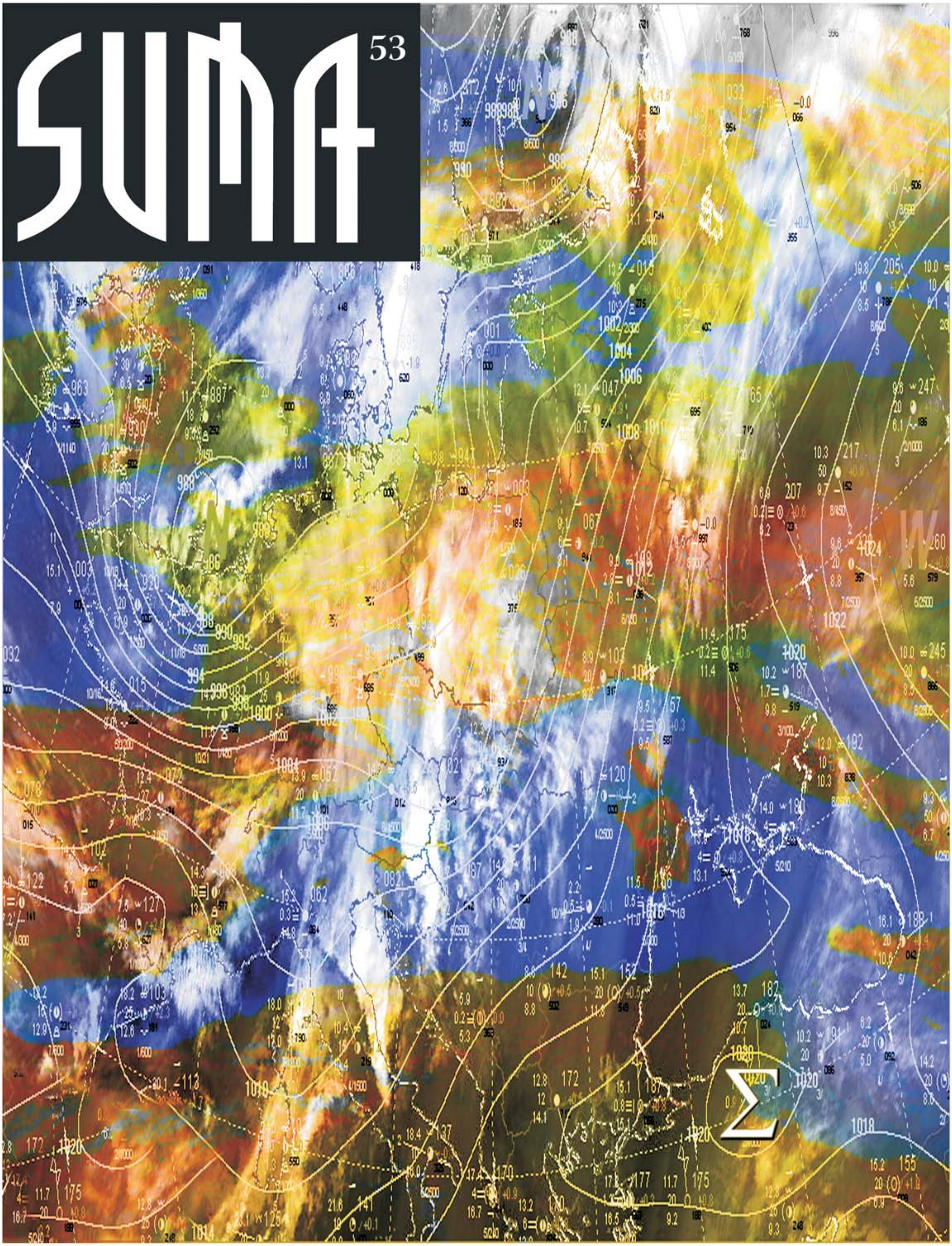
SUMA 53



SUMA. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las MATEMÁTICAS

MADRID · NOVIEMBRE 2006 · Nº. 53 · ISSN 1130-488X

SUMA 53
Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las MATEMÁTICAS
Noviembre 2006

Índice

Edita
FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS (FESPM)
Web
Antonio Alamillo Sánchez
www.revistasuma.es

Diseño de la portada
Javier Alvariño y Jorge Alvariño (foto)
Diseño interior
Raquel Fraguas (NIVOLA)
Maquetación
A. Alamillo y F. Martín
Abstracts
M. Manso de Zúñiga y P. Satrústegui
Revista Suma
Apdo. 19012
E-28080-Madrid
España
Fax: *+(34) 912 911 879*
Tirada: *6700 ejemplares*
Deposito legal: *Gr 752-1988*
ISSN: *1130-488X*

CRÓNICAS

ACTIVIDADES DE LA FEDERACIÓN

SUMA 53
Noviembre 2006

Nuevos currículos y el éxito del ICM 2006

En aplicación de la nueva Ley Orgánica de Educación, se están elaborando los nuevos decretos de mínimos curriculares y, posteriormente, cada Comunidad Autónoma, elaborará su currículo.

Creemos que hay tres reflexiones importantes que hacer al respecto.

En primer lugar, basta ya de cambios. Distintos avatares políticos han propiciado que el marco legislativo haya cambiado demasiadas veces desde que se aprobó la LOGSE en 1990. Esperamos y deseamos, por el bien de los jovenes y por la propia salud del sistema y de quienes lo sostenemos, que este nuevo marco dure en el tiempo lo suficiente como para poder implantarlo y analizar sus resultados. Esperamos también que esta vez cuente con los recursos económicos necesarios para su implantación; que cuando se descubran deficiencias podamos afirmar que éstas no son debidas a la falta de medios.

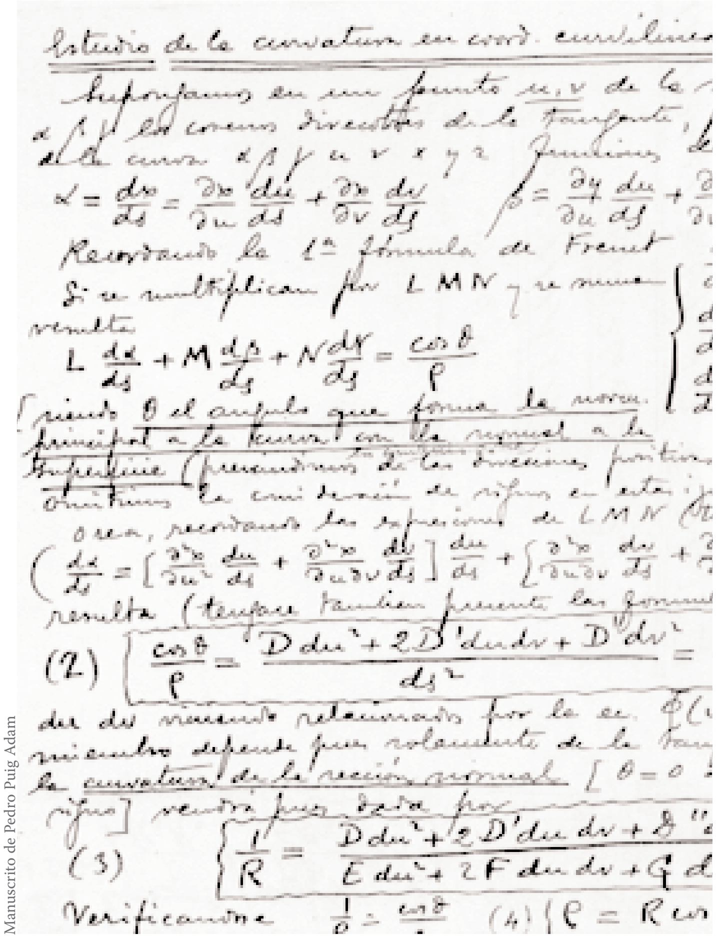
En segundo lugar, unifiquemos entre todos los contenidos de matemáticas. Es entendible que haya diferencias en lo que debe ser aprendido en otras materias según el país, o la Comunidad Autónoma dentro del nuestro, en el que estudien los alumnos. Pero estas diferencias, en el caso de las Matemáticas, sólo pueden estar justificadas por una tradición de años. Afortunadamente esta componente consuetudinaria aún no ha tenido oportunidad de formarse en España y creemos que es bueno que no se forme; que nuestra materia no pierda su carácter universal y unificador de *culturas que siempre ha tenido; que la Matemática que aprendan nuestros alumnos se diferencie más por los distintos estilos de enseñarla que adopte cada profesor que por lo que la norma establezca. Ganaremos todos con ello.*

En tercer lugar, no debe desaprovecharse esta ocasión para revisar al alza el número de horas asignadas a las Matemáticas en el currículo escolar. Es necesario un aumento del tiempo dedicado a enseñarlas. El currículo de la Enseñanza Obligatoria y del Bachillerato no puede ser un cajón de sastre, donde se dé cabida a todo, en detrimento de los conocimientos básicos. Y si en el campo de los contenidos no están justificados los localismos, mucho menos lo están en la atribución del tiempo, como sucede ahora. Nadie entiende por qué en la Comunidad de Madrid, por poner un ejemplo, se asignan a las Matemáticas en 3º y 4º de la ESO un 25% de tiempo semanal menos que en los territorios y centros que dependen del Ministerio de Educación. Estas discriminaciones negativas deberían ser inmediatamente solucionadas. La renovación de los currículos proporcionará sin duda la ocasión para hacerlo definitivamente.

Se celebró en Madrid, en agosto, el Congreso Internacional de Matemáticos. Desde el punto de vista de la organización fue sin duda un éxito. Felicitamos a nuestros colegas por ello y porque, además, el éxito de un gran acontecimiento como éste es sin duda el éxito de las Matemáticas españolas, a las que contribuimos también todos los lectores y lectoras de SUMA.

La repercusión en los medios de este acontecimiento ha sido muy notable. Es bueno que se hable de las Matemáticas y de los matemáticos y, aunque no en todos los medios han sido capaces de librarse de los tópicos que habitualmente rodean a nuestra ciencia —en algunos medios, la venida o no de Perelman y su renuncia a la Medalla Fields, centraron toda la atención— en general, se ha visto un avance sustancial en la calidad de la información ofrecida, sin duda debida al excelente servicio de prensa de los organizadores.

De nuevo, a todos los que contribuyeron al éxito del ICM Madrid 2006, enhorabuena y muchas gracias. ■



Manuscrito de Pedro Puig Adam

artículos

SUMA 53
Noviembre 2006, pp.7-12

El euro, un gran laboratorio de las matemáticas cotidianas

La sustitución de la peseta por el euro está provocando la posibilidad de observar de cerca el uso cotidiano de algoritmos matemáticos no aprendidos en la escuela, lo que nos puede servir como banco de prueba para constatar hipótesis, encontrar otras nuevas y buscar implicaciones educativas a todo ello.

The Spanish currency substitution of peseta by euro has enabled the closer observation of the daily use of mathematical algorithms not learned at the school. This can be useful to check current hypothesis or to find new ones, and to look for educational implications to this phenomenon.

Si fuéramos etnógrafos matemáticos estaríamos muy satisfechos por el cambio al euro en nuestras economías, de repente una inmensa tribu cercana y observable aprende y utiliza ciertos procedimientos aritméticos. El uso del euro es un gran banco de pruebas para poder estudiar algunos hábitos matemáticos, sus modos de aprendizaje y lo que piensa el imaginario colectivo sobre las matemáticas. Y esto nos puede ayudar a constatar hipótesis, encontrar otras nuevas y buscar implicaciones educativas a todo ello.

Contar es enumerar y referir
Tú cuentas: uno, dos, tres...
Él cuenta: un cuento, dos cuentos,
tres cuentos...
Cuentas... cuentos...
¡Todos sabéis contar!
León Felipe

Lo que viene a continuación se circunscribe dentro de lo que podríamos llamar matemáticas cotidianas, entendiendo en este caso que las matemáticas son, más que una ciencia, una actividad humana que nos permite entender, comunicar y transformar lo que nos rodea. No sólo, como decía Freire, hay que leer y escribir la realidad para poder releerla y reescribirla, también hay que saber calcular la realidad para poder recalcularla. Y para eso tenemos que dar importancia a lo que llamaríamos matemáticas corrientes, las del día a día, las que nos pueden ayudar a no limitarnos a repetir lo establecido. Paradójicamente esas matemáticas que aunque en valor absoluto son las más utilizadas, son las menos estudiadas en didáctica de las matemáticas.

Pedro Plaza Menéndez
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Aeronáutica. Madrid

Adelantar que la mayoría de las reflexiones que aparecen en este artículo se han hecho desde las clases de matemáticas en una escuela de personas adultas, pero también se ha tenido en cuenta la observación en la calle y el estudio de los medios de comunicación. Ha sido en las aulas de la Escuela Popular de Oporto de Madrid donde hemos vivido desde el primer desasosiego inicial por la implantación del euro hasta el futuro acoplamiento a la nueva moneda, y en sus aulas hemos podido llevar a cabo actividades específicas para comprobar cómo se producía el cambio. En esta escuela la mayor parte del alumnado está compuesto por personas con ninguna o poca escolarización, aunque esto no significa que no sean buenos usuarios de las matemáticas en la vida real.

Sin embargo, aunque la experiencia del euro ha sido especialmente reveladora en las aulas de educación de personas adultas, las conclusiones extraídas en este proceso son extrapolables a otros niveles de enseñanza.

Salvo por la aparición de los decimales, la simple introducción del euro no parece que genere la utilización de algoritmos matemáticos nuevos, hay poca diferencia entre pagar con monedas de un cierto tamaño o pagar con otras distintas. Realmente los algoritmos nuevos se generan cuando se piensa lo que vale en pesetas la cantidad que vemos en euros y al revés. Después de más de tres años de uso de la nueva moneda podemos asegurar que la mayoría de las personas adultas, o mejor, las que llegamos al mercado de consumo antes de la aparición del euro, seguimos pensando en pesetas[1]. Por eso, a pesar del tiempo transcurrido, los folletos de los supermercados siguen apareciendo con el precio en pesetas; los políticos (una vez pasada la primera época donde no era políticamente correcto hablar de pesetas) han visto que si quieren ser entendidos tienen que seguir hablando de pesetas (aunque se diga *de las antiguas pesetas*); todas las páginas de internet con simuladores bancarios donde se calculan las hipotecas o las páginas de las cuentas corrientes tienen la reconversión en pesetas; o simplemente si preguntas a cualquiera el precio de su piso te lo dirá en pesetas. Imaginemos cuántas reconversiones diarias se hacen en este país, cuántas cuentas, cuánto cálculo mental.

Solamente en los precios de las compras muy habituales, pan, leche... no se hace ya la traducción a pesetas[2], pero poca gente sabe lo que cuesta en euros una nevera a no ser que haya comprado una hace poco. En una actividad realizada en la escuela de personas adultas, descubrimos que tampoco se hace una reconversión a pesetas cuando se tiene una referencia fija en euros de lo que manejamos. Así, en una sesión donde se preguntaba si eran caros o baratos algunos artículos cuyo precio aparecía en euros, todas las personas contestaban si les parecía caro o barato haciendo antes la reconversión a pesetas. Por ejemplo, cuando se les preguntaba si les parecía caro un coche que costaba 6100 euros, primero hacían el cambio a pesetas para contestar que un coche de un millón de pesetas era barato. Esto no ocurrió cuando se les preguntó si era mucho gasto de teléfono una cierta cantidad en euros. En este caso, todas las personas compararon la cantidad con el gasto telefónico de su casa (la mayoría de las personas adultas que asisten a una escuela saben de memoria lo que les cuesta el teléfono mensualmente en euros) y no hizo falta traducir a pesetas. Lo mismo pasó, y por la misma razón, al preguntar si era un buen sueldo mensual una cierta cantidad en euros. De todo esto se desprende, una vez más, la importancia de las referencias a la hora de contabilizar/entender magnitudes en la vida cotidiana, en este caso euros.

> *Aunque el concepto de analfabetismo está asociado al desconocimiento de la lectoescritura, no hace más de 25 años que se emplea también para aquellos que ignoran los números.*

A continuación aparecerán algunas ideas e hipótesis que el cambio al euro está subrayando.

No existe el analfabeto numérico absoluto

Aunque el concepto de analfabetismo está asociado al desconocimiento de la lectoescritura[3], no hace más de 25 años que se emplea también para aquellos que ignoran los números, que para aclararnos en este momento, los llamaremos analfabetos numéricos (en inglés *innumeracy*). En todos mis estudios de campo realizados en este país y en otros países latinoamericanos[4] la incompetencia en lectoescritura casi nunca se correspondía con la incompetencia numérica. Todas las personas, ya sea del medio rural o urbano, con una vida socialmente normal, que no sabían ni leer ni escribir, sin embargo reconocían los números escritos y sumaban, restaban, multiplicaban y dividían (por supuesto, todo sin escribir) en los problemas aritméticos que aparecían en su vida cotidiana. Estudios de Carraher y Mariño corroboran esta conjetura así como la mayoría de los investigadores vinculados a la etnomatemática como D'Ambrosio, Oliveras, Soto o Knijnik.

Las matemáticas deben ser contempladas como algo en proceso de cambio continuo y alejado de la idea de una estructura rígida e inamovible.

Por si quedaba alguna duda, el euro nos ha confirmado que no existe el analfabeto numérico absoluto. Todas las personas que han aparecido en las escuelas de adultos sin saber leer y escribir (o dominándolo muy poco) han llegado teniendo mecanismos propios para hacer la reconversión peseta–euro; sin que nadie les haya dicho cómo hacerlo han sido capaces de generar ellas mismas algoritmos suficientes[5]. En el momento del cambio de moneda vivimos la incertidumbre y preocupación de un frutero ambulante, analfabeto en lectoescritura de 34 años. Conviene imaginarse por un momento la situación: compras fruta y verdura en Mercamadrid o a pequeños agricultores de los pueblos cercanos a la capital, y luego las vendes en los mercadillos al aire libre que hay cada día en distintos barrios de la periferia de Madrid; todo esto sin saber escribir ni números mayores de 4 cifras ni las operaciones que cada día realizas. La única ayuda cuando entró el euro era un folio que él mismo se hizo, con una tabla a dos columnas para relacionar distintas cantidades de euros–pesetas, desde 0,10 a 100 euros. Pues bien, en los primeros días hacía redondeos muy vastos intentando que todos los precios fueran múltiplos de 0,30 (50 pts.) o de 0,60 (100 pts.), por eso todos los precios acababan en euros justos o en estos decimales y la locuacidad que en otras ocasiones le habíamos visto ante los compradores parecía reservada para la concentración que le hacía falta para manejar las nuevas monedas. Sin embargo, en menos de 15 días utilizaba perfectamente la nueva moneda en el contexto que se movía, había *inventado* los algoritmos necesarios para su trabajo[6].

Se da la paradoja de que las personas de poca o nada escolarización suelen manejar esa reconversión en cantidades pequeñas mucho mejor que otras más letradas pero con mayor capacidad económica. Las personas que tienen que *mirar más la peseta* (nunca mejor dicho) son las que mejor y más rápido hacen la reconversión, a otras nos basta con hacer una ligera aproximación de lo que vamos a pagar con el simple objetivo de que no haya errores importantes, o simplemente no hacemos la reconversión.

Currículo flexible en una construcción social de las matemáticas

Admitiendo la hipótesis de Berger y Luckman de que *la realidad se construye socialmente*, las matemáticas como parte de la realidad también se construyen socialmente, la sociedad crea activamente los conocimientos matemáticos, y, tras un periodo de prueba y de consenso, los institucionaliza pasando a ser elementos de la cultura. Esto le da a las matemáticas un carácter de contingencia y rompe los mitos de una ciencia universal, única e infalible.

Si entendemos que la cultura –significados que son compartidos por un mismo grupo– es lo que los seres humanos han añadido al mundo, entonces las matemáticas forman parte de la cultura del conocimiento. Las matemáticas son un saber cultural y su nacimiento y desarrollo está vinculado a las necesidades humanas. Todos los grupos culturales desarrollan matemáticas de la misma forma que desarrollan lenguaje, religión y costumbres sociales. Y cada uno de estos tipos de matemáticas, con fuertes influencias mutuas, contienen diferentes grados de intuición, rigor, comprensión holística, razonamiento analógico, capacidad visual, estrategia heurística, aplicabilidad funcional, profundidad en el lenguaje, etc.

Desde la calle se genera una matemática cambiante, atenta a sus necesidades e influida por los cambios sociales capaz de modificar sus intereses y el rango de importancia de las matemáticas que usa. Y esto se ha visto claramente con la entrada del euro, a partir de su uso:

1. Nos han vuelto a interesar las operaciones con decimales, prácticamente perdidas por la desaparición monetaria de los céntimos de peseta.
2. Antes del euro la mayoría de las operaciones mentales que tenían que ver con el dinero se hacían con los múltiplos de cinco, ya que el duro formaba parte importante del sistema monetario y popularmente había monedas de un duro, cinco duros, diez duros y veinte duros; con el nuevo sistema monetario ha decaído la importancia del 5 como base auxiliar.
3. Con el uso constante de la reconversión euro-pesetas, la estimación y el redondeo ocupan un lugar más importante (si cabe) en la vida cotidiana de las personas adultas.
4. Si observamos con cuidado las noticias que aparecen en prensa o televisión, veremos que el uso de números grandes está vinculado casi siempre al dinero. Es difícil ver un número más grande de 1000 millones que no tenga que ver con dinero. Pues bien, la entrada del euro ha *empequeñecido* los números *grandes*, y han desaparecido de nuestra vida números que servían antes para contar pesetas. Con el tiempo, la palabra billón será cada vez menos conocida.

Vemos, pues, que la sociedad crea y da valor a los conocimientos matemáticos, pasando a ser elementos de la cultura. Lo que pone de manifiesto que, desde un punto de vista curricular, las matemáticas deben ser contempladas como algo en proceso de cambio continuo y alejado de la idea de una estructura rígida e inamovible.

La entrada del euro ha empequeñecido los números grandes, y han desaparecido de nuestra vida números que servían antes para contar pesetas.

Algoritmos personales versus algoritmos académicos

Se ha escrito mucho sobre la disociación que existe a veces entre los algoritmos matemáticos (o forma de hacer las cosas en matemáticas) que cada uno genera en función de sus necesidades y los algoritmos aprendidos en la escuela. Lave, cuando investigó cómo operan las personas cuando hacen comidas en su casa o en el momento de hacer la compra en el mercado, da una hipótesis bastante tajante: *Básicamente ningún problema en la tienda o la cocina se resolvía en forma de algoritmo académico* (1991:210). Esta disociación no implica para nada que los algoritmos explicados en la escuela sean ni más completos ni más complejos, por ejemplo el algoritmo de restar completando (30 menos 18, primero dos para llegar a 20 y luego 10 para llegar a 30, luego la resta es igual a 12, lo que se hace muchas veces cuando se devuelven cambios) es mucho más potente para cifras pequeñas que el que se explica en la escuela para restar dos cantidades[7]. Desde este artículo no se quiere glorificar los algoritmos matemáticos no académicos, y se reconocen sus limitaciones y desventajas, pero sí valorarlos y a poder ser, utilizarlos como punto de apoyo en el aprendizaje de otros nuevos más generales y estandarizados, lo que podríamos llamar *superación por incorporación*. Así, el conocimiento académico va rellenando huecos, confirmando destrezas, despejando errores y remarcando límites del conocimiento informal. Por otra parte, esta reflexión también tendría que valer para hacer reflexionar al currículo oficial sobre la *utilidad* de los saberes enseñados.

Como ya hemos comentado, con el euro muchas personas han generado, ante ciertas necesidades, algoritmos de reconversión propios y por lo tanto no académicos. Hemos extraído las siguientes características en un trabajo llevado a cabo en la Escuela Popular de Oporto durante estos años donde el euro forma parte de nuestro sistema monetario.

Los procedimientos utilizados para pasar de euros a pesetas varían entre unas personas y otras y de unas situaciones a otras. Ya sea por la cantidad que se quiera convertir (mucha o poca), por el grado de aproximación que se quiera llevar a cabo, por la urgencia del momento o si el número a convertir se redondea mejor por exceso o por defecto. Pero la inmensa mayoría son procedimientos mentales, no se escriben y prácticamente nadie utiliza ya las calculadoras o las tablas conversoras que al principio se manejaban[8].

Lo habitual es utilizar referencias conocidas y más o menos controladas de memoria. Algunas personas aprenden y usan la relación entre los billetes antiguos:

1.000 pts	6 €
5.000 pts	30 €

o al revés. Otras usan la relación a los billetes nuevos:

10 €	1.700 pts
50 €	8.000 pts

Y desde estas relaciones primarias se aprenden también de memoria (aunque podrían deducirlas con facilidad) las relaciones de sus múltiplos:

60	10.000
600	100.000
20	3.400
30	5.000...

También hay personas que han tomado la equivalencia asociándola a actividades habituales; por ejemplo, si alguien estaba acostumbrado a sacar siempre 25.000 pts. del cajero automático, ahora saca 150 euros y la relación que memoriza para poder hacer conversiones con otras cantidades de memoria es 150–25.000 y sus múltiplos. También hemos trabajado con personas que lo hacían con el bono de diez viajes del metro (5 euros–850 pts.), que cada poco compraban en el momento del cambio de moneda.

A modo de ejemplo, para calcular las pesetas que son 270 euros, las estrategias más utilizadas son tres: la primera consiste en compararlo con 300 euros que se sabe que son 50000 pesetas y quitarle los 30 que le falta; la segunda, usando la relación 50 euros–8000 pesetas hasta llegar de 50 en 50 a 270 para añadir luego más o menos la mitad (20); mientras que la tercera es dividir entre 6.

Pero más allá de los algoritmos utilizados lo más interesante es que nadie ha enseñado esos algoritmos, es decir, todos han sido generados por las personas implicadas y que no hay diferencia entre los que utilizan las personas formadas en los colegios y las personas con poca o ninguna escolarización[9].

La experiencia diaria como ayuda en el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas

La relación que tienen los alumnos de las escuelas de personas adultas ante las muchas demandas matemáticas que aparecen alrededor de sus vidas se puede resumir de esta forma: las personas sin escolarización se desenvuelven bastante bien con sus propias estrategias dentro de un círculo cercano, pero fuera de él se encuentran inseguras, con sentimientos de temor, rechazo o inhibición. Además, las matemáticas que manejan son claramente insuficientes cuando se trata de la comprensión de temas sociales, políticos o económicos, o cuando se complican los contextos o varían los factores a analizar. Con esta situación inicial, es fácil imaginarse la incertidumbre que provocó la introducción del euro en estas personas que veían desmoronarse el edificio matemático que más controlaban, aquél en el que se sentían más seguras, el que era el escenario de su economía cotidiana. Sin embargo, a pesar del desasosiego y la cautela inicial de los días anteriores y un par de días posteriores, la mayoría de las personas no tuvieron dificultades en los problemas cercanos, incluso en situaciones más complejas como por ejemplo la compra a plazos y el cálculo de descuentos. Pudimos comprobar que más que del nivel académico de las personas, es la experiencia, la necesidad, la que se traduce en más habilidad a la hora de idear las estrategias del cambio euro–peseta. De esta forma, las personas que tienen sólo relación con la compra diaria (comida y artículos de primera necesidad) tienen menos soltura en la reconversión euros–pesetas que aquellas que, además, son protagonistas del resto de las compras (pequeños electrodomésticos, ropa) y de los cálculos contables de la casa (recibos de teléfono, gas, hipotecas...). En los números grandes, luego no habituales, las estrategias les fallan más a menudo y muchas veces tienen problemas para calcular cuántas pesetas son por ejemplo 40.000 ó 100.000 euros.

Si la experiencia implica más habilidad y más conocimiento, y el modo de hacer matemáticas depende de las circunstancias personales, y si las matemáticas, como el resto de los saberes, se pueden aprender fuera de la escuela ¿por qué los profesores no utilizamos estas experiencias en las clases para relacionarlas con el currículo académico? En Carraher (1995) se pueden leer experiencias de este tipo en otros niveles; la autora cuenta la historia de niños y niñas con fracaso escolar en matemáticas que, sin embargo, se desenvuelven en la calle de forma óptima haciendo supuestamente las mismas cuentas que no hacen en el colegio. En definitiva, el bagaje empírico no sólo tendría que servir para sobrevivir sino para avanzar.

Importancia de explicitar el uso y la necesidad de las matemáticas

Hay mucha literatura que intenta investigar sobre los sentimientos o la relación que, acerca de las matemáticas, tiene el imaginario colectivo. Estamos tan acostumbrados a manejar conceptos con un cierto contenido matemático que muchas veces las matemáticas se hacen invisibles; es lo que Niss llama *paradoja de la relevancia*, constituida por la simultaneidad de la relevancia objetiva y la irrelevancia subjetiva de las matemáticas. Continuamente estamos midiendo tiempo, espacio, peso, dinero; haciendo aproximaciones, orientándonos en la ciudad o en el campo, optimizando situaciones, calculando mentalmente el precio de compra, representando gráficamente datos numéricos..., y sin embargo no pensamos que hacemos matemáticas.

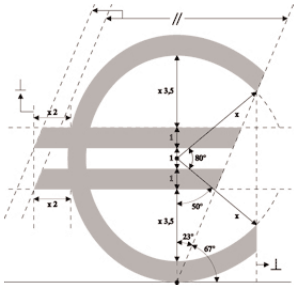
> *Estamos tan acostumbrados a manejar conceptos con un cierto contenido matemático que muchas veces las matemáticas se hacen invisibles.*

De nuevo el euro subraya esta situación, cuando preguntamos si ahora con la nueva moneda se hacen más matemáticas, la mayoría de las personas contestan que no (curiosamente en los primeros meses de la implantación de la nueva moneda esta negativa no era tan tajante), pese a que obviamente todos los que pensamos aún en pesetas calculamos más ahora que antes.

Además, con el euro no sólo se puede comprobar que se utilizan más matemáticas sino que, en ciertas cosas se sabe más de lo que parece. Difícilmente se puede decir que no se entienden matemáticas cuando se muestra un conocimiento del número y de sus propiedades profundo y versátil o cuando se hacen proporciones sin recurrir a procedimientos académicos. No se puede olvidar que todos estos conocimientos no forman parte de lo que algunas personas, cuando reconocen que realizan de forma óptima problemas matemáticos, dicen que es *por sentido común* o *por la cuenta de la vieja* o *por lógica*; nadie nace sabiendo generar unos algoritmos como los que hemos comentado al principio, el sentido común es otra cosa.

Después de todas estas reflexiones y de comprobar la presencia tan habitual de la peseta, habría que preguntarse sobre lo interiorizado que tenemos las referencias contables. Es curioso advertir cómo le llena de sorpresa a los extranjeros, que no han sufrido nunca un cambio de moneda en sus vidas, cuando se percatan del uso tan corriente de la peseta en nuestro país después de tanto tiempo, y de que haya tantas personas que todavía traduzcamos a pesetas.

Sólo nos queda jugar a adivinos y plantearnos hasta cuándo durará el uso de la peseta en nuestras cabezas; hasta que eso llegue habrá que seguir observando. ■



NOTAS

1 Los niños y niñas que tenían por ejemplo 15 años en el 2002 piensan en euros porque el uso propio y habitual del dinero fue posterior, lo mismo pasa con los inmigrantes. Por supuesto que los que han llegado después del 2002 piensan en euros, pero incluso lo que llegaron uno o dos años antes de esa fecha también piensan en euros porque la peseta no la tenían tan interiorizada, cuando llegas a vivir en un país distinto al tuyo, durante mucho tiempo reconviertes los precios a la moneda de tu país o a alguna otra que hayas utilizado antes como referencia, por ejemplo el dólar, que puede ser la moneda que envíes a tu familia.

2 Aunque incluso en los artículos pequeños, cuando queremos decir lo que ha subido todo, nos sentimos más convincentes llevándolo a pesetas: *Fíjate, más de 200 pesetas por una caña*.

3 Incluso en 1987, la UNESCO en su XX Conferencia definía analfabeto como *persona que no es capaz de leer y escribir, comprendiendo, una breve y sencilla exposición de hechos relativos a su vida diaria*. Casi todas las definiciones *institucionales* posteriores mencionan ya la incapacidad también de leer y entender los números en la definición de analfabetismo.

4 Detalles a estos estudios se pueden encontrar en mi Tesis Doctoral, Plaza (2002).

5 Las personas que estaban en la escuela en el momento del cambio no son estudiables en este caso porque antes del cambio, en las clases se plantearon muchos ejercicios y actividades para preparar la entrada del euro, en las cuales se dieron pistas para su manejo.

6 Aunque el estudio que manteníamos era alrededor de este frutero, fue también muy ilustrativo el ambiente del mercadillo en los días primeros del euro. La mayoría de las personas que compran en este tipo de mercadillos son mayores con poco nivel escolar y poco nivel económico, los puestos de los vendedores también son pequeños negocios. La estrategia que seguía nuestro frutero de tener sólo precios justos en euros enteros o que acabaran en 0,30 o 0,60 la tenían en la mayoría de los puestos, para entenderse mejor el vendedor y ser más claros de cara al comprador. Nadie tenía un precio con más de un decimal, es decir la moneda mínima que se utilizaba era de 10 céntimos, cosa que ahora no pasa porque los ajustes son más precisos. Lejos de un ambiente de desconfianza se respiraba un aire de novedad que ocupaba todas las conversaciones, fuimos testigos de muchos errores en los cálculos de precios, en la entrega de lo que costaba y en las devoluciones, pero la mayoría de los protagonistas de esos errores se lo tomaban con deportividad comprendiendo los fallos.

7 Además, implícitamente trabaja propiedades que tienen que ver con las operaciones de sumar y restar: por ejemplo se ve mejor la equivalencia entre $a - b = c$ y $b + c = a$ (también se hace con decimales el procedimiento de completar).

8 El que no se utilicen ahora y antes sí no significa que se controle más ahora que antes, no estaría bien visto utilizarlas todavía *a estas alturas*.

9 En Plaza y otros (2004) se hace un estudio pormenorizado de los algoritmos informales utilizados por las personas no escolarizadas o con poca escolarización, no sólo en el campo de la aritmética, también en la geometría y en el uso de proporciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CARRAHER, T.; CARRAHER, D. Y SCHLIEMANN, A. (1995): *En la vida diez, en la escuela cero*, Siglo XXI, México.

D'AMBROSIO, U. (1985): "Etnomathematic and its Place in the History and Pedagogy of Mathematics", *For the Learning of Mathematics*, 5, 1, 44-48, FLM Publishing Association, Montreal.

KNIJNIK, G. (1996): *Exclusão e resistência. Educação matemática e legitimidade cultural*, Artes Médicas, Porto Alegre.

LAVE J. (1991): *La cognición en la práctica*, Paidos, Barcelona.

MARIÑO, G. (1985): *¿Cómo opera matemáticamente el adulto del sector popular?*, Dimensión educativa, Bogotá.

NISS, M. (1995): "Las matemáticas en la sociedad", *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, n.º 6, 45-57, Graó, Barcelona.

OLIVERAS, M. L. (1996): "Etnomatemáticas", *Formación de profesores e innovación curricular*, Comares, Granada.

PLAZA, P. (2000): "Números, no cuestan dinero, y son lo primero para convencer", *Diálogos*, n.º 22, 59-65. Barcelona.

PLAZA, P. (2002): "Las matemáticas en la educación de personas adultas", *Tesis doctoral leída en la Universidad Complutense de Madrid*, Facultad de Educación, Madrid.

PLAZA, P; GONZÁLEZ, M.J.; MONTERO, B. Y RUBIO, C. (2004): *Matemáticas críticas y transformadoras en la educación de personas adultas*, Ediciones Aljibe S. L., Málaga.

SOTO, I. Y ROUCHE, N. (1995): "Problemas de proporcionalidad resueltos por campesinos chilenos", *Educación Matemática*, 7, 1, 77-95, Grupo Editorial Iberoamérica, México.

SUMA 53
Noviembre 2006, pp.13-18

El curioso incidente entre las Matemáticas y la Literatura

A partir de la novela El curioso incidente del perro a medianoche *de Mark Haddon, en la que se plantean diversos temas matemáticos, proponemos una serie de actividades para el alumno. A través de este trabajo se trata de demostrar que la Literatura no es ajena a las Matemáticas, además de animar a la lectura y enseñar temas matemáticos de interés en la actualidad como la Criptografía de Clave Pública, la Teoría de la Probabilidad y la Teoría del Caos, que son aplicables a problemas del mundo real.*

Corcerning the novel The curious incident of the dog in the night-time *by Mark Haddon, we will propose several mathematical topics and we will suggest different types of exercises for the student. Through this we are trying to show the student that Literature and Maths are not too distant from each other. Besides, we will be stimulating students to read and learn mathematical topics of today such as: Key Public Criptography, Probability Theory and Chaos Theory by doing this we will broaden the use of mathematics in every day life.*

¿Existe algún otro detalle acerca del cual desearía usted llamar mi atención?

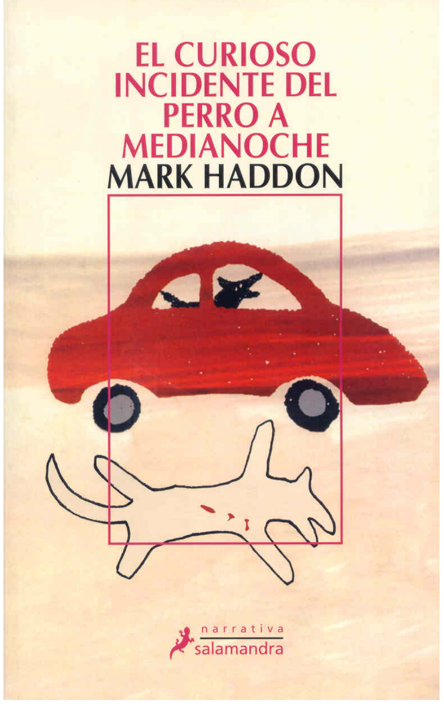
— Sí, acerca del incidente curioso del perro aquella noche.

— El perro no intervino para nada.

— Ése es precisamente el incidente curioso –dijo como comentario Sherlock Holmes.

Silver Blaze. Memorias de Sherlock Holmes.

En septiembre de 2004 se publicó la primera edición de un magnífico libro titulado *El curioso incidente del perro a medianoche* escrito por Mark Haddon y que ha sido objeto de una reseña en el n.º 51 de la revista SUMA, en la sección *Biblioteca*, apartado *En campo ajeno*. En dicha reseña se proponen tres temas matemáticos para trabajar en clase, de los cuales solo uno coincide con los propuestos en este trabajo. El título del libro que alude a la anterior conversación entre el inspector Gregory y Sherlock Holmes ya nos indica que se trata de una novela de intriga, en la que el protagonista Christopher Boone, un adolescente con problemas de autismo, decide investigar quién asesinó a Wellington, el perro de su vecina, y escribir un libro con sus investigaciones. De esta forma llegará a descubrir secretos que afectan a su propia familia y a la idea que tiene sobre el mundo. Además el libro contiene varias referencias a las Matemáticas y a la Física, ya que Christopher quiere ser de mayor matemático o físico y demuestra una gran capacidad e interés por estas disciplinas.



Natalia Casás Ferreño
IES Ingenio. Ingenio. Las Palmas

Creemos que es un libro interesante para utilizar en el aula en secundaria por varios motivos: trata una temática juvenil y está narrado en un lenguaje sencillo a través de un adolescente. Por otra parte, a partir de este texto se pueden desarrollar diferentes cuestiones relacionadas con las Matemáticas que esperamos resulten interesantes a nuestros alumnos.

La actividad que proponemos consiste en la selección de tres temas matemáticos: los números primos, el problema de Monty Hall y la teoría del caos, que son tratados en el libro. Realizamos una revisión crítica del tratamiento que se le da a estos temas, haciendo reflexionar al alumno sobre lo que ha leído. Posteriormente se amplía la información sobre cada tema animando al alumno a buscar nueva información y a experimentar por su cuenta, utilizando también Internet como recurso didáctico.

Esperamos que este trabajo, al igual que otros muchos que se han ido publicando a lo largo de este IV centenario del Quijote, ponga de manifiesto la relación existente entre matemáticas y literatura, eliminando el muro invisible que se levanta entre ambas disciplinas. De este modo enseñaremos a nuestros alumnos que no tiene sentido decir:

— yo soy de letras

o

— yo soy de ciencias.

Basta considerar que hay varios matemáticos que han ganado el premio Nobel de Literatura y que por otra parte existen periodistas, escritores y cineastas que han desarrollado con gran éxito temáticas científicas.

Los números primos

Fíjate en la numeración de los diferentes capítulos del libro: 2, 3, 5, 7, 11... Ésta es la secuencia de los números primos. Un número primo es cualquier número natural distinto de 1 que solo es divisible por 1 y por sí mismo. Todos los números primos mayores que 2 son impares *–¿por qué?–* pero no todos los números impares son primos, por ejemplo 9 = 3 x 3 y por tanto no es primo. Todo número es o bien primo o bien divisible por un número primo más pequeño. Euclides ya sabía hace más de 2000 años que los números primos eran infinitos; una demostración sencilla por reducción al absurdo es la siguiente: supón que sólo existe un número finito de números primos, $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ y considera entonces el número

$$M = (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n) + 1$$

Está claro que M no es divisible por ninguno de los números primos p_i, $i = 1, \dots, n$ porque el resto es 1 *–probar con distintos números–*. Ahora solo hay dos opciones: o bien M es un número primo, lo cual no es posible porque es mayor que cualquier p_i, o bien M es divisible por algún primo que pertenece a la lista de los p_i y ya vimos que esto tampoco es posible. Entonces llegamos a una contradicción y esto nos indica que existen infinitos números primos.

Eratóstenes
(Cirene, 276 a.C. – Alejandría, 195 a.C.)

Actividad

Experimenta para los 2, 3 y 4 primeros números primos cuál es el número M que se obtiene. ¿Es M primo en estos tres casos?

En el capítulo 19 (página 22) Christopher te explica una regla para calcular los números primos conocida como Criba de Eratóstenes, en honor al matemático griego Eratóstenes de Cirene (276-194 a.C.):

> Primero escribes todos los números enteros positivos del mundo.

–¿Es eso posible?–

> Entonces quitas todos los números múltiplos de 2. Después los números múltiplos de 3. Después los números múltiplos de 4 y 5 y 6 y 7 y así sucesivamente. Los números que quedan son los números primos.

Actividad

Calcula los números primos menores que 100 utilizando la criba de Eratóstenes. Una vez que has eliminado los números múltiplos de 2 y de 3, ¿es necesario eliminar los múltiplos de 4 y 6 como afirma Christopher?

Fíjate que al llegar a un primo mayor que $\sqrt{100}=10$ todos los números que quedan son primos. En general, si quieres calcular los primos menores o iguales que un número *n* el proceso de la criba termina al sobrepasar $\sqrt{n}$ –*¿por qué?*–.

A pesar de su sencillez la criba de Eratóstenes sigue siendo hoy en día el algoritmo más eficiente para calcular todos los números primos menores o iguales que un cierto *n*. Curiosamente no se conoce ninguna fórmula que genere todos los números primos o incluso que genere solo números primos. Por ejemplo, Fermat pensaba que todos los números de la forma

$$2^{2^n}+1$$

eran primos.

En un principio la fórmula parece que funciona porque

$$2^{2^1}+1=5$$

$$2^{2^2}+1=17$$

$$2^{2^3}+1=257$$

$$2^{2^4}+1=65537$$

son primos. Sin embargo, en este caso, la genial intuición de Fermat, el príncipe de los matemáticos aficionados, le jugó una mala pasada pues ya el gran matemático del siglo XVIII Leonhard Euler probó que la fórmula fallaba para $n = 5$ y desde entonces no se ha vuelto a encontrar ningún otro número primo de la forma

$$2^{2^n}+1$$

distinto de los cuatro primeros –*¿Eres capaz de encontrar los factores primos del número*

$$2^{2^5}+1=4294967297\ ?–$$

Para apreciar el gran mérito de Euler piensa que en esa época no existían las calculadoras y mucho menos los ordenadores.

Un poco después Christopher dice:

> Si un número es muy, muy grande, a una computadora puede llevarle años calcular si es un número primo.

Esto no es completamente cierto. Existen dos problemas diferenciados: uno es factorizar un número (descomponerlo en los números primos de los cuales es producto) y el otro es probar que un número es primo. Por ejemplo, factorizar un número que es producto de dos primos muy grandes resulta hoy en día un problema muy complicado, en el sentido de que le llevaría una gran cantidad de tiempo incluso a los ordenadores actuales más potentes. Sin embargo para probar que un cierto número es primo existen métodos probabilísticos que de una forma rápida y con una alta probabilidad nos informan de este hecho. No obstante, hay que tener en cuenta que son métodos probabilísticos, lo cual quiere decir que teóricamente podría fallar pero en la práctica eso no sucede casi nunca.
Una aplicación reciente e interesante de los números primos es que *sirven para crear códigos*. Por ejemplo el criptosistema de clave pública RSA, que debe su nombre a los ingenieros del MIT (Instituto tecnológico de Massachussets) R. Rivest, A. Shomer y L. Adleman que lo propusieron en 1978, basa su seguridad en la dificultad de factorizar números que son producto de dos números primos grandes.

Actividad

Consulta en las siguientes páginas web en qué consiste el criptosistema de clave pública RSA, cuáles son sus principales ventajas e inconvenientes y explica por qué los números primos son importantes para este sistema.

http://www.uam.es/proyectosinv/estalmat/Estalmat/susipablo02.pdf

http://www.galileo.it/crypto/teletrabajo/la_encriptacion.html

Lecturas recomendadas

Encontrarás una excelente introducción al sistema RSA en el capítulo 17 de (De Guzmán, 1995) escrito en un lenguaje muy accesible y con varios ejemplos. Para una explicación más avanzada, con muchas más matemáticas, pero también amena puedes consultar (Gómez Pardo).

El problema de Monty Hall

En el capítulo 101 (página 86), Christopher explica un problema aparentemente sencillo, pero con una solución sorprendente que engaña a la intuición, el problema de Monty Hall (llamado así en honor al presentador de un famoso concurso de televisión en Estados Unidos): el concursante de un programa televisivo debe elegir entre tres puertas. Una de ellas encierra un coche y las otras dos una cabra. Una vez que el concursante ha elegido una puerta, el presentador siempre abre otra puerta donde él sabe que hay una cabra y da al concursante la oportunidad de cambiar la puerta elegida en un principio. La pregunta es: ¿debe el concursante cambiar de puerta o no?

Intuitivamente parece que el hecho de cambiar o no cambiar es indiferente y que en ambos casos la probabilidad de ganar es 1/2. Sin embargo, Christopher te demuestra mediante dos razonamientos diferentes que el concursante duplica su probabilidad de ganar si cambia de puerta. Efectivamente, si no cambias de puerta ganas solamente si al principio has elegido la puerta que contiene el coche, por tanto tu probabilidad de ganar es 1/3. Por el contrario, si cambias de puerta ganas si originalmente habías elegido una cabra, y por tanto tu probabilidad de ganar es de 2/3.

El conocido divulgador de las matemáticas Ian Stewart ha escrito lo siguiente acerca del problema de Monty Hall:

> Cuando hace algunos años escribí acerca del problema me llegó la saca de correo más grande que nunca haya recibido: la gran mayoría de las cartas me decían que yo estaba equivocado. Y cuando mencioné el problema en un programa radiofónico pocos años después, sucedió más de lo mismo. (...) Mucha gente tiene una intuición simple y poderosa acerca del problema. Esta intuición es errónea, pero no es en absoluto obvio por qué es errónea.

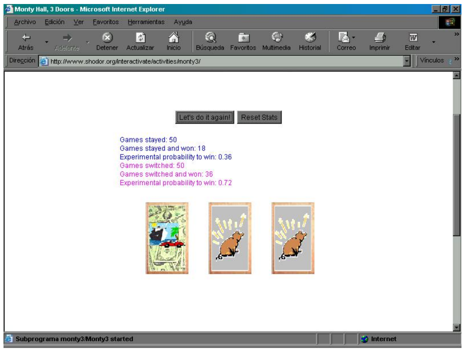
Aquí reside el principal interés del problema de Monty Hall: la intuición parece engañarnos en la búsqueda de su solución, pero si lo analizamos en profundidad y tenemos en cuenta todas las condiciones del enunciado la lógica nos permite obtener la respuesta correcta.

Actividad

Aunque la solución parece desafiar a la intuición, es correcta y puedes comprobarla experimentalmente en la página web

http://www.shodor.org/interactivate/activities/monty3/

en la cual puedes simular el concurso cambiando de puerta y no cambiando.



Observa que para que la solución presentada sea correcta es fundamental que el presentador sepa lo que hay detrás de cada puerta y que siempre enseñe una cabra y dé la oportunidad de cambiar. En las siguientes variantes del juego modificamos ligeramente las reglas con el objetivo de que reflexiones y analices las diferencias.

Variante 1: Una vez que has elegido una puerta, el presentador lanza una moneda y según salga cara o cruz abre la puerta que está más a la izquierda o la puerta que está más a la derecha entre las dos que no has elegido. Si al abrir la puerta aparece el coche entonces has perdido mientras que si aparece una cabra se te da la opción de cambiar de puerta.

Variante 2: De las dos cabras una está pintada de rojo y la otra de azul. Una vez que has elegido una puerta, el presentador siempre abre la que encierra la cabra roja. Si es tu puerta el juego se acaba y si no el presentador te da la opción de cambiar la puerta.

Actividad

En ambas variantes, ¿debe ahora el concursante cambiar de puerta o no?, ¿cuál es la probabilidad de ganar si cambia?, ¿y si no cambia?. Sabiendo que no es eliminado en la primera ronda ¿qué probabilidad tiene de ganar cuando cambia?, ¿y cuando no cambia?

Lecturas recomendadas

En el capítulo VI de (Hoffman, 2000) puedes descubrir una deliciosa historia de cómo el problema de Monty Hall pareció resistírsele al mismísimo Paul Erdös, uno de los más grandes y peculiares matemáticos del siglo XX.

Monty Hall

Las matemáticas del caos

En el capítulo 151 (página 131), Christopher nos muestra una gráfica de cómo aumenta y disminuye la población de ranas que vive en el estanque de su colegio. El gráfico que representa la población es totalmente irregular. Sin embargo eso no quiere decir que no exista una regla que determine cómo evoluciona la población de ranas. El estudio del caos determinista ha puesto de manifiesto qué comportamientos dinámicos muy complejos, aparentemente impredecibles, pueden obedecer a reglas muy sencillas.

Por ejemplo, vamos a pensar un poco más en la ecuación logística que describe Christopher:

$$f(x) = \lambda \cdot (1-x) \cdot x$$

donde $\lambda > 0$ es una constante también llamada parámetro.

Actividad

a. Dibuja la parábola $f(x) = \lambda(1 - x)x$, calculando su vértice para los siguientes valores de lambda: $\lambda = 2$, $\lambda = 4$ y $\lambda = 6$ ¿Qué aspectos tienen en común las tres parábolas?

b. Sea cual sea el valor de $\lambda>0$, ¿cuál es el vértice de $\lambda(1-x)x$?

c. Prueba que si $0 < \lambda < 4$ y $0 < x < 4$, entonces $f(x)$ también pertenece al intervalo [0, 1].

A partir de ahora fijamos $0 < \lambda \leq 4$ y consideramos el sistema dinámico discreto definido por la función

$$f : [0,1] \to [0,1]$$

$$f(x) = \lambda \cdot (1-x) \cdot x$$

$$\begin{cases} x_0 \in [0,1] \text{ dado} \\ x_{n+1} = f(x_n) \text{ cuando } n = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

De este modo a partir de un x_0 inicial obtenemos la sucesión x_n iterando la función *f*. –*¿Por qué podemos calcular siempre* x_n *para cualquier* n?– Si la *f* representa cómo evoluciona la población de ranas a partir de la población inicial x_0, la población en el año siguiente será $x_1 = f(x_0)$, en el siguiente $x_2 = f(x_1)$, y así sucesivamente.

Podemos representar gráficamente la anterior sucesión del siguiente modo:

1.- Dibujamos la parábola $f(x) = \lambda(1 - x)x$ dentro del cuadrado de lado unidad [0, 1] x [0, 1].

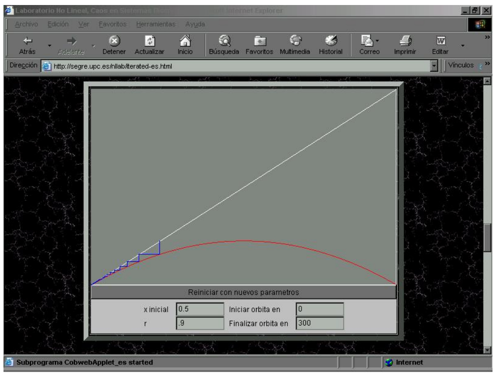
2.- Dibujamos la función identidad $y = x$.

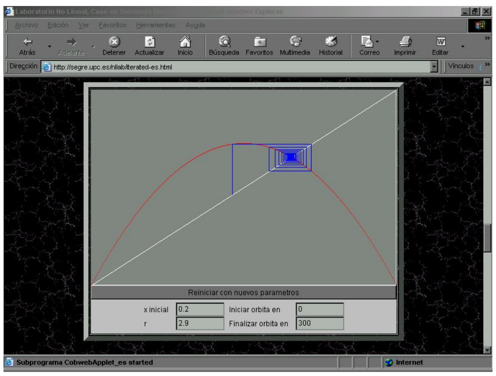
3.- Situamos el punto x_0 sobre el eje de abscisas y levantamos una recta vertical y paralela al eje de ordenadas hasta tocar con la parábola, este punto de corte será $f(x_0)$. Tal y como hemos definido la sucesión x_n, se tiene que $x_1 = f(x_0)$. Ahora trazamos desde $f(x_0)$ una recta paralela al eje de abscisas y una vez que corte con la función identidad $y = x$, trazamos desde ahí una recta paralela al eje de ordenadas hasta cortar de nuevo con la parábola $f(x) = \lambda(1 - x)x$ obteniendo de este modo el punto $x_2 = f(x_1)$. Ahora basta repetir este procedimiento sucesivamente.

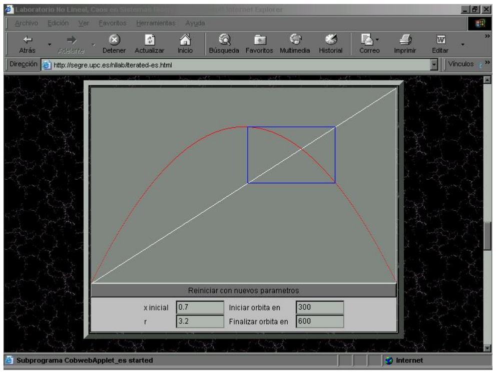
Actividad

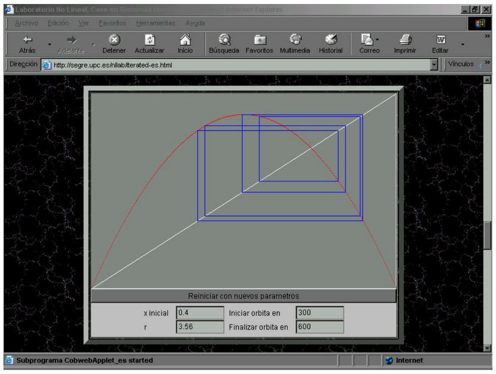
Aunque el proceso anterior es un poco latoso para hacerlo a mano resulta muy fácil utilizando un ordenador. Puedes simular el comportamiento de la sucesión x_n mediante estos diagramas de *telas de araña* eligiendo distintos valores del parámetro λ y del iterante inicial x_0 en la página web

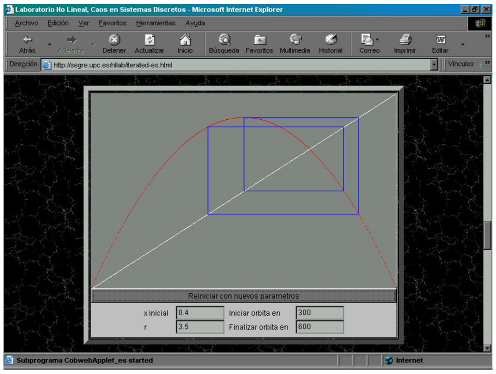
http://segre.upc.es/nllab/iterated-es.html

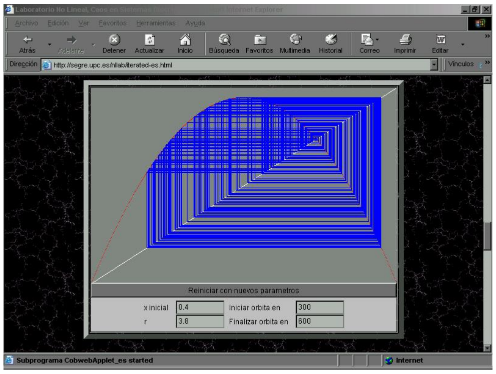












La teoría del caos ha supuesto un nuevo paradigma científico, en el que los sistemas deterministas, al igual que los aleatorios, también pueden ser impredecibles.

Pero ¿dónde aparece el caos?, ¿cómo puede ser impredecible o caótico un sistema determinista? La respuesta está en la sensibilidad a las condiciones iniciales, más conocido popularmente como efecto mariposa. Este último nombre procede de la conferencia que en 1972 dio el meteorólogo Edward Lorenz, titulada *Predecibilidad: ¿puede el aleteo de una mariposa en Brasil desencadenar un tornado en Texas?* La idea es que aunque tengamos un modelo matemático que nos diga de forma exacta cómo evoluciona el tiempo, para poder hacer una predicción necesitamos saber cuáles son las condiciones iniciales (presión atmosférica, temperatura, humedad, dirección del viento...) en un determinado momento. Sin embargo estas condiciones se conocen solo de forma aproximada (el aparato de medición comete un pequeño error, al igual que una calculadora que sólo admite un número finito de dígitos), y por tanto si el sistema es sensible a las condiciones iniciales este pequeño error se amplifica con el tiempo hasta que se convierte en un error enorme, haciendo imposible la predicción. Esto explica por qué el hombre del tiempo acierta en su pronóstico solamente para uno o dos días, pero no puede hacer predicciones a largo plazo (cinco días, una semana, un mes...).

Lecturas recomendadas

En (Gleick, 1985) encontrarás una magnífica exposición de la creación de la teoría del caos dirigida al público no especialista. El capítulo 15 de (De Guzmán, 1985) constituye una excelente introducción al efecto mariposa y al caos en sistemas dinámicos discretos. Finalmente si quieres saber un poco más sobre las dificultades de predecir el tiempo atmosférico puedes leer (Brookes, 2005). ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BROOKES, T. (2005): "Predicción del tiempo", *National Geographic España*, Junio 2005, 86-105.

DE GUZMÁN, M. (1995): *Aventuras matemáticas*, Pirámide, Madrid.

GLEICK, J. (1986): *Caos: la creación de una ciencia*, Seix Barral, Barcelona.

GÓMEZ PARDO, J.L. (2001): "Aspectos computacionales de los números primos (I)", *La Gaceta de la R.S.M.E.*, Vol. 4, n.º 3, 649-673.

GÓMEZ PARDO, J.L. (2002): "Aspectos computacionales de los números primos (II)", *La Gaceta de la R.S.M.E.*, Vol. 5, n.º 1, 197-227.

GÓMEZ PARDO, J.L. (2002): "Criptografía y Curvas elípticas", *La Gaceta de la R.S.M.E.*, Vol. 5, n.º 3, 737-777.

HOFFMAN, P. (2000): *El hombre que sólo amaba los números*, Granica, Barcelona.

SUMA 53
Noviembre 2006, pp. 19-26

Matemáticas, mitología y poesía. Aritmética en la *Antología palatina* (I)

La Antología Palatina es un enorme mosaico de epigramas que reflejan la cultura del helenismo tardío. La edición abreviada en castellano de la Antología Griega no ha recogido hasta ahora ninguno de los cuarenta y cinco epigramas de carácter matemático. Los profesores conocemos bien el poema que nos permite calcular los años de Diofanto, a través de los hechos significativos de su vida. El resto son menos populares, si bien poseen un gran encanto y merece la pena reproducirlos.

The Palatine Anthology is an enormous mosaic of epigrams that reflects the last Hellenic culture. The Greek Anthology short edition in Spanish does not contain any of the mathematical epigrams. Mathematics teachers know the poem about Diofantus , poem that allows us to calculate his age with the help of the different facts of his life. The other epigrams are less well known, but have a great charm and it is important to reproduce them.

La poesía cumple múltiples y fundamentales papeles en el desarrollo humano: como forma de conocimiento primigenio —anterior a la filosofía—, como técnica de memorización a través del ritmo y la rima en un mundo sin papel, y ¡cómo no! la posibilidad del gozo estético al sumergirnos en su belleza.

La poesía en forma de drama ha sido factor constituyente de lenguas y pueblos. Grecia no sería entendida sin Homero y sin esa dramaturgia clásica que tanto irritaba a Platón. Inglaterra y el inglés necesitaron a Shakespeare. Y en España quizá no haya hoy conciencia del impacto sobre el pueblo de las obras de Lope.

La poesía en forma de drama ha sido factor constituyente de lenguas y pueblos.

La educación poética ha formado parte de la educación general de cualquier persona culta. En el medioevo occidental, pero más en especial en al-Andalus, o en la India del sánscrito, abundaron los tratados científicos, médicos y matemáticos, o sus resúmenes, escritos en verso. Durante el Renacimiento se conservó la tradición, y por ejemplo Tartaglia daba en verso el método de resolución de la ecuación de tercer grado.

No debe sorprendernos que el enunciado de los problemas aritméticos se haga en verso. La Antología Palatina de epigramas griegos conserva 45 ejercicios que utilizan la forma poética para plantearse. Algunos son muy conocidos como aquel que nos permite calcular cuántos años vive Diofanto. Pero lamentablemente la mayoría siguen inéditos en castellano.

Y si la poesía nos permite adentrarnos en lo desconocido, la mitología nos ofrece soluciones, nos da respuestas. Es posible que el ser humano necesite mitos: cuando rompe algunos tiende a fabricar otros. Francis Bacón —uno de los padres de la modernidad— hacía de la destrucción de ciertos ídolos culturales uno de los ejes de su filosofía.

La mitología griega tiene hoy para nosotros un encanto especial. Esos dioses que se pelean, que se casan con mortales, aliados de pueblos y héroes, furiosos y vengativos, con su infinidad de variedades y seres intermedios, hacen que los mitos griegos sigan siendo muy útiles para definir situaciones: complejo de Edipo, condena de Sísifo, caja de Pandora, talón de Aquiles o dilema de Antígona son mera muestra de las posibilidades que encierra la *sabiduría* clásica de los helenos.

Ángel Requena Fraile
IES Enrique Nieto
Melilla

El atractivo mitológico de la Grecia Clásica se encuentra muy patente en la Antología Palatina. Al encantamiento poético se une la rememoración de las tradiciones culturales. Si leemos *Sémele* como simple nombre de mujer, no sentiremos lo mismo que quien escuchaba el enunciado de los problemas que mencionan a la hija de Cadmo, el fundador de Tebas; pues desconocemos su espléndida belleza heredada de Armonía, que yace con Zeus y que muere abrasada por querer ver el verdadero rostro del supremo dios.

Los epigramas aritméticos eran en su momento un ejemplo de lo que hoy llamamos interdisciplinaridad.

Los epigramas aritméticos eran en su momento un ejemplo de lo que hoy llamamos interdisciplinaridad. En nuestra época esa transversalidad es aún mayor dado el doble alejamiento: el de la cultura literaria de la científica y el de la cultura cristiana de la pagana.

Desde el punto de vista matemático es de interés resaltar que los ejercicios de la Antología son de carácter aritmético-algebraico elemental. Esto nos lleva al periodo post-clásico; Diofanto fue la excepción de la matemática griega. El temprano tropiezo con los irracionales hacen que sea la geometría la hegemónica. La aritmética griega es mas mística de números que de operaciones, pues para los meros cálculos el término empleado era *logística*, y como tal impropio de los filósofos.

La reproducción comentada de los epigramas aritméticos solo nos permite un mínimo acercamiento a un mundo que aunque olvidado sigue fertilizando nuestro pensamiento.

La antología palatina

La colección de epigramas griegos conocida como Antología Palatina corresponde al periodo bizantino. La compilación se realiza hacia el año 980 d.C. mediante la ampliación de la recopilación realizada por el protopapa Constantino Cefaleas en el año 917.

El libro XIV —donde se encuentran los ejercicios aritméticos— es un añadido al texto de Cefaleas.

El manuscrito griego del siglo X recibe su nombre por haberse descubierto en la biblioteca de los Electores del Palatinado de Heidelberg en el año 1606. Posteriormente el códice –hoy reconocido como P23– ha sufrido algunos traslados. En 1622 el P23 pasa a Maximiliano de Baviera que se lo regala al Papa Gregorio XV. Napoleón se lo lleva a Francia en 1797, pero tras su caída la mayoría del manuscrito vuelve a Heidelberg y el resto, incluido el libro XIV, permanece en París.

Los epigramas aritméticos junto con las adivinanzas y los oráculos constituyen el Libro XIV. La colección contiene 45 ejercicios en verso. El mayor bloque lo forman los 39 de la recopilación de Metrodoro, 1 es de la Iliada, y el resto son del epigramista Sócrates.

De Metrodoro se conoce poco, y puede haberse limitado a compilar. El Sócrates del P23 puede ser el referenciado por Diógenes Laercio.

En castellano se puede encontrar una edición abreviada de la Antología editada por Gredos pero que no contiene ninguno de los epigramas aritméticos.

Esporádicamente en algunos libros en lengua española nos tropezamos con algún ejercicio. En ciertos casos citando la procedencia. Donde aparecen un mayor número de problemas —12 de los 45— es en la traducción de las Matemáticas Recreativas del belga Mauricio Kraitchik.

La antología completa en ediciones bilingües se encuentra en francés e inglés. En francés, además, se tiene el estudio matemático de uno de los patriarcas de la historia de las matemáticas: Paul Tannery.

El epigrama

En sus orígenes los epigramas son inscripciones grabadas en piedra sobre monumentos o tumbas como epitafios, dedicatorias, o meras explicaciones. El poeta de origen ibérico Marcial extiende el significado a toda poesía corta que termina en burla o broma.

En el Códice Palatino P23 el epigrama ya ha ampliado su carácter a poesía corta, casi didáctica, e incluso sirve de enunciado de ejercicios aritméticos.

En cuanto a la forma, la mayoría de los poemas están en hexámetros dactílicos, y en algún caso trímetros yámbicos. En nuestra versión el aspecto poético queda subordinado a la comprensibilidad del ejercicio.

La aritmética de la antología palatina P23

Los 45 ejercicios matemáticos del Libro XIV se resuelven con técnicas aritméticas simples, sobre todo operando con fracciones. En algunos casos —y por costumbre— es bueno usar el álgebra elemental. No se alcanza nada parecido al nivel de los problemas de la Aritmética de Diofanto.

Los ejercicios tratan de cálculos de edades, grifos, distancias, o repartos de nueces o manzanas. Ejemplos similares han seguido usándose durante generaciones.

Del manuscrito griego tienen interés los escolios, en ellos se encuentra alguna notación que simplifica.

Pitágoras de Samos, 582 – 496 a.C.

Problema 1: La escuela Pitagórica

Pitágoras afortunado, vástago de las Musas del Helicon, dime cuántos en tu morada se dedican gozosamente a la ciencia practicar.
— Te responderé Polícrates: por la belleza matemática la mitad se interesa; sobre la naturaleza inmortal una cuarta parte se vuelca; en total silencio una séptima se dedica a las voces eternas del alma; hay tres mujeres, Teano la mejor. De las Pieridas son las palabras que yo pronuncio.

Sócrates

Contexto histórico y mitológico

Las *Musas* son hijas de Zeus. Mencionadas por Homero, será Hesiodo quien les da el carácter de inspiradoras de las artes. Las Musas de cada disciplina son: Clio (historia), Euterpe (música), Talía (comedia), Melpómene (tragedia), Terpsícore (danza), Erato (poesía erótica, gozosa, anacreóntica), Calíope (elocuencia), Polimnia (lírica), Urania (astronomía).

El *Helicón* es el monte griego donde vivían las Musas.

Pieridas es un sinónimo de Musas.

Polícrates fue tirano de Samos, lugar de origen de Pitágoras.

Pitágoras es un personaje histórico y una figura mítica. En el siglo V a.C. fue fundador de una escuela-secta que contó con el apoyo de algunos tiranos de la Magna Grecia. La formación iniciática se atribuye a los egipcios. Para los pitagóricos *todo es número*, creen en la trasmigración de las almas, y atribuyen todos sus logros al maestro. La escuela ejerce una gran influencia en Platón. Pitágoras esta asociado a su famoso teorema sobre el triángulo rectángulo, a la música y a los términos filosofía y matemáticas.

> *Pitágoras fue fundador en el siglo V (a.C.) de una escuela–secta que contó con el apoyo de algunos tiranos de la Magna Grecia.*

Teano estuvo casada con Pitágoras en su vejez. Pese al carácter aristocrático y mistérico de la escuela pitagórica, en ella no había discriminación de sexo tal como pone de manifiesto el epigrama. Teano será la primera mujer en la ciencia con nombre propio.

Solución: La escuela está formada por 28 personas.

La suma de 1/2, 1/4 y 1/7 es 25/28. La diferencia a 1 da 3/28 que es la fracción de mujeres. Como hay 3, el total de pitagóricos es 28.

Tenemos entonces 14 matemáticos, 7 físicos, 4 místicos y 3 sabias.

Palas y Centauro (1483–184) de Sandro Botticelli

Problema 2: La estatuilla de oro

Primer problema de Metrodoro:

> Soy una Palas de oro al martillo moldeada;
> el noble metal es ofrenda de poetas de profundo talento.
> Carisos ha proporcionado la mitad del oro,
> un octavo Terpis, y Solón un décimo;
> Temisón, un veintavo. Faltan nueve talentos,
> y el trabajo, ambos donados por Aristodicos.

Contexto histórico y mitológico

Palas era un hijo de gigantes que muere en Atenas en la última batalla entre los dioses y los gigantes. La diosa Atenea se hace una coraza con su piel. En ese momento Palas es también uno de los nombres de la hija de Zeus, por eso se ha puesto en femenino. *Atenea* es la diosa de la sabiduría, pero también guerrera, pero no por su fuerza, pues para vencer utiliza la inteligencia. Los templos de la diosa se llamaban ateneos, allí poetas y oradores le rendían homenaje.

Carisos, *Terpis*, *Solón*, *Temisón* y *Aristodicos* son poetas preclásicos. Los más citados son Terpis, siglo VI a.C., a quien se atribuye la primera tragedia, y Solón, siglo VII a.C., ateniense elegante y moralizador.

El *talento* es una moneda de 60 minas que se conservará bajo el imperio romano y la edad media europea.

Solución: 40 talentos.

La suma de 1/2, 1/8, 1/10 y 1/20 es 31/40. La diferencia a la unidad da 9/40. Como faltan 9, el total es 40.

Carisos aporta 20 talentos, Terpis 5, Solón 4, Temisón 2 y Aristodicos los 9 restantes.

Problema 3: Amor está triste

Número 5 de la colección de Metrodoro:

> Tan triste se encontraba Amor, que Afrodita le preguntó:
> <¿Qué pena, niño, te ensombrece?> Y el respondió:
> <De mis brazos, una tras otras, las Musas han cogido
> las manzanas que yo traía del Helicón.
> Clio una quinta parte y Euterpe una doceava
> me arrebataron; Talía me quitó una octava;
> Melpómene, una veintava, y una cuarta Terpsícore;
> a las manos de Erato se ha ido una séptima.
> Por su parte, Polimnia treinta manzanas
> se ha guardado. Urania posee ciento veinte
> y Calíope cargó con un canasto de trescientas.
> Así, he llegado ante tí bien ligero de brazos:
> con cincuenta manzanas. ¡Esto me han dejado!>.

Contexto histórico y mitológico

Amor tiene diferentes tradiciones en la mitología. De Eros, dios primigenio, al hijo de Afrodita y Zeus. Este último pervive en Cupido como hijo de Venus y Júpiter. Fue Praxíteles el primero en representarle como un joven impúber.

Afrodita es la diosa del amor, proviene de la divinidad siria Astarté, pero en Grecia se va debilitando la relación con la fecundidad y reforzandose la pasión amorosa.

Las caprichosas Musas y el Helicón se describen en el problema 1.

Solución: 3360 manzanas.

Si sumamos la fracciones 1/5, 1/12, 1/8, 1/20, 1/4 y 1/7 obtenemos 715/840 que simplificada es 143/168. La diferencia a la unidad, que es la fracción restante da 25/168. Las manzanas contabilizadas son la suma de 30, 120, 300 y 50, en total 500 manzanas que son 25/168 del total. Hay que multiplicar 168 por 500/25 que resulta 3360 frutas.

> *Afrodita es la diosa del amor, proviene de la divinidad siria Astarté.*

Venus y Cupido (1606–1611) de Peter Paul Rubens

Problema 4: Los establos de Augias

> Al ser preguntado por Alcides, el del brazo fuerte,
> sobre el número de sus bueyes, Augias respondió:
> <Cerca del río Alfeo tengo la mitad;
> una octava parte rumía en las laderas del Cronios;
> alejados del Taraxippos, una doceava se mantiene
> próxima al sagrado recinto; en la Elide divina
> pastan una veintava; en la Arcadia, ¡por fin!,
> he dejado la treintava parte. Y aquí puedes ver
> el resto de mi rebaño: cincuenta cabezas>.
>
> Sócrates

Contexto histórico y mitológico

Augias es un rey legendario de Élide. Sus establos contenían 3000 bueyes (en el problema no hay tantos). Como no limpiaba, Heracles —el héroe que personifica la fuerza— se comprometió por un diezmo a desviar el río Alfeo para hacerlo pasar por los establos y llevarse la suciedad. Augias no cumple y Heracles lo mata y saquea su ciudad.

El *Alfeo* es un río del Peloponeso, formado por un antiguo dios que enamorado de la ninfa Aretusa es convertido en río por Artemisa, y la ninfa pasa a ser su fuente.

Del *Taraxippos* tenían que alejarse los caballos, los jinetes podían ser heridos. La proximidad producía terror.

La *Arcadia* es una región montañosa del centro del Peloponeso. Para los poetas es el lugar de la felicidad pastoril.

Solución: 240 bueyes.

La suma de las fracciones 1/2, 1/8, 1/12, 1/20 y 1/30 es 95/120, y su diferencia a la unidad da 25/120. Como quedan 50 por contabilizar, el número total es 120 por 50/25, o sea 240.

Problema 5: Un reloj sin igual

De la colección de Metrodoro es el 28, y de la Palatina el 6:

> Dinos reloj sin igual,
> qué parte del día ha huido ya,
> si lo que queda es dos veces dos tercios
> de lo que pasó.

Contexto histórico y mitológico

Los relojes de la época eran solares, de agua (clepsidras), de arena, de vela...

En el periodo alejandrino tardío, en especial con el ingeniero Heron, la cultura griega estuvo muy cerca de la máquina de vapor y de la utilización sistemática de engranajes.

El primer reloj mecánico documentado data de la China clásica.

La división del día en doce horas ya era usada en el imperio romano, pero con horas de diferente duración según la estación del año.

Solución: Han huido 3/7 del día.

El doble de 2/3 es 4/3 que sumado a 1 da 7/3. El día completo es 7/3, de lo que ha transcurrido. Por tanto lo que ha huido es la fracción inversa: 3/7.

Clepsidra

Problema 6: El león de bronce

De la colección de Metrodoro es el 19, y de la Palatina el 7:

> Soy el León de bronce. Mis dos ojos, mi hocico,
> ... y hasta mi pie derecho son fuentes.
> Para llenar el estanque mi ojo derecho dos días necesita,
> el izquierdo requiere tres, y mi pie tarda cuatro.
> Seis horas le bastan a mi hocico para completar el aljibe.
> ¿Cuánto tiempo se necesita para colmar el estanque
> si pongo mis cuatro fuentes a manar?

Contexto histórico y mitológico

La escultura griega en bronce fue la admiración de la Europa medieval, hasta el punto que un reto renacentista fue conseguir la misma perfección.

Leones en El Retiro de Madrid

El problema sigue siendo hoy un gran clásico. Generaciones tras generaciones han ido chocando con este ejercicio. Considerado como *problema para nota* conserva el encanto de su espléndido pasado.

Solución: Se llenará el estanque en 12/61 de día (aproximadamente 4horas 43minutos).

Para resolver el ejercicio se calcula qué fracción de estanque llena cada fuente en un día. El ojo derecho llena medio (1/2) aljibe al día, el izquierdo 1/3, el pie 1/4, y el hocico llena 4 estanques en un día. Si manan los cuatro se suman

$$1/2 + 1/3 + 1/4 + 4$$

dando 61/12. Las cuatro fuentes arrojan 61/12 del estanque en un día.

El tiempo buscado es la fracción inversa: 12/61.

Problema 7: La herencia

En la Antología Palatina es el 11:

> Las mil estateras que tengo,
> a mis dos hijos dejo en herencia.
> La quinta parte de lo dado a mi legítimo hijo
> sobrepasa en diez la cuarta parte de la suma
> que debe recaer en mi otro hijo.

Contexto histórico y mitológico

La *estatera*, el dracma y la mina son monedas y unidades de peso alejandrinas. La estatera era de oro o de plata. El dracma era de plata, y pesaba entre 2 y 4 gramos. La mina era de mayor valor, y equivalía a 100 dracmas.

El ejercicio es algo más complejo que los anteriores: nos está pidiendo el uso del álgebra. Si bien se puede resolver —como veremos— con pura aritmética elemental.
Solución: El hijo legítimo recibe 5200/9 estateras, y el bastardo hereda 3800/9 estateras.

Dracma de Khusru I 531–579 a.C.

Si la quinta parte del legítimo sobrepasa en 10 la cuarta parte de la herencia del otro, la parte completa sobrepasará en 50 los 5/4 de la del otro. Si sumamos 5/4 a la unidad son 9/4. La parte del bastardo son (1000 – 50) · 4/9 y el resto hasta mil corresponde a su hermano legítimo.

Solución algebraica:

x : herencia del legítimo.

y : herencia del bastardo.

Sistema de ecuaciones:

$$x + y = 1000$$

$$(1/5)\,x = 10 + (1/4)\,y$$

Y de aquí se obtiene la solución.

Problema 8: El rico rey Creso

En la Antología Palatina es el 12:

> El rey Creso ha consagrado seis copas,
> seis minas en total.
> Cada vasija pesa un dracma mas que su vecina.

Contexto histórico y mitológico

Creso fue el último rey de Lidia en Asia Menor desde 561 a 547 a.C. La historia recuerda a Creso como el prototipo de rey rico que explotó el comercio y las minas de oro. Su reino fue conquistado por el persa Ciro.

El dracma y la mina son monedas y unidades de peso alejandrinas como se expuso en el problema anterior. Una mina equivalía a 100 dracmas.

Solución: La más ligera pesa 97,5 dracmas y la más pesada 102,5 dracmas.

En el ejercicio, aparte de las fracciones, estamos ante una progresión aritmética. Si la primera copa pesa una cantidad, la siguiente será lo mismo más uno, y así sucesivamente. De forma que el total es seis veces la más ligera más la suma de

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

que es 15.

Por tanto seis veces la menos pesada es $6 \cdot 100 - 15 = 585$ dracmas.

De aquí se calcula que la primera copa pesa $585/6 = 97{,}5$ dracmas.

La forma mas elegante de resolver el problema es tomar la copa media que es 100 dracmas; como hay número par, las dos copas intermedias pesan 99,5 y 100,5 dracmas.

Copa medieval

Problema 9: Los gemelos Zeto y Anfión

En la Antología Palatina es el 13:

> Entre mi hermano y yo, Zeto,
> pesamos veinte minas.
> Si tomas la tercera parte de mi peso,
> y la cuarta de Anfión, juntándolos
> el peso de nuestra madre tendrás,
> seis minas en total.

Contexto histórico y mitológico

Zeto y *Anfión* fueron hermanos gemelos hijos de Zeus y Antíope.

Al ser repudiada la madre por su marido Lico –rey de Tebas– los hermanos conquistaron la ciudad.

La reconstrucción de Tebas la realiza Zeto al ritmo marcado por la flauta de Anfión.

Tebas es la ciudad clave de la mitología griega.

Solución: Zeto pesa 12 minas y Anfión 8.

Hoy es un clásico ejercicio de solución algebraica.
x es el peso de Zeto, por ello el de Anfión es $20 - x$.

Y como

$$1/3\, x + 1/4\, (20 - x) = 6$$

se obtiene que

$$(1/3 - 1/4)\, x = 1$$

y restando fracciones

$$1/3 - 1/4 = 1/12$$

Luego

$$x = 12$$

Las tres Gracias, de la primavera (1477)
de Sandro Botticelli

Problema 10: Las Gracias

En la Antología Palatina es el 48:

> Las Gracias cargaban cestas con manzanas.
> Las tres llevaban igual número de fruta.
> Una tras otra se encontraron con las nueve musas
> y se repartieron el peso.
> Al final todas –Musas y Gracias– terminan con la misma cantidad.
> Di cómo pudo ser.

Contexto histórico y mitológico

Las Gracias eran hijas de Zeus y de Eurínome. *Aglae*, *Eufrosina* y *Talía* representan la belleza y la armonía física y espiritual.

Las Gracias vivían en el Olimpo, donde también habitaban las Musas.

Monte Olimpo. Grecia

Solución: Estamos ante lo que hoy conocemos como ecuación diofántica. Por ello hay infinitas soluciones. La más sencilla es que cada Gracia empieza con doce manzanas y termina con tres.

Pero de igual forma pueden empezar con 24 y terminar con 6 manzanas, o empezar con 36 y terminar con 9, y así hasta una cantidad imposible de ser cargada.

Se tiene que cumplir que la cantidad que tiene cada Gracia antes de repartir con las Musas (x) sea como mínimo 9 para poder dar una a cada Musa más la cantidad final (y) de todas.

En forma algebraica:

$$3x = 12y$$
$$x = 9k + y$$

Luego

$$y = 3k$$
$$x = 12k$$

Siendo k un factor entero mayor que 1, y que nos da todas las soluciones. ■

SUMA 53

Noviembre 2006, pp.27-38

Sex ratio: los primeros contrastes de significación

El inicio del estudio de la proporción de nacimientos de niños y niñas (sex ratio) comienza en el siglo XVIII y ha ocupado a grandes matemáticos. En 1712 John Arbuthnott ya trató de explicar el hecho comprobado de que el número anual de nacimientos de niños superaba al de niñas. Esto supone el primer ejemplo de un contraste de significación y el germen de la técnica de los contrastes de hipótesis estadísticas. El objetivo de este artículo es mostrar estos inicios y reflexionar sobre su utilidad didáctica hoy.

The beginning of the study of the proportion of the births of boys and girls (sex ratio) begins in the XVIII century and it has occupied great mathematicians. In 1712 John Arbuthnott then tried to explain the proven fact that the yearly number of male births exceeds the female births. This is the first example of a test of significance and the germ of the method of testing statistical hypotheses. The aim of this article is to show these beginnings and to reflect on its didactic use today.

¡Cien millones de asiáticas desaparecidas!

Este era el titular hace unos meses de un artículo en un periódico de tirada nacional. No se trataba de víctimas del reciente maremoto o de otra catástrofe natural, como monzones, terremotos, etc., tan frecuentes, por otra parte, en ese lugar del planeta. Se trata de unas *desapariciones* evitables.

Según datos de la ONU, si se respetasen en Asia las reglas naturales de nacimientos por sexo, tendría que haber 100 millones de mujeres más de las que hay. La única explicación posible a este fenómeno es que en Asia se práctica el aborto selectivo, cuando no el infanticidio de las niñas.

El aborto selectivo es tan evidente que en muchas provincias chinas se han prohibido las ecografías en los cinco primeros meses de embarazo, ya que éstas permiten saber el sexo del bebé. Desde 1994, la ley prohíbe que los médicos informen a los progenitores sobre el sexo del feto. Esto ha dado lugar a una interesante actividad lucrativa en la práctica ilegal de ecografías a través de equipos itinerantes.

En los pueblos hindúes hay carteles donde se lee:

> Paga 500 rupias ahora (9,4 euros, el precio de la prueba de sexo del feto), y ahorra 50.000 en el futuro.

Un artículo publicado en la revista médica *The Lancet* (Jha, 2006), dio pie a numerosos titulares de prensa como estos:

India registra medio millón de abortos selectivos al año desde 1985 para evitar que nazcan niñas


Niñas sin luz

Los abortos selectivos y el infanticidio de niñas está alterando el equilibrio de género de forma alarmante en India y China

Gabriel Ruiz Garzón
Universidad de Cádiz. Cádiz
Luz-María Zapatero Magadaleno
IES Fernando Savater
Jerez de la Frontera. Cádiz

Medio millón de abortos selectivos en las últimas dos décadas supone que se han eliminado 10 millones de fetos de niñas en 20 años. Cuando lo normal es que nazcan alrededor de 960 niñas por cada mil varones, en el 2001, en la India, nacían 927 y, si ya se ha tenido una hija antes, la tasa de recién nacidas baja a 759 por cada mil varones o a 719 nacimientos de niñas por cada mil varones si los dos primeros hijos eran niñas.

El estudio de Lancet demuestra que la probabilidad de que una mujer aborte de una niña es mayor si ya han tenido hijas antes. También indica que estudios realizados en otros países, como Noruega, afirman que el sexo del segundo hijo no está condicionado por el del primogénito. Por cierto, no creemos que hubiera que haberse ido a Noruega para demostrar esa aseveración, ya que ésta es la conocida propiedad de *falta de memoria* de la distribución Geométrica.

Por razones biológicas, los niños y los hombres tienen una tasa de mortalidad superior a la de las niñas y las mujeres a lo largo de la vida. Esto hace que en la mayoría de los países haya más mujeres que hombres. Sin embargo, ocurre que en una veintena de países el porcentaje de varones es superior. Según el Fondo de Población de las Naciones Unidas existen 40 millones más de hombres que de mujeres.

La relación entre el número de hombres y de mujeres se puede medir a través de la tasa de masculinidad o sex ratio, dividiendo el número de hombres entre el de mujeres.

En China, donde desde 1970 se instituyó la política del control demográfico, las medidas se centraron en tres objetivos: retrasar la edad en que se contrae matrimonio, espaciar los nacimientos y reducir el número de hijos. Para reducir el número de hijos, se adoptó la llamada *política del hijo único*, ofreciendo mejoras salariales a las parejas que tuvieran un solo descendiente.

Esta política ha hecho que la selección en razón del sexo sea más que preocupante: nacen 120 varones por cada 100 niñas, cuando la sex–ratio normal en todo el mundo es de 103 a 108 varones por cada 100 niñas. Este desequilibrio conllevará problemas a la hora de encontrar pareja, incremento del tráfico de mujeres y de la prostitución.

El problema que subyace es, junto con el cultural, el económico. Mientras que los hombres se ven como mano de obra, no ocurre lo mismo con las mujeres, a las que además hay que dotarlas para casarlas. Cuando los padres envejecen dependen de los hijos, no de las hijas, que pasan a formar parte de la familia del marido.

En países donde se carece de un sistema de Seguridad Social y de pensiones, los hijos varones son el *seguro de una buena vejez*. Otra práctica habitual es dejar la niña en adopción. Miles son adoptadas cada año por familias extranjeras, muchas de ellas españolas.

Antecedentes históricos

Arbuthnott

Pero la preocupación por la proporción de niños y niñas data del siglo XVIII. Su punto de partida se puede fijar en un artículo de John Arbuthnott de 1712, publicado en la *Philosophical Transactions* titulado “Un argumento a favor de la Divina Providencia, tomado de la regularidad constante observada en los nacimientos de ambos sexos” (ver página siguiente).

Arbuthnott fue médico de la Reina Ana de Inglaterra desde 1709 hasta su muerte en 1714. En su vida fue amigo de grandes músicos como Handel o de escritores como Jonathan Swift, autor de *Los viajes de Gulliver*. Fue el creador del personaje John Bull, que viene a ser el equivalente inglés del llamado tío Sam americano. También fue miembro de la Royal Society y aficionado a la matemática. Arbuthnott tradujo y comentó en 1692 el tratado de Christian Huygens *Ratiociniss in Alae Ludo* (1657). Lo vendió bajo el título *Of the Laws of Chance* como un manual para jugadores y no como un libro de matemáticas, (una buena estrategia de Marketing), lo que le reportó grandes beneficios.

Que los estadísticos vivimos de los datos, es una realidad incuestionable. No sería hasta el siglo XVIII, cuando se pudo contar con datos de los registros parroquiales, donde quedaban reflejados bautismos (natalidad) y defunciones (mortalidad). Basándose en el número anual de varones y niñas bautizados en Londres a lo largo de 82 años, de 1629 a 1710, Arbuthnott observa que en todos los años el número de varones bautizados supera al de niñas e intenta dar una explicación a tal hecho. Aunque al final opte por explicar tal regularidad por la intervención Divina, en su artículo existen algunos razonamientos estadísticos interesantes.

John Arbuthnot

II. An Argument for Divine Providence, taken from the Constant Regularity observed in the Births of both Sexes. By Dr. John Arbuthnot, *Physician in Ordinary to her Majesty, and Fellow of the College of Physicians and the Royal Society.* [1]

AMONG innumerable Footsteps of Divine Providence to be found in the Works of Nature, there is a very remarkable one in the exact Ballance that is maintained between the Numbers of Men and Women; for by this means it is provided, that the Species may never fail, nor perish, since every Male may have its Female, and of a proportional Age. This Equality of Males and Females is not the Effect of chance but Divine Providence, working for a good End, which I thus demonstrate :

Let there be a Die of Two sides, M and F, which denote Cross and Pile), now to find all the Chances of any determinate Number of such Dice, let the Binome $\mathrm{M} + \mathrm{F}$ be raised to the Power, whose Exponent is the Number of Dice given; the Coefficients of the Terms will show all the Chances sought. For Example, in Two Dice of Two sides, $\mathrm{M} + \mathrm{F}$ the chances are $\mathrm{M}^2 + 2\mathrm{MF} + \mathrm{F}^2$, that is One Chance for M double, One for F double, and Two for M single and F single; in Four such Dice there are Chances $\mathrm{M}^4 + 4\mathrm{M}^3\mathrm{F} + 6\mathrm{M}^2\mathrm{F}^2 + 4\mathrm{MF}^3 + \mathrm{F}^4$; that is, One Chance for M quadruple, One for F quadruple, Four for triple M and single F,Four for single M and triple F. and Six for M double: and F double: and universally,: if the Number of Dice be n, all their Chances will be expressed in this Series,
$\mathrm{M}^n + \frac{\mathrm{n}}{1} \times \mathrm{M}^{\mathrm{n}-1}\mathrm{F} + \frac{\mathrm{n}}{1} \times \frac{\mathrm{n}-1}{2} \times \mathrm{M}^{\mathrm{n}-2}\mathrm{F}^2 + \frac{\mathrm{n}}{1} \times \frac{\mathrm{n}-1}{2} \times \frac{\mathrm{n}-2}{3} \times \mathrm{M}^{\mathrm{n}-2}\mathrm{F}^2 +, \&c.$
It appears. plainly, that when the Number of Dice is even, there are as many M's as F's, in the middle Term of this Series, and in all the other Terms there are most M's or most F's.

If therefore a Man undertake, with an even Number of Dice, to throw as many M's as F's, he has all the Terms but the middle Term against him; and his lot is the Sum of all the Chances, as the coefficient of the middle Term, is to the power of 2 raised to an exponent equal to the number of Dice: so in Two Dice, his Lot is $\frac{2}{4}$ or $\frac{1}{2}$, in Three Dice $\frac{6}{16}$ or $\frac{3}{8}$, in Six Dice $\frac{20}{64}$ or $\frac{5}{16}$, in Eight Dice $\frac{70}{256}$ or $\frac{35}{128}$, &c.

To find this middle Term in any given Power or Number of Dice, continue the Series $\frac{\mathrm{n}}{1} \times \frac{\mathrm{n}-1}{2} \times \frac{\mathrm{n}-2}{3}$, &c. till the number of terms are equal to $\frac{1}{2}$n. For Example, the coefficient of the middle Term of the tenth Power $\frac{10}{1} \times \frac{9}{2} \times 83 \times \frac{7}{4} \times \frac{6}{5} = 252$, the tenth Power of Two is 1024, if therefore A undertake to throw with Ten Dice in one throw an equal Number of M's and F's, he has 252 chances out of 1024 for him, that is his Lot is $\frac{259}{1024}$ or $\frac{63}{256}$, which is less than $\frac{1}{2}$.

It will be easy by the help of Logarithms, to extend this Calculation to a very great Number, but that is not my present Design. It is visible from what has been said, that with a very great Number of Dice, A's Lot would become very small; and consequently (supposing M to denote Male and F Female) that in the vast Number of Mortals, where would be but a small part of all the possible Chances, for its happening at any assignable time, that an equal Number of Males and Females should be born.

It is indeed to be confessed that this Equality of Males and Females is not Mathematical but Physical, which alters much the foregoing Calculation; for in this Case

[1]From: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **27** (1710), 186–190, reprinted in M G Kendall and R L Plackett (eds), *Studies in the History of Statistics and Probability Volume II*, High Wycombe: Griffin 1977, pp. 30–34.

Arbuthnott considera cada nacimiento equiparable al lanzamiento de una moneda legal, una de cuyas caras estará marcada como M = varón y la otra como F = niña. Si consideramos n nacimientos, es decir, n lanzamientos de la moneda, al desarrollar el binomio $(M + F)^n$, sus coeficientes binomiales nos dan el número de casos favorables conteniendo k varones y $(n - k)$ niñas de los resultados de esas n tiradas. Y por tanto, el coeficiente de $M^k F^{n-k}$ dividido por 2^n, es la probabilidad de obtener k varones y $(n - k)$ niñas. A medida que crece el número de lanzamientos, los coeficientes de cualquier término se hacen más pequeños y, por tanto, al tirar un número grande de veces la moneda, la probabilidad de obtener un número igual de M que de F es muy pequeña. En palabras de Arbuthnott (1712):

> En el vasto número de los mortales, habría una pequeña parte de todas las alternativas posibles, de que ocurriese, en cualquier momento dado, que hubiesen nacido un número igual de niños que de niñas.

Arbuthnott realiza un segundo cálculo ligado al germen de los contrastes de significación. Supongamos que queremos contrastar la hipótesis nula de que la probabilidad de nacer varón o niña fuera la misma, es decir, que es el azar el que rige el sexo en el nacimiento, contra el que no sea así, sino que sea Dios el regidor de tal hecho. En notación matemática se trataría de contrastar la siguiente hipótesis estadística:

H_0: $p = ½$ (Determinación al azar del sexo en el nacimiento)
H_1: $p > ½$ (Debido a la Divina Providencia)

Arbuthnott descarta que sea el azar el culpable del sexo en el nacimiento y echa mano de la intervención Divina para explicar que nazcan más varones que niñas.

¿Cuál sería el nivel de significación? Bajo la hipótesis nula, la probabilidad de que en cualquier año dado, naciesen más varones qué niñas, esperamos que fuera casi exactamente ½.

Pero los registros de bautizados de esos 82 años dan siempre un número de nacimientos de varones superior al de niñas. Luego, la probabilidad de que se dé ese suceso es

$$\mathrm{P}\left[M > F / H_0\right] = (1/2)^{82} = \frac{1}{483600000000000000000000}$$

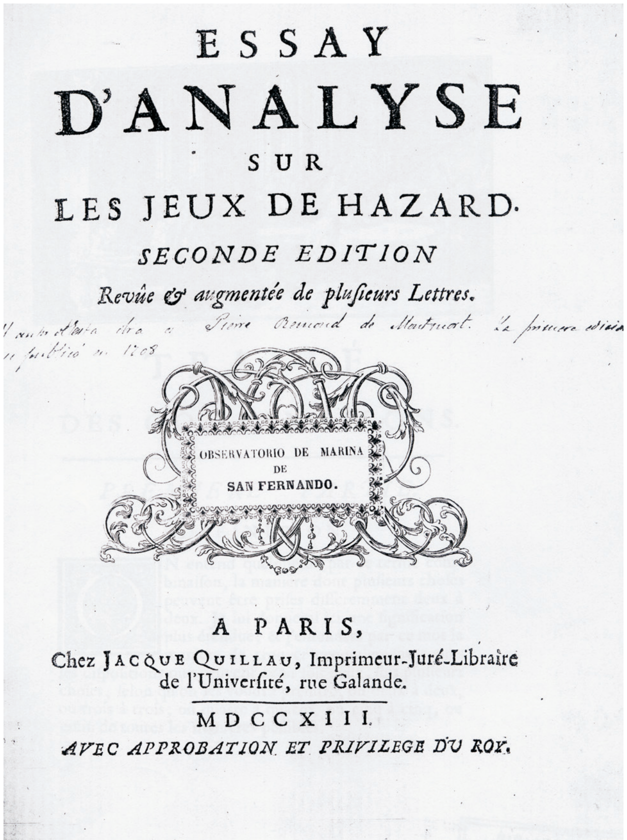
El hecho de que esta probabilidad sea infinitesimal y que la preponderancia en el nacimiento de varones ocurra *durante años y años y no sólo en Londres, sino en todo el mundo*, según Arbuthnott (1712), hace que rechacemos la hipótesis nula, que Arbuthnott descarte que sea el azar el culpable de tal regularidad y que eche mano de la intervención Divina para explicar que nazcan más varones que niñas, al objeto de compensar la tasa de mortalidad más alta de los hombres adultos.

El artículo de Arbuthnott acaba con un alegato en contra de la poligamia ya que acrecentaría el desequilibrio ya existente de la sex ratio y dificultaría la búsqueda de pareja. Razonamientos metafísicos al margen, este artículo marca el inicio de la técnica de los contrastes de significación.

Los Bernoulli

Nicolás Bernoulli tuvo como tío a Jacques Bernoulli y como primo a Daniel Bernoulli, entre otros científicos importantes de la familia Bernoulli.

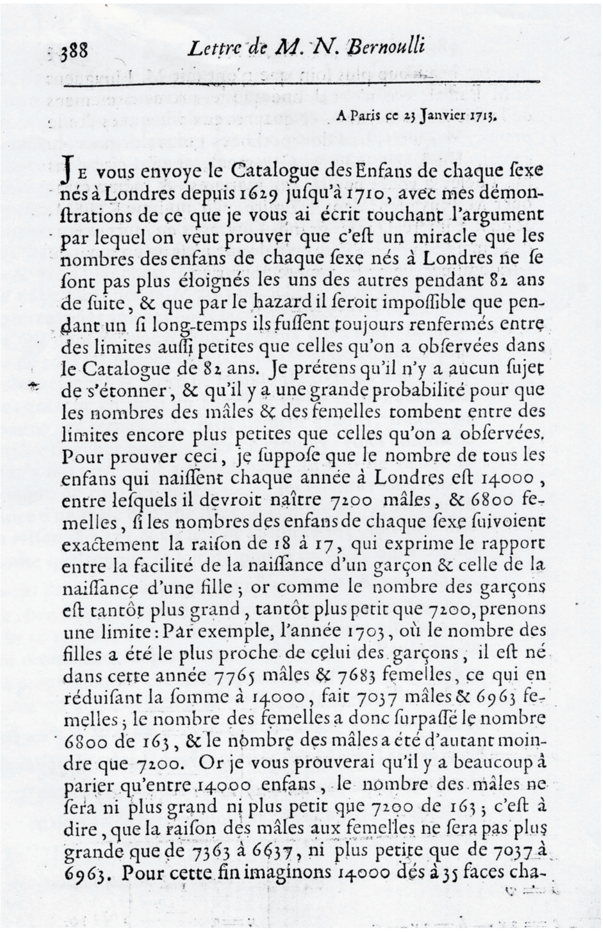
Aunque Nicolás fue un gran matemático, publicó poco. Muchos de sus hallazgos se encuentran en las casi 500 cartas que se conservan de su correspondencia con matemáticos de la época. Fue el caso de Pierre Rémond de Montmort, noble francés y matemático aficionado, que para dar cierto prestigio a la segunda edición de su *Essay* (Montmort, 1713), reproduce la relación epistolar que mantuvo con Nicolás Bernoulli.


ESSAY
D'ANALYSE
SUR
LES JEUX DE HAZARD.
SECONDE EDITION
Revûe & augmentée de plusieurs Lettres.

OBSERVATORIO DE MARINA
DE
SAN FERNANDO.

A PARIS,
Chez JACQUE QUILLAU, Imprimeur-Juré-Libraire de l'Université, rue Galande.
MDCCXIII.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

En una de estas cartas es donde Nicolás le propone a Montmort la siguiente explicación de la preponderancia del nacimiento de varones.



388 *Lettre de M. N. Bernoulli*

A Paris ce 23 Janvier 1713.

Je vous envoye le Catalogue des Enfans de chaque ſexe nés à Londres depuis 1629 juſqu'à 1710, avec mes démonſtrations de ce que je vous ai écrit touchant l'argument par lequel on veut prouver que c'eſt un miracle que les nombres des enfans de chaque ſexe nés à Londres ne ſe ſont pas plus éloignés les uns des autres pendant 82 ans de ſuite, & que par le hazard il ſeroit impoſſible que pendant un ſi long-temps ils fuſſent toujours renfermés entre des limites auſſi petites que celles qu'on a obſervées dans le Catalogue de 82 ans. Je prétens qu'il n'y a aucun ſujet de s'étonner, & qu'il y a une grande probabilité pour que les nombres des mâles & des femelles tombent entre des limites encore plus petites que celles qu'on a obſervées. Pour prouver ceci, je ſuppoſe que le nombre de tous les enfans qui naiſſent chaque année à Londres eſt 14000, entre leſquels il devroit naître 7200 mâles, & 6800 femelles, ſi les nombres des enfans de chaque ſexe ſuivoient exactement la raiſon de 18 à 17, qui exprime le rapport entre la facilité de la naiſſance d'un garçon & celle de la naiſſance d'une fille; or comme le nombre des garçons eſt tantôt plus grand, tantôt plus petit que 7200, prenons une limite: Par exemple, l'année 1703, où le nombre des filles a été le plus proche de celui des garçons, il eſt né dans cette année 7765 mâles & 7683 femelles, ce qui en réduiſant la ſomme à 14000, fait 7037 mâles & 6963 femelles; le nombre des femelles a donc ſurpaſſé le nombre 6800 de 163, & le nombre des mâles a été d'autant moindre que 7200. Or je vous prouverai qu'il y a beaucoup à parier qu'entre 14000 enfans, le nombre des mâles ne ſera ni plus grand ni plus petit que 7200 de 163; c'eſt à dire, que la raiſon des mâles aux femelles ne ſera pas plus grande que de 7363 à 6637, ni plus petite que de 7037 à 6963. Pour cette fin imaginons 14000 dés à 35 faces cha-

Por m_i y f_i, i = 1, 2, ..., 82 denotaremos el número anual de nacimientos de varones y niñas respectivamente, y sea

$$n_i = m_i + f_i \text{ y } h_i = m_i / n_i.$$

Nicolás calcula la frecuencia relativa de nacimientos de varones para el total del período estudiado:

$$h = \frac{\sum m_i}{\sum n_i} = \frac{484.382}{938.223} = 0{,}5163$$

sirviendo ese dato de estimación de la probabilidad de nacer varón.

Seguidamente compara la distribución de los datos con la distribución Binomial para determinar cuando la variación puede ser explicada por el modelo.

Nicolás calcula el número de varones nacidos suponiendo un número constante de nacimientos de n = 14.000. Prueba que los 82 valores de $x_i = 14.000\, h_i$ pueden ser considerados observaciones de una distribución Binomial y toma como probabilidad de nacer varón p = 14/35 = 0,5143, con lo que el número esperado de nacimientos masculinos es de 7.200, con un valor x_{min} = 7.037 y x_{max} = 7.363.

A través de unos cálculos algo complicados encuentra que la probabilidad de que una observación caiga dentro de un intervalo que cubra la mayor parte de distribución observada es

$$P(7.037 \leq x \leq 7.363) > 0{,}9776$$

Fuera de ese intervalo (7.037, 7.363), quedan 11 observaciones más grandes que el límite superior del intervalo, pero Nicolás Bernoulli encontrará que la probabilidad de encontrar a lo sumo 10 outliers en esos 82 datos es de 0,9956, es decir, es un hecho muy probable.

Todo lo cual llevará a comentar a Nicolás Bernoulli en su carta lo siguiente (Montmort, 1713):

> Hay una gran probabilidad de que el número de niños y niñas caigan dentro de esos límites que son muy cercanos a los observados.

Nicolás Bernoulli obviaba la intervención Divina en la regularidad de la sex ratio y solucionaba el problema propugnando (Montmort, 1713):

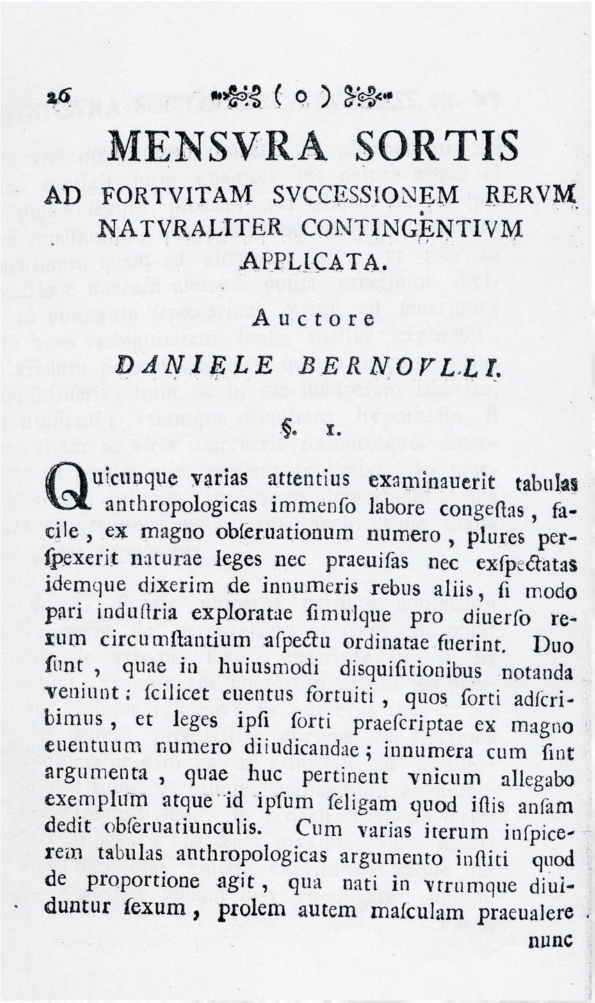
> Arrójense 14.000 dados, cada uno de 35 caras, 18 blancas y 17 negras, y las posibilidades serán muy grandes, ciertamente, de que el número de caras negras y blancas se aproximen tanto o más entre sí, que el número de niños y niñas en los registros.

Luego la regularidad de la sex ratio puede ser explicada por una Binomial con una probabilidad de nacer varón de p=18/35. Este es el primer ejemplo de ajuste a los datos de una Binomial.

Otro miembro de la saga de los Bernoulli, Daniel Bernoulli, escribe un artículo en dos partes (Bernoulli, D. 1770–1771), donde obtiene la función de densidad de la normal como aproximación a la Binomial y sus aplicaciones al análisis de las variaciones de proporción de nacimientos de niños y niñas.

Estudia la sex ratio en Londres entre 1664 y 1758, cifrándola para todos esos años en 737.629/698.958=1,055.

Mirando las proporciones para cada década, Daniel Bernoulli observa que el mínimo ocurre en la década de 1721 a 1730, quedando la sex ratio en sólo un 92.813/89.217=1,040.


26 (o)

MENSVRA SORTIS
AD FORTVITAM SVCCESSIONEM RERVM NATVRALITER CONTINGENTIVM APPLICATA.

Auctore

DANIELE BERNOVLLI.

§. 1.

Quicunque varias attentius examinauerit tabulas anthropologicas immenſo labore congeſtas, facile, ex magno obſeruationum numero, plures perſpexerit naturae leges nec praeuiſas nec exſpectatas idemque dixerim de innumeris rebus aliis, ſi modo pari induſtria exploratae ſimulque pro diuerſo rerum circumſtantium aſpectu ordinatae fuerint. Duo ſunt, quae in huiusmodi disquiſitionibus notanda veniunt: ſcilicet euentus fortuiti, quos ſorti adſcribimus, et leges ipſi ſorti praeſcriptae ex magno euentuum numero diiudicandae; innumera cum ſint argumenta, quae huc pertinent vnicum allegabo exemplum atque id ipſum ſeligam quod iſtis anſam dedit obſeruatiunculis. Cum varias iterum inſpicerem tabulas anthropologicas argumento inſtiti quod de proportione agit, qua nati in vtrumque diuiduntur ſexum, prolem autem maſculam praeualere nunc

Centrándose en esa década y buscando una explicación al citado mínimo, Daniel estudia las desviaciones entre los datos observados y esperados bajo dos hipótesis de probabilidad de nacer varón,

$$p_0 = \frac{1055}{2055} = 0{,}5133 \text{ y } p_1 = \frac{1040}{2040} = 0{,}5098$$

Daniel se da cuenta que las desviaciones deberían ser simétricamente distribuidas alrededor del cero y que la mitad de las desviaciones deberían ser menores que el error probable cuando los datos se distribuyen binomialmente (Bernoulli indica una desviación menor que el error probable con *NB*).

Mirando los resultados de la tabla (parte inferior de la página), vemos como el signo + prevalece con la hipótesis p_0 y el signo – con la hipótesis p_1, sacando como conclusión que la probabilidad de nacer varón es menor que 0,5133.

Estaríamos, por tanto, ante un primer test de los signos. Luego, nuevamente, los datos sobre la proporción de nacimientos de niños y niñas nos llevan al inicio de los contrastes.

Daniel llegó a ser un matemático muy conocido en vida. Ganó hasta en 10 ocasiones el premio de la Academia sobre diversos temas: magnetismo, forma de los barcos, sobre las mareas, etc.). En ocasiones los premios los compartiría con su padre John, hecho que le conllevaría la enemistad paterna.

A Daniel le gustaba contar la siguiente anécdota que un día le sucedió y que probaba la fama de la que disfrutó en vida.

> En cierto viaje entabló conversación con un personaje ilustrado y versado en las Ciencias. Conforme la conversación se fue sucediendo, a este personaje le entraron ganas de saber quién era su joven acompañante. “¡Yo soy Daniel Bernoulli!”, respondió él, “¡Y yo, Isaac Newton!”, replicó el desconocido, convencido de que le estaba engañando.

Año	x=n.º de varones	n=n.º de bautizados	np_0	$np_0 - x$	np_1	$np_1 - x$
1721	9430	18370	9431	+1 NB	9365	–65
1722	9325	18339	9414	+89	9349	+24 nb
1723	9811	19203	9858	+47 NB	9790	–21 NB
1724	9902	19370	9944	+42 NB	9875	–27 NB
1725	9661	18859	9682	+21 NB	9614	–47 NB
1726	9605	18808	9655	+50	9588	–17 NB
1727	9241	18252	9370	+129	9305	+64
1728	8497	16652	8548	+51	8489	–8 NB
1729	8736	17060	8758	+22 NB	8697	–39 NB
1730	8606	17118	8788	+182	8727	+121

Daniel Bernoulli

Laplace

El matemático francés Pierre Simon Laplace estudia el número anual de nacimientos en París durante el período 1745–1770 (*Laplace*, 1781) y obtiene que la frecuencia relativa de nacer varón era de h=251.271/493.472=0,509709.

Pierre Simon Laplace.
En la imagen de fondo aparece Laplace modificado por ordenador utilizando el operador Laplaciano

Aunque en pueblos pequeños de Francia y, durante cuatro o cinco años, el número de niñas supera al número de varones, trabajando con muestras grandes, argumenta que tanto en París como en Londres nacen más varones que niñas cada año, sin embargo, esta diferencia no es muy grande. Para dirimir la cuestión de si esa preponderancia de varones es debida al azar o es favorecida por la naturaleza, llamando ϑ a la probabilidad de nacer varón, su objetivo se centra en efectuar el siguiente contraste

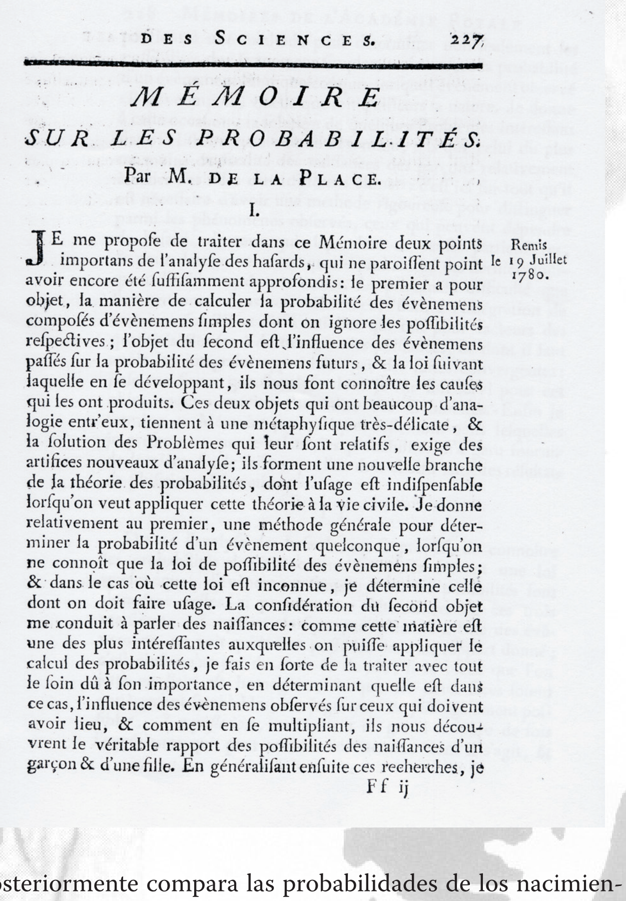
$$H_0 : \vartheta \leq \frac{1}{2}$$
$$H_1 : \vartheta > \frac{1}{2}$$

para lo cual, utilizando muestras grandes, calculando

$$\mathrm{P}\left(\vartheta \leq \frac{1}{2}\right) = 1{,}1521x10^{-42}$$

concluye (*Laplace*, 1781) que

> Uno puede observar que es igualmente cierto como otra verdad moral que la diferencia observada en París entre los nacimientos de varones y niñas es debido a una mayor probabilidad del nacimiento de varones.



DES SCIENCES. 227

MÉMOIRE
SUR LES PROBABILITÉS.
Par M. DE LA PLACE.

I.

JE me propoſe de traiter dans ce Mémoire deux points importans de l'analyſe des haſards, qui ne paroiſſent point avoir encore été ſuffiſamment approfondis: le premier a pour objet, la manière de calculer la probabilité des évènemens compoſés d'évènemens ſimples dont on ignore les poſſibilités reſpectives; l'objet du ſecond eſt l'influence des évènemens paſſés ſur la probabilité des évènemens futurs, & la loi ſuivant laquelle en ſe développant, ils nous font connoître les cauſes qui les ont produits. Ces deux objets qui ont beaucoup d'analogie entr'eux, tiennent à une métaphyſique très-délicate, & la ſolution des Problèmes qui leur ſont relatifs, exige des artifices nouveaux d'analyſe; ils forment une nouvelle branche de la théorie des probabilités, dont l'uſage eſt indiſpenſable lorſqu'on veut appliquer cette théorie à la vie civile. Je donne relativement au premier, une méthode générale pour déterminer la probabilité d'un évènement quelconque, lorſqu'on ne connoît que la loi de poſſibilité des évènemens ſimples; & dans le cas où cette loi eſt inconnue, je détermine celle dont on doit faire uſage. La conſidération du ſecond objet me conduit à parler des naiſſances: comme cette matière eſt une des plus intéreſſantes auxquelles on puiſſe appliquer le calcul des probabilités, je fais en ſorte de la traiter avec tout le ſoin dû à ſon importance, en déterminant quelle eſt dans ce cas, l'influence des évènemens obſervés ſur ceux qui doivent avoir lieu, & comment en ſe multipliant, ils nous découvrent le véritable rapport des poſſibilités des naiſſances d'un garçon & d'une fille. En généraliſant enſuite ces recherches, je

Remis le 19 Juillet 1780.

Ff ij

Posteriormente compara las probabilidades de los nacimientos de varones en Paris y Londres. Sus datos son que en París entre 1745–1770 la frecuencia relativa de nacimientos de varones fue de h_p = 251.527/493.472 = 0,509709, mientras que en Londres, entre 1664–1757, la frecuencia relativa de nacimientos de varones fue de h_L =737.629/1.436.587=0,513459.

Si ϑ_P y ϑ_L son las probabilidades del nacimiento de un varón en París y Londres respectivamente, su idea es contrastar

$$H_0 : \vartheta_L \leq \vartheta_P$$
$$H_1 : \vartheta_L > \vartheta_P$$

A partir de la comparación de dos distribuciones Beta obtiene la probabilidad de que

$$p(\vartheta_L \leq \vartheta_P) = 0{,}0000024363$$

concluyendo que:

> Uno puede apostar cuatrocientos mil a uno a que el número de nacimientos de varones es más fácil en Londres que en París.

Laplace no aprecia diferencias significativas entre la probabilidad de un nacimiento de un varón en lugares tan distantes como San Petersburgo o Londres.

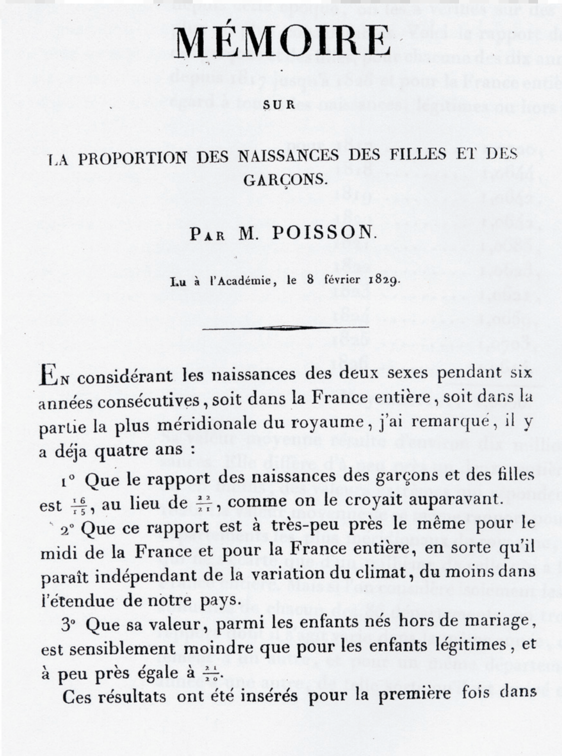
Posteriormente, Laplace achacará ese resultado a que los campesinos entregaban para su acogimiento más niñas que varones en los hospicios en París y que este dato viciaba los resultados. La proporción de varones nacidos en París estaría, por tanto, infravalorada y una vez tenido en cuenta estos datos, se podría apostar 103 a 1 a que la probabilidad de que se dé un nacimiento varón en Londres sea mayor que en París, comparada con la apuesta previa de 328.268 a 1.

Dividiendo las observaciones en nacimientos dentro y fuera del matrimonio, encuentra que la frecuencia relativa de varones para los nacimientos que hay fuera del matrimonio es de h_F=200.494/391.192 = 0,512521 y para los que se producían dentro es de h_D =1.761.867/5.353.166=0,515932, lo que le lleva a inferir que la probabilidad de nacer varón es menor fuera del matrimonio que dentro.

Sin embargo, Laplace no aprecia diferencias significativas entre la probabilidad de un nacimiento de un varón en lugares tan distantes como San Petersburgo o Londres, acercándose ésta a 0,5135, concluyendo que el clima no influye en esa probabilidad.

Poisson

Poisson también se ocupará del tema de la proporción de nacimientos de niños y niñas en una memoria (Poisson, 1830), además de observar que la aproximación normal no se cumple si p tiende a cero y np es finito, y de obtener la distribución que lleva su nombre.



MÉMOIRE

SUR

LA PROPORTION DES NAISSANCES DES FILLES ET DES GARÇONS.

PAR M. POISSON.

Lu à l'Académie, le 8 février 1829.

EN considérant les naissances des deux sexes pendant six années consécutives, soit dans la France entière, soit dans la partie la plus méridionale du royaume, j'ai remarqué, il y a déja quatre ans :

1° Que le rapport des naissances des garçons et des filles est $\frac{16}{15}$, au lieu de $\frac{22}{21}$, comme on le croyait auparavant.

2° Que ce rapport est à très-peu près le même pour le midi de la France et pour la France entière, en sorte qu'il paraît indépendant de la variation du climat, du moins dans l'étendue de notre pays.

3° Que sa valeur, parmi les enfants nés hors de mariage, est sensiblement moindre que pour les enfants légitimes, et à peu près égale à $\frac{21}{20}$.

Ces résultats ont été insérés pour la première fois dans

La proporción de nacimientos de niños y niñas le da pie a formular la llamada *Ley de los Grandes Números*, ya que podemos observar que la probabilidad de nacer varón varía levemente de un período a otro o de una región a otra, pero la estabilidad observada en la agregación de números se corresponde con la media de esas probabilidades.

Con las sex ratio de la década de 1817 a 1826:

1,0720; 1,0644; 1,0642; 1,0642; 1,0685;
1,0623; 1,0621; 1,0659; 1,0703; 1,0614

investiga la estabilidad de éstas a partir de la frecuencia relativa del nacimiento de varones para todo el período:

$$h = \frac{4981566}{9656135} = 0{,}5159$$

que se corresponde con una sex ratio de 1,0656.

Encuentra, con una probabilidad cercana a la unidad, que las 10 sex ratio se hallan dentro de los límites

$$1{,}0656\ (1 \pm 0{,}0091) = (1{,}0565,\ 1{,}0747),$$

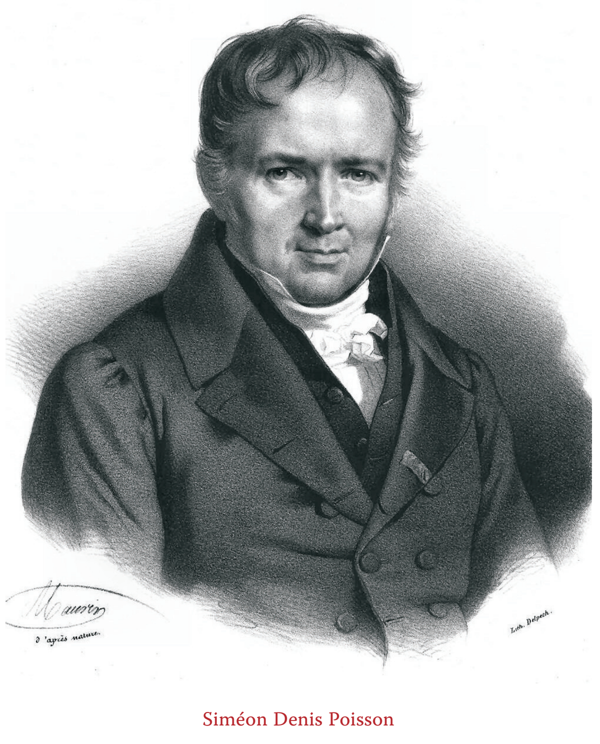
es decir, obtiene un alto grado de estabilidad de las sex ratio a través del tiempo.

Dicha estabilidad también se manifiesta sobre todas las regiones. Llamando h_i a la frecuencia relativa de nacimientos de varones sobre el número anual de nacimientos en una región de tamaño medio, obtiene que

$$P(h_1 < \frac{1}{2}) = 0{,}000251$$

Luego la probabilidad de que el número de nacimientos femeninos exceda del de masculinos en una región es muy pequeña. Obtiene una sex ratio de 16/15 para cualquier región de Francia, independientemente de sus condiciones climáticas, y que dicha sex ratio se reduce a 21/20 para varones nacidos fuera del matrimonio.

Por tanto, con todos estos resultados establece lo que él llama *la ley de los grandes números*, que garantiza la estabilidad de las frecuencias relativas y las medias aritméticas de un gran número de observaciones de un mismo fenómeno, que se realiza en idénticas circunstancias.



Siméon Denis Poisson

Actividades

Proponemos con estas actividades desarrollar y afianzar al mismo tiempo, conocimientos tanto de Geografía como de Matemáticas, apostando por la transversalidad y por el tratamiento al unísono de un mismo tema desde diversas áreas.

Nivel: 2.º de Bachillerato de Ciencias Sociales.

Áreas: Geografía (Bloque dedicado a la Ocupación y Poblamiento, Tema: La Población Española) y Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II (Bloque dedicado a la Estadística y la Probabilidad, Temas: Inferencia Estadística: Estimación y contrastes de hipótesis).

Tiempo sugerido: Dos clases.

Con esta propuesta de actividades los alumnos y alumnas serán capaces de comprender los datos que aportan las noticias, reconociendo los problemas demográficos de China e India, valorar las condiciones de vida de la mujer en esos países, estableciendo una comparación con las condiciones de vida de la mujer en la España actual, interpretar y analizar datos de geografía humana y económica, aportados por las fuentes sugeridas, sintetizar y expresar gráficamente, con pirámides, la situación de la población en España, China y la India, describir y comentar distintos tipos de pirámides de edades, hallar intervalos característicos para una proporción en poblaciones concretas y para muestras de tamaño determinado, estimar, mediante un intervalo, el valor de la proporción, p, de individuos con una característica de la población a partir de una muestra, efectuar hipótesis estadísticas sobre el valor de p y contrastarlas a partir de los resultados de una muestra.

Actividad I

Las dos siguientes imágenes se corresponden, por un lado con todos los hombres y niños, y por otro con todas las mujeres y niñas, del pueblo hindú de Kandarkulamickan.

- Expresa tu opinión, de manera razonada, sobre la proporción de sexos en ese pueblo hindú.
- Valora sus consecuencias demográficas.

Observa el siguiente recorte de prensa

Poligamia por la patria

Políticos rusos defienden que se permita tener varias esposas para resolver la crisis demográfica

- ¿Cuál es la causa de que dirigentes rusos de la región de Chechenia aboguen por la poligamia?
- ¿La situación de Chechenia es la misma que la de la India o China?
- ¿Qué acontecimientos han provocado la situación de crisis demográfica en Chechenia? Razona tu respuesta.

La siguiente tabla muestra la sex ratio de 10 años del último siglo en la provincia de Cádiz (datos del Instituto de Estadística de Andalucía IEA, 1999).

Año	N.º de varones	N.º de niñas	Total de nacimientos	*Sex ratio*	Prob. de nacer varón
1900	8403	7931	16334	1,0595	0,5144
1910	8252	7632	15884	1,0812	0,5195
1920	8405	7945	16350	1,0578	0,5140
1930	9143	8455	17598	1,0813	0,5195
1940	9253	8635	17888	1,0715	0,5172
1950	7969	7697	15666	1,0353	0,5086
1960	11180	10359	21539	1,0792	0,5190
1970	11506	11019	22525	1,0441	0,5108
1980	10601	9731	20332	1,0894	0,5213
1990	7753	7148	14901	1,0846	0,5203

- ¿Ha sido siempre una constante el mayor número de nacimientos de varones que de niñas? Razona tu respuesta.
- Compara la sex ratio de Cádiz a lo largo del siglo XX con el valor de la sex ratio de China (1,20 en el año 2000) y explica las diferencias en el rol social de la mujer en España y en China o la India.
- Tomando el dato de Cádiz del año 1990 como probabilidad de que un bebé sea varón. Si en la maternidad de una clínica de Jerez de la Frontera nacieron 184 bebés:
  – ¿Cómo se distribuye la proporción de bebés varones en muestras de 184 bebés?
  – ¿Cuál es la probabilidad de que haya 100 varones o más?
  – Halla el intervalo característico correspondiente al 95% para la proporción de varones en muestras de 184 bebés.

- Se quiere estimar la proporción de bebés varones nacidos en toda Andalucía. Para ello se toma como muestra los 14.901 nacimientos en Cádiz en 1990, encontrándose en ella que 7.753 son varones.
  – Hallar un intervalo de confianza al 95% para estimar la proporción de bebés varones nacidos en toda Andalucía.
  – ¿Cuál es el error máximo admisible para la estimación de la anterior proporción?
  – ¿Qué medida sugieres para hacer mayor la amplitud del intervalo de estimación?
  – Contrasta la hipótesis de que la probabilidad de que un bebé sea varón sea exactamente de 0,53 al 90% de confianza, utilizando las técnicas de los contrastes y la de los intervalos de confianza.
  – ¿Se podría afirmar utilizando la técnica de los contrastes y con un nivel de significación del 10% que la proporción de bebés varones es de, cómo mucho, un 51%?
  – Realiza el contraste anterior utilizando la técnica del p-valor.

- Compara tu resultado con el obtenido por Laplace, contrastando la hipótesis de que:

$$H_0 : \vartheta \leq 1/2$$

llamando ϑ a la probabilidad de nacer varón y sabiendo que la frecuencia relativa de nacer varón entre 1745–1770 en Francia era de

$$h = \frac{251.271}{493.472} = 0{,}509709.$$

Actividad II

El siguiente cuadro nos da la población de derecho por grupos de edad y sexo de España y China en el año 2000 (Fuente: Oficina del Censo de los Estados Unidos).

Años	Hombres España	Mujeres España	Hombres China	Mujeres China
0–4	954.975	898.054	50.347.791	44.127.709
5–9	994.106	934.186	54.449.328	48.918.724
10–14	1.069.300	1.011.459	65.228.382	59.998.627
15–19	1.313.588	1.246.485	53.193.649	49.749.964
20–24	1.646.923	1.577.848	49.185.604	46.472.592
25–29	1.740.129	1.675.869	60.842.001	57.617.153
30–34	1.680.229	1.629.325	64.210.181	60.607.097
35–39	1.573.005	1.552.412	52.588.414	50.000.431
40–44	1.415.946	1.418.653	42.636.756	39.465.761
45–49	1.231.504	1.243.131	43.095.380	40.838.382
50–54	1.176.666	1.212.326	31.699.045	29.345.189
55–59	1.033.333	1.082.802	23.875.932	21.993.854
60–64	893.565	990.547	21.152.731	19.674.377
65–69	964.551	1.113.505	17.560.938	17.142.611
70–74	800.497	1.004.196	12.141.707	12.045.058
75–79	582.738	830.464	7.084.405	8.722.363
80+	511.714	1.012.050	4.577.910	7.463.316
Total	19.582.769	2.043.312	635.870.154	614.983.208

Construye las pirámides de población asociadas a dichos datos de España y China. Colorea en las pirámides con colores diferenciados, los varones y las mujeres, y dentro de ellos, los tres grupos de edades representados: jóvenes, adultos y ancianos. Comenta ambas pirámides teniendo en cuenta:

Base
Cúspide
Perfil
Relación hombres–mujeres
Proporción de jóvenes, adultos y ancianos
Proporción de población activa
Tipo de pirámide
Tipo de país al que pertenece

Comenta la pirámide de la India en relación con la de España y China siguiendo los mismos pasos que en el ejercicio anterior (figura 1).

Valora las repercusiones demográficas, sociales y económicas que cada una de las pirámides anteriores reflejan.

¿La preponderancia del número de hombres respecto del de mujeres, en el nacimiento, tiende a equilibrarse en las edades adultas? ¿Sobre qué edad se produce ese equilibrio en España y en China? ¿Cuáles pueden ser las causas? ¿Qué ocurre en la edad anciana?

En un futuro, la diferencia en la esperanza de vida entre hombres y mujeres se irá acortando. ¿A qué será debido?

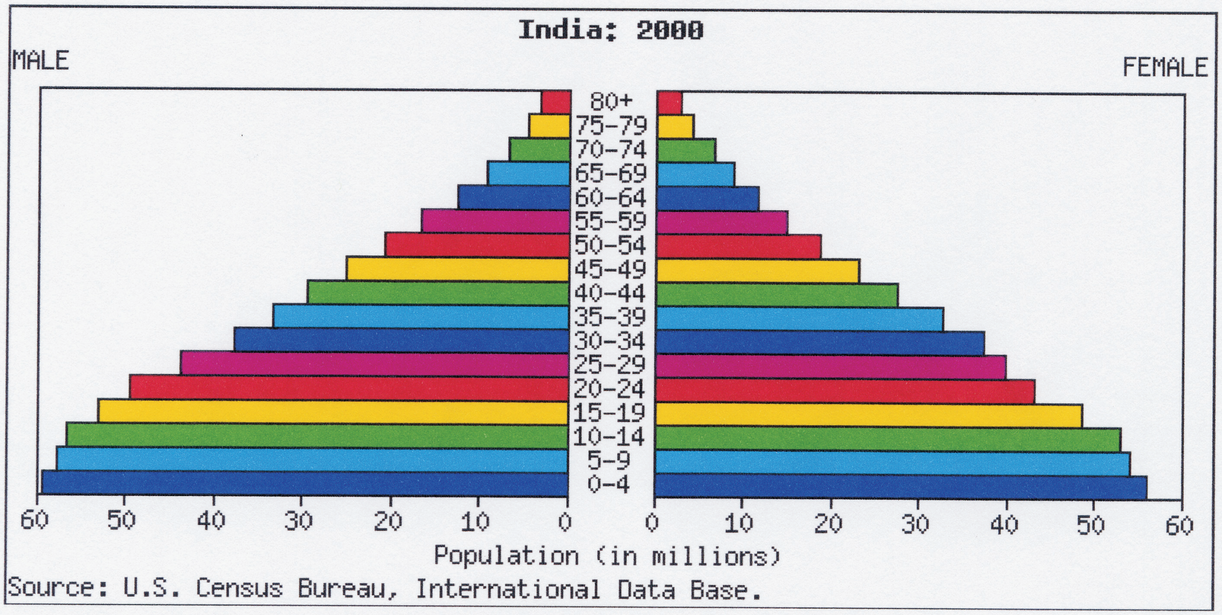


Figura 1

Según los datos del cuadro relativos a España, por grupos de edad y sexo, la proporción de menores de 14 años es de 5.862.080/40.016.081=0,1464.

- ¿Cuál es la distribución de la proporción de menores de 14 años en muestras de 50 habitantes de nuestra nación?
- Halla la probabilidad de que en una muestra de 50 habitantes, haya entre 7 y 8 menores de 14 años. ¿Y más de 9 menores de 14 años?

No nos podemos mantener al margen de las tragedias mundiales que afectan a millones de personas y que quedan reflejadas en los medios de comunicación.

Conclusiones

Convendrán los lectores con nosotros en que la Historia, la Geografía y las Matemáticas no pueden vivir continuamente de espaldas. Un alumno puede estudiar en Geografía temas como las fuentes demográficas, el movimiento natural de la población, las migraciones o la estructura de la población española y no tener ni idea de los contrastes de significación. Y viceversa, le podemos mostrar los contrastes de significación sin ninguna aplicación histórica.

El mostrar a la vez las dos caras de la moneda nos ayuda a comprender tanto una técnica de la Estadística Inferencial como la estructura de cualquier población, como las últimas tendencias en políticas demográficas.

Resaltar, por último, que el estudio de la proporción de nacimientos, no es un tema baladí, porque:

Durante 300 años se ha convertido en un leitmotiv, que repetidamente ha sido motivo de estudio de los matemáticos más importantes, como en este artículo hemos visto.

Las técnicas de reproducción asistida nos permiten elegir el sexo de nuestros hijos. Dicha técnica se aplica si los padres son portadores de alguna enfermedad hereditaria que podría afectar al feto. Pero la generalización de dicha técnica a otros casos, podría conllevar desequilibrios entre los sexos y afectar a la larga a la felicidad de nuestros hijos. Debemos ser conscientes de las repercusiones que podrían tener modificaciones legales que podrían hacerse en esta materia.

Como vimos en el inicio de este artículo, no nos podemos mantener al margen de los tragedias mundiales que afectan a millones de personas y que quedan reflejadas en los medios de comunicación, se den en China o un país más cercano.

Por último, debemos colaborar reivindicando el papel de la mujer y a evitar actitudes discriminatorias.

Seguro que desde la Estadística, la Geografía y la Historia podemos hacer algo por todo ello y este artículo es nuestra aportación. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARBUTHNOTT, J. (1712): "An argument for Divine Providence, taken from the constant regularity observed in the births of both sexes", *Philos. Trans. R. Soc. London*, 27, 186–190.

BERNOULLI, D. (1770-1771): "Mensura sortis ad fortuitam successionem rerum naturaliter contingentium applicata", *Novi Comment. Acad. Sci. Imp. Petrop.*, 14, 26–45.

HALD, A. (1990): *A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750*, Wiley, Nueva York.

JHA, P. et al. (2006): "Low male-to-female sex ratio of children born in India: national survey of 1.1. million households", *Lancet*, 367, 211–218.

LAPLACE, P.S. (1781): "Mémoire sur les probabilités", *Mém. Acad. R. Sci. Paris*, 227–332.

MONTMORT, P.R. DE (1713): *Essay d'Analyse sur le jeux de hazard*, Quillau, París.

POISSON, S.D. (1830): "Mémoire sur la proportion des naissances des filles et des garcons", *Mém. R. Acad. Sci, Inst. Fr.*, 9, 239–308.

VARIOS (1996): *Andalucía Datos Básicos 1996*, Instituto de Estadística de Andalucía IEA, Sevilla.

VARIOS (1999): *Un siglo de Demografía en Andalucía. La población desde 1900*, Instituto de Estadística de Andalucía IEA, Sevilla.

SUMA 53
Noviembre 2006, pp.39-49

Euler jugando al dominó

Se presenta una actividad que relaciona dominó y grafos y con la que pretendemos que el alumno, a partir del análisis de un cierto aspecto del juego, sea capaz de llegar a conjeturar los resultados clásicos de Euler sobre la existencia de caminos o ciclos recorriendo todas las aristas de un grafo.

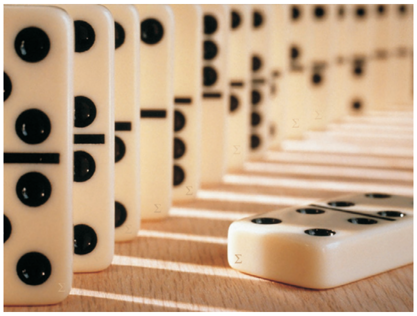
We suggest an activity relating dominoes and graphs. Our main goal is that the student, starting from an analysis of the game, manages to conjecture the classical results about the existence of paths and cycles travelling across every edge in a graph which were first found by Euler.

La actividad desarrollada en este artículo se basa, en parte, en una sesión de trabajo con alumnos de 4.º de ESO dirigida por uno de los autores en el Taller de Talento Matemático[i] organizado por el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

Nuestro principal propósito es introducir los grafos en el aula de forma natural, consiguiendo que los alumnos lleguen a conjeturar los resultados originales de Euler sobre la existencia de cierto tipo de caminos en un grafo.

La Teoría de Grafos es una herramienta matemática con múltiples aplicaciones en muy diferentes contextos. Pueden aplicarse en sociología (Kindt, 1993), en problemas de índole geográfica (Espinel, 1994), en diseño de algoritmos informáticos (Sipser, 1996) e incluso en el análisis de muchos juegos de estrategia (Martín y Méndez, 2004; Espinel y Sobrón, 1992). Quizás esta pluralidad de contextos en los que pueden aparecer, unida a la simplicidad de conceptos necesarios para introducirse en su estudio, sugiere la viabilidad de que los conozcan los alumnos de secundaria. Ya que, además de su carácter utilitario, la Teoría de Grafos tiene un claro valor formativo puesto que

> los grafos constituyen una buena herramienta para conceptuar situaciones, para extraer pautas y, de forma mucho más evidente, para llegar a extraer esquemas y transferirlos a situaciones nuevas (Coriat y otros, 1989).



*Comprender las cosas que nos rodean
es la mejor preparación para comprender
las cosas que hay más allá.*
Hipatia de Alejandría

Antonio M. Oller Marcén
José María Muñoz Escolano
Universidad de Zaragoza
Zaragoza

Y además,

> facilitan el acceso de los alumnos a sus propias estrategias de aprendizaje [...] porque el ir y venir entre situaciones y estructuras puede facilitar la toma de conciencia de los propios procesos metacognitivos (ibidem).

Este último hecho lo consideramos de vital importancia, pues en el informe PISA 2003 leemos:

> Los estudiantes con una desarrollada capacidad de gestionar su propio aprendizaje son capaces de elegir objetivos de aprendizaje adecuados, de usar su conocimiento y habilidades previas para dirigir su aprendizaje y de seleccionar estrategias de aprendizaje adecuadas a la tarea que les ocupa.

El juego es una herramienta propicia para invitar a que el alumno investigue casos particulares en busca de posibles generalizaciones.

Por otro lado, los teoremas o resultados de Euler a los que hacíamos referencia anteriormente aparecen como la generalización de la resolución del conocido problema de los puentes de Köningsberg por parte del célebre matemático Leonhard Euler en 1736. Así, en el lenguaje de la Teoría de Grafos, estos resultados dicen lo siguiente:

– Las condiciones necesarias y suficientes para que en un grafo exista un ciclo euleriano (esto es, una forma de recorrer un grafo pasando una sola vez por cada arista y acabando el trayecto en el vértice en que se empezó) son que el grafo sea conexo y que el número de aristas que salgan de cada vértice sea un número par.
– Las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de caminos eulerianos de un grafo (una manera de recorrerlo pasando una sola vez por cada arista, pudiendo acabar el trayecto en otro vértice) son que el grafo sea conexo y que el número de aristas que salgan de cada vértice sea par, salvo en dos de los vértices que serán impares. En estos vértices empezará y acabará el camino euleriano.

Los motivos que nos llevan a elegir estos resultados de Euler como objetivo final de la actividad son diversos. En primer lugar podemos indicar que dichos resultados constituyen, en cierto modo, el acta fundacional de la Teoría de Grafos e incluso de la Topología, es decir, tienen un gran interés histórico añadido al puramente matemático. Además, dichos resultados son útiles y aplicables en situaciones muy distintas a la que les dio origen. Por último, éstos son muy intuitivos y fáciles de comprender por parte de los alumnos.

Nos parece, por tanto, que los motivos anteriores justifican sobradamente el intento de abordar una actividad para introducir los grafos —y los resultados de Euler— a alumnos de secundaria. Sin embargo a la hora de abordar una actividad del tipo:

¿Puedes encontrar un camino euleriano en este grafo?

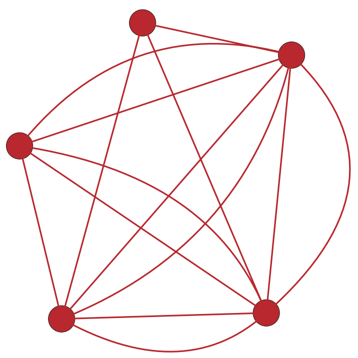


Figura 1. Un grafo difícil de manejar

pueden presentarse algunas dificultades cuando se intenta conjeturar dichos resultados sólo a partir del manejo de los grafos; por ejemplo:

– Existen pocas estrategias de búsqueda de caminos aparte de la técnica de ensayo y error.
– La citada técnica, además, exige marcar las aristas del grafo para gestionar el recorrido y ante una mala elección es difícil *desandar* el camino realizado. Esto obliga a comenzar de nuevo, con las dificultades que esto conlleva respecto a recordar lo que se hizo inicialmente.
– La conjetura sobre los resultados de Euler y su posterior demostración o justificación pueden ser difíciles de intuir si razonamos únicamente a partir de un grafo.

Por todo ello, hemos buscado un juego fácilmente modelizable por los grafos en el que plantearemos actividades relacionadas con los resultados de Euler que los alumnos podrán resolver dentro del mismo, exportando posteriormente sus respuestas al ámbito de los grafos.

Muchos autores han trabajado e investigado a lo largo de estos años sobre la importancia de la introducción de los juegos en el aula de matemáticas como un valioso recurso educativo con un gran factor motivador en el alumnado (Balbuena y otros, 2000; Corbalán, 1994; Delofeu, 2001; Gairín y Muñoz, 2006; Gardner, 2002; Grupo Alquerque, 2004; ...). En Gairín (2001) podemos leer que

> hacer matemáticas es un proceso que demanda del aprendiz una actitud positiva para la resolución de problemas [...] una actitud, en suma, de que hacer matemáticas significa crear y destruir.

En el ámbito de los juegos, este crear y destruir es más literal que nunca, pues las partidas pueden ser repetidas tantas veces como se desee, surgiendo de forma natural un amplio abanico de casos diferentes. El juego es una herramienta propicia para invitar a que el alumno investigue casos particulares en busca de posibles generalizaciones, genere sus propias conjeturas y se aventure a validarlas mediante una justificación razonada o una posterior demostración.

Leemos en Corbalán (1999) que

> la posibilidad de disponer de juegos matemáticos es grande, porque no sólo hay que buscar dentro de las propias matemáticas, sino que se puede partir de los juegos sociales habituales.

Nosotros nos decantamos por estos últimos juegos que ya pertenecen a la cultura del entorno del alumno ya que:

- El alumno puede haber tenido experiencias previas fuera del aula, con lo cual parte con un bagaje previo de ensayos, razonamientos y estrategias que pueden serle útiles a la hora de detectar regularidades y posibles generalizaciones.
- Consideramos que para el alumno encierran un gran factor motivador pues, además de las competencias matemáticas que se trabajan en el juego, le permite adquirir también unas competencias sociales que puede percibir como útiles fuera del aula.

De entre los distintos juegos sociales, nosotros hemos optado por el dominó a causa de dos razones bien claras: como ya hemos apuntado, porque se trata de uno de esos juegos que se halla plenamente integrado en nuestro acerbo cultural[ii] y sobre todo por la naturalidad con la que el lenguaje de los grafos surge al intentar analizar sistemáticamente algunos aspectos de este juego. Otra de las ventajas que tiene el dominó es que al ser conocido en casi todo el mundo, puede reducir problemas a la hora de plantear la actividad en un aula en la que convivan alumnos de distintos orígenes. No obstante, la simplicidad del juego es grande y cualquier alumno puede aprender las reglas en muy pocos minutos.

De manera resumida, podríamos decir que los objetivos que se persiguen en este artículo son los siguientes:

- Analizar matemáticamente algunos aspectos del juego del dominó, proponiendo diversos problemas que se resuelven dentro del mismo.
- Presentar los grafos ante el alumno.
- Plantear la relación existente entre dominó y grafos, trasladando problemas y soluciones del ámbito del juego al del grafo.
- Conseguir que los alumnos conjeturen los resultados clásicos de Euler sobre Teoría de Grafos.
- Conseguir que los alumnos utilicen dichos resultados sobre grafos, sabiendo aplicarlos en situaciones diversas.

El artículo está dividido en cinco partes que pretenden recoger los objetivos antes citados. En la primera parte, que coincide con el primero de los objetivos, se presenta el problema dentro del juego del dominó y su análisis posterior dividido en tres fases. En la segunda mostramos en dos fases cómo los grafos surgen con naturalidad a partir de la consideración del problema presentado y vemos el modo de traducir del lenguaje del juego al de los grafos, desarrollando así el segundo, tercer y cuarto objetivos. En la tercera parte presentamos algunas conclusiones a las que llegamos tras el desarrollo de las dos anteriores. Finalmente, en la cuarta parte nos centramos en presentar algunas actividades que permitan sacar partido a los resultados obtenidos al final de la segunda parte, alcanzando así el quinto y último objetivo.

> *La mecánica del juego del dominó es situar unas fichas junto a otras con la única regla de que sólo pueden tocarse por el lado en el que tienen una cifra en común.*

Planteamiento: hacia la partida perfecta

La mecánica del juego del dominó es bien sencilla: situar unas fichas junto a otras con la única regla de que sólo pueden tocarse por el lado en el que tienen una cifra en común. Tradicionalmente el dominó es un juego que enfrenta a dos o cuatro jugadores de manera competitiva, sin embargo, la actividad que proponemos permite que se juegue individualmente o por parejas de una forma cooperativa.

Nuestro objetivo final será encontrar las condiciones que debe cumplir a priori un conjunto cualquiera de fichas de dominó para que, si jugamos adecuadamente una partida, utilicemos todas las fichas del conjunto. También distinguiremos dos casos: cuando la partida se *abre* y se *cierra* con la misma cifra (*partida perfecta*) y cuando se *abre* y se *cierra* con cifras distintas (*partida semiperfecta*).

Como una condición previa, descartaremos jugar con fichas dobles. Las fichas dobles tienen en el juego un papel especial dependiendo de la modalidad de dominó que se practique, y nosotros no las vamos a tener en cuenta, es decir, nuestras partidas no van a poder bifurcarse[iii].

Los problemas que proponemos se pueden resolver de modo individual o en pequeños grupos pero es conveniente que las respuestas de los alumnos se discutan en todo el grupo-clase. Las situaciones problemáticas que proponemos pueden ser implementadas siguiendo metodologías muy diversas. Un método tradicional, que nosotros no hemos seguido, consistiría en plantear directamente a los alumnos el enunciado del problema:

¿Qué condiciones deben cumplir un conjunto de fichas de dominó cualquiera (sin fichas dobles) para poder hacer una partida perfecta o semiperfecta?

Nosotros proponemos presentar la situación problemática de forma gradual siguiendo el esquema de pregunta-respuesta porque esta metodología favorece la participación de los alumnos y la construcción social del conocimiento. La propuesta se desarrolla en tres fases que describimos a continuación.

Primera fase: Análisis de casos particulares

Este debe ser el punto de partida en el intento de resolución de cualquier problema. Esta primera fase es muy necesaria, pues permite al alumno comprobar por sí mismo las situaciones que pueden darse o los obstáculos que impiden que algunas posibilidades se den. Con la presentación de estos casos particulares, además, logramos familiarizar al alumno con los elementos y las situaciones que van a constituir el objeto de su trabajo. Puede ser útil también como ejemplo para demostrar que algo es posible basta con exhibir un caso particular, mientras que probar la imposibilidad es algo mucho más delicado.

Comenzamos presentando uno de los conceptos claves en lo que seguirá. Diremos que se ha logrado hacer una partida de dominó *perfecta* si se utilizan todas las fichas de modo que la cifra con la que se comienza y la cifra con la que se termina coinciden.

Cuestión 1: Con todas las fichas menos las dobles, ¿puedes hacer una partida perfecta?

Esta claro que con esta cuestión no estamos sino rompiendo el hielo. Todos los alumnos intentan y consiguen mediante técnicas de ensayo–error hacer su partida perfecta. Quizá pueda ser interesante solicitar a los alumnos que, de forma previa, expongan verbalmente sus conjeturas sobre la posibilidad o no de realizar una partida perfecta.

Cuestión 2: ¿Con que cifra has comenzado y terminado? ¿Crees que puedes hacerlo con otra cifra?

La primera de las preguntas no requiere para su respuesta más que mirar. La segunda pregunta ya puede admitir un pequeño análisis. Claramente podemos hacer partidas perfectas empezando (y terminando) por cualquiera de las cifras de 0 a 6 que forman el dominó. La manera más fácil —pero quizás menos práctica— de ver esto es, simplemente deshacer la configuración inicial, tomar la nueva ficha con la que queremos comenzar y tantear una solución. Otra manera más interesante es observar que si en una partida perfecta tomamos la primera ficha y la enviamos al final, tenemos otra partida perfecta que comienza con una cifra distinta a la original. Basta rehacer el proceso tantas veces como se quiera para ver que todas las cifras tienen derecho a ser las primeras. Otro razonamiento algo más sofisticado consiste en ver que podemos hacer un círculo con las fichas y que para tener una partida lineal basta con *romper* ese círculo. Como esto podemos hacerlo por cualquier punto, llegamos a la misma conclusión.

Introducimos ahora un nuevo concepto. Diremos que hemos hecho una partida de dominó *semiperfecta* cuando utilicemos todas las fichas pero la cifra con la que se empieza y la cifra con la que se acaba no coinciden.

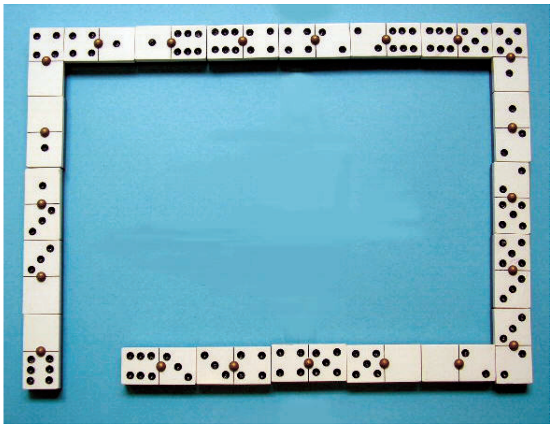


Figura 2. Una partida perfecta

Cuestión 3: Con todas las fichas menos las dobles, ¿puedes hacer una partida semiperfecta?

Aquí surgen los primeros problemas. Vaya por delante que es imposible hacer una partida semiperfecta empleando las 21 fichas no dobles del dominó. Es de suponer que los alumnos traten de encontrar alguna por tanteo o incluso que alguno tenga la intuición de que no va a ser posible. En el primer caso se ha de insistir en el hecho de que no encontrar una solución no quiere decir que no exista y en el segundo caso en que la intuición debe ir acompañada de un proceso de búsqueda, de confirmación de esa intuición.

Cuestión 4: Quita una ficha cualquiera y vuelve a intentarlo. ¿Con qué cifras has comenzado y terminado?

Si se elimina una ficha cualquiera, sí va a ser posible realizar una partida semiperfecta. De hecho, para encontrar una de ellas basta hacer una partida perfecta que comience con la ficha que vamos a eliminar. Al quitarla, tendremos la partida semiperfecta buscada. Un hecho fundamental en esta cuestión reside en que el alumno se dé cuenta de que las cifras con las que se comienza y termina la partida son exactamente las que aparecen en la ficha eliminada.

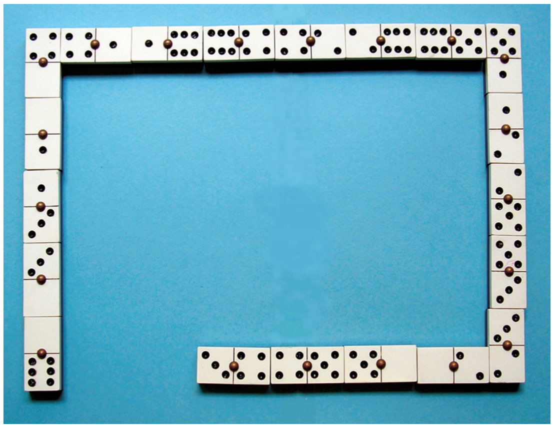


Figura 3. Partida semiperfecta obtenida al quitar la ficha (6,3) en la figura 1

Cuestión 5: Quita ahora otra más y trata de nuevo de hacer una partida semiperfecta. ¿Crees que es importante la segunda ficha que has quitado?

Esta pregunta es más delicada, puesto que la posibilidad de encontrar una partida semiperfecta al quitar dos fichas depende fuertemente de cuál sea la segunda ficha eliminada. Esto resulta difícil de imaginar debido a que la primera ficha no tenía influencia alguna. Probablemente algunos alumnos eliminen una ficha que les permita hacer una partida semiperfecta y deduzcan de ello que esta segunda ficha no tiene importancia y que siempre podrán hacer partidas así. Otros sufrirán el efecto contrario y pensarán que si se quitan dos fichas entonces no pueden hacerse ya partidas semiperfectas. Esta situación se presta a que los alumnos debatan y defiendan públicamente sus conjeturas opuestas.

Sólo como apunte decir que si la segunda ficha eliminada no comparte ninguna cifra con la primera, no podrá encontrarse ninguna partida semiperfecta. La justificación a este hecho viene expuesta más adelante.

Cuestión 6: Ahora vamos a jugar con todas las fichas, exceptuando las dobles y las fichas blancas. ¿Puedes hacer alguna partida perfecta? ¿Y semiperfecta?

La respuesta a ambas preguntas es que no. De nuevo los motivos se verán posteriormente. El objetivo de plantear estas preguntas, que parecen redundar en lo anterior, no es otro que proporcionarles más casos particulares en los que observar qué sucede, fomentar la controversia de los diferentes razonamientos en el aula y tratar de encontrar regularidades que les permitan con algo más de trabajo dar con una explicación.

Segunda fase: Hacia la generalización

Hasta ahora hemos pedido a los alumnos que analizaran algunos casos particulares y les preguntábamos por la posibilidad o no de hacer cierto tipo de configuraciones de fichas. Las cuestiones siguientes tienen como objetivo generalizar a un conjunto cualquiera de fichas los problemas que antes proponíamos a los alumnos. Nuestro propósito es alcanzar una caracterización que nos permita saber cuándo podremos hacer una partida perfecta o semiperfecta con un conjunto de fichas de dominó cualquiera (sin fichas dobles).

Cuestión 7: Elige varios conjuntos de más de seis fichas que te permitan realizar con ellos partidas perfectas. ¿Tienen algo en común?

Es totalmente seguro que la cantidad de conjuntos distintos que encuentren los alumnos será grande. Esto, desde luego, es bueno pues dispondremos de más material sobre el que buscar regularidades. Por ejemplo, podemos encontrarnos con tres posibilidades como las siguientes:

(1,2)(2,4)(4,6)(6,1)(1,3)(3,5)(5,4)(4,3)(3,2)(2,6)(6,5)(5,1)

(2,3)(3,5)(5,6)(6,1)(1,4)(4,6)(6,2)

(4,2)(2,6)(6,3)(3,1)(1,5)(5,4)

Lo primero que salta a la vista es que la longitud de las cadenas es muy variable. En nuestro caso son partidas perfectas de longitudes 12, 7 y 6 respectivamente. Así que debemos descartar que la longitud sea importante; tampoco es importante —salta a la vista— la paridad de la longitud. La regularidad que sí es importante que el alumno trate de observar es que todas las cifras aparecen emparejadas: las *interiores* debido a que seguimos las reglas del dominó, las exteriores debido a que la partida es perfecta. Este es el rasgo común que anotamos y guardamos para más adelante.

Cuestión 8: Elige varios conjuntos de más de seis fichas que te permitan realizar con ellos partidas semiperfectas. ¿Tienen algo en común?

Esta pregunta no es nada sorprendente y, como antes, la variedad de conjuntos encontrados será amplia. Hemos de tener en cuenta, además, que ahora los alumnos ya sabrán qué buscar.

Si queremos evitar esto, una opción es dividir la clase en dos grupos y encargar a cada uno una de las dos cuestiones. De todos modos, nuestra opción es presentarlas secuencialmente. Posibles partidas semiperfectas encontradas por los alumnos pueden ser:

(2,5)(5,1)(1,3)(3,4)(4,6)(6,1)(1,4)(4,5)(5,3)(3,6)(6,0)(0,3)

(3,4)(4,0)(0,1)(1,6)(6,5)(5,2)(2,1)

(1,2)(2,3)(3,5)(5,6)(6,1)(1,4)

Observar que las longitudes de estas cadenas son las mismas que en la cuestión anterior. Esto se ha hecho deliberadamente para mostrar que, de nuevo, el tamaño de los conjuntos de fichas no importa. Un mero procedimiento por tanteo nos permitiría encontrar partidas semiperfectas casi de cualquier longitud. Como hemos dicho, los alumnos ya saben ahora qué buscar y es natural que hablen del emparejamiento de las cifras. Es importante notar que todas están emparejadas excepto dos y que, aquellas con las que empezamos y terminamos la partida, son precisamente las dos que no lo están.

Cuestión 9: ¿Te atreves a hacer alguna conjetura sobre qué tiene que cumplir un conjunto cualquiera de fichas de dominó (sin fichas dobles) para que puedas jugar una partida perfecta? ¿Y para que puedas hacer una partida semiperfecta?

Este es el punto fundamental; el lugar al que pretendíamos llegar en esta primera parte. Vamos a comenzar por la primera pregunta. Antes hemos observado que, en una partida perfecta, todas las cifras aparecerán un número par de veces pero ¿es esto suficiente? Probablemente si se efectúa esta pregunta obtengamos disparidad de opiniones. Como siempre habría que pedir una justificación a los que opten por una u otra opción. Nuestra experiencia nos dice que la respuesta prioritaria será el *sí*. En tal caso basta exhibir el siguiente conjunto de fichas:

{(1,2), (6,4), (3,1), (4,5), (5,6), (2,3)}

Con ellas es imposible hacer una partida perfecta pese a que cumple lo pedido. Hay, pues, que buscar algo más. Si se les deja tantear la situación, es fácil que los alumnos lleguen a darse cuenta de que lo que aquí está sucediendo es que podemos formar dos cadenas separadas:

(1,2)(2,3)(3,1)

(4,5)(5,6)(6,4)

que no podemos conectar de ninguna manera. ¿Qué hemos de exigir entonces a nuestros conjuntos de fichas?

Hemos de pedir que se cumplan dos condiciones:

> Una condición de *paridad*; esto es, que cada cifra debe aparecer un número par de veces
>
> Una condición de *conexión*; esto es, que para cada par de cifras que aparecen en el conjunto, siempre tengamos una cadena de fichas del conjunto empezando y terminando en ellas; esto es, que las ponga en contacto.

Como sucedía en la cuestión anterior, a la hora de enfocar la segunda pregunta acerca de las partidas semiperfectas, los alumnos ya tienen una cierta idea de lo que necesitan. Esto nos hace indicar una vez más que quizás sea interesante dividir la clase en dos grupos, encargando a cada uno de ellos cada una de las preguntas. En el caso de las partidas semiperfectas se necesita que:

> Todas las cifras, salvo dos, aparezcan un número par de veces.
>
> Que se puedan siempre *conectar* dos de ellas.

Cuestión 10: ¿Sabrías explicar con lo que hemos visto hasta ahora, lo que sucedía en las cuestiones 1 a 6?

Esta pregunta ejerce el papel de revisión de lo realizado hasta ahora, nos permite observar si nuestra conjetura responde adecuadamente a las cuestiones anteriores y contestar las posibles cuestiones que quedaron abiertas. En un juego de dominó habitual al que se han quitado las fichas dobles, cada cifra aparece 6 veces —un número par— y por tanto permite hacer partidas perfectas y no semiperfectas (cuestiones 1, 2 y 3). Si quitamos una ficha todas las cifras aparecen 6 veces excepto las dos que están en la ficha eliminada y por ello siempre podemos hacer una partida semiperfecta (cuestión 4). Ahora si la segunda ficha eliminada no tiene ninguna cifra en común con la primera habrá cuatro cifras que aparecerán 5 veces y por tanto ya no podremos hacer partidas semiperfectas. Si por el contrario la segunda ficha comparte una cifra con la primera, esa cifra aparecerá 4 veces —de nuevo par— y las otras dos cifras lo harán 5 veces; permitiendo así una partida semiperfecta (cuestión 5). Como al quitar las fichas blancas todas las cifras aparecen 5 veces no podemos hacer partidas perfectas ni semiperfectas (cuestión 6).

Cuestión 11: ¿Qué sucedería si no quitásemos las fichas dobles?

Al añadir las fichas dobles lo único que sucede es que cada cifra aparece 2 veces más, es decir, 8 en total. Así que podremos hacer partidas perfectas y no semiperfectas. Ahora, al quitar un ficha para intentar hacer una partida semiperfecta, ya no es irrelevante cuál elijamos pues si quitamos una ficha doble, todas las cifras seguirán apareciendo un número par de veces y seremos incapaces de hacer una partida semiperfecta. La consideración respecto a la segunda ficha eliminada sigue siendo válida. Al quitar las fichas blancas todas las cifras aparecerán 7 veces y tampoco podremos efectuar partidas perfectas ni semiperfectas.

Tercera fase: Demostración

Bien, una vez encontrada en la sección anterior una conjetura que parece válida y confirma los casos particulares que hemos planteado anteriormente, daría la impresión de que ya hemos acabado el problema propuesto; pero nos falta todavía lo más importante: la demostración. Introducir una, en este punto, es muy delicado y creemos que debe quedar al arbitrio de cada docente decidir si puede convenir hacerlo o no. Caso de decidirse por hacerlo, debe estar siempre adecuada al nivel de los alumnos, que no va más allá del de la secundaria[iv]. En lo que sí debe hacerse énfasis es en la necesidad de la demostración.

Grafos y dominó: un nuevo enfoque al problema original

Hay diversas formas de definir un grafo. Una, quizás demasiado formal, sea decir que un grafo *G* es un triple consistente en un conjunto de *vértices V(G)*, un conjunto de aristas *E(G)* y una relación que asocia a cada arista dos vértices (no necesariamente distintos) llamados extremos. Es obvio, no obstante, que esta definición no puede, ni debe, ser presentada ante alumnos de secundaria. Creemos que la mejor presentación es la visual, diciendo que un grafo es un conjunto de puntos y de aristas que los unen de forma arbitraria:

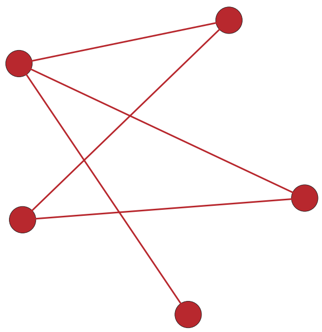


Figura 4. Un grafo típico

No queremos introducir ningún tipo de terminología especializada pues lo creemos innecesario. Nos contentaremos con decir que un grafo conexo es aquel en el que siempre podemos encontrar un camino que une un vértice con otro cualquiera.

Cómo aparecen los grafos jugando al dominó: Un viaje de ida y vuelta

De una manera sencilla, se puede obtener un grafo de un conjunto cualquiera de fichas de dominó:

- Vértices: Se dibujan en un papel tantos vértices como cifras distintas aparecen en el conjunto de fichas, numerando cada vértice con el valor de una de las cifras.
- Aristas: Se unen dos vértices mediante una arista si se encuentra una ficha en nuestro conjunto de fichas de dominó que contenga las dos cifras.

Por ejemplo:

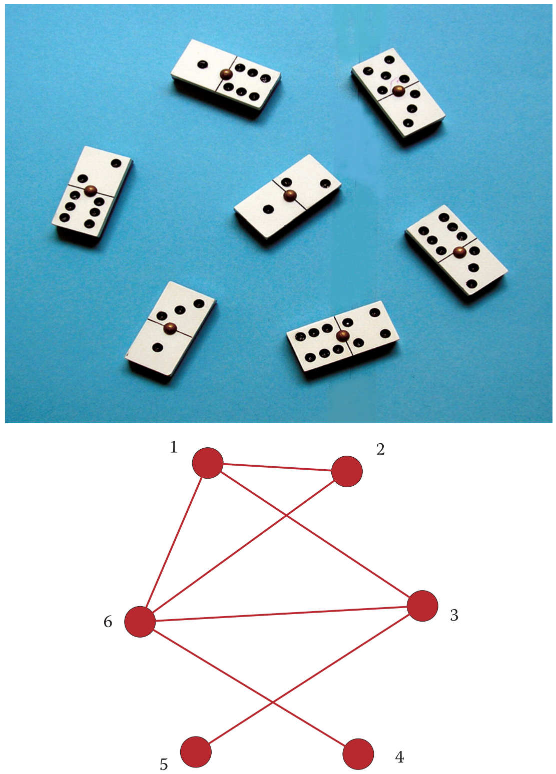


Figura 5. Un conjunto de fichas de dominó y su grafo asociado

De esta forma, podemos convertir cualquier conjunto de fichas de dominó en un grafo. También parece importante hacer notar a los alumnos que la identificación de cada ficha es con una de las aristas del grafo y no con uno de sus vértices.

Además podemos realizar de manera análoga el proceso inverso:

La idea es dibujar un grafo cualquiera y numerar sus vértices. Para cada arista que una dos de esos vértices tomamos una ficha de dominó cuyas cifras coincidan con los vértices que une esa arista. Mediante este proceso obtenemos un cierto conjunto de fichas de dominó.

Luego también podemos *convertir* un grafo en un conjunto de fichas de dominó. Aunque en este caso tenemos que imponer una serie de condiciones elementales sobre el grafo escogido para que se pueda efectuar correctamente el proceso antes descrito:

- En primer lugar, el conjunto de vértices del grafo debe ser menor o igual que siete, ya que el juego de dominó estándar con el que estamos desarrollando la actividad es de siete cifras. En caso contrario podríamos *adaptarlo*, proponiendo jugar a un dominó generalizando de ocho o más cifras.
- No pueden existir en el grafo vértices aislados (no unidos a ningún otro), puesto que toda cifra que aparecerá en una ficha de dominó tiene una cifra *compañera*. Luego de cada vértice sale una arista que lo une a otro vértice distinto. Esta condición también puede ser evitada si permitiésemos emplear en la actividad las fichas dobles.
- Dos vértices no pueden están unidos más de una vez por dos aristas, ya que eso equivaldría a tener dos fichas del dominó iguales. Como las anteriores, esta condición puede ser evitada si permitimos jugar con varios juegos de dominó.

Resulta interesante invitar a los alumnos a que, a priori, investiguen y traten de conjeturar acerca de las diferentes condiciones que debe cumplir un grafo para que pueda ser identificado a un conjunto de fichas de dominó.

De todo lo anterior podemos establecer una biyección entre conjuntos de fichas de dominó y grafos con las condiciones anteriores. Veamos cómo se puede relacionar todo esto con lo visto en el apartado anterior, en el que continuaremos con el mismo esquema de cuestiones.

Síntesis de las actividades anteriores: Traducción de partidas en grafos

Cuestión 1’: Imagina que has dibujado un grafo y que has cogido las fichas de dominó correspondientes. Te pones a jugar y consigues una partida perfecta. ¿En qué se traduce esto en tu grafo?

Si recordamos en qué consistía una partida perfecta y tenemos presente cómo se construía el conjunto de fichas de dominó a partir del grafo la respuesta es sencilla. Como una partida perfecta consistía en ir poniendo fichas una tras otra según las reglas del dominó —empezando y acabando en la misma cifra— y cada ficha se corresponde con una arista del grafo, resulta que una partida perfecta no es más que el reflejo de recorrer todo el grafo —empezando y terminando en el mismo vértice— y pasando una única vez por cada arista.

Como observación curiosa indicamos que si un grafo permite un camino como el anterior, no importa para nada el vértice que elijamos para comenzar (es sencillo justificar este hecho usando los razonamientos que veíamos en la cuestión 2 para conjuntos de fichas arbitrarios).

> *Podemos establecer una biyección entre conjuntos de fichas de dominó y grafos.*

Cuestión 2’: Imagina que has dibujado un grafo y que has cogido las fichas de dominó correspondientes. Te pones a jugar y consigues una partida semiperfecta. ¿En qué se traduce esto en tu grafo?

Este caso también es sencillo y más aún tras haber comentado la anterior cuestión. Una partida semiperfecta se traduce en, comenzando por un vértice, recorrer todas las aristas del grafo una sola vez para terminar en otro de los vértices.

Es interesante observar que se comienza y termina precisamente en los vértices correspondientes a las cifras que aparecen un número impar de veces. Al contrario de lo que sucedía en la cuestión 1’, ahora sólo podemos comenzar por el vértice correspondiente a una de las dos cifras que aparece un número impar de veces.

Cuestión 3’: Recuerda las condiciones que debía cumplir un conjunto de fichas para poder hacer partidas perfectas y semiperfectas. Tradúcelas al lenguaje de grafos.

En el caso de partidas perfectas pedíamos que cada cifra apareciera un número par de veces y que dos cifras cualesquiera pudieran ser *conectadas* por una cadena. Esto se traduce en este caso en que de cada vértice salga un número par de aristas y que el grafo sea conexo. Esto sucede porque cada cifra aparece en tantas fichas como aristas salen del vértice correspondiente y porque una cadena que una dos cifras es recorrer un camino de un vértice al otro.

Para partidas semiperfectas la traducción es que de todos los vértices, salvo de dos, salga una cantidad par de aristas y que el grafo sea conexo. La explicación es la misma.

Con estas cuestiones alcanzamos uno de los objetivos principales que pretendíamos, relacionar la posibilidad de hacer partidas de dominó empleando todas las fichas de una determinada forma con la existencia de caminos de un cierto tipo en un grafo.

Cuestión 4': Formula un resultado sobre grafos usando la conjetura sobre fichas de dominó obtenida anteriormente y las cuestiones anteriores.

Haciendo uso de la biyección entre grafos y fichas de dominó que obtenemos al principio de esta segunda sección y las traducciones a lenguaje de grafos de las condiciones del problema de la primera sección que deducíamos en las cuestiones 1', 2' y 3', encontramos un caso particular de los resultados de Euler que exponíamos en la introducción:

Un grafo que se obtiene de una colección de fichas de dominó puede recorrerse completamente, empezando y terminando en el mismo vértice y pasando una única vez por cada arista (esto es, posee un ciclo euleriano), siempre que:

- Sea un grafo conexo.
- Salga un número par de aristas de cada vértice.

Un grafo que se obtiene de una colección de fichas de dominó puede recorrerse completamente, empezando en un vértice y acabando en otro distinto, y pasando una única vez por cada arista (esto es, posee un camino euleriano), siempre que:

- Sea un grafo conexo.
- Salen un número par de aristas de todos los vértices menos de dos, que serán los vértices inicial y final.

Leonhard Euler

Ventajas y desventajas del planteamiento de nuestra actividad

En esta sección del artículo analizaremos las ventajas y desventajas que hemos apreciado a la hora de diseñar e implementar la actividad que proponemos. Como ya hemos expuesto en la introducción, nuestro propósito no era diseñar una actividad de modelización matemática con los grafos, aunque sí que encontramos en ella una situación problemática real (hacer partidas perfectas y semiperfectas de dominó) modelizada por medio de un concepto matemático (los grafos y la existencia o no de ciclos y caminos eulerianos). Sin embargo la solución del problema no se obtiene trabajando dentro del modelo matemático, ya que en él pueden aparecer las dificultades que se indicaron en la introducción; antes bien, surge dentro del mismo ámbito del problema real (manipulando fichas de dominó), siendo posteriormente traducida al modelo matemático y permitiéndonos alcanzar nuestro propósito de presentar a los alumnos el concepto de grafo y conseguir que éstos logren conjeturar y justificar los teoremas clásicos de Euler.

El actuar desde el modelo real del dominó se ha revelado como muy adecuado ya que hemos conseguido evitar algunas de las dificultades que se presentan cuando los alumnos trabajan con los grafos para conjeturar los resultados de Euler, observando además las siguientes ventajas:

- Los alumnos, manipulando las fichas, pueden construir y reconstruir partidas de manera más rápida y sencilla mediante la técnica de ensayo–error ya que, en caso de que no lleguen a formar una partida perfecta pueden *volver a atrás* en la elección de las últimas fichas y seguir intentándolo con otras combinaciones.
- Aparecen más estrategias para construir partidas perfectas y semiperfectas, como empezar a poner fichas por el principio y el final simultáneamente o una vez encontrada una partida perfecta, obtener otra trasladando una ficha del principio al final.
- Se observa de forma detallada todos los pasos que se han seguido en la construcción de la partida perfecta debido a que las fichas aparecen alineadas.
- Debido a las reglas del juego de dominó, las cifras aparecen emparejadas, lo que hace más fácil conjeturar sobre el número de fichas en las que debe aparecer cada cifra.
- En su traducción a los grafos se le presta una mayor atención a las aristas, que son las fichas del dominó, que a los vértices, que son las cifras presentes en las fichas. Esta atención resulta necesaria en los teoremas de Euler, donde no son importantes la cantidad de vértices que hay sino la cantidad de aristas que salen de ellos.
- Como ya apuntábamos en la introducción, la utilización de un juego tan conocido como el dominó se revela como un factor motivador para el alumno.

Por otro lado, la principal de las desventajas que percibimos que tiene esta manera de acercarse a los resultados de Euler es que, tal y como veíamos en la parte anterior, la clase de grafos sobre los que tenemos nuestros resultados probados son los que provienen de un conjunto de fichas de dominó y éstos poseen unas condiciones determinadas que no cumple cualquier grafo.

Sin embargo, estas condiciones pueden ser evitadas con un poco más de esfuerzo: generalizando la conjetura a un juego de dominó con 8 o más cifras (lo que equivaldría a aceptar los grafos de 8 o más vértices). Observamos que añadiendo vértices *extra*, no resulta difícil modificar un grafo conexo cualquiera que no se corresponda con un conjunto de fichas en otro grafo similar que sí provenga de un conjunto de fichas, de modo que en el primero existen o no ciclos y caminos eulerianos siempre que existan o no en el otro.

Más allá del dominó: sacando partido a nuestros resultados sobre grafos

Llegados a este punto nos podemos plantear presentar diversas actividades sobre grafos que saquen partido de este resultado, olvidándonos ya del dominó que hemos empleado *sólo* para obtener la caracterización necesaria.

Una primera posibilidad es introducir en este punto el ya citado problema de los Puentes de Köningsberg (Alfonso y otros, 2004). Este problema histórico en la disciplina de la Teoría de Grafos —e incluso de la Topología— suele ser utilizado para introducirla, pero nosotros optamos por emplearlo para ilustrar un uso del resultado que hemos obtenido[v]. El grafo asociado a este problema es el que vemos en la siguiente figura:

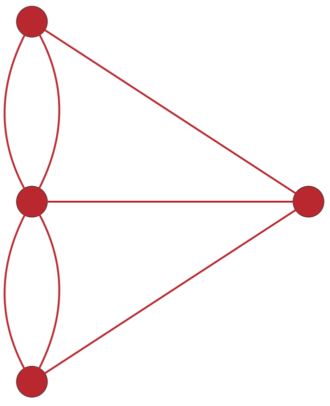


Figura 6. El grafo asociado al problema de los Puentes de Köningsberg

Claramente no es un grafo que haya sido obtenido de un conjunto de fichas de dominó porque no se cumple la condición de la no existencia de dos vértices unidos por dos aristas distintas. Sin embargo, encontrar un camino o un ciclo euleriano en este grafo es equivalente a encontrar un camino o ciclo euleriano en este otro grafo, que sí se obtiene de las fichas de dominó:

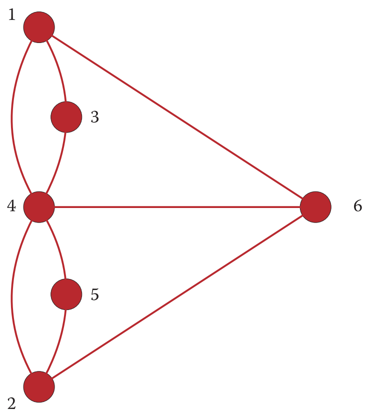


Figura 7. El grafo de Köningsberg modificado

En el grafo de la figura 6, por tanto, podemos utilizar el resultado obtenido en la cuestión 4' y concluir que no posee ni caminos ni ciclos eulerianos. Para más detalles sobre el problema puede recurrirse a múltiples fuentes además de las ya citadas.

Sobradamente conocido resulta el pasatiempo en el que, dado un dibujo como el de la figura siguiente se pide dibujarlo con un solo trazo de lápiz y pasando una única vez por cada línea.

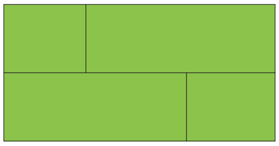


Figura 8. Pasatiempo infantil

Nosotros proponemos un problema alternativo a partir del mismo gráfico. Se pide trazar una curva cerrada que atraviese una única vez cada una de los segmentos que forman la figura.

Otra actividad posible que nos permite sacar jugo de los resultados obtenidos tendría un enunciado como el siguiente:

La siguiente figura representa un mapa (simplificado) de carreteras. Las ciudades aparecen marcadas con cuadrados rojos.

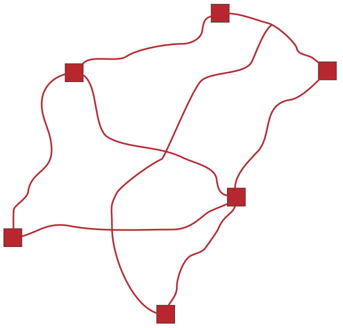


Figura 9. Mapa de carreteras

El gobierno de la región pretende asfaltar las carreteras teniendo en cuenta que el peso de la maquinaria empleada deteriora tanto el suelo que, una vez asfaltada una carretera, las máquinas ya no deben pasar por ella. Si tu fueras el encargado de dirigir las obras, ¿qué orden seguirías para asfaltar la red de carreteras?

Sirvan estas posibilidades como ejemplo de las muchas actividades que pueden ser resueltas gracias a una modelización del problema mediante grafos y utilizando posteriormente los resultados de Euler. Desde luego no son las únicas y se presentan sólo a modo de ilustración o muestra con la esperanza de que puedan ser realizadas por los docentes con sus alumnos. ■

NOTAS

i http://www.unizar.es/ttm

ii Se cree que hay que situar el nacimiento del dominó en China hace unos 3000 años. De ahí pasó a Egipto y al mundo árabe, donde se incluyeron las fichas blancas (recordar que fueron los árabes los que introdujeron el *0* en occidente). En Europa no se tiene constancia del conocimiento del dominó hasta el siglo XVIII en Italia. Actualmente se halla plenamente difundido, celebrándose incluso campeonatos nacionales y del mundo.

iii De hecho, si únicamente permitimos que nuestras partidas se desarrollen de una forma lineal, el contar o no con las fichas dobles es casi irrelevante en la actividad; como se desprenderá en un análisis posterior.

iv Una propuesta de demostración: Si tenemos una partida perfecta es obvio que cada cifra aparece un número par de veces y que podemos conectar siempre dos cifras cualesquiera. Al revés, supongamos que tenemos cada cifra un número par de veces y que todas las cifras pueden conectarse. Comenzamos nuestra partida y vamos colocando fichas arbitrariamente (pero siempre siguiendo las reglas del dominó). En algún momento dejaremos de poder seguir, si hemos usado todas las fichas ya hemos terminado. Si no las hemos utilizado todas es fácil ver que debemos terminar con la misma cifra que empezamos (por la paridad), así que en las fichas que nos sobran las cifras aparecen un número par de veces y no está la cifra con la que hemos terminado el intento (porque si no, seguiríamos). Lo que está claro es que alguna de las cifras que nos quedan aparece en nuestro intento fallido de partida perfecta (si no, no se cumpliría la condición de conectividad). Lo que debe hacerse es una partida perfecta con las fichas sobrantes, que empiece y termine con una de las cifras que también aparecen en el primer intento. Una vez hecho basta insertar la segunda cadena dentro de la primera. Obsérvese que hay aquí un razonamiento de tipo inductivo sobre la longitud de las partidas, pero que puede ser soslayado sin problemas. La demostración para las partidas semiperfectas es similar.

v De hecho este problema es el que, históricamente, dio origen a los resultados de Euler que hemos presentado. Aquí lo presentamos como aplicación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALFONSO, M.; BUENO, M.; DE ELÍAS, M.; DIÁNEZ, M. y NÚÑEZ, J. (2004): "Siete puentes, un camino: Köningsberg", *SUMA*, n.º 45, pp. 69–78.

BALBUENA, L.; CUTILLAS, L. y COBA, D. de la (2000): *Palillos, aceitunas y refrescos matemáticos*, Rubes, Barcelona.

CORBALAN, F. (1994): *Juegos matemáticos para Secundaria y Bachillerato*, Colección Educación Matemática en Secundaria, Editorial Síntesis, Madrid.

CORBALÁN, F. (1999): "Juegos y estrategias de pensamiento", *Aspectos didácticos de Matemáticas*, 7, Educación Abierta, 141, I.C.E. Universidad de Zaragoza, Zaragoza, pp. 73–108.

CORIAT, M.; SANCHO, J.M.; GONZALVO, P y MARÍN, A. (1989): *Nudos y nexos: redes en la escuela*, Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje, Editorial Síntesis, Madrid.

DELOFEU, J. (2003): *Gimnasia mental*, Martínez Roca, Barcelona.

ESPINEL, M.C. (1994): "El lenguaje de los grafos en los problemas de redes de comunicación", *SUMA*, n.º 18, pp. 32–38.

ESPINEL, M.C. y SOBRÓN, M. (1992): "Grafos a través de juegos", *SUMA*, n.º 11/12, pp. 88–94.

GAIRÍN, J.M. (2001): "Hacer matemáticas: el juego como recurso", *Aspectos didácticos de Matemáticas*, 8, Educación abierta, 153, I.C.E. Universidad de Zaragoza, Zaragoza, pp. 55–116.

GAIRÍN, J.M. y MUÑOZ, J.M. (2006): "Moviendo fichas hacia el pensamiento matemático", *SUMA*, n.º 51, pp. 15–29.

GARDNER, M. (2002): *Huevos, nudos y otras mistificaciones matemáticas*, Gedisa, Barcelona.

GRUPO ALQUERQUE (2004–2005): "Sección Juegos", *SUMA*, Madrid.

KINDT, M. (2001): "Matemática discreta como preparación a las ciencias sociales", *Aspectos didácticos de Matemáticas*, 4, Educación abierta, 103, I.C.E. Universidad de Zaragoza, Zaragoza, pp. 67–91.

MARTÍN, E. y MÉNDEZ, A. (2004): "Aplicaciones de la teoría de grafos a algunos juegos de estrategia", *SUMA*, n.º 46, pp. 31–35.

PROGRAMME FOR INTERNATIONAL STUDENT ASSESSMENT, PISA (2004): *Learning for tomorrow's world. First results from PISA 2003*, París, OCDE.

SIPSER, M. (1996): *Introduction to the theory of computation*, Course Technology, Boston.

WEST, D. (2001): *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall, New Jersey.

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Comisión Ejecutiva

Presidente: **Serapio García Cuesta**
Secretario General: **Josep Sales Rufí**
Vicepresidente: **Mabuel Torralbo Rodríguez**
Tesorera: **Claudia Lázaro**

Secretariados:
Prensa: **María Peñas Troyano**
Revista SUMA: **Francisco Martín Casalderrey/Inmaculada Fuentes Gil**
Relaciones internacionales: **Sixto Romero**
Publicaciones: **Ricardo Luengo González**
Actividades y formación del profesorado: **Salvador Guerrero Hidalgo**
Actividades con alumnos: **Floreal Gracia Alcaine/Esther López Herranz**

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidenta: Pili Royo Regueiro
Apdo. de Correos 835. 17080 Girona

Organización Española para la Coeducación Matemática *Ada Byron*
Presidenta: M.ª Carmen Rodríguez
Almagro, 28. 28010 Madrid

Sociedad Andaluza de Educación Matemática *Thales*
Presidente: Manuel Torralbo Rodríguez
Facultad Matemáticas. Apdo. de Correos 1160. 41080 Sevilla

Sociedad Aragonesa *Pedro Sánchez Ciruelo* de Profesores de Matemáticas
Presidenta: Ana Pola Gracia
ICE Universidad de Zaragoza. C/ Pedro Cerbuna, 12. 50009 Zaragoza

Sociedad Asturiana de Educación Matemática *Agustín de Pedrayes*
Presidente: José Joaquín Arrieta Gallastegui
Apdo. de Correos 830. 33400 Avilés (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas *Isaac Newton*
Presidenta: Lucía Henríquez Rodríguez
Apdo. de Correos 329. 38208 La Laguna (Tenerife)

Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática *Miguel de Guzmán*
Presidente: Antonio Arroyo
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Víllalar, s/n. 09006 Burgos

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García Cuesta
Avda. España, 14, 5ª planta. 02002 Albacete

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidente: Bienvenido Espinar Cepas
CPR Murcia II. Calle Reina Sofía n.º1. 30007 Murcia

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Manuel Rodríguez Mayo
Apdo. de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Extremeña de Educación Matemática *Ventura Reyes Prósper*
Presidente: Ricardo Luengo González
Apdo. de Correos 590. 06080 Badajoz

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*
Presidente: Juan A. Martínez Calvete
C/ Limonero, 28. 28020 Madrid

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: Begoña Martínez Barrera
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidente: Luis Serrano Romero
Facultad de Educación y Humanidades. Ctra. Alfonso XIII, s/n. 52005 Melilla

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas *Tornamira*
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea *Tornamira*
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.
Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra. 31006 Pamplona

Sociedad *Puig Adam* de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Facultad de Educación. (Sec. Deptal. Álgebra). Despacho 3005.
C/ Rector Rollo Villanova, s/n. 28040 Madrid

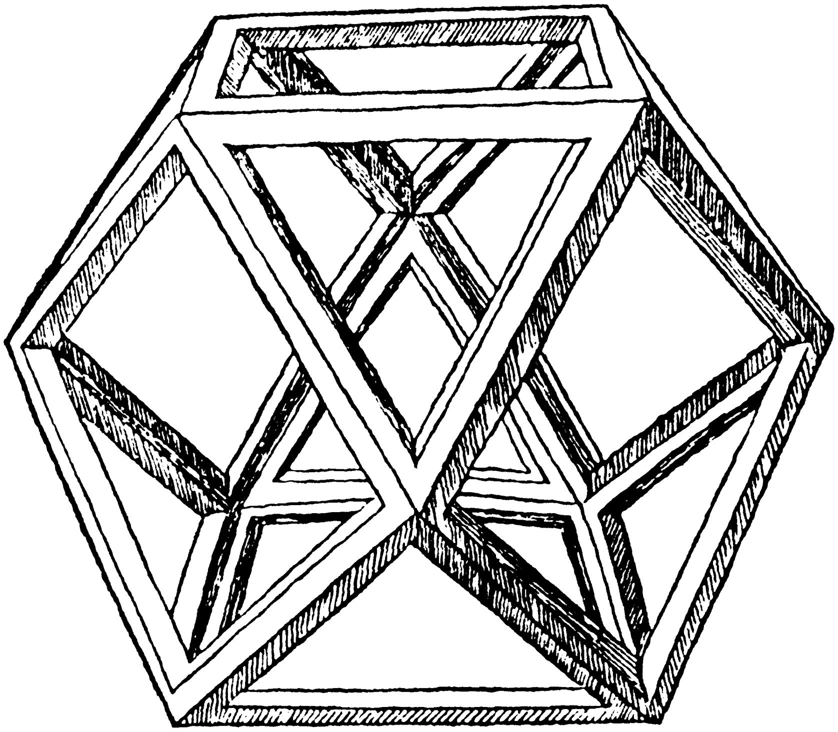
Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas *A prima*
Presidente: Javier Galarreta Espinosa
CPR. Avda. de la Paz, 9. 26004 Logroño

Sociedade Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)
Presidente: Manuel Díaz Regueiro
C/ García Abad, 3, 1ºB. 27004 Lugo

Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana *Al-Khwarizmi*
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departamento Didáctica de la Matemática. Apdo. 22045. 46071 Valencia

Societat Balear de Matemàtiques *Xeix*
Presidente: Albert Violant i Holz
C/ Martí Rubí 37/alts. 07141 Sa Cabaneta (Marratxí). Islas Baleares

SUMA



Dibujo de Leonardo da Vinci para *La divina proporción* de Luca Pacioli

poliedro

SUMA 53
Noviembre 2006, pp. 53-60

En torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. La ambición de trascender las propias limitaciones (VI)

Durante diez capítulos hemos recuperado dos temas de matemática elemental asiduos de los libros de texto de enseñanza media desde la revolución francesa a nuestros días: el Teorema de Pitágoras y el Triángulo de Pascal. Con la modestia que corresponde a los grandes retos, hemos intentado conjugar una presentación didáctica e histórica de ellos. El objetivo: aportar ideas con las que poder abordar el viejo desafío de incorporar la historia de las matemáticas al aula. Como no podría ser de otro modo, hemos rehuido la traslación literal porque estamos convencidos de que, entre lo que el profesor o profesora conoce y lo que trasmite debe haber un espacio para la admiración, otro para el entusiasmo, unas pequeñas dosis de realismo y la fe ciega en las posibilidades de sus discípulos. Por eso las decisiones didácticas son reino de cada cual, porque son parte de las herramientas de que disponemos como artistas.

Las posibilidades de converger didácticamente hacia el Triángulo Aritmético son múltiples. Hemos salpicado los artículos anteriores con diversos problemas que permiten ese acercamiento desde diferentes puntos de vista. Los dos que siguen a continuación son otras tantas alternativas a aquellos, planteadas desde perspectivas distintas. En un caso buscando el atractivo del deporte[1] y en otro la posibilidad de introducir materiales manipulativos.

El Empate

El duelo en la cumbre entre el Racing y el Albacete se saldó con un 5-5[2]. Pero no ha sido el único empate voluminoso de la jornada. ¿De cuántas formas diferentes se pudieron dar los resultados parciales que llevaron a ese empate final? Por ejemplo, si hubieran empatado a 1 sólo habría dos posibilidades:

a) De (0,0) a (0,1) y a (1,1)
b) De (0,0) a (1,0) y a (1,1)

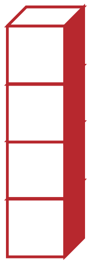
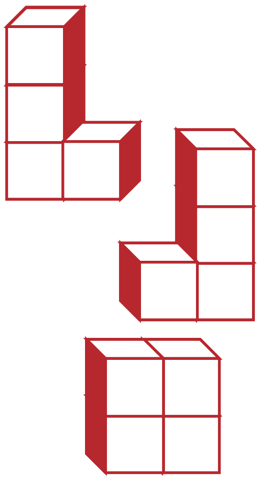
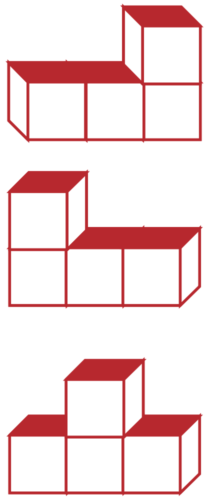
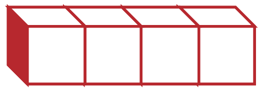
Pero, a partir de ahí, las cosas se complican...

Carlos Usón Villalba
Ángel Ramírez Martínez
historia.suma@fespm.org

King strut's cubes[3]

King Strut kept his gold in cubes. He enjoyed handling is gold and often spent time stacking these cubes. The king only stacked cubes directly on top of each other or side by side (never one behind the other). The diagram below shows the different ways of stacking four gold cubes.

The different Ways of stacking 4 gold cubes is:

1 column	*1 column*	*1 column*	*1 column*
			
1 way	*1 way*	*1 way*	*1 way*

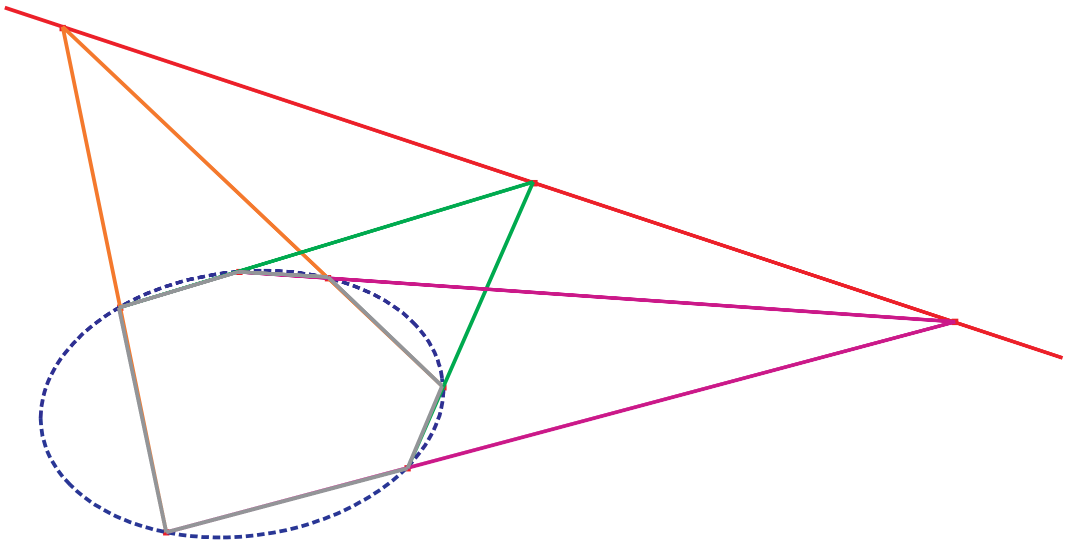
Total 8 ways

Make a diagram showing how three gold cubes be stacked according to the kins's rules.
Make a diagram showing how five gold cubes could be stacked.
Predict the number of ways six gold cubes could be stacked.
What is the pattern?

Pascal, de nuevo Pascal

Podríamos seguir hablando de Pascal y del Triángulo Aritmético algunos capítulos más. Sus notables aportaciones al campo de la probabilidad son sobradamente conocidas y preferimos obviarlas. Sobre la figura de Pascal como ser humano atormentado y profundamente religioso hemos incidido en algunas ocasiones. Acerca de sus aportaciones filosóficas hablaremos en el siguiente capítulo.

Ahora bien, antes de terminar esta larga disertación y en compensación por la paternidad robada en lo que al Triángulo Aritmético se refiere, nos gustaría rendir homenaje en Pascal a uno de esos teoremas maravillosos de la geometría. Una de esas verdades matemáticas que deslumbran al lego y de las que resulta difícil determinar qué tipo de belleza la impregna. Para el platonismo, la regularidad es el arquetipo de la sabiduría, en particular de las Matemáticas. A la estética matemática[4] le importa más el hecho en sí que la razón sobre la que se



TEOREMA DE PASCAL: Las prolongaciones de los lados opuestos de un hexágono se cortan en tres puntos alineados si el hexágono se puede inscribir en una cónica.

sustenta[5]. El que las prolongaciones de los pares de lados opuestos de un hexágono se corten en tres puntos y que estos estén en una circunferencia no tiene para el erudito en matemáticas valor plástico alguno puesto que conoce las razones de que así suceda. Sin embargo, la condición de que estén alineados estimula su pasión estética. Si se cortaran en un único punto llegaría al éxtasis. Parece por tanto existir una cierta correlación intrínseca entre estupidez geométrica, regularidad y platonismo estético.

Podemos negar el platonismo pero reivindicamos la sorpresa de que, para que estén alineados, el hexágono debe ser inscriptible en una cónica. La demostración de Pascal ocupa una sola página. El lo dedujo de las enseñanzas de su maestro Girard Desargües (eso afirmó) y, al parecer, para él también constituía una obviedad, un juego de niños, no en vano lo publicó a los 16 años... los mismos que tenían Adriana y Diana cuando gestaron su trabajo. Ahora bien, conocer la razón última que encierra una cónica para que suceda tal cosa es harina de otro costal. Esa razón intima puede ser del mismo universo de verdad que la que determina cómo deben estar dispuestos esos seis puntos para que los de corte formen un triángulo equilátero, uno isósceles, coincidan dos de ellos o los tres. Pero puede no serlo. La estética que rodea esa verdad última es la estética del naturalista, la del técnico. Por cierto ¿Y si se tratase de un octógono? ¿Qué condiciones deberían darse para que se cumplieran cada uno de los postulados anteriores? ¿Por qué nos conformamos con una pequeña parcela de placer? Parece como si tuviéramos miedo a transcender la regularidad, como si temiéramos romper esa frágil porcelana. Pero, miremos un momento detrás de la niebla: si asumimos la obviedad de que cada estética lleva asociada una fuerte carga ideológica, ¿en qué educamos? y, recalando en la didáctica: si nosotros mismos no nos planteamos preguntas como curiosos impenitentes, si rehuimos la trascendencia, el deleite de ir más allá, el conocimiento profundo de las cosas... ¿en qué adoctrinamos?

Tartaglia

Tampoco nos gustaría olvidar a Tartaglia. Ese mítico personaje que, en nuestra juventud, compitió con Pascal por la paternidad del Triángulo Aritmético. Desconocemos los avatares científicos, políticos e historiográficos por los que nuestros libros de texto optaron por el italiano. Sea como fuere, *Niccolo Fontana* (1499-1557), más conocido como *Tartaglia*[6], debe la fama a sus aportaciones a la resolución de ecuaciones cúbicas, verdadera preocupación matemática de la época. La primacía se la atribuyó Cardano (1501-1576) quien, en su *Ars Magna* (1545), publicó los resultados del bresciano junto a sus propias aportaciones y a las que hiciera Ludovico Ferrari a la resolución de ecuaciones de cuarto grado. Tartaglia se sintió traicionado por el milanés, a quien había confiado su secreto a cambio de una recomendación ante el gobernador Alfonso de Avalos (1502-1546) que le permitiera conseguir un trabajo en la corte de Milán y poder abandonar así su pobre empleo de profesor en Venecia.

NICOLAVS TARTAGLIA, BRIXIANVS.

La ruptura del juramento solemne que le hiciera Cardano llevó a Niccolo Fontana a publicar *Quesiti et inventioni diverse* (1546) y denunciar en él la felonía. Pero Cardano era, además de matemático, un prestigioso médico de Milán mientras Tartaglia no pasaba de ser un modesto profesor de Venecia. Desde su superioridad Cardano no aceptó el debate con Tartaglia y se lo trasladó a Ferrari con quien Tartaglia mantendría algunos intercambios epistolares[7], salpicados de insultos, sin decidirse a aceptar el reto. Hasta que, en 1548, Tartaglia recibió una oferta para dar clases en su ciudad natal a condición de que saliera vencedor en el debate con Ferrari. El 10 de agosto de 1548, Niccolo fue derrotado en buena lid y perdió su plaza viéndose obligado a volver a Venecia. Podría pensarse que, una vez más, la pobreza hizo causa con la injusticia y la oligarquía para decidir el devenir de una historia en la que el bresciano fue la víctima, de no ser porque, en 1543 y dentro de su menos conocida labor de traductor, Tartaglia publicó *Opera Archimedis*. Una copia literal de la traducción que hiciera Moerbeke (c. 1215-1286) del autor griego, en el siglo XIII, y que el defraudado matemático pretendió atribuirse como propia[8].

En 1537 publicó *Nova scientia.* Un libro sobre mecánica en el que afirma, aunque no demuestra, que el alcance máximo de un proyectil se logra cuando el ángulo de disparo es de 45º. Unos años después, en 1560, aparecería su *Trattato*[9], obra póstuma en la que hace referencia al Triángulo Aritmético y al desarrollo de las potencias del binomio que hoy lleva el nombre de Newton.

Otros Triángulos Aritméticos

Más allá de Tartaglia y de Pascal, nos gustaría terminar esta serie de referencias al Triángulo Aritmético acercándolo al aula y dotándolo de actualidad. Ya comentamos en (IV)[10] que la primera vez que Adriana y Diana entraron en contacto con él fue a través de los números con forma. Fue el estudio de los órdenes numéricos[11] los que dieron lugar al trabajo *La imprecisa frontera de un universo de dimensión irregular* al que venimos haciendo referencia y en el que el verdadero interés por continuar investigando lo suscitó la distribución fractal de los múltiplos de un número cualquiera (para ellas primo) en el Triángulo Aritmético.

Pascal insiste muchas veces en que el generador del Triángulo Aritmético no tiene por qué ser "1", que puede ser cualquier otro número, pero no pasa de ahí. Las propiedades, todas las que enuncia se cumplen, con ligeras variantes, en todos ellos puesto que no son más que réplicas de las del primero[12] obtenidas al multiplicar todos sus elementos por el valor del nuevo generador. Sin embargo, lo que Adriana y Diana se plantean, y lo que posiblemente les hizo merecedoras de su galardón en el concurso de *Jóvenes Investigadores*, es considerar el objeto en sí mismo, transcender su origen y construir otros triángulos centrados en los números cuadrados, pentagonales o hexagonales, tratar de buscar en ellos las propiedades que se conservaban del de Pascal y estudiar la posibilidad de encontrar un fractal de Pascal para cada pareja de números naturales. En sus propias palabras:

¿Qué pasaría si en un Triángulo Aritmético ordinario en el que, como se ve, sus diagonales son respectivamente la unidad, los números naturales, triangulares, tetraédricos en tres dimensiones, cuatro, etc., se generase a partir de números cuadrados, pentagonales, etc. manteniendo el criterio de formación?

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

Rojo: números naturales
Azul: números triangulares
Violeta: números tetraédricos (3D)
Verde: números triangulares en 4D
Magenta: números triangulares en 5D

Si sustituimos 1, 3, 6, 10, por 1, 4, 9, 16 y mantenemos la idea de que la suma de dos números ha de generar el de abajo, 1 y 4 obligan a que aparezca el tres rojo, y ese 3 a que aparezca el 2 negro etc.

□
2 1
□ 3 1
□ □ 4 1
□ □ 9 5 □
□ □ 16 14 □ □
□ □ 25 30 □ □ □

Para empezar, no sabemos si la diagonal de "unos" y la de los números naturales existiría. Pero la primera decisión a tomar es la que hace referencia a ¿cuáles son los números cuadrados en tres, cuatro, etc. dimensiones? Pero esa respuesta es sencilla si se tiene en cuenta que el primer número cuadrado en tres dimensiones es 1 y que queremos mantener el mismo criterio sumatorio para construir el triángulo.

Eso es suficiente para calcular la diagonal amarilla y todas las demás. Quedando sin determinar el primer término del Triángulo que podría ser un 1 o un 2. Los números que aparecen como cuadrados en otras dimensiones son, en realidad, piramidales y no cúbicos[13], que fue nuestra primera intención y que luego desechamos. Con esa condición obtuvimos los siguientes triángulos:

2 1
2 3 1
2 5 4 1
2 7 9 5 1
2 9 16 14 6 1
2 11 25 30 20 7 1
2 13 36 55 50 27 8 1
2 15 49 91 105 77 35 9 1
2 17 64 140 196 182 112 44 10 1

Y el de los números pentagonales.

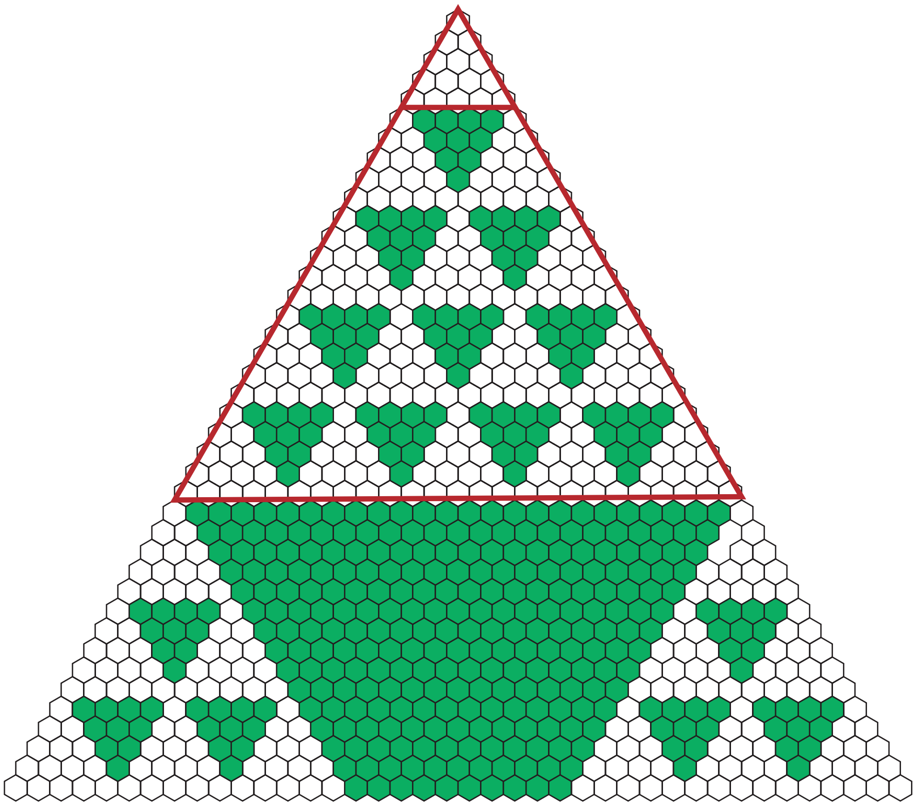
3 1
3 4 1
3 7 5 1
3 10 12 6 1
3 13 22 18 7 1
3 16 35 40 25 8 1
3 19 51 75 65 33 9 1
3 22 70 126 140 98 42 10 1
3 25 92 196 266 238 140 52 11 1

Podríamos hacer lo mismo con números hexagonales o de cualquier otro tipo pero no tiene mucho sentido pues los resultados que vamos obteniendo parecen fácilmente generalizables a cualquier número poligonal.

Los tres triángulos tienen por tanto la misma estructura, por lo que tendrían que tener las mismas características, o al menos, un número considerable de ellas en común. Veamos si es así o hay diferencias.

No vamos a entrar en ese análisis, ellas sí lo hicieron y concluyeron que, con las variantes necesarias, algunas de las cuales exigen trabajar en un sistema de numeración de base 11, son generalizables todas las propiedades que se fundamentan en la suma o expresan relaciones con sumandos, el resto no. Una conclusión coherente con haber mantenido el criterio de formación pero que requiere ser revisada y precisada. No es el momento de hacerlo, preferimos centrarnos en lo que acabó siendo su verdadera obsesión: Las propiedades fractales del Triángulo.

Incluimos, sin más, alguna de las hojas del escrito que presentaron para que se vea que fue un trabajo manual[14]. En esos momentos, ellas no tenían la posibilidad de desarrollar un programa informático que diera una respuesta técnica al problema, pero eso no fue óbice para adentrarse en un proceso de investigación. Jugaron con los lápices de colores y calcularon después las dimensiones fractales correspondientes. Es cierto que encontraron escollos que no pudieron solventar. Las limitaciones eran grandes. Pero poco importa, tenían suficiente autonomía de pensamiento y seguridad en sus propias capacidades, habían descubierto tanto que no sólo no iba a producirles decepción alguna no poder responder a todas las preguntas, sino que disfrutaron del placer de haberse adentrado en un universo en el que todos los caminos estaban aún por explorar.



Múltiplos de 5 en un Triángulo de números triangulares

Hemos pintado en cada uno de los triángulos los múltiplos de cinco, de tres, y dos (…). En todos ellos aparece señalado qué es lo que cogemos como *unidad* y como *representación del todo* a la hora de calcular las dimensiones fractales.

La dimensión fractal[15] sería

$$\frac{\log 15}{\log 5}$$

y eso pasa en todos los que son potencia de un número primo puesto que el número de veces que cabe la *unidad* en el *todo* es el número triangular que designa la unidad:

$$\frac{\log[(n+1)n/2]}{\log n} = \frac{\log(n+1)}{\log n} + \frac{\log n}{\log n} - \frac{\log 2}{\log n} = 1 + \frac{\log[(n+1)/2]}{\log n}$$

como

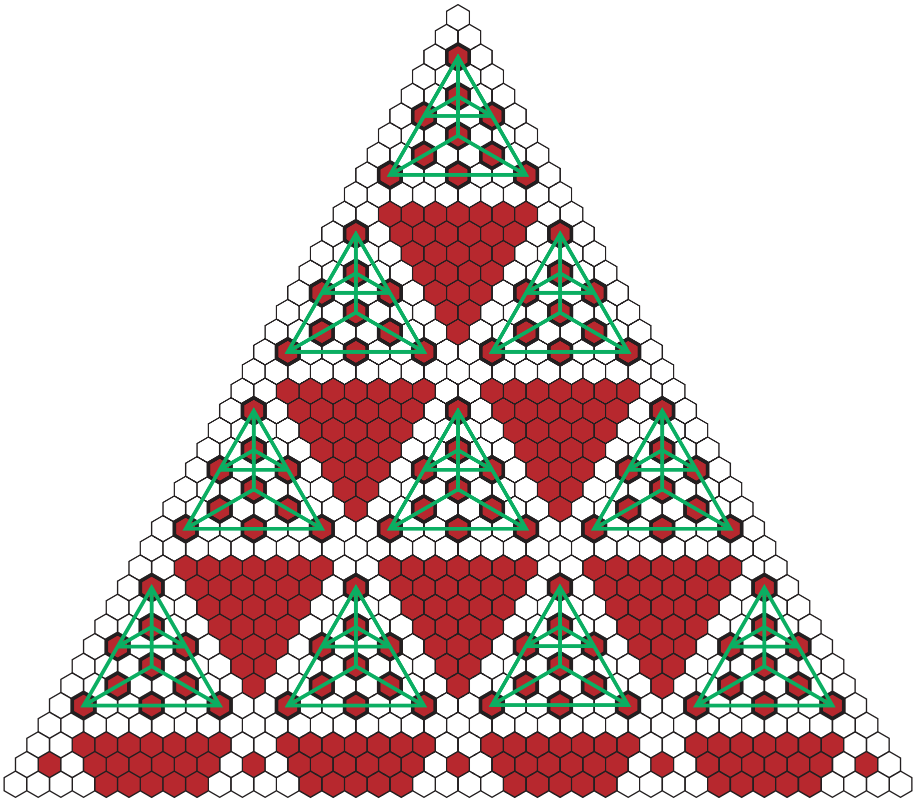
$$\frac{n+1}{2} < n$$

porque el menor valor de n que tomamos es 2, tenemos que $\log[(n+1)/2] < \log n$ luego la dimensión es siempre uno y pico, es decir, mayor que 1 y menor que

$$2 = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\log[(n+1)/2]}{\log n}\right)$$

Pero las fracciones relacionan un número natural y uno triangular ¿será posible obtener una relación entre dos números naturales cualesquiera a partir de estos otros triángulos?

Es decir, si un *triángulo de números triangulares* establece relaciones entre un número natural y uno triangular y eso se pudiera transladar a natural con cuadrado en los cuadrados, natural con pentagonal en los pentagonales, etc. siempre podríamos establecer un fractal para cualesquiera dos números naturales. Sin embargo, la generalización topó con problemas irresolubles a partir del método de trabajo elegido. En algunos casos, como el de la siguiente figura, determinar la relación entre la *unidad* y el *todo* hubiera requerido poder dibujar un mayor número de filas. En cualquier caso, el número de filas es suficiente para saber que hay que modificar la hipótesis de partida. El dibujo contiene la dirección hacia la que orientaron sus



Múltiplos de 3 en un Triángulo de números cuadrados

pasos, pero a estas alturas eran conscientes de que lo que debían modificar era su método de trabajo. Ahora bien, al margen de la incompletitud de los resultados, el reto que Adriana y Diana nos dejan sobre la mesa es el de transcender las propias limitaciones, el de cultivar la ambición de ir más allá, el de aceptar que existen nuevas posibilidades que se abren frente a nosotros, absolutamente actuales, y que es nuestra la decisión, y la responsabilidad, de cultivarlas o dejarlas baldías.

Epígono

Investigar por el placer de investigar sería ya, en sí mismo, un excelente objetivo. Construir las matemáticas a partir de ese proceso es además un reto. Cuando se deja que la libertad guíe los pasos, un sinfín de posibilidades se abre ante nosotros. Un mundo desconocido para el alumno, y muchas veces para el profesor[16], en el que, nuestros miedos, sus cautelas y la cortedad de miras de las familias son razones para una parálisis didáctica que ha terminado por convertir lo que debiera ser un lugar común para el deleite en un bosque encantado que alumnos y profesores no se atreven a pisar, dedicándose de por vida a tartamudear sus pesares cultivando la algorítmica.

Que alumnos y alumnas necesiten calculadora para realizar sencillas operaciones de matemáticas e incluso que se equivoquen al simplificar una derivada o una expresión algebraica... genera una profunda crisis de principios entre el profesorado que se multiplica exponencialmente cuando se constata que les pasa a la mayoría de nuestros pupilos... A corregir esa dificultad se dedican ingentes esfuerzos a pesar de que sabemos que es un problema intranscendente para la mayoría de los profesionales. Incluso para matemáticos e ingenieros que, conscientes de que el trabajo manual no es garante de nada, prefieran recurrir a la exactitud de las máquinas. Sin embargo, que al acabar las enseñanzas medias ¡y superiores! un estudiante no haya tenido la oportunidad de disfrutar del placer de descubrir, ni se le haya formado para ser capaz de enfrentarse a un problema y ser eficaz buscando soluciones, no parece preocuparle a nadie.

Desde hace siglos, hay quienes opinan que la mejor manera de aprender es estudiar sobre el mapa los caminos que otros recorrieron en su día para garantizar que lleguen –aunque de forma virtual– a los mismos lugares a los que llegaron ellos. Otros proponemos la resolución de problemas como modelo de aprendizaje. En ese proceso el mapa no existe, los caminos no están marcados, los primeros pasos son titubeantes y los recorridos erráticos e imprevisibles, pero los resultados son tan extraordinariamente sorprendentes que merece la pena confiar decididamente en las posibilidades del alumnado.

Es hora de rentabilizar el talento humano. Es hora de mandar al museo de la algorítmica los múltiples cálculos algebraicos que realiza en segundos cualquier mediocre ordenador. Es hora de orientar el tiempo que dedicamos a adiestrar en la disciplina y la obediencia hacia el placer del descubrimiento. Es hora de cultivar la imaginación y el pensamiento divergente. Es hora de permitir a los alumnos y alumnas que se planteen sin complejos cualquier pregunta por extraña que parezca, que traten de dar una respuesta en la medida de sus posibilidades e intuyan la forma de abordarla en profundidad. Es hora de permitir que la historia entre en las aulas, ilustre a los –y las– adolescentes y nos ilumine al profesorado para entender algunos de sus bloqueos epistemológicos.

Estos seis últimos capítulos tejidos en torno a un sencillo contenido de las matemáticas más elementales no pretendían ser una invitación a la disidencia, ya no reclamamos héroes, nos vamos haciendo viejos, nos conformamos con instaros a la reflexión: Cuando el Consejo de Europa habla de competencias básicas, ¿hace referencia a la autonomía de pensamiento que el estudiante debe desarrollar para aplicar sus conocimientos a contextos diferentes? ¿Vamos a ser capaces de asumir ese reto en esencia o, por el contrario, dedicaremos nuestros esfuerzos a inventar una prolija taxonomía de casos concretos, dispuestos para el adiestramiento tipo Paulov, y pervertir así, una vez más, ese nuevo campo de libertad que se abre frente a nosotros? ■

NOTAS

1 A estas edades (a otras también), el deporte sigue siendo un elemento motivador. El inglés, a pesar de los años de estudio, un reto.

2 En el décimo aniversario del problema... El partido se jugó en la jornada n.º 20 de la temporada 95-96.

3 Hemos conservado el título y enunciado con que aparece en Dale Seymour [1986]. No debería haber problema alguno para respetarlo en clase.

4 Si hablamos con propiedad deberíamos decir "una determinada estética matemática". Aunque en este caso lo afirmado disfrute de un amplio campo para la generalización.

5 En muchas ocasiones, al saber matemático también.

6 Tartamudo en italiano. Recibió este apodo, que él mismo utilizaría como seudónimo, debido a las dificultades en el habla que se derivaron de un sablazo recibido en 1512 durante la monstruosa matanza infligida por los franceses a los habitantes de su ciudad natal, Brescia. La herida, que afectó a sus cuerdas vocales, le dejó horribles cicatrices que disimuló dejándose crecer la barba.

7 En forma de pasquines.

8 En esta desgraciada competencia en malas artes, también salió perdedor Tartaglia. Cardano, en su *Ars Magna*, tuvo al menos la apostura de reconocer el mérito que competía a Fontana, del Ferro y Ferrari en la resolución de ecuaciones de tercer y cuarto grado.

9 General tratatto di numeri et misuri.

10 En torno al "Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. Un universo nacido de la nada (IV)", *SUMA*, Febrero 2006, n.º 51

11 Así llama Pascal a los números figurados.

12 En el ya referido (nota 10): "En torno al Triángulo ... (IV)", Adriana y Diana aportan una extensa colección de propiedades de éste Triángulo Aritmético que tiene por generador la unidad.

13 Unos años antes, en "Alrededor del Triángulo", Miguel Ángel Velasco, Alberto Pérez, Javier Eced y Javier Adán (4º de ESO) hicieron del Triángulo Aritmético Tridimensional –el que recoge los coeficientes del trinomio– su objeto de estudio. El análisis de sus propiedades y la comparación con las del Triángulo Aritmético habitual constituye un excelente problema de investigación para alumnos y alumnas de cualquier nivel, incluido el universitario. También ellos se vieron obligados a decidir sobre la forma de los números cuadrados y trataron de expandirse, aunque sin éxito, a pirámides de base pentagonal y hexagonal.

14 La calidad de la impresión nos ha decidido a sustituir los dibujos de las alumnas que estaban pintados a mano. Nota del Editor.

15 Hausdorff.

16 Por supuesto, también para alumnas y profesoras.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

No querríamos acabar esta serie dedicada al Triángulo Aritmético sin reseñar un excelente y bien documentado texto de divulgación histórica:

MARTÍN CASALDERREY, Francisco, 2000, *Cardano y Tartaglia. Las matemáticas en el renacimiento italiano*, Nivola, Madrid.

SUMA 53
Noviembre 2006, pp. 61-64

Combinatoria de colores

En los años que llevamos con esta sección hemos hablado muchas veces de puzzles, de su diseño, de su construcción y del estudio de sus posibilidades de manipulación. Hoy queremos presentar uno basado en la combinatoria.

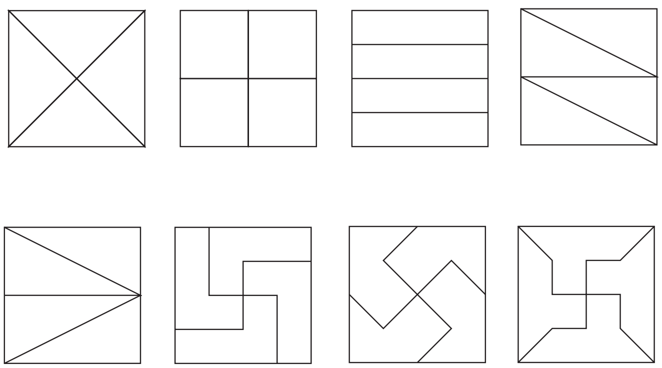
Aprovechando la propuesta polícroma de la nueva etapa de SUMA, queremos jugar con colores viendo todas las formas de ordenarlos para obtener piezas distintas y conseguir figuras con colorido.

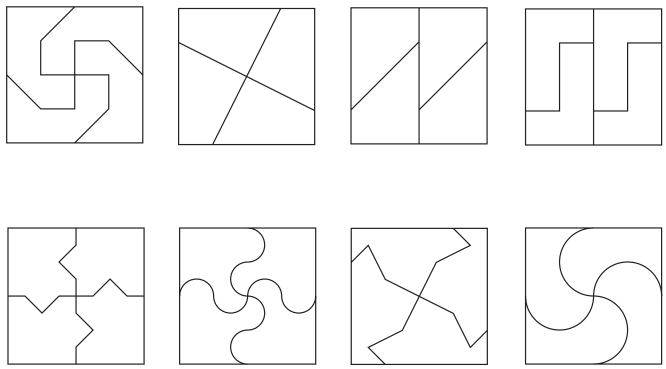
Vamos a dedicar especial atención, como hemos hecho muchas veces, al diseño y estudio preliminar de las piezas que se pueden construir, antes de pasar a jugar con ellas.

Cómo surgió la actividad

Estábamos trabajando en clase la división de figuras en partes iguales (sobre lo que ya hablamos en el número 45 —*Dividir en partes iguales*— de SUMA) y habíamos comenzado con lo más simple, dividir un cuadrado en cuatro partes iguales y entonces apareció el reto, ¿de cuántas formas distintas podemos dividir un cuadrado en cuatro piezas que sean exactamente iguales (es decir si las recortamos y las colocamos una sobre otra coinciden)?

La pregunta dio lugar a una actividad frenética, cada uno quería encontrar *su división*. A continuación mostramos algunas de las divisiones que aparecieron:





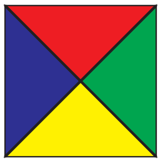
Como el colorear es la debilidad de los alumnos de primero de ESO, cuando fueron apareciendo las distintas divisiones alguien pregunto: *Maestro, ¿las podemos colorear?*

Y entonces cambió la línea de trabajo, pues el problema era ahora cómo colocar los colores y por tanto surgió una nueva actividad de investigación con los siguientes apartados:

1. Dibujemos un cuadrado y dividámoslo trazándole las dos diagonales (suele ser de las primeras en aparecer), entonces el cuadrado contiene cuatro triángulos rectángulos isósceles.
2. Escojamos cuatro lápices de colores distintos.

Grupo Alquerque de Sevilla
Constituido por:
Juan Antonio Hans Martín. *C.C. Santa María de los Reyes.*
José Muñoz Santonja. *IES Macarena.*
Antonio Fernández-Aliseda Redondo. *IES Camas.*
juegos.suma@fespm.org

3. Si cada uno de los triángulos de ese cuadrado lo pintamos de un color obtenemos distintas piezas. Por ejemplo la figura adjunta.



4. ¿Cuántos cuadrados distintos se pueden construir con los cuatros colores escogidos sin que se repita ninguno de ellos?

A partir de esta idea surgieron tres trabajos distintos dependiendo de la figura base de la que se partía, que como veremos, influye en los resultados.

Primer puzzle de combinatoria

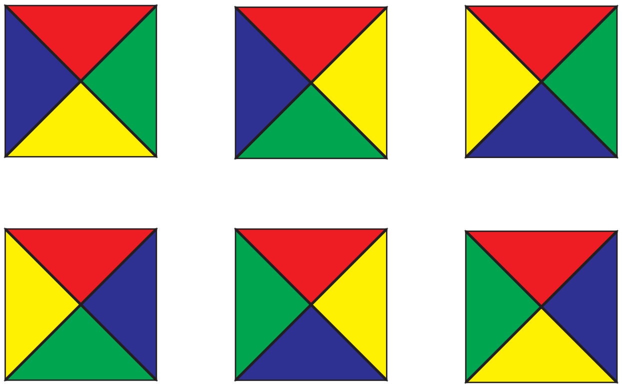
Construcción
La respuesta a la pregunta base del coloreo de la pieza ya dividida ha dado más de un quebradero de cabeza a nuestros alumnos. Ellos no conocen nada de Combinatoria por lo que las soluciones iban saliendo por ensayo y error, por intuición y por el poco o mucho factor visual desarrollado. Muchos de ellos (y de nosotros), para distinguir claramente dos piezas diferentes, las tenemos que dibujar, recortar y superponer para ver claramente si son piezas iguales o distintas. Se les insistió en buscar algún procedimiento para no dibujar figuras repetidas, por ejemplo, fijar uno de los colores siempre en la misma posición.

Color: Sensación producida por los rayos luminosos que impresionan los órganos visuales y que depende de la longitud de onda.
RAE

Analizando el problema desde el punto de vista de la Combinatoria deducimos que la situación planteada es una permutación circular de cuatro elementos (los cuatro colores) alrededor del centro del cuadrado. El número de ordenaciones posibles en una permutación circular de n elementos se obtiene por el factorial de $n - 1$; $P(n) = (n - 1)!$

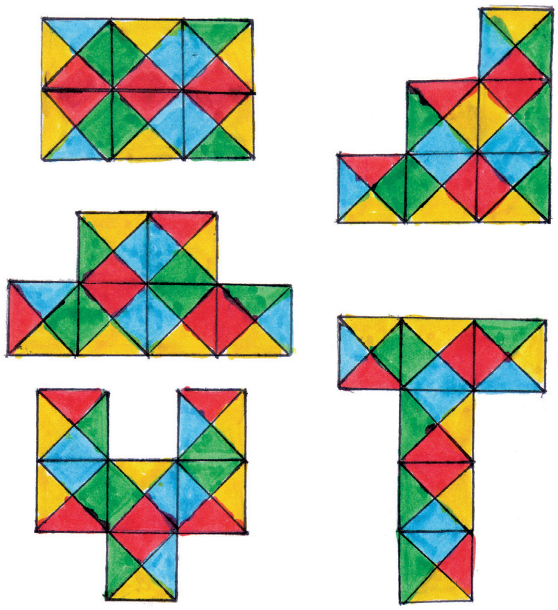
En nuestro caso es $P(4) = (4 - 1)! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

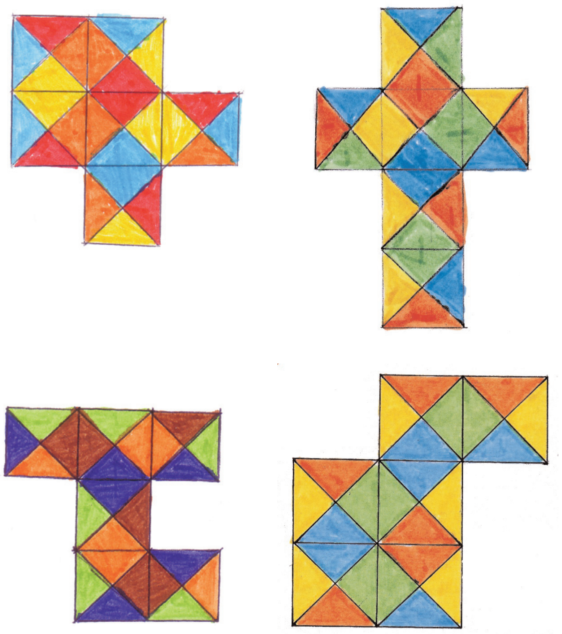
Por lo que nuestro primer puzzle de combinatoria tendrá seis piezas distintas. Para demostrar que las piezas son distintas o para deducir cuál es la que falta hacemos un análisis comparativo entre ellas. Después del estudio detallado aparecen las seis posibilidades:



Juegos
Una vez que teníamos las piezas no quisimos quedarnos ahí. Comenzamos a jugar con ellas y se planteó cómo construir composiciones con las seis piezas que tiene el puzzle con las condiciones de que las piezas tengan un lado común y correspondan a un triángulo del mismo color.

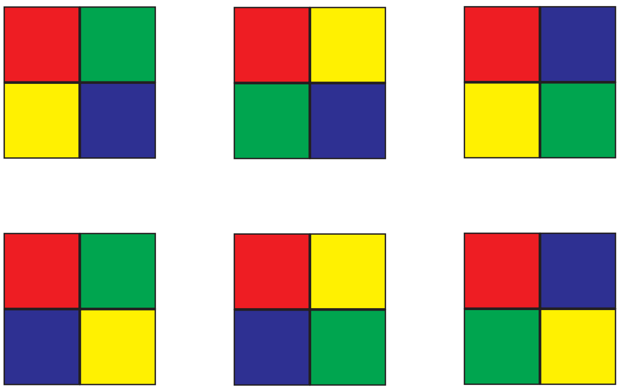
Incluimos a continuación algunas de las figuras más llamativas que realizaron los alumnos.





Segundo puzzle de combinatoria

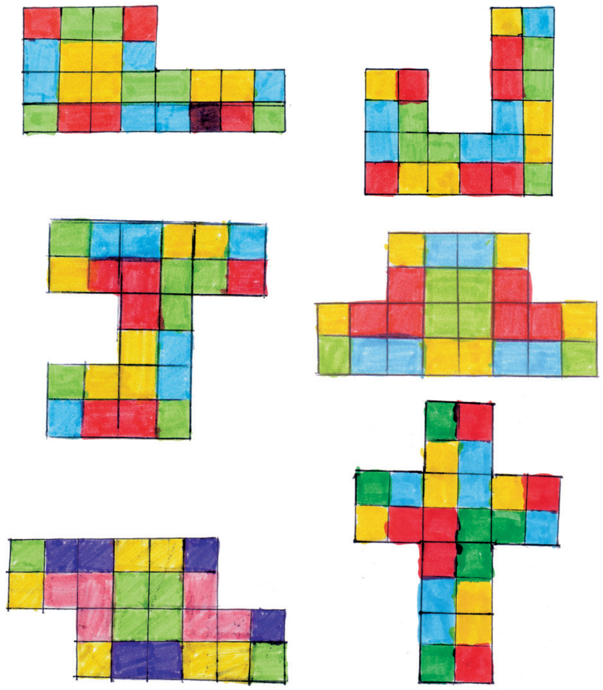
Partiendo de la división del cuadrado en cuatro cuadrados iguales y escogiendo cuatro colores podemos construir el segundo puzzle. Las ordenaciones posibles de los cuatro colores son también una permutación circular de cuatro elementos, por lo que tenemos otras seis piezas diferentes:



Juegos y composiciones
Como en el primer puzzle, para la realización de las composiciones, las piezas han de unirse por un lado que tenga el mismo color.

A simple vista puede parecer que estamos en el mismo caso que el puzzle anterior, pero aquí se plantea una nueva dificultad. Anteriormente al unir los dos lados del cuadrado sólo había que hacer coincidir un color, pero en este segundo caso un lado equivale a una combinación de dos colores coincidiendo a la vez. Esto dificulta más la construcción de figuras con las seis piezas.

El primer reto a plantear es: Con este puzzle ¿se puede formar un rectángulo de 2x3 piezas?

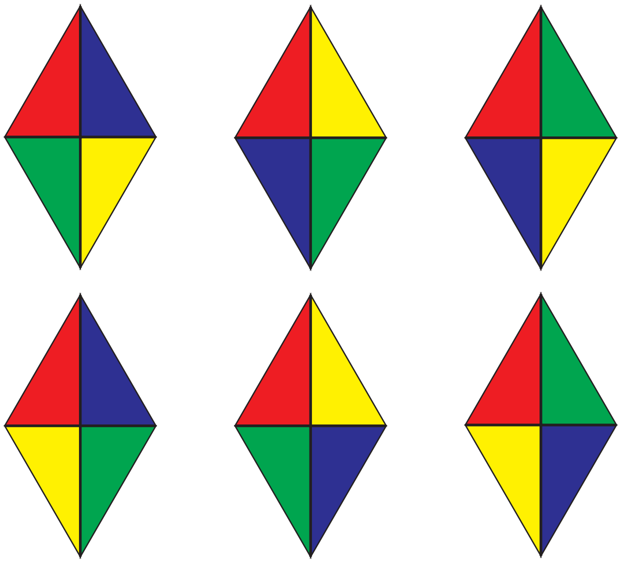


Tercer puzzle: Rombos de colores

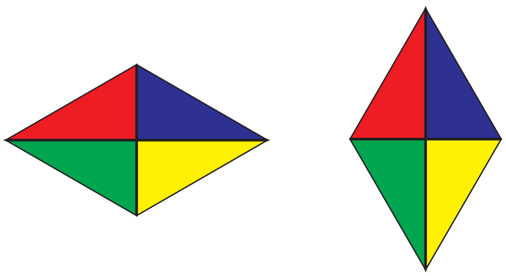
Ya metidos en faena, decidimos modificar un poco las condiciones iniciales. Íbamos a seguir jugando a colorear piezas pero en este caso la pieza no sería tan regular como un cuadrado. Decidimos elegir un rombo con la característica de que su lado coincidía con su diagonal menor, es decir, sería un rombo formado por dos triángulos equiláteros (esta restricción influye sólo en la regularidad de las figuras que se pueden construir al final, no en el estudio combinatorio de piezas que se hace previamente). Con ese rombo dividido en cuatro partes iguales (triángulos rectángulos) por sus diagonales, comenzamos a trabajar.

Si cada una de las divisiones del rombo la pintamos de un color, ¿cuántos rombos distintos se formarán?

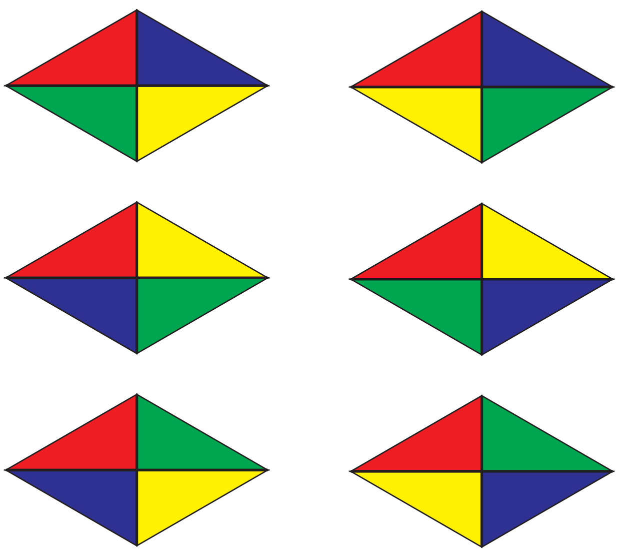
Volcando aquí el estudio hecho en los dos casos anteriores nos encontramos rápidamente con los siguientes seis casos:



En los rombos, los cuatro lados son iguales, pero los cuatro ángulos no son todos iguales, por lo que se nos plantea la siguiente cuestión, ¿son iguales estos dos rombos?



Con sólo superponerlo comprobamos que son rombos diferentes, y por tanto este puzzle tiene otras seis piezas más (nuestros alumnos las nombran *los rombos tendidos*).

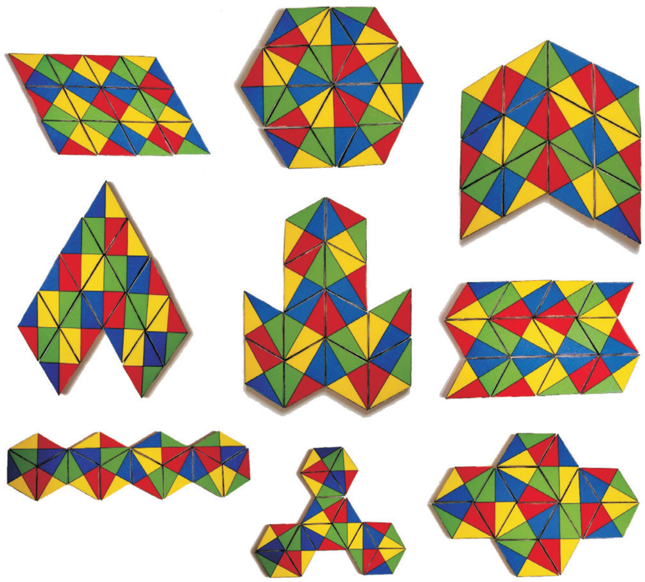


Este puzzle esta compuesto por 12 rombos diferentes que pueden generar todas las formas que nuestra imaginación, y mucho mejor la que nuestros alumnos, quieran poner en el juego.

Enigmas y composiciones

¿Si tenemos 12 rombos podremos formar romboides con todos ellos cumpliendo la regla de que los lados coincidan exactamente y los colores que se toquen sean iguales? Después de estudiar la cuestión aparecen romboides de distintas dimensiones, luego la siguiente pregunta es: ¿de qué dimensiones pueden ser los romboides obtenidos?

¿Con los 12 rombos (24 triángulos equiláteros) podemos construir un hexágono regular con las restricciones de hacer coincidir los colores que están en contacto?



Como siempre un paso más

Al hablar de puzzles siempre nos gusta tratar el tema de la construcción por parte de los alumnos de las piezas que se utilizan, pues pensamos que es un escalón más en el proceso educativo. En primer lugar hace que los alumnos personalicen su material, ya que están trabajando con un puzzle que ellos se han construido y además entran en juego una serie de procedimientos que pueden desarrollarse en otras áreas, por ejemplo en Tecnología.

En este caso es muy fácil la construcción del material, basta entregar en cartulina los dibujos de varios cuadrados o rombos y que los alumnos los dividan y coloreen. Posteriormente se plastifican y recortan o incluso mejor, se pegan previamente sobre una superficie más rígida como panel o cartón pluma, ya que ambas son fáciles de cortar con un simple cutter. Una vez plastificado ¡a jugar!

SUMA 53
Noviembre 2006, pp. 65-67

Edificios, fuego y prevención

Todas las administraciones locales publican en los boletines oficiales de la provincia correspondiente las pertinentes ordenanzas municipales que especifican las condiciones de protección contra los incendios. Especialmente en edificios singulares de nueva construcción (almacenes, hospitales, rascacielos, etc.) preocupa a las autoridades garantizar que en caso de siniestro se darán las condiciones favorables para la huída de los posibles afectados y para la extinción, en su caso, del incendio. Desafortunadamente estas normativas no acaban de aplicarse estrictamente y por esto a menudo los resultados de los incendios son muy desgraciados.

Hace años pasé un curso completo en una universidad americana. En tres ocasiones, al azar y sin previo aviso, sin saber si se trataba de un incendio o de una simulación, tuve que salir a la calle desalojado por unas irresistibles sirenas y por los bomberos que intervenían en los simulacros. Allí había una cultura del ensayo y la educación del comportamiento ante las emergencias. En mi universidad habitual durante treinta años nadie nos ha propuesto una simulación de desalojo, si bien hace décadas que el edificio incumple la normativa legal vigente. Quizás de la lectura de las ordenanzas contra-incendios podríamos sacar diversas ventajas educativas: ver las matemáticas que soportan la normativa, aplicarla a casos prácticos concretos (como nuestros centros) y, en su caso, exigir que se asegure la prevención ante la fatalidad.

Les animo pues a mirar bien la normativa de su localidad y abordar los problemas matemáticos pertinentes. Como botón de muestra y mirando las ordenanzas de Barcelona, les he seleccionado para este *clip* algunos enunciados de problemas tipo a analizar.

Claudi Alsina
elclip.suma@fespm.org

Problema del patio de ventilación

La dimensión del patio interior será tal que permita inscribir en su interior una circunferencia de diámetro igual a la sexta parte de su altura, con un mínimo de tres metros que no produzca, en ningún punto de su planta, estrangulaciones de menos de dos metros y cuya superficie mínima obedezca a la siguiente tabla:

Altura patio (n.º de plantas)	1	2	3	4	5	6	7	más de 7
Superficie mínima (m²)	10	10	12	14	16	18	20	22

¿Sabría sustituir la tabla por una fórmula? ¿Tienen sentido todas las condiciones exigidas? ¿Faltan datos o sobran exigencias?

Problema de la escalera

Los peldaños de las escaleras de evacuación cumplirán la relación $60 \leq 2d + e \leq 70$ cm, siendo d la dimensión vertical y e la horizontal.

¿Qué tipo de valores son razonables para d y e, cumpliendo la doble desigualdad? ¿Cómo expresar d y e en función de la pendiente de la escalera? ¿Sería razonable que la escalera fuese de caracol?

Problema de la carga de fuego

Para industrias o almacenes con materiales de riesgo intrínseco se evalua el nivel de riesgo mediante la "Carga de fuego ponderado Q_p del local" (riesgo bajo si $Q_p \leq 200$ Mcal/m²; medio si $200 \leq Q_p \leq 800$; alto si $Q_p \leq 800$. Para calcular Q_p (teniendo en cuenta todo el material del lugar) se usa la fórmula:

$$Q_P = \frac{\sum P_i \times H_i \times C_i}{A} \times Ra(\mathrm{Mcal/m^2})$$

siendo

P_i: Peso en kg de cada una de las materias
H_i: Poder calorífico en Mcal/Kg de cada uno de las materias
C_i: Coeficiente de peligrosidad de la materia (1'6, 1'2 ó 1)
A: Superficie en m² del local
Ra: Coeficiente de riesgo de activación (3, 1,5 o 1).

Para cada industria y materia quedan fijos los valores de H_i, C_i y Ra así como el área A del local, luego el juego depende de P_i.

Si $H_i = 100$ Mcal/m², $C_i = 1{,}6$, $Ra = 3$ y $A = 500$ m², ¿qué peso P_i sería posible para mantener Q_p entre 200 y 800?

Problema de distancias

En edificios de varias plantas y uso notable se consideran interesantes los parámetros métricos:

d(E): máxima separación (en metros) de escaleras de incendios,
d(S): máxima distancia (en metros) desde un lugar al pasadizo,
d(DE): máxima distancia (en metros) de un lugar a la escalera de incendios.

Así *d(E)* = 50 m, *d(S)* = 25 m son valores usuales aquí, pero en Londres *d(E)* = 61 m, *d(S)* = 12 m. A partir de estos parámetros, la superficie de la planta y las anchuras de las puertas, sabiendo el número de personas por minuto que estadísticamente pueden pasar andando rápido por una puerta de anchura a (por ejemplo, si $a = 0{,}6$ m pasan 54 personas por minuto) se procede a hacer cálculos sobre el tiempo de desalojo *t(D)*. Pero aún es más interesante fijar *t(d)*, *d(S)*, *d(DE)* y determinar entonces que valores de anchura a se necesitan.

Les animo pues a mirar bien la normativa antiincendios de su localidad y abordar los problemas matemáticos pertinentes.

...y muchos problemas más

Las plantas, las escaleras, las superficies ocupadas, la densidad de ocupación, el deseo de desalojo en 10 minutos, la resistencia estructural antes de colapso, las dimensiones aditivas de puertas que van recibiendo números crecientes, etc., etc., etc. Ya lo decía la canción: ¿La escalera donde está? ¿Dónde está la escalera?...

Para pensar un rato

Piense en los problemas planteados o, aun mejor, localice su propia normativa de incendios. Observe la realidad y hasta que punto las directrices se han aplicado... y si quiere compartir lo encontrado ya lo sabe *elclip.suma@fespm.org* ■

PARA SABER MÁS

NBE-CDI/96 (2005): *Reglamento de seguridad contra incendios. Establecimientos industriales* (RD 2267/2004), NBE-CDI-96 Año 2005 (2ª edición).

MONTOLIU, A. (2004): *Guía para la prevención de incendios de origen eléctrico.*

NFPA (2001): *Guía para la investigación de incendios y explosiones.*

AZNAR, A. (1999): *Protección contra incendios (Análisis y diseño de sistemas).*

En INTERNET:

http://www.soloarquitectura.com/documentos/doccondicionescontraincendios.html

http://www.RF-60.com

http://www.nfpas.org

http://www.cepreven.com

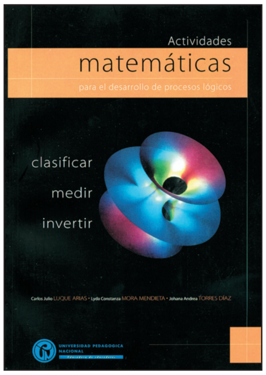
Libros recibidas

CÁLCULO CIENTÍFICO CON MATHLAB Y OCTAVE
A. Quarteroini y F. Saleri
Springer
Milán (Italia), 2006
ISBN: 88-470-0503-5
239 páginas

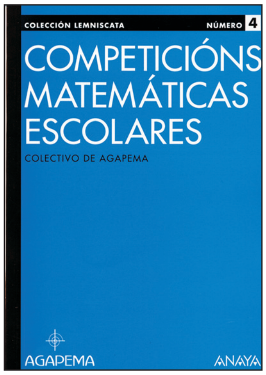
ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA EN LA FORMACIÓN INICIAL DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS
P. Perry Carrasco,
L. Camargo Uribe,
C. Samper de Caicedo
y C. Rojas Morales
Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá (Colombia), 2006
ISBN: 958-8226-66-X
363 páginas

LAS NUEVE CIFRAS Y EL CAMBIANTE CERO. DIVERTIMENTOS MATEMÁTICOS
Bernardo Recamán
Editorial Gedisa
Barcelona, 2006
ISBN: 84-9784-135-2
124 páginas

EL PALACIO DE LOS PRECIOSOS CRISTALES. DIVERTIMENTOS MATEMÁTICOS
Bernardo Recamán
Editorial Gedisa
Barcelona, 2006
ISBN: 84-9784-136-0
124 páginas



ACTIVIDADES MATEMÁTICAS PARA EL DESARROLLO DE PROCESOS LÓGICOS
C.J. Luque, L.C. Mora
y J.A. Torres
Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá (Colombia), 2005
ISBN: 958-8226-56-2
403 páginas



COMPETICIÓNS MATEMÁTICAS ESCOLARES
Colectivo AGAPEMA
Agapema-Anaya
Colección lemniscata/4
Madrid, 2006
108 páginas

SUMA 53
Noviembre 2006, pp. 69-73

El Método: una carta reveladora de Arquímedes a Eratóstenes

Palimpsesto con el Método de Arquimedes, debajo de una Biblia

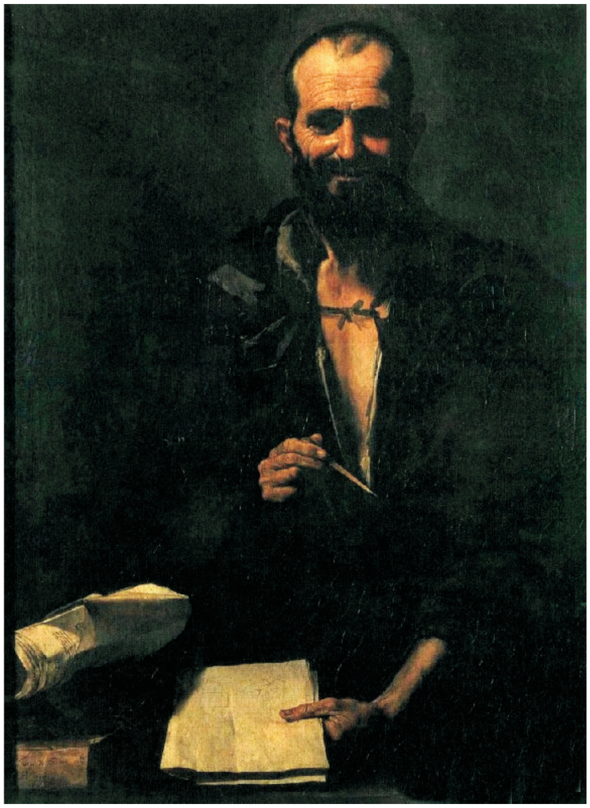
Hace 100 años, el investigador Heiberg tuvo conocimiento de un palimpsesto, esto es, un pergamino al que se había lavado un primer escrito para ser utilizado con un nuevo texto, de contenido matemático, que se había encontrado en el convento del Santo Sepulcro de Constantinopla.

Examinado el documento con las técnicas fotográficas correspondientes, descubrió Heiberg que, además de otras obras de Arquímedes, el pergamino contenía nada menos que una carta de éste dirigida a Eratóstenes, en la que le comunicaba con ejemplos concretos el método de trabajo utilizado por él en sus hallazgos matemáticos. El documento se conservó gracias a que unos monjes del siglo XIII lo habían reciclado con sus textos litúrgicos, sobre el texto de Arquímedes que era copia, realizada en el siglo X, de una versión anterior.

Este documento fue adquirido, tras la primera guerra mundial, por una familia francesa que lo conservó hasta 1998, año en que lo vendió en pública subasta en la ciudad de Nueva York. A pesar de los esfuerzos del gobierno griego por recuperarlo fue adquirido finalmente por un coleccionista norteamericano, que no ha querido revelar su identidad, aunque expresó su deseo de que el texto en cuestión estuviera a disposición de todo aquél que quisiera consultarlo.

Pero, ¿cuál era la importancia de este escrito, tan solo una simple carta?

Santiago Gutiérrez
hace.suma@fespm.org



Arquímedes, pintado por Ribera en 1630,
Museo del Prado

De regreso a Siracusa, se ocupó de muy variadas cuestiones en materias tan diversas como Geometría, Aritmética, Hidrostática, Mecánica y Astronomía. Y lo hacía con tal afán que Plutarco decía de él:

> ...siempre hechizado como por una particular sirena en su propio interior, se olvidaba de comer y beber, y a menudo se le debía arrastrar por la fuerza a los baños y ungüentos. Totalmente cautivado por felicísimas sensaciones y realmente poseído por su musa matemática.

Es posible que visitara también Egipto y que fuera allí donde dejara constancia de su talento técnico con una especie de tornillo ($\kappa o \chi \lambda \acute{\iota} \alpha \sigma$) que servía para extraer agua de las profundidades, lo que facilitaba la irrigación de las tierras de cultivo.

Según la leyenda, el rey Hierón le propuso idear algún procedimiento para ver si la corona de oro que le había encargado al joyero contenía o no la proporción de oro prevista en el encargo, pero sin necesidad de destruir la corona. Se cuenta que Arquímedes, estando en la bañera, descubrió de pronto el procedimiento que le permitía resolver el problema, y fue tal su emoción que saltó de la bañera gritando *Eureka, eureka* (*Lo encontré, lo encontré*). Había descubierto ni más ni menos que el bien conocido principio hidrostático:

> Cualquier sólido más ligero que un fluido y situado en él, se sumergirá hasta el punto en que el peso del sólido sea igual al peso del fluido desalojado.

La personalidad de Arquímedes

Natural de Siracusa, era hijo, según él mismo manifiesta en su obra *El Arenario*, del astrónomo Fidias. El historiador Tzetzes afirma:

> ...trabajó en geometría hasta edad avanzada, viviendo 75 años

De aquí se deduce que debió nacer hacia el año 287 a.C. Al parecer era amigo y consejero, quizá pariente, del rey Hierón II, quien sacó buen partido de su ingenio orientándolo hacia la ingeniería militar. Precisamente, *El Arenario* está dedicada a Gelón, hijo de Hierón.

Arquímedes visitó la escuela de Alejandría, y probablemente allí trató con discípulos de Euclides, pero pronto regresó a Siracusa, donde transcurrió la mayor parte de su vida. Sin embargo, se mantuvo en contacto epistolar con los matemáticos y astrónomos del Museo que merecían su confianza, sobre todo con Dositeo, Conon de Samos y Eratóstenes, este último director del Museo desde el año 235 a. C.

> *...descubrió Heiberg que, además de otras obras de Arquímedes, el pergamino contenía nada menos que una carta de éste dirigida a Eratóstenes, en la que le comunicaba con ejemplos concretos el método de trabajo utilizado por él en sus hallazgos matemáticos.*

Lo que acabó por convertir a Arquímedes en un personaje de leyenda fue la defensa que hizo de su ciudad durante el asedio de Roma, en el transcurso de la segunda guerra púnica.

Parece ser que con un juego de poleas fue capaz de botar un enorme barco con la única fuerza de su brazo, con la famosa leyenda:

> Dadme un punto de apoyo en el universo y moveré la Tierra.

Se dice de él que mediante unos grandes espejos concentró los rayos solares sobre las naves romanas, consiguiendo incendiarlas. También se cuenta que, utilizando la ley de la palanca, lanzaba enormes piedras, desde grandes catapultas, sobre las naves.

> He creído oportuno confiarte por escrito, y explicar en este mismo libro, las características propias de un método según el cual te será posible abordar la investigación de ciertas cuestiones matemáticas por medio de la mecánica.
>
> *Arquímedes*, Carta a Eratóstenes

Esto ocurría allá por los años 214 a 212 a.C. Quiso el destino que cuando las tropas romanas, al mando del general Marcelo, consiguieron entrar en Siracusa, después de dos años de lucha, Arquímedes encontrase la muerte, en el año 212 a. C., a manos de un soldado romano, a los 75 años de edad, pese a la orden que el propio Marcelo había dado de que lo llevasen vivo a su presencia. Su muerte se ha revestido de múltiples leyendas, desde la que dice que murió mientras hacía figuras con un bastón sobre la arena de su jardín, hasta la que sostiene que tan solo fue una víctima más del saqueo que se produjo a la entrada de las tropas romanas, pasando por la que pone en su boca la frase que le dijo al soldado romano: *No desordenes mis círculos*, a continuación de lo cual el soldado le habría dado muerte.

De estas y otras gestas nos hablan los historiadores romanos, aunque casi todas son difíciles de probar. Pero, no importa, podemos aplicarles el proverbio italiano "*Si non e vero e ben trovato*". Es decir, si no son verdad sirven para hacernos una idea del impacto que su personalidad había producido tanto en sus contemporáneos, amigos y enemigos, como en todos cuantos posteriormente tenían noticia de su talento. No deja de ser una pena que se haya perdido la biografía escrita por su coetáneo Herakleides.

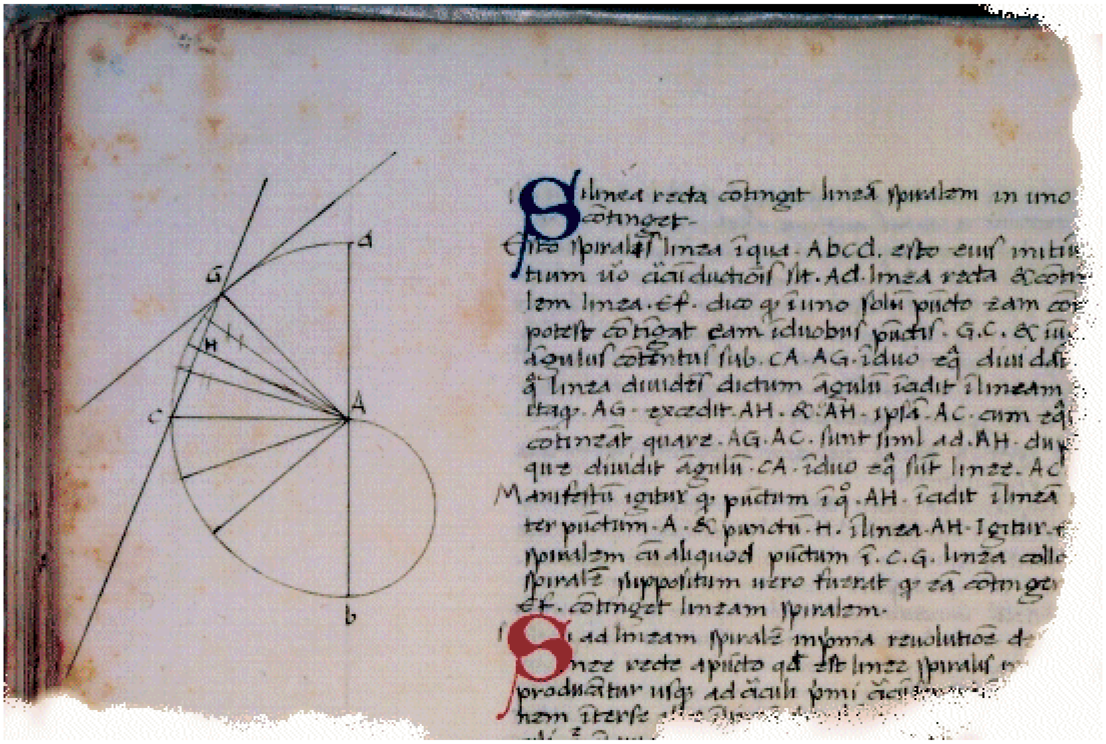
La obra

A pesar de su éxito como ingeniero y como inventor, lo que verdaderamente interesaba a Arquímedes era la ciencia pura, incluso cuando trataba de sus inventos con palancas y otras máquinas simples su espíritu se iba más a los principios generales que a las aplicaciones prácticas. En realidad daba poco valor a sus inventos prácticos, según relatan los historiadores. De hecho, sus escritos corresponden a la obra teórica y en nada hacen referencia a la práctica. Como dice Plutarco:

> ...Estaba en posesión de un espíritu tan alto, un alma tan profunda y una riqueza tal de conocimientos que a pesar de que estos inventos le habrían proporcionado la celebridad de tener más que sabiduría humana, consideraba que dichos trabajos eran innobles y viles como todo trabajo mecánico y todo tipo de arte que se puede usar y aprovechar directamente, y por ello centró su mayor ambición en aquellas especulaciones cuya belleza y sutileza no añaden nada a las necesidades habituales de la vida.

Escribió más de diez obras que, siguiendo a los críticos actuales, podemos clasificar del siguiente modo:

1. *Primer libro de los equilibrios*, sobre los centros de gravedad, los paralelogramos y los triángulos.
2. *Cuadratura de la parábola*, sobre la cuadratura de un segmento parabólico, con un prólogo dirigido a Dositeo. Al problema planteado en este libro le da Arquímedes dos soluciones, una mecánica y otra geométrica.
3. *Segundo libro de los equilibrios*, sobre los centros de gravedad de los segmentos de parábola.
4. *Sobre la esfera y el cilindro I y II*. Aporta aquí resultados interesantes, entre los que destacan el que la superficie esférica es cuatro veces la de su círculo máximo, o que si una esfera está inscrita en un cilindro de altura igual al diámetro de la esfera, entonces tanto el volumen como la superficie total del cilindro son vez y media el volumen y la superficie de la esfera, respectivamente. Este resultado debió gustar de manera especial a Arquímedes, ya que pidió a los suyos que sobre su tumba representaran la figura de la esfera inscrita en el cilindro. Gracias a esta inscripción, en el año 75 a. C., Marco Tulio Cicerón, cuestor por entonces en Sicilia, pudo identificar la tumba de Arquímedes a pesar del estado ruinoso en que se encontraba.



Manuscrito de obras de Arquímedes,
autógrafo de Piero della Francesca.
Biblioteca Riccardiana. Florencia (Italia)

5. *Sobre las espirales*, donde trata de la conocida como "espiral de Arquímedes", la figura engendrada por un punto que se mueve con velocidad constante sobre una semirrecta, radio vector, que a su vez gira con velocidad angular constante alrededor de su origen (de ecuación $r=a\cdot\theta$, en coordenadas polares). Aunque esta espiral debió ser descubierta anteriormente por Conon, y no por Arquímedes, a éste se debe el cálculo de la tangente en un punto cualquiera, así como el de las áreas barridas por el radio vector.
6. *Sobre los conoides y los esferoides*, donde trata de los volúmenes engendrados por las elipses, las parábolas y las hipérbolas al girar alrededor de un eje de simetría o del eje transversal en el caso de las hipérbolas.
7. *Medida del círculo*, sobre diversas relaciones entre perímetros y diámetros, entre áreas de círculos y cuadrados inscritos. En este escrito aparece una interesante aproximación del número π, como resultado de un trabajo de aproximación a la longitud de la circunferencia, por medio de polígonos regulares inscritos y circunscritos, de 3, 6, 12, 24, 48 y 96 lados. Tal aproximación da lugar al valor de π dado por la desigualdad:

$$3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{10}{70}$$

8. *El Arenario*, que aporta un sistema de numeración para tratar con números muy grandes.
9. *Los cuerpos flotantes I y II*, donde expone su principio hidrostático y lo aplica al equilibrio de diversos cuerpos que flotan o se hallan sumergidos en un líquido.
10. *El método*, ya mencionado, y del que hablamos detenidamente a continuación.

El método

En el siglo XVI, cuando empezó a conocerse, la obra de Arquímedes asombraba de tal modo que alguien indicó si no habría dispuesto de un método especial con que lograr semejantes resultados. Se conocían las demostraciones, pero, ¿cómo hacía para establecer las hipótesis de trabajo de las que luego daba cumplida cuenta en sus demostraciones? La respuesta se hizo esperar, nada menos que hasta comienzos del siglo XX, en que el investigador danés Heiberg logró descifrar el pergamino de 185 páginas que contenía la carta a Eratóstenes. En ella explicaba así Arquímedes su propósito:

> Reconociendo, como digo, tu celo y tu excelente dominio en materia de filosofía, amén de que sabes apreciar, llegado el caso, la investigación de cuestiones matemáticas, he creído oportuno confiarte por escrito, y explicar en este

> mismo libro, las características propias de un método según el cual te será posible abordar la investigación de ciertas cuestiones matemáticas por medio de la mecánica. Algo que por lo demás, estoy convencido, no es en absoluto menos útil en orden a la demostración de los teoremas mismos. Pues algunos de los que primero se me hicieron patentes por la mecánica, recibieron luego demostración por geometría, habida cuenta de que la investigación por ese método queda lejos de una demostración; como que es más fácil construir la demostración después de haber adquirido por ese método cierto conocimiento de los problemas, que buscarla sin la menor idea al respecto...[1]

Como se ve, Arquímedes hacía:

a. Una exploración mecánica de la relación que deseaba establecer.
b. Concluido un resultado plausible procedía a buscar la demostración geométrica.

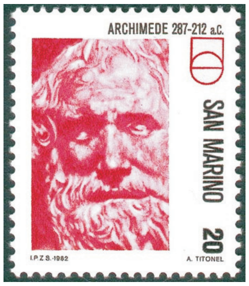
Incluso la primera parte del proceso, la exploración mecánica, le servía no sólo, según dice, para establecer una conjetura, si no que le daba pistas también para la demostración geométrica posterior. Por lo demás, la carta adjunta varios ejemplos de su trabajo, y no se queda en una simple declaración de intenciones.

La exploración mecánica, consiste en lo siguiente:

Supongamos que se trata de hallar el área de una figura plana o el volumen de un determinado cuerpo. Representemos por A la figura o el cuerpo. Sea B otra figura o cuerpo cuyos área o volumen son conocidos, así como sus respectivos centros de gravedad. El método de exploración mecánica consiste, entonces, en pesar elementos muy pequeños (infinitesimales, diríamos hoy) de A en comparación con los correspondientes de B. Estos elementos muy pequeños son segmentos paralelos, en el caso de las figuras, o cilindros de altura muy pequeña, en el caso de los cuerpos, siendo paralelos los planos de las bases de todos ellos. Finalmente, equilibraba los elementos de A, colocados en un brazo de la balanza, con los elementos de B, colocados en el otro brazo.

Tanto para las construcciones geométricas que sirven de base en sus exploraciones como las utilizadas en las demostraciones, los razonamientos de Arquímedes giran en torno a:

- la teoría de las razones y las proporciones,
- la teoría de los centros de gravedad,
- la teoría de equilibrios,
- algunos supuestos (a modo de postulados y definiciones),
- los teoremas ya probados,
- los métodos de comprensión y aproximación (una especie de exhaución),
- la reducción al absurdo (sólo para las demostraciones).



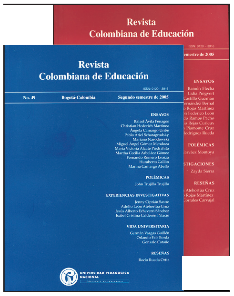
Así de reveladora es la carta a Eratóstenes, a la sazón bibliotecario y director del Museo de Alejandría. Experimentación y observación, son los procesos que utilizaba antes de demostrar lo que, de lo contrario, se quedaría en meras conjeturas.

Arquímedes, considerado como el más grande matemático de la antigüedad, nos aporta de este modo los secretos de su forma de trabajo, cosa que tantos matemáticos nos niegan con frecuencia. No hay más que recordar el caso de Gauss, que según nos hacía observar Abel: *Es como el zorro, que borra con la cola sus huellas en la arena.* ■

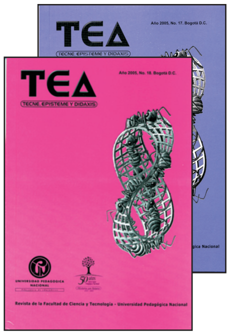
NOTA

[1] Seguimos aquí la traducción directa del griego de Mª Luisa Puertas y Luis Vega en *Arquímedes: El método*, Ed. Alianza, 1986.

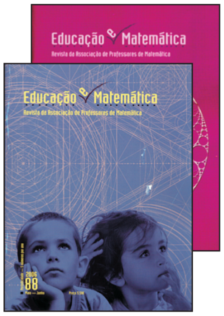
Revistas recibidas



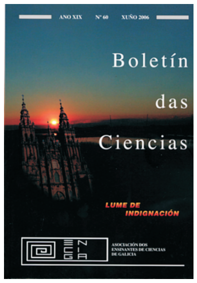
Revista Colombiana de Educación
UPN
Bogotá (Colombia) 2005
n.os 48 y 49
ISSN 0120-3916



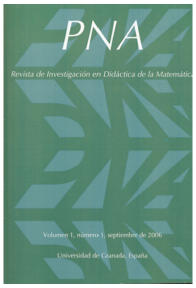
TEA. Tecne, Episteme y Didaxis
Fac. Ciencia y Tec. UPN
Bogotá (Colombia)
Año 2005, n.os 17 y 18
ISSN 0121-3814



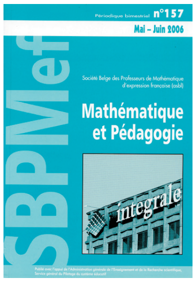
Educação e Matemática
APM
Lisboa 2006
n.os 87 y 88
ISSN 0871-7222



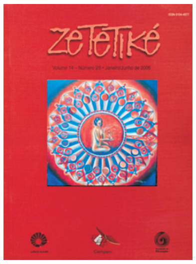
Boletín das ciencias
ENCIGA
Santiago de Compostela
Año XIX n.º 60, Xuño 2006
ISSN 0214-7807



PNA. Revista de Investigación en Didáctica de las Matemáticas
Universidad de Granada
Vol. 1 n.º 1, sep. 2006
ISSN 1886-1350

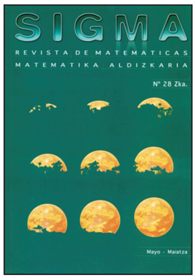


Mathématique et Pédagogie
SBPMef
n.º 157, Mai-Jun 2006
ISSN 0773-7378

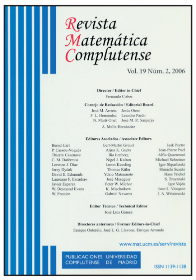


Zetetiké
Facultade de Educação
UNICAMP
Campinas, SP Brasil
Vol. 14 n.º 25 Jan-Jun 2006
ISSN 0104-4877

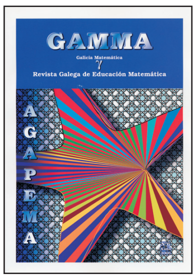
Bolletino di storia delle science matematiche
Istituti Ed. e Pol. Internaz.
Pisa-Roma (Italia)
Anno XXVI n.º 1 Giugno 2006
ISSN 0392-4432



SIGMA
Gobierno Vasco
Vitoria 2006
n.º 28 Mayo 2006
ISSN 1131-7787



Revista Matemática Complutense
UCM, *Madrid 2006*
vol.19, n.º 2
ISSN 1139-1138



Gamma
Agapema
Lugo 2006
n.º 6 xuño 2006
ISSN 1578-2980

La Gaceta de la RSME
RSME
MADRID
Vol.9, n.º 2, Mayo-Agosto 2006
ISNN 1138-8927

SUMA 53
Noviembre 2006, pp. 75-81

Mirando con la cabeza

Las matemáticas y la pintura trabajan con ideas. La palabra *idea* viene del griego ειδω, que significa ver, mirar u observar, y de ειδοζ, que significa figura, forma, aspecto o visión. Detrás de una montaña concreta está la idea de *montaña*, un dibujo abstracto, unas líneas que permiten reconocer la montaña detrás de las rocas, los pinos o la nieve. La diferencia entre este árbol y *árbol*, entre un círculo que dibujamos en la pizarra y *círculo*: la diferencia entre la cosa y la idea de la cosa. En matemáticas y en pintura se buscan las ideas de las cosas.

Ideas distintas, representaciones distintas de un mismo objeto, esconden algunas de sus características y destacan otras. La multiplicidad de soportes y herramientas con que cuentan hoy quienes hacen matemáticas o pintura, permite combinar representaciones muy distintas en una misma descripción. Esto hace posible, a su vez, que, tanto en cuadros como en matemáticas, se puedan mostrar, simultáneamente por primera vez, características muy distintas de un mismo objeto, dando lugar a descripciones de la naturaleza que van más allá de los modelos convencionales basados en la mera reproducción imitativa.

En el siglo XVII, la geometría euclídea se convirtió en una poderosa herramienta para describir el mundo tal cual lo ve el ojo. Trabajos como *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* de Newton (1687), y *Las meninas* de Velázquez (1657), convirtieron el espacio euclídeo en el modelo artístico y científico para describir el universo, y en las lentes a través de las cuales la cultura occidental lo observaba y definía. En el siglo XVIII, en occidente se representaba y concebía el espacio como un contenedor dotado de las propiedades del espacio euclídeo.

Mientras tanto, matemáticos y pintores, conscientes de las limitaciones de sus modelos y construcciones, seguían afinando sus herramientas, tratando de llegar más lejos con ellas. Hacia 1800, a través de los trabajos de Gauss y Goya (ver *SUMA* 51, 93-97) se acercaron a las superficies de las cosas, considerándolas ya no como meras fronteras entre cosas, sino como mundos en sí mismos. Hubieron de desarrollarse nuevas maneras de hacer, y los astutos trucos del siglo anterior (como las técnicas de iteración paso a paso de Laplace, o las gradaciones de color de los pintores de entonces) dieron paso a construcciones precisas e intuitivas como las de Goya o Gauss. En menos de medio siglo, matemáticos y pintores estuvieron preparados para dar el dificilísimo paso de permitirse a sí mismos pensar de otra manera —Riemann, autori-

Capi Corrales Rodrigáñez
enuncuadrado.suma@fespm.org

zándose a sí mismo en 1854 a extender las nociones espaciales a objetos que no fuesen parte del espacio euclídeo, o Cézanne (*SUMA* 47, 104-105), algo más tarde, utilizando las propiedades bidimensionales del lienzo para construir volúmenes tridimensionales, son ejemplos excelentes de este *pensar de otra manera*—; habían nacido las matemáticas modernas y la pintura moderna.

El proceso de desarrollar las nuevas ideas fue largo y difícil, y hubo que llegar hasta un grado altísimo de abstracción. Muchos de los conceptos y nociones que forjaron en el camino estaban basados en intuiciones espaciales radicalmente nuevas, y cambiaron de forma sistemática la percepción de pintores y matemáticos. Sin embargo, como los trabajos de los pintores impresionistas o de matemáticos como Ascoli, Volterra o Fréchet demuestran, sus campos de percepción estaban todavía anclados en estructuras euclídeas y la representación de objetos.

El paso definitivo se dio hacia 1910 cuando en las manos de matemáticos como Felix Hausdorff y pintores como Picasso, los espacios abstractos fueron, final y explosivamente, representados.

El paso definitivo se dio hacia 1910 cuando en las manos de matemáticos como Felix Hausdorff y pintores como Picasso, los espacios abstractos fueron, final y explosivamente, representados: el período clásico de matemáticas y pintura modernas empezó. Duró hasta la segunda guerra mundial, cuando la convergencia de tantísimas ideas nuevas precisamente en un momento de crisis profunda de las viejas, cambió dramáticamente tanto lo que se miraba, como cómo se miraba. Según se dice con frecuencia, todo lo que era sólido se disolvió en el aire.

Hacia 1940 comenzó el segundo período del arte moderno, que llega hasta nuestros días. Se extendió desde París, a través del trabajo de artistas como Wols, y, con la gran emigración de la postguerra hacia los Estados Unidos, cambió su escenario a Nueva York, donde se desarrolló –o mutó– en la Escuela de Nueva York de Expresionismo Abstracto. Para entonces, todas los caminos abiertos por las tendencias iniciales en el arte moderno habían convergido hacia la abstracción –impresionismo, expresionismo, constructivismo, futurismo, cubismo, fauvismo, suprematismo, dadaismo, surrealismo...– cambiando, una vez más, la percepción de los pintores. Dotados

Hacia 1940 comenzó el segundo período del arte moderno, que llega hasta nuestros días. Se extendió desde París y, con la gran emigración de la postguerra hacia los Estados Unidos, cambió su escenario a Nueva York.

de una gran variedad de técnicas y estrategias, libres para moverse a voluntad entre ellas, y con unas estructuras abstractas lo bastante ricas como para permitirles combinar estas técnicas y estrategias en sus lienzos, aprendieron a desarrollar simultáneamente distintos puntos de vista, y su mirada cambió de forma radical.

De manera análoga, las nuevas ideas abstractas desarrolladas en los últimos ciento cincuenta años –muchas de ellas inicialmente basadas en intuiciones– estaban presentes ya en todas las partes de las matemáticas. Con la topología como ingrediente esencial —no sólo funcionando como puente de conexión, sino ofreciendo además modelos visuales nuevos para sustituir a los que habían tenido que ser abandonados en los años veinte—, las estrategias y métodos algebraicos, analíticos, geométricos y probabilísticos habían empezado a converger con gran, e inesperado, éxito. Matemáticos y físicos teóricos se acostumbraron a vivir entre haces de relaciones establecidos entre los elementos de conjuntos cualesquiera, redes cohomológicas, espacios de fibras u órbitas, espacios de probabilidad, espacios formados por sucesos con cierta probabilidad de ocurrir, etc., y una vez más, el foco de su mirada cambió.

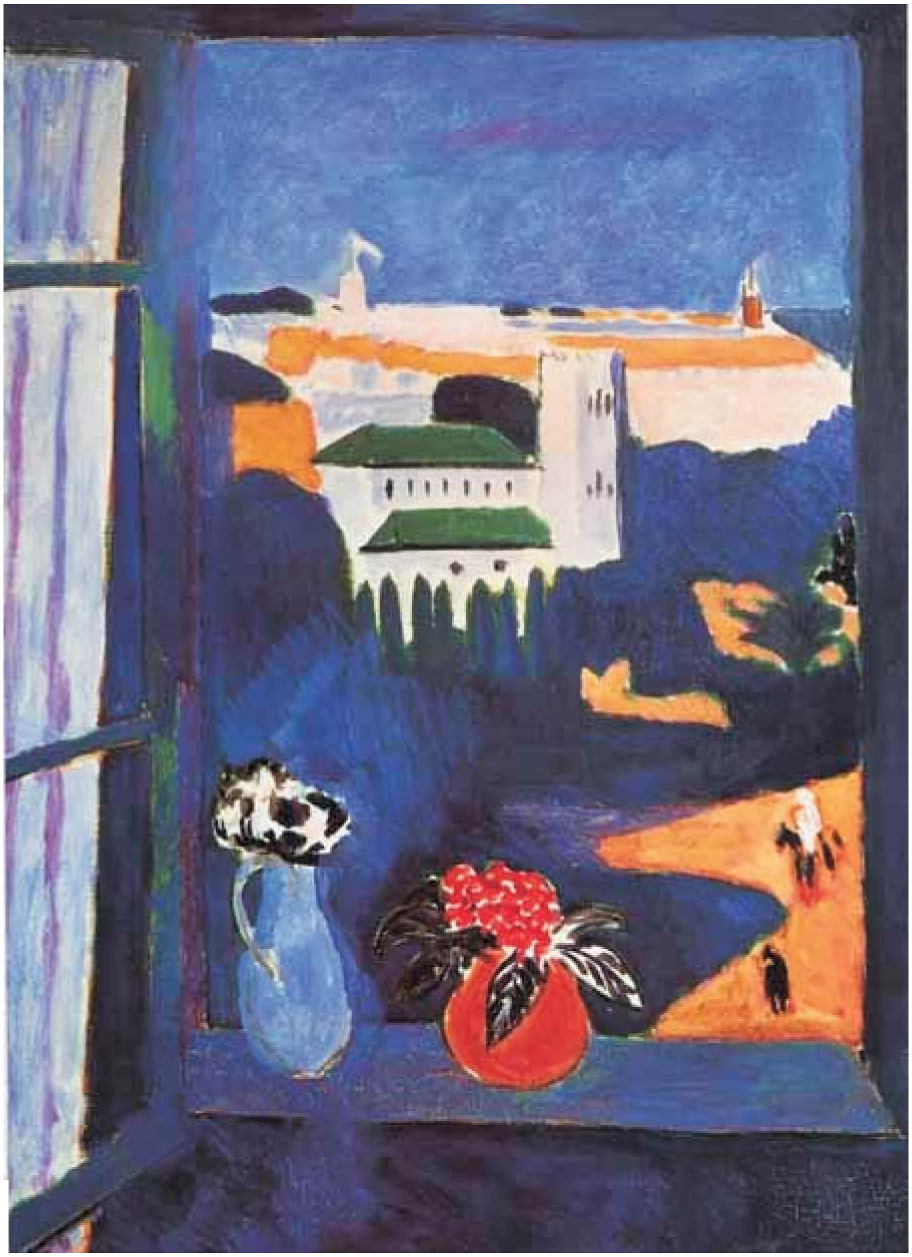
De manera análoga, las nuevas ideas abstractas desarrolladas en los últimos ciento cincuenta años –muchas de ellas inicialmente basadas en intuiciones– estaban presentes ya en todas las partes de las matemáticas.

Las nuevas intuiciones espaciales desarrolladas por matemáticos y pintores en los últimos sesenta años están caracterizadas por la variedad de puntos de vista que combinan y la multiplicidad de soportes en que se sostienen. Si representaciones distintas de un mismo objeto esconden algunas de sus características y destacan otras, está claro que cuanto mayor sea el número de representaciones combinadas en una misma descripción, mayor será el número de características de un objeto que tal representación recoja. Dicho de otra manera, mayor será la cantidad de información que la representación ofrece.

Lo malo es que para codificar información muy variada y puntos de vista muy variados, y hacerlo de una manera coherente, elegante y que se pueda leer con claridad, hay que tener mucho ojo, mucho oficio y mucho arte. Y es ahí donde entran los matemáticos y pintores contemporáneos. Durante la primera mitad del siglo XX, unos y otros desarrollaron modelos adecuados para combinar, en una única imagen global de un objeto, puntos de vista locales (en *SUMA* 48, págs. 99-103, ilustramos estas herramientas con el cuadro *Las meninas,* en que Picasso combina en su retrato de María Agustina Sarmiento cinco descripciones locales).

Para la matemática actual no se trata ya sólo de combinar los puntos de vista locales y globales, como en el siglo pasado, sino de, además, combinar, por ejemplo, distintas herramientas, distintas maneras de codificar una misma información, y distintas estructuras construidas a partir de unos mismos datos. De manera análoga, los artistas contemporáneos combinan el óleo y la fotografía, el dibujo con tinta y la impresión digital, la imagen escaneada y retocada en un ordenador con el trazo orgánico de un pincel. Las descripciones que unos y otros consiguen de las cosas son de una riqueza enorme. Los cuadros de la pintora madrileña María José de la Chica[1] ilustran con gran claridad qué pueden conseguir los pintores y matemáticos contemporáneos con su multiplicidad que no podían conseguir, por ejemplo, sus colegas de principios del siglo XX.

Al analizar la obra del grabador holandés Escher (ver *SUMA* 49, p. 106), observamos cómo las reconstrucciones de objetos con un ordenador pueden transformar la cálida madera de un marco de ventana en un trozo frío de aluminio. El ordenador es una herramienta espléndida, pero es necesario ser consciente de sus limitaciones. Lo mismo ocurre con la cámara fotográfica, que de la Chica conoce muy bien. La fotografía presenta un problema ya planteado por Matisse, uno de los pintores que nos enseñaron a entender lo que significa buscar lo que el ojo *ve exactamente.*

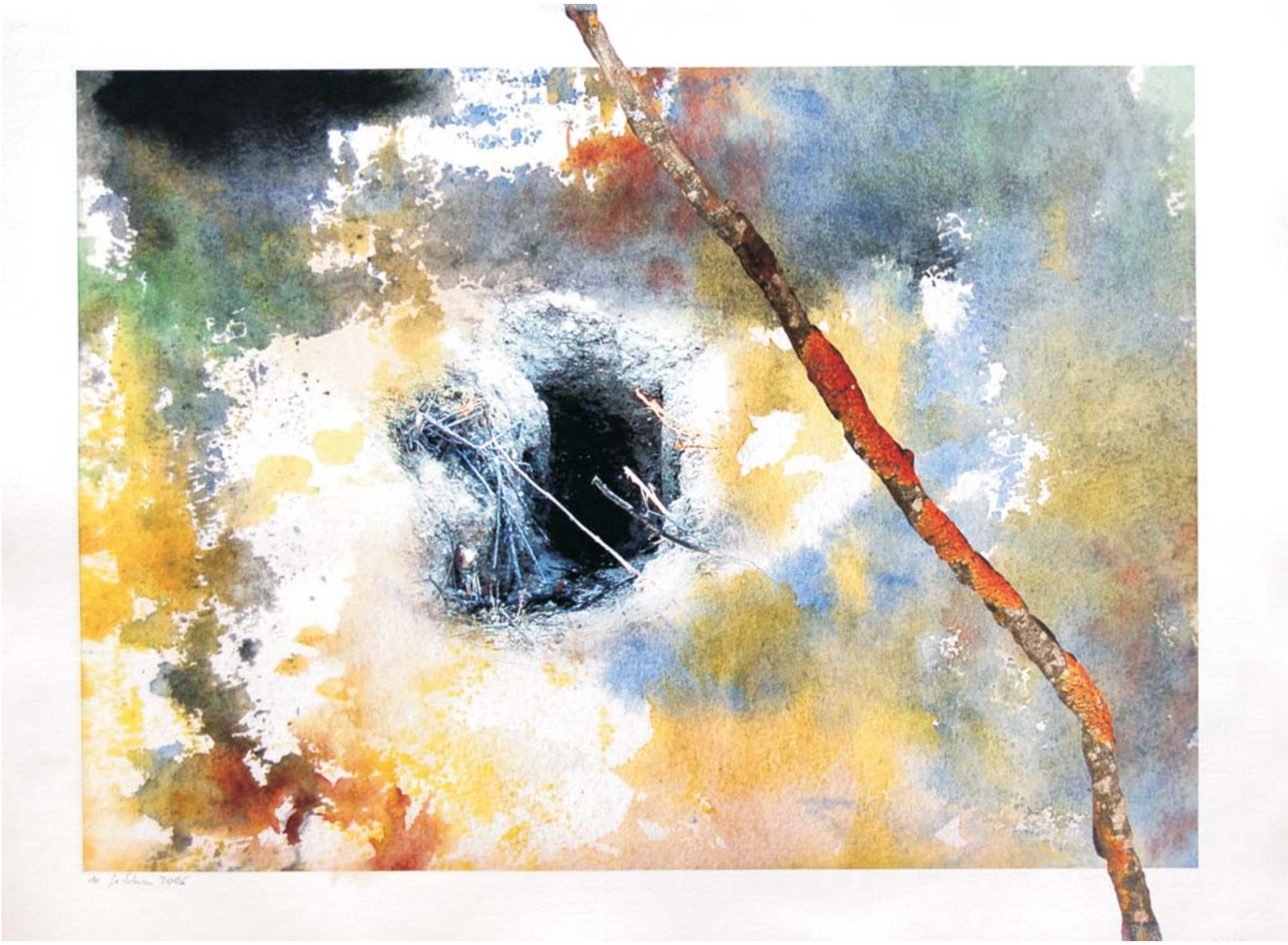


Matisse,
Paisaje visto desde una ventana,
(Tánger, 1912)

Matisse enfoca sus ojos en los tiestos de flores sobre el alféizar de la ventana, y percibe el mar como una mancha azul, la playa como una raya amarilla y las figuras sobre la playa como sombras oscuras. Para ver las figuras con precisión tendría que enfocar sus ojos sobre ellas, y dejaría de ver los tiestos con detalle. Esta es una característica del ojo humano que la obra de Matisse pone de manifiesto, pero que no tienen ni los ojos de otras especies animales –en el Museo de Ciencias de Alcobendas hay una sala extraordinaria donde podemos ver con la visión de una vaca, un murciélago o un águila, por ejemplo– ni las máquinas fotográficas. Que otros animales no ven como nosotros solemos recordarlo. Pero con frecuencia pensamos que la fotografía recoge fielmente lo que tenemos delante. No es así, y de la Chica, que lo sabe, resuelve la dificultad como una pintora que es: pintando.

Ramas y Agua, de la Chica, 2006

En *Ramas y agua* 2006, el ojo enfoca fotográficamente sobre las cortezas de cinco árboles. El campo tras ellos, sin embargo, está descrito por una pintora: con apenas cuatro trazos y unas manchas de color, se reconoce como un campo con hierbas, juncos, más árboles y agua, representado tal cual se ve no cuando hacemos una foto de las cortezas de cinco árboles, sino cuando estamos mirando a las cortezas de cinco árboles. La misma combinación de fotografía y pintura —posible gracias a la impresión por ordenador— la encontramos en cuadros como *Madriguera 2* (2006), y *Hormigas* (2006). En estos cuadros, sin embargo, el ojo fotográfico enfoca en objetos de naturaleza distinta (una rama y una madriguera en el primero, una rama y tres hormigueros en el segundo). El ojo, pasa de unos a otros a través de manchas de color que recogen la impresión que desde la distancia produce el *habitat* de esos objetos. Y al hacerlo reproduce el recorrido del *zoom* de una cámara de fotos; de la Chica no sólo ha conseguido que veamos a la vez desde muy cerca y desde muy lejos, sino que, al exigirnos hacerlo casi simultáneamente, ha conseguido que seamos conscientes, mientras lo llevamos a cabo, de un cambio de escala que cotidianamente nuestro ojo lleva a cabo mecánicamente.



Madriguera 2, de la Chica, 2006

Una de las cuestiones que la matemática ha tratado desde sus orígenes es la construcción de mapas. Como vimos al estudiar a Gauss y Goya, (*SUMA* 51, 93-97) cuando se trata de trasladar a un mapa medidas tomadas sobre una superficie —por ejemplo la superficie terrestre— la dificultad estriba en reproducir sobre un papel plano una forma tridimensional. Euler demostró en el siglo dieciocho que una reproducción exacta —a escala, claro— es imposible, que siempre tendremos que sacrificar algunas características de la superficie en cuestión. Aún así, en los últimos doscientos años se ha avanzado muchísimo, y la calidad y precisión de mapas y cartas de navegación es enorme. Más difícil de resolver es el problema cuando, como se da con frecuencia actualmente en física, biología o medicina de investigación, ni siquiera sabemos la forma que tienen las cosas que queremos representar. Hablamos con toda soltura del *mapa del genoma humano*; ¿cómo es el mapa de un genoma? ¿qué forma tiene? Los mapas que en medicina se manejan hoy, por ejemplo, no son como las cartas de nave-

Hormigas, de la Chica, 2006

gación. Son mucho más parecidos a imágenes como las que aparecen en los cuadros *Serie arenas* (2006) o *Huella* (2006). Médicos, físicos o biólogos toman medidas, siguen rastros, recopilan datos... Ellos consiguen los números y los matemáticos construyen los mapas. Los números son números, y en sí mismos no significan nada. Pero cuando un montón de números son ordenados y organizados adecuadamente, cuando los datos se miran con ojos y arte matemáticos, la idea tras ellos, la forma o imagen que esconden, surge.

Pintores y matemáticos buscan las ideas de las cosas. Y es esta búsqueda la que les ha llevado, a lo largo de la historia, a forjar y transmitir muchos de los modelos visuales de nuestra cultura.

Serie arenas1, de la Chica, 2006

Huella, de la Chica, 2006

NOTA

[1] La obra reciente de María José de la Chica puede verse en la galería Sala XIII, de Torrelodones (Plaza de Epifanio Velasco 7), del 26 de octubre al 26 de noviembre.

M&I

GRUPO DE INVESTIGACIÓN:
"MATEMÁTICA APLICADA
A LA INGENIERÍA CIVIL"

MAIC

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

PRIMER CONGRESO INTERNACIONAL DE MATEMÁTICAS EN INGENIERÍA Y ARQUITECTURA

OBJETIVO DE LA REUNIÓN: Propiciar el encuentro entre profesionales relacionados con el mundo de la ciencia y la tecnología que permita avanzar en el conocimiento e intercambiar estudios e investigaciones sobre la aplicación científica de las matemáticas en las diversas áreas de la ingeniería y la arquitectura.

DESARROLLO. Acciones:

- **Sesiones especializadas donde se debatirán, simultáneamente las ponencias y comunicaciones seleccionadas en cada área temática.**
- **Conferencias plenarias programadas que convocarán a todos los congresistas.**
- **Concurso de posters relativos a las áreas temáticas del congreso.**
- **Mesas redondas, talleres...**

Áreas temáticas

- APLICACIONES CIENTÍFICAS A LA INGENIERÍA TOPOGRÁFICA, GEODÉSICA Y CARTOGRÁFICA
- MATEMÁTICA APLICADA A LA INGENIERÍA CIVIL
- MATEMÁTICA Y DISEÑO EN ARQUITECTURA
- MATEMÁTICAS EN LAS CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN
- METODOLOGÍA Y DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA APLICADA A LA INGENIERÍA Y ARQUITECTURA
- MATEMÁTICAS Y MEDIO AMBIENTE
- DESARROLLOS TEÓRICOS DE LA MATEMÁTICA APLICADA

Comité Organizador: Grupo de Investigación de la Universidad Politécnica de Madrid: Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil

Universidad Politécnica de Madrid
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Madrid
Correo electrónico: congreso.m.i@caminos.upm.es
Fecha: 30 de Mayo al 1 de Junio 2007
Para más información
www.caminos.upm.es/actividades/Congreso%20Matemáticas/index.htm

SUMA 53
Noviembre 2006, pp. 83-91

En las ciudades invisibles Ia

Presentación

Entre 1298 y 1299 un mercader veneciano preso en Génova dictó sus memorias a un compañero de cárcel. Lo que había visto y vivido en el imperio de Kublai Jan eran maravillas difíciles de creer para el mundo occidental al que pertenecía. Se dice que algunas de ellas fueron inventadas, pero la mayoría han sido corroboradas a lo largo del tiempo. Esa obra se llamó *Libro de las maravillas* y fue publicada por primera vez en 1477. Su autor, Marco Polo.

Cinco siglos más tarde, en 1973, Ítalo Calvino publicó *Las Ciudades Invisibles*, una obra fantástica en la que el autor reproduce algunos de los aspectos del libro de Marco Polo. La obra es una interlocución entre Marco y Kublai en la que el primero describe al otro las ciudades que ha visitado. Las ciudades son, tanto para Kublai como para el lector, invisibles, pero puesto que sus rasgos y características son similares a los de una ciudad real, el lector ve en ellas trazos de ciudades conocidas. Eso y la exposición rigurosa y lógica hacen que las descripciones acaben pareciendo cada vez menos fantasiosas, y si bien, como sucede en Matemáticas, no podemos decir que existan, aunque invisibles, se nos hacen imaginables y verosímiles.

Esta *sección* pretende destacar las referencias a las Matemáticas, a veces evidentes, a veces subyacentes, de *Las Ciudades Invisibles* y mostrar como gracias a esas ideas matemáticas presentes en el texto logramos representarnos mentalmente las ciudades. La interpretación no será, por tanto, tan gratuita como podría parecer de entrada.

No es raro que un trato semejante inspire reflexiones matemáticas que difícilmente uno se plantearía sin leer la obra. Y dado que toda lectura es personal, lo que se expondrá depende de quien la realiza. Cuando el lector de esta revista visite *Las Ciudades Invisibles* sin duda encontrará, interpretará, y verá en ellas aspectos distintos de los que yo he apreciado. Si lo desea, queda invitado a comunicarlos:

ciudadesinvisibles@revistasuma.es

Escuchemos pues a Marco Polo y recorramos con él avenidas, calles, canales, puentes, minaretes y balaustradas, visitemos palacios y mercados, conozcamos a comerciantes, artesanos y pescadores de las ciudades descritas en ese libro que el propio autor calificó de ‘poliédrico’ (Calvino, 1994).

La lectura se basará en la versión castellana a cargo de Aurora Bernárdez, publicada por *Siruela* en 1994 y que ha sido revisada y reeditada recientemente (octubre de 2005). ■

Diseño y maquetación FMC

Miquel Albertí Palmer
ciudadesinvisibles@revistasuma.es

nota preliminar

nota preliminar

La edición se abre con una *Nota Preliminar* en la que el autor realiza un análisis estructural de la obra y que remite, sin duda, al ámbito matemático:

A partir del material que había acumulado fue como estudié la estructura más adecuada, porque quería que estas series se alternaran, se entretejieran, y al mismo tiempo no quería que el recorrido del libro se apartase demasiado del orden cronológico en que se habían escrito los textos. Al final decidí que habría 11 series de 5 textos cada una, reagrupados en capítulos formados por fragmentos de series diferentes que tuvieran cierto clima común.

Calvino, 1994, p.13

El libro se desarrolla según un plan premeditado de antemano por el que las 55 ciudades se agrupan en 11 series de 5 ciudades cada una.

Las once series son desmembradas para reagruparse en los 9 capítulos del libro y que se abren y cierran siempre con un diálogo entre Marco y Kublai.

El sistema con arreglo al cual se alternan las series es de lo más simple, aunque hay quien lo ha estudiado mucho para explicarlo (op. cit.: 13). Con el número asignado antes a cada serie y el orden que cada ciudad ocupa en ella en el capítulo obtenemos un código numérico de doble entrada con el que identificar todas las ciudades.

Este orden es el mismo que el usado por los matemáticos para contar el conjunto infinito de los números racionales.

La distribución enfatiza la simetría alrededor del número 5, siendo éste precisamente, el quinto, el capítulo central, el centro de gravedad del libro: *... el sentido de un libro simétrico debe buscarse en el medio...* (op. cit.: 16).

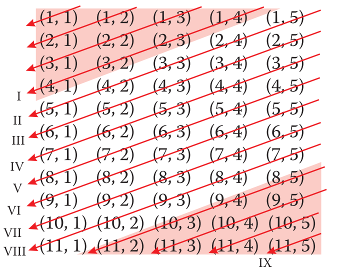
Todas las ciudades poseen los rasgos de un ciudad global que el lector recorre en un orden determinado y que muy bien podría corresponderse a la duodécima cara pentagonal de un icosaedro truncado, tal vez el poliedro más apropiado a este libro poliédrico: *Pero este libro es poliédrico y en cierto modo está lleno de conclusiones, escritas siguiendo todas sus aristas* (op. cit.: 16).

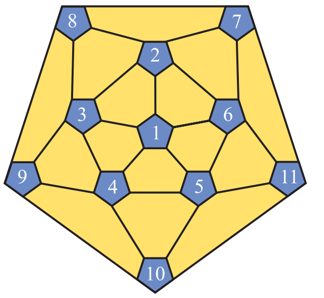
Abriendo el icosaedro truncado por una de sus caras pentagonales, y extendiéndolo sobre el plano, veremos 11 caras pentagonales. La duodécima es la ausente, la que hizo posible el despliegue, la formada por todas las demás.

De cada ciudad se destacaran una o varias frases o términos que servirán de base a las disquisiciones matemáticas. Lo ideal sería haber leído antes el texto completo de cada ciudad para situarse en el contexto y no quedarse con expresiones o frases aisladas del conjunto. ■

1. las ciudades y la memoria.
2. las ciudades y el deseo.
3. las ciudades y los signos.
4. las ciudades sutiles.
5. las ciudades y los trueques.
6. las ciudades y los ojos.
7. las ciudades y el nombre.
8. las ciudades y los muertos.
9. las ciudades y el cielo.
10. las ciudades continuas.
11. las ciudades escondidas.

I. 1.1, 1.2, 2.1, 1.3, 2.2, 3.1, 1.4, 2.3, 3.2, 4.1
II. 1.5, 2.4, 3.3, 4.2, 5.1
III. 2.5, 3.4, 4.3, 5.2, 6.1
IV. 3.5, 4.4, 5.3, 6.2, 7.1
V. 4.5, 5.4, 6.3, 7.2, 8.1
VI. 5.5, 6.4, 7.3, 8.2, 9.1
VII. 6.5, 7.4, 8.3, 9.2, 10.1
VIII. 7.5, 8.4, 9.3, 10.2, 11.1
IX. 8.5, 9.4, 10.3, 11.2, 9.5, 10.4, 11.3, 10.5, 11.4, 11.5





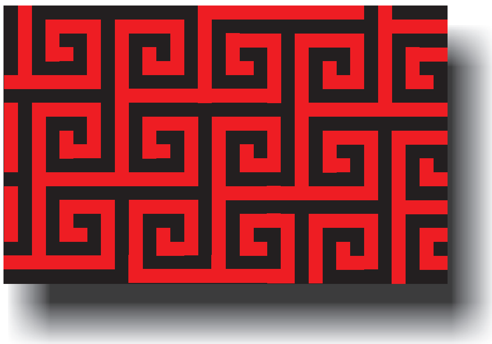
diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

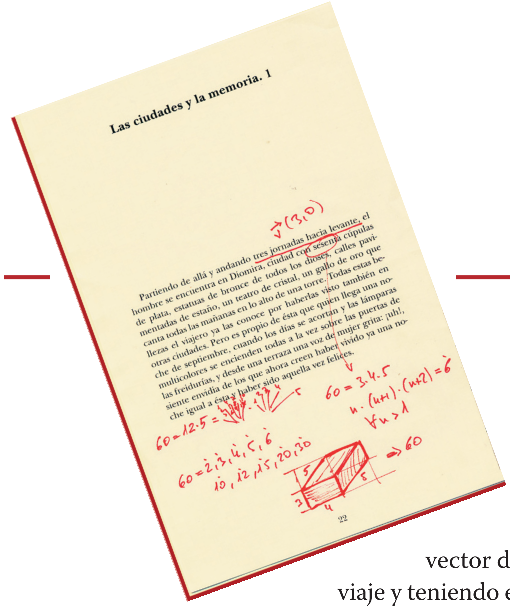
... la filigrana de un diseño tan sutil que escapaba a la mordedura de las termitas.

La filigrana es una obra de orfebrería consistente en la incrustación lineal de fino hilo de oro o plata en la madera. Gracias a la habilidad del artesano esas líneas pueden ser muy intrincadas y los motivos de sus diseños de tamaño casi microscópico. Será fácil romper la figura, pero quebrar el motivo que la fundamenta será tanto más difícil cuanto más diminuto sea su tamaño. Sólo siendo menor que el bocado amenazante sobrevivirá intacto.

Un segmento también cumple la propiedad de que cualquier fracción suya incorpora el motivo de su totalidad. No existe ningún animal capaz de morder un único punto. Pero un segmento no es una filigrana porque una filigrana no es rectilínea. La filigrana se basa en la repetición y en la recurrencia: una voluta de la que nacen, a su vez, otras volutas menores de las que brotan también otras volutas aún más pequeñas y de las que también surgen otras más diminutas todavía y así sucesivamente, hasta los límites que las manos y la vista del artesano determinan.



Sólo hay una filigrana capaz de sobrevivir a la más pequeña de las mordeduras, a la fractura infinitesimal: la curva fractal. Pero esa curva es una ficción matemática. En la realidad práctica, la recurrencia termina en dos, tres o cuatro etapas a lo sumo. Esos pocos pasos le bastan al artesano para situarse en el infinito. ■



Las ciudades y la memoria. 1

$\vec{v}(3,0)$

Partiendo de allá y andando tres jornadas hacia levante, el hombre se encuentra en Diomira, ciudad con sesenta cúpulas de plata, estatuas de bronce de todos los dioses, calles pavimentadas de estaño, un teatro de cristal, un gallo de oro que canta todas las mañanas en lo alto de una torre. Todas estas bellezas el viajero ya las conoce por haberlas visto también en otras ciudades. Pero es propio de ésta que quien llega una noche de septiembre, cuando los días se acortan y las lámparas multicolores se encienden todas a la vez sobre las puertas de las freidurías, y desde una terraza una voz de mujer grita: ¡uh!, siente envidia de los que ahora creen haber vivido ya una noche igual a ésta y haber sido aquella vez felices.

$60 = 12 \cdot 5$

$60 = \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}, \dot{5}, \dot{6}$
$10, 12, 15, 20, 30$

$60 = 3 \cdot 4 \cdot 5$
$n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = \dot{6}$
$\forall n > 1$

3, 4, 5 $\Rightarrow 60$

22

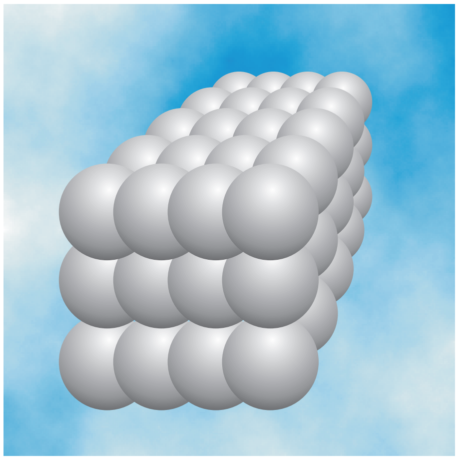
Diomira

La descripción de la ciudad comienza con su localización mediante una doble cuantificación, la distancia y el ángulo con relación al origen de referencia. El primer vector del libro. Tomando como unidad la jornada de viaje y teniendo en cuenta que el Sol sale por levante, la expresión indica que el sentido y dirección del viaje son los del vector (3, 0).

... tres jornadas hacia levante...

Sesenta es uno de los números más importantes de la Historia de las Matemáticas. Ya en la antigüedad los pueblos mesopotámicos lo adoptaron como base numérica. Una base de orígenes inciertos para la que se han ofrecido justificaciones diversas. Unos atribuyen su uso al hecho de que 60 es un número pequeño con muchos divisores y entre los que están los seis primeros números naturales; otros ven en 60 la sexta parte de 360, una buena aproximación de los días del año; y los hay que opinan que la numeración de base 60 es resultado de la fusión de dos bases de numeración antropomórficas manuales, la de base 12 y la de base 5. ■

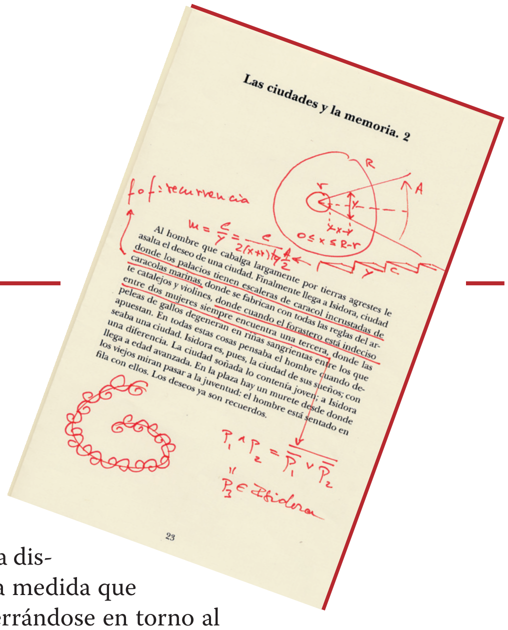
... sesenta cúpulas de plata...



En **Diomira** el cielo se multiplica sesenta veces.

Isidora

Isidora

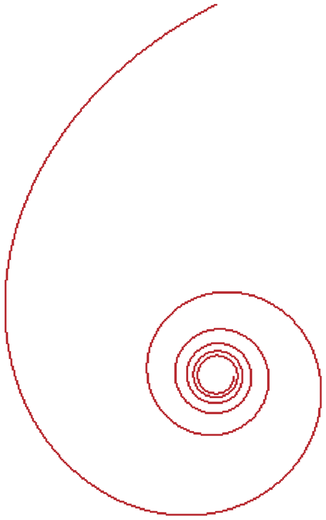


Las ciudades y la memoria. 2

Al hombre que cabalga largamente por tierras agrestes le asalta el deseo de una ciudad. Finalmente llega a Isidora, ciudad donde los palacios tienen escaleras de caracol incrustadas de caracolas marinas, donde se fabrican con todas las reglas del arte catalejos y violines, donde cuando el forastero está indeciso entre dos mujeres siempre encuentra una tercera, donde las peleas de gallos degeneran en riñas sangrientas entre los que apuestan. En todas estas cosas pensaba el hombre cuando deseaba una ciudad. Isidora es, pues, la ciudad de sus sueños; con una diferencia. La ciudad soñada lo contenía joven; a Isidora llega a edad avanzada. En la plaza hay un murete desde donde los viejos miran pasar a la juventud: el hombre está sentado en fila con ellos. Los deseos ya son recuerdos.

23

... donde los palacios tienen escaleras de caracol incrustadas de caracolas marinas...



Incrustar caracolas en una escalera de caracol encierra la idea de recurrencia. La escalera de caracol asciende verticalmente, peldaño a peldaño, girando en torno al eje central que la guía trazando una hélice. La disminución aparente del tamaño de las cosas a medida que se alejan nos hace verla como una espiral cerrándose en torno al ojo de la escalera. Una caracola marina es un cono enrollado sobre sí mismo en espiral. Incrustar una escalera de caracol de caracolas marinas es pues una espiral de espirales, un caracol de caracolas, la composición de una función consigo misma: $f \circ f$. En esto consiste la recurrencia.

Aprovechando la visita a Isidora entro en uno de sus más impresionantes palacios y me detengo contemplando su escalera de caracol. Sé que lo que veo no es real porque una cosa es la escalera y otra distinta cómo la perciben mis ojos. Su forma real es una hélice ascendente por la pared de un cilindro, pero al situarme en medio de su base y levantar la mirada veo una espiral girando alrededor de un punto. La esencia de la forma de esa espiral aparente está en la reducción del radio de la escalera con la distancia. Tomando radio 1 y llamando x a la distancia que nos separa del punto observado, el tamaño aparente (ángulo de visión) con el que percibimos el radio de la escalera es $a(x)=2\cdot arctan(1/x)$. La curva que vemos es la espiral de ecuaciones paramétricas $[a(x)\cdot cos(x), a(x)\cdot sen(x)]$, una espiral que se encarama por un cilindro que percibimos como un embudo cuyas paredes se estrechan según $a(x)$.

... donde cuando el forastero está indeciso entre dos mujeres siempre encuentra una tercera...

Pasando por alto el aire políticamente incorrecto de la frase y centrándonos en lo que nos interesa, la indecisión del forastero proviene de quererlas tanto y por igual que ninguna de las dos puede hacerle olvidar a la otra. Si una tercera resuelve la indecisión, ¿qué relación guarda ésta con aquellas? Podemos representar el problema en una tabla de valores preposicionales en la que 1 significa 'la quiero' y 0 significa 'no la quiero'. Cuando sólo se quiere a una de las dos, la tercera es innecesaria. Se trata de la misma tabla de valores que la de la intersección de dos conjuntos A y B.

Primera	Segunda	Tercera
1	0	0
0	0	0
1	1	1
0	1	0

Luego la tercera mujer es lógicamente equivalente a la intersección de las dos primeras. Desde la perspectiva matemática, el aprecio irrenunciable produce un resultado por el que la indecisión se auto redime.

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cap B$
1	0	0
0	0	0
1	1	1
0	1	0

En **Isidora**, ciudad construida con los rasgos de la recurrencia, la indecisión no es yerma, sino fructífera en las intersecciones de las cosas más deseadas. ■

Foto FMC

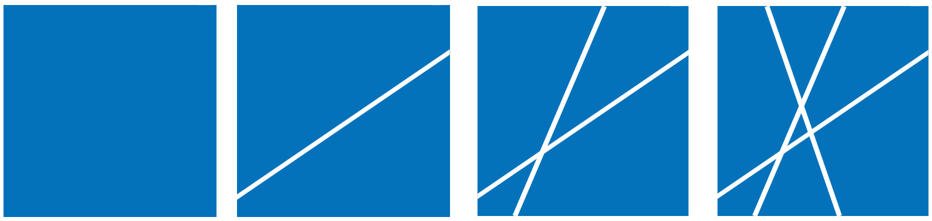
Dorotea

Determinar nueve barrios con cuatro canales rectilíneos es un problema fácil que admite muchas soluciones. Pero pueden crearse hasta 11 barrios con cuatro canales si trazado el primero se añaden otros de modo que cada nuevo canal se cruce con todos los anteriores.

... el foso cuyas aguas alimentan cuatro verdes canales que atraviesan la ciudad y la dividen en nueve barrios...

Lo que nos conduce al planteamiento de un problema más general: ¿Cuál es el número máximo de barrios que pueden formarse en una ciudad atravesada por n canales rectilíneos? Es decir, ¿en cuántas regiones queda dividido un recinto plano convexo atravesado por n segmentos? Los términos *recinto* y *segmento* sustituyen al de barrio y canal. Consideramos que los segmentos o canales atraviesan la ciudad de lado a lado determinando en ella una partición en polígonos o barrios disjuntos.

Comenzando por un canal e incorporando los sucesivos de manera que cada uno se cruce con todos los anteriores podemos calcular el número $B(n)$ de barrios resultante:



$B(0)=1$ $B(1)=2=B(0)+1=1+1$ $B(2)=4=B(1)+2=1+1+2$ $B(3)=7=B(2)+3=1+1+2+3$

Por tanto, el número máximo de barrios $B(n)$ que pueden crearse es:

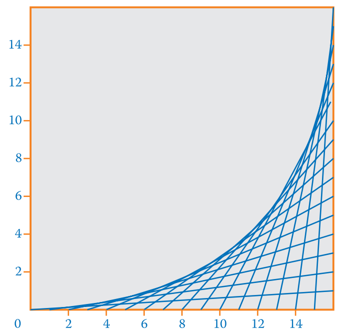
$$B(n)=1+\sum_{i=1}^{n} i=1+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n+2}{2}$$

No es fácil construir en la práctica particiones muy numerosas. Para valores grandes de n el uso del ordenador se hace imprescindible. Tomando como planta de la ciudad el cuadrado de vértices (0, 0), (n, 0), (0, n) y (n, n), la recta que la atraviesa uniendo el punto (i, 0) con el punto (n, i+1) es:

$$y=\frac{i+1}{n-i}\cdot(x-i)$$

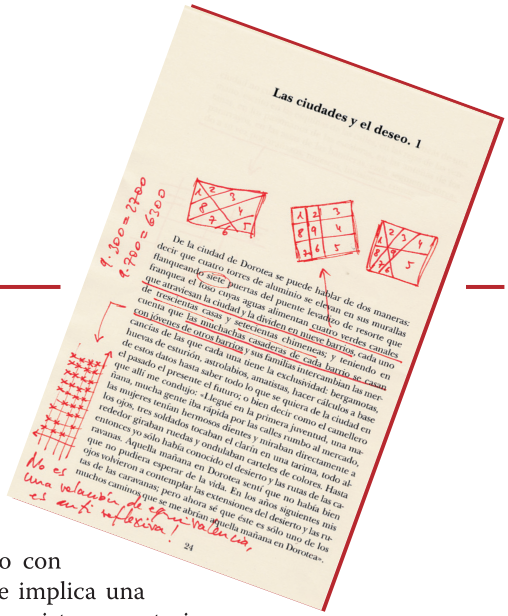
Así podemos representar con *Maple* los 121 barrios creados por n=15 canales:

```
> n:=15:
> for i from 0 to n-1 by 1 do f(i):=(i+1)*(x-i)/(n-i) od:
> plot([seq(f(i),i=0..n-1)],x=0..n,y=0..n);
```



Un análisis matemático profundo de la cuestión revela que el perfil de la curva *envolvente* de esos barrios cuando n tiende a infinito es la hipérbola $x^2+y^2+2xy-4y=0$, también expresable como función explícita: $y=2\left(1-\sqrt{1-x}\right)-x$

Dorotea



Las ciudades y el deseo. 1

9·300 = 2700
9·700 = 6300

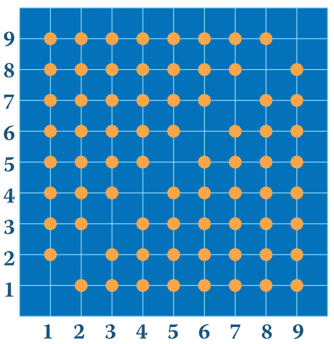
De la ciudad de Dorotea se puede hablar de dos maneras: decir que cuatro torres de aluminio se elevan en sus murallas flanqueando siete puertas del puente levadizo de resorte que franquea el foso cuyas aguas alimentan cuatro verdes canales que atraviesan la ciudad y la dividen en nueve barrios, cada uno de trescientas casas y setecientas chimeneas; y teniendo en cuenta que las muchachas casaderas de cada barrio se casan con jóvenes de otros barrios y sus familias intercambian las mercancías de las que cada una tiene la exclusividad: bergamotas, huevas de esturión, astrolabios, amatistas, hacer cálculos a base de estos datos hasta saber todo lo que se quiera de la ciudad en el pasado el presente el futuro; o bien decir como el camellero que allí me condujo: «Llegué en la primera juventud, una mañana, mucha gente iba rápida por las calles rumbo al mercado, las mujeres tenían hermosos dientes y miraban directamente a los ojos, tres soldados tocaban el clarín en una tarima, todo alrededor giraban ruedas y ondulaban carteles de colores. Hasta entonces yo sólo había conocido el desierto y las rutas de las caravanas. Aquella mañana en Dorotea sentí que no había bien que no pudiera esperar de la vida. En los años siguientes mis ojos volvieron a contemplar las extensiones del desierto y las rutas de las caravanas; pero ahora sé que éste es sólo uno de los muchos caminos que se me abrían aquella mañana en Dorotea».

No es una relación de equivalencia, es anti reflexiva!

24

... las muchachas casaderas de cada barrio se casan con jóvenes de otros barrios.

La afirmación citada al márgen determina una relación binaria entre elementos de diferentes subconjuntos o barrios. Los elementos del mismo subconjunto no se relacionan entre sí, sino que deben hacerlo con algún elemento de otro subconjunto, lo que implica una partición del todo cuya representación en un sistema cartesiano deja vacía la diagonal. Una característica de las relaciones anti reflexivas.



Supongamos una ciudad de k barrios disjuntos B_k, cada uno de población p_k. Entonces, la población total N de la ciudad, será:

$$N = \sum_{i=1}^{k} p_i$$

Y el número de matrimonios M posibles:

$$M = \binom{N}{2} - \sum_{i=1}^{k} \binom{p_i}{2}$$

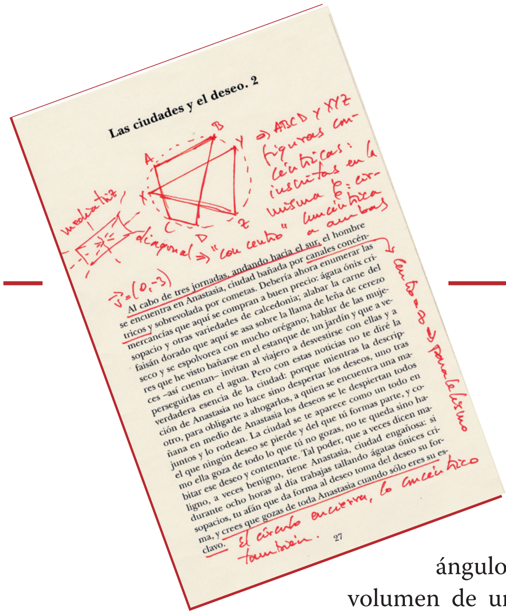
Si en cada barrio vive el mismo número p de personas, $k_p = N$ y el resultado se simplifica:

$$M = \frac{N(N-p)}{2}$$

Al ser el valor de p el que se sustrae de N, para dos poblaciones de igual tamaño habrá más riqueza matrimonial en aquella en que las familias sean menos numerosas, pero en las que, por contra, haya más familias:

$$N=12,\ k=4,\ p=3 \Rightarrow M=54$$
$$N=12,\ k=3,\ p=4 \Rightarrow M=48$$

Cuatro canales determinan la topología de **Dorotea** y las relaciones matrimoniales anti reflexivas de quienes viven en ellos. ■


Las ciudades y el deseo. 2

Al cabo de tres jornadas, andando hacia el sur, el hombre se encuentra en Anastasia, ciudad bañada por canales concéntricos y sobrevolada por cometas. Debería ahora enumerar las mercancías que aquí se compran a buen precio: ágata ónix crisopacio y otras variedades de calcedonia; alabar la carne del faisán dorado que aquí se asa sobre la llama de leña de cerezo seco y se espolvorea con mucho orégano; hablar de las mujeres que he visto bañarse en el estanque de un jardín y que a veces –así cuentan– invitan al viajero a desvestirse con ellas y a perseguirlas en el agua. Pero con estas noticias no te diré la verdadera esencia de la ciudad: porque mientras la descripción de Anastasia no hace sino despertar los deseos, uno tras otro, para obligarte a ahogarlos, a quien se encuentra una mañana en medio de Anastasia los deseos se le despiertan todos juntos y lo rodean. La ciudad se te aparece como un todo en el que ningún deseo se pierde y del que tú formas parte, y como ella goza de todo lo que tú no gozas, no te queda sino habitar ese deseo y contentarte. Tal poder, que a veces dicen maligno, a veces benigno, tiene Anastasia, ciudad engañosa: si durante ocho horas al día trabajas tallando ágatas ónices crisopacios, tu afán que da forma al deseo toma del deseo su forma, y crees que gozas de toda Anastasia cuando sólo eres su esclavo.

27

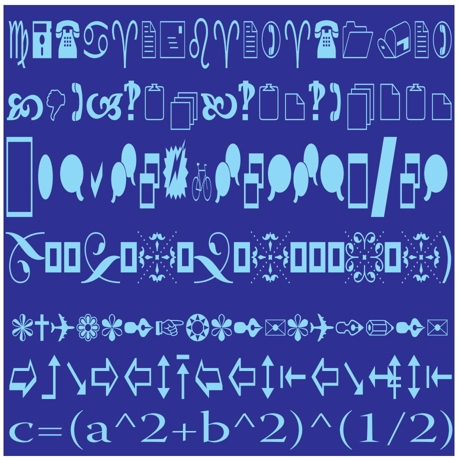
Zaira

Zaira

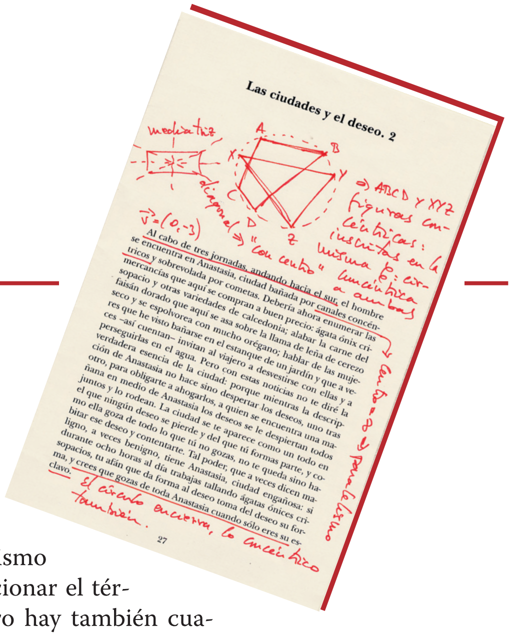
El espacio se mide con la longitud, la superficie y el volumen. En Zaira, cada una de esas magnitudes remite a un suceso. La longitud de una diagonal, el ángulo de una pendiente, el área de un parque y el volumen de un estanque, además de un valor numérico intrínseco, poseen el valor que determinan los acontecimientos con los que se relacionan. Cada cálculo realizado en Zaira rememora y fundamenta su historia.

La ciudad no está hecha de esto, sino de las relaciones entre las medidas de su espacio y los acontecimientos de su pasado ...

No es nuevo que las medidas de un campo de cultivo acostumbren a relacionarse con las inundaciones del delta de un río, ni que una diagonal irracional rememore las discusiones filosóficas y políticas del origen de nuestra cultura, o que la medida constante de la curvatura de un arco semicircular sobre la entrada a una iglesia nos transporte al vacío de conocimiento científico más longevo que ha conocido Europa, o que en las medidas 'divinas' de un rectángulo revivamos el Renacimiento italiano del s. XVI, ni que la medida nula de algunos conjuntos infinitos nos sitúe en el romanticismo del s. XIX o que la inexistencia de medida de la derivada en todos los puntos de una curva continua sea característica del s. XX. ■



De **Zaira** hablan las Matemáticas.


Las ciudades y el deseo. 2

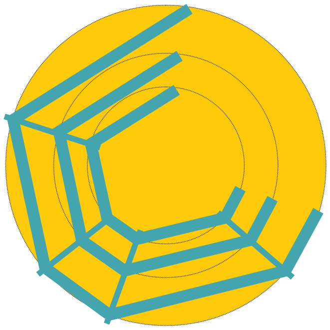
Al cabo de tres jornadas, andando hacia el sur, el hombre se encuentra en Anastasia, ciudad bañada por canales concéntricos y sobrevolada por cometas. Debería ahora enumerar las mercancías que aquí se compran a buen precio: ágata ónix crisopacio y otras variedades de calcedonia; alabar la carne del faisán dorado que aquí se asa sobre la llama de leña de cerezo seco y se espolvorea con mucho orégano; hablar de las mujeres que he visto bañarse en el estanque de un jardín y que a veces –así cuentan– invitan al viajero a desvestirse con ellas y a perseguirlas en el agua. Pero con estas noticias no te diré la verdadera esencia de la ciudad: porque mientras la descripción de Anastasia no hace sino despertar los deseos, uno tras otro, para obligarte a ahogarlos, a quien se encuentra una mañana en medio de Anastasia los deseos se le despiertan todos juntos y lo rodean. La ciudad se te aparece como un todo en el que ningún deseo se pierde y del que tú formas parte, y como ella goza de todo lo que tú no gozas, no te queda sino habitar ese deseo y contentarte. Tal poder, que a veces dicen maligno, a veces benigno, tiene Anastasia, ciudad engañosa: si durante ocho horas al día trabajas tallando ágatas ónices crisopacios, tu afán que da forma al deseo toma del deseo su forma, y crees que gozas de toda Anastasia cuando sólo eres su esclavo.

27

Anastasia

Al cabo de tres jornadas, andando hacia el sur, el hombre se encuentra en Anastasia...

Anastasia, ciudad bañada por canales concéntricos...

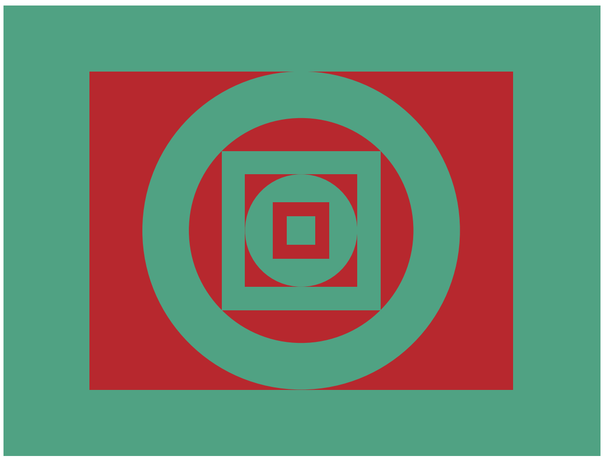


El vector de localización de Anastasia es el de componentes (0,–3), toman por unidad es la jornada a pie.

Dos figuras concéntricas comparten un mismo centro. La idea más inmediata es pues relacionar el término con circunferencias concéntricas. Pero hay también cuadrados, rectángulos y triángulos concéntricos. El caso de los polígonos es distinto al de las circunferencias. En los primeros no todos sus puntos equidistan del centro, su *concentricidad* se refiere a los vértices. Dos polígonos concéntricos tienen sus vértices sobre circunferencias concéntricas. Dudo mucho que los canales de Anastasia sean circulares, más bien me inclino por canales poligonales paralelos, esto es, concéntricos, como los de Ámsterdam, (figura del márgen).

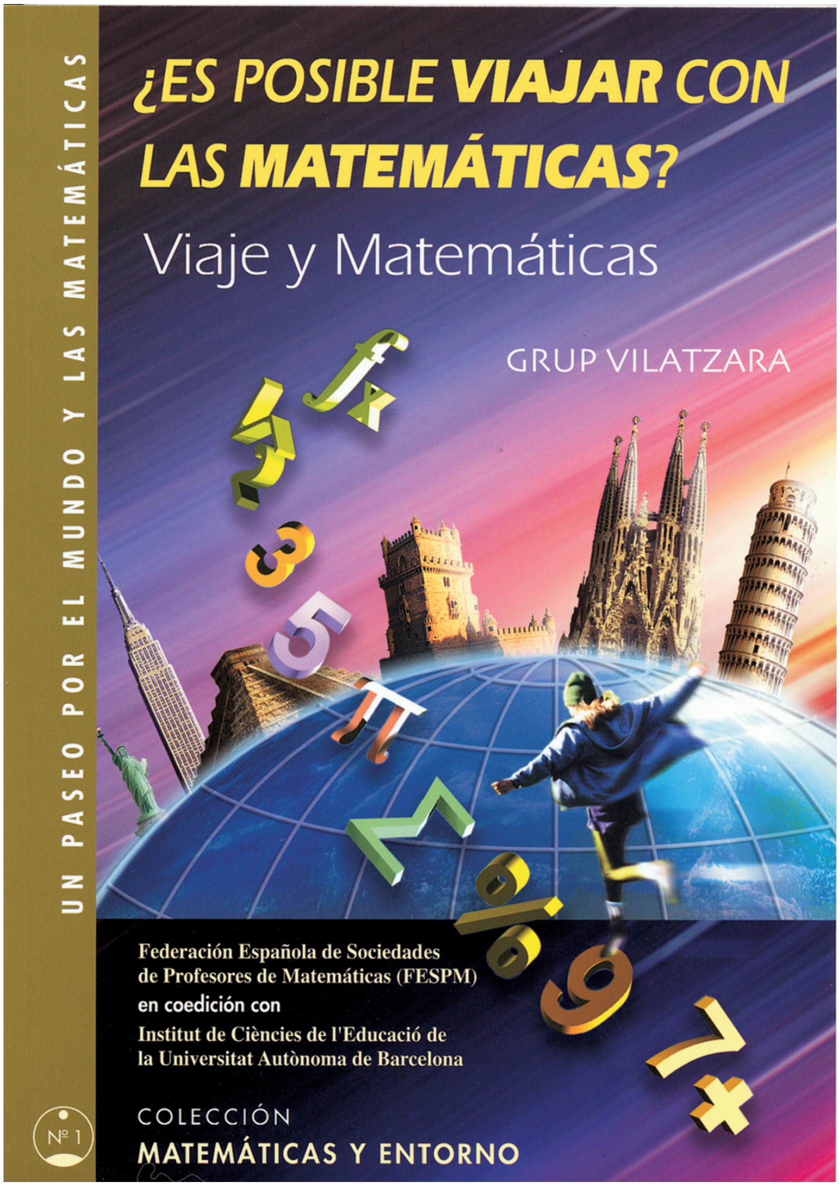
Dos figuras pueden ser concéntricas y no parecerlo en absoluto. Dos polígonos cualesquiera inscritos en la misma circunferencia o inscritos en distintas circunferencias, pero concéntricas, son concéntricos.

Podríamos imaginar los canales de Anastasia como segmentos paralelos, siendo su centro común un punto en el infinito. Pero ésa sería una representación matemática demasiado estereotipada. Más aún teniendo en cuenta que, en tal caso, no nos referiríamos a ellos como canales concéntricos, sino paralelos. ■



En **Anastasia** reina la concentricidad.

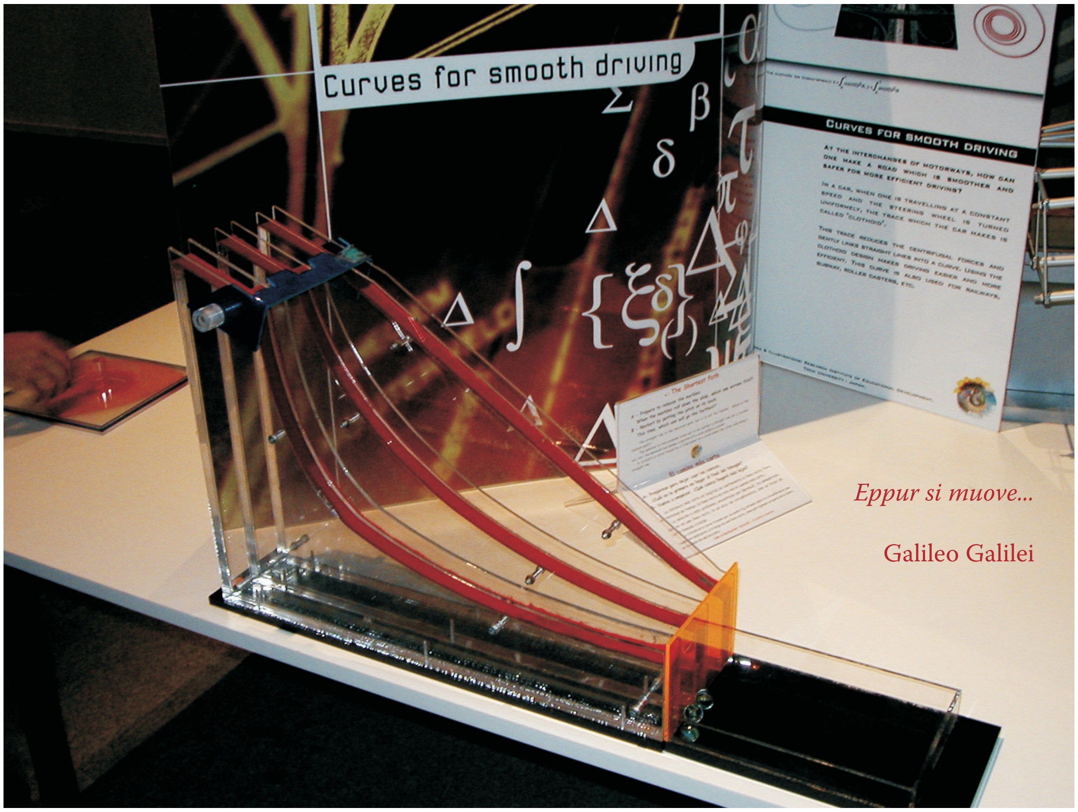
Servicio de Publicaciones
de la FESPM
Apartado de Correos 590
06080 Badajoz
Información y pedidos: publicafespm@wanadoo.es



¿Es posible viajar con las matemáticas?
Grup Vilatzara
Colección Matemáticas y entorno / 1
Federacion Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM)
Intitut de Ciències de l'Educació de la Universitat Autònoma de Barcelona
Badajoz, 2005
ISBN 84-934488-2-6
144 páginas

SUMA 53
Noviembre 2006, pp. 93-97

El mejor tobogán... o Galileo no llevaba razón



Eppur si muove...

Galileo Galilei

En la exposición *¿Por qué las Matemáticas?* que se ha ofrecido con motivo del ICM 2006 en el centro cultural Conde Duque de Madrid, entre los días 17 de agosto al 29 de octubre, una actividad llamó inmediatamente mi atención desde que la vi, nada más desembalar la caja en la que venía. Se trataba de un artilugio hecho en metacrilato, con tres rampas de descenso como las de los toboganes de los saltos de esquí. Las tres rampas eran una recta y dos curvas muy diferentes entre sí, colocadas en paralelo, que empezaban a la misma altura y descendían también hasta una altura común. Desde la parte superior y a la misma altura un tope liberaba simultáneamente tres canicas de vidrio y si uno estaba ojo avizor podía comprobar cual de las tres bolas llegaba antes.

Era una visualización y una puesta en escena preciosa y contundente del problema de la braquistocrona.

Antonio Pérez Sanz
decabezaz@fespm.org

Era una visualización y una puesta en escena preciosa y contundente, en forma de carrera de canicas, de uno de los problemas más sugerentes de la historia de las matemáticas: el problema de la *braquistocrona*.

En la exposición había voluntarios, que eran estudiantes de matemáticas de distintos cursos, para atender y facilitar informaciones y las explicaciones pertinentes sobre las distintas actividades y problemas de la exposición. Antes de la inauguración recibieron unas charlas explicativas de los contenidos matemáticos de la exposición y de las actividades a realizar por el público. Cuando llegamos al experimento de las tres rampas les pregunté si conocían la historia del problema de la braquistocrona y a sus protagonistas, pensando que todos ellos me mirarían con una mirada de suficiencia como si les hubiese preguntado por Pitágoras o Newton. Sin embargo, todos me miraron con cara de sorpresa, y había estudiantes de 2º curso hasta 4º de la facultad de matemáticas. Ante mi expresión de asombro, comenzaron a disculparse por algo de lo que son completamente inocentes, aunque no deja de ser chocante: un estudiante de matemáticas puede terminar sus estudios universitarios desconociendo los momentos y personajes estelares de esta ciencia. ¡Y ya sabemos lo que les ocurre a los que ignoran su propia historia!

A estos estudiantes y sobre todo a sus profesores, a los actuales y a los de las etapas anteriores, va dedicado este artículo, con el deseo de que entre todos pongamos en valor ante los ojos de los jóvenes la historia de las matemáticas.

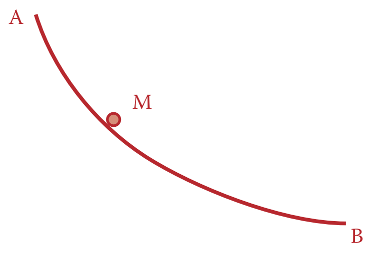
El reto de Johann Bernoulli

En el número de junio de 1696 de la revista *Acta Eruditorum*, publicada en Leipzig bajo los auspicios de Leibniz, aparece el enunciado de uno de los retos más populares de la historia lanzado de forma pública por un matemático a todos sus contemporáneos, dándoles de plazo hasta fin de año:

> Datis in plano verticali duobus punctis *A* & *B*, assignare Mobili *M* viam *AMB* per quam gravitate sua descenden, & moveri incipiens a puncto *A*, *brevissimo tempore* perveniat ad alterem punctum *B*.

La expresión latina *brevissimo tempore* equivale en griego al término **braquistocrona** (*braquisto*=más breve, *chronos*= tiempo). Traducido libremente al castellano:

> Dados dos puntos *A* y *B* en un plano vertical, ¿cuál es la curva que debe describir un móvil *M*, sometido exclusivamente a la acción de la gravedad, para que partiendo en reposo del punto *A* llegue al punto *B* en el tiempo más breve posible?



Pasados los seis meses, sólo Leibniz, que por algo era el editor de las *Acta Eruditorum*, le había enviado una carta con la solución, en la que además le solicitaba que amplíara el plazo para que otros matemáticos pudieran conocer y resolver el problema. Estaba pensando en Newton y además en aquella época no había Internet y las comunicaciones y los libros y revistas podían tardar meses y años en llegar a su destino.

El pequeño de los Bernoulli plantea la ampliación del plazo para resolver el reto con unas ampulosas palabras que serán una premonición a lo largo de la historia: ningún matemático se hará rico resolviendo complicados problemas.

> Ya se sabe con certeza que raramente hay algo que de forma más grata excite a los espíritus nobles e ingeniosos a esfuerzos que conducen al aumento del conocimiento que proponer problemas difíciles y al mismo tiempo útiles, ya que con sus soluciones – como por ningún otro medio – podrán alcanzar la fama y construir para ellos mismos monumentos eternos para la posteridad...
>
> ...Indudablemente este premio no es de oro ni de plata, porque éstos solo atraen a almas ruines y venales de las que no podemos esperar nada laudable para la ciencia. De esta forma coronaremos con honra y excelencia, pública y privadamente, oralmente y por escrito, la perspicacia de nuestro gran Apolo.

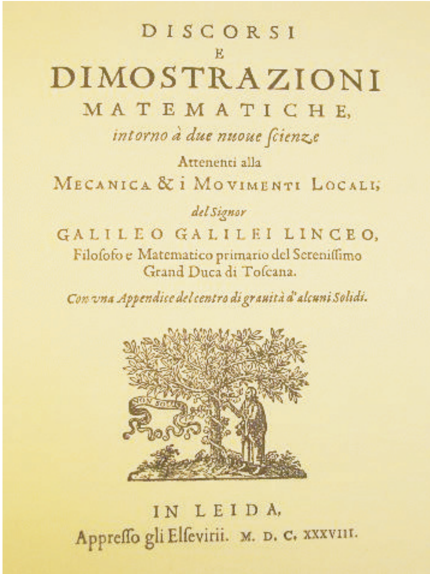
Dados dos puntos A *y* B *en un plano vertical, ¿cuál es la curva que debe describir un móvil* M, *sometido exclusivamente a la acción de la gravedad, para que partiendo en reposo del punto* A *llegue al punto* B *en el tiempo más breve posible?*

Al año siguiente, además de las soluciones de Leibniz y del propio Johann, aparecieron otras tres soluciones, la de Jacob Bernoulli, el hermano mayor de Johann, la de L´Hôpital y una anónima llegada directamente de Inglaterra... ¡Por sus garras se conoce al león! ...por supuesto era de Newton.

Los intentos de Galileo

Pero, 60 años antes de estas disputas fraternales, Galileo Galilei ya se había enfrentado al mismo problema... sin sospechar que no se trataba de un simple juego de caída de canicas.

En 1638, en la tercera jornada de la lectura de su obra *Discursos y demostraciones matemáticas en torno a dos nuevas ciencias*, Galileo, estudiando el movimiento uniformemente acelerado cree dar con la respuesta correcta al problema de la curva de *brevissimo tempore.*


DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue scienze
Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI;
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filosofo e Matematico primario del Serenissimo
Grand Duca di Toscana.
Con vna Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.

IN LEIDA,
Appresso gli Elsevirii. M. D. C. XXXVIII.

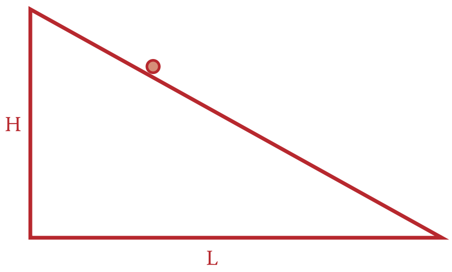
Hablando de móviles que caen en un plano inclinado, enuncia este resultado

> *Teorema V*: Los tiempos de descenso sobre dos planos inclinados de longitudes y alturas diferentes, están entre sí en una razón que es igual al producto de la razón de las longitudes por la raíz cuadrada de la razón inversa de las alturas.

Traducido a un lenguaje más próximo:

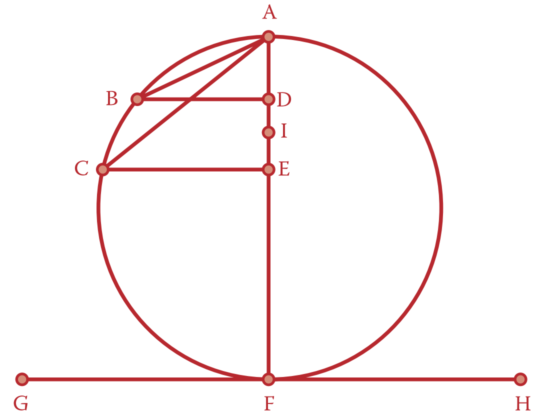
Si un móvil recorre una longitud *L*, descendiendo una altura *H*, el tiempo que tarda en descender viene dado por:

$$t = \frac{k \cdot L}{\sqrt{H}}$$



A continuación Galileo prueba el siguiente resultado, cuando menos sorprendente.

> *Teorema VI:* Si desde el punto más bajo o el más alto de un círculo construido sobre la línea del horizonte, se construyen dos planos inclinados que se apoyan en la circunferencia, los tiempos de descenso a lo largo de los dos planos serán iguales.



Veamos la demostración con sus propias palabras:

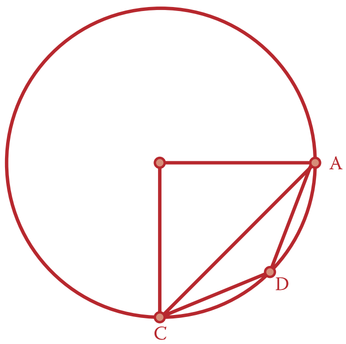
> Construimos una circunferencia sobre la línea del horizonte *GH*; desde el punto más bajo tangente a la línea del horizonte *F*, elevamos el diámetro *FA*, y desde el punto más elevado *A* trazamos planos inclinados cualesquiera *AB*, *AC*, hasta cortar a la circunferencia. Yo digo que los tiempos de descenso a lo largo de estos planos inclinados son iguales. Tracemos *BD* y *CE* perpendiculares al diámetro, y sea *AI* la media proporcional entre las alturas *AE* y *AD* de los planos.
>
> Como los rectángulos *FAE* y *FAD*[i] son iguales a los cuadrados de *AC* y de *AB*[ii] y por otra parte el rectángulo *FAE* es al rectángulo *FAD* como *EA* es a *AD*, se deduce que el cuadrado AC es al cuadrado AB como la línea *EA* es a la línea AD. Pero *AE* es a *AD* como el cuadrado de *AI* es al cuadrado de AD: por tanto los cuadrados de las líneas *AC* y *AB* son entre ellos como los cuadrados de las líneas *IA* y *AD*, y por lo tanto AC es a AB como *AI* es a *AD*.
>
> Pero hemos demostrado antes que los tiempos de descenso a lo largo de *AC* y de *AB* están en razón igual al producto de de las razones de *AC* a *AB* y de *DA* a *AI*, lo que equivale a la razón de *BA* a *AC*. Por consecuencia, la razón de los tiempos de descenso a lo largo de *AC* y de *AB* es igual al producto de las razones de *CA* con *AB* y de *BA* con *AC*; la razón entre los tiempos es por tanto la unidad: de donde resulta nuestra proposición.

Como consecuencia, casi inmediata, que planteamos como un reto al avispado lector, Galileo nos plantea este problema:

Demostrar que la inclinación que debe darse a un plano de manera que una bola que parta de un punto A alcance un plano horizontal en el menor tiempo posible es de 45º.

Al final de la *Jornada*, (las conferencias de la época eran más largas y más intensas que las actuales) a Galileo aún le quedan fuerzas para demostrar que es posible acelerar ese descenso. ¿Cómo?: sustituyendo el plano inclinado por la combinación de dos planos inclinados.

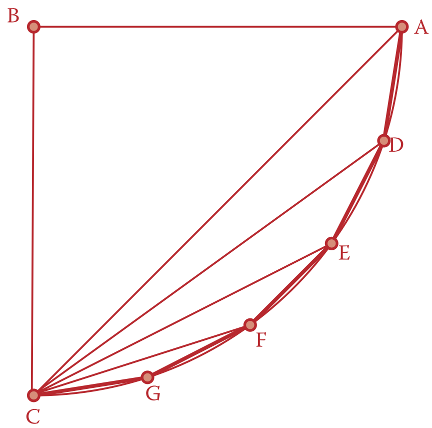
> Teorema XXII: Si desde el punto más bajo de una circunferencia vertical se eleva un plano inclinado que abarca un arco igual a un cuadrante, y si de los extremos de ese plano se trazan otros dos planos hacia un punto cualquiera del arco, entonces los tiempos de descenso a lo largo de estos dos planos tomados juntos será más breve que sobre el primer plano, o que sobre uno de los dos solamente, a saber, el plano inferior.



Es decir, Galileo demuestra que si sustituimos el segmento *AC,* que forma 45º con la horizontal, por dos segmentos consecutivos *AD* y *DC*, siendo *D* un punto cualquiera del cuadrante, el tiempo de descenso es menor.

Animado por este resultado y aplicando el mismo razonamiento a cada uno de los dos segmentos construidos Galileo va más allá y divide al cuadrante *AC* en *n* partes iguales y afirma que esta línea poligonal hace el descenso más rápido cuanto más puntos incluya. Y aumentando hasta el infinito el número de puntos concluye:

> Escolio: Según la demostración precedente, parece posible concluir que el movimiento más rápido posible entre dos puntos no se produce a lo largo de la línea más corta, es decir a lo largo de una línea recta, sino a lo largo de un arco de circunferencia



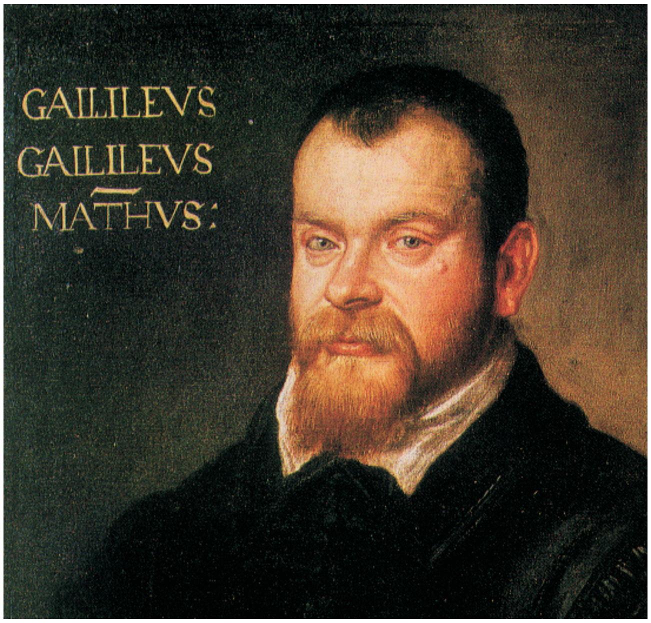
Galileo nos proporciona una bella demostración, que reproducimos íntegramente:

> En el cuadrante *BAEC*, en el que el lado *BC* es perpendicular al horizonte, dividimos el arco *AC* en número cualquiera de partes iguales *AD*, *DE*, *EF*, *FG*, *GC*; desde el punto C trazamos líneas rectas hacia los puntos *A*, *D*, *E*, *F* y *G*: es evidente que el descenso a lo largo de las cuerdas *AD* y *DC* es más rápido que a lo largo de la cuerda *AC* sólo o incluso que a lo largo de *DC* partiendo de *D* en reposo. Pero si el móvil parte en reposo de A, recorre más rápidamente *DC* que las dos cuerdas *AD* y *DC*, y partiendo en reposo de A parece razonable que desciende más rápido a lo largo de las cuerdas *DE* y *EC* que a lo largo de *DC* sólo; desciende más rápidamente por las cuerdas *AD*, *DE*, *EC* que por las cuerdas *AD* y *DC*.
>
> De la misma manera, tras un descenso previo a lo largo de *ADE*, el movimiento tiene lugar en menos tiempo a lo largo de las dos cuerdas *EF* y *FC* que a lo largo de la cuerda *EC*; por tanto el móvil desciende más rápido a lo largo de las cuatro cuerdas *ADEFC* que a lo largo de las tres cuerdas *ADEC*. Por fin, tras un descenso a lo largo de *ADEF*, el movimiento es más breve a lo largo de las cuerdas *FG* y *GC* que a lo largo de la cuerda *FC*, y así el descenso ha sido más rápido a lo largo de las cinco cuerdas *ADEFGC* que de las cuatro cuerdas *ADEFC*. Se ve pues que cuanto más nos aproximamos a la circunferencia por el número de polígonos inscritos, más rápido se realiza el movimiento entre *A* y *C*.
>
> Lo que hemos establecido para un cuadrante vale también para un arco de circunferencia más pequeño; y el razonamiento es idéntico.

¡Genial! Una intuición y un razonamiento impecable.

¿Impecable?... pero falso. Como 60 años más tarde demostrarían Johann y Jacob Bernuolli, Leibniz, L´Hôpital y hasta el mismísimo Newton.

Precioso pero falso. Si. Pero querido lector, ¿serías capaz de encontrar dónde falla el argumento de Galileo?



NOTAS

i Se refiere al producto $FA \cdot AE$ y $FA \cdot AD$ respectivamente.

ii Aplicando el teorema del cateto.

REFERENCIAS BIBLIOGÁFICAS

ÁLVAREZ PÉREZ, J.M. (2006), *Curvas en la historia*, Ed. Nivola

CHABERT J.L. (1993), *Le problème brachistochrone*, Histoire de problèmes, histoire des mathématiques. Ed. Comisión Inter.-IREM

SÁNCHEZ C. Y VALDÉS C. (2001), *Los Bernoulli. Geómetras y viajeros,* Ed. Nivola

SÁNCHEZ C. Y VALDÉS C.(2003), *De los Bernoulli a los Bourbaki*, Ed. Nivola

VAQUERO. J.M. (2003), *Galileo. La nueva Física*, Ed. Nivola

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática
http://www.fisem.org

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Números publicados | Instrucciones para publicar | Créditos

FISEM > REVISTA > NUMEROS PUBLICADOS

Número 7, Octubre de 2006

Descargar número completo (2374 KB)

Volver

© 2006 FISEM 9/10/2006

53
Noviembre 2006, pp. 99-112

Biblioteca

Mi biblioteca particular

Luis Balbuena Castellano

La sección Mi biblioteca particular *trata de mostrar las lecturas que han dejado huella en el autor que amablemente la cumplimenta cada vez. Esas pueden ser de matemáticas y sus alrededores (las ciencias en su conjunto) o del amplio campo que se suele abarcar como literatura; pueden constar de libros de texto, de divulgación, artículos, citas... Y aunque hasta el momento se había ajustado a un cuestionario más o menos preciso, lo importante es que correspondan a influencias profundas en quien escribe y que piense, y por eso les hace partícipes, que pueden serlo para los lectores. En este número le ha tocado el turno a Luis Balbuena, que ha comprimido toda la sección y nos ofrece dos de los libros que han sido provechosos para él, en su fecunda tarea como profesor de matemáticas y de otras 'afines' que le han ido saliendo al paso. Libros que cumplen otro de los objetivos de la sección: sacar a la luz esos tesoros que no son novedad editorial (sustento principal de los apartados bibliográficos), pero que merecen disfrutar en algún momento del primer plano por su importancia y su influencia. Con nuestro agradecimiento por su aportación y el deseo de que sea provechoso para los lectores, os dejo con una parte de la* biblioteca particular *de Luis Balbuena.*

En los últimos tiempos hemos vivido la angustiosa situación de Plutón. ¿Es o no es un planeta? Al final los astrónomos decidieron pasarlo a la segunda división creando la familia de los planetas enanos. Eso denota la eterna vitalidad de la Astronomía.

Durante varios cursos impartí un Taller de Astronomía en el IES *Viera y Clavijo* de La Laguna (Tenerife). Eran solo dos horas semanales pero procuré sacarle todo el jugo que pude haciendo, incluso, salidas algunos viernes para ver el cielo de noche aprovechando que tenemos uno de los mejores cielos nocturnos del mundo que es, entre otras, la razón por la que existen en Canarias dos zonas de observatorios astrofísicos de gran importancia mundial: Cañadas del Teide (Tenerife) y Roque de los Muchachos (La Palma).

Como cualquier profesor que se precie, me hice de una bibliografía actualizada y suscribí al Instituto a la revista Tribu*na de Astronomía* que ofrece interesantes reportajes y nos ponía al día sobre información de actualidad y, si necesitaba asesoramiento, acudía al profesor y amigo Federico Fernández Porredón en el que siempre encontré la respuesta.

Lo que al principio no pensé es que también pudiese aprender de un libro editado nada menos que en 1807. Su autor es, precisamente, el que da nombre a mi instituto: José de Viera y Clavijo.

Fernando Corbalán (coordinador de la sección)
medios.suma@fespm.org

Se trata de un personaje que representa en Canarias, quizá como el que más, al periodo cultural que le tocó vivir: la Ilustración. Nació en Realejos (Tenerife) en 1731 y murió en Las Palmas de Gran Canaria en 1813. Se hizo clérigo. Entre sus características intelectuales destacan: ser sumamente curioso, disciplinado, ordenado y enciclopédico. Su obra más conocida y que aun hoy sigue siendo un referente es su *Noticias de la Historia General de las Islas Canarias*. Una documentada relación de datos y relatos que ponen bien de manifiesto sus capacidades.

Pero escribió sobre muchos temas. Aprendió bien el francés, país que visitó en dos viajes que hizo por Europa e hizo traducciones al castellano de obras francesas.

Pues bien, en 1807, publicó una breve obra titulada *Noticias del Cielo* y subtitulada *Astronomía para niños* que tiene una clara finalidad didáctica. En un estilo sencillo de preguntas y respuestas, va recorriendo distintos aspectos de la Astronomía dando *noticias* de lo que se sabía en aquel momento sobre cada uno de ellos. Su condición de clérigo se manifiesta en expresiones y párrafos. También queda claro su espíritu curioso estando al día de las noticias astronómicas que se estaban produciendo en aquel momento (posiblemente le ayudara el activo puerto de Las Palmas, por el que pasaban naves de países europeos navegando hacia América, África o Asia trayendo esas noticias en libros y en conversaciones con los oficiales). La obra es breve y de fácil lectura (puedes acceder a ella y descargarla si lo deseas en la web:
http://www.sinewton.org/varios/viera_1.pdf
Desde que tuve conocimiento de ella formó parte de los contenidos que expliqué cada curso.

Un efecto interesante, entre otros, es saber qué se daba como *noticia* en aquel momento y comparar con lo que hoy sabemos. Reproduzco a continuación algunas preguntas con sus correspondientes respuestas y espero que esto les anime a leer esta obra completa y, si imparten Astronomía, hagan uso de esos datos como un ejemplo más de la grandeza de la ciencia en general y de la Astronomía en particular.

PREGUNTA: ¿Cuáles son los Planetas?
RESPUESTA: Son aquellos Astros mudables que, andando errantes alrededor del Sol, reflectan su luz, hacen sus revoluciones y giros en distintos períodos de tiempo, y dan vueltas sobre sus propios ejes.
P.: ¿Cuántos son los Planetas que se conocen?
R.: En estos últimos años se han llegado a conocer hasta once.
P.: ¿Cómo se llaman?
R.: Mercurio, que es el que se mueve más cercano al Sol. Luego *Venus*. Después la *Tierra.*[1] Después *Júpiter*. Después *Saturno*. Después *Urano* o *Herschel*, descubierto en 1781. Y posteriormente *Ceres*, *Palas*, *Juno* y *Hércules*.[2]

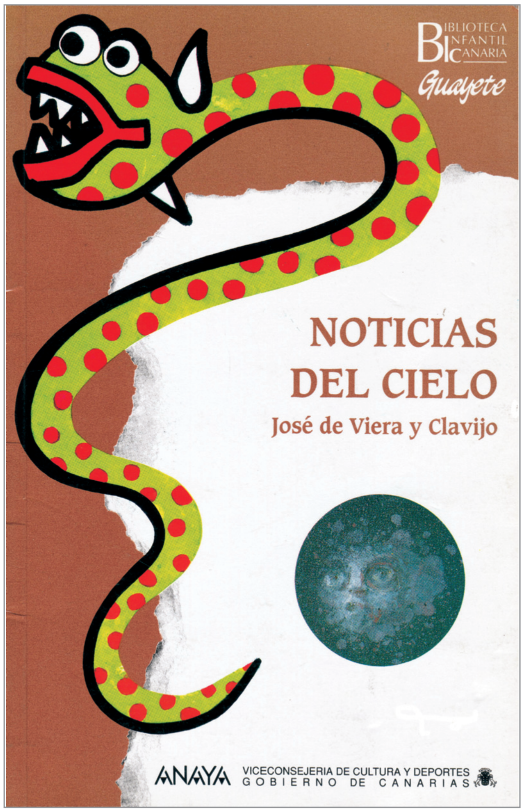
LOS SATÉLITES: LA LUNA
PREGUNTA: ¿Qué clase de cuerpos celestes son los Satélites?
RESPUESTA: Son unos Planetas secundarios que, acompañando siempre a los principales, dan giros alrededor de ellos.
P.: ¿En qué Planetas se han podido descubrir Satélites?
R.: Se han descubierto en Hércules, en Herschel, en Saturno, en Júpiter y en la Tierra.
P.: ¿Cuál es el satélite de la Tierra?
R.: *La Luna*.
P.: ¿Y qué es la Luna?
R.: Es un cuerpo esférico, opaco, que nos envía la luz del Sol a medida que la recibe. Tiene montañas muy eminentes y se han descubierto incendios de volcanes en ellas. Sus constantes manchas parece que no son otra cosa que profundidades, cavernas y simas dilatadas.
P.: ¿Y la Luna es más pequeña que la Tierra?
R.: Lo es en efecto, casi ochenta veces.
P.: ¿Y cuánto dista de nosotros?
R.: Su distancia media es de unas ochenta y seis mil leguas[3], pero unas veces está más cerca de la Tierra, y se llama Perigea, y otras más lejana y se le dice Apogea.

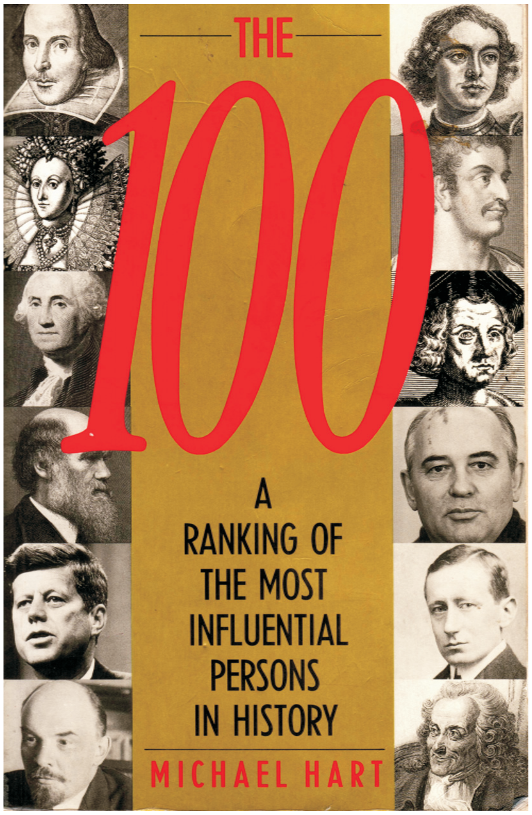
NOTAS

1 Obsérvese que no nombra a Marte. Se supone que es una omisión involuntaria porque es descrito más adelante.

2 Estos cuatro últimos cuerpos son los primeros asteroides descubiertos y a los que inicialmente se les dio categoría de Planetas.

3 El Sistema Métrico Decimal se instituyó en Francia en 1795 pero en España no fue declarado obligatorio hasta una ley del 19 de julio de 1849. *Noticias del Cielo* fue publicado en 1807 por lo que las alusiones a magnitudes se refieren a las medidas populares existentes en España en aquellos momentos. La legua castellana es una medida de longitud equivalente a 4,19 kilómetros. Por tanto, la distancia propuesta por Viera equivale a 352 600 km.





NOTICIAS DEL CIELO O ASTRONOMÍA PARA NIÑOS
José de Viera y Clavijo
Ediciones Idea, Santa Cruz de Tenerife, 2006
ISBN 84-96570-69-X
72 páginas
(Última edición que no corresponde con la de la imagen, que está agotada)

THE 100, A RANKING OF THE MOST INFLUENCIAL PERSONS IN HISTORY
Michael H. Hart
Carol Publishing Group
1992
ISBN 0-8065-1350-0
576 páginas

He leído muchos libros que tienen que ver con la enseñanza de las matemáticas, con su historia, con la divulgación, etc. pero me voy a centrar en el que señalo porque me ha enseñado gran cantidad de detalles que además he podido transmitir a mis alumnos y alumnas. En el Taller hice un trabajo sobre *Los cuarenta principales* utilizando a los cuarenta primeros de ese ranking y casi todos los años hacíamos alguna incursión por la lista. Cuando anunciaba que iba a hacer ese trabajo, en general los alumnos pensaban que pondríamos hilo musical en clase con ese popular programa radiofónico…

La primera noticia que tuve de esos cien personajes fue a través de la revista *Muy Interesante* a la que estaba suscrito para tratar de buscar temas relacionados con las matemáticas que pudiera llevar al Taller. Solicité en una librería que tratasen de conseguirme el libro que nombraba la revista y después de mucho tiempo –casi hasta me había olvidado– llegó el libro a mis manos.

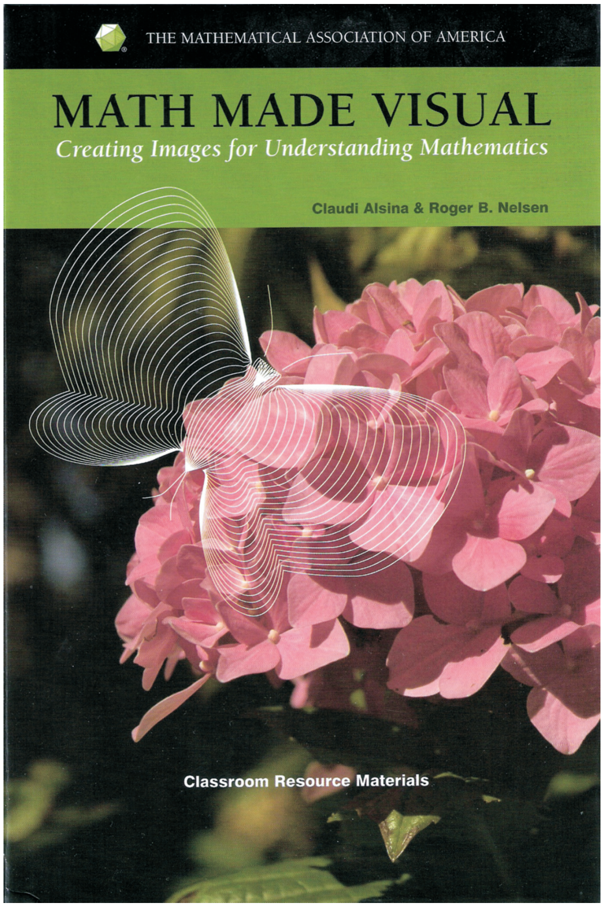
Ya se sabe que en esto de los *ranking* suele haber mucha subjetividad y este no es distinto. Pero el autor señala que el trabajo realmente no es suyo sino de su padre que lo trabajó durante mucho tiempo y no logró verlo publicado, así que él tomó la determinación de hacerlo en su memoria. A esa primera edición le llegaron muchas objeciones y le hicieron críticas desde distintas ópticas. Entonces decidió estudiarlas todas y ello le movió a realizar diversos cambios antes de proceder a publicarla de nuevo, al parecer con más éxito que la primera vez.

Independientemente de las pegas que cada uno le pueda poner, se trata de cien personajes importantes y yo al menos me considero incapaz de hacer nada parecido sobre todo por falta de conocimientos. Por tanto, la admito como está y voy a hacer algunas consideraciones que me parecen destacables. El orden en el que aparecen estas consideraciones no significa que haya jerarquía entre ellas.

- De entre los diez primeros, cinco son creadores o propagadores de las grandes religiones. En estos tiempos que corren, qué duda cabe de la influencia que han tenido en la historia de la humanidad.
- También están entre los diez primeros el inventor del papel y el inventor de la imprenta en occidente. Y aquí surge una primera reflexión ligada al "ombliguismo" de nuestra civilización occidental, porque estoy seguro de que la mayoría conoce el nombre y la época en la que vivió el inventor de la imprenta pero pocos saben algo del inventor del papel. ¡Claro!, se trata de un chino. Pertenece a una cultura a la que apenas dedicamos atención en nuestros libros de historia. Sin embargo, su invento bien que ha influido.
- Coloca a Colón en esta primera decena y los dos que faltan para completarla son científicos. Uno es el más grande, según ciertos autores y el otro le sigue a la zaga.
- Mi decisión de llevar al Taller a los cuarenta primeros la motivó, entre otras cosas, el que diecinueve de ellos están relacionados con la ciencia o la tecnología. Para cada uno de ellos hicimos una ficha en la que incluíamos los criterios usados por el autor del libro para colocarlo en ese puesto. Estudiábamos los acontecimientos históricos destacables que se produjeron durante su vida y un último apartado dedicado a los acontecimientos en Canarias, siempre, claro está, que el personaje haya vivido de 1402 para acá…Estas fichas se transformaron después en unos carteles en tamaño cartulina que han recorrido bastantes centros y el Museo de la Ciencia y el Cosmos de La Laguna.
- Cuando estudiamos la historia (al menos en mi época…) la idea con la que me quedé es que los personajes influyentes de verdad debieron ser los generales, los reyes o emperadores que construían imperios o promulgaban muchas leyes. Esta lista me dice que sí, que hay algunos entre los cien pero no tantos.
- Otro detalle que me sorprendió es la casi ausencia de personajes que hayan pasado a la historia como lo que conocemos como literatos. Casi me atrevo a decir que solo hay uno como tal. Pongo un ejemplo que aclare lo que quiero decir: Aristóteles escribió, por supuesto, pero se le conoce como filósofo y no como el caso de Cervantes, por ejemplo, al que se le asocia con la literatura.
- Lo que, desgraciadamente, no me sorprendió es que entre los cien ¡solo hay dos mujeres! Una prueba más, por si hay pocas, de la marginación que ha sufrido la mujer a lo largo de la historia y que aún queda camino por recorrer. Espero que cuando esta lista se renueve dentro de algunos años, el número de mujeres aumente considerablemente porque se hayan puesto las condiciones para que desarrollen plenamente sus capacidades.
- ¿Y españoles? Dejando aparte a Colón, solo hay tres y no están relacionados, precisamente, con la ciencia ni la tecnología… Tampoco con el arte… ¿Será porque el autor es anglosajón y "barre para casa"?... discutible.
- ¿Y matemáticos? Depende de la definición que se dé. Los hay…

En fin, muchas más ideas y reflexiones que se pueden hacer en torno a esta lista pero quizá lo mejor será que cada cual se haga las suyas y, en todo caso, las discuta con otros. Así lo he hecho y confieso que he aprendido mucho.

Escaparate:
1 Math made visual



MATH MADE VISUAL
CREATING IMAGES FOR
UNDERSTANDING MATHEMATICS
Claudi Alsina y Roger B. Nelsen
The Mathematical Association of America
Washington, 2006
ISBN: 0883857464
200 páginas

Si siempre es recibido con expectación un nuevo libro de Claudi Alsina, en este caso aumenta por el hecho de que es también de Roger Nelsen, autor del conocido Demostraciones sin palabras *(traducido por Proyecto Sur, 2001), en el que se proporcionan diferentes sustratos visuales para estimular el pensamiento matemático.*

Fernando Corbalán
medios.suma@fespm.org

Los lectores de SUMA, que tan bien conocemos a Claudi Alsina, además de por sus libros y charlas, por su sección en la revista, estamos acostumbrados a su facilidad de escritura y a su humor (que hacen leerlo como la mejor literatura de evasión) y a sus agudas aproximaciones con ojos matemáticos a las más variadas situaciones de la vida diaria, que nos han hecho ver de otra manera muchos aspectos de nuestro alrededor. El libro que comentamos, perteneciente a la prestigiosa serie *Classroom Resources Materials* de la MAA (*The Mathematical Association of America)*, es también una fascinante muestra de imaginación compuesta por una extensa colección de ideas apoyadas con o en imágenes para abordar los más variados aspectos del quehacer matemático, pero en este caso, aunque no sea formal en el académico sentido matemático (definición, teorema, demostración, corolario...), sí que se limita más a tópicos matemáticos, de mayor o menor actualidad en nuestras aulas. Eso sí, utilizando en todo momento el pensamiento visual y una gran cantidad de figuras para apoyar ese pensamiento.

El libro está dividido en tres partes. En la primera y más extensa, hay veinte capítulos breves, dedicado cada uno de ellos a un método para visualizar alguna idea matemática y varias aplicaciones de la misma a casos concretos, explicados con detalle, completada con una serie de retos para poner a prueba la pericia y la imaginación del lector (todos ellos resueltos explícitamente o con indicaciones y consejos suficientes para poder hacerlo por uno mismo, en la tercera parte). Completado, en una segunda parte, con una breve pero profunda historia de las imágenes matemáticas y del pensamiento visual, que se abre con la cita de Apollinaire: *la geometría es para las artes plásticas lo que la gramática es para el arte de escribir* y se cierra con unas consideraciones sobre la creatividad, apoyadas en diferentes reflexiones del arquitecto catalán Gaudí. Se pasa revista a lo que significa el pensamiento visual y su aplicación en el aula, así como a la utilización de objetos de la vida diaria o a la realización de modelos, entre otras cosas.

La cantidad de propuestas a lo largo de los veinte pequeños capítulos es impresionante, y el impacto de cada una de ellas depende de muchos factores, en general personales. Por eso, más que hacer una valoración de todos ellos, me limitaré a señalar algunos de los que a mí me han llamado especialmente la atención. Por una parte *el punto de Fermat* de un triángulo acutángulo (punto interior que cumple que la suma de distancias a los vértices es mínima), tan útil en situaciones en las que se buscan mínimos, que aparece en el capítulo 6 y se retoma en el 19 ya en el espacio. O pruebas visuales de unos lemas que permiten demostrar con más facilidad la *fórmula de Herón* del área del triángulo (lamentablemente desaparecida de la enseñanza en el combate del formalismo y la costumbre y que permite calcular áreas solo con medidas de longitud). En el capítulo 20, la *ley del cuadrilátero* (en cualquier cuadrilátero convexo la suma de los cuadrados de los lados es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales más cuatro veces el cuadrado de la distancia entre los puntos medios de las diagonales), que generaliza la *ley del paralelogramo*, analizada en el capítulo 12, en el que ese cuádruplo desaparece.

Por no hacer larga la enumeración, tres cosas más: Los procedimientos iterativos del capítulo 15; las *disecciones geométricas* del 13, con dos deliciosos puzzles de Sam Lloyd; y la prueba visual del Teorema de Pitágoras atribuida a Leonardo de Vinci, en la que una vez más se ve la huella del genio.

> *La geometría es para las artes plásticas lo que la gramática es para el arte de escribir*
> Apollinaire

Todo lo anterior no constituye más que una pequeña relación de las variadas propuestas a las que podemos dar cabida en nuestras aulas, que tanto contribuirán a iniciar (o profundizar) en los estudiantes en esa magna tarea que es el pensamiento visual.

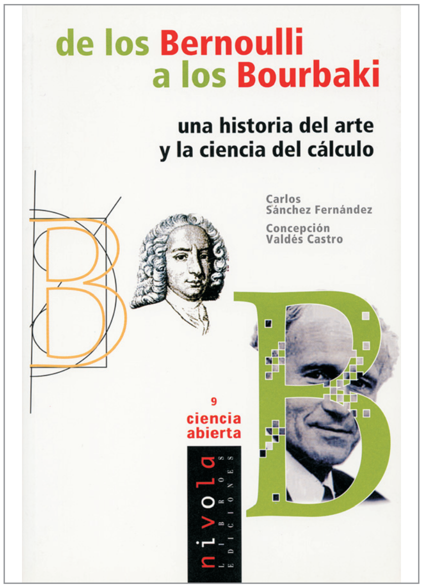
Las reflexiones teóricas y prácticas que se aportan en la segunda parte sirven para dar el marco teórico-práctico para reintroducir todo el pensamiento geométrico en las aulas.

Dejamos constancia (algo bien apropiado en un libro como este) del magnífico trabajo de edición del libro, en particular de todas las fotos, figuras y reproducciones, cuyo aspecto a primera vista no es muy aparente (es siempre en blanco y negro), pero que son de una calidad y una claridad destacable, sin necesidad de ser de gran tamaño. Y de la cuidada bibliografía final, en la que hay bastantes referencias en castellano —además de Alsina también de Estalella, Santaló o Bosch— y portugués —Veloso—.

Un libro, en resumen, con múltiples ideas, reflexiones y propuestas sobre un tema capital como es la visualización, que si en principio sorprende, porque se espera encontrar un libro más ligero, más en la línea de las últimas publicaciones divulgativas de Claudi Alsina, pronto muestra nuevas e interesantes facetas del autor.

Tenemos la seguridad de que la repercusión de este libro va a ser mucho mayor que si estuviera en castellano (o catalán), y es, además, una muestra de que los trabajos de nuestra tierra (los de algunos al menos) se sitúan a nivel internacional. ■

Escaparate:
2 De los Bernoulli a los Bourbaki.



De los Bernoulli a los Bourbaki.
Una historia del arte y la ciencia del cálculo
Carlos Sánchez Fernández y Concepción Valdés Castro
Nivola, Ciencia Abierta 9
ISBN: 84-95599-70-8
Tres Cantos (Madrid), 2004
238 páginas.

Luego para esta curva, que habiendo sido investigada por tantos matemáticos aparentemente nada acerca de ella quedaba por descubrir, encontramos una nueva propiedad...

Jakob Bernoulli,
sobre la braquistócrona, 1697

La solución al problema de la braquistócrona, de hallar la curva de descenso más rápido, fue uno de los más importantes éxitos del nuevo cálculo diferencial e integral que había sido descubierto independientemente por Isaac Newton y G. W. Leibniz. En estos primeros momentos el cálculo hallaba de una manera sencilla y novedosa áreas, volúmenes, tangentes y resolvía problemas que dieron lugar a las primeras ecuaciones diferenciales. Después, el desarrollo del cálculo sigue dos vías diferentes, una en el Reino Unido con los seguidores de Newton y otra en el continente europeo con los seguidores de Leibniz. Mientras que en Inglaterra la actividad matemática se ralentizó en parte por los problemas de una fundamentación rigurosa del cálculo, en el continente la influencia de Leibniz fue mucho mayor. El éxito se debió en parte por una notación más intuitiva y apropiada y por el enorme entusiasmo y productividad de los hermanos Bernoulli y de Euler después. Leonhard Euler, discípulo de Johann Bernoulli, ha sido el matemático más prolífico de todos los tiempos. Muchos de los espectaculares desarrollos de la matemática del siglo XVIII giran alrededor de sus trabajos y su *Introductio*

Tomeu Barceló
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid

in analysin infinitorum de 1748 ha sido uno de los más importante libros de texto de cálculo de todos los tiempos. A partir de Euler se desarrollan nuevas disciplinas, en especial el cálculo de variaciones y la geometría diferencial y es un periodo de una creatividad extraordinaria motivada en parte por problemas de mecánica, óptica y astronomía.

La primera parte del siglo XIX es la de la rigorización del análisis. La controversia de la cuerda vibrante con D´Alembert, Euler, Daniel Bernoulli, Lagrange y la ecuación del calor después con Fourier y Dirichlet, mostraron la necesidad de clarificar los conceptos de función, de función continua, función derivable y de la integral. Un teorema que apareció en muchos de los libros de texto de cálculo del s. XIX da idea del estado en que se encontraban estos conceptos, *demostraba* que toda función continua es derivable, excepto quizás en algunos puntos aislados tales como x=0 para $f(x)=|x|$. Este Teorema se originó en unos trabajos de Ampère de 1806, cuando era profesor de L' Ecole Polytechnique y puede verse, por ejemplo, en el popular *Traité elementaire du calcul différentiel et du calcul intégral*, de Lacroix, que fue editándose sucesivamente hasta 1881. Entonces no existía una definición rigurosa de continuidad y en la *demostración* se usaba el hecho de que una función continua, a trozos es creciente o decreciente (sabemos ahora que una función continua y creciente es derivable en casi todo punto). Este, de hecho, sería el caso si definimos como continua aquella función que puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel. El asunto se zanjó definitivamente cuando Karl Weierstrass mostró un ejemplo en 1861 de función continua que no tiene derivada en todo punto:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x) \text{ donde } 0<a<1,\ b \text{ entero impar}, ab>1+\frac{3\pi}{2}$$

Este es un ejemplo de las llamadas series de Fourier que han motivado gran parte del desarrollo del cálculo del s. XIX. Lo que ahora llamamos serie de Fourier es una combinación lineal infinita de senos y cosenos de la forma:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \text{sen } nx$$

y este era el tipo de expresiones que permitían resolver la ecuación de ondas unidimensional (cuerda vibrante) o la ecuación del calor. ¿Cuáles son las funciones $f(x)$ que pueden escribirse de esta forma? Para Daniel Bernoulli en sus trabajos sobre la cuerda vibrante o para Fourier en su *Théorie analytique de la chaleur* (1822), toda función *razonable* puede ser representada de esta forma. Para otros, una combinación de este tipo tiene que ser una función infinitamente derivable, periódica, etc. El estudio de las series de Fourier siguió teniendo su impacto en el devenir de la matemática, ya que en el estudio de la unicidad de la representación de una función en serie de Fourier George Cantor introdujo posteriormente la teoría de conjuntos (1872-1882).

De los Bernoulli a los Bourbaki, una historia del arte y la ciencia del cálculo

Si se toma al pie de la letra, un título como el de este libro puede ser un proyecto demasiado ambicioso tanto en contenidos como por el largo periodo de tiempo que puede abarcar, desde finales del s. XVII hasta casi nuestros días. No hay que olvidar que el colectivo francés Bourbaki empieza su andadura a partir de 1930 y todavía, aunque a un ritmo e interés menor, siguen publicando nuevas ediciones. Para tener una idea de la gran cantidad de contenidos que se podrían estudiar, basta con observar la clasificación de materias que realiza la American Mathematical Society (AMS), con los 98 apartados que usualmente forman las secciones de la mayoría de bibliotecas de matemáticas. Gran parte de ellas, entrarían dentro de esta descripción. Por ejemplo de sólo una de ellas, el texto *History of Functional Analysis* de J. Dieudonné (1983), ocupa 312 páginas. Es necesario hacer por tanto una gran selección de material.

Imaginemos, por otra parte, que tenemos que dar un curso sobre la Historia del Cálculo desde los Bernoulli hasta finales del s. XIX, ¿qué temas debería contener? La respuesta claro está, puede ser variada. Una selección razonable sería la que contenga los aspectos que hayan sido históricamente importantes en el devenir de la matemática o que tengan relación con los conceptos hoy en día utilizados en nuestros cursos de cálculo. He aquí una posible lista:

La primera parte del siglo XIX es la de la rigorización del análisis. La controversia de la cuerda vibrante con D´Alembert, Euler, Daniel Bernoulli, Lagrange y después la ecuación del calor con Fourier y Dirichlet, mostraron la necesidad de clarificar los conceptos de función, de función continua, función derivable y de la integral.

- El problema de la braquistócrona y las primeras ecuaciones diferenciales (tractriz, catenaria, espiral logarítmica, curvas isocronas).
- Los primeros libros de texto del cálculo (A*nalyse des infiniments petits* de L' Hôpital, *Treatise of fluxions* de

Colin MacLaurin, *Instituzione Analitiche* de Maria Agnesi,) con algún ejemplo tomado de estos libros, como la *trisectriz* de MacLaurin o la *bruja* de Agnesi.

- Euler, sus sumas infinitas, funciones trascendentes: exponencial, logaritmo, trigonométricas, función gamma, etc. Series de Taylor.
- La ecuación de la cuerda vibrante, ideas y controversias de D'Alembert, Euler, Daniel Bernoulli, Lagrange.
- La ecuación del calor y las series de Fourier.
- La forma de la Tierra. La medida del meridiano y la definición del metro. Jorge Juan y Antonio de Ulloa.
- Escuelas matemáticas. Las matemáticas en la época de la Revolución francesa, L'Ecole Polytechnique.
- La evolución del concepto de función, de función continua, derivable, integrable Riemann e integrable Lebesgue.
- La rigorización del cálculo. *Cours D' Analyse* (1821) de Cauchy. Bolzano, Karl Weierstrass.
- Irracionalidad de e, π, Lambert, transcendencia, Joseph Liouville. Funciones especiales y geodésicas del elipsoide. Imposibilidad la trisección del ángulo, de la duplicación cubo y de la cuadratura del círculo.

Entre los contenidos de este temario caben algunas de las joyas de la matemática: Por ejemplo, el Teorema Fundamental del Algebra, la fórmula de Euler $e^{i\pi}+1=0$, que relaciona las cinco constantes más importantes 0, 1, π, e, i. El problema de Basilea, de la suma de los inversos de los números cuadrados

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$, etc.

El teorema Fundamental del Algebra, etc. La relación podría ser más extensa si añadimos temas relacionados con la variable compleja, funciones especiales, función zeta de Riemann, mecánica de fluidos, cálculo de variaciones y teoría del control, cálculo numérico, etc.

De los Bernoulli a los Bourbaki, una historia del arte y la ciencia del cálculo está estructurado en cuatro partes o capítulos, cuyos contenidos esenciales son como sigue:

Parte I. Del cálculo al análisis funcional
Primeras ecuaciones diferenciales, la braquistócrona y los orígenes del cálculo de variaciones, la ecuación de ondas, la ecuación del calor, series de Fourier, ecuación del potencial de Laplace, problema de n-cuerpos y estabilidad, ecuaciones integrales y principios del análisis funcional.

Parte II. Del cálculo a la teoría de funciones
Primeros textos del cálculo. Fundamentación del análisis. Medida e integración de funciones.

Parte III. Del arte de la sumación a la teoría de series divergentes
La edad dorada del arte de la sumación. La representación analítica y la cuestión de la convergencia. Series divergentes.

Parte IV. Del arte de las conjeturas a la teoría axiomática de las probabilidades.
El origen de la teoría de la probabilidad. Variables aleatorias. Distribución normal. Paradojas y axiomatización de las probabilidades.

El texto cubre bastante material, especialmente en los dos primeros capítulos. El tercer capítulo está muy centrado en el tema concreto de las series divergentes y que quizás se hubiera podido incluir en los dos primeros. El cuarto y último capítulo está dedicado a la probabilidad.

Los autores, Carlos Sánchez Fernández y Concepción Valdés Castro son catedráticos de historia de la matemática y de análisis matemático de la Universidad de la Habana y doctores por la Universidad Lomonosov de Moscú.

Los autores, Carlos Sánchez Fernández y Concepción Valdés Castro son profesores de historia de la matemática y de análisis matemático de la Universidad de la Habana, doctores por la Universidad Lomonosov de Moscú. Su particular formación académica se puede observar en el estilo de la redacción del libro. Ya desde la introducción, refiriéndose al cálculo puede leerse por ejemplo:

> Luchó a brazo partido por merecer un lugar mejor en aquel mundo despiadado y exigente, donde la incipiente industria aupaba las nuevas ciencias técnicas… (pag. 12)

O un poco más adelante:

> Convulsiones sociales provocaron el predominio de la pujante clase burguesa, que no se encontraba suficientemente preparada para enfrentar el vertiginoso avance que las nuevas tecnologías imponían a las fuerzas productivas. Y la lucha por el saber …

O en la misma página, en un recuadro biográfico sobre Los Bernoulli:

> Familia burguesa de procedencia flamenca que huyendo de la intolerancia religiosa …

Los contenidos reflejan también esta tendencia. Por ejemplo una de las cuatro secciones de la Parte II: *El establecimiento de la teoría de funciones y la escuela moscovita* o que las últimas páginas del texto estén dedicadas a Kolmogórov. Algo que no es casual, ya que en la solapa interior de la portada presentando a los autores, se dice: *Kolmogórov presidió el tribunal que calificó sus tesis de doctorado*. Un lujo del que pocos podrán presumir, por otra parte.

El texto carece de un índice temático, que hubiera sido de gran ayuda para tener una idea más clara y completa de sus contenidos y poder localizar algún aspecto determinado, lo cuál sin el índice es complicado en un libro de 382 páginas. Al final hay un índice de notas biográficas, pero está en orden cronológico en vez de alfabético. Aparece, eso si, un glosario explicativo de conceptos, tales como *La ecuación de Laplace* o *Ecuaciones de Euler-Lagrange*, escrito por Rafael Hernández, que es de gran utilidad.

En el desarrollo de los temas no aparecen citas o referencias a otras obras o artículos especializados. Estas referencias clarificarían si las afirmaciones que se exponen reflejan sólo la opinión de los autores o si son algo más establecido. Ayudarían también al lector por si quiere consultar algunos de los temas a partir de otras fuentes, quiere contrastar su veracidad simplemente los desea conocer con más detalle. Veamos tres ejemplos de ello. Primer ejemplo: en la pág. 54, cuando trata de las matemáticas de la cuerda musical y de las ondas:

> En los trabajos de Platón la matemática consistía de cinco partes: aritmética, geometría plana, estereometría, astronomía y música o teoría de la armonía. En todo el periodo helenístico y en toda la Edad Media (...) no se conocen obras que profundicen en lo que podríamos llamar una teoría matemática de la música. Al parecer no era necesario, ni conveniente.

La descripción es correcta, pero sería quizás más adecuado decir que la matemática de Platón sigue el *Quadrivium* pitagórico formado por la aritmética, geometría, música y astronomía, al que luego en la Edad Media se añadió el *Trivium* de gramática, lógica y retórica, que forman el corpus de las siete Artes Liberales. Aunque ello es por supuesto una simplificación, ya que la escuela de Platón dedicó especial atención a la geometría, —recuérdese la inscripción a la entrada de su Academia: *Que nadie ignorante de geometría entre aquí*— y contó con notables representantes como Teateto o Eudoxo. Por otro lado, en el mundo griego y en la Edad Media, la música formaba parte importante del currículo de una persona cultivada, de los que había varios textos, como el *Harmonica* de Ptolomeo (90-168), base de la *música de las esferas* medieval.

Segundo ejemplo: en la pág. 224, en la introducción de la Parte III, se dice:

> Euler insatisfecho con la lentitud de la convergencia de la serie
>
> $$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$
>
> la había transformado en
>
> $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}(z+1)^n$$
>
> ...La serie transformada posee dominio mayor { |z+1|<1}

El lector puede preguntarse que cómo hizo Euler esta tranformación. Al no ser obvia, se agradecería una pequeña explicación o referencia. Luego resulta que los detalles de la idea de Euler se encuentran más adelante en la pag. 249. Hay además una errata, ya que el dominio mayor tiene que ser { |z+1| <2}.

Tercer ejemplo: La braquistócrona. Se introduce el problema tal como lo hizo Johann Bernoulli en 1696:

> Dados dos puntos *A* y *B* en un plano vertical, hallar el camino *AMB* por el que una partícula móvil *M*, descendiendo por su propio peso, iría de *A* a *B* en el menor tiempo posible.

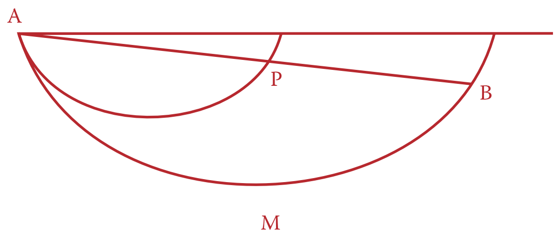
Se sigue con la propia demostración de Johann Bernoulli, hasta llegar a la ecuación diferencial

$$dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}$$

para añadir finalmente:

> Bernoulli concluye que la curva braquistócrona es la cicloide común.

No se muestran las ecuaciones de la cicloide, ni se termina el problema probando que dados los dos puntos *A* y *B* existe una única cicloide que pasa por ellos. Ello no supone mucho más espacio en la prueba y dejaría mucho mejor terminada la exposición.



Recordemos que las ecuaciones de la cicloide son $x= a(t-\text{sen}\ t)$, $y=a(1-\cos t)$. Como depende de un parámetro a, llamémosla **C**(a). Si dibujamos la cicloide, con el eje x hacia la derecha, el eje y hacia abajo, y los puntos *A* y *B* como en la figura. Para ir desde *A* a hasta *B*, ¿es realmente *AMB* la trayectoria más rápida? No es intuitivamente tan obvio que ésta sea así, ya que si soltamos desde *A* una bolita que se deslice sobre la curva por su propio peso, tiene que subir luego una parte considerable de curva hasta llegar hasta *B*. Sin embargo si la deducción de la ecuación diferencial es correcta, la curva buscada tiene que ser una cicloide. La cuestión es entonces demostrar que hay una única cicloide $\mathbf{C}(a)$ que pase por *A* y por *B*. El razonamiento que dieron tanto Johann Bernoulli como Newton en su prueba es a la vez elegante y sencillo: Sea *B* de coordenadas (p, q) y sea $P=(kp, kq)$ el punto sobre la cicloide con parámetro $a=1$ que está sobre la recta *APB*. Al estar *P* sobre $\mathbf{C}(1)$ satisface sus ecuaciones, luego $kp=a(t-\text{sen } t)$, $kq=a(1-\cos t)$. Luego *B* está sobre $\mathbf{C}(a/k)$.

Diseminadas a lo largo de todo el libro aparecen numerosas notas biográficas. Estas hacen que la lectura sea más entretenida y amena. Hay entre ellas la biografía de un matemático español, Julio Rey Pastor (1888-1962), al que se dedican dos páginas. Cuando se llega hasta aquí puede ser inevitable una reflexión acerca de la historia de la matemática española, poco conocida a veces incluso por los propios matemáticos españoles. ¿Han existido realmente matemáticos importantes en España? ¿Ha sido Rey Pastor el mejor matemático que ha dado este país? En España no ha habido matemáticos de la talla de un Fermat o de un Newton, pongamos por caso. Pero sin llegar a tanta altura, se pueden citar algunos. Por ejemplo Maslama de Madrid, que demostró que la proyección estereográfica utilizada en los astrolabios transforma circunferencias sobre la esfera (que no pasen por el polo de proyección) en circunferencias en el plano. O el gran matemático y rey de la taifa de Zaragoza al-Mutamin ben Hud. Es curioso observar que en este país casi todo el mundo conoce a El Cid y que sin embargo muy pocos sepan de al-Mutamin, que fue un gran intelectual, y fue rey. A sus órdenes estuvo además el mismo Cid. Con Rey Pastor se tiene a veces la impresión de que se está creando un mito, cuando aparece su nombre en enciclopedias, tiene dedicada una calle en Madrid, un cráter en la Luna, el aula magna de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense, etc. ¿Cuál es el lugar de Rey Pastor en la matemática española? Los textos existentes que hablan de él no le hacen mucho favor, al ser más bien hagiográficos y dedicados a glosar su labor. Quizás hace falta una obra que estudie con seriedad la historia matemática española, o más concretamente la de la primera mitad del s. XX. Sin duda Rey Pastor fue un notable matemático, un gran maestro y comunicador, pionero en ciertos aspectos y que tuvo la gran capacidad de aglutinar a su alrededor escuelas y actividad matemática, más especialmente en Argentina donde se le tiene mucho cariño. Pero no tiene grandes contribuciones a la matemática. Otros españoles, aunque quizás algo después y de manera m´´as modesta, han publicado trabajos en revistas internacionales de prestigio, como por ejemplo Sunyer i Balaguer (*Acta Mathematica*), o Luis Santaló (*Annals of Mathematics* y *American Mathematical Monthly*), entre otros. ■

BIBLIOGRAFÍA

BOYER, Carl B.,(1992), *Historia de la matemática*, Alianza Universidad

DURÁN, Antonio, (1996), *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*, Alianza Universidad, 861AU.

GILLISPIE, C., (1990) *Dictionary of Scientific Biography* , New York 1970-1990.

GONZÁLEZ REDONDO, F., (2002), "La Matemática en el panorama de la Ciencia española", *La Gaceta de la RSME*, Vol. 5.3 (2002), pp. 779-809.

GRABINER, Judith, (1993), "Who gave you the epsilon? Cauchy and the origins of rigorous Calculus", *The American Mathematical Monthly*, vol. 90, n.3, (1983), pp. 185-194.

GRATTAN-GUINNESS, I., (1984), *Del cálculo a la teoría de conjuntos 1630-1910,* Alianza Editorial.

HAIRER, E., Wanner, G.,(1996), *Analysis by its History*, Springer Verlag.

HAWKINS, T.,(1975), *Lebesgue's Theory of Integration-Its Origins and Development*, Chelsea.

KATZ, Victor J., (1998), *A History of Mathematics, An Introduction*, Addison Wesley.

KATZ, Victor J.,(1987), "The calculus of trigonometric functions", *Historia Mathematica*, Vol. 14, n. 4, (1987), pp. 311-324

KLEINER, Israel, (1989), "Evolution of the Function Concept: A Brief Survey", *The College Mathematical Journal*, vol. 20, n. 4, (1989), pp. 282-300.

KLINE, M., (1983), "Euler and infinite series", *Mathematics Magazine* 56 (5) (1983), pp. 307-314.

Mactutor History of Mathematics,
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/

Mathematical subjects classification,
http://www.ams.org/msc/

REY PASTOR, Julio, (1998), *Julio Rey Pastor Selecta*, *Conmemoración del centenario de su nacimiento*, Fundación Banco Exterior, 1988.

RÜTHING, D., (1984) "Some definitions of the concept of function from John Bernoulli to N. Bourbaki", *Math. Intelligencer* 6 (4) (1984), pp. 72-77

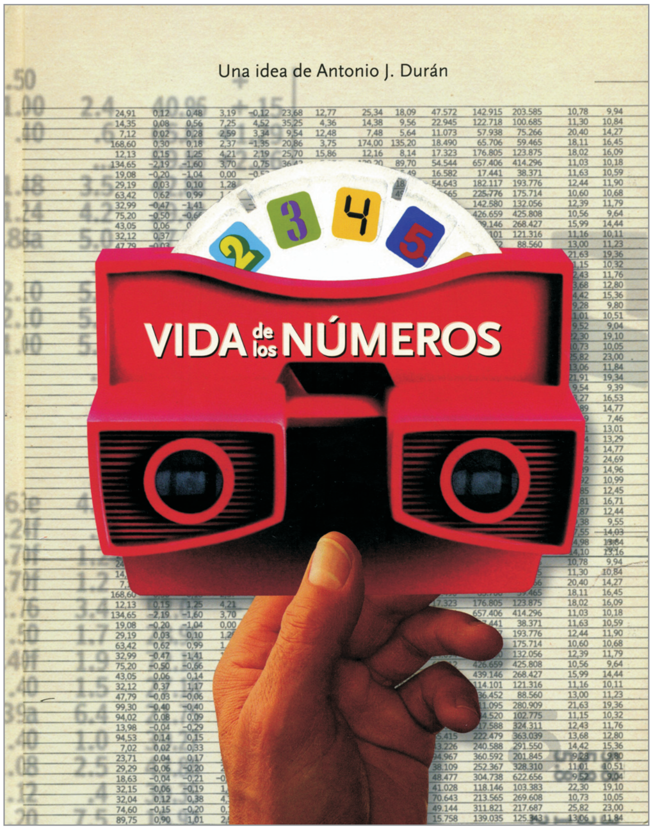
SIMMONS, F., (1993), *Ecuaciones diferenciales, con aplicaciones y notas históricas*, McGraw-Hill, 1993

STIGLER, Stephen M., (1981), "Gauss and the invention of least squares", *The Annals of Statistics*, vol. 9, n. 3, (1981), pp. 465-474.

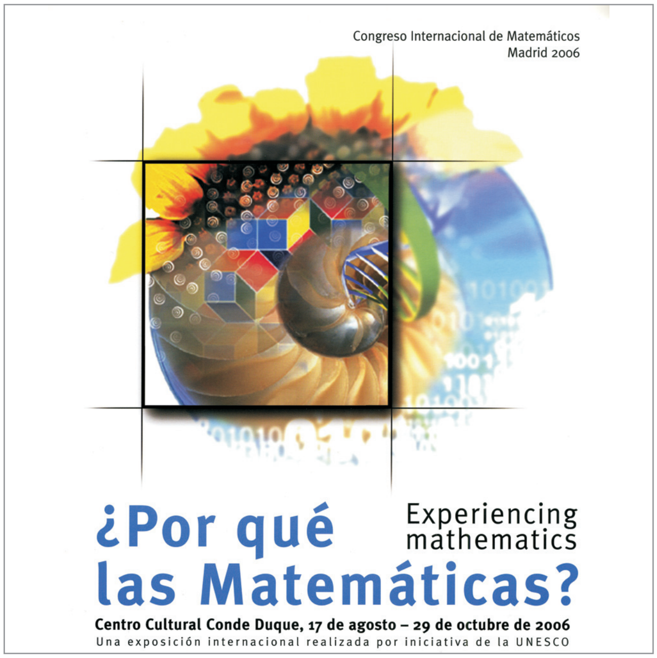
YOUSCHKEVITCH, A. P., (1976-77), "The concept of function up to the middle of the 19th century", Arch. *History Exact Sci.* 16 (1) (1976/77), pp. 37-85.

Escaparate:
3 Legado de un congreso

Vida de los números
Una idea de Antonio J. Durán
T Ediciones
2006
ISBN: 84-8688-213-3

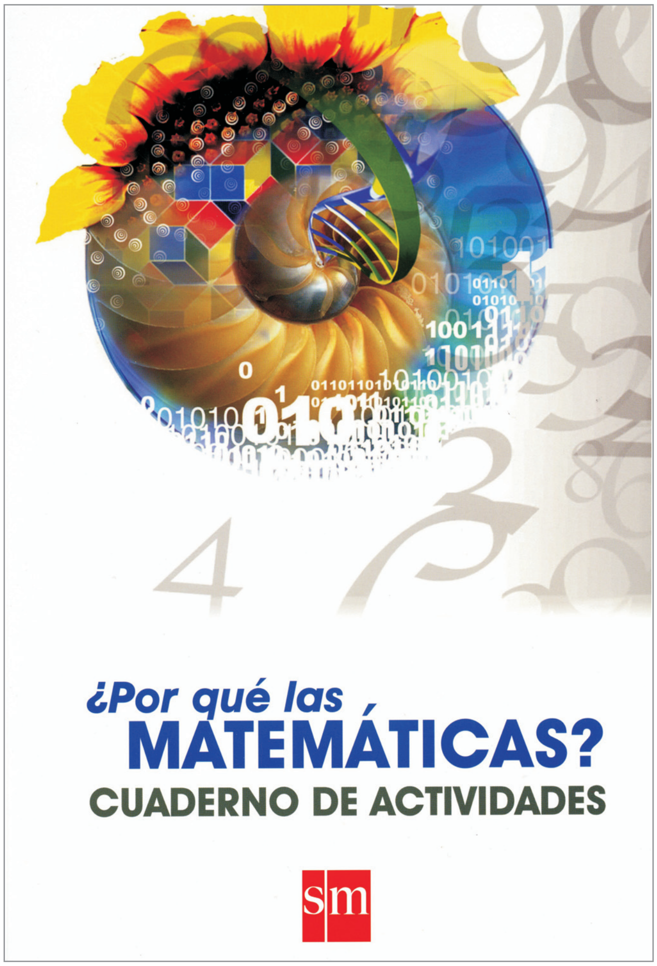


Reseñamos los catálogos de tres exposiciones presentadas durante el ICM 2006, (en este mismo número se recoge una crónica de éstas) que han gozado de un extraordinario éxito de público. Si las exposiciones ya son historia, tanto para los que las contemplaron como para los que no tuvieron esa oportunidad, quedan estos libros para seguir sacando provecho de las mismas.



¿Por qué las Matemáticas?
(Catalogo de la exposición)
Centro Cultural Conde Duque,
Ayuntamiento de Madrid
Madrid 2006
ISBN 84-96102-24-6

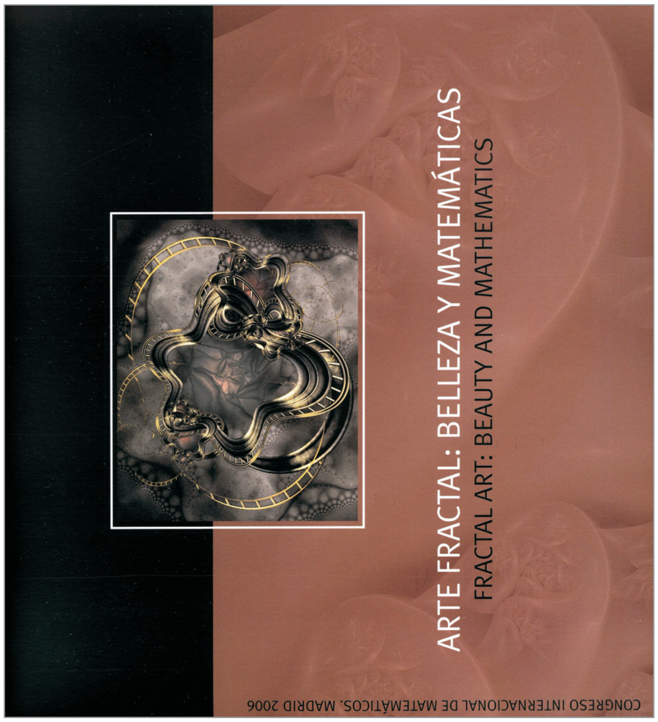
Fernando Corbalán
medios.suma@fespm.org



¿Por qué las Matemáticas? Cuaderno de Actividades

M. Bas, A. Bell·lloch y R. del Rincón
Coordinadores Raúl Ibañez y A. Pérez Sanz
Ediciones SM, Madrid 2006
ISBN 84-675-1175-3
32 páginas

No es frecuente la aparición de las matemáticas en los medios, ni, cuando se abre un hueco en ellos, el aspecto de un evento que va a ser destacado y lo que en consecuencia va a quedar en el imaginario popular del mismo. Pero no hay duda que del ICM2006 lo que se va a recordar es que hubo un *fulano* al que se le dio un premio y lo rechazó, lo que refuerza un



Arte Fractal: Belleza y Matemáticas
Fractal Art: Beauty and Mathematics

ICM 2006 y Centro Cultural Conde Duque,
Ayuntamiento de Madrid, Madrid 2006
ISBN 84-96102-25-4
55 páginas

poco más la idea social del matemático como chiflado, como sabio loco fuera de la realidad (y que además en su versión próxima al ciudadano, el profesor, tiene un ramalazo de sadismo para hacer sufrir a sus alumnos).

Pero más allá de todo eso y de los trabajos propios del congreso, también han tenido lugar una serie de actividades culturales, en particular las tres exposiciones cuyos catálogos reseñamos, que han gozado de un extraordinario éxito de público (lo que pienso que debería mover a la reflexión de los gestores para diseñar otra política cultural de grandes eventos, que incluyera también la presencia de las matemáticas en los mismos, pero que dudo que, por desgracia, sirva tampoco esta vez). Si las exposiciones ya son historia, tanto para los que las contemplaron como para los que no tuvieron esa oportunidad, quedan estos libros para seguir sacando provecho de las mismas.

¿Por qué las Matemáticas?

Los dos primeros se refieren a la exposición con más visitantes y más en la línea de los museos de la ciencia: prohibido no tocar. Y conforman una gran cantidad de posibilidades de utilización en nuestras clases, tanto la que proponen los murales en sí mismos como las que se sugieren en el folleto de actividades. Sobre todo de la utilización de hoy mismo de las matemáticas (algo bien necesario dada la percepción social de nuestra materia como material arqueológico caído del cielo) y de las líneas de avance.

Arte fractal

El arte fractal supone una utilidad de las matemáticas inesperada y chocante para muchos, lo que es otra buena vía de enganche con las mismas para otra parte de la población, por lo que puede ser también una vía a utilizar en nuestras clases. El folleto que reseñamos recoge los premios de un concurso internacional de fractales convocado con motivo del *ICM2006*, con una amplia gama de muestras de las diferentes líneas y posibilidades que ofrecen. Y tiene (como el anterior) la virtud de estar muy bien presentado y tener un precio simbólico, lo que facilita su adquisición y uso (y que indica la buena labor social y de relación realizada por todos los que consiguieron que las exposiciones fueran posibles, encabezados por los comisarios de ambas R. Ibáñez y A. Pérez Sanz).

Vida de los números

En el caso de *Vida de los números* estamos hablando de otro nivel de libro, que podría colocarse en el apartado de libros-objeto o libros-regalo, por su estupenda presentación (papel, encuadernación, diseño, impresión, fotos y pinturas, troquelados...). Es un reflejo de la Exposición que tuvo lugar en la Biblioteca Nacional, basada en una idea de Antonio J. Durán, pero puede considerarse como una publicación en sí misma, que tiene vida propia.

Arropados con ilustraciones de S. Mackaoui, N. Pintado y J. Pagola, y fotos diversas, hay agudas reflexiones sobre los números, su entorno y su contexto. Un texto de Alberto Manguel ("Verlo por escrito: la doble naturaleza del número y la página"), que como señala él mismo, *trata del paisaje donde transcurrirá la vida de los números*, reflexiona sobre esa extraordinaria historia que transita por el soporte de los números (y también, más tarde en el tiempo, de las letras), esos objetos de barro o piedra, de papiros o trapos viejos, de pieles o maderas, hasta llegar a los destellos que conforman las pantallas de los ordenadores y los libros electrónicos.

Dos amplios capítulos de A. Durán, *ideólogo* de la exposición y del libro (que recoge que es 'una idea' suya), tratan del hecho de que *los números sirven para contar*. Sigue el rastro de los mismos desde la impresión de las manos en las cuevas que habitaron nuestros antepasados o los primeros restos sumerios, pasa por los escritos mayas que han podido llegar a nuestra vista (a pesar del empeño que pusieron algunos ancestros nuestros en que desaparecieran) y los códices medievales, en particular el de *Vigila*, de 976, que recoge los números *árabes* en un formato que casi reconocemos como actual.

En la segunda parte retoma las peripecias de los números, que cuentan ya con el valioso auxilio de la imprenta, lo que da lugar, con el aporte de destacados personajes de diferentes gremios: editores, pintores y los propios *matemáticos,* a toda una serie de obras no sólo importantes desde el punto de vista de la historia de la ciencia, sino también auténticas obras de arte, que nos cautivan al contemplarlas. Sigue también a unos recién llegados pero que serán inseparables compañeros de los números: los símbolos de las operaciones.

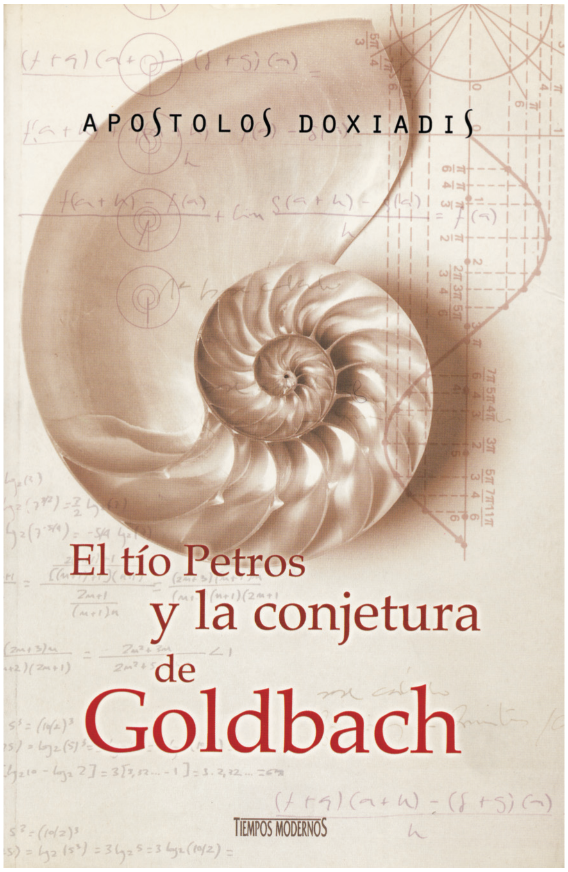
Se completa el libro con el amplio artículo "¿Cómo han aprendido a contar y calcular los seres humanos?", en el que Georges Ifrah adapta su magna *Historia universal de las cifras*, con una gran capacidad de síntesis. Poco hay que añadir sobre Ifrah para quien conozca esta obra. Para los que no tienen esa suerte les recomendamos que no la aplacen su lectura, ya que es el mejor y más lúcido estudioso de estos temas.

El artículo de Ifrah en *La vida de los números* es una buena manera de entrar en su génesis de, dando una visión de conjunto, ya que, a pesar de su limitada extensión, proporciona una información notable, un buen aperitivo para quien desee profundizar en el tema.

En definitiva, toda esta producción impresa es una buena forma de superar la impresión de sabios locos que tan fácil es adjudicar a los matemáticos y que tanto alimentan los medios y, sobre todo, de mostrar que sus cultivadores pueden ser gente peculiar, pero sus producciones sirven, y mucho, a todos los ciudadanos. ■

SUMA 53
Noviembre 2006, pp. 113-118

Pasión por los primos



El tío Petros y la conjetura de Goldbach
(Ο θείος Πέτρος και η εικασία του Γκόλντμπαχ, 1992)
Apostolos Doxiadis
Ediciones B, Tiempos Modernos
Traducción de Mª Eugenia Ciocchini
Barcelona, Marzo de 2000 (1ª Edición en español)
ISBN: 84-406-9490-3
199 páginas

El libro que nos ocupa en este número es otro ejemplo de éxito editorial con las matemáticas como tema de fondo. La presentación de la obra, en su contraportada, es como sigue:

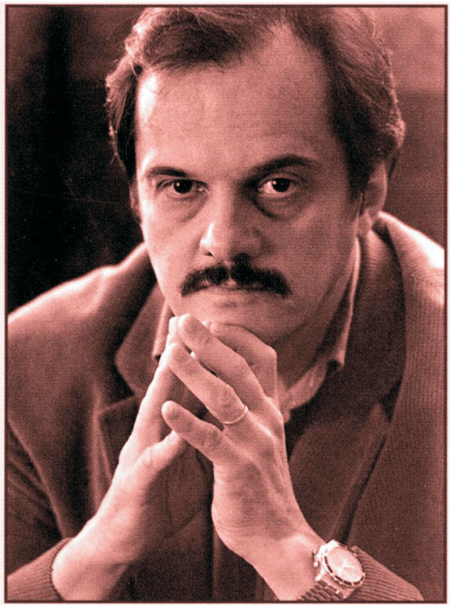
> Toda familia tiene su oveja negra; en la nuestra es el tío Petros." Así lo afirma el sobrino favorito de Petros Papachristos –y narrador de las peripecias de su tío-, al comienzo de la novela de Apostolos Dioxadis.

En efecto, le anciano tío Petros vive retirado de la vida social y familiar, entregado al cuidado de su jardín y a la práctica regular del ajedrez. Su sobrino, sin embargo, descubre un día por azar que el tío Petros fue un matemático eminente, profesor en Alemania e Inglaterra, niño prodigio en esta disciplina y estudioso totalmente absorto en sus

Constantino de la Fuente Martínez
literatura@revistasuma.es

investigaciones científicas. Como irá descubriendo el sobrino, y el lector con él, la vida de Petros Papachristos ha girado durante años en torno a la comprobación de la famosa conjetura de Goldbach, un problema en apariencia sencillo, pero que durante más de dos siglos nadie ha conseguido resolver científicamente.

Apostolos Doxiadis nos abre las puertas de una extraordinaria aventura personal inscrita en el ámbito de las matemáticas, donde personajes ficticios conversan con eminentes estudiosos como Ardí, Ramanujan, Tuting y Gödel. Sin embargo, más importante aún es que en esta novela las matemáticas adquieren una dimensión simbólica, y los esfuerzos de un estudioso por resolver un enigma reflejan la lucha prometeica del ser humano por conquistar lo imposible.



En cuanto al autor, Apostolos Doxiadis, nació en Australia (1953), se crió en Atenas y a los 15 años fue admitido en la Universidad de Columbia, donde estudió Matemáticas. Además de haber publicado otras cuatro novelas, también cuenta entre sus actividades las de realizador cinematográfico, director y traductor de obras de teatro.

Nuestro comentario

En la novela que nos ocupa, Doxiadis, con la excusa de mostrarnos la vida del personaje principal, el tío Petros, nos introduce en el mundo de las matemáticas: problemas y conjeturas famosos, matemáticos célebres, anécdotas populares, etc. Mientras, el protagonista va dedicando sus mejores años a la resolución de la conjetura que da título a la obra. Después de muchas frustraciones, en los últimos momentos de su vida... bueno, el desenlace no lo vamos a desvelar aquí, animamos a su lectura para conocerlo.

La acción está casi siempre narrada en primera persona por el sobrino del protagonista, excepto cuando nos cuenta las principales vicisitudes de la biografía de su tío. Hay muchos momentos en que parece que el propio Doxiadis nos hace invisible guiños para que nos dejemos llevar por la idea de que él y el sobrino son la misma persona... Las vidas de tío y sobrino se van desarrollando con algunas intervenciones de grandes matemáticos de la época (siglo XX), participantes en la acción como unos personajes más.

La inmersión de la novela en muchos de los tópicos del *mundillo matemático* del pasado siglo, tanto en el proceso de descubrimiento y creación del conocimiento matemático como en la psicología de los personajes que lo originan, es una forma muy loable y persistente de establecer puentes entre ese *mundillo* y el mundo exterior, teniendo al lector como interlocutor principal, asomándose a la extraordinaria complejidad de los temas y del momento histórico para las matemáticas.

En el devenir de los acontecimientos, vamos viviendo unas sensaciones que son similares a los sabores que podemos paladear cuando unos amigos, tras un viaje por varios países europeos, nos traen una caja de bombones de cada lugar; al sabor habitual del cacao, en función de su pureza, podemos deleitarnos con el disfrute de otros, a veces sorprendentes por inesperados: agridulces, suavemente picantes, almendrados, afrutados, etc, sin olvidar el dulzor general que identificamos en todos ellos. El *matemático loco*, *el matemático nace, no se hace*, *la amalgama de verdad y belleza...*, *la edad de producción en matemáticas*, *la búsqueda de armonía y precisión*, *el precio que se ha de pagar por acercarse demasiado a la verdad...*, *el placer que producen*, *perseguir una quimera...*, etc, son otros tantos sabores que nos podemos encontrar junto al dulce permanente de esta novela matemática.

En fin, la narración nos trae a la memoria algunos de los temas que formaban parte de la licenciatura de matemáticas, que muchos de nosotros hemos vivido en primera persona. Además la formación matemática de A. Doxiadis nos permite establecer con el texto muchos nexos en forma de códigos matemáticos de comunicación, a veces ocultos a simple vista, con una multiplicidad de matices que nos enriquecen la lectura y nos multiplican los significados que quiere transmitir.

Una propuesta de trabajo en el aula

Son muchos los personajes, temas y momentos históricos que aparecen, casi todos interesantes, aunque algunos de una extraordinaria complejidad. Por esta causa, el guión que proponemos en este número, pensamos que es más adecuado para el nivel de bachillerato, aunque siempre nos podemos encontrar con algunas excepciones aprovechables en la ESO. Esos chicos y chicas que disfrutan haciendo matemáticas, sobre todo que no les importaría hacer otro tipo de cosas, ésos son los candidatos perfectos para ampliar su cultura matemática haciendo un trabajo como el que presentamos. Es verdad que no son muchos los que dan este *perfil*, pero con que haya uno o una cada curso, tan solo por ésos, ya merece la pena...

Para finalizar esta introducción, debemos señalar que, tan interesantes como los temas que se tratan en el guión, también lo son algunos de los que no aparecen, generalmente por su dificultad. Éstos podrían ser motivo de atención para el profesor o profesora si observa que despiertan el interés de los alumnos o alumnas y les motivan a preguntar o indagar sobre ellos. Análogamente se puede prescindir de alguna cuestión planteada si se ve que no es adecuada, por su extensión o dificultad, para desarrollarlas en un contexto concreto. Se trata, en primer lugar, de disfrutar haciendo el trabajo.

Una conferencia de matemáticas

Cuenta el narrador del libro que acudió a una conferencia de matemáticas titulada *Los fundamentos de las teorías matemáticas según la lógica formal*. En ella aparecían los nombres de varios matemáticos importantes:

David Hilbert
Gottlob Frege
Bertrand Russell
Giusepe Peano
Von Neuman
Euclides
Zenón
Leonard Euler
Constantino Karatheodori
Kurt Gödel

A) En esta lista faltan dos nombres que sí se mencionaron, y sobra uno, que no se nombró. Averigua los tres nombres y escribe un resumen de sus biografías, incluyendo alguna foto.
B) Explica, con un ejemplo, cuál es el contenido de la Paradoja de B. Russell.
C) David Hilbert, uno de los matemáticos más importantes del siglo XX, presentó una lista de problemas matemáticos no resueltos, en el congreso internacional de 1900. ¿Cuántos problemas eran? Recoge los enunciados o los contenidos de los que puedas. ¿Se han resuelto ya?

La conjetura de Goldbach

Entre la numerosa correspondencia entre Euler y Goldbach, destaca la carta en la que, en 1742, el segundo le plantea al primero el problema que, más tarde, Euler enunciaría como la famosa Conjetura de Goldbach.

A) Leyendo la novela, se puede observar que la conjetura se puede enunciar de más de una forma, por ejemplo:

C1: Todo número par se puede escribir como suma de dos números primos.

C2: Todo número entero puede expresarse como suma de tres números primos.

Demuestra que si se cumple C2, entonces también se cumple C1.
B) Recoge los datos esenciales de la biografía de Christian Goldbach.

Otras conjeturas

Como era de esperar, uno de los temas que aparece recurrentemente en el libro es el de las conjeturas matemáticas famosas:

- Segunda (o "La Otra") Conjetura de Goldbach (pág. 85).
- Hipótesis de Ramanujan (pág. 88).
- Conjetura de Fermat sobre números primos (pág 124).
- Conjetura de Poincaré (pág 152).
- Hipótesis de Rieman (pág 76, 77, 170, 185 y 186).

A) Busca en qué consisten estas conjeturas y escribe sus enunciados.

B) En 1640, Fermat escribía, sobre su conjetura relativa a los números primos, lo siguiente:

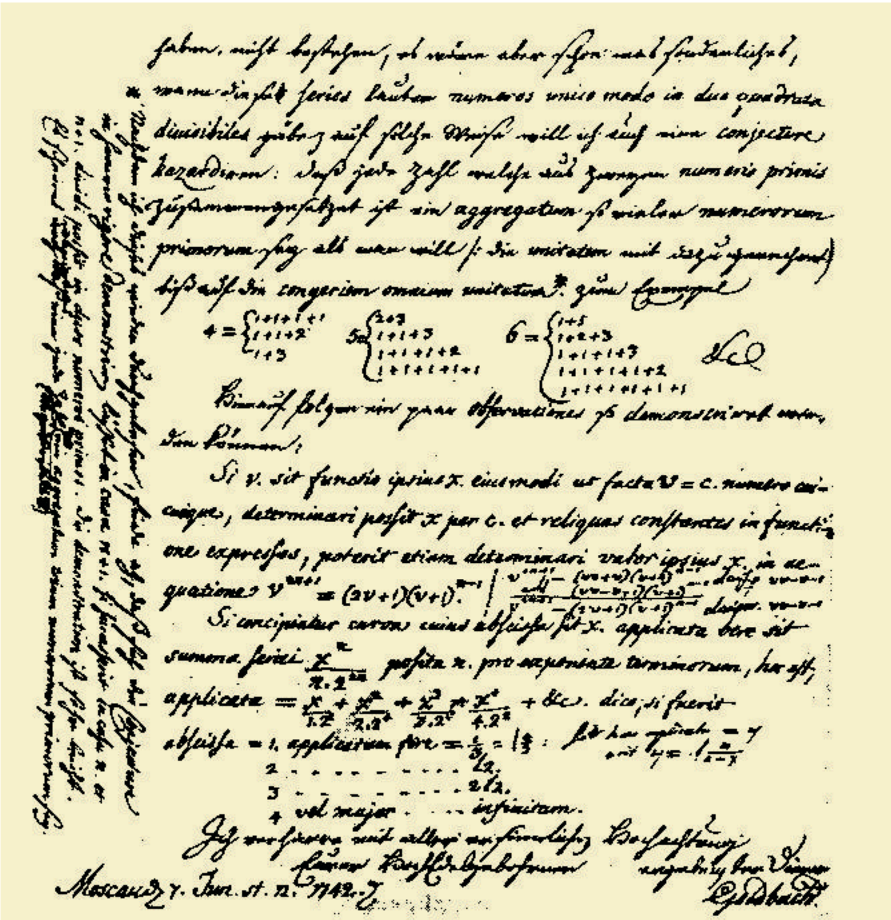
> Estoy persuadido de que es siempre un número primo. No tengo la demostración exacta, pero he excluido una cantidad tan grande de divisores por demostraciones infalibles, y tengo tantas referencias que avalan mi pensamiento, que no creo que tenga que rectificar.

Leonard Euler, en 1732, demostró que la conjetura de Fermat sobre la expresión de algunos números primos era falsa. Haz tus investigaciones, busca, piensa como Euler, y demuestra la falsedad de esa conjetura.

C) En la novela se dice que un famoso matemático presentó una prueba de la Segunda (o "La Otra") Conjetura de Goldbach, dando como cierta una conjetura o hipótesis (que sigue sin estar demostrada) de otro afamado matemático. ¿De qué hipótesis se trata?

D) Hasta finales del siglo XX, había tres problemas sin resolver, que se consideraban los más difíciles y famosos, relacionados con las conjeturas anteriores. Escribe sus enunciados, los nombres de sus autores y el estado actual de su resolución.

E) En junio de 2006, la prensa se hizo eco de la noticia de que unos matemáticos chinos decían haber demostrado una conjetura muy famosa... ¿De qué conjetura estamos hablando? ¿En qué situación está el tema en la actualidad?



La conjetura de Goldbach


David Hilbert (1862-1943)


Constantin Carathéodory (1873-1950)


Kurt Gödel (1906-1978)

Un resultado sencillo

> Todo número par es suma de un número primo más un impar.

Este enunciado aparece en el libro. ¿En qué página? Demuestra que es un enunciado cierto.

Números Primos

Entre las páginas 36 y 37 se dice que Euclides demostró, por reducción al absurdo, un resultado importante sobre números primos.

A) ¿Qué resultado fue? Busca la demostración, estúdiala y exponla aquí.

B) Otro griego había inventado una criba de números naturales para obtener números primos. ¿Quién fue y en qué consiste esa criba?

C) Haz un comentario sobre el método de demostración por *reductio ad absurdum*. Busca una demostración por este método, estúdiala y redáctala aquí.

D) En la página 83 se habla de la variada problemática de la sucesión de los números primos. ¿Puedes concretar esa afirmación con varios ejemplos?

E) Constantino Karatheodori le pregunta al narrador (pág. 66) cuántos número primos hay menores que un número dado n. ¿Qué respuesta le da? ¿Cómo podrías comprobar tú que eso es así? Ese resultado se denomina el Teorema del número primo, y la demostración rigurosa, en 1896, se debe a los trabajos independientes de Jacques Hadamard y C. de la Vallée Poussin.

Mersenne y sus primos

En la página 126 se dice que el número 8191 se conoce como *número primo de Mersenne*.

A) Se denominan números de Mersenne los que tienen la forma 2^n-1, con n un número natural. Calcula los primeros números de Mersenne.

B) Se cumple la siguiente propiedad: si un número de Mersenne es primo, entonces su exponente n es primo también. Pero no es cierto el enunciado recíproco: si en un número de Mersenne el exponente n es primo, el número no es necesariamente primo. Un ejemplo de ello ocurre para $n = 11$. Demuéstralo.

C) El número 8191 ¿es de Mersenne? Si lo es ¿cuánto vale n? Demuestra que además es primo.

D) En 1644, Mersenne dijo que para $n = 13, 17, 19$, sus números son primos. Y era cierto. También dijo que $2^{67}-1$ también era primo... En 1903 Frank Nelson Cole, dio una conferencia donde demostró que ese número no era primo. ¿Serías capaz de escribir $2^{67}-1$ como producto de dos números?

E) Por cierto, ¿qué sabes de Mersenne? Haz una pequeña biografía.

La completitud en Matemáticas

Kurt Gödel resolvió *el problema de la completitud en matemáticas* en 1933.

A) ¿En qué consiste ese problema? ¿Cómo lo resolvió Gödel?

B) La solución de ese problema, además de ser *sublime*, como la calificaron Hilbert y Russell, generó mucha incertidumbre en la comunidad matemática de la época... ¿Por qué fue así?

C) ¿Qué relación hay entre el Teorema de Gödel y el Segundo problema de Hilbert?

D) ¿Qué relaciones estableció el tío Petros entre la Conjetura de Golbach y el Teorema de la incompletitud de Gödel?

E) Alan Turing, en 1936, demostró otro resultado relacionado con este tema (pág. 139). ¿Qué resultado es? ¿Qué relación tiene con el Teorema de Gödel?

La naturaleza de las Matemáticas

En varias páginas del libro se plantean cuestiones de interés sobre el conocimiento matemático:

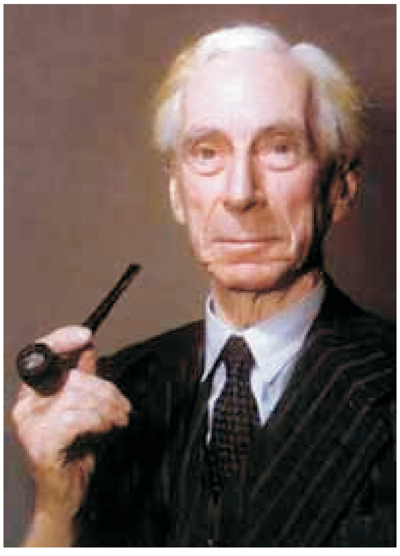
> ¿qué son las matemáticas en tu opinión? (pág. 31)
>
> ... las verdaderas matemáticas no tienen nada que ver con las aplicaciones prácticas ni con los procedimientos de cálculo que aprendes en el colegio. Estudian conceptos intelectuales abstractos que, al menos mientras el matemático está ocupado con ellos, no guardan relación alguna con el mundo físico y sensorial (pág 32)
>
> Los matemáticos encuentran el mismo placer en sus estudios que los jugadores de ajedrez en el juego (pág 32-33)
>
> ... el verdadero matemático se parece a un poeta o a un compositor musical; en otras palabras, a alguien preocupado por la creación de belleza y la búsqueda de armonía y perfección. Es el polo opuesto al hombre práctico, el ingeniero, el político o... el hombre de negocios. (pág 33)
>
> ... la construcción de teorías matemáticas, empezando con los axiomas y fundamentos... (pág 59)
>
> ... el profano en la materia no puede ni imaginar el placer del que se les ha privado (pág 159)
>
> La amalgama de Verdad y Belleza reveladas mediante la comprensión de un teorema importante no puede obtenerse mediante ninguna otra actividad humana... (pág 159)
>
> ... los libros de matemáticas no suelen leerse como las novelas... En este caso, leer significa entender, y para ello es preciso contar con una superficie dura, papel, lápiz y bastante tiempo libre. (pág. 169)

Haz un comentario personal sobre estas frases y expón lo que para ti son las matemáticas. ■

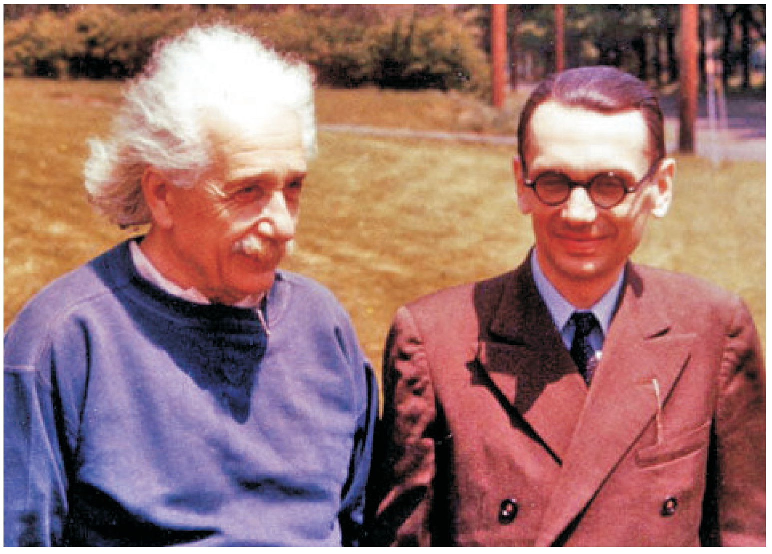
REFERENCIAS BIBLIOGÁFICAS

KLEIN, M. (1985), *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*, Ed. Siglo XXI, Madrid.

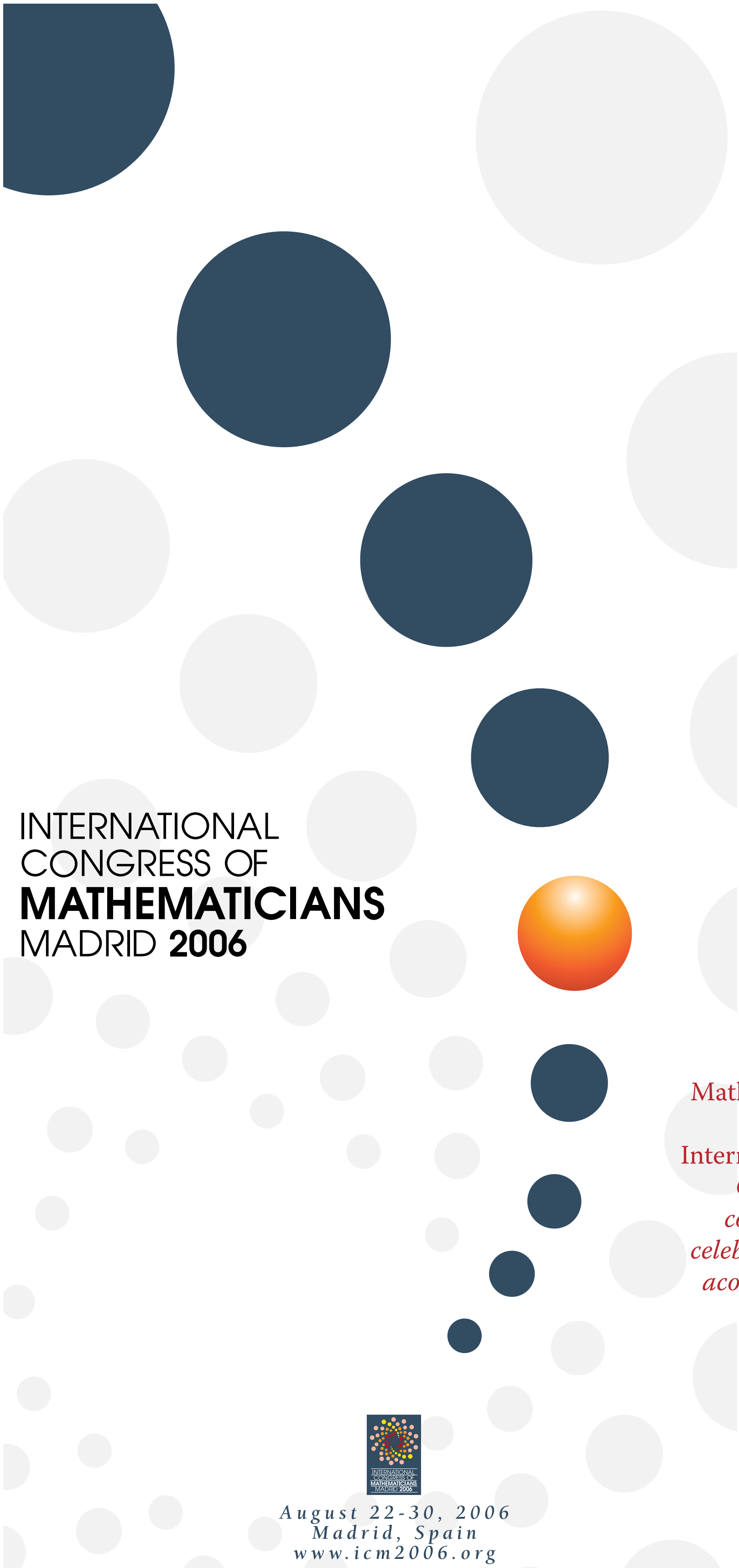
STEWART, I. (1998), *De aquí al infinito. Las matemáticas de hoy*, Ed. Grijalbo Mondadori, Barcelona.



Bertrand Russell (1872-1970)



Albert Einstein (1879-1955) con Kurt Gödel (1906-1978)



Congreso Internacional de Matemáticos ICM 2006 Madrid

del 22 al 30 de agosto de 2006

Entre el 22 y el treinta de agosto se celebró en Madrid el XXV International Congress of Mathematicians (ICM 2006). *Precedido unos días por la asamblea de la* Unión Matemática Internacional (UMI), *que se celebró en Santiago de Compostela y rodeado de una constelación de congresos satélite, treinta y seis de las cuales se celebraron en territorio español, el ICM ha sido el acontecimiento del año en el mundo mátemático y la fiesta de la mayoría de edad, por fin, de la matemática española.*

Dos crónicas, la del presidente del Comité Organizador, Manuel de León y la de un asistente, José Luis Muñoz, nos acercan a lo vivido en Madrid en este pasado agosto.

Doce días para recordar

El *ICM2006* de Madrid acaba de terminar y, sin duda alguna, ha constituido un auténtico éxito, convirtiéndose en el mayor evento de las matemáticas españolas de todos los tiempos. Es momento ahora de hacer balances, de extraer enseñanzas para el futuro y de administrar adecuadamente el impacto conseguido.

Una de las cuestiones que nos preocuparon durante mucho tiempo desde la Presidencia de la Organización del ICM2006 Madrid fue como implicar al profesorado de Secundaria y en general, a todo el sector educativo. Un ICM tiene una componente esencialmente científica, porque se trata de debatir sobre los últimos resultados matemáticos en materia de investigación, así que la temática podía parecer lejana a este profesorado.

Sin embargo, un ICM conlleva también una serie de características que lo convierten en atractivo para cualquier matemático. En primer lugar, hay una componente mediática clave: los premios. Las medallas Fields, el premio Nevanlinna y el más recientemente creado premio Gauss, presentan el suficiente atractivo para interesar a cualquier matemático, sea cual sea el nivel educativo en el que trabaje. Además, en este ICM 2006 de Madrid, el atractivo era todavía mayor: la resolución de la conjetura de Poincaré por Grisha Perelman, los trabajos claves para Internet de Jon Kleinberg, Premio Nevanlinna, o el indiscutible valor de Kiyoshi Itô, una figura legendaria en los métodos estocásticos con sus aplicaciones a la medicina, los mercados financieros, la biología o la física.

Por otra parte, la sección 19 estaba enteramente dedicada a la Educación Matemática y la Divulgación de las Matemáticas, con paneles que debatirían sobre el sistema educativo norteamericano, los informes PISA y TIMMS, las competiciones matemáticas para jóvenes, todos ellos temas que suscitarían el interés del colectivo de la Secundaria.

Manuel de León
Presidente del ICM2006 Madrid
Presidente del CEMAT

A pesar de eso, la cuestión era complicada. Por ejemplo, la dificultad habitual para asistir a congresos por parte de este profesorado, que va desde la obtención de permisos hasta el

Presentación del ICM 2006. Foto ©Asociación ICM 2006

pago de los gastos inherentes a un acontecimiento de esta envergadura. En cuanto a eso, se hicieron esfuerzos, al menos en la Comunidad de Madrid, para conseguir que el congreso fuera considerado como acrividad formativa y creo que cualquier persona que haya asistido no tendrá dudas que el ICM2006 de Madrid ha supuesto una genuina actualización en las matemáticas. De cualquier manera, queda aún un largo camino para convencer a la administración central y a las administraciones autonómicas de la importancia de eventos de esta magnitud (o congresos en general) como parte integrante de la formación continua.

Pero el ICM2006 no se quedó en las actividades descritas anteriormente. Se pusieron en marcha iniciativas de tipo cultural y divulgativo de gran calado, actividades en las que estuvieron implicados profesores de secundaria. Las exposiciones del Centro cultural Conde Duque:*¿Por qué las Matemáticas?*, *La Belleza de los Fractales* o *Demoscen*") y la de al Biblioteca Nacional, *La vida de los Números*, están suponiendo una material educativo de primera línea, en la dirección del fomento de las llamadas enseñanzas regladas.

También se ha desarrollado una intensa actividad de difusión a través de los 20 boletines semanales que se publicaron en la web del ICM en las últimas 20 semanas previas al congreso. Estos boletines, elaborados por el gabinete de prensa en colaboración con los propios matemáticos, constituyen un excelente material divulgativo que podrá ser utilizado por el profesorado de secundaria.

El impacto mediático de este ICM ha sido único, no solo en España sino también en el extranjero. Aunque algunos lo han atribuido a la ausencia de Perelman y al evidente interés de los medios por este hecho, hay que señalar que nuestro gabinete de prensa trabajó un año con el Comité Organizador, diseñando los momentos y acontecimientos en los que era más interesante acercarse a los medios. Se ha conseguido así algo que por sí solo justificaría la celebración de este congreso: acercar de una manera masiva las matemáticas al gran público. Las matemáticas y los matemáticos serán vistos desde ahora de una manera más amable y la disciplina ha comenzado a ser apreciada. Esto supondrá una mejor disposición de los alumnos y sus familias.

En un evento de estas características, suele haber una gran presencia de autoridades, y en este caso, contamos con la Ministra de Educación y Ciencia, Doña Mercedes Cabrera Calvo Sotelo; el Alcalde de Madrid, Don Alberto Ruiz Gallardón; y la Presidenta de la Comunidad de Madrid, Doña Esperanza Aguirre Gil de Biedma. Y como no, de Su Majestad el Rey de España.

Quisiera destacar el discurso de Su Majestad el Rey Don Juan Carlos I. Me quedaría con esta parte de su discurso:

El Rey Don Juan Carlos con los premiados en el ICM-2006. Foto ©Asociación ICM 2006

> Este Congreso nos permite conocer los avances fundamentales que registra la investigación en esta disciplina, así como subrayar y promover en nuestras respectivas sociedades la enorme importancia que las Matemáticas revisten. Importancia por ser un instrumento básico para comprender el mundo, por constituir un pilar indiscutible de la educación, y por representar una herramienta imprescindible para asegurar el progreso en beneficio de la Humanidad.

No tenemos los matemáticos españoles tantas ocasiones en las que una institución tan importante como la corona haga afirmaciones que den este relieve a las matemáticas: Seguro que en el futuro invocaremos más de una vez este importante discurso.

Quiero recordar aquí los tres ejes de actuación que el Comité Ejecutivo se marcó desde el principio:

- **El eje europeo**, simbolizado por la celebración de la Asamblea General de IMU en Santiago de Compostela;
- **El eje latinoamericano**, para reforzar los contactos matemáticos con los países de esa región;
- **El eje mediterráneo,** a fin de aumentar la cooperación en esta área, especialmente con los países del norte de África.

En los próximos meses y años esperamos poder apreciar si esos objetivos se han conseguido.

En cuanto a las estadísticas, han asistido unos 3600 matemáticos de 118 países, más 400 acompañantes, convirtiéndose así en el congreso más numeroso de nuestra historia. La presencia española ha sido masiva, con unos 1200 asistentes, una tercera parte del total, con una notable presencia de jóvenes. En cuanto al programa científico, hasta ahora sólo un matemático español, el prof. Jesús Sanz Serna había sido invitado en el ICM 1994 de Zürich; en el ICM2006 contamos con un conferenciante plenario y ocho invitados (podrían también contabilizarse aquí otros dos conferenciantes invitados españoles que actualmente trabajan en el extranjero).

El ICM2006 se fijó unos ambiciosos objetivos en ayudas en coordinación con IMU; así se han concedido 370 becas, de las cuales 170 fueron subvencionadas por IMU y las restantes por el Comité Organizador.

A grandes rasgos, el Programa Científico del ICM2006 constó de 20 conferencias plenarias, 169 conferencias invitadas en 20 secciones científicas, unas 1100 comunicaciones (orales, posters, software matemático) y una amplia serie de actividades adicionales como la Conferencia Emmy Noether (impartida por la Profesora Choquet-Bruhat), la conferencia de John Morgan sobre la conjetura de Poincaré (el gran tema del ICM2006), y la conferencia de Benoit Mandelbrot.

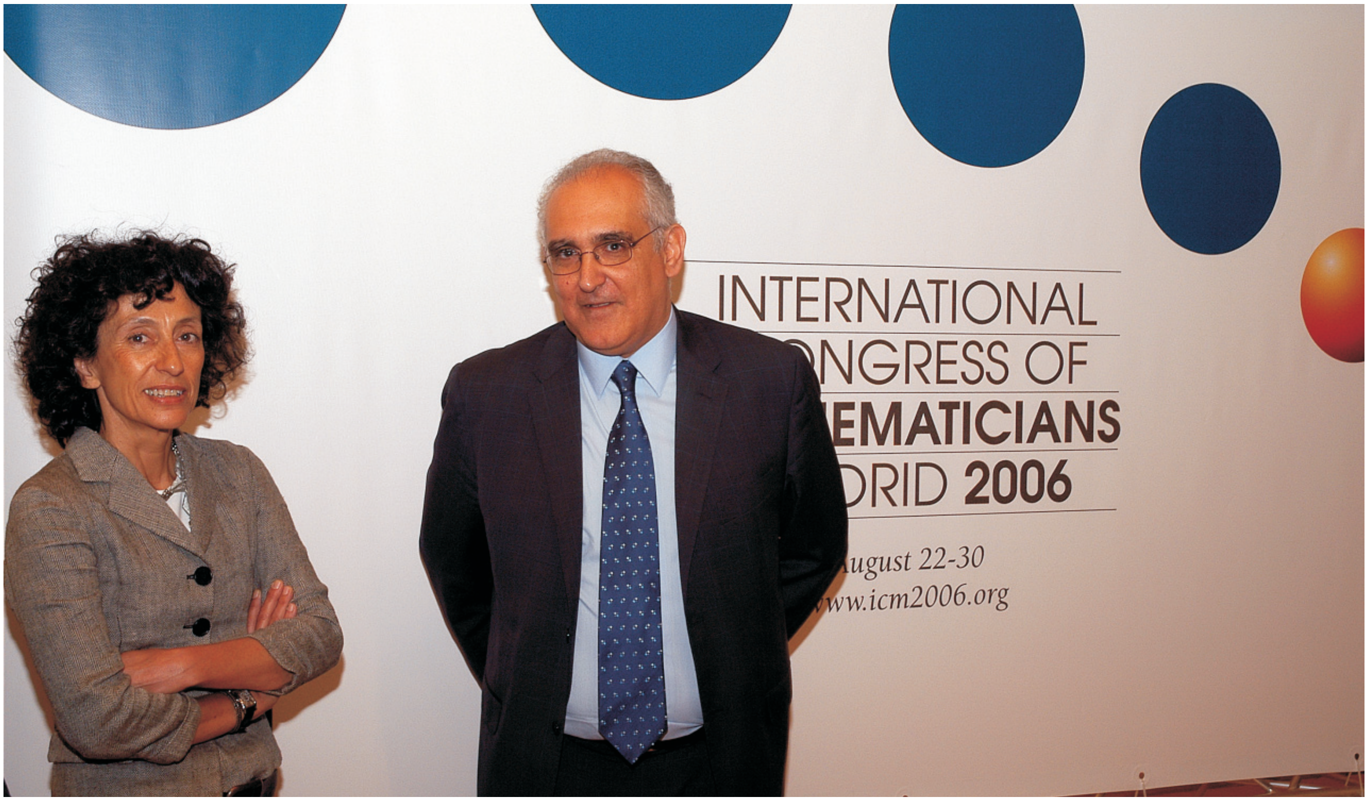
Se organizaron varias mesas redondas que suscitaron gran interés:

- *Should mathematicians care about communicating to broad audiences? Theory and Practice*, organizada por la European Mathematical Society,
- *Mathematics for Science and Society*, organizada por el NEST project Shaping New Directions in Mathematics for Science and Society of the European Commission,
- Mesa de clausura ICM 2006: *Are pure and applied mathematics drifting apart?*,
- *e-Learning Mathematics*, organizada por la Conferencia de Decanos de Matemáticas,
- *Matemáticas para la paz y el desarrollo*, dando cuenta de la escuela mantenida en Córdoba el pasado Julio en colaboración con la Sociedad Thales de Educación Matemática.

Otra importante componente han sido los 64 congresos satélites organizados en torno al ICM, cifra record en la historia, de los cuáles 36 se han celebrado en España. Esto muestra la gran capacidad de organización de los matemáticos españoles.

Debemos también destacar la labor del voluntariado, con unas 700 solicitudes de las cuáles se han seleccionado para diferentes tareas unos 350. El perfil ha ido desde estudiantes de licenciatura hasta posgraduados. No sólo se han seleccionado voluntarios de la región de Madrid, sino también de otras regiones españolas, en la idea siempre de implicar a todo el colectivo matemático español.

La financiación del ICM2006 ha descansado fundamentalmente en las administraciones públicas: MEC, MAEC, CSIC, Ministerio de Cultura, Gobierno local de Madrid y Ayuntamiento. Puede decirse que la financiación pública obtenida ha supuesto un hito en este tipo de eventos en España. Debemos señalar también la aportación de las universidades de la región desde el primer momento así como de todos los departamentos y facultades de matemáticas del país, que han actuado como una auténtica fila cero. Esta es



Mercedes Cabrera, ministra de Educación, y Manuel de León, presidente del Comité Organizador y autor de esta crónica. Foto ©Asociación ICM 2006 otra muestra de la gran vertebración interna de las matemáticas españolas. Finalmente, cabe destacar la escasa financiación privada obtenida, especialmente en el ámbito tecnológico, poniendo en evidencia una carencia importante de nuestra investigación matemática: la escasa conexión con el tejido de I+D+i, que habrá que incrementar en el futuro.

En general, el ICM2006 de Madrid ha sido una gran feria de las matemáticas, y cualquier participante lo ha podido apreciar. En mi personal opinión, ha servido para que cualquier matemático se sintiera estimulado por el ambiente excepcional que vivimos desde el 19 al 30 de agosto pasados.

Y no me he equivocado en las fechas, porque aunque el ICM2006 de Madrid se desarrolló desde el 22 al 30 de agosto, tres días antes asistimos a otros históricos acontecimientos: la celebración de la Asamblea General de IMU en Santiago de Compostela el 19 y 20 de agosto.

Ha sido una Asamblea General intensa, en la que se debatían importantes temas:

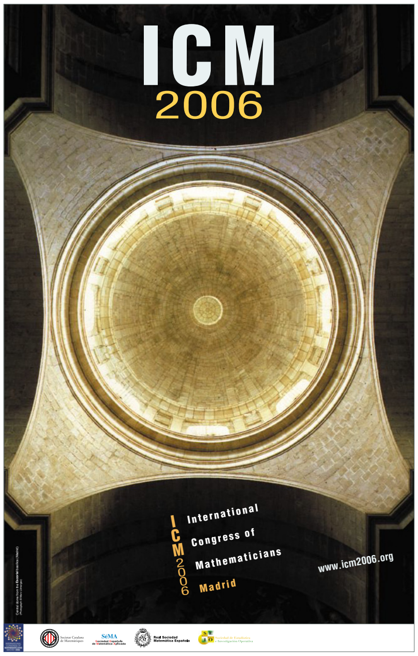
- Económicos, que han supuesto un aumento de un 5% anual en la unidad de cuota, y un aumento importante en el número de unidades que deben aportar los países de los grupos IV y V, en el sentido que los más ricos deben aportar mucho más que los menos favorecidos. Esta medida permitirá a IMU seguir financiando actividades de cooperación.
- Organizativos, con la elección de los diversos Comités; en particular, Marta Sanz Solé, de la Universidad de Barcelona, entra a formar parte del Cooperation and Development Comisión, y Manuel de León entra en el Comité Ejecutivo de la IMU, primera ocasión en que un español ocupará tal puesto.
- Educativos, con la elección de un nuevo presidente de ICMI, Michèle Artigue, y la decisión de que el Comité Ejecutivo de ICMI se elegirá desde ahora en su Asamblea General.

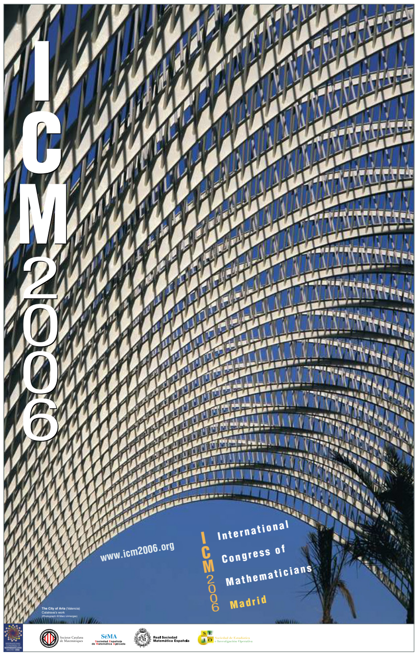
Mucho se debatió en Santiago sobre la mejor manera de articular los temas educativos en IMU y es importante reproducir literalmente la siguiente resolución, aprobada en la Asamblea General de Santiago:

> **Resolución 8.**
>
> La Asamblea General de IMU se reafirma en la importancia de los temas tratados por ICMI (la International Commission on Mathematical Instruction). Se reconoce la importancia de continuar y fortalecer las relaciones entre IMU e ICMI y se insta a incrementar la implicación de los investigadores en matemáticas en la educación matemática en todos los niveles.

Es toda una declaración de principios que esperamos cale en nuestra comunidad matemática. En España hemos iniciado hace tiempo este acercamiento entre ambos colectivos a través del Comité Español de Matemáticas, CEMAT. Esta resolución de IMU nos insta a seguir en esa dirección.

Ambos acontecimientos, la Asamblea General de IMU y el ICM2006 Madrid, han marcado el próximo futuro de las matemáticas españolas, consiguiendo un gran impacto mediático y una mayor presencia internacional. Tenemos ahora el compromiso de administrar el éxito y conseguir una mejora substancial en el ámbito educativo y en la investigación. Estoy convencido que lo conseguiremos. ■





Perelman, protagonista y ausente en el ICM 2006. Foto ©Asociación ICM 2006

Matematicos de todo el mundo en Madrid

El pasado día 22 de agosto se inauguró en Madrid la vigésima quinta edición del Congreso Internacional de Matemáticos, ICM 2006, evento que reunió durante ocho días alrededor de unos 3600 matemáticos de unos de 120 países.

Echando un vistazo hacia atrás podemos ver el calado histórico del ICM, que comenzando en 1897 en Zürich ha sido un punto de reunión de la comunidad matemática, que cada cuatro años, salvo algunas excepciones, ha juntado a los mejores matemáticos del mundo con el propósito de compartir sus investigaciones y a veces, incluso de decidir el rumbo a seguir, como hizo, por ejemplo David Hilbert en el ICM de 1900 en París, con su lista de 23 problemas que los matemáticos del siglo XX tendrían que resolver.

En el ICM también se entregaron las medallas Fields, Nevanlinna y por primera vez, la medalla Gauss. Y este acto fue precisamente el inicio del congreso. Para los que nos gustan las matemáticas y nos dedicamos a ellas, en mayor o menor medida, presenciar el acto de inauguración fue verdaderamente emocionante, no todos los días se conoce en vivo a los mejores como tampoco puede asistir a la entrega del mayor reconocimiento que en el mundo de las matemáticas se puede obtener.

En esta ocasión los galardonados con la medalla Fields fueron: los rusos Andrei Okounkov y Grigori Perelman, el australiano Terence Tao y el francés Windelin Werner. La medalla Nevanlinna fue para el norteamericano John Kleinbergs y la primera medalla Gauss para el japonés Kiyoshi Ito.

Durante los días previos e incluso en los instantes iniciales del congreso, flotaba en el aire un ambiente de misterio en torno a la famosa conjetura de Poincaré y a la demostración que Gregory Perelman dio en 2002. ¿Sería este congreso donde definitivamente se diera por válida la demostración? ¿Aparecería Perelman?

José Luis Muñoz Casado
SMPM. Emma Castelnuovo
IES Salvador Dalí. Madrid

Todas estas incógnitas se resolvieron cuando John Ball, presidente de la IMU (Unión Internacional de Matemáticos) anunció el rechazo por parte de Perelman del premio. Sin embargo, aún sin estar presente, su demostración de la conjetura de Poincaré impregnó todo el congreso. Muchos de los que estábamos allí, esperamos poder ver al hombre que encontró la demostración de la conjetura, resolviendo uno de los misterios del siglo XX.

En el cocktail celebrado tras la ceremonia de apertura, el eje de las conversaciones eran Perelman y la conjetura. Paseando por entre la gente se podía oír su nombre y el de Poincaré en varios idiomas y con varios acentos. Agrupados en corrillos, todo el mundo hablaba sobre la decisión de Perelman y la transcendencia de su demostración.

Con el buen sabor de boca de la ceremonia de apertura y también, por que no decirlo, de la paella y la fideua que la organización ofreció, esperamos pacientemente la conferencia de Richard Hamilton, creador de una de las herramientas matemáticas que Perelman usó para demostrar la conjetura: el flujo de Ricci.

Como no podía ser de otra forma, el salón de actos del palacio de congreso se volvió a llenar para escuchar a una de las máximas autoridades en la conjetura de Poincaré. Hamilton hizo un repaso de sus investigaciones y expuso los motivos por los que cree en la validez de la demostración realizada por Perelman. Sin duda, la conjetura de Poincaré había sido resuelta. En palabras de Hamilton: *In this way we actually get a proof of the Poincaré Conjecture* (De esta manera realmente hemos conseguido una demostración de la Conjetura de Poincaré).

El congreso había empezado, y comenzaba la dura tarea de seleccionar que actividades realizar en el transcurso del día, fue tanta la oferta que muchas veces resultaba un verdadero quebradero de cabeza decidir que hacer. En total se impartieron 20 conferencias plenarias y unas 170 conferencias distribuidas en 20 secciones científicas. La documentación aportada por la organización, distribuida por días y por materias facilitó mucho esta labor, en este sentido solo cabe felicitarles.

Las conferencias presentaban un gran nivel científico siendo a veces demasiado técnicas para los no especializados e incluso para matemáticos especialistas en otras áreas, sin embargo, sí podían apreciarse las líneas de investigación, el trabajo realizado y el camino a seguir.

Un efecto colateral de cada conferencia eran las charlas creadas a la salida de sala. Estas charlas podrían considerarse como el segundo gran objetivo de un ICM, poner en contacto a la comunidad matemática. Era frecuente ver abrazos y expresiones de alegría al reencontrarse colegas que quizás trabajaran diariamente via internet pero que sin embargo no se veían físicamente. También podía observase gente trabajando en la zona wifi que la organización habilitó e incluso colegas discutiendo sobre una hoja de papel.

En el ecuador del congreso apareció Keizo Ushio con su escultura, un magnifico toro, perfectamente recortado. A lo largo del día se podía oír el incesante ruido de su martillo neumático. Día tras día perforó el toro hasta conseguir dos cintas de moëbius entrelazadas. La curiosidad hacía que siempre estuviese rodeado de observadores, pues a simple vista se podía contemplar un gran toro de piedra y un montón de perforaciones, sin embargo, Keizo cumplió su objetivo y un día antes de acabar el congreso consiguió separar las dos piezas, las dos cintas.

Foto APS

Un paseo por la planta donde se encontraban las librerías nos pone en contacto con editoriales emblemáticas que muchos conocemos de las bibliotecas. Editoriales como Springer, Birkhäuser, Cambridge University Press o Princenton University Press hacían sentir la importancia del congreso, era posible comprar libros emblemáticos. También se podían visitar los *stands* de muchas de las sociedades matemáticas históricas como la London Mathematical Society, European Mathematical o la Society American Mathematical Society.

La Real Sociedad Matemática Española aprovechó el congreso para presentar la publicación en edición facsímile, traducida y comentada de algunos trabajos de Arquímedes.

Fue también interesante poder ver a Benoit Mandelbrot, creador de la geometría fractal, en la conferencia plenaria titulada *La naturaleza de lo rugoso en las matemáticas, la ciencia y el arte.*

En fin, estar allí fue tomar conciencia de un mundo verdaderamente activo, de la importancia de las matemáticas en una sociedad eminentemente tecnológica, de la interrelación entre la diferentes disciplinas y sobre todo de su universalidad, que consiguió, en esta ocasión, juntar a más de tres mil personas de más de cien países distintos para hablar de un tema común: las matemáticas. ■

Eifiona, de Tina Oloyede. Foto © Asociación ICM 2006

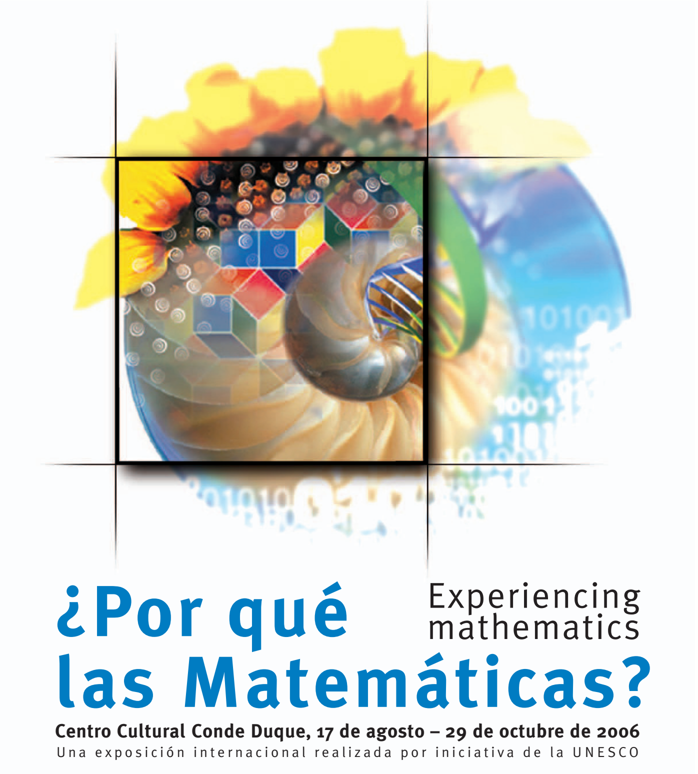
Tres exposiciones de Matemáticas en el Centro Cultural Conde Duque de Madrid

Podemos afirmar sin peligro de que nos tachen de exagerados que durante los meses de agosto, septiembre y octubre de este año, Madrid ha sido la capital mundial de las matemáticas. Y no sólo de las matemáticas por y para los profesionales de esta ciencia, que en número de 3.500 se reunieron con motivo del ICM 2006. Madrid ha sido testigo de una explosión de matemáticas populares, dirigida y pensada para el gran público. Hasta seis exposiciones de contenido matemático, vinculadas al Congreso Internacional de Matemáticos han coincidido en el tiempo.

Tres de ellas —¿Por qué las matemáticas?, Arte fractal: belleza y matemáticas, *y* Demoscene: matemáticas en movimiento*— han compartido espacio en el Centro Cultural Conde Duque desde el 17 de agosto hasta el 29 de octubre.*

Aurora Bell·lloch
SMPM Emma Castelnuovo
IES Alameda de Osuna. Madrid

Estas manifestaciones culturales cuyo principal objetivo es acercar las matemáticas al gran público, también han venido a refutar dos creencias muy arraigadas, a saber, que Madrid en el mes de agosto se queda vacío y que las matemáticas no atraen al público no iniciado. En efecto, la presencia de medios y asistentes a la inauguración que tuvo lugar el 17 de agosto ya dejó satisfechos a los organizadores, pero a partir del día siguiente los cálculos más optimistas en cuanto a las visitas se vieron superados: se formaban colas que daban la vuelta al patio del museo para entrar a ver las exposiciones. Los voluntarios, estudiantes de Matemáticas de la Universidad Complutense, que guiaban al público en las exposiciones no han disfrutado de muchos momentos para el relajo y la contemplación. Desde mediados de septiembre y hasta finales de octubre las visitas de los alumnos de los centros educativos han permitido mostrar a los jóvenes una visión mas amable y también más real y más próxima a la auténtica realidad de las matemáticas.



¿Por qué las Matemáticas?

Es una exposición internacional realizada a iniciativa de la UNESCO por el Centro de Ciencias de Orleáns (Francia) junto a la Universidad de Tokai, Tokyo (Japón) y la Universidad Ateneo de Manila (Filipinas). La exposición del Conde Duque cuenta también con aportaciones de los dos comisarios, Raúl Ibáñez y Antonio Pérez Sanz. Se expuso por primera vez en Copenhague, en julio de 2004 con ocasión del X ICME y desde entonces ha estado en París, Orleáns, Atenas, Pekín, Sudáfrica, Mozambique y Namibia. De Madrid viajará a Bangkok y Lyon. Esta exposición se concibió para que el público tomara conciencia de lo esenciales que son las matemáticas en su vida cotidiana, desde su presencia en fenómenos de la naturaleza a las tecnologías más avanzadas, y también para mostrar que es una ciencia que puede resultar interesante y entretenida.

La muestra consta de 9 mesas tituladas *Leer la naturaleza, Teselaciones y simetrías, Llenar el espacio, Unir mediante una línea, ¿Por qué calcular?, Construir, Calculando, Optimización* y *Demostrando*. En cada mesa, hay unos carteles en los que se da una explicación de la utilidad o la función de las matemáticas en fenómenos o situaciones cotidianas. Sobre cada mesa el visitante se encuentra experimentos, juegos, problemas en los que debe manipular, tocar, probar, jugar y pensar; en el fondo, se pretende que actúe como un auténtico matemático. La exposición se completa con ocho experimentos extra que no están situados en ninguna de las nueve mesas aunque sí se relacionan con algunos de los temas propuestos.

En un pequeño espacio anexo, se exhiben algunos vídeos relacionados con las matemáticas: las conocidas series *Más por Menos* y *Universo Matemático* de RTVE, de Antonio Pérez, vídeos de la serie *Arte y Matemáticas* de Michele Emmer y vídeos de la UNED.

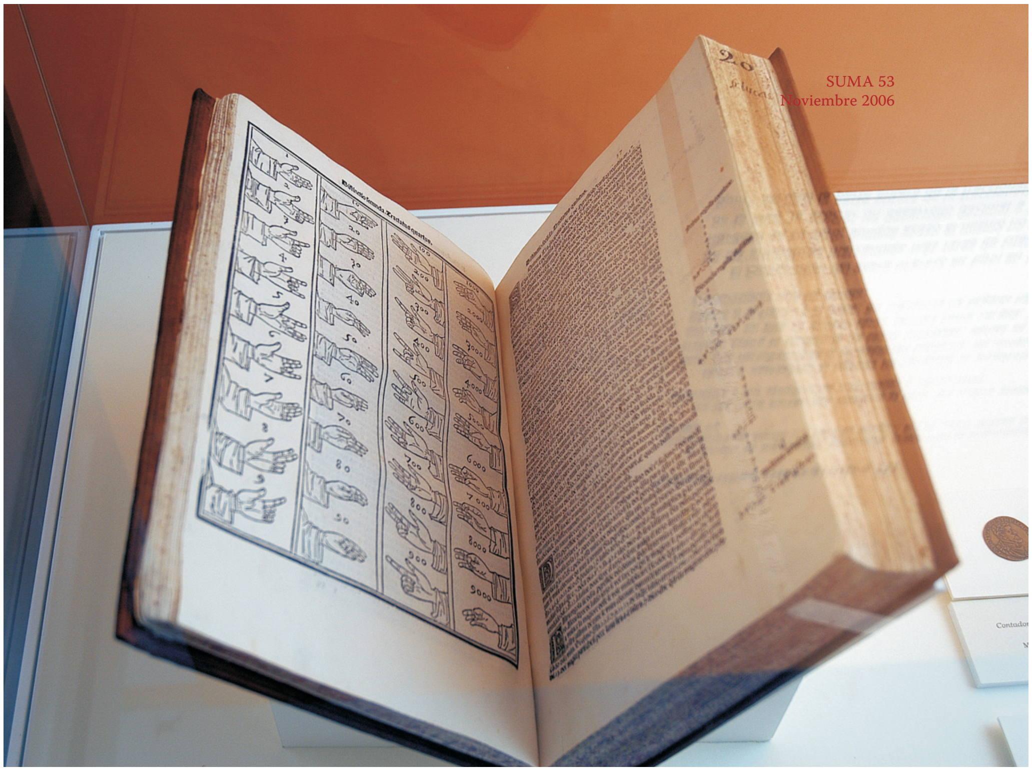
Benoit Mandelbrot durante su visita, con Antonio Pérez, uno de los comisarios de la exposición. Foto ABB 2006

Arte Fractal: belleza y matemáticas

En esta exposición se muestran 25 cuadros, 15 de ellos son los finalistas del *Concurso Internacional de Arte Fractal ICM2006 Benoit Mandelbrot*, presidido de forma honoraria por el propio Mandelbrot, cuya fotografía confeccionada con todos los fractales presentados al concurso preside la sala, y otra parte está formada por 10 cuadros de artistas internacionales invitados por el jurado. Los autores de las obras proceden de los más diversos campos profesionales: ingeniería, fotografía, ballet, medicina, informática, investigación… y por supuesto matemáticas. En una pequeña sala de proyección se puede ver el vídeo *Fractales, la geometría del caos* de la serie *Más por Menos,* de Antonio Pérez Sanz.

Demoscene: matemáticas en movimiento

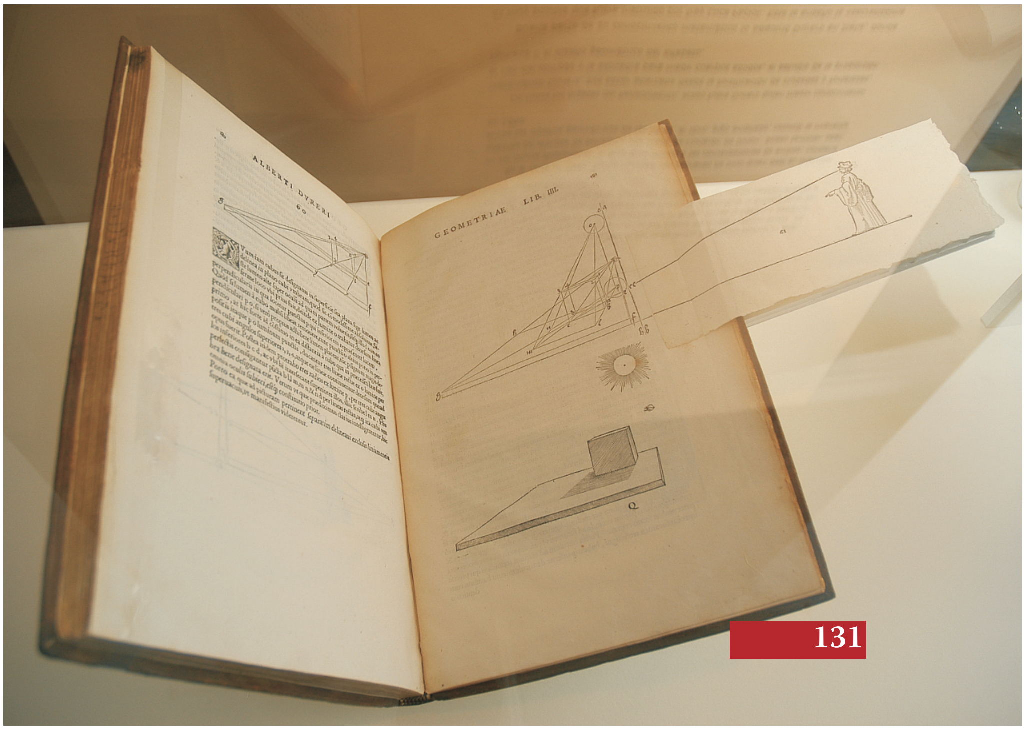
En una gran pantalla se proyectan imágenes en movimiento generadas en tiempo real por ordenador, mediante algoritmos numéricos. Para crear las imágenes se utilizan funciones matemáticas. En la creación de cada *demo* participan programadores, matemáticos y artistas. Este nuevo *arte* surgió hace aproximadamente una década y su origen está en las marcas que los hackers ponían a las películas cuando lograban piratearlas. Esa marca debía ser una imagen animada y para que no ocupara espacio empezaron a poner funciones que generaban imágenes. En la actualidad los grupos de *demoscene* esparcidos por toda Europa son auténticos creadores de pequeñas obras de arte y de tecnología capaces de competir en calidad artística y fantasía con las mejores animaciones y efectos especiales de las grandes superproducciones americanas.



Summa de arithmetica geometria proportioni e proportionalità,
Luca Pacioli

La vida de los números

Junto a estas tres exposiciones, la Biblioteca Nacional ha brindado al público desde el 7 de junio hasta el 10 de septiembre la ocasión de acercarnos a la historia de los números a través de la exposición *La vida de los números*, en la que se pone de manifiesto, en palabras de Antonio J. Durán, comisario de la exposición, la relación de los números con la fisiología misma del ser humano, con el nacimiento de la escritura, la astronomía y la medida del tiempo, con los avatares del comercio, con la imprenta, con las intransigencias religiosas o con la creación del canon renacentista para el cuerpo humano. Hemos podido acercarnos a auténticas joyas, entre las que cabe destacar el *Codex Vigilanus*, el *Codex Matritensis*, la *Summa Aritmética* de Luca Pacioli, tablillas sumerias o la *Cosmografía* de Ptolomeo.

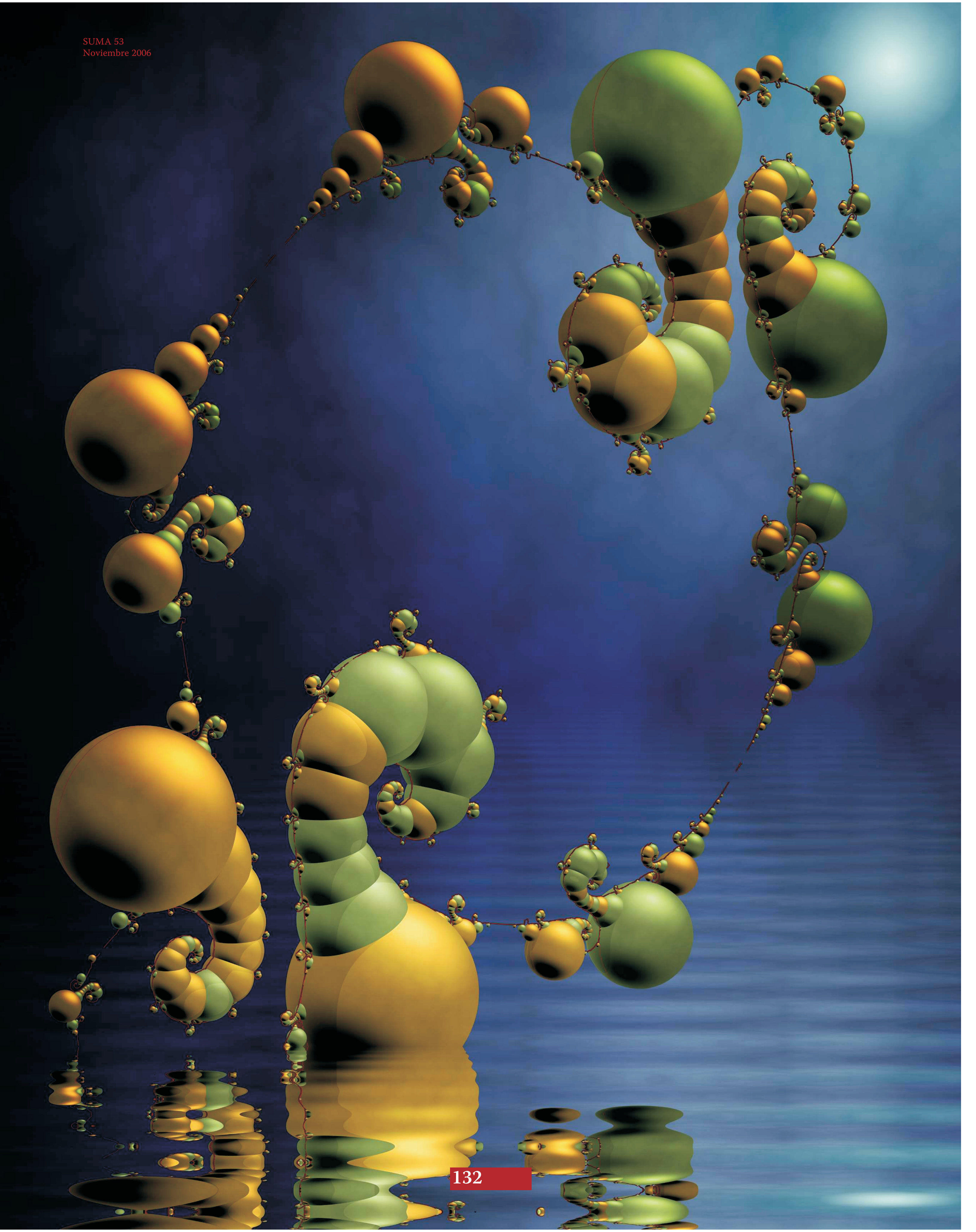


Geometriae,
Albero Durero

Otras dos exposiciones, estas dirigidas a un público más restringido han completado el panorama matemático de este sugerente verano madrileño: desde el 28 de junio al 27 de octubre, la exposición bibliográfica *Historia del Conocimiento Matemático. Libros antiguos de la Biblioteca de la Complutense*; ofrece al amante de las curiosidades impresas, de la mano de Ricardo Moreno comisario de la exposición, un inolvidable paseo por las grandes obras matemáticas de todas las épocas: desde Arquímedes y Euclides hasta Euler, pasando por Kepler, Galileo, Wallis, Newton o Laplace, acompañados de obras menos conocidas, pero sin duda interesantes, de matemáticos españoles de los siglos XVI al XIX.

Por último la Sala de Exposiciones del Jardín Botánico de la Universidad Complutense de Madrid nos ha introducido, de la mano de Capi Corrales, en la aventura científica y vital del lógico más grande de todos los tiempos a través de la exposición *Kurt Gödel 1906-2006* con la que la Universidad de Viena inauguró el congreso para celebrar su centenario.

Decididamente, y para que nos sirva de consuelo, al menos durante unas cuantas semanas Madrid ha sido la capital mundial de las matemáticas y no sólo por el ICM; nunca las matemáticas han estado tan cerca de los madrileños y de los visitantes de la ciudad. ¡Que no caiga en el olvido! ■



Observar y aprender

Me llamo Inmaculada y soy alumna de tercer curso de la facultad de Ciencias Matemáticas, en la Universidad Complutense de Madrid.

Hace unos meses nos ofrecieron desde la facultad la posibilidad de trabajar como voluntarios en la exposición sobre matemáticas, que se iba a celebrar en el Centro Cultural Conde Duque, y yo acepté el reto sin saber muy bien a qué me lanzaba. Desde un principio parecía algo llamativo para los que estudiamos esta parte de las ciencias, ya que eran juegos lógicos y de ingenio que nos mostraban de una manera amena y curiosa el fondo de muchos conceptos matemáticos.

El primer día llegué con algo de miedo pues no sabía qué me iba a encontrar, y con el sentimiento de que iba a ser muy tranquilo aquello, ya que pensaba que no iría casi nadie a ver ese género de exposiciones.

Pero cuál fue mi sorpresa cuando vi que enseguida se empezaba a llenar la sala y no se vaciaba en toda la tarde. Venía gente de todas las edades, desde los niños pequeños con sus papás, hasta señores mayores, pasando por jóvenes y parejas con bebés. Era impresionante ver cómo algo que aparentemente es bastante odiado por la gente en el colegio, tiene tanto éxito en una exposición de esta naturaleza, con el lema *Prohibido no tocar*.

Quizá sea este lema el que hace tan apetitosa la visita a este lugar. Es una gran oportunidad para "enfrentarte cara a cara" con aquello, que de pequeño te parecía un verdadero "ogro" y para darte cuenta de que en el fondo son divertidas, que tienen utilidad, y que en la naturaleza también encontramos objetos con un concepto matemático que jamás podíamos imaginar.

Además me he dado cuenta de que los profesores venían expectantes buscando maneras y juegos para luego poder enseñar a sus alumnos de una forma entretenida y llamativa.

Me parece que es una exposición muy educativa para todas las edades, ya que los pequeños empiezan a ver cosas sencillas en los juegos y se dan cuenta de que pueden entender las matemáticas. Los que entendemos un poco más, vemos un trasfondo en esos juegos y nos remitimos a nociones que hemos visto en clase o incluso a demostraciones.

Quizá la exposición de *Arte Fractal* sea más productiva para los que estudiamos matemáticas o carreras relacionadas con ellas (como por ejemplo las ingenierías), ya que los niños no entienden tanto esta parte.

En la exposición de *¿Por qué las matemáticas?* podíamos ver conceptos de probabilidad, geometría, análisis... Entre otras cosas, podemos construir un fractal, ver la formación de las cónicas a partir del plano que corta a un cono, obtener la campana de Gauss (N (0, 1)), ver el camino más corto entre un número de puntos metiendo figuras geométricas en agua con jabón, demostrar el Teorema de Pitágoras, ver la demostración de Gauss de la fórmula de la suma de los n primeros naturales, o ver a cuánto tiende el límite de $1/2 + 1/4 + 1/8 + +1/16 + 1/32 + \ldots$

No sólo debemos fijarnos en estos dos aspectos de las exposiciones. Otro punto interesante es el de los vídeos informativos. Es sorprendente ver cómo se forman los fractales, cuál es su dimensión, de dónde provienen... y por supuesto los vídeos de la exposición de *¿Por qué las matemáticas?*, que son muy diversos y nos descubren frondosos conocimientos de distin-

Inmaculada Fernández Grado
Estudiante de 3º de Matemáticas
Universidad Complutense. Madrid
Voluntaria en las exposicones del C.C. Conde Duque

tos campos de las matemáticas. En ellos podemos ver, por ejemplo, la formación de las espirales, el azar de las matemáticas, los estudios de Escher y Moebius...

Yo he estado allí trabajando la primera quincena de septiembre y en todos esos días he podido observar y aprender infinidad de cosas.

Parta mí también ha sido muy educativa la exposición ya que en estos días he conseguido adquirir un montón de conocimientos que yo no he dado aún en clase y que son la base de algunos juegos o bien aparecían en los videos que proyectábamos.

Aún no he contado cuál era nuestra misión allí: consistía en cuidar que no hubiera ningún contratiempo, si se perdía o rompía alguna pieza reponerla, y contestar a las preguntas que nos hiciera la gente. En general, no preguntaban mucho y cuando lo hacían tampoco pedían grandes explicaciones, sino pequeñas aclaraciones sencillas y breves. Muchas veces, al tener que explicar un concepto a otra persona, como tenía que esforzarme para explicárselo de manera clara y sencilla, me servía a mí para terminar de entenderlo mejor.

Un día cualquiera allí se desarrolaba de la siguiente manera: llegábamos unos minutos antes de la apertura de la exposición para encender los tres vídeos (uno en cada exposición). Luego paseábamos por la sala para estar a disposición de aquel que quisiera hacernos alguna pregunta y para desmontar los juegos cuando los dejaban hechos, para que el siguiente no viera la solución antes de intentarlo. Además teníamos que estar pendientes del vídeo de la sala de los juegos, ya que había que cambiarlo cuando se acabara e ir variando entre la amplia colección de la que disponíamos.

Nos íbamos turnando para ir a la otra sala, la de *Arte Fractal* y *Demoscene*, ya que ésta es mucho más tranquila y no requiere tanta atención como la otra. Aquí tampoco preguntaba mucho la gente, en general. Algunos sabían mucho y no necesitaban ninguna explicación, y los que no sabían nada, por lo general lo miraban y se iban, sin preocuparles en gran medida de qué era eso realmente o de dónde salía. Luego, al finalizar la jornada debíamos apagar los vídeos y dar un repaso general a las dos salas para que no quedaran ni papeles ni cosas desordenadas.

A lo largo de estos quince días he podido observar multitud de actitudes de la gente: desde la gente que venía sabiendo muchas cosas y que se explicaban entre ellos conceptos profundos y topológicos de los fractales, hasta la gente que se asombraba de este tipo de arte tan desconocido y que no miraba más allá, pasando, cómo no, por aquellos curiosos que querían saber algo más sobre estas figuras autosemejantes.

Para mí, en el fondo, estos días han sido como una larga clase interactiva, en la que he avanzado como matemática en algunos conocimientos y como persona ya que he tenido un trato directo con el público, lo que conlleva un pequeño esfuerzo para expresarme en todo momento con claridad y sencillez, sin olvidar la naturalidad y tratando de agradar a la gente.

Quizá lo que más me sorprendió desde el comienzo fue la cantidad de gente que visitaba la exposición, que incluso se formaban largas colas para entrar.

Ha sido una experiencia muy gratificante para mí, y que sin duda alguna, repetiría. De hecho, repetí en la Noche en Blanco, y tuve que explicar toda la exposición a la gente que vino y contribuir así a morstrar que las matemáticas también pueden ser divertidas.

Aprovecho la ocasión para dar mi mas sincera enhorabuena al creador de esta exposición, y para decir que es una ocasión maravillosa para acercarte y adentrarte en un mundo que parece de locos, pero que, con todos mis respetos, últimamente he descubierto que debemos de ser muchos locos porque si no, no tendría tanto éxito. ■

Un grupo de voluntarias en la exposición. Foto APS

Convocatoria del V Premio *Gonzalo Sánchez Vázquez*

La Junta de Gobierno de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas convoca el V Premio Gonzalo Sánchez Vázquez, *en homenaje de quien fue su Presidente de Honor, de acuerdo con las siguientes bases:*

1. Se trata de premiar la labor docente y los valores humanos: la entrega desinteresada, el amor, el espíritu tolerante, la buena disposición, etc. hacia sus alumnos, compañeros, amigos y, en general, hacia la enseñanza de la Matemática. Es decir, el magisterio en sentido amplio.

2. La periodicidad del Premio será la misma que la de las Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM).

3. El Premio consistirá en el nombramiento de Socio de Honor de la FESPM y placa conmemorativa u objeto alegórico.

4. Podrán concurrir al Premio los profesores dedicados a la enseñanza de las Matemáticas en cualquier nivel educativo.

5. Las candidaturas podrán ser presentadas por una sociedad federada y se dirigirán al Presidente de la FESPM. Los promotores presentarán el currículo e informes que estimen pertinentes, entre ellos el informe de la junta directiva de la sociedad o del conjunto de socios proponentes.

6. El plazo de presentación de candidaturas finalizará el 31 de enero de 2007.

7. La concesión del Premio se hará por la Junta de Gobierno de la FESPM. Para ello, el candidato deberá obtener mayoría absoluta en la correspondiente votación. De no alcanzarse mayoría absoluta en primera votación, se procedería a una segunda; de no obtener mayoría absoluta se declarará desierto.

8. Para la concesión del Premio, la junta de Gobierno atenderá, entre otros, a los siguientes criterios:

    - Su labor docente (dedicación a la enseñanza de la Matemática).
    - Valores humanos (tolerancia, entrega a los demás, talante, espíritu de diálogo, respeto a los compañeros, alumnos, etc.). Constatados por sus avalistas.
    - Currículo con hechos, anécdotas, etc. referidos por los proponentes que pongan de manifiesto estos valores humanos del candidato.

9. Se publicará en SUMA el resultado de la concesión del Premio y una semblanza del premiado.

10. La entrega del Premio se llevará a cabo en el acto de apertura o clausura de las XIII JAEM, que se celebrarán en Granada en julio de 2007. ■

Convocatoria del cargo de director/a de la revista *SUMA* de la FESPM

Los Estatutos de la *Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas* (FESPM) establecen, en su artículo 11, los cargos unipersonales, entre los cuales se contemplan las secretarías de área. En el artículo 7 del Reglamento de la FESPM se especifican las áreas de trabajo para las que se elegirán Secretarios/as. Éstas son: Publicaciones, Revista SUMA, Prensa, Relaciones Internacionales y Actividades.

La Junta de Gobierno de la FESPM convoca el cargo de Director/a de la Revista SUMA en los siguientes términos:

Podrá presentar su candidatura a Director o Directora de la Revista **SUMA** cualquier socio o socia de una Sociedad federada, con una antigüedad de al menos un año. La solicitud, dirigida al Presidente de la FESPM, deberá ir acompañada de la siguiente documentación:

- Certificado en el que conste que es socio activo de una Sociedad federada, y su antigüedad.
- Proyecto en el que se exponga su línea de trabajo.
- Relación nominal del Consejo de Redacción que propone para la realización de la Revista.
- Presupuesto económico de ingresos y gastos para el primer año de funcionamiento.

Las candidaturas podrán presentarse de cualquiera de las formas siguientes, teniendo en cuenta los plazos que en cada caso se señalan:

A) Por correo electrónico hasta el 31 de enero de 2007. En tal caso el mensaje se dirigirá a:
serapiogarcia@telefonica.net
Preferiblemente se utilizará esta vía.

B) Por correo postal, hasta el 25 de enero de 2007, dirigido a:
Sr. Presidente de la FESPM
Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Avda. España, 14, 5ª planta,
02002 Albacete

La Junta de Gobierno de la FESPM elegirá al Director o Directora de la Revista SUMA entre los candidatos presentados, oído previamente al Secretario General, en la primera reunión de 2007, prevista para febrero.

Joseph Sales Sufí
Secretario General de la FESPM

XVII Olimpiada Matemática Nacional

Villafranca de los Barros,
del 26 al 29 de junio de 2006

Del 25 al 29 de junio se ha celebrado la XVII Olimpiada Matemática Nacional para alumnos de 2º curso de ESO, convocada por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y organizada por la Sociedad Extremeña de Educación Matemática Ventura Reyes Prósper.

En esta ocasión han participado 23 chicas y 38 chicos que han representado a las 17 Sociedades participantes, además de los centros españoles en Marruecos, Roma y Andorra. Hubo también representantes de los centros del País Vasco, donde no hay por ahora una sociedad federada. A los participantes les acompañaron 25 coordinadores y el equipo local organizador.

Programa

1er Día, domingo 25 de junio

13:00 Recepción de los participantes en el Colegio San José de Villafranca de los Barros y distribución de habitaciones.
19:00 Inauguración de la Olimpiada en el Ayuntamiento de Villafranca de los Barros: Entrega de credenciales y presentación del programa.
19:20 Entrega de cámaras para el Concurso de Fotografía Matemática.
19:30 Visita a la exposición de Astronomía en la Casa de Cultura.
20:30 Visita guiada a Villafranca de los Barros.
21:30 Cena.
23:36 Descanso.

2º Día, lunes 26 de junio

9:15 Desayuno.
10:00 Realización de las pruebas individuales. IES Meléndez Valdes.
14:00 Comida en Fuente de Cantos.
16:00 Visita a la Casa Museo de Zurbarán.
16:50 Visita a una Industria Jamonera (Casa Carloto).
18:25 Realización de la primera parte de la Prueba por Equipos en Fuente de Cantos.
20:35 Recepción por autoridades (Casa de la Cultura).
21:30 Cena en Villafranca de los Barros.
23:48 Descanso.

3er Día, martes 27 de junio

8:30 Desayuno.
9:00 Salida a Cáceres.
11:00 Realización de la segunda parte de la Prueba por Equipos en la Ciudad Monumental de Cáceres.
13:00 Visita guiada por la Ciudad Monumental.
14:00 Comida en el Complejo Deportivo *Guadi Park*. Baño.
18:30 Visita a Mérida. Museo y Teatro Romano.
20:30 Recepción en la Asamblea de Extremadura.
21:30 Cena.
23:00 Sesión de Astronomía Nocturna (Agrupación Astronómica de Cáceres).
00:54 Descanso.

4º Día, miércoles 28 de junio

09:30 Desayuno.
10:15 Taller de *Linex* en el IES *Meléndez Valdes*.
12:45 Visita a una bodega en Villafranca de los Barros.
14:30 Comida en la Piscina.
16:00 Convivencia en el Complejo Deportivo de Villafranca de los Barros (actividades lúdico-recreativas: piscina, juegos, concursos).
20:30 *Más teatro y ~~menos~~ más Matemáticas*, Ismael Roldán y Pepe Muñoz de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática *Thales*.
22:00 Cena de despedida en Villafranca de los Barros (con presencia de Autoridades).
23:00 Actuación de un Grupo Musical.
00:12 Descanso.

5º Día, jueves 29 de junio

09:00 Desayuno.
09:30 Sesión sobre Resolución de Problemas. Discusión y análisis de los problemas planteados en las pruebas.
11:15 Charla-conferencia *Las matemáticas y Linex* a cargo de Mariano Real, profesor de Matemáticas y asesor de tecnologías de la Información y la Comunicación del Centro de Profesores y Recursos de Zafra.
12:00 Acto de entrega de premios y obsequios a todos los participantes.
12:30 Clausura de la XVII Olimpiada Matemática Nacional.

Foto P. Corcho

Como comenzó todo

En el acto de clausura de la XIV Olimpiada Matemática de Extremadura, la Sociedad Extremeña de Educación Matemática recibió el ofrecimiento del Ayuntamiento de Villafranca de los Barros para organizar una edición de la Olimpiada Nacional. Desde la Sociedad Extremeña se estudio el ofrecimiento y constatamos que Villafranca contaba con toda la infraestructura necesaria para organizar un evento de esta magnitud. La propuesta se trasladó a la Federación que, en una reunión de la Junta de Gobierno, la aprobó.

Desde el mes de julio comenzamos a trabajar en la confección del programa de actividades y en la elaboración de un portal web que fuese un lugar de encuentro para toda la Comisión Organizadora y los participantes:

http://sofd.unex.es/seem/nacional

También tuvimos en este mes un primer encuentro con las autoridades de Villafranca de los Barros, para concretar aspectos del programa y la financiación.

A lo largo de los siguientes meses, cerramos el programa y se tuvieron contactos con diferentes instituciones que contribuirían a la financiación. Destacamos el interés de la Consejería de Educación de la Junta de Extremadura, que ha participado económicamente e institucionalmente en la organización de esta Olimpiada.

Como puede apreciarse en el Programa, han sido cinco días con múltiples y diversas actividades que han permitido que broten fuertes lazos de amistad entre los participantes en esta Olimpiada Matemática. Estos vínculos se han mantenido en algunos casos después de la olimpiada gracias a la creación de un portal web en el que los participantes han intercambiado fotos y mensajes en los foros. Este portal seguirá funcionando hasta la próxima edición de la olimpiada, por decisión de la Comisión Nacional de Olimpiadas.

Además de las pruebas de contenido matemático, se han celebrado otras actividades, como la exposición de fotografías de Astronomía, la conferencia de Astronomía a cargo de miem-

Pedro A. Corcho Sánchez.
Coordinador XVII Olimpiada Matemática Nacional 2006

Foto P. Corcho

bros de la Asociación Astronómica de Cáceres, la presentación del sistema operativo *Linex* y la utilización de aplicaciones Matemáticas, diseñadas en este sistema operativo, para la resolución de problemas de Geometría. También se hicieron visitas al Colegio *San José*, lugar de residencia de los olímpicos, a la Casa Museo de Zurbarán, a la ciudad monumental de Cáceres, al Teatro y Museo Romano de Mérida y a una bodega de vinos de la denominación de origen *Tierra de Barros*.

Acto de clausura

En el acto de clausura, todos los participantes recibieron los mismos regalos y todos también un diploma de su participación en esta Olimpiada. Hay que resaltar el alto nivel alcanzado, buen comportamiento y colaboración mostrado por todos los participantes, lo que facilitó que esta olimpiada fuese un éxito. Este acto estuvo presidido por:

D.ª Eva María Pérez, Consejera de Educación de Extremadura.
D. Ramón Ropero, Alcalde de Villafranca de los Barros.
D. Floreal Gracia, Secretario de Actividades con Alumnos de la FESPM.
D. Ricardo Luengo, Presidente de la Sociedad Extremeña de Educación Matemática Ventura Reyes Prósper.
D. Juan Martínez, Director del Colegio *San José*.
D. Pedro Corcho. Coordinador de la XVII Olimpiada Matemática Nacional.

Entrega de premios

En el apartado *Circuito matemático* al equipo compuesto por:

Miguel Ángel Calero Madrid (Andalucia).
Javier Díez Chamarro (Aragón).
Helio de Grado Fernández (Cantabria).
Beatriz Gutiérrez Muñoz (Canarias).
Catalina Matamalas Galmés (Baleares).
Andrea Ortega Prieto (Asturias).

En el apartado *Fotografía matemática* al equipo compuesto por:

Luis Albert Moruno (Cataluña).
Alicia Carlosena Remírez (Navarra).
Eric Cuartero Zaragoza (Valencia).
Alejandro López Mizzi (Melilla).
Laura Pérez Gil (Castilla León).
María Ángeles Yepes Soto (Murcia).

En el apartado *Fotografía matemática y agua* al equipo compuesto por:

Miguel Ángel Calero Madrid (Andalucia).
Javier Díez Chamarro (Aragón).
Helio de Grado Fernández (Cantabria).
Beatriz Gutiérrez Muñoz (Canarias).
Catalina Matamalas Galmés (Baleares).
Andrea Ortega Prieto (Asturias).

Y por último, se hizo una mención especial a los siguientes alumnos por su elevado nivel demostrado en esta olimpiada:

Ricardo Berenguer Verdu (Valencia).
Gloria Castellvi Linde (Cataluña).
Alberto Merchante González (Roma).
Leticia Pardo Simón (Valencia).
Santiago Ramírez Aretio (Logroño).

El Centro la UNESCO de Extremadura avaló y reconoció estas Olimpiadas como de interés para los objetivos que la UNESCO pretende difundir a nivel internacional.

Nos vemos en Navarra en el 2007

Al finalizar el acto la Banda del Colegio *San José* de Villafranca de los Barros interpretó el himno de Navarra, que será la sede de la *XVIII Olimpiada Matemática Nacional*.

Desde la Sociedad Extremeña *Ventura Reyes Prósper* agradecemos la confianza depositada en nosotros para organizar esta Olimpiada y ofrecemos a la Sociedad Navarra de Profesores de Matemática *Tornamira* todo nuestro ánimo y ayuda en la organización de la *XVIII Olimpiada Matemática Nacional.* ■

Foto P. Corcho

Fotos P. Corcho

NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, Apartado de Correos 19012, 28080 Madrid), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.

2. Los gráficos, diagramas, fotografías y figuras se enviarán impresos en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración. Indíquense los créditos de las fotografías y dibujos.

2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original impreso ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos no serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.

4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de un máximo de 625 caracteres contando los blancos, que no necesariamente tiene que coincidir con la introducción al artículo. De este resumen se remitirá también su traducción al inglés.

5. Los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede) y el resumen en castellano y en inglés deberán ir escritos en una misma hoja aparte.

6. Se enviará también en soporte magnético (disco de tres pulgadas y cuarto con formato PC, CDRom o DVDRom) una copia de los archivo de texto que contenga el artículo y del que contega la hoja con los datos y los resumenes, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quieran incluir. La etiqueta debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda Microsoft Word para Windows o RFT. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF. Para las fotografías se recomienda archivos TIF o BMP y con una definición mínima de 600x600 puntos por pulgada cuadrada.

7. Al menos un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.

8. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.

9. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo y se incluirán al final del texto.

10. La bibliografía se dispondrá también al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:
TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma*, n.° 20, 91-98.
En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas*, Labor, Barcelona.
En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2*, ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

11. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ... supone un gran avance (Hernández, 1992). Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ... según Rico (1993).

12. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como -en caso afirmativo- la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido.

13. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

Boletín de suscripción

Tarifas	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	25 €	10 €
Centros	40 €	15 €
Europa	50 €	20 €
Resto del mundo	60 €	22 €

Fotocopiar esta hoja y enviar:

por correo a: Revista SUMA. Apartado de correos 19012
E-28080 MADRID
por Fax al: (+34) 912 911 879
por correo-e a: administracion@revistasuma.es

Deseo suscribirme a la revista SUMA:

Nombre y apellidos: NIF/CIF:

Dirección: Teléfono:

Población: CP:

Provincia: País:

Correo electrónico: Fax:

Importe (€)

☐ Suscripción a partir del año (3 números) ________

☐ N.os sueltos ________________________

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)

☐ Transferencia bancaria (CCC 2085-9981-38-0330066350 / IBAN ES68 2085 9981 3803 3006 6350)

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista SUMA

☐ Giro postal dirigido a Revista SUMA

Fecha y firma:

Nombre y apellidos:

Código Cuenta Cliente: Entidad: Oficina: DC: Cuenta:

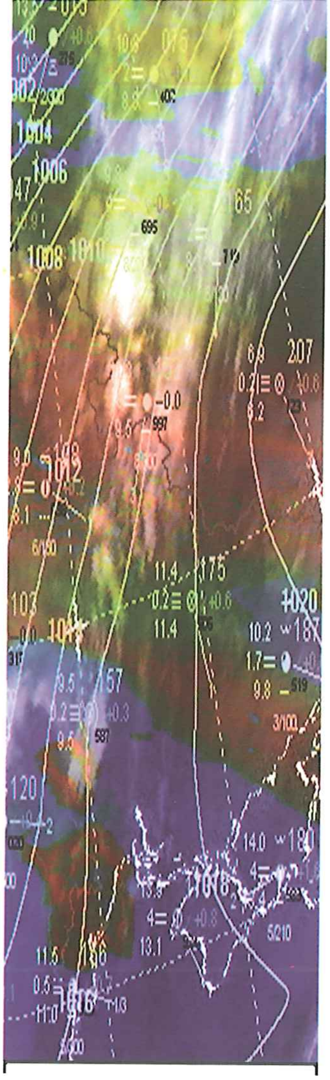
Banco/Caja:

Agencia n.º: Dirección:

Población: Provincia:

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (fecha y firma):



FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

SUMA.
REVISTA SOBRE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS.

ISSN 1130-488X

9 771130 488006 00053