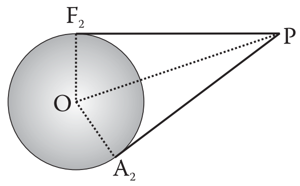
> *... fue descubierta en 1822 por el matemático belga G. P. Dandelin (1794-1847) utilizando dos esferas que son tangentes al cono y al plano secante...*

Estoy de acuerdo con Apostol en que la idea de Dandelin es maravillosa. Además es breve y fácilmente adaptable al caso del cilindro. Consiste en demostrar que los dos puntos de intersección del plano de corte con las esferas inscritas en el cilindro y tangentes a este plano determinan los focos de la elipse. La figura de más abajo muestra la situación. Primero aparece el cilindro visto de costado, la elipse se ve como si fuese un segmento, el corte del plano con el cilindro, y ambas esferas aparecen como círculos tangentes a las generatrices del cilindro. F_1 y F_2 son los puntos de intersección de este plano con cada esfera. Junto a esta figura se reproduce la situación con mayor perspectiva para poder apreciarla con más claridad.



Tomemos un punto P cualquiera sobre la curva que surge de la intersección del plano con el cilindro. La cuestión es demostrar que la suma de distancias a los puntos F_1 y F_2, intersecciones del plano secante con cada esfera, es siempre constante. Esta es la propiedad que caracteriza los focos de la elipse.

En efecto, para cualquier punto P de la curva, será $PF_1=PA_1$ y $PF_2=PA_2$ puesto que tanto PF_1 como PA_1 son tangentes trazadas a una esfera desde el mismo punto P:



Lo mismo para PF_2 y PA_2. Entonces, $PF_1+ PF_2=PA_1+PA_2=D$, siendo D la distancia constante que separa ambas esferas. Por tanto, la suma de distancias de cada punto de la sección curva a F_1 y F_2 también es constante y esta curva es una elipse con focos en dichos puntos.

Las sombras son manchas pasajeras, de quita y pon. Una parte importante del conocimiento matemático se fraguó contemplando las sombras. Aún hoy en día el análisis de las sombras supone un recurso educativo de primer orden para comprender el mundo e introducir al estudiante en el estudio de las matemáticas. En la época en que Miguel de Cervantes hacía recorrer a Don Quijote los campos de La Mancha, la luz de la noche era la luz de una vela. ¿Quién le iba a decir que siglos más tarde otros molinos, aunque no muy distintos, servirían para iluminar la noche y los rincones más oscuros?

Al contemplar un círculo desde un punto sobre la perpendicular que pasa por su centro y suficientemente alejado como para verlo entero, lo percibimos tal como es, con forma circular. Si nos apartamos de esta perpendicular percibimos con forma elíptica algo que en realidad no lo es. Después del planteamiento matemático desarrollado, sabemos que las sombras que el Sol recorta en el molino son elípticas.

Pero, ¿se percibe una elipse como tal cuando se contempla desde cualquier punto? Sólo cuando se observa desde un punto situado en el plano ortogonal al semieje mayor y ortogonal también al plano de la elipse. En tal caso, nuestra visual la comprime más aún, acentuando el achatamiento de la circunferencia de la que procede. Si la elipse se observa desde un punto situado en el plano ortogonal al semieje menor y ortogonal al plano de la elipse, nuestra visual la descomprime y puede llegar a hacerlo hasta el punto de percibirla como una circunferencia.

También los segadores, leñadores, charcuteros, lampistas y pasteleros recortan cilindros, el objeto geométrico más característico de la región manchega. Las de los molinos son ***Elipses para ver de día***. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

APOSTOL, T.M. (1977): *Calculus*. Editorial Reverté.

BESKIN, N.M. (1977): *Representación de Figuras Espaciales*. Editorial MIR. Moscú.

iMATgen 6

La forma del obsequio que nos ofrece este señor nos es tan familiar que sin saber para qué sirve somos capaces de ponerle nombre. Su tamaño puede recordarnos una pelota de balonmano, pero ésta suele ser de cuero. Es demasiado pequeña para ser una de baloncesto o un balón de fútbol o de voleibol. Por el contrario, resultaría demasiado grande para jugar al tenis o a pelota vasca. Sin tener en cuenta su aparente fragilidad. ¿Resistiría un golpe de *drive*, un manotazo de *pelotari* o un puntapié?

Quien sostiene esta pelota es también quien la construyó. Yo fui testigo de su trabajo. No realizó ningún esquema, diseño o cálculo, aunque viendo la perfección de su trabajo nos cueste creer que pueda llegar a existir. A los matemáticos no sólo nos cuesta creerlo, a menudo tampoco nos agrada que algo tan bello y bien hecho sea factible sin utilizar matemáticas.

No es raro que nos equivoquemos en esta apreciación porque incluso hay animales capaces de hacer objetos geométricos tan maravillosos como este. Un animalito hábil construyendo esferas es el escarabajo pelotero. Este bichito empuja con sus patitas traseras masas de excrementos que dirige a un lugar específico donde las comerá. Al empujarlas, la masa rueda y rueda por el suelo hasta llegar a su destino. Durante el recorrido la masa adquiere poco a poco una forma cada vez más redondeada que puede calificarse de bola o esfera maciza al llegar a su ubicación definitiva. Este objeto geométrico, la bola, modeliza matemáticamente el objeto resultante del arduo trabajo del coleóptero.

Una bola se caracteriza por la relación que guardan los puntos que la forman, esto es, que todos distan de un punto particular (llamado centro) como mucho una distancia determinada (llamada radio). La esfera, la superficie de una bola, consta sólo de aquellos que se encuentran a idéntica distancia a este centro.

Pero esta definición no refleja el modo en que el escarabajo construyó su bola. No la hizo colocando puntos a la misma distancia de uno primigenio. Su realidad es muy distinta. La bola surge de la interacción entre el contacto de la masa con el suelo y de rodar en muchas direcciones. Su superficie se va redondeando, suavizando, hasta que todos los puntos que la forman comparten una curvatura casi idéntica. Esto se corresponde con otra definición de esfera y de bola: aquel objeto macizo cuyos puntos de su superficie poseen idéntica curvatura. Estas concepciones de bola y esfera reflejan con mayor fidelidad el origen del objeto. Constituyen por tanto un modelo matemático mucho más apropiado.

Se trata de un modelo válido también en casos extremos como los de un plano y un punto porque la curvatura de una esfera puede cuantificarse en relación a su tamaño. Una superficie muy llana, apenas curvada, tendrá curvatura muy pequeña, casi nula. Es el caso del planeta que pisamos. Mientras que la de una superficie muy curvada, muy convexa, deberá ser muy grande, casi infinita. Esto es algo precisamente inverso al valor del radio de una esfera. A mayor radio, más llana su superficie. A menor radio, más convexa. La curvatura del plano, considerado como superficie de una bola de radio infinito, será nula. Considerando el punto como una bola de radio nulo, su curvatura será infinita.

Esta perspectiva resulta muy interesante porque, partiendo de la idea de esfera sugerida por un objeto tangible y real, dos objetos geométricos fundamentales como son el punto y el plano aparecen como casos límite. No debe sorprendernos que esto no sea así en la concepción euclidiana. La tierra que pisamos nos parece llana porque el radio del planeta es demasiado grande como para percibir una curvatura infinitesimal desde nuestra estatura. Vivimos demasiado cerca del límite.

El personaje de la fotografía siguió un método muy preciso para lograr una bola casi perfecta si despreciamos las imperfecciones propias que la realidad impone, tanto desde la perspectiva de la realización del trabajo como de las características de material utilizado. Ahí se fragua la metamorfosis de esta imagen en iMATgen. ¿Cómo se construyó esta esfera?

¿Cuál es su intríngulis, matemático o no? ¿Puede hacerse sin matemáticas o tal vez se construyó de modo parecido a las bolitas del escarabajo pelotero?

En esta ocasión quiero que la iMÁTgen sea explicada por otras imágenes, sin fórmulas, sin letras, sin números. Dicen que más vale una imagen que mil palabras. A ver si ahora pueden valer más unas pocas imágenes que mil números. Te invito, apreciado lector o apreciada lectora, a que realices tus propias conjeturas y análisis a partir de la siguiente serie de imágenes, las predecesoras de la que inicia este artículo:

Con la pelota de esta iMATgen se practica un deporte llamado *Sepak Takrow*, una especie de voleibol que se juega con los pies. Es muy popular en países del sudeste asiático, sobre todo en Malaysia, Tailandia e Indonesia. La red está a la altura de la cabeza de los jugadores, tres por cada equipo. La pelota se puede golpear con la cabeza y con los pies, pero no con las manos. Hay jugadas muy espectaculares. A menudo un jugador efectúa un salto acrobático, una voltereta en la que sus pies se levantan por encima de la red mientras su cabeza se aproxima al suelo. Así puede chutar hacia el campo contrario. Algo parecido a lo que en fútbol se llama chilena, pero con algo más de genio y rabia.

La pelota está hecha de ratán, una fibra vegetal flexible parecida al mimbre, pero de sección más llana, no tan redondeada. Aunque, más que hacer, la verdadera tarea del artesano consiste en ***Tejer la esfera***. ■

SUMA 45
Febrero 2004, pp. 105-107

La Sociedad Duodecimal

El *número de sociedades* es un dato interesante. Por ejemplo nuestra Federación hace bien en vigilar este número, procurando su crecimiento y asegurando las imprescindibles cuotas. Sin embargo, *sociedades dedicadas a un número* hay pocas. En este clip quisiera compartir con los lectores de SUMA todo lo que he logrado averiguar sobre la sociedad duodecimal, lo cual nos obliga, de paso, a profundizar en la vida del admirado número 12.

El 12 temporal

Desde hace milenios, cuando Irak aún era Babilonia, el número 12 se vio ligado a relojes y calendarios, al servicio de marcar instantes y divisiones del tiempo, graduando vínculos. Esta omnipresencia del 12 en la cuarta dimensión sigue hoy vigente: 12 meses del año, 12 marcas en los relojes analógicos, días de 24 horas, división de la hora en 5 x 12 minutos y del minuto en 5 x 12 segundos; graduación de la circunferencia en 360º = 12 x 30º, 1º = 60', 1' = 60'', etc. ¿Alguien puede imaginarse hoy un abandono del 12 temporal para pasar a una *decimalización* del tiempo?

Contar con 10, medir con 12

Históricamente, pronto el sistema de numeración de base 12 de efímera existencia, dejó paso al sistema decimal aritmético, el cual se impuso. Sin embargo, desde siempre los sistemas metrológicos de pesos, capacidades, longitudes, etc. mantuvieron, hasta la revolución francesa, el uso del 12 y sus divisores para fijar los múltiplos y submúltiplos de las medidas. ¿Razonable? Pues sí, y mucho. La mejor alternativa a la precaria descomposición 10 = 2 x 5 es la riqueza de factores del 12: 12 = 3 x 4 = 2 x 6... Si una vara unidad de medida se divide en 12 partes quedan marcadas en la vara las fracciones $1/4$, $1/2$, $3/4$, $1/3$, $2/3$. Y tratándose de medir, las operaciones de dividir por mitades o por terceras partes, son esenciales en la práctica. Ya Platón fue ferviente admirador del 12 por estas razones:

Desde hace milenios, cuando Irak aún era Babilonia, el número 12 se vio ligado a relojes y calendarios, al servicio de marcar instantes y divisiones del tiempo, graduando vínculos. Esta omnipresencia del 12 en la cuarta dimensión sigue hoy vigente.

Claudi Alsina
elclip.suma@fespm.org.

Mística duodecimal

Como todos los primeros números, el 12 tiene también su mística particular. Los 12 signos del zodíaco clasifican a la Humanidad en 12 grupos, poseyendo los de cada grupo idéntico destino según el horóscopo correspondiente (a mí la humanidad siempre me ha parecido algo más complicada, con un mayor número de grupos, pero los periódicos siguen incluyendo su clasificación astral. Como yo nací un 30 de enero al igual que el Príncipe Felipe, los dos somos Acuario y tenemos idénticas posibilidades... En fin, no lo veo claro).

En Israel coexistieron 12 tribus y por algún motivo que desconozco 12 fueron los Apóstoles que acompañaron a Jesucristo.

Medidas tradicionales

Basta recordar 1 *vara* = 3 *pies* = 4 *palmos*, 1 *pie* = 12 *pulgadas* = 16 *dedos*; 1 *palmo* = 12 *dedos*; 1 *pulgada* = 12 *líneas*; 1 *línea* = 12 *puntos*... para ver la importancia del 12. También en superficies aparecen porciones duodecimales (1 *fanega* = 2 *almudes* = 12 *celemines*) y en medidas de capacidad de áridos (1 *cahíz* = 12 *fanegas*, 1 *fanega* = 12 *celemines*)

Y no podemos dejar de recordar la *docena de fraile* que tenía dos valores: 11 cuando se trataba de pagar y 13 cuando se trataba de cobrar.

> *La* Duodecimal Society *nació formalmente el 5 de abril de 1944 con el propósito de dirigir investigación y educación pública en la ciencia matemática, con especial dedicación al uso de la Base Doce de numeración, en matemáticas, pesos y medidas, y otras ramas de la ciencia pura y aplicada.*

Bienvenido Mr. Andrews

El escritor americano F. Emerson Andrews culminó en los años treinta del siglo XX, una serie de curiosos estudios sobre el sistema duodecimal de numeración. El noble Bufón, el inventor Isaac Pitman, el filósofo Herbert Spencer, H. G. Wells y tantos otros amantes del 12, nunca llegaron tan lejos como Mr. Andrews. A través de docenas de artículos (no podía ser de otra manera) F. E. Andrews defendió el retorno a la base 12, al sueño de revitalizar el sistema anglosajón de metrología, abandonando el perverso sistema métrico y la tan difundida decimalización. Nadie puede negar a Andrews la valentía de predicar solo frente al mundo las bondades duodecimales. Se debe a Andrews la propuesta de usar como dígitos de la base 12: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, X, E. Como buen hombre de letras a Mr. Andrews le fascinó *su descubrimiento* de cómo escribir y operar números en base 12. Pero fue aún más lejos con su invento...

The Duodecimal Society

Esta sociedad americana nació formalmente el 5 de abril de 1944 con el propósito de *dirigir investigación y educación pública en la ciencia matemática, con especial dedicación al uso de la Base Doce de numeración, en matemáticas, pesos y medidas, y otras ramas de la ciencia pura y aplicada*. Naturalmente, el fundador fue F. E. Andrews, primer presidente de la sociedad, y líder de un numeroso grupo de seguidores. Con la publicación periódica *The Duodecimal Bulletin* quedó resuelto el problema editorial de difundir artículos sobre las virtudes del 12.

The Dozenal Society of America

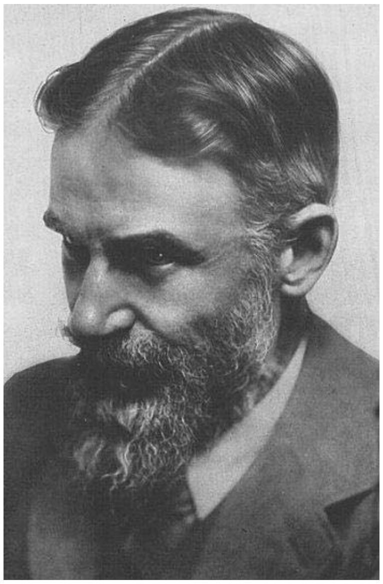
Si alguien puede creer que la referencia a la sociedad duodecimal es una reliquia histórica, se equivoca. A través de Internet pueden conectar con la página web

http://www.polar.sunynassau.edu/~dozenal/

donde la renovada The Dozenal Society of America ofrece acceso a sus artículos, sugiere enlaces, formas de conectar, etc. A la sociedad americana debe añadirse su homóloga europea The Dozenal Society of Great Britain, fundada en 1959 por Mr. Brian Bishop. Cabe remarcar aquí que el sistema anglosajón sigue vivo en dinero y medidas en Gran Bretaña y que en Estados Unidos, aunque el sistema métrico decimal está vigente, persisten las medidas anglosajonas con gran aceptación social (1 yarda = 3 pies = 36 pulgadas = 0,9144 m; 1 galón = 4 cuartos = 8 pintas = 4,546 l (inglés) ó 3,785 l (americano); 1 libra = 16 onzas = 453,59 g; etc.)

Música duodecimal

En 1943, Velizar Godjevatz propuso una nueva notación musical duodecimal. El poco éxito editorial de esta propuesta decidió al autor a autopublicar en Nueva York en 1948 su libro The New Musical Notation. Pero el argumento de Gojevatz para justificar su idea es el siguiente: en un piano, por ejemplo, la sorprendentemente llamada octava tiene doce, no ocho tonos, producidos por siete teclas blancas y cinco teclas negras y con el objetivo de facilitar el tecleo propone una nueva notación para partituras. El famoso George Bernard Shaw apoyó públicamente estas ideas.



George Bernard Shaw (1856-1950)

Un número especial

Numerosas son las curiosidades aritméticas que pueden descubrirse con el 12. La suma de sus divisores propios 1, 2 , 3, 4, 6 es 16, número superior al 12, lo cual coloca al 12 como el menor en la familia privilegiada de los números abundantes. Pero el producto de estos divisores es: 1 x 2 x 3 x 4 x 6 = 144 = 12 x 12. Siendo $12^2 = 144$ es $21^2 = 441$. Cabe notar que 12= = 1 + 2 +3 + 6 (número semiperfecto) y que 12 = 1- 2 +3+ +4 + 6.

Un número muy geométrico

En Geometría el 12 aparece en algunas figuras y propiedades espaciales. Sin despreciar el polígono de 12 lados, resplandecen con luz propia el cubo y el octaedro con 12 aristas cada uno, el dodecaedro con 12 caras pentagonales y el icosaedro con 12 vértices. Como el tetraedro tiene 4 vértices, 4 caras y 6 aristas... parece que el 12 tiene especial relevancia en el mundo de los poliedros regulares.

También el rombododecaedro con sus 12 caras rómbicas y su capacidad de llenar el espacio se apunta a la 12manía.

Destaquemos finalmente que si una circunferencia puede ser tangente a seis circunferencias iguales que la rodean al saltar al espacio una esfera puede tocar a la vez a 12 esferas idénticas colocadas a su alrededor, donde cada una toca a la central y a cuatro más.

El 12 hoy

El 12 sigue estando hoy vigente en pulgadas y millas, en chelines y peniques,... en todo el sistema horario y en las muchas cosas que se venden o embalan por docenas o medias docenas. Los números con solera seguirán siempre vivos. A nosotros nos toca asegurar su permanencia.

Para pensar un rato

Si lo desea puede pensar en dos problemas relacionados con el 12.

PROBLEMA 1. Tiene un dodecaedro inscrito en una esfera de radio R y un icosaedro inscrito en otra esfera idéntica a la anterior. ¿Cuál de estos dos poliedros ocupa más espacio dentro de la esfera?

PROBLEMA 2 (ABIERTO). Según la conocida desigualdad isoperimétrica, en una figura plana de área A y perímetro P vale la relación $4\pi A \leq P^2$, valiendo la igualdad en el caso del círculo. Como π es mayor que 3 resulta, en particular, $12A \leq P^2$. ¿Sabría direccionar 12 círculos para ver que efectivamente todos ellos caben en un cuadrado de lado $2\pi R$?

Sugerencias y soluciones curiosas pueden ser enviadas a la dirección: *elclip.suma@fespm.org* ■

PARA SABER MÁS

ANDREWS, F. E. (1934): “An Excursion in Numbers”, *The Atlantic Monthly*, October 1934.

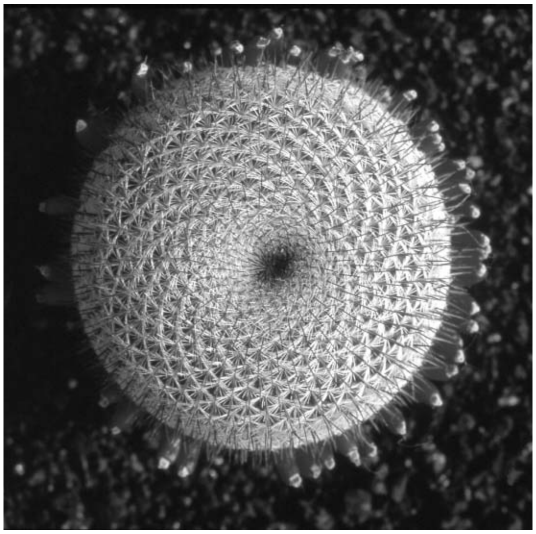
ANDREWS, F. E.: (1935) *New Numbers*, Harcourt, Brace & Company, New York. Edición de Farber & Farber en Londres (1936) y de Essential Books, New York (1944)

ANDREWS , F. E. (1972): “My Love Affair With Dozens”, *The Michigan Quarterly Review*, Vol. XI No. 2, Spring – 1972.

The Dozenal Society of America:
http://www.polar.sunynassau.edu/~dozenal/

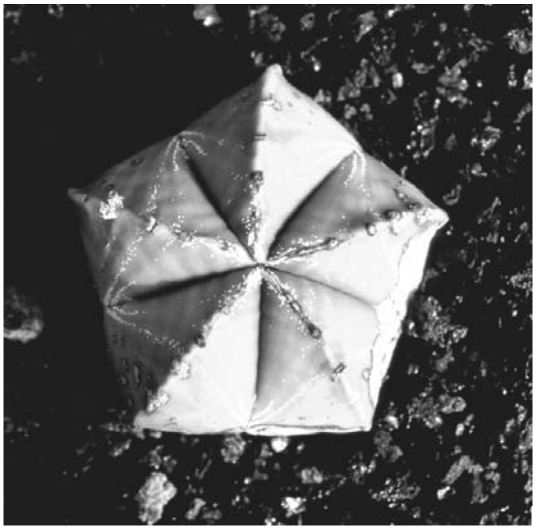
WELLS (1997): The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers. Penguin Books.

ZERGEL, Monte J. (2002): “A visit with six”. *The College Mathematical Journal* V33, N2, 74 – 87. The Mathematical Association of America.



Espirales. Jardín de Cactus. Isla de Lanzarote

Heptágono. Jardín de Cactus. Isla de Lanzarote

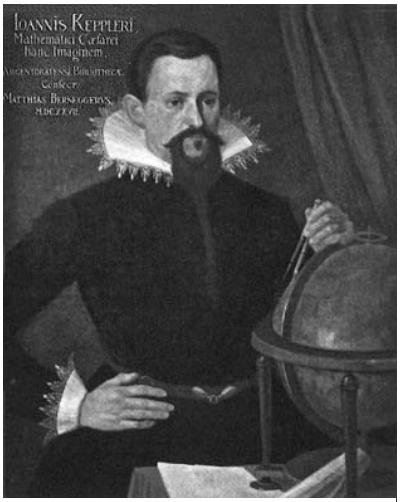


Pentágono. Jardín de Cactus. Isla de Lanzarote. Fotos FMC

SUMA 45
Febrero 2004, pp.109-110

La óptica de Kepler a Newton

Hace 400 años, en 1604 vio la luz un importante tratado de Johannes Kepler (1571-1630) titulado *Ad Vitellionem paralipomena, quibus astronomiae pars optica traditur* y dividido en once capítulos, dedicados a cuestiones de óptica los cinco primeros y de astronomía los restantes. Kepler se había dado ya a conocer entre los filósofos de la Naturaleza de la época con su primera obra, *Mysterium Cosmographicum* (1596), en la que había presentado su audaz hipótesis cosmológica sobre la relación entre la configuración del Sistema solar y los cinco sólidos platónicos. Había entrado así en contacto con Galileo Galilei y Tycho Brahe. Bajo la protección de este último se había traslado a trabajar de Graz —donde se había visto envuelto en las controversias religiosas de la época de la Reforma— a Praga. Tras la muerte de Brahe en 1600, Kepler le había sucedido como matemático de la corte del emperador Rodolfo II.



Johannes Kepler (1571-1630)

El perfil intelectual de Kepler ha resultado a menudo difícil de comprender desde el punto de vista de la rígida separación de las disciplinas y formas de saber que se ha afianzado en los siglos XIX y XX. Una de sus tareas principales en aquellos años era la elaboración de horóscopos, y en 1602 había publicado una defensa de la astrología, como disciplina que —además de contribuir a sostener económicamente a quien se dedicaba a la investigación astronómica— podía dar una cierta contribución a la búsqueda de la verdad.

El perfil intelectual de Kepler ha resultado a menudo difícil de comprender desde el punto de vista de la rígida separación de las disciplinas y formas de saber que se ha afianzado en los siglos XIX y XX.

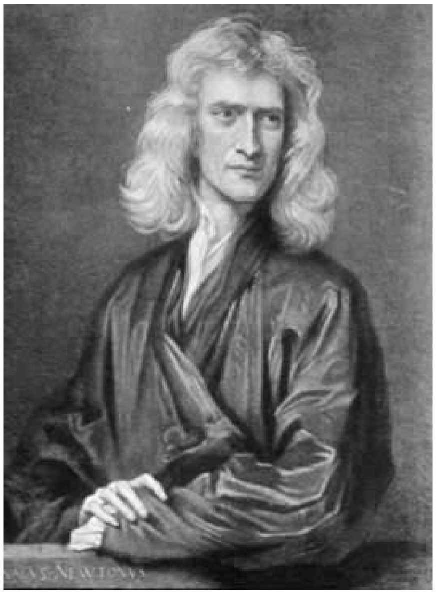
La obra que recordamos aquí era presentada por su autor como un complemento a un tratado de Vitelio (un autor activo en la segunda mitad del siglo XIII, quizá de origen polaca) titulado *Perspectiva*, que había dado a conocer en Europa los estudios de óptica árabes, y en particular la obra *Kitab al-Manazir* (Libro de óptica) de Alhazen (Ibn al-Haytham, m. en El Cairo en 1039). Los estudios de óptica tenían una larga tradición, en la que se combinaban aspectos fisiológicos (el estudio del ojo humano y de la visión, que había interesado a Galeno), filosóficos (la teoría de la percepción) y matemáticos. En efecto, la *Óptica* de Euclides había introducido el lenguaje geométrico en los estudios de óptica, siguiendo una exposición por medio de definiciones y proposiciones análoga a la seguida en los *Elementos*.

Óptica, mecánica y astronomía fueron las disciplinas de elección, desde la época griega hasta la Revolución científica, en las que se ensayó por vez primera la "visión matemática de la realidad": íntimamente relacionadas entre sí, representaron el núcleo del sistema de mundo concebido por los verdaderos visionarios o "sonámbulos" —como los bautizó Arthur Koestler— que fundaron la ciencia moderna.

La óptica geométrica se basa en el concepto de rayo visual: es interesante observar que la continuidad del lenguaje o del modelo matemático desde los tratados antiguos hasta los

Ana Millán
hace.suma@fespm.org

estudios modernos (como los relativos a los instrumentos ópticos) corre pareja a una fuerte discontinuidad conceptual, de la óptica como teoría de la visión a la óptica como teoría de la luz (en este nuevo marco general, el rayo es la trayectoria en línea recta de la luz). El estudio de Kepler es el primero de una serie de obras de autores del siglo XVII, que marcaron este viraje teórico: aquí, como en la mecánica celeste, el punto más alto fue alcanzado con el trabajo de Newton, *Opticks, or a treatise of reflextions, refractions, inflexion and colours of light* (1704).



Isaac Newton (1643-1727)

El caso de la óptica ilustra bien la atmósfera intelectual, animada y ecléctica, del inicio de la Europa moderna. La *Óptica* de Euclides fue estudiada por los artistas del Renacimiento por sus aplicaciones a la perspectiva, cuando ya su punto de vista teórico estaba en camino de ser superado gracias a los estudios medievales. Kepler cita en su tratado con gran admiración a Giambattista Della Porta, ("excelente sacerdote de la naturaleza", son sus palabras) famoso estudioso de magia y de ciencias ocultas, que se había ocupado de óptica basándose en parte en los conocimientos que había adquirido en las fábricas de vidrio de Murano. Aunque hoy en día se reconoce la importancia de los escritos de Della Porta sobre estos temas, de ellos se desprende la idea de que las lentes son objetos caprichosos, capaces de engaño y de los que no cabe fiarse.

Es interesante observar que la continuidad del lenguaje o del modelo matemático desde los tratados antiguos hasta los estudios modernos corre pareja a una fuerte discontinuidad conceptual, de la óptica como teoría de la visión a la óptica como teoría de la luz.

Por otra parte, la invención del catalejo —que en 1604 era ya conocido— fue fruto no directamente de la investigación teórica sino de la práctica técnica, aunque probablemente enriquecida por las ideas que de los estudiosos se filtraban hacia círculos más amplios de personas, y en particular en este caso hacia los artesanos del vidrio y los fabricantes de lentes para corregir los defectos visuales. Precisamente la reacción de Kepler a la lectura del "anuncio astronómico" dado por Galileo de sus observaciones con el catalejo —en el *Sidereus nuncius* del 1610— fue la publicación de una nueva memoria de óptica, o mejor dicho de dióptrica (el estudio de la refracción), titulada *Dioptrice* (1611) en la que desarrolló la teoría geométrica contenida en su primera obra, aplicándola al estudio de las lentes y de su combinación, llegando a una descripción matemática del catalejo. Las lentes, la visión, la geometría… las fronteras del conocimiento se ampliaban: en el contexto de sus estudios de óptica introdujo Kepler la palabra "foco"(focus) en la teoría de cónicas.

Eran años de extraordinaria efervescencia cultural, marcada por la apertura hacia ideas, experiencias y conocimientos de proveniencia muy diversa. No todo fue fácil, desde luego, e incluso en los propios círculos científicos tuvieron lugar agrias polémicas. Una de las muchas en las que se vio envuelto Newton se refiere precisamente a su modelo de telescopio, sobre el que empezó a trabajar en torno a 1666 y que siguió perfeccionando durante al menos quince años, estudiando tanto los aspectos geométricos como los materiales utilizados (I+D, diríamos hoy en día). En 1672 presentó una memoria a la Royal Society ilustrando el origen de su invención y sus ideas sobre la luz y los colores, que fue ásperamente criticada por muchos de sus colegas, y en particular por Robert Hooke. En los cuatro años siguientes aparecieron en la revista *Philosophical Transactions* una serie de notas de Newton defendiéndose de quien lo criticaba. En una carta al secretario de la sociedad, Henry Oldenburg, del 18 de noviembre de 1676, escribía que estaba pensando en dedicarse a sus estudios en forma estrictamente privada, pues ante él se presentaba la disyuntiva: o no proponer jamás algo nuevo, o quedar esclavizado en la defensa de las novedades propuestas. Y, efectivamente, durante años sus estudios permanecieron inéditos.

En 1703 murió Hooke: un año después se decidió Newton, animado por sus sostenedores, a dar a la imprenta la *Óptica*. En esta primera edición figuraban en apéndice dos tratados de matemáticas (que no figuran en las ediciones sucesivas): empezaba entonces la discusión de prioridad con Leibniz sobre la introducción del cálculo diferencial… ■

SUMA 45
Febrero 2004, pp.111-114

Estadística electoral

Estamos en tiempo electoral (y en nuestro país casi todos lo son). El pistoletazo mediático de salida se dio en las elecciones de Cataluña, donde desde tiempo atrás todos los sondeos daban por ganador al PSC, tanto por votos como por escaños. Incluso seguían así los sondeos de las emisoras de radio y TV de las ocho de la tarde, después de votar. Pero lo cierto es que, una vez escrutados todos los votos, quien ganó en escaños fue CiU.

RESULTADOS DE LAS ELECCIONES CATALANAS

Escrutado: 99,00% (23.00 horas)
Censo: **5.307.074** — Censo: **5.293.657**
Participación: **64,51%** — Escaños: **135** — Participación: **60,3%**

	Autonómicas 2003			Autonómicas 1999		
	Escaños	Votos	%	Escaños	Votos	%
CiU	46	1.007.839	30,90	56	1.178.420	37,7
PSC*	42	1.017.479	31,20	52	1.183.299	37,8
ERC	23	536.822	16,46	12	271.173	9,5
PP	15	387.087	11,87	12	297.265	2,5
ICV-EUiA**	9	238.531	7,31	3	78.441	1,4
EUiA	-	17.831	0,55	0	44.334	

(*). Incluye los votos y escaños de la coalición en Girona, Lleida y Tarragona y los del PSC en Barcelona en 1999
(**). Sólo en Barcelona en 1999

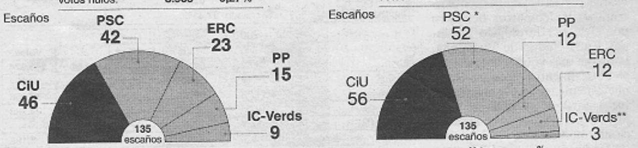
PARLAMENTO DE CATALUÑA

2003 Escrutado: 99.00%

Censo electoral:	5.307.074	
Votantes:	3.270.571	
Abstención:	1.889.566	36,62%
Votos blancos:	30.150	0,92%
Votos nulos:	8.908	0,27%

1999

Censo electoral:	5.293.657	
Votantes:	3.133.926	
Abstención:	2.159.731	40,8%
Votos blancos:	28.968	0,9%
Votos nulos:	7.836	0,2%



2003	Votos	%
CiU	1.007.839	30,17
PSC*	1.017.479	32,04
ERC	536.822	16,06
PP	387.087	11,97
IC-Verds**	238.531	7,46
EUia	17.831	0,56

1999	Votos	%
CiU	1.178.420	37,7
PSC*	1.183.299	37,8
PP	297.265	9,5
ERC	271.173	8,7
IC-Verds**	78.441	2,5
EUia	44.334	1,4

(*). Incluye los votos y escaños de la coalición en Girona, Lleida y Tarragona y los del PSC en Barcelona en 1999. (**). Sólo en Barcelona en 1999

Pero antes de llegar el resultado final ya se anunció con seguridad por parte de un representante de CiU a partir de los resultados de las 100 primeras papeletas en las distintas mesas. Apareció así una vez más en los medios la diferente fiabilidad de las distintas muestras que se pueden tomar de un colectivo (y su puesta de largo ya tiene más de veinte años: fue Guerra el que anunció el triunfo socialista del 82 por ese procedimiento).

en gritos de "¡Mas presidente!". El marcador electoral daba, a las 21.45, un escaño más a los socialistas, cuando compareció el secretario general de CIU, Josep Antoni Duran Lleida, que dio a conocer el sondeo que CIU había hecho sobre 100 papeletas escrutadas, considerado muy fiable. Y salía victoria de los nacionalistas, lo que se conformó posteriormente.

Curiosamente casi nadie hizo leña del árbol caído en los días siguientes, olvidando la táctica habitual de hablar sólo de las matemáticas (en este caso la Estadística) cuando fallan. ¿Estará cambiando algo en la línea de lo que comentábamos en el artículo del pasado número?

> *Aunque en las tertulias de opinión se destaquen los fallos de los sondeos, ningún político con expectativas de triunfo se presenta a unas elecciones sin un sólido y profesional equipo de estadísticos detrás.*

Porque aunque en las tertulias de *opinión* se destaquen con frecuencia los fallos de los sondeos, a ningún político con expectativas de triunfo se le ocurriría hoy en nuestro país presentarse a unas elecciones sin un sólido y profesional equipo de estadísticos detrás. Incluso buena parte de las críticas que se suelen hacer a los partidos mayoritarios es que hacen demasiado caso de ese equipo, en el sentido de que van midiendo las repercusiones de las propuestas que van aportando en la campaña y las van ajustando para obtener más votos. Es decir que parece que no se transmite lo que se piensa (si es que se piensa algo) sino lo que el auditorio quiere oír, lo que lleva por una parte a que los mensajes son muy parecidos (poca gente se atreve a dar mensajes *politicamente incorrectos*) y por otra al desprestigio de *los políticos*, como nuevos charlatanes de la tribu.

Ferando Corbalán
medios.suma@fespm.org

Esta época de campaña electoral sirve para constatar una vez más una evidencia que tan difícil nos es aceptar como colectivo de enseñantes (y también de matemáticos): la parte de las matemáticas que más presencia social tiene (y con diferencia) es la Estadística.

Lo más importante

En cualquier caso, esta época de campaña electoral sirve para constatar una vez más una evidencia que tan difícil nos es aceptar como colectivo de enseñantes (y también de matemáticos): la parte de las matemáticas que más presencia social tiene (y con diferencia) es la Estadística. O dicho de otra forma, que en esta sociedad de consumidores (más que de ciudadanos) los *servicios* matemáticos más demandados son los estadísticos. Lo que necesariamente tendría que llevar a darle a la Estadística una importancia en los programas educativos y también una presencia en la vida real de las aulas acorde con su importancia mediática. Destaco que no es suficiente escribirlo en los programas, porque todavía hoy con cierta frecuencia sigue sin *llegarse* a esa parte, olvidando que en la vida se tiene tiempo para lo que se considera importante, para lo que a uno le gusta, y lo mismo pasa en las opciones que cada enseñante hace en clase.

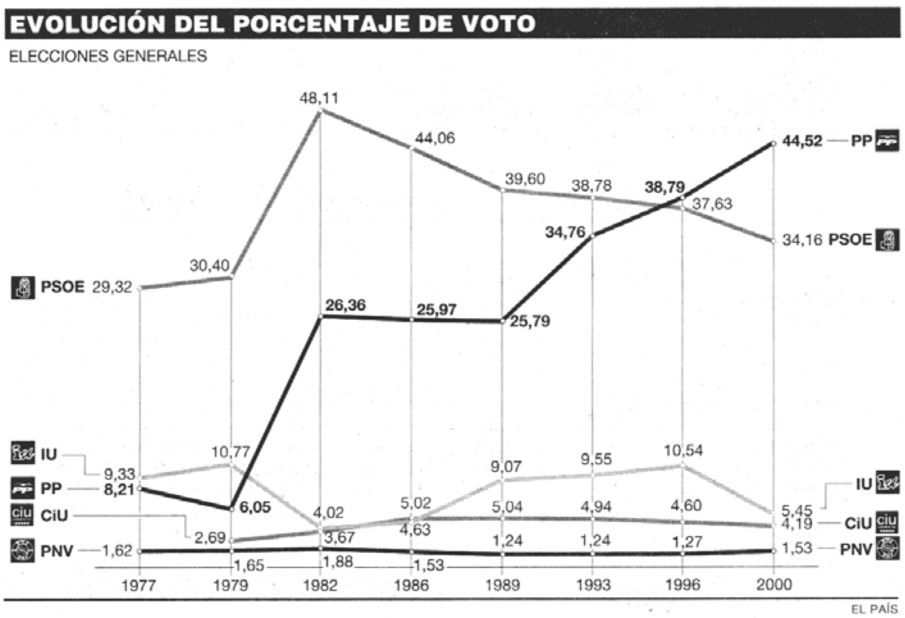
Tiempo es ya de asumir con todas y cada una de sus consecuencias que, como señala David S. Moore, *la estadística es importante por derecho propio, más importante que el cálculo diferencial e integral en la mayoría de las ocupaciones*. Y si en la enseñanza se trata de preparar a los futuros ciudadanos para que se desenvuelvan con comodidad en la sociedad del futuro, la preparación estadística tiene que tener un peso mayor del que tiene en la actualidad. Todo eso, sin tener en cuenta que además la tendencia es que cada vez esa importancia aumente.

La campaña electoral además es uno de los momentos más apropiados para mostrar a los alumnos algo que debería ser obvio pero que socialmente no está asumido: que las matemáticas tienen presencia e importancia en la sociedad, fuera de la escuela. Durante este tiempo no hay que ir mirando con detenimiento y sacarle punta a las noticias que se encuentren para mostrar la conexión matemática. No solo es posible que aparezcan espacios en algunos periódicos que pueden hasta titularse algo parecido a *Matemáticas electorales*, sino que los resultados de encuestas, su representación gráfica, la *cocina* electoral,... estarán en primera página y en las cabeceras de los noticiarios de radio y TV, aunque no siempre con la información suficiente (fechas y método de realización, tamaño de la muestra, intervalo de confianza,...) para poder hacerse una idea de su fiabilidad.

Cuando 2 y 2 no siempre son 4

Como ya he comentado otras veces el *2 y 2 son 4* se suele tomar como muestra fehaciente de la verdad de las matemáticas. Pero sobre la supuesta *objetividad* e *incortrovertibilidad* de las matemáticas en las épocas electorales hay que destacar una coincidencia curiosa. Durante las campañas los diferentes medios encargan encuestas electorales, y casi siempre salen resultados más favorables a un determinado partido en los medios que le apoyan ideológicamente. Y en las tertulias no se deja de señalar que los resultados finales de esas encuestas (y sobre todo las realizadas con fondos públicos) se dan tras el paso por la *cocina* de unos resultados que no siempre se parecen mucho a los que se presentan.

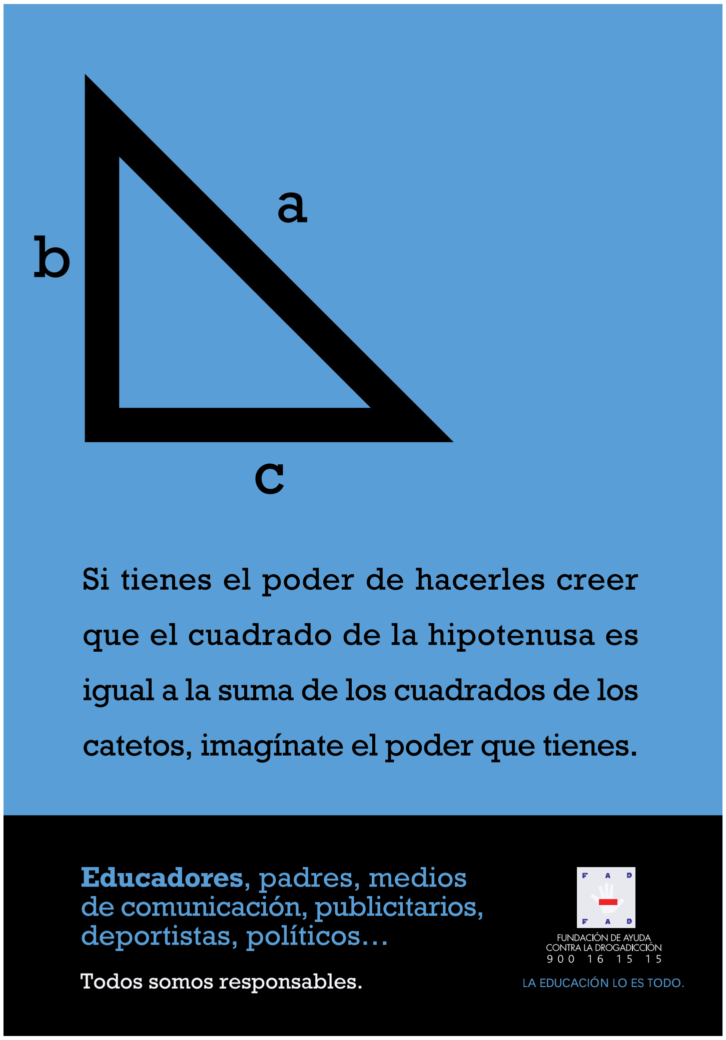
Ciertamente la diferencia entre lo que entra en la cocina y lo que sale no pocas veces es el resultado de una manipulación interesada, pero otras veces es por aplicación rigurosa del análisis de las tendencias de lo sucedido en elecciones anteriores (por la persistencia de las tendencias sociales), aunque parezca lo contrario. Y es que no pocas



El País, lunes 16 de febrero de 2004

veces en estadística (como todavía más en probabilidad) lo que el común de los mortales toma por *evidente* no es lo correcto. Será interesante rastrear en los medios durante este periodo artículos al respecto de gente cualificada, con los que poder formar un dossier para utilizar en el clases en los años siguientes.

Sí que es cierto que la tendencia a cocinar los resultados de las encuestas acaba cuando las elecciones ya han tenido lugar (el día de las elecciones, las encuestas a pie de urna) en que lo más interesante es preservar el negocio: acertar en los resultados en un momento en que ya no se puede influir en los mismos. Y a pesar de todo con cierta frecuencia se falla en ellas, consecuencia sobre todo de los defectos en la elección de las muestras (que cuando son buenas, como hemos señalado al comienzo, dar una perfecta imagen de la realidad).



También es el momento para mostrar en la realidad que eso de las *muestras* (que tal como lo presenta la teoría matemática parece música celestial) funciona de verdad, y ver en las *Fichas técnicas* de las encuestas que son de un tamaño muy pequeño y que sin embargo predicen con suficiente precisión los resultados. Y que cuanto mayor sea ese tamaño mejor es la predicción, pero que con uno muy pequeño ya se aproxima mucho.

Alguna tarea

Y es el momento de hacer alguna encuesta. La educación fundamental de nuestros alumnos tiene que ser para *consumidores* de encuestas, pero alguna vez también pueden hacer de *fabricantes*. Hay que pensar que los profesores de matemáticas tenemos a nuestra disposición (y a la suya en cuanto encuestadores) de una *mano de obra* estadística abundante y barata, que permite realizar encuestas con muestras de un tamaño que nunca ninguna empresa comercial soñará alcanzar (y menos en estos tiempos de ahorro de gastos y de globalización). El aumentar el tamaño de la muestra si quizás no logra superar el llamado *voto reservado* o *voto vergonzante* (el hecho de ocultar el voto que uno piensa realizar porque socialmente no está bien visto: porque va contra la políticamente dominante en ese momento), desde luego permite detectar algo que a las empresas profesionales suele pasar desapercibido: la irrupción de pequeños partidos emergentes. Si esa situación tiene menos importancia en unas elecciones generales, es determinante a veces en la composición de parlamentos autonómicos y en las mayorías de los ayuntamientos en las localidades grandes.

Y desde luego tiene una ventaja fundamental, que voy a explicitar en situaciones que yo he realizado personalmente: la comprobación práctica al poco tiempo de lo acertado de las previsiones. Supongamos que unos pocos días antes de las elecciones proponemos como trabajo de estadística que cada uno de los alumnos de un curso realice un pequeño número de encuestas (pongamos entre 10 y 20) de forma aleatoria en su localidad (o si esta es grande, en el barrio donde esté localizado el centro). Los datos aportados por cada una de estas personas ya serían significativas, pero juntando todas se tiene una

La diferencia entre lo que entra en la cocina y lo que sale no pocas veces es el resultado de una manipulación interesada, pero otras veces es por aplicación rigurosa del análisis de las tendencias de lo sucedido.

muestra de un tamaño de gran fiabilidad (incluso si no se han tenido grandes cuidados en la aleatoriedad de cada una de las muestras de cada alumno). Convenientemente tabuladas y pasadas a porcentajes y a escaños o concejales, su acierto se puede contrastar en los días siguientes a las elecciones (como mucho unos dos días) mirando en el periódico local o los datos que aparecen en los Ayuntamientos o en las sedes de los colegios electorales.

Sigue habiendo trabajo que hacer para que se vea cual es el trabajo de la educación matemática: poner las condiciones para que los alumnos induzcan o deduzcan (pero nunca que crean) resultados válidos en un contexto prefijado.

Y se puede utilizar también ese caudal de datos para probar que conforme se aumenta el tamaño de la muestra (juntando los resultados aportados por varios alumnos) la radiografía que se obtiene es más próxima a la realidad. Y que a partir de un determinado tamaño ya no varían prácticamente los resultados. Con todo eso podremos mostrar (o mejor podrán percibir de forma fehaciente los interesados) todo lo relativo a las leyes estadísticas que parecen traídas por los pelos. Y constatar la potencia de las matemáticas. En definitiva que las matemáticas tienen importancia social y que constituyen un poderoso instrumentos para conocer la realidad.

Un anuncio

En otro orden de cosas, y porque aparecen las matemáticas en una situación poco habitual, voy a comentar un anuncio de la Fundación de Ayuda contra la Drogadicción (*Sport*, 4/1/2004).

Se avanza un poco más en los conocimientos matemáticos que se supone conocidos por todos. No es solo el *2+2 = 4*, sino que llegamos al Teorema de Pitágoras. Pero con una formulación curiosa. No es que se señale que es cierto, sino que lo que parece que hacemos los profesores de matemáticas es *hacer creer* en este teorema (lo que parece presuponer que también podríamos hacer creer lo contrario), lo cual es mucho. Se agradece que se nos considere profesionales poderosos (aunque más de uno pensaría que sería bueno que se tradujera en algo más que palabras), pero parece mostrar que los resultados matemáticos no son algo que se deduce racionalmente dentro del campo que estamos trabajando, sino que es algo mágico, de un poder extraño. Sigue habiendo trabajo que hacer para que se vea cual es el trabajo de la educación matemática: poner las condiciones para que los alumnos induzcan o deduzcan (pero nunca que crean) resultados válidos en un contexto prefijado. ■

SUMA Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las **MATEMÁTICAS**

Apartado de Correos 19012
28080-MADRID (España)
Fax: (+34) 911 912 879
Dirección: sumadireccion@fespm.org
Administración: suma_administracion@fespm.org

SUMA 45
Febrero 2004, pp.115-119

Las matemáticas en la Cité des Sciences et de l'Industrie La Villette-París

Una mirada a *La Cité*

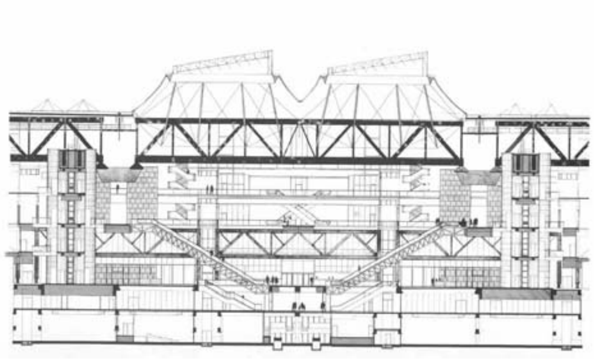
Creado por la mano del arquitecto Adrien Fainsilber este espléndido Museo de ciencia y de la técnica forma parte del gran conjunto del parque de La Villette, dedicado a la cultura y el ocio y tiene ya un peso crucial en el París actual. En este parque, proyectado sobre los antiguos mataderos de París por el arquitecto Bernard Tshumi, además de los diversos jardines y follies propuestos, se ha conservado el Grande Halle del siglo XIX, ahora dedicado a grandes exposiciones y congresos y se han realizado de nueva planta toda una serie de edificios dedicados a la cultura y a la música como la Cité de la

Musique y Le Zenit. En este entorno se sitúan el Museo y la Geode, una sala cinematográfica, también proyectada por Fainsilber, inaugurada en 1985 y preparada para la proyección de películas en pantalla de gran formato tipo IMAX.

El edificio, como la mayoría de museos de ciencia y tecnología, consiste en un gigantesco contenedor. Dentro de él se desarrolla una gran variedad de actividades culturales y cien-

Jacinto Quevedo
museos.suma@fespm.org

tíficas, basadas en el atractivo de exposiciones monográficas simultáneas. El interior se organiza según un espacio central monumental y escenográfico, al que se accede por diversas entradas y pasarelas. Está articulado sobre la base de docenas de escaleras mecánicas que dan acceso a los espacios alojados en las franjas perimetrales del edificio, distribuidas en seis niveles. Mediatecas, salas de exposiciones, salas de recepción y talleres para jóvenes y niños, planetarium, cines, centro internacional de conferencias, tiendas y bares se alojan en el interior. En realidad se trata de una especie de gran ciudad científica, una enorme galería comercial para exhibir los progresos de la ciencia, la técnica y la industria. La luz natural del gran vestíbulo se consigue mediante dos grandes cúpulas rotatorias de 17 m de diámetro que dirigen la luz solar hasta el mismo corazón del edificio.



Un poco de historia

En los museos de la ciencia, la técnica y la industria se continúa, en cierto sentido, la tradición iniciada en el Renacimiento tardío en las cámaras de las maravillas —Wunderkammern— y los gabinetes de ciencias naturales. Esta tradición se prolongó en los museos de ciencias naturales del siglo XIX que promovió la cultura postilustrada, cientifista, positivista y obsesionada por la clasificación. Como resultado de la socialización de la ciencia y la cultura que aportó el siglo XX estos museos se plantean ahora como grandes centros didácticos, activos y estrechamente relacionados con el contexto. Se convierten así en museos interactivos, basados en la intervención del público y la manipulación. Buscan cumplir una misión esencialmente experimental y pedagógica. Su objetivo es ser centros de influencia respecto a la comunidad, lugares de formación, núcleos que potencien la cohesión cultural y social.

El Palais de la Decouverte es pionero en esta tipología de museos, pero desde la apertura en 1969 del Exploratorium de San Francisco de la mano de Frank Oppenheimer una explosión de museos interactivos han surgido en la mayoría de los países Europeos y en Estados Unidos.

Palais de la Decouverte. París

Exploratorium. San Francisco

Muchos otros grandes museos (por ejemplo el Science Museum de Londres o el Deutches Museum de Munich) han incorporado contenidos interactivos en sus espacios. En los más recientes, cada vez se ha elevado más el nivel de tecnificación, desde el soporte técnico del edificio y la sofisticación de cada aparato, hasta todos los sistemas de obtención de información por parte de los visitantes. El caso de la Cité des Sciences de la Villette, es modélico en este sentido, ofreciendo gran variedad de exposiciones científicas temporales y multitud de servicios anexos: mediateca, centro de información, salas de conferencias, talleres, aulas para profesores, etc.

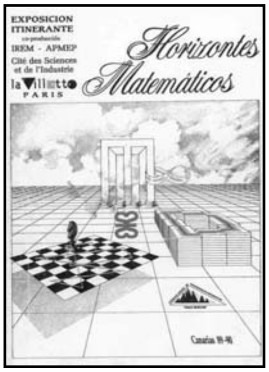
La exposición itinerante "Horizontes Matemáticos" precursora de las matemáticas de La Villette

Partiendo de una exposición puramente artesanal, realizada en 1980 por profesores de matemáticas de la región francesa de Orléans-Tours, la exposición *Horizontes Matemáticos* se reconstruyó profesionalmente a partir de 1981 e itineró por toda Francia.

En 1984 la exposición adquirió su forma definitiva y empezó a recorrer varios países. *Horizontes Matemáticos* fue desarrollada por un equipo de investigadores y de enseñantes franceses, provenientes de los I.R.E.M. (Institutos para la investigación de la enseñanza de las matemáticas) y de la A.P.M.E.P. (Asociación de profesores de Matemáticas de la enseñanza pública). Con su trabajo consiguieron ofrecer algo esencialmente pedagógico que por su carácter concreto, lúdico e interactivo permitía al que la visitaba aproximarse de forma sencilla a conocimientos científicos, especialmente matemáticos.

A través de diferentes manipulaciones, imágenes y textos la exposición pretendía varios objetivos:

- Permitir a todo tipo de público, niños y adultos, "hacer matemáticas con placer".
- Favorecer el encuentro entre investigadores y enseñantes y la gran mayoría del público no especialista.
- Mostrar que las matemáticas son una ciencia en plena evolución.
- Ofrecer a los enseñantes instrumentos pedagógicos variados.



Los 10 kioskos de la exposición

- Anamorfosis y Perspectivas: Anamorfosis cilíndricas y puzzles. Perspectivas cónicas y puntos de vista. La mirilla de Durero
- Nudos: Clasificación de nudos. ¿Qué nudo es éste? Metamorfosis: del nudo chino al turco.
- Apilamientos y simetrías: El problema de Hilbert de las 13 esferas. Granos de café y granos de arena. Espacios hiperbólicos y caleidoscopios.
- Pavimentos y repeticiones: Mosaicos islámicos y caleidoscopios. Pavimentaciones no periódicas de Penrose. Fractales y curvas del Dragón.
- Curvaturas y superficies: Curvaturas y superficies regladas. ¿Cual es el camino más corto?. La Tierra vista desde un satélite.
- Formas y estructuras del espacio: Pintar con el menor número posible de colores. La fórmula de Euler-Poincaré. Apilamientos de pirámides. Construye tus propios poliedros.
- Grafos y caminos: Euler: los puentes de Königsberg. El vigilante nocturno. Laberintos. Un cubo y una serpiente hamiltonianos.
- Azar y sondeos: ¡Nadie juega a suertes como el azar!. ¿Estamos seguros de los sondeos?. Los azares de la vida: ¿chico o chica?. Si es más grande que tu, ¡pierdes!.
- Matemáticas y Física: Caída de los cuerpos. Circuitos automovilísticos. Llenado, curvas y recipientes. Encontrar una línea o una superficie mínima: la naturaleza es perezosa.
- Puzzles matemáticos: Superficies equidescomponibles. Tamgram y puzzle pitagórico. Pitágoras, Diofanto, Fermat.

Desde 1981, responsables de contenidos del futuro Museo de La Villette realizaron encuestas sobre el público de la exposición, captándose que el visitante quedaba sorprendido por el contraste entre el carácter abstracto de las matemáticas, que habitualmente percibían o suponían, y el aspecto concreto de las manipulaciones. Se valoró especialmente la aceptación de lo interactivo, el carácter sociológico de los visitantes no-escolares y las percepciones de los visitantes sobre las matemáticas.

Ahora presentaré cuáles fueron los presupuestos y objetivos básicos que se plantearon para la exposición permanente de matemáticas en la *Cité* de *La Villette*.

Las matemáticas en el *explora* de la Cité des Sciences et de l'industrie de La Vilette hoy

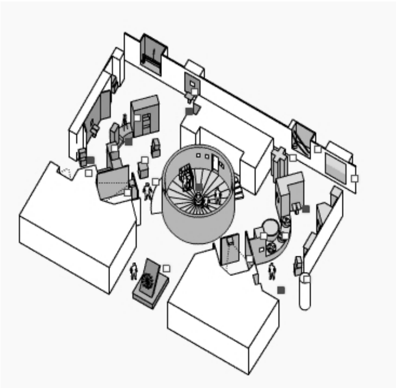
Con estos dos textos, la *Cité* anima al público a acercarse a su espacio de matemáticas:

> El placer de constatar la evidencia o de afrontar el misterio.
> El placer de crearse un reto o el placer de resolver un pro-

blema con elegancia. Las matemáticas son ante todo un juego de espíritu. No hay nada que esté menos estereotipado para la comprensión del Universo que esta herramienta capital, que se alimenta con la más viva de nuestras pasiones: comprender.

Venga a ver, vivir y palpar las matemáticas. Recorra su historia. Participe con la puesta en evidencia de varios principios suyos. Descubra las aplicaciones científicas, técnicas y sociales. Comparta el espíritu de las matemáticas.

En tres áreas bien definidas se distribuyen los contenidos de matemáticas: Geometría, números y movimientos; Complejidad y predicción y El espíritu de las matemáticas.



Geometría, números y movimientos

Pitágoras: Juego con agua y depósitos para comprobar el famoso teorema.

El cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los lados del ángulo recto. Este vínculo entre un hecho geométrico, el ángulo recto, y una relación de medición entre los lados del triángulo ya era conocida por los antiguos Babilonios, 2 000 años a. C. ¡Qué placer cuando el teorema se demuestra, como es aquí el caso, por simple juego de transferencia de volúmenes de agua!.

Obélix y el infinito: Dibujo animado para intentar entender una de las paradojas de Zenón.

Simetría: Documento audiovisual sobre las propiedades geométricas de la simetría.

Figuras: Descubrir algunas de las propiedades fundamentales de la geometría tocando objetos.

Rotación del cubo: Manipulación interactiva sobre la noción de transformación.

Todos los mapas son falsos: Libro sonoro sobre lo difícil que resulta proyectar una superficie curva en un plano.

Para representar un cono sobre un plano, basta con abrirlo para desarrollarlo. ¿Pero qué ocurre con una esfera ? La hoja de papel que envuelve la naranja se arruga; si se aplasta la piel de la naranja, ésta se desgarra. Dado que la esfera, contrariamente al cono, no admite su desarrollo. Diferentes tipos de proyección cartográfica nacieron de estas diversas tentativas.

Mundo de curvas: Documento audiovisual sobre las propiedades de las superficies curvas.

Juego de coordenadas: Juego del tres en raya que sirve de iniciación al sistema de referencia algebraico del espacio tridimensional.

Depósitos y gráficos: Juego sobre la noción de función.

El camino más rápido... ¿es siempre el más corto?:Dispositivo interactivo sobre la noción de cicloide.

Superficies del esfuerzo mínimo: Películas de jabón que materializan superficies mínimas.

Movimiento y cálculo: Documento audiovisual que sirve de introducción al análisis del movimiento.
Orbitograma: Dispositivo interactivo para visualizar las elipses descritas por una canica de acero lanzada sobre una superficie curva.

Cónicos: Dispositivo interactivo para visualizar círculos, elipses, parábolas e hipérbolas.

Tiovivo inercial: Sala interactiva para experimentar la fuerza de Coriolis.

Imagínese que está confinado en un mundo cerrado que gira alrededor de sí mismo. Una abeja pasa por encima de su mundo y lo atraviesa todo recto. ¿Todo recto? ¡No para usted! La abeja le ha visto describir una curva. Pero usted, que pensaba estar inmóvil, juraría que no voló recto.¿Ilusión? No; cuestión de punto de vista. Así, encerrado en el tiovivo inercial, si lanza una bala sobre un blanco, le parecerá que ésta se encuentra desviada a la derecha. Pero un observador exterior, en cambio, vería el lanzador girar con el tiovivo y la bala describir una trayectoria recta.

Complejidad y predicción

Fuente turbulenta: Escultura animada en la que la sencillez y perfección iniciales generan caos.

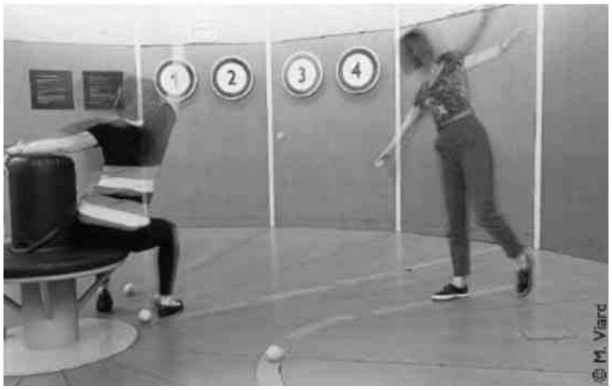
Este objeto fascinante constituye una ilustración muy elegante del caos determinista. Al extremo de cada uno de los brazos de la rueda se encuentra un cubilete agujereado. En el punto más alto, un hilo de agua se vierte dentro del cubilete situado bajo éste. Esta débil impulsión es suficiente para poner en movimiento la rueda. Cada cubilete, a su vez, recibe unas gotas. Debajo del plano inclinado, unas paletas sumergidas en el agua regulan el sistema. La rueda, de fibra de carbono, gira con un leve rozamiento y el caudal de la fuente es perfectamente regular. Sin embargo, la rotación se detiene, arranca de nuevo, cambia de sentido, acelera y se ralentiza sin que nunca se pueda predecir lo que va a suceder en el momento siguiente: los diversos parámetros que influyen sobre el movimiento están ajustados de forma que una perturbación ínfima es suficiente para modificar el comportamiento del sistema. Así mismo, los calculistas superpoderosos de los meteorólogos pueden prever todo... salvo lo inesperado. Se dice que un aleteo de mariposa en China puede, progresivamente, causar un ciclón en las Bermudas.

Complejidad y predicción: Documento audiovisual sobre el azar y el análisis de la complejidad.

Movimiento browniano: Dispositivo interactivo que muestra un movimiento imprevisible.

Tabla de Galton: Objeto que representa la curva de Gauss mediante da distribución con un experimento de 256 canicas.

Las leyes de la probabilidad se aplican tanto a fenómenos físicos como humanos. Permiten prever no la evolución de un individuo particular dentro de una población, sino al contrario reparticiones, medias y dispersiones. El lanzamiento de 256 bolas cayendo de forma aleatoria dentro de una tabla de Galton proporciona la curva trazada aquí, curva media teórica tal como la hubiésemos conseguido tras un número infinito de lanzamientos.



Escalones aleatorios: Software interactivo para profundizar las leyes anteriores.

Encuestas y estadísticas: Software interactivo para iniciarse al método estadístico mediante una encuesta del instituto nacional de estadística (Insee).

Triangulación de Delaunay: Software interactivo sobre uno de los algoritmos geométricos que permiten construir paisajes de síntesis.

El algoritmo de construcción de este paisaje de síntesis recurre a la triangulación de Delaunay, método matemático que permite medir rápidamente distancias o enormes superficies. A continuación se presenta la fase denominada "perspectiva alambre de hierro", y por último se definen facetas a las cuales se aplican texturas. ¡Parece muy sencillo pero en realidad es muy complicado!

Jaque y mates: Software interactivo sobre la explosión combinatoria de las jugadas posibles de una partida de ajedrez.

Equilibrio del doble péndulo inestable: Objeto interactivo, ejemplo de simulación analógica y de automatismo.

CAD/CAM: Software interactivo que muestra el aporte de las matemáticas en el campo de la modelización y simulación industrial.

Caotor: Péndulo interactivo sobre el problema del impacto de las condiciones iniciales.

Caos: Libro sonoro y audiovisual sobre el concepto de caos determinista.
Coliflor: Maqueta de un objeto fractal natural, la coliflor.

Fractales: Software interactivo para profundizar y experimentar la geometría fractal.

Los objetos fractales poseen una geometría particular: la similitud interna. Ampliando cualquier parte, encontramos una estructura similar a la estructura global. La coliflor es un objeto fractal natural.

Dimensión fractal: Dispositivo interactivo sobre una de las propiedades de la geometría fractal: la dimensión no entera.

El espíritu de las matemáticas.

La demostración: Sala audiovisual sobre el método central de las matemáticas inventado por los griegos.

La modelización: Sala audiovisual sobre la diferencia que operan los matemáticos entre el objeto real y su descripción matemática, que se suele llamar modelo.

El pueblo de los matemáticos: para terminar, un documento audiovisual en el cual los matemáticos nos hablan de su oficio, de su pasión. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS y WEBS

KANTOR, J.M. y DARCHE M.: *Mosaico Matemático*. ADECUM, 1988.

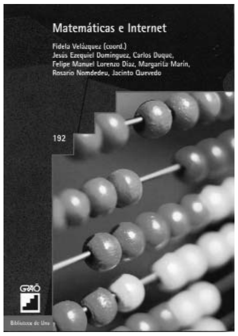
SC "Isaac Newton" de PM: *Horizontes Matemáticos.* Guía. Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas 1989.

Cité des Sciences et de l'Industrie: *Mini-Guía EXPLORA*.Cité des Sciences et de l'Industrie.

http://www.cite-sciences.fr (ver EXPLORA).

http://www.uv.es/~ten/p64.html

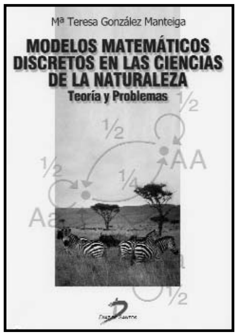
Libros recibidos



Matemáticas e Internet.
F. Velázquez (Coord.)
J. E. Domínguez, C. Duque,
F.M. Lorenzo, M. Marín,
R. Nomdedeu, J. Quevedo
Biblioteca de Uno, Editorial Graó
Barcelona, 2004
ISBN: 84-7827-317-4
136 páginas

Investigación en el aula de Matemáticas. La evaluación.
SAEM "Thales". Facultad de Ciencias de la Educación.
Granada, 2003
ISBN 84-8491-323-6
306 páginas

Modelos matemáticos discretos en las ciencias de la Naturaleza. Teoría y Problemas.
M.ª Teresa González Manteiga
Editorial Díaz de Santos
Madrid 2003
ISBN: 84-7978-550-0
223 páginas



Los Orígenes de la geometría analítica.
Materiales de Historia de la Ciencia. 6
Fundación Canaria de Historia de la Ciencia
Pedro Miguel González Urbaneja
La Orotova (Tenerife), 2003
ISBN 84-607-9668-X
178 páginas

XVI Olimpiada Matemática Nacional. Para alumnos de Segundo de Educación Secundaria.
FESPM y SRPM A Prima.
Logroño,2003
36 páginas y un CD-ROM

Matemáticas. Desarrollo del temario de las oposiciones de Secundaria. (dos volúmenes)
J.M. Gamboa y Mª Belén Rodríguez Rodríguez.
Editorial Sanz y Torres, S.L.
Madrid, 2003
ISBN 84-96094-28-6
293 y 309 páginas

SUMA 45
Febrero 2004, pp.121-128

Libros de Emma Castelnuovo

Dedicamos esta sección a revisar algunos libros publicados por Emma Castelnuovo. Pentole, Ombre e Formiche (1993), *del que un extracto aparece traducido en la* monografía de suma 01, *que acompaña a este número.* Matematica nella realtà (1976) *y* Documenti di un'esposizione di matemática (1972), *hablan de sus exposiciones con alumnos.* La geometria (1991), *publicado en catalán, es una versión actualizada de su* Geometría Intuitiva*. Por último, para el que es su obra clave en español,* Didáctica de la matemática moderna (1970), *nos remitimos al número 41 de SUMA, donde se publicó una recensión.*

PENTOLE, OMBRE, FORMICHE.
IN VIAGGIO CON LA MATEMATICA
(Cazuelas, sombras, hormigas.
De viaje con las matemáticas)
Emma Castelnuovo
La Nuova Italia
Florencia (Italia), 1993, reimpreso en el 2001
ISBN 88-221-1165-6
174 PÁGINAS

Hasta hoy este libro no había sido traducido al castellano. SUMA, en la monografía dedicada a Emma Castelnuovo que acompaña este número de la revista, ofrece la traducción de una pequeña, pero significativa, muestra de unas 35 páginas de esta obra.

En palabras de la autora:

> *El objetivo del libro es hacer entender algo de matemáticas y también algo de la manera de razonar del matemático a alguien que haya cursado, mal que bien, los estudios básicos.*[...]
>
> *Estas personas, cuando ven en la televisión programas que analizan problemas relacionados con tecnología punta o cuestiones de medicina, de economía o metereología..., intuyen a menudo por lo menos las ideas básicas, pero, cuando se enteran de que estos descubrimientos se fundan sobre teorías matemáticas, sienten una especie de espanto, porque se acuerdan de las matemáticas de su etapa escolar.*

Así que este libro se puede situar en el ámbito de la divulgación matemática; no es una obra para matemáticos, pero puede ser útil a los que deben enseñar o aprender matemáticas, o sea, nosotros y nuestros alumnos.

El libro gira en torno a siete "argumentos" (argomenti, en italiano), que abarcan las relaciones de las matemáticas con otras materias de estudio (geografía, medicina, arte…) o con situaciones cotidianas (cazuelas, sombras, hormigas...).

La intención es la de introducir poco a poco el lenguaje matemático (y su desarrollo lógico) para analizar y profundizar

Guido Ramellini
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas
"Emma Castelnuovo"

ideas que surgen de situaciones cotidianas como escoger la olla más oportuna para cocinar spaghetti, tomar un avión, mirar las sombras de los objetos o un cuadro o el mapa de una costa, o bien de noticias de los periódicos (enfermedades hereditarias, crecimiento demográfico, intereses bancarios, datación de fósiles...).

Deja para el último argumento ("La matemática como… matemática: el infinito") una reflexión que arranca de una "ocasión" matemática para llevarnos a profundizar y estructurar conceptos matemáticos, en un recorrido aparentemente interno a la disciplina, pero conducido en compañía de hormigas, tortugas (la de Aquiles), copos de nieve, elementos que permiten siempre situarnos en un mapa más general de conocimientos.

El objetivo del libro—dice Emma Castelnuovo en el prólogo— es hacer entender algo de matemáticas y de la manera de razonar del matemático a quien haya cursado, mal que bien, los estudios básicos. Personas que cuando ven en la televisión programas de medicina, por ejemplo, intuyen las ideas básicas, pero, cuando se enteran de que algo se funda sobre teorías matemáticas, se sienten espantados, porque recuerdan las matemáticas de su etapa escolar

Haber llamado "argumentos" a los capítulos del libro es una manera de presentarnos el estilo que la autora escoge, el de un diálogo continuo con el lector, al que se le presenta una situación concreta y conocida y se le pide después que intervenga en el desarrollo de su argumentación, contestando a preguntas, formulando hipótesis, previniendo resultados, siguiendo razonamientos, etc. El lenguaje utilizado es muy directo, las frases cortas y simples, el desarrollo minucioso, especialmente cuando se introducen o se deducen reglas o conceptos matemáticos.

El libro nos sugiere continuamente que prestemos atención también a la situación histórica de los temas que trata, hasta introducir, aparte de las referencias en el texto, unas cuantas fichas especificas dedicadas a Euclides, Galileo e Cavalieri, la Reina Dido, Pitágoras y Zenón.

De hecho, las referencias al contexto histórico en el que se desarrollan las ideas son una constante en la obra de Emma Castelnuovo. Como en sus conferencias, los argumentos del libro nos llevan casi siempre a vertiginosos viajes en el Egipto de los Faraones o entre los fragmentos de las tablillas de arcilla mesopotámicas, de crucero por las islas griegas o de paseo entre Venecia y Florencia, o a buscar grafitos entre las rocas de las montañas africanas; o sea, en todos los lugares donde han nacido unas matemáticas cercanas a las vidas de los hombres que han intentado analizar unos problemas que, después de siglos, consiguen interesar y desconcertar a más de un habitante del siglo XXI.

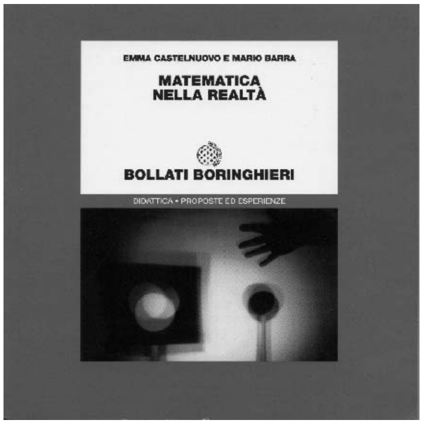
Es una matemática que no requiere un lenguaje sectorial ni instrumentos de cálculo o análisis demasiado sofisticados y que presenta problemas cercanos y fáciles de focalizar, pero a menudo sorprendentes en sus soluciones, que ponen en evidencia preconceptos y errores de planteamiento. Problemas con soluciones abiertas, a las que llegar reflexionando, descartando hipótesis equivocadas, precisando el contexto, confrontando y comprobando las respuestas: situaciones que pueden ser muy productivas si las recreamos en nuestras clases.

Al recorrer, guiados por la mano de Emma, el camino que algunos conceptos, no sólo matemáticos, han seguido para su desarrollo a lo largo de los siglos, o retornar a sus orígenes, le queda a uno la impresión de que el isomorfismo entre la ontogénesis y filogénesis no pertenece sólo al campo de la biología, sino que algo parecido pasa con la cultura: el proceso de aprendizaje que desarrolla cada uno de nosotros parece recorrer las etapas de la evolución cultural de nuestra civilización.

Quizás sea por esto que las sugerencias que Emma sabe encontrar en las obras de los antiguos matemáticos parecen interesar más a nuestros alumnos que las matemáticas de los últimos dos siglos, aparentemente más abstractas y envueltas en un lenguaje mucho más específico y cerrado. (El año pasado, presenté con mis alumnos de segundo de la ESO la actividad de los cilindros de Galileo, tal como la describe Emma en el segundo argumento del libro. El trabajo gustó a los chicos, al público en general y a muchos compañeros profesores).

Pero la lectura de este libro es útil y placentera también para el especialista, que no es inmune a los preconceptos equivocados derivados de una aplicación errónea del sentido común. Éste encontrará además una perspectiva diferente y original con que mirar a los contenidos matemáticos y a su colocación en el mundo de las ideas y de la realidad.

En fin, para devolver la palabra a su autora, el libro sirve a aquellos a quienes *queda una pizca de curiosidad para entrar en la cabeza de un matemático, para entender lo que piensa y cómo piensa, lo que ve en las figuras, los números, las ecuaciones, y cómo ve y utiliza estos 'objetos matemáticos'.* ■



MATEMATICA NELLA REALTÀ

(Matemáticas en la realidad)

Emma Castelnuovo y Mario Barra

Bollati Boringhieri
Turín (Italia), 2001, primera edición de 1976
ISBN 88-339-5650-4
292 PÁGINAS

Este es un curso muy especial para todos nosotros, Emma ha cumplido 90 años y acuden a nuestra mente los recuerdos de todos aquellos momentos en que hemos disfrutado escuchándola y, sobre todo, aprendiendo humanidad y, como no, didáctica de la matemática.

Cuando pensaba en esta recensión se agolpaban en mí todos estos recuerdos y empecé a escribir sobre ellos. Pero son tantos que me quedo sólo con uno, su sencillez, que quedaba reflejada en las hojas manuscritas con que daba las conferencias.

El libro está destinado a los profesores de matemáticas, a los estudiantes y a todo el que sienta placer en conocer la realidad.

Matematica nella realità, con más de 22 años a sus espaldas, sorprende por su vigencia y se puede leer y aprovechar para nuestra actividad diaria como profesores de matemáticas como si de una novedad se tratase.

Reproduce con fidelidad absoluta el desarrollo de una exposición que se realizó con el trabajo de los alumnos del *Tasso*, una Escuela Media de Roma.

La filosofía de Emma está presente en todo el trabajo: propiciar la búsqueda autónoma, desarrollar las posibilidades de observación, el sentido crítico; actitudes propias del pensamiento que son particularmente útiles para no mantener una postura puramente pasiva ante la vida.

La exposición

En el año 1974, la Scuola Meadia Tasso de Roma , realizó una Exposición de Matemáticas con 138 alumnos de dicha escuela. La exposición estaba formada por una serie de paneles en los que figuraban el trabajo realizado por esos alumnos a lo largo del curso y el material utilizado en el desarrollo de los temas. Las explicaciones de los mismos corrían a cargo de los propios alumnos.

Los temas seleccionados son muy variados, desde los más clásicos, como pueden ser el de áreas, perímetros y volúmenes, hasta los más novedosos en ese momento, como la topología y los grafos. El objetivo de unos temas y otros era suscitar en los niños el mismo espíritu que había conducido al creador matemático a su descubrimiento.

En algunos temas, el alumno, se situaba en el origen de los conceptos y en el desarrollo histórico de las ideas. Otras veces, al contrario, llevados por la motivación e intereses de los alumnos, se introducía el tema bajo una óptica alejada de la realidad histórica. En estos casos, el trabajo didáctico consistía en imaginar y construir una nueva vía de desarrollo.

Menchu Bas
IES "San Fernando", Madrid
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas
"Emma Castelnuovo"

Los problemas que se plantean a lo largo de los recorridos comienzan con el trabajo de los alumnos del primer curso, continúan con el trabajo de los de segundo curso y finaliza con el de los de tercer curso. El problema es el mismo pero el tratamiento matemático diferente.

La realidad está presente siempre: se parte de ella, se busca en ella, es decir, se hacen matemáticas con las reglas de comportamiento de la realidad.

El libro

El libro está destinado a los profesores de matemáticas, a los estudiantes y a todo el que sienta placer en conocer la realidad.

> *La intuición y la fantasía son cualidades que se están perdiendo en las civilizaciones actuales y son cualidades del verdadero matemático.*

Se trata de un libro de matemáticas y de didáctica de la matemática, no de pedagogía. Contiene 290 páginas y está dividido en 12 capítulos dedicados a uno o varios contenidos matemáticos.

Cada capítulo va precedido de una breve explicación didáctica. Es, en estas breves páginas, en las que se detallan los aspectos didácticos como: las dificultades encontradas por los niños, los errores más frecuentes para hacer surgir este u otro concepto, y, algunas veces, la necesidad de buscar una teoría matemática al nivel de la Escuela Media.

La exposición se realizó con un trabajo basado en la experimentación, utilizando para ello materiales y modelos diversos, partiendo de objetos y situaciones concretas y próximas a los chicos. Comenzando sobre lo concreto y lo próximo, se desligan de todo elemento no esencial llevando el discurso al terreno abstracto.

Siempre que el tema se lo permitía, recurrían a la historia del concepto y a la utilización de situaciones interdisciplinares. En muchos de los temas las explicaciones que da son mínimas pues los paneles de la exposición, presentados por los alumnos, son completos y hablan por ellos mismos. En algunos casos se amplía esa documentación con la reproducción del discurso, que los chicos, hacían a los visitantes complementando al contenido.

El contenido y los temas

Comienza el libro con una gráfica de Roma y los romanos, precedida de un texto de Aristide Gaballi (1881) "Roma y los romanos" En este gráfico se mide el número de habitantes de Roma a lo largo de los siglos, desde el año 576, con referencias a acontecimientos históricos que ayudan a comprender la evolución de la población.

La relación de capítulos comienza por el de ÁREAS, PERÍMETRO, VOLUMEN, SUPERFICIE. Desarrollaré más detenidamente este capítulo que representa fielmente el espíritu de la exposición. De los demás capítulos haré una reseña breve.

ÁREAS, PERÍMETRO, VOLUMEN, SUPERFICIE. Los conceptos de área y perímetro, y superficie y volumen, son tratados con la dualidad: volumen igual-superficie diferente; perímetro igual-área diferente; áreas iguales-perímetros diferentes que marcan el hilo conductor de los paneles. Utilizan todas las posibles herramientas matemáticas a su alcance: materiales dinámicos (varillas de mecano, un simple cordel, una rueda...), modelos matemáticos (centicubos, geoplanos, esferas...) y cualquier otro objeto común que ayude a trabajar las variaciones de uno de los conceptos manteniendo constante el que vincula.

La movilidad de las figuras suscita el interés y conduce espontáneamente a conceptos fundamentales de análisis, como el de función, el de invariante y el caso límite. Las nociones de área y perímetro conducen de manera natural a la construcción de tres curvas: la elipse, la hipérbola y la parábola. Termina esta sección con el descubrimiento de la Fórmula de Pick para el cálculo de áreas.

La variación del área de un paralelogramo articulado, al variar la altura y por lo tanto el ángulo, conduce al estudio de las funciones periódicas. Esto les lleva a pensar en fenómenos físicos: los sonidos.

La introducción al problema: volúmenes distintos con igual superficie, lo hacen siguiendo dos líneas de investigación: la histórica (los sacos de Galileo) y la industrial (el tetrabrick a partir de un cilindro).

Del cilindro a la esfera: demostración de Luca Valerio del volumen de la esfera. Una vez más nos sorprende Emma con sus construcciones dinámicas. Jugando con la luz y rotaciones de figuras planas, valida lo que la intuición nos dice sobre este volumen y las demostraciones racionales nos demuestran.
Pero no se detiene aquí, continúa con el área de la elipse y el volumen del elipsoide, el del tetraedro en relación al octaedro.

EL TEOREMA DE PITÁGORAS. Se vale para su desarrollo de dispositivos móviles, de una balanza, de la cuerda de los 12 nudos de los egipcios. Pasa por el teorema de Euclides y llega a la extensión del teorema a cualquier polígono y a las figuras curvas. Termina el recorrido con la repetición del teorema hasta el infinito. Las referencias históricas surgen en cada momento.

Los siguientes tres capítulos están dedicados a Las leyes del crecimiento, Lo finito, infinito y lo infinitesimal y La balanza. Sistemas de numeración.

El primero de ellos, es el capítulo en el que más presente están las otras ciencias: las ciencias naturales, la física, la economía, etc. Se pretende hacer comprender las leyes más simples del crecimiento presentando el tema bajo un tratamiento interdisciplinar.

Se comienza en el primer nivel con los números de la sucesión de Fibonacci, y su presencia en la naturaleza. El estudio ordenado del crecimiento pasa por la proporcionalidad directa, las leyes de tipo parabólico, la cúbica y la ley exponencial. Sus gráficas son utilizadas para estudiar la velocidad de crecimiento. Termina el tema con las espirales y sus aplicaciones en el arte.

Identidad de estructuras. Partiendo de un objeto tan próximo a cualquiera de nosotros como es un reloj, llegan a la noción de grupo a través de las transformaciones en los polígonos regulares. Es interesante ver cómo esta teoría tan abstracta tiene fascinantes aplicaciones en las ciencias de la naturaleza, como puede ser la cristalografía.

El cálculo de probabilidades. Presentan la probabilidad no como una rama de las matemáticas sino como un modo de ver el mundo real.

Cónicas y cuádricas. Son objeto de estudio en este capítulo. Se introducen con una serie de fotografías de objetos con forma de cónicas. Se recuerda las gráficas obtenidas en los problemas de áreas y perímetros del primer capítulo y se continúa analizando estas curvas a través de la luz que proyecta una lámpara. No se olvida de su construcción por plegado y termina este apartado con un póster dedicado a las ecuaciones de las cónicas. Finalizan con el estudio de las cuádricas obtenidas por rotación de los planos de las cónicas.

Los últimos capítulos llevan los siguientes títulos: Geometría analítica, Las transformaciones afines, Buscar la posición del baricentro, La cicloide, Cartografía, Topología y Los gráficos de flujo.

En el capítulo de la cicloide, una vez más, utiliza la historia como elemento motivador. He elegido la cicloide —nos cuenta Emma— por ser una curva admirada por Galileo y por haber apasionado a muchos matemáticos a través de la historia.

La demostración clásica de que su área es el triple del área del círculo que la genera, no la consideraron muy apropiada para una exposición y decidieron inventarse una: utilizaron un mecanismo que generaba la cicloide y por equivalencias llegaron a la expresión del área de la cicloide.

Los dos últimos rincones están dedicados a lo que Emma llamó en la introducción “matemáticas actuales”. La topología y los grafos de flujo, hoy no tan novedosos.

Para acabar

Considero este libro como un referente imprescindible para todo profesor que considere, como dice Emma, que la intuición y la fantasía son cualidades del verdadero matemático. Además, le tengo especial cariño porque me costó mucho trabajo hacerme con una copia del mismo, allá por el año 79, después de participar en un curso dirigido por Emma. Hay que lamentar que no se haya traducido al español todavía.

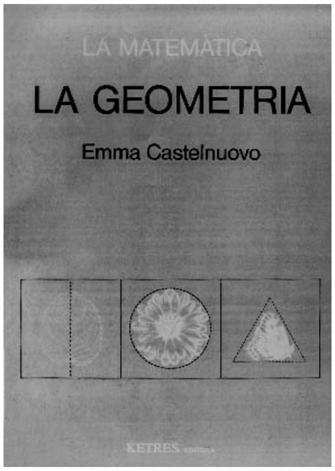
> *Las matemáticas pueden ser un instrumento para promover la igualdad entre las personas.*

No quisiera terminar esta recensión sin tener un recuerdo de gratitud hacia Emma. Todos recordamos el Año Mundial de las Matemáticas, año en el que tuvieron lugar una gran cantidad de exposiciones, trabajos y publicaciones que, con un enfoque divulgativo, lúdico y motivador, intentaron conectar la actividad propiamente matemática con la realidad y con otras ciencias y acercarla así al gran público .

Con motivo de este evento, en el seno de la Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas, que lleva el nombre Emma Castelnuovo, se constituyó un grupo de trabajo con el propósito de elaborar materiales, básicamente manipulativos, y organizar una exposición y crear un banco de materiales didácticos que la SMPM pudiera prestar a sus socios. Perseguíamos elevar el uso del material didáctico a la categoría de experimentación innovadora, regular y viva, y lanzar una propuesta didáctica de utilización de los mismos como herramienta metodológica.

La idea de este grupo de trabajo, que bajo la dirección de Emma, desarrolló su actividad durante dos cursos escolares, se fraguó en las JAEM de Lugo. Fue un placer trabajar con Emma, y es obvio que fue esa exposición de 1974, este libro que he comentado, nuestro referente cotidiano.

Nuestro trabajo terminó con la conocida exposición organizada por la Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas, “2000 piezas matemáticas” y una vez más Emma estuvo donde se le requirió, en la inauguración de la exposición en el año 2000. ■



La Geometría
Emma Castelnuovo
Ketres Editora, SL
Barcelona, 1981
ISBN 84-85256-23-9
347 PÁGINAS

Este libro da un enfoque global de la geometría. Diez capítulos se dedican a la geometría plana y tres a la geometría del espacio. Hay después más de 70 páginas dedicadas a ejercicios de todo tipo y tres apartados dedicados a complementos en los que se relacionan aspectos de tipo físico como son la luz y el sonido, peso y masa y construcciones con cordel, material plástico, cartulina, etc. con la geometría. Las últimas páginas contienen láminas de tipo artístico, arquitectónico y diverso que se relacionan con el contenido del libro y a las que se hace referencia.

Fue escrito previamente al año 79 y aporta una visión personalísima de la geometría y de cómo debe exponerse. Está escrito en clave sencilla: Una explicación de la geometría que es válida para todos los niveles de aprendizaje y que utiliza todos los recursos del entendimiento humano que hacen más fácil un conocimiento profundo de la misma.

Se introducen paulatinamente los entes geométricos. Las figuras geométricas se encuentran en el arte, en la naturaleza, en las máquinas que realiza el hombre y en todo aquello que amparado en la realidad nos da pie a imaginar. Las propiedades de las figuras geométricas se obtienen de manera muy natural: desde la intuición y la imaginación sabiamente administrada hasta la lógica de las evidencias, a través de una geometría ágil y en movimiento que cuestiona y resuelve todo lo que uno se puede preguntar.

No se desdeñan razonamientos "por continuidad" y frecuentemente se abordan situaciones extremas —como la que justifica por ejemplo que el cuadrado es el rombo de área máxima para perímetro fijo— que ayudan a entender mejor una situación geométrica con todas sus variaciones.

La lectura del texto se hace fácil y ligera porque éste es muy variado. Al final de varios capítulos aparece un tratamiento por coordenadas cartesianas siempre que haga falta o que el enriquecimiento del tema lo requiere.

La de Emma Castelnuovo es una geometría que primero se ve, después se imagina y, por ultimo, se plasma en un dibujo "en movimiento". Una geometría que plantea frecuentemente situaciones de máximo o mínimo, como se ha comentado antes.

No he encontrado ningún aspecto que de una manera u otra no esté sabiamente justificado o razonado, siempre con el comentario pertinente relativo a esa demostración que da cuenta de su grado de dificultad o fiabilidad. De esta forma deja una geometría completa, bien resuelta en todos sus aspectos. Empieza con la construcción de polígonos a partir de la idea de que todo triángulo es un figura rígida. La simetría, el área de figuras y de las figuras equivalentes en el sentido de misma área, que es un asunto diferente a tener mismo perímetro.

Teorema de Pitágoras; Igualdad y semejanza de figuras; Ecuación de la recta en el plano cartesiano; Transformaciones afines; Programación lineal y El círculo son algunos de los temas tratados en los diez primeros capítulos. En los tres siguientes aborda las áreas y volúmenes de los cuerpos frecuentes del espacio y una clasificación muy intuitiva y clara de los poliedros regulares. El último capítulo trata de cónicas.

Las siguientes páginas, que son exclusivamente de ejercicios y problemas, resultan muy atractivas, en la línea constructiva del texto. En la última parte del libro el manejo de cordel, tijeras y cartulina nos pueden ayudar a resolver problemas o a entender mejor las cosas. ■

José María Ferrán
IES Joanot Martorell,
Esplugues de Llobregat, Barcelona

DOCUMENTI DI UN'ESPOSIZIONE DI MATEMATICA
(Documentos de una exposición de Matemáticas)
Emma Castelnuovo
Boringhieri
Turín (Italia), 1972, reimpresión del 1977
334 PÁGINAS

El libro que nos ocupa se puede considerar la memoria que escribió Emma Castelnuevo después de realizar por primera vez una exposición con los trabajos de sus alumnos.

La exposición tuvo lugar durante los días 5, 6 y 7 de mayo de 1971. Es el resultado del empeño de la profesora Castelnuovo y del trabajo de curso de sus 171 alumnos de la Scuola Media Tasso[1], un centro público de Enseñanza Secundaria de un barrio céntrico de Roma, durante el año escolar 1970-71. Hay que destacar también la presencia activa durante todo el proceso de cuatro estudiantes universitarios del último curso de la Facultad de Matemáticas que realizaban sus prácticas escolares de Didáctica de las Matemáticas: Lucilla Cannizzarro, Daniela Proia, Fulvia Gloria y Raimondo Boletta; todos ellos se han dedicado posteriormente, y con éxito, a la enseñanza de las matemáticas, según he podido comprobar en diversos encuentros a lo largo de estos años.

El libro consta de tres partes. Comienza con una introducción, donde se explica el origen del proyecto, su preparación y la organización de la exposición. Le sigue la explicación detallada de cuatro temas[2], con mucho material gráfico y citas literales de los alumnos. Termina la obra con unas breves consideraciones de la autora acerca de lo que ha significado para ella toda esta actividad, junto con los comentarios de los alumnos que habían participado en ella.

El tono general del libro es de una gran calidez, como es habitual en la autora. Se aprecia su enorme entusiasmo por la profesión de enseñar matemáticas, por los alumnos en las diversas fases de su aprendizaje, por los estudiantes en su recorrido de aprendices de profesores. Es de lectura muy fácil y amena, aunque contiene gran cantidad de ejemplos, algunos nada obvios ni banales. Todo lo que describe o explica está salpicado de comentarios didácticos de una gran agudeza, donde se puede apreciar un conocimiento profundo de esas matemáticas elementales que muchos matemáticos desconocen y, sobre todo, una experiencia docente tan rica y compleja que son la admiración, y modelo, de muchos didactas de las matemáticas.

La exposición tiene su origen en una propuesta que hizo la profesora Castelnuovo a sus alumnos: una clase extra por la tarde, fuera del horario escolar, y no obligatoria, para desarrollar más a fondo algunos temas del currículo escolar y estudiar algún otro tema interesante. La propuesta fue un éxito y la asistencia de los alumnos fue masiva. A mitad de curso los cuatro estudiantes universitarios se sumaron a estas sesiones y, a la vista del gran trabajo acumulado, decidieron presentarlo a los padres y la comunidad en forma de una exposición. La exposición ocupó 12 aulas del Centro y fueron los propios alumnos los que explicaron el material y los carteles a los visitantes.

El tono general del libro es de una gran calidez, como es habitual en la autora. Se aprecia su enorme entusiasmo por la profesión de enseñar matemáticas, por los alumnos en las diversas fases de su aprendizaje, por los estudiantes en su recorrido de aprendices de profesores.

Carmen Azcárate
Universidad Autónoma de Barcelona

Los temas que se presentan en el libro son los siguientes[3]:

1. Área y perímetro. Volumen y superficie
2. Cónicas y cuádricas
3. La estructura de grupo
4. El cálculo del baricentro y algunas aplicaciones

Los tres primeros temas contienen trabajos de los tres cursos; el cuarto tema corresponde a trabajos realizados por alumnos del tercer curso. Cada uno de estos capítulos tiene una primera parte con unas "premisas" didácticas y una segunda con el desarrollo del tema tal como se presentó en la exposición. Cada una de las clases tenía una lista de actividades, como por ejemplo la primera clase en el tema 1: figuras isoperimétricas; figuras equivalentes; triángulos equivalentes de igual base; paralelogramos equivalentes; área del cuadrado en función del lado. O la tercera clase en el tema 4: el equilibrio de una pértiga y las coordenadas baricéntricas de un punto de la pértiga; el equilibrio de un triángulo y las coordenadas baricéntricas de un punto de un triángulo...; el cálculo baricéntrico y la programación económica: determinación de la "zona de producción", de la dirección de la recta de precios y de los precios mínimo y máximo.

Cada actividad correspondía a dos o tres alumnos que eran los encargados de explicarlas. Y podemos leer alguna de las explicaciones escritas que han hecho los alumnos para preparar su intervención, junto con los dibujos o gráficas y fotos del material manipulable o del cartel que se exponía.

En el último capítulo del libro, Emma Castelnuovo les da la palabra a sus alumnos a quienes les pidió que describieran su experiencia y sensaciones, unos días después de celebrarse la exposición. Es una larga serie de comentarios fascinantes imposibles de resumir. Reproduzco simplemente el extracto que la propia autora reserva para finalizar el libro: "Al final del tercer y último día, cuando el pasillo de la escuela se quedó vacío, nosotros salimos, no como unos muchachos que habían superado una dura prueba, sino felices, como si nos hubieran dado un premio".

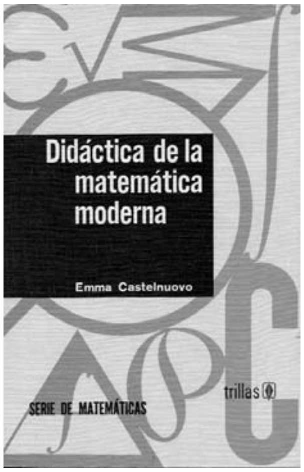
Para acabar, quiero agradecer el encargo de esta recensión a la dirección de SUMA, ya que me ha permitido recordar una experiencia y releer un libro que compré en Livorno en agosto de 1975, según apunté entonces... Huelgan todos los comentarios. ■

NOTAS

[1] Eran alumnos de los tres cursos, dos clases por nivel. Las edades son de 11 a 14 años.

[2] La exposición constaba de 12 temas.

[3] Los demás temas de la exposición son: el teorema de Pitágoras; números y puntos, el infinito; la lógica de proposiciones, el sistema binario y las calculadoras; las isometrías, una aplicación al arte: la disposición de una figura ornamental; geometría analítica; las transformaciones afines; probabilidad; el baricentro de algunas figuras.



DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA MODERNA
(Didattica della matematica)
Emma Castelnuovo
Trillas.
Mexico, 1970, (2ª edición en español, tercera reimpresión de 1997)
ISBN 968-24-3379-7
210 PÁGINAS

Ver la recensión de este libro, por Francisco Martín Casalderrey, en SUMA n.º 41, Noviembre de 2002, pp. 133-136.

SUMA 45
Febrero 2004, pp.129-133

Épsilon y *Números*

Título: **Épsilon**
Edita: ***Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"***
Periodicidad: ***cuatrimestral***
Lengua: ***español***
Dirección: ***Centro de Documentación "Thales"***
Universidad de Cádiz
11510 Puerto Real (Cádiz)
Página web: ***http://thales.cica.es***
Número comentado: ***55, Vol 19 (1)***
ISSN: ***1131-9321***

Aunque no de forma explícita si estaba en mi mente, cuando hablé de los propósitos de esta sección, que ésta se dedicaría fundamentalmente a presentar y analizar revistas relacionadas con la educación matemática publicadas más allá de nuestra fronteras. Aún así, no excluía la posibilidad de prestarle la atención a revistas más cercanas y de hecho ya entonces tenía pensado dedicar este número a alguna de las que se publican dentro de la propia FESPM, a reconocer la labor importante y la calidad del trabajo realizado por los compañeros de las sociedades federadas. Finalmente me he decidido por las revistas de las dos sociedades federadas más grandes, dos de las fundadoras de la FESPM: Se trata de *Números* y *Epsilon* publicadas por las sociedades canaria y andaluza respectivamente.

No nos detendremos en los propósitos de las sociedades que publican las dos revistas. Al fin y al cabo, podemos decir que somos nosotros mismos. Si acaso habría que hacer notar uno de los aspectos más destacables de ambas sociedades es su elevado número de socios en relación al conjunto de profesores de matemáticas que hay en cada una de las comunidades.

Épsilon

La revista *Épsilon* está dirigida por un equipo editorial, en el que cada sección esta a cargo de uno o varios representantes que son los que se encargan de todo el proceso de recepción, referenciado y selección de los artículos que en ella se publican. Las secciones de las que se compone son las siguientes:

- Investigación en educación matemática,
- Experiencias docentes,
- Recursos,
- Historia,
- Matemáticas y...

Con esta organización la revista pretende dar una oportunidad para que los profesionales de la educación matemática —de todos los niveles, pero especialmente de los niveles preuniversitarios que son la gran mayoría de los socios de Thales— cuenten sus experiencias, hagan propuestas, reflexionen u opinen sobre distintos aspectos de su trabajo.

> Números *y* Epsilon *se publican por las sociedades canaria y andaluza respectivamente.*

Julio Sancho Rocher
hemeroteca.suma@fespm.org

El número 55 de *Épsilon*, se inicia con una breve y triste nota en la que se comunica el fallecimiento de Manuel Iglesias Cerezal, impulsor de la revista de Thales y su director hasta 1990. Quiero aprovechar este artículo para expresar mi reconocimiento a la labor que realizó en la revista Épsilon y también a otros socios que, como él, hacen posible con su trabajo desinteresado la existencia de las publicaciones de las sociedades.

En la sección de **Investigación** de este número se publican dos estudios. En el primero, Sandra Gallardo y Aurora Valdecillo analizan la percepción de la aleatoriedad por los alumnos de final del bachillerato. En concreto se muestra cómo, entre los sujetos del estudio, son mayoría los que piensan que un método de selección de los miembros de dos equipos basado en el conocimiento que se tiene de su habilidad es más fiable que uno aleatorio. Por otra parte, no perciben la posible presencia de sesgos en el reparto hecho sobre criterios de habilidad conocida, mientras que la selección aleatoria se percibe como carente de garantías y productora de desigualdades.

El segundo estudio, de autoras argentinas (Stella Nora Gatica, et al.), muestra cómo, a pesar de que el concepto de función es introducido desde la enseñanza media, los alumnos cuando llegan a la universidad todavía muestran una escasa comprensión del mismo, que se manifiesta en sus intentos de definirlo y en la traslación que hacen de una situación problemática de dependencia funcional al registro gráfico. Tanto en este estudio como en el anterior se pone en evidencia la dificultad que entraña la comprensión y el uso de conceptos básicos de las matemáticas, como el de aleatoriedad o el de función y la necesidad de plantearse en la enseñanza estrategias que conduzcan a una sólida adquisición de los mismos. Desde el punto de vista de los profesores de a pié, este tipo de estudios siempre resulta interesante conocerlos pues ayuda a reflexionar sobre los productos que se obtienen en el trabajo diario, pero se quedan un poco cortos en tanto que no sugieren formas de avanzar en la mejoría de la situación que estudian.

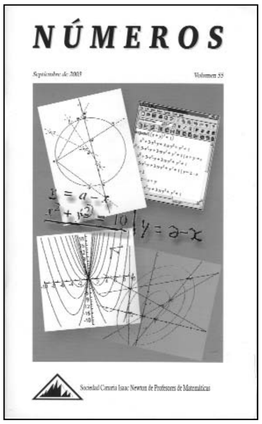
Las secciones de la revista Épsilon son: Investigación en educación matemática, Experiencias docentes, Recursos, Historia y Matemáticas y...

La sección de **Experiencias docentes** destaca por presentar artículos pegados al suelo. Son experiencias sin grandes pretensiones pero que muestran a profesoras y profesores preocupados por mejorar su labor, por reflexionar en lo que ocurre en sus aulas y por resolver los problemas que se derivan de su trabajo con los alumnos. En *Dos mejor que uno: una experiencia matemática con alumnos de 3º de ESO*, se nos cuenta un intento de reducir el fracaso en el aprendizaje del álgebra actuando sobre aspectos de tipo actitudinal como la motivación, la cooperación, el respeto al trabajo de los demás, etc. En *La toma de apuntes y la resolución de problemas en educación secundaria*, el autor reflexiona, a partir de su propia experiencia, sobre las dificultades de la enseñanza de la resolución de problemas y cómo la revisión de los apuntes tomados por los propios alumnos, de la resolución de ciertos problemas, puede incidir en la mejora de su aprendizaje, potenciar su capacidad de expresión, etc. Los dos últimos artículos cuentan experiencias en los niveles opuestos de la educación matemática: la primaria y la universidad. *Carnet de tablista* es un intento de encontrar un enfoque motivador para el aprendizaje de las tablas de multiplicar, en un entorno escolar caracterizado por una gran diversidad de orígenes culturales y sociales. Por el contrario, en *Heurística en la enseñanza de la geometría: el teorema de Ceva,* se describen las posibilidades que el uso de herramientas de exploración geométrica con el ordenador aportan a la didáctica de la geometría. Una de ellas es sin duda la posibilidad de introducir "temas de investigación", como el que se describe en la experiencia, frente a los que los estudiantes actúan como protagonistas en la construcción del conocimiento y que promueven una visión de las matemáticas como disciplina en continuo desarrollo y llenas de interrogantes interesantes.

La tercera sección de la revista está reservada a proporcionar **Recursos** útiles para su aplicación en el aula. Me centraré en uno de los artículos que aparece en el n.º 55 dentro de esta sección. Se trata de la tercera parte de un trabajo realizado por el grupo Visión Matemática II en el CEP de la Axarquía y que tiene por título *El vídeo en el aula de matemáticas*. A lo largo de tres artículos —del que este es la última parte— los miembros de este grupo de trabajo presentan una colección de materiales de trabajo complementario al visionado en clase de los vídeos de la serie de televisión *Más por menos*. El objetivo con el que diseñaron estas actividades fue el de reforzar los conocimientos adquiridos y evaluar el aprovechamiento que los alumnos tienen del visionado de las cintas. El mayor valor de estos materiales se encuentra en el hecho de que son fruto de un intercambio de experiencias y de los intentos de adaptar las propuestas de trabajo y discusión en el grupo a la realidad concreta de los diferentes centros. Entre las numerosas actividades que se presentan las hay de todos los tipos: de exploración, de adquisición de conocimientos, conceptuales, procedimentales o de evaluación. También hay actividades destinadas a los diferentes niveles educativos. En conjunto, el resultado es una colección de materiales que dan ideas interesantes y ahorran trabajo a cualquier profesor que desee utilizar el vídeo educativo a lo largo de sus clases de matemáticas.

Además del núcleo de la revista, cuyo contenido acabo de describir, *Épsilon* destina otras secciones a la información y a la presentación de temas de interés para el profesorado de Matemáticas, como las tituladas **Historia** y **Matemáticas y...** En el número comentado, dentro de este apartado, se publica un artículo sobre la *Optimización de las funciones de conjunto,* un acercamiento informal a este tema en el que se destacan algunas aplicaciones que motivan su estudio.

La realización de la revista es sobria, pero efectiva y la extensión de cada número —se publican tres números cada año— varía entre las 150 y las 200 páginas. En la portada, realizada a color, aparece una tabla del contenido de ese número. En la página web de la Sociedad Thales (http://thales.cica.es/) existe un enlace a la página de la revista, pero cuando se pulsa para acceder aparece un mensaje de que la página está en construcción. También existe la posibilidad en la misma página de descargar un boletín de inscripción que da dos posibilidades de adquisición de la revista: como suscriptor (36 €) o como socio de Thales lo que da derecho a la recepción de esta revista además de la revista SUMA (48 €). Este mismo boletín de inscripción se reproduce en las últimas páginas de la revista.



TÍTULO: **NÚMEROS**
Edita: ***Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas***
Periodicidad: ***trimestral***
Lengua: ***español***
Dirección: ***Apdo. 329***
38200 La Laguna (Tenerife)
Página web: ***http://www.sinewton.org***
Número comentado: ***55, septiembre 2003***
ISSN: ***0212-3096***

Números

La revista de la sociedad canaria podría parecer más modesta si sólo nos fijamos en su extensión (alrededor de 60 páginas en cada uno de sus cuatro números anuales), pero no es así. Los artículos que aparecen en el ejemplar que voy a comentar tienen un nivel similar a los que hay en el número 55 de la revista *Épsilon*. Como en el caso de la sociedad andaluza en la página web de la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas (http://www.sinewton.org/) hay un enlace a la revista que en este caso sí que nos conduce a una página activa sobre la revista (Figura 1).

Estamos ante dos buenas revistas, interesantes y útiles. Dos revistas cuyo nivel es comparable al de otras publicaciones con más renombre, merecedoras de ser tenidas en cuenta como recurso para mantenerse al día y ampliar perspectivas y con la ventaja de publicarse en castellano. Por todo ello, deberían encontrar un hueco, al menos, en los estantes de los departamentos de matemáticas.

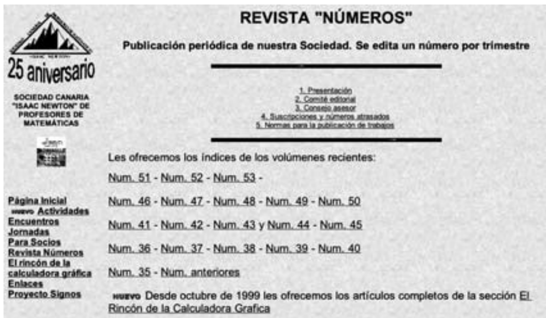


Figura 1

Desde allí podemos informarnos sobre la forma de suscribirse a la revista (18 € al año por cuatro números), acceder a los índices y portadas de los diferentes números publicados (Figura 2) y entrar en el espacio reservado a una de las secciones, **El rincón de la calculadora gráfica** (Figura 3). En éste último sitio, cualquiera que lo desee, puede descargarse una versión en pdf de los artículos que han aparecido desde que se publica la sección (1997).

Figura 2

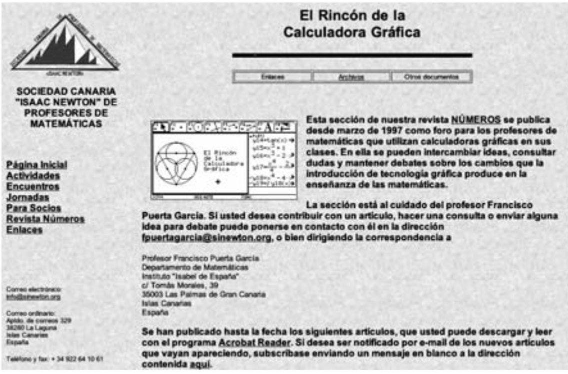


Figura 3

Debido a la extensión de cada revista, en cada número se publican pocos artículos. Los que aparecen en el volumen 55, de septiembre de 2003, pueden clasificarse en la categoría de investigaciones en educación matemática o en la de aspectos interesantes de las matemáticas para el profesorado. No obstante, basta con repasar los índices de volúmenes anteriores pare ver que también tienen cabida la descripción de experiencias y los recursos, así como reseñas de libros, artículos etc. Además, en cada número aparece la sección fija **Problemas comentados** que corre a cargo de Juan A. Rupérez y Manuel García Déniz en la que, en cada número, comienzan comentando las soluciones a los problemas propuestos en el número anterior y terminan proponiendo nuevos problemas.

El primer artículo, *Una presentación visual del polinomio de Lagrange*, presenta una propuesta didáctica que pretende desarrollar el pensamiento matemático del alumnado a través de la visualización del concepto de función. Los autores, Ricardo Cantoral y Gisela Montiel, critican los enfoques predominantes en el sistema escolar en los que la preocupación didáctica se centra en "el arte de enseñar" sin atender adecuadamente los factores que desencadenan el aprendizaje matemático en los alumnos. Después de dejar claro que la visualización no consiste sólo "en una visión inmediata de las relaciones, sino en una interpretación de lo que se presenta a nuestra contemplación que solamente podemos realizar eficazmente si hemos aprendido a leer adecuadamente el tipo de comunicación que la sustenta", el resto del artículo se dedica a desarrollar una propuesta didáctica consistente en la construcción inductiva de los polinomios de interpolación con ayuda de una calculadora gráfica, es decir, a hacer la construcción de este objeto matemático desde la visualización.

El segundo artículo es una traducción —de Manuel Fernández, quien hace un trabajo realmente bueno, tanto por la corrección del castellano, como por la claridad del texto que resulta de su trabajo— de un artículo de Paul Drijvers sobre los obstáculos que presenta el aprendizaje del álgebra con ayuda de programas como Derive (*Aprender matemáticas en un entorno de álgebra computacional: los obstáculos constituyen oportunidades*). El autor distingue entre:

- obstáculos globales, que tienen que ver con el uso del ordenador y de la relación entre el plan de resolución del problema y su ejecución en el entorno informático,
- y locales , que se refieren al tema particular de su uso en los problemas algebraicos.

Luego pasa a identificarlos haciendo un inventario, no exhaustivo, de los mismos. Por último el autor da dos razones por las que considera que deben ser tomados en serio en las clases:

- al aprendiz, enfrentarse a los obstáculos puede producirle frustración e irritación, y
- tratar de superar un obstáculo contribuye a mejorar la comprensión del problema, a desarrollar conceptualmente las matemáticas que intervienen en él y a generar buena disposición hacia las matemáticas.

La conclusión es obvia: en vez de soslayar los obstáculos, hacerlos objeto de discusión en el aula.

La revista contiene otros dos artículos: *Aproximación simbólica al descubrimiento automático de lugares geométricos en el plano* (F. Botana y J.L. Valcarce) y *Construcción de un triángulo conociendo sus tres alturas* (Alvaro Martín González), de los que sólo voy a decir que me han resultado interesantes para no alargarme excesivamente.

Para terminar me queda por decir, si es que no ha quedado suficientemente claro antes, que estamos ante dos buenas revistas, interesantes y útiles. Dos revistas cuyo nivel es comparable al de otras publicaciones con más renombre merecedoras de ser tenidas en cuenta como recurso para mantenerse al día y ampliar perspectivas y con la ventaja de publicarse en castellano. Por todo ello, deberían encontrar un hueco, al menos, en los estantes de los departamentos de matemáticas. ■

Reseñas de artículos

Allers-retours entre la pratique de la classe et la recherche sur l'enseignement des mathématiques

Catherine Sackur

Boletín APMEP
n.º 447, pp. 430-442
septiembre - octubre 2003.

El objetivo del artículo es mostrar, por un lado la interacción entre la práctica de profesor y la actividad investigadora y por otro el destacable hecho de que "si se escucha a los alumnos con mucha atención", nos damos cuenta de que tienen buenas razones para producir las matemáticas que producen, incluso cuando son falsas para el profesor. *Cada alumno tiene su propio saber matemático* (tiene su propia coherencia interna). Sabemos que las matemáticas se construyen socialmente, y como profesores estamos confrontados a la paradoja de: ¿cómo actuar en clase para que los conocimientos personales de 30 (ó 35) alumnos confluyan para constituir el *saber matemático, compartido, permanente y universal*?

Para ello destaca tres puntos:

- la noción de conocimiento local,
- ¿es posible dar a los alumnos un medio de controlar su trabajo? (Para saber si está bien o no).
- si conseguimos hacer a los alumnos la devolución de lo verdadero y falso en matemáticas, éstas dejan de ser arbitrarias. ■

Florencio Villarroya

Dos conflictos al representar números reales

Sara Scaglia y Moisés Coriat

La Gaceta de la RSME
vol. 6, n.º 1 Ene-Abr 2003, pp. 132-148

Los autores resumen un estudio empírico realizado con alumnos de bachillerato y primer año de licenciatura mediante el que detectaron dos conflictos cognitivos relacionados con la representación de los números reales en la recta:

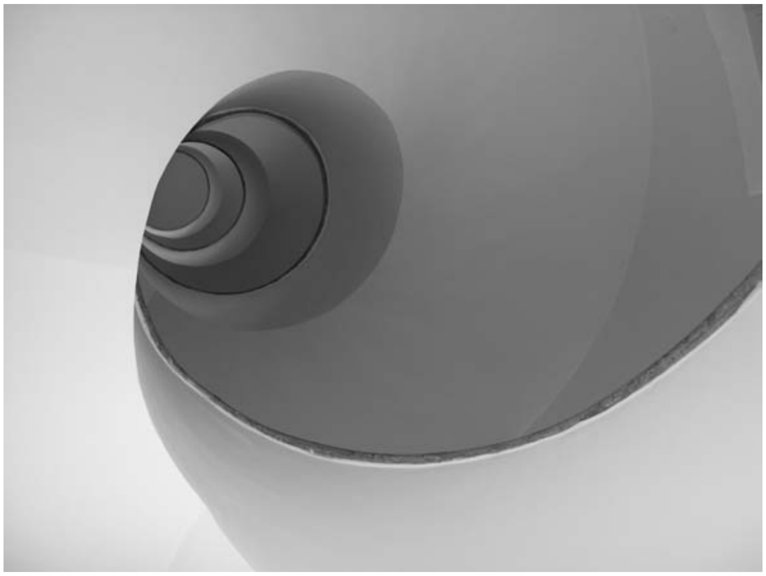
- dificultad para aceptar que a números construibles pero con infinitas cifras decimales les corresponda un punto determinado de la recta
- la falta de distinción en las argumentaciones entre el punto geométrico y la marca física realizada en el papel.

Un estudio teórico posterior de las inconsistencias detectadas en las respuestas de los alumnos trata de explicarlas desde las ideas de Bachelard sobre el progreso del conocimiento matemático. Como principal conclusión establecen que la representación decimal infinita es causa de estancamiento e incluso de retroceso y por tanto es un obstáculo epistemológico.
Esperamos con interés las propuestas didácticas destinadas a salvar el obstáculo que han identificado los autores y el diseño de materiales que traten adecuadamente la representación de los números reales en la recta, ambas consecuencias necesarias de este estudio. ■

Julio Sancho

Hélices:

Palacio de los Duques de Urbino. Urbino (Italia), hacia abajo.
Villa María. Roma (Italia), hacia abajo.
Villa María. Roma (Italia), hacia arriba.
Palacio de los Duques de Urbino. Urbino (Italia) hacia arriba. (Fotos FMC)



SUMA 45
Febrero 2004

Seminario: "Itinerario educativo de la licenciatura de Matemáticas"

Documento de Conclusiones y Propuestas

Presentación

La Subcomisión Española de la International Comission on Mathematics Education[1] ha celebrado un Seminario[2] dedicado al análisis y diseño de líneas maestras para un "Itinerario Educativo de la Licenciatura de Matemáticas".

El Seminario ha tenido lugar en la Universidad de Granada, durante los días 22 a 24 de enero de 2004, y al mismo han asistido por invitación miembros de las distintas sociedades matemáticas que constituyen la Subcomisión[3], un representante del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte y profesores expertos en los temas a tratar.

Dicho Seminario ha tenido lugar en un momento en que se está elaborando, mediante un proyecto financiado por la ANECA[4], un libro blanco sobre la titulación de Licenciado en Matemáticas, incluyendo propuestas sobre la estructura de un nuevo Plan de Estudios para esta Licenciatura, atendiendo, entre otros aspectos, a su adecuación al Espacio Europeo de Educación Superior.

Ha sido propósito de los asistentes al Seminario, cuyo resumen de conclusiones aquí se presenta, elaborar propuestas relativas a la posible Opción Educativa de la titulación de Licenciado en Matemáticas, complementarias de las contenidas en el borrador actual del libro blanco. También ha pretendido buscar coherencia con el documento del Proyecto Piloto para la CRUE[5] sobre esta misma temática.
Queremos destacar el rigor y calidad de las ponencias presentadas en el Seminario (disponibles en su página web), la pluralidad de perspectivas recogidas, derivada de la presencia de matemáticos profesionales, de profesores de Secundaria y de expertos en Didáctica de la Matemática, así como el esfuerzo realizado por los participantes para comunicar sus puntos de vista, integrar las diferencias y consensuar las propuestas finales.

Por ello estimamos oportuno y urgente plasmar, en este documento, las conclusiones y sugerencias recogidas durante el Seminario, presentadas y debatidas colectivamente en su última jornada, a fin de posibilitar su consideración por quienes tienen responsabilidades en el diseño del futuro Plan de Estudios de Matemáticas.

Planteamiento General

Consideramos que el sistema universitario español tiene el reto de integrarse en el sistema universitario europeo y conseguir con ello un avance substancial en temas de intercambio y cooperación, y en temas de calidad, tanto en el terreno investigador como docente.

En este marco general parece deseable que el requerimiento de una troncalidad mínima permita —en la nueva licenciatura de Matemáticas de 240 ECTS[6], planteada como un grado europeo profesionalizador— la coexistencia de diversas orientaciones profesionales que hagan, en particular, más clara y atractiva la opción por esta Licenciatura y acreciente su proyección social.

Así, destacamos el interés de una orientación educativa en el seno de esta Licenciatura, que debiera permitir la adquisición de unas competencias generales y específicas que constituyan una primera formación inicial para el ejercicio de la docencia en Secundaria u otros niveles y situaciones, y para el desarrollo de diversas actividades relacionadas con la matemática educativa.

Sostenemos que dicha orientación educativa debiera estar vinculada con formaciones específicas[7], con el nivel de Master y con las actividades de formación continua propias de la profesión docente.

Organizado por la Subcomisión Española ICMI, International Commission Mathematical Instruction.

Granada, 22 al 24 de enero de 2004

Competencias generales

En este ámbito, las conclusiones del Seminario asumen y subrayan la importancia que tiene para el Itinerario Educativo, el cumplimiento de todos los objetivos generales establecidos para la titulación de Matemáticas que se enuncian en el borrador del libro blanco del 14 de enero de 2004.

Además, se considera que el Itinerario Educativo llevaría como competencias generales las siguientes:

3.1 El dominio de los contenidos matemáticos de Educación Secundaria desde una perspectiva matemática superior y su conocimiento como objetos de enseñanza-aprendizaje,
3.2 La organización curricular y planificación de estos contenidos matemáticos para su enseñanza,
3.3 El análisis, interpretación y evaluación de los conocimientos matemáticos de los alumnos a través de sus actuaciones y producciones matemáticas,
3.4 La capacidad de gestión del contenido matemático en el aula.

Estas cuatro competencias dan lugar a diferentes competencias específicas, que se enuncian a continuación, y cuyo logro se postula mediante la articulación diversos módulos formativos.

Competencias específicas

Las competencias específicas, que fueron consideradas por los grupos de discusión y resumidas en la última sesión del Seminario, incluyen:

4.1 Conectar los contenidos matemáticos de la Educación Secundaria con los fenómenos que los originan, reconociendo los aspectos formales implicados junto con su presencia en situaciones cotidianas y aquellas otras que procedan de ámbitos multidisciplinares (física, biología, economía, etc.),
4.2 Conocer diversas teorías de aprendizaje del conocimiento matemático,
4.3 Analizar críticamente y evaluar propuestas y organizaciones curriculares,
4.4 Reconocer los tipos de razonamiento de los estudiantes, proponer tareas que los orienten, diagnosticar sus errores, y proponer los correspondientes procesos de intervención,
4.5 Seleccionar y secuenciar actividades para el aprendizaje escolar; analizar los diversos problemas que surgen en situaciones de aprendizaje,
4.6 Diseñar, seleccionar y analizar unidades didácticas, textos y recursos,
4.7 Disponer de criterios, técnicas e instrumentos específicos para la evaluación del conocimiento matemático,
4.8 Conocer recursos y materiales (computacionales, audiovisuales, manuales, bibliográficos, etc.) y emplearlos adecuadamente en la enseñanza de las Matemáticas de Secundaria,
4.9 Utilizar técnicas de comunicación para dotar de significado los conceptos matemáticos,
4.10 Favorecer las potencialidades matemáticas de los estudiantes y promover en la sociedad actitudes positivas hacia las matemáticas.

Módulos formativos

Finalmente, los módulos formativos, considerados como grandes bloques de contenido, pero sin asignación a asignaturas concretas ni a áreas de conocimiento, incluyen, entre otros:

5.1 Fundamentos de las Matemáticas de la Educación Secundaria desde un punto de vista superior, con sus aspectos filosóficos, históricos, epistemológicos y las conexiones con otras materias, como Física, Biología, Economía, etc.
5.2 Teorías del Currículo, de la Enseñanza y del Aprendizaje en Matemáticas
5.3 Diseño curricular en Matemáticas
5.4 Didáctica de los distintos contenidos de Matemáticas en Secundaria
5.5 La Resolución de Problemas y la enseñanza de las Matemáticas
5.6 Materiales y recursos
5.7 Prácticas profesionales iniciales

Granada, 30 de enero de 2004

NOTAS

1 Véase *www.icmi-es.tk*

2 El programa, documentos y relación de participantes pueden consultarse en la URL del Seminario, véase *www.ugr.es/~vic_plan/formacion/itermat/*

3 SCM (Sociedad Catalana de Matemáticas),

SEIEM (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática),

SEIO (Sociedad Española de Estadística e Investigación Operativa),

FESPM (Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas),

RSME (Real Sociedad Matemática Española).

La Sociedad Española de Matemática Aplicada, SEMA, también con representación en el Comité ICMI-Es, excusó su ausencia y remitió sugerencias por vía electrónica.

4 Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación (N de E)

5 Publicado como un suplemento al número 6.2 de La Gaceta de la RSME.

CRUE (Conferencia de Rectores de la Universidades Españolas) (N de E)

6 European Credit Transfer System. (N de E).

7 El Consejo de Ministros ha regulado el Título de Especialización Didáctica (R.D. 118/2004 de 23 de enero de 2004, BOE de 4 de febrero de 2004), cuyas líneas generales —conocidas con posterioridad al Seminario— posibilitan incluir una parte de la especialización didáctica inicial del profesor de Secundaria durante los estudios de Licenciatura, dejando otra parte para su desarrollo durante el post-grado.

Convocatoria de la XV Olimpiada Matemática Nacional

Un año más la FESPM convoca la Olimpiada Matemática Nacional para alumnado de segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria. La edición de este año será organizada por la Sociedad Melillense de Educación Matemática (SMEM), que ya ha iniciado los trámites para ello teniendo una reunión en la ciudad de Melilla el pasado 13 de diciembre.

A esta reunión, convocada por la SMEM, asistieron el Consejero de Educación, D. Rafael Marín Fernández, y la Consejera de Cultura, Dª Simi Chocrón Chocrón, de la Ciudad Autónoma de Melilla, representantes de la Comisión Nacional de Olimpiadas (CNO) de la FESPM: Pedro J. Martínez y Albert Violant, representantes del SMEM: Luis Serrano, Miguel A. Heredia, Juan J. Ortiz y Jesús D. Rodríguez; así como los medios de comunicación (prensa, radio, TV).

Dicho acto tuvo dos partes; la primera en la que se hizo la presentación oficial, ante las autoridades, medios de comunicación y compañeros de la FESPM, del Proyecto de la XV Edición de la Olimpiada Matemática Nacional y del cartel anunciador; y la segunda en la que, tras el acto protocolario, se mantuvo una sesión de trabajo de los miembros organizadores locales con los miembros de la CNO (Comisión Nacional de Olimpíadas) a fin de coordinar el proyecto, conocer experiencias anteriores en la preparación de este evento y utilizar las posibilidades culturales y sociales de la ciudad en la que se piensa realizar. Esta reunión continuó, tras el almuerzo, visitando el recinto histórico en el que se harán las pruebas por equipos. Tras ello se concretó el Programa de Actividades que se adjunta y que será el que se lleve a cabo salvo fuerza de orden mayor.

Con esta actividad no sólo pretendemos conseguir unos objetivos relacionados directamente con la difusión y con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; además buscamos otros relacionados con la convivencia, amistad, interculturalidad, etc. Destacamos como objetivos a conseguir los siguientes:

- Fomentar entre los jóvenes la afición por las Matemáticas.
- Contribuir a la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en la escuela.
- Apoyar la innovación entre el profesorado en la forma de hacer Matemáticas.
- Propiciar la participación masiva de estudiantes y profesores en las fases previas al encuentro nacional, de acuerdo con los objetivos propuestos en los estatutos de la Federación.
- Presentar una visión de las matemáticas complementaria y más realista que la utilizada en el aula.
- Favorecer las relaciones de amistad y conocimiento entre jóvenes de diversas Comunidades Autónomas.
- Dar a conocer a los asistentes y participantes las singularidades culturales, geográficas, sociales, históricas y humanas de Melilla.

El número de alumnos seleccionado por las sociedades pertenecientes a la FESPM será:

- Melilla 4
- Andalucía 6
- Aragón, Asturias, Canarias, Cantabria, Castilla y León, Castilla La Mancha, Cataluña, Extremadura, Galicia, La Rioja, Madrid, Navarra, Región de Murcia y Valencia
  3 de cada una.

También asistirán, como invitados, alumnos de comunidades en las que no hay constituídas aún sociedades federadas, además de alumnos de Andorra y de colegios españoles en Marruecos:

- País Vasco, Islas Baleares, Principado de Andorra y Marruecos
  2 de cada una.

En total participarán **63 alumnos y 21 profesores**.

Luis Serrano, *Presidente de la SMEM*
Miguel Ángel Heredia
Juan Jesús Ortiz de Haro
Coordinadores de la XV OMN

Programa de actividades - XV Olimpiada Matemática Nacional
Melilla, 24, 25, 26, 27 y 28 de junio de 2004

Jueves 24 de junio
- *20h 32m* Recepción de participantes, desplazamiento al hotel y alojamiento.
- *21h 31m* Cena.
- *22h 35m* Fiesta de bienvenida. Presentación de participantes. Normas y programa de la olimpíada.
- Reparto de cámaras para la prueba de fotografía matemática.
- *00h 01m* A dormir.

Reunión del equipo organizador con los colaboradores, coordinadores y monitores.

Viernes 25 de junio
- *8h 33m* Desayuno.
- *10h 01m* Prueba individual.
- *13h 04m* Inauguración de la Olimpiada. Palacio de Exposiciones y Congresos.
- *14h 27m* Comida.
- *17h* Visita turística a Melilla "La Vieja". Recorrido turístico por la ciudad. Realización de fotos para la prueba de fotografía matemática.
- *20h* "Matemáticas en la calle" en la Plaza del Sagrado Corazón con la colaboración de Luis Berenguer y la SAEM THALES
- *21h 30m* Cena.
- *22h 30m* Noche matemática: debate y resolución de ejercicios de la prueba individual. Distribución de equipos para prueba por equipos.

Reunión del equipo organizador con los colaboradores, coordinadores y monitores.

Sábado 26 de junio
- *8h 31m* Desayuno.
- *10h* Presentación y realización de la Prueba por equipos.
- *13h* Visita a dependencias militares. Realización de fotos para la prueba de fotografía matemática.
- *14h 30m* Comida.
- *17h* Visita al Club Marítimo. Presentación y realización de actividades náutico deportivas. Realización de fotos para la prueba de fotografía matemática.
- *19h 30m* Taller de Juegos matemáticos en la pérgola del Club Marítimo. Recogida de los carretes de la prueba de fotografía.
- *21h 30m* Cena.

Reunión del equipo organizador con los colaboradores, coordinadores y monitores.

Domingo 27 de junio
- *8h 29m* Desayuno.
- *9h* Visita a la exposición de las fotos realizadas por los participantes.
- *9h 31m* Salida para Nador (Marruecos).
- 10h 33m Visita en Nador al Instituto Español Lope de Vega. Charla-conferencia *Magia y matemáticas*.
- *11h 28m* Recepción del Excmo. Sr. Cónsul General de España en Nador.
- *12h 44m* Visita a la factoría acuícola Marost.
- *14h 30m* Comida.
- *17h* Vuelta a Melilla.
- *19h* Acto de clausura, entrega de diplomas y regalos a todos los participantes.
- *21h 30m* Cena de despedida.

Reunión del equipo organizador con los colaboradores, coordinadores y monitores.

Lunes 28 de junio
- *7h 30m* Despertar y desayuno.
- *9h* Salida de concursantes hacia Almería.
- *10h* Salida de concursantes hacia Málaga.

SUMA 45
Febrero 2004

Jornadas sobre Educación Matemática. Santiago de Compostela 16,17 y 18 de septiembre de 2004

Durante los días 16, 17 y 18 de septiembre de 2004 tendrán lugar en el Palacio de Congresos y Exposiciones de Galicia en Santiago de Compostela, las "Xornadas sobre Educación Matemática". Están dirigidas a todo el profesorado de educación infantil, educación primaria y al profesorado de matemáticas de educación secundaria. Estas Jornadas están organizadas por la Consellería de Educación e Ordenación Universitaria en colaboración con las sociedades matemáticas: AGAPEMA, FESPM, RSME y SEIEM y cuentan con el siguiente

Comité de Programa

Manuel Díaz Regueiro (AGAPEMA)
Bernardo Gómez Alfonso (SEIEM)
Manuel de León Rodríguez (RSME)
Luis Puig Mosquera (AGAPEMA)
Tomás Recio Muñiz (RSME)
Josep Sales Rufí (FESPM)
Beatriz Mosquera Pérez (Consellería de Educación e Ordenación Universitaria)

La sesión conjunta entre sociedades del día 18 de septiembre está especialmente diseñada para concitar la participación de profesores de matemáticas de todos los niveles educativos; en particular, de todos los socios de AGAPEMA, FESPM, RSME y SEIEM.En estos momentos se están preparando, además, otras actividades complementarias (exposiciones, stands, etc.).

Grupos de Trabajo

Grupo de Trabajo n.º1 La convergencia europea en educación y las nuevas leyes educativas españolas LOU y LOCE. Adolfo Quirós (RSME), Bernardo Gómez (SEIEM), José Luis Álvarez* (FESPM), Luis Puig (AGAPEMA).

Grupo de Trabajo n.º2 Matemáticas en Secundaria y Universidad: razones y sinrazones de un desencuentro. Josep Gascón* (SEIEM), Josep Sales (FESPM), Miguel Muñoz (RSME), Rosa Segura (AGAPEMA).

Grupo de Trabajo n.º3 *Formación inicial y continua del profesorado de educación primaria y de educación secundaria.* Enrique de la Torre (SEIEM), Enrique Zuazua (RSME), Manuel Díaz (AGAPEMA), Salvador Guerrero* (FESPM).

*Coordinadores del grupo.

Programa

16 de septiembre
16:00 Acto Inaugural.
16:30 Conferencia Inaugural: José Manuel Sánchez Ron, de la Real Academia Española.
17:30-18:00 Descanso.
18:00-20:30 Comunicaciones en 3 sesiones paralelas.

17 de septiembre mañana
Sesiones técnicas de trabajo

- Reunión de Directores de revistas de Matemáticas de las sociedades implicadas con el objetivo de profundizar en la colaboración (La Gaceta, SUMA, GAMMA, ...).
- Reunión conjunta directiva AGAPEMA, FESPM, RSME, SEIEM y representantes de la Consellería de Educación e Ordenación Universitaria.

Actos sociales
- Visita a Santiago de Compostela dentro del programa Xacobeo 2004.
- Visita a las exposiciones paralelas de las Jornadas.

17 de septiembre tarde
16:00-18:00 Comunicaciones en 3 sesiones paralelas.
18:00-18:30 Descanso.
18:30-20:30 Mesa redonda: *La educación matemática en la encrucijada*, con la participación de los senadores miembros de la Ponencia en el Senado.
Cena social

18 de septiembre mañana
Sesión conjunta AGAPEMA/FESPM-RSME-SEIEM

9:00-10:00 Conferencia de Jean Pierre Kahane, autor del Informe Kahane.
10:.00-10:30 Descanso.
10:30-13:00 Ponencias de los grupos de trabajo:
13:00-13:30 Conferencia "Matemáticas en acción: innovando la docencia y abriendo ventanas a Europa", a cargo de Rosa María Ros (RSME y RSEF).

18 de septiembre tarde
16:00-18:00 Comunicaciones sobre la temática de los grupos de trabajo.
18:00-18:30 Descanso.
18:30-19:30 Conclusiones y debate.
20:00 Clausura.

Para participar como asistente, se debe cubrir la ficha que se anexa (ver http://www.agapema.com/agapema.html) y enviarla lo antes posible al número de Fax: 981 546551.

También puede participar como ponente, exponiendo algún trabajo, póster o diseño de taller con tema libre o bien con temas relativos a los grupos de trabajo. Los trabajos deben presentarse en soporte informático, acompañados de un resumen con una extensión máxima de dos folios y de la ficha que se anexa cubierta. Se recogerán hasta el día 15 de abril en la siguiente dirección:

Xornadas sobre Educación Matemática.
Servicio de Formación do Profesorado.
Consellería de Educación e Ordenación Universitaria.
Edificio Administrativo San Caetano, s/n.
15871 Santiago de Compostela.
A Coruña

Debido a la dificultad para encontrar alojamiento en Santiago, por ser Año Xacobeo, existe una prereserva a disposición de los asistentes. Para más detalles ponerse en contacto lo antes posible con la agencia de viajes Zonda (teléfono 981 59 40 50). ■

Convocado por la Sociedad *Puig Adam* de Profesores de Matemáticas
y el Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Letras

Bases del concurso

Primera
Los alumnos podrán participar en el Concurso en tres niveles:

a) Primer nivel: alumnos de 3º de E.S.O.

b) Segundo nivel: alumnos de 4º de E.S.O.

c) Tercer nivel: alumnos de 1º Bachillerato

Segunda
Las pruebas consistirán en la resolución de Problemas de Matemáticas (los mismos para todos los concursantes de un mismo nivel) y se realizarán en la mañana del sábado 5 de junio del 2004 a partir de las 10 horas en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

Tercera
A los mejores de cada nivel, se concederán diplomas y premios.

Cuarta
Los Centros que deseen presentar alumnos (hasta un máximo de seis) deberán realizar la preinscripción antes del día 5 de Mayo del 2004, dirigiéndose por carta o por fax al presidente de nuestra Sociedad:

Prof. Javier Etayo Gordejuela
Departamento de Algebra
Facultad de Ciencias Matemáticas
28040-Madrid
Fax: 91 394 4662

En la preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados. Si algún Centro desea presentar más de seis alumnos, debe solicitarlo antes de la fecha mencionada anteriormente.

Quinta
Los centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales individuales en las que se haga constar que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas, así como el curso en que están matriculados en el año académico 2003-2004.

III Premio SGAPEIO

III Premio SGAPEIO
á Innovación Pedagóxica
en Centros de Educación
Secundaria

En el marco del objetivo de promoción de la estadística y de la investigación operativa, la SGAPEIO (Sociedade Galega para a Promoción da Estatística e da Investigación de Operacións) convoca el presente premio, de acuerdo con las siguientes bases:

1. El objeto del certamen será la presentación de trabajos originales sobre el desarrollo de, al menos, una unidad temática de Estadística o de Investigación Operativa en Enseñanza Secundaria.

2. Se valorará que el trabajo haya sido aplicado con éxito durante el curso 2003-2004.

3. El importe del premio para el curso 2003-2004 será de 1.800 euros.

4. Podrán concursar en este certamen personas individuales o equipos, pudiendo presentar cada uno de ellos un único proyecto al concurso.

5. Los autores deberán presentar una memoria, por quintuplicado, redactada en castellano. Dicha memoria deberá estar mecanografiada a doble espacio, en tamaño DIN-A4, usando alguno de los procesadores Word, Scientific Word o LaTeX. También deberá entregarse una copia de la memoria en soporte informático, pudiendo acompañarse, así mismo, material audiovisual (vídeos, diapositivas, etc.). En la portada de los trabajos constará claramente el título y el nombre de los autores.

6. Junto con la memoria, los autores deberán remitir copia del DNI y un curriculum resumido (no más de dos páginas por autor).

7. El plazo de presentación de los trabajos comprenderá desde el **1 de mayo hasta el 30 de junio do 2004**.

8. Los trabajos deberán remitirse por correo certificado al domicilio social de la SGAPEIO:

SGAPEIO
Departamento de Estadística e I.O.
Facultad de Matemáticas
15706 Santiago de Compostela

Teléfono: 670 48 60 30
e-mail: sgapeio@zmat.usc.es
http://eio.usc.es/pub/sgapeio/index.html

9. A propuesta del Consejo Ejecutivo, la presidenta de la SGAPEIO nombrará al Jurado encargado de la resolución del premio. Dicho Jurado constará de cinco miembros y estará presidido por la presidenta de la SGAPEIO.

10. El Jurado emitirá el fallo del premio y tendrá la facultad de interpretar las bases de la convocatoria.

11. El fallo del Jurado será inapelable y se hará público junto con la convocatoria de la Asamblea General de la SGAPEIO del año 2004.

12. El Jurado podrá declarar desierto el premio. También podrá otorgar el premio a más de un proyecto, repartiéndose la cuantía del mismo entre los premiados.

13. Los ganadores del premio presentarán, en el marco de los actos programados con motivo de la celebración de la Asamblea General, los trabajos premiados.

14. Los trabajos premiados serán propiedad de la SGAPEIO.

15. Los trabajos no premiados podrán ser retirados por sus autores en el plazo de seis meses desde la publicación del fallo. De no hacerlo así, los trabajos serán propiedad de la SGAPEIO.

16. La participación en este premio supone la aceptación de estas bases.

NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, Apartado de Correos 19012, 28080 Madrid), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.

2. Los gráficos, diagramas, fotografías y figuras se enviarán impresos en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración. Indíquense los créditos de las fotografías y dibujos.

3. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos no serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, recomendarán posibles modificaciones, etc.

4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de un máximo de 625 caracteres incluyendo los blancos, que no necesariamente tiene que coincidir con la introducción al artículo. De este resumen se remitirá también su traducción al inglés.

5. Los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede) y el resumen en castellano y en inglés deberán ir escritos en una misma hoja aparte.

6. Se enviará también en soporte informático (disco de tres pulgadas y cuarto con formato PC, CDRom o DVDRom) una copia del archivo de texto que contenga el artículo y del que contenga la hoja de datos y los resúmenes, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quieran incluir. La etiqueta deberá identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda Microsoft Word para Windows o RFT. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF. Para las fotografías se recomienda archivos TIF o BMP y con una definición mínima de 600x600 puntos por pulgada cuadrada.

7. Al menos un ejemplar del texto así como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.

8. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.

9. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo y se incluirán al final del texto.

10. La bibliografía se dispondrá también al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:
    TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma*, n.° 20, 91-98.
    En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
    GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas*, Labor, Barcelona.
    En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
    VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2*, ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

11. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ... supone un gran avance (Hernández, 1992). Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ... según Rico (1993).

12. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como -en caso afirmativo- la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido.

13. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

SUMA

Boletín de suscripción

Tarifas	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	25 €	10 €
Centros	40 €	15 €
Europa	50 €	20 €
Resto del mundo	$ 60 USA	$ 22 USA

Fotocopiar esta hoja y enviar:
por correo a: Revista SUMA. Apartado de correos 19012
E-28080 MADRID
por Fax al: 912 911 879
por correo-e a: suma_administracion@fespm.org

Deseo suscribirme a la revista SUMA:

Nombre y apellidos: NIF/CIF:

Dirección: Teléfono:

Población: CP:

Provincia: País:

Correo electrónico: Fax:

Importe (€)

☐ Suscripción a partir del año (3 números) ____________

☐ N.os sueltos ____________

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)

☐ Transferencia bancaria (CCC 2085-9981-38-0330066350 ó IBAN ES68 2085 9981 3803 3006 6350)

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista SUMA

☐ Giro postal dirigido a Revista SUMA Fecha y firma:

Nombre y apellidos:

Código Cuenta Cliente: Entidad: Oficina: DC: Cuenta:

Banco/Caja:

Agencia n.º: Dirección:

Población: Provincia:

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (fecha y firma):

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

SUMA.
REVISTA SOBRE LA
ENSEÑANZA Y EL
APRENDIZAJE DE
LAS MATEMÁTICAS.

ISSN 1130-488X

9 771130 488006 00045