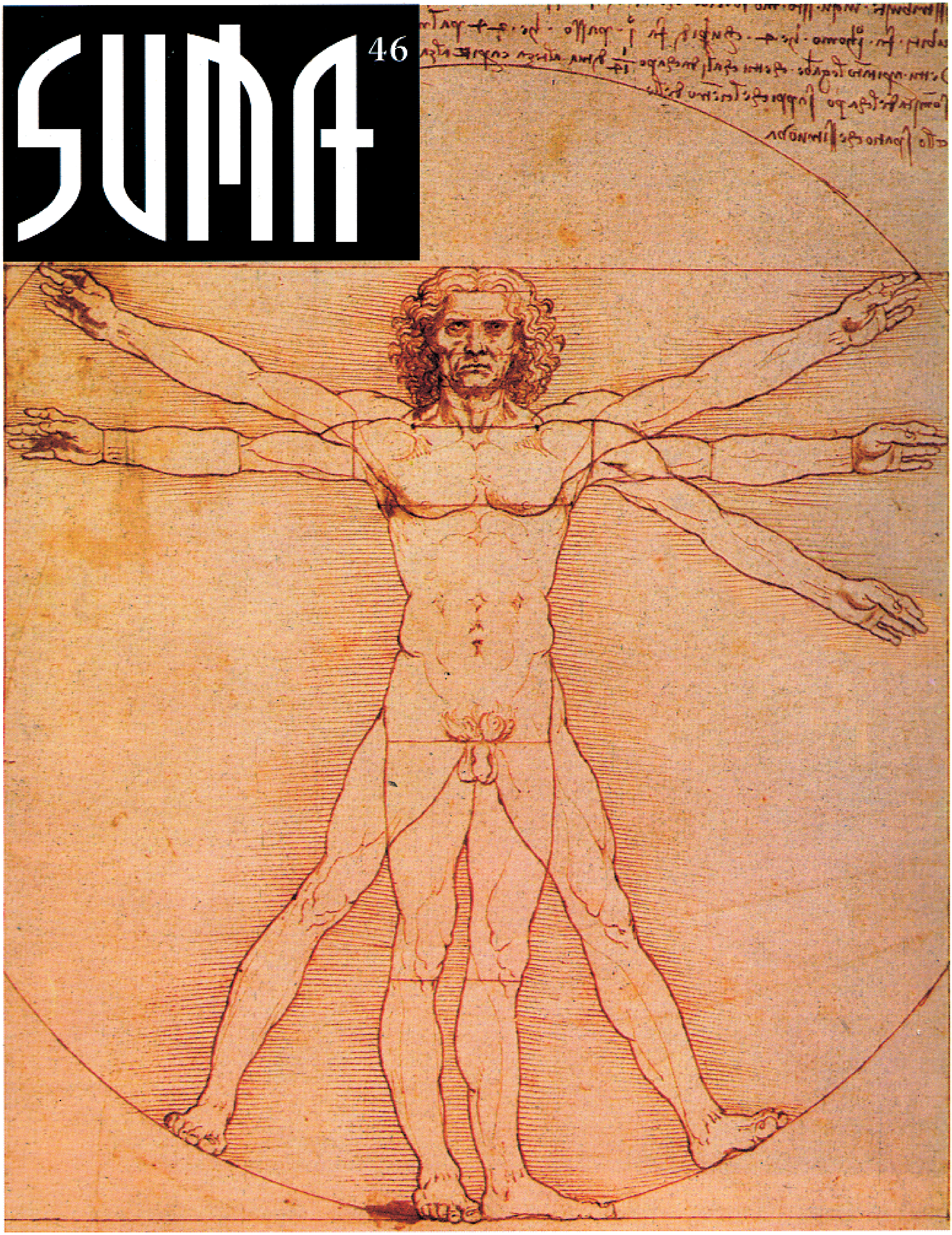
SUMA 46



SUMA. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las MATEMÁTICAS

MADRID · JUNIO 2004 · Nº. 46 · ISSN 1130-488X

SUMA
Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las
MATEMÁTICAS
46
Junio 2004

Índice

Edita
FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS (FESPM)

Diseño de la portada
Javier Alvariño
Diseño interior
Raquel Fraguas (NIVOLA)
Maquetación
A. Alamillo y F. Martín
Abstracts
M. Manso de Zúñiga
P. Satrústegui
Revista Suma
Apdo. 19012
E-28080-Madrid
España
Fax:+(34) 912 911 879
Tirada: *6400 ejemplares*
Deposito legal: *Gr 752-1988*
ISSN: *1130-488X*

SUMA 46
Junio 2004

Vivimos tiempos de cambio y el cambio está asociado a la incertidumbre. En Educación y naturalmente en Educación Matemática, siempre ha sido necesario el diálogo. La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas *simpre ha apostado por él, con éxito, eso sí, desigual.*

Nuestra materia, en la enseñanza primaria y secundaria, es instrumental y es necesario que su papel, de manera consensuada, adquiera un marco estable, que permita volcar los esfuerzos de todos en el ámbito de la innovación, en el del desarrollo curricular, en el de la investigación, en la elaboración de materiales adecuados, en el de la formación inicial y en servicio de los profesores y profesoras que la impartimos y, fundamentalmente, en lograr que los conocimientos de todos los alumnos mejoren, sin olvidar a aquellos que tienen más dificultades para aprender, que es donde está la tarea díficil, la realmente importante. Lograr que los mejores alumnos sepan más es relativamente fácil, pero el parámetro con el que se mide la calidad de un sistema pasa por considerar todo el recorrido de la variable aprendizaje, haciendo que suba el límite inferior del intervalo.

En ese consenso necesario debería incluirse la necesidad de incrementar, en las etapas primaria y secundaria, las horas dedicadas al área de Matemáticas, de acuerdo con lo apuntado reiteradamente en los estudios internacionales. También, realizando una lectura seria de esos informes internacionales, de lo que en ellos se evalúa y sobre aquello en lo que fallan más los alumnos españoles, se tiene que reflexinar sobre qué Matemáticas hay que enseñar en cada nivel y en cada etapa.

Los profesores de matemáticas tenemos también que realizar una autocrítica sobre cómo enseñamos y sobre dónde centramos nuestros esfuerzos al formar matemáticamente a nuestros alumnos.

Se hace nesesario también realizar una revisión a fondo de la formación inicial del profesorado, tanto de los maestros como de los licenciados en matemáticas que optan por la docencia. Incrementar la formación básica en Matemáticas de los que las van a enseñar de los 3 a los 11 años y la formación didáctica de los que lo harán de los 12 a los 18 deberían ser dos de los puntos de partida de esa revisión. Una parte de esa formación ha de ser práctica y ha de planificarse y supervisarse por profesores en ejercicio.

Una de las personas que defendió más directamente la necesidad de revisar la formación inicial de los profesores de matemáticas fue ***Miguel de Guzmán****. Desgraciadamente una repentina enfermedad acabó con su vida hace unos días. Con su muerte hemos perdido un gran maestro que contemplaba la investigación matemática y su enseñanza como una tarea unitaria, como dos caras de un mismo poliedro. Tendió lazos entre dos mundos que divergían, lazos que otros continúan tendiendo y que nos unen cada vez más. Nos enseñó de manera generosa, acudiendo a nuestras actividades en los rincones más distantes. Dió proyección internacional a la Educación Matemática española, presidiendo la ICMI durante ocho años. Y nos enseñó también a todos la importancia de la solidaridad y la cooperación. Desde SUMA hemos querido rendirle un pequeño homenaje en este número, que intentaremos ampliar posteriormente.*

Julio Sancho, en su sección Hemeroteca*, habla en este número de SUMA de nuestra revista hermana* Educação e Matemática*, que publica la* Associação de Professores de Matemática de Portugal*. Su artículo contiene una reflexión que queremos hacer nuestra, brevedad y concisión no estan reñidas con claridad e interés. Desde este editorial queremos nuevamente animar a todos los profesores a que cuenten sus ideas, sus experiencias, sus reflexiones, a que las compartan. Para ello SUMA siempre tiene sus páginas abiertas.* ■

SUMA 46
Junio 2004, pp. 5-22

Miguel de Guzmán (1936-2004)

Miguel de Guzmán: la persona

Toda la comunidad de matemáticos españoles y muchos compañeros de otros países estamos conmovidos por la pérdida de Miguel de Guzmán. Desde la emoción que producen los recuerdos hay un afán colectivo de honrar su memoria analizando su trayectoria y la extraordinaria obra que nos ha legado. Hay un deseo unánime de que su proyección llegue también a las futuras generaciones.

Miguel ha sido una persona muy sencilla y asequible a todos. Es difícil desde la proximidad hacer una valoración adecuada de la influencia que su vida y su trabajo han tenido y seguirán teniendo sin duda en nuestro mundo cultural y científico. Con toda seguridad la persona de Miguel de Guzmán va a continuar creciendo en el aprecio y la consideración de muchas personas. El tiempo irá decantando todo el valor que se acumula en lo que nos deja y en el ejemplo de su vida.

Con toda seguridad la persona de Miguel de Guzmán va a continuar creciendo en el aprecio y la consideración de muchas personas.

Baldomero Rubio
Universidad Complutense
Madrid

Es mi intención acercar al lector a su persona. He tenido el privilegio de estar muy cerca de él durante muchos años y también el honor de haber sido colaborador suyo en varios de sus libros. Esta proximidad y el cariño fraternal que nos hemos profesado son los únicos avales por los que posiblemente puedo merecer que se haya pensado en mí para realizar este cometido.

No puedo evitar recordar ahora la noche del lunes 12 de abril, cuando Mayte me llamó por teléfono para contarme la enfermedad. Al día siguiente debíamos reanudar nuestras clases y en el tiempo de vacaciones yo había estado fuera de Madrid bien ajeno a esta circunstancia. Ese mismo día me fui al hospital de Getafe para estar con él. Lo encontré sentado en una butaca frente a su hermano Enrique, quien poco después se despidió y quedamos solos. Estaba tranquilo, sin perder su habitual sonrisa, pero me habló serenamente de su sufrimiento y del peligro en el que aún se encontraba. Los médicos preveían en todo caso que su permanencia en el hospital debía prolongarse al menos seis semanas, lo cual le impedía volver con sus alumnos antes del final de curso. Era esto lo que realmente más le preocupaba y también la dificultad para poder trabajar en la situación en que se encontraba. Además, estaba a punto de terminar un nuevo libro.

Estuvimos hablando de muchas cosas y en particular de la cincuentena de alumnos que estaban ahora en su clase, de los trabajos que les encomendaba, los cuales originaban centenares de páginas que él debía leer. Pero no mostraba fastidio alguno ante esta ingente tarea. El énfasis lo ponía en el entusiasmo de los jóvenes con los que transcurría su curso. Después llegó Mayte y seguimos hablando los tres un buen rato, haciendo algún proyecto para el próximo verano. —*Baldo: Ahora voy a ver si duermo un poco*— me dijo. Agarré su mano izquierda con mi mano derecha y los dos la apretamos durante unos segundos en los que nos costaba trabajo terminar. En un instante sentí una honda preocupación y salí.

En la homilía de la misa de funeral José Antonio García-Monge, hermano de Mayte, pronunció unas bellísimas palabras. La gentileza de José Antonio y de Mayte me ha permitido acceder al texto de esta homilía, y yo deseo recordar ahora algo que los presentes ya pudimos oír entonces y estoy seguro que nos gustará recordar. José Antonio recoge parte de un texto que Miguel había escrito ya hace algún tiempo con la intención de que pudiera leerse en caso de grave enfermedad suya:

> Considero que la vida en este mundo es un magnífico don de Dios, pero estoy profundamente convencido de que no es el valor supremo y absoluto. Sé que la muerte es un acontecimiento que nos causa una profunda pena porque implica una interrupción de las relaciones cercanas y profundas de amor, cariño y mutuo apoyo que durante nuestra vida nos han mantenido tan unidos y felices. Pero desde la fe creo que la muerte me abre el camino a la vida junto a Dios, a una unión a Él, Dios Padre, Hijo y Espíritu Santo, a María, a una forma de compenetración y de cariño con todos vosotros, con mi madre, con todas las personas que he querido y me han querido durante mi vida, a la satisfacción y contemplación de todas las cosas que me han entusiasmado en esta vida, todo ello en una forma que no entiendo, pero no por eso menos hondamente real que aquello que creo entender. Desearía que todos vosotros compartierais conmigo esta visión de la vida que a mí me ha ayudado siempre extraordinariamente.

Pero es necesario dejar atrás lo ya inevitable, y ahora desearía pasar al principio de la vida de Miguel. He comentado con él algunas cosas de sus primeros años, pero por lo general no tenía mucha tendencia a hablar sobre sí mismo. Su conversación giraba más bien sobre proyectos, cosas para hacer, sugerencias de trabajo. Antes del verano de 1969, cuando lo encontré por primera vez. Hay rasgos de su vida y carácter que sólo he conocido ahora gracias a la información que me ha suministrado Leoncio Fernández Maroto, gran amigo suyo desde los años de su licenciatura en Matemáticas, y buen amigo mío también.

> *Miguel de Guzmán es el paradigma de una vida dedicada al servicio de los demás. Su vida ha sido un afán constante de buscar los sitios donde podía ser más útil.*

Miguel nace el día 12 de enero de 1936 en Cartagena. Su padre era marino y murió fusilado al principio de la guerra civil española por los militares que se sublevaron contra el Gobierno de la República. Era menor que sus hermanos Luis, Enrique y Margarita. Su madre, María Luisa, la única persona a quien cita expresamente en la formidable declaración de fe que antes hemos leído, murió también demasiado pronto, y siempre observé cómo sentía el orgullo de sus cuatro hijos. Miguel tenía un inmenso amor por ella. Precisamente los dos hermanos mayores fueron sus primeros profesores de matemáticas, como ha declarado en varias ocasiones. Ambos son ingenieros y él, después de un bachillerato que terminó a los dieciséis años, también inició estudios de ingeniería, que no llegó a terminar porque decidió ingresar como jesuita. Entró en el noviciado de Orduña en donde hizo dos años de estudios humanísticos. Después estudió filosofía, un año en Loyola y dos más en Munich. Y por cierto, ¿quién le enseño a leer y escribir? Su letra, de trazo firme y equilibrado, puede verse en *El rincón de la pizarra*. Constituye un fiel reflejo de su carácter sereno, dulce, armónico.

Al principio de los años sesenta inicia los estudios de la licenciatura de matemáticas en la Universidad Complutense. Después va a Chicago para hacer el doctorado junto a Alberto Calderón. Alberto Dou, catedrático de la Complutense y compañero jesuita, propició esta decisión de Miguel, así como su retorno en 1969 a la facultad de Ciencias de nuestra universidad. De esta época de Chicago he podido acceder a algunas cartas intercambiadas con nuestro común amigo Leoncio, a quien antes me he referido. Muestran de forma entrañable sus preocupaciones ante el reto del doctorado, así como sus proyectos de ser útil a los demás a través del ejercicio de la profesión de matemático.

Y ya estamos en el verano de 1969 en cuyo final tuve la suerte de conocer a Miguel. Como ya he contado en alguna ocasión, venía de Chicago cargado de libros y no menos cargado de ilusiones. Había comprendido que era necesario cambiar muchas cosas en la manera de entender la dedicación a las matemáticas en nuestra universidad. Venía de un ambiente tan propicio a la creación matemática como era la universidad de Chicago, y aquí se estaba entonces estudiando y volviendo a estudiar textos cerrados que no proporcionaban acceso a problemas razonablemente asequibles para los jóvenes licenciados que deseaban iniciar su carrera universitaria. Yo estaba entre ellos y el panorama cambió radicalmente para mí.

Desde otro punto de vista, seguía como jesuita. Me comentaba entonces en algunas ocasiones que debía estudiar teología, pero lo que yo podía apreciar es que le faltaba tiempo o motivación para ello. Poco tiempo después observé que me hablaba de forma reiterada de Mayte, —la hermana de mi compañero José Antonio—, apostillaba cada vez. Yo sabía que se estaba enamorando de Mayte, pero tardó en decírmelo.

En el verano de 1969 regresea de su estancia en Chicago cargado de libros y no menos cargado de ilusiones. Había comprendido que era necesario cambiar muchas cosas en la manera de entender la dedicación a las matemáticas en nuestra universidad.

En el tiempo hasta 1971 en que terminé mi tesis doctoral con su dirección, pude apreciar muy bien su calidad como profesor, como orientador del trabajo de los demás, como estimulador ante las dificultades que naturalmente tiene quien está empezando. Y también como amigo. Yo he sido su primer alumno de doctorado, y después de mí muchos más. Solía decirme que no dudara en preguntarle ante mis dificultades, porque quizás él había pasado antes por otras equivalentes y podría darme alguna orientación decisiva para superarlas. ¡Siempre atento a dar ayuda a todo el que lo deseara! Los cursos de doctorado que impartía entonces abrían una perspectiva completamente nueva en nuestra facultad. ¡Cuántos profesores de Análisis Matemático de la universidad española actual han surgido del estímulo, de la enseñanza y de las orientaciones que él ha proporcionado!

Pude apreciar muy bien su calidad como profesor, como orientador del trabajo de los demás, como estimulador ante las dificultades que naturalmente tiene quien está empezando, y también como amigo.

En Septiembre del 74 se produjo la primera interrupción de mi contacto inmediato con él. Estuve durante un curso en la universidad de Princeton, y allí estaba también Antonio Córdoba, que justo había terminado su doctorado en Chicago con la dirección de C. Fefferman. También coincidí ese curso con José Luis Rubio de Francia, otro de nuestros grandes matemáticos tristemente desaparecido demasiado pronto, y Juan Carlos Peral. Puedo asegurar que esta concentración de matemáticos españoles en una universidad como ésta procede sin duda de su estímulo. Al curso siguiente él mismo visitó Princeton. Miguel había hecho fácil que jóvenes matemáticos españoles pudieran visitar y hacer su doctorado en muy buenas universidades de los Estados Unidos.

Reunidos de nuevo en la Complutense, iniciamos una colaboración que se ha prolongado por muchos años. Estuvimos preparando el libro *Integración: teoría y técnicas* que se publicó en 1979 y ha constituido un manual muy apreciado por nuestros estudiantes durante muchos años. El libro se debe a la inspiración de Miguel y a una buena dosis de transpiración a cargo mío. Nuestra colaboración quedó algo interrumpida durante los demasiados años en los que fui decano.

Ya a finales de los ochenta reanudamos nuestro trabajo en común esta vez para hacer un texto de Análisis Matemático pensado para el primer curso universitario. Pretendíamos recoger en él nuestra amplia experiencia en esta materia con el mucho material que teníamos acumulado. El primer volumen de esta obra se terminó en el verano de 1990, y sucesivamente aparecieron otros dos. Hay una pequeña historia alrededor de estos libros: Un día de 1993 nos llegó desde la editorial una carta de Sofía, una estudiante que los había encontrado en la biblioteca de la Facultad de Matemáticas de Sevilla. Con el característico desparpajo andaluz nos decía:

> Soy una estudiante de 1º de Física (en Sevilla) y estoy realmente emocionada ante tan magnífica obra. Hace pocos

> días que conozco estos libros encontrados (igual que un tesoro) entre tantos otros de la biblioteca de la Facultad de Matemáticas. Se me ha disparado la imaginación al darme cuenta de lo fácil que es aprender de esta manera.

Y continúa con frases más que elogiosas. Guardé la carta y aún la conservo. Traigo aquí este testimonio como homenaje a Miguel. Sin duda es su inspiración la que ha motivado este reconocimiento, y me honra compartir con él alguna responsabilidad en ello. Seguramente centenares o miles de estudiantes tienen este sentimiento de admiración hacia Miguel que Sofía expresa tan elocuentemente.

Ha escrito varios libros con la intención de llevar a un público muy amplio lo que ha constituido uno de los objetivos fundamentales de su vida: alentar y motivar la afición al trabajo intelectual y, en particular, a las matemáticas. Me voy a referir sólo a dos de ellos, que en mi opinión reflejan especialmente la personalidad del autor.

Tenía que pasar una temporada en el hospital para curarse de un virus que afectaba a su corazón. Era el año 1986. Al segundo día que estuve con había logrado permiso para estar en una pequeña sala que utilizaban habitualmente médicos y enfermeras y allí estaba trabajando todas las horas que la enfermedad le permitía para escribir *Aventuras matemáticas* en el corto tiempo que duró su estancia en el hospital. En la dedicatoria escribe:

> Dedicado a los médicos, enfermeros, enfermeras y amigos del Centro Ramón y Cajal, donde tuve la oportunidad de escribir estas aventuras matemáticas. Con sus atenciones y afecto, ellos me enseñaron que estar enfermo una temporada puede no ser tan malo.

El libro contiene unas viñetas muy divertidas realizadas por su hijo Miguel y se ha traducido al francés, finlandés, portugués y chino. Representa de la mejor manera una característica importante de su autor: Incapacitado absolutamente para perder el tiempo.

Para pensar mejor es un libro por el que siento especial predilección. Tuve la ocasión de ir leyendo los originales y de comentarlos ampliamente con su autor durante el tiempo que duró la gestación (la cocina, como le gustaba decir). Fue muy agradable y estimulante nuestro intercambio de puntos de vista. Miguel era muy receptivo a otras opiniones. Al regalarme el libro, como siempre, escribe esta vez: *Baldo, muy agradecido por tu magnífica ayuda*. No dejaba que le ganaran en generosidad.

Al cumplir los sesenta años tuvo el homenaje de reconocimiento internacional que ya había ganado ampliamente. Los organizadores de la quinta edición de la *International Conference on Harmonic Analysis and Partial Differential Equations*, celebrada como las otras en El Escorial, tuvieron la feliz idea de dedicárselo. Era un excelente criterio: hacerlo en su plena madurez, sin esperar a un tiempo que pudiera ser considerado de término. De otra forma no habría podido disfrutar, como sé muy bien que sucedió, la cálida expresión de afecto y admiración de tantas personas que pudimos estar con él en aquellos días de junio de 1996.

Miguel de Guzmán es el paradigma de una vida dedicada al servicio de los demás. A través de su oficio de matemático, no sólo ha hecho lo que es habitual en esta profesión: investigar, enseñar, ayudar a los más jóvenes a iniciarse… Su vida ha sido un afán constante de buscar los sitios donde podía ser más útil, investigando los campos nuevos, abierto siempre a las innovaciones, conocedor del mundo cultural y científico que lo rodeó en cada momento, lector insaciable, trabajador permanente. Pocas y cortas vacaciones se ha permitido. Siempre ha estado donde se solicitaba su presencia. La matemática española actual es en buena parte fruto de su dedicación.

La matemática española actual es en buena parte fruto de su dedicación.

Ha ejercido un magisterio espectacular. Deja un caudal enorme de escritos que podrán contemplarse también en el futuro. Su prosa es bellísima, hubiera debido ser también académico de la Lengua. Sus frases largas sin *comas* que tan bien se leen y tanto contenido tienen, hay que seguir disfrutándolas. Su alegría de vivir, el sentido lúdico del que siempre quería impregnar el trabajo, son otra constante en él. Me viene ahora a la memoria *Los espingorcios*, escritos para sus hijos Mayte y Miguel. La creatividad de su padre le permitía hacer algo más que comprar cuentos para ellos: Se los inventaba.

Se ha ido cuando tenía muchas ideas por desarrollar y todo parecía indicar que también fuerzas y futuro para hacerlo. No estábamos preparados para su ausencia. El tiempo irá definiendo progresivamente todo su valor.

Con toda seguridad, lo que nos pediría a los que seguimos es que continuemos su trabajo para que cada vez más las jóvenes generaciones sepan utilizar las matemáticas como vehículo para su formación integral en un ambiente lúdico y estimulante. El mejor tributo que podemos rendirle es contribuir a ello todo lo que nos sea posible.

Pero sobre el dolor que sentimos debe prevalecer la alegría por todo lo que nos ha dejado. Así me lo decía su hermano Enrique el día del funeral. Aquella tarde de abril los cielos madrileños lloraban, no se sabe si de dolor o de gozo. ■

Miguel de Guzmán Ozámiz, un matemático comprometido con la Educación

Sin duda alguna Miguel de Guzmán ha sido una referencia clave de la educación matemática en España en las últimas décadas. Catedrático de Análisis Matemático y Académico de Ciencias, su extraordinaria aportación en el campo de la Matemática no se redujo al terreno de la investigación en esta ciencia[1], sino que también contribuyó a su divulgación y a la formación matemática de las jóvenes generaciones, e influyó desde distintas instancias en la mejora de la educación matemática.

Son muchas las facetas de su personalidad que se pueden destacar, tanto desde la vertiente humana como profesional. En estas páginas quiero subrayar su aportación a la educación matemática a través de sus escritos, sus intervenciones y sus proyectos, destacando la coherencia entre su discurso, su modo de hacer y sus acciones.

Matemáticas como ciencia, arte e instrumento

En 1983 Miguel publicó por primera vez sus reflexiones sobre la educación matemática en un artículo aparecido en la *Revista de Occidente* (Vol. 26). En 1984 profundizó en este análisis en *Enseñanza de las Ciencias*, en un artículo titulado "El papel de la Matemática en el proceso educativo inicial". En él Miguel exponía su visión plural de la Matemática como *una ciencia con sus fines propios; un arte que consigue, al menos como premio añadido en su esfuerzo por alcanzar sus objetivos específicos, la creación de estructuras mentales profundamente bellas; y un instrumento poderoso de exploración y transformación del universo*. La Matemática como arte, su profundidad, su poder y su belleza: así vivía y transmitía Miguel la Matemática.

Desde esta visión hacía una crítica a la forma y el contenido de los programas de los años 80 y advertía de los males que se deberían tratar de evitar en una futura reestructuración de la enseñanza. Consideraba que había *una notable desviación del objetivo principal de las matemáticas, que consiste en saber resolver problemas que puedan resultar adecuados e interesantes, una ausencia de espíritu activo, de espíritu lúdico, de conexiones con el mundo real de los niños y sus intereses, un énfasis excesivo y perjudicial en nombres y distinciones con merma de lo que es mucho más importante, la imagen, la intuición, los automatismos operativos*. En cuanto al contenido consideraba que había exceso de conjuntos y de Álgebra y que faltaban contenidos geométricos interesantes, conexiones y aplicaciones a otras ciencias. Criticaba la formación inicial del profesorado, tanto de Primaria como de Secundaria, los libros de texto, los controles y exámenes que impedían un proceso verdaderamente formativo. Y proponía una selección de contenidos que contemplase varios aspectos: un bagaje mínimo necesario para desenvolverse en la sociedad y la presentación de la Matemática como ciencia, como arte y juego y como actividad humana.

> *Criticaba la forma y al contenido de los programas de los años 80 y consideraba que había* una notable desviación del objetivo principal de las Matemáticas, que consiste en saber resolver problemas que puedan resultar adecuados e interesantes, una ausencia de espíritu activo, de espíritu lúdico, de conexiones con el mundo real de los niños y sus intereses (...).

Pero Miguel era un hombre de pensamiento y acción, que no se conformaba con analizar críticamente o proyectar, sino que trataba de dar vida a sus ideas, solicitando colaboración cuando era necesario. A mitad de los 80 tuvo la ocasión de introducir en la enseñanza Secundaria nuevos contenidos y metodologías en la línea antes señalada, cuando la Editorial Anaya le propuso la tarea de realizar, en colaboración con José Colera y Adela Salvador, una colección de libros de texto para BUP y COU. Aquellos libros produjeron un giro importante en la presentación de la Matemática y su estilo lo siguieron

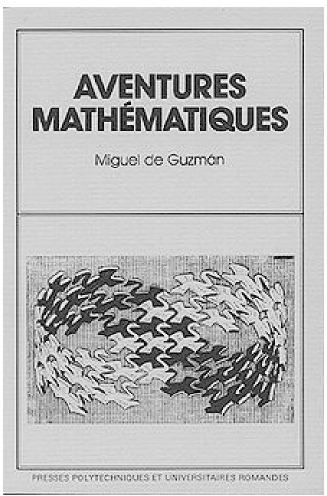
Mª Luz Callejo de la Vega
Instituto de Estudios Pedagógicos Somosaguas

otros autores y editoriales.
Para entonces ya había publicado algunas de sus obras dirigidas a los más jóvenes:

> Desde hace muchos años viene siendo una de mis grandes satisfacciones estar en contacto con los más jóvenes, directamente o bien mediante obras escritas, para tratar de despertar y encaminar su posible entusiasmo por la Matemática compartiendo con ellos el que yo siento. Esto me ha llevado a examinar muchos aspectos del aprendizaje de la Matemática, en algunos casos de gran amplitud y en otros sobre temas muy específicos.

Así presentaba Miguel el apartado *Pensando sobre educación matemática*, del CD-Rom *Pensamientos en torno al quehacer matemático*, que distribuía gratuitamente a quien se lo pidiese, a cambio de una contribución solidaria, que Miguel no controlaba, a alguna ONG.

Son varias sus obras para niños o jóvenes. La primera en el tiempo fue *Mirar y ver. Nueve ensayos de geometría intuitiva*, publicada en 1976, en un momento en que la Geometría prácticamente había desaparecido de los programas. En *Cuentos con cuentas* (1984) invitaba a niños a partir de 12 años a aprender y comunicar la Matemática a través del juego y la belleza. *Aventuras matemáticas* (1986) ha sido traducida al portugués, francés, finlandés y chino; la componen 13 ensayos redactados de forma ágil, amena y atractiva, donde expone de forma fácil ideas complejas y profundas y solicita una implicación activa del lector; cada ensayo termina con unas notas en las que desentraña la profundidad de lo que se ha hecho y descubre el lado humano de esta ciencia. *Para pensar mejor* (1991) es un ejercicio de introspección en el que muestra cómo algunos de los rasgos de la creatividad y de la resolución de problemas que se presenta en el quehacer matemático pueden ser útiles en muchos otros campos en los que la mente humana desarrolla su actividad.



También publicó junto con Baldomero Rubio obras sobre Análisis matemático dirigidas a estudiantes universitarios. Para éstos y los de Bachillerato escribió *El rincón de la pizarra* (1996), tratando de transmitirles elementos de carácter intuitivo y visual que se suelen utilizar en el quehacer matemático y que raramente se explicitan.

En *La experiencia de descubrir en Geometría* (2002) trata de nuevo de recuperar el carácter formativo de esta rama de la Matemática, que apasionaba a Miguel y que impregnó también su dedicación al Análisis, con 13 ensayos acompañados del trasfondo histórico y humano que han caracterizado sus escritos. Lo hace incorporando las herramientas que proporcionan los programas de cálculo simbólico y de Geometría interactiva. Miguel ha sido pionero en la integración de este tipo de programas, que liberan de tareas mecánicas y ayudan a experimentar, conjeturar o generalizar, al tiempo que ha advertido de sus posibles riesgos.

Compromiso con la mejora de la educación matemática

Pero Miguel sabía bien que además de disponer de buenos programas y materiales didácticos, había que salvar barreras entre países del norte y del sur, entre distintas comunidades de matemáticos y entre los estudios de los niveles secundario y terciario, para ofrecer una educación matemática de calidad para todos. La presidencia de la *Comisión Internacional de Educación Matemática (ICMI)* le ofreció un lugar destacado para exponer estos problemas y algunas iniciativas.

En 1990, en la Asamblea General de la Unión Matemática Internacional (IMU) celebrada en Kyoto (Japón), Miguel fue elegido Presidente de la ICMI para el período 1991-1994 y fue reelegido para el mismo cargo en 1994 en la Asamblea de la IMU en Zurich para el período 1995-1998. Como presidente de dicha comisión tuvo un papel decisivo para que se celebrase en Sevilla el ICME 6 en 1996.

En Kyoto, como candidato, disertó sobre lo que es la divulgación matemática y el papel que en ella tienen los juegos. En Québec (1992) estimuló a la comunidad matemática a ser solidaria, de modo que los países más desarrollados ayudasen a aquellos otros que tienen menos oportunidades para la cultura y la educación. La Comisión decidió proponer la realización de un Proyecto de Solidaridad del que se fueron derivando unas cuantas acciones. Miguel por su parte apoyó la creación en España de *Cooperación Universitaria Española (CUES)*, ONG que ha promovido y realizado varias maestrías relacionadas con la Matemática y la educación matemática en países de Latinoamérica como El Salvador y Perú.

Las relaciones poco fluidas entre las distintas comunidades de matemáticos fue un tema que preocupó a Miguel; en 1996, con ocasión del ICME celebrado en Sevilla presentó sus ideas sobre este asunto. Pero sobre todo hizo de puente en España entre la comunidad matemática universitaria a la que pertenecía, y la de didactas y de profesores de matemáticas. Miguel apoyó decididamente la investigación en Didáctica de las matemáticas dirigiendo u orientando Tesis doctorales, presidiendo o formando parte de tribunales, y promovió en la Universidad Complutense la creación de un título de Experto en Educación matemática. También estuvo siempre dispuesto a trabajar con grupos de profesores de Secundaria que solicitaran su colaboración para impregnar de profundidad y belleza, de espíritu activo, lúdico y heurístico la enseñanza de las matemáticas. No tenía pereza para viajar y trabajar intensamente durante una semana en Burgos o en Bilbao, ni para cruzar el Atlántico y acudir a los seminarios que anualmente celebraba la *Olimpiada Matemática Argentina* (OMA), ni para acudir a cualquier Centro de Profesores de cualquier lugar de España que le pidiese alguna intervención. Siempre dispuesto a colaborar, Miguel era asequible y generoso y sabía aunar voluntades buscando la mejora de la educación matemática. En el año 2000, año mundial de las matemáticas, consideraba que los dos aspectos antes mencionados eran los dos problemas fundamentales que tenía que afrontar la ICMI. Del último citado decía[2]:

> Ha sido una postura tradicional por bastantes años que la comunidad de quienes se dedican a la investigación (profesores universitarios especialmente) hayan mirado las cuestiones pedagógicas teóricas y prácticas, que preocupan profundamente a otro segmento importante de la comunidad matemática (como son los matemáticos que investigan en los procesos del aprendizaje matemático o quienes se preocupan principalmente de desarrollar lo mejor posible sus tareas diarias como facilitadores de este aprendizaje a cualquier nivel) con cierto desdén, considerando tal vez que tales estudios y ocupaciones constituyen un campo de segunda o tercera categoría en el que es muy fácil decidir cuáles son las opciones adecuadas en cada momento, y en las que cualquiera que haya ejercido como profesor durante unos cuantos años está tan autorizado como cualquiera para emitir una opinión válida.

En el Congreso Internacional de Matemáticas (ICM) de Berlín (1998) analizaba las dificultades que se les suelen presentar a los estudiantes de todas partes del mundo en el paso desde la enseñanza secundaria a la universidad en lo que al estudio de las Matemáticas se refiere. Pero cuando Miguel detectaba un problema proponía una solución y junto con otros compañeros diseñó una asignatura llamada *Laboratorio de matemáticas* de *nivel 0,* eminentemente práctica, que pretendía ayudar a los estudiantes que entraban en la Facultad para introducirse más eficazmente en la actividad matemática.

Talento matemático

En repetidas ocasiones Miguel señaló no sólo la necesidad de presentar a los más jóvenes un rostro más amable y atractivo de la matemática, sino también que en nuestro país se prestara atención al talento matemático que a veces se puede detectar fácilmente en una edad temprana. Una de ellas fue en las VI JAEM celebradas en Badajoz en 1993. Tras realizar múltiples gestiones infructuosas, en 1998 la Real Academia de Ciencias puso en marcha un proyecto piloto, en la Comunidad de Madrid. que venía a dar una respuesta inicial a esta necesidad; en el año 2003 han comenzado otros similares en Cataluña y Burgos. Precisamente la víspera de su muerte, Miguel planificaba desde el hospital la preparación de la prueba de selección del próximo curso. En el ICME 10 que se celebrará en julio en Copenhague, estaba previsto que Miguel interviniese sobre este tema: *Fostering mathematical talent among young children in Spain* era el título de su ponencia.

Estas líneas han querido ser un tributo a alguien que ha tenido una profunda influencia en la educación matemática en España en las últimas décadas, dando sólo unas pinceladas de una vida y una obra extraordinariamente fecundas, parte de la cual puede consultarse en su página web, desde la que Miguel trataba de poner generosamente al alcance de todas y todos sus ideas y materiales.

La extraordinaria calidad humana de Miguel unida a su gran prestigio profesional en el campo de la Matemática, han hecho posible tender puentes entre distintas comunidades que se dedican a la Matemática, ha contribuido a cambiar la visión formalista de la Matemática y su enseñanza que predominaba en los años 80, ha hecho más presente y visible los esfuerzos realizados en el campo de la educación matemática en España en el panorama internacional y ha impulsado proyectos en línea de solidaridad. Pero algunos de los aspectos que Miguel señalaba en 1983 como necesitados de transformación quedan aún pendientes, como la mejora de la formación inicial del profesorado de todos los niveles, incluido el universitario, o la formación permanente del profesorado de modo que pueda abordar retos educativos como la diversidad del alumnado. Así lo señalaba Miguel en su intervención en la Jornada dedicada a la Celebración del Año Mundial de las Matemáticas que tuvo lugar en el Congreso de los Diputados.

La comunidad que se dedica a la educación matemática ha perdido a un gran hombre, un gran apoyo, una referencia clara y un excelente profesional. Quienes hemos tenido la suerte de relacionarnos más estrechamente con Miguel recibiendo orientación, estímulo y apoyo y participando en sus proyectos, hemos perdido además un MAESTRO, con mayúsculas, y un amigo entrañable. ■

NOTAS

1 La aportación de Miguel de Guzmán a la Matemática puede verse en el artículo escrito por E. Hernández y F. Soria para el boletín del ICMI

2 Cf.: “El sentido del ICMI hoy” en: MARTINÓN, A. (ed): *Las Matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos,* Nivola, Madrid, 2000.

A Miguel de Guzmán

Estimado Miguel:

Con tu inesperado fallecimiento nos dejas muy solos, pero enriquecidos con el legado de tu obra, de tu pensamiento y de tu amistad. Hoy, en esta carta escrita al cielo, compartida con los lectores de SUMA, me gustaría evocar lo que nos has dejado como herencia, todo aquello sobre lo cual pivotará vivo el recuerdo de tu persona, en la añoranza de tus ausencias. Si, ausencias en plural porque habrá varias. Hubo en ti diversos Migueles *y por tanto es natural que hoy nos quede de tí una visión poliédrica.*

El Miguel-familiar fue para todos los suyos un excepcional esposo y padre. Tus sentimientos más nobles te permitieron vivir una dichosa vida familiar. Muy a menudo me habías comentado las actividades solidarias de tu querida esposa Mayte en Brasil y me relatabas con orgullo los avances profesionales de tus queridísimos hijos en Arquitectura y Medicina. El Miguel-amigo fue para todos nosotros (y este nosotros incluye a muchos) un referente. Siempre aliado al diálogo, a compartir ideas y experiencias, a ayudar y colaborar...

El Miguel-solidario fue y es un ejemplo a seguir. Tus convicciones éticas y tu fé anclada en la generosidad te llevaron a trabajar en acciones solidarias muy diversas. Recuerdo lo que te gustó colaborar en El Salvador, o crear el fondo de solidaridad ICMI, u ofrecer tu rico web al profesorado. Muchas veces fuimos juntos a Argentina a colaborar con la Olimpíada Matemática Argentina y tuve ocasión de ver tu implicación personal en ayudar, a través de las matemáticas y la formación, al avance y al progreso de aquella querida nación argentina.

El Miguel-matemático partió de una sólida formación intelectual, del referente directo que fue nuestro común amigo Alberto Dou, de las vivencias doctorales en Chicago con tu admirado director Calderón y de una mente especialmente creativa. Ya sea en el Análisis Matemático en el que has creado escuela, o en tus últimos años más dedicado a la Geometría, siempre llevabas, con la emoción propia del joven investigador, ideas nuevas y nuevos problemas a desarrollar. No recuerdo ni una sola ocasión en la que no me explicases cual era el último teorema que acababas de demostrar o que pretendías encontrar. *Incluso ahora habías empezado con éxito tus investigaciones en el campo del* tensegrity-*geométrico, algo que en los tres últimos encuentros me describías con pasión.*

El Miguel-profesor demostró tener especial capacidad y sensibilidad para hacer importantes contribuciones a la mejora de la enseñanza secundaria y universitaria, de formación de profesores y de captación de nuevos talentos. He tenido la suerte de verte actuar en todas estas facetas: discutiendo problemas con bachilleres olímpicos, hablando de metodología didáctica con futuros licenciados, ayudando a jóvenes profesoras y profesores a conocer innovaciones internacionales, estimulando a jovencísimos niños y niñas a ser matemáticamente activos... y siempre con entusiasmo, con firme admiración por la belleza matemática y con tu lucha por una enseñanza mejor...

El Miguel-escritor nos deja una gran colección de artículos y grandes libros. Involucrado también en libros de texto de Bachillerato, supiste como nadie combinar libros de alto contenido matemático con libros de divulgación que siempre tuvieron a la resolución de problemas como estandarte. Amante de revestir los enunciados con aventuras o ranas saltarinas, tu estilo amable en el contar y tu magistral ingenio para resolver, nos permitirá durante muchos años pensar mejor...

El Miguel-conferenciante ha prodigado por toda España, y por muchos lugares del mundo, este arte de seducir matemáticamente, contando teoremas o reflexionando sobre innovaciones, o sobre ética científica, o sobre historia... pero siempre buscando el interés de la audiencia sin renunciar por ello al rigor intelectual.

El Miguel-impulsor ha generado siempre iniciativas nuevas, programas solidarios, programas internacionales culminados en tus ocho años como presidente de ICMI y numerosas iniciativas nacionales que la inmensa mayoría de los lectores de SUMA han podido ver o compartir...

Y en la primavera del 2004, de repente, se nos han ido para siempre, todos estos Migueles. Todos tenemos motivos para añorar a uno o a todos ellos a la vez. Te lloran y te recuerdan, tus familiares, tus amigos, tus colegas, tus discípulos, tus lectores, tus seguidores... todos los que tuvimos en alguna ocasión, o durante muchos años, el privilegio de compartirte. Nos quedan ahora muchas ocasiones para remirar fotos, releer libros, recordar anécdotas, recordar vivencias... y decirte desde la más profunda sinceridad: gracias Miguel por tu vida, por tu obra y por tu amor en todas sus manifestaciones.

Ya en el cielo de los profesores de matemáticas buenos, con Gonzalo Sánchez y con Luis A. Santaló y tantos otros, que nos sigáis iluminando el camino.

Hasta siempre. Claudi. ■

Claudi Alsina
Universidad Politécnica de Barcelona

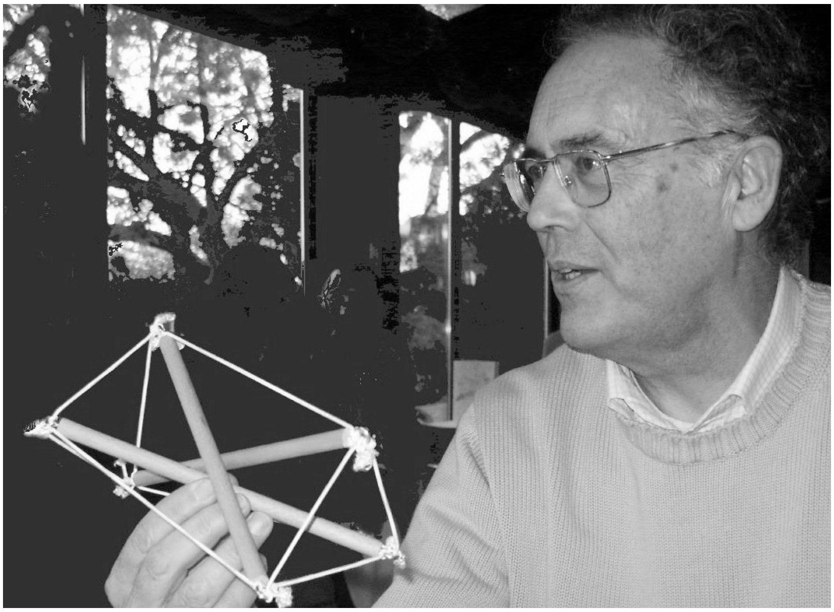


Foto: A.C. Casal

Enseñar a pensar en armonía: de los pitagóricos a los fractales*

A los dos días del fallecimiento de Miguel de Guzmán, unas páginas más atrás de su nota necrológica (*El País*, 16 de abril de 2004) aparecía la programación de los Cursos de Verano de la UIMP anunciando el que ya no podrá dirigir *Usos matemáticos de Internet*, entre los Cursos de formación del profesorado de enseñanza secundaria. Un hecho muy representativo de su gran actividad hasta el último momento, de su preocupación y dedicación por la enseñanza de las matemáticas y de su abierto talante de hombre de su tiempo.
Probablemente, la figura de Miguel de Guzmán sea conocida en numerosos ambientes sociales y mediáticos por sus libros y por haber constituido un punto de referencia en los últimos veinticinco años en todo lo relativo a la enseñanza de las matemáticas. Pero su aportación al desarrollo de las matemáticas en nuestro país va más allá.

El programa de la Real Academia de Ciencias *Detección y estímulo del talento matemático*, que había puesto en marcha en el 2000 con el aliento de su desaparecido Presidente A. Martín Municio y el patrocinio de Vodafone, no hacía más que crecer, ampliándose a otras comunidades y comenzando a dar frutos tangibles, entre otras cosas por los galardones internacionales recibidos por algunos de esos jóvenes.

Su activa toma de posición ante la grave degradación de la preparación en matemáticas de los jóvenes le había conducido hasta la necesaria revisión de los programas de formación de los maestros en los que han ido disminuyendo de manera alarmante los contenidos de matemáticas. Sin embargo, su cercanía a la enseñanza secundaria comenzó en los ochenta al escribir una serie de libros de texto de bachillerato que instauraron un estilo ameno de introducir la matemática. Desde entonces multiplicó su presencia en revistas y reuniones de las distintas sociedades de profesores de enseñanza de matemáticas, a quienes, por cierto, no siempre se les ha reconocido suficientemente su participación en el alto nivel alcanzado por la matemática española de nuestros días.

> *Miguel defendía una visión íntegral de la matemática, sin renunciar a lo lúdico, que iba más allá de la que aparecía en los programas oficiales.*

* Una pequeña variación de ese articulo apareció publicado el 28 de abril en *El País*.

Jesús Ildefonso Díaz Díaz
Real Academia de Ciencias.
Universidad Complutense de Madrid.

Miguel defendía una visión íntegral de la matemática, sin renunciar a lo lúdico, que iba más allá de la que aparecía en los programas oficiales de enseñanza, en cualquiera de sus niveles. Así, comenzando con *Mirar y Ver* (1977) produjo una serie de libros que se ocupaban y hacían fácilmente asequibles temas de una gran belleza e interés marginados en esos momentos: *Aventuras matemáticas* (1987), *El rincón de la pizarra* (1996), *La experiencia de descubrir en geometría* (2002) y muchos otros. Varios de esos libros eran fruto de llevar a la práctica metodologías innovadoras en la universidad y en otros contextos. También escribió textos universitarios, que aunque más ortodoxos siempre contenían visiones muy originales de temas clásicos: *Ecuaciones diferenciales ordinarias* (1975) y *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias* (1978), este último con I. Peral y M. Walias, y la serie de libros con su primer alumno de doctorado y entrañable amigo Baldomero Rubio *Integración: Teoría y Técnicas* (1979), *Problemas, conceptos y métodos del Análisis Matemático* (1990-1993).

Su formación humanista como filósofo (Munich, 1961, UCM 1965) previa a su formación como matemático (UCM 1965), algo muy excepcional entre los matemáticos, hacía de él un científico con una dimensión adicional y un punto de encuentro entre *las dos culturas*. Nunca dejó de lado esa inquietud que le llevó a producir ensayos universalmente valiosos como *Para pensar mejor* (1991) y textos en los que analizaba conjuntamente sus dos grandes pasiones como, por ejemplo, el discurso de inauguración de 1993 de la Real Academia *El pensamiento matemático, eje de nuestra cultura*. Temas como los pitagóricos, Descartes o Wittgenstein eran objeto frecuente de su consideración. No es pues nada extraño que en el tercer Congreso Europeo de Matemáticas (Barcelona 2000) recibiese el encargo de presidir una mesa que analizó hacia donde va la matemática y cuales son sus relaciones con la cultura y las humanidades.

El impacto de sus libros no se ha limitado a nuestro país y así muchos de ellos fueron traducidos a otros idiomas. Un colega me recuerda que encontró, en Shangai, la versión china de sus *Aventuras matemáticas*. Entre 1991y 1998 ocupó la presidencia de la *Commisión Internacional sobre Educación Matemática*, un cargo de responsabilidad mundial. Ningún matemático español ha ocupado nunca una posición de esa envergadura.

Desde sus inicios, su gran versatilidad le permitía estar al tanto de los progresos de los ordenadores a los que él sacaba mucho partido como usuario. Solía incorporar a sus libros las pistas de cómo visualizar las matemáticas con programas de fácil manejo. Fue defensor del formato digital (solía acompañar sus libros con un disquete o CD) y mantenía una página web, aún en vigor, **http://ochoa.mat.ucm.es/~guzman/** en la que obsequiaba al visitante con una inmensa cantidad de material de un alto valor.

La faceta investigadora de Miguel de Guzmán se inició en torno al Análisis Armónico: una amplia parcela de las matemáticas que reposa en la capacidad de poder escribir una función como suma de funciones sencillas (senos y cosenos) con adecuadas periodicidades que caracterizan a esa función. Estimulado por Alberto Dou, se formó en la universidad de Chicago bajo la tutela de dos nombres míticos de la matemática del siglo XX: Antony Zygmund y Alberto Calderón. Además de varias publicaciones en revistas especializadas, son de destacar dos monografías sobre el tema en Springer-Verlag (Berlín 1975) y North-Holland (Amsterdam, 1981) que significaron las primeras publicadas en series internacionales de reconocido prestigio por un autor español. Recogían resultados suyos así como los de numerosos alumnos de doctorado a los que él facilitó el contacto con la escuela norteamericana. Varios de ellos son hoy catedráticos de universidad (una buena parte en la Universidad Autónoma de Madrid). De hecho, su discurso de ingreso en la Academia en 1983 versó sobre ese tema: *Impactos del Análisis Armónico*.

En un periodo posterior, entre 1984 y 1993, se interesó por los fractales dirigiendo varias tesis doctorales sobre el tema que culminaron con el libro, en colaboración con M. A. Martín, M. Morán y M. Reyes, *Estructuras fractales* (1993). Guzmán conocía muy bien la teoría geométrica de la medida y el análisis real y complejo que había dado lugar a ese tipo de conjuntos (Weierstrass 1872, von Koch 1906, Julia 1918) mucho antes de que Benoit Mandelbrot explotase las capacidades de los ordenadores para representarlos por medio de iteraciones sucesivas de expresiones algebraicas sencillas.

Quizás por su afición a llevar a la práctica sus ideas, incluso en modelos geométricos para los que se entretenía en hacer bellas maquetas (al igual que su admirado Pedro Puig Adam), la última etapa de Guzmán se centró en las *tensegridades*: estructuras en las que una serie de puntos están unidos por unos cables elásticos, algunos de ellos inmersos en unas varillas rígidas, dando lugar a estructuras estables de singular belleza y con una gran economía de medios. Pese a haber nacido en el mundo de la escultura, esas estructuras tienen analogías con el aparato óseo de muchos seres vivos y su aplicabilidad y relevancia se ha extendido desde las telecomunicaciones hasta la medicina. Guzmán tenía prácticamente terminada una monografía que sin duda verá la luz. Además había construido numerosas esculturas meritorias de exposición.

Una figura como la suya no puede ser patrimonio de unos pocos, ni siquiera de un único campo de actividad. Por eso, si usted, lector, tiene curiosidad de cómo es posible acercarse a las matemáticas no triviales de una manera sencilla, asequible y no excluyente, si tiene deseos de ampliar su cultura, si desea que sus hijos, familiares y amigos se curen de un rechazo visceral a las matemáticas, permítame que le aconseje que lea, y anime a que lean, a Miguel de Guzmán. ■

No digas que fue un juego*

Resulta esclarecedor para acercarse a la figura de Miguel conocer su carrera como estudiante. Estudió Ingeniería en Bilbao (de 1952 a 1954) y Humanidades en Orduña (Vizcaya, 1954-1958). Acabó los estudios de Filosofía en Munich (1961) donde se doctoró y completó estos estudios junto a los de Matemáticas en la Universidad de Madrid (1965). Se doctoró en Matemáticas en Chicago en 1968.

Miguel de Guzmán quiso siempre comprender el mundo en que vivía y aportar su grano (o su saco de granos) para intentar modificarlo, o al menos hacerlo más agradable, tanto a los que le rodeaban como a aquéllos a los que fue a buscar para prestarles ayuda. Vio en su afición y habilidad por las Matemáticas una oportunidad para realizar su empeño. Y lo hizo desde las dos vertientes, la del profesor y la del maestro. Primero como investigador, y después como introductor, consiguió que los matemáticos españoles reaparecieran en el panorama científico internacional después de un muy largo letargo. Voces más autorizadas se encargan de situar su figura académica. Desde el punto de vista educativo es el papel de impulsor el que yo quiero destacar. No sólo lo fue en el plano universitario, sino que quiso asumir ese papel en las enseñanzas escolares. Interesado por la enseñanza de las matemáticas (sus clases en la facultad ya eran *diferentes* con un estilo que bien refleja su libro *Mirar y ver*) a partir de mediados de los ochenta pone en marcha todo un programa de divulgación y puesta a punto del profesorado de enseñanza secundaria: la elaboración de libros de texto de bachillerato de BUP y COU (en colaboración con José Cólera y Adela Salvador) donde plasma sus ideas y su pensamiento metodológico; la aparición de su querido y popular *Cuentos con cuentas* (donde *su a partir de 12 años* es toda una declaración de intenciones); sus *Aventuras matemáticas* y su *Para pensar mejor* que serán en España el germen de lo que hoy se recoge en los currículos como *Resolución de problemas*; sus múltiples conferencias para la formación del profesorado; la participación y organización de cursos, donde él trataba siempre de actualizar contenidos y visualizar presentaciones con la idea de hacernos más familiares y cotidianas las Matemáticas, y que nosotros las acercáramos a nuestros alumnos. Juegos matemáticos, fractales, el cálculo diferencial, la geometría, el uso de Internet... fueron objetos de su mirar y ver, y enseñar a hacerlo a otros.

> *Miguel de Guzmán quiso siempre comprender el mundo en que vivía y aportar su grano (o su saco de granos) para intentar modificarlo.*

* Quiero agradecer las notas biográficas que me han enviado los profesores Eugenio Hernández y Fernando Soria del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid. Sin ellas —de verdad, Eugenio— no habría podido ordenar este relato.

Jesús García Gual
IES Conde de Orgaz
Madrid

Entre 1991 y 1998 fue presidente del ICMI y en 1993 fue nombrado miembro de la Real Academia de Ciencias. Son pues años de reconocimiento de su trayectoria ambivalente de educador y científico de primera fila que mantuvo hasta el último día.

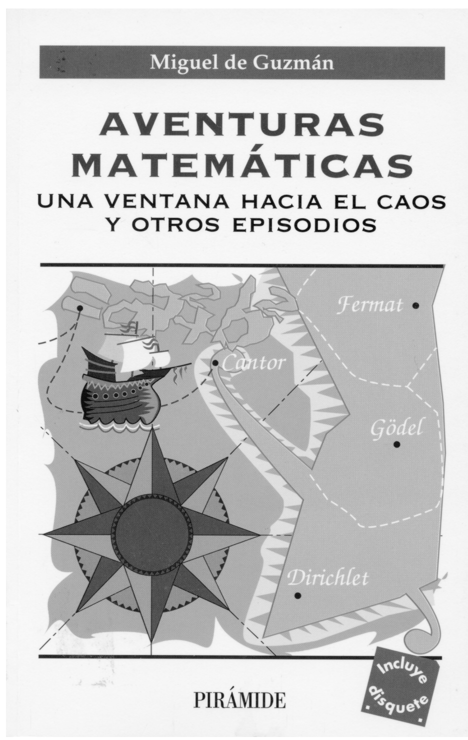
Comprendió (sólo miró y vio) que el problema de la enseñanza de las Matemáticas empezaba desde la escuela primaria. El currículo matemático de los futuros maestros de matemáticas se ha reducido de forma notoria, llegando a ser casi testimonial. Insuficiente para transmitir el encanto y la disciplina del pensamiento matemático. Tampoco en la enseñanza secundaria las cosas ruedan demasiado bien, si bien hay que reconocer que es un sector más autodidacta, y ha habido un florecimiento de asociaciones de Profesores de Matemáticas con revistas de buen nivel científico y pedagógico. Los licenciados de Matemáticas tienen unos conocimientos más abstractos y completos, pero la universidad, más preocupada por el reparto horario de los departamentos que por la coherencia de unos estudios, sigue sin conceder importancia a la metodología propia y ajena (es significativo el desentendimiento general que ha habido con las reformas de los contenidos de las enseñanzas no universitarias, al fin y al cabo secundarias, en tantos años). El Certificado de Aptitud Pedagógica (CAP), que acaba este curso, no ha cumplido más que un papel burocrático de capacitación legal, que no de formación. El futuro, con esa condena de dos años más, post licenciatura, no parece sino el reparto salomónico y lucrativo del profesor en ciernes (vosotros tocáis el hemisferio derecho y nosotros el izquierdo).

Miguel tenía otras ideas, creía que al menos el profesor de Matemáticas debía estar convencido de la belleza y utilidad de éstas. Había que formarle en la curiosidad y la búsqueda organizada de la demostración, haciendo que ésta fuera dentro de lo posible visualizada (aunque muchos de sus trabajos se encuadran dentro del Análisis, siempre aparece en ellos el espíritu geométrico). Existe una metodología matemática y ésta se puede ejemplificar con los tópicos usuales de las matemáticas escolares, incluyendo algunos más o menos nuevos, y siempre aprovechando el desarrollo de las nuevas tecnologías. Hace falta contar con equipos abiertos de profesores formadores (universitarios, de enseñanza secundaria y maestros) que coordinados desarrollen un programa coherente de ejemplificación. ¡Los hay!

En esta línea y siguiendo ejemplos de otros países consiguió Miguel en 1998 el apoyo de la Real Academia de Ciencias para organizar un programa de estímulo del talento matemático (ESTALMAT) para alumnos de 12 y 13 años de la Comunidad de Madrid, que durante dos años iban a dedicar 3 horas de las mañanas de los sábados durante el curso escolar a la afición (creativa y recreativa) de las Matemáticas. Contó para el primer año con siete profesores del entorno de sus ex–alumnos. Este proyecto (con el respaldo económico de una compañía de telecomunicaciones) continúa hoy en Madrid con trece profesores y se ha extendido este curso a Cataluña y Burgos. El mismo día de su muerte, en el hospital, Guzmán daba instrucciones para la reunión de los profesores de los diferentes equipos que iba a tener lugar el fin de semana.

Miguel tenía otras ideas, creía que al menos el profesor de Matemáticas debía estar convencido de la belleza y utilidad de éstas. Había que formarle en la curiosidad y la búsqueda organizada de la demostración, haciendo que ésta fuera dentro de lo posible visualizada.

Miguel nos ha dejado el ejemplo del hombre que no sólo sabe hacer Matemáticas, sino que comprendiendo el papel cultural y de desarrollo que conlleva la Ciencia, ha querido hacernos partícipes de esa riqueza y libertad que produce el Pensamiento Humano. Si además era un hombre bueno, podemos afirmar haber conocido a un sabio. ■



Miguel de Guzmán, maestro de matemáticos

En Madrid se nos murió
Miguel de Guzmán,
a quien tanto queríamos.

Juan Luis Vázquez
Universidad Autónoma de Madrid.

Miguel de Guzmán Ozamiz ha sido durante los últimos 30 años una referencia constante en la vida matemática española, y sobre todo en la madrileña. El vivió de forma entregada y auténtica la emoción de estudiar, crear, enseñar y divulgar las matemáticas, y varias generaciones de profesionales hemos tenido una relación distinta con nuestra difícil y hermosa profesión, y también una relación distinta entre nosotros, gracias a él, a su gusto y pasión por las matemáticas y a sus notables cualidades humanas. Era emocional, instintivo y comunicativo como somos los españoles, pero también era generoso, constructivo y pronto en el elogio como no solemos ser por desgracia. A una temprana edad nos ha dejado y ha pasado a ser parte de nuestra mejor memoria colectiva; no le olvidaremos. En el imaginario de las gentes humanistas, el recuerdo por parte de las generaciones que nos siguen es nuestra cuota de inmortalidad.

I

Me corresponde glosar en unas páginas su contribución a la investigación en España en estos años. Empezaré desde un poco más lejos, pues otros autores glosarán aspectos más próximos a su persona. Es una opinión ampliamente compartida que el desarrollo de las ciencias en nuestro país ha sido lamentablemente oscuro en siglos pasados por razones que no están del todo claras, y en todo caso la ciencia palidece si se la compara con nuestra preeminencia cultural en el mundo de las letras, el teatro, la pintura o el canto, culto o popular. A principios del siglo XX hubo una regeneración de los valores educativos y científicos en España y se vieron notables progresos que refleja el nombre insigne de Julio Rey Pastor. Pero los tristes azares de nuestra historia echaron abajo esta evolu-

> *A principios del siglo XX hubo una regeneración de los valores educativos y científicos en España y se vieron notables progresos que refleja el nombre insigne de Julio Rey Pastor. Pero los tristes azares de nuestra historia echaron abajo esta evolución, Rey Pastor y Santaló emigraron y durante algunos decenios la investigación matemática española malvivió.*

ción, Rey Pastor y Santaló emigraron y durante algunos decenios la investigación matemática española malvivió (con alguna excepción) en un mundo de mediocridad que parecía ser "el sino de la raza". *Que inventen ellos*, había llegado a decir un intelectual sin embargo ilustre.

Hacia 1970 la Universidad española pareció salir vigorosamente de tantos años de sobrevivir en las divisiones inferiores de la ciencia mundial. Yo llegué a Matemáticas tras los estudios de Telecomunicación y quedé inmediatamente cautivado por su espíritu de modernidad, que se traducía en dos cosas: la apertura a las grandes corrientes del estudio y la preocupación por el futuro de un país democrático. En el primer aspecto quiero recordar que estudiábamos los apuntes de clase, pero también por nuestra cuenta, con dedicación y en infinitas horas libres, partes de la obra inmensa de Nicolas Bourbaki, la topología por los hermosos libros de Choquet y Kuratowski, la teoría de conjuntos ZF, el análisis funcional de Yosida, las variedades diferenciables, el análisis de Fourier... por poner ejemplos que recuerdo bien. Tímidamente viajábamos al extranjero para ver fascinados como vivían las naciones vecinas más afortunadas.

Miguel regresa de Chicago a la Universidad Complutense lleno de ideas sobre el mundo que había visto y que comunicó a quienes querían escuchar la buena nueva: el desarrollo de las matemáticas requiere comunicación con los mejores centros y con los especialistas de primera magnitud.

En ese ambiente de apertura a las grandes novedades del mundo exterior, y tras años de estudios satisfactorios acompañados por una serie de profesores entusiastas del saber, se nos planteó a mí y mis amigos la Gran Cuestión para nuestro futuro profesional, cuestión que tanto había preocupado a precedentes generaciones: ¿estaremos preparados para contribuir significativamente a la creación matemática? ¿seremos también en ese futuro lejano un país de investigadores? Pues en 1975 el país no sabía aún si sería un país democrático y la cuestión de la investigación era una gran cuestión abierta. Es casi un milagro, que a los más jóvenes les costará entender, que la respuesta a estos interrogantes haya sido al final tan positiva:

- somos un país democrático más de Europa,
- contribuimos a la ciencia europea de la forma más o menos esperable,
- nuestros investigadores y sociedades juegan un papel importante y positivo en el contexto internacional.

Todos estos aspectos deben un tanto a la perseverante obra de Miguel, como veremos.

II

Es en este contexto en el que cabría situar el comienzo de mi relación con el Departamento de Ecuaciones Funcionales, donde entré el año 1976 y de donde me fui para ser profesor de la Universidad Autónoma de Madrid en 1991. Albert Dou y Miguel de Guzmán reflejaban de la manera más clara las ideas sobre la vida matemática profesional que nos permitirían encarrilar sin sobresaltos nuestras carreras a muchos aspirantes a matemático. Se trata de ideas sencillas para quien ya las practica, difíciles de implantar donde no se conocen, y entonces en España se conocían mal. Yo las resumía a mi modo hace meses en una entrevista para el periódico *El Mundo* bajo el epígrafe. ¿Qué recomendaría a los matemáticos jóvenes? Y decía más o menos:

> Buscar un buen maestro y aprender bien qué es importante y qué no; viajar por todo el mundo con los ojos abiertos; estudiar continuamente, trabajar muy duro; ser individualista para crear y sociable para compartir; tener grandes ideales; disfrutar con el trabajo bien hecho, que es nuestra única real recompensa. Y ante todo una enorme apertura mental, el escenario de la profesión matemática es todo el mundo, no hay matemáticas regionales, y el objeto son todos los teoremas.

A mi me parece ahora que eso es lo que se aprendía de Albert y Miguel en esos tiempos y eso nos bastó. Ellos también dirían que es preciso en todo momento amar al prójimo y uno está de acuerdo. Miguel era muy sociable para explicar, para extender una idea, para cautivar, para emocionar y ese difícil arte siempre me ha impresionado. Vistas de ese modo, las matemáticas no son una profesión para burócratas y eso es lo que Miguel nunca ha sido. Ese magisterio moral se echa de menos.

Miguel nació en 1936 en Cartagena y dicen que tuvo el gusto por las matemáticas desde pequeño. Miembro durante un tiempo de la Compañía de Jesús, que tanta influencia tuvo en la formación intelectual de los españoles en esas épocas, y licenciado en Filosofía en Alemania, se licenció en Matemáticas en la Universidad Complutense en 1965. Fue Alberto Dou quien le orientó a viajar a Chicago, uno de los grandes centros de excelencia de las matemáticas, tras la visita a Madrid de Alberto

Calderón, que tanto influiría en las matemáticas españolas. Allí tuvo el privilegio de aprender de dos grandes maestros, Antoni Zygmund y Alberto Calderón, uno polaco, otro argentino, ambos americanos en el mejor estilo. Eran estrellas de la máxima magnitud en el firmamento matemático y fueron luego maestros de toda una generación de españoles en el área de Análisis Armónico, que fue quizá la primera de las áreas de excelencia de la nueva matemática española, pues bebía de altas fuentes y tenía un magisterio que no es corriente, tanto en EEUU como en España[1].

Doctor por la Universidad de Chicago de la mano de Alberto Calderón en 1968, Miguel regresa a la Universidad Complutense lleno de ideas sobre el mundo que había visto y que comunicó a quienes querían escuchar la buena nueva: el desarrollo de las Matemáticas requiere comunicación con los mejores centros y con los especialistas de primera magnitud. En 1972 era Agregado. Se volcó en sus alumnos, en sus cursos de doctorado y en sus seminarios en los que introdujo las Matemáticas que estaban haciendo en el momento los mejores grupos de analistas de la época, sobre todo en Chicago. Además de los contenidos, Miguel trasmitía con entusiasmo la manera de entender las Matemáticas de una forma profunda, rigurosa y estética. Una componente importante de esta visión era la presencia en Madrid de personalidades matemáticas, a las que se podía *tocar*: Alberto Calderón, Antoni Zygmund, Lennart Carlesson, François Treves, Haim Brezis, etc. El mismo viajaba, en el periodo 1972-1982 fué visitante de University of Chicago, Princeton University, Washington University, Rio de Janeiro, etc.

En resumen, para la nueva generación de la época era una esperanzadora novedad ver que las Matemáticas estaban vivas y que no era utópico comenzar a realizar investigación en España.

III

El primer tema de la investigación matemática de Miguel de Guzmán es, hablando de forma simplificada, la diferenciación de integrales y sus relaciones con el Análisis Armónico y la Teoría Geométrica de la Medida. Tratemos de ver en que consiste el problema: se considera una función f de n variables definida en un dominio Ω y la pregunta es si la media de la integral en un pequeño cubo centrado en un punto x_1 aproxima el valor de $f(x_1)$. Ello es cierto sin duda para funciones continuas, y de fácil prueba; pero las modernas teorías de la Física Matemática exigen un análisis matemático de funciones generales, al menos de funciones en los espacios $L^p(\Omega)$ de Lebesgue. Precisamente un teorema de Lebesgue afirma que para funciones meramente integrables el límite de las medias en cubos de lado tendiendo a cero es el valor de la función, no en todos los puntos pero sí al menos en casi todos los puntos x_1.

Un tema favorito de los expertos de aquellos años ha sido el investigar si se pueden sustituir los cubos por familias de rectángulos y otros conjuntos con cierta geometría invariante. Aparecen temas ligados: diversos teoremas de convergencia, problemas de recubrimiento con elementos de la clase de conjuntos F sobre los que se calculan las medias, propiedades de acotación en espacios de Lebesgue o más generales y el famosísimo *operador maximal* de Hardy-Littlewood asociado a la familia de conjuntos: $M f(x)$ es el supremo de las medias en conjuntos Q de la familia F asociados a Q. Este operador es una estrella de este tipo de análisis funcional por si solo y es importante, por ejemplo, para estudiar la sumabilidad de las series de Fourier en varias dimensiones y la regularidad y otras propiedades de soluciones de ecuaciones en derivadas parciales lineales.

> Differentiation of Integrals in R^n *(1975) y* Real Variable Methods in Fourier Analysis *(1981) de Miguel de Guzmán fueron un hito en la ciencia española y señalaron a los jóvenes investigadores matemáticos españoles el camino hacia la investigación con alta exigencia, que tantos luego iban a seguir.*

Un tema conexo que iba a interesar a Miguel de Guzmán era el de los conjuntos con propiedades especiales. Un conjunto de Kakeya (o de Besicovitch)[2] es un subconjunto de R^n que contiene un segmento de longitud unidad en cada dirección. En 1971 Ch. Fefferman usó estos conjuntos para construir un contraejemplo a la conjetura del multiplicador de la bola en LP, un problema básico del análisis armónico: en dimensión mayor que uno la integral $S_R f(x)$ no converge a f, con f en $L^p(\Omega)$ cuando R tiende a infinito, para ningún p distinto de 2. Mencionamos por último otro gran tema estrella, la teoría de integrales singulares de Calderón-Zygmund.

Los trabajos de Miguel de Guzmán entre 1970-1975 se dedican fundamentalmente al estudio de tales relaciones entre la convergencia de las medias, los resultados de recubrimiento y la acotación de los operadores maximales asociados. Su contribución se concentra en la conocida monografía *Differentiation of Integrals in* R^n, publicado en 1975 en el volumen 481 de las *Lecture Notes in Mathematics* de la Springer-Verlag. El *libro amarillo* proporcionaba un compendio de los resultados clásicos e introducía también los más recientes, algunos de Miguel de Guzmán y ha sido profusamente usado y citado en todo el mundo; la editorial MIR de Moscú lo tradujo al ruso en 1978.

De este periodo data el trabajo de Miguel de Guzmán con R. Coifman publicado en la *Revista de la Unión Matemática Argentina,* vol. 25 (1970-71), pp. 137-143, sobre integrales singulares y multiplicadores en espacios homogéneos. Es un trabajo pionero en un tema que se desarrolló posteriormente.

Completa las obras notables de este periodo el libro *Real Variable Methods in Fourier Analysis* publicado en el año 1981 por la prestigiosa editorial North-Holland. Fue una referencia obligada en los estudios en análisis armónico por muchos años. Los dos libros reseñados de Miguel de Guzmán fueron un hito en la ciencia española y señalaron a los jóvenes investigadores matemáticos españoles el camino hacia la investigación con alta exigencia, que tantos luego iban a seguir.

También pertenecen a este período la tesis doctoral de Baldomero Rubio, que fue coautor de varios libros con Miguel de Guzmán, compañero de tantos años y esfuerzos en el Departamento de Análisis de la Universidad Complutense, y las de Ireneo Peral y María Teresa Carrillo, mis compañeros en la Universidad Autónoma de Madrid. Su seminario fue una fuente de discusión y creación muy conocido y luego imitado.

Fue en esa labor de pionero de las matemáticas que le seguirían donde yo veo los puntos más relevantes de su último decenio como matemático.

IV

En los años 1980 Miguel de Guzmán se interesa por temas de teoría geométrica de la medida. Fruto de ello son varias tesis doctorales por él dirigidas que se plasmaron en un libro sobre las estructuras fractales publicado en Editorial Labor en el año 1993, escrito en colaboración con Miguel Angel Martín, Manuel Morán y Miguel Reyes. Guzmán conocía muy bien la teoría geométrica de la medida y el análisis real y complejo que había dado lugar a ese tipo de conjuntos y propuso profundizar en el conocimiento geométrico-analítico de estos conjuntos, lejos de las presentaciones un poco al uso que inciden en los aspectos visuales menos matemáticos.

La obra matemática que hemos reseñado sucintamente es de una notable calidad y relevancia y tuvo indudable influencia, y esas son las características que me gustaría subrayar y que el lector puede ampliar en las bases de datos fácilmente accesibles. En el cómputo final, no fue Miguel de Guzmán investigador de una profusa obra de investigación, y es justo reconocer que ese privilegio tocaría en suerte a una generación que le seguía en edad y que supo aprovechar los enormes beneficios que legaron los *pioneros*[3]. Fue en esa labor de pionero de las matemáticas que le seguirían donde yo veo los puntos más relevantes de su último decenio como matemático.

V

Con el pasar de los años 1980 la vida matemática española fue cobrando un cierto contenido: buenos resultados y especialistas aún no numerosos pero bien formados, productivos y conocidos por la comunidad internacional. Sería en los años 90 cuando los números crecieron y la presencia de españoles en las mejores revistas y los congresos prestigiosos se hizo rutina. Pero en los tiempos que comentamos, una de las carencias típicas de la vida matemática en España era la ausencia o inoperancia de las organizaciones que representan colectivamente la investigación en España. La labor de Miguel iba a ser continua, práctica y altruista. Relataré algunos hitos.

CURSOS DE EL ESCORIAL. En junio de 1979 se reunía en La Residencia San José de El Escorial el primero de una serie de Congresos sobre Análisis de Fourier que tuvo como conferenciantes a figuras de la talla de A.P. Calderon, R. Coifman, A. Córdoba, Y. Meyer y a S. Wainger. Estos congresos se han convertido en una costumbre que ha venido mostrando a la comunidad internacional el nivel de una de nuestras más brillantes especialidades, que ha dado a generaciones de jóvenes matemáticos españoles lo mejor de lo que se cuece en el mundo. La quinta edición, en 1996, fue celebrada en honor de Miguel de Guzmán, con motivo de su sesenta aniversario. Verá su próxima edición en junio de 2004, organizado por mis colegas de la UAM[4]. Es también de reseñar el conjunto de cursos de verano organizados con la Universidad de Extremadura en Jarandilla de la Vera (Cáceres) destinados a dar a los jóvenes estudiantes doctorales una formación actualizada en las diversas áreas de las matemáticas.

Las sociedades. Como tantos otros matemáticos de la época, Miguel de Guzmán observaba el escaso papel que la Real Sociedad Matemática Española jugaba en la renovación de la ciencia nacional y su espíritu altruista y emprendedor quiso ponerle remedio. Yo fui uno de los miembros iniciales de la Asociación Matemática Española, empresa que no tuvo un éxito inmediato. Pero quiero creer que nos sirvió de ejemplo a quienes fundamos en 1991 la Sociedad Española de Matemática Aplicada, SEMA, que goza de excelente salud y ha querido siempre ser benéfica, sociable y útil; más aún, cuando en los últimos años 1990 la RSME se reconstruyó según parámetros que han tenido un éxito tan notable, muchos vimos reivindicado el viejo intento de Miguel y participamos con entusiasmo.

La ICMI. Siempre activo en los terrenos de la enseñanza que otros glosarán, Miguel de Guzmán fue reconocido entre 1991 y 1998 con la presidencia de la International Commission on Mathematical Instruction, un cargo de responsabilidad mundial; ningún español había ocupado nunca una posición tan relevante. Esa labor fue muy productiva y está hoy consolidada con la presidencia de Tomás Recio, algebrista bien conocido (y ovetense como yo)[5].

Poseía ese espíritu romántico que le llevaba a ver los teoremas no como resultados que hemos de publicar sino como bellezas que hemos de descubrir y admirar, como un juego que es parte del juego de bien vivir.

No es mi papel hablar de su pasión por la educación, por los aspectos lúdicos de las matemáticas, por la divulgación o por la formación de los jóvenes talentos, que tanto ocuparon sus últimos años, así como su enorme esfuerzo por publicar libros de texto o de divulgación llenos de claridad y pedagogía. Mantenía desde siempre una actitud abierta ante el mundo de los ordenadores. Su página web[6] es todo un modelo a seguir, el lector podrá encontrar en ella múltiples ideas y una ojeada sobre una personalidad infatigable.

VI

Miguel tenía algunos defectos pero a mi entender muchas más virtudes. Poseía ese espíritu romántico que le llevaba a ver los teoremas no como resultados que hemos de publicar sino como bellezas que hemos de descubrir y admirar, como un juego que es parte del juego de bien vivir. Sea como sea, había algo que hacía posible olvidar un tanto los intereses personales. Hoy como ayer, ese espíritu de generosidad no puede perderse si queremos ofrecer un buen futuro para las generaciones que nos siguen. Gracias a gente como Miguel, hacer matemáticas en nuestro país fue más fácil para toda una generación y los frutos están ya al alcance de la mano: unas estadísticas de publicación incuestionables, unos especialistas sabios y reconocidos, unas sociedades eficaces y respetadas, unos eventos y relaciones sociales que mejoran paulatinamente.

Como colofón, España ha sido invitada a organizar el Congreso Mundial de Matemáticos del año 2006, justo premio a la visión que algunos supieron tener y a su fe en que el país era perfectamente capaz de realizar el *milagro*. Siempre que se le necesitó, Miguel nos fue sacando del rincón oscuro en que vivían aún nuestras Matemáticas, pero como Moisés tras la travesía del desierto, no le tocará por poco ver la Tierra Prometida del ICM Madrid-2006. Nosotros esperamos verla y tener en esos momentos un recuerdo emocionado de un *mago de las matemáticas*[7] que se nos ha ido. Hasta siempre, maestro. ■

NOTAS

1 Es justo mencionar en este punto a otro gran analista malogrado, José Luis Rubio de Francia, cuyo recuerdo perdura. Quiero recordar con cierta emoción como la vez que hablé en la Academia de Ciencias fue a invitación de Miguel de Guzmán y tras la charla de José Luis Rubio. Como analista de las ecuaciones en derivadas parciales no lineales, yo no trabajé en temas muy próximos a Miguel de Guzmán, pero supo animarme siempre y no recriminarme nunca.

2 Ver por ejempl: http://www.math.ubc.ca/~ilaba/kakeya.html

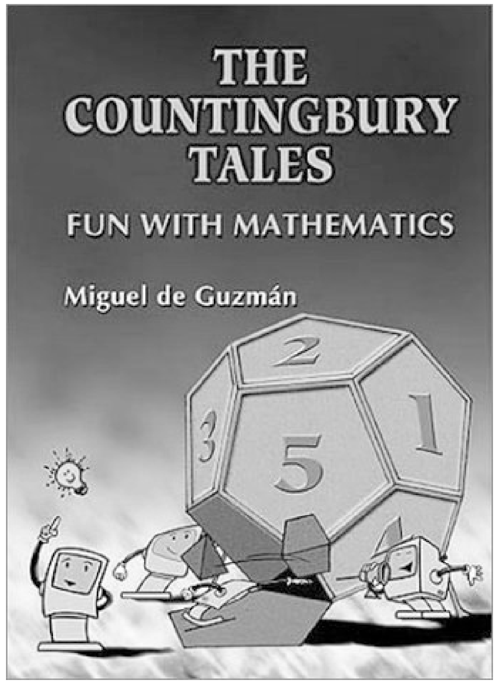
3 Y es justo recordar una vez más que la calidad está en cada joya, no en su número.

4 Ver: http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/soria/Escorial2004.html

5 Ver: http://www.icmi-es.tk/

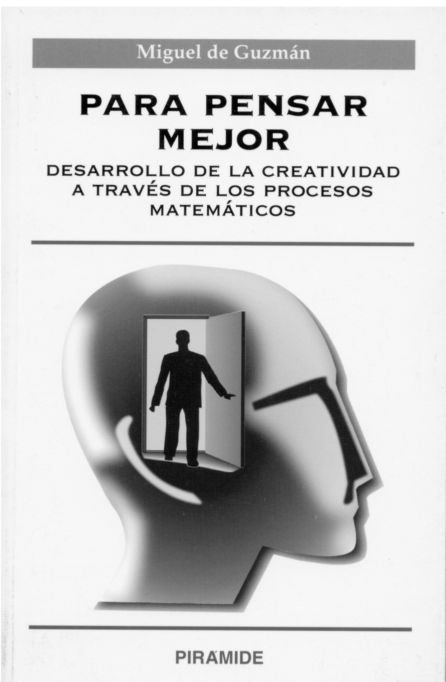
6 http://usuarios.bitmailer.com/edeguzman/InternetMat/guzman110299/guzman.htm

7 El *Mago Goodman* fue un apodo cariñoso y un tanto bromista con que le designaron los alumnos de la UCM en una de las revistas estudiantiles que, ay, no sobrevivieron.



M*d*G

(1936-2004)



SUMA 46
Junio 2004, pp. 23-26

El irresistible encanto de la artesanía

La convincente fuerza de las imágenes y su belleza artesanal son habitual y lamentablemente desaprovechadas en las aulas. Las pruebas visuales no demuestran —eso dice el rigor puritano— pero asientan cimientos, aportan elegancia plástica y ayudan a la motivación. Desde Primaria hasta la Universidad, la enseñanza de las matemáticas está planificada bajo un obsesivo punto de vista que prima lo general sobre lo particular. Sin embargo, una didáctica humanista, que permita al alumnado construir y diseñar, sólo es posible desde un buen conocimiento de las propiedades individuales de los objetos matemáticos.

The convincing strength of the images and their genuine beauty are usually, regrettably, misused in the classrooms. Visuals texts don't prove –that's what puritanical narrow —mindedness claim— but they reinforce their foundations; supply plastic elegance and help pupils get motivated. From Primary to University, Maths teaching has been planned on an obsessive viewpoint that focuses on general aspects rather than on particular ones. Nonetheless, a humanist teaching practice, which allows pupils to build and design, is only possible from a good knowledge of the individual features of mathematical objects.

Abro uno de aquellos libros de tapas duras, texto apretado y de aspecto austero, y abstracto y atractivo diseño en su portada, de la editorial Mir. Encerraban mucha sabiduría matemática. En este caso se trata de V. Lidski y otros*: Problemas de matemáticas elementales.* Lo de *elementales* debe ser porque fueron propuestos a los *graduados de las escuelas secundarias* en los exámenes de ingreso al Instituto Físico–Técnico de Moscú. Leído esto, el título resulta casi ofensivo para lectores y lectoras españoles —si se pueden emplear estas expresiones a propósito de un libro de problemas de matemáticas.

I

En el capítulo de trigonometría encuentro al azar un enunciado de aspecto tolerable. El problema número 551 dice:

Demostrar que

$$cos\frac{\pi}{5}-cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}$$

¿A quién se le ocurrirán estas cosas? Pero el caso es que tanto el $^1/_2$ como el $^\pi/_5$ resultan atractivos, así que pienso un poco: puesto que $^\pi/_5$ es 36º, estamos ante una relación entre los cosenos de 36º y 72º. Si dibujo un pentágono regular y otro estrellado con el mismo centro, tendré una abundante colección de ángulos con estos dos valores. Esto se anima.

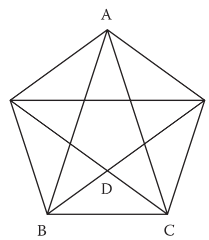


Figura 1

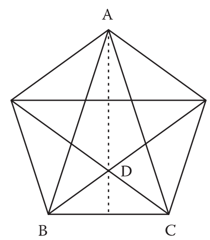


Figura 2

En la figura 1, $\widehat{DBC}$=36º y $\widehat{ABC}$ 72º. Están juntos y podría comparar sus cosenos en los triángulos que resultan al trazar

Ángel Ramírez Martínez
IES Sierra de Guara (Huesca).
Sociedad Aragonesa de Profesores Matemáticas Pedro S. Ciruelo.

la vertical AD (Figura 2), pero las hipotenusas son diferentes y perderé una demostración visual. ¿Será posible conseguir tanto? Para empezar, tengo que elegir una unidad. Me decido por el lado: $BC = 1$. Tiene la ventaja de que es un 1 que lo puedo colocar en muchas posiciones. EC y FE, por ejemplo, también valen 1 (Figura 3).

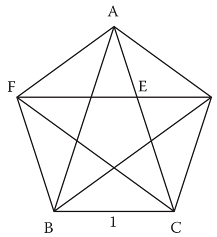


Figura 3

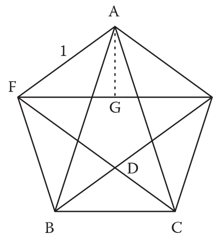


Figura 4

Se trata ahora de observar con cuidado. No creo que me sirva de mucho el 1 de FE. Más interesante me parece que FA =1, porque $\widehat{AFE}$=36º. ¡Ya está!, ya tengo el primer sumando. En la figura 4 se puede ver que

$$FG = cos\frac{\pi}{5}$$

Para $cos\frac{2\pi}{5}$ puedo tener en cuenta que $\widehat{AFC}$ =72º y FA =1, pero aparecerá $cos\frac{2\pi}{5}$ en el segmento FC. ¿Cómo compararlos? Ya veremos; de momento dibujo (Figura 5). ¡Están casi juntos! $FG = cos\frac{\pi}{5}$ y $FH = cos\frac{2\pi}{5}$.

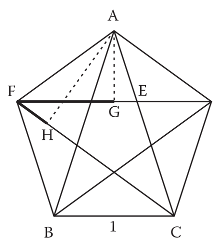


Figura 5

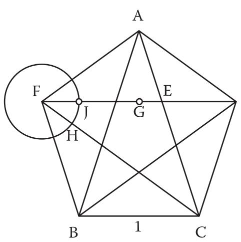


Figura 6

Bueno, no es tan difícil ponerlos sobre la misma recta. Lo puedo hacer mediante una circunferencia de centro F y radio FH (Figura 6). De manera que

$$cos\frac{\pi}{5} - cos\frac{2\pi}{5} = FG - FJ$$

Quiere decir esto que el segmento JG deberá ser $^1/_2$.

¡Y sí, ciertamente lo es! Está claro (Figura 7).

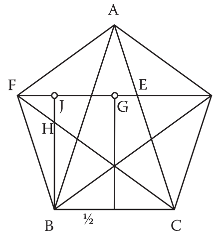


Figura 7

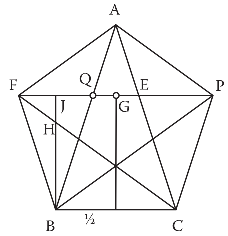


Figura 8

¿Está claro? Entran ganas de buscar alguna garantía numérica de que JB es realmente perpendicular a BC. Veamos: si el lado del pentágono regular es 1, su diagonal mide el valor del número áureo,

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Como $QP = 1$, entonces $FQ = \Phi$ -1 y su mitad (FBQ es isósceles) es justamente cos 72º, como puede comprobarse con la calculadora.

II

Voy a las soluciones y miro a ver cómo demuestran los autores del libro y —supongo— los candidatos a estudiantes del Instituto Físico–Técnico de Moscú, que la diferencia entre los cosenos de 36º y 72º es justamente 0,5. No me resisto a incluir su argumentación.

Parten de la fórmula

$$cos\,x - cos\,y = -2sen\frac{x+y}{2}sen\frac{x-y}{2}$$

para expresar

$$\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5}$$

como

$$2sen\frac{\pi}{10}sen\frac{3\pi}{10}$$

Multiplican esta expresión y la dividen por

$$2\cos\frac{\pi}{10}sen\frac{\pi}{10}$$

y emplean la fórmula de $sen\ 2\alpha$ para llegar a

$$cos\frac{\pi}{5} - cos\frac{2\pi}{5} = \frac{sen\frac{\pi}{5}sen\frac{3\pi}{5}}{2cos\frac{\pi}{10}cos\frac{3\pi}{10}}$$

Como

$$cos\frac{\pi}{10} = sen\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right) = sen\frac{3\pi}{5}$$

y

$$cos\frac{3\pi}{10} = sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10}\right) = sen\frac{\pi}{5}$$

concluyen que el resultado es 0,5.

¡Flipante! Un ejercicio de estilo que demuestra pero no convence de nada. Puro formalismo desprovisto de significado. Me temo que no habría sido admitido en el Instituto Físico–Técnico de Moscú.

III

He ironizado al preguntarme al comienzo de este escrito a quién se le puede ocurrir que la diferencia entre los cosenos de 36º y 72º es justamente 0,5. La sorpresa, más que la ironía, me surge cada vez que abro un libro de problemas de matemáticas, motivada por esos infinitos listados de igualdades y ejercicios descontextualizados.

Pues bien: en este caso es posible saber que la igualdad en cuestión se remonta por lo menos al siglo X, en relación -como no podía ser de otra manera— con la elaboración de tablas trigonométricas. Probablemente figurara en alguna obra de Abu'l-Wafa, como una etapa en el camino hacia el valor de *sen* 1º. En el apartado que Gheverghese Joseph (1996) dedica a la trigonometría árabe se puede ver otra construcción para llegar a ella (página 459). Gheverghese incluye el dibujo en su texto sin explicar cómo se obtiene, a partir de él, el resultado. No sé si Abu'l-Wafa lo *vería* o recurrió a semejanzas de triángulos a partir de las cuales conseguir el 0,5 de la diferencia entre los cosenos, pero su triángulo (Figura 9) permite verlo.

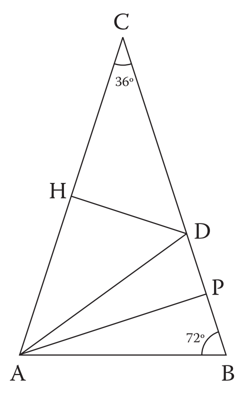


Figura 9

Si $AB = 1$, entonces $AD = CD = 1$, y $CA = 2\ cos\ 36º$. Además, $BD = 2\ cos\ 72º$, luego $CB = 1 + 2\ cos\ 72º$.

Así pues, $2\ cos\ 36 = 2\ cos\ 72º + 1$.

Si se gira la figura de manera que el triángulo se apoye en *CB*, se observa que es el mismo triángulo isósceles *FAE* de la figura 3; pero ahora hemos tomado como unidad su lado pequeño. Todo esto, en definitiva, no son más que variaciones sobre el hecho de que $\Phi = 2\ cos\ 36º$.

No creo que Abu'l-Wafa siguiera esta argumentación, pero me temo que tampoco la del Instituto Físico-Técnico de Moscú, a pesar de su buen conocimiento de las fórmulas de la trigonometría.

¡Veo el sen 2x!

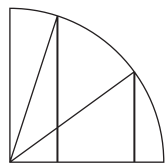


Figura 1

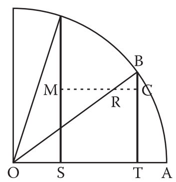


Figura 2

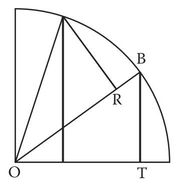


Figura 3

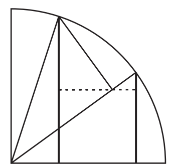


Figura 4

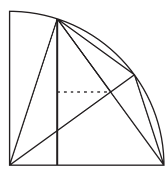


Figura 5

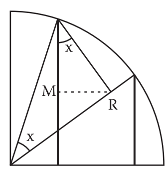


Figura 6

FIGURAS 1 Y 2: Una tentación habitual, $sen\ 2x = 2\ sen\ x$, que se puede rechazar con un simple contraejemplo numérico pero que es instructivo visualizar.

En la Figura. 2 se ve que $MS = \frac{1}{2} sen 2x < BT = sen\ x$.

FIGURA 2: *sen* $2x = 2$ *sen x cos x* quiere decir que la proporción entre *OA* y *OT* = *cos x* es la misma que entre *BT* = *sen x* y *CT*. Ciertamente, a simple vista, *cos* x puede ser un 80% del radio en el ejemplo de la figura, y *CT* puede ser un 80% de *BT*. Al multiplicar *sen* x por *cos x* lo estamos reduciendo en un 80%.

FIGURAS 3 Y 4: Una intuición: si giro el triángulo *OBT* un ángulo *x*, el punto *T* coincidirá justamente con el punto *R*. ¡Cierto!

FIGURA 5: Pero es lógico que así sea.

FIGURA 6: En *PMR* se ve cómo el factor cos x proyecta *sen x* a la dirección vertical, convirtiéndolo en $^1/_2$ *sen* $2x$. Por tanto, *sen* $2x = 2$ *sen x cos x*.

Si, ya sé que no he descubierto nada nuevo. Pero hace tiempo que quería visualizar —ver con mis ojos, de la misma forma que Santo Tomás quiso sentir la llaga con sus manos— cómo el factor coseno evitaba la proporcionalidad 2 entre el seno de un ángulo y el de su doble. Había visto otras construcciones (por ejemplo, en Nelsen, 2001), pero quería una que lo probara con el cuadrante que habitualmente dibujamos en clase.

Sí, ya sé que no es más que un caso particular de la que se suele hacer para demostrar la fórmula de *sen* $(x+y)$, pero me ocurre que ahora, después de este caso particular, entiendo mejor la otra que, además, no la había particularizado. ¿Qué por qué no lo hice? Porque cedí a las tentaciones de la deducción: *sen* $2x$ no era más que un simple caso particular de *sen* $(x+y)$ que se obtenía por aritmética elemental.

¿A quién le cuento que he tardado tanto tiempo en sentir experimentalmente la fórmula del seno del ángulo doble? ¿Rebajaréis por ello mi prestigio profesional?

¿Os acordáis de Dieudonné y sus diatribas contra la trigonometría? Los globalizadores[1] actúan siempre así, despreciando la belleza de lo particular que queda anulada en sus construcciones teóricas. Pero *lo general no existe más que en lo particular, a través de lo particular* y *toda cosa particular es (de alguna manera) general*[2]. Nuestra creatividad didáctica, motivada por la ambición intelectual y el atrevimiento, necesita tanto de los esquemas generales en los que insertar nuestro trabajo como de la inesperada belleza de la artesanía. Es más: sin esta última, el riesgo de que aburramos es muy alto. ■

NOTAS

1 Ya sea en matemáticas, en didáctica o en política.

2 Lenin (con perdón).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GHEVERGHESE JOSEPH, G. (1996): *La cresta del pavo real*, Pirámide, Madrid.

LIDSKI, V. y otros (1978): *Problemas de matemáticas elementales*, Mir, Moscú.

NELSEN, Roger B. (2001): *Demostraciones sin palabras*, Proyecto Sur, Granada.

SUMA 46
Junio 2004, pp. 27-30

Criptografía

La aparición de Internet, el correo electrónico, el comercio on-line, etc, han obligado al hombre actual a desarrollar rápidamente sistemas de criptografía cada vez más sofisticados y a la vez más seguros. Este texto trata de explicar el método de clave pública, que es en el que se basan los sistemas de criptografía más difundidos en Internet. Al final se incluye un anexo con resultados matemáticos utilizados y algunas direcciones web y títulos de libros para poder ampliar información sobre el tema.

The Internet, e-mail, on-line trade and so on have made man quickly develop more and more sophisticated and safe cryptography systems. This text aims at interpreting the public key method, the one most Internet-spread cryptography systems are based on. An appendix with used mathematic results is included at the end, along with some websites and book titles that will allow for further information on the issue.

Criptografía viene de la concatenación de dos palabras griegas *kryptós*, que signica *escondido* y *graphein* que quiere decir *escribir*. Esconder la escritura, el arte de enmascarar los mensajes con signos convencionales, que sólo cobran sentido a la luz de una clave secreta. Desde hace mucho tiempo, el hombre ha utilizado su ingenio para mantener la confidencialidad de sus comunicaciones. Hay que remontarse a la época de los egipcios, donde se encuentran los primeros signos de este arte. Existen pruebas palpables en tablas cuneiformes, en papiros, en textos militares y de espías, incluso en artículos del Kamasutra (manual erótico hindú del Vatsyayama), pero desde entonces hasta ahora las cosas han evolucionado mucho, sobre todo por la aparición de los sistemas informáticos. La aparición de Internet, el correo electrónico, el comercio on-line, las transacciones bancarias a través de la red... han obligado al hombre actual a desarrollar rápidamente sistemas de criptografía cada vez más sosticados y a la vez más *seguros*.

No vamos a hacer un recorrido histórico de los distintos métodos de cifrar mensajes, sino que trataremos de explicar las bases de los métodos actuales, que aunque sean más complejos que los clásicos, tienen más importancia. Además, por suerte, no hay que conocer las ideas que nuestros antepasados tenían sobre criptografía para comprender los métodos de cifrado vigentes. Concretamente trataremos de explicar el método de clave pública, que es en el que se basan los sistemas de criptografía más difundidos en Internet.

En todos los sistemas de cifrado debe de comunicarse una clave entre el emisor y el receptor para que éste último entienda el mensaje del emisor, de tal forma que quien no tenga esa clave no lo pueda entender. El problema es encontrar un canal seguro para transmitir dicha clave. Por ejemplo, si queremos cifrar el mensaje 'HOLA' con el método de transposición utilizado por Julio Cesar que consistía en sustituir cada letra del mensaje por la situada 3 lugares más adelante resulta 'KRÑD'. Lo que tiene que hacer el receptor al ver este mensaje es la operación inversa, es decir, sustituir cada letra por la situada 3 lugares más atrás. La clave es la forma con que se cifra y el emisor debe comunicársela al receptor para que este pueda aplicar la inversa y leer el mensaje.

En el ejemplo anterior bastaría con una comunicación oral y privada para comunicar la clave, pero esto no nos vale para garantizar la seguridad en la red, porque si todos quisiéramos utilizar nuestra tarjeta de crédito por Internet tendríamos que cifrar su número para transmitirlo y sólo el banco tendría que saber cada una de nuestras claves (todas ellas diferentes y desconocidas para los demás usuarios) para descifrarlo. Surgen entonces tres problemas:

Miguel Ángel Jonquera García
IES Villa de Santiago. Santiago de la Espada (Jaén).

– Hay que comunicar al banco la clave de cifrado, sin que nadie más lo sepa.

– Cada uno de nosotros tendría que tener un método diferente de cifrado y el banco tendría que tener una clave por cada uno de nosotros, lo que es poco viable.

– El método de cifrado debe ser seguro, de manera que si alguien intercepta nuestro número de cuenta cifrado, no lo pueda descifrar. Los métodos clásicos distan mucho, en la actualidad, de ser infalibles y en la mayoría de los casos basta hacer unos sencillos cálculos para averiguar los códigos secretos que generamos.

El método de clave pública

Intentando resolver estos problemas surge el *método de clave pública*, ideado en 1975 por los matemáticos Whitefield Diffic y Martin Hellmann de Estados Unidos.

La cuestión general del método consiste en generar una clave, llamada pública y otra denominada privada, para descodificarlo, de tal manera que conociendo la primera no se pueda acceder a la segunda. Las claves públicas se difunden lo máximo posible en la red, mientras que sólo los destinatarios conocen las privadas. De esta forma, el primer problema desaparece radicalmente.

Ejemplo:
Pongamos el mismo banco antes mencionado, que distribuye entre sus clientes su clave pública con la que enmascarar el número de la tarjeta de crédito y que sólo el banco puede descifrar una vez cifrado, utilizando la clave privada. Notar que un cliente no puede averiguar el número de otro cliente pues no conoce la clave privada, aunque consiga interceptar el envío del número de cuenta cifrado. Es el banco el que nos dice la clave con la que cifrar nuestro número y además es la misma para todos.

De esta forma, con una sola clave, que además es pública y no hay que preocuparse de esconderla si no de todo lo contrario, solucionamos los problemas antes comentados. Lo único que tenemos que hacer es mantener oculta la clave privada, pero esto es fácil porque no hay que comunicársela a nadie.

Una vez llegados a este punto, parece que la idea está bastante clara, pero se ha hablado de una clave pública que cifra mensajes que sólo pueden ser descifrados con su correspondiente clave privada y que sin ella, nadie podría, aun conociendo la forma en que está cifrado el mensaje. Pero, ¿existe realmente esa clave pública?, si es cierto, ¿cómo se obtiene? y ¿cómo es posible que sin la clave privada nadie pueda descifrar un mensaje que se sabe de qué manera está cifrado?

Todas estas preguntas las resolvieron en 1977, tres matemáticos, Ron Rivest, Adi Shamir y Leonard Adlerman con el cifrario RSA, que lleva sus iniciales. Para comprender el método hay que recordar algo sobre números primos.

Números Primos
Desde los cursos de Primaria los alumnos aprenden lo que es un número primo y un método para calcular los primeros, denominado la criba de Eratóstenes, que aunque lento, su funcionamiento es muy evidente. Otro problema asociado es la descomposición de un número en factores primos, donde vamos probando con los distintos números primos obtenidos por el procedimiento anterior. Con un poco de práctica, uno se da cuenta de que descomponer un número relativamente grande resulta muy costoso y en algunos casos casi imposible. Sin embargo, el problema inverso consistente en dados los factores primos hallar el número, es muy sencillo, basta con multiplicar todos los factores. En resumen, generar números primos requiere mucho tiempo, descomponer números en factores primos aún más, pero construir un número a partir de sus factores primos es casi inmediato.

Después de más de dos mil años de esfuerzos de grandes matemáticos, la situación al respecto es la siguiente:

– Existen algoritmos muy rápidos para generar números primos grandes, utilizando una computadora.

– No se conocen algoritmos rápidos para descomponer un número en factores primos, ni utilizando las últimas tecnologías informáticas. Descomponer un número suficientemente grande con el mejor algoritmo conocido implementado en la más potente computadora podría tardar ¡billones de años! Tras muchos esfuerzos no se ha avanzado prácticamente nada en este tema, lo cual resulta muy útil a la criptografía.

Cifrado y Descifrado con el método RSA

Ya estamos preparados para comprender el método RSA, utilizando para ello la formalización del ejemplo del banco. Evidentemente el cifrado que vamos a describir no es real ya que sería con números muchísimo más grandes, pero así se comprenderá mejor, aunque los cálculos pueden resultar un tanto tediosos al hacerlos a mano.

1. El banco genera dos números primos muy grandes p y q y calcula su producto $n = p \cdot q$. También elige un número $e < n$ de manera que mcd(e, $\phi(n)$) = 1, es decir, e es primo con $\phi(n)= (p - 1) \cdot (q - 1)$. La clave pública sería: (e, n). Ahora hay que encontrar otro número d que sea el inverso de e módulo $\phi(n)$, es decir, $d \cdot e \equiv 1(\phi(n))$, que es fácil utilizando el *algoritmo de Euclides* y conociendo p y q. La clave privada sería: (d, n).

Ejemplo:
$p = 43$, $q = 59$, $n = 2537$, $e = 13$ que es primo con $\phi(n) = 2436$ y $d = 937$. Siendo la clave pública (13, 2537) y la clave privada (937, 2537).

Resumiendo:
p y q primos $\rightarrow$ $n = p \cdot q$ y e tal que mcd$(e, \phi(n)) = 1 \Rightarrow (e, n)$ clave pública, que se utiliza para cifrar de la siguiente forma

$$P \rightarrow C \equiv P^e (n)$$

Para descifrar obtenemos d tal que $d \cdot e \equiv 1(\phi(n))$, siendo la clave privada (d, n) y se utiliza para descifrar C de la forma

$$C \rightarrow P \equiv C^d (n)$$

La explicación del proceso de descifrado sería:

$$C^d \equiv \left(P^e\right)^d \equiv P^{ed} (n)$$

y como $d \cdot e \equiv 1(\phi(n))$,

$$C^d \equiv P^{1+x\phi(n)} (n) \equiv P \bullet P^{x\phi(n)} \equiv P(n)$$

donde en la última equivalencia de la congruencia hemos utilizado que

$$P^{\phi(n)} \equiv 1(n)$$

Este resultado de teoría de números se encuentra demostrado en el anexo del presente artículo, donde se suponen unos conocimientos mínimos de congruencias y anillos.

Lo único que es un poco más laborioso es el cálculo de d, pero existen programas matemáticos que calculan el inverso de un número dado, módulo $\phi(n)$. El *algoritmo de Euclides* nos ayuda ya que lo único que tenemos que hacer son unas divisiones. Empezamos dividiendo $\phi(n)$ entre e, luego el divisor entre el resto resultante y así hasta que el resto sea 1.

En nuestro caso quedaría, utilizando la notación

Dividendo = divisor x cociente + resto;

$$2436 = 13 \cdot 187 + 5$$
$$13 = 5 \cdot 2 + 3$$
$$5 = 3 \cdot 1 + 2$$
$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

y ahora despejando el 1 y volviendo hacia atrás desde la última igualdad,

$$1 = 3 - 2 \cdot 1$$
$$1 = 3 - (5 - 3 \cdot 1) = 2 \cdot 3 - 5$$
$$1 = 2(13 - 5 \cdot 2) - 5 = 2 \cdot 13 - 5 \cdot 5$$
$$1 = 2 \cdot 13 - 5(2436 - 13 \cdot 187)$$
$$1 = -5 \cdot 2436 + 13(2 + 187 \cdot 5)$$
$$1 = -5 \cdot 2436 + 13 \cdot 937$$

Por lo que deducimos que el inverso de $e = 13$ módulo $\phi(n)$ es $d = 937$.

2. Ahora ya tenemos las claves para poder cifrar y descifrar. Supongamos que el número de nuestra tarjeta de crédito es 1520 (para simplicar).

Cifrado:
$1520 \rightarrow 1520^{13} \equiv 95(2537) \rightarrow 0095$ para completar a 4 cifras.

Descifrado:
$0095 \rightarrow 0095^{937} \equiv 1520(2537)$
El resultado del cifrado 95 se puede obtener fácilmente utilizando una calculadora con la tecla 'MOD'.

Noten que la facilidad del descrifrado es gracias a que conocemos $d = 937$ y que su cálculo ha sido posible al conocer p, q y el *algoritmo de Euclides* . Esto, como se ha razonado antes, hubiera sido imposible conociendo sólo n y no su descomposición factorial.

Noten también que en un caso real el número de cuenta tiene 20 dígitos y para cifrarlo se cifrarían de 4 en 4 sus cifras (por ejemplo) de la forma descrita.

En el caso de que quisiéramos cifrar el texto de un correo electrónico, convertiríamos los caracteres en sus equivalentes numéricos según un código elegido (por ejemplo código ASCILL o (A = 00, B = 01...)).

Fuera de engaños
Para terminar intentaremos resolver la siguiente pregunta. ¿Está seguro el receptor de que el mensaje codificado haya sido enviado efectívamente por el cliente X y no por alguien que se hace pasar por él?

La respuesta a estas preguntas es la siguiente:

El cliente X cifra su firma, utilizando su clave privada y, después codifica el mensaje con la clave pública del destinatario. El receptor descifra el mensaje con su clave privada y después con la pública de X. De esta manera el receptor se asegura que la firma es la de X.

Recomendaciones

Actualmente existen muchos programas en Internet que cifran mensajes, aunque recomiendo el PGP, que se puede descargar junto con mucha información en

http://glub.ehu.es/seguridad/pgpintro.html

Otras direcciones de interés son:

http://www.kirptopolis.com

http://www.pgp.com

http://www.gvsu.edu/mathstat/enigma/enigma.htm

aunque si se busca en cualquier buscador la palabra criptografía o RSA saldrán muchas direcciones relacionadas con el tema y además hay bastantes en español.

Como libros, destacaría *Códigos Secretos* de Andrea Sgarro, Editorial Pirámide, que describe cronológicamente la criptografía sin entrar en muchos tecnicismos.

También podría ser interesante *Introducción a la criptografía* de Caballero Pino, editorial Ra-ma.

Por último, puede ser que alguno de los lectores se pregunte si éste método es infalible o incluso tengan la tentación de intentar romperlo. Muchas de las técnicas que se han considerado infalibles a lo largo de la Historia han sido derrotadas por la habilidad de criptoanalistas. Les dejo con las palabras de Edgar Allan Poe,

> *es dudoso que el género humano logre crear un enigma que el mismo ingenio humano no resuelva.*

Anexo

Notación:

$$\bar{a},\bar{b} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \wedge \bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow a - b \in n\mathbb{Z}$$

es decir, a y b dan el mismo resto al dividir por n.

Se escribe $a \equiv b(\text{n})$ y se lee *a congruente con b módulo n*.

Proposición 1:
Son equivalentes:

b) $\bar{a}$ es generador de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

b) mcd(a, n) = 1

c) $\bar{a} \in \left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^*$, es decir, a es una unidad (tiene inverso en el anillo)

Demostración:
1) $\rightarrow$ 2)

$\bar{1} = t\bar{a}$ para cierto $t' \in \mathbb{Z}^+$

$\bar{1} = t \Leftrightarrow 1 - ta = nt'$ para cierto $t' \in \mathbb{Z}^+$

$1 = nt' + ta \Rightarrow$ mcd(n, a) =1 por la Identidad de Bezout.

2) $\rightarrow$ 3)

$mcd(a,n) = 1 \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{Z}/\alpha a + \beta b = 1$

$\alpha a + \beta n = \bar{\alpha}\bar{a} + \bar{\beta}\bar{b} = 1 \Rightarrow \bar{\alpha}\bar{a} = \bar{1}$ ya que $\bar{n} = \bar{0}$,
por tanto $\bar{a}$ es unidad

3) $\rightarrow$ 1)

$\bar{a} \in \left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^* \Rightarrow \exists\, \bar{b} \big/ \bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{1}$

$\forall \bar{t} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \big/ \bar{t} = \bar{t} \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} = (t \cdot b) \cdot \bar{a}$ por lo que $\bar{a}$
es un generador de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Con lo que queda demostrado.

Podemos entonces decir que las unidades del anillo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ son:

$$\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^* = \left\{\bar{a}/\bar{a} \text{ es invertible}\right\} =$$
$$= \left\{\bar{a}/1 \le a \le n - 1 \wedge mcd(a,n) = 1\right\}$$

Se define $\phi(n)$ como el número de elementos de este grupo de unidades. En el caso de que $n = p \cdot q$ con p y q números primos, resulta que $\phi(n) = (p - 1) \cdot (q - 1)$

Conguencia de Euler:

Sea $n \in \mathbb{Z}^+$ y sea $a \in \mathbb{Z}/mcd(a,n) = 1 \Rightarrow a^{\phi(n)} \equiv 1(n)$

Demostración:

$$\bar{a} \in \left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^* \Rightarrow (\bar{a})^{\phi(n)} = \bar{1} \Rightarrow a^{\phi(n)} \equiv 1(n)$$

ya que cualquier elemento de un grupo $g \in (G, \cdot)$ elevado al orden (número de elementos) del grupo cumple que $g^n = 1$. Este útimo resultado utilizado ya no lo demostraremos. El lector podrá encontrarlo en cualquier libro básico de teoría de grupos. ■

SUMA 46
Junio 2004, pp. 31-35

Aplicaciones de la teoría de grafos a algunos juegos de estrategia

Al analizar algunos juegos relativamente sencillos, podemos observar que es posible seguir una estrategia que nos permite ganar si jugamos bien. El propósito de este artículo es modelar estos juegos mediante la Teoría de Grafos, revisar las estrategias seguidas para ganar y aplicarlas a otros juegos que puedan ser igualmente modelables. Para ello es fundamental comprender el concepto de núcleo de un grafo, por lo que será preciso conocer algunas definiciones básicas de la Teoría de Grafos.

For some relatively simple strategy games, a careful study of the problem may provide winning strategies, i.e., strategies which if correctly applied always allows one to win the game. The aim of this paper is first, to model these games using Graph Theory, second, to study a range of winning strategies, and finally to apply them to other strategy games which can be modelled in a similar fashion. In order to achieve this, it is essential to understand the notion of graph kernel, and thus it will be required some basic definitions in graph theory.

Observemos el juego para dos jugadores que se plantea a continuación:

El primer jugador dice un número entero del 1 al 3. El segundo jugador suma al número dicho por su contrincante 1, 2 ó 3 y dice el resultado. Entonces, el primer jugador sumará a este resultado 1, 2 ó 3 cantando el nuevo resultado, y así sucesivamente. Gana el que primero diga 31. A continuación se muestra el ejemplo de una partida:

Jugada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
J1	3		6		12		14		18		23		26		29	
J2		4		9		13		16		21		25		27		31

Tabla 1. Ejemplo de partida

Basta jugar dos o tres partidas tratando de analizar el juego para empezar a tener una idea clara de la estrategia que se ha de seguir para ganar.

Lo que nos proponemos es buscar un modelo matemático para este juego y ver las características de la estrategia seguida para vencer, tratando de generalizarla para otros juegos que puedan modelar de la misma manera.

La base matemática de este modelo la encontraremos en la Investigación Operativa, en particular, en la Teoría de Grafos. Será fundamental el concepto de *núcleo de un grafo*, por lo que es necesario, para formalizar los conceptos, disponer de algunas definiciones elementales sobre grafos. No obstante, puede resultar que en la práctica no sea necesario representar explícitamente el juego como un grafo dirigido para obtener una estrategia ganadora, si bien esta representación siempre será posible.

Ideas básicas de la teoría de grafos

Los conceptos fundamentales de la Teoría de Grafos los podemos encontrar en multitud de libros y artículos, por ejemplo en (Bollobás, 1998).

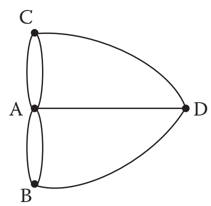


Figura 0. Grafo del problema de los puentes de Könisberg

Eduardo Martín Novo
Alfredo Méndez Alonso
Universidad Politécnica de Madrid.

Dibujar un grafo para resolver un problema es bastante común, y no se precisa de conocimientos matemáticos. Un grafo es un dibujo como el de la figura 1, y consta de vértices y de aristas que unen algunos de estos vértices.

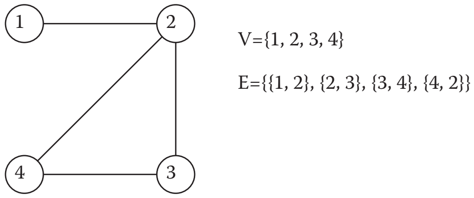


Figura 1. Ejemplo de grafo

Se pueden modelar mediante grafos multitud de situaciones, como una red de carreteras que conectan ciudades, una red eléctrica, etc. En algunos casos es necesario imponer un sentido a las aristas, por ejemplo, si se quiere representar la red de las calles de una ciudad donde aparecen direcciones únicas (Ver figura 2). Uno de los más famosos es el de los puentes de Könisberg. Esta ciudad rusa que se encuentra a orillas del río Pregel, y que en el siglo XVIII tenía siete puentes, sirvió de pretexto para un famoso problema con grafos: se trataba de pasar por todos los puentes sin atravesar ninguno de ellos dos veces.

Definición 1: Un grafo es un par $G = (V, E)$, donde V es el conjunto de vértices del grafo, siendo su cardinal $|V| = n$ entero positivo, y $E \subset V \times V$ son las aristas del grafo ($e = \{x, y\} = \{y, x\}$ es una arista, por lo que no existe orientación).

Definición 2: Un digrafo o grafo dirigido, es un par $G = (V, U)$, donde $U \subset V \times V$ son los arcos del digrafo. En los digrafos existe orientación en los arcos, es decir, $u = (x, y) \neq (y, x)$.

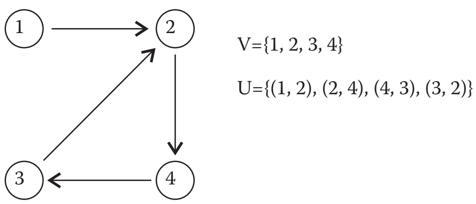


Figura 2. Ejemplo de grafo dirigido

Dado $u = (x, y)$ un arco de un digrafo, se dice que x es el vértice inicial del arco e y el *vértice final* del arco.

En el ejemplo del grafo que se muestra en la figura 2, el vértice inicial de $u = (2, 4)$ es $x = 2$ y el final $y = 4$. Obsérvese además que $u = (4, 2)$ no es un arco del grafo.

Definición 3: Un bucle es un arco en el que $x = y$ (figura 3).

Definición 4: En un digrafo $G = (V, U)$ se define el conjunto de sucesores del vértice x como $S(x) = \{y \in V / (x, y) \in U\}$, es decir, el conjunto de vértices a los que va a parar un arco que sale de x. Del mismo modo se define el conjunto de predecesores del vértice x como $P(x) = \{y \in V / (y, x) \in U\}$, es decir, el conjunto de vértices de los que sale un arco que termina en x. Podemos entonces definir el conjunto de vértices adyacentes a x como la unión de sus predecesores y antecesores $\Gamma(X) = S(x) \cup P(x)$, que son todos los vértices de los que sale un arco que termina en x o a los que llega un arco que comienza en x.

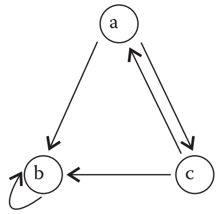


Figura 3. Ejemplo de bucle

Es importante destacar que en un digrafo (o en un grafo) es posible que para dos vértices a y b haya más de un arco (o arista) de la forma (a, b), es decir, es posible que se repitan los arcos (o aristas). Sin embargo, para nuestro propósito, supondremos que no se da esta situación.

Definición 5: Sea $G = (V, U)$ un digrafo. Un subconjunto de vértices A de V se dice que es *absorbente* si $\forall x \notin A$ se verifica

$$S(X) \cap A \neq \varnothing$$

Es decir, A es absorbente si desde un vértice que no está en A sale al menos un arco que termina en un vértice de A, o equivalentemente, desde un vértice que no está en A se puede llegar a A.

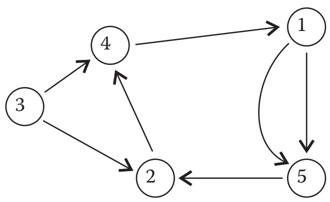


Figura 4. Ejemplo de subconjunto absorbente: A={2,4}

Definición 6: Sea $G = (V, U)$ un digrafo sin bucles. Un subconjunto de vértices A de V se dice que es *estable* si $\forall x \in A$ se verifica

$$\Gamma(X) \cap A = \varnothing$$

Es decir, no existen arcos que unan vértices de A, por lo que desde un vértice de A sólo se puede ir a vértices fuera de A.

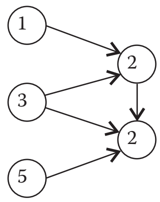


Figura 5. Ejemplo de subconjunto estable: A={1,3,5}

Definición 7: Se denomina *núcleo* de un digrafo sin bucles a un subconjunto A de vértices de V que es a la vez estable y absorbente. Es decir, un subconjunto A de vértices de V es núcleo si

$$\forall x \notin A \text{ es } S(X) \cap A \neq \emptyset \text{ y } \forall x \in A \text{ es } \Gamma(X) \cap A = \emptyset$$

Por consiguiente, A es núcleo del digrafo si desde vértices que no están en A se puede acceder a A, y desde vértices de A no se puede acceder más que a vértices fuera de A.

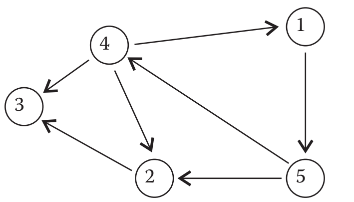


Figura 6. Ejemplo de núcleo de un digrafo: N={3,5}

Como podemos observar en la figura 7, no siempre existe núcleo.

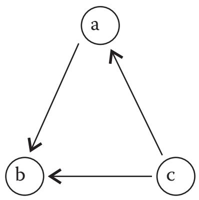


Figura 7. Ejemplo de digrafo sin núcleo

En la figura 8 se muestra un ejemplo de un digrafo en el que dos conjuntos distintos de vértices son núcleos del mismo. Por tanto, la existencia del núcleo no garantiza su unicidad.

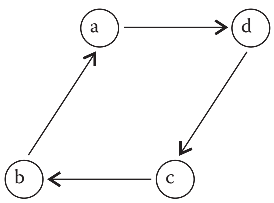


Figura 8. Ejemplo de digrafo con dos núcleos N_1={a, c}, N_2={b, d}

Análisis de juegos

Sumar 31

El desarrollo y objetivo de este juego se ha explicado ya en la introducción. Aunque no es necesario, el juego se puede modelar mediante el grafo dirigido de la figura 9. Los vértices son los números naturales del 1 al 31 y los arcos salen del vértice n hacia los vértices $n + 1$, $n + 2$ y $n + 3$, si $1 \leq n \leq 28$. Del 29 salen arcos a 30 y 31, del 30 sale un único arco a 31 y de 31 no sale ningún arco.

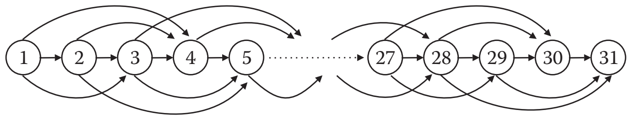


Figura 9. Modelo del juego *Sumar 31*

Es inmediato comprobar que el jugador que consigue decir el 27, tiene todo a su favor para ganar, por lo que podríamos replantear el juego con objetivo 27 en lugar de 31. Pero entonces, quien diga 23 será el más que probable ganador del juego. Razonando de esta manera, vemos que los objetivos *parciales* deben ser X = {3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31}.

Observamos que las posiciones señaladas cumplen:

i) Si un jugador dice un número que no pertenece al conjunto X, el otro jugador siempre tiene la posibilidad de decir uno del conjunto X mencionado. Por tanto es un subconjunto de vértices absorbente.

ii) Si un jugador dice un número del conjunto X, el contrincante obligatoriamente dirá un número que no está en dicho conjunto. En consecuencia es un subconjunto estable.

Como hemos comentado, un subconjunto de vértices estable y absorbente es el núcleo de un grafo. Así, podemos decir que el objetivo debe ser ocupar las posiciones del núcleo, puesto que nuestro adversario saldrá obligatoriamente de estas posiciones *ganadoras* y, a su vez, desde la situación que nos deje el contrincante, siempre podremos acceder a ellas.

Observación: Sobre este juego se pueden hacer cuantas variaciones se desee. Por ejemplo se puede jugar a que quien diga 31 pierde. También se puede fijar otro número como objetivo y decidir cuánto se puede sumar en cada turno. Siempre resulta sencillo encontrar el nuevo núcleo.

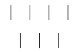
Nim

Este es un juego para dos personas. Se colocan varias filas de palillos, poniendo en cada fila dos, tres, cuatro, ... palillos.

Mover consiste en elegir una fila y retirar de ella el número de palillos que se desee, alternándose los dos jugadores.

Se puede elegir entre dos opciones: el último que quite palillos gana o el último que quite palillos pierde.

Estrategia: Con ayuda de la Teoría de Grafos, el juego es relativamente sencillo de analizar. Para simplificar la explicación, lo estudiaremos con tan sólo dos filas de tres y cuatro palillos en la versión en que pierde el último en retirar algún palillo.



El juego se puede representar con el grafo (dirigido) de la figura 10.

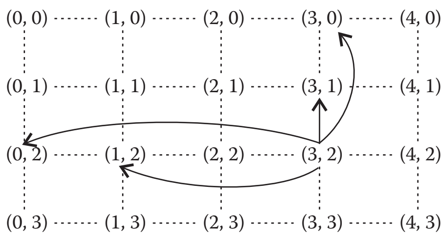


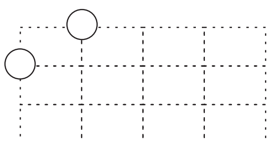
Figura 10. Modelo del juego *Nim*

Los vértices del grafo son todos los puntos de intersección de dos líneas y representan la cantidad de palillos que quedan en cada una de las dos filas. El vértice inferior derecho (4, 3) representa la situación inicial, con cuatro y tres palillos respectivamente en cada fila. El vértice superior izquierdo (0, 0) corresponde a la situación final, sin ningún palillo. Por otro lado, los arcos, que no se han pintado todos para simplificar el dibujo, saldrían de un vértice cualquiera $(x, y) \neq (0,0)$ donde x e y son enteros, con $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 3$, a los vértices (z, y) con z entero tal que $0 \leq z < x$, ó bien (x, z) con z entero tal que $0 \leq z < y$. Esto significa, en otras palabras, que

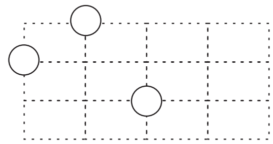
$$S((x,y)) = \{(z,y)/z \in \mathbb{Z},\ 0 \leq z < x\} \cup \{(x,z)/z \in \mathbb{Z},\ 0 \leq z < y\}$$

Como puede observarse Cardinal(S(x, y)) = $x + y$, lo cual significa que de un vértice (x, y) salen exactamente $x + y$ arcos; y Cardinal(P(x, y)) = $(4 + 3) - (x + y)$, es decir, a cualquier vértice (x, y) llegan $7 - (x + y)$ arcos. Por ejemplo, de (3, 2) salen 3 + 2 = 5 arcos a (3, 1), (3, 0), (2, 2), (1, 2) y (0, 2); y a (3, 2) llegan 7 - (3 + 2) = 2 arcos procedentes de (4, 2) y (3, 3).

Como sabemos, el núcleo del grafo nos dará las *situaciones ganadoras*, aquellas situaciones del juego que van a permitir ganar siempre (suponiendo que jugamos *bien*). Para encontrar el núcleo, conviene razonar del final al principio, buscando en las fases necesarias los vértices que lo componen. En este juego, resulta evidente observar que ganará seguro el jugador que consiga ocupar el vértice (1,0) o el (0,1).



Se trata ahora de buscar el subconjunto de vértices que nos dan las situaciones ganadoras anteriores a estas, es decir, aquellos vértices del grafo desde los que las situaciones ganadoras conocidas son inaccesibles y que, a la vez, sólo pueden dar lugar a nuevas situaciones (no ganadoras) desde las que será posible acceder a las situaciones ganaras ya conocidas. Observamos que en este caso sólo está el vértice (2, 2).



Siguiendo de nuevo el razonamiento anterior, incorporaríamos ahora el vértice (3, 3), resultando imposible ahora encontrar nuevos vértices que cumplan las condiciones requeridas. Así pues, podemos comprobar que el subconjunto de vértices X = {(3, 3), (2, 2), (1, 0), (0, 1)} es el núcleo del grafo, puesto que es imposible moverse entre vértices de X (es un subconjunto estable), y desde un vértice que no esté en X siempre es posible acceder a otro que sí esté en X (es un subconjunto absorbente).

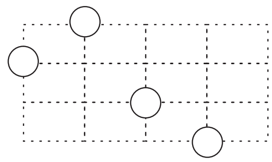


Figura 11. Núcleo del juego *Nim*

En consecuencia, sería ideal empezar quitando un palillo de la fila que tiene cuatro, es decir, situarnos en el vértice (3, 3). A continuación actuaremos buscando siempre la posición del núcleo que sea alcanzable desde la posición que nos deje nuestro rival, hasta alcanzar la posición (1, 0) o la (0, 1), obligando al adversario a retirar el último palillo.

Llegar a la meta

Es, al igual que los anteriores, un juego para dos personas. Se juega en una cuadrícula del tamaño que se desee; por fijar ideas, digamos que la cuadrícula es de 5 x 5. Una esquina, por ejemplo la superior izquierda, es la de salida y la esquina opuesta, por tanto la inferior derecha, es la de llegada.

Salida				
				Meta

Figura 12. Ejemplo de cuadrícula para el juego *Llegar a la meta*

El juego se desarrolla por turnos. El primer jugador marca la casilla de salida y, a continuación, el segundo jugador marca otra casilla situada justo debajo, justo a la derecha o en diagonal (lo que equivale a mover una posición a la derecha y una posición abajo). Ahora el primer jugador hace lo mismo desde la marca hecha por su oponente y así sucesivamente. Gana el que consiga marcar la casilla señalada como Meta (naturalmente, se puede jugar a que quien marque la meta pierde).

Este juego se puede modelar con un grafo dirigido en el que cada casilla es un vértice del grafo, y los arcos salen de una casilla a otra a la que sea posible moverse.

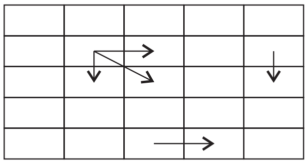


Figura 13. Ejemplo de arcos para el juego *Llegar a la meta*

Estrategia: Una vez más, las posiciones del núcleo nos darán la clave para ganar. Razonando como en el juego anterior, del final al principio en las etapas necesarias, podemos ir obteniendo los vértices que componen el núcleo del juego:

Salida				
				x

Salida				
		x		x
		x		x

Salida		x		x
x		x		x
x		x		Meta

Figura 14. Núcleo del juego *Llegar a la meta*

Siempre resulta sencillo encontrar el núcleo de este juego para cualquier tamaño de cuadrícula tanto si gana como si pierde quien marque la meta.

Dos montones

Se colocan sobre la mesa dos montones de palillos, no necesariamente con la misma cantidad, pero preferentemente un número pequeño si no se quiere correr el riesgo de prolongar demasiado la partida.

Cada uno de los dos jugadores tiene la opción, en su turno, de quitar un palillo del montón que quiera o, si lo prefiere, uno de cada montón.

Gana el último que pueda quitar algún palillo.

Observación: Este juego es equivalente al juego de *Llegar a la meta* y, en consecuencia, lo podríamos representar del mismo modo. Obsérvese que quitar un palillo de un montón es como desplazarnos en la cuadrícula una posición a la derecha o abajo, según el montón, mientras que retirar un palillo de cada montón, equivale a moverse una posición en diagonal. De este modo, el núcleo de este juego ha de coincidir necesariamente con el de aquél.

Por supuesto, como en la mayoría de los juegos aquí planteados, podemos cambiar el criterio para conseguir la victoria y proponer que pierda el que quite el último palillo. En este caso se puede buscar de nuevo el núcleo, que para dos montones de siete y seis palillos sería:

Salida						x
x		x		x		
						x
x		x		x		
						x
	x		x		x	Meta

Figura 15. Núcleo del juego *Dos montones* ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AVONDO-BODINO, G. (1979): "Graph Theory in Operations Research", en *Applications of Graph Theory*, R.J. Wilson and L.W. Beineke, editors, Academic Press, London.

BOLLOBÁS, B. (1985): *Random Graphs*, Academic Press, New York.

BOLLOBÁS, B. (1998): *Modern Graph Theory*, Springer-Verlag, New York.

BONDY, J.A. and MURITY, U.S.R. (1976): *Graph Theory and applications*, 1ª Ed. Macmillan, London.

BRUALDI, R. (1977): *Introductory Combinatorics*, North-Holland, Amsterdam.

BUSACKER, R.G. and SAATY, T.L. (1965): *Finite Graphs and Networks*, 1ª Ed. McGraw, New York.

FOULDS, L.R. (1992): *Graph Theory Applications*, Springer-Verlag, New York.

HAGE, P. and HARARY, F (1991): *Exchange in Oceanea: A Graph Theoretic Analysis*, Clarendon Press, Oxford.

KÖNIG, D. (1936): *Theorie der endlichen und enendlichen Graphen*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig. Reimpreso: Chelsea, New York, 1950.

MARTÍN, E., SERRANO, E., OCAÑA, J.M., PASCUAL, C. y ÁLVAREZ, R. (1997): "Materiales para el Taller de Matemáticas", *Cuaderno n.º 17 del CEP de Fuenlabrada*, pp. 52-58. Madrid.

PICADO, J.: "Matemática Discreta", *Actas do IX Encontro Regional da SPM*, pp. 153-194.

ROBERTS, F. (1984): *Applied Combinatorics*, Prentice-Hall.

WILSON, R.J. (1972): *Introduction to Graph Theory*, Oliver and Boyd, London.

WILSON, R.J. and BEINEKE, L.W. (1979): *Applications of Graph Theory*, Academic Press, London.

http://cosmos.imag.fr/GRAPH/english/overview.html

http://www.cs.columbia.edu/~sanders/graphtheory/

http://www.c3.lanl.gov/mega-math/gloss/graph/gr.html

http://www.graphtheory.com

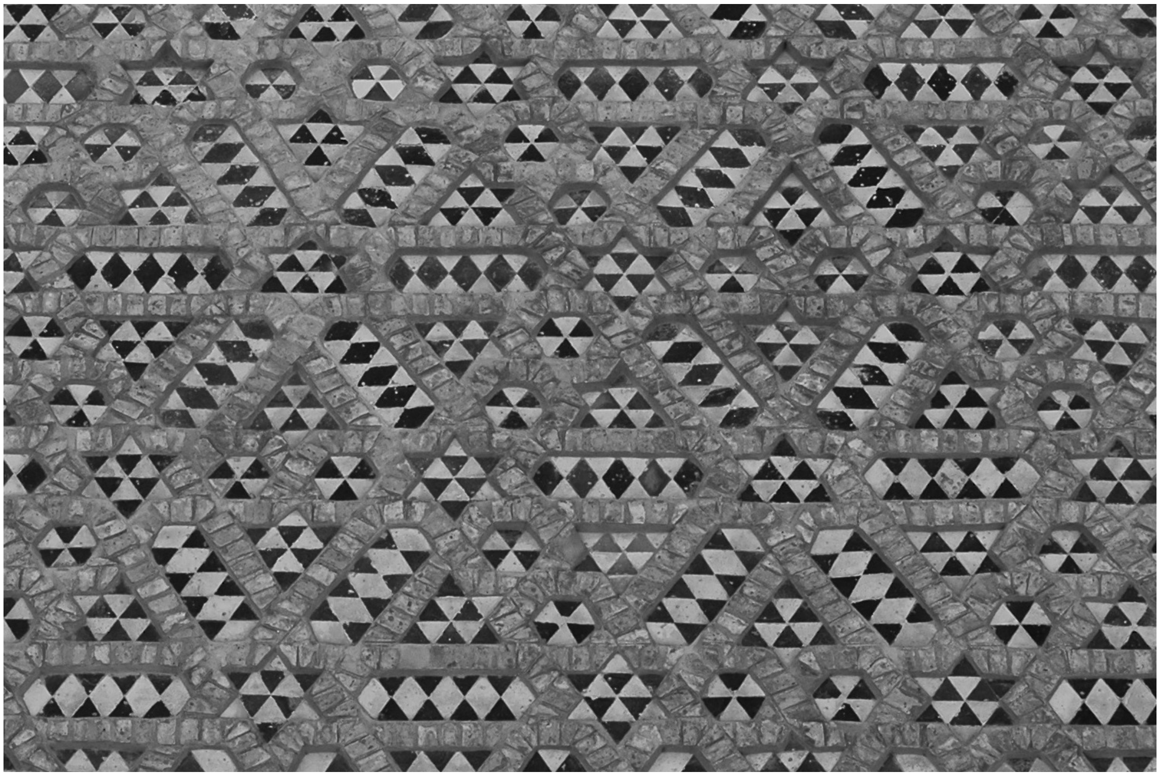
http://www.inf.ufpr.br/~michel/Disciplinas/Bac/Grafos/Intro/intro.html#Def_basicas

http://www.math.fau.edu/locke/graphthe.htm

http://www.utm.edu/departments/math/graph/

Muro de la Parroquieta, La Seo de Zaragoza, mosaico mudéjar del siglo XIV. Foto: F.M.C. 2004

Muro de la Parroquieta, La Seo de Zaragoza, mosaico mudéjar del siglo XIV (detalle). Foto: F.M.C. 2004



SUMA 46
Junio 2004, pp. 37-44

Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones

El trabajo presentado es un resumen de una investigación realizada con alumnos de primero de Bachillerato con el objetivo de describir y analizar algunos de sus errores y dificultades en el aprendizaje de las inecuaciones y así mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las mismas. Hemos partido de trabajos desarrollados sobre iniciación al álgebra y, específicamente, sobre dificultades y errores observados en torno a las competencias algebraicas. Dado que nuestro objetivo era fundamentalmente descriptivo, hemos utilizado dos intrumentos propios de la metodología cualitativa, como son los cuestionarios y entrevistas.

This essay is a summary of a piece of research carried out with students in their first year of Baccalaureate. The aim is to describe and analyse some of the common mistakes made by students when working with inequations and the difficulties involved in their learning in order to improve the process of teaching and learning them. We have started from some essays on initiation to algebra and specifically on difficulties and mistakes observed around algebraic competencies. Since our objective was mainly descriptive we have used two instruments characteristic of qualitative methodology such as questionnaires and interviews.

Nuestra experiencia docente nos ha permitido observar los errores y dificultades que los alumnos de Bachillerato presentan en el estudio de las desigualdades e inecuaciones, muchos de los cuales se repiten año tras año. Ello nos ha motivado a estudiar cuáles podrían ser las causas de algunos de ellos, para intentar paliarlos, o al menos reconducir nuestra labor educativa.

El trabajo presentado se ha desarrollado dentro del Programa de Doctorado ofrecido por el Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas de la Universidad de Extremadura (Bienio 1999-2001), en el que se desarrolla una línea de investigación sobre *errores y dificultades en la enseñanza/aprendizaje de las Matemáticas* durante el segundo año del programa.

En este marco elaboramos un proyecto cuyo objetivo principal era: *Describir y analizar algunos errores y dificultades de los alumnos del primer curso de Bachillerato de las modalidades Tecnológico y Ciencias de la Naturaleza y la Salud en el aprendizaje de las inecuaciones con el fin de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las mismas.* El trabajo que ahora presentamos quiere mostrar y divulgar algunos de los resultados obtenidos, no siendo nuestro objetivo presentar un informe de investigación.

Como referente hemos considerado el concepto de obstáculo epistemológico (Brousseau, 1997), caracterizado como aquel conocimiento que ha sido en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas y que por esta razón se fija a la mente del estudiante, pero que posteriormente resulta inadecuado cuando el alumno se enfrenta a nuevos problemas. Y cuyo origen puede ser, siguiendo a G. Brousseau, de origen ontológico o psicológico, didáctico o epistemológico.

Igualmente, hemos partido de trabajos desarrollados sobre iniciación al álgebra (Grupo Azarquiel, 1991 y Socas y otros, 1989) y, específicamente, sobre dificultades y errores obser-

> *Hemos observado los errores y dificultades que los alumnos de Bachillerato presentan en el estudio de las desigualdades e inecuaciones.*

Manuel Garrote Sánchez
Colegio Ntra Sra del Carmen (Badajoz).
Mª José Hidalgo Carranza
IES Eugenio Hermoso (Fregenal de la Sierra - Badajoz).
Lorenzo J. Blanco Nieto
Universidad de Extremadura (Badajoz).

vados en torno a las competencias algebraicas de los alumnos de Secundaria y Bachillerato, por ser éste el campo en el que quedan inmersos los contenidos matemáticos de esta investigación.

Pretendemos describir y analizar algunos errores y dificultades de los alumnos del primer curso de Bachillerato de las modalidades Tecnológico y Ciencias de la Naturaleza y la Salud en el aprendizaje de las inecuaciones con el fin de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las mismas.

En esta línea, Socas (1997) y Palarea (1999) hacen un recorrido por las dificultades y errores de los alumnos en el aprendizaje de las matemáticas en general y del álgebra en particular, agrupando las dificultades en cinco grupos: Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos del álgebra que operan en sentidos: semántico y sintáctico; asociadas a los procesos de pensamiento y que surgen debido a la naturaleza lógica del álgebra; asociadas a los procesos de enseñanza, que se derivan del propio currículum de matemáticas, de la institución escolar y de los métodos de enseñanza; asociadas a los procesos de desarrollo de los alumnos y, por último, asociadas a las actitudes afectivas y emocionales de los alumnos hacia el álgebra.

De manera parecida, Socas (1997), clasifica en dos grupos las causas principales de los errores en el aprendizaje del álgebra:

1. Errores que tienen su origen en un obstáculo, tales como la falta de clausura, es decir, los estudiantes ven las expresiones algebraicas como enunciados que son algunas veces incompletos.

2. Errores que tienen su origen en una ausencia de significado; éstos pueden tener dos procedencias distintas:

2.1. Complejidad de los objetos y de los procesos de pensamiento algebraico, tales como:

- Errores en álgebra que tienen su origen en la aritmética

- Errores de procedimiento

- Errores en álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico

2.2 Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra; son de naturaleza diversa tales como: falta de concentración, bloqueos, olvidos, omisiones, creencias, etc.

Diferentes autores han trabajado aspectos de la enseñanza/aprendizaje del álgebra que conforman diversos obstáculos para su aprendizaje. Así, Collis, (1975) hace consideraciones sobre el uso y significado que los alumnos hacen y atribuyen a las letras. Collis (1975), Behr (1980), Kieran (1981) y Palarea y Socas (1999) hacen aportaciones sobre el valor que los alumnos atribuyen al signo igual, encontrando la prevalencia de la aritmética sobre el álgebra. O respecto al uso de paréntesis (Kieran, 1979).

Enfedaque (1990) llevó a cabo un estudio con alumnos de los antiguos 8º de EGB, de 1º y de 2º de BUP en Barcelona, aportando algunas sugerencias sobre cómo introducir el uso de las letras en álgebra para disminuir los errores en la misma, así como algunas cuestiones sobre la actitud del profesorado para detectar los anteriores y poder en definitiva mejorar la competencia algebraica de los alumnos.

Obstáculo epistemológico (Brousseau, 1997), caracterizado como aquel conocimiento que ha sido en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas y que por esta razón se fija a la mente del estudiante, pero que posteriormente resulta inadecuado cuando el alumno se enfrenta a nuevos problemas.

Trigueros, Reyes, Ursini y Quintero (1996) diseñan un cuestionario de diagnóstico del manejo del concepto de variable en el álgebra. Para ellos, el concepto de variable se usa con significados diversos en diferentes contextos y dependiendo de ello se maneja de distinta manera. Esta variedad en las formas de empleo hace que el concepto de variable sea difícil de definir y puede ser causa de muchas de las dificultades para los estudiantes. Consideran tres las formas en las que la variable suele usarse en el álgebra escolar: como incógnita, como número generalizado y en relación funcional.

Dado que no pretendíamos un estudio exhaustivo y que era un primer acercamiento al tema nos pareció oportuno utilizar el cuestionario y la entrevista, como instrumentos de recogida de datos, asumiendo en su realización diferentes recomendaciones propias de la metodología cualitativa.

De esta manera y, tras un proceso de validación adecuado, pasamos un cuestionario (anexo 1) a 91 alumnos procedentes de 4 Centros Educativos distintos, matriculados en el primer curso de Bachillerato de las opciones Tecnología o Ciencias de la Naturaleza y la Salud. Todos ellos ya habían sido instruídos en el concepto y uso de desigualdades e inecuaciones. Para la mayoría de ellos eran conceptos completamente nuevos y sólo algunos contaban con ciertas ideas previas sobre los objetos de estudio. El cuestionario fue pasado a los alumnos tras la instrucción en los temas abordados en el mismo. Y tras su posterior análisis se realizaron algunas entrevistas para profundizar las respuestas dadas.

En los resultados que damos a continuación mostramos algunos errores y dificultades detectados en la revisión del cuestionario pasado a los alumnos e intentar acercarnos a las causas de los mismos. En ningún momento, nos planteamos hacer un análisis estadístico exhaustivo de los datos recogidos aunque en el anexo 2 mostramos algunos resultados globales.

> *Según Socas (1997), las causas principales de los errores en el aprendizaje del álgebra se clasifican en errores con origen en un obstáculo y errores con origen en una ausencia de significado.*

Algunos resultados del análisis

En los dos primeros items se plantea el paso del lenguaje habitual al lenguaje algebraico en términos de una inecuación, así como el significado que los alumnos atribuyen a dichas expresiones y el uso que hacen de diferentes sistemas de representación.

Es elevado el número de alumnos que dan correctamente las expresiones pedidas, sin embargo, podríamos destacar de las respuestas obtenidas algunos aspectos. A pesar de llevar varios años trabajando con números reales, son pocos los alumnos que asumen este conjunto como el de referencia para sus operaciones, limitándose a los números naturales, lo que representa una dificultad para comprender el significado de intervalo. Es esta una constante en la resolución de diferentes items. De igual manera aunque se usa la variable como recurso para dar la expresión pedida, su significado no está suficientemente claro.

> *Trigueros, Reyes, Ursini y Quintero (1996) consideran tres las formas en las que la variable suele usarse en el álgebra escolar: como incógnita, como número generalizado y en relación funcional.*

En el segundo ítem hay alumnos que entienden la relación de orden pedida, dando incluso ejemplos, pero en el paso a la expresión algebraica escriben la relación al revés, problema que se hace mayor al intentar dar la doble desigualdad en un única expresión. Tienen dificultades para entender conjuntamente las dos desigualdades, aun escribiéndose juntas, su comprensión se hace por separado, lo cual trae consigo expresiones incoherentes como $n < -2 > -11$ (Una situación similar aparece en la resolución del ítem 11).

En el tercer ítem se pretende ver las competencias operatorias a la hora de resolver una inecuación sencilla, y la capacidad de interpretar la solución de la misma, a partir de una inecuación lineal de primer grado $[5 - 3(2 - x) > 4 - 3(1 - x)]$. Las respuestas las podríamos enmarcar en tres grupos distintos: los que resuelven correctamente la inecuación interpretando el resultado obtenido, es decir llegan a una expresión de la forma $0 > 2$ o $-1 > 1$, añadiendo que la inecuación no se verifica para ningún valor de la incógnita; los que resuelven la inecuación pero no son capaces de interpretar el resultado obtenido y por último los que ni siquiera resuelve correctamente la inecuación dada.

Estos resultados muestran las dificultades de interpretación puesto que aún cuando resuelven la inecuación no son capaces de sacar conclusiones. Esta situación se vislumbra, también, en algunos de los ejercicios inconclusos de los alumnos. En la resolución se aprecian también errores en la operatoria, en el uso de los paréntesis, de los sinos $<$ y $>$, de la propiedad distributiva, al operar con números enteros y en el paso de una inecuación a otra equivalente.

En este ejercicio empezamos a considerar que no encuentran diferencias conceptuales entre ecuación e inecuación, ya que se usan ambos términos para referirse al segundo.

Con esto, podemos apreciar que son muchos los problemas y dificultades que los alumnos presentan a la hora de resolver una inecuación. Algunos de ellos vienen de problemas no superados de álgebra elemental y otros son propios del tratamiento con inecuaciones. Muchos alumnos entienden los signos mayor y menor como nexos entre dos expresiones algebraicas que arrastran en los diferentes pasos de la resolución de una inecuación y que no aportan significado a la misma, hasta el punto que no les supone ningún problema sustituirlo por un signo igual. Pocos alumnos le dan contenido semántico a la inecuación, poniéndolo de manifiesto en el momento de interpretar el resultado al que llegan tras aplicar el algoritmo de resolución.

Muchos alumnos entienden los signos mayor y menor como nexos entre dos expresiones algebraicas que arrastran en los diferentes pasos de la resolución de una inecuación y que no aportan significado a la misma, hasta el punto que no les supone ningún problema sustituirlo por un signo igual.

Las dificultades para manejar expresiones que impliquen el signo menos en las inecuaciones y la relación de orden en los números reales es puesta de manifiesto en la resolución de los items 4 y 6. Son pocos los alumnos que seleccionan la respuesta correcta dando argumentos. En este caso, la mayoría de los alumnos se limitan a despejar usando las mismas técnicas que para las ecuaciones, poniendo de manifiesto de nuevo que el signo tiene poco contenido semántico y que el objetivo es operar y despejar la incógnita sin tener en cuenta el sentido que pueda o no tener el resultado obtenido.

Además, el ítem 6 nos muestra la dificultad de los alumnos para asimilar diferentes usos de las letras dentro del álgebra (también se muestra en los items 7 y 10). A este respecto, señalamos lo arraigado en los alumnos el pensar que a representa un número positivo y $-a$ un número negativo.

En el ítem 5, donde se pretendía ver en qué medida el alumno es capaz de interpretar la solución de dicha inecuación, se pone de manifiesto de nuevo la dificultad que para algunos alumnos supone leer una desigualdad, así como entender que el resultado de una inecuación no es un valor de la incógnita sino que es un intervalo. Ponemos algunos ejemplos de los errores cometidos:

– Se resuelve correctamente la inecuación, pero no se responde a la cuestión planteada por no saber qué hacer con los valores comprendidos entre 3 y 5.

– Una vez se ha llegado a $x > 3$, se tacha $x > 5$ ya que se cree que debería haber aparecido en el enunciado de la cuestión la primera expresión y no la segunda.

– Tras sustituir por 5 y 6 en la inecuación, se argumenta *Sí es cierta porque hay ejemplos que lo demuestran*.

Esta última solución nos confirma que muchos alumnos consideran que para justificar el enunciado pedido es suficiente con que el enunciado se verifique para un valor.

En el ìtem 8 los alumnos nos muestran la dificultad de conexión entre los lenguajes geométrico y algebraico. Es muy reducido el número de alumnos que usan el diagrama para justificar su respuesta, es decir, comparan el área del cuadrado de lado $a + b$ con las áreas de los cuadrados de lados a y b respectivamente. Para muchos alumnos el diagrama es un dibujo que en ningún momento relacionan con la cuestión planteada y del que no entienden su presencia. Es obvio que en su trabajo en álgebra no están acostumbrados a usar otras herramientas que no sean las propias del lenguaje algebraico para abordar cuestiones como la planteada y que esto puede tener su origen no en los propios alumnos, sino en los docentes y en los métodos que utilizamos en el aula. La mayoría de los alumnos intentan responder desarrollando el binomio suma y comparando las expresiones obtenidas.

También en el ìtem 9 los alumnos podrían haber utilizado el diagrama del ítem anterior, pero no fue así. El resultado de este ítem muestra la dificultad de los alumnos para este tipo de cuestiones. Tan sólo un alumno consigue demostrar el resultado pedido, siete obtienen el resultado tras comprobar su validez para varios casos y los demás no consiguen dar ningún argumento que justifique el enunciado.

Muchos alumnos consideran que para justificar el enunciado pedido es suficiente con que el enunciado se verifique para un valor.

En este ejercicio se muestran algunos errores comunes como considerar que: *si $a^2 > b^2$, se llega a que $a > b$ sin más que hacer la raíz cuadrada en ambos términos de la desigualdad*.

En otro sentido manifiestan dificultades para considerar la tesis e hipótesis. Es decir, se intenta demuestrar que $a^2 > b^2$ cuando $a > b$.

En el ítem 10 aparecen letras usadas de diferente manera, como incógnita y como número generalizado. No se pretende que el alumno dé el rango completo de valores para 'm', sino que consiga algún valor para el cual se cumplan las condiciones. El principal objetivo, no obstante, del ítem es ver cómo los alumnos entienden e interpretan lo que es una solución de una inecuación.

Las respuestas dadas se pueden agrupar de la siguiente manera: respuestas que encuentran un valor para m en las condiciones del enunciado, es decir, que encuentran un valor para m tal que al sustituirlo la inecuación resultante se verifique para $x = 0$ y no lo haga para $x = 2$; respuestas incorrectas y alumnos que dejan en blanco esta pregunta.

Un grupo de alumnos no diferencian el uso de las dos letras que aparecen en la inecuación planteada lo que conlleva una deficiente comprensión del enunciado dado. Por otro lado, parece como si en el momento que a un alumno se le plantea calcular el valor de una letra éste sólo contara con las ecuaciones para la obtención del mismo, hasta el punto de cambiar el signo de la expresión dada sin necesidad de justificación.

Esto último también se puede llevar al ámbito de interpretación de las soluciones de una inecuación, ya que llegar a una expresión de la forma $m < 1$, no es determinar la incógnita y se necesita dar una expresión en términos de igualdad, es decir, m tiene que ser igual a un único valor.

En los ítems 11 y 12 se pretende ver en qué medida el alumno percibe una relación funcional entre dos letras para establecer el rango de variabilidad de una letra en términos del rango de variabilidad de la otra.

En el ítem 11, una vez mas, el intento de dar una única expresión para una doble desigualdad, se muestra como una dificultad para muchos alumnos, aún habiendo asimilado la información aportada por la misma. Así, del enunciado *m es mayor que 3, pero más pequeño que 10* se obtiene la expresión $3 < m > 10$.

Los alumnos establecen diferencias sustanciales a la hora de dar significado a la relación funcional entre las dos letras. Obtener los valores de m a partir de los de n no supone gran dificultad, sin embargo el proceso contrario supone ciertas dificultades conceptuales que derivan de los conceptos creados de variable dependiente e independiente.

Los intervalos son calculados sustituyendo el menor y el mayor valor de una de las letras en la relación dada y obteniendo los correspondientes valores para la otra letra, es decir, *si* $3 < m < 10$ *como* $m = 3 + n$, *entonces* $10 = 3 + n$ *y* $3 = 3 + n$, *de donde se tiene que* $n = 0$ *y* $n = 7$ *y el resultado sería (0,7).*

En el ítem 12 las respuestas se pueden clasificar en: resultados correcto, es decir, c debe tomar valores menores que 5; se da como resultado tan sólo algún valor para c; se responden incorrectamente y por último destacar el notable número de alumnos que no dan respuesta alguna.

De nuevo podemos comprobar que los alumnos, en general, no ven las inecuaciones como una herramienta que puede ser utilizada para resolver determinado tipo de problemas puesto que son pocos los que hacen uso de ellas para responder este ítem. Son muchos los que intentan por todos los medios llevar la cuestión al campo de los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas para poder responder y en ausencia de una segunda ecuación renuncian a contestar.

La relación $c + d = 0$ es vista como una ecuación con dos incógnitas y como no encuentran otra ecuación con dos incógnitas, se argumenta que el problema no puede resolverse porque falta una ecuación.

Por otro lado, está la comprobación de los resultados obtenidos. Obtener un resultado coherente con las condiciones de un problema es el objetivo fundamental de la resolución del mismo, sin embargo para muchos de nuestros alumnos el objetivo es encontrar un procedimiento para llegar a una solución que en ningún momento es necesario comprobar ya que el propio procedimiento justifica su validez.

> *Para muchos de nuestros alumnos el objetivo de la resolución de un problema es encontrar un procedimiento para llegar a una solución que en ningún momento es necesario comprobar ya que el propio procedimiento justifica su validez.*

Conclusiones

Antes de terminar, quisiéramos señalar algunas de las conclusiones del estudio:

1. La comprensión del concepto de inecuación es deficiente en una parte importante de nuestros alumnos. Muchos de ellos no establecen diferencias significativas entre este con-

cepto y el de ecuación, es decir, la diferencia entre unas y otras es el signo que se escribe entre los dos miembros que forman parte de las mismas, mientras que en las ecuaciones utilizamos el signo =, en las inecuaciones utilizamos los signos <, > (y estos dos últimos con igualdades). Además, este signo carece de valor semántico ya que se utiliza como un nexo entre los dos miembros de la inecuación.

2. Siguiendo con la interpretación que los alumnos hacen de los signos utilizados en el trabajo con inecuaciones, añadir que esa ausencia de significado también se manifiesta en dificultades al leer de izquierda a derecha o de derecha a izquierda, es decir, dificultades para reconocer la equivalencia de las expresiones $x > 1$ y $1 < x$.

3. Aparecen serias dificultades a la hora de pasar de un enunciado verbal a una expresión algebraica, sobre todo si ésta incluye una doble desigualdad. Quizás lo anterior se derive de una introducción excesivamente rápida de este tipo de expresiones, así como de lo expresado en el punto anterior.

4. Teniendo en cuenta que muchos alumnos no establecen diferencias semánticas entre ecuación e inecuación, así como algunas de las concepciones que los alumnos muestran de intervalo –conjunto de números naturales o a lo más enteros comprendidos entre otros dos–, la interpretación que de la solución de una inecuación se hace, tampoco parece ser la más apropiada si lo que pretendemos es dotar de contenido semántico al objeto de nuestro estudio.

Los alumnos manifiestan dificultades al leer de izquierda a derecha o de derecha a izquierda, es decir, dificultades para reconocer la equivalencia de las expresiones $x > 1$ y $1 < x$.

5. Para buena parte de nuestros alumnos, el álgebra es *operar* con números y letras, sin otro objetivo que el de obtener valores para las mismas aplicando algoritmos de resolución. Así, cuando se tiene una expresión de la forma $-7x < 5$, el objetivo es dejar sola la incógnita y para ello *se pasa el –7 dividiendo al otro lado de la inecuación* como si se tratase de una ecuación, pasando a un segundo plano la pretensión de encontrar valores para la incógnita que hagan cierta la desigualdad.

6. Llama la atención la diferencia en los resultados de los ítems 4 y 6 teniendo en cuenta que en los dos se plantea la misma cuestión, parece que la redacción del segundo facilita la aplicación de lo que los alumnos llaman *regla para inecuaciones* —si multiplicamos o dividimos una inecuación por un número negativo, cambia el signo de dicha inecuación— , ya que la comprensión de la misma se muestra insuficiente.

En relación a los diferentes sistemas de representación debemos decir que nuestros alumnos no usan más que el lenguaje algebraico para abordar las diferentes cuestiones planteadas.

7. También se pone de manifiesto que son muchos los alumnos que aún no han superado ciertas dificultades propias de la aritmética, como son la aplicación de la propiedad distributiva o el uso de la regla de los signos, lo cual dificulta aún más la adquisición de un concepto que requiere un manejo adecuado de las mismas.

8. El uso que los alumnos hacen de las letras no siempre responde a una necesidad de las mismas, llegándose a utilizarlas sin atribuirles significado alguno. Corroborando los resultados obtenidos en investigaciones anteriores en torno a los diferentes usos que de las letras se hacen en álgebra se tiene:

- Las letras como números generalizados encuentran como dominio el conjunto de números naturales —a lo sumo los números enteros— , con las limitaciones que ello supone, sobre todo al trabajar con inecuaciones cuyos resultados son intervalos de números reales.

- La letra entendida como incógnita es la que tiene mayor significado y reconocimiento por parte de nuestros alumnos, sin embargo la necesidad de encontrar valores concretos para la misma derivado de su uso en ecuaciones, suponen un obstáculo importante en la interpretación de la solución de una inecuación.

- Por último, cuando las letras son utilizadas en relaciones funcionales, adquiere gran importancia la forma en la que se da esta relación, puesto que están muy arraigadas en los alumnos las ideas de variable dependiente e independiente con lo que ello supone para la reversibilidad de la relación.

9. En relación a los diferentes sistemas de representación y entendiendo que el uso de más de un sistema favorece la comprensión del álgebra ya que proporcionan estrategias alternativas y complementarias (Palarea y Socas, 1999), debemos decir que nuestros alumnos no usan más que el lenguaje algebraico para abordar las diferentes cuestiones planteadas. En la mayoría de los casos, lo anterior es consecuencia de la forma en la que muchos de nosotros, los docentes, entendemos y llevamos a nuestras aulas la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, es decir, sólo hacemos uso del lenguaje algebraico para desarrollar los contenidos de álgebra, sin proporcionar otras herramientas para representar conceptos y favorecer así el aprendizaje de los mismos.

10. La ausencia de significado es uno de los principales problemas que se plantean en el trabajo con inecuaciones y si lo que pretendemos es que el alumno no reduzca su aprendizaje de inecuaciones a meras tareas mecánicas, es importante que el alumno tenga una idea clara del concepto de inecuación equivalente, pues es éste el que da significado a las técnicas de resolución.

11. En relación a las dificultades derivadas de la complejidad de los elementos del álgebra, los docentes deberíamos tener en cuenta en la enseñanza de las inecuaciones aspectos como: no introducir el concepto, así como las técnicas de resolución demasiado rápido; asegurarnos de que los símbolos utilizados están claramente diferenciados y que tienen valor semántico para los alumnos; establecer con claridad las diferencias entre los conceptos de ecuación e inecuación; no introducir la notación formal hasta que el concepto de inecuación, así como las técnicas de resolución, estén claramente adquiridas; en la medida de lo posible, evitar la complejidad notacional que en ocasiones resulta innecesaria.

La ausencia de significado es uno de los principales problemas que se plantean en el trabajo con inecuaciones por lo que es importante que el alumno tenga una idea clara del concepto de inecuación equivalente, pues es éste el que da significado a las técnicas de resolución.

Anexo 1

Responde las siguientes cuestiones en el folio en blanco, intentando en todas ellas justificar la respuesta dada.

1. Escribe la fórmula que expresa: "un número desconocido es mayor que 5" e indica los números a los que corresponde.

2. Expresa mediante una fórmula: "n es menor que -2 y mayor o igual que -11"

3.¿Qué números reales verifican la siguiente desigualdad:

$$5 - 3(2 - x) > 4 - 3(1 - x)?$$

4. Dada la inecuación $-7x < 5$, ¿cuál de los siguientes conjuntos sería su solución?:

Los números reales mayores que $-{}^5/_7$
Los números reales menores que $-{}^5/_7$

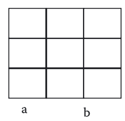
5. Justifica que la inecuación $4x + 1 > 3x + 4$ es cierta cuando $x > 5$.

6. a) Sabiendo que $a < b$, ¿qué relación habría entre $-a$ y $-b$?
b) Sabiendo que $-c \geq -d$, ¿qué relación habría entre c y d?

7. Dadas las expresiones $2a$ y $2 + a$, ¿cuál de ellas crees que es mayor y por qué?

8. Observa el siguiente diagrama:

Un cuadrado de lado $a + b$



A partir del mismo justifica si son verdaderos o falsos los siguientes enunciados:

$$(a + b)^2 < a^2 + b^2$$
$$(a + b)^2 = a^2 + b^2$$
$$(a + b)^2 > a^2 + b^2$$

9. Si $a > 0$, $b > 0$ y $a^2 > b^2$, explica por qué implica que $a > b$.

10. Consideramos la expresión $mx + 1 - m > 0$, donde m puede ser cualquier número real. Encuentra algún valor de m para que la inecuación resultante se cumpla en $x = 0$ y no se cumpla en $x = 2$

11. Consideramos la expresión $m = 3 + n$.
a) Si queremos que los valores de m sean mayores que 3 y más pequeños que 10, ¿qué valores puede tomar n?
b) Si n toma valores entre 8 y 15, ¿qué valores tomará m?

12. Indica, justificando tu respuesta, los valores que toma c si $c + d = 10$ y c es inferior a d.

Item	Respuesta correcta	Respuesta parcialmente correcta	Respuesta incorrecta	No responde
1	43,9	(a) 54,9	1,2	0
2	87,9		12,1	0
3	29,7	(b) 23,1	38,4	8,8
4	19,8	(c) 19,8	60,4	0
5	25,3	(d) 40,6	29,7	4,4
6	59,3		33	7,7
7	9,9		85,7	4,4
8	(e) 14,3 (f) 9,9		74,4	4,4
9	1,1	(g) 7,7	80,2	11
10	17,5		62,7	19,8
11	31,9		53,8	14,3
12	31,9		45	23,1

Tabla 1. Resultados en porcentajes

Anexo 2

Tabla resumen de los porcentajes —de respuestas correctas, parcialmente correctas, incorrectas y presentadas en blanco— obtenidos:

(a) Se da la fórmula pedida pero no se indican los números con los que se corresponde dicha fórmula.

(b) Se resuelve la inecuación pero no se interpreta el resultado obtenido.

(c) Se señala la opción correcta pero sin justificar.

(d) Sólo se justifica considerando valores concretos por encima del 5.

(e) Respuestas correctas usando el diagrama proporcionado en el ítem.

(f) Respuestas correctas sin usar el diagrama.

(g) Justifica la implicación haciendo uso de varios ejemplos válidos. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEHR, M. ET ALL. (1980): “How children view the equal sign”, *Mathematics Teaching*, 92, 13-15.

BROUSSEAU, G. (1997): *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.

COLLIS, K.F. (1975): *A study of concrete and formal perations in school mathemtics: a Piagetian view point*, Australian Council for educational research, Melbourne.

ENFEDAQUE, J. (1990): “De los números a las letras”, *Suma*, n.º 5. pp. 23-34.

GRUPO AZARQUIEL (1991): *Ideas y actividades para enseñar álgebra*, Síntesis, Madrid.

KIERAN, C. (1981): Concepts associated with the equality symbol, *Educational Studies in mathematics*, 12. pp. 317-326.

PALAREA, M.M.(1999): La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación, *Números*, n.º 40. 3-28.

PALAREA, M.M y SOCAS, M.M.(1999-2000): “Procesos cognitivos implicados en el aprendizaje del lenguaje algebraico, Un estudio biográfico”, *El Guiniguada*, n.º 8/9, pp. 319-336.

SANTOS, M.A.(1992): “Problemas algebraicos de los egresados de educación secundaria”, *Educación matemática*, n.º 4(3). pp. 43-51.

SOCAS, M.M. (1997): “Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria”, en Rico, L. y otros: *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, ICE/Horsori, pp. 125-154.

SOCAS, M.M., CAMACHO, M. Y HERNÁNDEZ, J.(1998): “Análisis didáctico del lenguaje algebraico en la enseñanza secundaria”, *Revista Interuniversitaria de formación del profesorado*, n.º 32. pp. 73-86.

SOCAS, M.M., CAMACHO, M., PALAREA, M. Y HERNÁNDEZ, J. (1989): *Iniciación al álgebra, Matemáticas: Cultura y Aprendizaje*, Ed. Síntesis, n.º 23, Madrid.

TRIGUEROS, M., REYES, A., URSINI, S. y QUINTERO, R.(1996): “Diseño de un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra”, *Enseñanza de las ciencias*, n.º 14(3). pp. 351-363.

SUMA 46
Junio 2004, pp. 45-50

Un álgebra computacional para generar patrones geométricos

Presentamos un formalismo para desarrollar patrones geométricos, como frisos, mosaicos, rosetones y algunos tipos de fractales. Asimismo se describe una implementación computacional disponible libremente desarrollada por el presente autor. También se comenta una experiencia didáctica llevada a cabo en 4º de ESO empleando este formalismo. El álgebra se basa en los objetos figura *y* operador*, con una extensión natural de la operación suma que resulta de gran utilidad.*

We present in this paper a formalism to develop geometrical standards, like friezes, mosaics, rosettes and some types of fractals. In addition to that, an available computational implementation freely developed by the present author is described. A didactic experience carried out with students at their last year of compulsory education (4º de ESO) where this formalism was used is also commented on. The algebra is based on the objects figure *and* operator *with a natural extension of the addition operation which is very useful.*

Mosaicos, espirales, frisos, rosetones, fractales y otros patrones geométricos son imágenes capaces, al mismo tiempo, de resultar atractivas a la vista e intrigantes al intelecto (Coxeter, 1961 y Mandelbrot, 1982). De alguna forma, la búsqueda y comprensión a nivel intuitivo de una regularidad natural no trivial resulta siempre un impacto estético. Para Kant tal impacto justifica la conexión intrínseca entre el mundo y la mente (Kant, 1968). Esta idea no deja de ser sugerente aunque tales vuelos metafísicos sean excesivos para nuestras mentalidades más prácticas.

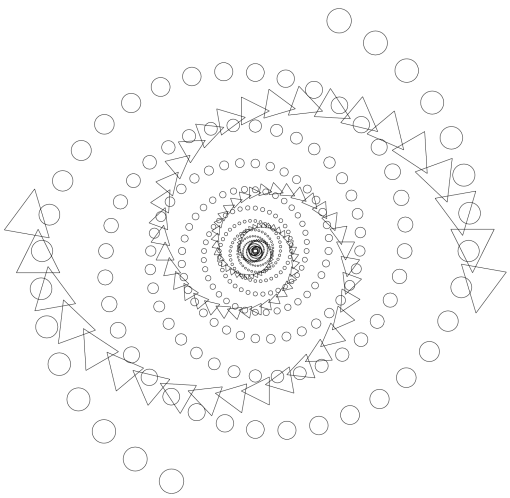


Figura 0. Una doble doble espiral

r=(-1,9)(-1,11)(1,10)(-1,9)
c=C(0,10,0.5)
A=I+R(10)·S(1.05)
B=I+R(-10)·S(1.02)
j1=A100 r
j2=B250c
(I+R(180))(j1+j2)*

Atengámonos ahora a la mencionada visión práctica. A partir de una figura simple y aplicando juiciosamente operadores de traslación, rotación y escala se pueden obtener patrones muy complejos. Presentamos en este trabajo una notación algebraica conveniente para el uso en clase, y después una implementación computacional concreta de dicha notación (libremente disponible). Ambas han sido aplicadas con éxito con alumnas y alumnos de 4º de ESO en el IES Ágora de Alcobendas (Madrid).

Javier Rodríguez Laguna
IES Ágora (Alcobendas - Madrid)
Instituto de Física Teórica (CSIC/UAM).

Notación algebraica para operadores geométricos

Trabajaremos con dos tipos de objetos: figuras y operadores, que actúan sobre éstas. Las figuras atómicas que consideraremos son poli-segmentos y circunferencias. Los primeros se denotan por la secuencia de coordenadas de sus puntos. Un ejemplo: a = (0,0)(10,0)(10,10)(0,10)(0,0) es un cuadrado de lado 10. Las segundas se especifican según esta notación: *C(x,y,R)*, donde x e y son las coordenadas del centro y R es el radio. Así, b = C(5,2,10) es una circunferencia de centro (5,2) y radio R = 10.

El conjunto de las figuras está dotado de una operación binaria interna: la *suma*, cuya semántica es meramente la aparición conjunta sobre el papel (o unión conjuntista). De esta manera, $c = a + b$ denotaría la figura que consta del cuadrado y la circunferencia (ver figura 1). La potencia de esta operación no debe ser subestimada, como veremos a continuación.

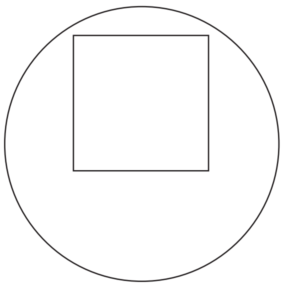


Figura 1. Un cuadrado y una circunferencia

c=(0,0)(10,0)(10,10)(0,10)(0,0)+C(5,2,10)
c

Ahora introduciremos los operadores. El primero, más simple, la identidad: *I*. Obviamente, no hace nada. El siguiente más sencillo es la traslación: *T(x,y)* traslada según el vector *(x,y)*. La rotación $R(x,y,\alpha)$ rota una figura en torno al punto *(x,y)* un ángulo α. Si escribimos $R(\alpha)$ sin más, la rotación es en torno al origen.

Antes de introducir el último tipo de operador, introduzcamos las operaciones internas de suma + y producto · de operadores. El producto es meramente la composición de operadores, como es usual. La suma, en cambio, hereda sus propiedades de la suma de figuras. Dicho de otra forma: todos los operadores son lineales respecto a la suma de figuras.

Unos cuantos ejemplos se hacen ya imprescindibles. Podemos generar el operador *A=I+T(20,0)+T(40,0)* y aplicarlo sobre la figura *c* para obtener lo que observamos en la figura 2: se crean tres copias de la figura original, o sea, de la figura 1. La primera queda sin transformar (*I*), la segunda se traslada veinte unidades a la derecha (T(20,0)) y la tercera se traslada 40 unidades a la derecha.

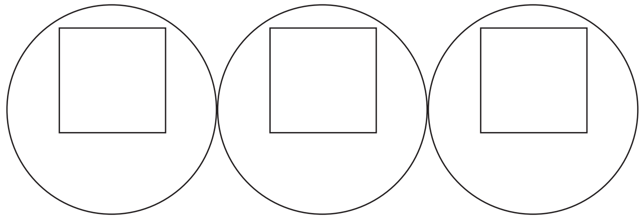
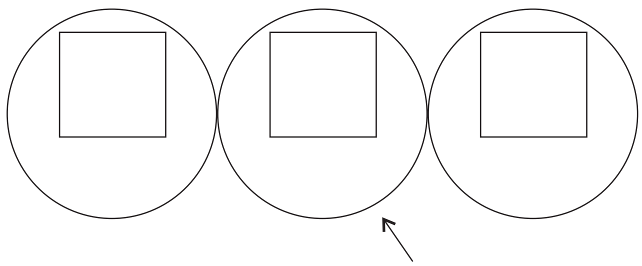


Figura 2. La figura anterior, trasladada dos veces

c=(0,0)(10,0)(10,10)(0,10)(0,0)+C(5,2,10)
c=(I+T(20,0)+T(40,0))·c
c

La composición de operadores también resulta muy instructiva: *B=T(20,0)·T(20,0)* es un nuevo operador que resulta de aplicar dos traslaciones consecutivas de diez pasos a la derecha. Obviamente, *B=T(40,0)*. Es el momento lógico de introducir la noción de *potencia de un operador*. Así, podemos decir que $T(20,0)^2=T(40,0)$.

Estudiemos ahora el operador $C=(I+T(20,0))^2$. Pide la aplicación dos veces consecutivas del operador *I+T(20,0)*, que convierte cualquier figura en dos copias separadas 20 unidades en el eje horizontal. La segunda aplicación generaría cuatro copias (ver figura 3), pero la segunda copia y la tercera coinciden exactamente. Consideraremos dos figuras que solapan exactamente como la misma, así que podemos decir que se generan tres figuras. Desarrollando el cuadrado por las técnicas tradicionales tenemos *C=I+T(20,0)+T(40,0)*. De esta sencilla manera podemos obtener un friso a partir de cualquier figura: $(I+T(20,0))^{20}$ genera 21 copias de la misma figura, todas en fila.



Esta figura aparece dos veces
Figura 3: Mismo resultado que en la figura anterior, por un procedimiento diferente. La figura central es doble debido al término mixto

c=(0,0)(10,0)(10,10)(0,10)(0,0)+C(5,2,10)
(I+T(20,0))2 ·c

Un rosetón se genera de idéntica manera: $D=(I+R(30))^{11}$ nos proporciona el resultado de la figura 4. Dejamos como ejercicio para el lector la realización de un mosaico en red cuadrada (figura 5) o hexagonal (figura 6).

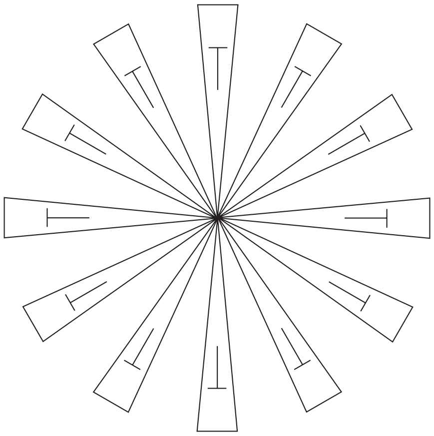
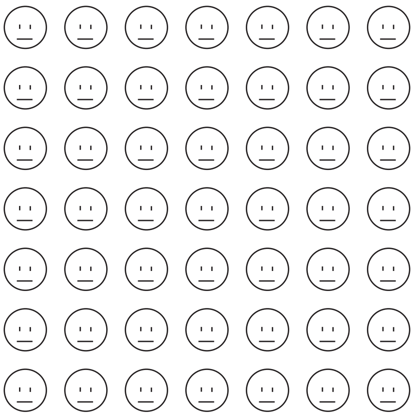
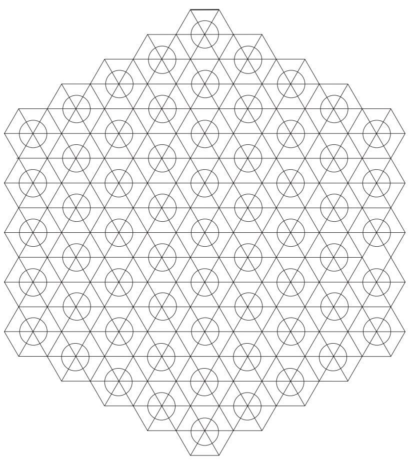


Figura 4. Un rosetón sencillo, con un ángulo base de 30º

r=(-10,100)(0,0)(10,100)(-10,100)
r=r+(-5,80)(5,80)+(0,80)(0,60)
A=R(30)

$B=(I+A)^{11}$
$B\cdot r$





Figuras 5 y 6. Una red cuadrada y una red hexagonal. ¿Podrías escribir el código?

El último tipo de operador es el cambio de escala: *S(x,y,k)* realiza una homotecia de factor k en torno al punto *(x,y)*. En cambio, *S(k)* la realiza en torno al origen. Vamos a realizar la primera figura con propiedades no triviales de invariancia bajo cambios de escala (es decir: fractal). Tomemos cualquier figura *r* (en el ejemplo, un *smiley* de radio 10) y apliquemos la operación *P=S(0.5)·(I+T(10,0)+T(5,8.66))* sobre ella. ¿Qué sucede? Se distribuyen tres copias formando (aproximadamente, claro) un triángulo equilátero. El operador de escala que actúa al final reduce a la mitad el tamaño de la figura final. Volvamos a aplicar el mismo operador *o*, mejor, apliquemos P^2 desde el principio. Y luego, sucesivas potencias de *P*. Obtenemos una secuencia de figuras que converge al triángulo de Sierpinski, sea cual sea la figura de partida. Mostramos la secuencia de potencias en la figura 7.

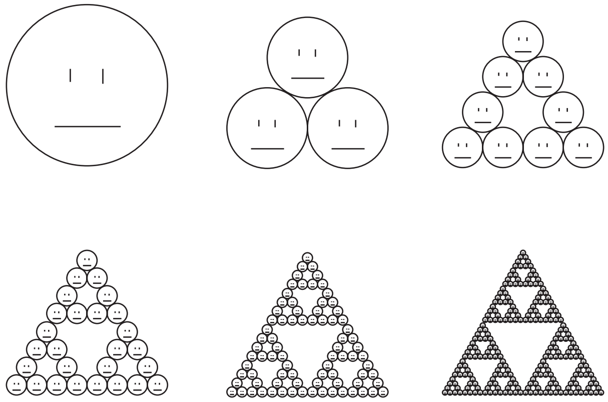


Figura 7. La formación del triángulo de Sierpinski a partir de una imagen cualquiera. Dado que la aplicación es contractiva, la convergencia es segura

r=C(5,5,5)+(4,6)(4,5)+(6,6)(6,5)+(3,3)(7,3)
A=S(0.5)·(I+T(10,0)+T(5,8.66))
B=T(12,0)
sierp=(I + B·A + B2·A2 + B3·A3 + B4·A4 + B5·A5)·r
sierp

Este proceso de generación de imágenes fractales es bien conocido por los especialistas (Edgar, 1990 y Fisher, 1995), y es objeto de intensa investigación en vistas a la construcción de un algoritmo de compresión de imágenes naturales que supere los defectos del JPEG.

El formalismo en el ordenador

Ha sido desarrollado, por el presente autor, un intérprete del lenguaje computacional citado. Hay unas pocas diferencias tipográficas: el producto de operadores (o la aplicación de un operador sobre una figura) se denota por * mientras que la elevación del operador *A* a la potencia *n* se denota por *A^n*. El nombre de dicho intérprete es Programa para la Aplicación de Traslaciones y Otros Operadores: PATOO.

El intérprete se ha escrito bajo *Linux* en lenguaje C utilizando el programa libre *bison* y ha sido liberado bajo la Licencia Pública General (GPL) (que permite la copia y distribución libre bajo condiciones triviales). Posteriormente, fue portado a un popular entorno de pago. Ambas versiones pueden ser encontradas en

http://gdlang.sourceforge.net/patoo

La versión para *Linux* es, además, capaz de exportar gráficos PostScript, haciendo muy fácil la creación de figuras de alta calidad para impresión.

Es preciso indicar que el programa está en una fase temprana de desarrollo en cuanto a la facilidad de uso. El autor desea instar a quienes estas páginas leen para que contribuyan cualquier idea o sugerencia en la citada página web.

Aplicación didáctica

Ha sido llevada a cabo una experiencia didáctica en dos partes, con alumnas y alumnos de 4º de ESO del IES Ágora (Alcobendas). Es preciso mencionar que el tema de operadores geométricos es parte del currículum oficial, aunque normalmente está menos atendido de lo que debería. Es posible que sea debido a la formación excesivamente analítica que se recibe en la universidad española. Pero también es un factor importante la relativa ausencia de presentaciones no triviales con aspectos cuantitativos de dicho tema, que nuestra aportación desea atenuar.

La primera parte consistió en diez sesiones en las cuales se trabajó, ante todo, el concepto de coordenadas y la notación para figuras, incluyendo la *sobrecarga* del símbolo +. La idea de operador de traslación, producto de operadores, potencia de un operador y operador identidad fueron fáciles de introducir, e incluso nos permitimos discutir el concepto de operador inverso. Lo que requirió el grueso de nuestros esfuerzos en esta etapa fue la extensión del símbolo de adición para actuar entre operadores.

Una vez superada esta primera barrera, la introducción de la simbología para los operadores de rotación y escala fue comprendida sin dificultad, y pudimos pasar a la segunda etapa del proyecto: ante los ordenadores.

Por supuesto, esta segunda etapa no es *imprescindible*, pero sí muy recomendable. La razón es que con papel y lápiz se pueden desarrollar figuras interesantes, pero es cuando contamos con la potencia de cálculo de un ordenador (siquiera pequeño y desfasado) cuando los resultados se muestran impresionantes. ¡La figura 7 consta de más círculos de los que ninguna persona en su sano juicio querría dibujar jamás! (y sin embargo, el efecto merece la pena).

El proceso de enseñanza asistida por ordenador comenzó con unos ejercicios simples, que consistían en copiar programas cortos y observar el efecto. Tras esta toma de contacto pasamos a unos *acertijos* tipo tan-gram, en los que se veía la figura final y se debía encontrar el programa que la duplicaba con exactitud. Una vez superadas las dos fases, se dejó al alumnado unos días de desarrollo libre de su creatividad, en los que se consiguieron los resultados más interesantes.

Como colofón, desearía insertar aquí algunas de las figuras desarrolladas por los alumnos. Hay más en la página web citada anteriormente.

Mosaicos, espirales, frisos, rosetones, fractales y otros patrones geométricos son imágenes capaces, al mismo tiempo, de resultar atractivas a la vista e intrigantes al intelecto (Coxeter, 1961 y Mandelbrot, 1982). De alguna forma, la búsqueda y comprensión a nivel intuitivo de una regularidad natural no trivial resulta siempre un impacto estético.

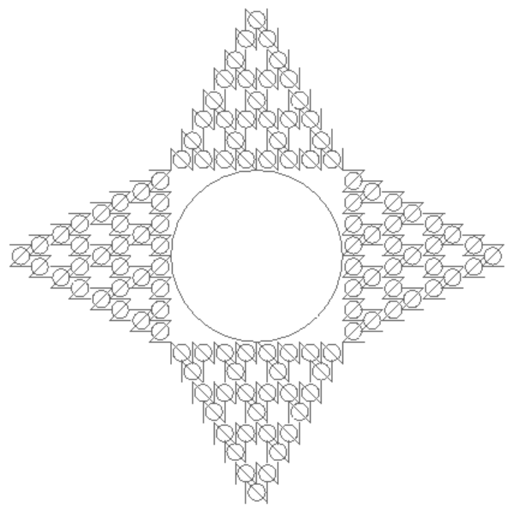


Figura 8*a*. Figura realizada por María Luisa Jiménez e Izhar Martín. El código está en la citada página web

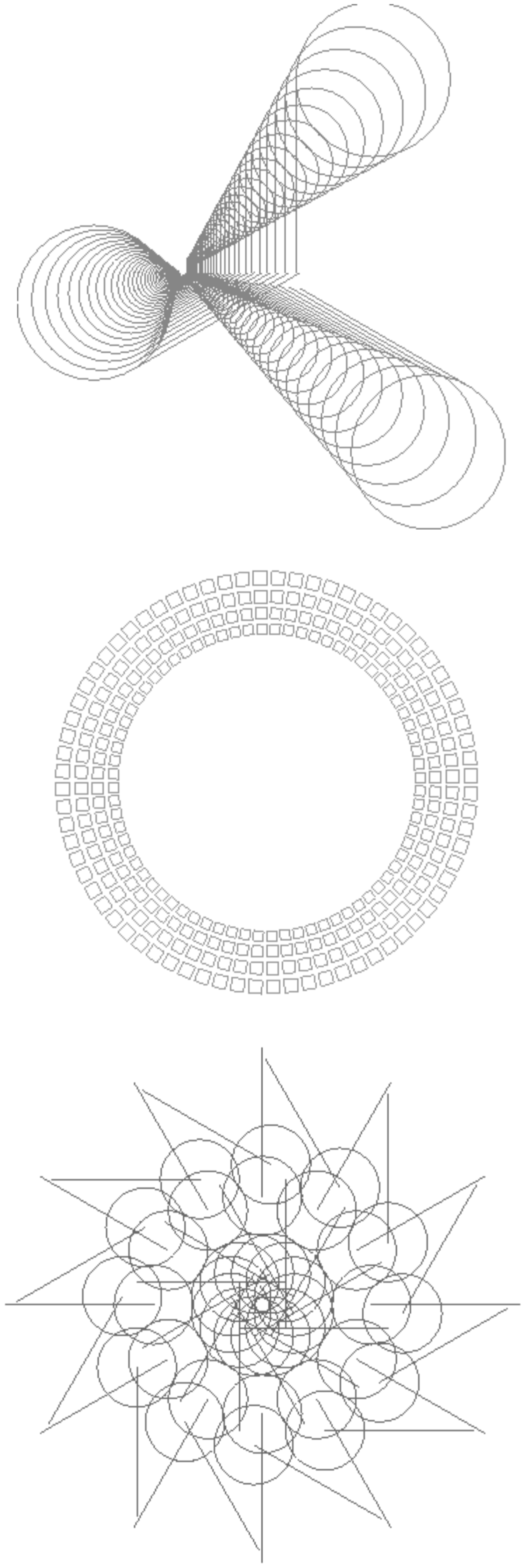


Figura 8*b*. Figuras realizadas por Fco. García-Calvo. El código está en la citada página web

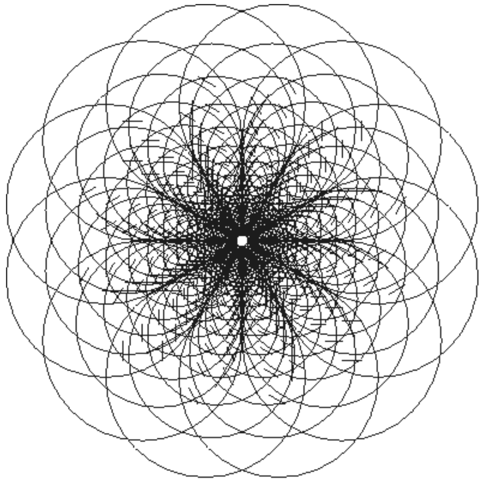


Figura 8*c*. Figura realizada por F. Javier García y Luis N. García. El código está en la citada página web

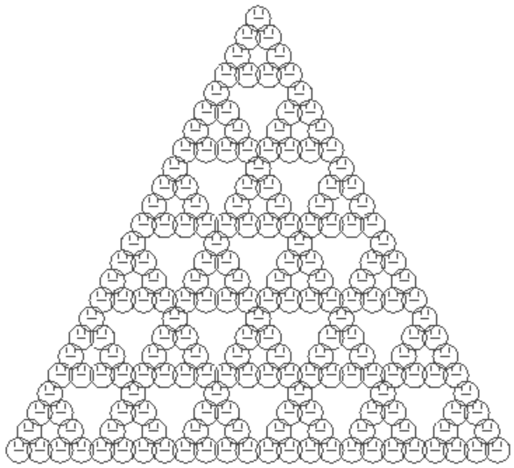


Figura 8*d*. Figura realizada por Javier Burgués and Álvar Martín. El código está en la citada página web

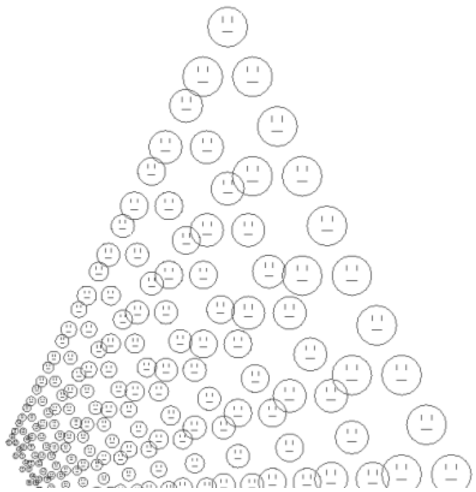


Figura 8*e*. Figura realizada por José María Martín y Silvia Sampalo. El código está en la citada página web

Conclusiones y perspectivas de futuro

Normalmente se considera que el álgebra de operadores, la teoría de grupos, etc. son asuntos demasiado complejos como para entrar en el currículum de la enseñanza secundaria. Esta apreciación se basa en su alto grado de abstracción. Ahora bien, recordando el consejo del profesor Puig Adam: *graduar cuidadosamente los planos de abstracción*, y teniendo en cuenta la importancia del tema en la matemática actual y en sus aplicaciones, se hace perentoria la necesidad de crear una fase *manipulativa concreta*. La geometría se presta especialmente bien para tal fin, aunque se insta a quien lea este trabajo a diseñar otros entornos similares, como podrían ser la teoría de trenzas, las permutaciones... de manera motivadora para el alumnado.
Asimismo existen muchas posibles ampliaciones para este formalismo. Hemos pensado (entre otras cosas) introducir arcos, operaciones inversivas, insertarlo en un programa de geometría interactiva en desarrollo

http://gdlang.sourceforge.net

y, desde luego, mejorar la interfaz. Cualquier sugerencia a javier.laguna@uam.es será bienvenida.

Agradecimientos

El autor desea agradecer sus discusiones con M.A. Martín-Delgado, G. Sierra, I. Rodríguez, M. Carrión y, especialmente, S.N. Santalla, así como la buena disposición a la investigación del Dpto. de matemáticas del IES Ágora. Pero, ante todo, dese expresar mi más sincero reconocimiento para mis alumnas y alumnos de 4º de ESO, que son prueba viviente de que el nivel educativo sube.

> *Normalmente se considera que el álgebra de operadores, la teoría de grupos, etc. son asuntos demasiado complejos como para entrar en el currículum de la enseñanza secundaria.*

Apéndice: puntos técnicos

Un par de anotaciones técnicas sobre la implementación actual del PATOO: el extremo inferior izquierdo de la pantalla es el punto (–200, –200) y el superior derecho es el (200, 200). El símbolo # frente a una línea la convierte en un comentario. Ninguna asignación provoca la salida a pantalla: hay que dar el nombre a posteriori, como se hace en los ejemplos. Para salida a gráficos PostScript, escribir *print* y el nombre de la figura. El nombre del archivo de salida será *nuevo.ps* si se ejecuta de manera interactiva, y el nombre del archivo de comandos terminado en *.ps* en caso contrario. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

COXETER, H.S.M. (1961): *Introduction to Geometry*, John Wiley, Nueva York.

EDGAR, G.A. (1990): *Measure, topology and fractal geometry*, Springer, Berlín.

FISHER, Y. (ed.) (1995): *Fractal image compression*, Springer, Berlín.

KANT, I (1968): *Crítica del Juicio*, Losada, Buenos Aires. (Primera ed. en alemán en 1790).

MANDELBROT, B.B. (1982): *The fractal geometry of nature*, Freeman & Co., Nueva York.

SUMA 46
Junio 2004, pp. 51-57

Actividades sobre el número π con calculadora gráfica

En este artículo presentamos una actividad dirigida a las aulas de Secundaria y de Bachillerato: el estudio del número π en momentos clave de la historia. *En ella se abordan varios frentes: primero afrontamos la enseñanza de contenidos y procedimientos matemáticos de esos niveles educativos mediante el uso de la tecnología suministrada por calculadoras gráficas. Después, vinculamos al alumno con procesos propios del quehacer matemático, proponiéndole tareas de indagación y descubrimiento. Por último, utilizamos elementos de la historia de la matemática como hilo conductor que articula todo el proceso.*

In this article we present a maths activity meant for students at Secondary Education (compulsory and not compulsory) : The study of number π in key moments in history. In this activity several aspects are taken into account: Firstly, we face the teaching of mathematical contents and procedures at those educational levels by using the technology made available by graphic calculators. Then, we put the student in touch with characteristic processes of the mathematical doing, setting for him some tasks of inquiry and discovery. Finally, we use some elements in the history of Maths as the thread that draws together the whole process.

En las recomendaciones del MEC en los documentos del Diseño Curricular base de Educación Secundaria Obligatoria (MEC, 1989) encontramos directrices genéricas sobre el uso de nuevas tecnologías en el área de Matemáticas, sin que se especifique de forma precisa cuál debe ser su uso ni en qué parcelas concretas de las matemáticas puede ser útil. Sin embargo se reconoce que los nuevos medios tecnológicos han de tener repercusiones en la manera de enseñar las matemáticas y en la selección de contenidos. Por lo que respecta a los nuevos Decretos de Enseñanzas Mínimas de ESO y Bachillerato, se han eliminado en ellos los contenidos relativos al uso de la calculadora (que aparecían en el decreto anterior), pero se sigue aludiendo a esta herramienta de forma explícita, reconociendo su utilidad para desarrollar procedimientos rutinarios, como recurso investigador que facilita la interpretación y análisis de situaciones en los distintos dominios de las matemáticas, o para resolver situaciones problemáticas diversas.

En la actualidad, las calculadoras gráficas (como la TI-89, la TI-92, etc.) proporcionan posibilidades de producir cambios valiosos en la forma en que los profesores enseñan y los estudiantes aprenden matemáticas en secundaria. Se trata de calculadoras 'de bolsillo' que poseen cuatro amplias áreas de funcionalidad (Demana y Waits, 1998):

- Realizan aritmética exacta con números racionales, reales y complejos,
- realizan cálculo simbólico,
- obtienen soluciones numéricas,
- dibujan gráficas y superficies.

Además, algunos modelos incorporan software de geometría dinámica. El hecho de integrar en un mismo ambiente estos diferentes ámbitos las hace adecuadas, en particular, como soportes de representación y manipulación de conceptos matemáticos variados.

Desde un punto de vista educativo, determinados usos de la calculadora se consideran adecuados para promover el desarrollo de habilidades cognitivas, producir aprendizajes significativos, facilitar el aprendizaje de conceptos, ayudar a resolver problemas, etc. Todo ello inmerso en una metodología de enseñanza de carácter constructivista, basada en la participa-

Jose Luis Lupiáñez Gómez
Facultad Ciencias de la Educación (Granada).
María José González López
Facultad de Ciencias (Santander).

ción activa del alumno mediante la exploración y el desarrollo de proyectos.

Así pues, nuestro interés, lejos de resaltar las cualidades técnicas de las calculadoras, está en considerarlas como herramientas integradas en un conjunto de prácticas matemáticas que permitan al alumno abordar, globalmente y desde distintos frentes, el tratamiento de algunos conceptos matemáticos significativos, relacionarlos entre sí y analizarlos de forma no compartimentada. En ese sentido consideramos fundamental el desarrollo de actividades con la calculadora que respondan a las siguientes características (extraídas de lo que Gorgorió y otros (2000, p. 61) denominan *actividades ricas*):

- permiten establecer relaciones entre distintas áreas del currículo,

- sirven como introducción y motivación para contenidos básicos,

- suponen un reto para la mayoría de los alumnos ya que incluyen una gradación de dificultades para diferentes ritmos de aprendizaje,

- son flexibles, permitiendo al alumno que establezca relaciones entre sus conocimientos para poder aplicarlos,

- pretenden no únicamente la búsqueda de respuestas correctas sino también que los alumnos generen buenas e interesantes preguntas.

Bajo el planteamiento aquí expuesto, en este trabajo mostramos una actividad que responde a estas características que puede llevarse a cabo con las calculadoras citadas: el estudio del número π en momentos clave de la historia. Utilizando este hilo conductor, en la actividad se abordan distintos conocimientos como:

- la noción de número irracional,

- la medición de magnitudes geométricas (longitud y área),

- la naturaleza geométrica de π y sus distintas representaciones (serie numérica, expresión decimal),

- los conceptos de sucesión y límite,

- la idea de algoritmo.

Y se ejercitan prácticas variadas de carácter matemático como:

- la interpretación de resultados obtenidos en ámbitos numérico y geométrico,

- el uso de procedimientos de aproximación,

- la determinación de la bondad de un procedimiento y su comparación con otros,

- la búsqueda de precisión en los cálculos (realizados mecánicamente por una calculadora),

- los modos de justificación de los resultados obtenidos,

- la valoración de la utilidad de los instrumentos y técnicas usados.

Además, el hecho de presentar a los alumnos una perspectiva del desarrollo de contenidos y procesos matemáticos en distintos momentos históricos, así como el abordar los mismos desde los conocimientos y con los instrumentos que poseemos en la actualidad, les permite adquirir una visión novedosa sobre la matemática, que no se presenta como un compendio de conceptos y técnicas acabadas que hay que aprender, sino resaltando características propias del modo de hacer matemático.

> *Desde un punto de vista educativo, determinados usos de la calculadora se consideran adecuados para promover el desarrollo de habilidades cognitivas, producir aprendizajes significativos, facilitar el aprendizaje de conceptos, ayudar a resolver problemas, etc.*

Actividad: El número π en la Historia de la Matemática

Observaciones preliminares

La actividad que propondremos a continuación se puede llevar a cabo con distintos grados de dificultad, puesto que en ella se parte de conocimientos básicos y elementales que van desarrollándose gradualmente hasta evolucionar hacia conceptos más avanzados. Por ello pensamos que puede ser usada con alumnos desde el segundo ciclo de la ESO hasta el Bachillera-to. Dependiendo del nivel de los alumnos, en el desarrollo de la actividad se podrán obviar aquellos conocimientos que el profesor considere inoportunos o profundizar más en otros.

El hecho de utilizar la calculadora en determinadas fases de la actividad hace que algunos conocimientos avanzados se hagan accesibles a un nivel no previsto (más bajo), dado que se pueden realizar cálculos o comprobaciones difíciles de abordar en un contexto sin calculadora (elaboración de gráficas, cálculo de aproximaciones, límites, etc.). Por otro lado, el uso de la calculadora incorpora elementos novedosos a la reflexión (por ejemplo, el análisis de los errores de redondeo en los cálculos numéricos).

La actividad está secuenciada en tres momentos históricos: la civilización egipcia, la civilización griega y los siglos XVI y XVII, que terminamos entrelazando con un trabajo realizado ya en el siglo XX.

Presuponemos que los alumnos ya conocen el manejo técnico básico de la calculadora, aunque también podría completarse la actividad intercalando, donde corresponda, los conocimientos técnicos necesarios que se requieran.

La actividad está secuenciada en tres momentos históricos: la civilización egipcia, la civilización griega (Arquímedes) y los siglos XVI y XVII (Vieta y Wallis), que terminamos entrelazando con un trabajo realizado ya en el siglo XX (Osler). A lo largo de la actividad sugerimos distintos momentos en que el profesor interviene haciendo presentaciones de distinto tipo. Para algunas de ellas aportamos información, otras quedan abiertas para que el profesor las aborde según las necesidades de su grupo de alumnos. El estilo de presentación que seguiremos para exponer cada uno de los momentos históricos es el siguiente:

- Comienzan con la presentación de una breve reseña histórica, que puede ser utilizada por el profesor como introducción del tema.

- A continución señalamos, en recuadros con fondo sombreado, las preguntas que forman parte de la ficha de cada alumno. La resolución de tales preguntas tendrá que ser guiada por el profesor de la actividad, dependiendo de las reacciones de cada alumno ante cada una de ellas.

- Mostramos algunas resoluciones posibles que pueden desarollarse con la calculadora, y que complementan los resultados obtenidos por los propios estudiantes.

- Finalmente, dejamos abiertas algunas posibilidades de trabajo en las que el profesor puede profundizar.

Presentación de la actividad

La actividad comienza recapitulando los conocimientos que los alumnos poseen sobre π, para lo cual el profesor puede servirse de las siguientes preguntas:

¿Qué sabemos de π?
¿Qué es?
¿En qué contextos lo usamos?
¿Cómo lo definirías?
¿De dónde proviene el nombre?
¿Desde cuando se representa así?
¿Qué tipo de número es?
¿Cuál es su valor exacto?

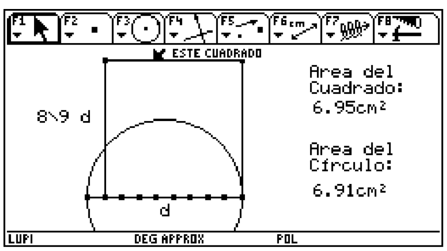
A continuación el profesor puede hacer una presentación breve de la actividad informando a los alumnos del hilo conductor básico: el estudio del número π en momentos clave de la historia, a saber, la civilización egipcia, la civilización griega (a través de los trabajos de Arquímedes), los siglos XVI y XVII (Vieta y Wallis) y la actualidad (Osler).

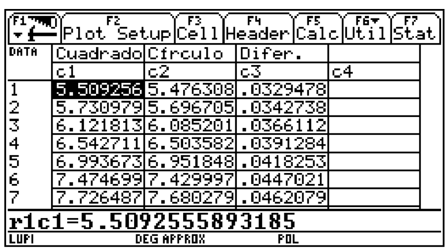
Primera Parte: Civilización Egipcia

Reseña histórica

Nuestros conocimientos sobre las matemáticas del Antiguo Egipto se basan en dos fuentes principales: el Papiro de Rhind, nombre que proviene del científico que lo descubrió (también llamado Papiro de Ahmes, por el escriba que lo compuso), alrededor del año 1650 ac, y el papiro de Moscú, escrito por el año 1850 ac; que se encuentra en el Museo de Bellas Artes de esa ciudad. Entre los papiros de Rhind y de Moscú se reúne una colección de 112 problemas matemáticos resueltos.

El desarrollo de la matemática egipcia gira en torno a las necesidades de una civilización compleja preocupada por organizar tareas agrícolas como el drenaje, los riegos y el control de las inundaciones del Nilo, así como la





DATA	Cuadrado	Círculo	Difer.	
	c1	c2	c3	c4
1	5.509256	5.476308	.0329478	
2	5.730979	5.696705	.0342738	
3	6.121813	6.085201	.0366112	
4	6.542711	6.503582	.0391284	
5	6.993673	6.951848	.0418253	
6	7.474699	7.429997	.0447021	
7	7.726487	7.680279	.0462079	

r1c1=5.5092555893185

Figura I. Aproximación egipcia a la cuadratura del círculo distribución de parcelas entre los campesinos o la construcción de silos para almacenar productos. Por ello los egipcios desarrollan, en particular, técnicas geométricas que les permiten calcular áreas de triángulos, rectángulos y trapecios. No tienen fórmula para el círculo, por lo que se preocupan por encontrar figuras poligonales (por ejemplo, cuadrados) de área equivalente.

Actividades propuestas a los alumnos:

En el problema 50 del Papiro de Rhind, el escriba Ahmes escribió lo siguiente:

> Si se señala 1/9 del diámetro de un círculo, y se construye un cuadrado que tenga de lado el resto, el área de cuadrado es la misma que la del círculo.

- Utiliza el ambiente Cabri de la calculadora para dibujar una circunferencia y dividir su diámetro en 9 partes iguales.

- Dibuja un cuadrado que tenga por lado 8 de dichas partes.

- Calcula el área del círculo y el del cuadrado. ¿Son iguales?

- Si has encontrado diferencias, ¿crees que se deben a posibles errores de aproximación que ha realizado la calculadora?

- Modifica el tamaño de la circunferencia original y registra las áreas correspondientes en una tabla, así como su diferencia (Figura I). ¿Qué observas?

- Los egipcios no conocían una fórmula para calcular el área del círculo. Pero, dado que hoy conocemos que el área del círculo es πr^2 y que, según lo citado en el Papiro, esa área es igual a la del cuadrado contruido, $(8/9\ r)^2$, ¿puedes deducir que valor asignaban, sin saberlo, los egipcios a π? ¿Qué tipo de número has obtenido?

- ¿Depende dicho valor del tamaño del círculo? Justifica tu respuesta.

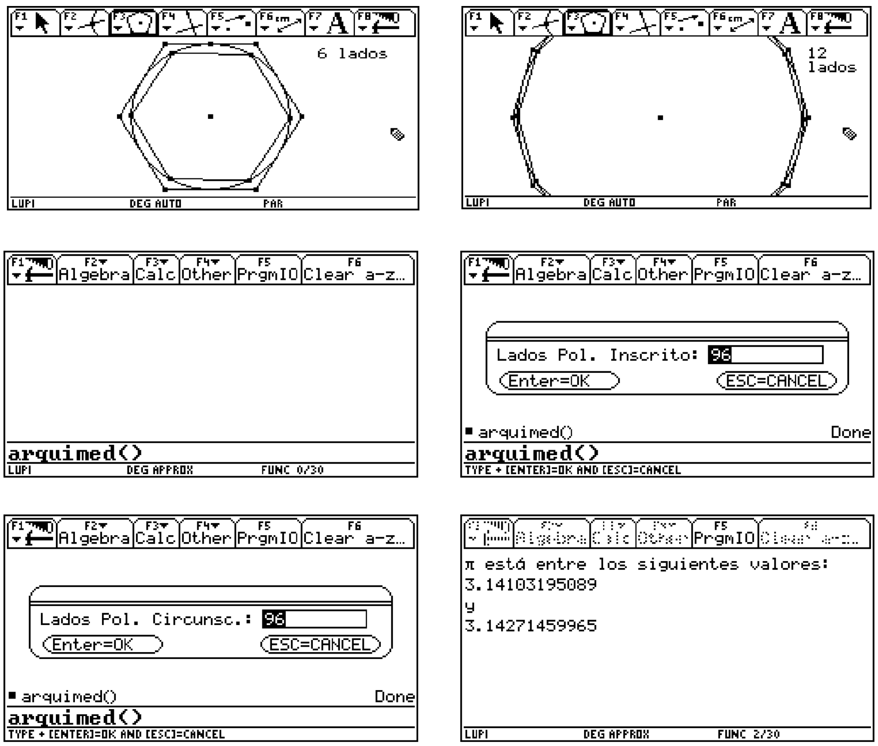


Figura II. Simulación del método arquimediano para acotar π

- Indica ahora si la afirmación encontrada en el Papiro de Rhind es correcta o no y justifica por escrito tu respuesta. Si encuentras distintas razones, ponlas todas.

El profesor puede terminar esta fase de la actividad recogiendo las conclusiones más significativas. El hecho de *identificar* π con el número racional 256/81 permite introducir una reflexión interesante sobre la irracionalidad de π.

Segunda parte: Civilización griega. Arquímedes
Reseña histórica

La civilización griega produjo un significativo avance en la matemática, sentando algunas de las bases que caracterizan a esta disciplina en la actualidad. Gracias a la evolución de la escritura, los griegos registraron textos no sólo con interés recopilatorio sino, además, para hacer de ellos objeto de reflexión, lo que supuso el inicio de lo que hoy conocemos como demostración matemática. Son numerosos los autores griegos cuyos resultados es-tudiamos aún en la actualidad (Pitágoras, Euclides, Tha-les). En relación con el número π es de destacar el gran trabajo de Arquíme-des, quien en su tratado De la Medida del Círculo, estableció los siguientes resultados:

Proposición 1. El área de cualquier círculo es igual a la de un triángulo rectángulo en el que uno de los catetos es igual al radio y el otro es igual a la circunferencia del círculo.

Proposición 2. El área de un círculo es a un cuadrado sobre su diámetro como 11 es a 14.

Proposición 3. La razón de la circunferencia de cualquier círculo con respecto a su diámetro está comprendido entre 3 1/7 y 3 10/71.

(Observa la forma de enunciar los resultados, sin hacer mención del símbolo π)

Arquímedes, para conseguur su tercer resultado, utilizó lo que hoy se conoce como Método Arquimediano, el cual se basa en el Principio de Exhauscíón, esto es: inscribió y circunscribió a un círculo (de diámetro unidad) polígonos regulares, considerando los perímetros de tales polígonos como cotas inferiores y superiores de la longitud de la circunferencia (valor que coincide con π si consideramos una circunferencia con un diámetro unitario). Comenzó con hexágonos y, a continuación, fue repetidamente duplicando el número de lados en cada polígono, llegando así hasta polígonos de 96 lados después de realizar 4 duplicaciones.

Actividades propuestas a los alumnos:

- ¿Crees que el primer resultado de Arquímedes es co-rrecto o, por el contrario, el área del círculo será *parecida* a la del triángulo (al igual que ocurría en el resultado egipcio? Si lo deseas puedes valerte de la calculadora para realizar algunas comprobaciones.

- ¿Y será cierto el segundo resultado de Arquímedes? Justifica tu respuesta.

- Utiliza el entorno Cabri de la calculadora para dibujar una circunferencia y circunscribe e inscribe en ella sendos hexágonos.

- Calcula y compara los perímetros de las figuras obtenidas. Relaciona asímismo el número π con los perímetros de los hexágonos.

- Duplica los lados de los hexágonos y repite los cálculos del apartado anterior. Sigue duplicando y calculando… ¿Obtienes el tercer resultado de Arquímedes?

- ¿Puedes mejorar la acotación obtenida para π?

- ¿Qué ocurre si en lugar de comenzar con hexágonos en el proceso de Arquímedes utilizas cualquier otro polígono?

- ¿Qué ocurre si, en lugar de duplicar los lados de los polígonos en cada caso, aumentamos el número de lados de 1 en 1, o de dos en dos, etc.?

- ¿Por qué crees que Arquímedes comenzó con hexágonos? (Intenta obtener relaciones entre el área de un círculo y las áreas de sus hexágonos inscrito y circunscrito).

- Realiza un programa en la calculadora que acote el valor de π a partir de los perímetros de polígonos inscritos/circunscritos a una circunferencia (véase la Figura II página anterior).

- ¿Qué ocurre si pones polígonos con muchos lados? ¿se modifica la acotación obtenida?

- ¿Crees que es posible obtener, poniendo polígonos con tantos lados como desees, el valor de π?

El profesor puede concluir esta fase recapitulando, nuevamente, las conclusiones más significativas. El hecho de abordar un proceso infinito para acotar π permite retomar nuevamente la idea de irracionalidad. Por otro lado, dependiendo del número de lados de los polígonos que utilicemos, el número de cifras decimales que se obtienen en la calculadora en la acotación puede llegar a saturarse, lo que permite introducir una reflexión sobre la precisión de los cálculos que realiza una máquina.

Tercera parte: Vieta (1592), Wallis (1655), Osler (1999)
Reseña histórica

Los siglos XVI y XVII pueden considerarse siglos de oro en la matemática. Basta mencionar a algunos de los protagonistas científicos de esta época: Galileo, Napier, Stevin, Kepler, Cavalieri , Torricelli , Descartes, Fermat, Desargues, Pascal, Vieta y Wallis. Los logaritmos, las ecuaciones, el cálculo diferencial e integral o la geometría analítica constituyen áreas fundamentales en la matemática actual que tuvieron su origen en esta época. Por la relevancia de sus trabajos sobre el número π, nos ocuparemos especialmente de los trabajos de Vieta y Wallis. En el siglo XX Osler conjuga los trabajos de estos dos autores.

Actividades propuestas a los alumnos

Considera las dos sucesiones de números siguientes, la de Vieta:

$$Vieta_1=\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$Vieta_2=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

$$Vieta_3=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}$$

$$Vieta_4=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}$$

...

Y la de Wallis:

$$Wallis_1=\frac{1*3}{2*2}$$

$$Wallis_2 = \frac{1*3}{2*2}\frac{3*5}{4*4}$$

$$Wallis_3 = \frac{1*3}{2*2}\frac{3*5}{4*4}\frac{5*7}{6*6}$$

$$Wallis_4 = \frac{1*3}{2*2}\frac{3*5}{4*4}\frac{5*7}{6*6}\frac{7*9}{8*8}\ldots$$

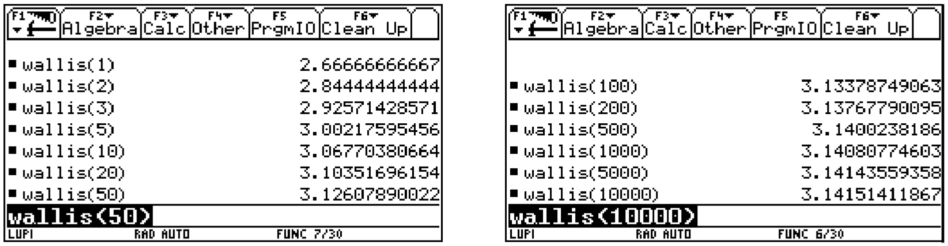


Figura III. Algunos valores de la sucesión de Wallis

- ¿Qué regularidades observas en cada caso?

- Realiza en la calculadora sendos procedimientos para calcular el valor de un término cualquiera de estas sucesiones (Figura III).

- Calcula el valor decimal de unos cuantos términos de estas sucesiones. ¿Qué observas?

- ¿Crees que estas sucesiones son convergentes?

- En caso afirmativo, ¿convergen al mismo valor?

- ¿Cómo describirías el término general de cada sucesión? ¿Puede la calculadora ayudarte a obtenerlo?

- Calcula el límite de las expresiones obtenidas en la calculadora. ¿Qué valores obtienes?

Tras este bloque de actividades, el profesor puede hacer hincapié en las peculiaridades que ha presentado el proceso de obtención del término general de las sucesiones de Vieta y Wallis, el análisis de su convergencia y el distinto carácter de los dos algoritmos correspondientes (recursivo en el caso de Vieta e iterativo en el de Wallis), aspecto que se refleja en el distinto tratamiento que han de tener en la calculadora. También se pueden comparar los dos métodos según su velocidad de convergencia: el producto de Vieta converge tan rápidamente que hace que la capacidad de algunas calculadoras para proporcionar cifras decimales exactas de π se agote a partir de multiplicar 19 factores de la sucesión, mientras que el producto de Wallis necesita más de 1000 iteraciones para obtener la tercera cifra decimal de dicho número. El resumen de los resultados obtenidos por Vieta y Wallis se puede presentar en los dos cuadros de la parte inferior de esta página.

Se introducen, a continuación, las aportaciones de T. J. Osler (1999).

> Los trabajos sobre π de Vieta y Wallis no parecen presentar ninguna simulitud, salvo que ambos se dirigen al objetivo de describir el número π mediante un producto infinito. Sin embargo, Thomas J. Osler, en 1999, logra conjugar ambos métodos de una manera sorprendente, al obtener la expresión siguiente:

Françoise Vieta (1540-1603)

Vieta adaptó el método general de Arquímedes de polígonos inscritos en una circunferencia, pero comenzando con un cuadrado y utilizando el área, en lugar del perímetro. A partir de la relación entre el área de un polígono de *n* lados y el de *2n* lados, obtuvo el llamado *Producto de Vieta*, publicado en su *Variorum de Rebus Mathematicis Liber V. III* (1593):

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\ \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ \ldots$$

El carácter recursivo de este producto permite expresarlo como:

$$\frac{2}{\pi} = a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$$

donde

$$a_1 = \sqrt{\frac{1}{2}},\ a_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a_n},\ n \in N$$

John Wallis (1616-1703)

En su Aritmética Infinitorum (1695), Wallis dedujo una expresión ya conocida por Fermat, para la integral de una potencia fraccionaria de *x*. Usando esta expresión halló el área de un cuarto de círculo y, de una manera formalmente poco rigurosa, desarrolló otro producto muy conocido para el cálculo de π:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1.3}{2.2}\frac{3.5}{4.4}\frac{5.7}{6.6}\frac{7.9}{8.8}\ldots$$

El carácter iterativo de este producto permite escribirlo de forma abreviada:

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)(2k)}$$

$$\frac{2}{\pi}=\prod_{n=1}^{p}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\overset{n}{\cdots}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}\times\prod_{n=1}^{\infty}\frac{2^{p+1}n-1}{2^{p+1}n}\cdot\frac{2^{p+1}n+1}{2^{p+1}n}$$

Actividades para los alumnos

- En la expresión de Osler aparecen dos parámetros, *n* y *p*. ¿Qué ocurre cuando *p* es 0? ¿y cuando *p* tiende a infinito?

- ¿Qué sucesión asocias al producto de Osler?

- Realiza un programa en la calculadora para obtener distintos términos de dicha sucesión (debes poder modificar los valores de *p* y *n*).

n	F. Vieta	J. Wallis	Osler (*p*=1)	Osler (*p*=5)	Osler (*p*=15)
1	2,82842712475	2,66666666667	3,01698893306	3,14109802659	3,14159265312
2	3,06146745892	2,84444444444	3,06487764629	3,14128975570	3,14159265330
3	3,12144515226	2,92571428571	3,08631035710	3,14137497095	3,14159265338
5	3,14033115695	3,00217595456	3,10617898243	3,14145358352	3,14159265346
10	3,14159114215	3,06770380664	3,12296049923	3,14151966275	3,14159265352
15	3,14159265239	3,09133688860	3,12895427067	3,14154318786	3,14159265354
20	3,14159265359	3,10351696154	3,13203086853	3,14155524706	3,14159265355
35	3,14159265359	3,11954720631	3,13606686593	3,14157104973	3,14159265357
50	3,14159265359	3,12607890022	3,13770705990	3,14157746619	3,14159265357

Figura IV. Comparación de los métodos de Vieta, Wallis y Osler para el cálculo de π

- Compara valores que obtengas de la sucesión de Osler con los correspondientes de Vieta y Wallis (Figura IV).

- ¿Cuál de los tres procedimientos vistos utilizarías para calcular aproximaciones decimales al número π? Razona tu respuesta.

Con estas actividades el alumno se acerca de una manera intuitiva a conceptos complejos, como la velocidad de convergencia de sucesiones, el carácter recursivo o iterativo de un algoritmo, la cantidad y tipo de operaciones realizadas, etc., aspectos que pueden ser formalizados posteriormente. De la misma manera, el bloque de actividades puede completarse con otras, de nivel más avanzado, conducentes a la justificación de las fórmulas de Vieta, Wallis y Osler. En ellas, el alumno podría ser guiado a lo largo de los razonamientos que siguieron estos autores para obtener sus productos infinitos. En Lupiáñez (2000) puede encontrarse el detalle de estas justificaciones apoyado en el uso de la calculadora.

Conclusiones

En este trabajo hemos propuesto actividades que nos han permitido seguir parte del trabajo llevado a cabo por algunos matemáticos a lo largo de la historia para abordar el estudio del número π. El uso de la calculadora sirve de apoyo para ejecutar tanto operaciones variadas como para apoyar la reflexión de los alumnos en la interpretación de resultados. Las actividades propuestas pueden suministrar a los alumnos de Secundaria y de Bachillerato una ventana al pensamiento e ideas que conducían los descubrimientos de cada época, al tiempo que les permiten profundizar en el co-nocimiento de conceptos variados del currículo actual (número irracional, sucesión, convergencia, límite) que aparecen integrados bajo un hilo conductor común. Todo ello a partir de la ejecución, por parte del alumno, de tareas y procesos de reflexión propios del quehacer matemático.

Al mismo tiempo hemos presentado una forma integradora de usar la calculadora, lo que nos ha permitido aprovechar el potencial de esta tecnología para, por un lado, trabajar los problemas de matemáticas coordinando diferentes registros de representación (gráfico, numérico, simbólico) y, por otro lado, proporcionar información a partir de la cual los alumnos pueden interpretar, conjeturar o validar determinados resultados matemáticos. Hemos contemplado así la calculadora como un instrumento de justificación de resultados en el aula de matemáticas, donde difícilmente se podrían desarrollar demostraciones formales de las conclusiones manejadas.

La consideración conjunta de conceptos y procedimientos matemáticos variados, el uso de la calculadora para tratarlos y la incorporación de elementos históricos al proceso, todo ello desde una perspectiva en la que el alumno es el protagonista de su actividad, son las cualidades que consideramos más destacables en las actividades propuestas. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DEMANA F., WAITS B. (1998): *El papel de la calculadora portátil. El álgebra simbólica en la educación matemática del siglo XXI: un llamado para la acción*, Documento electrónico en la página Web http://www.ti.com/calc/latinoamerica/papel.htm.

GORGORIÓ N., ARTIGUES F., BANYULS F., MOYANO D., PLANAS N., ROCA M., XIFRÉ A. (2000): “Proceso de elaboración de actividades geométricas ricas: un ejemplo, las rotaciones”, *Suma*, n.º 33, pp. 59-71.

LUPIÁÑEZ J. L. (2000). “Nuevos acercamientos a la historia de la matemática a través de la calculadora TI-92”, *Memoria de Tercer Ciclo*, Universidad de Granada.

MEC (1989): Diseño Curricular Base, Enseñanza Secundaria Obligatoria, Madrid, Ministerio de Educación y Ciencia.

OSLER T. J. (1999): “The unión of Vieta's and Wallis' products”, *American Mathematical Monthly*, pp. 774-776.

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Comisión Ejecutiva

Presidente: **Florencio Villarroya Bullido**
Secretario General: **Josep Sales Rufí**
Vicepresidente: **Serapio García Cuesta**
Tesorera: **Claudia Lázaro**

Secretariados:
Prensa: **Ismael Roldán**
Revista SUMA: **Francisco Martín Casalderrey/Inmaculada Fuentes Gil**
Relaciones internacionales: **Carmen Azcárate/Sixto Romero**
Actividades: **Xavier Vilella Miró**
Publicaciones: **Ricardo Luengo González**

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemátiques a Catalunya
Presidente: Joan Gómez i Urgellés
UPC Vilanova i la Geltrú, 08800 Barcelona

Organización Española para la Coeducación Matemática "Ada Byron"
Presidenta: Mª Carmen Rodríguez
Almagro, 28. 28010 Madrid

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"
Presidente: Salvador Guerrero Hidalgo
Paseo del Limonar 2, 29016-Málaga

Sociedad Aragonesa "Pedro Sánchez Ciruelo" de Profesores de Matemáticas
Presidente: Florencio Villarroya Bullido
ICE Uni. de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009 Zaragoza

Sociedad Asturiana de Educación Matemática "Agustín de Pedrayes"
Presidente: José Joaquín Arrieta Gallastegui
Apartado de Correos 830. 33400 Avilés (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "Isaac Newton"
Presidenta: Lucía Henríquez Rodríguez
Apartado de Correos 329. 38208 La Laguna (Tenerife)

Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas
Presidente: Constantino de la Fuente
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Víllalar, s/n. 09006 Burgos

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García Cuesta
Avda. España, 14, 5ª planta. 02006 Albacete

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidente: Bienvenido Espinar Cepas
CPR II. Avda. Reina Sofía n.º1. 30009 Murcia

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Manuel Rodríguez Mayo
Apartado de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper"
Presidente: Ricardo Luengo González
Apartado 590. 06080 Badajoz

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas "Emma Castelnuovo"
Presidenta: Carmen da Veiga
C/ Limonero, 28, 28020 Madrid

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: Begoña Martínez Barrera
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidente: Luis Serrano Romero
Facultad de Educación y Humanidades Ctra. Alfonso XIII, s/n. 52005 Melilla

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas Tornamira"
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea Tornamira
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.
Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra.
31006 Pamplona

Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Despacho 305. Facultad de Educación.
Universidad Complutense. 28040 Madrid

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas "A prima"
Presidente: Javier Galarreta Espinosa
C.P.R. Avda. de la Paz, 9. 26004 Logroño

Sociedade Galega do Profesorado de EducaciónMatemática (AGAPEMA)
Presidente: Manuel Díaz Regueiro
Calle García Abad, 3, 1ºB. 27004 Lugo

Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi"
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departament de Didáctica de la Matemática.
Apartado 22045. 46071 Valencia

SUMA 46
Junio 2004, pp. 59-70

Los diez problemas de Apolonio

Este artículo es fruto de una colaboración entre dos áreas curriculares, Plástica y Matemáticas, que comparten un amplio campo de contenidos curriculares, y en él se resuelven los diez problemas de tangencias de Apolonio. En primer lugar, se hace un tratamiento sintético y se obtienen las soluciones con regla y compás *utilizando Cabri. A cada construcción le sigue su planteamiento analítico y se resuelven algunos ejemplos en el estilo de las coordenadas usando Maple. También se hace una breve reflexión sobre las aportaciones de ambos procedimientos en cada caso y, finalmente, se concluye el artículo con unas reflexiones generales.*

This article is the result of a collaboration between fields that may seem unrelated: Plastic Arts and Mathematics. They share a wide field of syllabus, and in this work we solve the ten problems of Apollonius from the two perspectives. First, the synthetic treatment is done by using the software Cabri and the solutions are obtained on the rule-and-compass *manner; then the corresponding analytic approach is considered, and we solve some of the examples using coordinates using Maple. Also a brief analysis in both procedures is done case by case. Finally, we end the article with general reflections.*

Apolonio de Perga (262-190 a.C.), que es ampliamente conocido por su tratado sobre las cónicas, no lo es tanto por su tratado sobre Tangencias. En éste, Apolonio describe el problema que hoy se conoce como Problema de Apolonio y que tiene este enunciado:

> *Dados tres objetos tales que cada uno de ellos puede ser un punto, una recta o una circunferencia, dibujar una circunferencia que sea tangente a cada uno de los tres elementos dados.*

Este problema da lugar a diez casos posibles y en alguno de ellos aparecen situaciones que obligan a un tratamiento particular. Según Boyer (1986), los casos más sencillos (tres puntos y tres rectas) ya aparecen tratados en los Elementos de Euclides. Apolonio trató estos dos casos junto a estos otros seis (dos puntos y una recta; dos rectas y un punto; dos puntos y una circunferencia; dos circunferencias y un punto, dos circunferencias y una recta; un punto, una recta y una circunferencia) en el *Libro I de las Tangencias*, y los dos casos restantes (dos rectas y una circunferencia, y tres circunferencias) en el *Libro II de las Tangencias*. Aunque desgraciadamente estos libros se han perdido, a través de Pappus de Alejandría (s. IV d.C.) se sabe que Apolonio resolvió los nueve primeros, y hoy en día se cree que fue Isaac Newton el primer matemático que resolvió por medio de la regla y el compás el problema de encontrar la circunferencia tangente a otras tres circunferencias.

Consultada la base de datos del ZDM, Matdhi, sólo aparecen cuatro trabajos relacionados con Apolonio y, de ellos, sólo el artículo de E. R. Lozano (1997), tiene que ver con el problema de tangencias, pero en él se trata la relación del problema de Apolonio con el de Soddy y, por tanto, sigue una orientación distinta de la que se hace aquí.

> *Se sabe que Apolonio resolvió los nueve primeros, y hoy en día se cree que fue Newton el primer matemático que resolvió el último.*

Inés Ortega
Didáctica de la Expresión Musical, Plástica y Corporal.
Tomás Ortega
Analisis Matemático y Didáctica de la Matemática, Universidad de Valladolid.

El propósito de este artículo es mostrar como se pueden conjugar la visión de la geometría sintética, propia del Área de Dibujo, con la geometría analítica, propia de la Matemática, y desde la óptica de la Didáctica combinar los estilos de resolución de forma complementaria. Así se crea un marco interdisciplinar de analisis didáctico que puede permitir elegir las opciones de resolución y de razonamiento más apropiadas en cada caso.

A continuación se describen los problemas y las soluciones correspondientes, junto con sus procedimientos constructivos y resolutores, y las presentaciones que siguen se fundamentan en la argumentación universal y en la explicación, habida cuenta de que éstas son las características más valorados por los alumnos en los procesos de construcción de los razonamientos argumentativos, como se desprende de la investigación llevada a cabo por Ibañes y Ortega (2002 y 2004).

1. Circunferencia que pasa por tres puntos dados

Solución sintética.

Se considera que *P*, *Q*, *R* son los tres puntos dados. Estos puntos forman el triángulo *PQR* y como las mediatrices de sus lados se cortan en un punto, el circuncentro, que es el centro de la circunferencia circuscrita a dicho triángulo, sólo hay que trazar las tres mediatrices para determinar *O* y dibujar la circunferencia de centro *O* y radio *OR*.

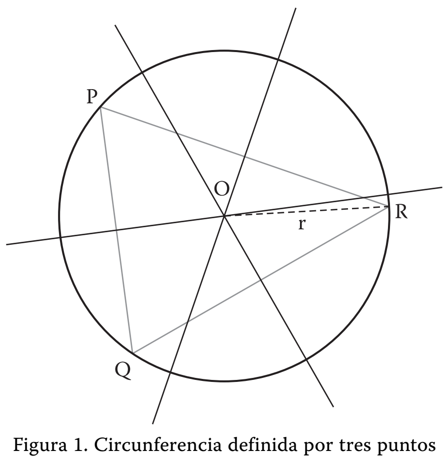


Figura 1. Circunferencia definida por tres puntos

Solución Analítica.

Considerando los puntos de coordenadas $P=(p_1,p_2)$, $Q=(q_1,q_2)$, y $R=(r_1,r_2)$, es usual hallar la ecuación de la circunferencia $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ que pasa por los tres puntos dados resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} dist(O,P)=dist(O,Q) \\ dist(O,P)=dist(O,R) \end{cases}$$

Otra manera de encontrar la solución es considerar que el centro, $O=(x,y)$, equidista de los puntos *P*, *Q*, *R* y resolver el sistema de las ecuaciones métricas correspondientes:

$$\begin{cases} dist(O,P)=dist(O,Q) \\ dist(O,P)=dist(O,R) \end{cases}$$

La primera ecuación representa a la mediatriz del lado *PQ* y la segunda a la mediatriz del lado *PR*. La solución del sistema, que es la intersección de las dos mediatrices, es el centro de la circunferencia. Una vez determinado este punto el radio se halla calculando la distancia de *O* a cualquiera de los puntos dados.

Es evidente que, en este caso, aunque el método sintético es más sencillo que el método analítico, sin embargo, el razonamiento de ambos es muy diferente y está basado en conceptos diferntes: en el caso sintético se utiliza el concepto de mediatriz, mientras que en el analítico o bien se utiliza la localización de una circunferencia que pasa por tres puntos o bién el concepto de equidistancia (mediatriz), y los correspondientes sistemas de ecuaciones se resuelven mediante manipulación simbólica, siguiendo las correspondientes reglas de sintaxis.

2. Circunferencia tangente a tres rectas dadas

Solución sintética.

Las tres rectas dadas *r, s, t* forman un triángulo *PQR*. Como es sabido, las tres bisectrices de los ángulos interiores de cualquier triángulo se cortan en un único punto, que es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo, y, por tanto, sólo hay que dibujar las tres bisectrices para determinar el centro, *O1*. El radio se determina con los puntos de tangencia, y éstos se hallan trazando las perpendiculares por *O1* a cada uno de los lados. En la figura 2 se ha determinado *T1* trazando la perpendicular a *QR* por *O1.* También es conocido que las bisectices exteriores de dos ángulos y la interior del otro determinan los centros *O2, O3* y *O4* de tres circunferencias exinscritas. Como en el caso anterior, los radios *O2T2*, *O3T3* y *O4T4* se determinan trazando perpendiculares a las rectas tangentes desde estos centros.

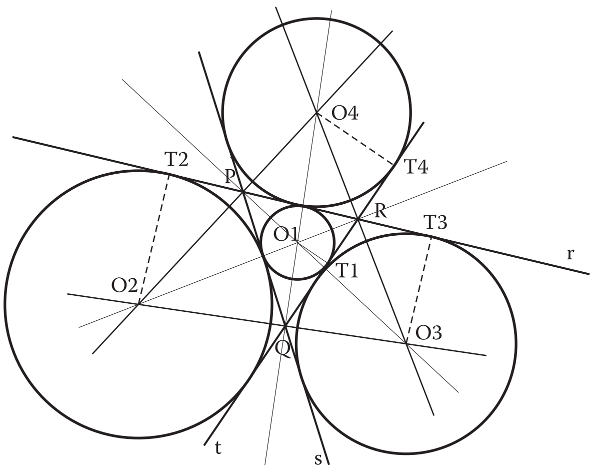


Figura 2. Circunferencia tangente a tres rectas secantes dos a dos

El trazado se simplifica mucho cuando dos de las rectas, *r* y *s*, son paralelas y la tercera, *t*, es secante. La figura 3 muestra esta construcción.

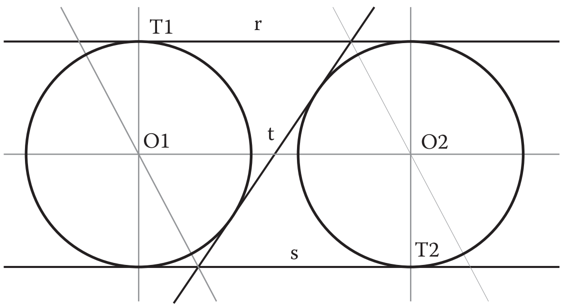


Figura 3. Circunferencia tangente a dos rectas paralelas y otra secante

Solución Analítica.

Después de la construcción anterior, es evidente que la distancia del centro a cada una de las rectas es la misma y, por tanto, las ecuaciones que determinan las coordenadas *(x, y)* del centro *O* de la circunferencia son las soluciones de los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} dist(O,r)=dist(O,s) \\ dist(O,r)=dist(O,t) \end{cases} \qquad \begin{cases} dist(O,r)=dist(O,s) \\ dist(O,s)=dist(O,t) \end{cases}$$

¿Pueden estar aquí todas las soluciones que se han obtenido por el procedimiento sintético? Evidentemente sí. Cada ecuación es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de las dos rectas que intervienen en la misma (las dos bisectrices) y, en consecuencia, cada sistema tiene cuatro soluciones: las intersecciones de los dos pares de bisectrices. Como el incentro, O_1, es el punto común de las tres bisectrices interiores, éste es una solución común a dos sistemas. Si consideramos que las ecuaciones de las tres rectas son: *4x+3y=12*, *-x+y=4*, *x+5y=2*, los sistemas formados por las ecuaciones de las bisectrices son:

$$\begin{cases} \dfrac{|-x+y-4|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|4x+3y-12|}{\sqrt{25}} \\ \dfrac{|-x+y-4|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|x+5y-2|}{\sqrt{26}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{|-x+y-4|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|4x+3y-12|}{\sqrt{25}} \\ \dfrac{|4x+3y-12|}{\sqrt{25}}=\dfrac{|x+5y-2|}{\sqrt{26}} \end{cases}$$

Estos sistemas son respectivamente equivalentes a estos otros dos:

$$\begin{cases} 25(-x+y-4)^2=2(4x+3y-12)^2 \\ 26(-x+y-4)^2=2(x+5y-2)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25(-x+y-4)^2=2(4x+3y-12)^2 \\ 26(4x+3y-12)^2=25(x+5y-2)^2 \end{cases}$$

y cada uno de éstos es equivalente a cuatro sistemas lineales, que son los que resultan de conjugar los signos más y ménos de ambos miembros, como consecuencia de considerar las raíces cuadradas de ambos, lo que explica las cuatro soluciones de cada uno de los sistemas anteriores.

Estas ecuaciones son demasiadas o demasiado complicadas para obtener todas las soluciones manualmente, pero, por ejemplo, *Maple* resuelve el problema de forma inmediata. Sólo hay que introducir las siguientes instrucciones y en un instante se obtienen las cuatro primeras soluciones de *O*:

```
solve({25*(-x+y-4)^2-2*(4*x+3*y-12)^2,13*(-x+y-4)^2-
2*(x+5*y-2)^2});
allvalues(%);
evalf(%);
```

O_1= (-3,93; 5,50)

O_2=(-1,52; -2,47)

O_3=(0,04; -2,15)

O_4=(7,314; 35)

En éste y en todos los casos que siguen, y ya no se volverá a hacer ninguna referencia al respecto, los radios de las circunferencias tangentes se calcularían así:

- Si el dato es un punto P con $d(O,P)$
- Si el dato es una recta r con $d(O,r)$
- Si el dato es una circunferencia de centro C y radio r con $d(O,C)-r$ y $d(O,C)+r$

En este caso también es más sencillo el método sintético que el analítico, aunque se utilice software de ordenador, ya que es menos costoso hacer los dibujos con Cabri que escribir los sistemas de ecuaciones para Maple, incluso la elaboración del dibujo manualmente con regla y compás resulta menos gravoso que utilizar el software de cálculo. Por otra parte, el razonamiento que se sigue en ambos métodos puede considerarse similar, aunque es obligado destacar que el procedimiento sintético relaciona más conceptos. Por otra parte, los niveles de razonamiento que requiere la construcción sintética estarían en el nivel tercero de Van Hiele, nivel que, como señalan Clemens (1992), no se alcanza con facilidad por los alumnos.

3. Circunferencia que pasa por dos puntos dados y es tangente a una recta dada

Solución sintética.

La figura 4 muestra los datos del problema: los puntos A y B, y la recta r. Es evidente que el centro tiene que estar en la mediatriz del segmento AB, y, por otra, la recta AB tiene que ser el eje radical de las circunferencias solución y, por tanto, si se determina la intersección, M, de este eje con r, los puntos de tangencia $T1$ y $T2$ cumplirán la relación métrica: $MT1^2=MT2^2=MA\times MB$. Por tanto, hay que construir una circunferencia auxiliar con centro en la mediatriz y que pase por AB, trazar una tangente a esta circunferencia por M (el punto de tangencia pertenece a la circunferencia de diámetro OM), y llevar esta distancia sobre r desde M para determinar $T1$ y $T2$. Finalmente, las perperdiculares a r por $T1$ y $T2$ determinan los centros $O1$ y $O2$ sobre la mediatriz.

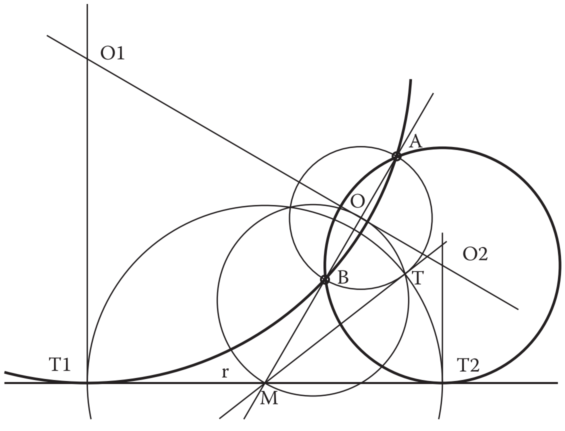


Figura 4. Circunferencia tangente a una recta r pasando por dos puntos A y B

La figura 5 muestra otras dos construcciones: una, cuando uno de los puntos está sobre la recta y, otra, cuando la distancia desde ambos puntos a la recta es la misma. Ambas son mucho más simples que la anterior y no necesitan ninguna aclaración adicional, aunque una explicación razonada, justificando las dos construcciones, es un buen ejercicio de reflexión y comunicación.

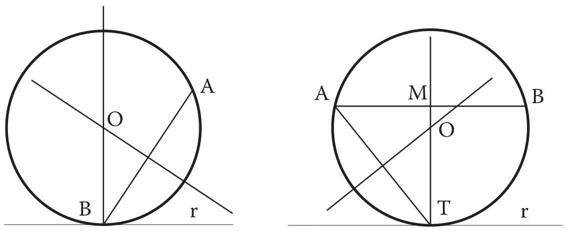


Figura 5. Circunferencia tangente a una recta r pasando por dos puntos A y B (uno sobre r y a igual distancia de r)

Solución analítica.

Se puede considerar que los puntos dados son $P=(p_1, p_2)$ y $Q=(q_1, q_2)$, y que la recta dada es r. El centro de dicha circunferencia, O, equidistará de los tres objetos y, por tanto, se hallará resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} dist(O,P)=dist(O,Q) \\ dist(O,P)=dist(O,r) \end{cases}$$

En este caso sólo hay una solución, que se obtiene con relativa facilidad por ser lineal la primera de sus ecuaciones, pero, aún así, quizás sea más corta en tiempo la construcción sintética. Este procedimiento, sin duda, es más complicado que el analítico, ya que tiene más etapas, pero es mucho más rico en razonamiento y, por consiguiente, si se llega a interiorizar en el sentido de Harel y Sowder (1996), se sabrán más cosas de dibujo y de matemáticas que con el procedimiento analítico, aunque, como en el caso anterior, esta construcción alcanza el nivel tercero de van Hiele y no es sencilla para los alumnos.

4. Circunferencia que pasa por un punto dado y es tangente a dos rectas dadas

Solución Sintética.

Se considera el punto P y las rectas r y s como en la figura 6. Por una parte, es evidente que el centro de la circunferencia solución tiene que ser un punto de la bisectriz y, por otra, la circunferencia solución también debe de contener al punto P' (simétrico de P respecto de la bisectriz). Esta observación permite reducir este problema al anterior y, por tanto, se llega a la solución siguiendo los mismos pasos.

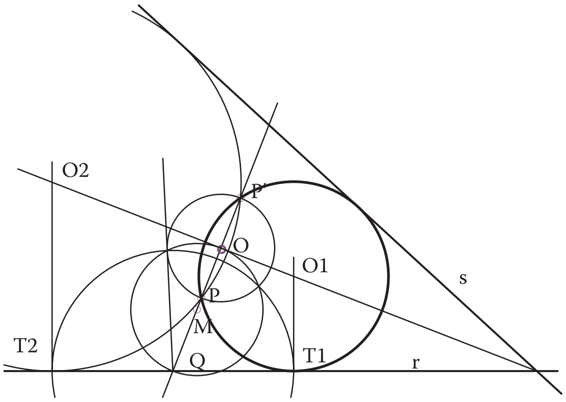
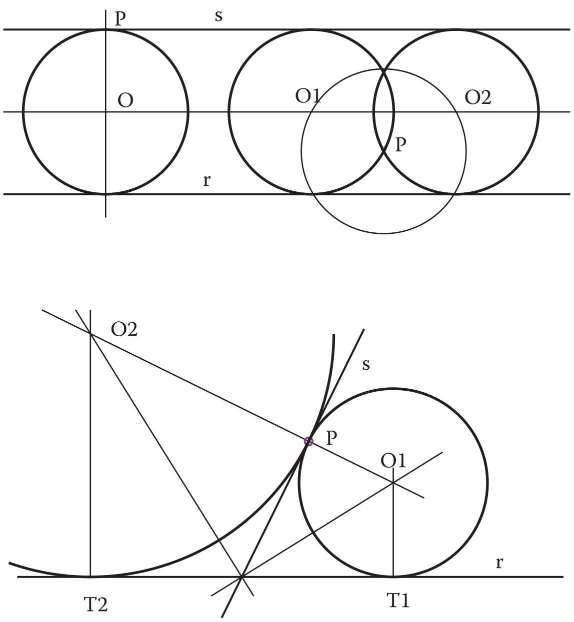


Figura 6. Circunferencia tangente a dos rectas pasando por un punto

En la figuras 7*a* y 7*b* se presentan dos casos particulares que son muy sencillos de construir y cuya explicación razonada es un buen ejercicio de reflexión y de comunicación.



Figuras 7*a* y 7*b*. Circunferencia tangente a dos rectas pasando por un punto. Casos particulares

Solución analítica.

Se puede considerar que el punto es $P=(p_1,p_2)$ y que las rectas dadas son *r* y *s*. En este caso hay dos soluciones y los centros de estas dos circunferencias, *O1* y *O2*, se obtienen resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} dist(O,P) = dist(O,r) \\ dist(O,P) = dist(O,s) \end{cases}$$

Para el punto *P=(1, 2)*, y las rectas *r* y *s* de ecuaciones respectivas *x+y-1=0* y *2x-y-2=0*, las ecuaciones y los cálculos derivados de las mismas no son tan sencillos, ya que se trata de dos ecuaciones cuadráticas en *x* y en *y*. Utilizando Maple, se tiene:

```
solve({sqrt((x-1)^2+(y-2)^2)-abs(x+y-1)/sqrt(2),sqrt((x-
1)^2+(y-2)^2)-abs(2*x-y-2)/sqrt(5)});
allvalues(%);
evalf(%);
```

O1= (0,79; 1,27)
O2=(0,24; 4,65)

Las construcciones sintéticas siguen siendo sencillas, los cálculos complicados y el razonamiento que se sigue en ambos estilos es bien diferente, si bien, el método sintético tiene una etapa más que el anterior lo que implica una mayor dificultad.

5. Circunferencia que pasa por dos puntos y es tangente a una circunferencia dada

Solución sintética.

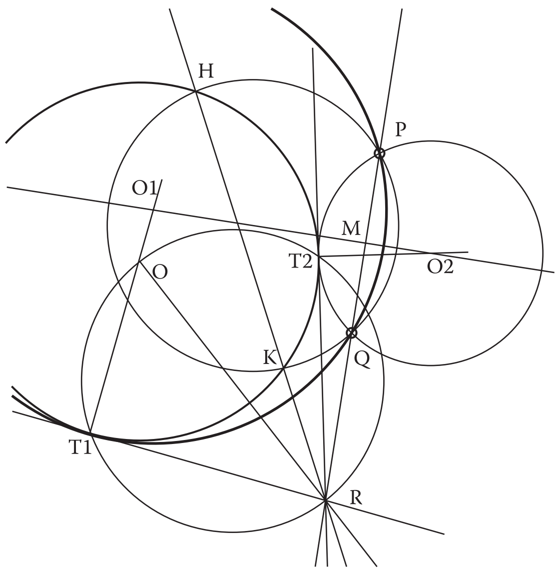


Figura 8*a*. Circunferencia que pasa por dos puntos y es tangente a otra circunferencia

Considerando que los puntos son *P* y *Q*, y que el centro de la circunferencia dada es *O*, surgen dos casos según que los puntos sean interiores o exteriores a la circunferencia dada, casos que se construyen de forma similar y que están representados en las figuras 8a y 8b. Se traza la mediatriz del segmento *PQ* y la recta *PQ*. Los centros de las circunferencias solución tienen que estar en la mediatriz y la recta *PQ* será el eje radical de las dos circunferencias solución. Se traza una circunferencia auxiliar que pase por *P* y *Q*, y que corte a la circunferencia dada. El eje radical de estas dos circunferencias, junto con el eje radical de las circunferencias solución determinan el centro radical, R, de las tres circunferencias y, por tanto, las tangentes trazadas desde *R* a la circunferencia dada determinan los puntos de tangencia *T1* y *T2*. Los centros solución, *O1* y *O2*, son las intersecciones de la mediatriz a *PQ* con las rectas *OT1* y *OT2*, respectivamente. Cuando los puntos son interiores a una de las circunferencias dadas la construcción es similar.

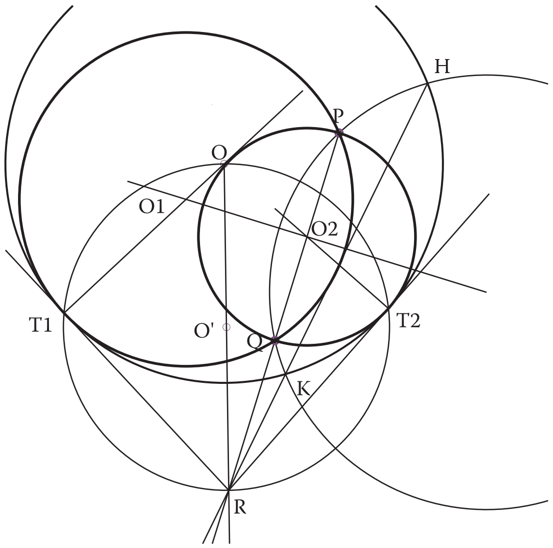


Figura 8*b*. Circunferencia que pasa por dos puntos y es tangente a otra circunferencia

Cuando uno de los puntos, por ejemplo, *P*, está sobre la circunferencia, la construcción es muy sencilla, tanto si es exterior como si es interior. Las figura 9*a* y 9*b* recoge estos dos casos, que no necesitan explicaciones adicionales. Sin embargo el descubrimiento y exposición de las mismas es un buen ejercicio.

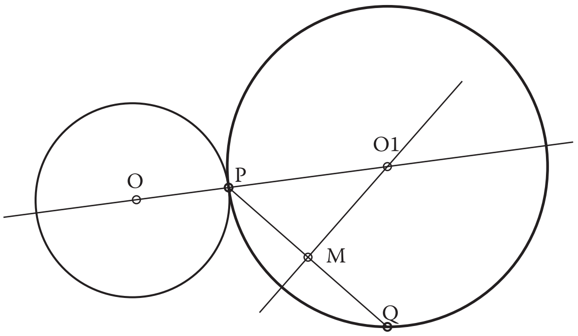


Figura 9*a*. Circunferencia que pasa por dos puntos y es tangente a otra circunfernecia. Caso particular

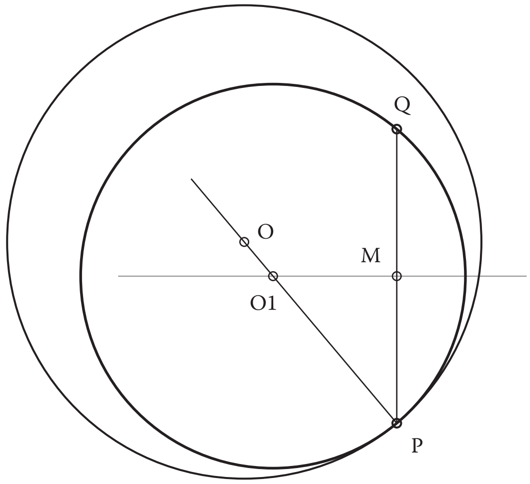


Figura 9*b*. Circunferencia que pasa por dos puntos y es tangente a otra circunfernecia. Caso particular

Solución analítica.

Se puede considerar que los puntos *son* $P=(p_1,p_2)$, $Q=(q_1,q_2)$ y que la circunferencia *C* tiene centro *O* y radio *r*. En este caso hay dos soluciones y los centros de tales circunferencias, *O1* y *O2*, se obtienen resolviendo los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} dist(O,P)=dist(O,Q) \\ dist(O,P)=dist(O1,O)-r \end{cases}$$

$$\begin{cases} dist(O,P)=dist(O,Q) \\ dist(O,P)=dist(O2,O)+r \end{cases}$$

Los sistemas de este caso dan lugar a ecuaciones cuárticas y, aunque se pueden resolver por cuadraturas, esta tarea de resolución es muy complicada y requieren ser tratados con software adecuado. Considerando $P=(3, 2)$, $Q=(-2, 1)$ y que la circunferencia tiene ecuación $(x-1)^2+(y+4)^2=22$, el primer sistema de ecuaciones, del que se obtendría la primera solución, es:

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y-2)^2=(x+2)^2+(y-1)^2 \\ \sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y+4)^2} \end{cases}$$

Maple aporta esta solución de forma casi instantánea con esta única instrucción:

```
solve({(x-3)^2+(y-2)^2-(x+2)^2-(y-1)^2,sqrt((x-3)^2+(y-
2)^2)-sqrt((x-1)^2-(y-1)^2)+2});
```

O2=(0,66; 0,67)

Análogamente, el segundo centro se calcula con la instrucción siguiente:

```
solve({(x-3)^2+(y-2)^2-(x+2)^2-(y-1)^2,sqrt((x-3)^2+(y-
2)^2)-sqrt((x-1)^2-(y-1)^2)+2});
```

$$O2=(1,16;\ -1,80)$$

Como ya es habitual en comentarios precedentes, las ecuaciones siguen siendo complicadas, pero aquí, además, la construcción sintética requiere establecer unas conexiones conceptuales importantes (mediatriz, potencia, eje radical, centro radical) y, por tanto, se trata de un procedimiento más rico en conexiones. Por el contrario, el planteamiento analítico sigue utilizando el concepto de distancia, si bien tiene la dificultad añadida de considerar que la circunferencia dada puede ocupar una posición interior o exterior, y que ésta se fija con el signo de la constante que representa la longitud del radio.

6. Circunferencia que pasa por un punto y es tangente a dos circunferencias dadas

Solución sintética.

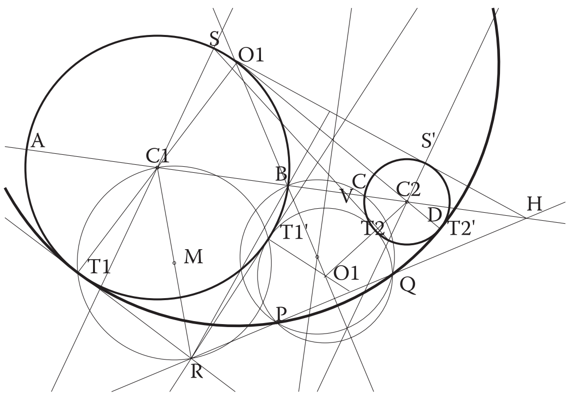


Figura 10. Circunferencia que pasa por un punto dado y es tangente a dos circunferencias dadas

Considerando que los centros de las circunferencias dadas son C_1 y C_2, que sus radios respectivos son r_1 y r_2, y que el punto dado es *P*, como muestra la figura 10, es muy sencillo calcular el centro de la homotecia directa de las circunferencias dadas, *H*, y el centro de la homotecia inversa, *V*. Los puntos *B* y *C* son inversos uno de otro en la inversión de polo *H* y potencia la misma que la razón de la homotecia de centro *H*, y el concepto de potencia implica que cualquier circunferencia que contenga a esos dos puntos (*B* y *C*) es una circunferencia tal que sus pares de puntos alineados con *H* son inversos uno de otro. Ahora se considera la circunferencia determinada por *P, B* y *C*. Esta circunferencia determina con las dos circunferencias dadas los ejes radicales (en la figura sólo se ha dibujado el que corta a *PH* en *R*), y este punto, *R*, permite hallar fácilmente el punto de tangencia *T1*, ya que $RT1^2=RA\times RB=AP\times RQ$. Con el otro eje radical se hallaría otro punto de tangencia y con éste el segundo centro. Los otros dos centros se determinarían haciendo una construcción similar considerando como polo, en lugar de *H,* el centro de homotecia inversa *V*.

La figura 11 muestra el caso particular con el punto P situado en la circunferencia de centro *C1*. Aquí los puntos de tangencia de la segunda circunferencia dada son *Th* y *Tv*, y los centros respectivos *Oh* y *Ov*.

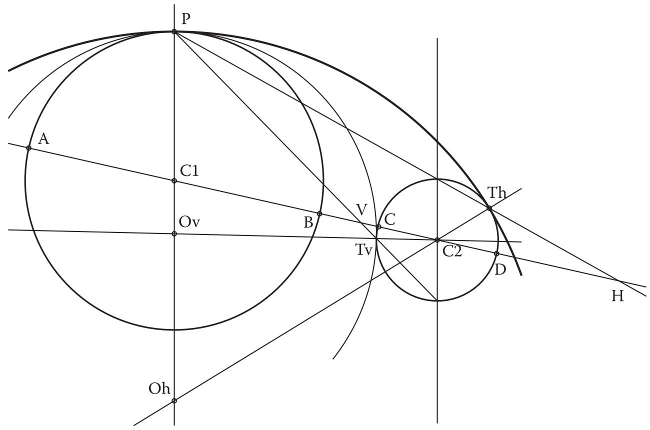


Figura 11. Circunferencia tangente a otras dos dadas conocido el punto de tangencia de una de ellas.

Solución analítica.

El centro, *O*, de la circunferencia solución, *C*, equidista del punto y de las circunferencias dadas y cuando éstas son exteriores tiene cuatro soluciones. Los centros de las circunferencias solución, *O1*, *O2*, *O3* y *O4*, son las soluciones de los cuatro siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} dist(O,P)=dist(O,C_1)-r_1 \\ dist(O,P)=dist(O,C_2)\pm r_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} dist(O,P)=dist(O,C_1)+r_1 \\ dist(O,P)=dist(O,C_2)\pm r_2 \end{cases}$$

En esta construcción sintética entra en juego el concepto de inversión y su relación con el de potencia y eje radical y, por tanto, ésta es muy rica en conexiones, pero no es fácil establecerlas y, según la clasificación de dificultades de Socas (1997), bastantes alumnos pueden tener dificultades ligadas a los procesos de pensamiento matemático. La aprehensión de estos saberes supone un aprendizaje mayor, pero desde el punto de vista de los niveles de Van Hiele, esta construcción podría estar en el cuarto nivel y, consecuentemente, las dificultades de aprendizaje son notorias.

7. Circunferencia que es tangente a dos rectas y a una circunferencia dadas

Solución Sintética.

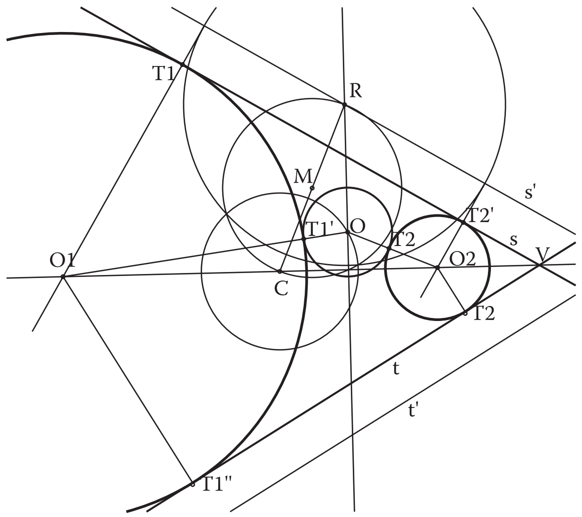


Figura 12. Circunferencia tangente a otra circunferencia y a dos rectas dadas

La figura 12 muestra este procedimiento y en ella se han considerado que los datos son las rectas *s* y *t*, y la circunferencia de centro *O* y radio *r*. Este caso se puede reducir al caso 4, ya tratado antes, considerando las rectas *s'* y *t'* paralelas a las dadas y separadas de éstas el radio de la circunferencia dada. Así, ahora se considera el problema de trazar la tangente a estas nuevas rectas *s'* y *t'* pasando por el centro, *O*, de la circunferencia dada. Las circunferencias solución del problema original tienen el mismo centro que las circunferencias solución a este problema y sus radios, *OT1* y *OT2* son *r* unidades menor que *O1O*. También se podían haber considerado paralelas interiores y, entonces, el radio tendía que aumentarse en *r* unidades.

Se podrían considerar casos particulares que tendrían que ver con la posición de la circunferencia respecto de las rectas dadas, casos que se resuelven con cierta facilidad y que no consideramos aquí.

Solución analítica.

El centro, *O*, de la circunferencia solución, *C*, equidista de la rectas dadas y de la circunferencia dada. Por tanto, *O* es la solución de los sistemas que expresan esa equidistancia:

$$\begin{cases} dist(O,s) = dist(O,t) \\ dist(O,s) = dist(O,C) - r \end{cases} \qquad \begin{cases} dist(O,s) = dist(O,t) \\ dist(O,s) = dist(O,C) + r \end{cases}$$

Los comentarios del problema anterior siguen siendo válidos también aquí.

8. Circunferencia que pasa por un punto y es tangente a una recta y a una circunferencia

Solución Sintética.

Se considera la figura 13 y en ella los datos son el punto *P*, la recta s y la circunferencia de centro *O* (que tiene radio *r*). La clave consiste en considerar una inversión de polo *P* y potencia arbitraria (por ejemplo, la potencia de la circunferencia dada respecto del punto *P*) La circunferencia de centro *P* y radio *PA* (distancia de *P* a los puntos de tangencia de las tangentes a la circunferencia dada que pasan por *P*) es una circunferencia de puntos dobles en la inversión anterior, y la consideración de esta circunferencia es la clave de la solución de este problema. Ahora se dibuja la circunferencia inversa de la recta dada (circunferencia de centro *C* y radio *CP*) y a continuación se trazan las cuatro tangentes comunes a esta circunferencia y a la circunferencia dada (*T1T1', T2T2', T3T3', T4T4'*). Se hallan las inversas de estas tangentes, ya que como la inversión conserva los ángulos, al ser tangentes a la circunferencia dada y a la circunferencia inversa de la recta dada, sus inversas, que son circunferencias, pasan por *P* y son tangentes a la recta y a la circunferencia dadas. Por otra parte, como la circunferencia de centro *P* y radio *PA* es de puntos dobles, los puntos de intersección de las rectas tangentes con esta circunferencia son puntos de las circunferencias solución y por tanto, los centros de las mismas se hallan trazando las mediatrices de los segmentos determinados sobres las rectas tangentes por la circunferencia de puntos dobles y por las mediatrices de los segmentos que determinan los puntos anteriores con *P*. La precisión es importantísima y se recomienda hacer el trazado con *Autocad*, ir marcando los pasos con colores o grosores y trazos de puntos, y tener sumo cuidado en los enlaces para no considerar puntos que por proximidad a los que se deben se confundan con ellos. La posibilidad de agrandar la imagen en pantalla facilita (posibilita) esta labor y con ella se eliminan los errores.

Solución analítica.

El centro, *O*, de la circunferencia solución, *C*, equidista de los tres objetos dados y se obtienen cuatro soluciones, dos cuando la circunferencia dada sea tangente exterior y otras dos cuando sea tangente interior a la circunferencia solución, Denotando por *P* al punto dado, por *t* a la recta dada y por C_1

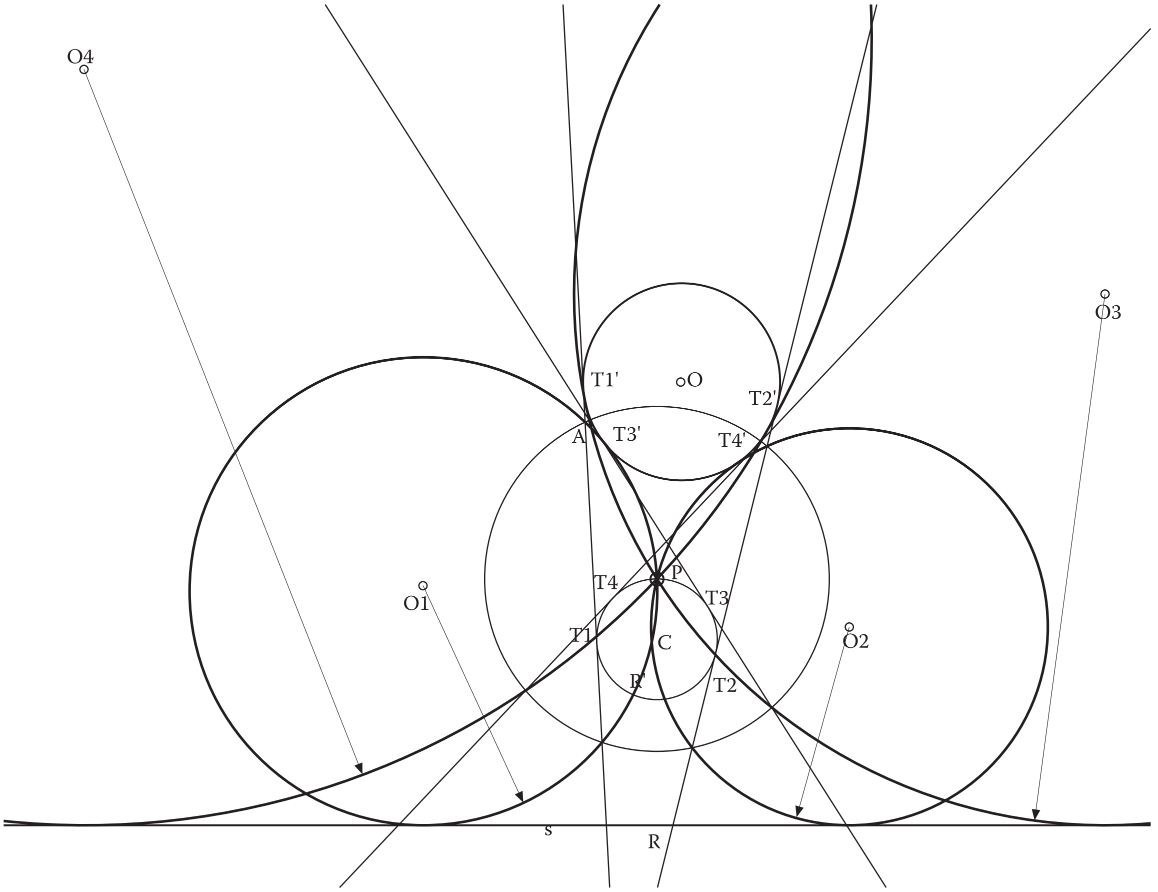


Figura 13. Circunferencia tangente a una recta, a una circunferencia y pasando por un punto

y r_1 al centro y radio de la circunferencia dada se tienen los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} dist(O,P) = dist(O,t) \\ dist(O,P) = dist(O,C_1) - r_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} dist(O,P) = dist(O,t) \\ dist(O,P) = dist(O,C_1) + r_1 \end{cases}$$

Los comentarios anteriores siguen siendo válidos aquí y, además, en este caso se introducen los conceptos de autoinversa y autoinversa de puntos dobles. En este caso tienen especial importancia el hecho de que la inversión conserve los ángulos y la propiedad de que este movimiento del plano sea involutivo. Esta construcción requiere enlazar varios pasos (bastantes) y, por tanto, está en el nivel máximo de Van Hiele, lo que es un indicativo de su dificultad y de la profundidad de su razonamiento.

9. Circunferencia que es tangente a una recta y a dos circunferencias dadas

Solución sintética.

Si en lugar de considerar la circunferencia de centro *O* y radio r_1, la circunferencia de centro *P* y radio r_2, y la recta s_1, se consideran el punto *P*, la circunferencia de centro *O* y radio r_1+r_2, y la recta s_1' (paralela a s_1 pero distante de ésta r_1, alejándose de *P*), el problema se habría reducido al anterior. Como muestra la figura 14, las circunferencias solución de este nuevo problema resuelven el de partida considerando circunferencias con centros en los mismos puntos, *O1* y *O3*, y radios respectivos R_1-r_2 y R_4-r_2. Con la misma circunferencia de radio r_1+r_2 y la paralela a s_1 acercada r_2 unidades a *P* se habrían obtenido otras dos soluciones, y con la circunferencia auxiliar de centro *O* y radio r_1-r_2 se habrían obtenido otras cuatro.

La figura 14 también muestra las tangentes a s_2 y a la misma circunferencia anterior obtenidas considerando la paralela s'_1 acercada r_2 unidades a *P*. Se trata de otros datos, pero se aprovecha la construcción anterior para que, ahora, se vea que los radios de las circunferencias solución se incrementan en r_2 unidades.

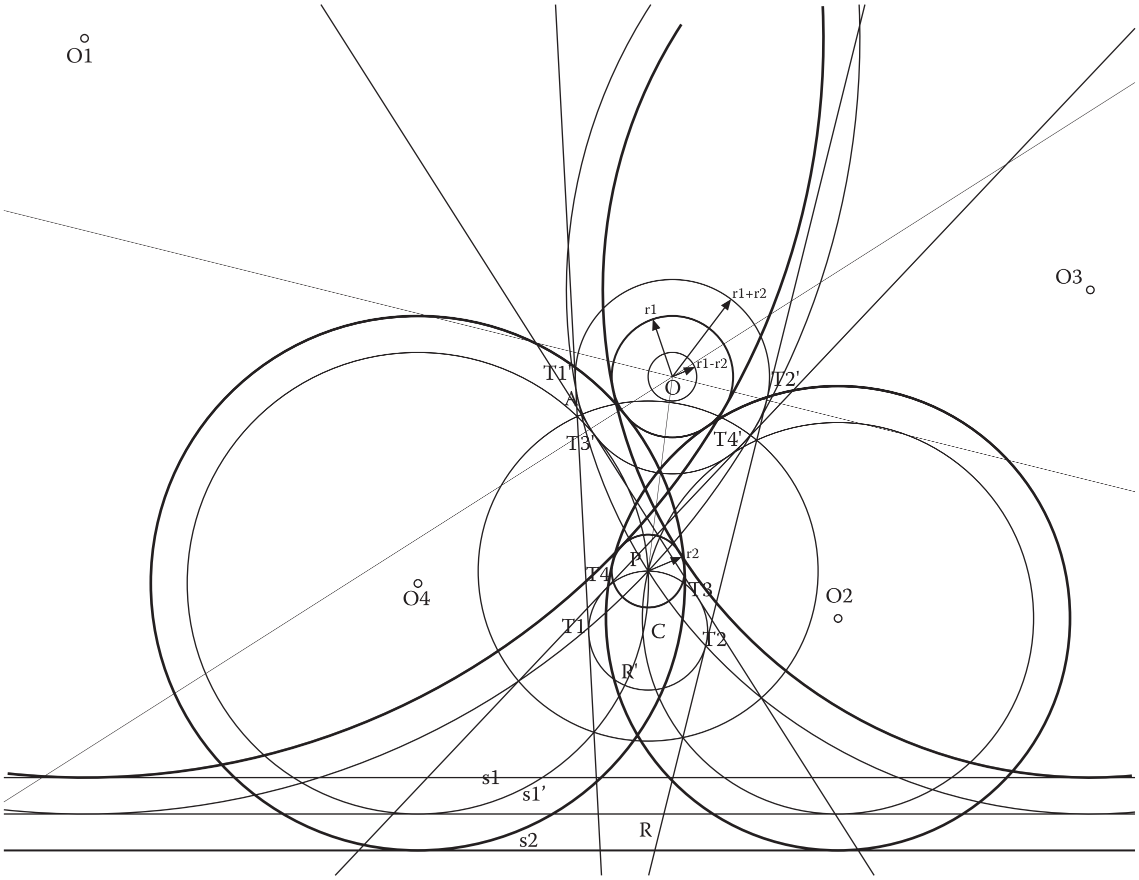


Figura 14. Circunferencia tangente a una recta y a dos circunferencias dadas

Si el punto *P*, está en la circunferencia o en la recta, el procedimiento para obtener la solución es muy fácil y, por esta razón no se explicita aquí. Sin embargo, puede ser un buen ejercicio resolverlo de forma sintética, justificando explícitamente los pasos de la construcción. Explicación y gráfico formarían un texto argumentativo, texto que en la terminología utilizada por Ibañes y Ortega (2004) tiene que tener razonamientos universales que sean capaces de explicar, convencer y persuadir de la realidad que se muestra.

Solución analítica.

El centro, *O*, de la circunferencia solución, *C*, equidista de cada una de las circunferencias y de la recta dadas (*C1*, *C2*, *t*) y las posiciones exteriores o interiores de las circunferencias dadas, respecto de la circunferencia solución, posibilitan que haya cuatro soluciones cuando aquellas sean exteriores respecto a ésta. Denotando a los centros de las circunferencias dadas por *C1* y *C2*, y a sus radios respectivos por r_1 y r_2, la siguiente tabla muestra estas cuatro posibilidades:

Exteriores	Interiores	Sistemas	Soluciones
C1 C2	-	$dist(O, C_1)-r_1=dist(O, C_2)-r2=dist(O, t)$	O_1
C1	*C2*	$dist(O, C_1)-r_1=dist(O, C_2)+r_2=dist(O, t)$	O_2
C2	*C1*	$dist(O, C_1)+r_1=dist(O, C_2)-r_2=dist(O, t)$	O_3
-	*C1 C2*	$dist(O, C_1)+r_1=dist(O, C_2)+r_2=dist(O, t)$	O_4

Los radios se obtienen evaluando una de las distancias consideradas en cada caso.

Si se considera que las ecuaciones de las circunferencias y de la recta, respectivamante, son:

$$x^2+y^2=1, \quad (x-4)^2+(y+1)^2=4, \quad y\text{-}2x=4$$

el sistema que corresponde al primer caso es éste:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \pm 1 = \sqrt{(x-4)^2+(y+1)^2} \pm 2 \\ \sqrt{x^2+y^2} \pm 1 = \dfrac{|y-2x-4|}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Las ya citadas instrucciones de *Maple* determinan dos soluciones para el centro

```
solve({sqrt(x^2+y^2)-1-sqrt((x-
4)^2+(y+1)^2)+2,sqrt(5)*(sqrt(x^2+y^2)-1)-abs(y-2*x-4)});
allvalues(%);
evalf(%);
```

$$O1=(1{,}85;\ 2{,}67)$$
$$O2=(-0{,}28;\ -4{,}57)$$

Tanto si las circunferencias fuesen secantes, como si fueran tangentes el número de soluciones se reduce a dos ya que, en el primer caso, ambas tendrían que ser interiores o exteriores a la circunferencia solución y, en el segundo, una debiera ser exterior y otra interior. ¿Hay más casos? Sería muy interesante hacer una clasificación de todas las posibilidades, incluyendo un esquema gráfico de la posición de los datos y de las posibles soluciones.

Habría que considerar aquí los comentarios del caso anterior, teniendo en cuenta que, ahora, se trata de un problema con una etapa más.

10. Circunferencia que es tangente a tres circunferencias dadas

Solución sintética.

Si en lugar de considerar las circunferencias dadas, de centros y radios respectivos C_1 y r_1, C_2 y r_2, y P y r_3, se consideran las circunferencias de centros y radios respectivos C_1 y r_1+r_3, C_2 y r_2+r_3, y el punto P (P y r_3-r_3), este problema se reduce al caso sexto, ya tratado anteriormente. Como muestra la figura 15, la solución del problema actual tiene el mismo centro $O1$ que la solución del caso sexto y el radio se incrementa en r_3 unidades. Las otras soluciones se hallan igual.

Solución analítica.

El centro, O, de la circunferencia solución, C, equidista de cada una de las circunferencias dadas (C_1, C_2, C_3) y las posiciones, exteriores o interiores, de las circunferencias dadas respecto de la circunferencia solución posibilitan que, cuando las circunferencias dadas sean exteriores, haya hasta ocho soluciones. Denotando a los centros de las circunferencias dadas por C_1, C_2 y C_3, y a sus radios respectivos por r_1, r_2 y r_3, la siguiente tabla muestra estas posibilidades:

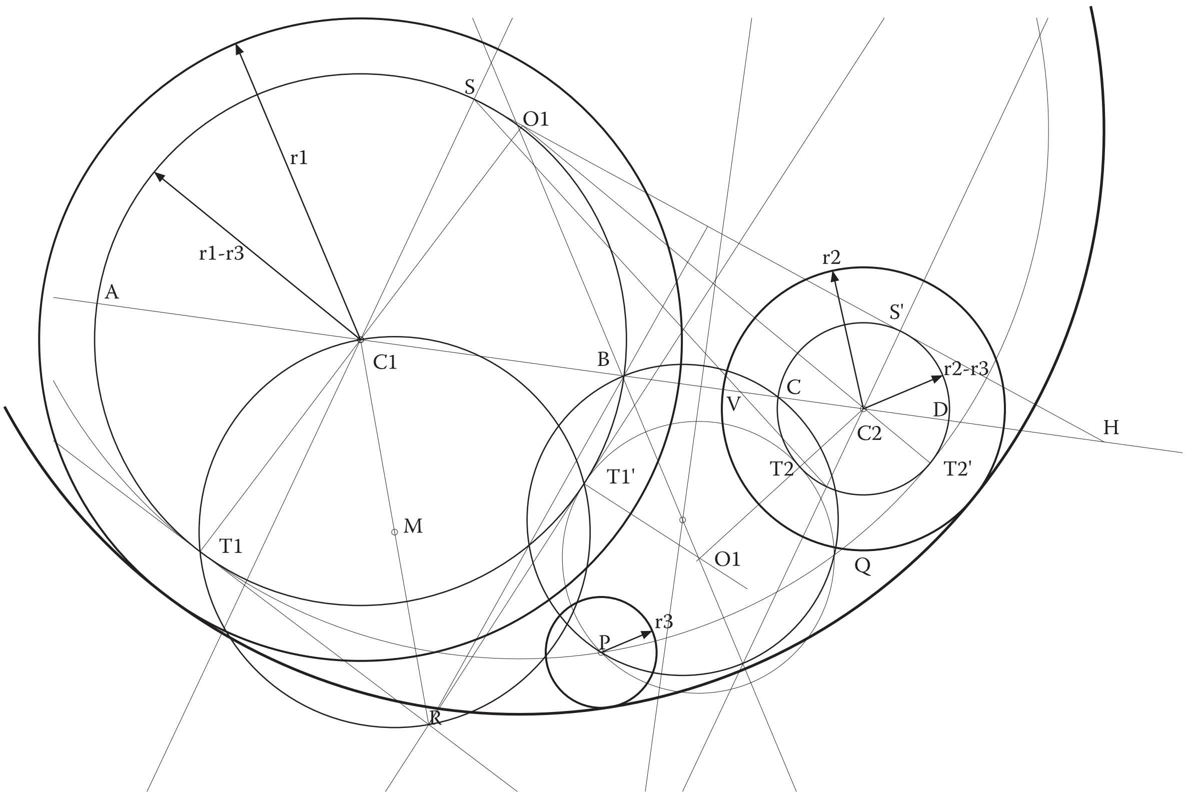


Figura 15. Circunferencia tangente a tres circunferencias dadas

Considerando las circunferencias dadas por las ecuaciones:

$x^2+y^2=1,$
$(x-4)^2+(y-4)^2=4,$
$(x+5)^2+(y-6)^2=9,$

Exteriores	Interiores	Sistemas	Soluciones
C1 C2 C3	-	$dist(O, C_1)-r_1=dist(O, C_2)-r_2=dist(O, C_3)-r_3$	O_1
C1 C2	C3	$dist(O, C_1)-r_1=dist(O, C_2)-r_2=dist(O, C_3)+r_3$	O_2
C1C3	C2	$dist(O, C_1)-r_1=dist(O, C_2)+r_2=dist(O, C_3)-r_3$	O_3
C2 C3	C1	$dist(O, C_1)+r_1=dist(O, C_2)-r_2=dist(O, C_3)-r_3$	O_4
C1	C2 C3	$dist(O, C_1)-r_1=dist(O, C_2)+r_2=dist(O, C_3)+r_3$	O_5
C2	C1C3	$dist(O, C_1)+r_1=dist(O, C_2)-r_2=dist(O, C_3)+r_3$	O_6
C3	C1 C2	$dist(O, C_1)+r_1=dist(O, C_2)+r_2=dist(O, C_3)-r_3$	O_7
-	C1 C2 C3	$dist(O, C_1)+r_1=dist(O, C_2)+r_2=dist(O, C_3)+r_3$	O_8

analíticamente, los ocho casos resultan de combinar los signos de las constantes que se suman a los radicales. Cuando son exteriores a la circunferencia solución, el sistema correspondiente se obtiene restado y cuando son interiores sumando:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \pm 1 = \sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2} \pm 2 \\ \sqrt{x^2+y^2} \pm 1 = \sqrt{(x+5)^2+(y-6)^2} \pm 3 \end{cases}$$

Las soluciones calculadas con Maple para los casos primero y último, respectivamente son:

O_1=(0'32, 3'36)
O_8=(-0'76, 6'20)

Una sencilla reflexión pone de manifiesto que, cuando dos de las circunferencias dadas son secantes o tangentes entre sí y exteriores respecto de la tercera, el número máximo de soluciones se reduce a cuatro; pero también pudiera ser que dos fueran exteriores y ambas fuesen tangentes o secantes con la tercera; que fuesen dos a dos secantes o dos a dos tangentes exteriores; que las dos primeras sean interiores a la tercera y que aquellas sean secantes, tangentes o exteriores; que la primera sea interior a la segunda y que ésta sea secante con la tercera (la primera y la tercera pudieran ser exteriores, secantes o tangentes); que la primera se tangente interior a la segunda y que la tercera (también incluida en la segunda sea exterior, tangente o secante con la primera); que la primera y la segunda sean tangentes interiores a la tercera y que aquellas sean exteriores, tangentes o secantes.

Conclusiones

Realizaremos una serie de reflexiones desde la didáctica sobre los estilos propios de la geometría sintética y de la geometría analítica. En primer lugar, destaca la universalidad de la resolución algebraica que aporta el sistema de representación simbólica. El concepto de distancia permite que todos estos problemas geométricos se pueden representar fácilmente en un sistema algebraico, dando lugar a varios sistemas de ecuaciones. La resolución de estos sistemas se complica en exceso en los sucesivos problemas y en la mayor parte de los casos sólo es recomendable que se resuelvan utilizando software adecuado. Por otra parte, las construcciones con regla y compás también se complican progresivamente y las últimas estarían como mínimo en el último nivel de Van Hiele, lo que evidencia la dificultad manifiesta de su aprendizaje. Sin embargo, cuando estas construcciones sintéticas son interiorizadas, los aprendizajes son mayores. Aquí las argumentaciones son más ricas, ya que tienen que relacionar bastantes conceptos y enlazar varias etapas. Por tanto, todo indica que los dos estilos son complementarios y si se logra combinar la universalidad del Álgebra con las conexiones sintéticas, los aprendizajes habrán alcanzado las cotas más altas. ■

REFRENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CLEMENS, D.H. y BATTISTA, M. T. (1992) "Geometry and Spatial Reasoning, en *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Douglas A. Grows Ed. Macmillan Pub.Co. New York.

CAMPOS, J. (2001): *Dibujo Técnico*, Jacaryan. Madrid.

GIESECK, F.E. (1995): *Dibujo Técnico*, Limusa. México.

GUTIÉRREZ, A. y JAIME, A. (1990): "Una propuesta de fundamentacion para la Geometría: el modelo de Van Hiele", en *Teoría y práctica en Educación Matemática*, S. Llinares y M.V. Sánchez. Alfar, Utrera (Sevilla).

HAREL, G. y SOWDER, L. (1998). "Students' Proof Schemes: Results from exploratory studies". En: Dubinski, E.; Schoenfeld, A. y Kaput, J. (Eds.), *Research on Collegiate Mathematics Education*, vol. III., 234-283 . AMS, Providence, USA.

IBAÑES, M. y ORTEGA, T. (1998): "La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria", *Educación Matemática*, Vol 9, n.º1 2, pp. 65-104, ISNN: 0187-82988, México D.F., México.

IBAÑES, M. y ORTEGA, T. (2002): "Reconocimiento de procesos matemáticos en alumnos de primer curso de bachillerato", *Enseñanza de las Ciencias*, ISNN 0212-4521, n.º 21 (1), pp. 49-63, Barcelona.

IBAÑES, M. y ORTEGA, T. (2004): "Textos argumentativos", *UNO*, Vol. 35, Graó, ISSN: 1133-9853, Barcelona.

LOZANO, R. L. (1987): "El problema de Apolonio", *Bol. Soc. Cast.* n.º 14, pp. 13-41, Madrid.

PUIG, P. (1976): *Curso de Geometría Métrica*, Herederos de Pedro Puig Adam, Biblioteca Matemática, S.L. Madrid.

RODRÍGUEZ, F. J. y ÁLVAREZ, V. (1990): *Dibujo Técnico*, Editorial Donostiarra, San Sebastián.

SOCAS, M. (1997): "Dificultades, errores y obstáculos en el aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria", en *La Educación Matemática en Enseñanza Secundaria*, Edit. Rico, L. y otros. Cap. V, pp. 125-154, Hórsori Editorial, Barcelona.

SUMA 46
Junio 2004, pp. 71-77

Las cónicas: método de aprendizaje *constructivo*

Este trabajo pretende plasmar el estudio de las cónicas como formas geométricas que se pueden generar de múltiples formas y que verifican propiedades que son utilizadas en la vida cotidiana. Debido al nivel en el que se imparte este tema, 4º de ESO, nos hemos centrado en la distinción a partir de la generación y características de cada cónica. Para llevar a cabo esta tarea se han utilizado elementos manipulables, algunos de los cuales pueden ser generados por los propios alumnos, para asentar mejor en ellos las distintas definiciones y propiedades.

This paper tries to present the study of conic sections as geometrical shapes which can be generated in many ways and that verify properties which are used in daily life. Due to the level at which this subject is taught, the last year of compulsory secondary education (4th ESO.) we have focused our attention on distinction starting from the generation and the characteristics of each conic. To carry out this task different manipulable elements have been used, some of which can be created by the students themselves, in order to better consolidate the different definitions and properties.

Los conocimientos sobre las cónicas, con los que los alumnos llegan a cuarto de ESO se limitan a la representación en el plano de algunas de ellas, como formas geométricas, siendo la circunferencia la más utilizada. En este nivel se le explica que estas cónicas, algunas de las cuales no conocen, se generan al cortar un cono con un plano en distintas posiciones y, para explicárselo, se usa el típico dibujo de un cono cortado por varios planos, encontrándose los alumnos con un dibujo de difícil interpretación espacial, siendo imposible esta interpretación para los alumnos que carecen de visión espacial.

Una vez *vistas* las cónicas de forma geométrica, procedemos a definírselas como puntos del plano que verifican una propiedad común. Posteriormente de cada cónica se ven una serie de características que a los alumnos les cuesta relacionar con su cónica correspondiente. Si a esto le añadimos que la generación de cada cónica depende de una serie de puntos y medidas que los alumnos deben conocer, podemos observar el cóctel de características y definiciones que los alumnos deben asimilar a través de un dibujo que generalmente no saben interpretar.

Teniendo en cuenta que la resolución e interpretación de problemas relacionados con las cónicas a través de sus ecuaciones, en cursos superiores, depende en un porcentaje muy alto, de la interpretación y la realización del dibujo con los datos y características que el problema nos plantee, nuestro reto está claro: debemos intentar que los alumnos comprendan, representen y distingan cada una de las cónicas y sus distintas propiedades.

La realización de los distintos aparatos que se citan a lo largo del trabajo, han venido motivados por el interés que los alumnos mostraban por ellos y lo que les facilitaba la comprensión de cada uno de los distintos conceptos.

Desarrollo del trabajo

Generación de las cónicas

Las distintas cónicas se generan al cortar un cono con un plano, haciendo variar el ángulo de inclinación del plano con respecto al eje del cono.

Para que este proceso sea asimilado de forma visual por los alumnos, se ha utilizado el visor de cónicas (ver foto 1). Este aparato ha sido creado utilizando dos embudos negros en el

Mariano Real Pérez
IES Suárez de Figueroa (Fuente de Cantos - Badajoz).

interior de los cuales se ha colocado una bombilla y se han dispuesto sobre un eje de forma que al encender las bombillas se observe un cono generado por un haz de luz.

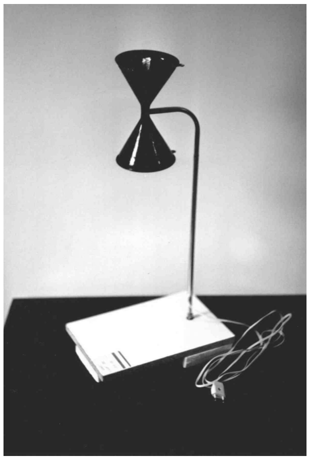


Foto 1. Generador de cónicas

Una vez que tenemos el cono ya sólo tenemos que cortarlo con un plano; para ello nos valemos de una madera rectangular, pudiéndose obtener:

a) La circunferencia: Para generar la circunferencia, cortamos el cono luminoso con la madera perpendicularmente al eje del cono. La parte iluminada que aparece en la madera resulta ser una circunferencia (ver foto 2). También observamos que si el plano pasa por el vértice del cono, la figura que resulta es un punto, que es la cónica degenerada de la circunferencia.

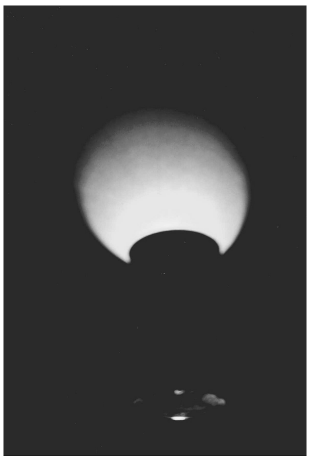


Foto 2. Generación de una circunferencia

b) La elipse: Para generar la elipse, cortamos el cono luminoso con la madera formando con el eje del cono un ángulo superior al que forma la directriz del cono con el eje. La parte iluminada que aparece en la madera resulta ser una elipse (ver foto 3). También observamos que si el plano pasa por el vértice del cono, la figura que resulta es un punto que es la cónica degenerada de la elipse.

Foto 3. Generación de una elipse

c) La parábola: Para generar la parábola, cortamos el cono luminoso con la madera formando ésta con el eje del cono un ángulo igual que el que forma la directriz con dicho eje. La parte iluminada que aparece en la madera resulta ser una parábola (ver foto 4). También observamos que si el plano pasa por el vértice del cono, la figura que resulta es una recta que es la cónica degenerada de una parábola.

Foto 4. Generación de una parábola

d) La hipérbola: Para generar la hipérbola, cortamos el cono luminoso con la madera formando con el eje del cono un ángulo inferior al que forme la directriz con el eje del cono. La parte iluminada que aparece en la madera resulta ser una hipérbola (ver foto 5). También observamos que si el plano pasa por el vértice del cono, la figura que resulta es un par de rectas secantes, que es la cónica degenerada de la hipérbola.

Tratamiento particular de cada cónica

La Circunferencia

Despues de haber generado la circunferencia como corte de un cono con un determinado plano, la definiremos como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan, una distancia llamada radio, de un punto fijo llamado centro (J. M. Arias 1996).

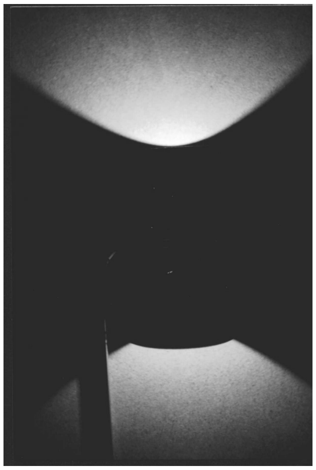


Foto 5. Generación de una hipérbola

Ahora pasaremos a generar la circunferencia de tres formas diferentes, utilizando propiedades de ésta:

- Generación de una circunferencia como envolvente de sus tangentes.

Consideremos dos circunferencias concéntricas *C* y *C'* de radios *R* y r (*r*<*R*) respectivamente. Si trazamos rectas tangentes a *C'*, observamos que estas rectas generan en *C* cuerdas que son de igual longitud (Ver gráfico 1).

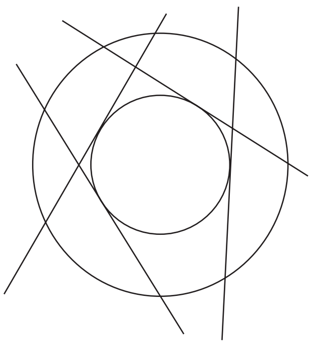


Gráfico 1

La anterior propiedad la vamos a utilizar de forma inversa para generar una circunferencia. Partimos de una circunferencia y trazamos en ella cuerdas de igual longitud. La curva envolvente de estas cuerdas es una circunferencia. El anterior proceso se puede hacer de forma manipulable según describimos a continuación: en una madera trazamos una circunferencia y cada ángulo de 10º clavamos una puntilla; una vez clavadas las 36 puntillas, atamos un hilo a una de ellas y lo llevamos a cada una de las otras de siete en siete por ejemplo, hasta haber tocado todas las puntas. Si observamos, las cuerdas de la circunferencia hechas con el hilo describen otra circunferencia (ver foto 6).

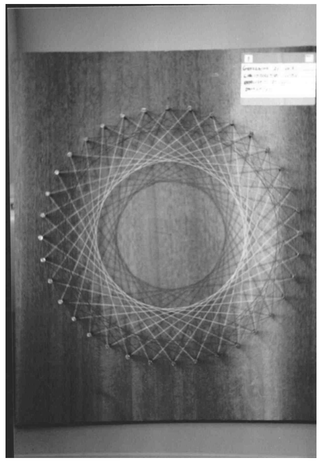


Foto 6. Cuerdas con hilo

- Generación de una circunferencia por papiroflexia

Ahora vamos a generar una circunferencia mediante dobleces en el papel. Dibujamos una circunferencia en un folio y marcamos su centro. Doblamos el folio de forma que el centro caiga sobre la circunferencia y marcamos la doblez. Repetimos este proceso llevando cada vez el centro sobre un punto distinto de la circunferencia. Si observamos, las dobleces marcadas son tangentes de una misma circunferencia, generándose ésta como envolvente de las dobleces (Ver gráfico 2).

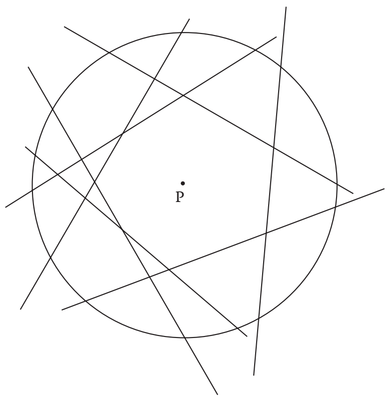


Gráfico 2

- Ángulos y circunferencia

Si en una circunferencia trazamos una cuerda, la circunferencia queda dividida en 2 arcos de circunferencia cada uno de los cuales verifica que el ángulo bajo el que se ve la cuerda, desde cada uno de los puntos de esos arcos, es siempre el mismo (Manuel Fernández 1991).

Si aplicamos la anterior propiedad al contrario y trazamos un segmento cualquiera, todos los puntos desde los que se ve ese segmento bajo un ángulo dado, forman un arco de circunferencia. Para explicar esto de forma manipulable, se ha dibujado un segmento en una tabla y en su comienzo y final se ha clavado una puntilla. Con un alambre se ha formado un ángulo. Si metemos el alambre entre las dos puntillas y marcamos los puntos que describe ese ángulo, nos resulta un arco de circunferencia (ver foto 7).

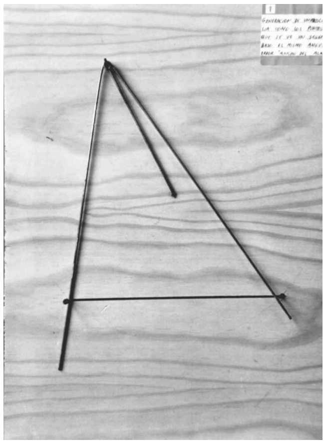


Foto 7. Ángulos y circunferencia

La Elipse
Después de haber generado la elipse como corte de un cono con un determinado plano, la definimos como el lugar geométrico de los puntos del plano que verifican que la suma de las distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es constante (José M. Arias 1996).

Ahora pasaremos a generar la elipse de dos formas diferentes, utilizando propiedades de ésta.

- Método del jardinero

Para dibujar una elipse por el método del jardinero lo primero que hacemos es tomar una cuerda cuyos extremos ataremos a dos clavos. Clavaremos los clavos en el suelo o en una madera a una distancia de separación inferior a la longitud de la cuerda. Los puntos del plano hasta los que llega la cuerda cuando esté tirante son puntos de la elipse de focos situados en los clavos y cuyo eje focal mide la longitud de la cuerda (Daniel Santos 1995) (ver gráfico 3).

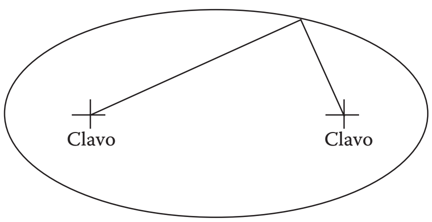


Gráfico 5

- Generación de una elipse por papiroflexia

Ahora vamos a generar una elipse mediante dobleces en el papel. Dibujamos una circunferencia en un folio y marcamos su centro y un punto *P* en el interior. Doblamos el folio de forma que el punto *P* caiga sobre la circunferencia y marcamos la doblez. Repetimos este proceso llevando cada vez el punto *P* sobre un punto distinto de la circunferencia. Si observamos la dobleces marcadas son tangentes de una misma elipse, generándose ésta como envolvente de las dobleces. Los focos de esta elipse son el centro de la circunferencia y el punto *P* (ver gráfico 4).

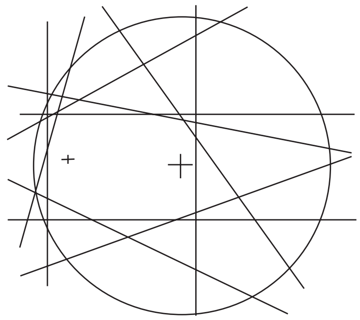


Gráfico 4

La Parábola
Tras haber generado la parábola como corte de un cono con un determinado plano, la definimos como el lugar geométrico de los puntos del plano que están a la misma distancia de un recta fija, que es llamada directriz, y de un punto fijo llamado foco.

Procedemos ahora a generar la parábola de dos formas diferentes:

- Método del jastre

Consideremos una parábola cualquiera. Trazamos las rectas r y s tangentes a la parábola desde el punto O de corte de la directriz con el eje. Estas rectas tocan a la parábola en los puntos P_r y P_s respectivamente. Si tomamos un punto Q de la parábola, entre P_r y P_s, y trazamos la tangente a la parábola por el punto Q, esta recta corta a las rectas r y s en dos puntos Q_r y Q_s. Verificándose que:

$$d(P_r,Q_r)=d(Q_s,O) \text{ y } d(Q_r,O)=d(Q_s,P_s)$$

Utilizando esta propiedad vamos a construir una parábola como envolvente de sus tangentes. Dibujamos dos rectas r y s secantes en un punto O. A partir de O y en la misma dirección trazamos puntos a una distancia constante sobre la recta r e igual sobre la recta s, por ejemplo 20 puntos. Unimos el último punto de r con el primero de s, el penúltimo de r con el segundo de s, y así sucesivamente hasta pasar por todos los puntos. Todas las rectas trazadas al unir estos puntos son tangentes de una misma parábola (Daniel Santos 1995).

Si el método descrito lo realizamos sobre una madera, clavando en cada punto una puntilla y unimos las puntillas con un hilo según se ha descrito; se observa claramente la figura de la parábola (ver foto 8).

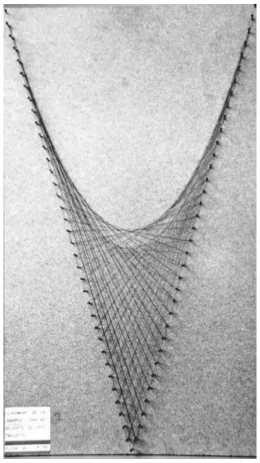


Foto 8. Parábola e hilos

- Generación de una parábola por papiroflexia

Vamos a generar una parábola mediante dobleces en el papel. Dibujamos una recta en un folio y marcamos un punto *P* que no esté en la recta. Doblamos el folio de forma que el punto *P* caiga sobre la recta y marcamos la doblez. Repetimos este proceso llevando cada vez el punto *P* sobre un punto distinto de la recta. Si observamos las dobleces marcadas, son tangentes de una misma parábola, generándose ésta como envolvente de las dobleces, siendo el foco de esta parábola el punto *P* (ver gráfico 5).

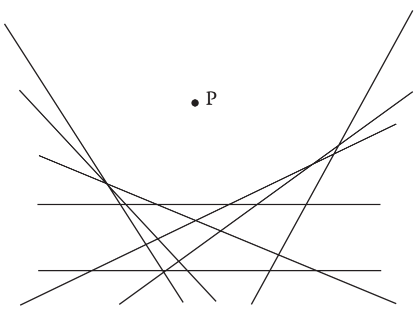


Gráfico 5

La Hipérbola
Definimos la hipérbola como el lugar geométrico de los puntos del plano que verifican que la diferencia de las distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es constante (José M. Arias 1996).

- Generación de una hipérbola por papiroflexia

Vamos a generar una hipérbola mediante dobleces en el papel. Dibujamos una circunferencia en un folio, marcamos su centro y un punto *P* en el exterior de la circunferencia. Doblamos el folio de forma que el punto *P* caiga sobre la circunferencia y marcamos la doblez. Repetimos este proceso llevando cada vez el punto *P* sobre un punto distinto de la circunferencia. Si observamos las dobleces marcadas, son tangentes de una misma hipérbola, generándose ésta como envolvente de las dobleces. Los focos de esta hipérbola son el centro de la circunferencia y el punto *P* (ver gráfico 6).

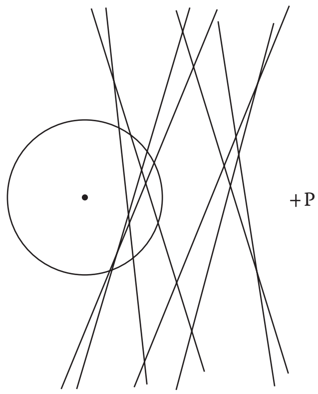


Gráfico 6

El juego de las cónicas
Después de conocer las distintas cónicas y su forma de generación, procederemos a enseñarle a los alumnos algunas propiedades de cada cónica e intentaremos que consigan distinguir cada cónica según sus propiedades y componentes. Esto lo vamos a hacer de forma ociosa a través de un juego.

Construcción del juego
Para construir el juego necesitamos una cartulina blanca, una baraja de 40 cartas, pegamento y rotuladores. Comenzamos echando pegamento en la cara delantera de cada carta y pegándola en la cartulina. Una vez que estén secas, recortamos las cartas de la cartulina, con lo que obtendremos 40 cartas con su parte delantera en blanco.

Ahora, de cada una de las cónicas propondremos 10 propiedades y en cada una de las cartas realizaremos un dibujo que esté relacionado con la propiedad que vayamos a escribir en ella (por ejemplo: para la propiedad tiene un centro podemos dibujar una diana), escribiendo debajo del dibujo dicha propiedad y su número correspondiente. Lo que tenemos ahora es una baraja de cartas de 40 propiedades, cada una de ellas de una cónica distinta. Para cada cónica las propiedades que proponemos son:

- La circunferencia

1 Tiene un centro. 2 Un compás la construye perfectamente. 3 Tiene infinitos ejes de simetría. 4 No tiene focos. 5 Cada punto tiene un radio-vector. 6 Tiene excentricidad 0. 7 Se puede dibujar de un solo trazo. 8 Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de una fijo llamado centro. 9 su cónica degenerada es un punto. 10 Todo rayo lanzado desde el centro, al rebotar en la cónica, vuelve a pasar por el centro.

Obteniéndose las cartas de la foto 9.

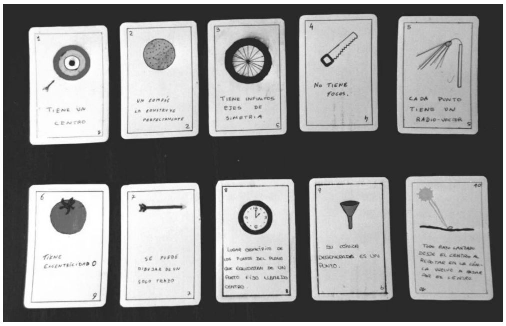


Foto 9. Cartas de la circunferencia

- La elipse

1 Tiene un centro. 2 Tiene cuatro vértices. 3 Tiene dos ejes de simetría. 4 Tiene dos focos. 5 Cada punto tiene dos radio-vectores. 6 Tiene excentricidad entre cero y uno. 7 Se puede dibujar de un solo trazo. 8 Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de las distancias a dos puntos fijo es constantes. 9 Su cónica degenerada es un punto. 10 Todo rayo lanzado desde uno de los focos, al rebotar en la cónica, pasa por el otro foco.

Obteniéndose las cartas de la foto 10.

Foto 10. Cartas de la elipse

- La parábola

1 No tiene centro. 2 Tiene un vértice. 3 Tiene un eje de simetría. 4 Tiene un foco. 5 Cada punto tiene un radio-vector. 6 Tiene excentricidad uno. 7 Se puede dibujar de un solo trazo. 8 Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo y una recta fija. 9 Su cónica degenerada es una recta. 10 Todo rayo lanzado desde el foco, rebota en la cónica con dirección perpendicular a la directriz.

Obteniéndose las cartas de la foto 11.

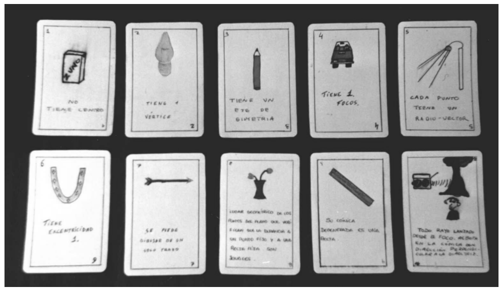


Foto 11. Cartas de la parábola

- La hipérbola

1 Tiene un centro. 2 Tiene cuatro vértices. 3 Tiene dos ejes de simetría. 4 Tiene dos focos. 5 Cada punto tiene dos radio-vectores. 6 Tiene excentricidad mayor que uno. 7 No se puede dibujar de un solo trazo. 8 Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de las distancias a dos puntos fijos es constantes 9 Su cónica degenerada es un par de rectas secantes. 10 Todo rayo lanzado desde uno de los focos, al rebotar en la cónica, sale según la dirección que le marca el radio-vector del otro foco.

Obteniéndose las cartas de la foto 12.

Foto 12. Cartas de la hipérbola

DESARROLLO DEL JUEGO

El desarrollo del juego será el siguiente:

A cada jugador se le reparten 6 cartas, y se queda una de las cartas del montón encima de la mesa de forma que todos puedan verla. El montón, con las restantes cartas se queda encima de la mesa boca abajo. Ahora comienza la ronda de descartaciones, empezando el jugador que esté a la derecha del que ha repartido. Este jugador puede optar entre tomar la carta que hay encima de la mesa o tomar la primera carta del montón. Una vez observadas las siete cartas, descartará una de ellas, que colocará boca arriba encima de las que hubiese ya encima de la mesa. Cuando se terminen las cartas del montón, se tomarán las que haya encima de la mesa, se barajarán y se volverá a hacer un nuevo montón con ellas.

El juego finalizará una vez que uno de los jugadores haya reunido las seis cartas de la misma cónica (siendo éste el vencedor) o después de haber dado tres vueltas al montón, en cuyo caso ganará el jugador que mayor puntuación obtenga al sumar los puntos que indican las cartas concernientes a la cónica que estuviera coleccionando.

En este juego pueden participar de 2 a 6 jugadores ambos inclusive y es un juego que merece la pena que sea construido por los propios alumnos.

Conclusiones

Como conclusión, podemos decir que después de haberlo llevado a la práctica en el aula se han obtenido excelentes resultados observados en los siguientes puntos:

a) Los alumnos son capaces de distinguir unas cónicas de otras señalando sus componentes fundamentales.

b) Conocimiento de la forma de generación de cada una de las cónicas como figuras obtenidas al cortar un cono con un plano en distintas posiciones.

c) Conocimiento comprensivo de la definición de cada cónica como lugar geométrico de los puntos del plano que verifican una determinada propiedad.

d) Dada una característica o propiedad de cualquiera de las cónicas, distinguir la cónica de que se trate.

e) Dibujo de cada una de las cónicas en unos ejes coordenados a partir de sus elementos de definición.

f) Generación de cada cónica por métodos distintos de cortar un cono con un plano.

g) Utilización de las cónicas en la vida cotidiana para el aprovechamiento de sus propiedades.

h) Distinción de todos los elementos y medidas existentes en cada cónica, así como la influencia que cada uno de ellos tiene en el dibujo de ésta.

i) Interés mostrado por los alumnos en el desarrollo de cada una de las actividades.

Las anteriores actividades propuestas en el tema, han demostrado por sus resultados que el aprendizaje en los alumnos a través de elementos manipulables, hace que los distintos conceptos sean adquiridos por estos de una forma más duradera, ya que siempre podrán relacionar cualquier propiedad con algo que ellos ya han manejado.

Aunque las actividades sólo abarcan el tema de cónicas, siempre podremos recurrir a métodos o aparatos parecidos a los anteriores que tengan relación con los distintos conceptos que se vayan a tratar.

El manejo de algunos de estos aparatos hace que el alumno asimile con mayor interés algunos conceptos y propiedades que antes debía aprender de memoria y desinteresadamente. Esto se demuestra por ejemplo en el juego de las cartas en el que el alumno aprende determinadas propiedades de cada cónica sin ser consciente de ello.

También nos hemos ayudado de los medios tecnológicos puestos a nuestro alcance (el ordenador), con el que los alumnos, ya no sólo ven las cónicas como formas geométricas que cumplen determinadas propiedades, sino que además se hace consciente de que el conocimiento de las partes fundamentales de cada cónica puede conocer todos sus componentes y además dibujarla.

Como habíamos dicho al principio, los conocimientos adquiridos ahora por el alumno le servirán para enfrentarse, sin problemas de razonamiento, a los distintos problemas que se le puedan plantear cuando vuelva a tratarse el tema de cónicas en segundo de bachillerato.

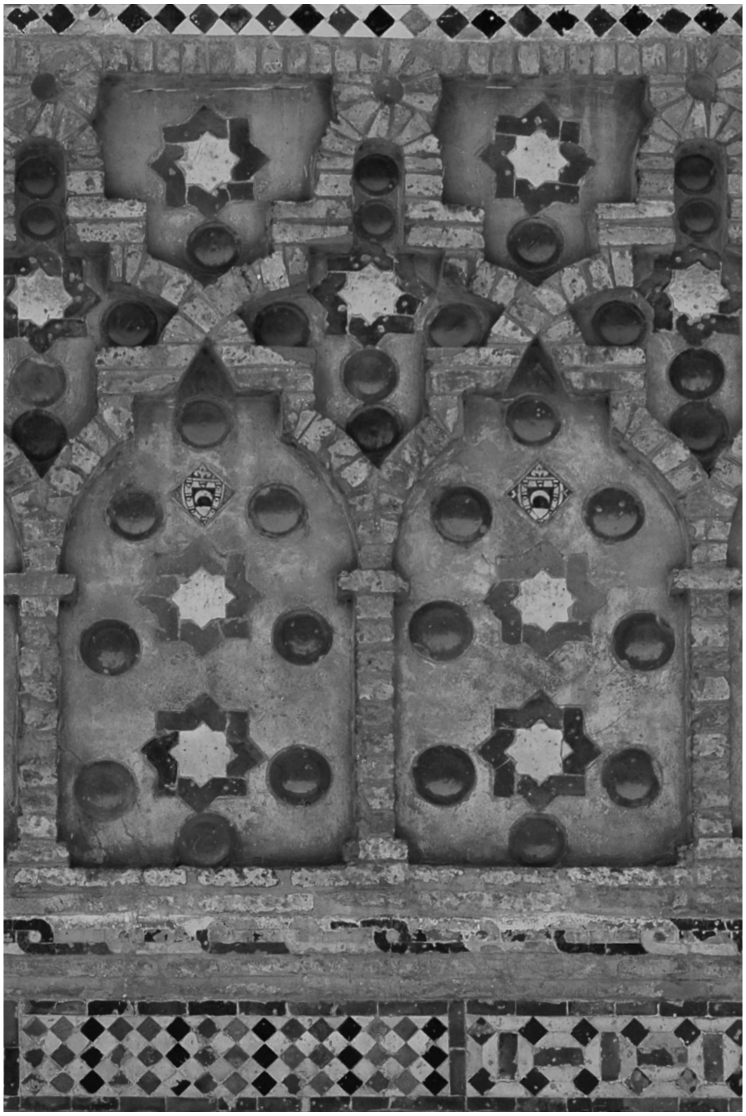
Para aquel que no continúe sus estudios en bachillerato, lo aprendido le servirá para utilizar las cónicas en la vida cotidiana y poder resolver problemas que puedan planteársele. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARIAS, J. M. , CARPINTERO, E. y SANZ F. (1996): *Matemáticas B*, Ed. Casals.

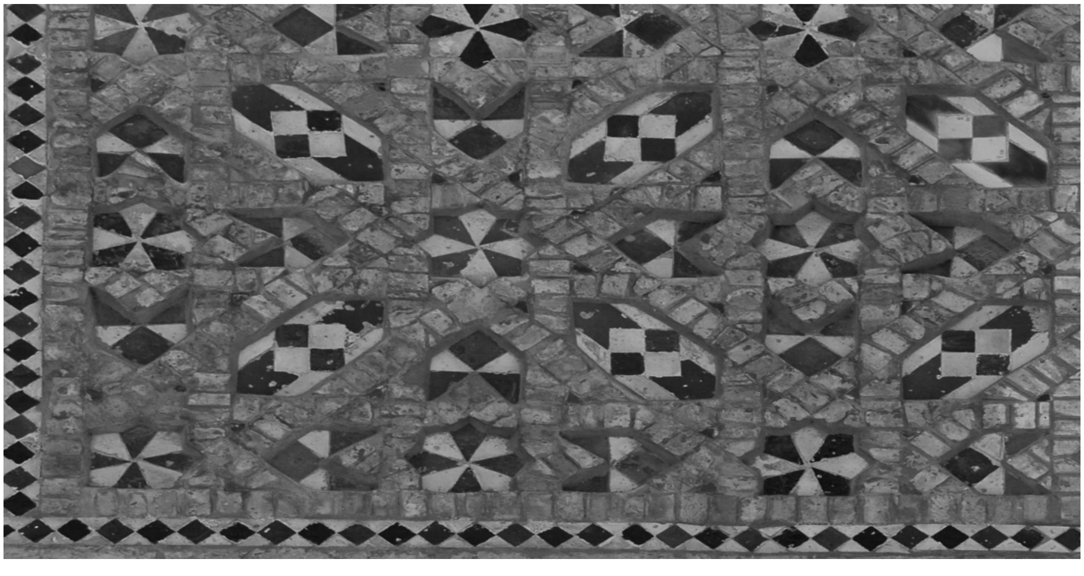
FERNÁNDEZ, M., PADILLA F. J., SANTOS A. L. y VELÁSQUEZ F. (1991): *Circulando por el Círculo*, Ed. Síntesis.

SANTOS D., GARCÍA P., VAZQUEZ C., NEVOT A., GIL, J. y NORTES A. (1995): *Matemáticas 4º ESO*, Ed. Santillana.



Muro de la Parroquieta, La Seo de Zaragoza, mosaico mudéjar del siglo XIV (detalle). Foto: F.M.C. 2004

Muro de la Parroquieta, La Seo de Zaragoza, mosaico mudéar del siglo XIV (detalle). Foto: F.M.C. 2004



SUMA 46
Junio 2004, pp. 79-82

Importancia del uso de las tecnologías de la información con el test de hipótesis

El estudio que presentamos se llevó a cabo con alumnos de 4º de ESO, con alto índice de fracaso en el área de matemáticas. Estudiamos la influencia de los coeficientes en la representación gráfica de funciones lineales y cuadráticas. La investigación consiste en contrastar dos métodos con enfoques distintos: investigar utilizando estrategias ya adquiridas en la representación gráfica de funciones y utilizando el programa Derive. El trabajo ha consistido en comparar estadísticamente los resultados de ambos tratamientos, utilizando para ello el Test de Hipótesis no paramétrico de Wilcoxon.

This study was carried out on 4th ESO students with high academic failure in the maths area. We looked into coefficient interaction with the graphic representation of linear and square-functions. This research compares two methods with two different approaches: investigation through previously-acquired strategies on function graphic representation and through the Derive programme. Its procedure involved statistical comparison of the results in both treatments under Wilcoxon's non-parametric Hypothesis Test.

El problema y su tratamiento

Una vez planteado el problema a estudiar: *Estudio de la representación gráfica de funciones lineales y cuadráticas en función de sus parámetros reales a y b.*

Representación gráfica de funciones lineales y cuadráticas	
Y = aX	Función lineal
Y = aX + b	Función afín
$Y = aX^2$	Función cuadrática
$Y = aX^2 + b$	Función cuadrática

Utilizamos dos métodos distintos de enfoque:

Primer método
Investigando matemáticas: Básicamente consiste en que los alumnos y alumnas realicen la representación gráfica de esas funciones de una forma independiente, sin prácticamente ninguna orientación por parte del profesor, utilizando viejas estrategias ya adquiridas anteriormente por ellos.

La investigación del alumno es individual, y consiste en la representación de forma sistemática de un número suficiente de funciones, de cada uno de los cuatro tipos indicados, para buscar conclusiones acerca del cambio de valor y cambio de signo de los parámetros, que nos potencien el autoaprendizaje (Olvera, 1986).

Segundo método
Método Derive: La representación gráfica de funciones utilizando Derive, permite por una parte, un método rápido de validación de conjeturas hechas por el alumnado; y por otra parte, permite estudiar pormenorizadamente las relaciones funcionales, utilizando para ello el modo de trazado sobre una gráfica, sacando conclusiones sobre las coordenadas de la función que también aparecen en la pantalla del ordenador.
El tratamiento bajo este segundo método, consiste en la representación en los ordenadores de los cuatro tipos de funciones, pero en este caso, de forma directiva por parte del profesor. Éste va diciendo el tipo de función a representar, y tras la representación de un número suficiente de funciones, el colectivo de la clase va sacando conclusiones acerca del uso de los parámetros.

Antonio Israel Mercado Hurtado
IES Emilio Pérez Piñero (Calasparra - Murcia)
María Zoraida Custodio Espinar

Las hipótesis

Tras la observación de la puesta en práctica de nuestra investigación, las hipótesis que nos habíamos propuesto podían ser matizadas, pues factores que pensábamos podían ser motivadores para los alumnos, no lo eran y factores que en ningún momento pensábamos fuesen motivantes, sí que lo eran. Así, durante el desarrollo de las tres sesiones que se llevaron a cabo, tuvimos una duda razonable de si la hipótesis alternativa debía ser unilateral o bilateral.

A pesar de estas dudas razonables, mantuvimos las hipótesis definidas al principio de nuestro trabajo.

Nuestra idea preconcebida, era que habría diferencias significativas en la utilización de ambos métodos, por ello planteamos las siguientes hipótesis:

Hipótesis nula – H_0 : Los resultados obtenidos en la representación gráfica de funciones lineales y cuadráticas son iguales, con independencia del método utilizado.

Hipótesis alternativa – H_1: Aparecen diferencias en función del tratamiento dado a la representación gráfica de funciones.

Investigando matemáticas: Básicamente consiste en que los alumnos y alumnas realicen la representación gráfica de funciones de una forma independiente, sin prácticamente ninguna orientación por parte del profesor, utilizando viejas estrategias ya adquiridas anteriormente por ellos.

Población y muestra a la que dirigimos nuestra investigación

La población hacia la que iba dirigida nuestra investigación era: Alumnos de 4º de ESO con dificultades en la asignatura de matemáticas del IES Emilio Pérez Piñero de Calasparra (Murcia).

Para incidir en esta población, elegimos como muestra los alumnos de 4º de ESO que están matriculados en la opción A de matemáticas.

Como vemos, la elección de la muestra es intencional, pues elegimos a alumnos que están matriculados en la opción A, que normalmente esta formada por los que tienen altas dificultades en este área.

La muestra resulta significativa, aunque como hemos dicho, el hecho de escogerla intencionalmente, nos lleva a pensar, que si encontramos diferencias significativas entre ambos métodos, éstas pueden ser utilizadas favorablemente con otros alumnos que, aún no matriculados en la opción A, tengan dificultades en matemáticas.

Diseño de la investigación

Dado que se trata de encontrar las diferencias entre dos enfoques distintos para la representación gráfica de funciones lineales y cuadráticas, utilizamos la siguiente metodología:

1. Método: *Investigando matemáticas*. Este trabajo realizado por el alumnado será la primera fuente de información para la comparación. Los alumnos representaron gráficamente funciones, utilizando sus conocimientos previos en una tarea puramente investigativa, en la que el objetivo fundamental es la obtención de características de la representación mediante ensayo-error.

La información que recogímos, estaba basada en una prueba individual, en la que fundamentalmente se pedía la representación de funciones lineales y cuadráticas, en las que iban cambiando los parámetros a y b respectivamente. Los alumnos debían sacar conclusiones a partir de las representaciones que obtenían.

2. Tras la etapa anterior, el alumnado no recibió una verificación objetiva de los resultados, para buscar una comparación lo más objetiva posible, libre de sesgos, con los resultados de la aplicación del segundo método.

3. Método *Derive*: consistía en la representación gráfica de funciones utilizando el programa Derive, con la consiguiente validación de las conclusiones que los alumnos obtenían, sobre la importancia del cambio de parámetro en los distintos tipos de funciones.

Un esquema del diseño de investigación que llevamos a cabo es el siguiente:

Diseño para comparar métodos de representación gráfica de funciones lineales y cuadráticas

Tratamiento del tema:	POSTEST
Investigando matemáticas:	T1
Derive:	T2

Plan de análisis de datos: prueba de Wilcoxon

La comparación que hemos llevado a cabo, está basada en los resultados obtenidos en ambas pruebas.

Para comparar un diseño de dos grupos, en el que no tenemos información a priori sobre la distribución que sigue la población objeto de nuestro estudio, vamos a usar el test no paramétrico de Wilcoxon. Las características de este test son óptimas para los objetivos planteados, teniendo en cuenta las circunstancias de partida (no podemos emplear un método paramétrico), pues con los datos que contamos, podemos asignar rangos de menor a mayor a las diferencias de los resultados obtenidos mediante los dos procedimientos. Para asignar estos rangos, utilizamos las notas obtenidas por cada alumno en ambas pruebas, teniendo en cuenta que el emparejamiento que hacemos entre grupos es perfecto, pues comparamos a un mismo individuo en dos situaciones distintas.

El tratamiento de los datos para las dos hipótesis que nos planteamos anteriormente, a un nivel de significación del 95% es el siguiente:

Tabla para el test de Wilcoson										
Alumno	A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	A 6	A 7	A 8	A 9	A 10
Derive	6	7,6	9	6,3	7	6,6	6,6	5,8	4	3,3
Inv. Matem.	6,9	8,1	9,4	4,4	0,1	5,6	3,4	1,9	2,8	0
Dif. y Signo	-1,9	-0,5	-0,4	+1,9	+6,9	+1	+3,2	+3,9	+1,2	+3,3
Rango	-9,5	-3	-1,5	+9,5	+20	+5	+14	+16	+6	+15

Tabla para el test de Wilcoson (cont.)										
Alumno	A 11	A 12	A 13	A 14	A 15	A 16	A 17	A 18	A 19	A 20
Derive	9	9,8	8,3	9,7	2,3	1	8,6	2,6	2,3	1,3
Inv. Matem.	8,1	4,4	3,8	5	1,9	2,6	5,6	5	5	0
Dif. y Signo	+0,9	+5,4	+4,5	+4,7	+0,4	-1,6	+3	-2,4	-2,7	+1,3
Rango	+4	+19	+17	+18	+1,5	-8	+13	+11	-12	+7

Suma de rangos de signo positivo: 165

Suma de rangos de signo negativo: 45

T = Suma de los rangos de menor valor absoluto (sin tener en cuenta el signo) : 45

La muestra que tenemos es de tamaño 20 < 25, así pues, el contraste para realizar el test de hipótesis se realiza comparando el valor empírico T, con los valores críticos dados por la tabla correspondiente al test de Wilcoxon.

Suponiendo que nuestro nivel de significación es del 95 % (a = 0,05) y que la hipótesis que hemos realizado es bilateral, utilizaremos el valor crítico C para un test de dos colas.

Esto es C = 52.

Como 52 > 45, esto es, el valor crítico observado en tabla es superior al valor empírico T obtenido por la muestra, podemos rechazar H_0, es decir, afirmamos que los resultados obtenidos por ambos métodos son significativamente diferentes. Podemos afirmar por tanto que, para un nivel de significación del 95%, los resultados obtenidos por los alumnos en el estudio de la influencia de los parámetros en la representación gráfica de funciones lineales o cuadráticas, es significativamente distinto, utilizando el método Investigando matemáticas y utilizando el método Derive.

Hipótesis nula – H_0: Los resultados obtenidos en la representación gráfica de funciones lineales y cuadráticas son iguales, con independencia del método utilizado.

Hipótesis alternativa – H_1: Aparecen diferencias en función del tratamiento dado a la representación gráfica de estas funciones.

Conclusiones

Lo cierto es que las conclusiones que podemos extraer de nuestra investigación son bastante alentadores, pues ha quedado probada estadísticamente la diferencia en el rendimiento escolar del alumnado, para el tema tratado, en función de la metodología utilizada en clase.

A la vista de los resultados, sería lógico plantearse cuál de los dos métodos es mejor, en tanto que proporciona unas mejores calificaciones al alumnado.

Para intentar responder a esta cuestión, podríamos plantearnos otro contraste de hipótesis en el que, en vez de escoger una hipótesis alternativa bilateral, eligiéramos una hipótesis unilateral:

Hipótesis nula – H_0 : Los resultados obtenidos en la representación gráfica de funciones lineales y cuadráticas son iguales, con independencia del método utilizado.

Hipótesis alternatica – H_1: Utilizando el método Derive los resultados académicos del alumnado en la representación gráfica de funciones lineales y cuadráticas son superiores que al utilizar el método Investigando matemáticas.

Bajo esta hipótesis y a un nivel de significación del 97,5 % (a = 0,025), el valor crítico observado para una muestra de 20 individuos es C = 52.

Así pues, como 52 > 45, esto es, el valor crítico observado en la tabla es superior al valor empírico T obtenido por la muestra, podemos rechazar H_0, aceptando pues, la hipótesis alternativa que afirma que utilizando Derive en la representación gráfica, los resultados serán significativamente mejores con un nivel de significación del 97,5%.

Como podemos observar, este segundo test de hipótesis nos da bastante más información que el primero, de una parte, podemos dar prioridad a un método sobre el otro; de otra parte, para este segundo test, el nivel de significación es aún más alto que para el primero.

En cuanto a la validez del proceso, se ha de tener en cuenta que el alumnado no conocía que se estaba llevando a cabo esta investigación. Las características propias de la muestra, nos hacen pensar que los resultados pueden ser aplicables a otros colectivos de similares características.

Las conclusiones que podemos extraer de nuestra investigación son bastante alentadores, pues ha quedado probada estadísticamente la diferencia en el rendimiento escolar del alumnado, en función de la metodología utilizada en clase.

Evidentemente existen otras muchas variables extrañas que pueden influir de forma directa en los resultados obtenidos en nuestra investigación. Algunas de estas variables, así como el tratamiento que les dimos para evitar en lo posible que influyeran en la investigación son las siguientes:

1. Interés por las matemáticas: No hay que olvidar que la población sobre la que hicimos el estudio eran alumnos que están matriculados en la opción A de matemáticas. Ello indica, en muchos casos, que son alumnos y alumnas con muchas dificultades en esta área, y que en otros casos no es un área que los motive especialmente, más bien todo lo contrario.

Con esta práctica hemos demostrado que la utilización de nuevas tecnologías en el aula aumenta el rendimiento escolar del alumnado de 4º de ESO con dificultades manifiestas en el área de Matemáticas.

El emparejar los resultados obtenidos en ambas pruebas, hace que el interés por las matemáticas sea el mismo, pues estamos hablando del mismo individuo ante dos métodos diferentes.

2. Tiempo de estudio dedicado en casa a la materia: A la hora de recoger los resultados de nuestra investigación, pensamos que estos serían tanto más clarificadores en cuanto que la actividad fuese representativa para el alumnado. Es por ello que los alumnos conocían que la actividad sería evaluable dentro del proceso de evaluación continua que se lleva a cabo en la Educación Secundaria Obligatoria.

3. Lagunas matemáticas: Cuando se intentan representar gráficamente funciones utilizando tablas de valores, pueden aparecer errores en el cálculo del valor numérico de un polinomio. Las lagunas matemáticas son difíciles de controlar, pues si lográramos evitarlas tendríamos unos *alumnos perfectos*.

No obstante, para intentar evitar los errores frecuentes de cálculo, los alumnos pudieron utilizar su calculadora a la largo de todo el proceso.

La importancia práctica de esta investigación es inmediata, en ella se afirma con un alto grado de probabilidad, que la utilización de nuevas tecnologías en el aula, aumenta el rendimiento escolar del alumnado de 4º de ESO con dificultades manifiestas en el área de Matemáticas. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

JIMÉNEZ, C. (1991): *Pedagogía experimental II*, UNED, Madrid.

OLVERA, P. (1986): *La investigación del medio en la escuela*, Fundación Paco Natera, Granada.

SIEGEL, S. (1982): *Estadística no paramétrica*, Trillas, México.

SUMA 46
Junio 2004, pp. 83-86

Dietética y Matemática

En esta actividad, diseñada para alumnos de 2º de ESO se tratará el cálculo de porcentajes, análisis de gráficos y empleo de fórmulas matemáticas, todo ello bajo el contexto de la nutrición y la dietética con dos objetivos fundamentales: aprender matemáticas relacionándolas con algo tan cercano como la alimentación y por otro lado, intentar que nuestros alumnos aprendan conceptos nutricionales que les sirvan para mejorar sus hábitos alimenticios evitando trastornos como la obesidad, la bulimia o la anorexia.

In this activity, designed for students of second course we will treat the calculation of percentages, graphics analysis and mathematical employment of formulas, all it under the context of the nutrition and the dietetic, with two fundamental objectives: to learn mathematics relating to something as nearby as the diet and, on the other hand, to try that our students learn nutritious concepts and their new alimentary habits serve them to avoid inconveniences as the obesity, the bulimia or the anorexia.

Una de mis mayores preocupaciones a la hora de dar clase y cumplir los objetivos establecidos por la ley, ha sido siempre la introducción de los temas transversales en la clase de matemáticas.

Me planteo el reto de crear una unidad didáctica en la que trate alguno de estos temas transversales en profundidad sin dejar a un lado la importancia de los conceptos matemáticos que debo desarrollar en mis clases, mas no encuentro ninguna bibliografía que me sea útil pues sólo localizo desarrollos teóricos y ningún caso práctico que me ilustre para continuar.

Queremos crear una unidad didáctica en la que se trate algún tema transversal junto con los conceptos matemáticos que se han de tratar en clase.

Supongo que habrá que echarle imaginación y sin más me pongo manos a la obra. Este es el resultado de mis reflexiones que todavía no he podido poner en práctica pero estoy segura de que tendrá una buena acogida por parte de los alumnos. En esta actividad, diseñada para alumnos de 2º de ESO se tratará el cálculo de porcentajes, análisis de gráficos y empleo de fórmulas matemáticas, todo ello bajo el contexto de la nutrición y la dietética con dos objetivos fundamentales: aprender matemáticas relacionándolas con algo tan cercano como la alimentación y por otro lado, intentar que nuestros alumnos aprendan conceptos nutricionales que les sirvan para mejorar sus hábitos alimenticios evitando trastornos como la obesidad, la bulimia o la anorexia.

Esta experiencia se adentra en el tema transversal de la educación para la salud y, aunque no sea estrictamente necesario, podría hacerse coincidir con la semana del 16 de octubre, día mundial de la alimentación, o bien (ya que octubre coincide a principios de curso) con el 7 de abril en que, cada año, se celebra el día mundial de la salud.

Beatriz Hernández Mato
IES Fco. Daviña Rey. Monforte de Lemos (Lugo).

Sería conveniente para estas actividades contar con la ayuda de algún profesor de biología que nos asesore e incluso plantearnos la posibilidad de ver con nuestros alumnos algún video sobre alimentación o solicitar la visita de algún especialista del centro de salud para que resuelva las posibles dudas de nuestros alumnos al respecto.

Si esto no fuese posible, sería conveniente realizar nosotros mismos una introducción al tema que resulte suficientemente atractiva para los estudiantes. Para ello existen numerosos textos orientados a niños de la edad de nuestros alumnos; personalmente propongo llevar a la clase al aula de informática para que visiten la web realizada por un profesor de un instituto de Almendralejo

http://www.aula21.net/Nutriweb/pagmarco.htm

en su apartado de alimentación y salud donde aparecen, además de información y consejos nutricionales, los riesgos de la obesidad, la bulimia y la anorexia, así como sus síntomas y algunos tests interesantes con un diseño atractivo para los niños.

También es interesante que visiten

http://www.nutricion.org/publico_1.htm

para calcular su índice de masa corporal, o la página

http://www.acab.org/spa/welcome.htm

de la Asociación contra la Anorexia y la Bulimia donde, además de información sobre dichos trastornos, aparecen diversos tests que sirven para saber si realmente nuestras conductas alimenticias son las adecuadas o si responden a algunas de estas irregularidades.

Esta experiencia se adentra en el tema transversal de la educación para la salud.

Después de esta introducción y toma de conciencia por parte del alumnado llega el momento de trasladar todos estos conceptos al campo de las matemáticas y trabajar con ellos. Planteo a continuación algunos ejercicios que pueden resultar orientativos. Algunos son bastantes sencillos mientras que otros podrían considerarse de profundización para el nivel que considero, pero sin duda una dificultad con la que se pueden encontrar nuestros alumnos es la complejidad de los enunciados. Será nuestra labor el ayudarles a alcanzar la solución.

Las actividades propuestas son las siguientes:

1. Una dieta equilibrada debe tener aproximadamente una cuarta parte de grasas, un 15% de proteínas, un 3% de fibra y un 57% de carbohidratos. Dibuja un gráfico de sectores que represente esas cantidades.

2. Basándote en los datos del ejercicio anterior calcula ahora los porcentajes de consumo de fibra y carbohidratos en nuestro país sabiendo que en España:

– Consumimos un 14% menos de fibra de lo recomendado.

– Nuestro aporte de carbohidratos es un 12% inferior al recomendado.

3. Un kilogramo de grasa pura equivale a 7000 Kcal. Si una persona consume 2625 Kcal al día, que necesita para sus actividades cotidianas, y mediante el ejercicio físico gasta 300 Kcal más por día, ¿cuántos días de ejercicio necesita para adelgazar dos Kg de grasa pura si cada día consume 1900 Kcal?

4. Una conocida marca de cereales muestra la siguiente información:

Información nutricional por cada 30 gr	
Proteínas	2,5
Hidratos de Carbono	25,6
Grasas	0,65
Fibra	1,25
Valor energético	110 Kcal

Calcula el porcentaje que representa cada uno de los tipos de nutrientes.

5. El índice de masa corporal permite saber fácilmente si una persona tiene un peso adecuado a su estatura. Calcula tu índice de masa corporal utilizando la siguiente fórmula:

$$\text{IMC}=\frac{\text{PESO}(\text{Kg})}{\text{TALLA}^2(\text{m}^2)}$$

Una vez obtenido el resultado compáralo con la siguiente tabla:

Rango normal	18,5 - 24,9
Sobrepeso	25 - 29,9
Obesidad grado I	30 - 34,9
Obesidad grado II	35 - 39,9
Obesidad grado III	> 39,9

Fuente: Organización Mundial de la Salud - O.M.S. 1998

Probablemente tu *IMC* sea bastante bajo. ¿A qué crees que se debe?

Para personas de más de 65 años el *IMC* normal es de 24-29 Kg/m². Si es posible compruébalo con algún familiar de esa edad.

Una dieta equilibrada debe tener aproximadamente una cuarta parte de grasas, un 15% de proteínas, un 3% de fibra y un 57% de carbohidratos.

6. Existen fórmulas aproximadas para calcular el porcentaje de grasa corporal.

– Calcula los datos que te pedimos con ayuda de una cinta métrica:

Longitud de la circunferencia de la cintura a nivel del ombligo: *CO*

Longitud de la circunferencia de las muñecas en el lugar más ancho: CM

Longitud de la circunferencia abdominal debajo del ombligo en el lugar más ancho: *CA*

Longitud de la circunferencia de las caderas (a nivel de las nalgas) en el lugar más ancho: *CC*

Longitud de la circunferencia del antebrazo en el lugar más ancho, justo debajo del codo con el brazo extendido y la palma hacia arriba: *CAn*

Peso corporal: *PC*

– Utiliza tus medidas y las de un compañero de distinto sexo para, con ayuda de la calculadora, obtener vuestro peso corporal magro aproximado:

Para el hombre:

$$\text{Peso corporal magro} = 98{,}42 + [(1{,}082 * PC) - (4{,}15 * CO)]$$

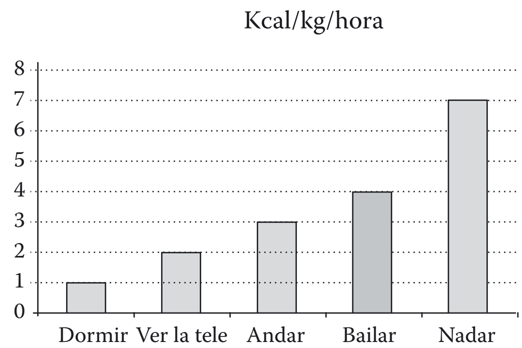
Para la mujer:

$$\text{Peso corporal magro} = 8{,}987 + 0{,}732 * (PC) + 3{,}786\,(CM) - 0{,}157 * (CA) - 0{,}249 * CC + 0{,}434 * (\text{CAn})$$

– Sabiendo que el peso corporal graso es el peso corporal menos el peso corporal magro calcula tu porcentaje de grasa corporal.

7. Según la Organización Mundial de la Salud (*OMS*), un escolar necesita al día 50 Kcal por cada Kg de peso. ¿Cuántas calorías necesitas este mes?

8. Analiza el gráfico de gasto energético.



¿Cuántas Kcal gastará un hombre si pesa 59 Kg y está ½ hora en la piscina, luego va a su casa caminando durante 45 min. y al llegar se queda viendo la televisión 1 hora, antes de irse a dormir durante 7 horas y media?

Según la Organización Mundial de la Salud un escolar necesita al día 50Kcal por cada Kg de peso.

9. Sabiendo que un pais.tiene 266.476.278 habitantes y que entre un 2 y un 18% de la población sufre bulimia o anorexia, ¿cuántos estadounidenses sufrirán este tipo de trastornos?

Haz el mismo cálculo para España sabiendo que tiene 39.181.114 habitantes y los mismos porcentajes.

Más de 350.000 personas en España padecen anorexia o bulimia. Diversos informes demuestran que cada año de enfermedad eleva un 1% la probabilidad de muerte en los enfermos.

10. En una ciudad española había 120 anoréxicos en 1947. Sabiendo que el número de anoréxicos ha aumentado un 300% entre mediados de los 50 y los 70, ¿cuántos anoréxicos se estima que habrá en esa ciudad tras ese período de tiempo? El 94% de las personas que padecen anorexia son de raza blanca. Si en en un país la variedad de razas se distribuye del siguiente modo: blancos 83.4 %, negros 12.4 %, asiáticos 3.3 % y nativos americanos 0.9 %, ¿cuál será la distribución de anoréxicos por razas?

11. La proporción de anoréxicos según el sexo es de 10 a 1 siendo más frecuente en las mujeres. Si en nuestro pueblo hay 3 chicos anoréxicos, ¿cuántas chicas crees que pueden sufrir el mismo trastorno? (Se supondrá que el n.º de chicos y chicas en nuestro pueblo es aproximadamente igual)
– La bulimia se da cuatro veces más que la anorexia nerviosa. ¿Cuántas personas sufrirán bulimia en nuestro pueblo?

– Si la mortalidad por anorexia nerviosa es del 10% de los afectados. ¿Cuántos casos de mortalidad se estima que habrá en nuestro pueblo por esta causa?

13. Haz un gráfico de barras que represente los gramos de colesterol por cada 50 gramos de los siguientes alimentos fijándote bien en las unidades:

Producto	mg colesterol por cada 100 g
Mantequilla	220
Jamón serrano	100
Pavo	86
Chocolate	74
Salmón ahumado	61

Recuerda que aunque el colesterol es necesario para el organismo no se deben tomar más de 300 mg al día.

Una vez resueltos los ejercicios conviene pararse a pensar en lo que se expone en cada uno de ellos. Aparecen datos realmente preocupantes, sería deseable dedicar unos minutos a la reflexión con el alumnado de todo lo aprendido. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

www.aula21.net/Nutriweb/pagmarco.htm
www.ciberjob.org/mujeres/medicina/DIETAEQUILIBRADA.htm
www.cipaj.org/doment62n.htm
www.cof.es/zamora/Obesidad.html
www.geocities.com/newmodel_1999/bulimia
www.guiadelmundo.com/paises
www.nutricion.org
www.portalfitness.com/nutricion/grasa_corporal.htm
www.uned.es/pea-nutricion-y-dietetica-I/guia/guianutr/dietaequ.htm

SUMA 46
Junio 2004, pp. 87-93

En el entorno del teorema Kou-Ku (III)

Nos habíamos quedado en Thabit ibn Qurra (? 836, 901). Dice Gheverghese Joseph (1991) que nació en el norte de Mesopotamia, que perteneció a *"una secta religiosa de descendientes de babilonios adoradores de las estrellas"* y que, quizás por sus disputas con su comunidad, se trasladó a Bagdad, donde entró en un círculo de traductores y estudiosos. Dominaba el árabe, el griego y el siríaco y tradujo a Euclides, Apolonio y Ptolomeo y fundó su propia escuela de traductores que continuaron su hijo y dos de sus nietos. Podemos enmarcar su trabajo en una corriente geométrica de fuerte sabor griego paralela a otra aritmética, que estaría bien representada por al-Khwarizmi, y que terminaron fusionándose.

Nos entretenemos en estos datos, a pesar de que pueden ser fácilmente consultados, porque late en ellos un atractivo dinamismo vital. No es que el texto de Gheverghese transmita precisamente emociones –tampoco la traducción le beneficia lo más mínimo– pero en los párrafos sobre Thabit nos resulta menos frío. O quizás sea nuestra lectura. ¡Da lo mismo! La Historia como colección de datos o de frías teorías interpretativas es necesaria, sin duda, pero si además logra transmitir el latido de una época, tanto mejor. Siempre nos ha impactado la aventura intelectual del Bagdad de los siglos IX al XI. La pasión colectiva por traducir0... y comentar, en el sentido creativo de esta palabra.

También Thabit elaboró su propio puzzle para probar el teorema Kou–Ku, muy parecido a una versión hindú, pero lo que nos interesa ahora es su generalización del teorema, igualmente fácil de consultar en los textos. Le dedicaremos tiempo porque los manuales de divulgación de historia de las matemáticas no lo hacen. Sólo la citan. Pero es tan bonita que merece la pena visualizarla plásticamente.

Para ello, recordemos la idea de la demostración de Euclides (Figura 1): los cuadrados 1 y 2 son iguales, respectivamente, a los rectángulos 1' y 2'. Dibujemos ahora un triángulo obtusángulo (Figura 2). Dice Thabit que si desplazamos el punto *H* de la Figura 1 hacia los puntos B' y C', de manera que los ángulos en *A*, C' y *B'* (es decir: $\widehat{CAB}$, $\widehat{CC'A}$ y $\widehat{BB'A}$) sean iguales, entonces el cuadrado 1 y el cuadrado 2 tienen también la misma superficie, respectivamente, que los rectángulos 1' y 2'. Por tanto, $b^2+c^2 = a(CC'+BB')$. Ello es debido, claro, a que los triángulos *ABC*, *ACC'* y *ABB'* son semejantes.

El rectángulo intermedio a 1' y 2' es la superficie en que el cuadrado del lado mayor supera a la suma de los otros dos. Volviendo a la generalización de Euclides –lo que hoy llamamos Teorema del coseno– ese rectángulo debe medir $|2bc \cos A|$. En la Figura 12 del anterior artículo (SUMA nº 45) ya vimos que las áreas 3' y 3'' (Figura 3) son ambas iguales a $|bc \cos A|$, pero que $3' + 3'' = 3$ no parece tan claro de probar directamente sin recurrir a establecer la igualdad mediante la combinación del teorema del coseno y el de ibn Qurra –tal y como acabamos de hacer– porque uno de los lados de *3* tiene de longitud *a*.

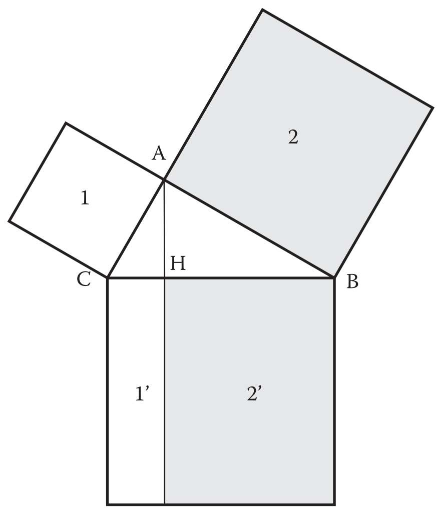


Figura 1

Angel Ramírez Martínez
Carlos Usón Villalba
historia.suma@fesp.org

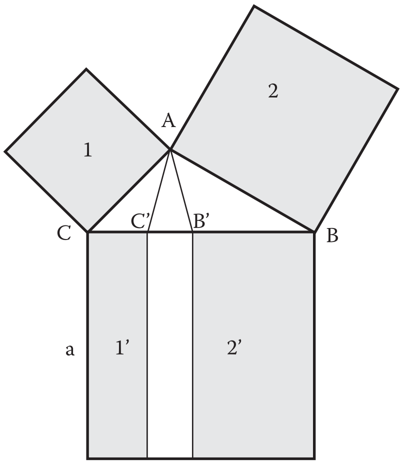


Figura 2

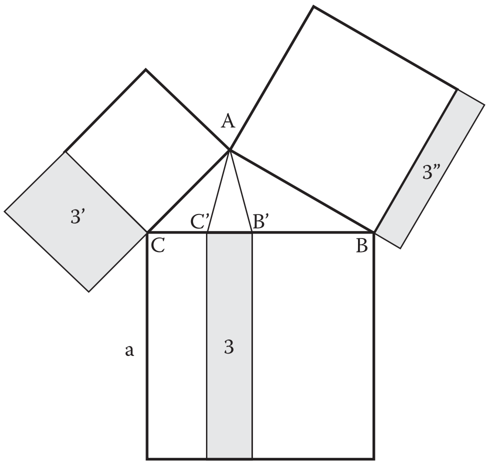


Figura 3

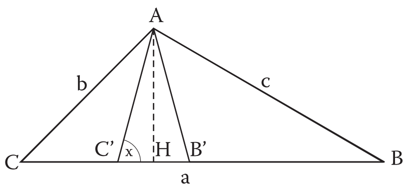


Figura 4

Efectivamente, *área 3=a(B’C’)*. Pero como *CC’A* y *CAB* (Figura 4) son semejantes,

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{C'A}\Rightarrow C'A=\frac{bc}{a}$$

Además,

$$C'H=(C'A)\cos x=(C'A)\cos C'=(C'A)\cos A\ .$$

De manera que

$$\textit{área 3} = a(B'C')=a2(C'A)\cos A=a2\frac{bc}{a}\cos A=2b\cos A$$

Si el triángulo es acutángulo la figura es más complicada de representar. Ahora los puntos B’ y C’ quedan, respecto de sus homólogos B y C, al otro lado del punto H y los rectángulos 1’ y 2’ se superponen (Figura 5). El teorema queda también así: $b^2+c^2 = a(BB'+CC')$ y la parte superpuesta es la superficie en la que los cuadrados de los lados pequeños superan al del grande.

En definitiva, una generalización muy propia de un traductor creativo de Euclides. Pero los enfoques parecen tan distintos que nos inclinamos a pensar que ni Euclides imaginó la generalización de ibn Qurra ni seguramente éste relacionó la suya con la de él.

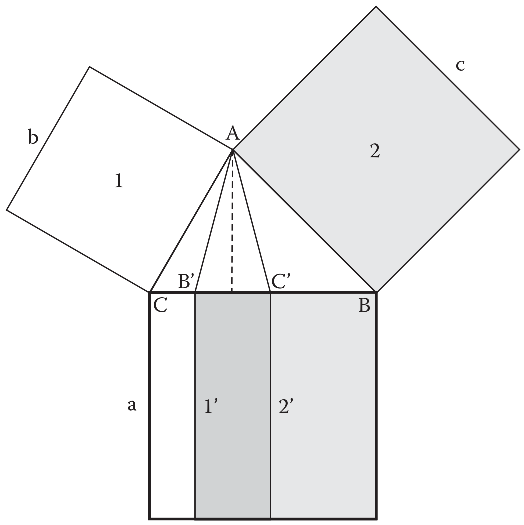


Figura 5

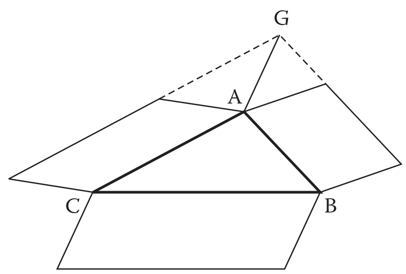


Figura 6

Los paralelogramos de Pappus: ¿una generalización de Pitágoras?

I

Seis siglos antes, en la decadente Alejandría que pronto vería el asesinato de Hipatia, Pappus –otro *comentarista*– incluyó, en el libro IV de su *Colección matemática*, una extensión menos evidente pero muy sutil del teorema.

Supongamos un triángulo cualquiera *ABC* y construyamos sobre sus lados *AB* y *AC* dos paralelogramos cualesquiera.

Llamaremos *G* al punto en el que se cortan las prolongaciones de sus lados exteriores (Figura 6). Construimos ahora sobre el tercer lado otro paralelogramo de forma que uno de sus lados sea el segmento *GA*. Entonces, el área de este último paralelogramo es igual a la suma de los otros dos.

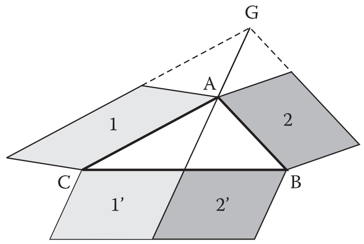


Figura 7

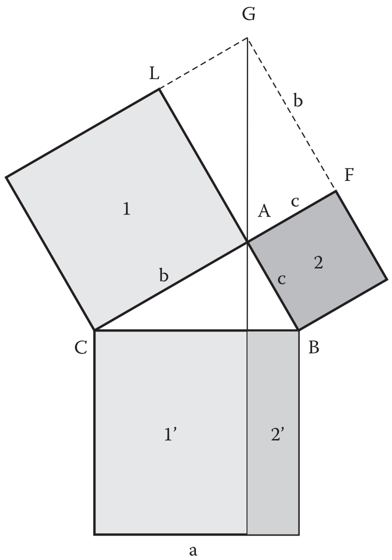


Figura 8

Boyer (1985) afirma que esta generalización es *elemental*, dice que quizás la idea original fue de Herón, aporta un dibujo –distinto de los de las figuras 6 y 7; ¿sería el de Pappus?– y no le dedica el más mínimo comentario. Bueno... Ciertamente damos por supuesto que Boyer sea mejor matemático que nosotros, pero no vemos tan elemental que se vuelva a producir, como así ocurre (Boyer no lo dice), la igualdad entre las áreas de 1 y 2 con las de 1' y 2' (Figura 7). Sabíamos de la igualdad entre las áreas de figuras semejantes construidas sobre los lados de un triángulo rectángulo, pero aquí los paralelogramos no tienen por qué ser semejantes entre sí y el triángulo puede ser cualquiera. Como no hay riesgo de que nos lea Boyer y nos acuse de *elementales*, confesamos nuestra sorpresa –y, por tanto, nuestro entusiasmo– ante la generalización de Pappus. Por cierto: ¿tan claro es que se trata de una generalización del teorema Kou-ku? Desde luego se sigue jugando con la idea de la demostración de Euclides, pero sentimos que hay unos cuantos cabos por atar. Volvamos al principio, al enunciado inicial (Figura 8). Aquí las cosas están claras: *GA* = *a*. Así que el rectángulo *AFGL* parece ser la clave de todo esto. En la figura 7 se ha convertido en un trapezoide y la diagonal no lo divide en dos partes iguales. Al intentar localizar superficies equivalentes a ellas se nos ocurre prolongar los lados del paralelogramo grande iguales a *GA* por *B* y *C* (Figura 9). Y, ciertamente, los paralelogramos *AGL'C* y *AGF'B* son iguales, respectivamente, a *ALMC* y *AFKB* (1 y 2 en la Figura 7).

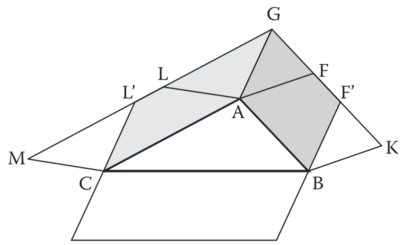
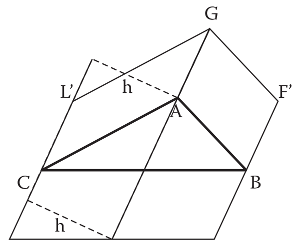


Figura 9

La Figura 9 coincide con el dibujo de Boyer: ahora sí lo entendemos. *AGL'C* y el rectángulo 1' tienen la misma área porque comparten una pareja base-altura, como vemos en la Figura 10 (*CL'*, *h*; *C'C*, *h*). ¿Así que todo se limitaba a inclinar el eje *GA* de la Figura 8? ¿Cuadra ya todo? Repitamos de nuevo lo que ya sabemos.



Figua 10

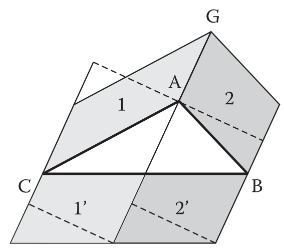


Figura 11

Parece que dado un triángulo cualquiera y construidos dos paralelogramos cualesquiera sobre dos de sus lados, la suma de sus áreas es igual a la de un tercero construido sobre el tercer lado, con la condición de que el otro lado de este paralelogramo sea *GA*. Y esto es así porque todos los paralelogramos sobre *CA*, que tengan por vértice G, tienen la misma superficie que *CAGL'* porque comparten una misma pareja base-altura. Y lo mismo para el lado AB (Figura 11). Desde esta perspectiva el teorema Kou-ku sólo sería un caso particular del de Pappus y en ese sentido este último sería generalización del anterior.

Pero, ¿hay que matizar el enunciado? Ni Boyer lo hace ni lo hemos hecho nosotros. Ensayamos con CABRI –¡qué barbaridad!, ¿cómo se las apañaría Pappus sin este programa?– para ver si funcionan los *monstruos*. Desde luego, el paralelogramo suma no tiene por qué estar construido sobre el lado grande del triángulo. Eso no nos crea problemas para elaborar la construcción anterior (Figuras 12 y 13). ¿Los tendremos si cambiamos la posición del punto *G*?

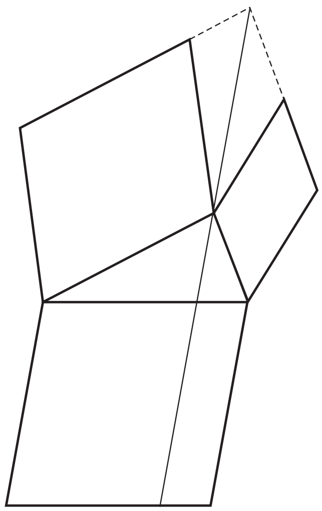


Figura 12

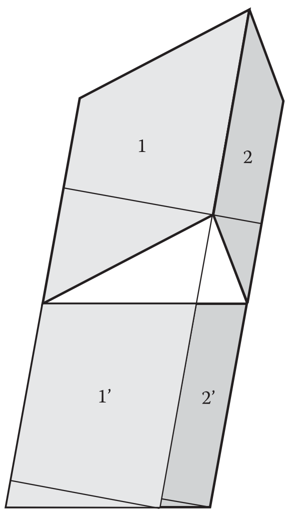


Figura 13

Ninguna dificultad si coinciden los puntos *G* y *F* (Figura 14): el paralelogramo del lado *AC* es justamente el paralelogramo 2 de las figuras anteriores. Si elegimos los paralelogramos como en la Figura 15, el segmento *GA* ya no es intermedio a *LA* y *FA* como en la figura 9 pero sigue siendo posible la construcción de las Figuras 11 y 13, con dos paralelogramos 1 y 2 equivalentes a los iniciales, tal y como muestra la Figura 16.

Igualmente es válido el teorema si el punto *G* está en un lado de uno de los paralelogramos (Figura 17). No hay por tanto restricciones para la frase *construyamos sobre sus lados AB y AC dos paralelogramos cualesquiera*.

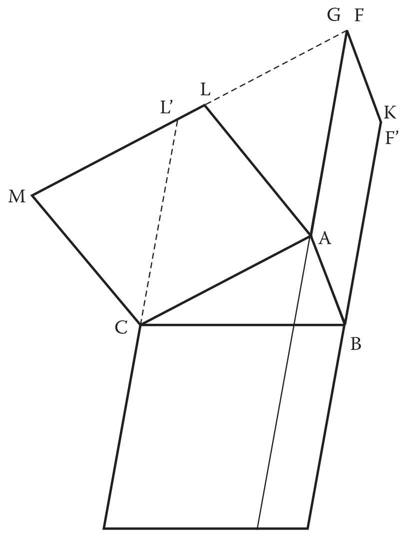


Figura 14

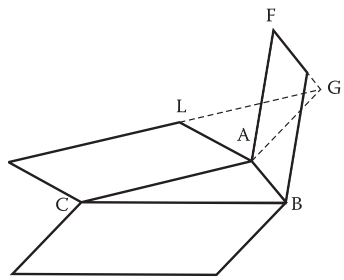


Figura 15

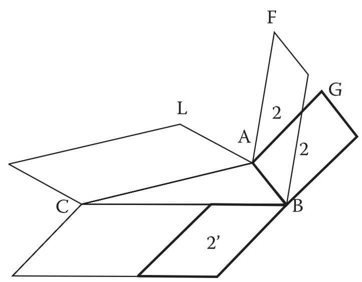


Figura 16

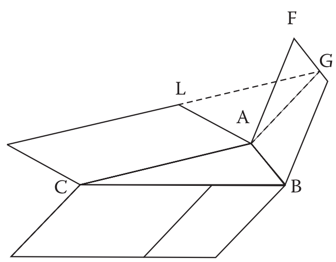


Figura 17

En definitiva, estamos trabajando con tres pares de rectas paralelas (Figura 18) entre las que vamos inscribiendo paralelogramos, uno de cuyos lados debe coincidir con el lado correspondiente del triángulo central definido por las paralelas, con la salvedad de que la anchura del tercer par de paralelas y la inclinación de su paralelogramo vienen determinadas por las opciones que hemos elegido en los dos primeros pares. Una vez dadas las dos primeras bandas de paralelas, existen infinitas parejas de paralelogramos, uno en cada una de ellas, cuyas áreas suman las del paralelogramo 3. CABRI permite una agradable comprobación experimental: al mover los puntos *L* y F a lo largo de las rectas *s* y *r* (Figura 19), el *marcador* de la derecha permanece inamovible.

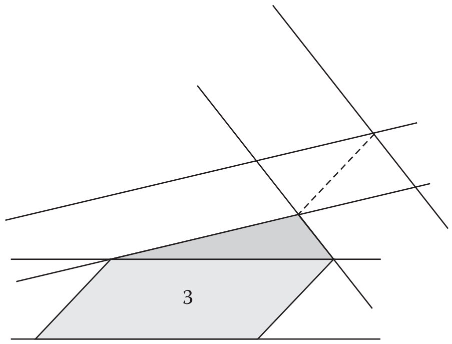


Figura 18

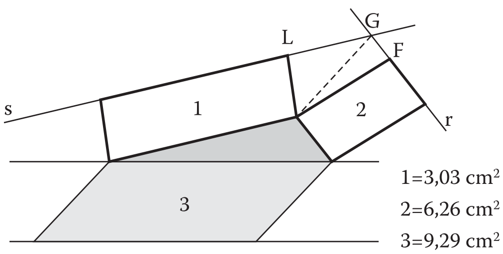


Figura 19

II

¡Qué lejos queda Pitágoras de todo esto! ¡La extensión del campo de trabajo ha sido muy fuerte! En Pitágoras el paralelogramo (cuadrado) suma se construye obligatoriamente sobre el lado grande, y en las generalizaciones de Euclides y de ibn Qurra se mantiene el papel de ese lado... En cualquier caso, hay algunas variables que no hemos tocado, así que volvamos de nuevo a Pitágoras y juguemos con sus condiciones enfocándolas desde el punto de vista de Pappus. Para empezar, si el triángulo es rectángulo y construimos sobre sus lados paralelogramos, la Figura 9 adquiere un aspecto bien trivial (Figura 20) que nos acerca de nuevo a la demostración de Polya (ver el artículo anterior; SUMA 45), y podría sugerir nuevas líneas de avance. Por ejemplo: ¿por qué tienen que ser necesariamente paralelogramos? Si fueran triángulos el teorema de Papus se mantiene sin introducir casi variantes puesto que un triángulo es la mitad de un paralelogramo. Podemos pensar en otras figuras geométricas, incluso plantearnos las condiciones para una solución general. Por otro lado, si elegimos un triángulo que no sea rectángulo y construimos cuadrados sobre sus dos primeros lados, y sobre el tercero un cuadrado y el correspondiente paralelogramo de Pappus, aparece una nueva visualización del teorema del coseno: el rectángulo 3 debe ser la superficie a restar al cuadrado sobre el lado mayor para que quede un área igual a los otros dos cuadrados (Figura 21).

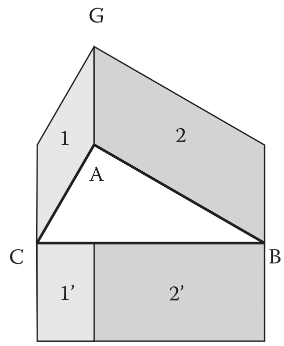


Figura 20

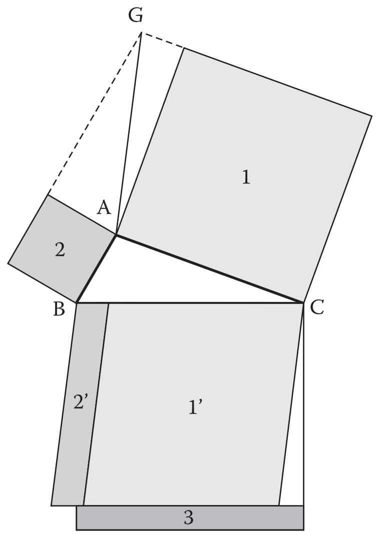


Figura 21

Prescindimos esta vez de dar satisfacción al fundamentalismo experimentalista que hemos adoptado, y –para no cansar– evitamos buscar más certeza que la que proporcionan la utilización conjunta de las generalizaciones de Pappus y Euclides. La obsesión por meter la mano en la llaga de los resultados de matemáticas no es tanto, en nuestro caso, una necesidad vital –puestos a desperdiciar energías tenemos otros focos de mayor interés– como una reivindicación desde la didáctica, desde la práctica diaria en el aula. Los adultos –incluidos los profesores y profesoras– entendemos un teorema, al leerlo, sólo hacia el exterior. Nuestra máscara tiene ese rasgo. En nuestro fuero interno sabemos que un control creativo del resultado requiere más esfuerzo y tiempo por nuestra parte. ¿Hemos demostrado en algún momento el teorema de Pappus? Quizás... Desde luego, lo que sí hemos hecho es quedarnos con él. Y eso ha llevado tiempo y no contentarnos ni con la primera frase leída en un libro ni con el primer razonamiento aparentemente válido. Si esto nos ocurre a nosotros, ¿por qué suponer que los adolescentes serán capaces de controlar ingentes listados de contenidos expuestos a la velocidad que marca una programación hecha por adultos?

La generalización de Monge

El teorema kou-ku se generaliza a tres dimensiones de una forma natural ($d^2=a^2+b^2+c^2$) que no viene nunca recogida en los libros como una igualdad entre áreas. Ciertamente es trivial, pero nos ha hecho ilusión ensayar un dibujo (Figuras 22*a* y 22*b*): aplicando dos veces el teorema, *área* 1 + *área* 2 = *área* 3 y *área* 3 + *área* 4 = *área* 5.

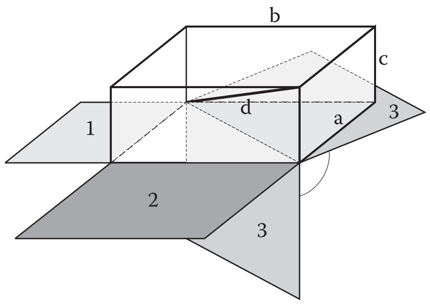


Figura 22*a*

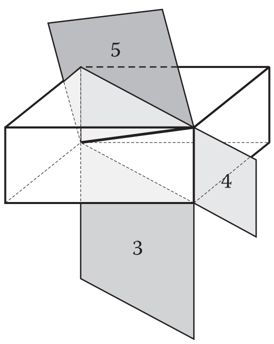


Figura 22*b*

Sin embargo, la generalización de Gaspard Monge (1746–1818) con la que terminamos esta recopilación es mucho más inesperada, brillante y, nos parece, poco conocida.

Supongamos un vértice de un paralelepípedo y seccionemos el sólido de manera que la sección sea triangular (Figura 23).

Llamemos A al área de esta sección y A_{xy}, A_{xz} y A_{yz} a las de los tres triángulos rectángulos de los tres planos que forman el triedro. Entonces, sorprendentemente,

$A^2 = (A_{xy})^2 + (A_{xz})^2 + (A_{yz})^2$.

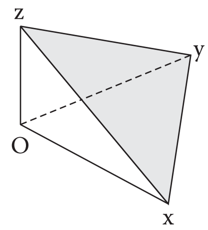


Figura 23

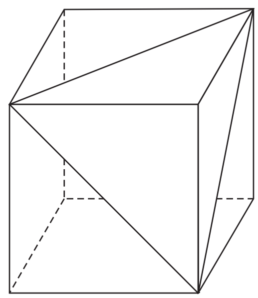


Figura 24

Decimos *sorprendentemente* por muchos motivos. Estamos tan acostumbrados a interpretar Pitágoras como una relación entre áreas –es decir: una igualdad entre magnitudes de segundo grado– que incluso desde un punto de vista aritmético la igualdad de Monge produce cierto desconcierto. Su aspecto formal y la imagen del triedro sí remiten a Pitágoras, pero al considerar sus términos desaparece esa sensación de normalidad. Una comprobación en el ejemplo más sencillo –sección equilátera en el vértice de un cubo (Figura 24)– muestra que la igualdad funciona:

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2 = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Pero, ¿a qué intuición agarrarse? No estamos hablando de demostrar la igualdad de Monge. Nuestra pregunta es la de siempre: ¿cómo pudo intuir Monge este resultado? ¿Lo obtuvo sólo tras un proceso de cálculo? Lo que molesta es ¿cómo interpretar un área al cuadrado? Se puede hacer como en la Figura 25, $(3^2)^2=3\cdot 3^3$, pero cómo aplicar esto al caso del triedro?

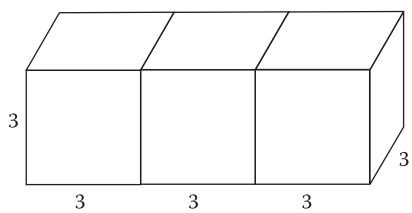


Figura 25

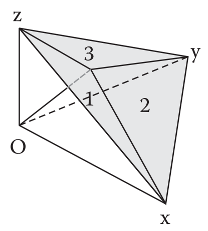


Figura 26

Los intentos de pasar el problema al plano tampoco nos aportan más luz. Una opción es proyectar las caras del triedro sobre la sección (Figura 26). Entonces A = 1+2+3 y se supone que al calcular estas tres áreas en función de las proyectadas aparecerán los cuadrados. Más sencilla es la demostración que desarrolla Antonio Hernández (2002) en su biografía de Monge, de donde hemos tomado el resultado. Proyecta al revés –la sección sobre las caras triangulares del triedro– y utiliza en el cálculo final la generalización habitual de Pitágoras en tres dimensiones. En ese proceso final, abandonados a la guía ciega del cálculo, perdemos la *fisicidad* geométrica del comienzo.

Otra posibilidad consiste en desplegar el recortable de la pirámide formada por el triedro y la sección, para pasar a un enunciado de geometría plana (Figura 27), y de nuevo hay que recurrir al cálculo.

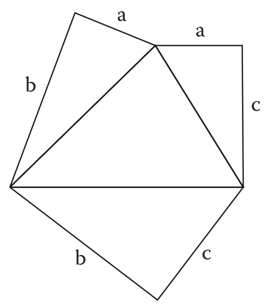


Figura 27

No conseguimos esta vez cumplir con nuestra fijación experimental. Bien: nos queda la duda de si será posible hacerlo. Así son las cosas. Los problemas sólo tienen solución inmediata en las aulas de las enseñanzas regladas. La igualdad de Monge, además de su belleza, mantiene para nosotros una cierta carga enigmática. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER, Carl B. (1985): *Historia de la matemática*, Alianza, Madrid.

GHEVERGHESE JOSEPH, G. (1996): *La cresta del pavo real*. Pirámide, Madrid.

HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ, Antonio (2002): *Monge. Libertad, igualdad, fraternidad y geometría*, Nivola, Madrid.

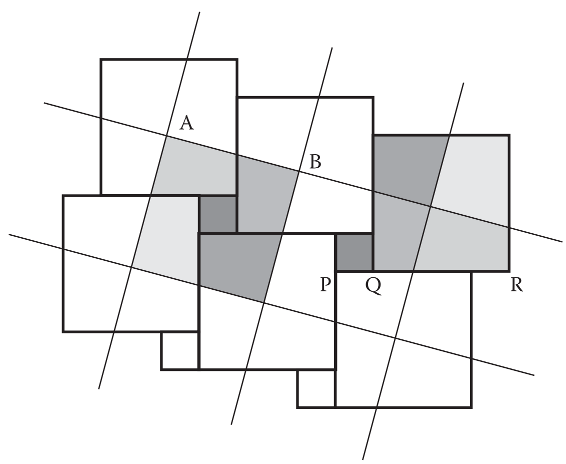
NOTAS

Mientras nosotros buscábamos datos sobre Henry Perigal, los colegas del grupo Alquerque ya le habían atribuido el puzzle con el que comenzamos esta serie de artículos (SUMA n.º 43). Queda claro, por tanto, que leemos SUMA con retraso.

En ese mismo número 43, Miquel Albertí, en un excelente artículo, hace una bonita demostración del teorema de Pitágoras a partir de una situación geométrica muy poco habitual: dos circunferencias concéntricas.

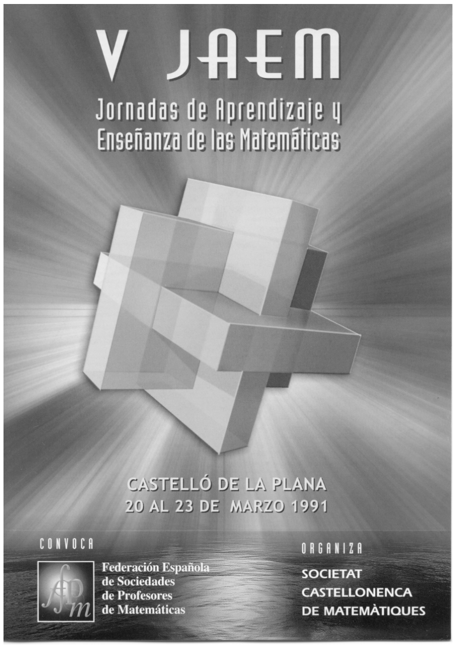
NOTAS SOBRE LOS ARTÍCULOS ANTERIORES

Los duendes de las imprentas eliminaron la Figura 13 en el artículo anterior (SUMA n.º 45). Es ésta:



$AB^2 = PQ^2 + QR^2$

Publicaciones de la FESPM
Actas de las V JAEM



El **Servivio de Publicaciones de la FESPM** ha publicado en CD-ROM las

Actas de las V Jornadas
sobre
Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas,

celebradas en Castellón de la Plana del 20 al 23 de marzo de 1991. Con esta publicacón la coleción de Actas de las Jaem queda completa.

Los asistentes a aquellas Jornadas las pueden solicitar GRATUITAMENTE rellenando y envíando el siguiente boletín a

Servicio de Publicaciones de la FESPM
Apdo. de Correos n.º 590
06080-Badajoz.

Actas de las V Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas
Castellón de la Plana, 1991

Como ASISTENTE a las V JAEM deseo recibir el CDROM con las Actas en la siguiente dirección:

Apellidos ____________ Nombre ____________

C/, Plz. ____________ N.º ____________

Ciudad (Provincia) ____________ C.P. ____________

Correo-e ____________

SUMA 46
Junio 2004, pp. 95-98

Polígonos con una tira de papel

Papiroflexia y Matemáticas

Cualquier persona interesada en la educación matemática en los niveles obligatorios, reconoce que para aprender Matemáticas hay que hacer Matemáticas. En estas etapas es muy importante el aspecto manipulativo de esta materia. Por ello no es raro encontrar multitud de materiales y recursos como tangram, geoplanos, puzzles, varillas, troqueles, etc. que potencian ese aspecto de hacer Matemáticas. Queremos mostrar uno de los recursos más usuales a nuestro alrededor, pero no por ello menos atractivo: el papel.

Se considera la papiroflexia (también llamada origami por su ascendencia japonesa) como el arte de realizar figuras doblando papel, sin cortar ni pegar. Todos nos hemos sentido atraídos en algún momento por ese arte. Aunque alguien piense que no es propio de personas adultas hacer figuritas de papel, seguro que en otras épocas todos hemos realizado, con verdadero deleite, aviones, pajaritas, barcos o figuras más elaboradas. El trabajar con papel, y conseguir elementos reconocibles después de realizar algunos pliegues, es una actividad altamente gratificante.

Por todo ello, quien esté preocupado por la didáctica de la matemática no puede dejar de lado este recurso que motivará tanto a nuestros alumnos. En clase el plegado de papel se puede utilizar en muchos aspectos del currículo: desde algunos fáciles, como demostrar que los tres ángulos de un triángulo suman 180º, hasta otros más complicados, como conseguir las cónicas a partir de su envolvente o una espiral logarítmica a partir de un hexágono. Podemos también pasar del plano al espacio, resultando especialmente atractivo conseguir poliedros y otras figuras de tres dimensiones, bien directamente por plegado o bien uniendo módulos previamente doblados.

Además es posible afrontar el trabajo en clase con distintos niveles de dificultad: desde la mera construcción, por ejemplo, de un triángulo equilátero, hasta el estudio matemático de por qué lo que obtenemos es, en realidad, equilátero.

El profesor del IES n.º 1 de Requena (Valencia), Antonio Ledesma López, que es miembro de la Asociación Española de Papiroflexia, lleva más de quince años trabajando con sus alumnos en talleres utilizando la papiroflexia. En el número extraordinario de 1996 del Boletín de la A.E.P., dedicado íntegramente a las Matemáticas, incluía el siguiente decálogo dirigido a los profesores de Matemáticas, en donde se recogen las ventajas de utilizar este recurso.

“Con las actividades de papiroflexia:

1. Se valora la interrelación entre la actividad manual y la intelectual.
2. Se consigue la apreciación de las componentes estéticas de los objetos y las formas.
3. Se facilita la comprensión de los conceptos geométricos.
4. Se mejora la percepción espacial.
5. Se fomenta la capacidad para hacer preguntas.
6. Se interpreta una nueva simbología.
7. Se propicia la precisión en el trabajo manual.
8. Se ve la utilidad del trabajo en equipo.
9. Se aprecia la belleza ligada a regularidades y cadencias.
10. Se desarrolla la fantasía, la creatividad y, lo que es también muy importante, no se pierde en ningún momento el carácter lúdico.”

La tira de papel como recurso matemático

No es extraño utilizar en clase una tira de papel para presentar la Cinta de Möbius, que sorprende por sus propiedades, y por lo inesperado de los resultados que se obtienen al cortar-

Grupo Alquerque de Sevilla

Constituido por:
Juan Antonio Hans Martín
José Muñoz Santonja
Antonio Fernández-Aliseda Redondo
juegos.suma@fespm.org

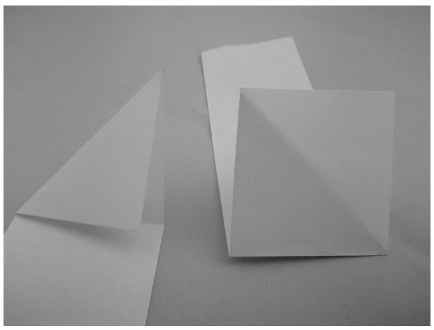
la convenientemente. Pero también podemos utilizar una tira de papel para conseguir algunos de los polígonos regulares, algo que la primera vez resulta tan asombroso e inesperado para los alumnos como la propia Cinta de Möbius. A este ejemplo sencillo de papiroflexia vamos a dedicar hoy la presente sección.

Para esta primera parte hemos tomado información del profesor Miguel de Guzmán, en concreto de su artículo *La tira de geometría en la tira de papel* que puede consultarse en Internet (ver *Para saber más*).

Cuadrado
Lo más fácil es obtener un cuadrado. Partimos de una tira de papel cuyo extremo sea recto y perpendicular al lado. Si no fuese así, en cualquier lugar de la tira doblaríamos haciendo coincidir un trozo de un lado sobre sí mismo y resultaría un doblez de las características pedidas.

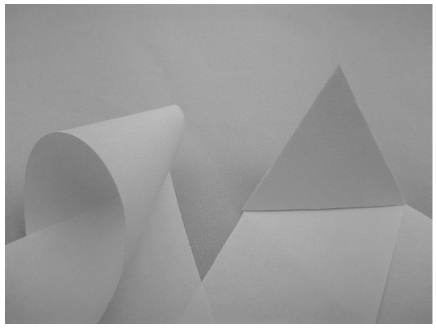
Para obtener un cuadrado basta doblar la cinta por un extremo, de forma que partiendo desde un vértice se lleva el otro vértice sobre el lado opuesto. En el lugar donde descansa el vértice que se desplaza, se realiza un pliegue perpendicular al lado y ya tenemos un cuadrado.

Se debe señalar a los alumnos la atención respecto a que lo único que hemos hecho ha sido aplicar las propiedades del cuadrado, que es un polígono con los ángulos de 90º y los cuatro lados iguales.



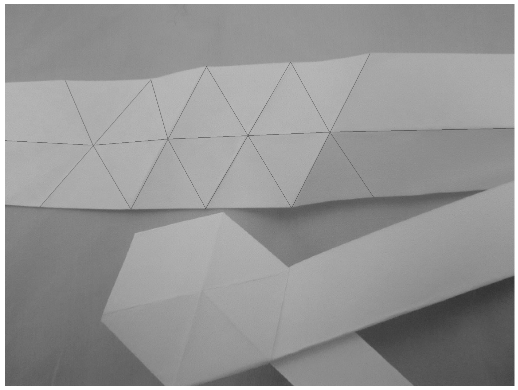
Triángulo equilátero
Para conseguir un triángulo equilátero torcemos un extremo de la tira por encima del lado, como si hiciéramos un cucurucho de papel, y aplanamos ese cono de modo que uno de los lados del triángulo coincida con el filo de la tira de papel.

Dado que los lados coinciden, el vértice superior está dividiendo el ángulo de 180º (correspondiente al lado que se ha girado) en tres partes iguales, por lo que obtenemos un ángulo de 60º. Se puede comprobar fácilmente que los restantes ángulos también lo son, luego el triángulo es equilátero.

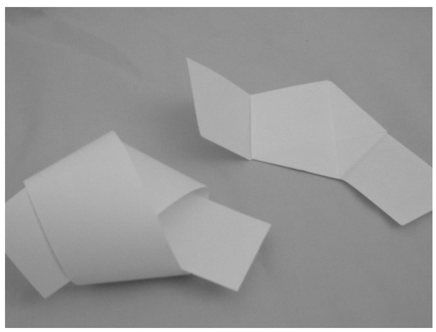


Hexágono
El hexágono se obtiene fácilmente del triángulo anterior. Para ello es suficiente dividir la tira de papel en dos partes mediante un pliegue longitudinal. En la tira se apreciarán los dobleces correspondientes al triángulo (unos estarán por un lado y el resto por el otro).

Si remarcamos todos esos pliegues, al desdoblar la tira podremos observar fácilmente las líneas que definen el hexágono.



Pentágono
Suponemos que lo más conocido para nuestros lectores (pues es posible encontrarlo en múltiple y diversa bibliografía) será cómo conseguir un pentágono regular; sin embargo, curiosamente es el más difícil de imaginar por los alumnos, y por eso el más sorprendente.



Lo que debemos hacer es un nudo con el papel, de forma que si tiramos con cuidado de las puntas del lazo, haciendo que coincidan los pliegues, podemos facilmente observar el pentágono regular.

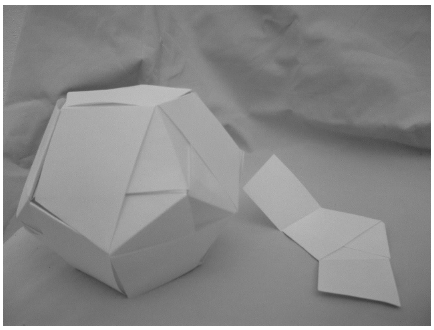
La primera vez que se hace cuesta conseguir que los pliegues formen exactamente los lados del polígono, pues es fácil que la tira no coincida con alguna de las vueltas. Lo mismo ocurre al principio con el triángulo, pero con un poco de práctica sale perfecto.

Para aprender Matemáticas hay que hacer Matemáticas.

A diferencia de los casos anteriores, en el pentágono en necesario tener en cuenta la longitud de la cinta, pues si es corta no puede realizarse bien el nudo. Nuestro consejo es que la longitud sea unas ocho veces (como mínimo unas siete) la anchura de la cinta, para que así se pueda manipular bien.

Este pentágono tiene una doble utilidad, ya que si los extremos de la tira que sobran de la figura tienen aproximadamente la misma longitud que un lado (en su parte mayor), con doce piezas iguales, se puede construir un dodecaedro como vemos en la imagen.

Para conseguirlo hay que tener mucha paciencia y cuidado. El principal problema es que una vez terminado, no queda rígido, por lo que se deshace al primer golpe que se le dé, es un típico mírame y no me toques. Pero es interesante, como dijimos, pasar del plano al espacio.

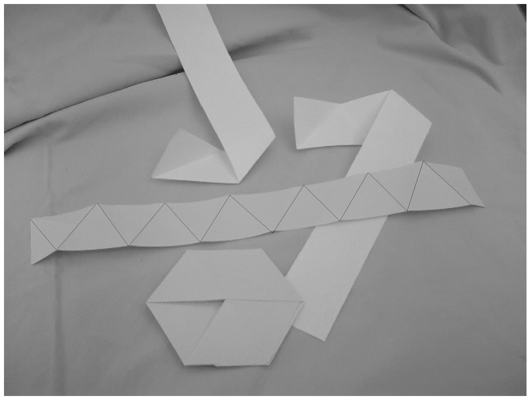


Otros dobleces con una tira de papel

En su taller de polígonos con papel, el profesor mejicano Víctor Larios Osorio nos muestra cómo conseguir polígonos regulares de distinta cantidad de lados y de distinta presentación.

Su forma de trabajo consiste en realizar una serie de dobleces en una larga tira de papel, y posteriormente doblar la cinta sobre esos pliegues, obteniendo los lados de los polígonos, y dejando un hueco dentro de ellos.

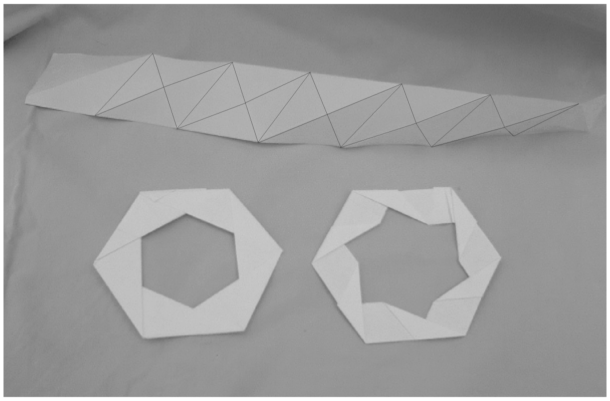
Para no alargar este artículo vamos a presentar el pliegue más simple para obtener un hexágono, a partir de triángulos equiláteros.
Comenzamos por un extremo de la tira doblando hacia arriba y conseguimos un pliegue. Se desdobla ese pliegue, y ahora se dobla ese mismo extremo hacia abajo, siguiendo la línea definida por el doblez anterior. Se continúa este proceso alternando el doblar hacia arriba y hacia abajo, y vamos obteniendo en la tira una serie de triángulos como puede apreciarse en la foto.



Si desechamos los primeros triángulos de la tira que no sean equiláteros, con los restantes podemos construir un hexágono, sin más que doblar como se ve en la foto anterior.

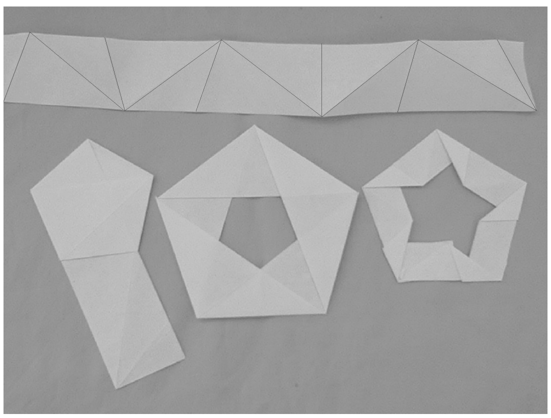
No es extraño utilizar en clase una tira de papel para presentar la Cinta de Möbius, que sorprende por sus propiedades, y por lo inesperado de los resultados que se obtienen al cortarla convenientemente.

Si nos fijamos en la tira, cada dos triángulos forman un rombo. Si en cada rombo realizamos un doblez que corresponda a la diagonal mayor, y doblamos sobre ese pliegue, se unen dos lados de uno de los triángulos, y si después doblamos por el pliegue donde coincidían los lados anteriores (del lado donde se cierra el doblez anterior podemos obtener el hexágono de la izquierda de la siguiente fotografía. Si ese doblez extra lo alternamos haciéndolo en un rombo sí y en otro no, obtenemos el hexágono de la derecha.



Para terminar, si el procedimiento de doblar arriba y abajo se realiza con dos dobleces sobre pliegues anteriores hacia arriba y luego dos dobleces hacia abajo, podemos obtener una serie de dobleces cortos y largos. Si doblamos por esos pliegues (bien por los cortos o por alguno de los largos) pueden obtenerse los pentágonos que aparecen en la siguiente foto.

Se considera la papiroflexia (también llamada origami por su ascendencia japonesa) como el arte de realizar figuras doblando papel, sin cortar ni pegar.



En la página de donde está sacado este procedimiento puede encontrarse cómo conseguir heptágonos, decágonos y eneágonos así como un estudio sobre qué polígonos regulares pueden obtenerse con este proceso.

Para acabar

Hemos querido presentar en este artículo una serie de actividades con papel que despierten la curiosidad y el deseo de profundizar en este apasionante mundo de la papiroflexia. Existen otras muchas actividades para potenciar los aspectos manipulativos y favorecer los aspectos visuales y de percepción espacial, que además están relacionados con las Matemáticas de nuestro currículo: trabajar distintos tipos de ángulos mediante dobleces, trazar paralelas y perpendiculares, estudiar los puntos y rectas notables de un triángulo… hasta la construcción de poliedros regulares y semirregulares, estudiando previamente los polígonos que limitan su volumen o la división de un poliedro en trozos iguales. Pero todo eso será en otra ocasión.

Para saber más

Existen dos páginas web de las que están tomadas casi todas las ideas anteriores que son:

http://usuarios.bitmailer.com/edeguzman/GeometLab/latira.htm

http://www.uaq.mx/matemáticas/origami/taller2.html

Además en Internet hay una inmensidad de páginas relacionadas con papiroflexia en general, pero muchas de ellas tienen contenidos matemáticos. Existen un par de páginas con muchos enlaces a este tipo de páginas donde cualquier interesado puede perderse durante muchas horas.

http://members.fortunecity.es/jtbm/otras_paginas.html

http://www.sectormatematica.cl/origami/enlaori.htm

Aparte de lo anterior se pueden consultar las siguientes referencias, que disponen de amplia bibliografía sobre el tema:

LEDESMA LÓPEZ, A. (1996): "Matemáticas con papel en la Enseñanza Secundaria Obligatoria", *Actas de VIII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática Thales*, pp. 347-358, Córdoba.

LEDESMA LÓPEZ, A. (1996): "Papiroflexia y Matemáticas", *Boletín de la Asociación Española de Papiroflexia, Boletín extraordinario*, Zamora. ■

SUMA 46
Junio 2004, pp. 99-106

iMÁTgenes 7, 8 y 9

Una vez acordado el precio nos ponemos en camino. Son las ocho de la mañana y hace un día espléndido. El cielo es una sábana azul sin mácula y el verdor intenso que nos rodea justo al abandonar las bulliciosas calles de Ternate refleja la luz del astro en multitud de tonalidades deslumbrantes. La carretera serpentea arriba y abajo perfilando la costa con el mar a la derecha. Después de pasar por diversos pueblos y atravesar un bosque espeso la vegetación desaparece de repente al llegar a Batu Angus (roca abrasada), una cicatriz colosal e imborrable, un río pétreo vestigio de la erupción del Gamalama en el siglo XVIII.

Dejando el mar siempre a mano derecha llegamos a Suamadaha desde cuya playa de arenas negras la isla Hiri parece fácilmente alcanzable a nado. Más adelante, Takome, con su par de lagunas, Tolire kecil y Tolire besar, de origen volcánico. La primera no es más que un charco de agua dulce entre la playa y la carretera. La otra es un lago esmeralda formado en la boca por la que el volcán vomitó su mala leche en tiempos remotos. Según los nativos al formarse la laguna esta cubrió para siempre el poblado que entonces ocupaba su sitio, lo que provocó muchas víctimas y dejó en los corazones de los supervivientes un sentimiento de temor y misterio. Muchos creen todavía que Tolire besar es un sitio mágico habitado por criaturas invisibles que los aviones evitan sobrevolar por miedo a ser abducidos hasta el fondo de sus aguas. La mera sugerencia de zambullirse en ellas provoca el espanto. Una propuesta digna de locos y suicidas.

Cuando retomamos la marcha, con el mar siempre a la derecha, el Sol ya ha subido lo suficiente como para salpicar de destellos el asfalto. Es la hora de poner a secar los clavos, el cultivo mayoritario en la província. Hombres y mujeres extienden con sumo cuidado montones de clavos sobre esteras rectangulares. Cuando ya no queda sitio en las cunetas, también se ocupa el centro de la calzada. Nuestro vehículo los sobrevuela a horcajadas sin tocarlos y a poca velocidad. Su aroma impregna el aire que respiramos.

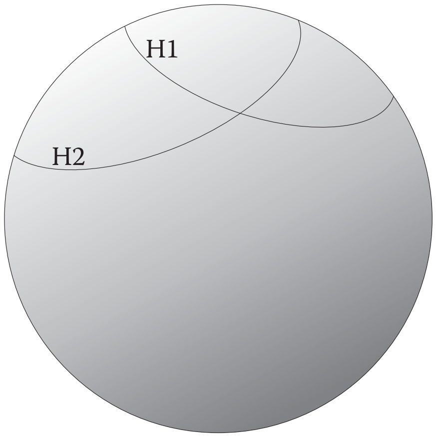
Continuando adelante, con el mar siempre a la derecha, damos con otro lago cuyo nombre, Danau Laguna, constituye una simbiosis verbal la mar de curiosa. En bahasa, danau significa lago y Laguna es su nombre propio, el nombre del lago. Pero lo cierto es que esta palabra es castellana. Un recuerdo de la presencia española en la región allá por el siglo XVI. Una presencia nada pacífica disputada con portugueses y holandeses.

Pasado mediodía entramos en una población grande. El calor es tan sofocante que apenas se ven transeúntes en la calle que recorremos. Todos parecen buscar refugio en las sombras. Entre las fachadas de las casas hay una que me resulta familiar. Sus formas geométricas me recuerdan la arquitectura de Ternate, la ciudad de la que partimos esta mañana temprano. Y no es la única. Sin duda debe tratarse de localidades emparentadas por una cultura común. De hecho, diría que conozco la calle entera. Mas aún, tengo la impresión de haber pasado antes por aquí, de haber vivido ya lo que vivo ahora. A eso lo llaman 'deja vu'. Pero este es especialmente intenso porque no se mitiga, sino todo lo contrario. No solo las casas, también el mercado me parece familiar. Incluso algunas caras me parecen reconocibles. Aquel tipo se parece un montón al que ayer por la tarde nos vendió un par de bolsas con lenguas de plátano frito. Y aquella mujer es idéntica a la vieja que nos invitó a comer algunos rambutanes. ¡No puede ser! Nunca había experimentado cosa igual. ¿Habré entrado en un mundo paralelo? Desconcertado, pregunto al conductor el nombre de la localidad a la que acabamos de llegar. Él, sin dejar de conducir, me dirige una sonrisa pícara, propia de quién sabe que otra víctima ha caído en la trampa, y pronuncia una sola palabra: ¡Ternate!

Miquel Albertí
imatgenes.suma@fespm.org

A esto se le llama vivir el círculo. La carretera que perfila la base circular de la isla cónica que es Ternate, en el archipiélago de las Molucas, puede completarse en pocas horas. Tomando como referencia la costa, uno cree avanzar hacia delante porque el mar queda siempre al mismo lado del camino cuando realmente da una vuelta entera a la isla regresando al punto de partida. En este planeta podemos vivir el círculo y la circunferencia, pero no la recta.

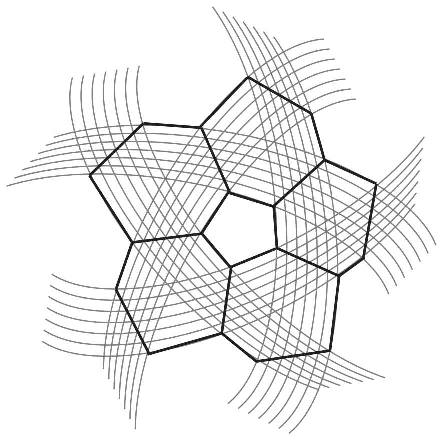
El horizonte no puede compartirse. Imposible superponer los ojos de dos personas. Como mucho compartirán los dos puntos de intersección de sus horizontes siempre y cuando sus estaturas oculares lo permitan:



La iMATgen n.º 6, publicada en SUMA n.º 45, merece consideración especial puesto que invité al lector a reflexionar sobre ella. La fotografía mostraba a un hombre ofreciendo una pelota urdida con fibras vegetales. Observando la urdimbre de esa esfera que una serie de ocho imágenes ilustraba (especialmente las imágenes 1 y 8) vemos que su esencia geométrica es la misma que la de un balón de fútbol. El trabajo empieza entrelazando 5 cintas de ratán formando un pentágono lo más regular posible (imagen 1). Después, seleccionando algunos de sus extremos (imagen 2) el artesano introduce otra cinta en el proceso. Uno de sus extremos ya ha sido anudado en una circunferrencia que determinará el diámetro de la pelota. Por eso en la imagen 3 pueden contarse tan solo 11 extremos en lugar de 12.

Siguiendo el rastro de las cintas se observa que las caras pentagonales aparecen en un principio como vacíos de la urdimbre (imágenes 1, 6 y 7) que serán colmados con los extremos restantes de cada cinta a medida que el trabajo avanza. Se trata de un objeto geométrico similar al que resulta de recortar los vértices de un icosaedro hecho de cartón. Los vértices del icosaedro son pirámides de base pentagonal. Cortándolos a media altura creamos en el icosaedro 20 orificios pentagonales que al ser tapados por una cara dan lugar a un poliedro semirregular llamado icosaedro truncado. Este cuerpo geométrico es lo que el artesano teje realmente, un icosaedro truncado de 60 vértices, 90 aristas y 32 caras, de las cuales 20 son hexagonales y 12 pentagonales. Las intersecciones triples de los seis haces de fibras resultantes (imágenes 6 y 7), cada haz procedente de una fibra utilizadas, determinan

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot (6-3)!} = 20 \text{ caras hexagonales:}$$

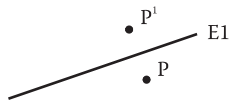


Por último, los extremos de las cintas de ratán (imagen 8) se ocultan entre las otras fibras. La flexibilidad del ratán y su empeño en recobrar la rectitud dan al icosaedro truncado una forma mucho más esférica de lo que su urdimbre indica. ■

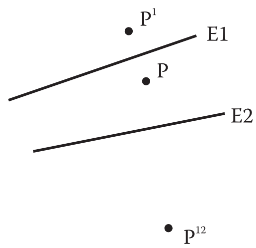
No resulta nada fácil arreglarse aquellas partes del cuerpo que uno no tiene al alcance de la mano o de la vista. Podemos tocarnos cualquier punto de la cabeza y recorrer con dos dedos un cabello desde su raíz hasta la punta, pero no podemos verlo entero. Por eso y porque se requiere una habilidad especial acostumbran a ser otros quienes nos cortan el pelo. Acabado el trabajo, realizado siempre ante un espejo, la peluquera, como en esta fotografía, encara otro al que tenemos enfrente por detrás de nuestra cabeza, y nos pregunta: *¿Qué tal?*

Todos sabemos lo que ve la mujer sentada. Lo hemos visto muchas veces y nos ha fascinado siempre: una sucesión de copias nuestras que se alejan en fila hacia un fondo insondable. Comprender esta imagen significa comprender lo que ve quien la protagoniza. ¿Son realmente infinitas esas imágenes virtuales? ¿Es esa fila que forman una línea recta? Estamos de nuevo al otro lado del espejo cuya virtud es reflejar imágenes en iMÁTgenes.

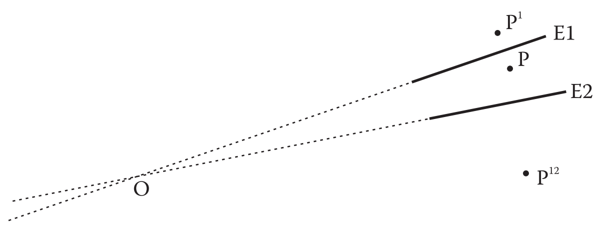
Un espejo es un trocito de plano que ahora observaremos desde su filo para verlo como un segmento rectilíneo. Supongamos pues que E1 es un espejo en el que se mira un punto P. Su reflejo es un punto virtual P^1 situado al otro lado de *E1*, concretamente sobre la recta perpendicular a *E1* que pasa por *P* y que además se halla a la misma distancia de E1 que *P*. Se le llama simétrico de P respecto del segmento *E1*:



Añadiendo otro espejo *E2* encarado con *E1*, pero no paralelo con él, P^1 será reflejado por *E2* en su simétrico P^{12}:

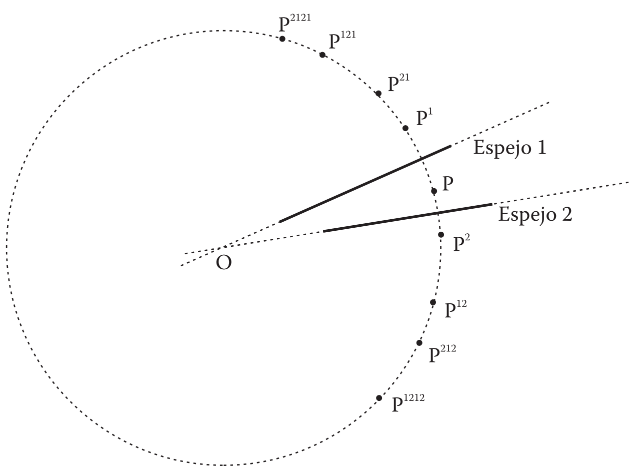


Dado que *E1* y *E2* no son paralelos, sus prolongaciones se cortan en un punto *O*:



Sea M^1 el punto medio del segmento PP^1. Entonces los triángulos OM^1P y OM^1P^1 son iguales, ya que tienen un ángulo igual (ángulos rectos en el vértice M^1), tienen un lado igual (OM^1) y tienen otro lado igual ($M^1P=M^1P^1$). Por tanto, también tendrán igual el lado restante: $OP=OP^1$. Esto significa que P y P^1 están a la misma distancia de O. Aplicando el mismo razonamiento a los triángulos OM^2P^1 y OM^2P^{12}, siendo M^2 el punto medio del segmento P^1P^{12}, llegamos a la conclusión de que $OP^1=OP^{12}$ y los puntos P^1 y P^{12} también distan lo mismo de O. Repitiendo el mismo razonamiento para las demás reflexiones, vemos que todas se encuentran a la misma distancia de O: $OP=OP^1=OP^{12}=OP^{121}=...$

Luego los reflejos de P, ya sean por $E1$ o por $E2$, están todos sobre la circunferencia de centro O y radio OP y forman un arco de circunferencia en el que se alternan caras (P^1, P^{12}, P^{121}, P^{1212}...) y espaldas (P^2, P^{21}, P^{212}, P^{2121}...):



Los reflejos visibles nunca serán infinitos ni estarán alineados según una recta. El único caso en que esto sería posible no puede verse porque para ello los espejos deben ser paralelos y entonces nuestro primer reflejo oculta todos los restantes que se dispondrían sobre una circunferencia de radio infinito (recta).

La realidad física impide que las reflexiones visibles entre dos espejos sean infinitas. El límite lo ponen la posición y el tamaño de los espejos. Si un simétrico cae fuera de la banda determinada por las perpendiculares trazadas en los extremos de, pongamos por caso, $E1$, su reflexión en $E2$ será imposible. En cambio, en el ámbito matemático las simetrizaciones pueden continuar indefinidamente. Un análisis más detallado de la cuestión (Albertí, 2000) pone de manifiesto que, desde esta perspectiva puramente geométrica y matemática irreal, la sucesión de simétricos alternados de P (respecto de $E1$ y $E2$) no acaba nunca y puede continuar hasta completar una vuelta sobre la circunferencia en la que se disponen. De hecho, si el ángulo formado por los espejos es múltiplo racional de π, la sucesión de simétricos constituye un itinerario cerrado, es decir, existe algún simétrico que vuelve a coincidir con P, el punto de partida. Si el ángulo no es un múltiplo racional de π, el itinerario es abierto y ningún simétrico vuelve a coincidir con P.

Mi agradecimiento a la peluquería *Estel* de la Rambla Fabra i Puig en Barcelona por la amabilidad mostrada y permitirme realizar la fotografía de esta ***iMATgen virtual***. ■

REFERENCIA CITADA

ALBERTÍ, M. (2000): “Simétricos cautivos”, *Épsilon* n.º 48 de la S.A.E.M. “Thales”, Facultad de Matemáticas, Sevilla.

iMATgen 8

No es raro que mientras despieza un pollo la carnicera pregunte: *¿Quieres las vísceras?, ¿También te pongo las patas?* Una respuesta negativa suscita en ella reacciones como: Te las cambio por dos cuellos, En su lugar te pondré un ala. Luego, ya en casa, uno abre la bolsa y se encuentra con una cabeza, tres cuellos, tres alas, cero patas y un torso vacío. Uno espera que su familia, al ver los restos descuartizados, pregunte: *¿Pero qué demonios es esto?* Pero no pasa nada, no les importa, y nadie se inmuta cuando encima de la mesa aparecen miembros de pollo en cantidades nada acordes con su anatomía. Intentad dibujar un pollo como el que acabo de describir y sabréis de qué hablo.

En las pescaderías es distinto. Lo extraño en ellas son los precios. Tan raros como los de esta fotografía: *Sardinas (1 kilo entero 2.90€; 1 kilo 3.90€), Mairas (1 kilo entero 1.95€; 1 kilo 2.95€).* Si entenderlos es fundamental para comprar el producto, también lo es para comprender la imagen.

Un cliente matemático aplica, a la hora de comprar, su educación y conocimiento. No sólo para calcular el importe sino también para interpretar los precios de las cosas. No es de extrañar pues que eche mano de una función como $\mathbf{E}(x)$, la *Parte Entera de un Número Real x*, para elaborar la fórmula del importe $f(x)$ a pagar por x kilos de sardinas a partir del precio del producto:

$$f(x)=2{,}9\cdot\mathbf{E}(x)+3{,}9\cdot[x-\mathbf{E}(x)]$$

Luego desarrolla esta expresión para obtener algo más simplificado (según él):

$$f(x)=2{,}9\cdot\mathbf{E}(x)+3{,}9\cdot[x-\mathbf{E}(x)]=2{,}9\cdot\mathbf{E}(x)+3{,}9\cdot x-3{,}9\cdot\mathbf{E}(x)=3{,}9\cdot x-1\cdot\mathbf{E}(x)$$

Al ver el resultado piensa que esto mismo es lo que hace la pescadera. Se imagina entonces que va a comprar y en su representación mental ve como la vendedora deposita el producto en la balanza electrónica, como se ilumina el peso x en la pantalla y como ella teclea el precio del producto (3,9 si son sardinas). La calculadora de la báscula muestra el resultado de multiplicar 3,9 por x. Es una calculadora sin función parte entera, piensa el matemático mientras se imagina la escena, pero esto no impide su cálculo. Basta con restar mentalmente 1 euro (la diferencia entre 3,9 y 2,9) al importe total por cada kilo entero de pescado porque esto es lo que indica la fórmula obtenida: $3{,}9\cdot x-1\cdot\mathbf{E}(x)$. Está convencido incluso de que los precios son los que son precisamente para facilitar dicha operación mental, ya que si la diferencia entre los precios fuese otra, un número decimal por ejemplo, el cálculo se haría demasiado difícil. Hace unos años la diferencia solía ser de 100 pesetas. ¿No era así para hacer más fácil la resta? ¡Seguro! En conclusión, se alegra de que una vez más las Matemáticas y la práctica se den otra vez la mano y se felicita por haber encontrado una situación cotidiana donde contextualizar una función tan extraña como la parte entera de un número decimal. La representación mental acaba con la sonrisa triunfante y silenciosa del matemático. ¡Eureka!

¿Es la realidad cotidiana tal y como le parece al matemático? Debe serlo, se dice, porque los precios están escritos de forma bien clara. Pese a todo, para que no haya ninguna duda y en contra de lo que es habitual, el matemático decide poner los pies en el suelo y se va a comprar. En el momento de hacer efectivo el importe le pregunta a la pescadera cómo lo calcula. No lo demuestra, pero se siente ufano de conocer la respuesta y prevé lo que sus oídos van a oír. Por eso se queda de una pieza cuando ella responde:

— *¡Uy!, lo hace todo la máquina.*

¿Cómo? ¿Acaso las calculadoras de las balanzas llevan ahora función parte entera? La sorpresa le obliga a indagar más:

— *Usted pone el pescado en la bandeja de la balanza y luego teclea el precio, ¿no?*
— *Exacto. Y la máquina ya me dice el total, sino sería muy complicado.*

El matemático no la entiende:

— *¿Pero qué precio teclea usted en la calculadora?*
— *Pues este que está marcado, tres noventa.*
— *¿Y si el peso es superior al kilo?*
— *Entonces, dos noventa.*
— *¿No teclea tres noventa y luego le resta al total ....*
— *¡Que va! El precio del kilo es tres noventa, pero si pasa, entonces es a dos noventa.*
— *Entonces el precio de dos noventa no es por kilo completo, sino a partir del kilo.*
— *Eso mismo.*

La expresión del matemático se parece mucho a la de un besugo tieso que, fuera del encuadre de la fotografía, disfruta del descanso eterno sobre un lecho de hielo picado. Su decepción es tremenda. La flamante contextualización de la función parte entera se ha ido al carajo y maldice a quien escribió el cartel. En lugar de kilo entero debió escribir a partir del kilo. De nuevo la realidad se impone:

$$f(x)=\begin{cases} 3{,}90\cdot x & 0\le x<1 \\ 2{,}90\cdot x & 1\le x \end{cases}$$

Aunque no tan rara como la parte entera, por lo menos es una función definida a trozos. Y además discontinua en x=1. Algo es algo, ¿no? Conviene comprar un kilo entero de sardinas cuando el importe a pagar calculado con 3,9€ supere el importe a pagar calculado con 3,9€. Es decir, 0,796 kg.

Titularé esta iMATgen ***¡Llévate un kilo por lo menos, reina!,*** aunque *Mea culpa* tampoco le vendría mal. Que sirva de ejemplo sobre lo arriesgadas que pueden resultar a veces algunas interpretaciones matemáticas de la realidad.

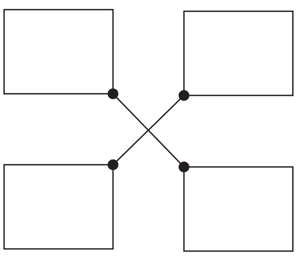
Siempre nos quedará como consuelo la contextualización de la función parte entera en las ofertas *3×2* tan corrientes en los supermercados. Al comprar n unidades de un producto cuyo precio por unidad es p, pagamos solamente $2{\cdot}p$ por cada trío que nos llevamos. Dividiendo n entre 3 hallamos la cantidad m de tríos: $n=3{\cdot}m+r$. El precio de cada trío es $2{\cdot}p$, mientras que el de cada unidad restante es p. El importe total será $f(n)=2{\cdot}p{\cdot}m+p{\cdot}r=p{\cdot}(2m+r)=p{\cdot}(n-m)$. Dado que m es precisamente la parte entera de $^n/_3$:

$$f(n)=p\cdot\left[n-\mathbf{E}\left(\frac{n}{3}\right)\right]$$

Si compras sardinas en la pescadería, llévate un kilo por lo menos; si compras latas de atún de oferta *3×2* en el súper, coge tríos. No te preocupes por las sobras, el felino te lo agradecerá. ■

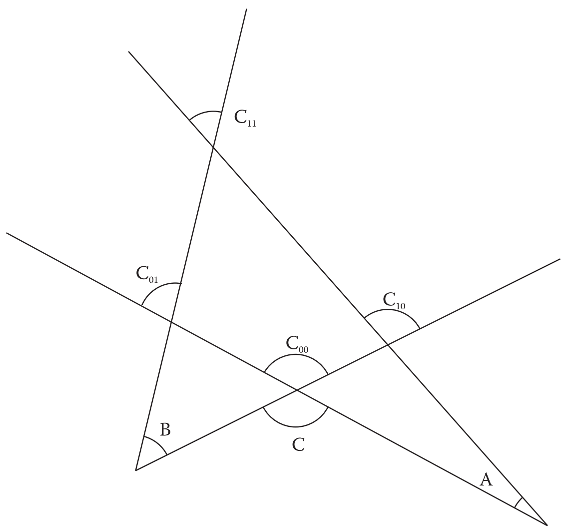
iMATgen 9

Una red formada por ocho rectas negras, o casi rectas, cortándose en medio de un rectángulo que en realidad son ocho cables eléctricos cruzándose en el espacio. Ocho cables distribuidos en dos haces de cuatro cables cada uno, abriéndose o cerrándose, según se mire, en abanico. Un haz desciende en la imagen de izquierda a derecha, con sus cuatro integrantes casi paralelas. El otro asciende veloz en el centro de la fotografía, con sus cables bastante paralelos, pero no tanto. En la ficción visual se crea una retícula de cuadriláteros casi rectángulos matizada por jirones de nubes. Los cables estaban tendidos entre las fachadas de casas opuestas de una intersección:



La estrechez de las calles facilitaba la tensión de los cables y su aspecto rectilíneo. Y, como consecuencia de ello, su paralelismo que la perspectiva de la foto impide apreciar. Cada haz era una banda vertical suspendida. Ambas cruzándose, una por encima de la otra, en una recta invisible perpendicular al suelo. De ahí ese espejismo reticulado. El modo en que los ángulos varían en la imagen permite intuir desde qué punto de la calzada se hizo la fotografía. ¿Alguna sugerencia? Esto es fundamental para comprender la imagen, pero también lo es conocer la esencia de la red, es decir, saber cómo varían los ángulos que la determinan en relación a los haces que la producen. De este modo una red virtual produce una iMATgen verdadera.

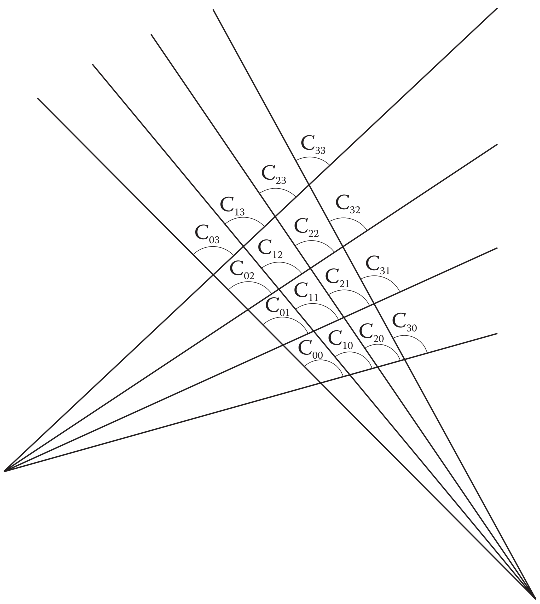
Empecemos por un caso simple, aquel en que cada haz está formado por un par de segmentos. La cuestión es determinar los ángulos C_{00}, C_{10}, C_{01} y C_{11} de la figura siguiente a partir de los valores conocidos A, B y C:

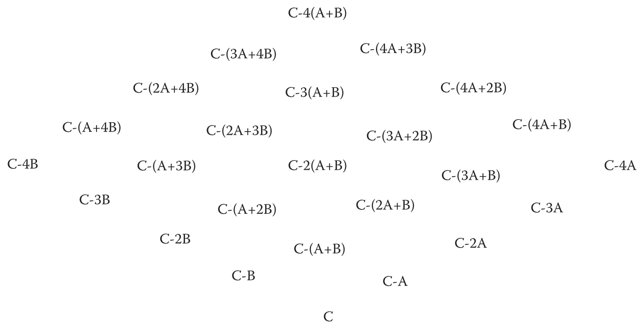


Puesto que los ángulos opuestos en la intersección de dos rectas son iguales, ya tenemos el valor de $C_{00}=C$. En el triángulo con vértice de ángulo A más pequeño de la figura anterior debe cumplirse que $180º=A+(180º–C)+C_{10}$, con lo que hallamos $C_{10}=C–A$. Un razonamiento idéntico nos conduce a $C_{01}=C–B$. Finalmente, como la suma de los cuatro ángulos interiores del cuadrilátero ha de ser 360º obtenemos C_{11}:

$$360º=C_{00}+(180º-C_{10})+(180º–C_{01})+C_{11}$$
$$360º=C+180º–(C–A)+180º–(C-B)+C_{11}$$
$$C_{11}=C–(A+B)$$

Volviendo a la fotografía supongamos que cada haz está formado por cuatro rectas que se abren en abanico y entre las que media siempre un mismo ángulo. Sean A y B esos ángulos en el haz derecho e izquierdo respectivamente y sea C el ángulo entre ambos. Reiterando el proceso aplicado antes se obtienen los ángulos de la red de intersecciones:





Es decir, $C_{MN}=C-(M·A+N·B)$. Estableciendo en la malla un origen de coordenadas (0,0) en el vértice de ángulo C, conocemos el ángulo en cualquier otro vértice (M, N). Para $A=B=0$ las rectas de cada haz son paralelas y todos los ángulos de la red son iguales: $C_{MN}=C$. Y si, además, $C=90º$, los cuadriláteros serán rectángulos.

La situación general es aquella en la que las rectas se despliegan en abanico con ángulos distintos. En tal caso, sean A_1, A_2, A_3, ..., A_M los ángulos entre dos rectas consecutivas del haz izquierdo y B_1, B_2, B_3, ..., B_N los del derecho. El ángulo en el vértice (M, N) de la red será:

$$C_{MN}=C-\left(\sum_{i=1}^{M}A_i+\sum_{i=1}^{N}B_i\right)$$

Si tienes la oportunidad de verlas en tu pueblo o ciudad, míralas bien porque a esas redes les queda poco tiempo de vida. Corren serio peligro de ser enterradas bajo el asfalto y de ser reemplazadas por curvas tubulares anudadas en la fría oscuridad del subsuelo urbano. Dentro de unos años esta iMATgen sobre ***Ángulos y redes en peligro de extinción*** será sólo un recuerdo. ■

SUMA 46
Junio 2004, pp. 107-109

Escalas caseras

¿Cuantas escalas matemáticas coexisten en una vivienda normal? A esta pregunta la mayoría de ciudadanos responderían con una rotunda respuesta (¡Ninguna!) seguida de una leve sonrisa (*En mi casa no entran las matemáticas*). El objetivo de este clip es hacer ver la agobiante cantidad de *escalas* con las cuales todos (incluidos los de letras) convivimos. La exposición tendrá pues forma de carta dirigida al vecino de turno.

Estimado vecino,

Me han llegado rumores de su incredulidad sobre las escalas matemáticas que coexisten en su vivienda y en su vida. Permita que le recuerde algunas de las cosas que usted posee *a escala* y las muchas escalas que le son imprescindibles.

Empecemos por los planos y mapas. Tiene un plano del piso (si ya sé, también tiene hipoteca…) y un atlas con mapas del mundo mundial y diversos mapas para excursiones y viajes por carretera. En todos ellos encontrará unas indicaciones numéricas (1:100, 1:500, 1:50.000,…) que le orientan sobre su forma de representación. En la escala proporcional del tipo 1:x o $^1/_x$, 1 cm del dibujo son x cm de la realidad: si la pared del comedor mide 3 cm en el plano a escala 1:100, ésta le hace 300 cm de verdad (3 m).

Si en su vida hay niños usted posee libros de cuentos como los de Alicia o los de Gulliver donde los personajes viven aventuras con las escalas (¡pobres liliputienses!). Pero sus hijos tienen además de cuentos numerosos juguetes (activos o guardados). Los juguetes exhiben una gama fantástica de escalas proporcionales:

Gulliver, de viaje por Liliput

- Trenes eléctricos a escalas $^1/_{16}$, $^1/_{22.5}$ (escala G), $^1/_{32}$ (escala 1), $^1/_{48}$ (escala O), $^1/_{64}$ (escala S), $^1/_{87}$ (escala HO), $^1/_{160}$ (escala N), $^1/_{220}$ (escala Z)… o incluso trenes de jardín a escalas grandes.

Claudi Alsina
elclip.suma@fespm.org.

- Modelos de coches a escalas $^1/_{12}$, $^1/_{16}$, $^1/_{20}$, $^1/_{24}$, $^1/_{25}$, $^1/_{32}$, $^1/_{43}$…
- Modelos de barcos a escalas $^1/_{96}$, $^1/_{192}$, $^1/_{200}$, $^1/_{350}$, $^1/_{700}$, $^1/_{720}$, $^1/_{1200}$, $^1/_{2400}$…
- Modelos de aviones a escalas $^1/_{32}$, $^1/_{48}$, $^1/_{64}$, $^1/_{72}$, $^1/_{100}$, $^1/_{125}$, $^1/_{144}$, $^1/_{200}$…

Hay juguetes a escala fija ($^1/_{12}$ las casas de muñecas por aquello de que 1 pie son 12 pulgadas) pero, como puede ver, hay muchos productos del modelismo con una variedad enorme de escalas. Pero no se engañe: muchas, muchas piezas a escala muy pequeña también ocupan mucho espacio.

Mire su vitrina un momento: ahí tiene las últimas ocho muñecas rusas encajables de escalas decrecientes, una imagen de San Pancracio tamaño *madelman*, unos perros horribles de cristal… y el último Buda que compró en la semana china de los almacenes de la primavera. Claro que si se pone a repasar sus álbumes de fotos tendrá un desfile de imágenes de antepasados y coetáneos realizados a escalas muy diversas. Desde sus grandes fotos de pequeño a estas mini fotos actuales de su carné de conducir. Y quien dice fotos dice las revistas, los cuadros del comedor, los posters del último viaje, etc., etc. El único a escala 1:1 es usted.

¿Cuántas escalas matemáticas coexisten en una vivienda normal? El objetivo de este clip es hacer ver la agobiante cantidad de escalas con las cuales todos (incluidos los de letras) convivimos.

En un rincón del salón o en la ventana de la cocina posee, seguro, un termómetro metereológico (y posiblemente un barómetro). Su termómetro del tiempo tiene una escala de intervalo con un 0º de origen acuífero y unos grados Celsius que le indican como vestirse (si usted fuese inglés o americano usaría la escala Fahrenheit donde a 20º hace un frío polar). También en su mesilla de noche le espera, para las frías noches de invierno, otro termómetro donde usted aspira a ver los 36º y medio y no pasar de los 37º. Sin tecnología, ese calendario que cuelga en la cocina con foto de un gato blanco y membrete de *Pescadería Mari. Feliz 2004* resulta que usa una escala de intervalo, pues la Mari es piadosa y sigue el calendario cristiano actual cuyo año 0 está ligado a Jesucristo y cuyos meses siguen determinadas pautas. Los vecinos chinos de arriba tienen otro calendario y los vecinos árabes de abajo otro.

Dispuesto a tomar el teléfono y hacer su pedido al colmado precisará usar una escala absoluta: los números. Usted quiere 3 huevos, 7 manzanas, 12 tetrabricks de leche… las *medidas* de la compra, son en muchos casos, números y en algunos casos mediciones (100 gr de jamón en dulce, 1 l de vinagre,…). Y habiendo llegado sus hijos con sus notas, después de una discusión desagradable para lograr verlas, observa un 3 de mates, un 7 de sociales… o una nota de corte de 5.3 de la selectividad. Estas notas no son como los 3 huevos y las 7 manzanas. La evaluación ha asignado un número en una escala ordinal del 0 al 10: lo triste del 3 de mates es no haber llegado a 5. También verá otras escalas ordinales en tests de inteligencia, en los minerales ordenando durezas, en las encuestas de valoración de los políticos ordenando preferencias, etc.

Y cuando toca poner la mesa usted sigue una escala ordinal estricta: primero el mantel, luego las servilletas, los platos… Cuando el partido de fútbol empieza y salta el 11 titular y usted, cerveza en mano, hace grandes elogios del jugador número 7 (el cual verá en diferentes escalas durante el partido)… piense un momento ¿Qué sentido tienen los números de las camisetas de estos millonarios con piernas ligeras? Es una escala nominal: se asignan números (o letras o palabras…) para identificar. ¿Acaso usted no se identifica a sí mismo con tres palabras u ocho números más una letra?

Acabado el partido escucha unas noticias. Algunos días le hablarán desgraciadamente del terremoto que en la escala de Richter fue de 4,3 y no causó grandes efectos, no como el de San Francisco que fue casi de 8 grados… Es lógico que se pregunte entonces como desde muchas estaciones lejanas al terremoto puedan hacer una *medición* del mismo. El truco es el siguiente: en el papel del sismómetro de Wood-Anderson quedan marcadas unas gráficas ondulares cuya amplitud A se mide en milímetros con una regla, deduciéndose también la duración D del suceso. Richter midió la magnitud en California con la formulita $M=\log A + 3\log(8D)-2.92$, usando como ve los logaritmos y facilitando correcciones para distancias geográficas. Incluso escuchará pediatras usando escalas logarítmicas para referirse al crecimiento de los bebés.

Pero también hay otra escala sin fórmulas que es la de Mercalli. La escala de Mercalli evalúa la intensidad del terremoto en 12 grados posibles (es una escala ordinal) de acuerdo con la descripción de los efectos del seísmo: desde platos rotos y oscilación de lámparas a caída de grandes puentes y destrucción total (grado XII)… Evite por favor siempre que sus discusiones con los demás puedan medirse en esta escala Mercalli.

Le deseo lo mejor en este mundo de las escalas caseras. Y piense, ¡ya!, en la posibilidad de comprarse al contado un Mercedes Benz (a escala resultan bastante económicos).

Cordialmente.
Claudi ■

Escala de intensidades de Mercalli modificada.

- I No sentido.
- II Sentido por personas en posición de descanso, en pisos altos o situación favorable.
- III Sentido en el interior. Los objetos suspendidos oscilan. Se perciben vibraciones como si pasara un camión ligero. La duración es apreciable. Puede no ser reconocido como un terremoto.
- IV Los objetos suspendidos oscilan. Hay vibraciones como al paso de un camión pesado o sensación de sacudida como de un balón pesado golpeando las paredes. Los automóviles parados se balancean. Las ventanas, platos y puertas vibran. Los cristales tintinean. Los cacharros de barro se mueven. En este rango (IV), los tabiques y armazones de madera crujen.
- V Sentido al aire libre; se aprecia la dirección. Los que están durmiendo despiertan. Los líquidos se agitan, algunos se derraman. Los objetos pequeños o inestables son desplazados o volcados. Las puertas se balancean, abriéndose y cerrándose. Ventanas y cuadros se mueven. Los péndulos de los relojes se paran, comienzan a andar, cambien de período.
- VI Sentido por todos. Muchos se asustan y salen al exterior. La gente anda inestablemente. Ventanas, platos y objetos de vidrio se rompen. Adornos, libros, etcétera, caen de las estanterías. Los cuadros también caen. Los muebles se mueven o vuelcan. Los revestimientos débiles de las construcciones de tipo D se agrietan. Las campanas pequeñas suenan (iglesias, colegios). Árboles y arbustos son sacudidos visiblemente.
- VII Es difícil mantenerse en pie. Lo perciben los conductores. Edificios tipo D, incluyendo grietas. Las chimeneas débiles se rompen a ras del tejado. Caída de cielos rasos, ladrillos, piedras, tejas, cornisas también antepechos no asegurados y ornamentos de arquitectura. Algunas grietas en edificios tipo C. Olas en estanque, agua enturbiada con barro. Pequeños corrimientos y hundimientos en arena o montones de grava. Las campanas graves suenan. Canales de cemento para regadío, dañados.
- VIII Conducción de los coches, afectada. Daños en edificios de tipo C; colapso parcial. Algún daño a construcciones de tipo B; nada en edificios de tipo A. Caída de estuco y algunas paredes de mampostería. Giro o caída de chimeneas de fábricas, monumentos, torres, depósitos elevados. La estructura de las casas se mueve sobre los cimientos, si no están bien sujetos. Trozos de pared sueltos, arrancados. Ramas de árboles rotas. Cambios en el caudal o la temperatura de fuentes y pozos. Grietas en suelo húmedo y pendientes fuertes.
- IX Pánico general. Construcciones del tipo D destruidas; edificios tipo B con daños importantes. Daño general de cimientos. Armazones arruinadas. Daños serios en embalses. Tuberías subterráneas rotas. Amplias grietas en el suelo. En áreas de aluvión, eyección de arena y barro; aparecen fuentes y cráteres de arena.
- X La mayoría de las construcciones y estructuras de armazón, destruidas con sus cimientos. Algunos edificios bien construidos en madera y puentes, destruidos. Daños serios en presas, diques y terraplenes. Grandes corrimientos de tierra. El agua rebasa las orillas de canales, ríos lagos, etc. Arena y barro desplazados horizontalmente en playas y tierras llanas. Carriles torcidos.
- XI Carriles muy retorcidos. Tuberías subterráneas fuera de servicio.
- XII Daños prácticamente total. Grandes masas de rocas desplazadas. Visuales y líneas de nivel, deformados. Objetos proyectados al aire.

Para pensar un rato

Aquí tiene dos enunciados de problemas con escalas por si le apetece compartirlos con otros o pensar matemáticamente un ratito ($^1/_{12}$ en la escala de horas)

Problema A. (Ch. Chell): *Si un árbol de Navidad de 180 cm de alto puede adonarse con 4 tiras de luces ¿Cuántas tiras de luces se precisaran para decorar un árbol de 540 cm de alto? Discuta las soluciones!*

Problema B. (Steen): *Argumente una razón por la cual las personas adultas nunca podrían ser ampliaciones proporcionales de cuando eran bebés (y por tanto un bebé no será nunca un adulto a escala).*

Comentarios o soluciones curiosas serán bienvenidos en elclip.suma@fespm.org

Para saber más

LEEN S. (1999): *Las Matemáticas en la vida cotidiana*, Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid, Madrid.

McMAHON, T.A. y BONNER, J.T. (1983) : *On Size and Life.* Scientific American Library, Freeman, New York.

TREFIL, J.S. (1983): "What would a giant look like?", en *The Unexpected Vista: a Physicist's View of Nature,* Scribners, New York.

En la web:

http://www.powersof10.com

http://microcosm.web.cern.ch/microcosm/P10/esp/welcome.html

http://www.geocities.com/ipmspanama/escalaspopulares.html

http://www.nex.es/edafo/GCSL2MapEsc.htm

VI Jornadas de Educación Matemática Comunidad de Valencia

Societat d'Educació Matemàtica Comunitat Valenciana Al-Khwarizmi

La Sociedad de Educación Matemática de la Comunidad Valenciana *Al-Khwarizmi* está organizando las *VI Jornadas de Educación Matemática* que se celebrarán a lo largo de los días 1, 2 y 3 de octubre de 2004 en el Museo de las Ciencias Príncipe Felipe de Valencia y en el centro La Florida de Catarroja.

Se trata de un encuentro de profesorado de Infantil, Primaria, Secundaria y Universidad en la que se podran intercambiar experiencias de aula, proponer ideas, discutir modelos metodológicos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y en general, para reflexionar alrededor de la práctica docente y contribuir a nuestra actualización.

Las Jornadas suponen un punto de encuentro de profesionales, tanto de la enseñanza universitaria como de la no universitaria, donde se ofrecen los últimos descubrimientos sobre didáctica de las matemáticas, los nuevos materiales didácticos y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación (software de Matemáticas, Internet, calculadoras científicas y gráficas).

Habrá diferentes actividades entre las que podremos encontrar dos conferencias plenarias, a cargo de Manuel Toharia, *Divulgar ciencia, ¿por qué y para qué?* y Luis Puig, *Cosas que las matemáticas nos hacen ver en el mundo.*

El Programa Científico de las VI Jornadas gira alrededor de tres núcleos temáticos:

Bloque 1 : Infantil–Primaria.
Bloque 2 : Secundari–niversidad.
Bloque 3 : Popularización de las matemáticas.

Se puede participar con comunicaciones, talleres, paneles y/o posters. Las bases para la presentación así como el formulario de inscripción y más datos sobre las jornadas los podréis encontrar en www.semcv.org ■

8º Seminario Castellano-Leonés de Educación Matemática

El 8º Seminario Castellano-Leonés de Educación Matemática tendrá lugar los días 10, 11 y 12 de septiembre de 2004, en el edificio de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Salamanca, organizado por la Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas.

Estructura del Seminario (resumen)

1. **Conferencias plenarias**: *De la Matemática al Arte a través de la perspectiva*, por D. Francisco Martín Casalderrey, *La importancia de las Matemáticas en la ciencia y en la sociedad contemporáneas* por D. Juan Luis Vázquez Suárez, *La criptografía y los códigos matemáticos*, por D. José Ángel Domínguez.
2. **Núcleos temáticos:** Bloque 1: Futuro de la Educación Matemática en Castilla y León: 1.1. Infantil, 1.2. Primaria, 1.3. Secundaria Obligatoria, 1.4. Bachillerato. Bloque 2: La realidad de las Matemáticas en el aula: 2.1. La dinámica del aula de Matemáticas, 2.2. Atención del talento precoz en Matemáticas, 2.3. Integración de otras culturas.
3. **Talleres**: Recursos baratos, Uso de la calculadora en la educación matemática, Matemáticas on-line. Taller de Geometría Dinámica.
4. **Exposiciones paralelas**: Rincón de las Matemáticas, Matemáticas en el arte y en la vid, Exposición sobre geometría proyectiva.
5. **Zoco Matemático.**
6. **Actividades culturales**: Proyección en la Filmoteca de películas relacionadas con las Matemáticas , visita a Ciudad Rodrigo, visita nocturna de la zona monumental iluminada, cena de los participantes en Ciudad Rodrigo. ■

SUMA 46
Junio 2004, pp. 111-113

Las matemáticas entre la paz y la guerra

Hace 50 años, el 7 de junio de 1954, murió prematuramente (pocos días antes de cumplir 42 años) y en circunstancias misteriosas el matemático británico Alan Mathison Turing. La causa material de su muerte fue una manzana envenenada con cianuro potásico, y fue dictaminado el suicidio. Se concluía de este modo trágico un periodo atormentado iniciado dos años antes, en 1952, cuando, bajo la acusación de homosexualidad, Turing había sido condenado a recibir un tratamiento con estrógenos y había sido segregado de su delicado trabajo en relación con el desciframiento de códigos secretos de interés militar. Una historia que recuerda las vicisitudes de otro gran matemático de la misma época, John Nash.

Alan Mathison Turing (1912-1954)

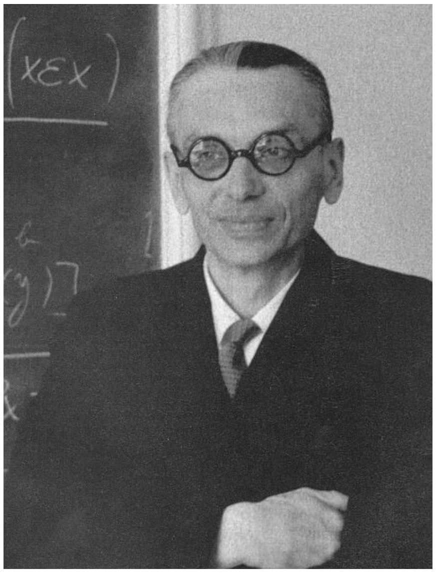
Las nuevas teorías avanzadas por los físicos planteaban un desafío a los matemáticos de la época: trabajar en su formulación matemática hasta llegar a obtener un tratamiento axiomático.

La historia personal de los matemáticos del siglo XX fue a menudo historia de vidas atormentadas, entre discriminación racial, hospitales psiquiátricos, muertes precoces en guerra, exilio, por no hablar del internamiento y muerte en campos de exterminio. En muchos casos peripecias vitales dramáticas tejieron el telón de fondo de aventuras intelectuales llenas de coraje y de visión de futuro, y Turing no fue una excepción. Durante sus años universitarios en el King's College de Cambridge –obtuvo una beca en 1931, después de un tentativo fallido dos años antes– se produjo la llegada al poder de Hitler. Con una segunda beca, obtenida en 1936, pudo trabajar en Princeton, que se estaba convirtiendo en el principal centro de la matemática del mundo. Volvió a su país en 1938, el año de la anexión de Austria a Alemania que marcó el inicio de la política expansionista del Tercer Reich.

Para un estudiante de matemáticas, sin embargo, eran años verdaderamente capaces de entusiasmar. Había leído ya en sus años de estudiante de secundaria los trabajos de Einstein y el libro de Eddington, *La naturaleza del mundo físico* (1928). Las nuevas teorías avanzadas por los físicos planteaban un desafío a los matemáticos de la época: trabajar en su formulación matemática hasta llegar a obtener un tratamiento axiomático, que representaba una garantía de solidez de cualquier teoría. Turing leyó ávidamente uno de los grandes éxitos en esta dirección, el trabajo que dio a conocer internacionalmente a John von Neumann, *Los fundamen-*

Ana Millán
hace.suma@fespm.org

tos matemáticos de la mecánica cuántica (1932). La axiomatización de las teorías de la física era el sexto de los famosos problemas que el matemático alemán David Hilbert había incluido en su famosa conferencia en el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en París en el año 1900, a modo de plan de trabajo para las nuevas generaciones de matemáticos.



Kurt Gödel (1906-1978)

Los intereses matemáticos de Turing eran muy amplios: trabajó en temas de álgebra y de probabilidad al principio de su carrera, y al final de ella volvió a interesarse por la mecánica cuántica y sobre todo por un tema clásico de la biomatemática, la morfogénesis. Pero su nombre es recordado sobre todo por la famosa *máquina de Turing*, una idea presentada en un celebérrimo artículo publicado en 1936 bajo el título "Sobre los números calculables con una aplicación al *Entscheidungsproblem*". La palabra alemana del título hace referencia al problema de la decidibilidad y estaba asociada al nombre de Hilbert, que en su citada conferencia había incluido algunos problemas de *decisión por medio de un algoritmo*. El décimo, relativo a la solubilidad de las ecuaciones diofánticas, estaba formulado haciendo referencia explícita a la concepción de un proceso que en un número finito de pasos u operaciones permitiera determinar la solubilidad o no de cualquier ecuación del tipo descrito.

Su nombre es recordado sobre todo por la famosa máquina de Turing, *una idea presentada en un celebérrimo artículo publicado en 1936 bajo el título "Sobre los números calculables con una aplicación al* Entscheidungsproblem".

Con su genial enfoque Hilbert, una vez más, consideraba un problema clásico de las matemáticas desde un punto de vista radicalmente nuevo, profundizando el nivel de abstracción con la idea de *decidibilidad* y subrayando al mismo tiempo, casi paradójicamente, los aspectos finitistas. Era el espíritu del tiempo: en las primeras décadas del siglo XX se reelaboró la visión de las matemáticas, y se trató de una labor colectiva como pocas veces antes en la historia de la disciplina (salvo quizás los siglos V y IV a.n.e. en los que fue creada la idea misma de matemáticas). Así, los algoritmos, hoy lo reconocemos fácilmente, han sido una presencia constante en la historia de las matemáticas, pero sólo en el siglo XX se introdujo la palabra y se concibió la idea de *calculabilidad* por sí misma. Muchos matemáticos de la Europa moderna se habían interesado por el diseño de máquinas capaces efectuar procedimientos mecánicos de cálculo; Turing concibió la idea de una máquina ideal –que evocaba, eso sí, elementos materiales, una cinta, un dispositivo que imprime símbolos– correspondiente a esta nueva visión de la calculabilidad. Tal idea se coloca en el contexto del trabajo de muchos otros estudiosos de la época, como Kurt Gödel, Alonzo Church –con quien Turing trabajó en Princeton y tuvo además un episodio de discusión de prioridad– y Emil Post.

Esta visión metamatemática condujo, como es bien sabido, a resultados decepcionantes desde el punto de vista estrictamente lógico-matemático. Ahora bien, la historia ha mostrado que no se trató de un estéril programa de corte escolástico, sino que enriqueció y renovó las vías de investigación matemática y, además, fue una de las fuentes intelectuales de una aplicación tecnológica que ha transformado nuestro mundo, los ordenadores.

Turing participó en sus años de estudiante en el movimiento pacifista que tan activo fue en aquellos años en Gran Bretaña: cuando, en septiembre de 1938, el primer ministro Chamberlain firmó en Munich un tratado que pretendía evitar la guerra transigiendo con la actitud de Hitler, fue recibido en su patria con grandes manifestaciones de júbilo. Sabemos bien como se desarrollaron los acontecimientos; y cuando un año después, bajo la guía de Churchill, Gran Bretaña declaró la guerra a Alemania, Turing comenzó inmediatamente a trabajar en Bletchley Park, la unidad británica encargada de la difícil tarea de descifrar los códigos secretos utilizados por la Aviación y la Marina alemanas. Su colaboración se demostró fundamental en los éxitos logrados por el equipo, tanto en lo que se refiere a la búsqueda de estrategias de descifrado (la más famosa es la que llevó a encontrar el secreto de la máquina Enigma), como en la construcción de máquinas como auxilio para el laborioso y repetitivo trabajo de cálculo necesario para conseguir encontrar la clave. Una de estas máquinas fue el famoso *Colossus* (un nombre que evoca la envergadura de estos precursores de los ordenadores modernos y la imagen mental que de su potencia tenían sus creadores), construido en 1943 bajo la dirección del matemático Max Newman.

Newman fue un punto de referencia durante toda su carrera, a partir de un memorable curso, en 1935, en el que Turing –que ya se había empezado a interesar por la lógica y había leído la *Introducción a la filosofía matemática* (1919) de Bertrand Russell– estudió las ideas de Hilbert y supo del teorema de Gödel. Acabada la guerra, Turing trabajó primero en el Laboratorio Nacional de Física de Londres, donde elaboró el proyecto del ordenador ACE (Automatic Computing Engine), y permaneció después un año en Cambridge hasta que, por la mediación de Newman, se incorporó a la Universidad de Manchester. También allí, como en otros grupos en Gran Bretaña y en Estados Unidos, se trabajaba en un modelo de ordenador, en un frenesí de actividad de ingenieros y matemáticos que sabían ya que estaba al alcance de la mano un instrumento técnico de posibilidades incomparables con todos los productos de la técnica precedentes, un objeto artificial que más que ningún otro estaba destinado a la interacción directa con la mente humana. Turing fue, junto a von Neumann, uno de los estudiosos más lúcidos, capaces de intuir y hacer comprender las muchas implicaciones, filosóficas y científicas, de los ordenadores. Su ensayo *Computing machinery and intelligence*, publicado en la revista *Mind* en 1950, junto a su informe sobre el proyecto ACE –un estudio científico de carácter análogo al informe sobre el EDVAC de von Neumann– son dos clásicos de la historia de la informática.

***

Las matemáticas salieron de la Segunda Guerra Mundial profundamente transformadas. Los decenios precedentes habían visto una intensa exploración interna de la disciplina: de su estructura lógica, en primer lugar, con el debate sobre los fundamentos; de sus temas y contenidos, con la tendencia a la abstracción que se manifestaba en la renuncia a la intuición geométrica y a las exigencias constructivistas; y de su método y su forma, con la aceptación general del enfoque axiomático. Toda esta laboriosa tarea dejó una impronta duradera, la algebraización de las matemáticas y un cambio que se consolidó poco a poco, pero de modo evidente, en la manera de exponerlas y transmitirlas . Se tendió sin embargo a arrinconar los resultados decepcionantes de los estudios metamatemáticos: se prefirió ver el resultado de Gödel como un logro fascinante, pero que de ningún modo podía condicionar negativamente la investigación matemática.

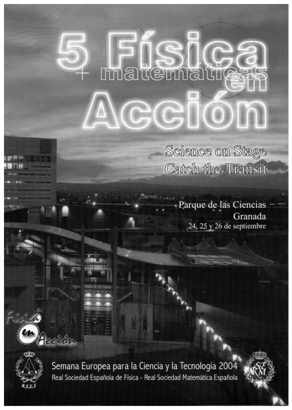
La guerra fue la ocasión, para muchos matemáticos, de distraer la atención de las grandes cuestiones abiertas puramente internas a la disciplina y dirigirla hacia problemas reales, relacionados con la organización militar, con el uso de los explosivos, con el tiro antiaéreo, con el proyecto de un arma atómica, con el desarrollo de los medios y procedimientos de cálculo numérico que tales problemas requerían. No se trataba de una novedad, sino de una nueva fase en la oscilación típica de la historia de las matemáticas entre la investigación guiada por problemas internos y la investigación orientada hacia las aplicaciones prácticas, operativas, técnicas o científicas. Pero la matemática aplicada recibió sin duda en aquellos años un enorme impulso, cuya influencia se dejó sentir durante el resto del siglo. Impulso de nuevas ideas, de nuevas teorías matemáticas, pero también el impulso material derivado del unánime reconocimiento de la importancia de las matemáticas –la disciplina– y de los matemáticos –los estudiosos– en la defensa nacional.

La guerra fue la ocasión, para muchos matemáticos, de distraer la atención de las grandes cuestiones abiertas puramente internas a la disciplina y dirigirla hacia problemas reales.

Un ejemplo muy representativo y poco conocido es el de la investigación operativa. La idea de introducir elementos cuantitativos o incluso de formalizar matemáticamente algunos aspectos de la actividad organizativa había tenido un largo periodo de gestación en la historia moderna, a medida que se tomaba conciencia de la complejidad de los sistemas presentes en ámbito productivo, militar y tecnológico. El significado de la organización y planificación matemática fue explorado con rigor por Leonid V. Kantorovich en la Unión Soviética a finales de los años treinta. Pero la Segunda Guerra Mundial dio un espaldarazo definitivo a esta idea entre los científicos e ingenieros, estimulando el interés por tales problemas y la financiación de las investigaciones sobre la programación matemática y la optimización.

En los primeros años que siguieron a la guerra la investigación militar siguió teniendo una gran importancia: durante la Guerra fría, la convicción de que las matemáticas podían revelarse útiles de la manera más inesperada indujo a financiar con fondos de la defensa en los países más desarrollados hasta las más abstractas investigaciones de geometría algebraica. Pero progresivamente se empezó a explorar la transferencia de las mismas técnicas matemáticas a nuevos contextos de la vida civil, por ejemplo en el mundo industrial. Precisamente en 1954, HACE CINCUENTA AÑOS, fue publicado en Estados Unidos uno de los primeros libros que proponían la transferencia del enfoque de la investigación operativa y de los métodos de optimización a la gestión industrial, *Operations research for management*, editado por Joseph F. McCloskey y Florence N. Trefethen. La investigación operativa iniciaba en aquellos años su camino en búsqueda de una precisa identidad como disciplina científica. ■

Premios Física+Matemáticas en acción



Estos premios son un iniciativa de la Real Sociedad Española de Física, en coordinación con la Real Sociedad Matemática Española y EIROforum, y cuenta con la colaboración de la EAAE y la EPS.

El programa *Física + Matemáticas en acción* es un programa incluido dentro de la Semana Europea de la Ciencia y la Tecnología. Esta iniciativa pretende acercar la ciencia y la tecnología, en sus diferentes aspectos, al gran público. Se coordina con el proyecto internacional "Science on Stage" organizado por EIROforum.

El programa motiva a los participantes a través de un concurso bajo el título Premios *Física + Matemáticas en acción* , estableciéndose para el año 2004 un total de 9 modalidades.

- El concurso está dirigido principalmente a profesores de enseñanza primaria, secundaria y de universidad, a alumnos de secundaria, a investigadores y divulgadores de la Física y las Matemáticas así como a cualquier persona interesada en la enseñanza de las Matemáticas y de la Física.
- Los interesados deberán presentarse al concurso de forma individual.
- El plazo de presentación de cualquiera de los premios y modalidades finaliza el 31 de Julio de 2004.
- El 10 de Septiembre se facilitará la relación de preseleccionados (uno por cada trabajo), de las diversas modalidades, que serán invitados a participar en el Certamen Nacional del 24,25 y 26 de Septiembre de 2004 en el Parque de las Ciencias de Granada.
- Cada una de las modalidades de los premios está dotada con 1500 euros.

Las modalidades que se refieren a matemáticas son:

- Laboratorio de Matemáticas (Premio PASCO-PRODEL): actividades prácticasw a realizar "in situ"
- Materiales didácticos de Matemáticas (premio Caja Granada): pueden o presentarse como cuadernillo de trabajo, libros, CD-ROMs, páginas web, programas de simulación o autoaprendizaje, u otros formatos en soporte informático o en papel.
- Trabajos de Divulgación Científica (premio Parque de las Ciencias): artículos de prensa escrita, folletos o catálogos de exposiciones, emisiones de radio, videos o programas de televisión.
- Puesta en escena (premio RSEF-RSME): presentaciones teatrales de contenidos científicos que den lugar a una divulgación de éstos.

Más información, bases del concurso y ficha de inscripción se puede obtener en la página:

http://ific.uv.es/fisicaenaccion

o en la dirección:

"Física en Acción"
Real Sociedad Española de Física
Facultad de Ciencias Físicas
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
28040 MADRID ■

SUMA 46
Junio 2004, pp. 115-118

Ausencia mediática

A la memoria de **Miguel de Guzmán**, de cuya desaparición tan poco eco se han hecho los medios.

Las recién celebradas elecciones del 14-M traen a la palestra una nueva situación educativa. En este periodo de cambio que se avecina las promesas del partido ganador incluyen que uno de los ejes fundamentales de esa mutación va a ser la enseñanza, a pesar de lo cual hay notable ausencia mediática de la misma, quizás motivada porque (como casi siempre) hay otros temas más urgentes. La lejanía entre el momento de escribir estas notas y el de su publicación avala el intentar responder al "interés general" (es imprescindible hacerse eco de la retórica tantas veces manida), alejado de la información cotidiana, aunque también conlleva el riesgo de que los derroteros de la realidad en el momento en que salga se hayan alejado demasiado. Si así sucede quedarían al menos como otra reflexión general sobre la necesidad de abordar en profundidad el (siempre necesario) cambio en la enseñanza de las matemáticas.

Tras la puesta en marcha de la LOGSE y la consolidación del valor social de la prolongación de la enseñanza obligatoria hasta los 16 años, se entró en una fase de recortes económicos en la educación (cuya financiación nunca fue muy brillante, por lo demás), que dieron paso al inicio de una contrarreforma educativa que nos llevaba a toda velocidad hacia los años 50. Sirva como ejemplo de la tendencia un hecho relacionado con esta sección: la desaparición entre los objetivos de la enseñanza en la ESO de toda referencia a los medios de comunicación (que antes estaban, aunque un poco de rondón). Y todo esto en el marco de una sociedad cada vez más pluricultural que ponía en evidencia la necesidad de la integración personal (del alumnado) y cultural (de sus conocimientos) de agregados diferentes.

Creo que, puesto que el curso 2004/05 va a ser de transición, es un buen momento para abrir un debate amplio y sosegado sobre varios aspectos de la enseñanza, pero sin demorar en el tiempo. Yo aportaré en lo sucesivo algunas reflexiones que estarán circunscritas a las matemáticas y sólo tocarán asuntos generales cuando sean determinantes. Estas reflexiones se inscriben en la misma línea que ya traté en esta sección en el n.º 44 de *SUMA* ("Para desaparecer de la primera página", pp. 107-111).

> *Las decisiones respecto a la educación no son irrelevantes, sino que permiten cambiar los rumbos de las sociedades.*

Hay que tener en cuenta que las decisiones respecto a la educación no son irrelevantes, sino que permiten cambiar los rumbos de las sociedades. Dos ejemplos de nuestro entorno son Finlandia, donde tras una crisis en los años 60 se decidió poner el mayor empeño en las inversiones educativas, llevando al país a una posición delantera en todos los indicadores internacionales (también en matemáticas), o el más reciente de Irlanda, que de vegetar por la cola en todos los índices de desarrollo social y económico (acompañando a Portugal, Grecia y España) ha pasado a superar la renta media de la Comunidad Europea y a ser contribuyente neto.

También hay que pensar que socialmente las ocasiones no se dan cuando uno quiere sino que se presentan en determinados momentos muy concretos y que dejarlas pasar sin aprovecharlas puede dar lugar a que en mucho tiempo no se puedan abordar de nuevo (lo que la sabiduría popular ha sintetizado en *a la ocasión la pintan calva*).

Ferando Corbalán
medios.suma@fespm.org

Algunas propuestas

Para colaborar en ese necesario debate social yo propongo algunos puntos de acción inmediata, aunque el orden en que se presenta no tenga por que ser el de prelación.

Los jóvenes tienen que disfrutar en el aprendizaje, pero eso también requiere un esfuerzo. Aprender tiene que ser placentero en su conjunto, pero no siempre un camino de rosas.

1. La formación inicial. Que de una vez por todas la Universidad como institución se tome en serio que hay que preparar a (una parte al menos) los estudiantes de matemáticas como futuros profesores. Lo que implica revisar a fondo la adecuación del CAP, para que en el futuro implique prácticas reales en centros y tutores para los profesores debutantes. El movimiento asociativo y la experiencia de los actuales profesores *veteranos* es un activo que no se puede desaprovechar. Yo suelo decir que los humanos nacemos con una sola estrategia de resolución de problemas: el ensayo y error. Y una muestra del poco rendimiento de la enseñanza de las matemáticas es que un porcentaje no desdeñable del alumnado, tras al menos 12 años en el sistema educativo, no incorpora ninguna más. Por desgracia no pocos profesores egresados de las universidades afrontan el inicio de su carrera como profesores con las mismas carencias y lo que único que pueden hacer es repetir las clases que ellos han *disfrutado*. Es decir, clases para estudiantes como si fueran de la carrera de Matemáticas (con mínimas correcciones para unos alumnos más pequeños), dándose con rapidez de bruces contra la *cruda* realidad. Y armados con el ensayo y error como único medio de progresar.

2.Campañas de valoración social de la profesión de profesor. En la actualidad no es una de las profesiones que se presentan como reflejo del éxito social y sin embargo lo fue en otros momentos de nuestra historia, por ejemplo durante la República. En particular hay que hacer un esfuerzo por tener profesores de matemáticas, porque con la actual caída de estudiantes en las Facultades (que no hacen sino confirmar lo ya sucedido con anterioridad en otros países desarrollados), van camino de ser un bien escaso. Y ahora en diferentes países se proponen alternativas para que eso no suceda en el futuro. La más reciente (y quizás más clara) es la del informe *Making Mathematics Count*, aparecido en febrero, relativo a la educación matemática a partir de los 14 años en el Reino Unido, que había sido encargado por el gobierno británico a una comisión dirigida por el profesor Adrian Smith, y propone entre otras medidas aumentar los sueldos de los profesores de matemáticas (y los de otras materias con dificultades de reclutamiento) para superar la competencia que suponen otras ocupaciones mejor pagadas. Y junto con ello también difundir que los jóvenes tienen que disfrutar en el aprendizaje, pero que eso también requiere un esfuerzo. Que aprender tiene que ser placentero en su conjunto, pero no siempre un camino de rosas.

Las propuestas:
1. La formación inicial.
2. Campañas de valoración social de la profesión de profesor.
3. Mas profesores y más formación permanente del profesorado.
4. Difundir y divulgar las matemáticas, utilizando por todas las vías a nuestro alcance los medios de comunicación.
5. Definir con claridad el papel de la informática en la enseñanza de las matemáticas.
6. Cuántas horas de matemáticas y para quién.

3. Mas profesores y más formación permanente del profesorado. Si no, entre otras cosas, se harán viejos, sin usar, esos ordenadores que, parece, van a desembarcar en cantidades industriales en las aulas. Esa cantidad mayor permitirá dispensar atención personalizada y en pequeños grupos. Lo que tendrá que permitir matemáticas para todos, matemáticas para los alumnos con dificultades y para los de nivel excelente. Un segmento pequeño de la población escolar este último pero que es el asegurará el nivel de las enseñanzas científicas en el próximo futuro (desconozco los datos de nuestro país; en el Reino Unido el Informe Smith citado dice que allí solo 10 % de los alumnos de secundaria elige el nivel alto en matemáticas, de los que a su vez solo un 10 % se gradúa en matemáticas; por tanto allí solo el 1% de los estudiantes de Bachillerato de ciencias acaba matemáticas y de ellos sólo una minoría se dedica a la enseñanza en secundaria).

4. Difundir y divulgar las matemáticas, utilizando por todas las vías a nuestro alcance los medios de comunicación. Los esfuerzos que se hicieron sobre todo a partir del 2000 tienen que continuar y ampliarse: queda mucho por hacer. Sería importante que se hiciera en todas las cadenas de TV, en particular en las públicas, aprovechando que se ha prometido un nuevo diseño de las mismas, en las que prime el servicio público. Pero no hay que limitarse a ellas, hay que entrar en todos los medios que se pueda: es la única forma de asegurar un futuro mejor.

5. Definir con claridad el papel de la informática (y de las TIC en general) en la enseñanza de las matemáticas. Andar con mucho ojo, con el espíritu y la mente abiertos, pero sin papanatismos, porque parece que la respuesta a todos los problemas de la enseñanza es ¡ORDENADORES! Pero, ¿qué pregunta se quiere responder con eso? Las experiencias que se quieren exportar desde Extremadura y Andalucía no son muy alentadoras por el momento, por lo menos sin refinar y sin un esfuerzo mayor en la formación del profesorado. Aquí hay que hacer hincapié en que el papel fundamental en esta tarea lo tienen que realizar los profesores jóvenes, aquellos que han realizado ya todos sus estudios con los ordenadores como auxiliares cotidianos.

6. Cuántas horas de matemáticas y para quién. Expresar claramente si queremos más horas de matemáticas (para colocarnos en línea con los países europeos), si tiene que ser para todos o solo para algunos de los estudiantes (los futuros estudiantes de áreas científicas). Y en todos los casos de dónde se quitan las que se añadan. No se puede sobrecargar el horario de nuestros jóvenes añadiendo siempre nuevas tareas. Como ya señalaba el Informe Bordieu-Gros, encargado por el Ministro de Educación francés para servir como guía del cambio educativo[1], cada vez que se proponga introducir un nuevo contenido o asignatura en la enseñanza hay que decir claramente que contenidos (a los que se dedica en la actualidad un tiempo equivalente) hay que quitar. Se trataría de compatibilizar la excelencia con la enseñanza para todos.

La mayoría de estas reflexiones se pueden enmarcar en la propuesta para el debate del Forum Social sobre l'educació a Catalunya[2,] realizada por diversas personalidades y colectivos catalanes, que llama a debatir la situación educativa.

Una Comisión de mejora de la Enseñanza de las Matemáticas

Quizás todas estas propuestas aparentemente dispersas podrían juntarse en una sola. De la misma forma que hay una propuesta del nuevo Gobierno de una comisión independiente que diseñe la TV pública del futuro, pienso que sería del mayor interés que algo parecido se haga con el sistema educativo en general (y no solo sobre los cambios inmediatos a realizar en la LOCE). Y si se piensa que es un ámbito de una importancia cuya incidencia escapa a nuestra incumbencia, sí quiero al menos hacer una propuesta concreta sobre las matemáticas.

Se trataría de crear una comisión independiente formada por lo que se suele llamar profesionales de 'reconocido prestigio' que con reposo pero en un plazo corto den unas recomendaciones sobre la mejora de la enseñanza de las matemáticas.

> *Las Propuestas se resumen en una: crear una comisión independiente formada por lo que se suele llamar profesionales de* reconocido prestigio *que con reposo pero en un plazo corto den unas recomendaciones sobre la mejora de la enseñanza de las matemáticas.*

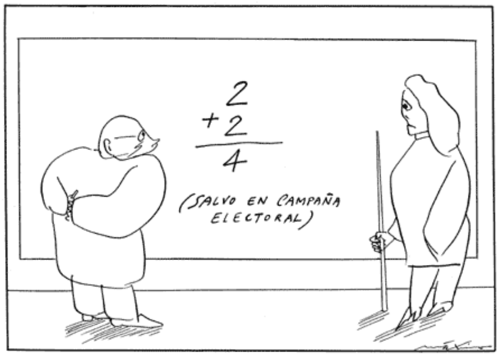
Comisión en la pienso que tendría que haber teóricos de la matemática y de la pedagogía junto con profesores de los niveles obligatorios; con planteamientos generales pero bien enraizada en la realidad de cada día.

La Comisión tendría que dar recomendaciones claras y no ambiguas, concisas y fácilmente entendibles por cualquier ciudadano, incluso aunque no sean de las que guste oír. Diciendo claramente que dar y como hacerlo y proporcionando cuantos ejemplos sean necesarios. Hay mucha información internacional reciente y contrastada (a la que se suma ahora la traducción castellana que acaba de publicar la Sociedad Thales de los Estándares de la NCTM). Sería estupendo que en esa línea de conexión con las preocupaciones sociales, fueran las autoridades quienes propusieran esa Comisión, pero si no lo hacen, pienso que de todas formas habría que llevarla a cabo. Y un ámbito adecuado son las asociaciones de los profesores de matemáticas.

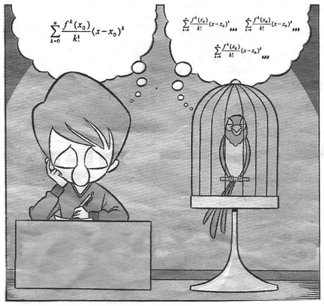
Así es que desde aquí lanzo la propuesta a la FESPM, que ya tiene mucho trabajo hecho en los diferentes informes reivindicativos y de protesta de los últimos años. Pero considero que debería dar pasos adelante para proponer reformas efectivas, claras y concisas. No solo protestar por los agravios a los que nos someten, sino dar un paso adelante y proponer el marco en el que queremos que se desarrollen las matemáticas en nuestro país. Tal vez estamos en uno de esos momentos que si dejamos pasar lo vamos a lamentar mucho tiempo.

Algo de humor

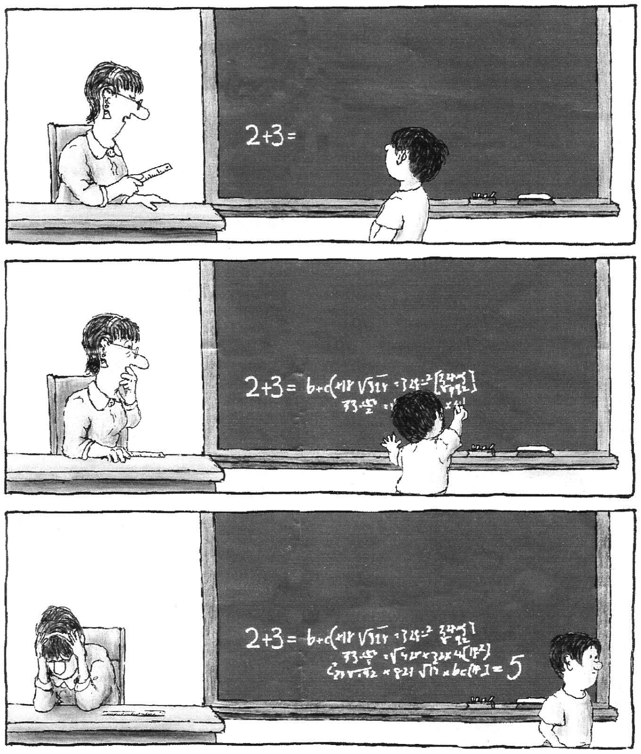
Y para afrontar la tarea con ánimo aportamos algunos ejemplos de humor de la prensa de los últimos tiempos. El primero es una variación del intemporal 2 + 2 = 4, el segundo de la labor (tal vez de repetición mecánica factible por un loro) que parece que realizan los estudiantes y el último en clave de complejidad de lo sencillo. ■



Máximo, aparecido en *El País* del 1/3/2004



Bernat Lliteras, *El País* de las Tentaciones del 5/3/2004



El Dominical de *La Vanguardia* del 28/12/2003

NOTAS

1 "Principes pour une réflexion sur les contenus d'enseignement (Rapport Bourdieu - Gros)". *Le Monde de l'Educatio"*, abril 1989

2 Se puede encontrar su formulación en www.forumeducacio.org o también en el número 35 de la revista *Uno*.

SUMA
Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las **MATEMÁTICAS**

Apartado de Correos 19012
28080-MADRID (España)
Fax: (+34) 911 912 879
Dirección: sumadireccion@fespm.org
Administración: suma_administracion@fespm.org

SUMA 46
Junio 2004, pp. 119-122

Experimentar para aprender

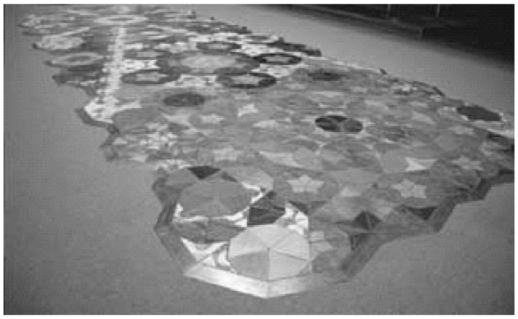
Los actuales centros de ciencias o centros de divulgación se orientan hacia la definición de un servicio público o privado diferenciado, en el marco de lo que se ha dado en llamar la educación informal, es decir, todo aquel conjunto de medios que aportan elementos formativos a la sociedad, al margen del sistema educativo. La actualización permanente de conocimientos y aptitudes es, sin duda, una necesidad implantada que se hace patente con claridad en el ámbito tecnológico, donde los cambios son constantes y de gran incidencia. Los centros de divulgación son los únicos espacios abiertos de uso ciudadano donde podemos acceder a unos conocimientos que inconscientemente estamos utilizando a diario.

UNIVERSUM (UNAM–México D.F.)

Desde esa perspectiva nació y se ha extendido un modelo nuevo de divulgación que da lugar a una nueva institución, heredera de los museos tradicionales, pero que ya no es un museo, aunque algunos de estos centros, como el Museu de la Ciencia de la Caixa de Barcelona o nuestro Museo Elder de la Ciencia y la Tecnología, mantengan aún esa palabra en su denominación.

A grandes rasgos, los centros de divulgación presentan dos grandes diferencias respecto a los museo tradicionales: la primera es el tratamiento de los contenidos; la segunda, las técnicas expositivas que se emplean.

Los contenidos de un centro de ciencia se elaboran para la comprensión de conceptos y no para la presentación de objetos. Las piezas del centro son utilizadas como medio para contar o exponer historias, ideas o conceptos, como instrumentos de comunicación, no como fines en sí mismas. Otro de los factores que distingue a los centros de divulgación es el carácter sincrónico de la información que presenta. Los contenidos son tratados normalmente bajo su aspecto intemporal. Se persigue con ello articular una muestra vigente, posicionándose como un establecimiento destinado a transmitir información.



Mosaico de Penrose (UNIVERSUM)

El segundo rasgo caracterizador de los nuevos centros de divulgación es, como decíamos, el uso de técnicas de exhibición diferenciadas; participativas e interactivas. Cada centro puede adoptar múltiples formas. No hay dos iguales. A pesar de ello, todos poseen esta característica común y singular que los diferencia del resto de instituciones museísticas clásicas.

Hace aproximadamente 30 años que empezaron a aplicarse con éxito estas nuevas formas de presentar las exhibiciones. Eran fórmulas más atrevidas y que, huyendo de los convencionalismos, lograban un mayor contacto con el público que acudía a visitar museos y exposiciones. Esta nueva tendencia dotó al visitante de un papel más activo, invitándole a dialogar con los objetos y elementos expuestos.

Jacinto Quevedo
museos.suma@fespm.org

Esta filosofía renovadora, que gozó de gran aceptación en algunos museos vanguardistas norteamericanos, insistió en el gran poder de comunicación que una exposición, tratada adecuadamente, posee. Y esto es así, en mayor medida, cuando se ofrece a los visitantes la posibilidad de participar activamente; es decir, cuando hay interactividad.

Las piezas expuestas, las unidades de comunicación del discurso del centro, son los llamados *módulos*. El contenido de un centro se distribuye en un número variable de módulos interactivos. Cada uno de ellos presenta un tema concreto, estructurando la información en dosis unívocas (un formato, una información) de forma más inteligible y asimilable. En su conjunto, el centro presenta un programa sólido y equilibrado de módulos, de lo contrario la existencia y la supervivencia del centro no sería posible.

Sala Temática (UNIVERSUM)

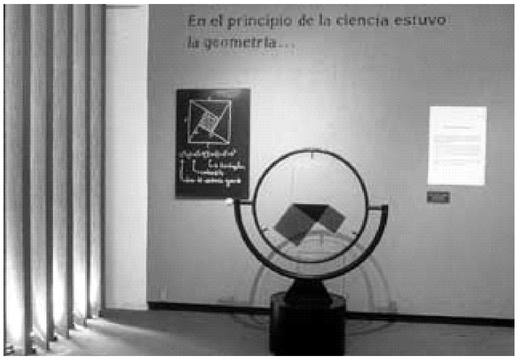
Cada módulo es un sistema de acción e interpretación donde se desarrolla un experimento, se explica una historia, un ensayo o una demostración, gobernado de forma asistida por el propio visitante, mediante la manipulación de pulsadores, botones, palancas, pantallas táctiles, interfaces, mecanismos u otros instrumentos de control. Su participación activa le proporciona una experiencia multisensorial, en la que sus sentidos interactúan con los objetos y los mecanismos del módulo. El manejo de variables y la posibilidad de llegar a conclusiones sobre los fenómenos experimentados son las bases de la dinámica de participación y aprendizaje que desarrolla un visitante en este tipo de centros.

Gaussianita III (UNIVERSUM)

Los módulos o unidades de información están constituidos por tres subsistemas: una experiencia o actividad visible por el visitante; un sistema oculto de asistencia al usuario para que la realización de la experiencia sea exitosa y, por último, un sistema gráfico que refuerza y amplía el mensaje de la experiencia, haciendo explicitos contenidos u orientando las conclusiones a extraer.

Como sistema de comunicación, cada módulo utiliza uno o varios recursos tecnológicos de diversa índole al mismo tiempo, desde los más simples ingenios mecánicos hasta los más complejos sistemas informáticos, pasando por los diferentes formatos que ofrece la tecnología audiovisual. Esto permite al visitante obtener una información vivencial singular, que no puede obtener por otros medios comunicativos tradicionales (libros, revistas, fotografías, etc.) o para los cuales precisa de elementos de uso no cotidiano, disponibles en el centro de divulgación (de los microscopios a los proyectores de alta luminosidad).

Es importante señalar, no obstante, que la aplicación de estos recursos nunca es gratuita, sino que responde a la voluntad de transmitir una determinada información y de hacerlo, claro está, de la forma más atractiva, cómoda y eficaz posible.



Teorema de Pitágoras (UNIVERSUM)

El diseño de los módulos debe provocar reacciones –debe interactuar– en los sentidos y en la inteligencia de los usuarios. Debe motivar a experimentar para aprender. Debe generar, en suma, una estrategia, por decirlo en términos pedagógicos, de aprendizaje significativo. Y debe, antes que nada, incitar a la participación: sea por el interés del tema tratado, sea por la novedad del mismo, sea por el atractivo formal del propio módulo.

Provocar la curiosidad, estimular la atención, despertar el interés por el mundo que nos rodea y por las leyes que lo regulan, son las finalidades que nos hemos propuesto en los centros de ciencia. Es por ello que las experiencias se presentan muchas veces bajo forma de juego, casi de diversión, algunas veces extraña o caprichosa, otras veces emocionante, y otras solamente elegante y estética.

Los procesos cognitivos, para ser eficaces, necesitan de dos componentes fundamentales, el intelectual y el emotivo. Sin olvidar el primero, hemos tratado de reforzar el segundo, muchas veces olvidada en nuestro sistema educativo tradicional. Nuestros pensamientos se generan más por emociones e impresiones sensoriales, que hacen aparecer imágenes, que por palabras y conceptos. Por ello nos parece importante estimular maravillando, sin dejar de prestar atención al rigor (no mortis) científico.

Sala de matemáticas del UNIVERSUM (México D.F.)

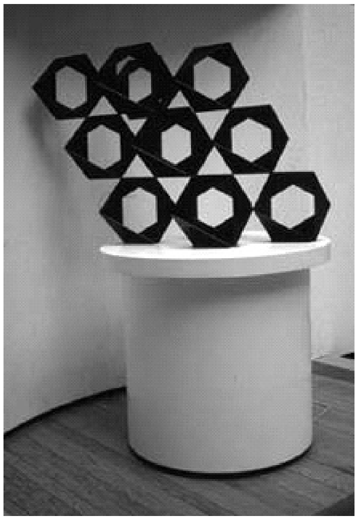
En la sala Matemáticas del UNIVERSUM podrás acercarte a una cara distinta de esta ciencia.

Aquí, las matemáticas te invitan a reírte de tu imagen reflejada en espejos curvos, a viajar por un espacio infinito o a mirarte en un caleidoscopio.

En esta sala descubrirás que las matemáticas no son aburridas, ni cosa de genios, todos podemos disfrutarlas. Para entrar al mundo de las matemáticas necesitas un boleto especial: tu imaginación.

Las matemáticas conforman, hoy en día, un fantástico y complejo sistema de variadas y extensas disciplinas; UNIVERSUM nos presenta una muestra de ello e intenta hacer de esta rama del conocimiento algo accesible, útil, bello y, sobre todo, agradable.

Los visitantes podrán emprender un viaje que los lleve a conocer mucho de lo que son las matemáticas, a descubrir su belleza, su amplitud y su diversidad.



Doce acróbatas

Distribución de la sala de matemáticas

La sala Matemáticas de UNIVERSUM está conformada por distintas secciones, entre ellas destacan las siguientes:

Geometría clásica, que presenta nociones básicas de la geometría a la vez que conceptos totalmente nuevos para muchos de los visitantes; es sorprendente, por ejemplo, poder asomarse a un espacio infinito mirando a través de una de las ventanas del *espacio euclidiano*.

Caleidoscopio platónico I (UNIVERSUM)

Probabilidad, en la que con equipos divertidos se construye la curva de distribución y se explica cómo es que aquello que aparentemente no se puede predecir, tiene un comportamiento susceptible de describirse en términos matemáticos.

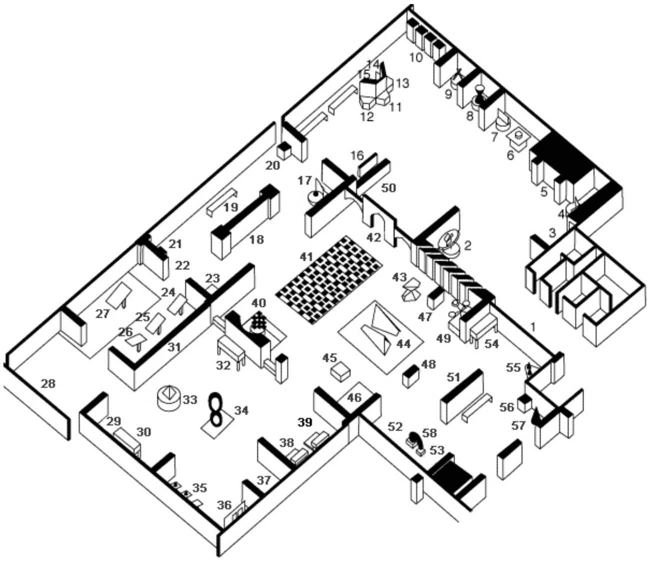
Topología, en la que objetos como la *Banda de Möbius* pueden recorrerse con las manos.

Galería de números, en donde se presentan las distintas propiedades y relaciones de éstos y los distintos tamaños de los conjuntos de números.

Caleidoscopios, en la que se puede jugar con distintos patrones y ver que donde uno nunca pensó que hubiera matemáticas, en efecto, las hay.

Caos y fractales, en la que formas complejas como la de un paisaje montañoso adquieren significados matemáticos.

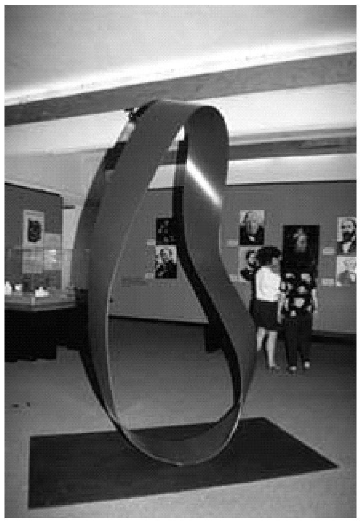
Lo que encontrarás en la sala Matemáticas es sólo una muestra de la inmensa variedad de temas que estudian los matemáticos, y aunque pudieran parecer muy distintos entre sí, están ligados unos con otros; todos ellos conforman las matemáticas modernas.



Plano sala de matemáticas (UNIVERSUM – México D.F.)

Relación de módulos (UNIVERSUM)

1. Mural de grecas
2. Teorema de Pitágoras
3. Espejos paralelos
4. Ángulo de espejos
5. Espacio infinito
6. Secciones cónicas
7. Cono de luz
8. Hiperboloide de ligas
9. El increíble
10. Espejos: parabólico, elíptico, mixto y cóncavo
11. Método del jardinero para la hipérbola
12. Método del jardinero para la elipse
13. Método del jardinero para la parábola
14. Caleidoscopios clásicos para adultos
15. Caleidoscopios clásicos para niños
16. Tiro parabólico
17. Péndulo con imanes
18. Fotomural del conjunto de Mandelbrot
19. Fractales
20. Viaje por el conjunto de Mandelbrot
21. Construye tu propio fractal
22. Construye curvas de Peano
23. Retroalimentación Visual
24. Gaussianita I
25. Gaussianita II
26. Gaussianita III
27. Distribución Gaussiana
28. Triángulo de Pascal
29. Modulador de frecuencia de voz
30. Simulador de ondas
31. Historia de las matemáticas
32. Vitrina de objetos topológicos
33. Toro de siete colores
34. Banda de Möbius
35. Plano, esfera y pseudoesfera
36. Tablero de dimensiones
37. Geometría proyectiva
38. Superficies de revolución
39. Superficies mínimas
40. Doce acróbatas
41. Mosaico de Penrose
42. Mural de la Alhambra
43. Caleidoscopio platónico I
44. Radioscopio
45. Caleidoscopio platónico II
46. Videocaleidoscopio
47. Rotaciones del cubo
48. Rotaciones del icosaedro
49. Sólidos platónicos I
50. Sólidos platónicos II
51. Mural de números
52. Galería de números
53. Más reales que enteros
54. Curvas de ancho constante
55. Torres de Hanoi
56. Torres de diamante
57. Torres de Hanoi gigantes
58. Nautilus



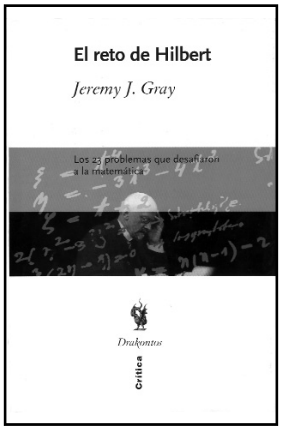
Banda de Möbius (UNIVERSUM)

REFERENCIA WEB

http://www.universum.unam.mx/

SUMA 46
Junio 2004, pp. 123-127

Hilbert, Contando el Espacio y Laplace



El reto de Hilbert:
Los 23 problemas que desafiaron a la matemática.
Jeremy J. Gray
Editorial Crítica
Barcelona 2003
ISBN 84-8432-465-6
320 páginas

En el preámbulo de su conferencia en el Congreso Internacional de Matemáticas de 1900 en Paris, Hilbert escribía lo siguiente:

> Un viejo matemático francés decía: «No puede considerarse completa una teoría matemática hasta que no se haya hecho tan clara que se pueda explicar al primer hombre que encontremos por la calle». Esta claridad y facilidad de comprensión en la que aquí se insiste para una teoría matemática, yo la pediría aún más para un problema matemático si quiere ser perfecto; pues lo que es claro y fácilmente comprensible nos atrae, y lo complicado nos repele.
>
> Más aún, un problema matemático debería ser difícil para que nos atraiga, aunque no completamente inaccesible, no sea que frustre nuestros esfuerzos. Debería ser para nosotros una señal indicadora en los tortuosos senderos hacia las verdades ocultas, que finalmente nos recompensan con el placer de una solución satisfactoria. (p. 264)

Parece que en vez del paladín de la matemática axiomática nos esté hablando un apasionado defensor de la resolución de problemas. Para Hilbert estaba claro el papel que juegan los problemas tanto en el desarrollo de las matemáticas como en la tarea de los investigadores. La abundancia de buenos problemas es síntoma de vitalidad y Hilbert no sólo muestra que había en ese momento una amplia panoplia de problemas pendientes sino que estaba profundamente convencido de que el suministro de problemas en las matemáticas es inagotable pues en cuanto se resuelve un problema inmediatamente surgen nuevas preguntas que responder.

Para juzgar el contenido del interesantísimo libro de Gray, que nos presenta la colección Drakontos dirigida José Manuel Sánchez Ron, es importante tener en cuenta que en su conferencia, Hilbert era plenamente consciente de que la importancia de un problema es muy difícil de juzgar a priori, y que sólo gracias a su repercusión en los desarrollos posteriores de las matemáticas sería posible valorar su calado. Precisamente éste es el principal propósito que persigue el autor a lo largo de El reto de Hilbert, pero no el único. En efecto, también muestra a lo largo de sus páginas cómo se desarrolló la carrera científica de Hilbert y de muchos de los que intentaron resolver a lo largo del siglo XX, tanto si lo consiguieron como si no, los 23 problemas.

Julio Sancho

En la primera parte del libro se describe la etapa de formación y los primeros años de la carrera científica de Hilbert, así como el telón de fondo matemático sobre el que escribe su conferencia de 1900. Todo este panorama, tanto de intereses personales como del colectivo de los investigadores, explica la relevancia que tenían los problemas escogidos y el estado de las matemáticas a principios del siglo.

Hilbert (hacia 1900)

Aunque su conferencia parece que no fue recibida con un gran entusiasmo por los asistentes al congreso, pronto se hizo evidente que los Problemas de Hilbert resultaban muy atractivos para la comunidad de investigadores. Las razones para ello son variadas y Gray muestra que no sólo dependen de la bondad de los propios problemas sino también de otros factores como son, por ejemplo, el prestigio científico del propio Hilbert y del Instituto Matemático de Göttingen en el que desarrollaba su labor, su accesibilidad personal o su habilidad para rodearse de estudiantes capaces a los que imbuyó en sus ideas y a los que sugería líneas de trabajo. Como consecuencia de todos estos factores y de la opinión general que se fue desarrollando sobre los Problemas, inmediatamente se empezaron a producir avances en bastantes de ellos. Todo este panorama es el que se muestra en la segunda parte del libro que corresponde al periodo que va de 1900 al final de la I Gran Guerra Mundial.

En el periodo entreguerras dos acontecimientos decisivos marcarán el progreso de las matemáticas: la aparición de la nueva Mecánica Cuántica y la Crisis de los Fundamentos. En unos pocos años de la década de los veinte los jóvenes físicos de Göttingen empezaron a desarrollar una nueva visión de los procesos físicos para la que las matemáticas elaboradas por Hilbert y sus alumnos (por ejemplo en los Métodos de la Física Matemática de Courant y Hilbert), resultaban de una gran ayuda. Esto hizo que aumentase su prestigio entre ellos, aunque en aquellos momentos todavía careciesen de una comprensión de los fundamentos que permitiese el intento de axiomatizar la física que pedía Hilbert en su 6º Problema. En los mismos años en que empezó el desarrollo de la Mecánica Cuántica el interés y las energías de Hilbert se fueron concentrando sobre los problemas de Fundamentos de las Matemáticas. Su 2º Problema ya proponía asentar la aritmética sobre unas bases axiomáticas indiscutibles pero en los años veinte sus pretensiones se habían hecho mucho más exigentes y creía que había que dar respuesta adecuada a diversos problemas epistemológicos: la resolubilidad de cualquier cuestión matemática, la verificabilidad de los resultados matemáticos, la existencia de criterios para juzgar la simplicidad de las demostraciones, la relación entre formalismo y contenido y el problema de la posibilidad de decisión de las cuestiones matemáticas en un número finito de pasos. En definitiva todo un programa de fundamentación para las matemáticas. En este contexto estalló la crisis del intuicionismo de Brower y se produjo la gran expansión de la lógica gracias a los resultados de Gödel, aspectos que son tratados con cierto detalle en esta tercera parte del libro en el que además se analizan los problemas de Hilbert que fueron atacados con éxito entre las dos grandes guerras.

En la primera parte del libro se describe la etapa de formación y los primeros años de la carrera científica de Hilbert, así como el telón de fondo matemático sobre el que escribe su conferencia de 1900.

El final de la Segunda Guerra Mundial, el inicio de la guerra fría, de la carrera espacial, fue un buen momento para la matemática aplicada gracias a los contactos con el ejército y la industria. Poco a poco se fue entrando en una época de austeridad, reforzada por una toma de posición política de muchos de los profesionales a los que repugnaba la colaboración con los militares. Así, en la segunda mitad del siglo XX la lucha por la hegemonía en las matemáticas se fue decantando hacia el campo de las matemáticas puras, aunque en los últimos años del siglo el signo ha ido cambiando poco a poco. Como Hilbert en su conferencia, los matemáticos eran conscientes de la inspiración que proporciona el mundo de los fenómenos externos en la proposición de los problemas a las matemáticas, pero estaban mucho más de acuerdo con la otra postura que también había defendido:

…la mente humana, animada por los éxitos de sus soluciones, se hace consciente de su independencia. Por medio de combinación lógica, generalización, especialización, separando y recogiendo ideas de manera afortunada –a menudo sin influencia apreciable del exterior– desarrolla nuevos y fructíferos problemas por sí misma, y entonces es ella misma la que aparece como interrogador real. (p. 266)

Para leer El reto de Hilbert hace falta saber matemáticas, y no pocas, pero ese no es un demérito del libro: no en balde el autor habla de gran parte de las matemáticas más avanzadas que se han hecho en los últimos tiempos.

Bourbaki, que se reclama hilbertiano, es la figura paradigmática de esta época al asumir que el método formalista y axiomático no sólo es muy productivo en matemáticas sino que además trae claridad al conocimiento matemático. En la cuarta parte del libro Gray dedica un amplio espacio a reflexionar sobre la manera de ver las matemáticas de Bourbaki, en el que matiza algunas de las ideas preconcebidas que circulan al respecto. Por ejemplo, cuando destaca que Bourbaki prefiere los argumentos que explican a los que se limitan a demostrar, es decir resalta la importancia que tiene el proceso de descubrimiento y la forma en que los nuevos resultados encajan y dan sentido a los conocimientos anteriores y es ahí donde encaja la formulación axiomática como facilitadora de todo ese proceso.

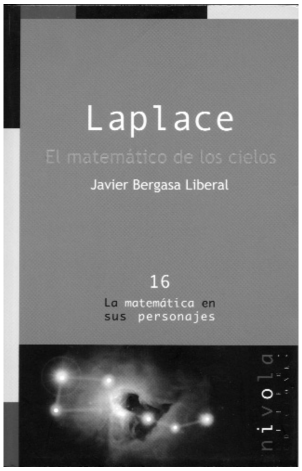
Finaliza este cuarto apartado con un repaso a los últimos logros en la resolución de los Problemas de Hilbert, antes de terminar el libro con la traducción integra de la conferencia de Hilbert en Paris. Casi sólo por este último habría que destacar esta publicación ya que pone a disposición del público de habla hispana en general y más particularmente, a los interesados en las matemáticas que no dominamos el inglés (y mucho menos el alemán) un texto básico para entender el desarrollo de las matemáticas en el último siglo.

El texto de Hilbert que he citado al inicio de esta reseña giraba en torno a la idea de la claridad. Claro que Hilbert se estaba dirigiendo a un público formado matemáticamente y para él la conferencia, sin duda, tuvo que resultar diáfana. Creo, sin embargo, que el objetivo marcado de que puedan ser explicadas a gente corriente está lejos de ser alcanzado. Cada vez que leo un libro de divulgación matemática acabo con las mismas sensaciones: inicialmente el esfuerzo del autor por hacerse entender lo consigue conmigo, pero luego siempre hay un momento en que empiezan las dudas, que se hace preciso volver atrás, que echo en falta más detalles, en definitiva, que no hallo esa iluminación que me permita dar un paso importante en la comprensión del tema. Con este libro me ha pasado lo mismo, probablemente debido a limitaciones mías que, al fin y al cabo, hace tiempo que dejé de dedicarme a estudiar matemáticas y que nunca he sabido demasiado de alguna de sus ramas.

Para leer *El reto de Hilbert* hace falta saber matemáticas, y no pocas, pero ese no es un demérito del libro: no en balde el autor habla de gran parte de las matemáticas más avanzadas que se han hecho en los últimos tiempos. No es la obra definitiva sobre el tema, aunque otros autores tendrán que esforzarse mucho para mejorarla. Pero es preciso que ese esfuerzo se siga haciendo para que los conocimientos que se van adquiriendo con las matemáticas se sientan como propios por toda la humanidad; para que la gente vea que el esfuerzo humano y económico que exige el desarrollo de las matemáticas no es sólo un lujo que se les permite a unos pocos; para que siga habiendo jóvenes estudiantes a los que les seduzca incorporarse al esfuerzo de resolver nuevos problemas y para que los que nos atrae el desafío matemático podamos acercarnos a la comprensión de los últimos logros alcanzados.

Un problema matemático debería ser difícil para que nos atraiga, aunque no completamente inaccesible, no sea que frustre nuestros esfuerzos.

Para terminar creo que debo comentar un par de aspectos del libro que no me han gustado. Me refiero a la traducción o mas bien al castellano empleado por el traductor que a mi entender esta lleno de errores que, volviendo a la cita inicial, oscurecen el texto y por tanto dificultan la comprensión de su contenido que, de por sí, ya es bastante difícil. Por otra parte, el autor incluye unos cuadros explicativos de alguno de los temas matemáticos de los que trata en el tema principal que creo que no han sido tratados adecuadamente por el editor. En la composición del libro se ha optado por evitar que dichos cuadros queden partidos entre dos páginas y ello les ha llevado, en más de una ocasión, a que los aspectos a los que se refiere alguno de los cuadros se traten muy alejados de la página en las que se citan. Esto, dificulta la lectura y hace que el valor aclaratorio de los cuadros quede limitado. Son dos aspectos críticos con los que no deseo desmerecer la obra que en cualquier caso es digna de atención por todo el que desee ver la influencia de este pequeño texto en el desarrollo de las matemáticas en el pasado siglo. ■



LAPLACE. EL MATEMÁTICO DE LOS CIELOS.
Javier Bergasa
Nivola
Madrid, 2003
ISBN 84-95599-63-5
222 páginas

Según se encargaba de señalar Borges, a todas las personas les toca vivir tiempos difíciles. Pero remedando a otro escritor, Orwell, que estuvo por estas tierras y de quien este año se cumple el centenario, a algunos les tocan tiempos más difíciles que a otros. Y entre los últimos están todos los que tuvieron que navegar por los procelosos años que transcurren entre la Revolución Francesa y la vuelta de los Borbones, que incluye el imperio napoleónico, con sus verdades oficiales cambiantes y sus núcleos de poder poco permanentes e inestables. Un tiempo que cambió hasta la base de la unidad de medida (con la definición de metro) y la forma de medirlo (con el efímero calendario republicano), labores ambas en las que estuvo involucrado el personaje objeto del libro que comentamos.

Porque toda la modernidad tiene un importante punto de inflexión en 1789, y lo mismo pasa con la ciencia en general y la matemática en particular. De forma que no es casual que varios de los libros de la colección que acoge el de Javier Bergasa estén dedicados a personajes relacionados con esa época (como Legendre, Monge, Lagrange, y, en parte, Galois), ya que en ese tiempo se dieron cita en Francia una constelación de sabios que se vieron implicados no sólo en las ya por sí difíciles gestiones de supervivencia y ascenso en el mundo científico, sino además en las inestables relaciones sociales, teniendo que conseguir la adscripción al bando vencedor en cada momento (o al menos no del perdedor), imprescindible en periodos de guillotina fácil. Y así sucedió que alguno de los importantes se perdió en el camino, como Condorcet, que se suicidó antes de pasar por la *máquina*.

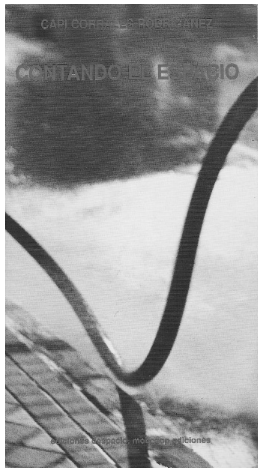
Lo cierto es que Laplace (1749-1827) fue logrando sobrevivir sin pasar inadvertido, puesto que si ya tenía una posición antes de 1789, llegó a ministro de Interior y fue senador con Napoleón y el Borbón restaurado le nombró marqués. No cabe duda que es todo un alarde de adaptación o de camaleonismo, lo que hace que, como se recoge en el libro, su actitud se asociara a la del vicario de Bray, que en los tiempos de cambios de religión en la Inglaterra de Enrique VIII fue dos veces papista y otras dos protestante y ante las acusaciones de oportunismo replicó: *No es así en absoluto, puesto que si bien cambié de religión, estoy seguro de haber permanecido fiel a mi principio de qué es vivir y morir como vicario de Bray.*

Laplace no sólo se ocupó de mantener la aguja de marear marcando buen rumbo, sino que no dejó de hacer ciencia punta, sobre todo en astronomía, pero también en el desarrollo de la probabilidad. Y, a la vez, por si todo eso fuera poco, una gran labor como pedagogo y como divulgador de alto nivel, formando un grupo de presión con otros científicos de otras áreas, como Berthollet o Gay Lussac, lo que da idea de la capacidad intelectual del personaje.

Javier Bergasa nos desgrana la vida y la obra de Laplace con una pluma ágil, que da lugar a un recorrido ameno y documentado por los acontecimientos sociales, políticos y científicos de la época. Y además, consecuencia de su dominio del tema, nos presenta de forma rigurosa y comprensible lo fundamental de su obra matemática. Salva de forma brillante el difícil compromiso entre la divulgación *novelesca* y la puesta al alcance del lector de unos resultados matemáticos complicados, permitiendo una lectura placentera y provechosa para quien no quiera verse enredado en complejos razonamientos científicos, en paralelo con una excelente vulgarización de los logros de Laplace para los que estén más interesados en ellos.

Es un destacado eslabón más en la excelente trayectoria de la colección 'La matemática en sus personajes' de la editorial Nivola que ha venido a llenar una laguna en la literatura científica de nuestro país. ■

Fernando Corbalán



CONTANDO EL ESPACIO
Capi Corrales
Ediciones despacio.mobcoop ediciones.
Madrid, 2000
ISBN 84-607-1524-8
144 páginas

Para quienes gustan de las matemáticas (se supone que todos los lectores de SUMA) y del arte (también una cantidad apreciable de los mismos) este libro ofrece un recorrido paralelo de ambos aspectos de la actividad humana desde el siglo XVI hasta nuestros días.

Recorrido que es profundo en ambos ámbitos (en el sentido de que proporciona reflexiones y puntos de vista no habituales: esos en los que se logra, como decía Koestler, que 2 y 2 sean 5, como plasmación sintética de la creatividad), pero a la vez, puesto que no son contradictorios, ágil, dinámico y de lectura apasionante. Yo lo encontré por azar en una librería de Madrid y esa misma noche casi lo terminé en un viaje en autobús, a pesar de unas condiciones poco favorables (derivadas sobre todo de una iluminación francamente deficiente).

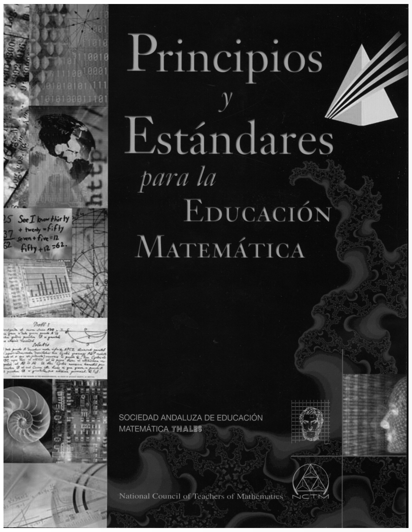
Pero es que el recorrido intelectual superpuesto al desplazamiento físico era de primer orden, porque me llevaba por el territorio de Velázquez, Goya, Kandisnsky, los expresionistas, Mondrian, los cubista y Picasso en particular, en paralelo a Riemann o Poincaré, Cantor, Dedekind o Hausdorff. Lo que implica que se aborden movimientos pictóricos complejos y desarrollos matemáticos no obvios, que terminan en una entendible explicación de la demostración de Wiles del último teorema de Fermat, la mejor de las varias que yo he visto a nivel divulgativo.

Por esos misterios de la edición y la distribución en nuestro país (uno de los que más libros editan en el mundo, sin ninguna correlación con el número de lectores y de obras vendidas) el libro que reseñamos no es fácil de encontrar en las librerías. Y en ese sentido se explica que esta reseña dedicada a libros recientes aparezca casi cuatro años después de su publicación, pero en cuyo transcurso no ha encontrado acomodo en estas páginas.... quiero creer que porque no ha llegado a los encargados de esta sección, porque lo cierto es que es uno de los libros más sugerentes que han caído en mis manos en mucho tiempo. Y que puestos a buscar alguna pega (achacándolo de nuevo a los insondables designios del mercado) solo habría que señalar que se merecía una edición más *lujosa*, con un tamaño un poco mayor que permitiera ilustraciones de gran formato y con fotos en color para disfrutar también con la vista las virtudes de las ilustraciones. ¿A qué espera alguna editorial (y perfectamente puede ser una institucional) a hacer una edición como se merece?

Quizás sería conveniente dar ahora siquiera unas líneas generales del contenido del libro, tanto en el apartado pictórico como matemático. Pero aparte de que exigiría muchas precisiones y a pesar de todo seguiría siendo demasiado poco explícito, considero que siempre es bueno, y más es estos tiempos de marketing, mantener un poco de misterio sobre los contenidos, que exciten el deseo de conocerlo. Yo desde luego, y a pesar como digo de que su presentación es mejorable, no tengo ningún reparo en remedar un famoso anuncio de hace unos años: Búsquelo y encuéntrelo, ¡seguro que lo disfrutará! Si como decía Gropius, el arquitecto de la Bauhaus, *el ser humano viene al mundo con dos ojos, pero sólo tras paciente enseñanza aprende a ver*, después de transitar por este libro todo se ve de otra manera. ■

Fernando Corbalán

Libros recibidos



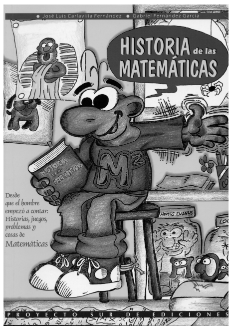
Principios y estándares para la educación matemática.
National Council of teachers of Mathematics
M. Fernández (traductor)
Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
Granada, 2004
ISBN 84-933040-3-4
412 páginas

Pedidos a:

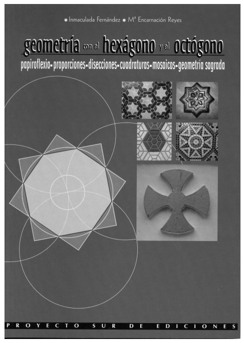
SAEM THALES. **Centro de Documentación**
Departamento de Matemáticas
CASEM
Campus del Río San Pedro
Universidad de Cádiz
11510 Puerto Real

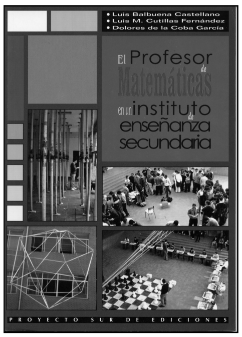
Tfno y FAX: 956016050
Email: *thales.matematicas@uca.es*

Historia de las Matemáticas.
J.L. Carlavilla y G. Fernández
Proyecto Sur de Ediciones
Granada 2004
ISBN 84-8254-276-1
350 páginas

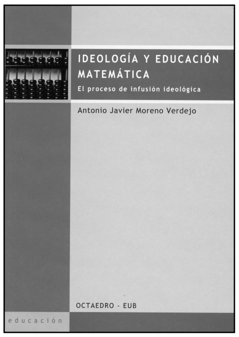


Geometría con el hexágono y el octógono.
I. Fernández y M.ª E. Reyes
Granada, 2004
ISBN 84-8254-291-5
152 páginas





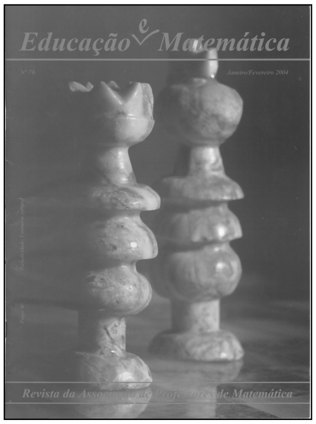
El profesor de matemáticas en un Instituto de Enseñanza Secundaria.
L. Balbuena, L.M. Cutillas y D. de la Coba
Proyecto Sur de Ediciones
Granada, 2004
ISBN 84-8254-290-7
158 páginas



Ideología y Educación Matemática.
A.J. Moreno Verdejo
Octaedro-EUB
Barcelona, 2004
ISBN 84-8063-6424-4
176 páginas

SUMA 46
Junio 2004, pp. 129-132

Educação e Matemática, revista de la Associação de Professores de Matemática de Portugal



Título: **Educação e Matemática**
Edita: *Associação de Professores de Matemática*
Periodicidad: ***cinco números al año (En/Feb, Mar/Abr, May/Jun, Sep/Oct y Nov/Dic)***
Lengua: ***portugués***
Dirección: ***Rua Dr. João Couto, nº27 - A***
1500 – 236 Lisboa
Portugal
Página web: ***http://www.apm.pt/***
Número comentado: ***76, Jan/Fev 2004***
ISSN: ***0871-7222***

La Associação de Professores de Matemática (APM) portuguesa, como nuestra Federación, es una agrupación de profesionales de la enseñanza de las Matemáticas que desarrollan su actividad en los diferentes niveles educativos, cuyos objetivos son completamente coincidentes con los nuestros y cuya historia se remonta al año 1986. Mantienen dos publicaciones periódicas, *Quadrante* y *Educação e Matemática.* En la primera se dedica a diferentes aspectos relacionados con la investigación en educación matemática, mientras que la segunda tiene un carácter menos especializado y está orientada sobre todo a los aspectos prácticos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. A la última voy a dedicar el comentario de este número.

Para hacerse una idea de los propósitos de *Educação e Matemática (EeM)* basta leer el breve texto que aparece en la última página del número 76 de la revista titulado *Estatuto Editorial* en el que se definen los principales objetivos de la misma. Son estos:

- Promover el intercambio de ideas y experiencias entre profesores;
- Estimular la reflexión sobre los problemas y desafíos de la educación matemáticas;
- Discutir temas actuales e importantes de educación matemática y de educación en general;
- Dotar de elementos de trabajo para el día a día;
- Divulgar información relevante para los profesores.

Como puede observarse no precisan de ningún comentario adicional.

Aparecen cinco números cada año –de 48 páginas en formato A4– uno de los cuales es monográfico. Tanto la portada como las páginas interiores son de papel brillante y usan dos colores. Por ejemplo en el número que comento los títulos de artículos, fondos o recuadros van en azul, mientras que el texto –compuesto a tres columnas– es en negro. El diseño es sobrio y eficaz, lo que facilita la lectura, la realización de las figuras, cuadros y esquemas es muy bueno, así como el material fotográfico y mantiene una coherencia de estilo a lo largo

> *La* Associação de Professores de Matemática (APM) *es una agrupación cuyos objetivos son completamente coincidentes con los de nuestra Federación.*

Julio Sancho Rocher
hemeroteca.suma@fespm.org

de todo el número que deja una buena impresión de profesionalidad en quien la hojea. En resumen, desde el punto de vista de la realización material es una gran revista de la que hay mucho que aprender.

Todos los números se inician con un editorial que ocupa la primera página. *A pesar de todo...* es el título que corresponde a este número de la revista, y en él se hace un llamamiento a los socios de la APM a superar el ambiente de desmotivación, de ausencia de debate y participación que se extiende por los centros, reconociendo en la asociación y en sus actividades un valor que permite a las diferentes opiniones y puntos de vista compartir el gusto por las matemáticas, por la enseñanza de éstas, mantenerse activos y deseosos de mejoras, de romper rutinas, etc.

El núcleo central de la revista lo constituyen los artículos en los que destaca, además de su temática, su brevedad: casi todos de 2 a 4 páginas. Por los números que he podido consultar, la longitud de los artículos no impide que éstos tengan interés, más bien todo lo contrario. El esfuerzo de los autores por resumir sus ideas se agradece pues en el texto quedan las importantes, las que son útiles para hacerse idea de las experiencias descritas y que permiten ser traspasadas al aula del lector. Esto no sólo ocurre con los artículos de experiencias o propuestas para la clase sino que también es así cuando contiene algún tipo de reflexión didáctica o se refiere a la introducción de contenidos matemáticos. De forma complementaria a algunos artículos se publican *Materiais para a aula de Matemática*. Éstos constituyen una o varias páginas centrales de la revista en las que se reproducen hojas de trabajo preparadas para ser fotocopiadas directamente y que están relacionadas con alguno de los artículos que aparecen en la revista o han sido presentados en números anteriores. En este número se publica un artículo sobre un juego destinado a favorecer la comprensión del significado de las cifras decimales y su representación en la recta (*Um jogo na aula de matemática*) y como material para el aula se presenta una hoja de trabajo que contiene la descripción del juego, del material necesario para jugarlo, sus reglas y la hoja para el registro de las jugadas.

> *El núcleo central de la revista lo constituyen los artículos en los que destaca, además de su temática, su brevedad: casi todos de 2 a 4 páginas.*

La APM dedica cada año a un tema que es el centro de sus actividades de formación, reuniones científicas, publicaciones y de sus concursos. En años pasados los temas escogidos han sido de indudable interés –*Matemáticas y profesiones* (2002), *Matemáticas y tecnología* (2003)–, no siéndolo menos el de este año que es *Juego y Matemática*. Esto tiene su lógico reflejo en la revista: se dedica en este número, y se pretende hacerlo a lo largo de todo el año, un espacio especial a aportaciones relacionadas con el tema, y desde su redacción se anima a los socios a presentar experiencias e ideas que muestren cómo han llevado los juegos al aula de Matemáticas y con qué resultados. En el número 76, que es el primero del año, hay una breve introducción a esta sección especial, varios artículos relacionados con el tema (*Um jogo na aula de matemática; Ouri, um Jogo Mancala; HEX; Teoria de Jogos: Apresentação e Representação)* e incluso se incluye como encarte un tablero para el juego del HEX que es uno de los tratados en los artículos.

> *La APM dedica cada año a un tema que es el centro de sus actividades de formación, reuniones científicas, publicaciones y de sus concursos. El de este año es* Juego y Matemática.

Inicialmente hubo algo que me sorprendió en esta revista, aunque mi experiencia previa me hizo reconsiderar ese asombro y lo trasformó en un pequeño desengaño. No un desengaño con la revista, sino con nosotros y nuestra actitud. Me explicaré: con motivo del año 2000 en una reunión conjunta de sociedades matemáticas hispano lusas en la que participamos la APM y la FESPM fui testigo de como nuestros compañeros portugueses hicieron un gran esfuerzo para hacerse entender usando esa aproximación al castellano que ha dado en llamarse *portuñol*. Nuestra actitud no fue recíproca. Me pregunto si la cosa va más allá del pudor por lo mal que se nos dan las lenguas y esta forma de actuar encierra un equivocado complejo de superioridad. La lectura de *Educação e Matemática* me ha reafirmado en esas sensaciones. Quizá me equivoque, pero en los ocho años que he codirigido SUMA no recuerdo muchas citas de autores portugueses, referencias bibliográficas, etc., en nuestras páginas. En el número que nos ocupa, y probablemente olvide algo, se cita como autoridad al recientemente fallecido Miguel de Guzmán en la presentación del tema del año, aparece citada Julia Centeno en un artículo sobre la dificultad de comprensión de los decimales, varias de las referencias bibliográficas sobre teoría de juegos están en castellano, uno de los artículos de más fuste de la revista está escrito por un socio de la FESPM (*Matemática escolar e conhecimento do meio. Construindo matemática a*

Figura 1. Página principal en www.apm.pt

partir do corpo humano, de Luis. C. Cachafeiro), en los páginas recomendadas de Internet figura la del Museu Matemàtic, o la del Proyecto Descartes… Creo que se impone una cura de humildad importante, que debería traducirse en el deseo de conocer también nosotros lo que se publica a ese lado de nuestras fronteras. No nos solemos privar de citar a autores francófonos o anglosajones, de usar y traducir materiales elaborados en Francia, Inglaterra, USA… Pues tampoco deberíamos ignorar lo que se produce en Portugal, con la ventaja además de que se trata de un idioma más cercano al nuestro que con poco esfuerzo podemos entender.

Además de los artículos la revista cuenta con una serie de colaboradores y secciones que no aparecen en todos los números pero que por su propio título dan idea de su contenido:

- Matemática
- Tecnologías na Educação Matemática
- O problema deste número
- A matemática nos primeros anos
- História e Ensino da Matemática
- Educação
- Actualidades
- Pontos de vista, reacções e ideias…
- Vamos jogar

La página web de la APM (*www.apm.pt*) me ha parecido, desde el punto de vista estético y también de accesibilidad, muy bien diseñada. En ella se tiene información suficiente sobre las diversas actividades de la asociación, acceso a recursos diversos entre los que se encuentra la propia *Educação e Matemática*. Desde la página de acceso (Figura 1) se pasa a la de Entrada (Figura 2) en la que aparecen enlaces a las diferentes secciones. El que hace referencia a la revista nos dirige a un listado de los números de las revistas (Figura 3) que a su vez nos dirigen a los respectivos índices. De cada número de la revista es posible descargar en formato PDF alguno de sus contenidos, como por ejemplo los materiales para el aula, las secciones de opinión, problemas, etc. En este número en particular pueden descargarse todos los artículos correspondientes a la sección sobre Juego y Matemáticas (un total de 18 pp.).

Es posible descargar desde la web un formulario para inscribirse en la APM, lo que da derecho a la suscripción a la revista. Para los socios no residentes en Portugal el precio anual es de 47,70 € que pueden pagarse mediante tarjeta de crédito. A la suscripción puede añadirse la de *Quadrante*, la revista de investigación. Para mi no cabe duda de que *Educação e Matemática* es un recurso importante que debería estar accesible al profesorado en general por lo menos desde las bibliotecas de los Centros de Profesores y Recursos. ■

Figura 2. Actividades de la APM y enlaces con su revista

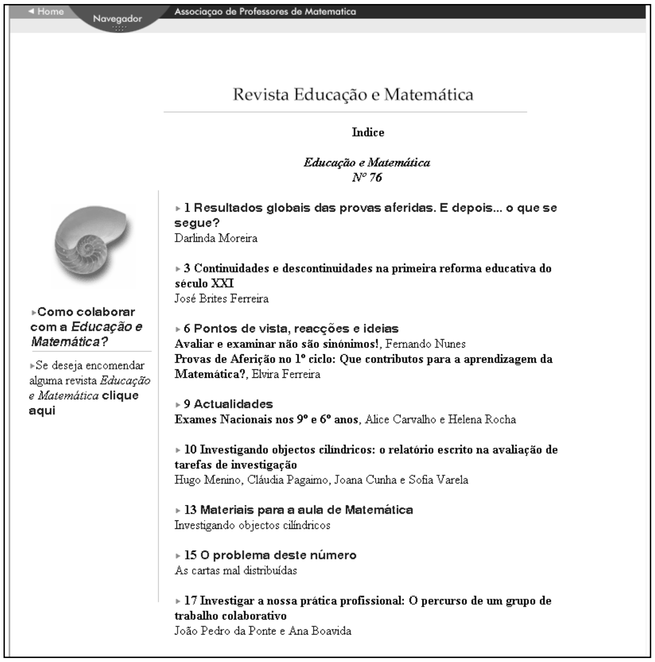


Figura 3. Página principal de la revista *Educação e Matemática* en la web

Reseñas de artículos

¿Qué interesa conocer de una experiencia de aula?
Ana Rodríguez, Pedro Nieto y José Muñoz Santonja
Épsilon, n.º 56 volumen 19 (2)

En este artículo se constata un hecho que todos hemos observado en muchas ocasiones. Cuando asistimos a la presentación de una experiencia didáctica, se nos cuenta con bastante detalle el desarrollo de los contenidos implicados, la metodología y los materiales empleados o los resultados de su evaluación hecha por los alumnos, pero la exposición suele quedarse corta en la descripción de la gestión de la experiencia. Las preguntas que desencadenan en los asistentes estas carencias son de todos conocidas y aparecen en el transcurso del debate pero su respuesta es imprescindible para decidirse a trasladarla a nuestras aulas.

Los autores proponen un listado de descriptores que sería conveniente considerar para enriquecer con la mayor cantidad de matices la exposición de una experiencia. Éstos se pueden agrupar en:

- Estructura del grupo-clase,
- Presentación de la materia, materiales y actividades objeto de la experiencia,
- Gestión del trabajo en el aula,
- Interacciones en el aula y fuera de ella. ■

Julio Sancho

SUMA 46
Junio 2004

XII JAEM
Albacete, 4 a 7 de Julio de 2005

Comité de Programa de las XII JAEM:

D. Pep Sales Rufí, Secretario General de la FESPM.
D.ª Carmen da Veiga, de la Sociedad Madrileña *Emma Castelnouvo.*
D. Luis Balbuena Castellano, de la Sociedad Canaria *Isaac Newton*.
D. Serapio García Cuesta, de la Sociedad Castellano-Manchega.
D. Juan Emilio García Jiménez, de la Sociedad Castellano-Manchega.
D. Salvador Guerrero Hidalgo, de la Sociedad Andaluza *Thales.*
D. José A. Mora Sánchez de la Sociedad Valenciana *Al-Khwarizmi*.

Preside el comité organizador:

D. Serapio García Cuesta, Presidente de la Sociedad Castellano Manchega de Profesores de Matemáticas

Entre los días 4 al 7 de julio de 2005, en Albacete, un lugar de La Mancha cuyo nombre y fechas siempre gustará recordar, vamos a celebrar el más importante Congreso sobre educación matemática de los que se organizan en toda España, las XII Jornadas sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas (XII JAEM).

Las JAEM son un foro de debate, un lugar de reflexión, un espacio y un tiempo de contactos para mejorar la competencia didáctica, metodológica y de recursos de los profesores y profesoras de Matemáticas.

La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) invita a participar en las XII JAEM al profesorado de Educación Infantil, Primaria, Secundaria y Universidad. Todos enseñamos y todos podemos aprender de todos.

La Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas (SCMPM) ha aceptado el honor de organizar este congreso, poniendo toda su ilusión y esfuerzo para que estas sean unas JAEM importantes y útiles para el profesorado y la sociedad. Trataremos de hacer realidad aquella recomendación de F. Pessoa: *Pon todo lo que eres en lo mínimo que hagas*.

Prólogo del Presidente de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Desocupado lector: sin juramento me podrás creer, que quisiera que este prólogo, como hijo del entendimiento, fuera el más hermoso, el más gallardo y más discreto que pudiera imaginarse...

Pero yo, que aunque parezco padre, soy padrastro de las JAEM, no quiero suplicarte que perdones, o disimules las faltas que en estas mis hijas vieres: y pues aunque eres su pariente y amigo y tienes tu libre albedrío, como el más pintado y estás en tu casa, puedes decir de la historia todo aquello que te pareciere, sin temor que te calumnien por el mal, ni te premien por el bien que dixeres della.

Solo quisiera dártelas mondas y desnudas sin el ornato del prólogo y elogios que en la presentación de las Jornadas suelen ponerse...

Pues estadme atento

Cervantes revisitado.

Se otorgó licencia real en Valladolid el nove de Febreyro de mil seiscientos e cinco anhos para imprimir el libro Ingenioso Hidalgo Don Quixote de la Mancha.

Perdonadme a mí, si os parece indebido el uso de las palabras de Cervantes en este prólogo, en todo caso seguiremos siendo Quijotes y Sanchos en tierras matemáticas manchegas.

Florencio Villarroya
Presidente FESPM

Saludo del Presidente de la Sociedad Castellano Manchega de Profesores de Matemáticas

Quiero expresar mi deseo de que la responsabilidad asumida al comprometernos a organizar las **XII Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas** se vea compensada por el éxito de las mismas. Asimismo, nuestro esmero en tratar de conseguir un evento con el máximo nivel profesional se relaciona con la celebración durante el 2005 del IV Centenario de la publicación de *El Quijote*, que esperamos sirva para complementar la formación cultural que ofrezcamos en el congreso.

Deseamos, además, que os quede un grato recuerdo de la estancia en la región de Castilla La Mancha, no solo por el entorno geográfico, sino por el nivel de relaciones humanas y profesionales que las JAEM siempre propician.

Se está realizando un importante esfuerzo para conseguir ofertas de alojamiento que tengan una alta relación calidad/precio con el fin de que el aspecto económico no sea un elemento disuasorio para compartir estos días con nosotros.

Confiamos en que la buena voluntad y el esfuerzo que está realizando el equipo de trabajo creado en torno a las XII JAEM, se vean recompensados con una participación importante y que, al regresar a vuestros lugares de origen, lo hagáis totalmente satisfechos.

Serapio García Cuesta
Presidente de la SCMPM

XII JAEM
Primer anuncio

Fechas y lugares de realización
La Jornadas tendrán lugar los días del **4 al 7 de julio de 2005**. El lunes día 4 por la tarde recepción y entrega de materiales a los asistentes. Por la noche, en el Teatro Circo de Albacete se hará la inauguración de las XII JAEM con alguna actuación musical. Durante el martes 5, miércoles 6 y la mañana del jueves 7 se desarrollarían todas las actividades del Congreso. En la tarde del jueves tendrá lugar la última conferencia plenaria y la clausura. Posteriormente tendrá lugar una cena de despedida de las JAEM

Se celebrarán en el campus universitario de Albacete gracias al acuerdo de colaboración que se ha alcanzado con la Universidad de Castilla La Mancha.

Estructura general
Las XII JAEM se organizan en torno a las siguientes actividades:

- Cuatro Conferencias Plenarias.
- Ocho Núcleos Temáticos que se desarrollan en ponencias. Al finalizar las ponencias de cada núcleo, habrá un debate con todos los ponentes presentes.
- Comunicaciones. Se centrarán preferentemente en los Núcleos Temáticos.
- Talleres. La propuesta indicará si es de una o de dos horas.
- Zoco matemático. Puede presentarse cualquier tipo de material, póster, escultura, etc.
- Exposiciones.

Se entregará además el Premio *Gonzalo Sánchez Vázquez*. Habrá también Actividades culturales. Se presentará a los asistentes alguna muestra de la cultura castellano-manchega. Se involucrará dentro del congreso la celebración del IV Centenario de la publicación de *El Quijote*. Habrá también exposición y venta de materiales didácticos por parte de casas comerciales, de la Federación y de las Sociedades Federadas.

Homologación
Se solicitará que las XII JAEM sean homologadas por la Consejería de Educación de la JCCM, lo que supondrá su reconocimiento estatal a efectos de sexenios, concursos de traslados y otros concursos de méritos. Se reconocerá un totla de 22 horas. También se solicitará que sean reconocidas por la Universidad de Castilla La Mancha con dos créditos de libre configuración.

Conferencias Plenarias
Dirigidas a todos los asistentes no serán simultáneas con ninguna otra actividadd ni entre sí. Se determinarán en el segundo anuncio.

Núcleos Temáticos
1. Las Nuevas Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) al servicio del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.
2. Seguimos con los números y las funciones.
3. Geometría: La Bella Durmiente. La Geometría ¿sigue olvidada?
4. Estadística y Probabilidad. Como impedir el odio a la Estadística.
5. Matemáticas básicas ¿qué es eso? ¿Qué Matemáticas se necesitan para los profesionales? Currículum.
6. Materiales para construir las matemáticas. La matemática se hace tangible.
7. El papel de las pruebas y competiciones matemáticas en la educación matemática. Diversidad, precocidad, talentos matemáticos.
8. Las matemáticas en la Educación Infantil y Primaria.

Talleres, Comunicaciones y Zoco Matemático
Son los canales establecidos para favorecer una participación activa de los asistentes a las XII JAEM.

Talleres
Son cursos de una o dos horas en los que el objetivo principal es la manipulación interactiva de materiales, software, la exposición de actividades concretas, etc.

Normas para las propuestas de realización de Talleres:

1. Los participantes a las XII JAEM pueden presentar propuestas de realización de Talleres durante las mismas.
2. Quienes quieran presentar propuestas, deberán enviar una descripción del Taller, indicando de la manera más detallada posible, el material que hay que poner a su disposición el Comité Organizador de las XII JAEM.
3. El **plazo de admisión** de peticiones de propuestas de *Talleres* **termina el 1 de abril de 2005**. Posteriormente se confirmará a los autores si su propuesta ha sido aceptada por el Comité de Programa y si existe algún problema con el material que ha sido solicitado al Comité Organizador.
4. La descripción de los Talleres aceptados y realizados se publicará en las actas de las XII JAEM. Para preparar este documento, seguir las normas para la publicación establecidas en este anuncio.
5. Los talleres podrán ser de una hora o de dos horas de duracion, este extremo se deberá indicar en la descripción.

Comunicaciones
Son intervenciones breves en las que se podrá exponer y compartir, transmitiendo a otros compañeros puntos de vista sobre educación matemática, experiencias de aula, etc.

Normas para la presentación de comunicaciones:

1. Las Comunicaciones deben estar referidas a la enseñanza o el aprendizaje de las Matemáticas en cualquiera de los niveles educativos.
2. Han de encuadrarse en los Núcleos Temáticos propuestos aunque también se ofrece la posibilidad de hacerlas sobre cualquier otro tema.
3. Deben ser inéditas, no habiéndose publicado con anterioridad.
4. Si es de varios autores, al menos uno ha de estar inscrito. El certificado en este caso, será colectivo.
5. La admisión de los trabajos quedará supeditada a la decisión del Comité de Programa.
6. El plazo de admisión finaliza el día 1 de abril de 2005.
7. Deberá expresarse con claridad qué tipo de material de apoyo necesita para su exposición (retroproyector para transparencias o de opacos, proyector de diapositivas, video, cañón, ordenador, ordenadores en red, software, etc.). Todas las presentaciones informáticas deben venir en formato MS PowerPoint 2000. En otros supuestos, consultar con la Organización.
8. Se dispondrá de 15 minutos para su exposición más 10 de coloquio con los asistentes.
9. Se publicarán en las Actas de las XII JAEM, siempre que se adapten a las condiciones que se especifican en las normas para la publicación establecidas en este documento.
10. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de una Comunicación.

Zoco Matemático
El Zoco Matemático pretende ser una oferta que se hace a todos aquellos asistentes que deseen disponer de un espacio físico y horario en el que puedan presentar materiales didácticos, recursos, programas informáticos, pósteres, etc. Se trata, junto con las *Comunicaciones* y Talleres, de un canal ideal para tomar parte activa en las XII JAEM.

El Comité Organizador tratará de ayudar y orientar a quienes se animen a presentar algun trabajo en el Zoco Matemático y para poder atender su solicitud les pedimos que tengan en cuenta las normas siguientes

Normas de participación en el Zoco Matemático:

1. Quien desee hacer uso del Zoco deberá enviar una descripción de lo que presentará así como una relación detallada del material que lo compone: paneles, tamaño de las piezas que presenta, etc.
2. Ha de indicar con claridad qué desea que la organización ponga a su disposición: mesas, lugar para colgar posters, ordenador, etc.
3. El **plazo de admisión** de peticiones para el *Zoco Matemático* **termina el 1 de abril de 2005.** Posteriormente se les comunicará si se ha aceptado su participación y si existe algún problema con las peticiones efectuadas.
4. Se presentará una memoria que resuma el contenido de lo expuesto en el Zoco para publicarlo en las Actas de las XII JAEM, siempre que se adapte a las condiciones que se especifican en las normas para la publicación establecidas en este documento.
5. Los solicitantes se comprometen a montar y a desmontar su material en el espacio que se le asigne y a estar presentes en el lugar en los momentos que se les indique para que los asistentes puedan dialogar con ellos sobre lo expuesto.
6. Para el transporte hasta la sede de las JAEM de los materiales a exponer en el Zoco, deben ponerse en contacto con el Comité Organizador para informarles sobre la forma de hacerlo y, en su caso, los trámites para solicitar alguna ayuda económica.

Normas de publicación en las Actas

La publicación en las Actas de las XII JAEM de Comunicaciones, Talleres y Zoco Matemático está sujeta a la aceptación y cumplimiento de estas normas:

1. Se remitirán tres copias en papel, formato DIN-A4, ala siguiente dirección:
   XII JAEM
   Avda de España 14, 5ª planta
   02005 Albacete, ESPAÑA
2. Ocuparán como máximo 5 páginas DIN A4, equivalentes a 11.000 caracteres aproximadamente, incluyendo notas, referencias bibliográficas, fotografías, gráficos, etc.
3. Con el objetivo de facilitar la posterior elaboración de las Actas, el texto se deberá enviar en un archivo por correo electrónico a la dirección que se indicará en las páginas web de la SCMPM y de la FESP próximamente. El texto deberá ir en formato MS-Word 2000, Times New Roman de 12 puntos, con espaciado e interlineado sencillo y sin subrayados, evitando el uso de características especiales como letra capital, viñetas, estilos, tabuladores, sangrías, columnas... Los gráficos e imágenes se incluirán en el propio documento.
4 En el epígrafe *asunto* del correo electrónico, hay que escribir el título del trabajo y en el cuerpo del mensaje indicar estos datos:
   Nombre y apellidos de la persona o personas que presentan el documento.
   Nivel educativo del contenido del documento.
   Dirección postal.
   Teléfono de contacto.
   Medios necesarios para su exposición.
   Un resumen en castellano de 10 líneas como máximo.

Inscripciones

Cuotas de inscripción	Hasta el 15 de mayo de 2005	Después del 15 de mayo de 2005
Socios de la FESPM o de las Sociedades que han firmado convenio con ella	90 €	120 €
No socios	150 €	190 €

Anulaciones

Sólo serán atendidas aquellas solicitudes de reembolso de la cuota de inscripción que se realicen antes del 15 de mayo de 2005.

Alojamientos

La Organización, a través de la Secretaría Técnica, ofrecerá una serie de alojamientos que por precio y cercanía, supongan una buena oferta para los asistentes a las XII JAEM.

Programa de acompañantes

Habrá un programa paralelo para acompañantes. ■

Para obtener más información sobre las

XII Jornadas sobre el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas Albacete, del 4 al 7 de julio de 2005

Correo postal:

> ***SCMPM Sociedad Castellano Manchega de Profesores de Matemáticas***
> Avda de España, 14, 5ª Planta
> 02005 Albacete
> ESPAÑA

Página web:

> ***http://www.info-ab.uclm.es/mates/index.htm***

RELME 18
Decimoctava Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, México 2004

Universidad Autónoma de Chiapas, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México del 19 al 23 de julio de 2004

Del 19 al 23 de julio de 2004, en el marco de la celebración de los 30 años de la Universidad Autónoma de Chiapas se llevará a cabo la reunión académica más importante del continente americano en la disciplina de la Matemática Educativa: La Decimoctava Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, *Relme* 18.

Reunirá un poco más de 1.500 participantes, entre estudiantes de licenciatura y posgrado, profesores de matemáticas de todos los niveles educativos e investigadores de la disciplina, de toda Latinoamérica, Estados Unidos y Europa. Hoy Relme es, por el número de participantes y de países que convoca así como por los niveles educativos y problemáticas que aborda, la reunión académica más importante de todo el continente americano.

La Reunión Latinoamericana se realizó por primera vez en 1987 en la ciudad de Mérida, Yucatán, México, con el nombre de *Primera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*. *Relme* es el fruto de la evolución de las primeras diez Reuniones Centroamericanas y del Caribe, éstas posibilitaron el intercambio entre colegas que, aunque cercanos geográficamente, no contaban con espacios propios que favorecieran el contraste periódico de experiencias en castellano. En la *Décima Reunión Centroamericana y del Caribe*, celebrada en Puerto Rico en agosto de 1996, se acordó cambiar el nombre por el actual. En la Reunión de Puerto Rico también se constituyó el *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa* (*CLAME*).

Las ciudades donde se ha celebrado el RELME son:

1987	Mérida, Yucatán, México.
1988	Ciudad de Guatemala, Guatemala.
1989	San José, Costa Rica.
1990	Acapulco, Guerrero, México.
1991	Tegucigalpa, Honduras.
1992	Cuernavaca, Morelos, México.
1993	Ciudad de Panamá, Panamá.
1994	San José, Costa Rica.
1995	La Habana, Cuba.
1996	San Juan, Cayey y Ponce, Puerto Rico.
1997	Morelia, Michoacán, México.
1998	Bogotá, Colombia.
1999	Santo Domingo, República Dominicana.
2000	Ciudad de Panamá, Panamá.
2001	Buenos Aires, Argentina.
2002	La Habana, Cuba.
2003	Santiago de Chile.
2004	Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México (julio de 2004).

El *CLAME* invita a participar en este importante acontecimiento a toda la comunidad interesada por el fenómeno de la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Toda la información relacionada con el evento puede ser consultada en la página del *CLAME* **www.clame.org.mx** ■

Guy Brousseau y Celia Hoyles
Premios ICMI 2003

ICMI

The International Commission on Mathematical Instruction

Presidente: Hyman Bass, Department of Mathematics, University of Michigan, USA
Vicepresidentas: Michèle Artigue, Université Paris 7, Francia
Jill Adler, University of the Witwatersrand, Sudafrica
Secretario General: Bernard R. Hodgson, Université Laval, Canada

La Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI), fundada en Roma en 1908, ha establecido, por primera vez en su historia, premios para reconocer las contribuciones destacadas a la *investigación en educación matemática.* La **Medalla Felix Klein**, que toma su nombre del primer presidente de ICMI (1908-1920), premia el trabajo de toda una vida dedicada a la investigación. La **Medalla Hans Freudenthal**, que toma su nombre del octavo presidente de ICMI (1967-1970), premia a las personas que han llevado a cabo un programa relevante y acumulativo de investigación. Estos premios se otorgarán todos los años cuya numeración sea impar. La entrega de las medallas a los galardonados en el siguiente Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME) en el que pronunciarán conferencias como invitados.

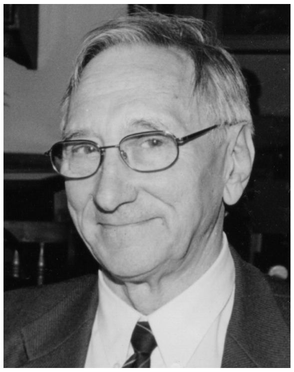
Estos premios, que sirven para reconocer a las personalidades destacadas en educación matemática, pretenden no sólo alentar el esfuerzo de otros, sino también contribuir al desarrollo de estándares de alta calidad en este campo, mediante el reconocimiento público a los ganadores. Los premios han sido concedidos por un jurado (anónimo) de académicos distinguidos de talla internacional, presididos por la Profesora Michèle Artigue, de la Universidad Paris 7.

ICMI se siente orgulloso de anunciar los primeros galardonados con las Medallas Klein y Freudenthal.

Se concede la *Medalla Felix Klein 2003* a **Guy Brousseau**, Catedrático Emérito del Instituto Universitario de Formación de Profesores de Aquitania, en Burdeos, por toda una vida de desarrollo de la teoría de las *situaciones didácticas* y sus aplicaciones a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Se concede la *Medalla Hans Freudenthal 2003* a **Celia Hoyles**, Catedrática del Instituto de Educación de la Universidad de Londres, por su investigación seminal sobre los usos educativos de la tecnología en educación matemática.

A continuación se presentan reseñas del trabajo de los galardonados. La entrega de las medallas y las conferencias de los galardonados tendrán lugar durante el congreso ICME-10 en Copenhague, Julio 4-11, 2004.



Guy Brousseau, medalla Felix Klein 2003

El primer premio Felix Klein de la Comisión Internacional para la Instrucción Matemática (ICMI) se concede al Profesor **Guy Brousseau**. Esta distinción reconoce la contribución esencial que Guy Brousseau ha tenido en el desarrollo de la Educación Matemática como área científica de investigación, a través de su trabajo teórico y experimental durante cuatro décadas y del esfuerzo sostenido a lo largo de su vida profesional para aplicar los frutos de su investigación a la Educación Matemática tanto de los estudiantes cómo de los profesores.

Nacido en 1933, Guy Brousseau comenzó su carrera como maestro de educación primaria en 1953. Al final de los sesenta, tras licenciarse en matemáticas, ingresó en la Universidad de Burdeos. En 1986 completó su *doctorado de estado* y en 1991 se convirtió en catedrático en el nuevo Instituto Universitario de Formación de Profesores (IUFM) de Burdeos, donde trabajó hasta 1998. Ahora es Profesor Emérito en el IUFM de Aquitania y Doctor Honoris Causa por la Universidad de Montreal.

A comienzo de los setenta, Guy Brousseau emerge como uno de los líderes e investigadores más originales en el nuevo área de la educación matemática, convencido, por un lado, que este área debía desarrollarse como un campo de auténtica investigación, en dimensiones tanto fundamentales como aplicadas y, por el otro, que debía permanecer próximo a la materia de las matemáticas. Su aportación teórica más notable ha sido la creación de la teoría de las situaciones didácticas, que inició al comienzo de los setenta y que ha continuado desarrollando, con inacabable energía y creatividad. En un momento en que la visión dominante era cognitiva, fuertemente influenciada por la epistemología Piagetiana, señaló que lo que se necesitaba no era una teoría cognitiva pura, sino una que permitiese comprender también las interacciones sociales que se desarrollan en la clase entre los estudiantes, el profesor y el saber, ya que ellas condicionan lo que aprenden los estudiantes y cómo se produce el aprendizaje. Este es el objetivo de la teoría de las situaciones didácticas, que madurada progresivamente, se ha convertido en la teoría impresionante y compleja que es hoy día. Es cierto que este ha sido un trabajo colectivo, pero los avances substanciales has sido producto de la fuente crítica fue Guy Brousseau.

Esta teoría, visionaria en su integración de las dimensiones epistemológicas, cognitivas y sociales, ha sido una constante fuente de inspiración para muchos investigadores de todo el mundo. Sus elemntos principales, como son los conceptos de situaciones adidácticas y didácticas, contrato didáctico, devolución e institucionalización, se han hecho ampliamente accesibles a través de las traducciones de los principales textos de Guy Brousseau a muchos idiomas diferentes y más recientemente por la publicación en 1997 del libro de Kluwer *Theory of didactical situations in mathematics 1970-1990.*

La investigación que Guy Brousseau ha promovido comprende todo el rango de la Educación Matemática, desde la escuela elemental a la post-secundaria. Sin embargo, su contribución principal se encuentra en el nivel elemental, donde cubre todos los dominios matemáticos, desde los números hasta la geometría y la probabilidad. Su producción debe mucho a la estructura específica de COREM (Centro para la Observación e Investigación en Educación Matemática)–que creó en 1972 y dirigió hasta 1997. El COREM supuso una organización original de las relaciones entre el trabajo experimental y teórico.

Guy Brousseau no es sólo un investigador excepcional e creativo, es también un eudito que ha dedicado su vida a la Educación Matemática, apoyando incansablemente el desarrollo de esta área, no sólo en Francia, sino en muchos países, promoviendo programas de doctorado, ayudando y dirigiendo a jóvenes investigadores de otros países (ha dirigido más de 50 tesis doctorales), contribuyendo al desarrollo del conocimiento matemático y didáctico de estudiantes y profesores. Hasta los años 90 ha estado participado intensamente en las actividades de la CIEAEM (Comisión Internacional para el Estudio y Mejora de la Enseñanza de las Matemáticas), siendo su secretario desde 1981 a 1984. En su país ha trabajado profundamente en la experiencia de los IREMs (Institutos de Investigación en Educación Matemática), desde su fundación a finales de los sesenta. Tuvo una influencia decisiva en las actividades y recursos que estos institutos han desarrollado para promover la formación matemática de alta calidad de los profesores de educación primaria durante más de 30 años.

Celia Hoyles, medalla Hans Freudenthal 2003

El primer premio Hans Freudenthal de la Comisión Internacional para la Instrucción Matemática (ICMI) se concede a la Profesora **Celia Hoyles**. Esta distinción reconoce la contribución destacada que Celia Hoyles ha hecho al campo de investigación sobre la tecnología en educación matemática, tanto en términos de avances teóricos, como a través del desarrollo y experimentación de proyectos nacionales e internacionales orientados a la mejora de la educación matemática de la población general, a través de la tecnología.

Celia Hoyles estudió matemáticas en la Universidad de Manchester, obteniendo el premio Dalton al mejor expediente académico en Matemáticas. Comenzó su carrera como profesora de secundaria y posteriormente se convirtió en profesora del Politécnico del Norte de Londres. Comenzó a trabajar en Educación Matemática durante la etapa de doctorado. Desde 1984 es catedrática en el Instituto de Educación, de la Universidad de Londres.

En su primera investigación comenzó explorando el potencial ofrecido por el lenguaje LOGO, convirtiéndose en una líder internacional en este tema. Dos libros publicados en 1986 y en 1992 atestiguan la productividad de su investigación sobre Logo. A estos siguió en 1996 el libro *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers,* con Richard Noss como coautor, que inspiró avances teóricos importantes, como las nociones de *webbing* y *abstracción situada*, ideas que hoy son bien conocidas por todos los investigadores, independientemente de las tecnologías estudiadas.

Desde mitad de los noventa, su investigación ha integrado las nuevas posibilidades ofrecidas por las tecnologías de la información y la comunicación, así como las nuevas relaciones que los niños desarrollan con la tecnología. Ha codirigido recientemente dos proyectos consecutivos financiados por la Unión Europea: el proyecto *Playground* en el que los niños de diversos países diseñan, construyen y comparten sus propios vídeo-juegos y el actual proyecto *WebLabs*, orientado al diseño y evaluación de laboratorios virtuales, donde niños de diversos países construyen y exploran ideas matemáticas y científicas a distancia, en forma colaborativa. Como líder internacional en el área de la tecnología y la Educación Matemática, fue recientemente nombrada por el Comité Ejecutivo de la ICMI para codirigir un nuevo *Estudio ICMI* sobre este tema.

La contribución de Celia Hoyles a la investigación en Educación Matemática no se centra sólo en la tecnología. Desde mediados de los noventa ha trabajado dos áreas importantes de investigación. La primera, sobre la comprensión de la demostración por los niños, en la que ha sido pionera de nuevas estrategias metodológicas que ligan los enfoques cuantitativo y cualitativo e incluyen análisis longitudinales de desarrollo. La segunda área implica la investigación sobre la matemática usada en el entorno laboral. Ahora codirige un nuevo proyecto, *Techno-mathematical literacies in the workplace*, que trata de desarrollar esta investigación, implementando y evaluando algunos programas de formación en el lugar de trabajo.

En los últimos años, Celia Hoyles ha trabajado en temas de gestión relacionados con profesores de matemáticas. Fue elegida Presidenta del Consejo Matemático del Reino Unido en Octubre de 1999 y es miembro del Comité Consultor sobre Educación Matemática (ACME), que es el interlocutor de la comunidad matemática con el Gobierno sobre las políticas relacionadas con las matemáticas, desde la educación primaria a la superior. En 2002 jugó un papel esencial en el primer informe de ACME para el Gobierno sobre el *Desarrollo continuo profesional de los profesores de Matemáticas* y contribuyó a la revisión exhaustiva de las matemáticas para la etapa 14-19 en el Reino Unido. En reconocimiento a su contribución recibió recientemente la Orden del Imperio Británico por *Servicios a la Educación Matemática*.

Celia Hoyles pertenece a esa generación especial de profesores matemáticos, que, incluso cuando trabajn en cuestiones teóricas, no pierden de vista la práctica y recíprocamente, cuando tratan de mejorar la práctica no olvidan las lecciones aprendidas de la teoría y la investigación empírica. El esfuerzo de Celia Hoyles para mejorar la Educación Matemática en su país y fuera de él, se percibe en cada detalle de su actividad profesional. Su entusiasmo y visión son admirados internacionalmente por todos los que han estado en contacto directo con ella. Gracias a las personas como Celia Hoyles, con un sentido claro de su misión y con la habilidad de tender puentes entre la investigación y la práctica, la comunidad de educación matemática ha adquirido una identidad bien definida a lo largo de los años.

4ª Conferencia de la Sociedad Europea de Investigación en Educación Matemática (CERME4)

Sant Feliu de Guíxols , del 17 al 21 de febrero de 2005

En agosto del año 1998 tuvo lugar la primera Conferencia de la Sociedad Europea de Investigación en Educación Matemática (CERME1) en Osnabrück, Alemania. El CERME2 tuvo lugar el febrero de 2001 en Marianske Lazne, República Checa y el CERME 3 el marzo de 2003 en Bellaria (Italia). De esta manera se consolidaba un nuevo espacio de encuentro de investigadores europeos en el campo de la educación matemática. La próxima cita es en Sant Feliu de Guíxols (Girona) del 17 al 21 de febrero de 2005.

Durante el fin de semana del 2 al 4 de mayo de 1997, representantes de 16 países europeos se reunieron en Osnabrück con el propósito de constituir una nueva sociedad, la Sociedad Europea de Investigación en Educación Matemática (ERME). Se quería promover la comunicación, la cooperación y la colaboración dentro del campo europeo de investigación en educación matemática. Desde entonces, algunos de los objetivos principales del ERME consisten en organizar las siguientes actividades:

1. Conferencias con un amplio abanico de temas relevantes para las diversas realidades europeas, encuentros especiales de grupos de trabajo temáticos sobre tópicos concretos, y también escuelas de verano donde investigadores con amplia experiencia trabajan con jóvenes investigadores.
2. Actividades cooperativas con relación a temas que van más allá de contextos locales y contribuyen a producir conocimientos en nuestro campo de investigación. Además, fórum de ideas donde se reflexione sobre áreas de investigación emergentes que puedan beneficiarse de un trabajo de colaboración entre diferentes grupos de investigación a nivel europeo.

CERME4 incluye actividades plenarias, presentación de pósteres y un programa de actividades sociales, pero fundamentalmente es una conferencia diseñada con la intención de facilitar el intercambio de experiencias entre investigadores en educación matemática situados en contextos geográficos, sociales y culturales diversos. En este sentido, no se centra tanto en la presentación de estudios individuales como en la discusión conjunta de temas dentro de determinados grupos de trabajo. Para el encuentro de febrero de 2005, está previsto que los grupos de trabajo sean continuación de los que se organizaron en el CERME3, con alguno más de nueva constitución:

(1) El papel de las metáforas en el aprendizaje y la comprensión de las matemáticas.
(2) Afecto y pensamiento matemático.
(3) Construcción de estructuras en el conocimiento matemático.
(4) Argumentaciones y pruebas.
(5) Pensamiento estocástico.
(6) Pensamiento algebraico.
(7) Pensamiento geométrico.
(8) Matemáticas y lenguaje.
(9) Herramientas tecnológicas en la didáctica de las matemáticas.
(10) Educación matemática en situaciones multiculturales.
(11) Diferentes perspectivas teóricas en la investigación en educación matemática.
(12) Del estudio de las prácticas de enseñanza a la formación del profesorado.
(13) Aplicaciones matemáticas y modelización.
(14) Pensamiento matemático avanzado.

Hasta el 30 de septiembre de 2005 hay tiempo para inscribirse y enviar una propuesta de colaboración en alguno de estos grupos temáticos o bien un póster. Está previsto que el primer anuncio completo se publique próximamente. Esta es una buena ocasión para conocer lo que profesores de matemáticas e investigadores universitarios están experimentando en diferentes lugares, en un ambiente de intercambio que, en les convocatorias anteriores, ha resultado ser siempre muy enriquecedor. Esto sí, tendremos que esforzarnos en hacernos entender en inglés, o al menos en encontrar una lengua común con los interlocutores. ■

NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, Apartado de Correos 19012, 28080 Madrid), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.

2. Los gráficos, diagramas, fotografías y figuras se enviarán impresos en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración. Indíquense los créditos de las fotografías y dibujos.

3. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos no serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, recomendarán posibles modificaciones, etc.

4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de un máximo de 625 caracteres incluyendo los blancos, que no necesariamente tiene que coincidir con la introducción al artículo. De este resumen se remitirá también su traducción al inglés.

5. Los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede) y el resumen en castellano y en inglés deberán ir escritos en una misma hoja aparte.

6. Se enviará también en soporte informático (disco de tres pulgadas y cuarto con formato PC, CDRom o DVDRom) una copia del archivo de texto que contenga el artículo y del que contenga la hoja de datos y los resúmenes, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quieran incluir. La etiqueta deberá identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda Microsoft Word para Windows o RFT. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF. Para las fotografías se recomienda archivos TIF o BMP y con una definición mínima de 600x600 puntos por pulgada cuadrada.

7. Al menos un ejemplar del texto así como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.

8. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.

9. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo y se incluirán al final del texto.

10. La bibliografía se dispondrá también al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:
    TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma*, n.° 20, 91-98.
    En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
    GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas*, Labor, Barcelona.
    En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
    VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2*, ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

11. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ... supone un gran avance (Hernández, 1992). Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ... según Rico (1993).

12. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como -en caso afirmativo- la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido.

13. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

SUMA

Boletín de suscripción

Tarifas	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	25 €	10 €
Centros	40 €	15 €
Europa	50 €	20 €
Resto del mundo	$ 60 USA	$ 22 USA

Fotocopiar esta hoja y enviar:

por correo a: Revista SUMA. Apartado de correos 19012
E-28080 MADRID

por Fax al: 912 911 879

por correo-e a: suma_administracion@fespm.org

Deseo suscribirme a la revista SUMA:

Nombre y apellidos: NIF/CIF:

Dirección: Teléfono:

Población: CP:

Provincia: País:

Correo electrónico: Fax:

	Importe (€)
☐ Suscripción a partir del año (3 números) ______	
☐ N.os sueltos ______	
Total	

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)

☐ Transferencia bancaria (CCC 2085-9981-38-0330066350 ó IBAN ES68 2085 9981 3803 3006 6350)

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista SUMA

☐ Giro postal dirigido a Revista SUMA

Fecha y firma:

Nombre y apellidos:

Código Cuenta Cliente: Entidad: Oficina: DC: Cuenta:

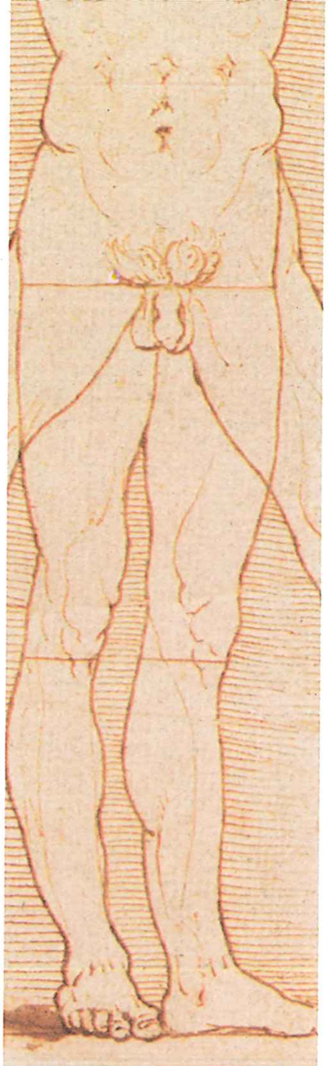
Banco/Caja:

Agencia n.º: Dirección:

Población: Provincia:

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (fecha y firma):



FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

SUMA.
REVISTA SOBRE LA
ENSEÑANZA Y EL
APRENDIZAJE DE
LAS MATEMÁTICAS.

ISSN 1130-488X

9 771130 488006 00046