SUMA 48

SUMA. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las MATEMÁTICAS

MADRID · FEBRERO 2005 · Nº. 48 · ISSN 1130-488X

SUMA 48
Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las MATEMÁTICAS
Febrero 2005

Índice

Edita
FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS (FESPM)

Diseño de la portada
Javier Alvariño
Foto: Jorge Alvariño
Diseño interior
Raquel Fraguas (NIVOLA)
Maquetación
A. Alamillo y F. Martín
Abstracts
M. Manso de Zúñiga
P. Satrústegui
Revista Suma
Apdo. 19012
E-28080-Madrid
España
Fax:+(34) 912 911 879
Tirada: *6400 ejemplares*
Deposito legal: *Gr 752-1988*
ISSN: *1130-488X*

ARTÍCULOS

POLIEDRO

Actividades de la FESPM:

SUMA 48

Febrero 2005

Junto con este número 48 de SUMA se distribuye la **monografía nº 02**. *Iniciábamos hace un año con* Ideas de Em*ma*temática Castelnuovo *la serie de monografías de SUMA. Es nuestra intención continuar esta tarea, publicando, al menos, una al año, como declaramos cuando apareció la primera. El nuevo título que ahora presentamos es* Textos de Miguel de Guzmán. *La elección de Miguel de Guzmán en esta ocasión era obvia. El tendió puentes entre las distintas profesiones del matemático, puentes que es voluntad de esta revista y de toda la FESPM que sigan tendidos y transitables. Esa es, sin duda, la mejor manera de rendirle homenaje al profesor Guzmán y al amigo Miguel.*

Reflexionábamos en el editorial del número 47 sobre los cambios legislativos, los enésimos, en nuestro sistema educativo y augurábamos que esta vez se intente —y se logre— por medio del consenso un marco válido para todos, a prueba de cambios de gobierno.

Pero desde nuestra perspectiva de profesores ese será un primer paso sólo. Queda, después de él, lo fundamental: lograr que se aprenda; que en cada hora de clase se produzca la estraña reacción química que desencadena el proceso de aprendizaje de las matemáticas.

En el pasado trimestre se han hecho públicos los primeros resultados de PISA 2003. El programa PISA (Programme for International Student Assessment) persigue establecer indicadores que muestren el modo en que los países preparan a los estudiantes de 15 años para desempeñar un papel *activo como ciudadanos. Estos primeros resultados para nuestro país no son buenos en general, ni en el ámbito de las matemáticas en particular.*

Los profesores de matemáticas, en general, no nos sentimos especialmente sorprendidos por estos resultados, pero una lectura pausada debe llevarnos a una seria reflexión.

En primer lugar PISA no evalúa lo que nuestros alumnos han aprendido del currículo que se les imparte sino, como hemos señalado, en qué medida lo que han aprendido les prepara para resolver problemas cotidianos del ciudadano. Y, en este sentido, la respuesta es clara: o el currículo no es el adecuado y no capacita a los alumnos para resolver ese tipo de problemas o el desarrollo que hacemos de él los profesores y el esfuerzo de aprendizaje que realizan los alumnos no son los adecuados.

No nos corresponde desde este editorial responder a ésta ni a las otras muchas cuestiones que PISA suscita, pero sí auspiciar un debate sin prejuicios —y probablemente, con unas gotas de autocrítica— y brindar las páginas de SUMA para difundir las reflexiones que sobre un tema tan importante realicemos unos y otros.

No sólo los profesores debemos reflexionar sobre qué cambios deben hacerse en la enseñanza de la matemática, por supuesto, pero sin duda nuestra opinión será de las más cualificadas y deberá ser oida.

En otro orden de cosas, cerramos con este número la sección Presencia mediática*, que dirigía Fernando Corbalán, no porque el tema de la sección esté agotado —las 'mates', para mal más que para bien, tienen reflejo permanente en los medios—, sino como un paso más de ese proceso de cambio que anunciamos desde que nos hicimos cargo de SUMA. Fernando pasará a ocuparse de la sección* Biblioteca *que queremos también renovar paulatinamente.*

Y por último, corriendo el peligro de ser repetitivos, insistimos en nuestro deseo de que lleguen a SUMA más artículos que narren experiencias innovadoras y que, reflexionando sobre la práctica, nos sirvan a todos para aprender y así enseñar mejor las matemáticas. ■

Manuscrito de Pedro Puig Adam

artículos

SUMA 48
Febrero 2005, pp.7-13

Aplicación de las funciones al estudio de mosaicos y poliedros

Este artículo responde a la siguiente pregunta: ¿Cómo se pueden obtener todos los posibles mosaicos regulares, los mosaicos semirregulares, los poliedros regulares, los prismas y antiprismas formados con polígonos regulares y los poliedros arquimedianos utilizando sólo conocimientos de funciones correspondientes al currículum de bachillerato y un graficador de funciones sencillo?

This paper answers the following question: How can be obtained all the possible regular tessellations, the semiregular tessellations, the regular polyhedrons, the prisms and antiprisms formed with regular polygons and the archimedean polyhedrons? Using only knowledge about functions corresponding to the high school currículum and a simple function graphing software.

La investigación que se presenta a continuación tiene su origen en mi función de director de trabajos de investigación realizados por alumnos de segundo de bachillerato (17 años) de la Comunidad Autónoma de Catalunya. En dicha comunidad, los alumnos de 2º de bachillerato deben cursar la asignatura *treball de recerca*, la cual consiste en la realización de un trabajo individual de investigación dirigido por un tutor. Este trabajo suele durar seis meses aproximadamente.

La elección del tema de investigación no está determinado a priori y puede ser sugerido tanto por los alumnos como por el departamento de matemáticas de los centros. Una norma habitual es que los departamentos de matemáticas de los centros tengan que ofrecer a sus alumnos una selección de posibles temas que permita una trabajo de investigación a los alumnos. De esta manera, los departamentos tienen que reflexionar sobre qué tipo de problemas, susceptibles de generar una rica investigación matemática, pueden ser resueltos por los propios alumnos bajo la tutela del profesor encargado.

Este artículo tiene su origen en el diseño previo de uno de dichos trabajos de investigación. En concreto, se pretendía averiguar si los alumnos de 2º de bachillerato podrían contestar a la siguiente pregunta: ¿Cómo obtener todos los posibles mosaicos regulares, los mosaicos semirregulares, los poliedros regulares, los prismas y antiprismas formados con polígonos regulares y los poliedros arquimedianos? Para ello, se tenía que contestar a esta pregunta utilizando sólo conocimientos matemáticos correspondientes al currículum de la enseñanza no universitaria. Es decir, se tenía que diseñar un camino que, a partir de los conocimientos que se podían suponer a los alumnos, permitiera responder a la pregunta anterior. Para responder a la pregunta se diseñó una estrategia de demostración que partía de los conocimientos previos de los alumnos sobre funciones e implicaba el uso de un graficador de funciones sencillo.

Para obtener todos los posibles mosaicos regulares, los mosaicos semirregulares, los poliedros regulares, los prismas y antiprismas formados con polígonos regulares y los poliedros arquimedianos hay que estudiar los diferentes casos que se pueden dar al considerar las caras que concurren en un vértice, lo cual implica hallar las soluciones enteras positivas que cumplen una inecuación del tipo $F(x_1, ..., x_n) < 0$, o una ecuación del tipo $F(x_1, ..., x_n) = 0$, donde $x_1, ..., x_n$ indican los lados de los polígonos regulares que concurren en un vértice.

Pongamos un ejemplo para ilustrar la afirmación anterior. Supongamos que queremos hallar todos los posibles mosai-

Vicenç Font Moll
Universitat de Barcelona. Barcelona.

cos formados por tres polígonos regulares. Con tres polígonos regulares de lados *m*, *n* y *p* respectivamente se ha de cumplir la siguiente ecuación para teselar el plano:

$$\frac{180''(m-2)}{m}+\frac{180''(n-2)}{n}+\frac{180''(p-2)}{p}=360''$$

que simplificada queda:

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=\frac{1}{2}$$

Esta igualdad a su vez se puede transformar en la igualdad siguiente: $2np+2mp+2mn-mnp=0$, con lo que se obtiene una expresión del tipo $F(x_1, ..., x_n) = 0$.

El número de incógnitas tiene que ser mayor que 2 puesto que con uno o dos polígonos no se puede formar ningún mosaico ni ningún poliedro, ni puede ser mayor que 6 ya que 7 triángulos equiláteros concurriendo en un vértice suman más de 360º.

Una manera de hallar las soluciones de $F(x_1, ..., x_n) < 0$ o de $F(x_1, ..., x_n) = 0$ consiste en hacer ciertas consideraciones sobre los polígonos que concurren en un vértice de manera que en lugar de hallar las soluciones de la inecuación o de la igualdad anterior, tengamos que hallar las soluciones de inecuaciones del tipo $F(x, y) < 0$ o de igualdades del tipo $F(x, y) = 0$.

Podemos ilustrar esta afirmación continuando con el ejemplo citado anteriormente de los tres polígonos regulares que concurren en un vértice. Si suponemos que hay dos polígonos iguales ($n = p$). La igualdad:

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=\frac{1}{2}$$

se convierte en:

$$\frac{1}{m}+\frac{2}{p}=\frac{1}{2}$$

que es equivalente a $4m + 2p - pm = 0$, es decir $F(x, y) = 0$.

Ahora bien, utilizando un punto de vista funcional se pueden resolver gráficamente las inecuaciones con dos incógnitas. Basta aplicar la siguiente técnica:

Dada la inecuación $F(x, y) \leq 0$, se puede hacer una partición del conjunto de puntos del plano en tres clases:

1. el conjunto de puntos que son solución de $F(x, y) = 0$,
2. el conjunto de puntos que son solución de $F(x, y) < 0$,
3. el conjunto de puntos que son solución de $F(x, y) > 0$.

El conjunto de puntos que cumplen $F(x, y) = 0$ se puede encontrar haciendo la representación gráfica. Los otros dos conjuntos de puntos también se pueden hallar sustituyendo x e y por las coordenadas de determinados puntos que no forman parte de la gráfica de $F(x, y) = 0$.

Esta técnica de resolución sólo puede utilizarse en la práctica si tenemos posibilidades de representar gráficamente $F(x,y)=0$ con cierta facilidad y rapidez. Por ejemplo, si podemos utilizar un graficador de funciones como el agrapher.

A continuación aplicaremos esta técnica utilizando las posibilidades gráficas que permite un graficador sencillo como el agrapher. El procedimiento que seguiremos será estudiar los diferentes casos que se pueden dar al considerar las caras que concurren en un vértice, y en cada nuevo caso sólo consideraremos las posibilidades que no han aparecido al estudiar los casos anteriores.

Resolución del problema planteado utilizando un graficador de funciones

Uno y Dos polígonos en un vértice

Con uno o dos polígonos no se puede formar ningún mosaico ni ningún poliedro.

Tres polígonos en un vértice

Con tres polígonos regulares de lados *m*, *n* y *p* respectivamente se ha de cumplir la siguiente ecuación para teselar el plano:

$$\frac{180''(m-2)}{m}+\frac{180''(n-2)}{n}+\frac{180''(p-2)}{p}=360''$$

que simplificada queda:

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=\frac{1}{2}$$

Supongamos que hay dos polígonos iguales ($n = p$). La igualdad anterior se convierte en:

$$\frac{1}{m}+\frac{2}{p}=\frac{1}{2}$$

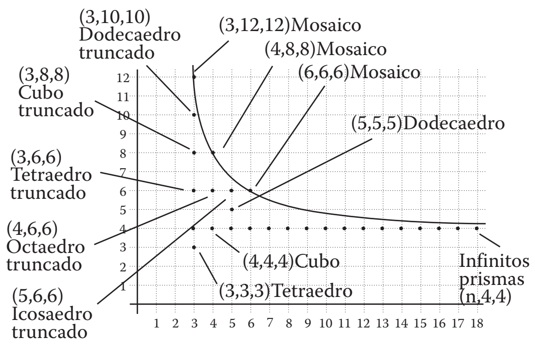
que es equivalente a

$$\frac{4m}{m-2} = p$$

Si representamos la función

$$f(x) = \frac{4x}{x-2}$$

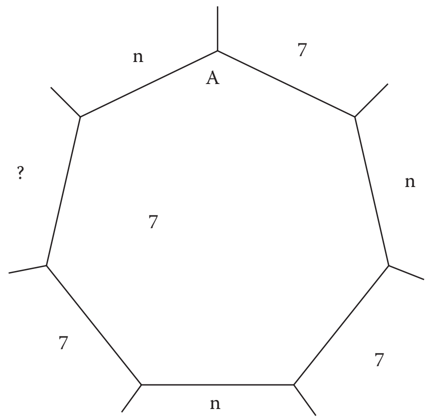
el número de lados de los dos polígonos iguales (p) aparece en el eje de ordenadas y el número de lados del otro polígono en el eje de abscisas. Los puntos de coordenadas enteras que son de la gráfica de la función nos dan posibles teselaciones, mientras que los que se encuentran por debajo de la grafica son posibles poliedros siempre que x e y sean mayores o iguales a tres.



Si los tres polígonos son iguales aparecen las siguientes posibilidades: (3, 3, 3) tetraedro, (4, 4, 4) cubo y (5, 5, 5) dodecaedro. Si de los tres polígonos hay dos iguales y uno diferente, los primeros han de tener un número par de lados. Esta condición implica eliminar todos los puntos de coordenadas enteras con la segunda coordenada un número impar diferente de la primera coordenada.

Para demostrar que las caras iguales no pueden ser polígonos de un número impar de lados consideraremos primero un caso particular: un heptágono. En cada vértice del mismo concurren tres caras y, por tanto, tres aristas (dos son del heptágono). Las siete caras que limitan con el heptágono deberán ser, de manera alterna, un heptágono y un polígono de n lados.

Tal como se observa en la figura siguiente, si empezamos en el vértice A y seguimos el sentido de las agujas del reloj, el hecho de que el número de lados sea impar obliga a repetir cara en ?. Pero, por otra parte, la cara ? no puede ser 7 ni n ya que, o habría un vértice 777 o uno 7nn. Por tanto, las dos caras iguales han de ser polígonos pares.



Fácilmente se observa que el razonamiento anterior se puede generalizar a cualquier polígono impar.

La gráfica nos permite ver que, además del grupo de los tres sólidos platónicos con tres polígonos concurriendo en un vértice (tetraedro, cubo y dodecaedro), aparece un grupo de 5 polígonos semirregulares correspondiente a la familia de los *truncados*. En los vértices de estos poliedros concurren tres polígonos y se obtienen *físicamente* de los poliedros regulares truncando por los vértices.

También podemos observar que hay tres soluciones que son mosaicos. Una corresponde a un mosaico regular (6, 6, 6) y las otras dos corresponden a mosaicos semirregulares (4, 8, 8 y 3, 12, 12).

Por último, aparece la familia infinita de los prismas regulares. Gráficamente se ve que hay infinitas soluciones puesto que la recta y = 4 es una asíntota horizontal de la función.

Consideremos ahora el caso de tres polígonos diferentes:

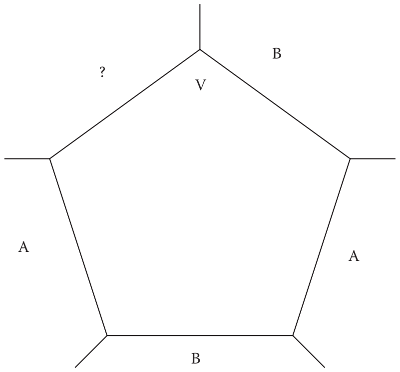
$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2}$$

Supongamos m un valor fijo y representemos la función

$$f(x) = \frac{2mx}{(m-2)x - 2m}$$

Para un valor fijado previamente de m, los puntos de coordenadas enteras nos dan los dos polígonos que junto al polígono de m lados concurren en un vértice y suman 360º, los puntos que se encuentran en la parte inferior de la grafica nos dan una suma inferior a 360º. En esta gráfica los resultados se repiten ya que el punto (6, 10) nos informa que si en un vértice concurren un polígono de m lados, un hexágono y un decágono, la suma de los ángulos interiores es inferior a 360º. Esta misma información nos la da el punto de coordenadas (10, 6).

Por otra parte si m es impar las otras dos caras han de ser iguales. Para demostrarlo, consideraremos primero un pentágono. En cada vértice concurren tres caras y, por tanto, tres aristas (dos son del pentágono). Las cinco caras que limitan con el pentágono deberán ser, de manera alterna, los otros dos polígonos. Tal como se observa en la figura siguiente, si empezamos en el vértice V y seguimos el sentido de las agujas del reloj, el hecho de que el número de lados sea impar obliga a repetir cara en ?.



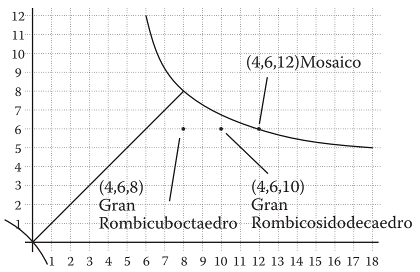
La única posibilidad para que en un vértice concurran las mismas caras es que $A = B$. Por tanto, si uno de los tres polígonos es impar los otros dos tienen que ser iguales. Fácilmente se observa que el razonamiento anterior se puede generalizar a cualquier polígono impar.

Además, si m es impar, al tener que ser las otras dos caras iguales, resulta que las soluciones ya han aparecido en el caso anterior. Por lo tanto, nos podemos limitar a estudiar los casos en que m es un número par mayor que 3.

Supongamos m = 4. La función es

$$f(x) = \frac{8x}{2x-8}$$

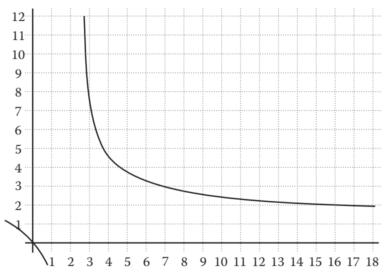
Por simetría solo estudiaremos las soluciones que se encuentran en la región delimitada por la bisectriz del primer cuadrante, la gráfica de la función y el eje de abscisas. Podemos eliminar todos los puntos con alguna de las coordenadas menor que 3. También podemos eliminar los puntos con alguna coordenada igual a 4 ya que en este caso tendríamos dos polígonos iguales y obtendríamos soluciones que ya han aparecido anteriormente. También podemos dejar de considerar todos los puntos con alguna de las coordenadas impares, ya que, tal como se ha visto antes, en este caso los otros dos polígonos han de ser iguales y, por tanto, son soluciones que ya han salido anteriormente. Sólo quedan dos posibilidades para formar poliedros y una para formar mosaicos.



Para m = 6 vuelven a salir las tres posibilidades anteriores y no se añade ninguna nueva posibilidad. Para m = 8 vuelve a salir la posibilidad (4, 6, 8) y ninguna nueva posibilidad, mientras que para m = 10 vuelve a salir la posibilidad (4, 6, 10) y ninguna nueva posibilidad. Estas tres gráficas, aunque no añaden ninguna nueva posibilidad, nos permiten suponer que al aumentar m la función tiene las imágenes menores que la función anterior. Es decir, nos hace suponer que tenemos una sucesión de funciones f_m tales que $f_m(x) > f_{m+2}(x)$ para cualquier valor de x. En efecto, para cualquier valor de m (siendo m un número par mayor o igual que 3) se cumple:

$$\frac{2mx}{(m-2)x-2m} > \frac{2(m+2)x}{mx-2(m+2)}$$

Este resultado nos permite asegurar que para ningún valor de m > 12 se puede encontrar ninguna nueva solución. En efecto, para m =12 no hay ninguna solución con los tres polígonos diferentes:



y para m > 12 tampoco hay solución ya que se cumple

$$\frac{2mx}{(m-2)x-2m} < \frac{24x}{10x-24}$$

Por tanto, para tres polígonos diferentes las únicas posibilidades son el gran rombicuboctaedro (4, 6, 8), el gran rombicosidodecaedro (4, 6, 10) y el mosaico (4, 6, 12) que son las soluciones que aparecen en las gráficas con m igual a 4, 6, 8 y 10.

Cuatro polígonos

Si intervienen cuatro polígonos regulares de lados m, n, p, y q respectivamente se ha de cumplir la siguiente ecuación para teselar el plano:

$$\frac{180''(m-2)}{m}+\frac{180''(n-2)}{n}+\frac{180''(p-2)}{p}+\frac{180''(q-2)}{q}=360''$$

que simplificada queda:

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

Consideramos primero el caso en que hay 3 polígonos iguales.

La condición:

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

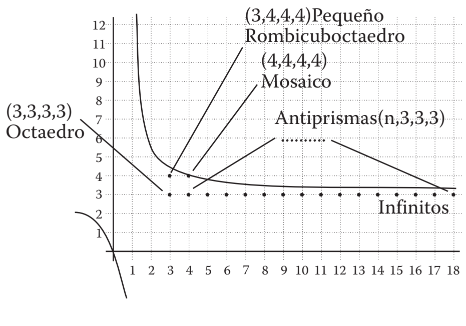
se convierte en

$$\frac{1}{m}+\frac{3}{q}=1$$

Si representamos la función

$$f(x)=\frac{3x}{x-1}$$

obtenemos la siguiente gráfica:



Vemos que aparece el pequeño rombicuboctaedro, el mosaico formado por 4 rectángulos y la familia, infinita, de los antiprismas. Por ejemplo la solución (6, 3, 3, 3) sería el antiprisma de base hexagonal y caras laterales que son triángulos equiláteros. También vemos que el tetraedro se puede considerar como un antiprisma de base un triángulo equilátero.

Supongamos ahora que en un vértice concurren dos pares de polígonos diferentes. La condición:

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

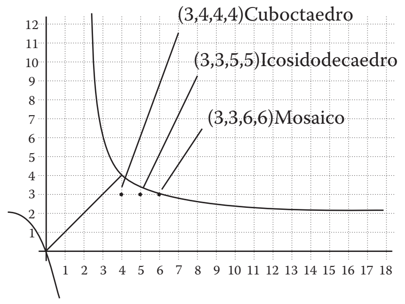
se convierte en

$$\frac{2}{m}+\frac{2}{q}=1$$

Si representamos la función

$$f(x)=\frac{2x}{x-2}$$

obtenemos la siguiente gráfica:



Hemos obtenido el cuboctaedro y el icosidodecaedro. También podemos observar que hay una solución que corresponde a un mosaico.

Vamos a considerar el caso de un par de polígonos iguales y de dos polígonos diferentes. La ecuación:

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

se convierte en

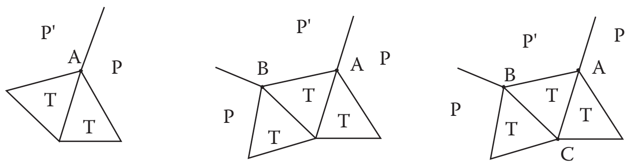
$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{2}{p}=1$$

Supongamos un valor fijo para p y consideramos la función

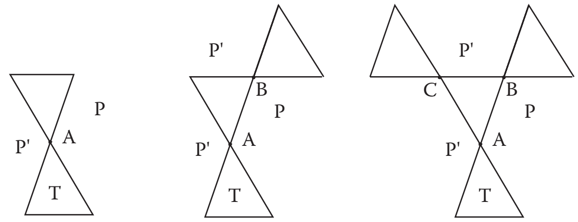
$$f(x)=\frac{px}{(p-2)x-p}$$

Si fijamos p = 3, resulta que con dos triángulos, estos no pueden ser adyacentes y los otros dos polígonos han de ser iguales, con lo que estaríamos en el caso anterior.

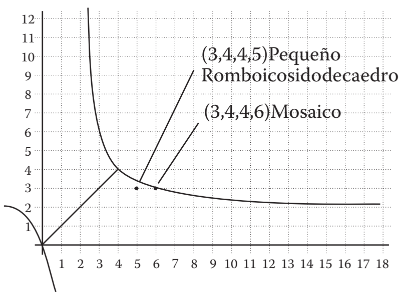
Supongamos dos triángulos adyacentes y dos polígonos diferentes concurriendo en A. Al considerar en el vértice B el mismo orden que en A tenemos que en el vértice C tienen que concurrir 3 triángulos, lo cual no puede ser. Por tanto, los dos triángulos tienen que ser opuestos por el vértice.



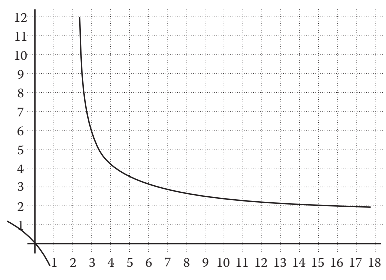
Si los dos triángulos son opuestos por el vértice, los otros dos polígonos han de ser iguales. En efecto, en el vértice A concurren P y P' además de los dos triángulos, en B también, pero en C concurren dos triángulos y dos P'. La única posibilidad es que $P = P'$.



Para p = 4 se obtienen los resultados siguientes:



Seguimos el proceso y representamos la función para p = 5:



Que no añade ninguna nueva posibilidad pero que nos permite suponer que al aumentar p la nueva función tiene las imágenes menores que la función anterior. En efecto, se cumple que

$$\frac{px}{(p-2)x-p} < \frac{(p+1)x}{(p-1)x-p-1}$$

para cualquier valor de p (siendo p un número mayor o igual que 3). Este resultado nos permite asegurar que para ningún valor de p superior a 4 se puede encontrar ninguna nueva solución.

Si suponemos que los 4 polígonos son diferentes, no hay ninguna posibilidad ya que la combinación mínima (3, 4, 5, 6) ya suma más de 360º.

Cinco polígonos

Si intervienen cinco polígonos regulares de lados m, n, p, q, y r respectivamente se ha de cumplir la siguiente ecuación para teselar el plano:

$$\frac{180''(m-2)}{m} + \frac{180''(n-2)}{n} + \frac{180''(p-2)}{p} + \\ + \frac{180''(q-2)}{q} + \frac{180''(r-2)}{r} = 360''$$

que simplificada queda:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{3}{2}$$

Si hay 3 polígonos diferentes, la suma de los ángulos interiores de cinco polígonos supera los 360º, por lo tanto con cinco polígonos sólo puede haber de dos clases diferentes. Caben las siguientes posibilidades: 4 y 1 ó 3 y 2.

Consideramos el caso de 4 polígonos iguales. En este caso la condición:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{3}{2}$$

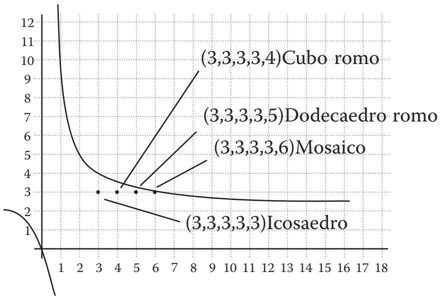
se convierte en

$$\frac{1}{m} + \frac{4}{n} = \frac{3}{2}$$

Si representamos la función

$$f(x)=\frac{8x}{3x-2}$$

obtenemos la gráfica siguiente (la ordenada indica el número de lados de los 4 polígonos iguales):



Además del icosaedro aparecen dos poliedros nuevos (el cubo romo y el icosaedro romo) y un mosaico.

Consideramos ahora el caso de 3 polígonos iguales. En este caso la condición:

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{3}{2}$$

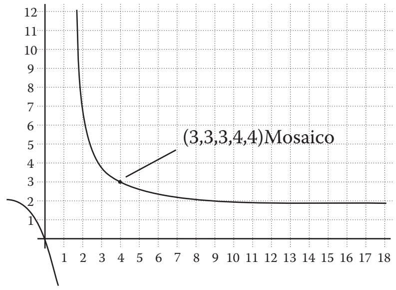
se convierte en

$$\frac{2}{m}+\frac{3}{n}=\frac{3}{2}$$

Si representamos la función

$$f(x)=\frac{6x}{3x-4}$$

obtenemos la gráfica siguiente (la ordenada indica el número de lados de los 3 polígonos iguales):



Con relación a esta solución hay que tener presente que hay dos posibles mosaicos semirregulares que se pueden formar con tres triángulos y dos cuadrados.

Seis polígonos
En este caso la única posibilidad es (3, 3, 3, 3, 3, 3). Es decir 6 triángulos equiláteros que forman mosaico.

Conclusiones

Consideramos que en este artículo hemos dado suficientes argumentos para justificar que el estudio de los posibles mosaicos regulares, los mosaicos semirregulares, los poliedros regulares, los prismas y antiprismas formados con polígonos regulares y los propuestos en el apartado anterior, permite que la distancia entre el problema propuesto y los recursos con los que cuenta el alumno para resolverlos no sea insalvable si hay una intervención adecuada del tutor que facilite su investigación. ■

Geometría gótica. Foto: Vicente Sierra Puparelli

SUMA 48
Febrero 2005, pp.15-21

Actividades de geometría fractal en el aula de secundaria (II)

La primera parte se dedicó al concepto de fractal, su dimensión y la generación de algunos tipos de fractales (determinista lineales y sistemas de funciones iteradas) y se hizo un estudio exhaustivo del triángulo de Sierpinski. Continuamos aquí con otras formas de generar fractales.

The first part of this article was devoted to the concept of fractal, its dimension and the generation of some kinds of them (deterministic, linear and systems of iterative functions) as well as to an exhaustive study of Sierpinski's triangle. The article goes on with other ways of fractal generation.

La primera parte de este artículo se dedicó al concepto de fractal, su dimensión y la generación de algunos tipos de fractales (determinista lineales y sistemas de funciones iteradas) y se hizo un estudio exhaustivo del triángulo de Sierpinski.

Continuamos aquí con otras formas de generar fractales.

Sistemas L

Además de los sistemas de funciones iteradas, hay otras de obtener objetos fractales. Una de ellas es mediante el uso de sistemas L. Fueron ideados en 1968 por el biólogo Aristid Lindenmayer y, mediante ellos, se podían describir diferentes tipos de plantas.

Un sistema L está formado por un elemento inicial, un conjunto de símbolos, (letras y caracteres especiales),y unas reglas de transformación de esos símbolos.

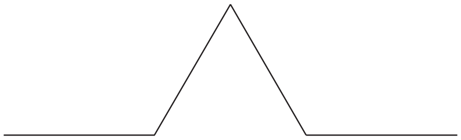
En los sistemas L cada símbolo puede ser sustituido por todo un conjunto de símbolos. Por ejemplo:

$$F \rightarrow F\text{-}F{+}{+}F\text{-}F \qquad + \rightarrow + \qquad - \rightarrow -$$

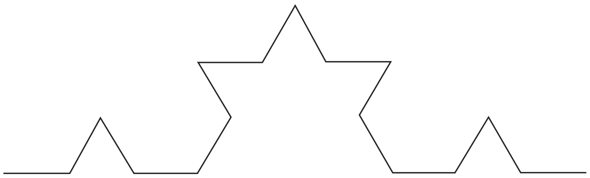
El elemento inicial es un segmento representado por la letra *F*, + significa giro de 60º en el sentido de las agujas del reloj y - en sentido contrario.

Comenzamos con F

F-F++F-F



F-F++F-F-F-F++F-F++F-F++F-F-F-F++F-F



Antonia Redondo Buitrago
IES Diego de Siloé. Albacete.
Mª José Haro Delicado
IES Al-Basit. Albacete.

Si continuamos se obtiene la curva de Koch. El triángulo de Sierpinski se obtendría con el sistema

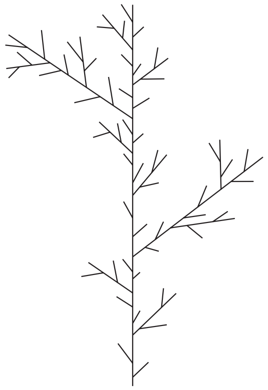
$F \rightarrow F\text{--}F\text{--}F\text{--}ff \qquad f \rightarrow ff \qquad + \rightarrow + \qquad - \rightarrow -$

La interpretación es la misma, sólo que *f* supone el mismo avance sin dejar huella.

La aplicación más importante de los sistemas L está en el diseño de modelos que permiten simular diversos tipos de plantas y árboles donde se da un proceso de ramificación. Un modelo sería

$F \rightarrow F(+F)F(-F)F \qquad + \rightarrow + \qquad - \rightarrow - \qquad (\rightarrow (\qquad) \rightarrow)$

Los giros a la izquierda "-" y los giros a la derecha "+" son de 28.58º, "(" significa el comienzo de una nueva rama que termina cuando aparece ")".



Actividad 16: Sobre cuadrículas o tramas de puntos y utilizando sistemas L genera diferentes tipos de árboles, como el que se muestra arriba.

Objetivos: Practicar con otra forma de generar objetos fractales y modelizar formas que se dan en la naturaleza.

Observaciones: Se vuelve a trabajar en esta actividad con la iteración y autosimilaridad. Se hace necesario el uso de la imaginación y se unen las matemáticas con la realidad intentando recrear modelos naturales con modelos matemáticos.
Una de las cosas más interesantes de esta actividad es que, después de haber dibujado en la cuadrícula el objeto, tienen que traducirlo a un sistema L, lo que implica razonar sobre conceptos geométricos y sobre conceptos relacionados con la geometría fractal.

Fractales deterministas no lineales
Se inicia aquí la introducción de un nuevo tipo de sistemas dinámicos que permiten ver la relación que se establece entre matemáticas y entorno que nos rodea.

El biólogo Robert May en 1976 publicó un modelo para el estudio de la evolución de ciertas poblaciones de insectos en el que daba la siguiente relación entre las poblaciones de dos años consecutivos $p(n+1) = k\, p(n)\, (L-p(n))$, donde $p(n)$ es el índice de la población en el año n, L es la población máxima estimada y k es una constante que depende únicamente del tipo de población (especie y estado) y de su ubicación, pero no depende de n.

Si en la ecuación anterior dividimos por L y llamamos x_n a $P(n)/L$, resulta:

$$\frac{p(n+1)}{L} = \frac{k\, p(n)\big(L - p(n)\big)}{L} \qquad \frac{p(n+1)}{L} = k\, x_n (1 - x_n) L$$

Si $kL = r$, se tiene $x_{n+1} = rx_n\, (1-x_n)$ siendo x_n mayor o igual que cero y menor o igual que uno y x_n el cociente entre la población del año n y la población máxima estimada. Dicha fórmula nos permite hallar la población en un determinado año conociendo la población en el año anterior. Como x_{n+1} ha de estar entre 0 y 1, la constante r ha de estar entre 0 y 4.

La ecuación anterior se puede representar mediante la función f: $[0,1] \rightarrow [0,1]$ definida por $f(x) = rx(1-x)$ con k perteneciente al intervalo abierto (0, 4). El par ([0, 1], f) constituye un sistema dinámico discreto. Este sistema dinámico tiene una sencilla función de transición (cuadrática) y, sin embargo, explica de forma precisa cómo se pasa del determinismo al caos.

Actividad 17: Para la función f: $[0,1] \rightarrow [0,1]$ definida por $f(x)=rx(1-x)$, ¿por qué ha de estar r entre 0 y 4, si se quiere que $f(x)$ esté entre 0 y 1?
Si $r=0$ averigua los puntos fijos y la órbita de cualquier punto del espacio de fases. Toma como punto inicial, por ejemplo, $x_0=0{,}4$.
Si $0 < r \leq 1$ ¿cuáles son los puntos fijos? Si $r \in (1, 3]$ ¿Cuál es el punto fijo existente?
Comprueba lo que sucede con las órbitas de los puntos del espacio de fases, si r está entre 1 y 3. Comprueba lo que sucede con las órbitas de los puntos del espacio de fases si $r \in (3{,}3.5]$ y si $r \in (3.5{,}4]$.
Si tienes en cuenta que estás analizando la evolución de una población, ¿qué significan los resultados obtenidos?

Objetivos: Profundizar en los conceptos de sistema dinámico discreto, órbita y punto fijo. Aplicar dichos conceptos a un caso real como es la evolución de poblaciones. Trabajar con la función cuadrática y razonar sobre ella y la importancia de sus elementos. Iniciar al alumno en la teoría del caos.

Observaciones: Con esta actividad se hace al alumno reflexionar sobre la importancia de la función cuadrática y el efecto de sus elementos: coeficiente principal, cortes con el eje horizontal y vértice.

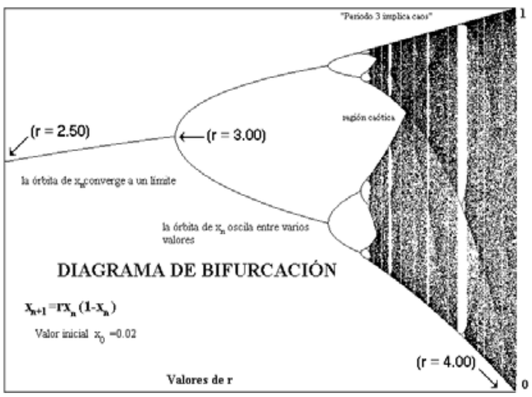
Al ir dando diferentes valores a r, se puede ir observando la evolución de las órbitas y en qué valores (puntos fijos) se establecen. Al ir aumentando el valor de r el periodo se va duplicando hasta llegar a un valor donde las órbitas van pasando de unos valores a otros sin ningún patrón de conducta fijo, lo que indica el salto al caos. Esta actividad ha de realizarse con diferentes valores iniciales para cada valor de r y tomar más de 50 iteraciones porque al principio no se manifiesta la evolución de las órbitas.

La geometría fractal cambiará a fondo su visión de las cosas. Jamás volverá a pensar lo mismo de todos estos objetos.

Es importante interpretar los resultados, para que se vea lo que significa la actividad, aplicada a evolución de poblaciones. El alumno debe tener claro lo que significa r y x_n, y a la vista de los resultados analizar la evolución de las poblaciones en función de los diferentes valores iniciales de x y de los diversos valores de r.

Tratamiento informático: Calculadora gráfica para obtener los valores de las órbitas y poder representarlas gráficamente. Este último aspecto es muy importante para que se aprecien los valores en torno a los cuales se estabilizan las órbitas.

Observemos el siguiente diagrama:



En este diagrama aparecen los puntos límite a los que convergen las órbitas de casi todos los puntos x_0 del intervalo (0, 1), según los diferentes valores de r. Este diagrama tiene estructura fractal. Se pone de manifiesto el concepto de autosemejanza porque dentro de él existen copias de sí mismo.

Si se observa el dibujo, denominado también diagrama de Vershultz o Feigenbaum, se aprecia que si $r = 3$ y hasta $r = 1+\sqrt{6}$ aparece una órbita periódica de periodo 2. A partir de ahí la órbita se duplica en otra de periodo 4 y así sucesivamente. Se busca el punto en el que se da el salto de la duplicación de las órbitas al caos.

Conjuntos de Julia y Mandelbrot

Vamos a ver otros dos objetos fractales deterministas no lineales pero de variable compleja. Nos centraremos en el estudio del sistema dinámico (C, f_c) donde $f_c(z) = z^2+c$, donde c y z son números complejos. Para determinados valores de c, hay puntos z_0 cuyas órbitas divergen hacia infinito y hay otros puntos z_0 cuyas órbitas convergen a un punto fijo o a un ciclo periódico. En medio de estos dos conjuntos de puntos queda una región infinitamente delgada que es la frontera del segundo conjunto, el formado por los puntos que convergen a un punto fijo o a un ciclo periódico. Dicha frontera es el llamado conjunto de Julia.

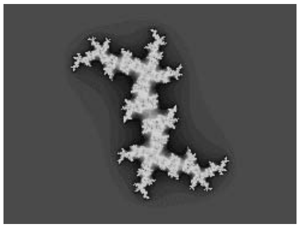
Actividad 18: Si $c=0$ ¿Qué conjunto de Julia se obtiene?

Objetivos: Trabajar con sistemas dinámicos complejos; recordar y manipular conceptos pertenecientes a la teoría de números complejos.

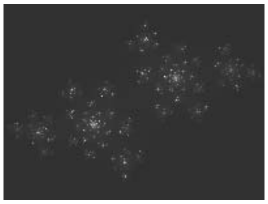
Observaciones: En este caso, el conjunto de Julia es la circunferencia de centro (0, 0) y radio 1. Si consideramos los puntos cuya distancia al centro es 1, se puede ver que muy próximos a ellos hay puntos, situados a una distancia del origen menor que uno, cuyas órbitas convergen a cero y puntos, situados a una distancia del origen mayor que uno, cuyas órbitas divergen a infinito. Las órbitas de los puntos de la circunferencia o bien convergen a un punto fijo o son periódicas, pero siempre permanecen acotadas.

Al variar el parámetro c, la variedad de conjuntos de Julia que puede aparecer es infinita y hay una diferencia entre ellos que es la siguiente: algunos aparecen como una pieza unida, mientras que otros parecen estar compuestos de infinitos fragmentos. Esto es debido a la autosimilitud, ya que si un conjunto está dividido en dos partes cada una de estas partes lo está en otras dos semejantes, etc. hasta quedar convertido en una especie de polvo fractal.

Para saber si el conjunto de Julia es o no conexo se puede utilizar la órbita de cero. Si ésta escapa al infinito, el conjunto aparece como polvo fractal. Si no escapa al infinito el conjunto es conexo.



Conjunto de Julia conexo

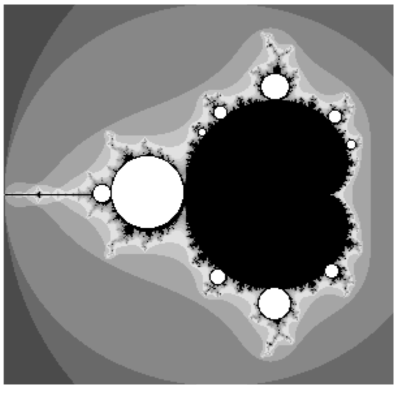


Polvo fractal

El conjunto de Mandelbrot es uno de los más conocidos y a la vez, uno de los más complejos. Su nombre se debe a su descubridor Benoit Mandelbrot.

Si clasificamos los conjuntos de Julia en dos grupos, conexos o no conexos, como se ha indicado más arriba, y consideráramos el conjunto de números complejos *c*, para los que el conjunto de Julia es conexo, es decir, el conjunto de puntos *c*, para los que la órbita de cero no tiende a infinito, nos encontraríamos con un objeto de extremada complejidad cuya frontera es un fractal. Dicho objeto no es autosemejante, pero existen en dicha frontera infinitas *casi* copias del mismo. La razón de hablar de *casi* copias es la de que no son exactamente iguales al original, ni hay dos copias iguales entre sí. El conjunto de Mandelbrot, además, es conexo, lo que quiere decir que todos su puntos permanecen unidos al conjunto principal como por una especie de finos hilos.

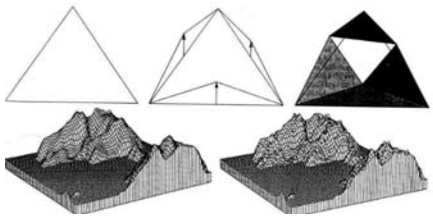
El conjunto de Mandelbrot contiene en su interior a todos los de Julia, lo que lo convierte en una enorme enciclopedia donde cada conjunto de Julia es una página.



Fractales aleatorios
Los fractales de los que se ha hablado hasta ahora son todos deterministas porque el azar no interviene en su formación. Incluso aquellos formados por sistemas de funciones iteradas (IFS), en los que se asigna una probabilidad a cada aplicación contractiva, son independientes de dicha probabilidad. Cuando nos referimos a fractales aleatorios el azar interviene en su obtención completamente. Veamos un ejemplo.

> Se comienza con un triángulo y tomamos los puntos medios de sus lados. Por dichos puntos medios, se trazan rectas perpendiculares al plano en el que está contenido el triángulo y sobre cada una de dichas rectas se trazan puntos por encima o por debajo del plano en el que está el triángulo. Se unen dichos puntos con los dos vértices del lado correspondiente y se obtienen otros tres triángulos. Sobre cada uno de los triángulos obtenidos se procede como en el inicial y se continua indefinidamente.

Con este método se obtienen modelos que pretenden aproximarse y simular superficies reales con el fin de estudiar la erosión de las montañas, las fallas tectónicas, los movimientos de las placas oceánicas y continentales y su relación con la aparición de volcanes o con la producción de movimientos sísmicos.



Jürgens, 1989

Aplicaciones de la geometría fractal

No podemos terminar sin hablar de las aplicaciones de los fractales como respuesta a la eterna pregunta de nuestros alumnos ¿y para qué sirve?

Turbulencias atmosféricas y corrientes marinas
Atractor de Lorenz: En 1963, Edward N. Lorenz del MIT descubrió un sistema de pocas variables que presentaba un comportamiento muy complejo. Estaba metido de lleno en el estudio de la predicción del tiempo y había observado que el clima sigue un modelo de comportamiento que es periódico, sin embargo nunca esos comportamientos se repetían con total exactitud. Tenía un ordenador y doce ecuaciones para poder simular el proceso del tiempo. Un día quiso ver de nuevo una secuencia en particular. Para simplificar, comenzó en medio de la secuencia y después de una hora la secuencia había evolucionado de forma diferente. Lo que ocurría es que el ordenador utilizaba seis decimales y Lorenz sólo había introducido tres.

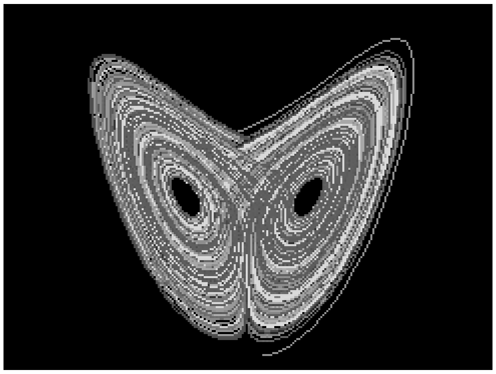
Este fenómeno común en la teoría del caos, es también conocido como sensibilidad a las condiciones iniciales. Un pequeño cambio en ellas puede cambiar drásticamente a largo plazo el comportamiento de un sistema. Es sencillamente imposible alcanzar un nivel de precisión de millonésimas. De esta idea partió Lorenz para afirmar que es imposible predecir el tiempo atmosférico con precisión.

Lorenz empezó buscando un sistema dinámico más sencillo con una notable dependencia de las condiciones iniciales. Su primer descubrimiento tenía doce ecuaciones y quiso una versión más simple que mantuviera esa condición. Simuló en el ordenador un sistema de tres ecuaciones diferenciales con parámetros *a, b y c*:

$$\frac{dx}{dt} = a(y - x) \qquad \frac{dy}{dt} = bx - y - xz \qquad \frac{dz}{dt} = xy - cz$$

Este modelo simula un fenómeno que se da en la atmósfera y en las corrientes marinas y en general en cualquier fluido donde las capas bajas ascienden al calentarse y las altas descienden al enfriarse. Ese fenómeno puede producir turbulencias cuando se produce el movimiento de ambos.

Para Lorenz fue sorprendente el hecho de que cualquier pequeña variación en las condiciones iniciales hacía obtener unos valores totalmente diferentes y, sin embargo, tras un número suficientemente grande de iteraciones se obtenía la misma figura (una doble espiral). Lorenz publicó sus resultados en 1963 y la imagen así obtenida se conoce como *atractor de Lorenz*. Desgraciadamente, sus resultados sólo aparecieron en un periódico meteorológico y sus descubrimientos no fueron conocidos hasta años más tarde cuando fueron redescubiertos por otro.

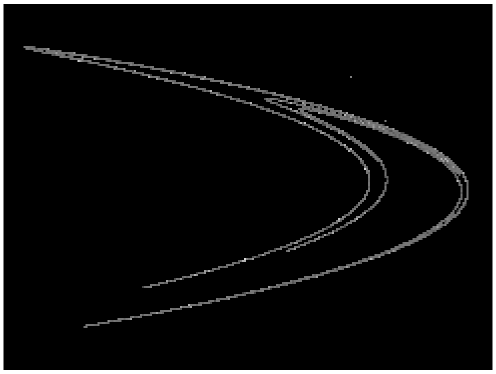


Atractor de Lorenz para a=10, b=17, c=1 y dt=0,001

El atractor de Lorenz conserva cierto orden y parece constituirse en dos superficies unidas entre sí, cada una de ellas consta de infinitas trayectorias que nunca llegan a cortarse. Éste fue el primer ejemplo de atractor caótico o extraño. Un atractor caótico es un fractal que revela más y más detalles según se va ampliando. Veamos otros ejemplos de atractores extraños o caóticos.

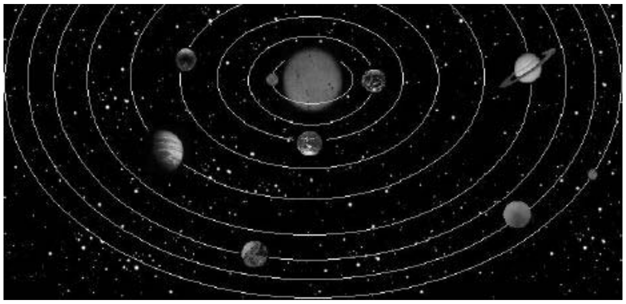
Atractor de Henon: Cinco años después del descubrimiento de Lorenz, un investigador del Instituto de Astrofísica de París diseñó un sistema dinámico para explicar las pequeñas modificaciones que aparecían en las órbitas de algunos cuerpos celestes y que los hacían seguir trayectorias no del todo elípticas. Su sistema dinámico fue el siguiente:

$$x_{n+1} = 1 + y_n - ax_n^2,\ y_{n+1} = bx_n \text{ donde } a = 1{,}4 \text{ y } b = 0{,}3$$



Este atractor desafía el análisis matemático. Genera valores aparentemente aleatorios y que al ser dibujados en la pantalla aparecen dispersos como una niebla, pero cuando el número de iteraciones es suficientemente alto configuran el atractor, siendo imposible saber si dos puntos sucesivos están cerca o lejos (Barrallo, 1993).

Estabilidad del sistema solar



Como la masa de los planetas es 1000 veces menor que la del sol, se podría pensar en despreciar el movimiento de éste y las fuerzas entre aquellos. Se obtiene un sistema con todos sus movimientos regulares, en los que cada planeta describe una órbita elíptica. Si se tienen en cuenta las interacciones entre los planetas, las órbitas se modifican, y puede darse la posibilidad de que alguno de ellos comience a alejarse del sol y siga una órbita caótica que lo expulse al espacio exterior.

En el siglo XIX, muchos astrónomos quisieron probar que esto no podía pasar y que el sistema solar era estable, pero no se consiguió. Incluso el rey Oscar II de Suecia ofreció un premio a quien aportara luz a la cuestión. El premio se lo llevó Henri Poincaré que no resolvió el problema pero sí contribuyó a esclarecerlo. Más tarde Kolmogorov, Arnold y Moser en su teorema (teorema de Kam) afirmaron que las perturbaciones pequeñas en un sistema introducen turbulencia y caos, pero respetan parte del orden, dependiendo proporcionalmente de la intensidad perturbadora. (Rañada, 1986). Las fuerzas que existen entre los planetas producen perturbaciones en las órbitas de los mismos, tanto mayores cuanto mayores sean las fuerzas de atracción. Aunque la mayoría de ellos siguen caminos parecidos a órbitas elípticas, no se puede afirmar que alguna vez algún planeta no pueda ser expulsado.

Estos atractores caóticos como ya se ha visto en anteriores ejemplos están presentes en la dinámica de los más insospechados procesos de la naturaleza. Siempre son procesos que en su evolución *gastan energía*, son sistemas disipativos y las leyes que los gobiernan son no lineales.

Fronteras

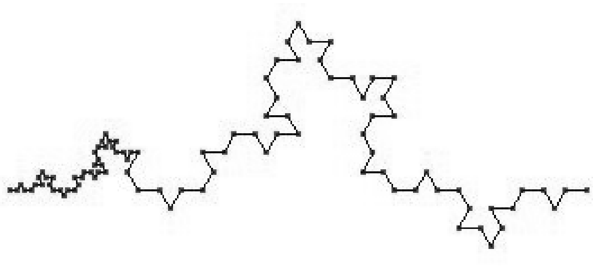
La formación de una costa o de la orilla de un río son procesos físicos similares y pueden ser simulados mediante modelos matemáticos que dan lugar a objetos fractales. Se establece el contacto y la interacción entre el agua y la tierra y se producen grandes modificaciones en los perfiles de las mismas. Por ejemplo, la formación de una costa se puede simular mediante la curva de Koch. La formación de la curva de Koch sigue un patrón rígido, sin embargo su dimensión fractal es de 1,26128... parecido al 1,3 que obtuvo Richardson como dimensión fractal de la costa de Gran Bretaña.

Actividad 19: El proceso determinista para obtener la curva de Koch puede modificarse para que se adapte mejor al proceso aleatorio de formación de una costa. ¿Cómo modificarías el proceso de construcción de dicha curva para lograrlo?

Objetivos: Permitir que el alumno use la imaginación y manipule un modelo determinista para simular un objeto real.

Observaciones: Utilizando tramas triangulares de puntos o bien el programa Cabri Géomètre, se pueden establecer manipulaciones sobre la curva de Koch para simular cabos y golfos más o menos pronunciados.

Tratamiento informático: Programa Cabri Géomètre. Se puede crear una macro que se aplique a los puntos que forman el segmento en vez de al segmento. De esta forma se provoca el hundimiento o la protuberancia que daría lugar a golfos o cabos.



Sistemas arteriales y venosos

Según Goldberger y cols. (1990), en el cuerpo humano nos encontramos con muchas estructuras llamadas fractaliformes, que se pueden ver, por ejemplo, en las redes nerviosas, las redes de vasos sanguíneos y el sistema de tubos pulmonares encargados del transporte y evacuación de oxígeno y anhídrido carbónico. Muchos otros órganos pueden, también, ser fractales, pero sus dimensiones no están todavía cuantificadas.. Las estructuras fractaliformes son fundamentales en el funcionamiento del corazón humano. Por ejemplo, hay una red fractaliforme de arterias y venas coronarias que aportan sangre a los músculos del corazón y la extraen de ellos. Dos investigadores de la Universidad de Washintong (Van Beek y Bassingthwaighte) utilizaron la geometría fractal para explicar anomalías en el flujo sanguíneo que penetra en un corazón sano. Si se interrumpe este flujo arterial se produce el infarto de miocardio. La estructura fractal también se manifiesta en la forma de ramificarse ciertos músculos del corazón y en el sistema que conduce impulsos eléctricos a los músculos cardíacos.

> *Las fuerzas que existen entre los planetas producen perturbaciones en las órbitas de los mismos, tanto mayores cuanto mayores sean las fuerzas de atracción.*

Las ramificaciones y repliegues fractales amplían mucho la superficie de las áreas de absorción, como el intestino, de distribución o recolección (vasos sanguíneos, conductos biliares o tubos bronquiales) y de proceso de información (nervios). Las estructuras fractales son robustas y resistentes a las lesiones, y surgen como resultado del lento desarrollo y evolución del embrión humano.

Se ha observado que en personas sanas y sin ningún tipo de alteración el número de glóbulos blancos varía de un día para otro. Sin embargo, en algunos casos de leucemia dicho número se mantiene estable o varía periódicamente. Lo mismo ocurre con el ritmo cardíaco y otros aspectos relacionados y controlados por el sistema nervioso. No obstante, la regularidad y el comportamiento caótico no siempre están relacionados con la enfermedad y la salud, respectivamente.

Un pequeño cambio en las condiciones iniciales de un sistema puede cambiar drásticamente a largo plazo el comportamiento de éste.

Una de las aplicaciones más recientes de la geometría fractal, ha sido utilizar la dimensión fractal de la superficie celular para caracterizar células de diferentes tipos. Es posible distinguir células cancerosas de células sanas con la ayuda de esta característica. La primera aplicación ha sido para distinguir células de pacientes con leucemia de células normales (Wolfganf Bauer, Michigan State University).

Actividad 20: Busca información donde se pongan de manifiesto los recientes descubrimientos relativos al uso de la geometría fractal en medicina y más concretamente en su posible influencia en el tratamiento de algunas enfermedades como el cáncer.

Objetivos: Mostrar al alumno aplicaciones de la geometría fractal en campos relacionados con su entorno.

Observaciones: Para desarrollar esta actividad se puede sugerir a los alumnos que busquen información en todo tipo de lugares: bibliotecas, consultando sobre todo revistas científicas y de divulgación, y bases de datos de Universidades. También se puede encontrar muchísima información fiable en Internet.

Tratamiento informático: Ordenador con conexión a Internet para buscar información. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADDISON, P. S. (1997): *Fractal and Chaos. An illustrated course*, Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia.

BAI-LIN, H. (1990): *Chaos II*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore.

BARRALLO, J: (1993): *Geometría fractal: Algorítmica y representación*, Anaya Multimedia, Madrid.

BERGÉ, P., POMEAU, Y and VIDAL, CH. (1984): *Order within chaos. Towards a deterministic approach to turbulence*, Hermann, París (France).

ÇAMBEL, A.B. (1993): *Applied chaos theory. A Paradigm for complexity*, Academic Press, INC. San Diego.

CRUTCHFIELD, J.P. (1987): "Caos", *Investigación y Ciencia*, Febrero de 1987, 78-90.

DEVANEY, R.L. (1995): "Chaos in the Classroom", disponible en http://math.bu.edu/DYSYS/chaos-game.

ESCOHOTADO, A (1999): *Caos y Orden*, Espasa Calpe, Madrid.

FALCONER, K. (1990): FRACTAL GEOMETRY. *Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley & sons Ltd., Chichester (England).

FIGUEIRAS, L. y cols. (2000): "Una propuesta metodológica para la enseñanza de la geometría a través de los fractales", *Suma*, n.º 35, 45-54.

FROYLAND, J. (1992): *Introduction to Chaos and Coherence*, Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia.

GOLBERGER, A. L.; RIGNEY, D.R. y WEST, B.J. (1990): "Caos y fractales en la fisiología humana", *Investigación y Ciencia*, n.º 163, 31-39.

GUZMÁN, M. y cols. (1993): *Estructuras fractales y sus aplicaciones*, Labor, Barcelona.

JÜRGENS, H. ; PEITGEN, H. ; SAUPE, D. (1989): "El lenguaje de los fractales", *Investigación y Ciencia*, n.º 169, 46-57.

MANDELBROT, B. (1975): *La geometría fractal de la naturaleza*, Tusquets, Barcelona.

MANDELBROT, B. (1987): *Los objetos fractales. Forma , azar y dimensión*, Tusquets, Barcelona.

MANKIEWICZ, R (2000): *Historia de las matemáticas: del cálculo al caos*, Paidós, Barcelona.

MARTÍN, M.A.; MORÁN, M. y REYES, M. (1998): *Iniciación al caos*, Síntesis, Madrid.

RAÑADA, A. (1986): "Movimiento caótico", *Investigación y Ciencia*, Marzo de 1986, 66-67.

SANDER, L.M. (1987): "Crecimiento fractal", *Investigación y Ciencia*, Marzo de 1987, 91-98.

SCHUSTER, H.G. (1989): *Deterministic Chaos An Introduction*, VCH Verlags-gesellschagt mbH, D-6940, Weinheim (Federal Republic of Germany).

TAKAYASU, H. (1992): *Fractals in the physical Sciences*, John Wiley & sons Ltd., Chichester (England).

Geometría mudéjar. Foto: Vicente Sierra Puparelli

48
Febrero 2005, pp. 23-32

Icosaedro y Φ

En el curso 1999/2000 nuestro Departamento realizó una actividad para conmemorar el Año Mundial de las Matemáticas. Dicha actividad trató sobre el estudio del icosaedro y su conocida construcción sobre tres rectángulos áureos ortogonales. Posteriormente, las firmantes del artículo retomamos el estudio desde una perspectiva más analítica. Intentando demostrar la unicidad de la construcción encontramos, sorprendentemente, que hay otra forma de intersecar los rectángulos generadora del poliedro. El artículo desarrolla la demostración y describe brevemente la actividad.

In the academic year 1999/2000 our Department performed an activity to commemorate the Mathematics World Year. This activity treated about the study of the icosahedron and its well-known construction on three perpendicular golden rectangles. Later we took the study again from a more analytic perspective. Trying to prove the uniqueness of the construction, we found surprisingly that there was another way to intersect the rectangles that could generate the polyhedron. This is what we have demonstrated in this article and described a bit the activity too.

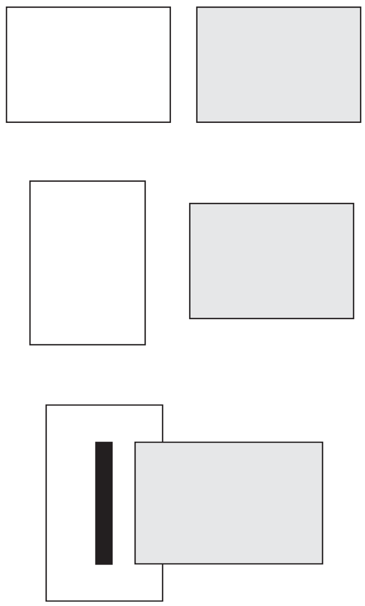
Durante el curso académico 1999/2000, el Departamento de Matemáticas del Instituto de Enseñanza Secundaria Antonio García Bellido de León, del que somos profesoras, decidió realizar una actividad conmemorativa del Año Mundial de las Matemáticas.

Dicha actividad, que se describe en el apartado siguiente, trató sobre el estudio del icosaedro y su conocida construcción a partir de tres rectángulos áureos perpendiculares.

Las firmantes del artículo nos planteamos, posteriormente, retomar dicho estudio desde una perspectiva más analítica.

Intentando probar la unicidad de la construcción nos encontramos con la sorpresa de que había otra manera de cortarse los rectángulos generadora del poliedro, como demostraremos en este artículo.

Aunque los matemáticos tendemos a ordenar y axiomatizar nuestras exposiciones, vamos a intentar en este artículo mantenernos fieles también a la heurística de nuestro particular proceso.



Una curiosa construcción

a) Si cortamos perpendicularmente y oponiendo dimensiones dos rectángulos áureos iguales de la siguiente manera:

Ángeles Fernández García
Montserrat Prieto Morera
IES Antonio García Bellido. León.

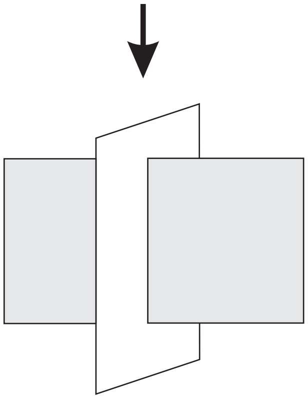


Figura 1

Resulta que al unir cada vértice de un rectángulo con los dos vértices más próximos del otro, se obtienen ocho nuevos segmentos iguales de longitud *a*, siendo *a* la dimensión menor de los rectángulos áureos;

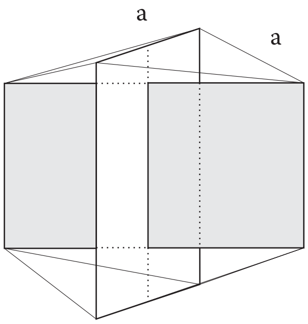


Figura 2

b) Repitiendo el proceso con un tercer rectángulo áureo igual a los anteriores, observamos que este nuevo rectángulo interseca a los otros de la misma manera:

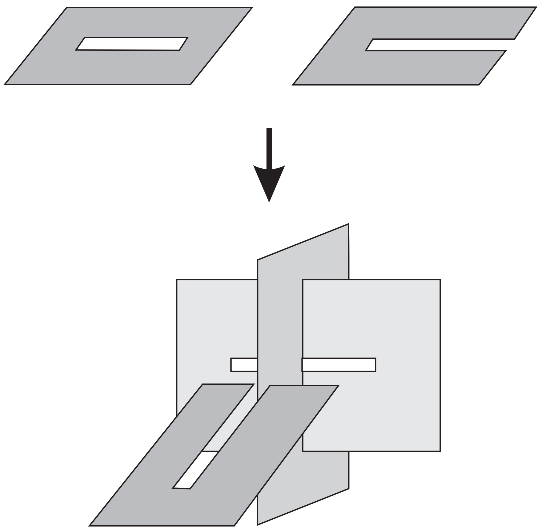


Figura 3

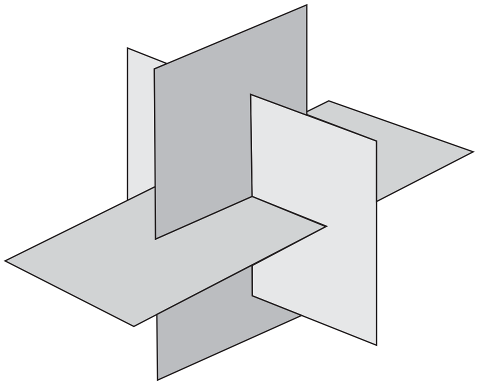


Figura 4

Ahora, se obtienen ocho segmentos del tercer rectángulo con el primero y otros ocho de la intersección del tercero con el segundo:

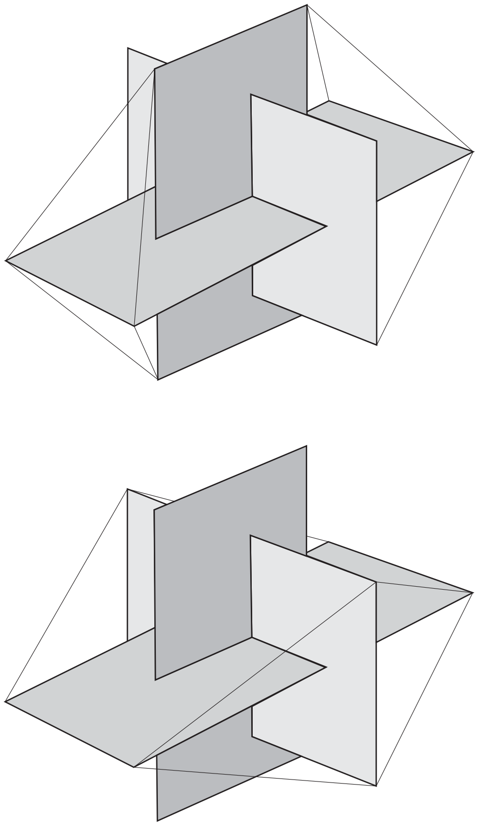


Figura 5

Es decir, llevamos 8x3 = 24 nuevas aristas de longitud *a* que con las 2x3 = 6 aristas también de longitud *a* de los tres rectángulos nos dan las 30 aristas iguales que forman 20 triángulos equiláteros y claramente sólo han hecho falta 12 (4x3) vértices (de forma sencilla se observa que en cada uno confluyen 5 aristas y solo una es lado de uno de los rectángulos).

[Nombre Griego. eikosaedron, De eikosi veinte + hedra asiento, base.]

De la lectura del libro Divina Proporción (Pacioli 1509), se deduce que ciertos geómetras de la época conocían las relaciones áureas en el icosaedro. Algunas de estas relaciones son la base de la conocida construcción anterior.

Demostración

Sea el rectángulo áureo de medidas: a y $a\phi$

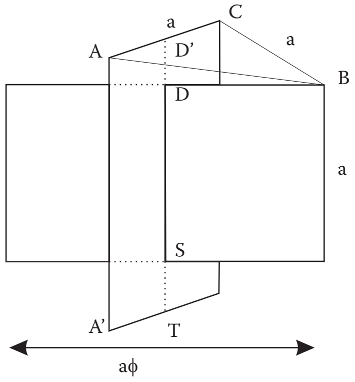


Figura 6

$$\overline{DD'} = \frac{\overline{D'T} - \overline{DS}}{2} = \frac{\Phi a - a}{2}$$

$$\overline{D'B}^2 = \overline{D'D}^2 + \overline{DB}^2 = \left(\frac{\Phi a - a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\Phi}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{2a^2\Phi^2 - 2a^2\Phi + a^2}{4} = \frac{a^2}{4}(2\Phi + 2 - 2\Phi + 1) = \frac{3}{4}a^2$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD'}^2 + \overline{D'B}^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = a^2 \Rightarrow \overline{AB} = a$$

De la lectura del libro Divina Proporción (Pacioli 1509), se deduce que ciertos geómetras de la época conocían las relaciones áureas en el icosaedro.

Investiguemos el proceso anterior

Sea ahora un icosaedro de arista a.

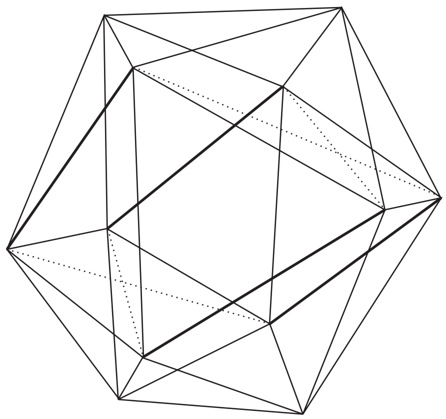


Figura 7

Enfrentemos aristas opuestas. Se forman rectángulos, cuyos lados menores son los lados del icosaedro, luego de medida a, y cuyos lados mayores son las diagonales de los pentágonos regulares que se forman con cinco caras del icosaedro que concurren en el mismo vértice, por lo tanto su medida es ϕa como comprobaremos al final de este apartado (el resultado es un clásico de la matemática). Así pues son rectángulos áureos.

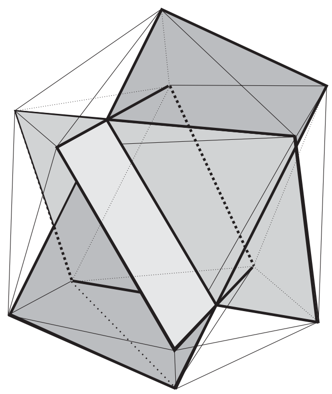
El icosaedro tiene 30 aristas; si las enfrentamos de dos en dos según acabamos de hacer, obtenemos 15 rectángulos áureos iguales.

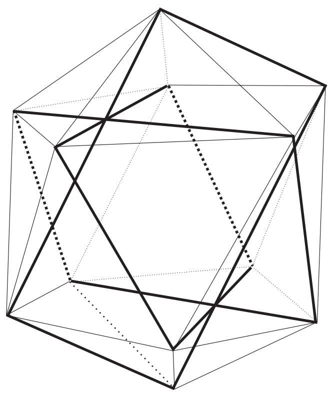
Pues bien, siempre que se tomen tres cualesquiera de estos rectángulos, con la condición de que dos de los lados menores (aristas) no concurran en el mismo vértice del icosaedro, generarán el icosaedro.

Todas las posibilidades que se obtienen se reducen a estas dos:

Caso 1: Que los tres rectángulos se intersequen bajo ángulos de 90º, es decir la construcción del principio.

Caso 2: Que los tres rectángulos se corten bajo ángulos de 60º de la siguiente forma:





Figuras 8 y 9

Para justificar esta afirmación necesitamos una serie de resultados.

Pentágono y ϕ

Para hallar la relación entre la diagonal y el lado del pentágono regular parece más sencillo dar los siguientes pasos:

1º) Demostrar que los triángulos *BED* y *BCF* son semejantes, algo casi evidente si tenemos en cuenta que las diagonales dividen los ángulos *A, B, C, D* y *E* en tres partes iguales y que los triángulos citados son isósceles.

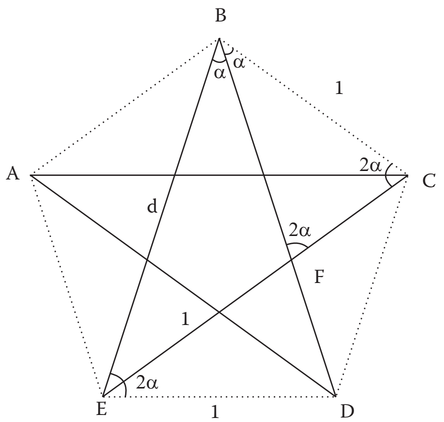


Figura 10

2º) Supongamos que las diagonales del pentágono miden d unidades y consideramos el pentágono de lado 1, que nos simplificará los cálculos.

Si *BED* y *BFC* son semejantes,

$$\Rightarrow \frac{\overline{BE}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} \Rightarrow \frac{d}{1} = \frac{1}{d-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(d-1) = 1 \Rightarrow d^2 - d - 1 = 0 \Rightarrow d = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

es decir,

$$d = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Caso 1: Que los tres rectángulos se intersequen bajo ángulos de 90º.

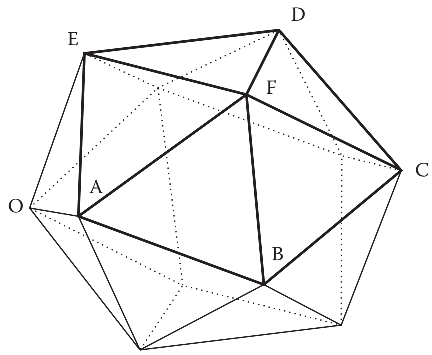


Figura 11

Por ejemplo, en la pirámide pentagonal *ABCDEF* tomemos el rectángulo áureo de lado menor *AB*; el rectángulo perpendicular a éste en esta pirámide es el de lado menor *FD*. El tercer rectángulo perpendicular a estos dos solo puede ser el de lado menor *OE*.

Si en lugar de empezar con el lado *AB*, comenzamos por otro cualquiera de los cinco lados restantes del pentágono *ABCDE*, obtenemos otra terna de rectángulos áureos perpendiculares. Por lo tanto hay cinco ternas de rectángulos perpendiculares que generan el icosaedro; pero en esencia son la misma.

Caso 2: Que los rectángulos se corten bajo ángulos de 60º.

En la figura 11, habíamos partido del rectángulo áureo de lado menor AB de la pirámide pentagonal *ABCDEF*; el siguiente rectángulo áureo cuyo lado menor no parta del mismo vértice que el anterior, y que no sea perpendicular a él, puede ser el que tenga por lado menor *EF*, en cuyo caso el tercer rectángulo que cumple la condición solo puede ser el de lado menor *DC*.

Si en lugar de comenzar con el lado *AB*, comenzamos con cualquier otro de los cinco lados restantes del pentágono *ABCDE*, y procedemos de la misma forma, obtenemos otra terna de rectángulos áureos generadores formando ángulos de 60º entre sí.

Estas cinco ternas se obtienen haciendo giros consecutivos (en el sentido de las agujas del reloj) de 72º alrededor de la diagonal del icosaedro con vértice en *F*. Pero, si a la terna *AB*, *EF*, *DC*, le efectuamos un giro de 72º alrededor de la diagonal del icosaedro con vértice en *A* (origen del segmento *AB*), también en sentido de las agujas del reloj, obtenemos otra terna distinta; y si esto lo repetimos con cada una de las cinco ternas anteriores, obtenemos otra distinta por cada una de las primeras. En total obtenemos diez ternas generadoras distintas que se cortan bajo ángulos de 60º (ó 120º). Pero en esencia son todas idénticas.

Evidentemente si los giros se hacen en sentido contrario a las agujas del reloj, las cuentas salen igual.

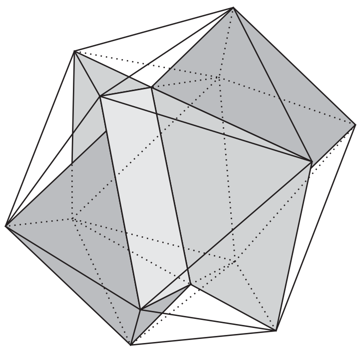


Figura 12

El icosaedro tiene 30 aristas; si las enfrentamos de dos en dos, obtenemos 15 rectángulos áureos iguales. Tres cualesquiera de estos, con la condición de que dos de los lados menores (aristas) no concurran en el mismo vértice del icosaedro, generaran el icosaedro.

Veámoslo de otra forma.

Ya hemos visto que cada vértice del icosaedro de arista *a* sustenta una pirámide pentagonal.

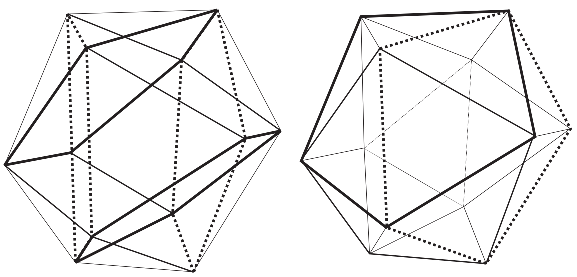


Figura 13

y además dos vértices no consecutivos ni opuestos lo son a su vez del pentágono regular de lado *a*, luego la recta que los une es siempre una diagonal de dicho pentágono:

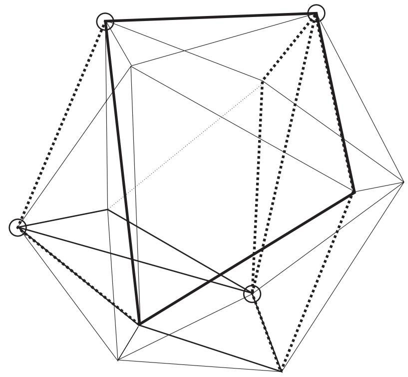


Figura 14

Si en cada pentágono trazamos *todas* las diagonales encontramos un nuevo pentágono de lado a/Φ^2, como veremos más adelante. O sea, 12 nuevos pentágonos puesto que hay 12 pirámides pentagonales distintas.

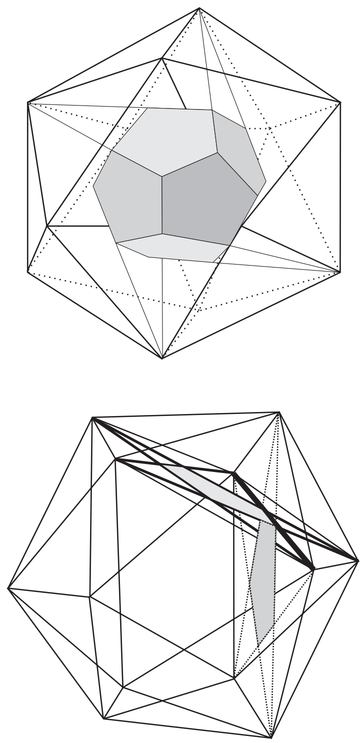


Figura 15

Como cada diagonal de los pentágonos es común a las dos pirámides pentagonales que forman dos vértices consecutivos (la arista del icosaedro que los une es perpendicular a dicha diagonal), resulta que los doce pentágonos son las caras de un dodecaedro de arista a/ϕ^2.

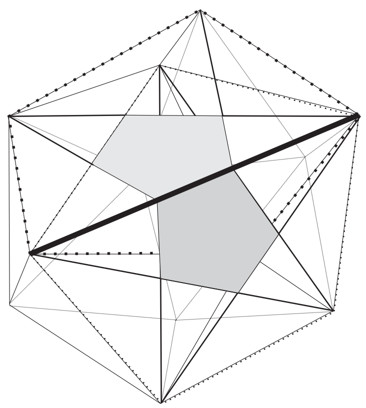


Figura 16

Así, las 5x12=60 diagonales de los pentágonos se cortan de tres en tres para producir los 60:3=20 vértices del dodecaedro.

La intersección de dichas diagonales es interesante: Dos de ellas son siempre coplanarias y son no concurrentes en un vértice del pentágono (aunque se cortan claramente en un vértice del dodecaedro). La tercera, une la cúspide de la pirámide que tiene como base al pentágono que determinan las dos diagonales anteriores, con la cúspide de la pirámide contigua que tiene común con la anterior la arista determinada por ambas diagonales:

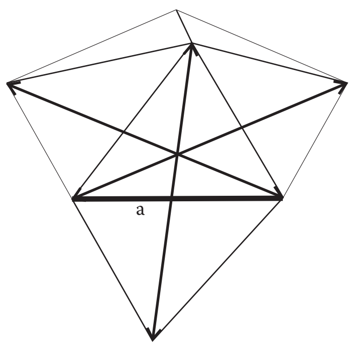


Figura 17

Lo anterior constituye otra forma de ver las tríadas de rectángulos áureos no ortogonales. Dos rectángulos tienen el lado aϕ en dos diagonales (no concurrentes en un vértice) de un mismo pentágono. El tercer rectángulo tiene el lado aϕ sobre la diagonal que une la cúspide de la pirámide que tiene como base al pentágono que determinan las dos diagonales anteriores, con la cúspide de la pirámide contigua que tiene común con la anterior la arista determinada por ambas diagonales.

En el dibujo, aparte de la construcción, se ve cómo tres rectángulos de este tipo determinan los 12 vértices de un icosaedro. La vista del poliedro es aquella en la que se oponen dos pentágonos en planos paralelos al plano horizontal.

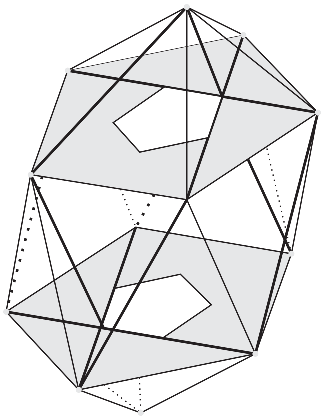


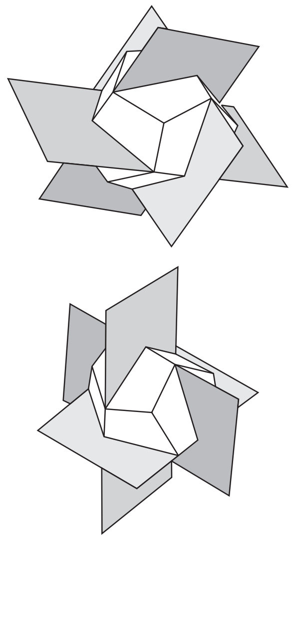
Figura 18

Como se ha comentado, el número de rectángulos áureos distintos del icosaedro es 15 pues enfrentamos dos a dos las 30 aristas opuestas del mismo.

Si intersecamos tres de ellos de forma ortogonal tenemos 5 construcciones distintas (partiendo en cada caso de las cinco aristas que concurren en un punto) que utilizan los 5x3 = 15 rectángulos aludidos.

Por otro lado si la construcción es no ortogonal, hay 10 formas distintas de elegir las tríadas de rectángulos, puesto que cada una de ellas se interseca a lo largo de una diagonal del dodecaedro. Como el dodecaedro tiene 10 diagonales resulta: 10 diagonales por tres rectángulos que determinan cada diagonal = 30 rectángulos; pero como cada rectángulo participa en dos tríadas distintas (cada diagonal de los pentágonos del icosaedro contiene dos vértices distintos del dodecaedro), 30=2 x 15 (n.º rectángulos áureos distintos).

Caso 1



Caso 2

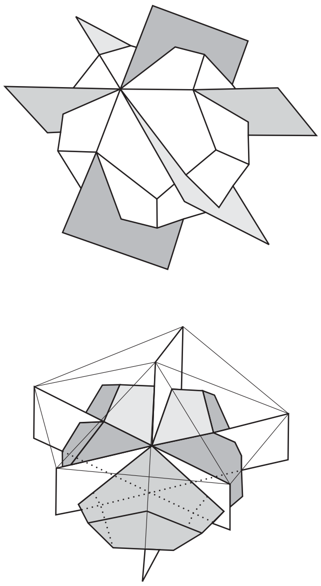


Figura 19

Estudio del ángulo de corte

De lo anterior observamos que en estas ternas, dos rectángulos se cortan a lo largo de la recta que une dos vértices opuestos del dodecaedro. Este dodecaedro (no inscrito) es el que se forma en el interior del icosaedro al trazar todas sus diagonales.

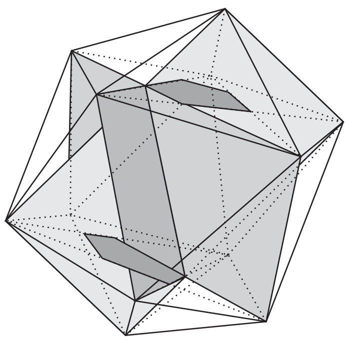


Figura 20

a) Relaciones entre el rectángulo y este dodecaedro:

En la figura 21 tenemos una construcción clásica (pentalfa).

Los triángulos: *ABC* y *CDE* son semejantes por tener los ángulos iguales, y

$$\overline{CE} = \Phi L_P$$

$$\Rightarrow \frac{\Phi L_P}{L_P} = \frac{L_P}{b} \Rightarrow b = \frac{L_P}{\Phi}$$

$$x = \Phi L_P - 2b = \Phi L_P - \frac{2L_P}{\Phi} = \frac{L_P\left(\Phi^2 - 2\right)}{\Phi} =$$

$$= \frac{L_P\,(\Phi - 1)}{\Phi} = L_P\left(1 - \frac{1}{\Phi}\right) = \frac{L_P}{\Phi^2}$$

$$2b + x = 2\frac{L_P}{\Phi} + \frac{L_P}{\Phi^2} = \frac{L_P\,(2\Phi + 1)}{\Phi^2} = \Phi L_P$$

Esta medida x es la del lado del dodecaedro que se forma en el interior del icosaedro al trazar todas las diagonales en las bases pentagonales de las 12 pirámides.

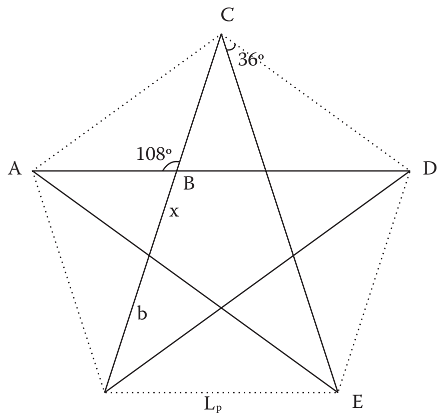


Figura 21

b) Sean ahora dos de los rectángulos áureos que se cortan de forma no ortogonal, es decir a lo largo de una diagonal del dodecaedro:

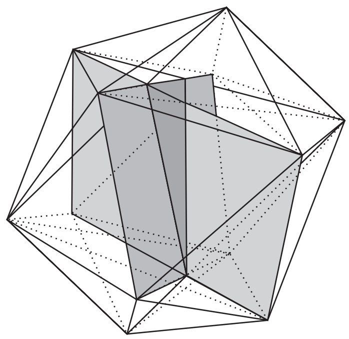


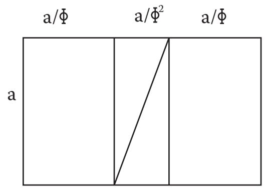
Figura 22

a = lado del icosaedro

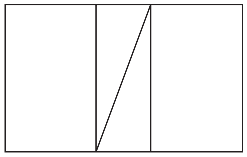
a/ϕ^2= lado del pentágono que es cara del dodecaedro

$a/\phi + a/\phi^2 + a/\phi = a\phi$ (largo).

Es curioso observar que los dos rectángulos de medidas a y a/ϕ son nuevamente áureos.



rectángulo 1



rectángulo 2

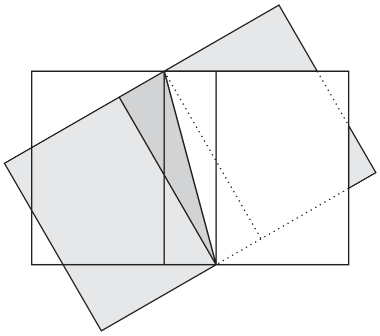
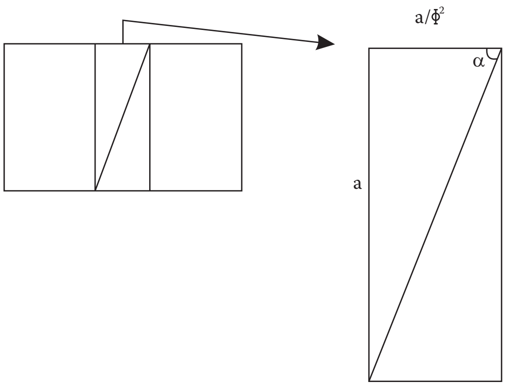


Figura 23

Estudio del corte:



α = arcotan ϕ^2

α = 69º 5´41,1...”

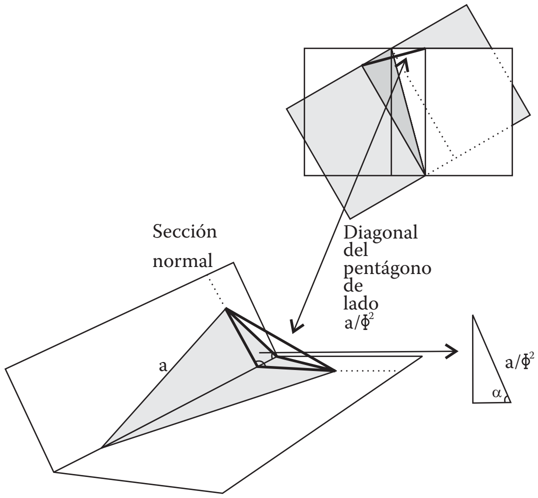


Figura 24

Sea el ángulo que forma el lado menor con la diagonal en el rectángulo de lados a y a/ϕ^2,

$$sen\alpha = \frac{\Phi^2}{\sqrt{1+\Phi^4}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\Phi^4}}$$

$$\tan\alpha = \Phi^2$$

Como

$$\sqrt{\Phi^4+1} = \Phi\sqrt{3}$$

se obtiene

$$sen\alpha = \frac{\Phi}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\Phi\sqrt{3}}$$

$$\tan\alpha = \Phi^2$$

Dado que uno de los triángulos es el formado por dos lados consecutivos del pentágono y la diagonal correspondiente, al ser el lado del pentágono a/ϕ^2, la diagonal vale a/ϕ por ser ϕ veces el lado.

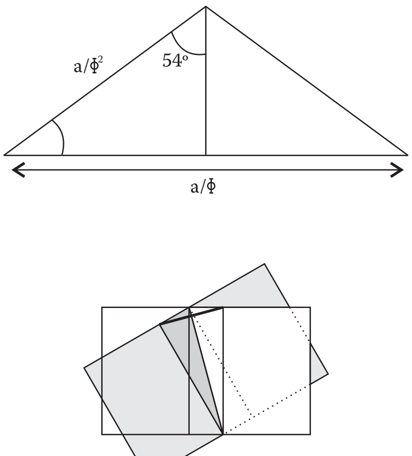


Figura 25

Por otra parte, el triángulo rectángulo de la figura en que se estudia el corte está resuelto:

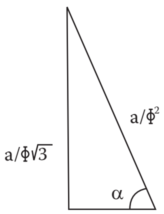


Figura 26

$$\frac{a}{\Phi^2} sen\alpha = \frac{a}{\Phi\sqrt{3}}$$

Luego, para calcular el ángulo de la sección normal, basta considerar el triángulo isósceles:

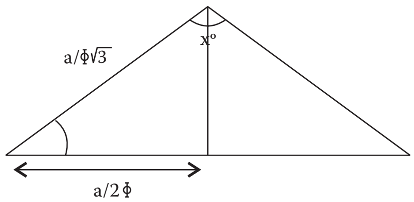


Figura 27

$$sen\frac{x}{2} = \frac{\frac{a}{2\Phi}}{\frac{a}{\Phi\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

y por lo tanto $x/2 = 60º$ y $x = 120º$.

Así pues, el corte de ambos planos es de 120º ó 60º.

Es decir solo hay dos tipos de ternas de rectángulos áureos que generen al icosaedro. Todas las demás posibilidades se reducen a una de éstas estudiadas.

Un icosaedro particular y ϕ

a) Un poliedro en el Instituto

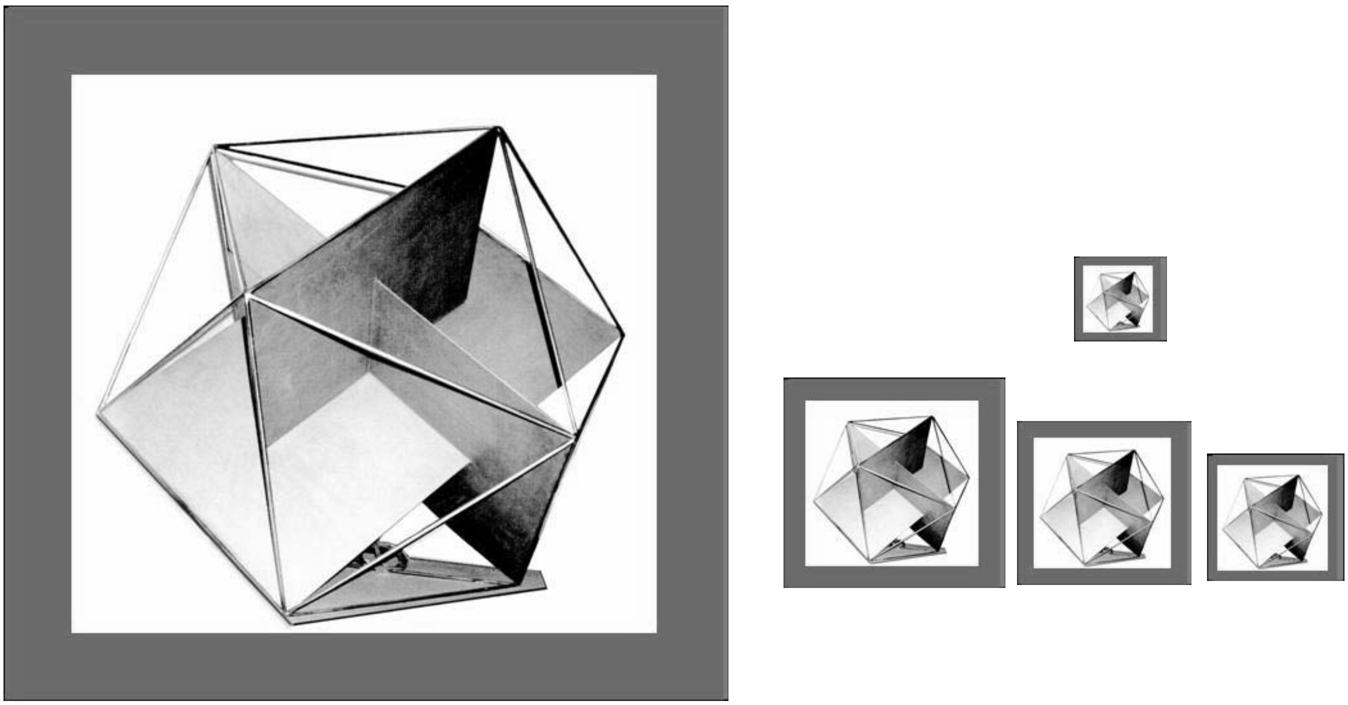
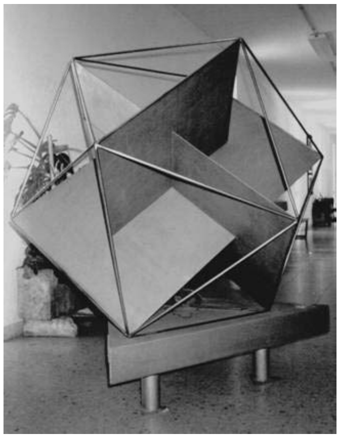


Figura 28

Nuestra primera idea fue construir una escultura matemática en la que se vieran reflejados el mayor número de resultados geométricos y algebraicos, que fuera atrayente por su belleza, y que, de este modo, quedara como una contribución del Departamento de Matemáticas del IES Antonio García Bellido al Año Mundial de las Matemáticas.

Este cuerpo poliédrico formado por 20 triángulos equiláteros y que está sustentado por tres rectángulos áureos que se intersecan bajo ángulos de 90º nos pareció la mejor idea, ya que al tener sólo las aristas deja al descubierto toda su estructura interna.



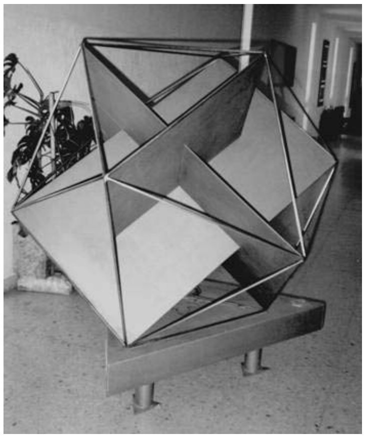


Figura 29. Icosaedro en el pasillo del IES *Antonio García Bellido*

b) Logotipo del Departamento

La escultura matemática lleva varios cursos presidiendo un pasillo atestado a veces de alumnos. El polvo de las sucesivas obras a las que ha estado sometido el Centro puede, en ocasiones, apagar su brillo, pero continúa siendo fascinante explorarla. Es una actividad que se realiza de forma personal... o acaso en *petit comité* según hemos observado. Resulta una figura sencilla que a su vez no se abarca de un *vistazo*...

De forma natural surgió la idea de aprovecharla para idear el LOGO del Departamento. Una cámara de fotos y unos retoques bastaron para ello (ver figura 28). ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALSINA, C. Y TRILLAS, E (1984): *Lecciones de Álgebra y Geometría. Curso para estudiantes de Arquitectura*, Gustavo Gili, Barcelona.

COURANT, R. Y ROBBINS, H. (1979): *¿Qué es la Matemática?*, Aguilar, Madrid.

ENRIQUES, F. (1954): *Los Elementos de Euclides y la Crítica Antigua y Moderna*, Publicaciones del Instituto Jorge Juan de Matemáticas, Madrid.

EUCLIDES (1999): *Los siete primeros libros de la Geometría de Euclides*, Ediciones Universidad de Salamanca, Salamanca.

GHYKA, MATILA C. (1983): *Estética de las proporciones en la Naturaleza y en las Artes*, Poseidón, Barcelona.

PACIOLI, L. (1991): *La Divina Proporción*, Akal, Madrid.

VERA, F. (1970): *Científicos griegos*, Aguilar, Madrid.

SUMA 48
Febrero 2005, pp. 33-43

Una evaluación de habilidades matemáticas

Durante un curso pre-universitario de Matemáticas en la Universidad Nacional de General Sarmiento se aplicó una evaluación para conocer la brecha en el aprendizaje de ciertas habilidades matemáticas de los alumnos. Se han diseñado los instrumentos de modo de poder tener información sobre la brecha individual que se mide en función de la diferencia entre las respuestas de un mismo alumno al comienzo y al final del curso. Se han evaluado habilidades matemáticas de diversa complejidad respectivamente que están relacionadas entre sí. Se presentan aquí las características, los criterios, los instrumentos y el análisis de los resultados obtenidos.

At a pre-university maths course at the Universidad Nacional de General Sarmiento (Argentina) assessment was given to the undergraduates in order to learn about their gap in learning abilities. Tools were devised to find about the individual gap measuring the difference between a specific student's answers at the beginning and at the end of the course. Through both exams interrelated maths abilities were assessed, of both high and low complexity.This paper looks at the pre-university course features, the assessment criteria and its tools, as well as the results obtained.

La Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS), localizada en el conurbano bonaerense, tiene como primera etapa curricular de carácter obligatorio para todos los aspirantes a ingresar en ella el Curso de Aprestamiento Universitario (CAU). El CAU consta de dos asignaturas, Matemática y Taller de Lecto-Escritura. Actualmente existen dos modalidades para cursar el CAU:

- el CAU Regular,
- el CAU Complementario (CAUC).

El C.A.U regular tiene una duración de ciento cuatro horas distribuidas a lo largo de seis meses, mientras que el CAUC es de desarrollo intensivo, con una duración de 60 horas y se lleva a cabo en sólo seis semanas entre enero y febrero de cada año.

El contexto en el que este trabajo se realizó es el de Matemática del CAUC 2004, dictado en los meses de enero y febrero. Por esta razón detallamos las características centrales de este curso que ayudan a comprender el planteo del problema que estudiamos aquí.

Cualquier estudiante egresado del nivel medio puede inscribirse en el CAU regular, no así en el CAUC Éste está destinado centralmente a estudiantes que, por diversos motivos, ya posean algunos de los conocimientos de Matemática que incluye el curso. Este requisito hace que confluyan en el CAUC dos tipos de estudiantes: aquellos que han tenido acceso a más años de formación en otras instituciones o quienes han cursado[1], sin aprobarlo, el CAU regular. De este modo el CAUC convoca a estudiantes que, por ejemplo, han egresado de colegios de nivel medio que brindan preparación técnica (el nivel medio en estos colegios es de seis años mientras que en los otros es de sólo cinco años), han aprobado ingresos en otras universidades nacionales, o bien han aprobado cierta cantidad de materias en carreras universitarias o terciarias.

Esta modalidad complementaria tiene por objetivos:

- completar la capacitación de los estudiantes del CAU regular que no hayan aprobado alguna de las dos asignaturas,
- brindar un aprestamiento intensivo a aquellos aspirantes que hayan obtenido habilidades y conocimientos por otros medios.

Mabel Rodríguez
Gustavo Carnelli
Alberto Formica
Universidad Nacional de General Sarmiento. Buenos Aires.

Por alguna de las razones antes mencionadas, los estudiantes disponen al comienzo del curso de conocimientos matemáticos que deberán complementar y ajustar para ingresar en la Universidad. El objetivo que nos planteamos es identificar qué conocimientos, en términos de habilidades, tienen disponibles los estudiantes al inicio del CAUC (habilidades de baja complejidad) y cómo evoluciona su saber hacia el final del curso (habilidades de mayor complejidad). Una de las principales razones que justifican este trabajo es que este tipo de análisis nos podría permitir, en una segunda instancia, elaborar hipótesis que relacionen el logro de habilidades complejas en función de las habilidades simples disponibles al comienzo del curso. Una vez corroboradas éstas, podrían proponerse ajustes en la propuesta de enseñanza con un sustento empírico y teórico sólido.

> "No se puede separar el saber del saber hacer, porque siempre saber es saber hacer algo; no puede haber un conocimiento sin una habilidad, sin un saber hacer."
> Talizina

Acordamos con los principios del National Council of Teaching Mathematics Standards (Schoenfeld, 1992) que establecen:

> La Matemática es un tema viviente que intenta entender patrones que atañen tanto al mundo circundante como a nuestra mente. Aunque el lenguaje de la Matemá-tica está basado en reglas que deben ser aprendidas, es importante para la motivación que los estudiantes se muevan más allá de las reglas para ser capaces de expresar cosas en el lenguaje de la Matemática. Esta transformación sugiere cambios en el contenido curricular y en el estilo instruccional. Involucra renovados esfuerzos para centrarse en:
>
> - Buscar soluciones, no simplemente memorizar procedimientos
>
> - Explorar patrones, no simplemente memorizar fórmulas
>
> - Formular conjeturas, no simplemente hacer ejercicios.
>
> Cuando la enseñanza empiece a reflejar estos énfasis, los estudiantes tendrán la oportunidad de estudiar Matemática como una disciplina exploratoria, dinámica, en evolución, en vez de un cuerpo cerrado, rígido, absoluto de leyes a memorizar. Tendrán valor para ver la Matemática como una ciencia, no como un canon y reconocer que la Matemática se trata de patrones y no simplemente de números. (National Research Council, 1989, pg. 84)[2]

De esta forma es que concebimos el aprendizaje de la Matemática como una construcción social, donde el estudiante tiene un rol activo de trabajo con la Matemática. La siguiente frase describe la génesis del conocimiento matemático en relación con la actividad matemática que realiza el estudiante.

> La génesis del conocimiento matemático se produce como consecuencia de la actividad del sujeto enfrentado a situaciones problemas y haciendo uso de los elementos ostensivos e intensivos disponibles (Godino, 1998).

Consideraremos como actividad matemática aquel tipo de actividad implicada en la solución de cierta clase de situaciones problemáticas de la cual emergen y evolucionan progresivamente los objetos matemáticos.

La actividad matemática puede ser descrita en términos de las siguientes entidades (Godino, 1998):

- Ostensivas: representaciones materiales usadas en la actividad matemática (términos, expresiones, símbolos, tablas, gráficos). Se incluyen las entidades lingüísticas y notacionales.
- Extensivas: las entidades fenomenológicas que inducen actividades matemáticas (problemas, situaciones, aplicaciones).
- Intensivas: ideas matemáticas, abstracciones, generalizaciones, métodos (conceptos, proposiciones, teorías, técnicas, algoritmos).
- Actuativas: acciones del sujeto ante situaciones o tareas (describir, operar, argumentar, generalizar, etc.). Esta categoría tiene que ver con la génesis del conocimiento matemático, de acuerdo con las teorías constructivistas, los actos de las personas son la fuente genética de las conceptualizaciones matemáticas.
- Afectivas: creencias, preferencias, etc.

Las *habilidades matemáticas* forman parte de la actividad matemática y pueden distinguirse entre las entidades actuativas. Consideramos que las entidades actuativas podrían incluir, además de las habilidades matemáticas, ciertas actividades exploratorias, asistemáticas o de indagación que no lleguen a conformar una habilidad matemática en el sentido que a continuación mencionamos. D. Rubí (1997) describe tres requerimientos que se han tenido en cuenta para determinar habilidades matemáticas generales:

a) que sean propias del quehacer matemático,
b) que sean generales como para que estén presentes en distintos niveles de escolaridad y
c) que resulten imprescindibles para la formación matemática.

Consideramos, sin ser exhaustivos sino a modo de ejemplo, las siguientes habilidades matemáticas: representar, comparar, resolver, estimar, operar, seleccionar, argumentar, reconocer estructuras, aproximar, calcular, razonar, simbolizar, justificar, etc. En el artículo mencionado puede encontrarse un listado de habilidades matemáticas con sus definiciones y ejemplos de cada una de ellas. Distintos autores especialistas en Educación han trabajado con habilidades en términos generales, sin dedicarse específicamente a Matemática. En algunos trabajos las habilidades cognitivas se presentan agrupadas y jerarquizadas en términos de complejidad. En este trabajo consideraremos distintos tipos de habilidades matemáticas según su complejidad, como indicamos en la sección 2.

M. de Guzmán Ozámiz (1993) plantea que en el conocimiento matemático, y en la Matemática como ciencia, predomina el método sobre el contenido, el saber hacer sobre el saber. Por otra parte, Talizina (1985) establece que *"no se puede separar el saber del saber hacer, porque siempre saber es saber hacer algo; no puede haber un conocimiento sin una habilidad, sin un saber hacer"*. De un modo u otro, las habilidades matemáticas ocupan un lugar central en el aprendizaje de la Matemática y en este trabajo nos centramos en diseñar una evaluación sobre algunas de ellas.

Método utilizado: diseño de la evaluación

Para obtener la información sobre las habilidades matemáticas en alumnos del CAUC 2004 diseñamos una evaluación que consta de dos instancias: un diagnóstico y un examen final, que detallamos en las secciones que siguen.

Trabajamos con un universo formado por los 521 estudiantes que asistieron a clase el primer día, de modo que en este trabajo no hemos considerado una muestra. Para poder llevar a cabo el análisis ha sido imprescindible tener información de las dos instancias de evaluación, diagnóstico y final. De esta forma hemos tomado en cuenta los 431 casos de los que dispone la información de la evaluación completa.

La evaluación a partir de la cual intentamos conocer la brecha en el aprendizaje individual de los alumnos, constó de: el diagnóstico y el examen final. Para medir el salto en los aprendizajes en el breve período del CAUC, se definió la evaluación partiendo de que la última instancia que formara parte de ésta fuera el final, instancia de acreditación del curso. Esto se debe a que, por falta de tiempo en el curso, cualquier otro examen adicional hubiera requerido disponer más horas de clase, lo que hubiera complicado el desarrollo de la materia.

La *brecha individual* se midió con ejercicios que relacionaran habilidades de baja y alta complejidad respectivamente para distintos contenidos matemáticos y en función de la diferencia entre las respuestas de un mismo alumno al comienzo y al final del curso.

Diseño del diagnóstico

Elegimos los contenidos y habilidades matemáticas del examen con el siguiente criterio: incluimos habilidades de baja complejidad que surgen de descomponer aquellas habilidades más complejas que se exigen al finalizar el curso. Hemos incluido muy pocos ítems que requieran conocer terminología específica que se enseña en el curso (imagen, dominio, asíntotas, etc.).

Los contenidos elegidos fueron: operatoria aritmética, álgebra y funciones, principalmente. Los contenidos del CAUC son: conjuntos numéricos, álgebra, geometría, modelización a través de funciones elementales (lineales, cuadráticas, polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas).

Los objetivos que se persiguen en cuanto a los conocimientos y habilidades matemáticas son:

- Evaluar expresiones numéricamente.
- Operar y comparar fracciones.
- Interpretar datos de funciones (ceros, pertenencia de puntos, positividad, puntos de encuentro, dominio, imagen) a partir de un gráfico.
- Hacer un gráfico que responda a datos (ceros, puntos, positividad, dominio, imagen) dados.
- Reconocer elementos (hipotenusa, cateto opuesto a un ángulo, base, altura) de un triángulo.
- Utilizar, si corresponde, el teorema de Pitágoras.
- Decidir si un valor es o no solución de una ecuación o de una inecuación.
- Hallar el conjunto solución de una ecuación lineal y cuadrática.
- Reconocer la diferencia de cuadrados y el cuadrado de un binomio.
- Aplicar el desarrollo del cuadrado de binomio y la distributividad.

Por el criterio expresado anteriormente, no hemos incluido como objetivos en esta instancia aquéllos que son de complejidad mayor como por ejemplo plantear problemas, modelizar, argumentar, etc.

El tipo de prueba (ver anexo) que hemos elegido es estructurada (Cami-lloni et al, 1998) con preguntas para completar las respuestas. Sólo en el ítem 1) a), referido centralmente a la operatoria aritmética, se incluye el desarrollo. En el el ítem 5) c), en el que se requiere reconocer diferencia de cuadrados y cuadrado de binomio, hemos propuesto opciones múltiples pero no hay sólo una respuesta correcta, sino varias y la cantidad de ellas no es dato. Hemos optado por no diseñar un examen de opción múltiple sólo para evitar las respuestas al azar. Una prueba de opción múltiple (que no incluyera entre las opciones una que fuera *ninguna de las anteriores*) ofrece la posibilidad de revisar los cálculos si acaso el estudiante no encuentra entre las soluciones propuestas la misma que halló, con lo cual se pone énfasis en lograr *precisión* en las respuestas. Con esta prueba también se pone énfasis en lograr precisión, tanto en los cálculos como en las observaciones de gráficos, en la producción de ellos, etc.; sólo se pierde la posibilidad de interactuar con las múltiples respuestas y, eventualmente, corregir los resultados. Diseñamos una prueba en la que no se incluye el desarrollo de los ejercicios, pues la redacción, simbolización, organización de ideas, etc., son cuestiones complejas que comienzan a enseñarse durante el curso y que, en general, no están presentes en los alumnos al inicio del mismo. Hacia fines del curso se logra evolución, aunque no un resultado acabado. Por otra parte, se agiliza la corrección, permitiendo una rápida devolución a los estudiantes. El examen final tuvo una estructura y características similares, aunque incluimos un ítem de desarrollo.

Para la corrección de la evaluación (diagnóstico y final) elaboramos una grilla de corrección que sistematizó la información y que se mostró a los alumnos, junto con el examen diagnóstico, para que ellos conocieran su estado inicial de conocimientos. Tal como se describió en Figliola, et al. (2001), es importante en esta instancia el papel del docente en el apoyo de quienes hayan resuelto incorrectamente el examen. El examen y la grilla se conservaron para disponer de las evidencias y como información para relacionar los resultados de la prueba inicial y la final. La grilla facilitó el análisis estadístico sobre la prueba.

Se incluye en el anexo el examen diagnóstico.

Diseño del final

Teniendo en cuenta el criterio con el que fue diagramado el diagnóstico, diseñamos el final incluyendo un tipo de habilidades más complejas que las incluidas en el diagnóstico, habilidades que se espera que los alumnos hayan alcanzado hacia el término del CAUC.

Incluimos todos los contenidos del curso, salvo función exponencial y logarítmica. Las habilidades más complejas, que se suman a las presentes en el diagnóstico, y que se requieren en el final, son:

- Interpretar enunciados.
- Elegir estrategias de resolución de problemas.
- Plantear la búsqueda de información intermedia que será requerida para responder las consignas.
- Interpretar un proceso a partir de un gráfico.
- Plantear una expresión funcional que describe un proceso.
- Obtener datos (ceros, positividad, imagen, etc.) a partir de una función dada por su expresión algebraica.
- Hacer un gráfico con los datos que el alumno debió hallar analíticamente.
- Interpretar soluciones de inecuaciones en gráficos que debe hacer el alumno.

La tabla de la página siguiente muestra la relación entre los ítems del diagnóstico y del final, incluyendo las diferencias en el nivel de exigencia de las habilidades específicas.

Elegimos un tipo de prueba coherente con el diagnóstico, incluyéndose un ejercicio que el alumno debe desarrollar en la hoja (ejercicio 3).

Para la corrección del final asignamos puntajes que figuran al lado de cada ítem. Los datos que se incluyen en la grilla de corrección de la evaluación son:

PUNTAJE TOTAL DIAGNOSTICO: .../40
NOTA D: … Esta nota resulta de dividir por 4 el puntaje total del diagnóstico.

PUNTAJE TOTAL FINAL: .../40
NOTA F: ... Esta nota resulta de dividir por 4 el puntaje total del final.

Al final de la grilla de corrección del diagnóstico aparece una tabla (tabla 1) en la que se volcaron los datos de los ítems que relacionan el diagnóstico con el final, pudiéndose así observar rápidamente la brecha en el aprendizaje para cada alumno de los contenidos involucrados. Los ítems relacionados tienen el mismo puntaje tanto en el diagnóstico como en el modo de comparar, en la tabla mencionada, las brechas con sólo restar los puntajes obtenidos. El final se aprobó con 16 puntos (que equivalen a 4 puntos en la escala de 1 a 10) y con un ejercicio completo bien.

	Del Diagnóstico	Del Final	F – D	Sobre un total de puntos
I	1)d).............	1)a).............	A = ...	2 puntos
T	1)c).............	2)a).............	B = ...	2 puntos
E	2)................	3)................	C = ...	6 puntos
M	3)...............	4)...............	D = ...	11 puntos
S	4)................	5)b).............	E = ...	6 puntos
	5)................	5)a).............	F = ...	9 puntos

Brecha promedio: BP = ...

Tabla 1

Calculamos la brecha promedio del alumno, BP, que es un valor entre 0 y 10 y representa el promedio ponderado de las brechas de los ítems habiendo *normalizado* el puntaje de cada ítem a 10 puntos. Se calcula:

ANEXO

DIAGNÓSTICO MATEMÁTICA C.A.U.C. 2004

APELLIDO Y NOMBRES:……………………………………………………………DNI:……………………

Ejercicio 1) Dadas las siguientes ecuaciones e inecuaciones, se pide:

a) Verificar que el valor x = 1 no es una solución de la ecuación A. (Resolverlo en el espacio dejado a continuación)

……

……

……

b) ¿Verifica el valor x = 1 la inecuación B?

SI: …… PORQUE…………………………………………………………………………………………

ó

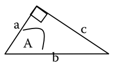
NO: …… PORQUE …………………………………………………………………………………………

c) El conjunto solución de la ecuación A es:…………………………………………………………………

d) El conjunto solución de la ecuación C es:…………………………………………………………………

ECUACION A	INECUACION B	ECUACION C
$\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}=\frac{x-2}{6}+\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}\geq\frac{x-2}{6}+\frac{3}{2}$	$(x-1)^2-2=3x(x-1)-1$

Ejercicio 2) Dado el siguiente triángulo, completar:



a) El área del triángulo es: área = ………………….

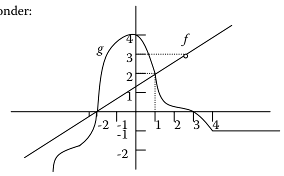
b) Conociendo los valores de los lados a y b, el lado c se puede calcular haciendo

c = ………………pues:………………

c) El cateto opuesto al ángulo A es: ……………………

d) La hipotenusa del triángulo es:………………………

Ejercicio 3) A partir de la información del siguiente gráfico responder:



a) Todos los ceros de *g* son:……………………………………

b) *f* se anula en:……………………………………………

c) *g* es positiva para los valores de x en:…………………

d) la imagen de *g* es: Im(*g*) = ……………………………

e) La imagen de *f* es: Im(*f*) = ……………………………

f) *f* y *g* se cortan en los pares ordenados:…………………

g) *f*(1) = ……. *g*(0) = ………….

h) la inecuación *g*(x) > *f*(x) tiene conjunto solución:…………

Ejercicio 4) Hacer un gráfico de una función *f* que cumpla todas las condiciones siguientes:

x = 2 es un cero de *f*

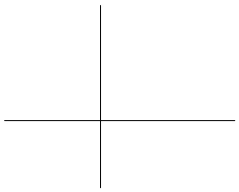
f(3) = -1

f(6) = 0

(4, 0) es un punto del gráfico de *f*.

f es positiva solamente en los intervalos (0; 2) y en (4; 6)

no existe *f*(5)



Ejercicio 5) Dada la función $f: R \to R$, $f(x)=(x^2-9).(x-2)^2$,

a) Completar la siguiente tabla de valores:

x	y
0	…
1	…
1/2	…
-2/3	…
-2	…

b) Todos los ceros de *f* son:………………………

c) Marcar, entre las siguientes, todas las expresiones equivalentes a *f*:

$(x^2-9).(x-2)(x+2)$	…..	$(x-3).(x+3).(x-2).(x+2)$	…..
$(x+3).(x-3).(x-2).(x-2)$	…..	$(x-3).(x-3).(x-2).(x-2)$	…..
$(x^2-9).(x^2+4)$	…..	$(x^2-4x+4).(x+3).(x-3)$	…..
$.(x-2)(x+3)(x-2)(x-3)$	…..	$(x-2)^2.(x^2-6x+9)$	…..
$(x-3)^2.(x-2)^2$	…..	$(x^2-9).(x^2-4)$	…..

FINAL MATEMÁTICA C.A.U.C. 2004

APELLIDO Y NOMBRES:……………………………………………………………DNI:……………………

IMPORTANTE: EL FINAL SE APRUEBA CON POR LO MENOS 16 PUNTOS Y UN EJERCICIO COMPLETO BIEN

Ejercicio 1) Dada la ecuación $(x-2)^2-2x=\frac{1}{2}(10-4x)$ se pide:

…../2p a) Encontrar los valores de las dos soluciones que tiene la ecuación. Llamamos al menor de esos dos valores A y al mayor de ellos B.

Respuesta: A = ……………..y B = …………….

…../2p b) Para los valores A y B hallados en el punto anterior se pide calcular el resultado de la resta A-B e indicar si dicho resultado es racional o irracional.

Respuesta: A-B = ……………………..y este número es:……………………

Ejercicio 2)

…../2 a) Hallar el conjunto solución de la ecuación $\frac{2x-1}{3}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}x+2$

Respuesta: El conjunto solución es:…………………………………

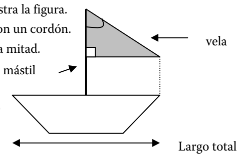
…../2 b) Hallar el conjunto solución de la inecuación $\left|\frac{2x-1}{3}+\frac{1}{2}\right|\geq-\frac{1}{3}x+2$

Respuesta: El conjunto solución es:…………………………………

…../6p Ejercicio 3) Se quiere fabricar la vela de un barco como muestra la figura. La vela es de tela plástica y lleva en todo su contorno un adorno hecho con un cordón. El largo total del barco es de 15 metros y el mástil está ubicado justo en la mitad. El ángulo señalado es de 60º.

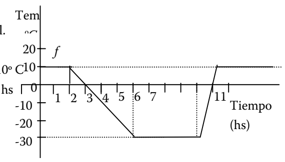
a) Calcular cuánta tela es necesario comprar para hacer la vela.

b) Calcular cuánto cordón es necesario comprar para hacerle el adorno que bordea la vela.



RESOLVER AL DORSO DE LA HOJA IMPRESA
JUSTIFICAR LOS PASOS.

…../11p Ejercicio 4) El siguiente es el gráfico de una función f que describe, en función del tiempo, la temperatura de una pieza A que se fabrica sometiéndola a calor y frío.



La temperatura que toma otra pieza B, que también se fabrica sometiéndola al calor y al frío, tiene un comportamiento lineal. por trozos.

Se sabe que a las 8 horas la pieza B tiene una temperatura de 10º C y la temperatura se estaciona en los 10º C, es decir desde las 8 hs en adelante la pieza conserva esta temperatura.

La pieza presenta una temperatura de 30º C bajo cero al comenzar el proceso.

Llamamos g a la función que describe la temperatura de la pieza B en función del tiempo

A partir de la información dada responder:

a) La temperatura de la pieza A fue nula en:……………………………………

b) La pieza B tuvo temperatura 0ºC en:…………………………………………

c) La pieza A tuvo temperatura positiva en:…………………

d) La imagen de f es: Im(f) = ………….

e) Las dos piezas tuvieron la misma temperatura en los momentos:…………………………………

f) La temperatura de la pieza A a las dos horas de haber empezado el proceso fue:…………………

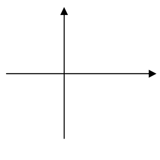
g) La inecuación g(x) > f(x) tiene conjunto solución:…………

h) Explicar qué significa, en el contexto del problema, la solución de la inecuación g(x) > f(x) ……………………………………………………………………………………………………

…../15 Ejercicio 5) Dada la función $f: A \subseteq R \to R$, $f(x)=\frac{(x^2-9).(x-2)^2}{(x-3)(x-2)}$, se pide

a) Hallar:

	Respuestas
Dom f	…………………………….
Ceros de f	…………………………….
El conjunto de positividad de f	…………………………….
El conjunto de negatividad de f	…………………………….
Asíntotas de f, si las tiene	…………………………….
Imagen de f	…………………………….



b) Con toda la información obtenida en el ítem anterior hacer un gráfico de la función.

ITEMS RELACIONADOS

DEL DIAGNÓSTICO		Se relaciona con	DEL FINAL	
Ej. Nº	Habilidades y contenidos que involucra. Grado de complejidad.		Ej. Nº	Habilidades y contenidos que involucra. Grado de complejidad.
1) d)	Resolver una ecuación cuadrática. Debe hacer cuadrado de binomio y distributiva. Los coeficientes son enteros y la solución un entero y una fracción.		1) a)	Resolver una ecuación cuadrática. Debe hacer cuadrado de binomio y distributiva. Los coeficientes son racionales pero tras operar quedan enteros. Las soluciones son irracionales. Debe trabajar sin redondear las soluciones para responder el 1) b)
1) c)	Se pide hallar la solución de una ecuación lineal que presenta operatoria con fracciones. En el ítem 1) a) el alumno verificó que un valor dado no es solución, lo que puede servirle para chequear su respuesta.		2)a)	Se pide hallar la solución de una ecuación lineal que presenta operatoria con fracciones.
2)	Se da un triángulo rectángulo en una posición no "clásica" con nombres en sus lados y un ángulo marcado. El alumno debe reconocer cuál es la hipotenusa, cuál es la base y la altura para calcular el área, cuál es el cateto opuesto al ángulo marcado, y debe aplicar Pitágoras para dejar indicado cómo calcularía uno de los lados en función de los otros.		3)	Se da un problema que involucra un triángulo rectángulo al que se le deben calcular uno de sus lados mediante trigonometría. Debe calcular el área y el perímetro. Es necesario que identifique el cateto opuesto al ángulo marcado y debe hallar, usando Pitágoras o trigonometría, el otro lado faltante.
3)	Se da una figura que tiene los gráficos de dos funciones, una lineal y otra que no lo es. A partir de los gráficos se pide información de tipo: ceros, imagen, intersecciones, dónde una de las funciones es mayor que la otra, valores numéricos, etc.		4)	Se da una figura que tiene el gráfico de una función que describe un proceso. Se da información sobre otro proceso lineal. Mediante la información dada se deberá hallar la expresión para responder las preguntas. Se quiere hallar el mismo tipo de información que en el diagnóstico (ceros, imagen, intersecciones, dónde una de las funciones es mayor que la otra, valores numéricos, etc.) pero se pregunta en relación al proceso, incluso también se pide interpretar qué significa el planteo de una inecuación.
4)	Se da información (ceros, pares ordenados del gráfico, positividad, etc.) sobre una función y se le pide al alumno que haga un gráfico coherente con la información dada.		5) b)	Se le pide al alumno que haga un gráfico coherente con la información que él mismo tuvo que obtener a partir de una función dada por una expresión algebraica. A partir de ésta debe obtener cierta información (ceros, pares ordenados del gráfico, positividad, etc.) para el ítem a).
5)	Se da la expresión de una función y se le pide al alumno hacer una tabla de valores y encontrar expresiones equivalentes. Aquí debe aplicar cuadrado del binomio y diferencia de cuadrados.		5) a)	La expresión dada es un cociente de polinomios factorizados que deben simplificarse. Para ello el alumno debe encontrar expresiones equivalentes mediante aplicar cuadrado del binomio y diferencia de cuadrados. Si no simplifica le será complicado hallar la información solicitada previo a la producción del gráfico.

$$BP=(A\cdot 10/2+B\cdot 10/2+C\cdot 10/6+D\cdot 10/11+E\cdot 10/6+F\cdot 10/9)\cdot 1/6$$

donde los valores de A, B, C, D, E y F son los valores de la tercera columna de la tabla anterior. Este número debe tomarse en cuenta conjuntamente con las notas del diagnóstico y del final. (Notar que un alumno puede tener brecha 0 teniendo notas de 10 en ambos exámenes, ó 4 u otra).

En la tabla 1 se han volcado, en la primera y segunda columna respectivamente, los puntajes de los ítems del diagnóstico y del final que están relacionados. En la tercera columna, $F–D$ se vuelcan los resultados de las diferencias entre la nota obtenida en el final y en el diagnóstico respectivamente y para cada ítem. Se incluye en el anexo el examen final.

Resultados obtenidos

Exponemos en esta sección los resultados obtenidos en el diagnóstico, en la prueba final y los correspondientes a las brechas. Al final se incluyen algunas conclusiones sobre el trabajo realizado.

Sobre el diagnóstico
Sobre la población de estudiantes que se han presentado a la prueba diagnóstica y también al examen final, que son en total 431, se encuentra que el curso fue aprobado por 221 alumnos y desaprobado por 210.

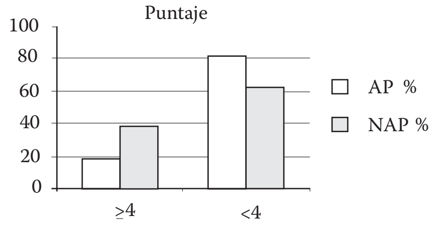
> *Miguel de Guzmán Ozámiz (1993) plantea que en el conocimiento matemático, y en la Matemática como ciencia, predomina el método sobre el contenido, el saber hacer sobre el saber.*

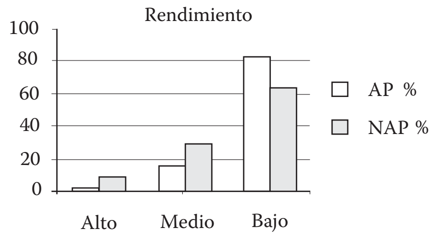
En todas las tablas y gráficos que siguen vamos a usar las notas *normalizadas* de 0 a 10 y las presentamos agrupadas en dos categorías. Con la primera de ellas clasificamos el resultado de cada ejercicio según su puntaje sea menor que 4 puntos o mayor o igual que él. Con la segunda categoría consideramos los puntajes asociados en tres grupos según el rendimiento observado: rendimiento alto (puntajes mayores o iguales que 7), rendimiento medio (puntajes mayores o iguales que 4 y menores que 7) y rendimiento bajo (puntajes menores que 4).

Las tablas y gráficos que siguen corresponden a los *resultados del diagnóstico según se aprobó o no el CAUC.*

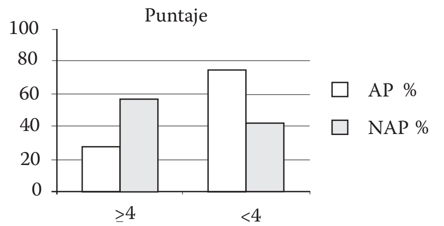
Referencias: AP: aprobaron el CAUC; NAP: no aprobaron el CAUC; Punt: puntaje; Cant: cantidad; %: porcentaje; Rend: rendimiento.

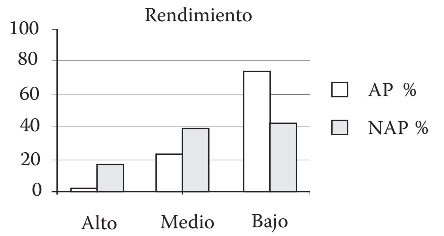
Ej. 1 (Ecuaciones e inecuaciones)										
	AP		NAP				AP		NAP	
Punt	Cant	%	Cant	%		Rend	Cant	%	Cant	%
≥4	40	18	79	38		Alto	6	3	18	9
						Medio	34	15	61	29
<4	181	82	131	62		Bajo	181	82	131	62



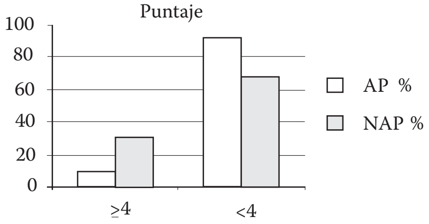


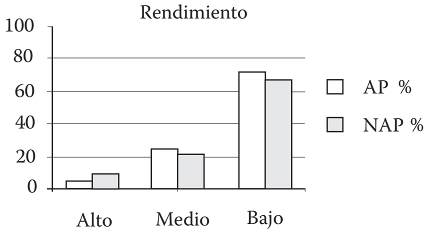
Ej. 2 (Geometría)										
	AP		NAP				AP		NAP	
Punt	Cant	%	Cant	%		Rend	Cant	%	Cant	%
≥4	60	27	119	57		Alto	9	4	37	18
						Medio	51	23	82	39
<4	161	73	91	43		Bajo	161	73	91	43



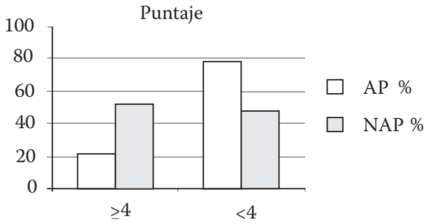


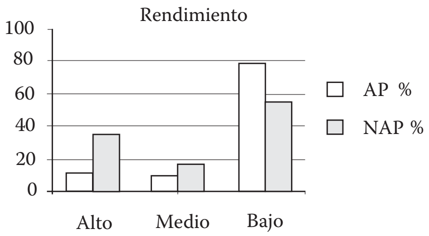
Ej. 3 (Interpretación de gráficos)										
	AP		NAP				AP		NAP	
Punt	Cant	%	Cant	%		Rend	Cant	%	Cant	%
≥4	21	10	68	32		Alto	5	4	23	11
						Medio	16	23	45	21
<4	200	90	142	68		Bajo	200	73	142	68



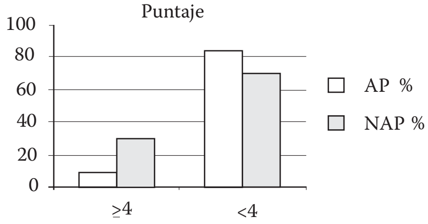


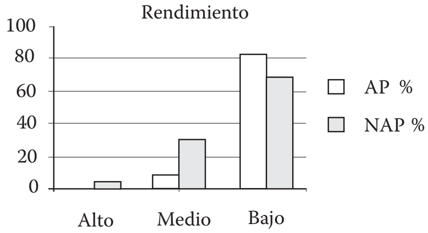
Ej. 4 (Graficar funciones)										
	AP		NAP				AP		NAP	
Punt	Cant	%	Cant	%		Rend	Cant	%	Cant	%
≥4	47	21	111	53		Alto	24	11	76	36
						Medio	23	10	35	17
<4	174	79	99	47		Bajo	174	79	99	47





Ej. 5 (Expresiones algebraicas)										
	AP		NAP				AP		NAP	
Punt	Cant	%	Cant	%		Rend	Cant	%	Cant	%
≥4	18	8	63	30		Alto	0	0	9	4
						Medio	18	8	54	26
<4	203	92	147	70		Bajo	203	92	147	70





Como se muestra en los gráficos anteriores, en cada uno de los ejercicios, se observa una marcada proporción de alumnos con baja nota. A su vez, dentro de este grupo, se encuentra que la mayoría de estos alumnos aprueba el curso.

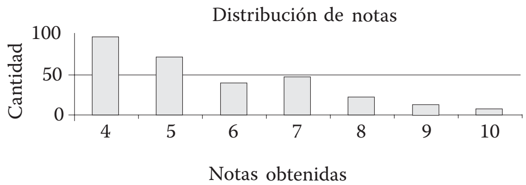
Sobre el final

En todo este trabajo, excepto en esta sección, se informa sobre una población de 221 estudiantes ya que de éstos se tiene la información tanto del diagnóstico como del examen final.

En este apartado describimos los resultados por ejercicio y calificaciones de los 288 alumnos *que aprobaron el CAUC*
La tabla y gráfico que siguen muestran la distribución de las notas obtenidas.

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Cantidad	94	70	39	46	21	11	7

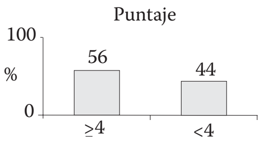
Nota promedio: 5,62

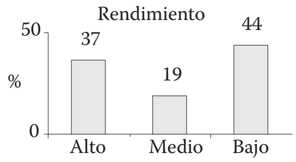


Las tablas y gráficos que siguen corresponden al desagregado por ejercicio del examen final de dichos estudiantes. Nuevamente usamos las mismas categorías (puntaje respecto de 4 y tipos de rendimiento). Las notas también se presentan *normalizadas* de 0 a 10.

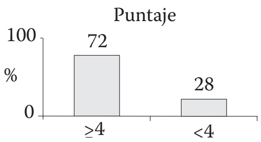
Referencias: Punt: puntaje obtenido; Cant: cantidad de estudiantes; %: porcentaje; Rend: Rendimiento.

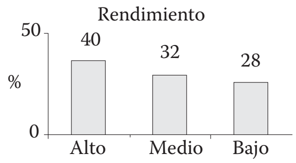
Ej. 1 (Ec. Cuadrática)						
Punt	Cant	%		Rend	Cant	%
≥4	161	56		Alto	106	37
				Medio	55	19
<4	127	44		Bajo	127	44
Nota promedio: 4,61						



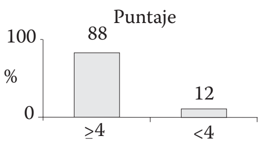


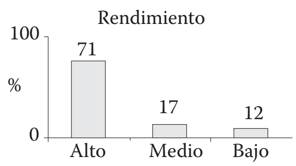
Ej. 2 (Ec. Lineal y módulo)						
Punt	Cant	%		Rend	Cant	%
≥4	207	72		Alto	114	40
				Medio	93	32
<4	81	28		Bajo	81	28
Nota promedio: 5,41						



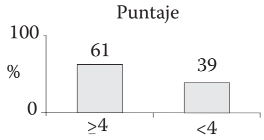


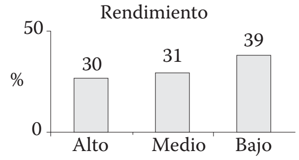
Ej. 1 (Ec. Geometría)						
Punt	Cant	%		Rend	Cant	%
≥4	253	88		Alto	203	71
				Medio	50	17
<4	35	12		Bajo	35	12
Nota promedio: 8,13						



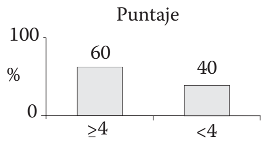


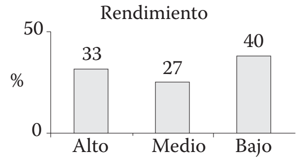
Ej. 4 (Funciones por gráficos)						
Punt	Cant	%		Rend	Cant	%
≥4	177	61		Alto	88	30
				Medio	89	31
<4	111	39		Bajo	111	39
Nota promedio: 5,17						





Ej. 5 (Funciones racionales)						
Punt	Cant	%		Rend	Cant	%
≥4	173	60		Alto	95	33
				Medio	78	31
<4	115	40		Bajo	115	40
Nota promedio: 5,29						





De los resultados obtenidos por los estudiantes que aprobaron el examen final, se destaca claramente el buen rendimiento en el ejercicio de geometría, que tiene un fuerte predominio de habilidades de tipo conceptual como identificar, de tipo traductoras como modelar, de tipo heurísticas como resolver y también buscar información intermedia para responder a una consigna. Las habilidades de tipo operativas, como calcular y algoritmizar, se hallan también presentes pero en una complejidad menor a la de otros problemas.

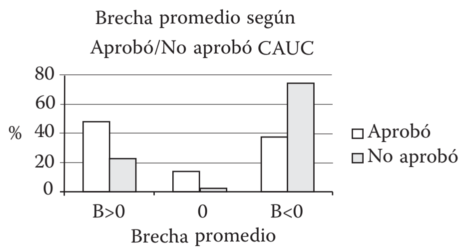
Estas habilidades son exigidas en mayor complejidad en los ejercicios 1 y 2. En estas situaciones es similar la cantidad de estudiantes que obtiene puntajes altos, tanto sea bajo contenidos relacionados con ecuaciones lineales como con cuadráticas. Sin embargo, la cantidad de puntajes bajos cuando estas habilidades se requieren en ecuaciones cuadráticas es muy superior a cuando se necesitan para ecuaciones lineales.

En los ejercicios 4 y 5, de contenidos relacionados con funciones, aparecen habilidades como interpretar, modelar, graficar y calcular. Los resultados en estos casos se distribuyen casi uniformemente en las tres categorías de rendimiento.

Resultados sobre brechas
A continuación mostramos los datos referidos a las brechas individuales en función de si el alumno aprobó o no el curso. Los valores positivos de la brecha promedio indican que efectivamente se logró aprendizaje de habilidades complejas, mientras que los valores negativos o nulos de la brecha promedio pueden indicar la falta de desarrollo de las habilidades más complejas, respecto de las evaluadas en el diagnóstico, que fueron requeridas hacia el final del curso (esta correspondencia se detalló en la página 4).

Cabe resaltar que tanto en alumnos que aprobaron o no el curso puede encontrarse brecha positiva, negativa o nula. Por esta razón es que el interés es conocer la brecha según los resultados del curso.

Brecha	Aprobó		No aprobó	
promedio	Cant	%	Cant	%
B>0	106	48	48	23
0	32	14	5	2
B<0	83	38	157	75
Total	221	100	210	100



Se observa que casi la mitad de los estudiantes que aprobaron el curso (48%) han tenido brecha positiva, mientras que es notable que el 38% de los mismos han tenido brecha negativa. Asimismo se encuentra que un 23% de los estudiantes no aprobó el curso pese a que obtuvo brecha positiva.

Conclusiones

Las primeras conclusiones que nos interesa comunicar aquí tienen que ver con el uso que se le ha dado al diagnóstico en el curso. El diagnóstico permitió, además de tener información inicial para medir la brecha en los aprendizajes, poder describir el estado inicial de conocimiento de los alumnos del CAUC 2004 respecto de los contenidos y habilidades matemáticas seleccionados. Esta información fue aprovechada por el docente en su curso para: a) informar a los alumnos del estado de sus conocimientos y b) presentar qué tipo de conocimiento y habilidades se exigirían en el curso.

Estos dos usos que el docente dio al diagnóstico respetan la línea de trabajo que fuera llevada a cabo en el CAUC 2001 y cuyos resultados pueden verse en Figliola et al (2001). A partir de los ejercicios del diagnóstico el docente ha podido a) presentar los distintos contenidos que se incluyen en el curso (aritmética, álgebra, geometría, funciones) y b) presentar distintos objetivos en términos de habilidades que se esperan del alumno. Este examen ofrece la posibilidad de hacer esta presentación en dos niveles. En el nivel inicial —presente en el diagnóstico— de las habilidades requeridas que involucran percepción, experimentación, observación de gráficos, alguna manipulación aritmética y algebraica simple, principalmente. El docente pudo anticipar un segundo nivel en el que el alumno deberá manifestar haber aprendido habilidades con nivel de complejidad mayor al término del curso: habilidad para resolver ecuaciones de distinto tipo analítica y gráficamente, operar con números y reconocer qué tipo de números manipula, reconocer funciones para graficarlas sin hacer tabla de valores, operar algebraicamente para simplificar expresiones y así poder obtener información sobre su comportamiento (asíntotas, ceros, etc.), interpretar procesos descritos coloquialmente, simbolizarlos y operar para resolver preguntas, justificar, etc.

Los resultados del examen diagnóstico han revelado que los estudiantes carecen de habilidades básicas al comienzo del curso por lo menos en alguno de los aspectos evaluados. De todos modos, la mayoría de los estudiantes que comienza el curso con este tipo de carencias, aprueba el curso.

Por otra parte, los resultados del examen final parecerían indicar que una dificultad central son las habilidades de tipo operatoria, encontrándose el mejor rendimiento en el ejercicio en el que la misma no tiene un papel central, incluso cuando el ejercicio requiere de varias habilidades complejas (identificar, modelar, resolver, etc.). Esta operatoria es más costosa aún cuando se trata de ecuaciones cuadráticas.

Por último, respecto del análisis de brechas, hemos mencionado que casi la mitad de los estudiantes que aprobaron el curso (48%) han tenido brecha positiva y el 38% de los mismos han tenido brecha negativa. Esto sugiere que este último grupo de estudiantes tuvo un muy buen desempeño cuando se trató de habilidades de baja complejidad y que en las competencias de mayor nivel tuvo un buen desempeño, ya que logró aprobar el curso, aunque no demostró tener sobre éstas un dominio tan amplio como el que manifestó en las evaluadas en el diagnóstico.

El 23% que no logró aprobar el curso y que obtuvo brecha positiva parece indicar un grupo de estudiantes que, independientemente de cómo haya empezado el curso, está evidenciando avances en los aprendizajes aunque todavía no le son suficientes para mostrar dominios mínimos en las habilidades complejas requeridas. Teniendo en cuenta que la población de alumnos que no aprobó el CAUC está conformada por 180 recursantes y 30 inscriptos nuevos, el alto porcentaje (75%) de estudiantes que no aprobaron el curso y tienen brecha negativa sugiere que un gran número de estos estudiantes comenzaron el curso con cierto grado de conocimiento sobre competencias poco exigentes. El resultado podría atribuirse, y no tenemos forma de constatarlo con estos elementos, a: falta de estudio, supuesta confianza por un resultado aceptable en el diagnóstico, estudiantes con dificultades de aprendizaje, tiempos del curso insuficientes, ritmo acelerado de cursada, etc. ■

Agradecimientos: Queremos agradecer a Alejandra Figliola, Hugo Negrín, Romina Cardo, Mariel Rosenblatt, Corina Averbuj, Patricia Barreiro, Ana Sonsino, Andrés Sartarelli y Valeria Borsani, profesores del CAUC 2004, que han corregido los exámenes con los criterios estipulados y han volcado las notas en las grillas minuciosa y dedicadamente. Asimismo queremos agradecer a la Secretaría Académica de la UNGS que financió el procesamiento de la información y a Renato Tarditti quien gentilmente nos ha facilitado la información que le requiriéramos.

NOTAS

1 Existen más requisitos sobre éste y los otros puntos que consideramos no son relevantes al trabajo.

2 "Mathematics is a living subject which seeks to understand patterns that permeate both the world around us and the mind within us. Although the language of mathematics is based on rules that must be learned, it is important for motivation that students move beyond rules to be able to express things in the language of mathematics. This transformation suggests changes both in curricular content and instructional style. It involves renewed effort to focus on:

Seeking solutions, not just memorising procedures

Exploring patterns, not just memorising formulas

Formulating conjectures, not just doing exercises.

As teaching begins to reflect these emphases, students will have opportunities to study mathematics as an exploratory, dynamic, evolving discipline rather than as a rigid, absolute, closed body of laws to be memorised. They will be encouraged to see mathematics as a science, not as a canon, and to recognise that mathematics is really about patterns and not merely about numbers. (National Research Council, 1989, p. 84)."

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arango González, Ballester Pedroso (1995): *Cómo consolidar los conocimientos matemáticos en los alumnos*, Promet, Proposiciones Metodológicas, Ed. Academia, La Habana, Cuba.

Camilloni, A, Celman, S., Litwin, E. y Palou, C. (1998): *La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo*, Buenos Aires, Piados.

Courant, R., Robbins, H. (1996): *What is Mathematics?,* Oxford Univ. Press.

Delgado Rubí; (1997): "Las habilidades matemáticas", *Seminario taller de Didáctica de la Matemática UTN Regional,* Haedo, Argentina.

Almeida, M., Aragón, A., Falsetti, M., Formica, A., Kulesz, L., Martínez, M., Rodríguez, M. (2001): *Guía de Matemática para el Curso de Aprestamiento Universitario, Módulo I*, Álgebra y Geometría, ISBN: 987-9300-32-7. Serie Educación, Material Didáctico n.º 6-I, Impreso en UNGS (2ª edición).

Falsetti, Figliola, Kulesz, Rodríguez (2000): *Guía de Matemática para el Curso de Aprestamiento Universitario, Módulo II: Modelización*, Universidad Nacional de General Sarmiento, Colección Universidad y Educación, Material Didáctico n.º 6.2.

Falsetti, Kulesz, Rodríguez (2000): *Guía de Matemática para el Curso de Aprestamiento Universitario, Módulo III: Funciones Elementales*, Serie Educación, Material Didáctico n.º 6-III, Impreso en UNGS.

Figliola, et al. (2001): *El examen diagnóstico como herramienta para un curso intensivo de Matemática. Enseñar y aprender en la Universidad*, Ed. Al Margen y UNGS, pp. 403-417.

Gil Pérez, D.; de Guzmán Ozámiz, M. (1993): *Enseñanza de las ciencias y la matemática. Tendencias e innovaciones*, Iber Cima, Edit. Popular, España.

Godino, J. (1998): "Un modelo semiótico para el análisis de la actividad y la instrucción matemática", Comunicación presentada al VIII Congreso Internacional de la Asociación española de semiótica, Granada.

Parra, C. Saiz, I., (comp) (1995): *Didáctica de las Matemáticas. Aportes y reflexiones*, Edit. Paidós, Argentina.

Polya G., (1954): *Mathematics and plausible reasoning, Vol I y II*, Princeton Univ. Press.

Reglamento del CAU, UNGS, página web www.ungs.edu.ar

Schoenfeld, A. (1992): *Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in Mathematics in D. Grouws (De.),* Handbook for research on mathematics teaching and learning, New York, MacMillan.

Talizina, N. (1985): Conferencias sobre Los fundamentos de la enseñanza superior, Dpto. de Estudios para el perfeccionamiento de la Educación Superior, Universidad de La Habana, Cuba.

Geometría románica. Foto: Vicente Sierra Puparelli

SUMA 48
Febrero 2005, pp.45-50

Evaluación de la falacia de la conjunción en alumnos universitarios

Uno de los errores analizados en las investigaciones sobre psicología del razonamiento probabilístico es la falacia de la conjunción, que consiste en estimar, para la probabilidad de la intersección de dos sucesos, un valor mayor que la estimada para probabilidad simple de uno de los sucesos. Aquí analizamos los trabajos de investigación en torno a la citada problemática y presentamos un estudio experimental con 157 estudiantes de psicología, comparando la influencia de la forma en que son presentados los datos sobre la falacia. Finalizamos con la discusión de las implicaciones para la enseñanza de la probabilidad.

One of the mistakes analyzed in research on the psychology of reasoning is conjunction fallacy, which consists of giving a two-outcome intersection probability a higher value than estimated for a single outcome one. The research papers analyzed here are tightly related to it and an experimental study on 157 psychology students is presented comparing the influence of the way fallacy data are shown. This paper ends up with a discussion on the attached implications for the teaching of probability.

Los conceptos de experimento compuesto y probabilidad conjunta son fundamentales para la correcta aplicación de la estadística, porque están presentes en la construcción de las distribuciones n-dimensionales, distribuciones de estadísticos en el muestreo, así como en los conceptos de correlación y regresión y, posteriormente, en la estadística multivariante. Es esencial, por tanto, que el alumno comprenda bien estos conceptos y diferencie una probablidad simple de otra probabilidad conjunta o condicional. La probabilidad forma parte del currículo matemático en la educación secundaria, y, por tanto, es enseñada por profesores de matemáticas. Puesto que la preparación de estos profesores es esencialemente científica, algunos pueden no ser conscientes de los matices psicológicos ligados a la idea de probabilidad, que han sido abundamentemente analizados en la investigación en psicología y que indican que las intuiciones en este campo no siempre corresponden al conocimiento normativo que se trata de transmitir en la clase de matemáticas.

En este trabajo analizaremos uno de los errores en razonamiento probabilístico más insistentemente documentados en psicología, denominado falacia de la conjunción, que se relaciona con una falta de comprensión de la probabilidad conjunta. Presentaremos también un estudio exploratorio con estudiantes de psicología que sugiere una amplia existencia de este sesgo entre los mismos. Para contextualizar el trabajo, hacemos una breve panorámica de las investigaciones sobre la falacia de la conjunción.

Antecedentes

Las personas, en su vida cotidiana, no tienen un razonamiento estadístico correcto cuando hacen inferencias intuitivas sobre acontecimientos inciertos, bien porque no han aprendido nunca las leyes de la probabilidad, bien porque los problemas superan sus capacidades de cálculo mental. En lugar de usar un cálculo de probabilidades normativo, confían en reglas relativamente simples llamadas heurísticas que son las que guían sus juicios. Estas reglas tienen aparente validez, pero a menudo llevan a sesgos predecibles (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982). Una buena revisión de estos trabajos se presenta en Pérez Echeverría (1990) y un resumen de los mismos en Díaz (2003).

> *Las personas, en su vida cotidiana, confían en reglas relativamente simples llamadas heurísticas que son las que guían sus juicios.*

Carmen Díaz
Universidad de Granada. Granada.

Representatividad

La estimación de la probabilidad de un suceso es un proceso complejo que requiere interpretar un problema, buscar la información relevante sobre los datos requeridos y elegir la respuesta apropiada a la pregunta planteada. Algunos problemas de probabilidad que aparecen en la vida diaria están relacionados con la pertenencia de un elemento a una categoría (¿Qué probabilidad hay de que el elemento A pertenezca a la clase B?). Para resolverlos confiamos en la heurística de representatividad que consiste en evaluar la probabilidad de un suceso por el grado de correspondencia o similitud entre una muestra y una población, un ejemplar y una categoría, un acto y un actor o, más generalmente, un resultado y un modelo (Tversky y Kahneman, 1974).

La representatividad se usa para predecir resultados y, generalmente, produce buenas respuestas, ya que las muestras y los resultados más representativos tienen una mayor probabilidad de ocurrencia. Sin embargo, el hecho de fijarnos sólo en la similitud de la muestra con la población puede llevarnos a ignorar otros elementos esenciales de la información, como la variabilidad del proceso de muestreo, ocasionando algunos errores.

> La heurística de representatividad que consiste en evaluar la probabilidad de un suceso por el grado de correspondencia o similitud entre una muestra y una población, un ejemplar y una categoría, un acto y un actor o, más generalmente, un resultado y un modelo.
> *Tversky y Kahneman*

Falacia de la conjunción

Uno de los errores típicos causados por la heurística de la representatividad se suele dar en el cálculo de la probabilidad de un suceso en un espacio muestral producto, caso en que puede producirse un gran contraste entre representatividad y probabilidad. Una de las reglas básicas de la probabilidad es que cuanto más especificamos un suceso, menor es su probabilidad (Tversky y Kahneman, 1982). Por ejemplo, la probabilidad de que una persona sea mujer es mayor que la probabilidad de que la persona sea mujer de 30 años y ésta es mayor que la probablidad de que sea una mujer india de 30 años. Estas relaciones de orden entre las probabilidades no se transforman en otras correspondientes de representatividad, sino que, en ocasiones, la representativad se incrementa cuando especificamos más nuestras condiciones. Por ejemplo, supongamos que evaluamos la probabilidad de que una persona simpatice con ideas socialistas. En este caso, un hombre joven puede ser más representativo que un hombre y un hombre joven que dedica su tiempo libre a actividades de cooperación puede ser todavía más representativo.

> Una de las reglas básicas de la probabilidad es que cuanto más especificamos un suceso, menor es su probabilidad.
> *Tversky y Kahneman*

Al tratar de estimar la probabilidad de la intersección de dos sucesos ocurre a veces un conflicto en los casos en que la intersección de los dos sucesos es más representativa del caso cuya probablidad se nos pide, puesto que los juicios sobre la probabilidad están mediatizados por la representatividad. Tversky y Kahneman pusieron a prueba esta teoría proporcionando a diversos grupos de estudiantes con y sin instrucción en probabilidad problemas similares al Problema 1.

Problema 1. Linda tiene 31 años, es soltera, extravertida y muy brillante. Se licenció en filosofía. En sus tiempos de estudiante estaba muy comprometida con asuntos de discriminación y justicia social, y también solía participar en manifestaciones antinucleares. Ordena las siguientes afirmaciones de acuerdo con su grado de probabilidad

1. Linda es cajera de un banco
2. Linda es cajera de un banco y está asociada al movimiento feminista
3. Linda es profesora de primaria
4. Linda participa en el movimiento feminista
5. Linda trabaja en una librería y toma clases de yoga
6. Linda es una trabajadora social
7. Linda está afiliada a una organización feminista política
8. Linda trabaja en una compañia de seguros

Promediando los números en las diferentes ordenaciones dadas por cada estudiante se obtuvo la siguiente ordenación (de más a menos probable): (4) > (6) > (5) > (2)> (3) > (7) >(1) > (8). Es decir, en promedio, los sujetos de la muestra consideraron más probable el suceso *Linda es feminista* que el suceso *Linda es feminista y cajera de un banco*, lo cual es correcto. Por otro lado, también este suceso se considera más probable que el suceso *Linda es cajera de un banco*, lo cual contradice las propiedades de la probabilidad y corresponde a la falacia de la conjunción. Esta respuesta se ha encontrado en un 80 % de estudiantes en diversos experimentos en que se plantean un problema de este tipo y el porcentaje de respuestas incorrectas no varió ni siquiera en los estudiantes con mayor nivel de instrucción.

Con el fin de comprobar su hipótesis sobre la falacia de la conjunción, los autores plantearon el problema 2 a una muestra de 93 estudiantes.

Muchas de las dificultades que las personas tienen con la comprensión de la probabilidad pueden deberse a la redacción de los enunciados.

Problema 2. Supón que Bjorn Borg alcanza la final de Wimbledom en 1981. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones consideras más probable?

a. Bjorn Borg gana el primer set pero pierde el partido
b. Bjorn Borg gana el primer set
c. Bjorn Borg gana el partido
d. Bjorn Borg pierde el primer set pero gana el partido

En este y otro problema similar referido al presidente Reagan encontraron que alrededor del 70% de los estudiantes consideraba más probable la intersección de los sucesos que un suceso simple. Los encuestados consideraron más probable que Bjorn ganase el partido (a) y también que ganase el partido aunque perdiese el primer set (d), considerando esto más probable que simplemente perder el primer set (b). Tversky y Kahneman sugieren que los estudiantes usan la heurística de la representatividad y basan la probabilidad pedida más en esta representatividad (respecto a los éxitos usuales del Bjorn) que en el calculo normativo de la probabilidad de un suceso compuesto.

Lenguaje y presentación de los problemas

Una sugerencia de Pollatsek, Well, Konold y Hardiman (1987) es que muchas de las dificultades que las personas tienen con la comprensión de la probabilidad pueden deberse a la redacción de los enunciados. Su hipótesis se basa en los resultados de Einhorn y Hogarth (1986), quienes muestran cómo los enunciados que usan la conjunción "y" pueden interpretarse como probabilidad conjunta o como probabilidad condicional. Así, de 24 estudiantes a los que se les hizo la pregunta: *¿Cuál es la probabilidad de ir al supermercado y comprar café?* 9 la interpretaron como una probabilidad condicional P (comprar café / ir al supermercado), mientras que el resto lo interpretó como una probabilidad conjunta P (ir al supermercado $\cap$ comprar café). Una conducta similar se encuentra en más de la mitad de los sujetos de la investigación de Ojeda (1995).

Gigerenzer (1994) sugiere que nuestra mente está mejor equipada para resolver problemas de probabilidad (el autor hace referencia particular a problemas bayesianos) cuando la información y las preguntas se dan en términos de frecuencias. Llama frecuencias naturales al formato que presenta las frecuencias en forma secuencial, que se asemeja más a la forma en que recogemos información de las frecuencias de sucesos aleatorios en una situación de muestreo natural a lo largo de nuestra experiencia. Por ejemplo, en un problema de diagnóstico médico, el razonamiento natural de frecuencias se daría en la siguiente forma: "En 1000 adultos hay 999 sanos y uno enfermo. Al pasarles una prueba médica, aproximadamente 50 de los 999 sujetos sanos darán positivos y también el sujeto enfermo. Luego la probabilidad de que el sujeto esté enfermo si el test es positivo es 1/51 porque solo hay un enfermo entre los 51 a los que el test dio positivo". En el razonamiento anterior, el médico no tiene que aplicar toda la complejidad del teorema de Bayes, sino sólo tener en cuenta los casos favorables y posibles, de modo que el problema de Bayes se transforma en un problema simple de probabilidad.

Según Gigerenzer, nuestra mente está mejor equipada para resolver problemas de probabilidad cuando la información y las preguntas se dan en términos de frecuencias.

En el caso particular de la falacia de la conjunción, Fiedler (1988) encontró una reducción considerable del número de respuestas incorrectas al cambiar el enunciado del problema 1 y pedir a los sujetos calcular frecuencias, en lugar de probabilidades. Al plantear la pregunta de la forma: "Dado que un grupo de n mujeres se ajustan a la descripción de Linda; ¿Cuántas de ellas serán cajeras? ¿Cuántas de ellas serán cajeras y feministas? encontraron que hasta el 80 % o 90 % de los estudiantes daban respuestas correctas, ajustadas a la probabilidad de la intersección de sucesos.

Enseñanza

Muchos y diferentes estudios han tratado de analizar si la enseñanza mejora el razonamiento sobre las probabilidades compuestas y evita la falacia de la conjunción. Tversky y Kahneman (1983) comparan las respuestas de sujetos con diferentes conocimientos de probabilidad, encontrando tan sólo ligeras mejoras en los que han tenido mayor número de cursos de estadística, con la excepción de un grupo de sujetos con conocimientos estadísticos bastante avanzados. Crandall y Greenfield (1986) enseñaron sistemáticamente a sus sujetos a usar diagramas de Venn para resolver problemas similares a los descritos anteriormente, encontrando una mejoría moderada en el grupo experimental de sujetos. Otros estudios en los que se usan diagramas de Venn o se fuerza a los alumnos a considerar sus respuestas y producen alguna mejora en la resolución de las tareas se describen en Sedlemeier (1999), quien considera que la enseñanza de la estadística mejora la comprensión de las probabilidades compuestas, pero que los estudiantes requieren ayudas y claves para la resolución. La enseñanza directa de probabilidades compuestas parace ser más efectiva aunque todavía la mitad de los participantes en los diferentes experimentos continúan con la falacia de la conjunción al finalizar la enseñanza.

Los resultados de los estudios anteriores parecen preocupantes, puesto que indican que los estudiantes no son capaces de utilizar los conocimientos adquiridos en la enseñanza formal en su razonamiento cotidiano.

Los resultados de los estudios parecen preocupantes, puesto que indican que los estudiantes no son capaces de utilizar los conocimientos adquiridos en la enseñanza formal en su razonamiento cotidiano.

Material y método

En nuestro caso hemos tratado de llevar a cabo esta evaluación, dentro de un cuestionario más amplio que contempla diversos aspectos de la comprensión de las probabilidades conjuntas y condicionales. Participaron en la experiencia dos grupos de estudiantes de primer año de psicología, antes de haber estudiado el tema de probabilidad condicional. Los ítems concretos relacionados con la falacia de la conjunción que se propusieron a estos estudiantes se presentan a continuación. El primer grupo de estudiantes (n=81) completó los ítems 1 y 3 y el segundo grupo de estudiantes (n=76) completó los ítems 2 y 4. La evaluación se llevó a cabo como una actividad dentro de la asignatura Análisis de Datos en Psicología, que ambos grupos cursaban con la misma profesora, inmediatamente antes de comenzar el tema de probabilidad condicional. Precisamente la evaluación se realizó con finalidad diagnóstica, para conocer los posibles sesgos que presentaban nuestros estudiantes y tenerlos en cuenta en la enseñanza del tema.4

Sedlemeier (1999), quien considera que la enseñanza de la estadística mejora la comprensión de las probabilidades compuestas, pero que los estudiantes requieren ayudas y claves para la resolución.

Item 1. Linda tiene 31 años, es soltera, extrovertida y muy brillante. Se licenció en filosofía. En sus tiempos de estudiante estaba muy comprometida con asuntos de discriminación y justicia social, y también solía participar en manifestaciones antinucleares. En Granada, hay 100 personas que se ajustan a la descripción de Linda, ¿Cuántas de ellas consideras que son

a. Cajeras de un banco ________?
b. Cajeras de un banco y están asociadas al movimiento feminista __________?

Item 2. Bill es un hombre de 34 años, inteligente pero poco imaginativo, y en general, poco activo. En la escuela era bueno en matemáticas, aunque se le daban bien las ciencias sociales y humanidades. En Granada hay 100 personas que se ajustan a la descripción de Bill. ¿Cuántos de estos hombres consideras que:

a. Tocan jazz en su tiempo libre _________.
b. Son un contable que toca jazz en su tiempo libre _________.

Item 3. Supón que Anna Kournikova alcanza la final de Roland Garros en 2004. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones consideras más probable?

a. Anna Kournikova gana el primer set pero pierde el partido.
b. Anna Kournikova gana el primer set.
c. Los dos sucesos son igual de probables.

Item 4 ¿Cuál de los siguientes sucesos consideras más probable?

a. Aznar mandará más tropas a Irak y aumentará el presupuesto de becas.
b. Aznar aumentará el presupuesto de becas.
c. Los dos sucesos son igual de probables.

Todos los ítems son versiones modificadas de los utilizados por Tversky y Kanhneman (1982). En todos ellos nos hemos limitado a presentar un suceso simple y otro compuesto, para evitar la dispersión de la respuesta si se incluyen demasiados distractores. Los ítems 3 y 4 son modificaciones del problema 2 presentado anteriormente y otro equivalente referido al presidente Reagan, aunque hemos adaptado a nuestro contexto, usando personajes actuales y sucesos de actualidad que sean familiares a nuestros alumnos. En los ítems 1 y 2 (modificaciones del problema 1 y otro equivalente presentado por Tversky y Kahneman) la principal diferencia es que la solución del problema se pide en términos de frecuencia y no de probabilidad, para comprobar la hipótesis planteada por Fiedler (1988) de que este formato facilita la resolución de los problemas. En concreto los ítems 1 y 2 son versiones semejantes a las usadas en las investigaciones de este autor.

	Ítem 1 (Grupo 1, n=81)	Ítem 2 (Grupo 2, n=76)
Correcta	5 (6,2)	4 (5,3)
Incorrecto (falacia conjunción)	23 (28,4)	24 (31,6)
En blanco	53 (65,4)	48 (63,2)

Tabla 1. Frecuencias (y porcentajes) de respuestas en los ítems en formato de frecuencias

Resultados en ítem 3	Ítem 3 (Grupo 1, n=81)	Ítem 4 (Grupo 2, n=76)
Correcta	30 (37,0)	21 (27,6)
Incorrecto (falacia conjunción)	6 (7,4)	14 (18,4)
Incorrecto (equiprobabilidad)	39 (48,1)	34 (44,7)
En blanco	6 (7,4)	7 (9,2)

Tabla 1. Frecuencias (y porcentajes) de respuestas en los ítems en formato de frecuencias

En nuestro estudio, a pesar de variar el contexto del problema, en los grupos se presenta una proporción semejante de alumnos que muestra la falacia de la conjunción en los ítems planteados.

Resultados y discusión

En las Tablas 1 y 2 presentamos los resultados obtenidos en cada ítem. Hemos considerado correcto cualquier número que se responda en los dos apartados que componen los ítems 1 y 2, siempre que el alumno estime un mayor número de personas que cumplen la condición simple (ser cajera o tocar música de jazz) que el número estimado para la condición compuesta (ser cajera feminista o ser contable que toca el jazz).

A pesar de variar el contexto del problema, en los dos grupos se presenta una proporción semejante de alumnos que muestra la falacia de la conjunción en estos ítems (da un número mayor de personas para la conjunción que para el suceso simple). Es mínimo el número de alumnos que da una respuesta correcta, aunque la gran cantidad de respuestas en blanco hace sospechar que el problema es poco habitúal para el alumno.

En los problemas 3 y 4 (Tabla 2) el número de respuestas correctas sube considerablemente en los dos grupos, y hay muy pocas respuestas en blanco, lo que contrasta con la hipótesis de Fiedler (1988) de que los problemas de probabilidad compuesta son más sencillos si se plantean en términos de frecuencias. No obstante, todavía se presenta una fuerte proporción de alumnos que responden de acuerdo a la falacia de la conjunción en los dos grupos.

Hacemos notar también que alrededor del 50% de los alumnos en los dos grupos concede la misma probabilidad a los dos sucesos, lo cual es claramente incorrecto, puesto que la conjunción de dos sucesos sólo puede tener la misma probabilidad que uno de ellos si el otro es el suceso seguro. Estos alumnos posiblemente razonen de acuerdo a la heurística de la equiprobabilidad (Lecoutre, 1992) que consiste en considerar dos sucesos equiprobables cuando no lo son.

A pesar de que los problemas se pasaron en dos grupos diferentes, se observan los mismos patrones de respuesta. Para analizar si las diferencias en proporciones de respuestas correctas son estadísticamente significativas se realizó un análisis de varianza de medidas repetidas, tomando como factor intragrupo el tipo de problema (frecuencias o probabilidad) y como factor intergrupos el grupo de alumnos. También se controló el efecto de la variable “nota media de acceso” del alumno para ingresar en psicología, que estos alumnos proporcionaron en su cuestionario. Los resultados se muestran en la tabla 3.

Efecto	F	Significación
Tipo de problema	42,970	0,000
Grupo	1,283	0,259
Nota Bachillerato	0,893	0,346
Interacción	3,650	0,058

Tabla 3. Resultado del análisis de varianza

Estos resultados nos indican un efecto significativo del tipo de problema, no siendo así del curso, interacción o Nota en Bachillerato. En consecuencia, podemos decir que el problema de la falacia de la conjunción se ha presentado en forma similar en los dos grupos de estudiantes y que no depende de la calificación previa de los alumnos en Bachillerato, aunque los resultados —en contra de lo esperado— son algo mejores en los problemas presentados en términos de probabilidad, que en los de frecuencia.

Conclusiones

En este trabajo hemos descrito la falacia de la conjunción y realizado un estudio exploratorio inicial que indica su presencia en los alumnos de psicología en la Universidad de Granada, así como su posible solapamiento con el sesgo de equiprobablidad. Somos conscientes del carácter limitado de nuestro estudio y de que sería necesario complementarlo con otro tipo de preguntas, así como con entrevistas a los estudiantes, para analizar más detalladamente los razonamientos de los alumnos.

En cualquier caso, nos parece importante llamar la atención de los profesores sobre la falacia de la conjunción. Si éste sesgo se ha presentado incluso en una situación de evaluación, dentro de una asignatura de contenidos estadísticos, cuando el alumno sabe que se espera de él un razonamiento de acuerdo al cálculo de probabilidades, tendrá una incidencia mucho mayor en su vida diaria, donde pueda afectar a las decisiones que tenga que tomar. Pensamos que es importante tener en cuenta estos aspectos psicológicos y no sólo los matemáticos en la preparación estadística de los alumnos, puesto que nuestra misión como profesores va más allá de enseñar algoritmos y procedimientos y debe encaminarse a educar sus intuiciones y su capacidad de razonamiento. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CRANDALL, C. S. y GREENFIELD, B. (1986): "Understanding the conjunction fallacy: A conjunction of effects?", *Social Cognition*, 4, 408-419. v

DÍAZ, C. (2003): "Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico. Implicaciones para la enseñanza de la estadística", *Actas del 27 Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*, CD Rom.

EINHORN, H. J. y HOGART, R. M. (1986): "Judging probable cause", *Psychological Bulletin*, 99, 3 -19.

FIEDLER, K. (1988): "The dependence of the conjunction fallacy on subtle linguistic factors", *Psychological Research*, 50, 123-129.

GIGERENZER, G. (1994): "Why the distinction between single-event probabilities and frequencies is important for psychology (and vice-versa)", *Subjective probability*, En G. WRIGHT y P. AYTON (Eds.), pp. 129-161, Wiley.

LECOUTRE, M. P. (1992): "Cognitive models and problem spaces in purely random situations", *Educational Studies in Mathematics*, 23, 557-568.

KAHNEMAN, D., SLOVIC, P., y TVERSKY, A. (1982): Judgment under uncertainty: Heuristics and biases, *Cambridge University Press*, New York.

OJEDA, A. M. (1995): "Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional", *UNO*, 5, 37-55.

PÉREZ ECHEVERRÍA M. P. (1990): Psicología del razonamiento probabilística, *Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid*, Madrid.

POLLATSEK, A., WELL, A. D., KONOLD, C. y HARDIMAN, P. (1987): "Understanding conditional probabilities", *Organitation, Behavior and Human Decision Processes*, 40, 255 - 269.

SEDLEMEIER, P. (1999): *Improving statistical reasoning. Theoretical models and practical implications*, Mahwah, Erlbaum.

TVERSKY, A. y KAHNEMAN, D. (1974): "Judgement under uncertainity: Heurístics and biases", *Science*, 185, 1124-1131.

TVERSKY, A. y KAHNEMAN, D. (1982): "Judgments of and by representativeness", En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), Judgement under uncertainty: Heuristics and biases (pp. 84-98), *Cambridge University Press*, Cambridge.

TVERSKY, A. y KAHNEMAN, D. (1983): "Extensional versus intuitive reasoning. The conjunction fallacy in probability judgment", Psychological Review, 90, 293-315.

SUMA 48
Febrero 2005, pp. 51-54

DIVULGAMAT, Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas

Hoy en día, casi es una obviedad decir que las matemáticas constituyen un eje central de la historia de la cultura y de las ideas y que, gracias a su universalidad, se aplican en las otras ciencias, de la naturaleza y sociales, en las ingenierías, en las nuevas tecnologías, en las distintas ramas del saber y en los diferentes tipos de actividad humana. Además, las matemáticas constituyen una herramienta básica para que la mayoría de las personas puedan comprender la sociedad de la información en la que viven, cada vez más compleja y tecnificada. Actualmente el desarrollo de toda sociedad, en particular, de la sociedad española, depende en gran medida del desarrollo científico y tecnológico, en el cual las matemáticas son parte fundamental. Por tanto, sería lógico esperar un incremento generalizado de la cultura matemática entre la población. Sin embargo, no parece que eso sea así según algunos estudios recientes, como los informes PISA, TIMSS, OCDE e INCE.

En general, podríamos decir que la mayoría de las personas no alcanzan el nivel de alfabetización funcional mínimo para desenvolverse en una sociedad moderna. Un gran número de personas encuentra las matemáticas difíciles y aburridas, e incluso se sienten inseguras respecto a su capacidad para resolver problemas sencillos o simples cálculos. Como afirma J. A. Paulos (1990) en su famoso libro titulado *El hombre anumérico:*

> El anumerismo, o incapacidad de manejar cómodamente los conceptos fundamentales de número y azar, atormenta a demasiados ciudadanos que, por lo demás, pueden ser perfectamente instruidos... de manera que es frecuente oír expresiones como: las matemáticas no son lo mío, yo soy de letras, no entiendo de números, etcétera.

La paradoja parece pues estar servida: las matemáticas, uno de los conocimientos más valorado y necesario en las sociedades modernas altamente tecnificadas es, a la vez, uno de los más inaccesibles para la mayoría de la población.

Las anteriores reflexiones suponen un reto: hacer llegar de un modo asequible el sentido de la actividad matemática a un amplio segmento de la sociedad. En estos últimos años diversos colectivos y personalidades así lo han manifestado. Citaremos como ejemplo que en el Acta de la reunión de cierre del Comité del Año Mundial de las Matemáticas 2000, se aprobó que una de las labores prioritarias a desarrollar en el futuro era la popularización y divulgación de las Matemáticas, con la pretensión de colaborar en la mejora de la cultura científica de nuestra sociedad y en un cambio positivo en la imagen de las Matemáticas. Por último, comentar que en el *Programa Nacional de Matemáticas del Plan Nacional de Investigación, Desarrollo e Innovación Tecnológica 2004-2007* aprobado por el Consejo de Ministros el 7 de Noviembre de 2003, dentro de su punto quinto, 'Actuaciones horizontales asociadas al pro-

> *La dirección del portal DIVULGAMAT: en Internet es:*
>
> **www.divulgamat.net**

Coomisión de Divulgación
Real Sociedad Matemática Española

grama', se dedica un apartado, el 5.3, al 'Fomento de la cultura científica y tecnológica', mencionándose:

> A pesar del desarrollo notable de las Matemáticas en nuestro país y de su creciente implicación en la ciencia, la tecnología y la economía, existe aún un problema evidente de comunicación al público de esta realidad que afecta en consecuencia a la falta de vocaciones científicas. Las medidas que aumenten la apreciación pública de las Matemáticas deberían pues ser priorizadas, como se ha puesto de manifiesto en la reciente ponencia sobre *La problemática de la enseñanza de las ciencias en la educación secundaria*, desarrollada en el Senado en colaboración con las sociedades científicas.

Ante esta situación, la Real Sociedad Matemática Española (RSME) ha creado una Comisión de divulgación, con el fin de mejorar la actitud social hacia las matemáticas, desarrollar la cultura matemática de nuestra sociedad, deshacer el tópico de ciencias/humanidades, compartir su belleza, animar a las personas a que sean matemáticamente más activas, mostrar las matemáticas que existen en nuestro entorno, aprendiendo a mirar la realidad con ojos matemáticos, estimular el desarrollo de la actividad matemática, divulgar la investigación matemática que se desarrolla en nuestro país, incrementar la cultura matemática española y fomentar las vocaciones matemáticas. En resumen, se trata de aumentar la presencia de las matemáticas en la sociedad y de mejorar la actitud, percepción y valoración que ésta tiene de las matemáticas.

La Comisión de Divulgación de la RSME

La Comisión de divulgación de la Real Sociedad Matemática Eespañola está formada por los siguientes miembros: Raúl Ibáñez (presidente), Alberto Bagazgoitia, José Ignacio Extremiana, Santiago Fernández, Fernando Fouz, Mikel Lezaun, Vicente Liern, Pilar Moreno, Antonio Pérez, Lukas Rodríguez (webmaster) y Rosa María Ros.

Dicha comisión, tras analizar la situación en que se encuentra actualmente la divulgación matemática en España, ha diseñado una estrategia para desarrollar distintas actividades a medio y largo plazo. En particular, ha elaborado un plan de trabajo anual recogido en el proyecto DIVULGAMAT, Divulgación Matemática, del que el portal DIVULGAMAT es parte esencial y que describimos a continuación. Este proyecto ha sido posible gracias a la acción especial DIF2003-10145-E del Ministerio de Ciencia y Tecnología.

El portal DIVULGAMAT

La página principal del portal DIVULGAMAT, Centro Virtual de Divulgación Matemática, consta de tres zonas:

1ª Zona, situada en la parte central

El objetivo de la misma es captar la atención de los visitantes a la página mediante imágenes y fragmentos literarios relacionados con las Matemáticas. Aquí, todos los meses aparecerán dos imágenes impactantes (esculturas, pinturas, edificios, imágenes generadas por ordenador, fotografías, imágenes históricas, sellos, etc.) que estén relacionadas con las Matemáticas, y además dos fragmentos literarios (poesía, novela, teatro,…) que contengan alusiones directas a diferentes aspectos de las Matemáticas. Todas estas imágenes y fragmentos se irán guardando en dos Históricos de imágenes y de fragmentos literarios, a los que se podrá acceder en cualquier momento.

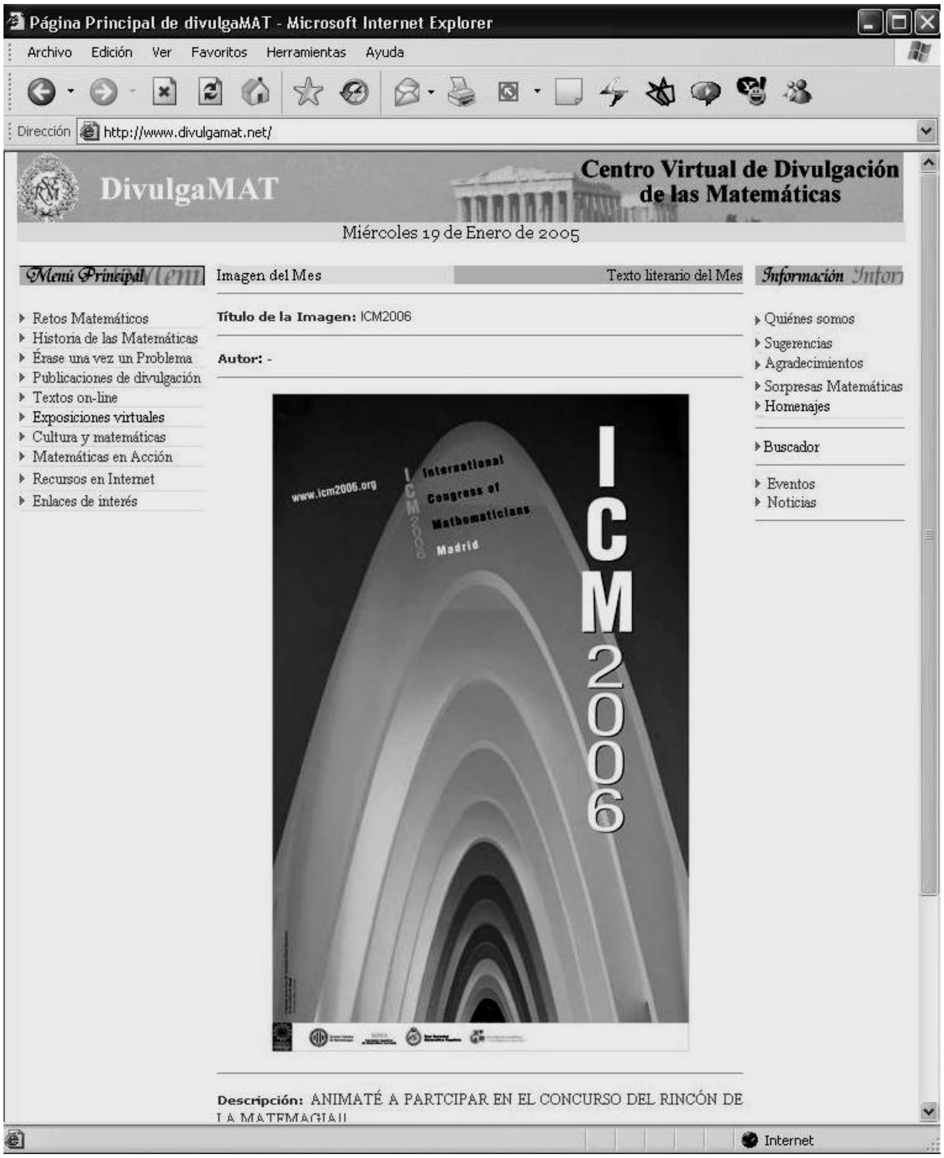
2ª Zona, situada en la parte izquierda de la página

El grueso de la información ofrecida está ubicada en esta columna. Su contenido está distribuido en las siguientes secciones:

- *Retos Matemáticos.* Uno de los objetivos definidos en esta sección es animar al "público" a que tenga una relación activa con las matemáticas. Una de las formas, que aquí planteamos, para que realmente exista esa participación activa y de calidad es que los visitantes se enfrenten a una serie de retos matemáticos. Así, cada quince días se propondrán dos retos para que los lectores los trabajen y si lo creen interesante nos comuniquen sus dudas, reflexiones, soluciones, o incluso narren su experiencia a la hora de resolver el reto propuesto. En la quincena siguiente aparecerán las soluciones que por diferentes razones se juzgue interesante mostrar. Habrá dos tipos de retos: un problema de matemáticas más o menos elemental (del nivel de la enseñanza secundaria u obligatoria) y otro de un nivel de bachillerato o de primeros años de la universidad.

- *Historia de las Matemáticas.* Sin duda, este es uno de los apartados con mayor peso dentro de este portal, tanto por su contenido como por su trascendencia. En el mismo se podrán encontrar las siguientes subsecciones: Biografías de matemáticos ilustres, Temas matemáticos, Obras clave en la Historia de las Matemáticas, Las Matemáticas en diferentes culturas, Artículos de las secciones "Historia" y "Mirando hacia atrás" de La Gaceta de la RSME, Historia de las Matemáticas a través de la imagen, Biografías de matemáticos españoles, Recuperando la memoria: La Gaceta Matemática 1949-1982.

- *Publicaciones de divulgación.* Uno de los grandes problemas con que se encuentran las publicaciones de tipo divulgativo o didáctico en nuestro país es que no llega información de las mismas a la sociedad. Por ejemplo, rara vez los medios de comunicación hacen reseñas o comentan las publicaciones relacionadas con las matemáticas. Por ello, en esta sección vamos a realizar bases de datos con información de publicaciones en formato libro, vídeo, revista y



artículos de periódicos, con contenidos divulgativos de diferentes niveles. En estas bases de datos se dará información precisa de las publicaciones, así como reseñas críticas de las mismas.

- *Textos on-line*. En esta sección se podrán encontrar textos matemáticos, en formatos de fácil utilización como por ejemplo ficheros pdf, inéditos o que han tenido una difusión muy reducida o efímera. Estos textos serán cursos, seminarios, conferencias, premios culturales o de divulgación, lecciones inaugurales, discursos de las academias, jornadas matemáticas, etc.

- *Exposiciones Virtuales*. Una forma interesante y atractiva de divulgar las Matemáticas es mediante la organización de exposiciones. La belleza de las imágenes que conforman la exposición tiene como objetivo captar la atención del público para que se interese por lo que está viendo. De esta manera, las matemáticas van apareciendo de forma natural a través de la propia imagen, del objeto expuesto o del texto que les acompaña. El interés por las Matemáticas relacionadas con la exposición va surgiendo de forma espontánea en el público que sin darse cuenta está pidiendo más explicaciones, más material… Esta sección está formada por cinco series de exposiciones, que se irán renovando periódicamente, aunque seguirán guardándose las viejas exposiciones de cada sección. Los títulos de estos apartados son: Arte y Matemáticas, Fotografía y Matemáticas, Libros matemáticos, Exposiciones con Historia, La Exposición de…

- *Cultura y Matemáticas*. Aquí se pretende mostrar y explicar de forma sencilla y atractiva la presencia de las Matemáticas en otras manifestaciones culturales. Para este año se están organizando ya las siguientes subsecciones: Las Matemáticas en la Ciencia-Ficción, Música y Matemáticas, El Rincón Matemágico, Matemáticas y Cine, Matemáticas y Teatro, Matemáticas con Papiroflexia, Juegos…

- *Erase una vez…un problema*. Estos cuentos con problemas, o estos problemas contados, han sido escritos con la intención de entretener y hacer pensar tanto a aquellos que se escudan en que son "de letras" para justificar su rechazo hacia las matemáticas, como a aquellos "de ciencias" que están convencidos de que las matemáticas tienen que ser muy serias, con el riesgo consiguiente de convertirlas en áridas, así como a todos los que puedan estar interesados en divertirse un poco. Queremos demostrar que letras y números no están reñidos, como se comprobará en estos "cuentos problemáticos", a los que hemos intentado añadir, además, una buena dosis de humor.

- *Matemáticas en Acción*. En esta sección encontraréis información, artículos e imágenes sobre el concurso para profesores *Física + Matemáticas en Acción*, así como un apartado de experimentos para realizar en el aula o en casa, para aprender Matemáticas con ellos o para crear de recursos didácticos innovadores.

- *Recursos didácticos de Matemáticas*. Uno de los objetivos de este portal es crear una guía comentada de recursos didácticos en la que profesores (de primaria, secundaria y universidad), estudiantes y aficionados a las matemáticas puedan encontrar materiales de aprendizaje o autoaprendizaje de las matemáticas. A corto plazo esta sección tendrá tres secciones: Recursos Didácticos en Internet, Recursos para el aula de Matemáticas y Juegos (Juegos como materiales didácticos y Juegos de estrategia).

- *Enlaces de interés*. En esta sección se dará un listado de interesantes enlaces relacionados con las matemáticas, prestando especial atención a las páginas web de contenido divulgativo o didáctico. Cada una de las páginas vendrá acompañada de un comentario crítico realizado por la comisión de divulgación, así como una pequeña descripción de sus contenidos. Los enlaces estarán clasificados por su temática.

3ª Zona, situada en la parte derecha de la página
Actualmente consta de los siguientes apartados:

- *Sorpresas Matemáticas*. Esta sección de DIVULGAMAT pretende poner a disposición del visitante pequeñas joyas matemáticas de rápida lectura. Como su propio nombre indica, Sorpresas Matemáticas es una sección donde el visitante nunca estará seguro de lo que allí aparecerá, aunque eso sí, serán pequeñas sorpresas, interesantes y cautivadoras. Entre estas sorpresas tendremos anécdotas de matemáticos, curiosidades, citas con contenido matemático, chistes matemáticos, acertijos, caricaturas, ilusiones y paradojas, demostraciones sin palabras…

- Quienes somos. En este apartado aparecen los miembros de la Comisión de Divulgación de la RSME, junto con una carta de presentación en la que se hace un llamamiento a la comunidad científica española para que colabore en este interesante proyecto.

- *Sugerencias*. Ésta es una página interactiva, por lo que dispone de un sencillo formulario que facilita que los lectores envíen sus sugerencias, ideas, críticas…

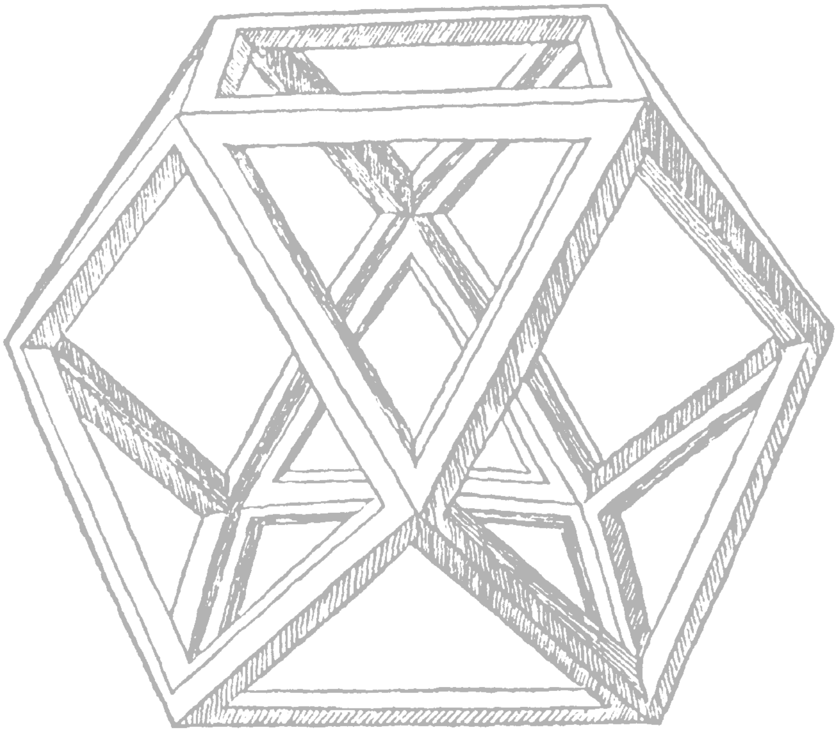
- *Buscador*. La página web DIVULGAMAT cuenta en su página inicial con un buscador que permitirá al visitante localizar cualquier materia en la que esté interesado. Pensamos que el buscador es una herramienta imprescindible para toda página web, de gran valor para el visitante.

- *Noticias*. En este espacio se pretende difundir las noticias matemáticas o con contenido matemático. Aquí caben desde noticias relacionadas con la investigación matemática pero susceptibles de tener una repercusión social (al estilo de la demostración del teorema de Fermat), pasando por premios que se concedan a matemáticos o a obras matemáticas, hasta noticias con un marcado tono divulgativo.

- *Eventos*. Siguiendo con la filosofía de la información, en esta sección se recogerán y se acercarán a la comunidad científica y a la sociedad en general los eventos de carácter divulgativo, didáctico,… que se celebren en España. Desde aquí animamos a la colaboración para que se nos remita y así podamos difundir las convocatorias de este tipo de eventos.

Para terminar, como antes hemos mencionado, el portal DIVULGAMAT que acabamos de presentar no es la única realización que se ha propuesto llevar a cabo la Comisión de Divulgación de la Real Sociedad Matemática Española. En un futuro no muy lejano daremos cumplida información del desarrollo de esas otras actividades. ■

SUMA



Dibujo de Leonardo da Vinci para *La divina proporción* de Luca Pacioli

poliedro

SUMA 48
Febrero 2005, pp. 57-63

En torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. La autoría (I)

Suele ser la muerte la que marca los tiempos de la historia. Suele ser ella quien da sentido a cada frase, selecciona los hechos y decide sobre su valor de verdad y trascendencia. Ella es la culpable de que dediquemos este artículo a un amigo, Mariano Hormigón, que, después de haber dedicado una gran parte de su vida a la Historia de la Ciencia, este verano pasó a formar parte de ella.

Él nos enseñó a ver la historia como un arma cargada de futuro y nos ilusionó con la posibilidad de esperar algo de ella cuando aún no habíamos acabado la carrera. Él, que tenía el don de la palabra —y era un auténtico cotilla histórico[1]—, nos subyugó con la suya en aquellas brevísimas sesiones de tres horas del Diploma. Él nos enseñó a pensar la historia más allá del positivismo de la mera enumeración de hechos, a ver que ni siquiera esa selección era justa u objetiva. De él bebimos la pasión por escrutar esa parte de la historia que silencian las versiones oficiales. Por delimitar sus intenciones, por inscribirlas en su propio marco filosófico, económico, histórico y político. Él nos contagió el placer por trascender las verdades históricas firmemente asentadas y el entusiasmo por desenredar esas mentiras oficiales, hábilmente urdidas, que la repetición acaba convirtiendo en verdades insoslayables.

Por eso, desde la modestia de quienes suscribimos estas líneas, este artículo, los que le precedieron y los que vengan, están dedicados a su memoria. Pretenden ser, un discreto homenaje en medio de ese impenetrable silencio cargado de culpa, que le dedica la Universidad de Zaragoza y que esperamos que sea tan sólo temporal y circunstancial. Porque, más allá de las diferencias personales, profesionales o ideológicas, sólo desde la mezquindad podría negársele el homenaje público que merece quien, gracias a su esfuerzo y a su denodado trabajo contra viento y marea, consiguió que esta Universidad tenga, en Historia de la Ciencia, una presencia y un prestigio nacionales e internacionales que, para los que conocimos en otros momentos la desafección por esta disciplina, nos parece impensable. Nosotros, desde este rincón, desde la confianza con que nos honráis cada número, nos unimos a ese homenaje.

Mariano Hormigón Blázquez

Y quizás por ese bien aprendido afán de transgredir las normas para intentar ver el sol desde las sombras y porque, desde nuestra modestia, pretendemos que la muerte de Mariano, como todas, sirva para alimentar la vida, comenzaremos esta segunda serie de artículos dedicados a temas elementales y recurrentes de la Secundaria, por escribir la historia al revés, tratando de responder con el trabajo de nuestros alumnos y alumnas, aunque sea implícita y parcialmente, a aquel reto, sobre el que tantas veces reflexionamos en el Diploma de Historia de las Ciencias y de las Técnicas y que, al menos para nosotros, seguía activo desde las III JAEM[2]: ¿Cuál debe ser el papel de la Historia en clase de Matemáticas?

Carlos Usón Villalba
Ángel Ramírez Martínez
historia.suma@fespm.org

El ser humano es el único ordenador que guarda la información en formato biológico, de tal manera que desaparece con él en el instante mismo de la desconexión. Los que somos profesores tenemos la suerte de poder guardar ese conocimiento en formato de red, biológica también, pero de red. De tal forma que el receptor, aunque no lo conserve de forma fidedigna, tiene la capacidad de enriquecerlo o donarlo a otros para que lo enriquezcan. Hay formatos mucho menos frágiles y más inequívocos. Hasta el siglo pasado, los libros en sus múltiples variantes a lo largo de los tiempos: pergamino, barro, piedra, papiro, etc. Pero a ellos llega una mínima parte de esa información, pues cuando llega a oleadas (como sucede ahora) es imposible recuperarla eficazmente de forma individualizada.

Los conceptos científicos han flotado durante siglos estancados en el magma inconexo de la imprecisión a la espera de un desarrollo efectivo que, casi siempre, ha sido fruto de un complejo proceso de asimilación-transmisión.

En cualquiera de los casos, y a pesar del empeño de la historia por buscar el origen del conocimiento, a pesar de su exaltación de las fuentes escritas, los conceptos científicos han flotado durante siglos estancados en el magma inconexo de la imprecisión a la espera de un desarrollo efectivo que, casi siempre, ha sido fruto de un complejo proceso de asimilación-transmisión en el que ha jugado un papel más importante la posibilidad de transgredir las normas establecidas, la actitud de pensamiento en libertad que han conquistado para sí sus autores[3], o que han propiciado los maestros, que los propias evidencias en las que se fundamentan. Las geometrías no euclidianas pueden ser el ejemplo paradigmático de esta certeza pero es sólo uno más entre los muchos posibles. Y es por ello por lo que hemos querido simbolizar en el Triángulo Aritmético ese acto colectivo de creación científica. De hecho, sus primeros pasos se pierden en el tiempo sin que sea fácil precisar cuando y dónde surge por primera vez. Un anónimo nacimiento que caracterizará también su desarrollo durante siglos hasta que el salto conceptual que llevará al cálculo infinitesimal sea un hito de tal calibre que el orgullo eurocentrista decida acogerlo como un objeto propio y lo bautice con el apellido de uno de los más renombrados filósofos del cristianismo.

En este proceso ha jugado un papel más importante la posibilidad de transgredir las normas establecidas, la actitud de pensamiento en libertad que han conquistado para sí sus autores, que los propias evidencias en las que se fundamentan.

El Triángulo de Pascal antes de Pascal

En esta puesta en escena de lo que fue y supuso el Triángulo Aritmético, podemos empezar por dar un repaso a lo que nos dictan las versiones oficiales, aquellas que con su predicamento han enraizado en nuestras más firmes convicciones, fruto, en este caso, no tanto de sus asertos como de la visión inducida que dejaron tras ellos.

Dice Nicolas Bourbaki [1972, pág. 72, 73]

> Los problemas generales agrupados bajo el nombre de 'Análisis combinatorio' no parecen haber sido considerados antes de los últimos siglos de la Antigüedad Clásica, únicamente la fórmula
>
> $$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$
>
> aparece en el siglo III de nuestra Era. El matemático Bhaskara (siglo XII) conocía la fórmula general para
>
> $$\binom{n}{p}$$
>
> Un estudio más sistemático se halla en la obra de Levi ben Gerson. A principios del siglo XIII: obtiene la fórmula de recurrencia que permite calcular el número de variaciones de n elementos tomados de p en p, y en particular el número de permutaciones de n objetos, enunciando las reglas equivalentes a las relaciones
>
> $$\binom{n}{p} = \frac{V_n^p}{p!} \quad y \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$
>
> Pero este manuscrito no parece haber sido conocido por sus contemporáneos, y los resultados fueron siendo hallados poco a poco por los matemáticos de los siglos siguientes. Entre los progresos posteriores señalamos que Cardano demostró que el número de partes no vacías de un conjunto de n elementos es 2^n-1; Pascal y Fermat fundando el cálculo de probabilidades, vuelven a encontrar la expresión

$$\binom{n}{p},$$

y Pascal es el primero que observa la relación entre estos números y la fórmula del binomio: ésta parece haber sido conocida por los árabes del siglo XII, y por los chinos del XIV, y se había vuelto a encontrar en Occidente a principios del siglo XVI, al igual que el método del cálculo recurrente llamado del 'triángulo aritmético', que se atribuye corrientemente a Pascal. Finalmente Leibniz obtiene hacia 1676, sin publicarla, la fórmula general de los 'coeficientes multinomiales', encontrada independientemente y publicada por Moivre veinte años después.

No hemos encontrado en los manuales al uso de historia de la ciencia ninguna otra referencia a los números combinatorios en la antigüedad clásica, pero sí esa formulación general de n(n-1)/2 para un número triangular. Sin embargo, ya en el siglo VI a. de C. y en la India, la medicina védica afirmaba que se podían conseguir 63 combinaciones a partir de seis sabores distintos[4]. Esa preocupación combinatoria se trasladó también al campo de la métrica poética hacia el 400 a. de C. y generó un concienzudo análisis sobre la combinación de sonidos cortos y largos, que Pingala recogió en un libro titulado *Chandasutra*. El resultado numérico conformaba las diferentes filas de un Triángulo que, en este contexto, llamaremos de Halayudha en lugar de Pascal.

Las referencias a la aparición del triángulo de los coeficientes del binomio, *conocido actualmente como triángulo de Pascal son bastante frecuentes en los textos de historia de las matemáticas aunque, por lo general, se le dé poca importancia y se despache el tema de su presencia fuera de occidente con una frase.*

Es cierto que los resultados de las matemáticas védicas pudieron ser fruto, 'sin más', de un recuento de casos elaborados de forma exhaustiva y que, por tanto seguiríamos sin contradecir la afirmación de Bourbaki. Pero la realidad es demasiado terca y, en las matemáticas jainistas, unos 300 años a. de C., también hubo referencias explícitas a las combinaciones como herramienta aritmética de carácter general aplicable a cualquier cuestión que supusiese hacer recuentos de casos. Así, el *Bhagabati Sutra*, propone problemas sencillos de combinatoria aplicados, nada menos, que a la organización en clases de las categorías filosóficas fundamentales, aunque, en otro momento, haga referencia a agrupaciones de los cinco sentidos o de un número determinado de mujeres, hombres y eunucos. Pero, a partir de ese estudio el texto ofrece las fórmulas correspondientes al número de C_n^k y V_n^k para cualquier *n* y para un *k* inferior o igual a 3. Limitación que parece más estética que técnica puesto que alude a la generalización del método para los valores de *n* y *k* que se deseen[5].

Boyer afirma tímidamente que el nombre de Triángulo de Pascal le parece inadecuado. Y no es para menos: Chu Shih Chieh ya había hecho un extenso tratamiento sobre esta herramienta aritmética tres siglos y medio antes de que Pascal se ocupara de él.

Las referencias a la aparición del *triángulo de los coeficientes del binomio, conocido actualmente como triángulo de Pascal* son bastante frecuentes en los textos de historia de las matemáticas aunque, por lo general, se le dé poca importancia y se despache el tema de su presencia fuera de occidente con una frase[6]. La razón de que no se llegue a obviar esa presencia es bien simple, hay una prueba irrefutable que, por su exotismo, se ha popularizado ampliamente. Se trata del *Viejo método del diagrama de los siete cuadrados multiplicativos* del *Szu yuan yii chien* (*El precioso espejo de los cuatro elementos*) de Chu Shih Chieh de 1303.

La misma referencia a la antigüedad del método, a la que alude Chu en el título, nos sitúa ante un sistema ampliamente extendido en China antes de 1303. Ahora bien, si tomamos la India como referencia, ya en el siglo X Halayudha recoge las combinaciones de sonidos en forma de triángulo en un comentario al *Chandasutra* de Pingala. Esa misma disposición triangular que veremos después en China, en la famosa portada del *Szu Yuan Yii Chien* y que, sin embargo, no encontraremos en el mundo árabe ni en Europa, donde los coeficientes del binomio aparecerán dispuestos en forma rectangular.

Carl B. Boyer [1986, pág. 269] sitúa la aparición del Triángulo hacia el 1100, relacionándolo con el cálculo de raíces y no de potencias. Según este mismo autor, es posible que, por esa misma época[7], lo conociese Omar Khayyam. La hipótesis parte de una frase de su *Álgebra* en la que hace referencia a una regla que había descubierto para calcular las potencias *cuartas, quintas, sextas y de grado más elevado* de un binomio.

Boyer afirma tímidamente que el nombre de *Triángulo de Pascal* le parece inadecuado. Y no es para menos: al margen de lo dicho anteriormente, Chu Shih Chieh, tanto en *El precioso espejo de los cuatro elementos*, al que nos referimos en el párrafo anterior, como en su *Introducción a los estudios matemáticos* (*Suan Shu Chi Meng*) de 1299, ya había hecho un extenso tratamiento sobre esta herramienta aritmética tres siglos y medio antes de que Pascal se ocupara de él. Pero es que, a principios del siglo XV, aproximadamente un siglo después de su publicación en China, aparece también en la obra de al-Kashi. Casi un siglo antes de que naciera Blaise Pascal, aparece impreso en la portada de una de las aritméticas comerciales alemanas del XVI, concretamente en el *Rechnung* (1527) de Pedro Apiano. Y, también formó parte, entre otras, de la *Arithmetica integra* de Michael Stifel (1544) famosa por haber sido considerada como la primera en hacer uso de los signos "+" y "–" en lugar de la "***m***" y la "***p***" de los italianos. Y después escribieron sobre él otros autores como Tartaglia en 1556, Stevin en 1625 o Herigone en 1634. Todos ellos anteriores a Pascal, ya que se piensa que debió de desarrollar su *Tratado* poco antes de 1654, año en que lo menciona en una carta dirigida a la Academia de Ciencias de París.

> *Es muy probable que Pascal no soñase nunca con que se pudiera asociar el Triángulo Aritmético a su persona. No parece que fuera la vanidad quien guiase sus actos.*

El sueño que no fue de Pascal

Es muy probable que Pascal no soñase nunca con que se pudiera asociar el Triángulo Aritmético a su persona. No parece que fuera la vanidad quien guiase sus actos. Sería indigno de su condición de jansenista y del ideal de *honnette homme* al que aspiraba[8]. Como prueba de esa actitud humilde, en su última carta a Fermat escribe:

> Advierto vuestro método para los repartos tanto más que lo entiendo muy bien. [...] buscad en otra parte quien os siga vuestras invenciones numéricas, de las que me hacéis el honor de enviarme los enunciados. Por lo que a mi respecta, os confieso que eso me sobrepasa en mucho; sólo soy capaz de admirarlas.

Y es que Pascal, fundamentalmente, estaba preocupado por la religión[9] y, en el plano científico, por la física y la geometría. El opúsculo que trata acerca de la herramienta matemática que algunos han bautizado con su nombre, fue publicado en 1655. Para entonces, Etienne Pascal, su padre, a la vista de la decadencia de la "nobleza de toga" a causa del empuje del absolutismo real, ya había vendido[10] su cargo de segundo presidente del Tribunal de lo Contencioso sobre impuestos indirectos[11] de Clermont y abandonado esta ciudad para instalarse con sus hijos en el renovado París de mediados de siglo. Blaise, que sería instruido en ciencias y humanismo por su propio padre bajo la perspectiva del perfecto *honnette homme*[12], a la edad de 11 años había escrito un *Tratado sobre los sonidos* y redescubierto, a los 12, las primeras 32 proposiciones del *Libro Primero* de los *Elementos* de Euclides. A los 17, en ese trascendental año de 1640 en que se editan las obras claves del enfrentamiento religioso que presidió su vida: el *Augustinus* de Jansenio y el *Imago primi soeculi societatis Jesu*, publica su *Ensayo sobre las cónicas.*

Un año más tarde la Inquisición condenaba el jansenismo y otro después, Pascal, con 19 años, inventaba su *Máquina de la aritmética* y el papa Urbano VIII confirmaba la condena a esa opción religiosa que sería abrazada por la familia Pascal cuatro años después. Los Pascal no fueron los únicos, entre los desclasados de aquella *noblesse de rope* que se resistía a convertirse en *noblesse de Cour*, que se adhirieron a esta doctrina en la que quisieron ver un rechazo frontal al despotismo real[13] a partir de su radical oposición al absolutismo religioso de Roma. Este es un hecho absolutamente determinante en lo que se refiere tanto a la actividad intelectual de Pascal como a los procesos de cambio que se desarrollaron en sus convicciones. No en vano, el jansenismo nació, fundamentalmente, como oposición a los principios religiosos que proclama la Compañía de Jesús[14]. Su figura, como pensador, hay que enmarcarla en lo que fue el humanismo francés que le precedió y compartió época con él, y en el que podemos citar, por aquello del renombre, a Montaigne, Descartes o Voltaire. Estos últimos, por ejemplo, fueron educados por los jesuitas.

Entre el vacío y la teología[15]

En 1647[16] Descartes visita a Pascal y, unos meses más tarde, se publican sus: *Nuevas experiencias relativas al vacío*[17] dando paso a distintos experimentos sobre el vacío que, a partir de aquellos primeros de Clermont, Puy-de-Dôme y Saint Jaques encargados a Florín Périer, configurarían, un año más tarde, su inconcluso *Tratado sobre el vacío*. Todo ello en medio de la disputa jansenista en la que participa activamente y que parece ocupar la mayor parte de su tiempo y energías intelectuales. Fue en esta convulsa época religiosa en la que Inocencio X declara heréticas primero cinco propuestas atribuidas a los jansenistas (1653) y después condena toda su doctrina (1654); en la que además fallecen su padre (1651) y Descartes (1650), profesa su hermana Jacqueline (1653) y tiene la famosa experiencia mística de 'la noche de fuego'[18], en la que escribe: *Tratado del equilibrio y el peso de la masa de aire, De numeris multiplicatibus, Potestatum Numericarum summa, Oración para pedir a Dios el buen uso de las enfermedades, Sobre la conversión del pescador*[19], el *Tratado sobre el Triángulo aritmético* y las tres *Cartas* a Fermat (1654)[20]. Dos años más tarde, concretamente entre 1656 y 1957, verán la luz, de una forma totalmente clandestina, sus panfletos[21] antijesuíticos, popularmente denominados *Cartas Provinciales*. Este lego metido a polemista irónico, sarcástico las más de las veces, cáustico muchas otras, pretendía acercar al lector los principios que, en materia de fe, los teólogos profesionales habían convertido, según su juicio, en meras formulaciones muertas.

Pascal, lego metido a polemista irónico, sarcástico las más de las veces, cáustico muchas otras, pretendía acercar al lector los principios que, en materia de fe, los teólogos profesionales habían convertido, según su juicio, en meras formulaciones muertas.

El Pascal de las *Provinciales*[22] fue jansenista en la acepción tradicional y primitiva del término que es, a la postre, la más usual. Como tal, se posiciona frente a la conciencia[23] como realidad humana fundamental, como iluminación que no deja sombra de uno mismo y es capaz de identificar con absoluta claridad el pecado, y frente a la voluntad que, hecha *propósito de enmienda* y, en lo que al pecado se refiere, permite liberarse de él y presenta al ser humano como señor de sí mismo. Pues bien, frente a todo ello, la lectura que el obispo Jansenio hace de San Agustín, postula la miseria del hombre *sin Dios*, como dirá el propio Pascal, quien tampoco perderá la ocasión para ironizar en *Las Provinciales* sobre el embrollo acerca de la *gracia actual, suficiente* y *eficaz* en el que se enzarzaron los jesuitas y para criticar su posicionamiento en lo moral. O más bien la laxitud con que los ignacianos examinan, valoran y justifican determinadas desviaciones morales dependiendo de quién fuera su autor. Y es que, en Pascal, pese a su radicalismo cristiano y su pesimista concepción de la naturaleza humana, aflora siempre esa convencida defensa de los derechos de la persona —y especialmente de su pensamiento— frente a todo tipo de absolutismo, ya sea político o eclesiástico.

Y, como no podía ser de otro modo, esta actitud personal trasciende lo teológico para plantear los mismos posicionamientos que acabarían alejándolo del jansenismo y acercándolo a lo que fue en definitiva la esencia de sus Pensamientos*: la originalidad.*

Y, como no podía ser de otro modo, esta actitud personal trasciende lo teológico para plantear, en su tratado sobre el vacío, los mismos posicionamientos que acabarían alejándolo del jansenismo en sus últimas provinciales y acercándolo a lo que fue en definitiva la esencia de sus *Pensamientos*: la originalidad. Una originalidad que afectará a todas sus posturas, razonamientos y convicciones y que lo hace especialmente significativo en la historia de la filosofía por su oposición al cartesianismo. Ese es el Pascal más conocido, el de los *Pensamientos* llamados a ser una inconclusa *Apología del cristianismo*, el Pascal de Inocencio XI y Clemente XI, el que niega el *Método* como razón última del orden moral. Pero, desde el punto de vista del Triángulo Aritmético, del momento preciso en el que se gesta, nos interesa más el Pascal jansenista que ataca a los jesuitas al mismo tiempo que niega a Descartes y defiende esa doble vida de percepción de la verdad: la razón para la ciencia, el espíritu para Dios.

El posicionamiento científico

El prefacio del *Tratado sobre el vacío*, es muy probable que lo escribiera Pascal hacia 1647. Su actitud nos recuerda en gran medida, aunque con un tono de crítica mucho más tibio, a la que, cuatro siglos antes, adoptara Pedro Alfonso en su *Carta a los sabios franceses*. Comienza así:

> El respeto que inspira la antigüedad es hoy día tan grande en las materias en que debe tener menos fuerza, que convertimos en oráculos todos sus pensamientos, y en misterios sus afirmaciones erróneas, sin que sea posible exponer novedades sin peligro y el texto de un autor (de la antigüe-

> dad) basta para destruir los más sólidos razonamientos…[…] No pretendo anular su autoridad […] en las materias en las que se busca solamente saber lo que otros escribieron, como en la historia, en la geografía, en la jurisprudencia, en las lenguas y, sobre todo en la teología, […] hay que recurrir a sus libros […] No sucede lo mismo con los asuntos que caen bajo el juicio o el razonamiento: la autoridad es inútil; sólo la razón puede comprenderlos.

Y continúa con un alegato que parece más conectado con lo que expresa en su tratado sobre el Triángulo Aritmético que sobre ninguna otra cosa:

> […], la mente encuentra una libertad total para extenderse sobre ellos; su fecundidad inagotable crea continuamente y sus inventos pueden ser a un tiempo sin fin y sin interrupción…

La crítica que ejerce en este prólogo es extensa y le sirve además para diferenciar con claridad la postura que se debe adoptar ante la teología, su gran preocupación. En esos temas recurre a esa obediencia ciega, que niega en los científicos, para afirmar que

> la gran desgracia del siglo es que vemos muchas opiniones en teología, desconocidas en toda la antigüedad, defendidas con firmeza y aceptadas con aplauso mientras que las que se producen en física, […], parece que deben ser convencidas de falsedad en cuanto se opongan por poco que sea a las opiniones establecidas. ¡Cómo si el respeto que se tiene a los antiguos filósofos fuese un homenaje inexcusable y el que se tiene a los más antiguos de los Santos Padres una mera cortesía!

Ahora bien, esa censura que ejerce sobre *los que aportan la mera autoridad como prueba* no la traslada a la autoridad en sí sino que, por el contrario, nos hace herederos y depositarios de ella, nos constituye en parte indisoluble de la misma:

> los primeros conocimientos que (los antiguos) nos han transmitido han servido de peldaños para los nuestros, [...] Desde esa altura es desde dónde podemos descubrir cosas que a ellos les era imposible ver. [...] no sólo cada uno de los hombres avanza día tras día en las ciencias sino que todos los hombres hacen un continuo progreso a medida que el universo envejece [...] y como nosotros hemos unido a sus conocimientos la experiencia de los siglos que les han seguido, es en nosotros donde se puede encontrar esa antigüedad que honramos en ellos.

Aquí Pascal, se posiciona frente al *solipsismo* de Descartes[24] para alinearse con un nuevo concepto de "progreso" que vemos auspiciado por F. Bacon[25] (1561-1626) y más tarde por Leibniz (1646, 1716). Al igual que Bacon separa el desarrollo de la ciencia del de la filosofía entendida como especulación deductiva a partir de primeros principios. Ahí radica la nueva y definitiva orientación del pensamiento científico.

No se debe hacer nunca un juicio decisivo de la negativa o afirmativa de una proposición hasta que […] *la mente no tenga medio alguno para dudar de su certeza*, le dirá al jesuita Estienne Nöel en respuesta a su primera carta. Es evidente que se refiere a la ciencia pero nos queda la duda de qué está hablando Pascal en esta dura, aunque mesurada y políticamente correcta, respuesta en la que dedica un largo trecho a evidenciar lo que debiera ser el método científico para terminar sentenciando:

> …y reservamos para los misterios de la fe, que nos ha revelado el Espíritu Santo, esa sumisión de la mente que determina nuestra creencia en unos misterios ocultos a los sentidos y la razón[26].

Esta actitud general de Pascal, que puede sorprendernos hoy por asumir la contradicción sobre el conocimiento con tal naturalidad, hay que enmarcarla dentro de su particular posición frente al cartesianismo[27] que, en cualquier caso, profundiza un distanciamiento entre razón y fe, entre ciencia y teología que a la larga será fundamental para el desarrollo de la ciencia.

Parecía obligado hacer una glosa de aquel cuyo nombre se ha utilizado como distintivo de una herramienta matemática que desde nuestro punto de vista simboliza la génesis anónima del conocimiento científico a partir sus aplicaciones prácticas. Pero, desde ese punto de vista, no es el de Pascal el peor apellido que se podía haber asociado al Triángulo. Todos los datos de que se dispone nos animan a pensar que este recurso matemático participó, de alguna manera, a través de él, de ese doble simbolismo: primero porque entendía el conocimiento científico como algo acumulativo: *todas las generaciones de hombres*[28] *se pueden pensar como un solo hombre cuya vida perdura y está siempre aprendiendo* llegaría a escribir. En segundo lugar porque, aunque no explica que el estudio del Triángulo Aritmético fuese sugerido por los problemas que le plantea el caballero de Méré, todo hace pensar que así fue y la correspondencia que sobre el tema mantiene con Fermat lo corrobora. De hecho, Pascal conoce a Antoine Gombaud, caballero de Méré, en el otoño de 1653, el Tratado sobre el Triángulo Aritmético es anterior a 1654 y, por tanto, a la primera carta de Pascal a Fermat que es del 29 de Julio de 1654. No sabemos la fecha exacta en que Gombaud y Mitton proponen a Pascal los dos famosos problemas, pero en *Diversos usos del Triángulo Aritmético cuyo generador es la unidad* ya aparece un subcapítulo (III) titulado: *Uso del Triángulo Aritmético para determinar los repartos que se deben hacer entre dos jugadores que juegan en varias partidas.*

Así pues, hecha esta presentación de algunos de los personajes implicados, nos gustaría hablar en próximas entregas, primero de la importancia que tuvo el Triángulo Aritmético en el desarrollo de la matemática china, hindú y árabe, pero sobre todo, nos interesa comparar el quehacer científico de nuestras alumnas y alumnos con ese devenir histórico. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOURBAKI, N.1972, *Elementos de Historia de las Matemáticas*, Alianza Edit., Madrid

BOYER, C. B., 1986, *Historia de la matemática*, Alianza Ed., Madrid

GEORGE GHEVERGHESE, Joseph, 1991. *La cresta del pavo real*, Editorial Pirámide, Madrid

PASCAL, B., 1983. *Obras*. Alfaguara, Madrid. Traduce Carlos R. de Dampierre, prologa: J. L. Aranguren.

PASCAL, B., 1995. *Obras Matemáticas* (Selección de textos), Edita Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM. Méjico. Traduce Santiago Ramírez, prologa: Rafael Martínez.

PASCAL, B., 1998. *Pensamientos*. Cátedra. Madrid. Traduce y prologa: Mario Parajón.

RÍBNIKOV, K.1987. *Historia de las Matemáticas*. Editorial Mir. Moscú.

NOTAS

[1] Así lo calificábamos de forma cariñosa *el grupo de Calahorra* por aquella costumbre suya de dotar de la importancia que merecía cada detalle conocido y por la abundancia de los mismos que era capaz de retener en su portentosa memoria.

[2] Elena Ausejo, Eva Cid, Mariano Hormigón, Reyes Mensat, Ana Pola, Julio Sancho y César Torres, 1983. "La historia de las Matemáticas y la enseñanza de la Matemáticas". *Actas III JAEM*. ICE Universidad de Zaragoza. Zaragoza

[3] Lo que también puede aplicarse el caso de la historia y los historiadores.

[4] Efectivamente 63, ó 2^6-1 si se prefiere, es el resultado de

$$\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}$$

[5] G. Gheverghese [1991] pág. 345.

[6] K. Ríbnikov [1987]. Pag. 42 para el caso de China y pág. 49 para el de la India.

[7] G. Gheverghese, ibídem, fecha los datos de ese conocimiento en 1074 (pág. 417), fecha de publicación de su álgebra.

[8] Puesto que cuando escribió sobre el Triángulo aún no había escrito acerca de la vanidad, calificando de tontería la búsqueda de la grandeza, podríamos aplicar a estos párrafos la propia ironía pascaliana y presuponer que su recato no iba más allá de la falsa modestia. Su actitud en el tema de la cicloide o en la presentación de la jeringa a Descartes, incluso la dudosa redacción de la Epístola a la Academia de Ciencias, podría llevarnos a ello, pero estos párrafos de la carta a Fermat parecen totalmente sinceros.

[9] Totalmente expeditiva resulta aquella frase sobre la geometría y sus ocupaciones, en una de sus cartas a Fermat: "Estoy dedicado a estudios tan alejados de esta disciplina que casi ni me acuerdo que existe..."

[10] Una práctica absolutamente habitual en la época, de hecho lo había comprado en 1626 por 31.600 libras tornesas.

[11] Tribunal de Cuentas lo denominan algunos traductores y comentaristas.

[12] El uomo universale renacentista que no se especializa en nada, que se entrega a los demás, que pretende que lo conozcan por su integridad y espiritualidad y que cultiva la mesura y la humildad por encima de todo.

[13] A finales del XVII y principios del XVIII el poder real se aliaría con los "jansenistas expurgados" de los que Jovellanos y el obispo Tabira serían parte de la representación española.

[14] A la sazón, los confesores de la Corte.

[15] Lejos de evitarla, el título evoca esa dualidad entre el Infinito y la Nada que, en nº 418 de los Pensamientos, permite a Pascal usar –o abusar, según se mire- del cálculo de probabilidades para apostar por Dios.

[16] Ese 23 de Septiembre Roberval enseñó a Descartes el funcionamiento de la jeringa inventada por Pascal y parece ser que ahí cristalizó la decepción de Pascal hacia un "genio" que era incapaz de aceptar sus tesis sobre el vacío. Inutile e incertain escribiría de él en sus Pensées. En realidad ese distanciamiento se había ido gestando desde las primeras participaciones de Pascal en el círculo de sabios que lideraba Mersenne, consciente de que ni la Física ni la Metafísica cartesiana le satisfacían plenamente.

[17] Primer ensayo sobre el vacío, en realidad un resumen de los experimentos entre Pascal y Petit, y que provocaría las cartas del jesuita Estienne Nöel y las consiguientes respuestas de Pascal. Una polémica que se prolongaría durante todo el año 1648.

[18] Cuyo trascripción escrita, el Memorial, llevó cosido a su chaqueta a partir de ese 23 de Noviembre de 1654 hasta su muerte. Ese día, mientras leía una y otra vez el capítulo 17 del Evangelio de San Juan, parece ser que sufrió un delectatio victrix, una especie de éxtasis místico que Dios reservaba a aquellos que lo daban todo por Él y que en el caso de Pascal duró dos horas.

[19] Si es que lo escribió él, muy probablemente fuera obra de su hermana Jacqueline quien además de influir decisivamente en la vida religiosa de Blaise, fue actriz y poeta.

[20] Y, en 1655, un sin fin más de cartas comprometidas con la defensa del jansenismo.

[21] Condenados por Roma, naturalmente, estas cartas son de tal calidad literaria que para algunos, como Voltaire, constituyen el primer hito de la prosa francesa moderna, a pesar de su oposición filosófica. Para otros suponen el nacimiento de un nuevo género literario: el reportaje periodístico concebido como campaña de prensa –claro antecedente de Montesquieu y Zola, por ejemplo-.

[22] Aunque se ha popularizado el término "provincial" para designar estas cartas, su uso constituye una transliteración del francés puesto que, como sustantivo, significa jefe religioso pero, como adjetivo, debería traducirse por "provinciano", en el sentido del que vive en provincias, persona a la que van dirigidas al menos las diez primeras, el resto sí las orienta a los jesuitas.

[23] Esa misma conciencia que inspira a Descartes, del que no podemos olvidar que fue educado en las doctrinas del de Loyola.

[24] Para él, el aumento progresivo del saber no se sustenta en el sucesivo descubrimiento de nuevas verdades sino en el paso desde unos principios universalmente válidos a las verdades que de estos principios se deducen. Es por tanto independiente del tiempo.

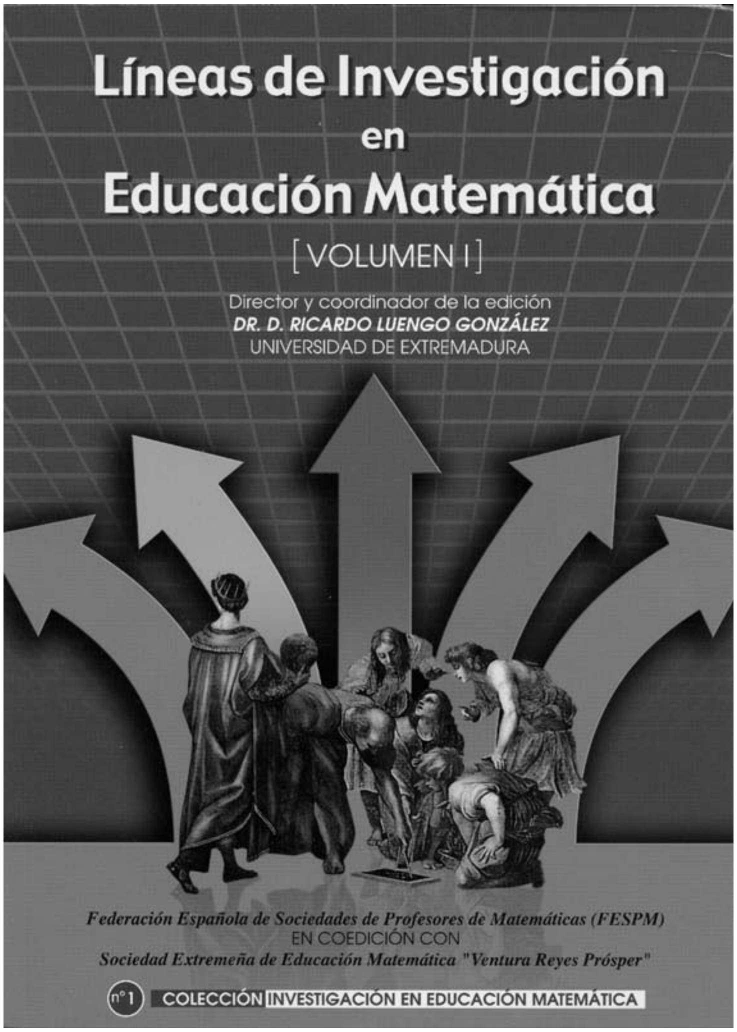
[25] "El tiempo es el autor de autores y el padre de la verdad" llegaría a afirmar. ¡Qué lejos queda hoy esa concepción purista e incontaminada de la historia del conocimiento!

[26] Aunque hablaremos en otro momento sobre la opinión de Pascal acerca de la forma en que la razón puede acceder a la verdad este primer acercamiento nos sirve para insinuar el cambio epistemológico que propone.

[27] Pascal es partidario del método científico, como acabamos de ver, pero no uno único como propone Descartes, sino el que más se adapte a cada situación.

[28] Y mujeres, añadiriamos nosotros.

Publicaciones de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas



LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Ricardo Luengo (director y editor)
FESMP y SEEM "Vicente Reyes Prósper"
Badajoz, 2004
ISBN 84-931776-8-7
255 páginas

Pedidos a:

SERVICIO DE PUBLICACIONES de la FESPM
Apto. de Correos 590
06080 Badajoz (España)
PublicaFESPM@navegalia.com

SUMA 48
Febrero 2005, pp. 65-68

Cuadraturas de polígonos regulares

Si nos remontamos en la historia de la matemática hasta llegar a los antiguos griegos, nos encontramos con que en esa época los maestros se reconocían por los pocos elementos que necesitaban para solucionar los problemas; por ejemplo, en Geometría era obligatorio utilizar, solamente, regla no graduada (para trazar rectas) y compás. Esta restricción llevó a los matemáticos a estrellarse frente a los tres problemas clásicos de la matemática griega:

La trisección del ángulo: dividir un ángulo cualquiera en tres partes iguales. Arquímedes (287–212 a. de C.) encontró un método que trisecaba muchos ángulos, pero fallaba en otros.

La duplicación del cubo: dado un cubo cualquiera, construir otro cubo que duplique el volumen del primero. El Oráculo de Apolo, en Delfos, planteó este problema a Pericles (459–429 a. de C.) indicando que la epidemia de peste que asolaba Atenas sólo desaparecería si se duplicaba el volumen del altar cúbico de Apolo.

La cuadratura del círculo: construcción de un cuadrado que tenga el mismo área que un círculo dado. La primera referencia conocida sobre este problema se debe a Anaxágoras (499 –428 a. de C.).

Hasta el siglo XIX no se llegó a demostrar la imposibilidad de resolver esos tres problemas con regla y compás, aunque tienen solución por otros métodos.

Puzzles de cuadraturas

Desde tiempo inmemorial, los puzzles y rompecabezas han ocupado un lugar primordial entre los juegos predilectos de todas las edades. En relación con las Matemáticas, muchas divisiones de figuras han estado en la base de materiales, tanto en su aspecto lúdico para jugar, como para utilizarlos didácticamente.

Existen muchos puzzles, conocidos desde hace tiempo, y que no por ello pierden su atracción. Basta citar, como muy popular, el Tangram Chino. Otro gran bloque lo constituyen las disecciones del Teorema de Pitágoras, como la muy conocida de Henry Perigal.

Los problemas geométricos de disección plantean la partición de figuras geométricas en trozos de forma que al unirse se obtengan otras figuras geométricas. En este artículo vamos a presentar unos casos particulares de disecciones geométricas: las cuadraturas. Consideraremos como cuadraturas a las divisiones que hay que realizar en una figura plana (por ejemplo un polígono regular) de forma que con las piezas obtenidas pueda construirse un cuadrado.

Desde tiempo inmemorial, los puzzles y rompecabezas han ocupado un lugar primordial entre los juegos predilectos de todas las edades.

El aspecto más matemático es conseguir dividir la figura con la que estemos trabajando utilizando regla y compás. Ante la dificultad que ello supone se suelen presentar las divisiones ya hechas, de forma que se trabaje como si fuese un puzzle, es decir, el objetivo es pasar de una figura a otra.

La primera pregunta que se puede plantear es: ¿qué polígonos regulares podremos cuadrar?

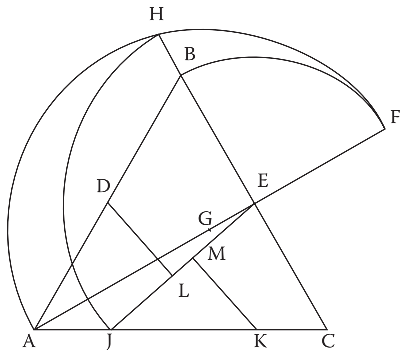
Grupo Alquerque de Sevilla

Constituido por:
Juan Antonio Hans Martín *C.C. Santa María de los Reyes.*
José Muñoz Santonja *IES Macarena.*
Antonio Fernández-Aliseda Redondo *IES Camas.*
juegos.suma@fespm.org

La cuadratura del triángulo

Una primera aproximación a la respuesta viene dada por el especialista inglés en juegos Henry Ernest Dudeney (1857-1930), quien estudió la cuadratura del triángulo equilátero, presentando en 1905 en la Real Sociedad de Londres, un modelo construido en caoba.

Con regla y compás, como exigían los antiguos griegos, Dudeney encontró la manera de dividir un triángulo equilátero en cuatro piezas que forman también un cuadrado. En su diseño podemos seguir los siguientes pasos:



1. Dibujar el triángulo equilátero *ABC*.

2. Obtener los puntos medios de *AB* y *BC* (serán los puntos *D* y *E*).

3. Prolongar *AE* hasta *F*, para que *EF* = *EB*.

4. Hallar el punto medio de *AF* (será el punto *G*).

5. Con centro en *G* dibujar el arco *AF*.

6. Prolongar *EB* hasta cortar el arco, obteniendo el punto *H*.

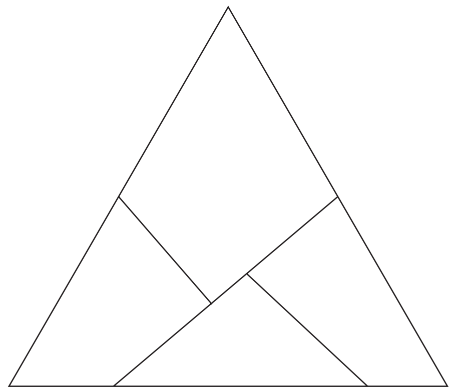
7. Con centro en *E* dibujar un arco de radio *EH*. Llamar *J* al punto en que corte al lado *AC*.

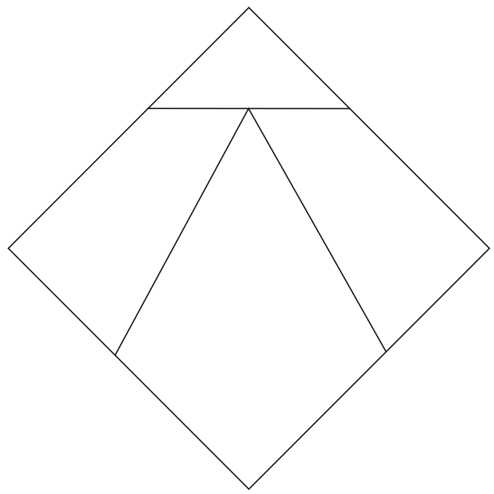
8. Trazar el segmento *JE*.

9. Sobre la base *AC* del triángulo marcar *K*, de forma que *JK*=*BE*.

10. Dibujar las perpendiculares sobre *JE* desde *D* y *K*, obteniendo los puntos *L* y *M*.

11. El triángulo queda dividido en cuatro piezas: los tres cuadriláteros *BELD*, *DLJA* y *ECKM* y el triángulo *JMK*, con las que podemos formar un cuadrado.





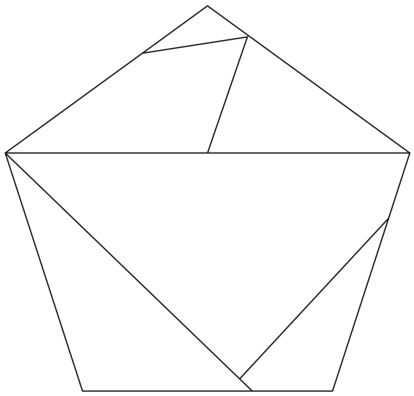
Esta cuadratura del triángulo equilátero es quizás la más conocida, hasta el punto de que se puede encontrar en anuncios publicitarios, e incluso su estructura ha sido tomada por el diseñador Maty Gronberg para presentar la mesa que aparece en la imagen (tomada de El País Semanal de 30/08/1987), y que tiene la virtud de poder usarse como mesa triangular o cuadrangular según las necesidades.

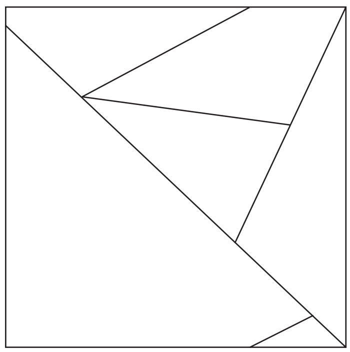
Cuadraturas de otros polígonos regulares

Con la intención de no extender en demasía este artículo incluiremos otras cuadraturas sin especificar la construcción completa con regla y compás.

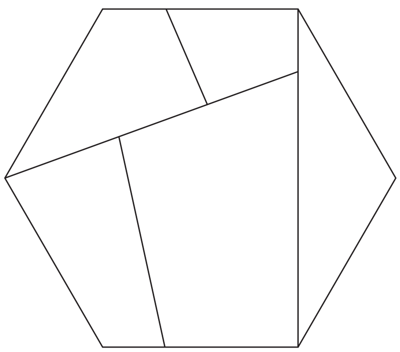
Para trabajar con ellas basta copiar los dibujos, recortarlos y jugar con las piezas obtenidas como un puzzle cualquiera.

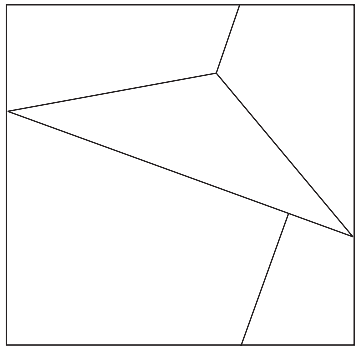
Cuadratura del pentágono
Existen varias divisiones del pentágono que después de reordenar las piezas dan lugar a un cuadrado. Nosotros reseñamos aquí una realizada también por Dudeney.



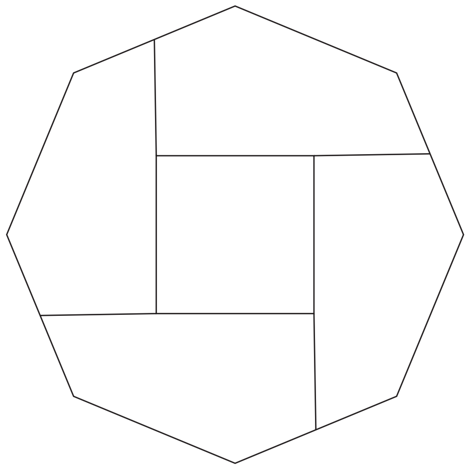


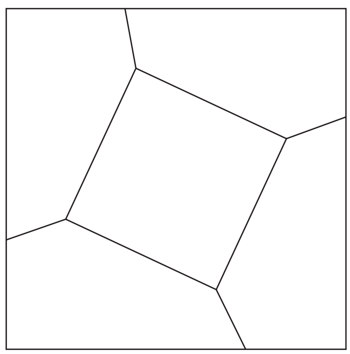
Cuadratura del hexágono
Del hexágono también existen varias divisiones. Os mostramos una de ellas.





Cuadratura del octógono
Esta es una de las divisiones más simples, pues se parte de cuatro piezas iguales, que según como se coloquen alrededor del cuadrado central dan lugar al octógono o al cuadrado.





A la pregunta que hacíamos sobre qué polígonos admiten una cuadratura responde el teorema de Wallace-Bolyai-Gerwein: Dados dos polígonos de igual área existe una disección de uno en un número finito de piezas poligonales que recubre exactamente el otro. La demostración se puede encontrar en http://bayledes.free.fr/decoupage/index.html

Luego todos los polígonos se pueden cuadrar; el interés radica ahora en encontrar cuadraturas con el mínimo número de piezas o que sean especialmente *bellas* (por la forma de sus piezas, su simetría...).

La cuadratura del octógono es una de las divisiones más simples, pues se parte de cuatro piezas iguales, que según como se coloquen alrededor del cuadrado central dan lugar al octógono o al cuadrado.

Cómo trabajar estos puzzles en clase

Una primera forma de utilizar este material es directamente como puzzle. Es decir, entregar las piezas troqueladas a los alumnos y pedirles que construyan por un lado el cuadrado y por otro el polígono que le corresponda.

Este planteamiento es muy atractivo y motivante para quien se enfrenta a ese reto. Nosotros lo hemos comprobado trabajando en los salones de juegos o al realizar la actividad de Matemáticas en la Calle.

También puede plantearse esta actividad como línea de trabajo interdisciplinar entre Matemáticas y Tecnología, de forma que en Matemáticas se realice el estudio teórico completo (ángulos, piezas, divisiones, etc.) y en Tecnología se construya el puzzle, preferentemente en madera o algún material rígido que permita su manipulación posterior sin deformarse por su uso.

En aquellas cuadraturas más simples, puede trabajarse también con regla y compás para encontrar las divisiones, con lo que el aspecto interdisciplinar se ampliaría a la asignatura de Educación Plástica y Visual.

Igual que en otros puzzles que se utilizan en la clase de Matemáticas, es posible tratar conceptos geométricos. Por ejemplo, manipulamos dos piezas (polígono original y cuadrado) que tienen la misma área, pero que en general tienen distinto perímetro. El problema es que al calcular los perímetros suelen aparecer medidas irracionales.

También es interesante el estudio de los ángulos que aparecen en las divisiones del polígono inicial. Si necesitamos reconstruir un cuadrado, en las divisiones deben aparecer cuatro ángulos rectos, bien directamente o por composición.

Como puede apreciarse por lo anterior, con este tipo de material se pueden abarcar todos los niveles que se den en la clase, desde el de los alumnos que se quedan en intentar componer la figura, hasta el de los que trabajan con números irracionales para estudiar el perímetro. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOLT, B. (1989): *Divertimentos matemáticos*, Ed. Labor, Barcelona.

BOLT, B. (1989): *Aún más actividades matemáticas*, Ed. Labor, Barcelona.

DUDENEY, H. E. (1995): *Los gatos del hechicero y nuevas diversiones matemáticas*, Zugarto ediciones, Madrid.

FREDERICKSON, G. (1997): *Dissections: Plane & Fancy*, Cambridge University Press, ISBN 0-521-57197-9.

HANS, J. A.; MUÑOZ, J.; FERNÁNDEZ-ALISEDA, A. ; BLANCO, J y ALDANA, J. (2003): "Rompecabezas del Teorema de Pitágoras", *Suma*, n.º 43, Junio, Zaragoza, pp. 119-122.

SUMA 48
Febrero 2005, pp. 69-76

iMÁTgenes 13, 14 y 15

Hace más de dos millones de años el Homo Habilis transformó guijarros en herramientas de filos cortantes. Un millón de años después, su sucesor, el Homo Erectus, se dio cuenta de que sacando lascas de las caras opuestas de una misma piedra se conseguían herramientas mejores. Un cuarto de millón de años más tarde, esas herramientas se perfeccionaron más aún hasta tener formas regulares, más o menos simétricas y pulidas.

Lo que distingue al Homo Sapiens de sus antecesores es la talla de cosas inútiles pero bellas, bellas pero significativas. Hace unos 25000 años se talló en granito la primera figura conocida. La venus de Willendorf es una mujer generosa, casi obesa, sin cara, sin ángulos ni filos, redondeada. Se desconoce el proceso de su talla, pero seguramente su autor o autora, consciente o no de ello, imitó el efecto que tiene el agua de un río sobre las piedras amorfas que arrastra su corriente. Se da el caso de que otra figura posterior a esta, la venus de Lespugne, es una figura 'casi abstraída por completo en una geometría orgánica de conos, ovoides y esferas' (Honour y Fleming, 1991, p.21). En el origen del Arte y de la Tecnología encontramos pues el origen de la Geometría en cuanto a la simplificación, reducción y abstracción de las formas presentes en la realidad.

Diez o quince mil años después de tallarse las venus de Willendorf y Lespugne otros seres vivos son representados en las paredes y techos de cuevas en Lascaux y Altamira. Cazadores, armas y presas han sido liberados de una existencia tangible y de la fuerza gravitatoria que los mantenía en el suelo. Desprovistos de su tridimensionalidad, ahora forman parte de una superficie más o menos plana y rugosa. Primero trazan el perfil del animal. En ocasiones aprovechan una irregularidad o veta de la piedra que quizá les parece semejante al perfil real del animal. Para ello mojan un atillo de cerdas o de plumas o un dedo en la sangre de un animal muerto. Así, un perfil real se representa mediante el trazo que deja un punto en movimiento. Ese trazo delimita lo que es de lo que no es, la frontera entre un bisonte y lo que no es bisonte: la curva como perfil de una cosa, como encuentro entre lo que es algo determinado y lo que no lo es, la curva como frontera entre forma y fondo. A veces, el interior de esa curva cerrada se rellena soplando polvos de color a través de una caña o de un hueso hueco, la esencia del graffiti.

Cuando el fuego alumbra las pinturas el titilar de las llamas se refleja en las paredes y en el techo. También en los hombres y animales que allí parecen correr, persiguirse y morir. El efecto de luces y sombras alucina a quienes contemplan el espectáculo. El cazador representado corre realmente. El bisonte herido brama su muerte. A los espectadores de este cine rupestre les parece oler la sangre y el sudor, el aroma del poder. Ese movimiento aparente devuelve la vida y la dimensión perdida a sus protagonistas. Se hace de día en la noche.

Otros diez o qince mil años más tarde, en la antigua Grecia, algunos hombres muy sapiens concretan la idea de curva. Una curva es el vestigio de un punto en movimiento o la intersección de dos superficies.

Durante el siglo XX se conocerán otras curvas cuya generación difiere de ésta última. La recta es unidimensional. Una curva en sí misma también, pero necesita dos dimensiones para existir. Esas nuevas curvas tendrán propiedades que generaciones anteriores ni soñaron. Sus dimensiones podrán ser números decimales. Serán constructibles mediante un sencillo proceso iterativo y, precisamente por ser límites de estos procesos, serán invisibles a cualquier ojo, humano o mecánico, por potente que sea. Parecerán muy abstractas y alejadas del mundo natural. Sin embargo, siempre estuvieron en él. Lo están hoy, lo estaban en la Grecia antigua y también en Altamira. Se llamarán curvas fractales y albergan la paradoja.

Cuando se contemplan de cerca su aspecto es el mismo que si se observan de lejos. Ya no son aprehensibles mediante la visualización, siempre aparecen desenfocadas. Sólo el análisis lógico permite conocerlas. Tampoco sirven para distinguir la forma del fondo porque las hay que incluso lo colman, como la curva de Peano. A lo largo de miles y millones de años, una curva ya no es sólo un trazo que se aparta de lo recto, es también el límite de un proceso que hace difusa la frontera entre adentro y afuera, entre ser y no ser. ■

REFERENCIA

HONOUR, H. y FLEMING, J. (1991): *A World History of Art.* Laurence King Ltd. London.

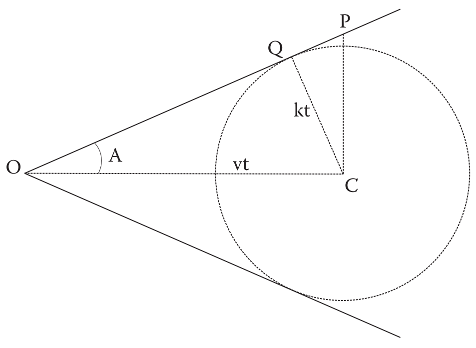
Miquel Albertí
imatgenes.suma@fespm.org

Dada una familia de curvas, se llama envolvente a la curva que en todos sus puntos es tangente a una curva de la familia. La misma definición es adaptable a las superficies. En este sentido, la superficie más o menos esférica de la olla limada protagonista de la iMATgen 11 (*SUMA* n.º 47) sería la superficie envolvente de una familia de planos.

En la iMATgen 12 teníamos una familia de círculos expandiéndose sobre el agua del río Matarraña. Sus radios crecían con el tiempo a la misma velocidad. Bajo determinadas condiciones eso daba lugar a dos perfiles rectilíneos que eran tangentes en cada punto a una circunferencia. Esas dos rectas son pues las curvas envolventes de esa familia de circunferencias. Y son verdaderamente rectas si quien las produce nada en línea recta y con velocidad constante, sin aceleraciones, pero dejarán de serlo cuando el nadador aumenta o reduce su velocidad o si cambia de dirección.

Tomemos una familia de círculos con centro en un patito que está nadando. Considerando fijo el ánade se crea una familia de ondas circulares que se expanden a medida que se alejan de su origen. Sea v la velocidad con la que nada el patito siguiendo una línea recta horizontal y hacia la izquierda (que hará de eje de abcisas) y sea k la velocidad con la que las ondas se propagan en la superficie del agua. Supondremos que ambas, tanto v como k, son constantes. De este modo cada círculo tiene radio $r=k\cdot t$, siendo t el tiempo transcurrido desde que se generó la onda, y su centro está situado en un punto de coordenadas $(v\cdot t,0)$.

La familia de círculos se describe en función de este parámetro que es el tiempo t:



Las pendientes de estas dos rectas tangentes a la familia de circunferencias son:

$$m = \pm tgA = \pm\frac{PC}{OC} = \pm\frac{QC}{OQ} = \frac{\pm kt}{\sqrt{(vt)^2-(kt)^2}} = \frac{\pm k}{\sqrt{v^2-k^2}}$$

Si $v=\pm k\cdot\sqrt{2}$, las pendientes son 1 y −1, por lo que el ángulo formado por ambas rectas es recto. Si $v=k$, las pendientes son infinitas y se corresponden con uno de los casos ya descritos en la iMATgen 12. Si $v=0$, el patito está quieto flotando en el agua y en el denominador aparece la raíz cuadrada de un número negativo:

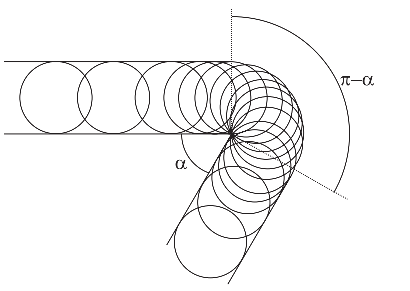
$$m = \pm\frac{k}{\sqrt{-k^2}} = \pm\frac{k}{k\sqrt{-1}} = \pm\frac{1}{i} = \pm i$$

En este caso la envolvente se reduce a un solo punto, el origen de coordenadas:

$$y=\pm i\cdot x \Rightarrow y^2=-x^2 \Rightarrow x^2+y^2=0 \Rightarrow x=y=0$$

Ya que el radicando del denominador de la pendiente debe ser positivo, solo existirá envolvente si $|k|\leq|v|$, cuando la velocidad k con la que se propagan las ondas en la superficie del agua no sobrepase la velocidad v de nado. Sólo entonces los círculos no atraparán a quien los produce.

En cambio, para que los perfiles de un trazo aerografiado constituyan su envolvente haría falta mucha habilidad. Pongámonos en el caso mencionado en la iMATgen 10 en el que en cada momento la superficie graffiada era un círculo. ¿Qué debe suceder para que los perfiles de un trazo realizado círculo a círculo sean su envolvente? Si observamos la fotografía de la iMATgen 10, nos daremos cuenta de que en un zigzag de amplitud α el perfil exterior sí es tangente en cada punto a un círculo de la família, pero no así la esquina interior del zigzag. Lo sería si el círculo de color pivotara sobre dicha esquina, es decir, si el artista, en lugar de cambiar de dirección bruscamente describiese un giro de amplitud $\pi-\alpha$. Como si perfilase ese pico agudo:



En tal caso, ambas curvas perfiles, además de envolventes, serán también paralelas. Para ello la mano del autor del graffiti deberá describir un arco de radio igual al diámetro del círculo grafiado y de amplitud $\pi-\alpha$. ■

iMATgen 13

Plaça de Catalunya, en Barcelona, a media mañana de un día de primavera del año pasado. Quince personas tomándose un respiro y varias palomas buscando algo que picar. Los bancos en los que descansan se encuentran en uno de los puntos más céntricos de la ciudad. Este es un rasgo de las ciudades sorprendente para los matemáticos. Una ciudad no tiene un centro único por muy redonda que sea. Barcelona tiene muchos, algunos bien gordos, otros alargados. Entre los primeros destacan las plazas redondas y cuadradas, pero también determinados edificios emblemáticos. Entre los últimos están los paseos, avenidas y playas. Todos esos centros figuran en la ruta del visitante y nadie que venga a Barcelona se marcharía sin haberlos visitado. El turista tacha iconos de su guía según el ritmo de los kilómetros recorridos. Entonces llega a un lugar tranquilo, se sienta en un banco, reflexiona sobre lo que ha visto y, si tiene la ocasión, comparte su experiencia con alguien. En este punto pillé a la mayoría de quienes aparecen en la fotografía.

¿Qué puede haber en esta imagen que no acabe de comprenderse del todo sin la perspectiva matemática? Por lo que a mi respecta, no tiene nada que ver con los árboles que aparecen en ella, ni con las palomas, ni con el suelo, sino precisamente con la gente que hay sentada. ¿Cómo agrupamos socialmente a la gente a partir de su distribución en el espacio? ¿Por qué se han distribuido así y no de otro modo?

El número de personas que aparecen en la fotografía, quince, puede obtenerse de muchas maneras, pero no de tantas atendiendo a la relación social que refleja su distribución. Hay tres bancos y en cada uno cinco personas. La imagen muestra 3·5=15 personas. En cuanto al total de cinco personas sentadas en el banco de la izquierda, se obtienen así: 5=1+1+2+1. No de otro modo, porque las distancias de separación ponen de manifiesto que las dos mujeres de blanco van juntas. La suma correspondiente a las cinco personas del banco central sería 5=1+1+1+2. Obsérvese que el hombre de blanco con pantalón largo tiene una bolsa que lo separa de la mujer que está a su derecha. En el banco de la derecha las cosas no están tan claras. Los dos hombres de la izquierda llevan bolsas de viaje y la pareja de su derecha no. Seguramente no van juntos, pero no es posible afirmarlo. Por otro lado, la conversación que mantiene la pareja con el hombre de la derecha los relaciona a los tres. En esta ocasión tenemos más alternativas: 5=2+2+1=4+1=2+3. Luego el total de personas puede obtenerse de varias formas:

$$15=3\cdot 5$$
$$15=(1+1+2+1)+(1+1+1+2)+(2+2+1)$$
$$15=(1+1+2+1)+(1+1+1+2)+(4+1)$$
$$15=(1+1+2+1)+(1+1+1+2)+(2+3)$$

Las propiedades conmutativa y asociativa de la suma de números enteros aseguraran que cualquier reordenación de estas cifras o cualquier asociación distinta de unidades proporciona un resultado idéntico. Cierto, produce el mismo resultado, pero no reproduce la misma realidad social. En esta ocasión podría aplicarse la propiedad conmutativa, tanto da que se cuenten, por ejemplo, de izquierda a derecha como de derecha a izquierda. Pero no sería lo mismo escribir 15=(2+2+1)+(1+3+1)+(1+3+1) pese a que el resultado de esta suma sea el correcto. Aquí la asociación importa mucho y en esta suma se asocian elementos que no lo están en la realidad. Por eso escribir 15=3·5=(1+1+2+1)+(1+1+1+2)+(2+2+1) es un buen modelo matemático de la distribución de esa gente en el espacio. La suma de números enteros es asociativa y conmutativa, pero no siempre puede decirse lo mismo de la suma de personas.

Además de esto, había otro aspecto por el que la imagen se trasmutaba en iMATgen. Llamemos A_1, B_1, C_1, D_1 y E_1 a las cinco personas del primer banco, el de la izquierda. Sean A_2, B_2, C_2, D_2 y E_2 las cinco del segundo, el del centro, y A_3, B_3, C_3,

D_3 y E_3 las cinco del tercero, el de la derecha. Si se miden las distancias de separación entre ellas (tomando la cabeza como punto de referencia) se observa lo siguiente.

En el banco 1:
El punto medio de A_1E_1 está muy cerca de C_1.
El punto medio de A_1C_1 coincide con B_1.
D_1 está lejos del punto medio de C_1E_1.

En el banco 2:
El punto medio de A_2E_2 está lejos de C_2.
El punto medio de A_2C_2 coincide con B_2D_2.
El punto medio de B_2D_2 está más lejos de C_2 que de B_2 lo está el punto medio de A_2C_2.

En el banco 3:
El punto medio del banco está en el punto medio de D_3E_3.
El punto medio de A_3D_3 está en el punto medio de B_3C_3.
El punto medio de C_3E_3 coincide con D_3.
El punto medio de B_3 y el extremo del banco coincide con E_3.

Antes de sacar conclusiones relacionadas con esta serie de proporciones referentes a puntos medios de segmentos, reflexionemos sobre una experiencia que todos hemos vivido.

Disponemos de un banco vacío en el que sentarnos. Podemos sentarnos en un extremo o en el otro, pero también podemos hacerlo justo en medio. Si en el banco ya hay alguien el lugar escogido dependerá de si conocemos o no a la persona sentada y de si queremos o no evitarla. Si es un amigo o amiga, nos sentaremos junto a ella para compartir una charla. Si nos es desconocida procuraremos dejar un espacio vacío entre ella y nosotros. ¿Cuánto espacio? Depende de lo lleno que esté el banco y del lugar en el que se encuentre. Si está sentada en un extremo, quizá nos decidamos por el otro. En esta decisión intervienen muchos factores, entre ellos la imagen personal (quizá a partir de hoy, la iMATgen personal) y el sexo. ¿Qué pensaría si estando el resto del banco completamente vacío nos sentáramos junto a ella? La distancia que uno deja tiene significación social. Si somos muy educados podemos incluso considerar que sentarse a una distancia excesiva puede inspirar rechazo. Y en caso de que ambos extremos ya estén ocupados, muy probablemente optaremos por sentarnos en medio del asiento. Solamente cuando deseemos fervientemente un descanso y todos los demás sitios disponibles estén ocupados nos decidiremos a llenar el único intervalo vacío, por pequeño que sea, como en los bancos del metro en hora punta.

La relación existente entre quienes comparten asiento en un banco o entre quienes comparten espera en un mismo espacio se pone de manifiesto en lo que se ha llamado a menudo guardar las distancias. Esto es lo que sucede en la fotografía de esta iMATgen. Las proporciones anteriores relacionadas con el punto medio muestran como se confirma dicha referencia a la hora de escoger asiento. Y no sólo eso. En base a esta referencia podemos aventurar conclusiones:

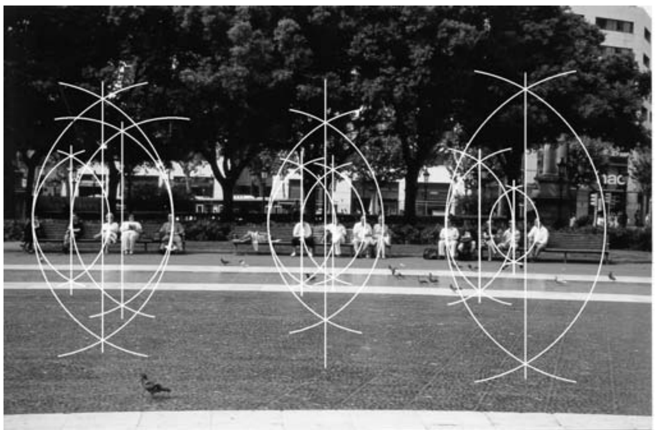
a. Al banco de la izquierda llegaron primero A_1 y E_1, aunque desconocemos quién fue el primero de los dos. Luego fueron C_1 y D_1 quienes tomaron asiento. Por cierto, fue C_1 quien escogió primero el sitio y D_1 se sentó a su lado. La elección del punto medio por parte de C_1 no fue exacta debido a la gran distancia entre los extremos. Finalmente, llegó B_1 y se acomodó entre A_1 y C_1. El hecho de que B_1 esté hablando por el móvil podría corroborar esta suposición.

b. La persona tumbada, A_2, fue la primera en llegar al segundo banco. Luego lo hicieron D_2 y E_2, la pareja de la derecha. Es posible que esta pareja llegase acompañada de C_2, quien se sentó algo más separado de ellos. La última en llegar fue B_2 y se sentó justo en medio de A_2 y C_2.

c. En el banco derecho hay tres grupos de personas: las parejas A_3B_3 y C_3D_3 y el hombre E_3. Probablemente, A_3B_3 fueron los primeros en llegar. Luego pudo llegar E_3, quien en lugar de elegir el extremo del banco se sentó en medio del espacio vacío. Al final llegó la pareja C_3D_3 y se sentó en el espacio reducido que quedaba entre los presentes. Una explicación al comportamiento de E_3 y C_3D_3 sería que el banco estuviera sucio a la izquierda de E_3, pero también es posible que las personas de este banco no vean las cosas como las he descrito o que haya entre ellas relaciones que una fotografía no puede mostrar.

En cualquier caso, el análisis realizado permite sin duda comprender mejor la imagen. Siguiendo el algoritmo de ocupar el punto medio, un banco acaba por llenarse. ¿Puede decirse lo mismo de un banco matemático como el intervalo [0,1] en el que se sientan personitas diminutas como puntos? Una respuesta afirmativa significaría que de medio en medio se llega a cualquier parte y se llena el todo. Esto significaría que todo número real x comprendido entre 0 y 1 sería límite de una sucesión de potencias (positivas o negativas) de 2.

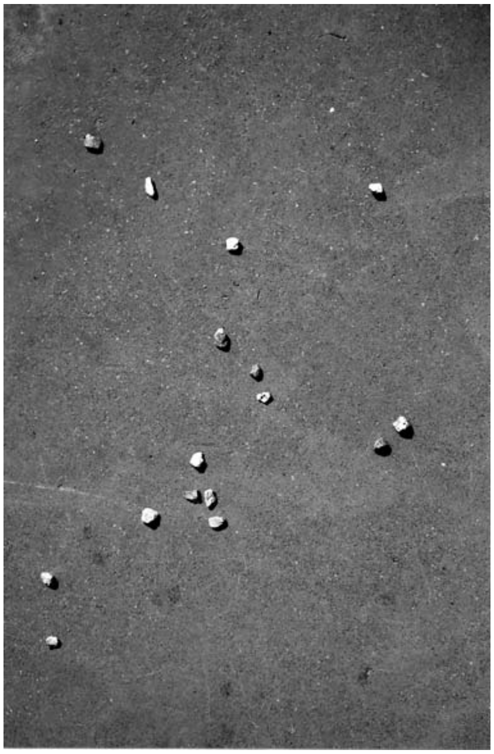
Vemos como en determinadas conductas sociales se manifiesta la relación entre Matemáticas y Psicología del espacio. Una relación concretada aquí mediante la ***Predilección por el punto medio*** de un segmento, a la vez equidistante y a la vez el más alejado de sus extremos:



■

iMATgen 14

Eché al suelo dieciséis guijarros y cayeron así. Luego hice la foto. La imagen puede recordarnos las islas de un archipiélago, las estrellas de una constelación, un grupo de gente vistos desde arriba o una serie de puntos sobre el plano.



La fuerza con las que las lancé, la altura desde la que cayeron, el ángulo con el que impactaron contra el suelo, la humedad y temperatura ambientales en aquel instante, la elasticidad del suelo y la suya propia con la que rebotaron y saltaron, todo esto y mucho más influyó en el modo en que acabaron quietas y estables tras efectuar varios saltos y volteretas. Habrá quienes piensen que incluso mi estado de ánimo y la posición de los astros en el cielo también tuvieron algo que ver en el resultado, pero esa no es la perspectiva que guía mis ojos al contemplar esta imagen. ¿Acaso si las hubiera recogido enseguida y las hubiese lanzado de nuevo habrían quedado igualmente esparcidas? No. Sin embargo, en los cuatro o cinco segundos entre ambas experiencias ni mi ánimo ni los astros del cielo habrían cambiado. Muy diferentes resultados se habrían producido con las mismas condiciones iniciales. No es esta la base de la Ciencia.

Las variables son muchas y un leve cambio de las condiciones iniciales puede provocar un resultado muy distinto. Acordémonos de las mariposas del Pacífico. Pero, ¿es el azar un cúmulo ilimitado de variables? ¿Reside en las causas desconocidas de un resultado? ¿Existe el azar o es una invención humana? Sin duda es necesario comprender el azar y el determinismo para comprender la historia de esta imagen. El lector interesado en ello encontrará una vasta bibliografía sobre el tema. Pero la génesis de la imagen no está en ella misma y en esta sección el punto de referencia que se toma es lo visible en el espacio limitado por esos cuatro perfiles rectilíneos y perpendiculares llamado rectángulo.

En 1926 se publicó un trabajo que los críticos consideran fundamental en la obra de un pintor soviético vanguardista del arte abstracto. La obra trata de las reflexiones del artista sobre los trazos elementales que dan lugar a cualquier obra pictórica, figurativa o no. El título de ese libro, *Punto y Línea Sobre el Plano*, habría resultado muy apropiado para el Libro I de los *Elementos* de Euclides o para un tratado de geometría. Su autor, Kandinsky, abre la obra con una advertencia en la que utiliza una expresión en la que agrupa significados a menudo considerados contrapuestos: 'ciencias artísticas' (op. Cit., p. 13). Así deja claro que la sistematización de sus ideas, las reflexiones que va a exponer, se elaborarán de modo parecido a la reflexión científica. ¿Acaso no son los puntos y las líneas la base de la geometría? El Arte, la Ciencia y las Matemáticas se dan la mano en los conceptos y en la tecnología imprescindibles para realizar cualquier obra.

Kandinsky, como Euclides, empieza por definir el elemento fundamental de su trabajo: el punto. Distingue entre punto material y punto geométrico: *El punto geométrico es invisible. De modo que lo debemos definir como ente abstracto. Si pensamos en él materialmente, el punto se asemeja a un cero.* (op. Cit., p. 21). En cuanto a la línea: *La línea geométrica es un ente invisible. Es la traza que deja el punto al moverse y es por lo tanto su producto.* (op. Cit., p. 49). La distinción entre punto geométrico y punto material permiten considerar que *las posibilidades formales del punto son ilimitadas* (op. Cit., p. 26) y dar ejemplos de puntos materiales redondos, cuadrados, triangulares y estrellados, entre otros. El punto geométrico no tiene dimensión, su dimensión es nula. El punto dibujado, material, es tridimensional y se percibe como bidimensional (un círculo, un polígono, una estrella). Tiene periferia. En esto no se distingue de la línea dibujada.

El objetivo de Kandinsky es el aspecto perceptivo. Sus reflexiones se orientan a la interpretación y sugestión que producen en quien los observa una serie de puntos o líneas. Según su distribución, forma, grosor, etcétera, esos puntos o líneas provocan unas impresiones u otras en la mente de quien los observa. Unas impresiones que el autor llama tensiones, dinámicas, pesos.

Las leyes que regulan la percepción y agrupación de distintos estímulos en totalidades son fundamentalmente cuatro: proximidad, semejanza, continuidad y simetría (Pinillos, 1981). En concreto, bastantes aspectos figurales (sic) de la percepción, sobre todo la visual, han recibido considerable esclarecimiento a partir de las leyes de la Gestalt (Pinillos, op. Cit., p. 179). Gracias a su tamaño tan parecido las 16 piedras de esta imagen pueden ser consideradas como puntos en el plano. Viéndolas percibimos un archipiélago de 16 puntos formado por otros subarchipiélagos menores. ¿Por qué lo vemos así? Sobre todo por las leyes de semejanza y proximidad, pero ¿en qué radica la impresión de ver un archipiélago con subarchipiélagos o la de ver una línea o la de ver puntos aislados?

La respuesta es la proximidad. Tendemos a asociar lo que abarca la vista y, una vez abarcado, lo que está más próximo: dos puntos visibles pero separados determinan un ente (no necesariamente hay que llamarlo segmento) imaginario. En esta distribución:

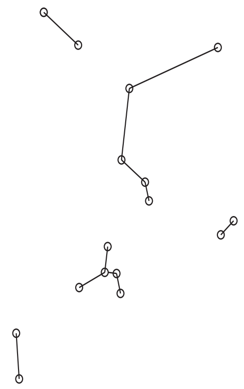
podemos ver un archipiélago de 18 puntos formado por otros archipiélagos menores (subarchipiélagos) de 3, 5 y 8. ¿Consideraremos que aquí hay algún punto aislado? Quizá no, pero si tuviésemos la imaginación de nuestros antepasados seríamos capaces de reconocer en esos puntos la forma de un escorpión. De ahí que dicha configuración, correspondiente a una nube de estrellas del firmamento, se llame constelación de *Escorpio*.

Al contemplar tres puntos X, Y y Z, tendemos a unir visualmente aquellos más cercanos entre sí (pongamos que sean X y Y) y a aislar de esa pareja el otro más lejano (pongamos Z). Percibimos el archipiélago de tres formado por dos suachipiélagos, uno de dos y otro de uno, a no ser que sean todos equidistantes, en cuyo caso veremos un archipiélago triangular. De lo contrario, siempre habrá uno de los tres más alejado de los otros dos, fuera de los círculos con centro en X e Y y de radio XY. En tal caso, ese punto será un punto aislado.

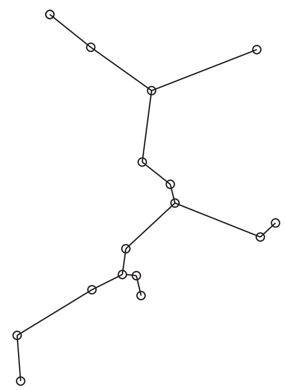
Luego en cada archipiélago finito de N puntos P_i hay una distancia mínima que determina el aislamiento: $d = \min\left\{\overline{P_iP_j}\right\}_{1\le i,j\le N}$.

Un punto P_k del archipiélago está aislado si $\forall i \neq k: \ \overline{P_kP_i} > d$. El valor d existe y es computable porque es el más pequeño de una serie finita de números. Este *Algoritmo de Mínima Distancia* identifica los puntos aislados de una nube finita de puntos, pero no la configuración asociativa que es el propio archipiélago. Contemplando una serie de islas o estrellas asociamos cada una con aquella que le queda más cerca. Es este *Algoritmo Asociativo de Proximidad* el que nos hace ver una configuración lineal curva en la constelación de Escorpio.

La asociación por proximidad, entendiendo ésta en asociar cada piedra con aquella que le queda más cerca, produce el resultado siguiente:



Pero podemos llevar las cosas más lejos. El *Algoritmo de Proximidad* produce subarchipiélagos. Nada nos impide aplicarlo de nuevo para asociar unos con otros conectando aquellos subarchipiélagos más próximos. Entendiendo esta proximidad como la mínima distancia determinada por puntos de subarchipiélagos distintos:



Esta versión iterativa del *Algoritmo de Proximidad* se asemeja bastante a la realidad perceptiva y es tan asociativo que no deja ningún punto aislado. Además, cuando el número N de puntos se hace grande, la proporción entre las N-1 conexiones que produce y las $\binom{N}{2}$ posibles se hace cada vez menor:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\text{N-1}}{\binom{\text{N}}{2}} = \lim_{N\to\infty} \frac{2}{N} = 0$$

Por eso su efectividad mejora a medida que aumenta el número de islas, estrellas o, ¿por qué no?, de amigos. Las conexiones establecidas mediante este algoritmo son muy pocas en comparación con todas las posibles al mismo tiempo que garantizan que todo el mundo esté conectado. Su aplicación no deja a ***Nadie solo***. ■

REFERENCIAS

Kandinsky, V. (1926): *Punto y Línea Sobre el Plano. Contribución al análisis de los elementos pictóricos.* Edición castellana de Editorial Paidós. Barcelona 1996.

Pinillos, J. L. (1981): *Principios de Psicología.* Alianza Editorial. Madrid, 1981.

iMATgen 15

Líneas de espuma en el parabrisas de un automóvil. Tras ellas unas nubes en el cielo y los ángulos oscuros de varias fachadas. Esta imagen se ha hecho característica en los breves intervalos que median entre el cambio del rojo al verde de un semáforo. Algo corriente hoy en día en muchos cruces de calles de las grandes ciudades. Quienes se aplican en el lavado de parabrisas suelen ser inmigrantes. Acostumbran a trabajar en parejas, especialmente en los cruces de avenidas y calles amplias.

Hubo un tiempo en que esos limpiadores solicitaban educadamente el permiso de sus clientes antes de iniciar su tarea. Ya no. Ahora pasan de toda cortesía y directamente te emplastan un estropajo mojado encima del parabrisas y empiezan a frotar. A ti te toca precisamente el día que, aunque no inmaculado, menos sucio llevas el cristal, o el día en que no tienes ninguna moneda, o el día en que no te da la gana que se te imponga pagar por algo no solicitado. Tu le dices que no, que no quieres que te laven el parabrisas, que no tienes monedas. ¡*No importa, tengo cambió*!, te asegura él o ella. Entonces, si accedes, es peor. Le das un billete, por ejemplo, de 10 euros y enseguida él empieza a revolver una bolsa o sus apretados bolsillos traseros en busca de las monedas que te debe. Pero no las encuentra o no le llegan. Hace rato que el semáforo está en verde. Ya has puesto primera y mantienes presionado el embrague. Los conductores que te siguen se impacientan y hacen sonar las bocinas. Él sigue buscando cambio, pero no lo encuentra. El semáforo se pone rojo de nuevo. Desde atrás te llegan los gritos de los automovilistas. En tu retrovisor ves unos brazos agitándose. Tú piensas que eres inocente. ¿Por qué no se meten con él en lugar de hacerte pagar a ti la demora? Mientras, el limpiador ha ido a buscar a su colega. Cuando por fin regresa te da solamente ocho euros. ¿Qué? ¿Dos euros por un trabajo de 15 segundos? Te dice que no les queda cambio y se va a cazar otro cliente. El semáforo se pone verde otra vez. ¡Mierda! Arrancas dejándote otros 20 euros de neumático en el asfalto y, ahora te das cuenta, con restos de espuma en los extremos del parabrisas. Cuando se seque habrá que limpiarlos otra vez.

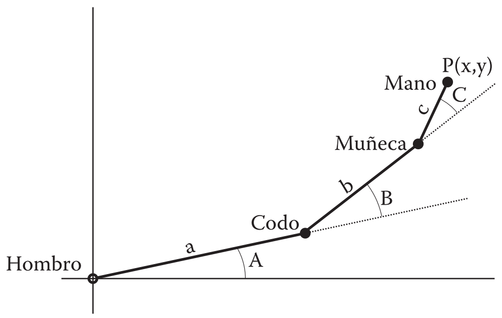
¿Cómo comprender la imagen sin saber cuál es el origen de esas curvas? La imagen muestra el vestigio de algo universal que alude no solamente a su autor, sino a mi, a ti, a todas las personas del planeta, a todos nuestros antepasados y descendientes, próximos y lejanos, que sean capaces de escribir, pintar, dibujar o lavar frotando un suelo, un cristal, una pared o una mesa con la mano. Alude también a quienes hace miles de años habitaron los espacios huecos en las laderas de una montaña y que, igual que esos jóvenes del año 2004, se acercaron a una superficie irregular de la pared o techo que los cobijaba para impregnarla de colores, líneas y figuras.

La actividad humana se fundamenta en las extremidades del cuerpo. Pocas tareas pueden desarrollarse sin su participación. Obviamente hacen falta para escribir, pintar y lavar, pero también para sostener un libro, tocar un instrumento, pinchar un disco y conducir. Incluso en aquellos casos en que alguien no puede disponer de brazos, son las piernas o el cuello y la cabeza las que sustituyen su mecánica. Desde el hombro hasta la yema de los dedos disponemos de seis segmentos óseos (brazo, antebrazo, mano y tres falanges) articulados en otros tantos centros de rotación (hombro, codo, muñeca y tres nudillos). La longitud de esos segmentos y la amplitud de esas articulaciones determinan el alcance y la capacidad de nuestras acciones. ¿Cómo entender esta imagen sin comprender esto?

En el caso de esta imagen tres son las variables que intervienen. Para lavar un parabrisas se ponen en movimiento el brazo, el antebrazo y la mano. Los dedos se usan para agarrar bien el estropajo. Esos tres segmentos se articulan desde sus respectivos centros de giro: el hombro, el codo y la muñeca. Para simplificar la cuestión consideraremos dos aspectos. Uno, que la acción del brazo se desarrolla en un solo plano, el del parabrisas. Así que todos los giros tendrán lugar en ese mismo plano. Y dos, que el hombro es un punto fijo de dicho plano.

El brazo será un segmento de longitud *a* cuyo centro de rotación de amplitud *A* está en el hombro. El antebrazo es un segmento de longitud *b* que puede girar según una amplitud *B* con centro de rotación en el codo. La mano, más concretamente el puño que encierra el estropajo, es un segmento de longitud *c* que gira con centro en la muñeca según una amplitud *C*.

¿Qué zona del parabrisas queda al alcance del limpiador sin mover el hombro de su sitio? Imaginando un sistema de coordenadas con origen en el hombro y llamando *P* al punto más lejano alcanzado por la mano (derecha) que agarra el estropajo:



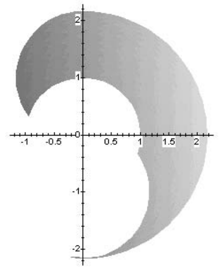
Esta posición representada aquí correspondería al brazo derecho. Las amplitudes *B* y *C* se han tomado con relación a las direcciones de los segmentos precedentes (brazo y antebrazo). El estropajo se halla en el punto P(x,y):

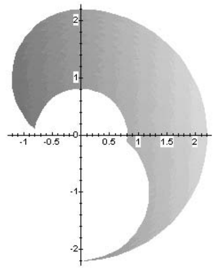
$$P(x,y)\begin{cases} x = a\cdot\cos A + b\cdot\cos(A+B) + c\cdot\cos(A+B+C) \\ y = a\cdot sen A + b\cdot sen(A+B) + c\cdot sen(A+B+C) \end{cases}$$

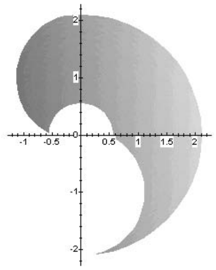
En el caso del brazo derecho, podemos tomar como amplitudes $A\in[-\pi/2,\pi/2]$, $B\in[0,3\pi/4]$ y $C\in[-\pi/6,\pi/4]$; y como segmentos a=1, b=0,8 y c=0,4. Un programa de cálculo científico como Maple permite representar la zona accesible. Las instrucciones pertinentes son:

```
> with(plots):
> animate3d([ 0,
        cos(x)+0.8*cos(x+y)+0.4*cos(x+y+z),
        sin(x)+0.8*sin(x+y)+0.4*sin(x+y+z)],
        x=-Pi/2..Pi/2,y=0..3*Pi/4,
        z=-Pi/6..Pi/4,
        scaling=constrained, orientation=[0,90],
        style=patchnogrid,axes=normal,frames=9);
```

La siguiente serie de imágenes muestra la secuencia de la zona accesible para tres valores de *C*: -π/6, 5π/12 y π/4.







Algo parecido sucede al pintar un cuadro o al escribir, ya sea con tiza en una pizarra o con lápiz o bolígrafo en el papel. Del mismo estilo es también la zona alcanzable por la punta de un pie manteniendo fija la cadera y moviendo la pierna en un único plano perpendicular al suelo. En tal caso reducimos el problema a tres segmentos (muslo, pierna y pie) y tres articulaciones (cadera, rodilla y tobillo). Coordinar sus movimientos es muy importante para golpear una esfera flexible.

En realidad, tanto en el caso de un brazo como en el de una pierna libres de movimiento, las amplitudes de las articulaciones no se restringen a ángulos planos, sino sólidos. La zona de acceso de un miembro libre es pues tridimensional, una superficie circular.

Los vestigios curvos del movimiento humano y animal surgen de un juego de círculos. Esto nos iguala a todos. También con quienes levantan su mano para pedirnos ayuda o comida, aquellos que han hecho célebre la frase ***¡Es triste pedir, pero más triste es robar!*** Con la que a menudo nos acosan mientras un semáforo está rojo. ■

SUMA 48
Febrero 2005, pp. 77-79

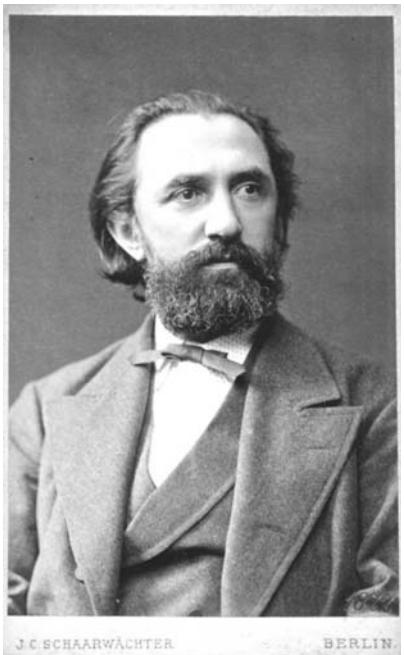
Homenaje a Reuleaux

En 2005, centenario de la muerte de Franz Reuleaux, parece un momento adecuado para recordar a tan singular personaje. Franz Reuleaux (1829-1905) es un nombre engañoso pues el apellido Reuleaux induce a pensar en un perfume de París o en alguien indiscutiblemente francés. En realidad fue un inteligente ingeniero mecánico alemán. Profesor y especialista en cinemática, supo combinar durante toda su vida su interés docente con sus ideas investigadoras para diseñar y describir máquinas. Su maravillosa colección llegó a tener hasta 800 mecanismos que usó para enseñar, para sugerir nuevos avances técnicos (y para enriquecer el pabellón alemán en la Expo de Filadelfia de su época).

Precisamente, la época vivida por Reuleaux tenía como tema crucial el desarrollo de la revolución industrial y por tanto sus aportaciones le sitúan como un hombre plenamente identificado con los problemas de su entorno. Vaya, que si Reuleaux viviese ahora sería un brillante ingeniero informático o telemático diseñador de “hard” o de móviles.

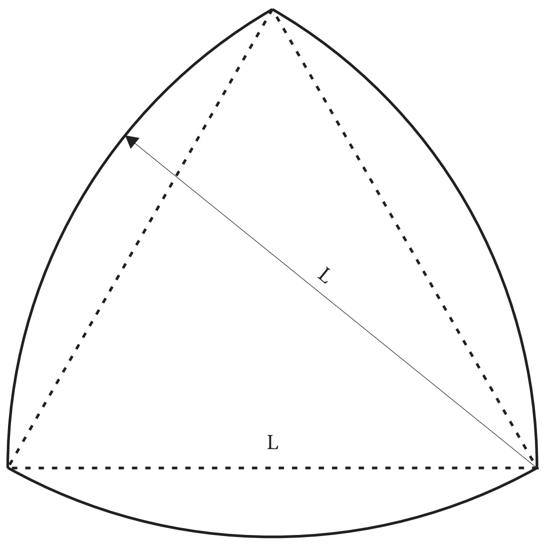
Pero… Reuleaux tiene un triángulo

Por la vía de la matemática recreativa (y gracias a Steinhaus) se ha popularizado enormemente el *triángulo de Reuleaux*. Se construye a partir de un triángulo equilátero de lado L trazando desde cada uno de sus vértices el arco de circunferencia de radio L que pasa por sus dos vértices opuestos. Este bonito triángulo (¿no sería mejor llamarlo triarco?) constituye la mejor alternativa a la circunferencia como curva de



Franz Reuleaux (1829-1905)

Claudi Alsina
elclip.suma@fespm.org.

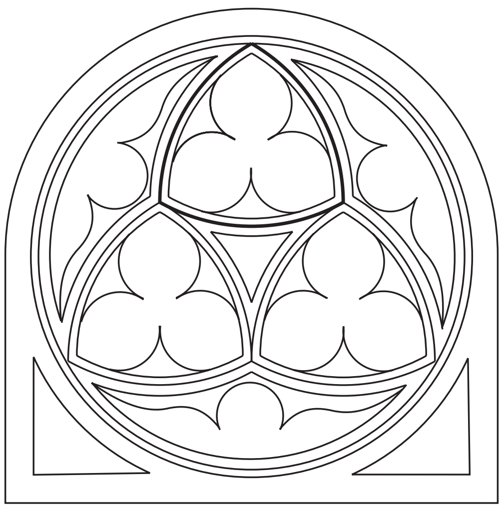


Franz Reuleaux (1829-1905)

anchura constante, siendo la figura intersección de tres circunferencias iguales cuyos centro formen un triángulo equilátero.

Y el triángulo de Reuleaux ya existía hacía siglos…

Muchos siglos antes de Reuleaux, esta figura había sido bien conocida por su elegancia de formas y por su simple trazado con regla y compás. Dos arcos del triángulo forman el típico arco gótico y son abundantes las catedrales medievales que exhiben, junto a estos arcos, ventanales y adornos petrificados con forma de "triángulo de Reuleaux".



Rosetón del Claustro de la Abadia de Hauterive, cerca de Friburgo (Suiza), siglo XIV

El triángulo de Reuleaux para Reuleaux

Para Franz Reuleaux aquella forma era la del extremo de un mecanismo de anchura constante que podría girar en un soporte cuadrado. En su época los mecanismos geométricos tenían gran interés pues muchos de ellos de apariencia especulativa ("mecanismo para trazar líneas rectas") daban lugar a aplicaciones importantes ("convertir movimiento rectilíneo en circular"). Algo debía hacerse con "el vapor" de las máquinas de vapor o con las máquinas de coser.

El triángulo de Reuleaux para los matemáticos

Olvidando el mecanismo original, el triángulo de Reuleaux pasó a ser un bonito dibujo sobre el que los geómetras encontraron grandes posibilidades especulativas. Su anchura constante le permitía rodar dentro de su cuadrado o entre paralelas (tocando siempre un punto de una y un punto de otra); su perímetro era πL (Teorema de Barbier) como todas las curvas de anchura constante L. Fijado el valor de L, al considerar todas las posibles curvas de anchura constante L resulta que el triángulo de Reuleaux con dicha anchura es la figura que posee simetría más miserable y menor área.

El triángulo de Reuleaux hoy

Figura estelar en las páginas web de matemáticas, este triángulo tuvo su momento de gloria al entrar en el mundo de los… taladros. Con taladros que giran y formas helicoidales es muy simple hacer agujeros redondos. Pero con un triángulo de Reuleaux cortante, sometido a una frenética danza taladradora, resultan agujeros cuadrados (solo observadores exigentes notarán que se vacía un 98,77% del cuadrado pues quedan pequeñas zonas curvadas en vértices). Los agujeros cuadrados reciben bien maderas de sección cuadrada en muebles, y de ahí su interés. Pero también el triángulo sirve para ciertos tipos de motores de gasolina.

La Reuleaux manía

El club de fans de Reuleaux se ha desbordado. Es figura estrella en la exposición francesa (EMS-ICMI-MOMBUKA) de UNESCO *Experiencing Mathematics* (www.MathEx.org). Hay una bicicleta con tres ruedas, en forma de triángulo de Reuleaux, que evoluciona sobre una "carretera" ondulada de medidas adaptadas a las ruedas.

Diversos laboratorios farmacéuticos han dado la forma del triángulo de Reuleaux a pastillas (SMINT ®, por ejemplo). Este año ha aparecido un reloj de pulsera cuya esfera horaria se inscribe en un perfil de Reuleaux. Y con la moda de platos geométricos diferentes a lo largo de los exquisitos menús de degustación proliferan los platos grandes de cerámica blanca con forma de triángulo de Reuleaux. ¿Cómo podría imaginar Franz que su forma iba a realizar tareas tan poco productivas como soportar una mus de anchoas con vinagre de cerezas?

Caja de pastillas de menta SMINT®

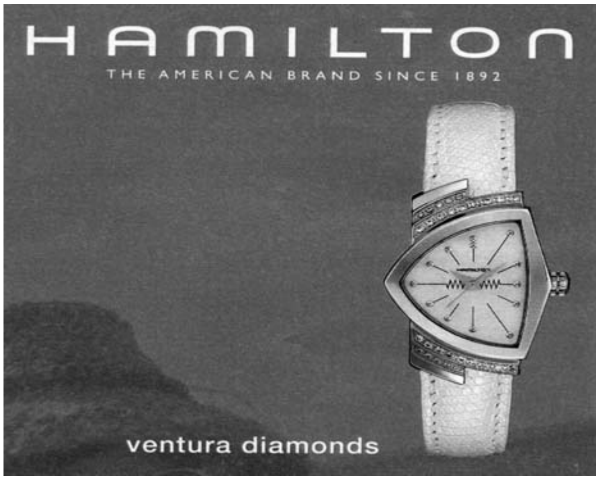
Y para colmo, cerrado ya el Forum Universal de las Culturas de Barcelona ha quedado como recuerdo el vaso oficial del Forum 2004. Es de plástico y su forma se genera girando el triángulo de Reuleaux de la base hasta llegar esta forma a la boca del vaso marcando unas interesantes superficies laterales. Poco práctico para agarrar y raro para beber por el perfil de arriba… pero lo lleno de cava y brindo a la memoria de Franz.

Para pensar un rato

Aquí tiene tres enunciados de problemas relacionados con el triángulo de Reuleaux por si le apetece pensarlos o compartirlos.

- ¿Qué ángulo hay entre las semitangentes de un vértice del triángulo de Reuleaux?
- ¿Qué tipo de curva es la descrita por el centroide de un triángulo de Reuleaux de anchura L que gira una vuelta completa en el interior de un cuadrado de lado L?
- ¿Cómo generaría infinitas clases diferentes de curvas de anchura constante?

Comentarios o soluciones curiosas serán bienvenidas en *elclip.suma@fespm.org* ■



PARA SABER MÁS

REULEAUX F.: *The Kinematics of Machinery*, Dover Publications, New York 1964, pp.129-46.

SMITH STANLEY, A.:"Rolling Curves - Activities involving curves of constant width", *Mathematics Teacher*, N.º 67, 1974, pp. 239–242.

SMITH, Scott G.: "Drilling square holes: Using a Reuleaux triangle", *Mathematics Teacher*, N.º 86, 1993, pp. 579 - 583.

En la web:

http://techreports.library.cornell.edu:8081/Dienst/UI/1.0/Display/cul.htmm/2002-2

http://kmoddl.library.cornell.edu/ebooks/#schroder1

http://kmoddl.library.cornell.edu/ebookds/@voigth1

http://www.stemnet.nf.ca/CITE/inventors.htm

http://www.math.cornell.edu/~dtaimina/Reuleaux/Reuleaux.htm

http://www.arqcon.com.ar

monografía 02
SUMA

Textos de Miguel de Guzmán
Francisco Martín e Inmaculada Fuentes (editores)
Monografías de Suma 02
Revista SUMA
Madrid, 2005
ISBN 84-931776-9-5
142 páginas

SUMA Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las MATEMÁTICAS

Apartado de Correos 19012
28080-MADRID (España)
Fax: (+34) 911 912 879
Dirección: sumadireccion@fespm.org
Administración: suma_administracion@fespm.org

Normas de publicación en página 143.
Boletín de suscripción en página 144.

SUMA 48

Febrero 2005, pp. 81-90

Theatrum Machinarum Matemáquinas en el Museo Universitario de Módena

La colección de Máquinas Matemáticas del Laboratorio de Matemáticas del Museo Universitario de Historia Natural e Instrumentos Científicos de la Universidad de Módena (Italia) se construyó, tras haber experimentado acerca de su posible utilidad didáctica, basándose en indicaciones extraídas de la literatura científica y técnica desde la Grecia clásica hasta principios del siglo XX.

La colección está disponible en versión on-line en Internet (*http://www.museo.unimo.it/theatrum*) y se ofrece también en CD. En ambos casos, cada maqueta se presenta con una foto, una animación, una descripción y la demostración de propiedades. Las animaciones han sido realizadas en *Cabri-Géomètre II* (para Windows). Se incluyen asimismo algunas simulaciones en Java.

La colección del Laboratorio de Matemáticas recibe visitas de escolares, profesores e investigadores. Las maquetas han sido presentadas en varios lugares de Italia y en otros países (España, Alemania, Holanda, Francia, Canadá, Brasil, USA, Japón, etc).

Siguiendo a su creador, Marcello Pergola, el objetivo didáctico ha condicionado algunos aspectos de la colección, por lo que se trata, más que nada, de una antología de un conjunto mucho mayor. Hay muchas ventajas en el uso didáctico de estos artefactos: despiertan el interés del visitante, refuerzan su intuición y la imaginación, profundizan en la relación entre los modelos matemáticos y la realidad, fomentan la investigación y la obtención de pruebas, presentan elementos nuevos o poco comunes relativos al movimiento y, por último, llevan de una forma espontánea y natural a los usuarios (principalmente, a profesores y estudiantes, aunque no exclusivamente) a sumergirse en la dimensión histórica y a reflexionar sobre las relaciones entre las matemáticas, la sociedad y la cultura. Así, los usuarios, por un lado, evitan el riesgo de menospreciar la historia y destruir su propio pasado; y por otro, se encuentran con varios problemas que se resumen a continuación.

Modelos reales y virtuales

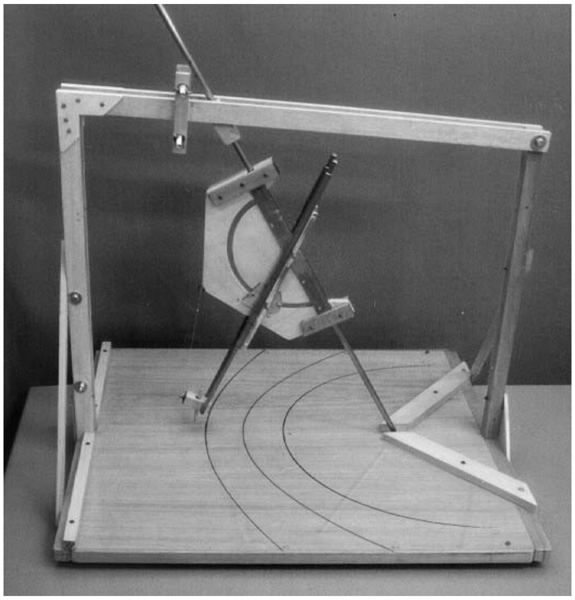
Dada su naturaleza matemática, las máquinas del museo podrían sustituirse por modelos virtuales (simulaciones virtuales, por ejemplo). Pero aquí la situación cambia profundamente. Desde una perspectiva epistemológica, hay una traslación, desde la relación entre dos tipos diferentes de modelos matemáticos, a la relación entre modelos matemáticos y concretos. Además, la manipulación de objetos concretos tridimensionales es mucho más enriquecedora y sugerente que la manipulación de un objeto virtual mediante un ratón: una manipulación física real (o imaginaria) es, casi siempre, en la que se basa una

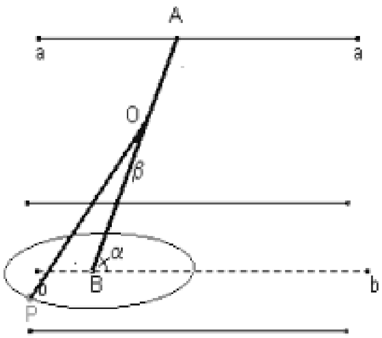
Jacinto Quevedo
museos.suma@fespm.org

simulación por ordenador. Es mucho mejor, colocar los modelos virtuales y físicos juntos y experimentar con ambos.

Ciencia y Tecnología

Como ocurre con todas las ciencias, la matemática se refiere a un campo accesible de forma precientífica. Y se mantiene en ese campo hasta que, en continua comparación con otras ciencias y actividades, se va diferenciando progresivamente, se expresa, enriquece temas, métodos y lenguajes y da sentido a sus propios programas de investigación.



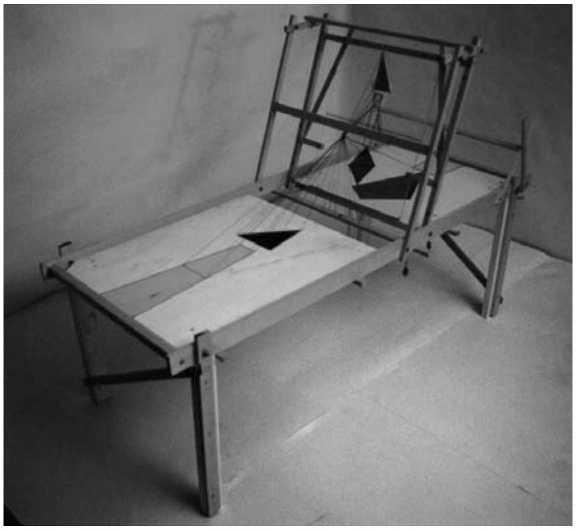


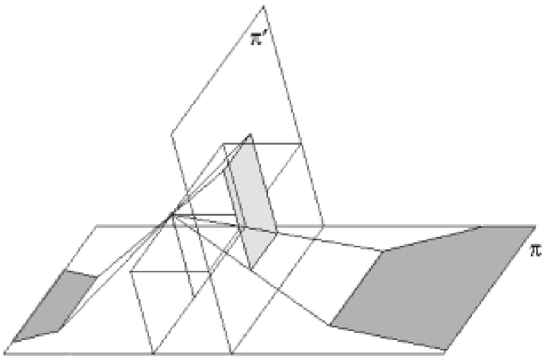
Sección cónica (Compás perfecto)

Los artefactos de esta colección son un ejemplo claro de ello. Ya sea porque hayan sido usados por teóricos o prácticos, o porque hayan tenido relaciones complejas con las formas de conceptualización y contenidos del conocimiento matemático. Aunque son profundamente diferentes (por ser concretos) de los objetos matemáticos, siguen estando próximos entre si y se desarrollan conjuntamente.

De manera simétrica, las comunidades de matemáticos siempre se han distinguido claramente de las comunidades de técnicos (artesanos, ingenieros, artistas, comerciantes, etc.) Sin embargo, ambas están muy unidas por una densa red de comunicaciones e intercambios.

Las máquinas y los instrumentos constituyen uno de los puntos de contacto (o fricción) entre la ciencia y la tecnología: siempre hay una tendencia a encontrar un punto de equilibrio reduciendo cada una a un lenguaje; aunque siempre está la posibilidad de que realidades no científicas influyan en el pensamiento científico formal.

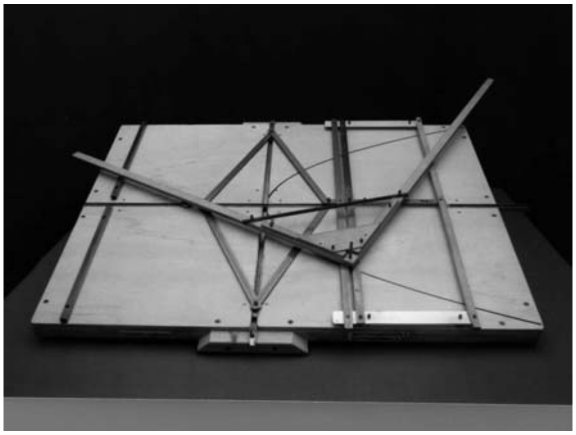


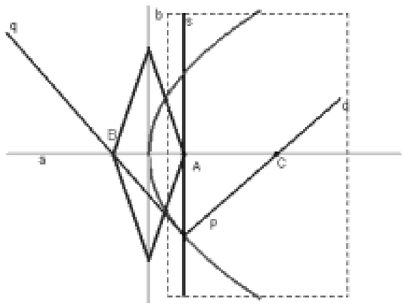


Transformaciones (Génesis tridimensional de la homología)

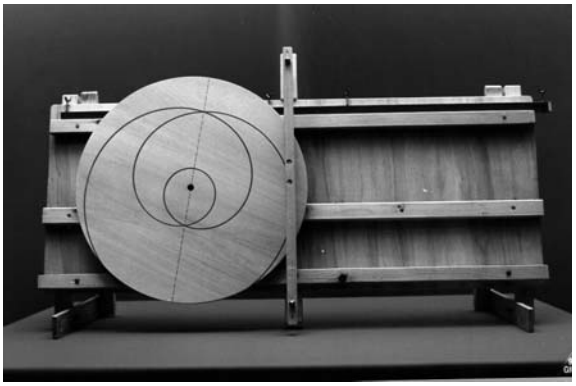
Clasificación de las matemáquinas

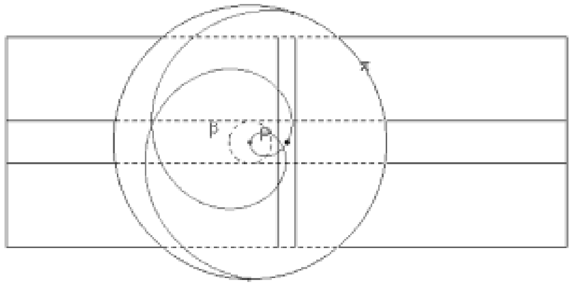
Las máquinas de la colección se dividen en cinco clases (algunas de ellas se solapán):



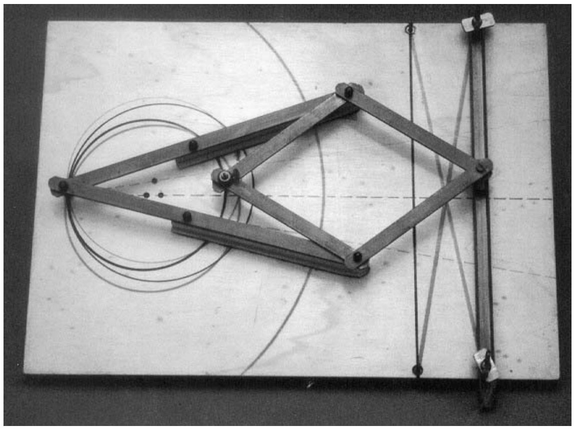


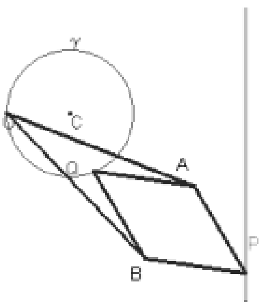
Sección cónica (parabológrafo)



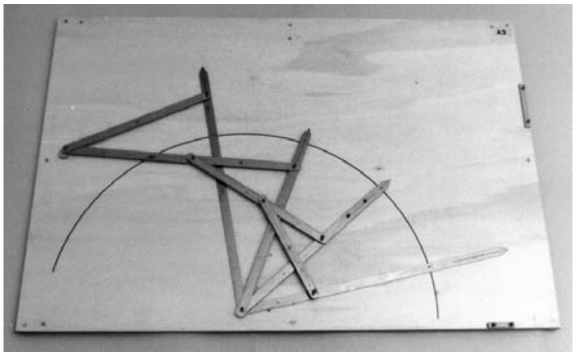


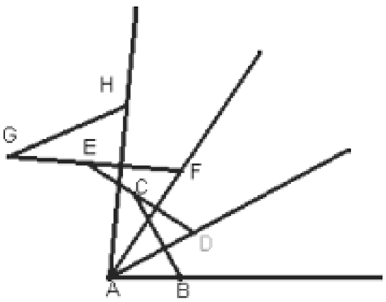
Curvígrafos (Espiral de Arquímedes)





Transformación de una recta en una circunferencia

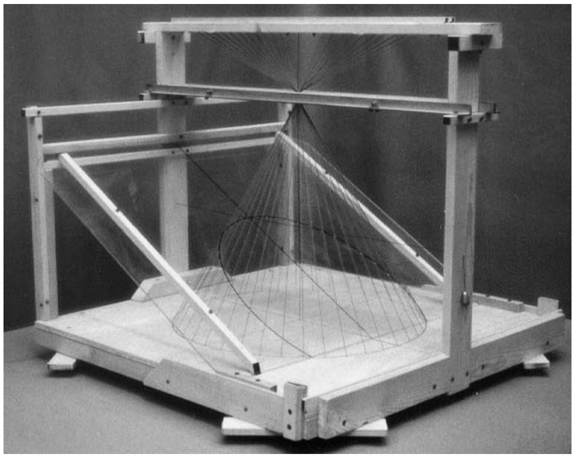




Instrumento para resolver problemas (Trisector del Kempe)

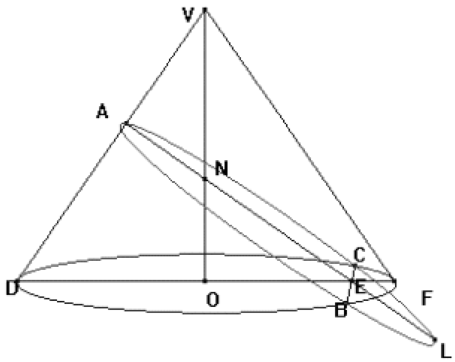
1) Geometría de secciones cónicas;
2) Proyección y Perspectiva;
3) Transformaciones;
4) Trazadores de curvas (curvígrafos);
5) Solución mecánica de problemas.

1. Geometría de las secciones cónicas



Sección cónica (Teoría de Menecmo)

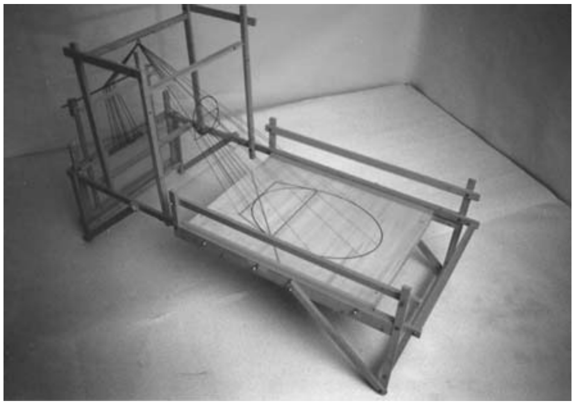
Un primer grupo de maquetas ilustra las teorías clásicas de Apolonio y Menecmo. Difieren en dos aspectos. Menecmo usa solo los conos obtenidos por rotación de triángulos rectángulos adecuados; el corte se realiza perpendicularmente a una de las caras del triángulo axial y de ahí que para obtener todas las cónicas se necesiten diferentes tipos de conos. Apolonio, por el contrario, hace uso de un cono genérico que es cortado por planos de diferente inclinación; de ahí que, del mismo cono, se puedan obtener todos los tipos de cónicas.

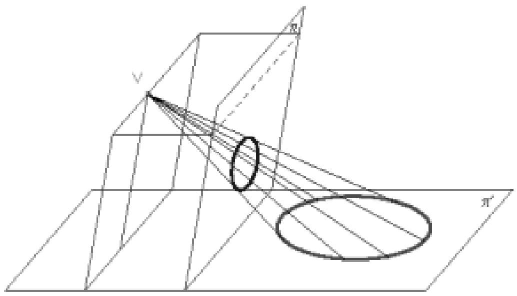


Sección cónica (Teoría de Menecmo)(bis)

Los *síntomas* los obtienen ambos autores razonando en el espacio tridimensional, pero Apolonio los interpreta en el plano mediante la aplicación de las áreas: de esta forma se inventan los nombres estándar (elipse, hipérbola y parábola). Quedan muchos problemas abiertos: la identidad entre las secciones de un cilindro y las de la elipse estaba en cuestión; las dos ramas de la hipérbola no se concebían como partes de la misma curva, etc. Las maquetas de este grupo son estáticas, pero las podemos transformar en máquinas mentales para imprimirles movimiento.

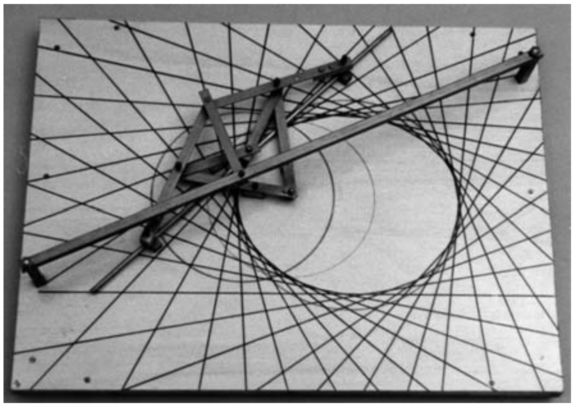
Un segundo grupo lo forman máquinas que dibujan curvas en el plano. Unas son una realización directa en tres dimensiones de la definición clásica. Otras están basadas en el conocimiento del síntoma del que se va a hacer uso. La máquina está construida para obedecer al síntoma. De esta forma el síntoma modifica su estatus: ya no es una verdad estática sino que funciona para construir la cónica.

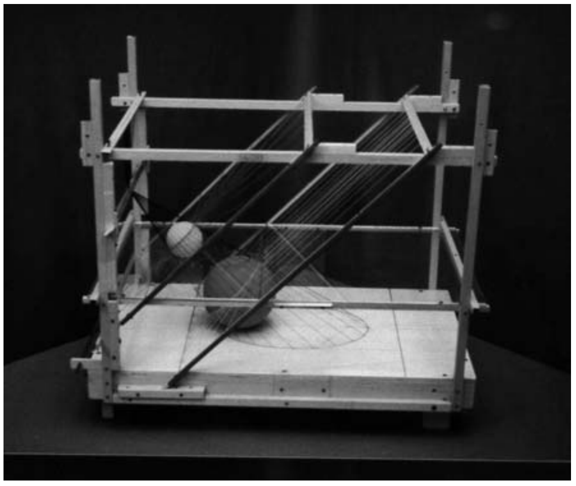


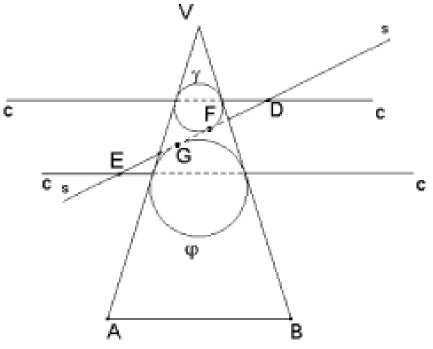


Sección cónica (Teorema de Stevin)

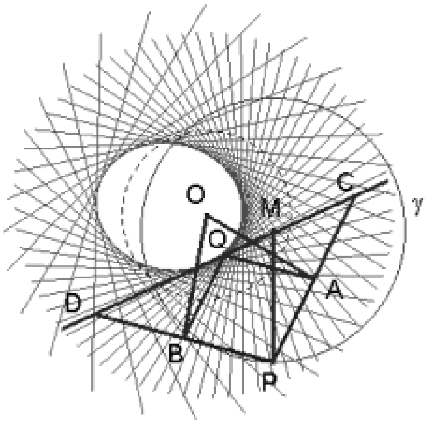
Además, se elimina cualquier relación con el cono subyacente: los puntos de la curva se posicionan en el plano con respecto a la parte fija de los mecanismos que hace las veces de sistema de referencia. En algunos casos (como en la máquina de Paciotti), se puede utilizar la misma máquina para dibujar todo tipo de cónicas mediante pequeños movimientos continuos. De esta manera nos centramos en dos importantes cuestiones: la naturaleza unitaria de las cónicas y la importancia del concepto intuitivo de continuidad que se usó ampliamente en el S. XVII.







Sección cónica (Teorema de Dandelin)



Sección cónica Elipse (Método de la polar)

La teoría de las cónicas se desarrolló en varias direcciones: hacia los nuevos tipos de representación en el plano de objetos tridimensionales; hacia la simplificación del tratado de Apolonio, hacia la aplicación del álgebra a la geometría... En esta última línea, se enunciaron nuevas propiedades que se plasmaron en ecuaciones que se transformaron en leyes que dieron pie a tratados. Los *conicógrafos* se convirtieron en máquinas matemáticas en tres sentidos pues: daban cuerpo a una propiedad geométrica del objeto dibujado, podían ser mentales y además, dependían de la teoría geométrica.

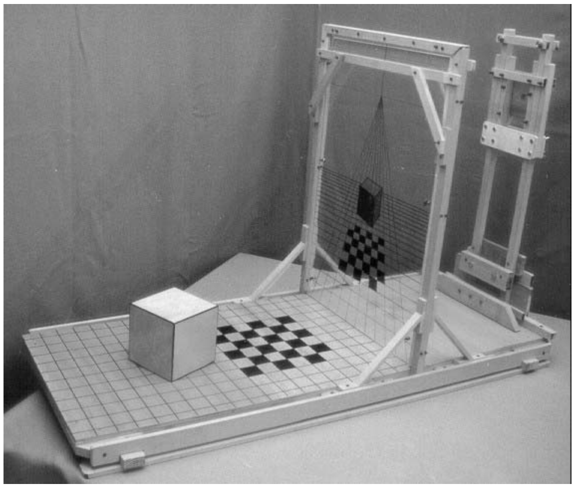
Ocurre bastante a menudo que, para cada nuevo descubrimiento teórico se puede diseñar un nuevo instrumento. Algunos mecanismos que funcionan en una conjugación ortogonal son reconsiderados en conjugación oblicua; las propiedades de los círculos directores sugieren construir mecanismos que utilicen las propiedades del rombo.

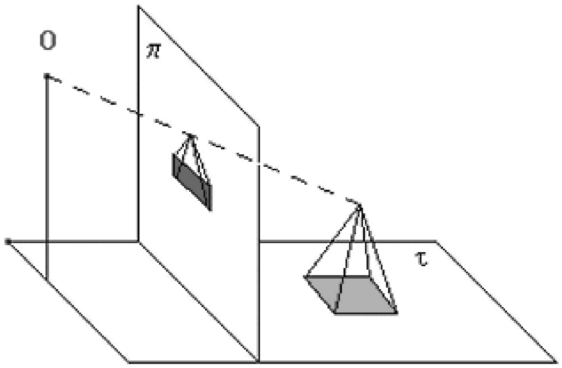
Desde el siglo XVI en adelante, la irrupción del movimiento en las matemáticas ha sido muy considerable: por un lado, las matemáticas y los mecanismos ya no están separados, por otro lado, los matemáticos tienden a especializarse más y a concebir máquinas como modelos mentales, dejando para los técnicos la solución de los problemas prácticos de construcción.

Otro grupo de maquetas ilustran los teoremas de Dandelin sobre las cónicas. Este Autor (en el S. XIX) reconsidera el punto de vista de los antiguos griegos, volviendo a situar las cónicas sobre el cono y obteniendo nuevos resultados. Recurre a la intuición y al principio de continuidad. Además, genera una interesante familia de curvas planas contínuas (las curvas focales, estudiadas, entre otros, por Quetelet). Sus estudios confirman unas observaciones previas: sugieren la construcción de nuevas máquinas y coloca en un marco teórico más amplio a máquinas ya conocidas que generan algunas curvas (el cuadrado de Newton, por ejemplo)

2. Proyecciones y Perspectiva

Cuando Durero visitó Italia en 1506, buscaba una teoría rigurosa de la perspectiva: los resultados de sus estudios y de sus encuentros con otros artistas fueron condensados en unas pocas páginas y en cuatro famosas imágenes de su tratado. Las cuatro máquinas de Durero se reproducen en el primer grupo de maquetas, que contiene instrumentos mecánicos para la imitación de la realidad. Un segundo grupo de maquetas contiene instrumentos que dependen de la teoría geométrica y que no podrían existir sin ella.





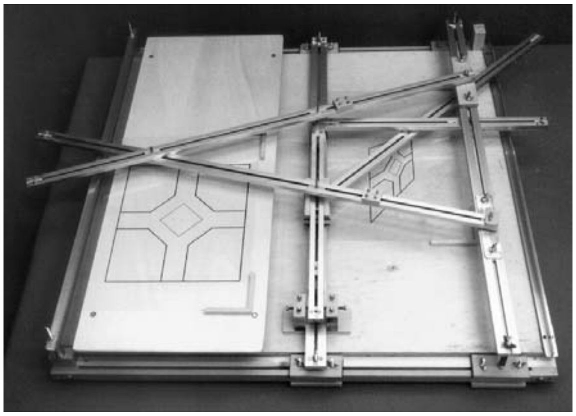
Proyección y perspectiva (Ventana de Durero)

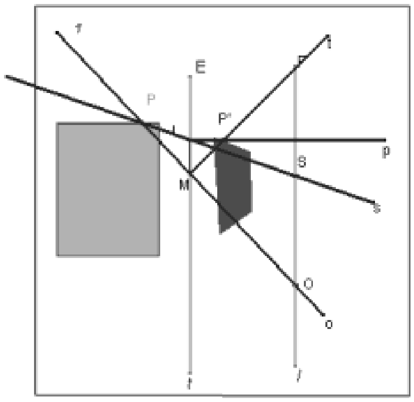
En lo concerniente al primer grupo de maquetas se pueden hacer las siguientes observaciones:

1) Las variaciones técnicas entre los instrumentos tienen como fin superar las dificultades prácticas y alcanzar un mayor nivel de automatismo, sin embargo, a pesar de incrementar su refinamiento mecánico, se sustituyeron, más tarde, por cámaras oscuras y similares, que son más precisas y fáciles de utilizar.
2) Los instrumentos para la perspectiva mantienen un estatus mágico, debido al escaso conocimiento de las leyes matemáticas que describen la degradación de la imagen al pasar del espacio al plano.
3) Los instrumentos para la perspectiva eran utilizados por amateurs más que por pintores profesionales. Como los amateurs requerían saber reglas para usarlos, se escribieron muchos tratados de diferentes niveles, desde muy simples y descriptivos a muy difíciles, incluso abstrusos.

Sobre el segundo grupo podemos decir que:

1) Existe una conexión estricta entre la manipulación de los instrumentos mecánicos y el teorema de Stevin: si el plano de la imagen rota sobre la línea del suelo y si el observador rota sobre sus pies en la misma dirección paralela al plano, la perspectiva no cambia y se mantendrá también cuando el plano de la imagen se extienda sobre el plano horizontal. Este movimiento de Stevin fue utilizado por De La Hire para aplanar un cono (junto con su sección) sobre el plano de su base circular: de ahí que las cónicas son supuestas transformadas de este círculo. La génesis de la transformación geométrica tiene que ver siempre con el conjunto de puntos de figuras particulares y, sólo más tarde, implica al plano completo.
2) Las *máquinas de Lambert* ofrecen una solución al problema de representar la transformada de cualquier figura plana de la forma más fácil y automática. En la práctica no son útiles (por su tamaño y escasa precisión) pero son teóricamente importantes, pues explican la influencia de la teoría mecanicista del siglo XVIII en la expresión de la homología de planos.

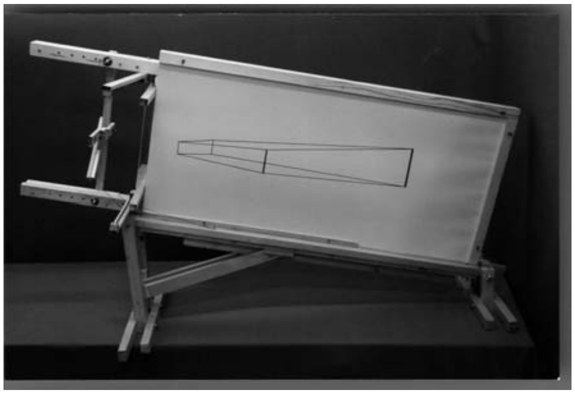


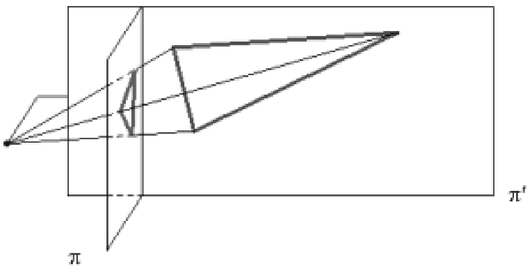


Proyección y perspectiva (Lambert)

Un tercer grupo se ocupa de la *anamorfosis*. Los historiadores han analizado los lazos existentes entre la producción de imágenes anamórficas, el comienzo de las tendencias en la pintura, la pasión por los autómatas y la filosofía cartesiana.

Desde una perspectiva matemática, la anamorfósis del plano no añade nada a la perspectiva estándar; se trata de un uso exacerbado de las mismas leyes. Así y todo, dada la falta de algoritmos formales, es necesario referirse a procedimientos empíricos. La anamorfosis obtenidas con espejos, son muy difíciles de estudiar. En este casoes esencial el uso de modelos.



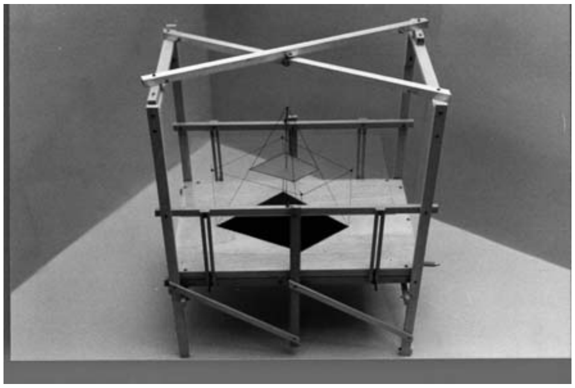


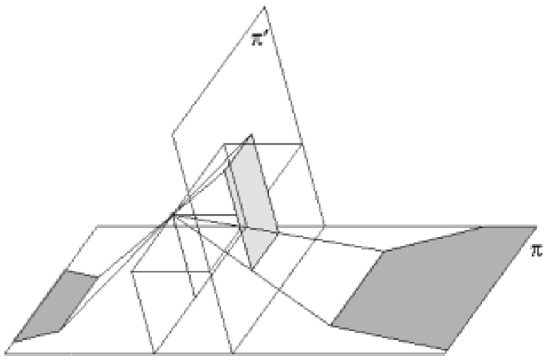
Proyección y perspectiva (Anamorfosis) (bis)

3. Transformaciones

La importancia del concepto de transformación en el S. XIX está relacionada con el desarrollo de la geometría proyectiva como campo de investigación autónomo y orgánico. Desde el primer momento, la invarianza de algunas propiedades de la configuración geométrica bajo proyección está relacionada o bien con problemas prácticos, o bien con el movimiento y la continuidad. Muchas líneas de investigación confluyen en la teoría de las transformaciones, como, por ejemplo, los trabajos de Bravais sobre la estructura cristalina, los de Jordan sobre los grupos de movimiento, el estudio de la relación entre la geometría afín, la mecánica de las deformaciones y el cálculo baricéntrico, los estudios de Helmotz y Lie sobre el movimiento de los cuerpos rígidos.

A un nivel más elemental, las isometrías han desempeñado un papel fundamental en la geometría; a partir de Euclides se utilizó, en la práctica, la estructura de grupo antes de que se hubiese clarificado la abstracta noción de grupo.



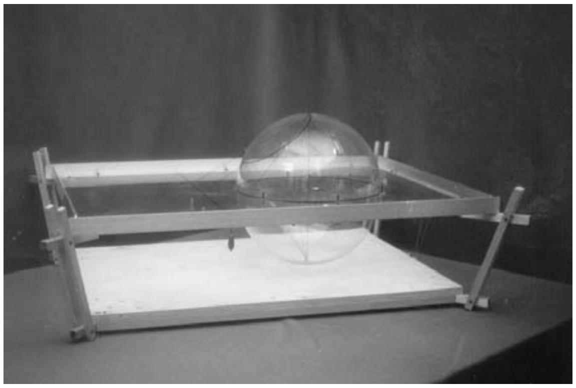


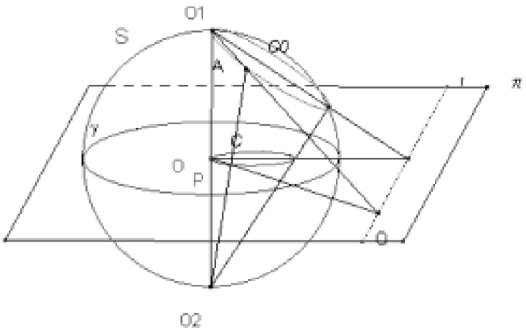
Transformaciones. Homotecia (Pantógrafo de Scheiner)

En el siglo XIX, la ingeniería mecánica se convirtió en una de las tecnologías dominantes: llamaba la atención el estudio de sistemas articulados que hacían realidad la transmisión de movimientos. Realmente, los abstractos aparatos teóricos (que, aunque estén relacionados con lo concreto, no son más que invenciones intelectuales) renuevan la mirada que observa y describe la realidad. De ahí que la teoría de transformaciones e invariantes arrojara nueva luz sobre el análisis y el diseño de máquinas. De esto se muestran ejemplos elementales mediante el pantógrafo de Scheiner y el inversor de Peaucellier.

Una parte de las maquetas muestran las más elementales transformaciones en el plano (isometrías, escalamiento y homotecias). Los puntos correspondientes se representan mediante un punto director y un punto de trazo, cada uno con dos grados de libertad.

Por un lado, estos instrumentos deberían concebirse como piezas que, ensambladas, dan lugar a un mecanismo más complejo; por otro lado, algunas de ellas pueden concebirse como la generalización o la particularización de otra.





Transformaciones (inversión circular)

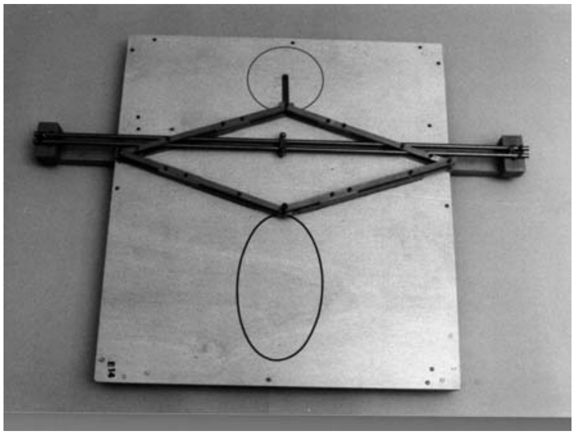
Todos los mecanismos son instrumentos "locales": determinan una correspondencia entre regiones limitadas del plano, mientras que las transformaciones geométricas se definen, globalmente, para todos los puntos del plano.

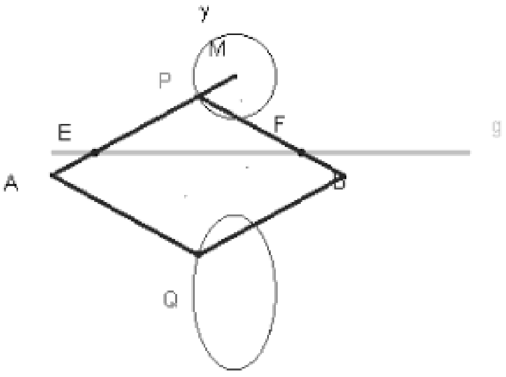
La transformación geométrica determinada por el instrumento no tiene relación directa con el movimiento físico del mecanismo; sin embargo, explorando el mecanismo, se pueden hacer conjeturas acerca del tipo de transformación de que se trata y probarlo luego de forma rigurosa. Estas características hacen de los mecanismos para generar transformaciones un interesante campo de experimentación para los estudiantes de secundaria y superiores.

Otras maquetas llaman la atención sobre los estrictos vínculos entre el espacio tridimensional y el plano. Por ejemplo, hay modelos que ilustran la relación entre la proyección estereográfica y la inversión circular.

4. Trazadores de curvas (curvígrafos)

Ya hemos citado algunas gráficas cónicas. Ahora nos referiremos a las curvas algebraicas de cualquier grado y a las curvas trascendentes. El tema es amplísimo. Las curvas algebraicas suelen tener formas muy agradables, pero lo más importante es que han constituido un campo de ejercicio para la génesis de muchos conceptos básicos (en la geometría y el cálculo) y la invención de algoritmos para resolver problemas difíciles.

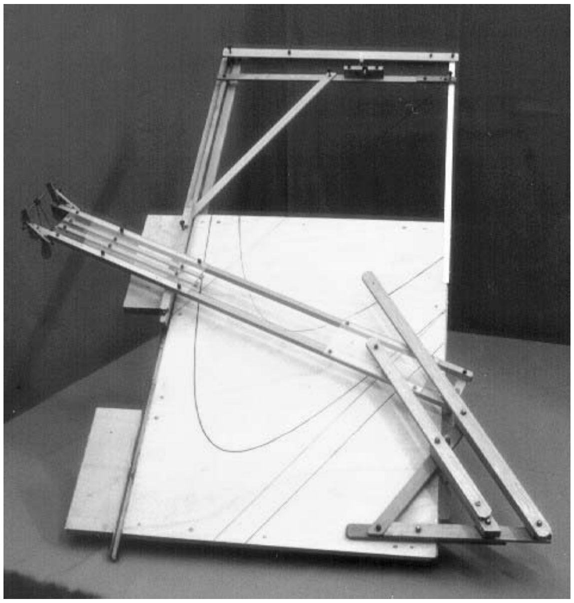


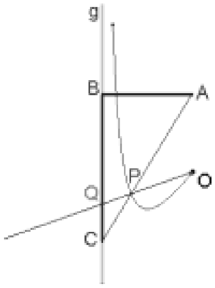


Curvígrafos (Elisógrafo de Delaunay)

Se puede usar alguna propiedad de la curva con el fin de dibujarla mecánicamente, mediante un movimiento continuo. De ahí que los instrumentos que dibujen la misma curva deberían considerarse equivalentes entre sí en algún modo: desde la perspectiva clásica el total de los instrumentos que dibujen una misma curva caracteriza la *naturaleza* de la curva. Esta idea de que cada objeto matemático tiene una naturaleza solo se cuestiona en el siglo XIX. Ahora disponemos de instrumentos, los ordenadores, que pueden dibujar cualquier curva real dejando a un lado todas las propiedades geométricas y centrándose tan sólo en la relación numérica.

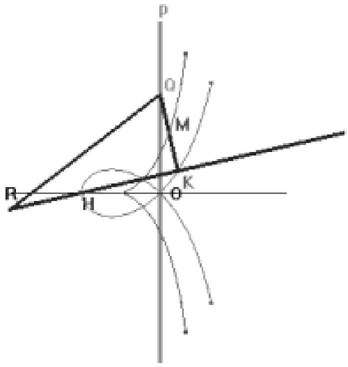
Se podría obtener una curva aplicando una transformación adecuada a una curva conocida. Este es el caso de la solución dada por Peaucellier al problema de diseñar un instrumento que pudiera dibujar una línea recta. La inversa también es cierta: a veces, el estudio de curvas y *curvigráfos* ha llevado a inventar procedimientos para realizar transformaciones.





Curvígrafos (Hiperbológrafo de Descartes)

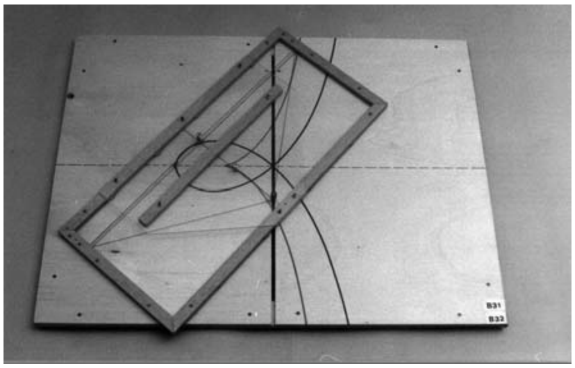
Existen otras técnicas para obtener una nueva curva a partir de otra conocida que pueden ayudar a diseñar mecanismos. Como por ejemplo, entre otros, la curva podaria.



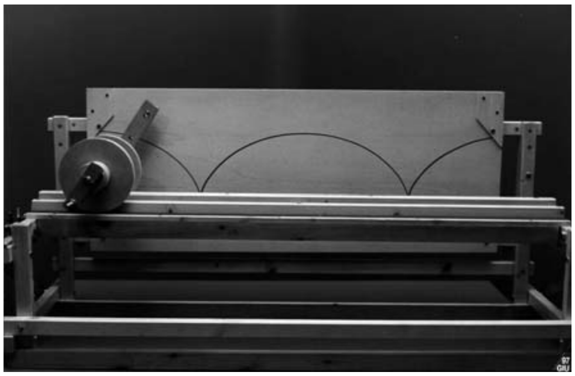
Curvígrafos (Cuadrado de Newton)

Las máquinas mentales han jugado un papel tan fundamental en la geometría que incluso están documentadas en la *Géomètrie* de Descartes. Un famoso teorema que se ocupa de este tipo de instrumentos teóricos fue demostrado por Kempe en el siglo XIX y expone un método general para describrir curvas del plano de grado nueve mediante engranajes.

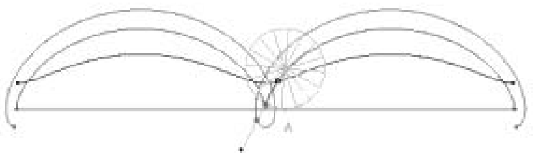
El análisis de este tipo de mecanismos consta de dos actividades complementarias: primero, la comparación de los mecanismos que describen la misma curva para descubrir una equivalencia oculta y para encontrar las propiedades geométricas de algunas figuras elementales que, a través de movimientos, se convierten en elementos versátiles de máquinas complejas. En segundo lugar está el estudio de la "biografía" del mecanismo que, en parte, se solapa con la biografía del objeto matemático relacionado con él. Incluso el cambio en el sistema teórico puede modificar el estatus de ambos. Las curvas trascendentales tienen una *biografía* muy interesante que se remonta a la Grecia clásica y que enseña muchas contribuciones interesantes en el desarrollo del cálculo.



Curvígrafos (Cuadrado de Newton)



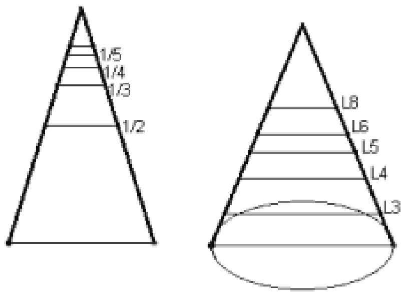
Curvígrafos (Cicloide)



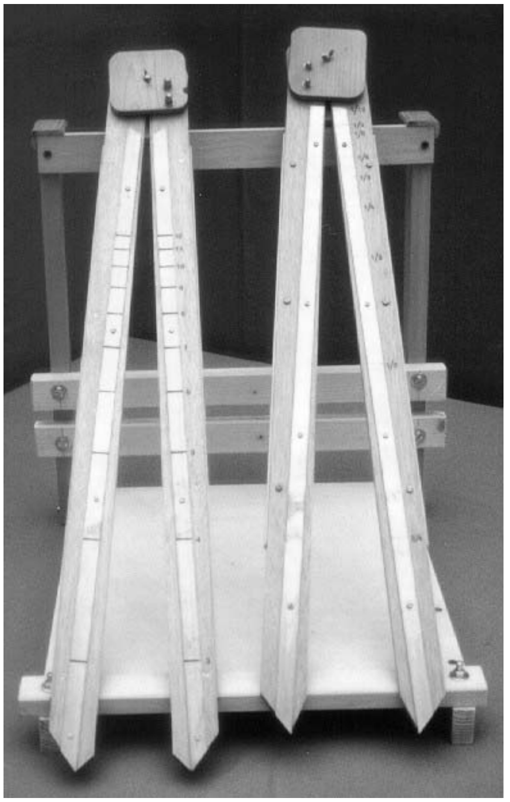
Curvígrafos (Cicloide)(bis)

5. Solución mecánica de problemas

En el último grupo de maquetas se han recopilado instrumentos que fueron diseñados para resolver algún problema importante, que haya sido estudiado durante siglos, y haya jugado un papel importante en el desarrollo de las matemáticas. Nos referimos, por ejemplo, al problema de la trisección del ángulo y a la duplicación del cubo. Algunas maquetas son prototipos de familias enteras de instrumentos que tienen el mismo fin. Otras están más relacionadas con juegos intelectuales y pueden, muy bien, representar la atmósfera cultural de cierta época.



Instrumentos para resolver problemas (Compás de proporción)



Instrumentos para resolver problemas (Compás de proporción)

■

REFERENCIA WEB

http://www.museo.unimo.it/theatrum

SUMA 48
Febrero 2005, pp. 91-93

Demasiado en serio. Dos temas, una anécdota y un adiós

El 'Informe PISA 2003'

De nuevo las matemáticas han sido noticia de primera en todos los medios de comunicación por la misma razón que casi siempre: cuando las cosas van mal o cuando fallan. En este caso hemos tenido el 'consuelo' de que no sólo es en nuestra materia en la que los resultados son malos, sino que es una faceta más de las variadas deficiencias del sistema educativo español.

Sí sorprende el hecho de que en una época en la que coincide con un debate abierto sobre los cambios necesarios en una nueva ordenación del sistema educativo (plasmado por parte ministerial en el libro *Una educación de calidad para todos y entre todos. Propuestas para el debate*) no haya tenido lugar un debate de verdad de las causas que han dado lugar a la situación actual y las grandes vías por las que transitar hacia mejores horizontes.

Esas discusiones no han tenido lugar de forma profunda en ningún ámbito. Ni a nivel de centros, ni de organizaciones profesionales ni de sindicatos. Y tampoco en los medios. Parece como si el único problema de la enseñanza en nuestro país fuera la presencia o ausencia de la asignatura de Religión católica y su status, porque en ese terreno sí que se ha entrado al trapo con prontitud y extensión, y con todo tipo de reproches. Algo bien palpable en las apariciones en TV, donde por las premuras de tiempo y los formatos con presencia de muchos interlocutores, lleva a la simplificación de las ideas hasta caer en el eslogan. Estoy convencido de que mientras no se resuelva o se aparque ese tema no se podrán abordar los verdaderos problemas de la educación.

Tampoco ha estado presente de forma pública nuestra Federación, y no por falta de propuestas recientes y más antiguas. Se observa de nuevo un problema viejo y recurrente: la falta de presencia pública de las matemáticas (y en particular de la Federación).

Entre los no muy numerosos artículos que van más allá de la epidermis de lo que significa y lo que detecta el Informe PISA en las matemáticas señalemos el de Tomás Recio y Luis Rico, "El 'Informe PISA 2003' y las matemáticas" (*El País*, 24/01/05), que pone el acento en algo capital:

Fernando Corbalán
medios.suma@fespm.org

> Por decirlo de manera simplificada, se han propuesto a nuestros alumnos tareas que no son objeto central de trabajo en nuestra enseñanza, si bien son tareas que debieran dominar al término de la educación obligatoria.

Parece que seguimos anclados en clases en las que las montañas de radicales o las ensaladas de epsilones ocupan lo fundamental del quehacer cotidiano, como presunta respuesta a la tan socorrida bajada de 'nivel', y así no hay forma de resolver problemas que tengan algo que ver con la vida de cada día fuera de las aulas, a pesar de que parece obvio que ese tiene que ser el objetivo de la educación.

Parece que seguimos anclados en clases en las que las montañas de radicales o las ensaladas de epsilones ocupan lo fundamental del quehacer cotidiano.

El maremoto

El tópico ambiente navideño, tranquilo y familiar, se vio sobresaltado este año por la llegada de un maremoto (así aparecía en mis textos escolares, ahora sustituido por el exótico 'tsunami'). Además de herir sensibilidades dio lugar a una utilización de los números en la información en la que pienso que merece la pena detenerse.

Las primeras informaciones televisivas que yo conocí ponían un énfasis especial en el número de muertos europeos (y turistas en general), importante desde luego, pero que sólo supone un pequeño porcentaje del total. A pesar de que los turistas se han contado sin dejar uno, las estadísticas sobre los indígenas no han sido muy finas. La siguiente noticia (que a mí me sonó improcedente incluso en ese contexto) fue sobre las posibles pérdidas para las agencias de viaje (del primer mundo, por supuesto) derivadas de los gastos de repatriación y las cancelaciones de viajes, complementadas al poco tiempo por las posibles dificultades económicas de las compañías de seguros.

Asistimos así una vez más a esa llamada *ley de proximidad* en los medios que hace que el mismo hecho tenga diferente importancia según donde haya sucedido o a quien afecte. Esa que en la formulación que recoge Paulos reza *un estadounidense igual a cinco ingleses igual a 500 ecuatorianos igual a 50 000 ruandeses*. (*Un matemático lee el periódico*, Tusquets, 1996) y que en el caso de muertos en el mismos lugar y en el mismo momento tiene bastante de obsceno.

Y permite reflexionar sobre por qué una noticia es de primera página, durante cuánto tiempo lo es y por qué desaparece de allí (por cierto, ¿ya no hay vacas locas, noticia de primera hace unas Navidades?). Porque catástrofes similares se dan cada día ante la indiferencia general: "Y suponiendo las cifras estimadas de 150.000 muertos en el Índico, en menos de tres días mueren de hambre una cantidad igual de seres humanos, y en cuatro días y medio 150.000 niños mueren de hambre en ese mismo basurero. En los barrios acomodados de la Tierra vivimos el 20% de la población y disfrutamos del 83% de la riqueza mundial. En los barrios pobres y miserables, un 80% de los seres humanos cuenta sólo con el 17% de la riqueza planetaria. Se trata de la mayor catástrofe del mundo y, sin embargo, apenas se habla de ella o se intenta solucionarla", como señala A. Aramayona ("Vacunas perniciosas", *El Periódico de Aragón*, 05/01/05).

Una vez más vemos que la presunta coartada de indiscutibilidad que proporcionan las matemáticas (el '2 y 2 son 4') sirve para poner de manifiesto sólo lo que interesa, porque cifras iguales merecen en los medios importancia muy distinta.

Las primeras informaciones televisivas sobre el maremoto que yo conocí ponían un énfasis especial en el número de muertos europeos (y turistas en general), importante desde luego, pero que sólo supone un pequeño porcentaje del total.

Una anécdota

También fue noticia de primera página un ligero *error*, una variación de magnitud de orden 6: el paso de 'millones' a 'billones' de euros en la sentencia judicial de indemnizaciones por la expropiación de un banco. Según titula *El País* (18/1/05) *Un* *juez pide 1.122 millones al Fondo de Garantía por la venta del Valladolid*, con un subtítulo *En un posible error mecanográfico, pide billones de indemnización para el ex presidente del banco*, dando a conocer en una liada información que *El texto del auto recoge textualmente la consignación de* "1.021.877.955,54 millones de euros de principal más 100.000.000 millones de gastos y costas*" a solicitud de Domingo López Alonso [antiguo propietario del Banco de Valladolid].*

Es una muestra más de las dificultades de manejo (por parte del juez y del periodista) de los grandes números, tan presentes en los medios y sobre los que no se ha tenido instrucción en los estudios de matemáticas. Algo que debería cambiar, pero que por desgracia es una más de las tareas pendientes en la vida diaria de las clases de matemáticas.

Esto permite reflexionar sobre por qué una noticia es de primera página, durante cuánto tiempo lo es y por qué desaparece de allí.

Un adiós

Hace ya tiempo que empecé en *SUMA* esta sección fija para poner de manifiesto las relaciones entre las matemáticas y los medios de comunicación, y sus implicaciones en la enseñanza, que primero se llamó *Mates y medios* y que con el cambio de dirección en la revista pasó a ser *Presencia mediática*.

El tema considero que sigue siendo de primera importancia. Por una realidad que es tozuda:

> En los países occidentales los niños, antes de su primer día de colegio, han sido expuestos a no menos de 3.000 horas de programación televisiva y, al acabar su escolaridad, han pasado el doble número de horas ante el televisor que en el aula. Y en España la exposición televisiva por habitante ronda las tres horas y media diarias, monopolizando la casi totalidad del tiempo de ocio diurno.
>
> Román Gubern, "Chiclé para los ojos" (*El País*, 24/01/05)

Y esas cifras no sólo no disminuyen sino que si acaso van a aumentar por la explosión de cadenas de TV y de facilidades de acceso a las mismas, complementada por la omnipresencia de la radio y ahora aumentada con el florecimiento de los periódicos gratuitos.

Y con unas implicaciones serias: *Los medios crean realidad y conciencia, pueden hacer creer a los ciudadanos que las cosas y las personas son como ellos las muestran, 'dan el ser' a unos acontecimientos y personas y se la niegan a otros, porque en una sociedad mediática 'ser es aparecer en los medios.* [Adela Cortina (citada por M. Aznárez, "Defensora del lector", en "Despedida" (*El País*, 23/01/05)].

Todo ello hace de la mayor importancia la alfabetización en los medios, la dotación de instrumentos para poder abordarlos críticamente. Así lo recoge el *Rapport Thélot* para la reforma de la enseñanza en Francia (*La Escuela debería formar en el desciframiento (décryptage) y el uso de los medios*), pero por desgracia está ausente en la propuesta del MEC *Una educación de calidad para todos y entre todos. Propuestas para el debate*, salvo que se considere como tal lo referido a las TIC de las páginas 63-68, que más bien parece tratar sólo de informática e Internet.

En esa tarea las matemáticas deberían jugar un papel importante, sobre todo en lo referente a los aspectos numéricos y estadísticos. A todo ello he dedicado los artículos de la sección y podría seguir algún tiempo. Pero ante el riesgo de repetir una y otra vez parecidas ideas, con más voluntad que acierto, y con la perspectiva además de nuevas tareas en *SUMA*, me despido aquí de los amables lectores.

En la tarea de la alfabetización en los medios las matemáticas deberían jugar un papel importante, sobre todo en lo referente a los aspectos numéricos y estadísticos.

Como decía el director de cine B. Wilder, *Mucho peor que no te tomen en serio es que te tomen demasiado en serio.* Aquí corríamos el riesgo de tomar demasiado en serio el tema y, aun dejando una puerta abierta a la continuación en el futuro, preferimos hacer mutis por el foro. ¡Gracias y hasta siempre! ■

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Comisión Ejecutiva

Presidente: **Serapio García Cuesta**
Secretario General: **Josep Sales Rufí**
Vicepresidente: -
Tesorera: **Claudia Lázaro**

Secretariados:
Prensa: -
Revista SUMA: **Francisco Martín Casalderrey/Inmaculada Fuentes Gil**
Relaciones internacionales: **Carmen Azcárate/Sixto Romero**
Publicaciones: **Ricardo Luengo González**

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemátiques a Catalunya
Presidente: Joan Gómez i Urgellés
UPC Vilanova i la Geltrú, 08800 Barcelona

Organización Española para la Coeducación Matemática "Ada Byron"
Presidenta: Mª Carmen Rodríguez
Almagro, 28. 28010 Madrid

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"
Presidente: Manuel Torralbo Rodríguez
Paseo del Limonar 2, 29016-Málaga

Sociedad Aragonesa "Pedro Sánchez Ciruelo" de Profesores de Matemáticas
Presidenta: Ana Pola Gracia
ICE Uni. de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009 Zaragoza

Sociedad Asturiana de Educación Matemática "Agustín de Pedrayes"
Presidente: José Joaquín Arrieta Gallastegui
Apartado de Correos 830. 33400 Avilés (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "Isaac Newton"
Presidenta: Lucía Henríquez Rodríguez
Apartado de Correos 329. 38208 La Laguna (Tenerife)

Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán"
Presidente: Antonio Arroyo
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Víllalar, s/n. 09006 Burgos

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García Cuesta
Avda. España, 14, 5ª planta. 02006 Albacete

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidente: Bienvenido Espinar Cepas
CPR II. Avda. Reina Sofía n.º1. 30009 Murcia

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Manuel Rodríguez Mayo
Apartado de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper"
Presidente: Ricardo Luengo González
Apartado 590. 06080 Badajoz

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas "Emma Castelnuovo"
Presidenta: Carmen da Veiga
C/ Limonero, 28, 28020 Madrid

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: Begoña Martínez Barrera
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidente: Luis Serrano Romero
Facultad de Educación y Humanidades Ctra. Alfonso XIII, s/n. 52005 Melilla

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas Tornamira" Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea Tornamira
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.
Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra.
31006 Pamplona

Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Despacho 305. Facultad de Educación.
Universidad Complutense. 28040 Madrid

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas "A prima"
Presidente: Javier Galarreta Espinosa
C.P.R. Avda. de la Paz, 9. 26004 Logroño

Sociedade Galega do Profesorado de EducaciónMatemática (AGAPEMA)
Presidente: Manuel Díaz Regueiro
Calle García Abad, 3, 1ºB. 27004 Lugo

Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi"
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departament de Didáctica de la Matemática.
Apartado 22045. 46071 Valencia

SUMA 48
Febrero 2005, pp. 95-98

Gauss: La revolución de las matemáticas del siglo XIX

Santiago Gutiérrez
hace.suma@fespm.org

Hace 150 años, el 23 de febrero de 1855, moría, en Gotinga, a la edad de setenta y siete años, Johan Friedrich Carl Gauss o, simplemente, Carl Friedrich Gauss, como él mismo quiso ser llamado. Eran tiempos de revolución y progreso: comenzaba la revolución industrial en Inglaterra, en Estados Unidos se perforaba el primer pozo de petróleo (1859), la economía estaba dominada por las teorías liberales de Adam Smith mientras se gestaba la creación de la Internacional Socialista, Darwin publicaba *El origen de las especies* por medio de la selección natural (1859), Mendel escribía sus leyes básicas de la herencia (1865-69), Mendeleiev construía la tabla periódica de los elementos, Nobel descubría la dinamita (1866), Ampere inventaba el electroimán... y se preparaba la gran revolución de las matemáticas, que daría lugar a las llamadas matemáticas modernas y que, paradójicamente, produciría un desarrollo inusitado de las aplicaciones a la física y a la industria. Había finalizado el gran periodo de la matemática francesa (siglo XVIII) y habían entrado en escena los matemáticos alemanes, empezando por el propio Gauss.

Johan Friedrich Carl Gauss (1777-1855)

Después de su muerte, el Rey de Hannover hacía acuñar monedas en honor de Gauss con la inscripción *Princeps mathematicorum* (Príncipe de los matemáticos).

¿Qué había hecho Gauss para merecer semejante título?

Sus orígenes familiares no podían ser más modestos. Nacido en Brunswick, el 4 de mayo de 1777, su padre, Gerhard Dietrich, era un obrero que había ejercido varios oficios (jardinero, pintor de brocha gorda, cobrador de una compañía de seguros...), hombre un tanto rudo y autoritario, que no quería que su hijo estudiase. Su madre, Dorothea, segunda mujer de Gerhard, que había trabajado de sirvienta antes de su matrimonio, mujer sin educación pero inteligente, empujaba sin embargo a su hijo a elegir el camino de los estudios.

En este ambiente, el cerebro de Gauss, desde sus primeros años de vida, daba muestras de una potencia y una precocidad jamás conocida en el mundo científico. Sólo Mozart, en el orden musical, se le puede comparar en manifestaciones tan tempranas de una mente prodigiosa. Se cuenta que con sólo tres años de edad, mientras jugaba aparentemente distraído, y su padre se equivocaba en unas cuentas que hacía en voz alta, le advirtió del error y le dio el resultado correcto. El propio Gauss decía de sí mismo que había aprendido a calcular antes que a hablar. A la edad de nueve o diez años, ya en la escuela primaria, cierto día el maestro, Büttner, pidió a toda la clase, que sumaran los números del 1 al 100. El pequeño Gauss escribió sobre su pizarra en pocos segundos la respuesta exacta, 5 050. Se había dado cuenta de la constancia de la suma de los números equidistantes de los extremos, 101, así que multiplicó mentalmente este número por las 50 parejas que podía formar, tal y como hacemos hoy para sumar n términos de una progresión aritmética. Ante semejante prodigio, dicen que Büttner le compró, de su propio bolsillo, un libro de Aritmética, y confió en adelante el aprendizaje matemático de Gauss a su ayudante, Martin Bartels, un joven maestro de diecisiete años, por suerte para Gauss aficionado a las Matemáticas. Con el tiempo, Bartels llegó a ser catedrático de la universidad de Kazán, donde tuvo como alumno nada menos que a Lobachevsky.

En 1792, con quince años de edad, comenzó Gauss su enseñanza secundaria, gracias al patrocinio del duque de Brunswick. Pronto, conjeturó el teorema según el cual la cantidad de números primos menores que x es asintótica a la función

$$\frac{x}{\ln x}$$

Este teorema no consiguió demostrarse hasta cien años más tarde. Por esta misma época, ya se planteaba cómo sería una geometría en la que no fuese válido el axioma de las paralelas de la geometría de Euclides.

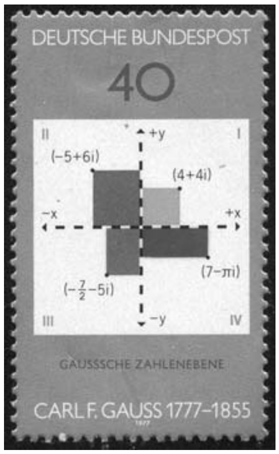
Uno no puede menos de preguntarse: ¿qué método utilizaba Gauss para llegar a establecer resultados de tanta trascendencia a tan temprana edad?

En 1795 se trasladó a Gotinga en cuya universidad, dotada de una excelente biblioteca matemática, estudió filología y matemáticas, sin tener claro todavía a cual de las dos materias se dedicaría definitivamente. Al año siguiente, ocurrió un suceso trascendental para el propio Gauss y para la matemática. Ese año, encontró Gauss la forma de construir, con regla y compás, el polígono regular de 17 lados. Él mismo lo recordaba, muchos años más tarde, en una carta dirigida a Gerling el 6 de enero de 1819:

> Fue el día 29 de marzo de 1796, durante unas vacaciones en Brunswick, y la casualidad no tuvo la menor participación en ello ya que fue fruto de esforzadas meditaciones; en la mañana del citado día, antes de levantarme de la cama, tuve la suerte de ver con la mayor claridad toda esta correlación, de forma que en el mismo sitio e inmediatamente apliqué al heptadecágono la correspondiente confirmación numérica.

Al día siguiente, 30 de marzo, aún no cumplidos los 19 años, Gauss tomó la decisión de dedicarse totalmente a las matemáticas. Así aparece anotado en el diario que comenzó a escribir ese mismo día, una *libreta de apuntes* de 19 páginas, en la que fue anotando, desde 1796 hasta 1814, cuantos resultados matemáticos iba obteniendo, 144 en total, sin que por desgracia fueran recogidos todos los descubrimientos matemáticos que hizo durante ese periodo de tiempo.

Entre 1796 y 1798 escribió su primer libro, las *Disquisiciones arithmeticae*, en el que construía la Teoría de Números como una ciencia sistemática, lo que hasta entonces constituía tan solo una acumulación de resultados particulares interesantes sin apenas relación entre sí. Se trata de un trabajo sólo comparable a la construcción de la geometría por parte de Euclides. Basaba su elaboración en la Teoría de las congruencias, tal y como hoy la conocemos. Con motivo de la introducción de los números complejos, mostraba la representación de todos los números complejos en el plano, utilizando un sistema de ejes coordenados. Es esta representación, bajo la autoridad de Gauss, lo que más contribuyó a que estos números dejaran de ser considerados materia sospechosa y empezaran a ser utilizados con la misma familiaridad que el resto de los números reales.



Se doctoró en 1799, con la primera demostración rigurosa del *Teorema fundamental del álgebra*, estableciendo que todo polinomio con coeficientes reales puede factorizarse como producto de polinomios de primer y segundo grado. Aunque manejaba sin ningún tipo de prejuicios los números complejos, no los utilizaba explícitamente en esta demostración, dado que no eran todavía de uso corriente entre los matemáticos de la época. A lo largo de su vida llegó a dar hasta cuatro demostraciones del teorema, en la segunda (1815) hace el primer intento serio de una demostración exclusivamente algebraica, y sólo en las dos últimas (1816 y 1849) utiliza expresamente los números complejos.

Con la publicación de las *Disquisiciones arithmeticae*, en 1801, la fama de Gauss se extiende por toda Europa y es reconocido como el más grande matemático de la época. La pasión de Gauss por la teoría de números era tal que si consideraba a las Matemáticas la *reina de las ciencias*, la Teoría de Números era la *reina de las Matemáticas*.

Por estas fechas un astrónomo aficionado italiano, G. Piázzi avistó lo que sería el planeta Ceres, pero las pocas observaciones que pudo hacer de él le impidieron calcular con precisión el trazado de su órbita. Ningún astrónomo de entonces lo consiguió. Enviadas las observaciones a Gauss, éste, utilizando el método de los mínimos cuadrados, inventado por él al efecto, con tan solo tres observaciones pudo determinar la órbita del planeta, y era tal su grado de exactitud que a finales de 1801 y principios de 1802 pudo ser observado nuevamente Ceres, según las predicciones realizadas por el joven Gauss. A su fama de matemático se añadió entonces la de astrónomo, y el propio Gauss confesaba, en carta dirigida a su amigo Farkas Bolyai, que la teoría pura de las cantidades (Teoría de Números) y la Astronomía eran los dos polos de su actividad científica, "hacia los cuales mi brújula intelectual apunta siempre".

En 1805 se casó con Johanna Osthoff, con la que tuvo tres hijos, pero el matrimonio sólo duró cuatro años, ya que Johanna murió en 1809, al igual que su tercer hijo. En 1810 se volvió a casar, con Wilhelmine Waldeck. De los tres hijos habidos en este matrimonio, será su hija Therese la que permanecerá en casa de su padre, acompañándole y atendiéndole hasta el final de su vida.

En 1807 fue nombrado profesor en Gotinga y director de su observatorio astronómico que, por la ocupación napoleónica de gran parte de los estados germánicos, no se terminará hasta 1816.

En 1809 apareció impresa la *Teoría motus corporum coelestium* (Teoría del movimiento de los cuerpos celestes que giran alrededor del Sol siguiendo secciones cónicas).

En 1812 publicó Gauss las *Disquisiciones generales circa seriem infinitan* (Investigaciones generales sobre la serie infinita), donde realizaba el estudio de una función que incluía como caso particular a la mayoría de las funciones conocidas y que desarrolló para valores complejos del argumento.

En 1818 recibió el encargo de efectuar el levantamiento topográfico de Hannover. Esto le llevó a desarrollar un nuevo aparato de medida, el *heliotropo*, que, utilizando la luz solar, permitía realizar mediciones en distancias de hasta 160 km, incluso bajo condiciones climáticas adversas.

A partir de este encargo comenzó a interesarse por la determinación de la figura de la tierra, cosa que le condujo a su vez al estudio de la representación conforme de una superficie sobre otra. En 1827 formuló sus resultados en las *Disquisiciones generales circa superficies curvas* (Investigaciones generales sobre superficies alabeadas).

Sus trabajos en Astronomía y Geodesia le llevaron a idear su método de mínimos cuadrados y a aplicar el cálculo de compensación de errores. Estableció la función de distribución de los errores,

$$\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{h^2}}}{h\sqrt{\pi}}$$

la célebre campana de Gauss, que constituía su aportación a la estadística y al cálculo de probabilidades, si bien su pretensión, lejos de cualquier elaboración teórica, tenía como finalidad resolver los problemas prácticos que le planteaban sus trabajos.

Por lo que se refiere a las geometrías no euclídeas, de las cuales aparece Gauss como uno de sus creadores, sabemos por la correspondencia mantenida con Bessel en 1829, que si bien nunca llegó a publicar nada, fue debido a que temía "el griterío de los Beocios" (tribu de la antigua Grecia que se consideraba formada por lerdos, torpes e incultos). Sin embargo, Gauss se había dedicado desde los 15 años al estudio de las propiedades de una geometría en la que sirviesen todos los postulados excepto el V postulado de Euclides o postulado de las paralelas dando lugar a los resultados que constituyen su Geometría no euclídea.

En 1832, el húngaro W. Bolyai, también matemático y condiscípulo de Gauss, publicó un libro didáctico, en el que incluyó como apéndice un trabajo de 16 páginas, original de su hijo Janos Bolyai, titulado *Ciencia absoluta del espacio*. En él establecía propiedades de la geometría independientes del postulado de las paralelas, por ejemplo las fórmulas de la trigonometría esférica.

Más elaborado era el trabajo del ruso N.I. Lobachevsky, aparecido en 1836 bajo el título, en su propio idioma, de *Nuevos elementos de Geometría con una teoría completa sobre las paralelas*. Los tres matemáticos partían de un mismo punto de vista y desembocaban en lo que hoy entendemos como geometrías hiperbólicas. Aunque sin contradicciones aparentes, lo que ninguno había dilucidado es si en algún momento no llegarían a encontrarse, lo cual supondría, de ser así, demostrar que el postulado de Euclides era un teorema deducible de los otros cuatro postulados. Quizá es esta la preocupación que llevó a Gauss a proponer a Riemann, para su tesis doctoral, un trabajo sobre el problema de las paralelas.

Riemann encontraría, en los resultados de Gauss sobre las superficies alabeadas citados anteriormente, la base para afrontar el tema desde un punto de vista muy superior y desarrollar su Geometría Diferencial *n*-dimensional, cuya profundidad de conceptos dejó impresionado al propio Gauss, cuando expuso su tesis en 1854, bajo el título *Sobre las hipótesis en que se funda la Geometría*. Riemann había mostrado su esperanza de poder contribuir con sus trabajos al perfeccionamiento de las teorías físicas, cosa que ocurrió sólo 60 años después, cuando Einstein aplicó la Geometría de Riemann, que se identifica con lo que hoy llamamos geometría elíptica, en su Teoría de la relatividad.

Pero, con todo, el problema de las posibles contradicciones no quedó definitivamente resuelto hasta que Beltrami, en 1868, encontró una superficie de curvatura negativa, de la cual construyó un modelo euclídeo, la seudo esfera, que verifica los postulados de la Geometría hiperbólica. Cualquier contradicción, pues, en esta geometría supondría también igual contradicción en la geometría euclídea.

La actividad de Gauss se extendió así mismo al campo de la Física. Ideó con Weber el primer telégrafo electromagnético, dedicando considerables esfuerzos al estudio del magnetismo terrestre.

Gauss es considerado como el único matemático que pudo conocer toda la matemática producida hasta su tiempo. Con esta pequeña muestra de sus contribuciones creemos suficientemente justificado el título de Príncipe de los matemáticos que le diera, a su muerte, el Príncipe de Hannover, y, aún más, que este título permanezca todavía en la actualidad.

Finalmente, cabe preguntarse ¿cómo pudo Gauss producir tanto y en tantos campos?

En cierta ocasión le preguntaron cómo era capaz de descubrir tantos teoremas sobre números. Dicen que respondió: “Porque experimento mucho” . Efectivamente, así procedía, pero eso era costumbre entre los matemáticos de la época. Lo notable en Gauss era su capacidad para intuir, a partir de unos casos particulares los resultados más generales. Tal capacidad de penetración en las profundidades de la Matemática es lo que distinguía a Gauss del resto de sus colegas. Eso sí, se dedicaba posteriormente a demostrar los resultados que había intuido y a depurar sus demostraciones sin dejar rastro del camino recorrido, para nuestra desgracia. Así, decía Jacobi que “Sus demostraciones son rígidas, heladas... lo primero que hay que hacer con ellas es descongelarlas”, y a su vez Abel observaba: “Es como el zorro, que borra con la cola sus huellas en la arena”. ■

SUMA 48
Febrero 2005, pp. 99-103

Un ejemplo de espacio cociente

En el artículo con el que introducíamos esta sección (SUMA nº 47), ilustrábamos con los cuadros *Las meninas* de Velázquez (1656) y *Las meninas* de Picasso (1957), el enorme salto conceptual que desde las matemáticas supone el pasar de concebir y describir el espacio como un contenedor único en el que habitan las cosas, a concebir y describir el espacio como una red de relaciones que se establece entre cosas concretas.

> *En matemáticas, las relaciones entre objetos nos permiten construir entornos formados por elementos relacionados entre sí, y estos entornos, estas redes de relaciones, constituyen lo que en matemáticas contemporáneas y en la ciencia contemporánea se entiende por espacio.*

Comentábamos que en el lienzo de Velázquez el espacio entre la princesa y María Agustina Sarmiento, la doncella que se arrodilla frente a ella, es un contenedor cúbico externo a ambas niñas, mientras que el espacio entre estas mismas figuras en el cuadro de Picasso es una red: la manera en la que cada niña ve a la otra, y la posición en la que cada una de ellas está colocada respecto a la otra, da lugar a la red de triángulos que como estructura espacial las conecta entre sí y con el resto de las figuras en la habitación. De hecho, la escena entera está compuesta por múltiples relaciones locales que Picasso representa mediante una estructura espacial formada por figuras geométricas básicas como triángulos y rectángulos.

En general en matemáticas, las relaciones entre objetos nos permiten construir entornos formados por elementos relacionados entre sí, y estos entornos, estas redes de relaciones, constituyen lo que en matemáticas contemporáneas y en la ciencia contemporánea se entiende por espacio, o espacio abstracto, como lo llamamos en matemáticas. Picasso era pintor abstracto en el sentido en que utilizamos la palabra *abstracto* en matemáticas: el abstraer lo esencial de algo, no el abstraerse de la realidad. Vamos a ilustrar con otra versión suya de *Las meninas*, llevada a cabo en 1957, en qué consiste exactamen-

En el n.º 47 de SUMA, se deslizó por error, como título del cuadro de Malevich, el que Capi Corrales ha dado a esta sección: *En un cuadrado*. El verdadero título del cuadro es *Negro sobre blanco*. (Nota del Editor)

Capi Corrales Rodrigáñez
enuncuadrado.suma@fespm.org

te construir un *espacio cociente* (un tipo de espacio abstracto que es el fruto de ciertas relaciones establecidas entre los objetos de un conjunto), y qué se puede conseguir con este tipo de construcción, qué tipo de información puede dar un espacio cociente que el espacio cúbico de Velázquez no nos dé.

Comencemos por el principio: el nombre. El cuadro se llama *Las meninas*. Picasso está, pues, describiendo algo sobre otro cuadro: el de Velázquez. ¿El qué, exactamente? Miraremos, pues, el cuadro de Picasso comparándolo con el de Velázquez.

Figura 1. *Las meninas*, Picasso 1957

Figura 2. Velázquez, *Las Meninas* (1656), Museo del Prado, Madrid

Este cuadro de Picasso, que lleva por título *Las meninas*, resulta bastante extraño. Reproduce a María Agustina Sarmiento. Picasso pintó varios lienzos con esta doncella, en estilos muy distintos. Y en todos ellos, salvo en este, respeta la postura de la niña tal cual la dibuja Velázquez. Otra diferencia entre las restantes versiones que Picasso hizo de esta figura, y la que hemos elegido, es el título: a todas las otras las llamó *María Agustina Sarmiento*. ¿Por qué llamó a este lienzo *Las meninas*, y por qué representó la figura de manera tan peculiar?

Intentaremos encontrar respuesta a estas preguntas siguiendo la manera de hacer matemática: ante nosotros está un objeto, un cuadro, del que queremos entender algo. Estudiémoslo como estudiaríamos un texto matemático escrito sobre una pizarra.

Desde que escuché a Natacha Seseña hablando en un programa de la televisión catalana sobre Velázquez, los búcaros y la bucarofagia, el pequeño jarro de barro es lo primero que buscan mis ojos en cualquier representación de esta joven. Es emocionante el enorme talento de Picasso. Un par de líneas oscuras es todo lo que necesita para describirnos el búcaro que reposa sobre la bandeja. Tan solo unas líneas oscuras.

Un momento, hablando de líneas oscuras ... ¿no resultan un poco extrañas las de la bandeja? Aparecen delante del búcaro, no detrás. Al colocarme frente al cuadro de Picasso yo me había imaginado a éste delante del lienzo de Velázquez, estudiándolo y viendo algo que luego me intenta contar a mí en su reproducción. Había dado por hecho, por lo tanto, que el cuadro de Picasso estaba pintado desde el punto de vista de un Picasso espectador situado frente al de Velázquez. Pero eso no es compatible con que las líneas negras que representan el fondo de la bandeja aparezcan colocadas frente al búcaro, no detrás de éste. Aquí hay algo raro, y para intentar entenderlo, procedo según la manera de hacer matemática: con papel y lápiz. Abro mi cuaderno, saco la caja de lapiceros, y reproduzco sobre la hoja primero la bandeja con el búcaro del lienzo de Picasso, y después la bandeja como yo la dibujaría si fuese Picasso espectador mirando la escena de Velázquez.

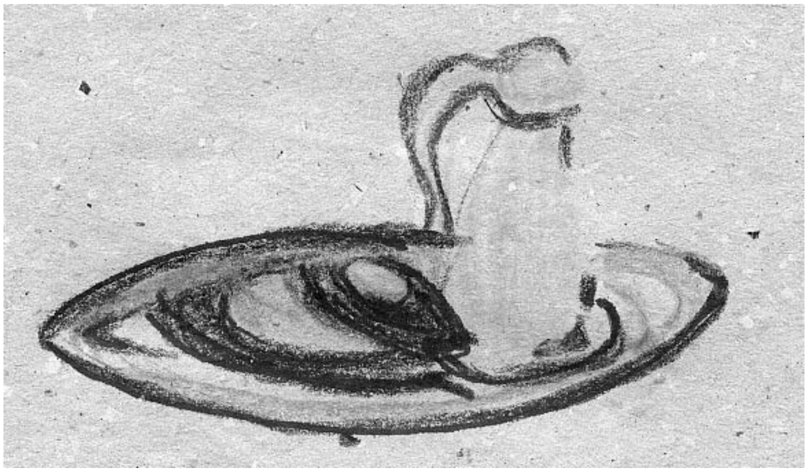


Figura 3. La bandeja con el búcaro

No cabe la menor duda: las bandejas no casan, y las líneas de Picasso no están dibujadas desde el punto de vista de alguien que, situado frente al cuadro de El Prado, contempla a la doncella. ¿Quién, en la habitación de Velázquez, vería así el fondo de la bandeja? ¿Será, se me ocurre, que están dibujadas según las veía el pintor Velázquez, no el pintor Picasso mirando el cuadro de Velázquez?

Figura 4. La mano que sustenta la bandeja

Vuelvo a mirar ambos cuadros comprarándolos. No, esta hipótesis no es correcta: de estar pintadas desde donde está colocado Velázquez, las líneas negras interiores de la bandeja aparecerían del lado de la tripa del búcaro, no del lado del asa. ¿Quién las ve así, entonces? Vuelvo al cuadro de Velázquez con el de Picasso en la cabeza, y recorro los distintos personajes representados en la escena, intentando imaginarme cómo ve cada uno de ellos las líneas de la bandeja. Sólo la propia M.ª Agustina las ve así.

Así pues, enunciamos una segunda hipótesis: este cuadro podría tratarse de M.ª Agustina vista por M.ª Agustina. Un par de segundos bastan para darnos cuenta de lo absurdo de esta sugerencia. La bandeja está descrita tal y cómo la ve M.ª Agustina, pero la doncella no ve sus propios ojos, que además está claro no casan el uno con el otro, luego ni están vistos por M.ª Agustina, ni están vistos ambos desde el mismo lugar.

Nueva hipótesis de trabajo: Picasso abandona el punto fijo, se mueve físicamente alrededor de la figura de M.ª Agustina, elige unos cuántos lugares desde dónde mira a la doncella y luego casa todas estas visiones en una red única. No parece, en principio, una hipótesis disparatada. Al fin y al cabo, de ser correcta, se trataría de una versión siglo XX del mismo juego que juega Velázquez: moverse de sus ojos a los de los reyes y espectadores, y de éstos, a través del espejo, a los del visitante que aparece por la puerta del fondo de la escena. En el cuadro de Velázquez algunos objetos y figuras están vistos desde un lugar, otros desde otros. En el cuadro de Picasso puede que una misma figura esté vista desde varios lugares simultáneamente.

Comprobémoslo, intentando averiguar, de ser así, cuáles son estos lugares en los que se para Picasso para dibujar a M.ª Agustina. Miremos de nuevo el cuadro. Las claves que buscamos habrán de estar en los detalles reproducidos en él: la bandeja sobre la que aparece el búcaro, la mano que sostiene la bandeja, el pelo y rostro y, finalmente, los ojos y la nariz. Ya tenemos el punto de vista desde el que está descrita la bandeja. Continuemos con la mano que la sustenta. La dibujamos. La única peculiaridad de esta mano es que en ella aparecen dibujadas las almohadillas del pulgar y de la palma. Esa es la clave que buscamos. ¿Quién está situado en la posición adecuada para poder ver esas almohadillas? Miramos de nuevo el cuadro de Velásquez: sólo el propio pintor, a la izquierda y por detrás de M.ª Agustina, podría percibirlas.

Sigamos con la cabeza; la dibujamos. El pelo enmarca perfectamente el rostro, y el contorno de ambos aparece completo, como sólo pueden verlos las figuras de la derecha. La Infanta, por ejemplo, a la que M.ª Agustina mira de frente.

La propia M.ª Agustina, Velázquez, la Infanta. Parece que Picasso se va poniendo en el lugar donde están situados cada uno de ellos, y, entrenado en el proceso de abstracción, selecciona alguna característica de la figura elegida que describir desde ese lugar. La Sarmiento nos describe la bandeja sobre la que reposa el búcaro, Velázquez la mano que sostiene la bandeja, la Infanta el marco del rostro de M.ª Agustina. Estudiemos ahora ahora el ojo derecho.

Figura 5. El contorno de la cabeza

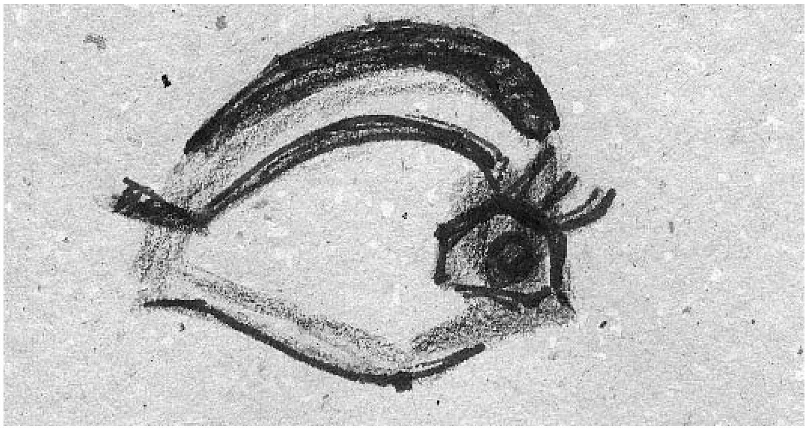


Figura 6. El ojo izquierdo

Al reproducirlo sobre el cuaderno, nos damos cuenta de que hay tres claves esenciales en este ojo: el trazo horizontal de la izquierda, la acumulación de grises a la derecha y el lugar donde está dibujada la pupila. Estas claves indican que el ojo está descrito desde el perfil derecho, esto es, desde el lugar que ocupan los reyes y los espectadores en el cuadro de Velázquez. El mismo lugar, observo, desde donde está visto el búcaro. Tiene sentido, los padres se preocupan. ¿Se dará su niña a esas veleidades de la bucarofagia?

Picasso ya nos ha descrito la figura que componen doncella y búcaro desde arriba desde la derecha, desde la izquierda y desde delante. ¿Habrá sido capaz de hacerlo también desde atrás? ¿Habrá sido capaz de dar la vuelta completa a la habitación, y llevar a cabo el prodigio de describir a la Sarmiento desde los cuatro costados? El lado conservador de mi razón me responde inmediato: imposible, la figura se disolvería. Pero entonces el lado matemático interviene: ¿por qué no? En matemáticas es posible hacerlo, por ejemplo con las herramientas de geometría algebrica desarrolladas por Grothendieck a mediados del siglo XX, ¿por qué no va a serlo también en pintura?

Repasamos el cuadro de Picasso. Sólo nos queda por analizar el ojo de la izquierda. Lo dibujo sobre mi cuaderno, y al hacerlo caigo en la cuenta de que está mirado desde el mismo lugar desde el que está mirada la naríz.

Vuelvo a estudiar la escena de Velázquez. ¿Desde dónde está visto este perfil? Desde la izquierda de Sarmiento. Es, pues, un ojo descrito como lo ven el visitante que aparece por la puerta el fondo y los reyes a través del espejo. M.ª Agustina vista desde detrás.

Figura 7. Ojo derecho y nariz

¡El cuarto costado que nos faltaba!

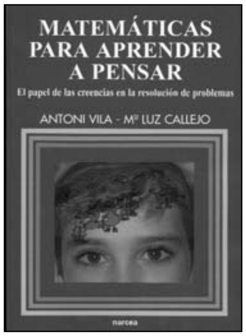
Como la veían Velázquez, la infanta, los reyes, el visitante; como se veía ella misma. Una persona vista desde delante, desde detrás, desde su izquierda, desde su derecha, e incluso desde sus propios ojos. Encolando todas esas visiones parciales y locales, Picasso nos ofrece una visión global completa, interroga a todos los testigos que estaban allí. "Me gusta su peinado", comenta la infanta, en plena edad del pavo. Velázquez, pintor, se fija en las manos. "Buen pulso sosteniendo la bandeja", concluye. "Tenía tanto miedo de que se me cayese el búcaro", confiesa M.ª Agustina. "El búcaro, el búcaro… eso es lo que me preocupa a mí", interviene la reina. "Pendiente de la niña sí parece que esté", opina el rey. Y el visitante suspira mientras comenta, "¡Un magnífico perfil!".

Todos los lugares donde hay personas en el cuadro de Velázquez, aparecen representados, y en cada uno de estos lugares Picasso elige un par de ojos, y lo que ven esos ojos lo representa en un detalle de la figura.

Ya tenemos respuestas a nuestras preguntas. Y en el proceso de encontrar estas respuestas, hemos encontrado también algo más: un ejemplo gráfico de cómo describir el espacio cociente que se obtiene al establecer sobre los elementos de un conjunto, en este caso los personajes de la escena de Velázquez, una partición, una relación de equivalencia. Clasificamos las figuras en función de dónde estén colocadas respecto a la doncella del búcaro. El espacio resultante consta de cinco elementos o clases de aquivalencia (ella misma, izquierda, derecha, delante y detrás), cinco puntos de vista, de cada uno de las cuales Picasso ha elegido un representante: la bandeja, la mano, el pelo, el ojo derecho y el perfil izquierdo.

En el proceso de construir este espacio cociente, Picasso nos da una descripción de una misma figura desde sus cuatro costados (delante, detrás, izquierda y derecha). Algo que desde el espacio cúbico y euclídeo de los pintores del siglo XVII y los matemáticos del XVIII (Clairaut, Euler…) no se prodría hacer, salvo utilizando, como Velázquez, Euler y los grandes magos, trucos de espejos. ■

Publicaciones recibidas



Matemáticas para aprender a pensar
A. Vila y M.ª L. Callejo
Narcea S.A. de Ediciones
Madrid 2004
ISBN 84-277-1470-X
218 páginas

¿Matemágicas o matetrágicas? Claves matemáticas para lectores inexpertos
J. Villagrá
Montesinos
Barcelona, 2004
ISBN 84-96356-07-8
189 páginas

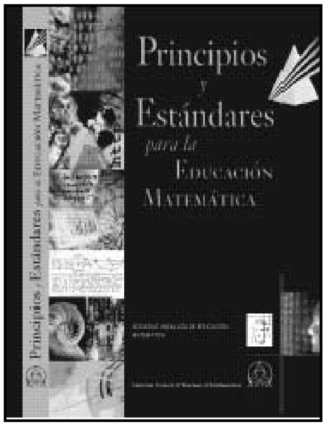
Resolución de problemas en matemáticas
J.M. Chamoso, L. Hernández, R. López y M. Rodríguez
Nivola, Libros y ediciones
Madrid , 2004
ISBN 84-95599-80-5
1 CD

Matemáticas para 3º de ESO aplicadas a la realidad extremeña
J.M. Blanco y otros
SEEM "Ventura Reyes Prósper"
2004
ISBN 84-931776-8-7
1 CD

Poliedros semiregulares
J.Alegre y otros
Proyecto Sur de ediciones
Granada, 2003
ISBN 84-8254-278-8
1 CD+ 8 pp.

SUMA 48
Febrero 2005, pp. 105-112

Los nuevos *Principios y Estándares* del NTSC en castellano



PRINCIPIOS Y ESTÁNDARES PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA.
Traducción de Manuel Fernández
SAEM Thales
Sevilla 2003
ISBN 84-933040-3-4
412 páginas

*Presentamos la traducción al castellano de un documento básico en la educación matemática publicado en el año 2000 y ha sido editado por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. El libro, al que acompaña un CD-ROM con más de 40 ejemplos electrónicos utilizables en el aula desde cualquier navegador, hace un recorrido por la educación matemática desarrollando los Principios curriculares en Estándares educativos que se detallan por núcleos temáticos y por niveles educativos desde Preescolar (*Prekindergarden *en EE.UU.) hasta el Bachillerato (Grado 12 en EE.UU). Con esta traducción, la Sociedad Thales ha pretendido continuar con la tradición de acercar documentos de amplio impacto en educación matemática y formación del profesorado a todos los docentes de Matemáticas de habla hispana, como ya hizo con la primera publicación de los* Estándares Curriculares del NCTM *en el año 1989 y con sus posteriores* Addendas*.*

En el prólogo de la obra original, *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000), el **National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)** se presenta como "una organización profesional internacional comprometida con la excelencia de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para todos los estudiantes" (p. xiii). Esta organización fue fundada en 1920 y en la actualidad tiene más de 100 000 miembros.

Publica periódicamente cuatro revistas de educación matemática: *Teaching Children Mathematics*, *Mathematics Teaching in the Middle School*, *Mathematics Teacher*, *Journal for Research in Mathematics Education*, además de un boletin mensual (*NCTM News Bulletin*), y tiene editados más de 200 libros, junto a videos, CD-ROM y otros materiales y recursos. Su página web (*http://www.nctm.org*) pone de manifiesto todas estas actividades relacionadas con la educación matemática:

Antonio Marín del Moral
Jose Luis Lupiáñez Gómez
Servicio de Publicaciones de la SAEM Thales
Universidad de Granada

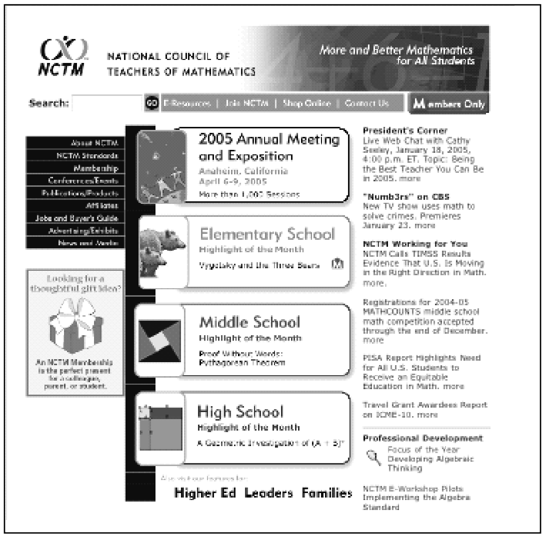


Figura 1: Página principal del NCTM (http://www.nctm.org)

Figura 3. *Addenda*

Publicaciones curriculares del NCTM

En EE.UU la educación no está centralizada como ocurre por ejemplo en España, asumiendo cada uno de sus Estados su propia política educativa. Por esta razón, la aportación de Estándares curriculares se hace muy necesaria.

El NCTM ha publicado diferentes obras en materia curricular: *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (1989), traducido junto a sus Addendas por la Sociedad Thales (1995a, 1995b), *Professional Standards for Teaching Mathematics* (1991), y *Assessment Standards for School Mathematics* (1995).

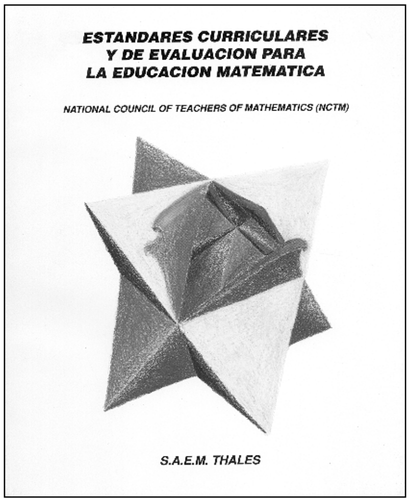


Figura 2: Traducción de los Estándares 1989 del NCTM

Estos textos han representado una apuesta importante por desarrollar y articular explícita y ampliamente unos objetivos para el profesorado y los responsables de la política educativa. Además han venido proporcionado enfoques, coherencia y nuevas ideas a los esfuerzos por mejorar la educación matemática.

El Proyecto “Estándares 2000”

En el año 1995 el NCTM designó una comisión para el futuro de los Estándares y se le encomendó: a) supervisar el proyecto Estándares 2000; b) recoger y sintetizar información y asesoramiento dentro y fuera del NCTM; y c) planificar la difusión, interpretación, ejecución y revisión posterior de los futuros Estándares.

En 1997 se constituye el equipo de redacción y el equipo del formato electrónico con profesores, formadores de profesores de matemáticas, representantes de las administraciones educativas, investigadores y matemáticos, todos ellos con gran experiencia educativa.

Se invitó a todas las sociedades miembros de la *Conference Board of the Mathematical Sciences* a constituir la *Association Review Groups* (ARGs), que podría proporcionar asesoramiento e información sobre las matemáticas. Se constituyeron catorce Grupos de Revisión.

El *Research Advisory Committee* del NCTM encargó una serie de documentos resumiendo la investigación realizada hasta el momento en ocho áreas de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, que sirvieran de antecedentes al Equipo de redacción.

La *Conference on Fundations for School Mathematics*, celebrada en Atlanta en marzo de 1999 proporcionó una preparación a los redactores sobre las perspectivas teóricas relativas a la enseñanza y el aprendizaje.

En 1998, se hizo una amplia difusión de un borrador de los Estándares, bajo el título de *Principles and standards for school Mathematics: Discussion draft,* con el fin de que se discutiera y se remitieran al NCTM las consideraciones pertinentes. Se facilitaron cerca de 30000 copias a personas interesadas. Decenas de miles accedieron a este documento por Internet.

Entre 1998 y 1999 se celebraron sesiones de presentación y discusión del documento. Se comisionó a veinticinco personas para revisar el borrador desde la perspectiva de sus áreas particulares de interés. Se recibieron más de seiscientas cincuenta respuestas individuales, y las opiniones de más de setenta grupos. Fueron examinados los argumentos sobre todas las perspectivas de los distintos aspectos considerados, y a la luz de las respuestas, el equipo decidió detenidamente la postura que *Principios y Estándares* debería adoptar respecto a cada uno de los temas.

El NCTM después constituyó un grupo de trabajo para elaborar materiales, impresos y electrónicos, con el título *Navigations*, para ayudar y apoyar al profesorado a poner en práctica los *Principios y Estándares* en sus clases. Este equipo del formato electrónico está trabajando para ampliar y mejorar las futuras versiones electrónicas, tanto en la Web como en CD. El proyecto *Illuminations*, al que nos referiremos más adelante, proporciona recursos para ejemplificar y aclarar los mensajes del documento impreso.

Una visión de las matemáticas escolares

La utopía de este documento se marca muy bien en su presentación. He aquí un breve párrafo:

> Imagine una clase, una escuela o un distrito escolar donde todos los estudiantes tienen acceso a una educación matemática atractiva y de calidad. Hay expectativas ambiciosas para todos y adaptaciones para los que las necesiten. Los profesores, bien preparados, poseen los recursos adecuados para apoyar su trabajo y están perfeccionándose continuamente como profesionales. El currículo es matemáticamente rico... La tecnología es un componente esencial del entorno. Los alumnos trabajan, con confianza, en tareas matemáticas complejas cuidadosamente elegidas por el profesorado...; (p. 3).

En búsqueda de esta utopía se presentan las finalidades del trabajo:

- Exponer un conjunto amplio y coherente de objetivos para las matemáticas, desde *Prekindergarten* (Preescolar en España) hasta el Grado 12 (Bachillerato), para todos los estudiantes, a fin de que orienten los esfuerzos relativos al currículo, a la enseñanza y a la evaluación, durante las próximas décadas;
- Servir como recurso a los profesores, responsables educativos y políticos, para analizar y mejorar la calidad de los programas de instrucción matemática;
- Guiar el desarrollo de marcos curriculares, evaluaciones y materiales de enseñanza;
- Estimular ideas y conversaciones continuas en los ámbitos nacional, provincial o estatal y local, respecto a cómo ayudar mejor a los estudiantes para que consigan una profunda comprensión de las matemáticas.

Un modelo de organización del currículo

La obra se estructura sobre la base de dos pilares: *principios* y *estándares*. Los principios orientan la acción educativa. Forman parte de las grandes decisiones subyacentes a todo currículo e implican a los ámbitos políticos, sociales y económicos

Estos son los principios curriculares que propone el NCTM:

Igualdad: La buena educación matemática requiere igualdad, es decir, altas expectativas y una base potente para todos los estudiantes.

Curriculum: Un currículo es más que una colección de actividades: debe ser coherente, centrado en matemáticas importantes, y bien articulado en grados. El énfasis en seleccionar matemáticas importantes o relevantes para los objetivos marcados es muy notable. Por ejemplo, dentro del campo numérico, cita la proporcionalidad y las razones; cita las destrezas de razonar y deducir, la capacidad de predicción a través de las matemáticas o incrementar conocimientos en recursión, iteración, comparación de algoritmos.

Enseñanza: La enseñanza efectiva de las matemáticas requiere comprender que los estudiantes saben y necesitan aprender y, entonces, retándolos y desafiándolos aprenderán bien.

Aprendizaje: Los estudiantes deben aprender matemáticas, comprendiéndolas, construyendo activamente nuevo conocimiento desde la experiencia y el conocimiento previo.

Evaluación: La evaluación debería apoyar el aprendizaje de las matemáticas importantes y aprovechar esta información poderosa para ambos, alumnos y profesores.

Tecnología: La tecnología es esencial en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y refuerza el aprendizaje de los estudiantes.

Los estándares curriculares tratan de dar respuesta a la pregunta ¿qué contenidos y procesos matemáticos deberían los estudiantes aprender a conocer y a ser capaces de usar cuando avancen en su educación? Se estructuran en estándares de contenido y de proceso.

Los cinco estándares de contenidos se organizan sobre la base de áreas de contenido matemático, y son: *Números y Operaciones*, *Álgebra*, *Geometría*, *Medida y Análisis de datos* y *Probabilidad*. Los otros cinco estándares son de procesos y mediante ellos se presentan modos destacados de adquirir y usar el conocimiento: *Resolución de Problemas*, *Razonamiento y Demostración*, *Comunicación*, *Conexiones* y *Representación*.

En el documento de *Principios y Estándares*, se establecen unos ejes que marcan unas pautas generales para cada uno de los Estándares, y que deberían darse para todos los niveles educativos. Por ejemplo, en el *Estándar de Números y Operaciones*, se establece que (p. 34):

> Los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para:
>
> - Comprender los números, las diferentes formas de representarlos, las relaciones entre ellos y los conjuntos numéricos;
> - Comprender los significados de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras;
> - Calcular con fluidez y hacer estimaciones razonables.

Estos ejes de contenido, al igual que los de proceso, se desarrollan desde Preescolar hasta terminar el Bachillerato. En cada nivel educativo se desglosan en Estándares que se justifican y se analizan detallando cómo puede producirse la evolución de las expectativas para cada nivel. También se dan pistas acerca de cómo enseñar algunos contenidos en algunos niveles específicos.

Los Estándares de procesos siempre se argumentan en mutua interconexión con los de contenidos ya que los primeros facilitan la comprensión de los segundos.

Veamos un ejemplo de los ejes que organizan un Estándar de proceso: el de *Comunicación* (p. 64):

> Los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para:
>
> - Organizar y consolidar su pensamiento matemático a través de la comunicación; comunicar su pensamiento matemático con coherencia y claridad a los compañeros, profesores y otras personas;
> - Analizar y evaluar las estrategias y el pensamiento matemáticos de los demás;
> - Usar el lenguaje matemático con precisión para expresar ideas matemáticas.

Un instrumento de apoyo a la docencia y a la formación del profesorado.

Además de incluir sistemáticamente una reflexión acerca de la enseñanza de algunos estándares en cada nivel, en los estándares de proceso las sugerencias para implementar su enseñanza son muy prácticas. Se basan en investigaciones y referencias constantes a experiencias de aula que muestran *cómo hacer* matemáticas en aula.

Se enfatiza la importancia de crear en el aula un ambiente productivo para el aprendizaje, promoviendo, por ejemplo, que los escolares trabajen en equipo, o aprovechando sus ideas y errores para conducir su aprendizaje (Joyner & Reys, 2000).

Estos mismos investigadores ponen de manifiesto la importancia que este tipo de proyectos tiene para la formación inicial de profesores de matemáticas:

> (…) suministran información útil para que los futuros profesores desarrollen su conocimiento pedagógico del contenido mientras se introducen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas" (p. 323).

Y no sólo el profesor juega un papel central en todo el proceso a la hora de llevar a cabo una educación matemática *para todos*, como propugnan los Principios y Estándares. Los matemáticos y las comunidades de educadores matemáticos, los padres, la administración comparte la responsabilidad junto a los profesores de matemáticas de conseguir que cada escolar tenga acceso a una enseñanza de las matemáticas lo más cualificada y profesional posible.

Los *Principios y Estándares* suministran pautas para que cada persona y cada colectivo lleve a cabo su papel en esa enseñanza de calidad (Graham & Fennell, 2001).

En Martín & Berk (2001) se realiza una revisión detallada de cómo han influido los *Principios y Estándares* en muchas agendas de investigación en didáctica de la matemática. Los autores ponen de manifiesto cómo existe una notable relación entre el texto del NCTM y la investigación en este campo, y la describen como cíclica, en el sentido de que fue mucha investigación la que dio forma al documento final, pero es éste el que ahora establece muchas prioridades y directrices de investigación en didáctica de la matemática.

Otra aportación básica al profesor de la traducción realizada por la Sociedad Thales, es el CD-ROM que la acompaña. Se han traducido los textos que explican la utilización de varios programas sencillos (applets de Java) que abren las puertas a un gran abanico de actividades: geoplanos electrónicos, software sobre geometría de transformaciones, representación de funciones o vectores. También hay programas específicamente diseñados para ayudar a la comprensión de algunos conceptos como media y mediana, recta de regresión en estadística, equivalencia de fracciones, las relaciones entre áreas y volúmenes en prismas, etc.. Se incluyen finalmente algunos videos que ejemplifican situaciones de aula relacionadas con algún proceso de comprensión o una aportación metodológica del profesor.

Los ejemplos electrónicos incluidos en el CD-ROM están preparados para que se puedan ver cualquier navegador y sirven como material de apoyo para el profesor o como material para alumno en el aula informatica.

Estos ejemplos son una parte de todos los diseñados a partir de los *Principios y Estándares*. En Internet se puede acceder a varias páginas en las que se muestran multitud de propuestas de actividades listas para llevarlas a cabo con escolares.

Dentro de todas esas páginas, accesibles desde la página principal del NCTM nos parece destacable el proyecto *Illuminations*.

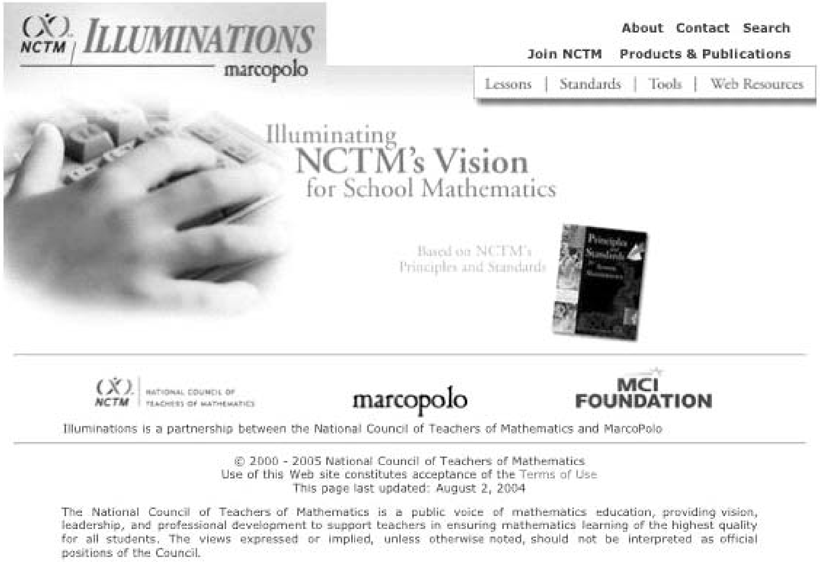


Figura 4: Página inicial del proyecto Illuminations:
http://illuminations.nctm.org

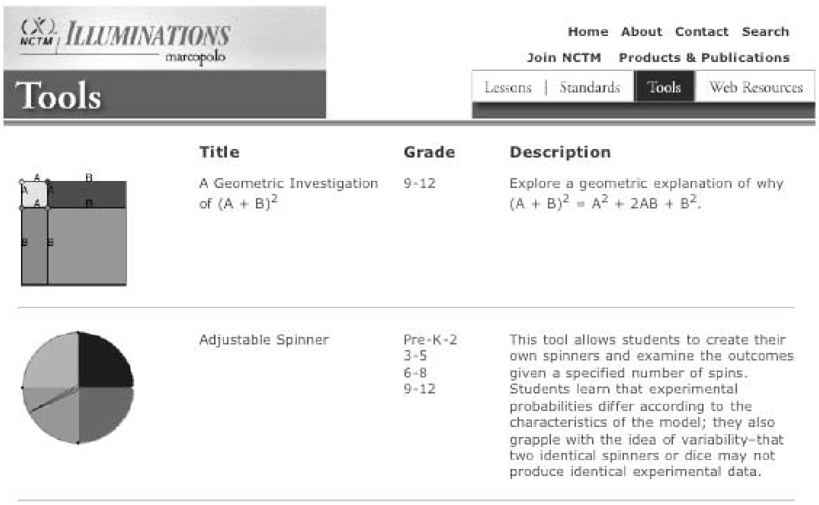


Figura 5. Ejemplo de dos programas del portal *Illuminations*

La NCTM suministra numerosos recursos electrónicos que se actualizan periódicamente, para *iluminar* los *Principios y Estándares*. Estos recursos están organizados por niveles educativos, y para cada uno de ellos se describe cómo se usa, qué nociones matemáticas se trabajan y qué tareas se pueden afrontar. En ellas se promueve que los estudiantes descubran, conjeturen y analicen, favoreciendo la interacción con el ordenador y entre los estudiantes.

En la figura 5 se puede ver como para cada uno de los recursos, existe un título, una referencia a los diferentes niveles en los que puede usarse, y una descripción genérica de en qué consiste cada uno de ellos.

Muchos de estos recursos aparecen totalmente traducidos en el CD-ROM que acompaña la edición en español de los *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. En resumen, la Sociedad Thales ha realizado este esfuerzo editorial con la vocación e ilusión de seguir siendo útil al colectivo de profesores de matemáticas.

Esperamos que esta obra contribuya a mejorar sus actuaciones docentes, y que esto repercuta en que los jóvenes estudiantes conozcan más y sepan cómo usar mejor las matemáticas. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GRAHAM, K., FENNELL, F. (2001). "Principles and Standards fos School Mathematics and Teacher Education: Preparing and Empowering Teachers,. *School Science and Mathematics*, 101 (6), p. 319-327.

JOYNER, J., REYS, B. (2000). "Principles and Standards for School Mathematics: What's in It for You?" *Teaching Children Mathematics*, 7, 1, p. 26-29.

MARTÍN, W. G., BERK, D. (2001). "The Cyclical Relationship Between Research and Standards: The Case of Principles and Standards fos School mathematics", *School Science and Mathematics*, 101 (6). p. 328-339.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

NCTM (1995). *Assessment Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

NCTM (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

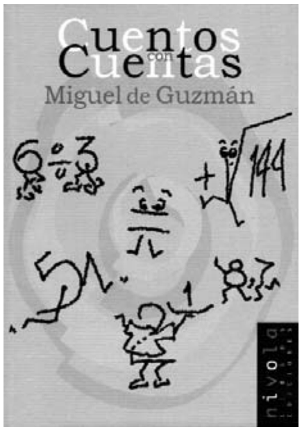
NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

SAEM Thales (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla, SAEM Thales.

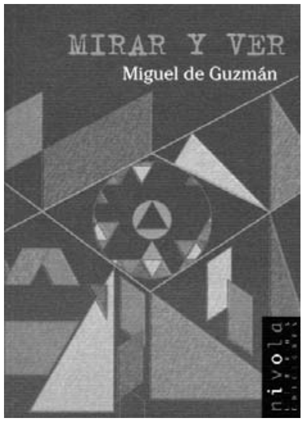
SAEM Thales (1991). *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*. Sevilla. SAEM Thales.

SAEM Thales (1995, 1996). *Estándares curriculares y de evaluación para la Educación Matemática*. Sevilla, SAEM Thales.

Una nueva invitación a mirar y ver



Cuentos con cuentas
Miguel de Guzmán
El rompecabezas/7
Nivola
Madrid, 2003
ISBN 84-95599-66-X
124 páginas



Mirar y ver
Miguel de Guzmán
El rompecabezas/8
Nivola
Madrid, 2004
ISBN 84-95599-46-5
126 páginas

Para quienes hemos aprendido a enseñar Matemáticas a través de los libros de texto de Miguel de Guzmán, es un placer leer la reedición que ha hecho Nívola de tres de sus obras más conocidas.

Es el caso de *Mirar y ver*, publicada en 1976 por la editorial Alhambra, agotada y reimpresa por el equipo de la Olimpíada Matemática Argentina y hoy sólo accesible en la excelente página web del autor. Con sus palabras, la obra trata de "*estimular la afición por la geometría de los estudiantes de enseñanza media*". Lo hace a través de nueve pequeños ensayos sobre temas elegidos con una triple intención: presentar objetos matemáticos que tengan profundidad y belleza, que además representen líneas de pensamiento actuales y, por último, que sean accesibles a un lector de Bachillerato o primeros años de Universidad. Al final de cada uno de los ensayos, se añaden comentarios al contenido matemático de los mismos y en alguno se hacen referencias históricas a los matemáticos más importantes que trabajaron en esos temas. Se incluye, finalmente, una bibliografía general de trabajos que tienen la misma orientación que quiso dar Miguel de Guzmán a su libro. Esta bibliografía, escrita en 1977, sigue siendo un referente válido en la actualidad.

Sorprende pensar que en el momento de la publicación de este libro, los niños que cursábamos nuestros últimos años de educación Primaria, *disfrutábamos* de unos libros de texto de matemáticas repletos de conjuntos, aplicaciones biyectivas, relaciones de equivalencia, productos cartesianos y lógica proposicional, sin apenas referencia a ningún concepto geométrico que pudiéramos visualizar. A algunos alumnos que teníamos especial afición por las matemáticas, este tipo de enseñanza, hoy tan denostada, nos aportó un gran desarrollo de la capacidad de abstracción. Nos privó, sin embargo, de la apertura al pensamiento intuitivo, clave para la formación del razonamiento. Esos alumnos de los años 70, convertidos hoy en profesores de Secundaria, después de pasar por unas facultades de matemáticas que tampoco han contribuido a cubrir esa laguna en la formación, reproducimos en demasiadas ocasiones los errores anteriores.

Elena Gil
Colegio Sagrado Corazón, Zaragoza

Treinta años después, nos sigue quedando aún un largo camino para "llegar a un justo medio entre la confianza en la intuición espacial y la percepción de la necesidad de una adecuada presencia de los elementos demostrativos, pilares en los que la matemática debe estar basada", reto que nos planteaba en ese momento Miguel de Guzmán. Si bien se han hecho notables avances en la enseñanza por resolución de problemas, y tímidas experiencias en la enseñanza de la geometría, que han contribuido a mostrar a muchos alumnos un aspecto más *amable* de las matemáticas, esto no ha ido unido a una adecuada presencia de esos elementos demostrativos a los que alude Miguel de Guzmán y que son elemento constitutivo de la ciencia matemática.

En este contexto, la lectura de *Mirar y ver* plantea varias reflexiones al profesor de Secundaria interesado en que las matemáticas contribuyan al desarrollo armónico de la mente y de las potencialidades intelectuales, sensitivas, afectivas y físicas de sus alumnos...

La primera y más evidente, una reflexión sobre la forma más adecuada de enseñar Geometría. Solemos estar de acuerdo en las aportaciones de la Geometría a la formación intelectual: el desarrollo de la capacidad espacial, de la intuición, del gusto por la belleza. Es más difícil encontrar temas accesibles a los alumnos y que permitan verdaderamente este desarrollo de capacidades. La fuerza motriz del aprendizaje es la motivación.Por eso, es fundamental una adecuada elección. *Mirar y ver* nos ofrece un amplio abanico de ejemplos fáciles de comprender en su planteamiento, aunque para su comprensión profunda se deban poner en juego todas las capacidades mencionadas: la aproximación de π, el teorema de Minkowski, el Teorema de Helly, el lema de Sperner… Temas que introducen al alumno en ramas actuales de investigación como la teoría de grafos o la geometría combinatoria. En otro de los libros de Miguel de Guzmán, también reeditado por Nívola (2002), *La experiencia de descubrir en geometría*, el autor aporta también un importante material para estimular la acción de los alumnos y ponerles así en disposición de *hacer matemáticas* con la ayuda del ordenador, elemento motivador básico.

La segunda idea vertebradora de *Mirar y ver* que suscita la reflexión es que la Geometría puede posibilitar un encuentro con los aspectos deductivos de la Matemática, a partir de la intuición y de la visualización: un encuentro menos arduo que la demostración de resultados abstractos. En cada uno de los ensayos surge de forma natural la necesidad de *definir* con más precisión y de *demostrar* de alguna manera fiable lo que intuimos *mirando y viendo*. Aparecen así las definiciones de conjunto convexo, interior, frontera; grafo, de cónicas. Se puede aprender el principio de inducción en la resolución del problema de los puentes de Königsberg y en la demostración del lema de Sperner. Podemos entrar en contacto con técnicas deductivas como el uso de la simetría, de analogías, de una adecuada manera de *ver* los problemas en un contexto más amplio, de forma que la solución aparece más clara a nuestros ojos, como ocurre en todos los interesantes problemas del capítulo 7. En otras obras de Miguel de Guzmán como puede ser *Cuentos con cuentas* (Nívola, 2003), nos encontramos también con esta orientación de la enseñanza de la teoría matemática: especialmente bonito en este libro es el capítulo dedicado a los poliedros regulares, donde muestra cómo se puede construir un pensamiento matemático, respetuoso con los hechos observables.

Y la tercera y última reflexión: ¿qué cabida tienen estos temas en las clases de un profesor de Bachillerato hoy, tres décadas después? Tenemos en esta etapa unos alumnos que han dedicado poco tiempo a su formación matemática en los años de Secundaria Obligatoria. Estamos sujetos a unos programas dirigidos exclusivamente a que los alumnos superen el examen de Selectividad marcado por cada Universidad. Los contenidos que tenemos que impartir son amplios y marcadamente abstractos. Sin embargo, paradójicamente, se hurta a los alumnos sus elementos demostrativos por creer que resultan de *difícil comprensión* para ellos. ¡El riesgo de que las matemáticas se conviertan en una serie de reglas esotéricas, que conducen a verdades indiscutibles, por la vía de la fe y no del razonamiento, es enorme! Uno piensa, como ya sugirió en su momento el autor, si no sería mucho más formativo dedicar tiempo a contar pausadamente, muchos hechos matemáticos que se prestan para hacer una novela interesante: el teorema de los cuatro colores, el problemas de los puentes de Königsberg, el teorema del punto fijo y sus múltiples aplicaciones, las propiedades de las elipses. Temas que incorporan hechos manipulables, definiciones de conceptos, construcción y demostración de enunciados, que están enmarcados en un contexto histórico y cultural...y que por tanto ayudarían a construir una visión global de las matemáticas y proporcionarían a los alumnos muchos ratos de disfrute intelectual.

Teniendo en cuenta que nuestra sociedad necesita personas capaces de pensar por sí mismas y de dar respuestas globales a las complejas situaciones que la ciencia y la vida plantean, los profesores de matemáticas tenemos una clara función: desarrollar en los alumnos la capacidad de observar el mundo, de buscar relaciones, regularidades y pautas en lo observado, de descubrir lo esencial de las situaciones, de buscar rigurosa y creativamente soluciones a los problemas planteados.

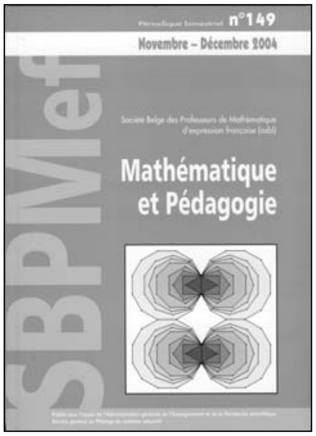
En el clima de desencanto que muchos profesores viven ante las posibilidades reales de su función, la lectura de los libros de Miguel de Guzmán suponen un revulsivo, una llamada a no renunciar a esta labor, ineludible por insustituible, en la formación del pensamiento de los chicos y las chicas. Este es el *legado* de un apasionado convencido de la potencia de la mente humana para comprender el mundo y, consecuentemente, una persona comprometida a fondo con la educación. ■

SUMA 48
Febrero 2005, pp. 113-116

Mathématique et Pédagogie revista de la SBPMef

TÍTULO: MATHÉMATIQUE ET PÉDAGOGIE
Edita: *Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française*

Periodicidad: ***Cinco números anuales (aparición bimestral excepto los meses de julio y agosto)***
Lengua: ***Francés***
Dirección: ***15, rue de la Halle***
7000 Mons
Bélgica
Página web: *http://www.sbpm.be/*
Número comentado: ***n.º 149, Novembre-Décembre 2004***
ISSN: ***0773-7378***



La *Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française* (SBPMef) tiene varias publicaciones periódicas, de las que me ocuparé en este artículo: *Mathématique et Pédagogie*, dirigida a los profesores de secundaria, *Math-Jeunes*, dirigida a los alumnos del ciclo superior de la secundaria y *Math-Jeunes Junior,* a los del ciclo inferior.

La Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française *(SBPMef) tiene varias publicaciones periódicas:* Mathématique et Pédagogie*, dirigida a los profesores de secundaria,* Math-Jeunes*, dirigida a los alumnos del ciclo superior de la secundaria y* Math-Jeunes Junior*, a los del ciclo inferior.*

En las dos revistas, que publican nuestros compañeros belgas dirigidas a los alumnos de secundaria, se pueden encontrar artículos que tratan de acercarles las matemáticas, su evolución histórica y sus aplicaciones, yendo más allá de los aspectos de nuestra disciplina que habitualmente forman parte de los libros de texto y de los programas escolares. Aparecen cuatro números al año y para tener una idea de su contenido basta con echar un vistazo a los sumarios de sus últimos números:

Math-Jeunes n° 107
S. Trompler, *La double hélice*
C. Carleer, *L'ADN, une molécule à la fois biologique et mathématique*
C. Randout, *Des représentations d'une hélice circulaire*
C. Villers, *La parabole du bon téléspectateur!*
J. Opsomer et P. Tilleuil, *Le déroulement de la spirale d'Archimède*
G. Noël et P. Tilleuil, *Peano, Hilbert ... et le minotaure*

Julio Sancho Rocher
hemeroteca.suma@fespm.org

Math-Jeunes Junior n° 107
Y. Noël-Roch, *Couper-Toucher (2)*
N. Vandenabeele, *Informatique ou Infor-Math-Ique ?*
A. Paternottre, *Et la suite ?*
C. Villers, *Alors on coupe!*
B. Honclaire, *Les frères Hick (10)*
S. Trompler, *Eratosthène*
Y. Noël-Roch, *Puissance et économie (2)*

Pero una mejor aproximación al contenido de la revista nos lo proporciona la oportunidad que tenemos de, a través de la página web de la sociedad (*http://www.sbpm.be/*), obtener copias en formato PDF de dos de los artículos de este número de *Math-Jeunes*, —C. Randout, *Des représentations d'une hélice circulaire,* y J. Opsomer et P. Tilleuil, *Le déroulement de la spirale d'Archimède*— así como un archivo EXCEL al que se refiere el segundo de ellos. Son textos de contenido matemático asequible a los alumnos de nuestro bachillerato con buen nivel de matemáticas, bien escritos y amenos, que muestran las matemáticas en acción, es decir resolviendo problemas y con un enfoque cultural que enriquece su valor. No he tenido la oportunidad de ver más muestras de trabajos aparecidos en estas revistas para los alumnos, pero si son del mismo estilo que los ejemplos a los que me he referido antes, se trata de un material muy interesante del que creo que carecemos en nuestro país y que sería interesante desarrollar.

> *La SBPMef se creó en 1975 y desde entonces publica, con carácter bimestral, la revista* Mathématique et Pédagogie. *Se trata de una publicación dirigida al profesorado de matemáticas de secundaria.*

El contenido de las dos revistas se completa con secciones dedicadas a resolución de problemas, a las olimpiadas y rallies.

La SBPMef se creó en 1975 y desde entonces empezó a publicar, con carácter bimestral, la revista *Mathématique et Pédagogie*. Como queda reflejado en la presentación que se hace de la revista en la página web de la sociedad belga, se trata de una publicación dirigida al profesorado de matemáticas de secundaria. Su contenido consiste básicamente en:

- artículos que tratan de aspectos científicos o metodológicos de las diferentes asignaturas de matemáticas que se imparten a lo largo de la secundaria, entre los que pueden encontrarse descripciones de experiencias de clase, de las reacciones y errores de los alumnos, propuestas orientadas a mejorar la presentación de la materia, uso de medios tecnológicos, etc.
- artículos de información científica sobre desarrollos recientes de las matemáticas.
- secciones permanentes dedicadas a problemas y juegos, a las olimpiadas matemáticas o a las reseñas de libros y revistas.

> *La revista tiene formato A5 con una extensión de alrededor de 100 páginas en cada número. La maquetación, con el texto a una columna, es simple pero cuidada tanto en el texto como en los gráficos.*

La revista tiene formato A5 con una extensión de alrededor de 100 páginas en cada número. La maquetación, con el texto a una columna, es simple pero cuidada tanto en el texto como en los gráficos. Dado que los artículos ocupan una media de 15 páginas, cada número de la revista no suele contener más de cinco o seis.

El primer artículo, *Règles intuitives: Les erreurs des élèves enfin comprises?* (D. de Bock, W. Van Dooren & L. Verschaffel), es una traducción de un trabajo que previamente se había publicado en lengua flamenca formando parte de un proyecto de investigación en el que se analizan los problemas acarreados por la extensión de la linealidad y se trata de hacer propuestas para la mejora. En la primera parte del texto, los autores presentan las tesis de Fischbein, así como sus propias experiencias, sobre el papel que pueden jugar las intuiciones en la resolución de problemas, así como la influencia que pueden tener a lo largo del proceso de aprendizaje. Terminan este apartado concluyendo que a pesar de que las intuiciones pueden conducir al error en ocasiones, pueden ser muy útiles en la construcción de razonamientos matemáticos y que, en cualquier caso, su análisis permite explicar el origen de errores de los alumnos por contraste entre los conocimientos adquiridos y las experiencias previas que sustentan sus intuiciones. La segunda parte se dedica a analizar el poder explicativo de algunas reglas intuitivas, concretamente de las más importantes que se manifiestan en los problemas de comparación, a saber: "más de *A* y por tanto más de *B*" y "lo mismo de *A* luego lo mismo de *B*". Muestran al final que no siempre se pueden achacar las respuestas erróneas, en problemas de comparación, a la aplicación de las reglas intuitivas y que en ocasiones hay explicaciones alternativas basadas en otro tipo de errores conceptuales. En conjunto el artículo es una muestra de cómo puede presentarse un estudio de didáctica de las matemáticas desde el punto de vista de sus consecuencias prácticas para el profesorado.

Me sorprendió bastante encontrar un artículo cuyo título fuese *Composition de fonctions*, ya que parece un contenido que poco a poco ha ido quedando arrinconado dentro del currículo. Pero este texto muestra cómo introducir, a partir de la siguiente situación, bastante realista, la composición de funciones:

> En un aparato para medir la presión arterial de los enfermos, ésta hace variar la altura de una columna graduada de 50 a 300 mm. La medida se transmite mediante una corriente eléctrica, que varía de 10 y 40 miliamperios, a una impresora que va dejando una marca sobre una banda de papel de 22 cm de ancho, con un margen de 1 cm a cada lado. Determinar el modelo matemático que hace corresponder a cada presión medida una posición registrada sobre el papel.
>
> J. Miéwis "Composition de fonctions",
> Mathématique et Pédagogie nº 149

La revista se completa con varias secciones dedicadas a resolución de problemas y también una titulada Dans nos classes *en la que Y. Noël-Roch hace propuestas de actividades directamente aplicables en clase.*

El autor se dedica en el resto del artículo a analizar, primero el paso de la medida observada en el mercurio a la intensidad de la corriente producida, a continuación el de la intensidad a la marca dejada por la impresora en el papel, acompañando cada caso con un ejemplo numérico. Termina analizando la sucesión de las dos transformaciones lo que le da la oportunidad de poner de manifiesto la presencia de dos funciones mutuamente recíprocas.

El resto de los artículos de este número de *Mathématique et Pédagogie* me han resultado menos atractivos sin que con ello quiera decir que están mal: simplemente me ha interesado menos su contenido. En *Decouvertes avec un tableur,* M. Solhosse da dos ejemplos de uso de la hoja de cálculo en clase de matemáticas. Están concebidos como uno primer paso de aprendizaje y orientados a que la necesidad de buscar las fórmulas y la estructura de la hoja de cálculo obliguen al alumno a

La SBPMef tiene un acuerdo con la APMEP por el que sus miembros son tratados por la asociación francesa como adherentes y por ello se benefician de precios especiales en la adquisición de sus materiales. Creo que también la FESPM debería tratar de lograr este tipo de acuerdos con asociaciones tan cercanas a nosotros tanto geográficamente como en sus objetivos.

reflexionar y razonar sobre el problema. El siguiente, *Les simulations aux services des probabilités,* de V. Loward es una artículo bastante largo y ambicioso sobre el uso de las calculadoras gráficas en la enseñanza de las probabilidades, a través de problemas de simulación. Incluye entre otras cuestiones, un glosario de las instrucciones de las calculadoras gráficas (CASIO) útiles en las simulaciones de sucesos aleatorios, ejercicios concretos para la enseñanza de las probabilidades con la calculadora y algunas pistas metodológicas. Por último, en *Apprenti Géomètre: un nouveau logiciel,* N. Rouche y Ph. Skilbecq hacen una presentación de un programa encargado por la administración educativa belga para ayudar el aprendizaje no sólo de la geometría sino de las matemáticas en general a los alumnos del final de la primaria y principio de la secundaria. Esta concebido de forma que se puedan manipular sobre la pantalla figuras diversas y someterlas a operaciones como cortarlas, juntarlas o fusionarlas. Según los autores se trata de un instrumento útil para la exploración y la experimentación que no propone ninguna secuencia de aprendizaje programado.

La revista se completa con varias secciones dedicadas a resolución de problemas y también una titulada *Dans nos classes* en la que Y. Noël-Roch hace propuestas de actividades directamente aplicables en clase. En el número que nos ocupa la dedica a tres actividades que empiezan en la exploración de una situación numérica pero cuyo objetivo último es que los alumnos después de observar casos concretos formulen una propiedad general, la expresen formalmente y aborden su demostración general.

Me gustaría comentar un aspecto que me ha llamado la atención a través de los anuncios que aparecen en la revista: la SBPMef tiene un acuerdo con la APMEP por el que sus miembros son tratados por la asociación francesa como adherentes y por ello se benefician de precios especiales en la adquisición de sus materiales. Creo que también la FESPM debería tratar de lograr este tipo de acuerdos con asociaciones tan cercanas a nosotros tanto geográficamente como en sus objetivos. No en balde somos ambos miembros fundadores de la Federación Europea de Asociaciones de Profesores de Matemáticas.

Terminaré comentando que la página web de la SBPMef tiene un diseño bastante rudimentario, y que desde su página de entrada se puede acceder a información sobre las diversas revistas que se limita a una descripción general, las cuotas de suscripción y los índices de las revistas. ■

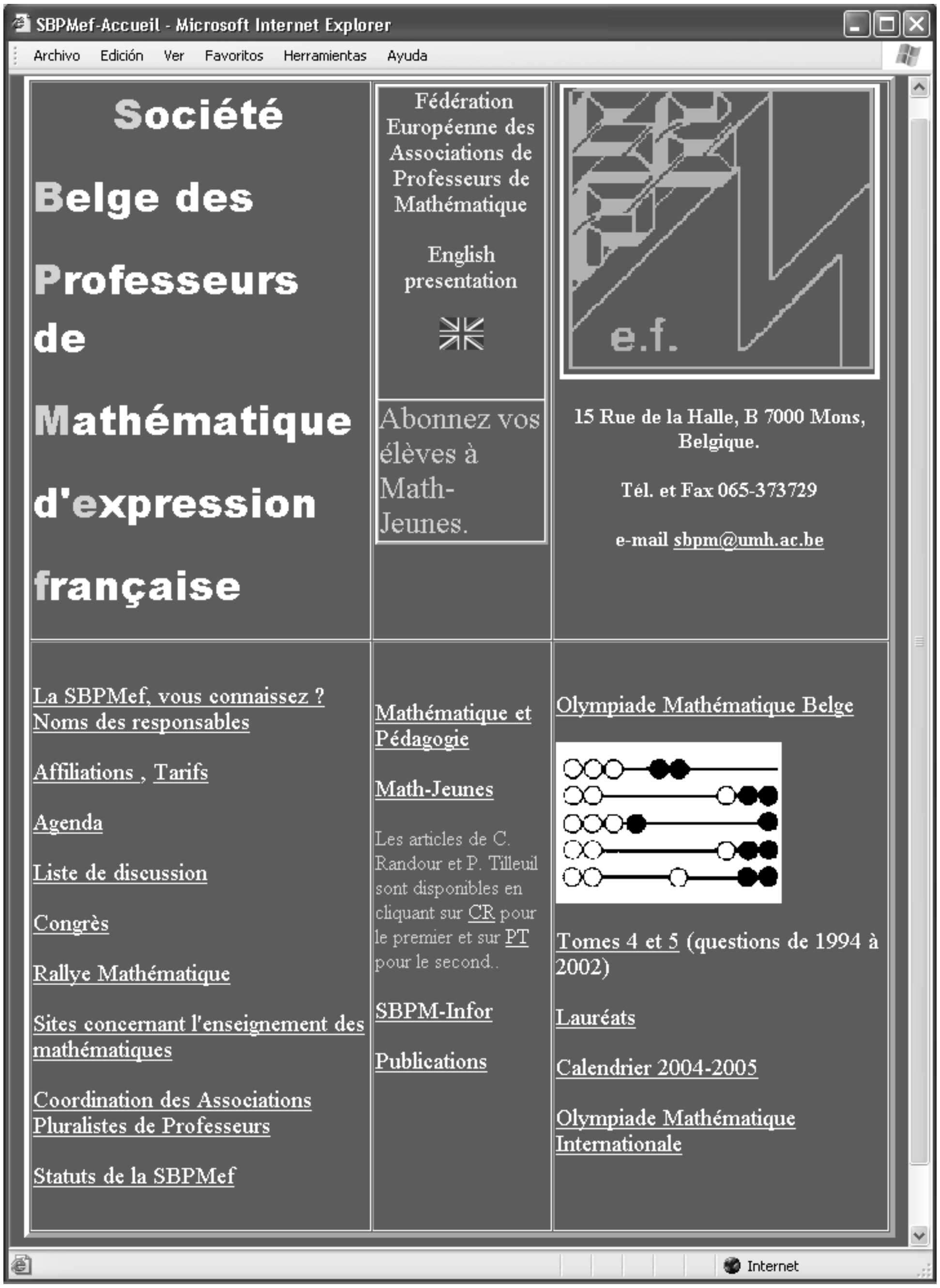


Fig.1: http://www.sbpm.be/

SUMA 48
Febrero 2005, pp. 117-124

Entre el amor y el humor

Si el anterior artículo de esta sección tuvo algún efecto persuasivo y habéis buscado películas relacionadas con las Matemáticas, habréis comprobado que su localización no es tarea fácil; menos aún para escenas de contenido matemático en películas de otro tipo. Y una vez encontrados unos u otras, tampoco todos valen para la clase de Secundaria. Cada profesor evaluará qué objetivo didáctico puede salir reforzado con su visión y posterior comentario en clase; y decidirá en consecuencia. No se trata de llenar el tiempo de la clase; con los actuales horarios lectivos, nuestro problema es más bien cómo estirarlo.

Hay películas que aparecen siempre en los listados de Cine y Matemáticas porque el protagonista o algún personaje secundario destacan por su talento matemático. Pero, sin embargo, ninguna escena encierra ni glosa contenido matemático alguno

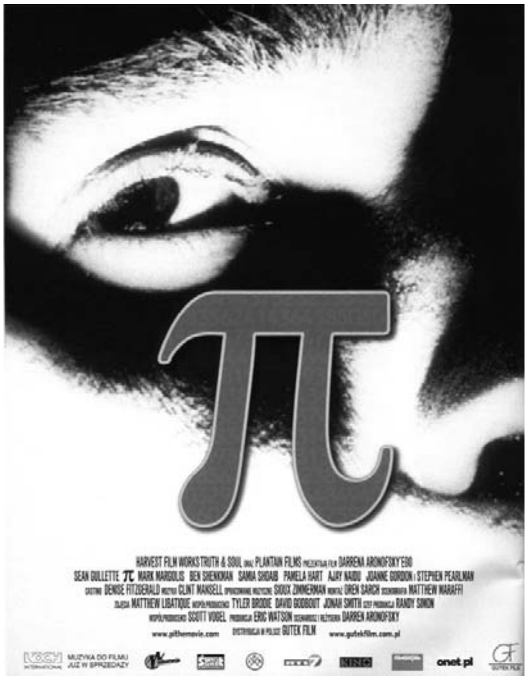
La difícil selección

Hay películas que aparecen siempre en los listados de Cine y Matemáticas porque el protagonista o algún personaje secundario destacan por su talento matemático. Pero, sin embargo, ninguna escena encierra ni glosa contenido matemático alguno. Así ocurre, por ejemplo, con *El indomable Will Hunting* (*Good Will Hunting.* Gus Van Sant. 1997) y con *Sneakers* (Phil Alden Robinson. 1992), respectivamente. En la primera vemos al protagonista resolviendo en una pizarra un problema que no se nos explica. En la segunda, el personaje dicta una conferencia mientras los personajes principales mantienen un diálogo. En estos casos las Matemáticas son sólo parte del decorado o música de fondo.

* Para pornerse en contacto con el autor de esta sección, o enviarle comentarios o sugerencias se puede usar el correo electrónico indicado junto a su firma

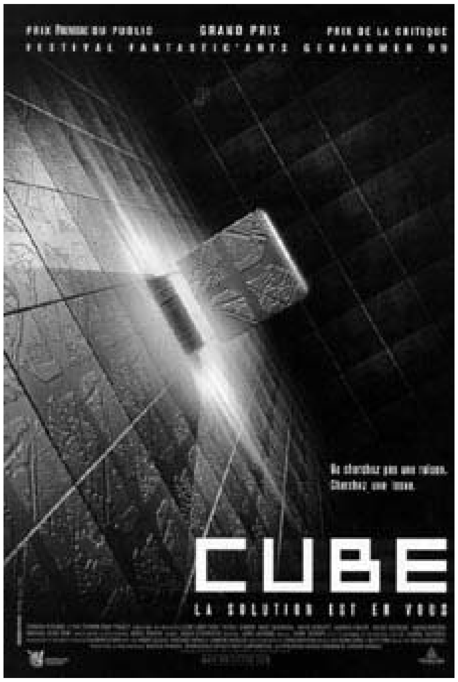
José María Sorando Muzás
decine.suma@fesmp.org

En contadas ocasiones las Matemáticas no sólo definen a un personaje, sino que impregnan toda la trama argumental. Es el caso de estos tres títulos singulares:



En *Pi. Fe en el caos* (*Pi*. Darren Aronofsky. 1998), Maximilian Cohen, un matemático problemático y marginado, intenta la explicación universal a través de las cifras del número π, partiendo del estudio de las fluctuaciones de la Bolsa de Nueva York. Es un matemático desequilibrado con el medio que le rodea por su progresiva e irremediable obsesión con la teoría de números. Una firma financiera de Wall Street y una secta judía quieren hacerse con sus descubrimientos para aplicarlos a la Bolsa y a la Cábala, respectivamente. A la personalidad obsesiva de Max se añade la presión de la persecución, llegando a una situación enfermiza y autodestructiva. La película, en blanco y negro, tiene una banda sonora peculiar y es agobiante como el mismo protagonista; bastante dura.

Una mente maravillosa (*A Beautiful Mind*. Ron Howard. 2001) presenta la biografía de John Forbes Nash, un genio matemático contemporáneo. Comienza con Nash estudiante en Princeton y la génesis de sus ideas principales, hasta conseguir una beca de investigación. Ya instalado como profesor universitario, peculiar en sus clases, comienza a tener alucinaciones vinculadas a la Criptografía en las tramas de espionaje de la Guerra Fría. En 1959 es diagnosticado como esquizofrénico paranoico y llega a ser recluido para recibir tratamientos de electroshock. Asistimos a su sufrimiento personal y familiar, así como a una lucha constante intentando convivir con la enfermedad. Tras 30 años de esfuerzo lo consigue y es entonces cuando le llega el reconocimiento académico internacional: el Premio Nóbel de Economía 1994 por su aplicación de la Teoría de Juegos a los procesos de negociación. Esta concesión supuso un cambio radical en la consideración social de la enfermedad de la esquizofrenia, empezando a superarse el estigma social de estos enfermos.



En *Cube* (Vincenzo Natali. 1997), sin explicación alguna, un grupo de personas se ve recluido en un laberinto de cubos conectados entre sí por una escotilla en cada cara. Unas escotillas conducen a la muerte; otras, a nuevos cubos habitables. El acceso a cada cubo tiene una placa con tres números de tres cifras cada uno. Un estudiante de Matemáticas descubre que las trampas mortales están colocadas en los cubos cuyos números sean primos o potencias de primo. A partir de ese momento, la búsqueda de la salida pasará, antes de decidir la entrada en un cubo, por la factorización de sus números. Todo ello, en un ambiente violento, de tensión claustrofóbica. Violencia y tensión son elementos que, entre otros, definen el cine que triunfa entre nuestros adolescentes. Aunque su gusto no es el mío, debo decir que esta película ha tenido buena aceptación entre los alumnos en algunas experiencias realizadas por otros profesores. [Hay un artículo sobre esta película en *SUMA* n.º 47. Nota del editor.]

Pocas películas podremos encontrar con una presencia de las Matemáticas mayor que en estas tres. ¿Esto las hace ya válidas para nuestra clase de Secundaria? En absoluto. No debiera bastarnos con que las Matemáticas estén tan presentes. Preguntémonos además: ¿Qué imagen se da de ellas?; ¿cuál es el mensaje que va a llegar a los alumnos?

En las tres, las Matemáticas son fuente de obsesión enfermiza, de angustia o de delirio. En expresión de nuestros alumnos, los personajes tienen el cerebro *rallado*. Así que estas películas no harán sino aumentar los prejuicios en contra de las Matemáticas.

Si, como enunciábamos en el artículo anterior, pretendemos que los alumnos se apropien de las Matemáticas como algo valioso, útil o divertido, parece que estas películas no nos sirven en su integridad. Pero en una búsqueda cuidadosa podemos encontrar escenas que, fuera del contexto general del film, sean aprovechables para nuestros fines. Y presentaremos a los alumnos sólo esas escenas, siempre que sean comprensibles por sí solas.

> Persona es el ser humano que ante una situación cualquiera de la vida examina lo que puede hacer, analiza lo que debe hacer... y después lo hace.
>
> *Emmanuel Kant*

Resolver problemas en cualquier situación

He seleccionado siete escenas de *Una Mente Maravillosa* en las que se recrea cómo un cierto estilo matemático impregna todas las parcelas de la vida de John F. Nash, centrándose en especial en la amorosa.

Decía el filósofo Emmanuel Kant que *Persona es el ser humano que ante una situación cualquiera de la vida examina lo que puede hacer, analiza lo que debe hacer... y después lo hace*. El principal legado que la formación matemática puede dejar a un individuo es el desarrollo de su capacidad para resolver problemas, convirtiéndole en una persona que deja de ver las situaciones como inevitables para considerarlas como problemas pendientes de solución. Y para Nash lograr una interacción satisfactoria con el otro sexo era uno de esos problemas.

La elección del tema amoroso le resulta al público chocante en relación con las Matemáticas, pero es muy efectiva con los alumnos ya que para ellos es la cuestión por antonomasia (como casi para cualquiera, por otra parte) y resulta muy propicia al humor, algo que el director ha sabido explotar con gracia en la parte inicial de la película.

El humor y las Matemáticas

En la recomendable página web de la portuguesa *Associação de Professores de Matemática* (www.apm.pt) leemos: *El Humor no se explica. Pero su presencia puede favorecer mucho la comunicación y las relaciones interpersonales*. Y se cita el Prefacio de *Mathematics and Humor* (NTCM), donde se dice:

> Sólo las personas son capaces de reír. Las vacas pueden mostrarse satisfechas. Los gatos esbozan algunos gestos y los caballos brincan. Pero sólo los hombres, las mujeres y los niños consiguen reír. Tan sólo la mente humana es capaz de detectar inconsistencias entre las consistencias de la vida. Desgraciadamente, las Matemáticas han sido catalogadas, como la guerra, el hambre y la muerte, entre las cosas serias.

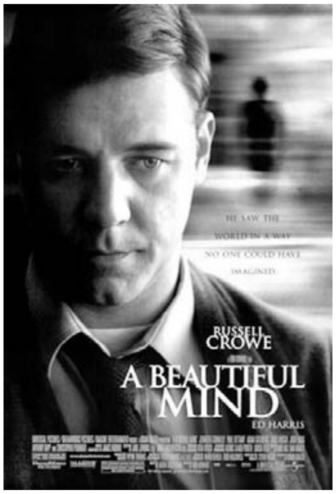
Por eso a muchos extraña ver unidas las palabras humor y Matemáticas. Pero quienes se acercan a ellas, así como los matemáticos mismos, son humanos. Y afortunadamente, como tales, no son indemnes a la ambigüedad del lenguaje cotidiano, a la necesidad de ternura, a la consciencia de la propia ignorancia, a la tentación de aparentar sabiduría... y a tantas otras maravillosas debilidades propias de su condición. Lo cual nos recuerda que las Matemáticas son un intento de poner orden en nuestra experiencia del mundo, pero un intento de personas que sienten, que sueñan... y que ríen.

> *El tema amoroso resulta chocante en relación con las Matemáticas, pero es muy efectivo con los alumnos ya que para ellos es la cuestión por antonomasia (como casi para cualquiera, por otra parte) y resulta muy propicia al humor.*

El contraste de todas esas limitaciones con la presupuesta perfección de las Matemáticas produce el Humor matemático; un humor que no es de carcajada, sino de sonrisa cómplice e inteligente. Como los niveles de inte-ligencia, en este caso las capacidades para leer en clave matemática las situaciones y compartir el humor subyacente, son diferentes según los cursos, la necesaria complicidad no se establece por igual en todos los casos. El profesor debe calibrarlo bien en cada ocasión. Por ejemplo, las referencias sexuales contenidas en las escenas de *Una mente maravillosa* pueden resultar inquietantes aún en 1º ESO pero ya no en 2º Bachillerato. Por ello, para los más pequeños haremos otra propuesta de humor *más blanco*.

Problemas que nos acucian, idilios, humor... siempre en relación con las Matemáticas, aparecen en dicha película y, al menos, en otras tres que citaremos. Intentaremos establecer una asociación entre ellas y esos temas tan vivenciales. Tal vez así, con la ayuda del cine, logremos unas Matemáticas de rostro más amable. A no ser que opinemos como aquel individuo que decía que "para ser importantes no hay que ser simpáticos", máxima que por fortuna hemos decidido mayoritariamente que pasara de moda. ■

Estilo matemático



UNA MENTE MARAVILLOSA (A BEAUTIFUL MIND).
Director*:* **Ron Howard**.
Actores*: Russell Crowe, Ed Harris, Jennifer Connelly y Christopher Plummer.*
Guión*: adaptación por Akiva Goldsman del libro escrito por Sylvia Nasar.*
Producción*: Dream Works Pictures USA 2001. Película triunfadora en los Oscars 2002, con 4 estatuillas; entre ellas, la de Mejor Película.*
Distribución*: Universal Pictures Video. Disponible en VHS y DVD.*

Según se nos cuenta, John F. Nash era matemático en todo lo que hacía, las 24 horas del día.

ESCENA 1. Se sitúa entre los minutos 12:24 y 14:29.

ARGUMENTO. En el bar de la Universidad, una chica atractiva muestra su interés por Nash estudiante. Éste acude al envite pero, torpe en habilidades sociales, no acierta a iniciar la conversación. Finalmente dice: *No sé qué es lo que se espera que diga para que tenga relaciones sexuales contigo pero, ¿podríamos fingir que ya lo he dicho todo?, ¿podríamos pasar directamente al sexo?* La respuesta de la chica es un sonoro bofetón.

ESCENA 2. Se sitúa entre los minutos 18:13 y 21:45.

ARGUMENTO. Nash está buscando la idea básica para su línea de investigación en torno a la resolución matemática de problemas en Ciencias Sociales y la encuentra gracias a un hecho fortuito. Entra en el mismo bar un grupo de chicas entre las que destaca una llamativa rubia. El grupo de estudiantes se alborota y rivalizan sobre quién se llevará a la rubia.

Entonces Nash tiene un momento de revelación: *Si todos vamos a por la rubia, nos obstaculizamos y ninguno de nosotros se la lleva; así que vamos a por las amigas y nos ignoran, porque a nadie le gusta ser el segundo plato. ¿Y si nadie va a por la rubia?. No nos obstaculizamos y no ofendemos a las otras chicas. ¡Victoria asegurada!.*

De esta forma tan curiosa esboza la que será la idea clave de su dinámica rectora: "En contra de los postulados de Adam Smith, para asegurar el mejor resultado, cada miembro del grupo debe hacer lo mejor para él mismo y para el grupo". Nash sale corriendo para poner en orden sus ideas, no sin antes dar las gracias a una atónita rubia.

Esta escena, según declara el director, es una licencia del guión y no responde a hechos reales, pero pareció un recurso aceptable para mostrar al gran público en qué consistía la idea básica de Nash.

ESCENA 3. Se sitúa entre los minutos 28:55 a 30:55.

ARGUMENTO. Nash ya es profesor. Entra en clase de mala gana, dirigiéndose a los alumnos de forma despectiva. Hace mucho calor y la ventana está abierta. Desde la calle se oye el martilleo de un taladro y Nash cierra la ventana. Un alumno pide que se abra y Nash responde: *Su confort importa menos que la capacidad de oír mi voz.*

Alicia, una alumna que pronto va a destacar en todos los sentidos, se asoma a la ventana y pide a los obreros un favor: que trabajen en otra parte hasta que acabe la clase para que puedan abrir la ventana. Así lo hacen.

Nash concluye la escena diciendo: *Como verán en el Cálculo Multivariable, a menudo hay varias soluciones para un mismo problema.*

Escena 4. Se sitúa entre los minutos 41:01 y 42:40.

Argumento. Nash y Alicia salen juntos, de noche, a una fiesta. Ante el cielo estrellado, Nash, hábil para encontrar patrones entre cantidades ingentes de números, sorprende a Alicia encontrando también en el firmamento cada forma que ésta le propone. Es una escena llena de fantasía y romanticismo.

Escena 5. Se sitúa entre los minutos 45:20 y 46:56.

Argumento. Tras un tiempo saliendo juntos, Alicia y Nash se encuentran a la orilla de un río. Alicia le pide ya que se defina. Nash lo hace con estas palabras: *El ritual requiere una serie de actividades platónicas antes de* hacerlo*. Yo estoy siguiendo dicho protocolo, pero la cruda realidad es que quiero practicar el coito contigo lo antes posible. ¿Vas a abofetearme?* En esta ocasión no hay bofetón. Se besan.

Escena 6. Se sitúa entre los minutos 49:30 y 52:20.

Argumento. Nash llega tarde a una cita con Alicia. Al llegar se arrodilla ante ella y se declara de esta forma tan 'matemática': *Nuestra relación, ¿merece un compromiso a largo plazo? Necesito alguna prueba o dato verificable y empírico*. Alicia le responde: *Lo siento, dame un segundo para que redefina mis conceptos del romanticismo*. La cosa termina en boda.

Escena 7. Se sitúa entre los minutos 120:00 y 122:20.

Argumento. De la escena anterior a ésta hay una hora de película en la que la vida de Nash abandona estas facetas amables para convertirse en una lucha constante con su enfermedad mental. Cuando finalmente logra el autodominio y el premio Nóbel, en la ceremonia de concesión de éste dice desde el estrado:

> Siempre he creído en los números, en las ecuaciones y la lógica que llevan a la razón. Pero después de una vida de búsqueda me digo, ¿qué es la lógica?, ¿quién decide la razón? He buscado a través de lo físico lo metafísico y he hecho el descubrimiento de mi vida: sólo en las misteriosas ecuaciones del amor puede encontrarse alguna lógica.

Nivel. Bachillerato de Ciencias Sociales. **Tema**. Resolución de problemas.

En clase. Las escenas 1 y 5 presentan una situación recurrente, con Nash haciendo proposiciones a dos chicas, dos intentos para el mismo problema. Cuando pretende llegar directo a la solución (escena 1), el intento se salda con un estrepitoso fracaso. Cuando sigue todos los pasos intermedios requeridos (escena 5), esas actividades platónicas a que hace referencia, alcanza el éxito.

Es una buena ejemplificación de lo que tantas veces decimos a nuestros alumnos: una solución sin método que la ordene ni argumentación que la justifique no es aceptable.

El alumnado de este bachillerato debiera estar familiarizado con los conceptos de esperanza matemática y los juegos equitativos. La escena 2 permite una ligera incursión en la Teoría de Juegos. Adam Smith establecía que las relaciones sociales son *juegos de suma cero*, con ganadores y perdedores. Nash plantea la posibilidad de *juegos cooperativos*, donde todos ganan. Fue un concepto innovador que tuvo gran aplicación en procesos de negociación económica y social y cuyo desarrollo le valió el Nobel.

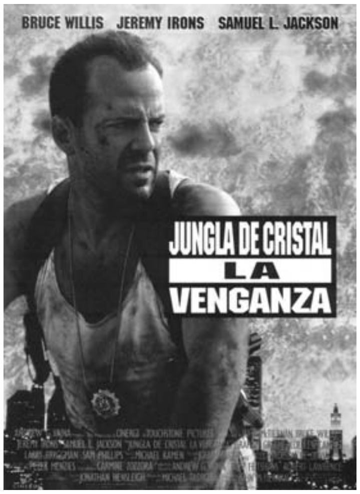
La escena 3 alude a la posibilidad de varias soluciones a un problema, algo que teóricamente encuentran los alumnos, por ejemplo, en los Sistemas de Ecuaciones y en la Programación Lineal. En este caso se produce una trasposición del concepto a una situación cotidiana.

La escena 4 es simplemente una recreación poética de la creatividad del matemático.

En la escena 6, la declaración de amor de un matemático, predomina ante todo el humor, ya presente en las anteriores.

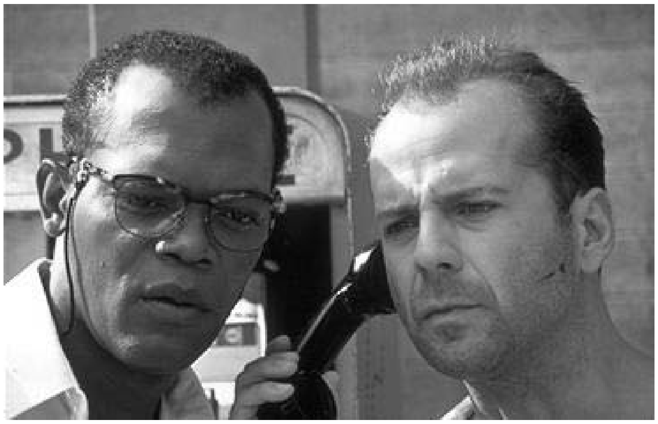
La escena 7 es un *happy end* muy al estilo de Hollywood, que se cita ante todo por ser la escena que completa el bloque Matemáticas–amor dentro de la película. Se mueve en un registro diferente, sólo comprensible si se ha seguido la película completa con la dureza de la historia contada en la segunda parte. Sin esa perspectiva, puede parecer un poco sensiblera. ■

¡Menudo Problema!



JUNGLA DE CRISTAL 3: LA VENGANZA
(DIE HARD: WITH A VENGEANCE)
Director: **John Mc Tiernan**
Actores*: Bruce Willis, Samuel L. Jackson y Jeremy Irons*
Guión*: Roderick Thorp*
Producción*: Twentieth Century Fox, EEUU, 1995*
Distribución*: Touchstone Home Video. Disponible en VHS y DVD*

En la siguiente película el héroe que ha de salvar a la ciudad de Nueva York no sólo deberá realizar locas carreras de coches, pelear y hacer acrobacias; también tendrá que resolver un conocido problema matemático. ¡Qué difícil resulta ser héroe en estos tiempos!



ESCENA. Se sitúa entre los minutos 55:30 y 59:50.

ARGUMENTO. Simon, un astuto terrorista, explota una bomba en un concurrido centro comercial de Nueva York y después revela la existencia de más explosivos que amenazan a la ciudad. El detective John McClane, en la tercera entrega de esta exitosa saga, tendrá que superar las sucesivas pruebas a que le somete el perverso terrorista, con la compañía de Zeus, un héroe ocasional.

Una de esas pruebas consiste en desactivar una bomba que está en una fuente de un parque y explotará en 5 minutos a menos que Mc Lane consiga depositar sobre ella exactamente 4 galones de agua. Para ello dispone de dos garrafas sin graduar: una de 3 galones y otra de 5.

El detective y su acompañante se enzarzan en una discusión sobre cómo conseguirlo, que pronto deriva a terrenos personales. Entre gritos y sobresaltos, cuando el tiempo ya se está acabando, como es de rigor en estos casos, lo consiguen.

NIVEL. Cualquier curso de ESO. **TEMA**. Aritmética.

EN CLASE. Este archiconocido problema aparece en casi todas las colecciones de textos de ESO, sin que corresponda en rigor a uno u otro curso. Por eso, tras resolverlo en clase resulta muy curioso y divertido para los alumnos ver los apuros frente al problema de un héroe cinematográfico. ■

Matemáticos en el amor

Enigma
Director: **Michael Apted**
Actores: *Dougray Scott, Kate Winslet, Jeremy Northam y Saffron Burrows*
Guión: *Adaptación por Tom Stoppard de la novela de Robert Harris*
Producción: *Intermedia Films & Senator Entertainment. Gran Bretaña 2001*
Distribución: *Sogepaq. Disponible en VHS y DVD.*

La pasión por las Matemáticas y la pasión amorosa se funden en una sola en la siguiente escena.

Escena. Se sitúa entre los minutos 21:42 y 22:40.

Argumento. En un romántico escenario, a media luz junto a la chimenea, el matemático Tom Jerico se encuentra con su hermosa amada. Ésta le pregunta: *¿Por qué te hiciste matemático? ¿Te gustan las sumas?* Y Tom responde: *Me gustan los números porque con ellos verdad y belleza son lo mismo. Te das cuenta cuando las ecuaciones empiezan a resultar bellas. Ves que los números te acercan al secreto porqué de las cosas*. La pasión que ha puesto en su respuesta invita a la chica a responderle con un beso no menos apasionado.

En una atmósfera cálida y envolvente, lo abstracto y lo físico han establecido una continuidad. Puede recordarnos, aunque sólo como pálido reflejo, al *Cántico Espiritual* de San Juan de la Cruz, donde el amor metafísico (en ese caso a Dios) se expresa a través de la unión de los amantes. Y también, por su idealismo pitagórico, al Pato Donald de *Donald en el País de las Matemáticas* (*Donald in Mathmagic Land.* Walt Disney, 1959). ¡Qué extrañas relaciones!

Nivel. Bachillerato **Tema**. Aritmética y Álgebra.

En clase. Desde el punto de vista matemático, esta escena no desarrolla ningún concepto del curriculum, pero exalta la belleza de las Matemáticas e ilustra con intensidad el pensamiento pitagórico. Puede ser una curiosa representación si se hablase de esa escuela filosófico-matemática; o también un complemento a las escenas de cortejo citadas en *Una Mente Maravillosa.* ■

Humor y complicidad

OJO MATEMÁTICO
(serie de 20 episodios de 20 min.).
Episodio nº 15: **MEDIDAS**.
Director: **Michael Cocker**
Guión: *Adam Hart-Davis*
Producción: *Yorkshire TV, Gran Bretaña, 1991.*
Adaptación española: *Antonio Pérez–Imagen 35 y Asociados SL 1992.*
Distribución: *Metrovideo Escuela*. Disponible en VHS.

Ésta es una secuencia de la conocida serie de videos didácticos *Ojo Matemático*, donde algunos episodios, de forma total o parcial, son una dramatización a cargo de actores; en cuyo caso, del género documental ya casi se pasa al cinematográfico. La simpatía y sencillez de la situación planteada permite la complicidad con alumnos de 11 o 12 años, necesaria, como decíamos, para compartir el humor.

ESCENA. Se sitúa entre los minutos 8:25 y 11:05.

ARGUMENTO. Un personaje de aspecto caricaturesco debe estimar el hormigón necesario para cementar el camino del jardín de su casa, todo en un ambiente al más puro estilo británico. Toma estas medidas: 14,4 m de largo por 2,1 m de ancho por 20 cm de alto. Las multiplica sin antes pasarlas todas a la misma unidad de medida y encarga por teléfono el resultado que aparece en su calculadora: 605 m^3. Al ver llegar ante su puerta tres grandes camiones–hormigonera con el pedido, se desespera por el error cometido y sus consecuencias, pateando enojado su gorra.

NIVEL. 1º ESO. **TEMA**. Sistema métrico decimal.

EN CLASE. Si algunos alumnos son receptivos y agradecidos ante sorpresas simpáticas como ésta en la clase de Matemáticas, son los de 1º ESO. Han llegado a la Secundaria entre esperanzados y temerosos, conservando felizmente la mayor confianza en el profesorado propia de la Primaria.

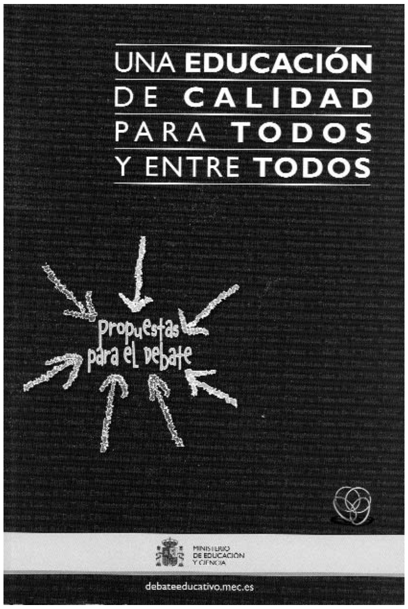
Debemos ser especialmente atentos con ellos. Pequeñeces como ésta, poner un video gracioso en clase, son en este nivel de la mayor efectividad para fomentar el cariño a la asignatura.

Esta historieta de forma sencilla pero eficaz permite llegar a varias conclusiones en los campos de los procedimientos y de las actitudes:

- La importancia de manejar unidades homogéneas.
- La necesidad de hacer una estimación mental previa que nos indique si el resultado de la calculadora es verosímil o hemos introducido datos con errores. La confianza en la calculadora no debe ser ciega.
- Las nefastas consecuencias que para nuestra vida cotidiana puede tener un mal uso de las Matemáticas. Se trataría, parafraseando el magnífico título del estupendo libro de Claudi Alsina, de contar bien para vivir mejor. ■

SUMA 48
Febrero 2005

Informe de la FESPM sobre la nueva reforma del Ministerio de Educación y Ciencia



Recientemente el Ministerio de Educación y Ciencia ha presentado el documento *Una educación de calidad para todos y entre todos. Propuestas para el debate,* que contiene las ideas básicas de la nueva reforma educativa. En el seno de ese debate, el Ministerio pidió su opinión a la Federación Española de Sociedades de Matemáticas. El documento que sigue, elaborado por una comisión constituida para ello y aprobado por los órganos estatutarios, es la respuesta dada por nuestra Federación.

La decisión del Ministerio de Educación y Ciencia de presentar a la opinión pública y a los colectivos interesados propuestas para adecuar la educación a las necesidades de la sociedad y a los compromisos del nuevo equipo de gobierno es una buena forma de participación en un asunto de gran importancia en el que es necesario conocer y valorar las opiniones de todos los implicados. Es de esperar que se tengan en cuenta opiniones que, como las que aquí se exponen, resumen el sentir de asociaciones y grupos implicados.

El documento presentado por el Ministerio de Educación y Ciencia está compuesto por ocho grandes epígrafes, entre los que el primero es la introducción y el octavo, un anexo de datos estadísticos. Las propuestas de debate aparecen en los seis bloques intermedios, con títulos poco relacionados con lo que presentan sus respectivos contenidos.

Cada uno de esos bloques tiene tres partes diferenciadas: una primera parte explicativa; una segunda parte, en la que se presentan las propuestas de cambio; y una tercera, en la que se hacen una serie de preguntas para que los ciudadanos contesten. Algunas de las preguntas son excesivamente técnicas en algunos casos; en otros, incluso invitan a realizar propuestas legislativas.

Con carácter general, se puede afirmar que la propuesta está escasamente matizada en los 14 puntos que analiza.

El documento hace un estudio global de la educación que deja poco espacio a perspectivas más concretas. Sin embargo la

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matematícas

FESPM, como colectivo de profesores de matemáticas, centra sus sugerencias en términos más próximos a la enseñanza y aprendizaje de esta materia.

En la actualidad, las soluciones que se pueden dar para mejorar la enseñanza están más relacionadas con los aspectos organizativos comunes a todo el sistema educativo que con los contenidos y metodología de una materia concreta. Por tanto, también es necesario plantearse los aspectos organizativos de las matemáticas, materia que aparece en el currículo de todos los cursos de enseñanza obligatoria y a la que se hace responsable de gran parte del fracaso escolar. La implantación generalizada en ESO ha puesto de manifiesto que no basta con que se cambien los contenidos o la metodología. El contacto con la realidad diaria nos conduce a la conclusión de que los cambios tienen que producirse principalmente en una organización diferente de los grupos, una mayor dedicación horaria a su aprendizaje y una asunción de la realidad social por parte del profesorado. Todos estos cambios deben verse reflejados en los aspectos académicos.

Debe haber un equilibrio entre el desarrollo de actitudes y destrezas que permitan a todos los alumnos seguir progresando en sus aprendizajes futuros y la adquisición de conocimientos.

El currículo en general y el de matemáticas en particular debe perseguir la satisfacción y el desarrollo personal pero también la satisfacción de las necesidades de la sociedad (integración de los alumnos en la sociedad, formación de trabajadores, profesionales, científicos, etc. que aseguren el progreso e independencia económica de nuestro país).

El currículo, la organización escolar, la evaluación, etc. deben reconocer el valor del esfuerzo personal como base del aprendizaje pero a la vez deben asegurar la compensación de desigualdades de base entre todos los alumnos.

Sin embargo, todas las propuestas que podemos leer en el Libro Verde aparecen como una declaración de intenciones que debe concretarse. Creemos que, precisamente esa concreción, será lo que realmente suponga un cambio y una mejora del sistema actual.

El esfuerzo de la Administración en la mejora de la enseñanza que se refleja en el documento del MEC debería ser algo más que una afirmación genérica como la que se realiza en la página 23: situar la inversión en educación a lo largo de la próxima década en la media de los países de nuestro entorno. Creemos que es necesaria una mayor concreción en forma de una ley de financiación de las reforma, con un calendario explícito de aplicación y de cantidades comprometidas.

Las líneas que vienen a continuación inciden en estos aspectos y se refieren a ciertos aspectos con una mayor concreción.

Educación Infantil y Primaria

En las propuestas que realiza el documento para el segundo ciclo de la Educación Infantil se menciona una aproximación a la lecto-escritura, lengua extranjera y uso del ordenador.

Creemos que deben mencionarse conocimientos de tipo prematemático. Por ejemplo, proponer que dichos alumnos hayan desarrollado la capacidad de contar verbalmente colecciones relativamente grandes (más de 10).

En el apartado de Primaria se cita el aprendizaje de las matemáticas solamente cuando se habla de los “aprendizaje instrumentales básicos” y el aprendizaje matemático básico sigue siendo el cálculo.

Esto desvela una concepción de lo que se debe aprender totalmente desfasada y que orienta la enseñanza en estos niveles a un aprendizaje repetitivo y mecanicista de algoritmos de cálculo, esfuerzo que los alumnos abandonan rápidamente cuando entran en contacto con las calculadoras y que no les ayuda a saber decidir para qué sirven las operaciones aritméticas. Este tipo de conocimiento debe constituir el aprendizaje matemático básico, en lugar del anterior, el de las reglas de cálculo.

Distribución de horas en los diferentes cursos

Educación Secundaria Obligatoria

1er y 2º cursos:
Compartiendo la idea del documento sobre la reducción del número de profesores que atiendan a los grupos de alumnos del primer ciclo de secundaria, (propuesta 3.4) y teniendo en cuenta el carácter instrumental de la asignatura y el nuevo enfoque metodológico derivado de la anunciada generalización del uso del ordenador en el aula (lo que supone un mayor volumen de trabajo interactivo para cada alumno), se sugiere que se imparta **1 hora diaria de matemáticas** en cada uno de los dos cursos.

3er y 4º cursos:
Por las razones expuestas anteriormente, también se proponen **4 horas semanales** en 3º y 4º de las actuales **Matemáticas B** y **3 horas semanales** de las actuales **Matemáticas A.**

También debe mantenerse el Taller de Matemáticas, puesto que es una de las pocas materias en las que los alumnos aprenden en clase a “saber hacer” Matemáticas y, gracias al esfuerzo sistemático y generalizado del profesorado, constituye un paradigma del trabajo en el aula con la metodología constructivista propugnada por la LOGSE. El Taller debe poder ofertarse en una doble vertiente: como *refuerzo* de aspectos básicos o como *profundización y ampliación*.

Bachillerato

Modalidad de Ciencias:
Se proponen **5 horas semanales** en todos los grupos. Pues la mayoría de los alumnos que siguen esta modalidad son futuros estudiantes de las facultades de Ciencias e Ingenierías.

Se pide una hora más para todas las asignaturas de la especialidad, quitándola de una optativa, pues no es lógico que tengan la misma duración semanal asignaturas que no entran en Selectividad que otras que sí lo hacen y que, además, tienen una ponderación del 40% en la prueba de modalidad.

Modalidad de Ciencias Sociales:
Se proponen **4 horas semanales** en todos los grupos.

Actualmente, el programa que se desarrolla en el Bachillerato es muy extenso, lo que supone que nuestros alumnos no puedan conseguir, ni buena asimilación de los numerosos conceptos, ni la necesaria agilidad en determinadas destrezas.

Opcionalidad
La opcionalidad en el caso de las Matemáticas en el Bachillerato debe ser estudiada con rigor en función de los estudios a los que el alumno pueda acceder con la correspondiente elección. Hay que evitar a toda costa que se produzca la situación actual donde el sistema consiente situaciones que se convierten en fraudulentas para los alumnos. Hoy en día se permite que, no habiendo cursado en el 2º curso del Bachillerato ninguna materia de Matemáticas, los alumnos puedan acceder a carreras de carácter científico o técnico.

Materia optativa de contenidos estadísticos
La posibilidad de cursar una materia optativa de contenidos estadísticos y de cálculo numérico en el 2º curso del Bachillerato, se justifica sobre la base de las necesidades de formación del alumnado en este nivel educativo para seguir un amplio abanico de estudios posteriores. Su finalidad es el aprendizaje tanto de los conceptos como de los recursos correspondientes al tratamiento del azar, de la estadística y del cálculo numérico, imprescindibles para afrontar con las debidas garantías estudios superiores como los relacionados con las ciencias experimentales, los de ingeniería o los del ámbito de la economía.

Nueva materia destinada a conseguir una formación científica
Sobre la incorporación de una nueva materia, común a todas las modalidades del bachillerato, destinada a conseguir una formación científica imprescindible, creemos totalmente necesario que sea impartida por el profesorado de las áreas científicas. Debe arbitrarse una formación que complete la preparación del profesorado para llevar a cabo esta tarea con la calidad máxima exigible.

En el caso de que esta nueva asignatura no sea impartida por profesorado de Ciencias o de que no se provean instrumentos de preparación adecuados, no parece necesario incluirla.

Para dar más importancia a las ciencias basta con aumentar el número de horas y dar atención preferente a la formación de grupos, pues hay que tener en cuenta que los alumnos prefieren elegir asignaturas en el que el éxito esté más asegurado.

Prueba homologada
Al hablar de las características de la prueba homologada, la propuesta dice que serán estudiadas por una comisión integrada por las universidades, las Administraciones educativas y el Consejo de Coordinación Universitaria. ¿Dónde están los profesores de secundaria...? ¿Es que, acaso, su opinión no es autorizada en el asunto...?

Parece que todo el punto 7.4. es una nueva consagración de la situación actual de las Pruebas de Aptitud para el Acceso a la Universidad (PAAU).

Si la citada prueba se realiza sobre los contenidos del Bachillerato y es requisito para el ingreso en la Universidad, parece razonable que, tanto en el diseño de la prueba como en la composición de los tribunales, se encuentren representados paritariamente los profesores de cada uno de los dos estamentos afectados.

En todo caso, se impone la necesidad de una coordinación real entre la Enseñanza Secundaria y la Universidad que permita, desde el conocimiento mutuo, una colaboración para elaborar nuevos currículos en función de las necesidades formativas y desde la realidad de las aulas. Esta coordinación evitaría situaciones que se dan en la actualidad, que consideramos no deseables ni adecuadas y que dejan en evidencia las carencias del sistema educativo global, como es el caso del llamado “curso de nivel cero” en las universidades.

Organización de los grupos

Educación Secundaria Obligatoria
Es una realidad indiscutible el que en cualquier grupo de alumnos aparezca una gran variedad de niveles iniciales, de aptitudes, de actitudes y en especial del interés por el seguimiento de la asignatura.

La tarea de la atención a esta diversidad es compleja y no se trata de segregar a los alumnos confeccionando grupos estancos de alumnos mejores y de alumnos no tan mejores, sino de detectar las carencias lo antes posible y de atenderlas respetando los intereses de la mayoría.

Ha de poder conjugarse la formación de los alumnos con interés con la de aquellos cuyas capacidades no les permiten un seguimiento adecuado al grupo y con la de aquellos alumnos que no tienen ningún interés por el estudio. Nuestro deber es que todos ellos conozcan los aspectos indispensables para tener un futuro digno como ciudadanos.

Para poder formar los grupos es necesario disponer de un informe de los alumnos que van a incorporarse por primera vez al Centro, al final del curso académico anterior.

Para los *alumnos con desfases o graves problemas de aprendizaje*, se propone lo siguiente:

1^er^ y 2º cursos:
Grupos de eduación compensatoria organizados con los criterios actuales.

Grupos de alumnos con dificultades de aprendizaje que muestren actitud positiva hacia el estudio, siguiendo el modelo de diversificación y sin tener en cuenta la edad ni el informe positivo de las familias. Se propone que para estos grupos se distribuya el currículo en tres años para que los alumnos tengan posibilidad de superar este ciclo.

3^er^ y 4º cursos:
Mantener los programas de diversificación que existen actualmente pero con un mayor control sobre la consecución de sus objetivos.

El alumnado inmigrante se deberá escolarizar en función de sus conocimientos y no de su edad, y aquellos que desconozcan el idioma tendrían que ir a un centro dotado con el profesional adecuado para que se incorporen posteriormente a los centros ordinarios.

Para el *resto de los alumnos* se propone distribuir dos grupos de referencia en tres grupos de clase. Esto podría realizarse con dos tipos de agrupaciones diferentes, no necesariamente excluyentes:

- Distribución de dos grupos en tres, uno de ellos con menor tamaño, en el que estarían todos los alumnos con la asignatura del curso anterior pendiente. Cursarían además, de forma obligada, una optativa destinada a la recuperación de la materia del curso anterior.

- Distribución en grupos no muy numerosos de igual tamaño. En todos ellos podría haber alumnos con la asignatura pendiente del curso anterior. Todos ellos cursarían de forma obligatoria una optativa común a todos los grupos que les permitiría recuperar dicha asignatura.

Estas distribuciones deben tener una dotación real de profesorado en los cupos territoriales. No hay que dejar su solución al albur de que haya disponibilidad horaria en el centro o, lo que es peor, de que se utilice el incremento de 18 a 21 horas por semana para que el desdoble recaiga en la responsabilidad del profesorado o en las disponibilidades horarias de los Departamentos.

Alternativas a la Educación Secundaria Obligatoria

Los alumnos que, pese a todo, no quieran permanecer en la Educación Secundaria, previo acuerdo de los profesores del grupo y con el consentimiento de los padres, pueden derivarse a:

Programas de Iniciación Profesional que puedan finalizar con la obtención del título de Graduado en Educación Secundaria.

Programas de Garantía Social como los actuales en los que no se alcance este título directamente, sino con un examen posterior.

Optatividad

No parece oportuno aumentar la optatividad, aunque sí parece adecuado mantener el número de optativas que hay en la actualidad, intentando que se haga en función de los intereses de los alumnos y no de los profesores.

Tecnologías de la Información

El impacto previsto de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en la educación no ha tenido la trascendencia que cabría esperar. En primer lugar, por la insuficiente o nula dotación de ordenadores en nuestras aulas; en segundo, por la inercia del profesorado al no haber utilizado jamás estos medios como recursos didácticos.

Puede ocurrir de nuevo lo ocurrido con las calculadoras: son un instrumento cotidiano y, sin embargo, no se enseña su manejo ni se emplean, salvo en casos excepcionales.

La revolución informática que se desea, en el caso de las matemáticas, supone la incorporación de los ordenadores como recurso habitual y fundamental.

Para ello, urge trabajar en dos direcciones.

- Es preciso asegurar un soporte técnico en los centros que resuelva los continuos problemas que surgen y que, actualmente, se los resuelve algún profesor con estas capacidades, si existe.

- Conseguir la adecuada preparación del profesorado en los nuevos aspectos metodológicos, de contenidos y de orientación. Debe atenderse especialmente al profesorado de más edad.
- Crear verdaderos equipos de especialistas que elaboren el software adecuado que actualice y complete el ya existente, que es desconocido para un gran número de profesores.

Debe dotarse a los Centros de un número suficiente de aulas de informática comunes a todos los alumnos, y a todas las aulas de un ordenador con pantalla proyectable. El disponer de un ordenador en las aulas para cada alumno o para cada dos alumnos, como ya existe actualmente en varias Comunidades Autónomas, puede ser prematuro, además de conllevar un coste muy elevado, teniendo en cuenta la todavía escasa preparación del profesorado en las TIC. La progresiva incorporación de profesores jóvenes, más familiarizados con el uso de ordenadores, puede ser un factor positivo en esta tarea.

Se echa en falta en todo el documento una ley de financiación, pero especialmente en este caso. Solamente con una gran inversión en programas informáticos adecuados a cada materia con sus guías didácticas y con una decidida política de formación extensa del profesorado, podrán llevarse a cabo los objetivos propuestos.

El profesorado

Ningún cambio en la enseñanza es posible sin tener en cuenta a los profesores. A nuestro entender, deben modificarse urgentemente las carreras de Formación del Profesorado en los diferentes niveles, aunque el cambio más urgente debe realizarse en los programas de formación de los profesores de Educación Primaria. Es imprescindible crear una especialidad de Matemáticas en la titulación de Maestro.

Debe concretarse una importante coordinación entre los estudios y los centros de Primaria y de Secundaria.

También parece imprescindible que el período de prácticas de los profesores en formación se amplíe.

En Primaria y Secundaria también parece deseable formar a los profesores en ejercicio con cursos relacionados con su realidad en las aulas. Se requiere una modificación de los planes de estudio que incorporen una formación didáctica, metodológica, de recursos y una mayor duración para las prácticas que serán tutoradas por profesores de calidad.

En cuanto a la formación continua del profesorado es necesario revisar el caduco modelo actual. Los Centros de Profesores y Recursos, dinamizadores del profesorado en el momento de implantación de la LOGSE, hoy languidecen. Por ello, resulta obligada la revisión a fondo tanto de sus funciones como de su estructura.

La creación, dentro o fuera del seno de los Centros de Profesores, de estructuras semejantes a los IREM franceses, se hace particularmente necesaria para impulsar la mejora de la Educación matemática española, tan mal parada en informes internacionales tan autorizados como el Proyecto Pisa (OCDE).

Un *Estatuto de la función pública docente* debería contemplar, entre otros, aspectos como los siguientes:

- Una valoración del trabajo del profesorado en el aula mediante incentivos económicos y académicos, pues de lo implicados y valorados que se sientan los profesores va a depender el éxito de esta reforma.

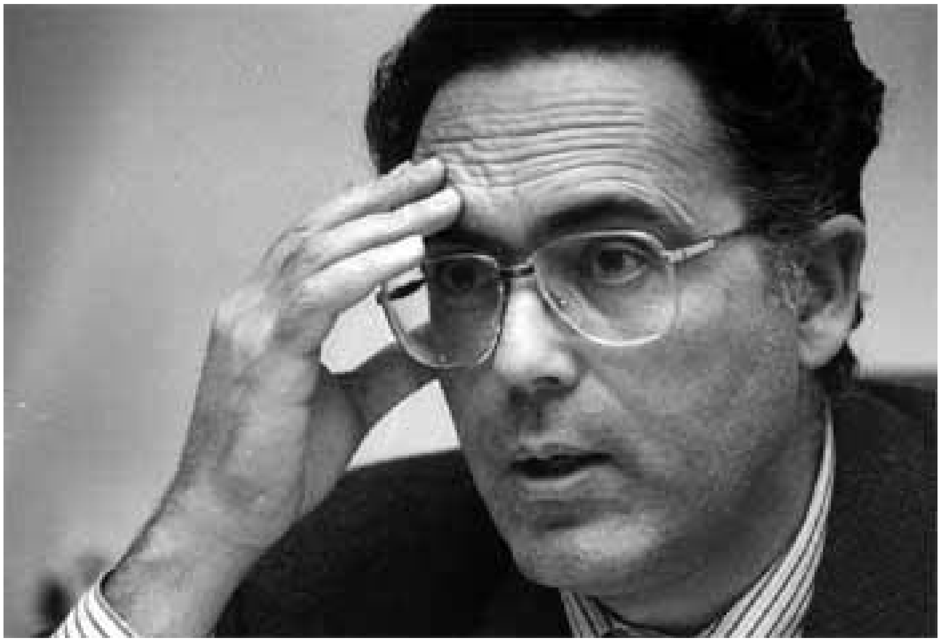
- El establecimiento de un nuevo modelo de la carrera docente. Sin embargo, en la actualidad no puede hablarse con propiedad de un modelo en vigor. No parece aconsejable dar ese nombre al sistema actual, que prima económicamente el cumplimiento de cada seis años de servicios y 100 horas de formación.

En este nuevo sistema de carrera docente, resulta imprescindible que a los sucesivos escalones que establezca, se acceda a través de condiciones de mérito profesional y no sólo la antigüedad. Esa función ya la tienen encomendada los trienios. La promoción dentro de la carrera docente debe suponer, además de la mejora retributiva a la que alude la propuesta, una mejora profesional con la correspondiente adquisición de nuevas responsabilidades. Por ejemplo, la formación inicial de profesores o el acceso a las Escuelas Universitarias.

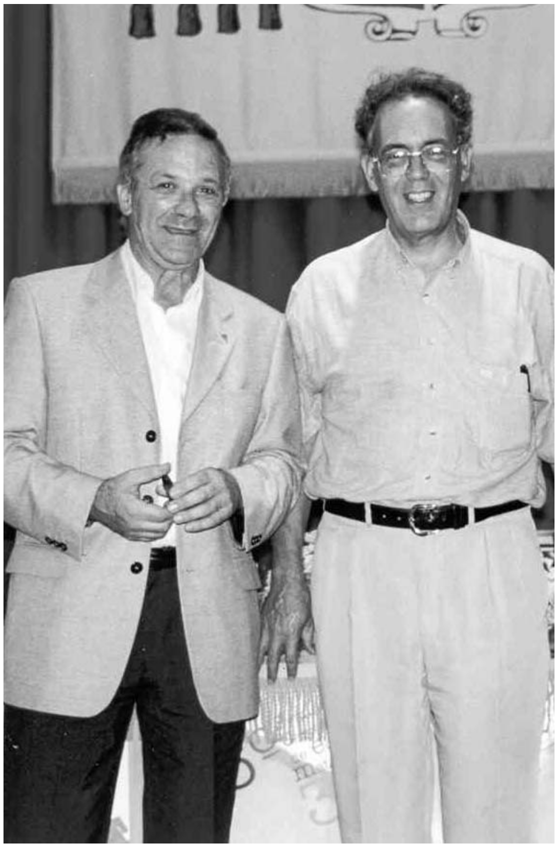
Las incorporaciones, a tiempo parcial y total, del profesorado de Secundaria a la Universidad (punto 11.4.), han de constituir nuevos escalones en su carrera docente. Los profesores de Secundaria de los puestos más elevados en el escalafón de la carrera docente, deberían tener prioridad en el acceso a las plazas vacantes o a las plazas de nueva creación en los Departamentos correspondientes de las Escuelas Universitarias.

En cuanto a la promoción de los profesores de Primaria (especialmente a los especialistas de los cursos 1º y 2º de ESO) debería contemplarse un proceso de desarrollo profesional que les permitiera llegar a ocupar puestos de trabajo en la Secundaria

También desde dichos puestos más elevados de la carrera docente, se debería acceder a la Inspección Educativa de la materia. ■



MdG



Homenaje a Miguel de Guzmán en la UCM

Durante los días 13, 14 y 15 de diciembre de 2004 tuvo lugar en la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid un homenaje a la memoria del que fue su profesor Miguel de Guzmán Ozámiz, fallecido el 14 de abril de 2004, con el título *MATEMÁTICAS: Investigación y Educación, un homenaje a Miguel de Guzmán*.

Cartel elaborado por Miguel de Guzmán hijo.

Los actos fueron organizados por la Facultad de Ciencias Matemáticas y por el Departamento de Análisis Matemático de la Universidad Complutense de Madrid, contando con la colaboración de las siguientes instituciones:

- Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid
- Real Sociedad Matemática Española (RSME)
- Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM)
- Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)
- Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (RACEFyN)
- Colegio de Doctores y Licenciados (CDL)
- Subcomisión Española de la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI-ES)
- Cooperación Universitaria Española (CUES)
- Fundación Vodafone-España
- Grupo Anaya
- Nivola.

El Comité organizador estuvo compuesto por las siguientes personas: Carlos Andradas (UCM), Fernando Bombal (UCM), Ildefonso Díaz (UCM), María Gaspar (UCM), Inés Gómez-Chacón (UCM), Eugenio Hernández (UAM), Joaquín Hernández (UCM), Raquel Mallavibarrena (UCM), Francisco Martín Casalderrey (FESPM), José Mendoza (UCM), Tomás Recio (ICMI-ES), Jorge Rodríguez Piñero (CUES), Baldomero Rubio (UCM) Mercedes Sánchez (UCM), Modesto Sierra (SEIEM), Fernando Soria (UAM), Juan Tejada (UCM) y Florencio Villarroya (FESPM).

José Mª Martínez Ansemil
Departamento de Análisis Matemático, UCM

Acto de inauguración.
De izquierda a derecha: D. Javier del Arco, D. Salvador Ordóñez,
D. Carlos Berzosa, D. Juan Tejada y D. José Mendoza.
En la imagen de fondo aparece Miguel, es el segundo por la izquierda.
Foto de Jesús de Miguel

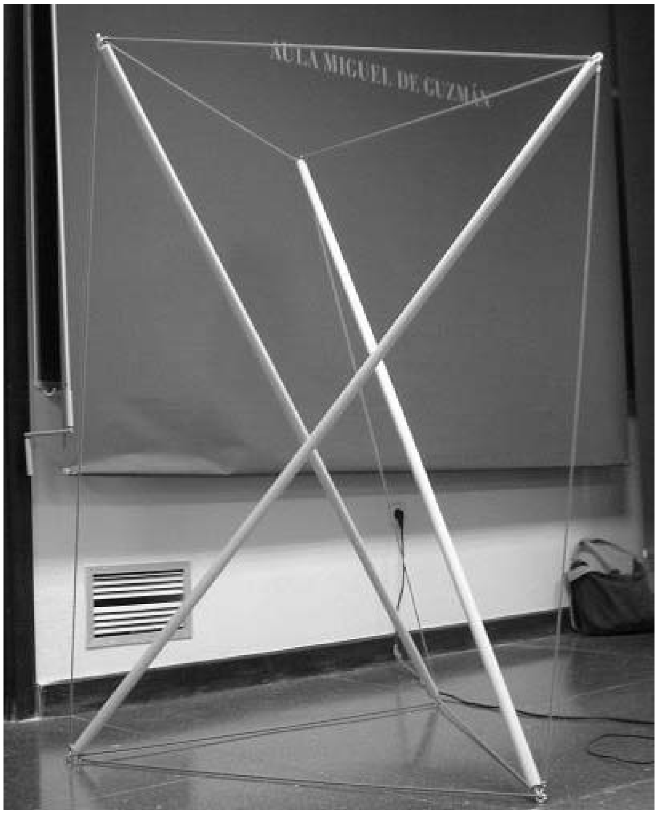
El acto inaugural tuvo lugar a las 16 horas del día 13 en el Salón de Actos de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la UCM y fue presidido por el Excmo. y Mgfco. Sr. Rector de la UCM. En él intervinieron las siguientes personas: profesor José Mendoza, Director del Departamento de Análisis Matemático de la UCM; D. Javier del Arco, Asesor Técnico de la Fundación Vodafone-España; Ilmo. Sr. D. Juan Tejada, Decano de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la UCM; Excmo. Sr. D. Salvador Ordóñez, Secretario de Estado de Universidades e Investigación y el Excmo. y Mgfco. Sr. D. Carlos Berzosa, Rector de la UCM.
A continuación se procedió a la inauguración del Aula "Miguel de Guzmán" en la Facultad de Ciencias Matemáticas de la UCM en la que se descubrió una placa con su nombre.
Después de una breve pausa tuvo lugar una sesión de testimonios personales coordinada por la profesora Capi Corrales (UCM) en la que se presentó una semblanza de Miguel a cargo de los profesores Baldomero Rubio (UCM), María Luz Callejo (UAL) y Alfonsa García (UPM). Siguió un interludio musical a cargo del guitarrista Ricardo Ramírez Aranda, antiguo alumno y amigo de Miguel. En una primera sesión de testimonios personales intervinieron: Alexandra Bellow (Northwestern University, Chicago); María Vela (Universidad Europea de Madrid), antigua alumna de Miguel; Leoncio Fernández, antiguo compañero de estudios de Miguel y Magdalena Walias (UAM), antigua alumna de doctorado de Miguel. Se proyectó a continuación un vídeo editado y presentado por Ildefonso Díaz (UCM) recogiendo diversas entrevistas realizadas a Miguel en televisión.

En una segunda sesión de testimonios intervinieron: José Joaquín Arrieta (CUES) y José Manuel Gamboa (UCM). A esta sesión siguió la interpretación al violín por María Vela de la obra Aithār(na) compuesta especialmente para la ocasión por el alumno de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la UCM y compositor, José Luis Besada. Se concluyeron los actos de este día con unas emotivas palabras de los hijos y la esposa de Miguel.

La esposa e hijos de Miguel. Foto de Alfonso Casal

Los días 14 y 15 se celebraron sendas sesiones de Investigación y de Educación Matemática. En la sesión de Investigación Matemática del día 14 por la mañana, que estuvo presentada por el profesor Fernando Soria (UAM), intervinieron los profesores Carlos Segovia (Instituto Argentino de Matemática, Buenos Aires), quien habló sobre *Operadores maximales del semigrupo de Laguerre con índices negativos* y Guido Weiss (Washington University-St. Louis) cuyo tema fue *Ondículas creadas por composición de dilataciones y traslaciones*. La sesión de Educación Matemática tuvo lugar por la tarde y fue presentada por el profesor Tomás Recio (ICMI-ES), en ella impartieron sendas conferencias los profesores Rafael Pérez Gómez (UGR) con el título *Una forma de pensar* y Claudi Alsina (UPC) con el título *El informe Gurb en el Madrid de 2504: Un ejercicio didáctico de matemática-ficción para profesorado realista*. A continuación se celebró una mesa redonda sobre *La Educación Matemática en España*, coordinada por el profesor Tomás Recio (ICMI-ES), en la que intervinieron: la profesora Carmen Azcárate (UAB); Dña. Alicia Delibes, Directora General de Ordenación Académica de la Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid, la profesora Inés Gómez-Chacón (UCM) y el profesor Modesto Sierra (SEIEM).

La sesión de Investigación Matemática del día 15 estuvo presentada por el profesor Eugenio Hernández (UAM), interviniendo la profesora Alexandra Bellow (Northwestern University), quien habló sobre *Ergodic averages revisited: The case when almost everywhere convergence fails* y el profesor Manuel Morán (UCM), quien habló sobre *Conjuntos autosemejantes*. La sesión de Educación Matemática estuvo presentada por los



Estructura de tensegridad en el Aula Miguel de Guzmán realizada en honor a Miguel por los alumnos del IES Juan de la Cierva (Madrid). Foto de Alfonso Casal

profesores Francisco Martín Casalderrey (FESPM) y Tomás Recio (ICMI-ES). En ella intervinieron la profesora Emma Castelnuovo, antigua profesora de matemáticas de Enseñanza Media en Roma en la Scuola Media Tasso, quien habló sobre *Conocer a través de las matemáticas: Lenguaje y realidad* y el profesor Luis Rico (UGR) cuyo tema fue *Educación en valores y calidad en la enseñanza de las matemáticas*. A continuación el profesor Eugenio Roanes (UCM) presentó el *CD Seminario Ramón Areces* en el que se recoge el Simposio internacional *Matemáticas y Nuevas Tecnologías: qué aprender, cómo enseñar*, organizado por Miguel y celebrado en Madrid en diciembre de 2003. Después tuvo lugar una mesa redonda sobre *Qué matemáticas para todos en el siglo XXI,* moderada por el profesor Francisco Martín Casalderrey (FESPM), en ella intervinieron el profesor Luis Balbuena (Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "Isaac Newton"); el profesor Antonio Pérez (Sociedad Madrileña de profesores de Matemáticas "Emma Castelnuovo") y D. Vicente Riviere, Subdirector General de Relaciones con las Administraciones Territoriales del Ministerio de Educación y Ciencia.

Por último, tuvo lugar un acto de clausura presidido por el Ilmo. Sr. D. Carlos Andradas, Vicerrector de Ordenación Académica e Investigación de la Universidad Complutense de Madrid, en el que intervinieron además: el profesor José Mendoza, Director del Departamento de Análisis Matemático, D. Vicente Riviere, Subdirector General de Relaciones con las Administraciones Territoriales del MEC y el Ilmo. Sr. D. Juan Tejada, Decano de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la UCM. Todos ellos hicieron constar su agradecimiento a todos los que participaron en la organización, a quienes intervinieron en los actos y a las instituciones que colaboraron.

Las distintas sesiones contaron con gran afluencia de público.

Se va a editar, por gentileza del Grupo Anaya, un libro recogiendo las intervenciones en el homenaje. Las personas interesadas en una copia pueden solicitarla enviando su dirección postal a la dirección de correo electrónico *jm_ansemil@mat.ucm.es*, indicando en el asunto del mensaje: Libro Homenaje Guzmán. ■

XII JAEM

JORNADAS SOBRE EL APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Albacete, 4 al 7 de Julio de 2005

Matemáticas con imaginación para un mundo real

CONVOCA:
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

ORGANIZA:
Sociedad Castellano Manchega de Profesores de Matemáticas

XII JAEM
Albacete, 4 a 7 de Julio de 2005.
Segundo anuncio

COMITÉ DE PROGRAMA DE LAS XII JAEM:

D. Pep Sales Rufí, Secretario General de la FESPM.
D.ª Carmen da Veiga, de la Sociedad Madrileña *Emma Castelnouvo.*
D. Luis Balbuena Castellano, de la Sociedad Canaria *Isaac Newton*.
D. Serapio García Cuesta, de la Sociedad Castellano-Manchega.
D. Juan Emilio García Jiménez, de la Sociedad Castellano-Manchega.
D. Salvador Guerrero Hidalgo, de la Sociedad Andaluza *Thales.*
D. José A. Mora Sánchez de la Sociedad Valenciana *Al-Khwarizmi*.

COMITÉ ORGANIZADOR:

Serapio García Cuesta (Presidente), **Juan Emilio García Jiménez, Santiago Turégano Moratalla, Bernardino del Campo López, Antonio Bueno Aroca, Ramón Cuenca Cuenca, Jesús García Segovia, Juan Martínez-Tébar Giménez, Margarita Marín Rodríguez, Mercedes Fernández Guerrero, Paloma Castedo Garví, Martín Fernández Carrión, Joaquín Jiménez Ramos, Miguel Adán Oliver, Paloma Gavilán Bouzas, Mª Esther López Herráiz, Isabel Bustos Molina, Vicente Pascual Fidalgo, Juan Carlos Cortés, Julio Eugenio García Morillas.**

Estructura general

Las XII JAEM se organizan en torno a las siguientes actividades:

- Cuatro Conferencias Plenarias.
- Ocho Núcleos Temáticos que se desarrollan en ponencias. Comunicaciones. Se centrarán preferentemente en los Núcleos Temáticos.
- Grupos de debate.
- Las Matemáticas en el Quijote.
- Talleres. La propuesta indicará si es de una o de dos horas.
- Zoco matemático. Puede presentarse cualquier tipo de material, póster, escultura, etc.
- Exposiciones. Se contará con interesantes exhibiciones de temas relacionados con la Educación Matemática o con la matemática en general y sus relaciones con otras áreas.
- Entrega del Premio Gonzalo Sánchez Vázquez.
- Homenaje al Profesor Miguel de Guzmán.
- Actividades culturales. Se presentará a los asistentes alguna muestra de la cultura castellano-manchega. La jornadas se insertarán dentro de la celebración del IV Centenario del Quijote.
- Exposición y venta de materiales didácticos por parte de casas comerciales, de la Federación y de las Sociedades Federadas.

Presentación

Entre los días 4 al 7 de Julio de 2005, en Albacete, un lugar de La Mancha cuyo nombre y fechas siempre gustará recordar, vamos a celebrar el más importante Congreso sobre educación matemática de los que se organizan en toda España, las XII JAEM (Jornadas sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas).

Las JAEM son un foro de debate, un lugar de reflexión, un espacio y un tiempo de contactos para mejorar la competencia didáctica, metodológica y de recursos de los profesores y profesoras de Matemáticas.

La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) invita a participar en las XII JAEM a todo el profesorado de Infantil, Primaria, Secundaria y Universidad. Todos enseñamos y todos podemos aprender de todos.

La Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas (SCMPM) ha aceptado el honor de organizar este congreso, poniendo toda su ilusión y esfuerzo para que éstas sean unas JAEM importantes y útiles para el profesorado y la sociedad. Trataremos de hacer realidad aquella recomendación de F. Pessoa: Pon todo lo que eres en lo mínimo que hagas.

Como Presidente de la Sociedad Castellano Manchega de Profesores de Matemáticas, quiero expresar mi deseo de que la responsabilidad asumida al comprometernos a organizar el ***Congreso XII Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*** *se vea compensada por el éxito de las mismas. Asimismo, nuestro esmero en tratar de conseguir un evento con el máximo nivel profesional se relaciona con la celebración durante el 2005 del IV Centenario del Quijote, que esperamos sirva para complementar la formación cultural que ofrezcamos en el congreso.*

Deseamos, además, que os quede un grato recuerdo de la estancia en la región de Castilla La Mancha, no sólo por el entorno geográfico, sino por el nivel de relaciones humanas y profesionales que las JAEM siempre propician.

Se está realizando un importante esfuerzo para conseguir ofertas de alojamiento que tengan una alta relación calidad/precio con el fin de que el aspecto económico no sea un elemento disuasorio para compartir estos días con nosotros.

Confiamos en que la buena voluntad y el esfuerzo que está realizando el equipo de trabajo creado en torno a las XII JAEM, se vean recompensados con una participación importante y que, al regresar a vuestros lugares de origen, lo hagáis totalmente satisfechos.

Serapio García Cuesta
Presidente de la FESPM

Homologación

Se ha solicitado que las XII JAEM sean homologadas por la Consejería de Educación de la JCCM, lo que supondrá su reconocimiento estatal a efectos de sexenios, concursos, etc. Se homologarán 22 horas. También se ha solicitado que sean reconocidas por la Universidad de Castilla La Mancha con dos créditos de libre configuración.

Sedes

Paraninfo de la Universidad de Castilla La Mancha en Albacete. Facultades de Derecho y Empresariales y Escuela de Formación del Profesorado.

Conferencias Plenarias

Están dirigidas a todos los asistentes a las XII JAEM y no coinciden en el horario con ninguna otra actividad. Las conferencias plenarias serán desarrolladas por:

D. Jorge Wagensberg.
D. Guy Brouseau.
D. Francisco Martín Casalderrey.
D. Claudi Alsina Cátala.

Núcleos Temáticos

1. **Las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) al servicio del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas**. Ponentes: D. Antonio Guzmán, D. Tomás Queralt/D. Julio Rodrigo, D. Sergio Darias y D. Rafael Bracho.
2. **Seguimos con los números y las funciones.** Ponentes: Dña. Alicia Bruno Castaneda, Dña. Ana García Azcárate, Dña. Mª Luz Callejo de la Vega, D. Ángel Ramírez/D. Carlos Usón y D. David Barba Uriach.
3. **Geometría: La Bella Durmiente. La Geometría ¿sigue olvidada?** Ponentes: D. Floreal Gracia Alcaine, D. Santiago López Arcas, D. Manuel Pazos Crespo y D. Pedro Miguel González Urbaneja.
4. **Estadística y Probabilidad. Cómo impedir el odio a la Estadística.** Ponentes: D. José Luis Álvarez García, D. J.A. García Cruz y Dña. Belén Cobo.
5. **Matemáticas básicas. ¿Qué es eso? ¿Qué Matemáticas necesitan los profesionales? Currículo.** Ponentes: D. Vicente Rivière, Dña. Carmen Batanero., D. Rafael Pérez y D. Antonio Marín.
6. **Materiales para construir las matemáticas. La matemática se hace tangible.** Ponentes: D. Antonio Ledesma López, D. Luis Berenguer, D. Pepe Miras y D. Santiago Turégano Moratalla.
7. **El papel de las pruebas y competiciones matemáticas en la educación matemática. Diversidad, precocidad, talentos matemáticos. Proyecto PISA.** Ponentes: Dña. María Gaspar, D. Luis Rico, D. Tomás Recio Muñiz, D. Salvador Caballero, D. Pedro J. Martínez y D. Raúl Ibáñez.
8. **Las matemáticas en la Educación Infantil y Primaria**. Ponentes: Dña. Mª Antonia Canals, Dña. Mequé Edo Basté, Dña. Margarita Marín y D. José Antonio Fernández Bravo.

Grupos de Debate

En principio existirán los siguientes:

La enseñanza de las Matemáticas en la Universidad.
Integrado por: Florencio Villarroya; José Antonio Montero; Luís Miguel García Rafi; Sixto Romero; Joan Gómez (Coordinador).

La formación del Profesorado.
Integrado por: Santiago Fernández; Juan Emilio García; Salvador Guerrero; Tomás Queralt; Mª Jesús Luelmo (Coordinadora).

Talleres

Son cursos de una o dos horas en los que el objetivo principal es la manipulación interactiva de materiales, software, la exposición de actividades concretas, etc.

Normas para las propuestas de realización de Talleres:

1. Los participantes a las XII JAEM pueden presentar propuestas de realización de Talleres durante las mismas.
2. Quienes quieran presentar propuestas, deberán enviar una descripción del Taller, indicando de la manera más detallada posible, el material que ha poner a su disposición el Comité Organizador de las XII JAEM.
3. **El plazo de admisión de propuestas finaliza el día 15 de abril de 2005**. A continuación, se confirmará a los autores si su propuesta ha sido aceptada por el Comité de Programa y si existe algún problema con el material que ha sido solicitado al Comité Organizador.
4. Una descripción de los Talleres aceptados y realizados se publicará en las actas de las XII JAEM. Para preparar este documento se deberán seguir las normas para la publicación establecidas en este anuncio.
5. Se ofertan dos posibilidades de tiempo: taller de una hora y taller de dos horas. La que se elija debe especificarse en la descripción del Taller.

Comunicaciones

Consiste en intervenciones breves en las que se podrá exponer y compartir, transmitiendo a otros compañeros puntos de vista sobre educación matemática, experiencias de aula, etc.

Normas para la presentación de Comunicaciones:

1. Las Comunicaciones deben estar referidas a la enseñanza o el aprendizaje de las Matemáticas en cualquiera de los niveles educativos.
2. Han de encuadrarse en los Núcleos Temáticos propuestos aunque también se ofrece la posibilidad de hacerlas sobre cualquier otro tema.
3. Deben ser inéditas, no habiéndose publicado con anterioridad.
4. Si es de varios autores, al menos uno ha de estar inscrito. El certificado en este caso, será colectivo.
5. La admisión de los trabajos quedará supeditada a la decisión del Comité de Programa.
6. El plazo de admisión finaliza el día 15 de abril de 2005.
7. Deberá expresarse con claridad qué tipo de material de apoyo necesita para su exposición (retroproyector, proyector de opacos, de diapositivas, video, cañón, ordenador, ordenadores en red, software, etc.). Todas las presentaciones informáticas deben venir en formato PowerPoint 2000. En otros supuestos, consultar con la Organización.

8. Se dispondrá de 15 minutos para su exposición más 10 de coloquio con los asistentes.
9. Se publicarán en las Actas de las XII JAEM, siempre que se adapten a las condiciones que se especifican en las normas para la publicación establecidas en este documento.
10. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de una Comunicación.

Zoco Matemático.

El *Zoco Matemático* pretende ser una oferta que se hace a todos aquellos asistentes que deseen disponer de un espacio físico y horario en el que puedan presentar materiales didácticos, recursos, programas informáticos, póster, etc. Se trata, junto con las *Comunicaciones* y *Talleres*, de un canal ideal para tomar parte activa en las XII JAEM. El Comité Organizador tratará de ayudar y orientar a quienes se animen a hacer una presentación en el *Zoco Matemático*.

Normas de participación en el Zoco:

1. Quien desee hacer uso del Zoco deberá enviar una descripción de lo que presentará, así como una relación detallada del material que lo compone: paneles, tamaño de las piezas que presenta, etc.
2. Ha de indicar con claridad qué desea que la organización ponga a su disposición: mesas, lugar para colgar poster, ordenador, etc.
3. El plazo de admisión de peticiones para el Zoco termina el 15 de abril de 2005. Posteriormente se les comunicará si se ha aceptado su participación y si existe algún problema con las peticiones efectuadas.
4. Se presentará una memoria de lo expuesto en el Zoco para publicarlo en las Actas de las XII JAEM, siempre que se adapte a las condiciones que se especifican en las normas para la publicación establecidas en este documento.
5. Los solicitantes se comprometen a montar y a desmontar su material en el espacio que se le asigne y a estar presentes en el lugar en los momentos que se les indique para que los asistentes puedan dialogar con ellos sobre lo expuesto.
6. Para transportar los materiales hasta las JAEM, deberán ponerse en contacto con el Comité Organizador para informarles sobre la forma de hacerlo y de solicitar, en su caso, ayuda económica.

Actas

La publicación en las Actas de las XII JAEM de los textos de las comunicaciones, lostalleres y del zoco matemático está sujeta a la aceptación y cumplimiento de las siguientes normas.

Normas de publicación en las Actas:

1. Se enviarán tres copias en papel, formato DIN-A4, a:
   XII JAEM
   Avda de España 14, 5ª planta
   02005 Albacete, ESPAÑA
2. Ocuparán como máximo 5 páginas DIN-A4, equivalentes a 11000 caracteres aproximadamente, incluyendo notas, referencias bibliográficas, fotografías, gráficos, etc.
3. Con el objetivo de facilitar la posterior elaboración de las Actas, enviar un archivo al correo electrónico: xiijaem@albacete.org
4. El archivo deberá ser en formato MS-Word 2000 que se ajuste a las siguientes características:
   Tipo: Times New Roman de 12 puntos. Espaciado e interlineado sencillo. Evitar el uso de características especiales como letra capital, viñetas, estilos, tabuladores, sangrías, columnas... No usar subrayados. Los gráficos e imágenes se incluirán en el propio documento.
5. En el asunto del correo electrónico, escribir el título del trabajo y en el cuerpo del mensaje indicar estos datos:
   Nombre y apellidos del autor o autores.
   Nivel educativo del contenido del documento.
   Dirección postal.
   Teléfono de contacto.
   Medios necesarios para su exposición.
   Un resumen en castellano de 10 líneas como máximo.

Inscripciones

Cómo formalizar la inscripción

Abonar la cuota de inscripción mediante:

- Transferencia a la cuenta bancaria de Caja Castilla La Mancha, Número: 2105–1630–62–0142003006, cuyo titular es Sociedad Castellano Manchega de Profesores de Matemáticas XII JAEM (no olvide indicar con claridad su nombre y apellidos).
- Talón nominativo a favor de SCMPM.

Rellenar el boletín de inscripción y enviarlo, junto con la copia del justificante de pago de la cuota o el talón nominativo a favor de la Sociedad Castellano Manchega de Profesores de Matemáticas en la dirección indicada más arriba.
También puede realizarse la inscripción usando el correo electrónico, siguiendo las instrucciones de la página web.

Cuotas de inscripción

Cuotas de inscripción	Hasta el 15 de mayo de 2005	Después del 15 de mayo de 2005
Socios de la FESPM o de las Sociedades que han firmado convenio con ella	90 €	120 €
No socios	150 €	190 €

Anulaciones

Sólo serán atendidas aquellas solicitudes de reembolso de la cuota de inscripción que se realicen antes del 15 de mayo de 2005.

Alojamiento

La agencia oficial de las XII JAEM es Viajes Halcón, la información de su oferta está disponible en la página *www.albacete.org/xiijaem* y en cualquier oficina de la agencia en toda España. Se han conseguido a través de ella los mejores precios posibles así como importantes descuentos en RENFE y en viajes por avión.
El uso de la agencia oficial no es obligatorio, estando disponibles, en la página del congreso, teléfonos de establecimientos hosteleros de Albacete, para que cualquier persona interesada pueda gestionar por su cuenta el alojamiento.

Programa de acompañantes

Lo gestiona la agencia oficial de las Jornadas, Viajes Halcón. Su contenido se puede ver en la página web de las Jornadas. Precio por persona: 95€. ■

XII JAEM - BOLETÍN DE INSCRIPCIÓN

(Los datos marcados con un * son opcionales)

Apellidos:	Nombre:	NIF:
Dirección:		CP:
Ciudad:	País:	Teléf:
Correo Electrónico:		Fax:
¿Es miembro de alguna Sociedad perteneciente a la *Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM)*? ☐ No ☐ Sí ¿Cuál?		
Nivel educativo en el que trabaja:		
¿Presenta ... ... ☐ Comunicación? ... ☐ Taller? ... ☐ Zoco Matemático? Nivel educativo al que va dirigido:		
* Temas de su Interés (no necesariamente han de coincidir con los núcleos temáticos de las XII Jaem):		
* Acompañantes (nombre completo):		
* Si le interesa contactar con asistentes que tengan sus mismas aficiones, indique las suyas: ☐ Filatelia. ☐ Mapas. ☐ Libros antiguos. ☐ Juegos. Otras:		
FORMA DE PAGO:		
☐ Talón nominativo nº	☐ Transferencia Fecha de ingreso:	

Para obtener más información sobre las

XII Jornadas sobre el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas Albacete, del 4 al 7 de julio de 2005

Correo postal:

SCMPM Sociedad Castellano Manchega de Profesores de Matemáticas
Avda de España, 14, 5ª Planta
02005 Albacete
ESPAÑA

Página web:

http://www.albacete.org/xiijaem

XXIII Concurso de Resolución de Problemas

convocado por

la

Sociedad *Puig Adam* de Profesores de Matemáticas

y el

Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Letras

BASES DEL CONCURSO

PRIMERA:

Los alumnos podrán participar en el Concurso en tres niveles:

a) *Primer nivel*: alumnos de 3º de ESO.
b) *Segundo nivel*: alumnos de 4º de ESO.
c) *Tercer nivel*: alumnos de 1º Bachillerato

SEGUNDA:

Las pruebas consistirán en la resolución de Problemas de Matemáticas (los mismos para todos los concursantes de un mismo nivel) y se realizarán en la mañana del sábado *11 de junio del 2005* a partir de las 10 horas en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

TERCERA:

A los mejores de cada nivel, se concederán diplomas y premios.

CUARTA:

Los Centros que deseen presentar alumnos (hasta un máximo de seis) deberán realizar la preinscripción antes del día 11 de Mayo del 2005, dirigiéndose por carta o por fax al presidente de nuestra Sociedad:

Prof. Javier Etayo Gordejuela
Departamento de Álgebra
Facultad de Ciencias Matemáticas
28040-Madrid
Fax: 91 394 4662

En la preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados. Si algún centro desea presentar más de seis alumnos, debe solicitarlo antes de la fecha mencionada anteriormente.

QUINTA:

Los centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales individuales en las que se haga constar que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas, así como el curso en que están matriculados en el año académico 2004-2005.

Como en años anteriores, la FESPM convoca la Olimpiada Matemática Nacional para el alumnado de 2º de Educación Secundaria Obligatoria*. La presente edición será organizada por la Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas (SMPM)* Emma Castelnuovo *y tendrá lugar del 26 al 30 de junio.*

La SMPM presentó su candidatura para la organización de esta Fase Nacional en la Olimpiada de La Rioja, hace dos años, con el fin de contar con un periodo de tiempo suficiente para afrontar este evento. Los contactos y negociaciones mantenidas desde entonces con la Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid nos han garantizado el poder augurar un desarrollo exitoso de la actividad, agradeciendo desde aquí su apoyo tanto institucional como económico.

Asimismo, contamos también con el apoyo y la colaboración del Ayuntamiento de Madrid a quien agradecemos su colaboración.

A lo largo de los cinco días previstos de duración de la Olimpiada Matemática Nacional los participantes, además de realizar pruebas específicas de Matemáticas, van a disfrutar con otro tipo de actividades tales como; excursiones, visitas turísticas etc. en las que se tratará de reflejar la presencia de las Matemáticas en distintos ámbitos tales como la naturaleza, el arte o la ciencia. Todo esto, con el fin de lograr la consecución de los objetivos fundamentales de esta actividad, que son:

- Fomentar entre los estudiantes el gusto por las Matemáticas, así como presentar una visión de las mismas complementaria y más realista que la utilizada en el aula.
- Ofrecer a los alumnos la posibilidad de disfrutar con la resolución de problemas matemáticos en los que se requiere el uso de diversas estrategias de pensamiento.
- Contribuir a la mejora de la enseñanza y del aprendizaje de las Matemáticas en la escuela apoyando la innovación entre el profesorado.
- Fomentar el espíritu cooperativo, potenciando la participación en equipo.
- Favorecer las relaciones de amistad y conocimiento entre jóvenes de diversas Comunidades Autónomas.
- Dar a conocer al alumnado participante, así como al profesorado acompañante, las singularidades culturales, geográficas y humanas de la Comunidad de Madrid.

La actividad contará con la participación de los representantes de Sociedades pertenecientes a las FESPM así como una serie de invitaciones a otras comunidades que no tienen constituida Sociedad de Profesores de Matemáticas y a diversos Centros Españoles en el extranjero.

PARTICIPANTES DE LAS SOCIEDADES PERTENECIENTES A LA FESPM: *Andalucía*: Seis alumnos y dos profesores. *Aragón*, *Asturias*, *Canarias*, *Cantabria*, *Castilla y León*, *Castilla La Mancha*, *Cataluña*, *Comunidad Valenciana*, *Extremadura*, *Galicia*, *La Rioja*, *Murcia* y *Navarra*: Tres alumnos y un profesor por cada una. *Melilla*: Dos alumnos y un profesor.
PARTICIPANTES INVITADOS: *País Vasco, Islas Baleares, Principado de Andorra y Escuelas españolas en Marruecos*: Dos alumnos y un profesor por cada uno.
PARTICIPANTES DE LA SOCIEDAD ORGANIZADORA: *Madrid*: Seis alumnos y dos profesores.

Esto hace un total de 61 alumnos y 22 profesores acompañantes que junto con los, entre 10 y 15 miembros de la SMPM que colaborarán en la organización de la Olimpiada, involucran en la actividad alrededor de 100 personas. ■

Equipo organizador de las Olimpiadas:
Carmen Calvo Aldea, Rosa Forniés Rejas, Alejandro González Prados *(Coordinador)*, **Lydia Vivas Arce**

XVI olimpiada matemática nacional
para alumnos de secundaria

Domingo, 26 de junio
- Recepción de los participantes en el Hotel Escuela de la Comunidad de Madrid.
- Inauguración de la Olimpiada: Entrega de credenciales, normas de funcionamiento y presentación del programa.
- Concurso de Fotografía Matemática.
- Visita a las exposiciones de Fotografía, Filatelia y Juegos Matemáticos.

MADRID
del 26 al 30 de junio

Lunes, 27 de junio
- Pruebas individuales.
- Visita guiada al Parque del Retiro.
- Primera parte de la prueba por equipos en el Parque del Retiro.

Martes, 28 de junio
- Excursión a La Pedriza. Visita al Centro de Interpretación de la Naturaleza y paseo por el Parque Regional de la Cuenca Alta del Manzanares.
- Segunda parte de la prueba por equipos.

Miércoles, 29 de junio
- Visita a *Cosmocaixa* y tercera parte de la prueba por equipos.
- Visita guiada a la ciudad de Madrid.
- Cena de despedida.

Jueves, 30 de junio
- Charla-conferencia a cargo de Antonio Pérez, Catedrático de Matemáticas del IES *Salvador Dalí.*
- Acto de entrega de obsequios.
- Clausura a cargo de la Ilma. Sra. D.ª Carmen González , Viceconsejera de Educación de Madrid.

NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, Apartado de Correos 19012, 28080 Madrid), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato DIN A-4.

2. Los gráficos, diagramas, fotografías y figuras se enviarán impresos en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración. Indíquense los créditos de las fotografías y dibujos.

2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original impreso ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos no serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.

4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de un máximo de 625 caracteres contando los blancos, que no necesariamente tiene que coincidir con la introducción al artículo. De este resumen se remitirá también su traducción al inglés.

5. Los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede) y el resumen en castellano y en inglés deberán ir escritos en una misma hoja aparte.

6. Se enviará también en soporte magnético (disco de tres pulgadas y cuarto con formato PC, CDRom o DVDRom) una copia de los archivo de texto que contenga el artículo y del que contega la hoja con los datos y los resumenes, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quieran incluir. La etiqueta debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda Microsoft Word para Windows o RFT. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF. Para las fotografías se recomienda archivos TIF o BMP y con una definición mínima de 600x600 puntos por pulgada cuadrada.

7. Al menos un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.

8. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.

9. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo y se incluirán al final del texto.

10. La bibliografía se dispondrá también al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:
    TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma*, n.° 20, 91-98.
    En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
    GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas*, Labor, Barcelona.
    En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
    VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2*, ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

11. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ... supone un gran avance (Hernández, 1992). Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ... según Rico (1993).

12. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como -en caso afirmativo- la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido.

13. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

Boletín de suscripción

Tarifas	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	25 €	10 €
Centros	40 €	15 €
Europa	50 €	20 €
Resto del mundo	60 €	22 €

Fotocopiar esta hoja y enviar:
por correo a: Revista SUMA. Apartado de correos 19012
E-28080 MADRID
por Fax al: 912 911 879
por correo-e a: suma_administracion@fespm.org

Deseo suscribirme a la revista SUMA:

Nombre y apellidos: NIF/CIF:

Dirección: Teléfono:

Población: CP:

Provincia: País:

Correo electrónico: Fax:

Importe (€)

☐ Suscripción a partir del año (3 números) __________

☐ N.os sueltos ______________________________

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)

☐ Transferencia bancaria (CCC 2085-9981-38-0330066350 ó IBAN ES68 2085 9981 3803 3006 6350)

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista SUMA

☐ Giro postal dirigido a Revista SUMA

Fecha y firma:

Nombre y apellidos:

Código Cuenta Cliente: Entidad: Oficina: DC: Cuenta:

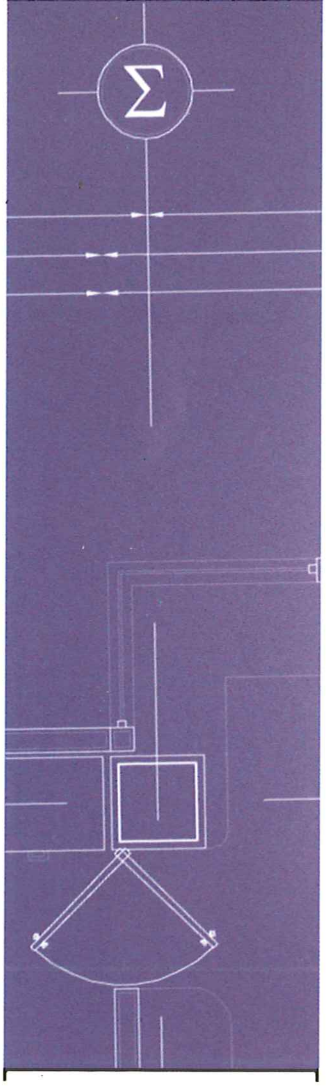
Banco/Caja:

Agencia n.º: Dirección:

Población: Provincia:

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (fecha y firma):



FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Σ

SUMA.
REVISTA SOBRE LA
ENSEÑANZA Y EL
APRENDIZAJE DE
LAS MATEMÁTICAS.

ISSN 1130-488X

9 771130 488006 00048