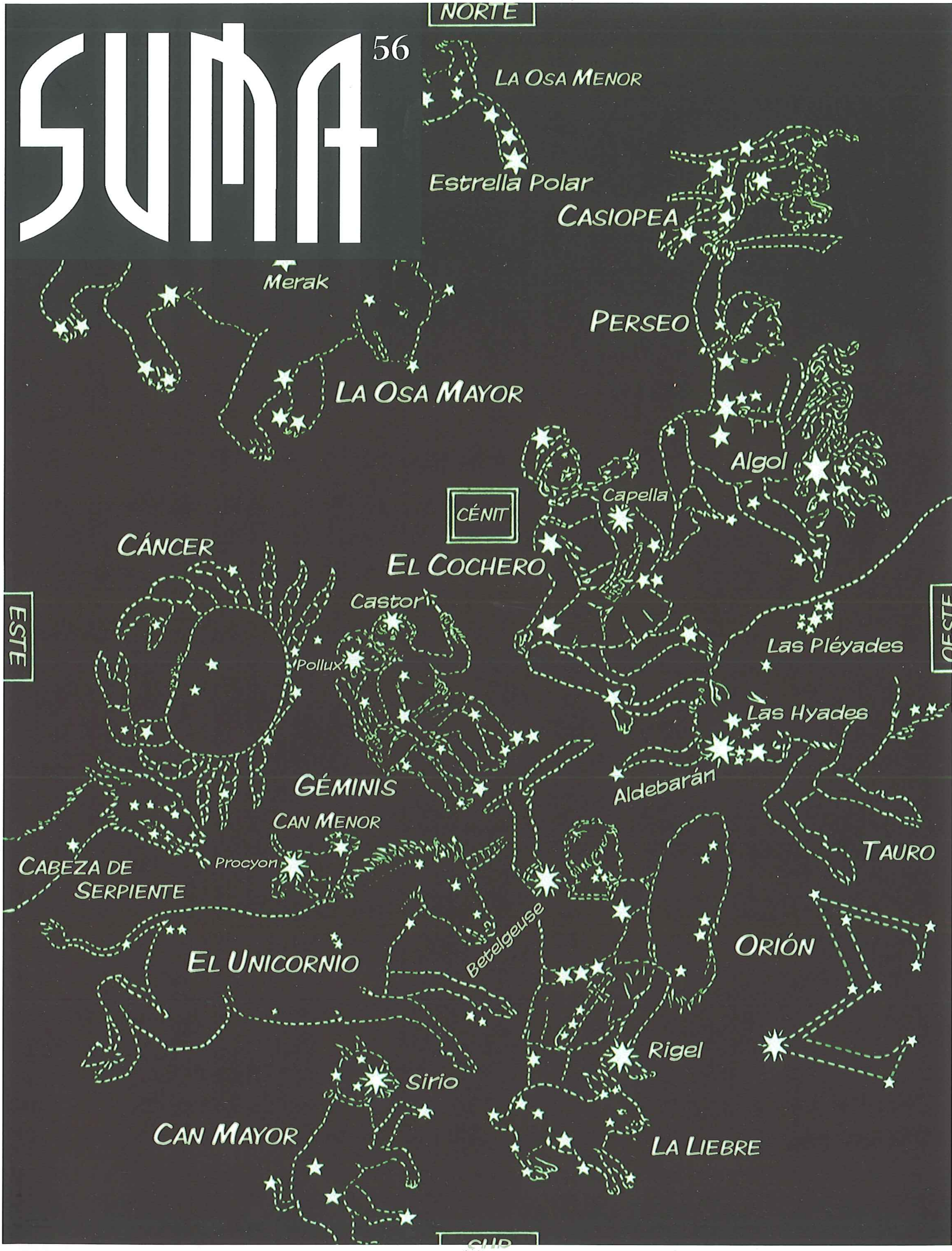
SUMA 56



SUMA. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las MATEMÁTICAS MADRID · NOVIEMBRE 2007 · Nº. 56 · ISSN 1130-488X

SUMA 56
Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las MATEMÁTICAS
Noviembre 2007

Índice

Edita
FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS (FESPM)
Web
Antonio Alamillo Sánchez
www.revistasuma.es

Diseño de la portada
Javier Alvariño y Jorge Alvariño (foto)
Diseño interior
Raquel Fraguas (NIVOLA)
Maquetación
A. Alamillo y F. Martín
Abstracts
M. Manso de Zúñiga y P. Satrústegui
Revista Suma
Apdo. 19012
E-28080-Madrid
España
Fax:*+(34) 912 911 879*
Tirada: *6700 ejemplares*
Deposito legal: *Gr 752-1988*
ISSN: *1130-488X*

poliedro

actividades de la FESPM

SUMA 56
Noviembre 2007

Relevo en SUMA

Se cumplen ahora 20 años desde el nacimiento de nuestra revista SUMA. En estos años ha llegado a convertirse en una revista importante, con una gran calidad y referencia en el mundo de la Educación Matemática. De ello nos enorgullecemos todos los socios de la FESPM y particularmente pueden sentirlo así todos los compañeros que han tenido la responsabilidad de llevarla adelante: Rafael Pérez, Sixto Romero, Emilio Palacián y Julio Sancho, Francisco Martín e Inmaculada Fuentes.

Con el número 44, hace ahora cuatro años, se inició el tercer relevo en la dirección de la revista. El equipo que asumió la responsabilidad: Franchi e Inma, en perfecto tándem estaban ilusionados y dispuestos a continuar la labor del equipo anterior. Sabían que el listón estaba alto, que la revista había alcanzado una calidad incuestionable y que el reto que tenían por delante de mantenerla en esos niveles era importante. Pero ellos debían saber que cuando una tarea se afronta con profesionalidad, ilusión y dedicación no hay más remedio que conseguir como resultado una obra bien hecha. Por eso han conseguido no sólo seguir consolidando SUMA sino también subir un escalón el nivel de calidad de la revista.

Sinceramente, lo percibido por los usuarios (usuarios sí, más que simples lectores) de SUMA es que todo lo han hecho bien: la presentación, la maquetación, el uso del color desde el número 50, la presentación en CD de los índices... y sobre todo la adecuación y calidad de los contenidos de *los que son responsables no sólo ellos sino todo el consejo editorial y de redacción así como los asesores de SUMA.*

A todo el equipo de SUMA, os damos las gracias por vuestro esfuerzo y dedicación; por todo el trabajo desarrollado sin esperar nada a cambio; por esas horas que habéis robado a vuestro descanso y a vuestras familias para realizar la tarea. Sabemos que no os vais, que seguiréis ahí asumiendo otros quehaceres y responsabilidades en la FESPM, colaborando con la revista y echando una mano en lo que haga falta.

Y ahora llega el cuarto relevo en SUMA: Tomás Queralt y Onofre Monzó, de la Societat d'Educatiò Matemática de la Comunitat Valenciana Al-Khwarizmi*. Ambos son sobradamente conocidos en la Federación, veteranos en su dedicación a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Sabemos de sus cualidades y capacidad de trabajo; seguro que sabrán mantener y mejorar si cabe la revista que ahora reciben, plenamente consolidada en el mundo de la Educación Matemática. Con ellos no hay incertidumbre con el futuro de nuestra revista y estamos convencidos que dentro de cuatro, o mejor de ocho años si ellos lo quieren así, podremos decir que SUMA sigue siendo una referencia obligada para los profesores de matemáticas.*

En ese empeño no estaréis sólos.

Serapio García Cuesta
Presidente de la Federación Española
de Sociedades de Profesores de Matemáticas

13 SUMAS

Hace ya casi cinco años decidimos embarcarnos en esta aventura y presentar nuestra candidatura para dirigir colegiadamente SUMA. Unos meses después, en Febrero de 2004, fuimos nombrados directores y en noviembre de ese mismo año salió el primer número a nuestro cargo: SUMA 44. Este número hace, por tanto, el decimotercero de los que nos ha tocado dirigir.

En la presentación del proyecto y de nuestro equipo afirmábamos que nuestro principal activo era la carga de ilusión con la que asumíamos la tarea y pedíamos a todos ambición e iniciativa.

Aunque a nosotros como directores nos ha correspondido la coordinación de revista, el corazón del equipo ha estado formado además por otras dos personas. Nos referimos a Cristina Torcal y Antonio Alamillo que han sido nuestros colaboradores más directos. Una revista como SUMA lleva detrás una ingente tarea de gestión para garantizar que llegue a todos los socios y suscriptores con regularidad. Cristina y Antonio han desarrollado su tarea de administradores con eficacia y dedicación. Además, han colaborado en la toma de todas las decisiones, asumiendo también otras muchas funciones. Con ellos hemos formado este grupo compacto de cuatro personas que cohesionado por la ilusión, el trabajo y la amistad ha hecho posible la aparición de estos trece números de SUMA. Deseamos que, Cristina y Antonio, con muchos años por delante en su carrera profesional, asuman en el futu-

ro nuevos desafíos en el ámbito de la Educación Matemática. Estamos seguros de que así será.

Y ahora, que llega el momento de despedirnos, los cuatro queremos acordarnos de todos los que nos han ayudado en nuestras funciones.

Empezaremos por ti, lector, que eres el protagonista principal de esta revista. Pensando en ti hemos hecho nuestro trabajo número a número. Las decisiones, las acertadas y las erróneas –que también las ha habido–, las hemos tomado siempre en tu nombre, lector y colega. Una revista se hace para ser leída y los retornos que nos han llegado de los lectores han sido un acicate para mejorarla a lo largo de estos $4'\widehat{3}$ años.

Corresponde después dar nuestro agradecimiento a la Federación, a los miembros de su Comisión Ejecutiva y de su Junta de Gobierno y que personalizamos en sus dos presidentes a lo largo de estos años: Florencio Villarroya y Serapio García, de ambos recibimos todo el apoyo y la ayuda necesaria para que pudiéramos llevar a buen términos todos y cada uno de nuestros proyectos.

Damos las gracias a todos los autores que nos han remitido sus originales. SUMA es casi por definición referente y reflejo de lo que se hace en nuestro país en educación matemática, pero esto es así porque quienes hacen las cosas, las escriben y nos las a dan a todos a través de la revista.

Agradecemos también su tarea y su trabajo desinteresado a los miembros del consejo editorial y del consejo de redacción y a todos los asesores que han hecho posible la selección de los trabajos que debían ser publicados y, en muchas ocasiones, han contribuido con sus sugerencias y comentarios a mejorar los originales que los autores remitían.

Nos toca ahora dar las gracias de todos los que han formado parte de nuestro equipo en un sentido más amplio: los autores de las secciones.

Ángel Ramírez y Carlos Usón que **Desde la historia** nos han ofrecido en estos trece SUMAS sus reflexiones sobre la tarea del profesor de matemáticas; a Juan Antonio Hans, a Pepe Muñoz y a Antonio Fernández-Aliseda, que a través de **Juegos** han presentado actividades motivadoras para implicar a los alumnos en el proceso de su propio aprendizaje; a Claudi Alsina que nos ha ofrecido ideas frescas y divertidas sujetas por **El Clip**; a Ana Millán y a Santiago Gutiérrez que, con la disculpa de las matemáticas de **Hace** tiempo, han reflexionado sobre ideas de actualidad relacionadas con nuestro trabajo cotidiano; a Jacinto Quevedo que nos habló de las matemáticas **Informales e Interactivas** que podemos descubrir en los museos de la ciencia; a Capi Corrales que **En un cuadrado** ha enmarca-

do su visión del Arte en relación con las matemáticas; a Miquel Albertí que primero nos regaló sus ***iMÁTgenes*** *y ahora,* ***En las ciudades invisibles****, nos hace ver más allá de la apariencia, acompañado de Polo y Kublai; a Antonio Pérez que nos animó a resolver* ***De cabeza*** *algunos problemas incardinados en la historia; a Julio Sancho que nos permitió acceder a la* ***Hemeroteca****, animando a los lectores de SUMA a acercarse a otras revistas de educación matemática; a José María Sorando que con su personal* ***CineMATeca,*** *a través del mundo del cine y de la televisión, nos permitió sacar partido con rigor y con humor de escenas de películas y hasta de los gazapos de la prensa; a Fernando Corbalán que analizó la* ***Presencia mediática*** *de las matemáticas y luego se hizo cargo de nuestra* ***Biblioteca****, presentando las novedades editoriales que se han ido publicando y coordinó a otras personas que nos ofrecieron una imagen de sus bibliotecas particulares; y por último, a Constantino de la Fuente, que nos proporcionó guías para que los alumnos pudieran hacer de la* ***Literatura y*** *las* ***Matemáticas*** *un ámbito común para el aprendizaje. A todos ellos en nuestro nombre y seguro que en el de los lectores de SUMA muchas gracias.*

Sabemos que algunos lectores pensaban que, siguiendo el ejemplo del anterior equipo de dirección, continuaríamos al frente de SUMA por otro periodo completo de cuatro años. Consideramos, sin embargo, que es necesario periódicamente que las personas y los equipos se renueven. Que cada cierto tiempo se abran las puertas y las ventanas para que entre aire fresco.

Y a esta puerta abierta se ha acercado el nuevo equipo que, dirigido por Tomás Queralt y Onofre Monzó, se hará cargo de SUMA a partir de 2008. Les deseamos todo el éxito posible, convencidos de que en sus manos la revista alcanzará cotas más altas de calidad. Y, como sabemos con conocimiento de causa lo que les espera por delante, desde aquí les decimos: animo y adelante.

Francisco Martín Casalderrey
Inmaculada Fuentes Gil
Directores de SUMA

Directores de SUMA. De izquierda a derecha: Onofre Monzó, Tomás Queralt, Francisco Martín Casalderrey, Sixto Romero, Inmaculada Fuentes y Rafael Pérez

SUMA Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las **MATEMÁTICAS**

Nueva dirección:
Apartado de Correos 498
46900-Torrent (Valencia)
direccion@revistasuma.es
administracion@revistasuma.es
Fax: 912 911 879
Web: www.revistasuma.es

SUMA

Manuscrito de Pedro Puig Adam

artículos

SUMA 56
Noviembre 2007, pp. 11–21

Sobre el exilio matemático de la guerra civil española (I)

En el presente artículo se realiza un estudio sobre los matemáticos que emigraron de España a consecuencia de la guerra civil, que va acompañado de pequeñas biografías de la mayoría de ellos, y de un comentario sobre las razones que motivaron su marcha.
El trabajo, centrado principalmente en los profesores de la Universidad de Madrid –entonces la más importante y con mayor poder de decisión–, se completa con un análisis de la situación matemática en las décadas anteriores, y con unas notas acerca de las depuraciones y cambios estructurales realizados al finalizar la contienda.

This article presents a study on the emigration of the Spanish mathematicians because of the civil war. Short biographies of most of these mathematicians are written explaining the reasons why they left.
This work, focusing specially on the professors of the University of Madrid –the most important and influential at that time– also analyzes the situation of Spanish mathematics in previous decades, with some comments on the depurations and structural changes by the end of the conflict.

Al finalizar el reinado de Fernando VII la situación científica en España es deplorable; en el campo de las matemáticas, en concreto, nuestro país se encuentra con unos cincuenta años de retraso con respecto a las naciones más desarrolladas. Comienza entonces un intento de renovación, acompañado de algunas reformas estructurales, que evoluciona lentamente a lo largo de lo que resta del siglo XIX. Dicho impulso de reforma se incrementa a raíz de la Revolución de 1868 y, muy especialmente, con el movimiento de regeneración nacional[1] que surge con motivo de la crisis del 98.

En esa transformación de fin de siglo que tiene lugar –entre otros– en el terreno de las matemáticas, destacan principalmente cuatro personajes: Echegaray, García de Galdeano, Eduardo Torroja y Ventura Reyes y Prósper[2]; son los matemáticos del 98 científico, a los que Gino Loria llamó *sembradores*. A ellos acaso habría que añadir también el inventor de una famosa máquina algébrica para la resolución de ecuaciones algebraicas: el ingeniero y matemático Torres Quevedo, figura polifacética de indiscutible relevancia científica, que asimismo influyó en alguna medida, al menos en lo institucional, en nuestro desarrollo matemático.

Como consecuencia de ese cambio de actitud y de las aportaciones de estos últimos y de algunos más que los secundaron, en el primer tercio del siglo XX se produce un importante avance en la matemática española; no sólo referido al progre-

> *En esa transformación de finales del siglo XIX que tiene lugar –entre otros– en el terreno de las matemáticas, destacan principalmente cuatro personajes: José Echegaray, Zoel García de Galdeano, Eduardo Torroja y Ventura Reyes y Prósper; son los matemáticos del 98 científico: los llamados* sembradores *por Gino Loria.*

NOTA DE LA REDACCIÓN: Este artículo reproduce el publicado en la revista *Hispania Nova* y con el permiso de ésta:
"Sobre el exilio matemático de la guerra civil española" en Gálvez, Sergio (Coord.), *Generaciones y memoria de la represión franquista: un balance de los movimientos por la memoria.* Dossier monográfico *Revista de Historia Contemporánea Hispania Nova*, ISBN: 1138-7319
http://hispanianova.rediris.es/6/dossier/6d026.pdf
Dada su extensión, se publica en dos partes.

Javier Peralta
Universidad Autónoma de Madrid

so de su conocimiento, sino también al nacimiento de una estructura más adecuada para su cultivo.

Entre los acontecimientos que ayudan a establecer ese ambiente propicio para la investigación científica, se encuentran sin duda la creación, en 1907, de la Junta de Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas (JAE) y, en 1908, de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias (AEPC); ambas con una sección correspondiente a las Ciencias Exactas. Aunque, específicamente en el campo de las Matemáticas, el hecho más notable es la fundación en 1911 de la Sociedad Matemática Española, que va acompañado del nacimiento de la *Revista de la Sociedad Matemática Española*. La Sociedad la preside Echegaray (hasta su fallecimiento en 1916), mientras que en la *Revista* hay una cierta despersonalización de su dirección[3] (su publicación está a cargo de un Comité de redacción y de una especie de Comisión de secretarios de la Sociedad).

Entre los acontecimientos que ayudan a establecer ese ambiente propicio para la investigación científica, se encuentran sin duda la creación, en 1907, de la Junta de Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas (JAE) y, en 1908, de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias (AEPC); ambas con una sección correspondiente a las Ciencias Exactas.

Asimismo debe resaltarse la creación, en 1915, del Laboratorio Seminario Matemático de la JAE, nuestro más importante centro de investigación matemática, surgido a instancias de Rey Pastor y dirigido por él mismo. El Laboratorio propiciará la realización de tesis doctorales y publicaciones en las mejores revistas matemáticas españolas e incluso, años después, en otras internacionales de alto nivel[4].

Hay que decir, por otro lado, que en aquella época, de las doce universidades existentes en España (Barcelona, Granada, La Laguna, Madrid, Murcia, Oviedo, Salamanca, Santiago, Sevilla, Valencia, Valladolid y Zaragoza), únicamente se podía estudiar Ciencias Exactas en las de Zaragoza, Barcelona y Madrid; y que la primera de éstas tuvo gran importancia matemática en los primeros años del siglo XX, debido fundamentalmente a la labor desarrollada por sus catedráticos García de Galdeano y –en menor medida– José Ríus y Casas. Nótese a este respecto, por ejemplo, que los cuatro españoles participantes en el II Congreso Internacional de matemáticos celebrado en París en 1900 (el de mayor trascendencia de la época, motivado por el planteamiento de los famosos “23 problemas” propuestos por Hilbert[5]) son los dos últimos profesores citados, junto a Torres Quevedo (ingeniero) y Torner y Carbó (militar), mientras que no hay representantes de las universidades de Madrid o Barcelona (la composición de los asistentes, por cierto, refleja precisamente cuáles son los tres grupos que encarnan la dirección de la vida matemática española en aquel tiempo); o también, el hecho de que la primera revista española dedicada exclusivamente a las matemáticas fuera *El Progreso Matemático*, fundada en 1891 por Galdeano en Zaragoza; o que entre las pocas que se publicarán en España en los años posteriores a éste se encuentre la *Revista Trimestral de Matemáticas*, nacida asimismo en la capital aragonesa en 1901 y dirigida por Ríus[6].

Una muestra también de esa influencia de Zaragoza en nuestra vida matemática posiblemente sea el nombramiento de Galdeano, aun a los setenta años de edad, como presidente de la Sociedad Matemática Española (1916–1920). Este hecho, junto a otros, como la importante labor que empiezan a desarrollar algunos matemáticos en el Laboratorio de Madrid, es además –a mi juicio– un reconocimiento de la preeminencia que comienza a otorgarse a los profesores universitarios frente a los ingenieros y militares que generalmente habían regido la comunidad matemática hasta entonces.

Aunque, específicamente en el campo de las Matemáticas, el hecho más notable es la fundación en 1911 de la Sociedad Matemática Española, que va acompañado del nacimiento de la Revista de la Sociedad Matemática Española.

En la segunda década del siglo, habida cuenta de que en Madrid residen las principales sociedades científicas –como la JAE o la Sociedad Matemática Española–, las Academias, todas las ingenierías, el Seminario Matemático; de que su Universidad es la única que puede otorgar el grado de doctor (la denominación de Central, como es sabido, quería indicar de algún modo el sometimiento del resto a su autoridad) y, en fin, por otras razones de prestigio social, propician que la capital de España se consolide como el centro de referencia de la vida matemática nacional. Así, es un hecho el traslado de ilustres profesores de Zaragoza a Madrid, como Octavio de Toledo, Jiménez Rueda, Álvarez Ude, Plans, etc.; y, en menor grado, de Barcelona –como Terradas–. Todos ellos, junto a algunos otros –Vegas, Rey Pastor...– constituirán la segunda generación de los autores de nuestro despertar matemático.

Julio Rey Pastor (1888-1962), La caricatura es obra de Pedro Puig Adam

Julio Rey Pastor (1888–1962), el matemático más joven de esta segunda generación, será quien lidere a ese grupo[7].

Rey, nacido en Logroño, estudia Ciencias Exactas en Zaragoza, luego se traslada en 1908 a Madrid para realizar el doctorado, y colabora activamente en la creación de nuestra Sociedad Matemática. En 1911 (antes de cumplir los 23 años) es catedrático de Análisis matemático en Oviedo, y se traslada pensionado a la Universidad de Berlín. En 1913 obtiene la cátedra de esa misma disciplina en la Universidad Central y marcha durante catorce meses a la muy prestigiosa Universidad de Gotinga. A la vuelta comienza en Madrid una frenética actividad: escribe libros y artículos, da conferencias, dirige el Laboratorio Matemático… y en 1917 viaja a Buenos Aires invitado por la Institución Cultural Española para ocupar la cátedra de Cultura Española (le habían precedido en ella nada menos que Menéndez Pidal y Ortega y Gasset).

La influencia de Rey Pastor en la matemática española es tan importante, que al irse a Argentina deja de publicarse la *Revista de la Sociedad Matemática Española* y, al regresar en 1918, funda la *Revista Matemática Hispano–Americana*. En ese mismo año ingresa en la Real Academia de Ciencias y en 1920 se le asigna la cátedra de Metodología y Crítica matemática de la Facultad de Ciencias de Madrid.

Los años previos a la guerra civil

En 1921 Rey Pastor vuelve a Argentina y fija su residencia en Buenos Aires. Es contratado por la Facultad de Ciencias de su Universidad, y se le permite conservar su cátedra de Madrid, en donde permanece los meses de diciembre, enero y febrero. En el periodo que va de 1921 a 1935 alterna entonces su labor entre ambas ciudades, y desarrolla en Argentina una intensa tarea fundacional en el campo matemático (colabora en el nacimiento de la Sociedad Matemática Argentina y su *Revista Matemática*, crea y dirige el Seminario Matemático, funda el *Boletín del Seminario Matemático Argentino* y la revista *Matemática Elemental*, etc.). Gana las cátedras de Análisis matemático (en Ingeniería Civil) y de Geometría superior (Doctorado en Matemáticas) de la Universidad de Buenos Aires y, en 1935, ante el incumplimiento de sus obligaciones docentes, es separado de su cátedra de Madrid y establece ya su única residencia en Argentina durante una larga etapa de doce años.

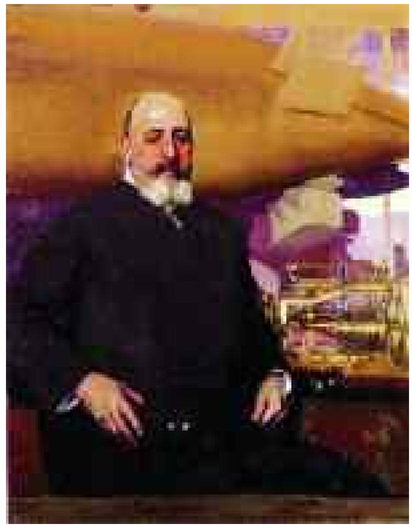
Pero volvamos a la situación matemática en España. Durante la dictadura de Primo de Rivera y la "dictablanda" que le sigue antes de la proclamación de la II República, hay varios sucesos, digamos peculiares, a la luz de la legislación universitaria. Uno de ellos es el hecho de que Luis Octavio de Toledo, catedrático de Análisis matemático de la Facultad de Ciencias de Madrid, que había accedido a su decanato en 1917, se vea con-

Sello dedicado a Rey Pastor en 2000, con motivo del Año Mundial de las Matemáticas

firmado en su cargo después de haber alcanzado la edad de jubilación (también a Rodríguez Carracido, rector de esa Universidad, se le mantiene en su puesto, ya jubilado, hasta su muerte en 1928). Asimismo, se articula un proceso mediante el cual Esteban Terradas, en 1928, accede a la cátedra de Ecuaciones diferenciales de la Universidad de Madrid sin concurso–oposición, y se le encarga a él, precisamente, pronunciar la lección inaugural del curso 1930–1931.

Esteban Terradas, caricatura por P. Puig Adam

Pero con el advenimiento de la República la situación va a cambiar. Octavio de Toledo dimite de su cargo en 1931, oficialmente por motivos de salud, y a Terradas se le anula su último nombramiento y regresa a su antigua cátedra de la Universidad de Barcelona. Las nuevas elecciones a decano las ganará Pedro Carrasco, catedrático de Física matemática, y permanecerá como secretario Honorato de Castro, catedrático de Astronomía; ambos pertenecientes a partidos de la izquierda republicana[8].



Torres Quevedo

Mientras tanto, en la Sociedad Matemática Española, a Galdeano le había sucedido en su presidencia, en 1920, Torres Quevedo, que continuará en el cargo hasta 1924. Luego será elegido como presidente Octavio de Toledo (1924–1934); y la *Revista Matemática Hispano–Americana* la dirigirá desde 1927 José Gabriel Álvarez Ude, catedrático de Geometría descriptiva de la Universidad Central.

Julio Rey Pastor

Conviene señalar, por otro lado, que los cambios que se van produciendo en la sociedad española y en sus corporaciones científicas con el advenimiento de la República van a afectar también, como es lógico, al nombre de algunas instituciones. Así sucede, por ejemplo, con la denominación de la Sociedad Matemática Española, que en 1929, y posiblemente debido a la designación de SAR el príncipe de Asturias como presidente de honor de la Sociedad y a las gestiones realizadas por uno de sus vicepresidentes, el entonces coronel Emilio Herrera, Alfonso XIII concede a la Sociedad Matemática Española el título de *Real*; nombramiento que, como era de esperar, perderá durante la República, pero que recuperará una vez transcurrida la guerra civil[9].

Hay asimismo variaciones en la vida de la *Revista Matemática Hispano–Americana*: a Álvarez Ude le sustituye en la dirección José María Plans, catedrático de Mecánica celeste de los estudios de doctorado de Exactas de la Universidad de Madrid, hasta su fallecimiento en 1934. Entonces pasará a regirla José Barinaga, sucesor de Octavio de Toledo en la cátedra de Análisis matemático, y procedente de la cátedra de esa misma denominación en la Universidad de Barcelona.

Luis Octavio de Toledo

También en 1934 fallece Octavio de Toledo y es nombrado Rey Pastor, por aclamación, presidente de la Sociedad Matemática, aunque renunciará enseguida a su cargo por sus especiales circunstancias de permanencia en Argentina durante gran parte del año. La presidencia en funciones será asumida por Barinaga hasta que pocos meses después (febrero de 1935) se elige para el cargo, también por aclamación, a Juan López Soler, mientras que Amós Sabrás Gurrea ocupa la vicepresidencia.

Zoel García Galdeano

Hay que hacer constar, por otra parte, que el *hueco* que Rey Pastor deja en la Sociedad Matemática Española a causa de sus cada vez más duraderas estancias en Argentina no es, como resulta fácilmente presumible, el único puesto que habrá de cubrirse provisionalmente en su ausencia (situación que acaso no debiera resultar muy cómoda para sus sustitutos). De igual modo se resiente, por ejemplo, la dirección del Laboratorio Matemático, conducido de hecho en esos periodos, primeramente por Álvarez Ude y Plans, a los que luego también se unirá Terradas; después, en 1934, será regido por Barinaga, *mientras la situación del Sr. Rey Pastor lo tenga alejado de él*[10].

La Sociedad Matemática Española durante la guerra

En junio de 1936, un mes antes del comienzo de la guerra civil, tiene lugar una sesión extraordinaria de nuestra Sociedad Matemática, presidida por López Soler, en conmemoración de las *bodas de plata* de la Sociedad y de su *Revista*.

La siguiente reunión se celebra ya en plena guerra (el 4 de enero de 1937) y, encontrándose ausente su máximo representante –general de brigada jubilado– es José Barinaga, director de la *Revista*, quien preside en funciones la sesión, e insta a que *todos los socios que actualmente se hallan en Madrid procuremos sostener la vida de nuestra Sociedad con la mayor normalidad posible*[11]. En dicha reunión se constituye una Junta Provisional que asume las funciones de dirección de la Sociedad y del Comité de redacción de la *Revista*, y que queda compuesta por Barinaga como presidente, Fernando Peña como vicepresidente, vocales: Sixto Cámara, Pedro Pineda, Ricardo San Juan y Tomás Rodríguez Bachiller y secretario José Augusto Sánchez Pérez.

Sixto Cámara

Gracias al buen hacer de Barinaga, que asumirá en buena medida la dirección de la matemática española durante la guerra civil, sigue publicándose la *Revista*, aun en una versión reducida por la escasez de fondos y de papel. Sin embargo, en noviembre de 1937 sucede un hecho de repercusión muy negativa para la vida de nuestra Sociedad: la orden de cierre del Laboratorio Seminario de Matemáticas; medida que empuja a Barinaga a escribir a Ignacio Bolívar, presidente de la Comisión delegada de la JAE –establecida entonces en Valencia–, solicitando su apertura. Finalmente, tras varias gestiones, es abierto de modo oficial a mediados del año 1938; si bien hay que hacer constar que, en realidad, el Laboratorio no había dejado de funcionar en la práctica durante los meses intermedios, ya que en su seno siguieron produciéndose artículos de investigación, que serían publicados en la *Revista*. No obstante, esta difícil situación solo puede mantenerse unos meses, pues empieza a vislumbrarse el final de la guerra a favor de Franco, y el Gobierno republicano tiene que cerrar la JAE y sus centros dependientes, y destinar sus escasos recursos a otras necesidades más acuciantes.

Ignacio Bolívar

El inicio de la emigración

Para tratar de hacerse una idea de la magnitud del exilio republicano, hay que decir que solo a Francia emigraron entre 400.000 y 500.000 personas –hay quien habla[12] de más de 600.000–, la mayoría de las cuales ingresarían en un principio en un campo de concentración. Por tanto, añadiendo a esos los que salieron por diversos puertos marítimos, hay que concluir con bastante seguridad que el número total de exiliados debió ser de alrededor de medio millón[13]; aunque, sea cual sea su número, en cualquier caso, *Nunca en la historia de España se había producido un éxodo de tales proporciones ni de tal naturaleza*[14].

De esa cantidad de emigrados, Lloréns[15] estima que el número de intelectuales hubo de estar en torno a los cinco mil, y de entre estos, el grupo más numeroso lo formaron los profesores, en cualquiera de sus grados, desde la escuela primaria hasta la universidad; de ellos calcula que los maestros debieron de pasar del millar, los profesores de segunda enseñanza y escuelas especiales serían cerca de los trescientos, y a estos les seguirían de cerca los profesores universitarios, de los cuales casi un centenar serían catedráticos. Otras fuentes, como el SERE (Servicio de Evacuación de Republicanos Españoles), clasifica a los distintos profesores de otra manera[16], pero sus cifras globales no difieren sustancialmente de las anteriores: de los 160.000 exiliados censados, 105 serían catedráticos de Universidad, 45 catedráticos de Instituto, profesores de escuelas normales: 146, otros profesores: 135 y maestros: 1301.

En particular, el elevado número de profesores de Universidad que se refugiaron en otros países daría lugar a la constitución de una Unión de Profesores Universitarios en el Extranjero (UPUEE), que en 1940 calculaba en 195 el número de exiliados (aproximadamente, 96 catedráticos, 14 agregados y 85 auxiliares, encargados de curso y ayudantes[17]), de los cuales siete eran rectores o ex–rectores: Blas Cabrera, José Giral y José Gaos (Madrid); Jaume Serra, Augusto Pi i Sunyer y Pere Bosch Gimpera (Barcelona) y José Puche Álvarez (Valencia). La sede central de la UPUEE estaba en México, y tenía secciones en Francia (donde se fundó), Argentina, Puerto Rico y otros países latinoamericanos.

Volviendo a la globalidad de los exiliados, interesa saber que transcurridos unos meses, y ante la necesidad de muchos de ellos de tener que elegir entre la Legión extranjera y la vuelta a España, regresarían a nuestro país más de cien mil, y una parte importante de los restantes marcharían a América Latina; principalmente a México, cuya actitud respecto a nuestros emigrados no tuvo igual en país alguno, gracias en especial a la decidida actuación del presidente Cárdenas. En el caso de las matemáticas, no obstante, exiliados muy cualificados se establecieron en Argentina, debido especialmente a la gestión de Rey Pastor, que, como se ha dicho, desde 1935 había interrumpido sus viajes a España y fijado su residencia en Buenos Aires.

Sello dedicado a Esteban Terradas, 1985

El primer físico–matemático que se marchó de España fue el barcelonés **Esteban Terradas Illa** (1883–1957). Sin embargo, conviene aclarar desde un principio que Terradas, que se encontraba en su ciudad natal cuando estalló la guerra, no es un exiliado republicano, y que las razones de su partida fueron justamente las contrarias (el temor a que sus creencias religiosas e ideas conservadoras pudieran ocasionarle serios problemas en la convulsa Barcelona del 36). El caso es que aprovechó una invitación para dar unos cursos en la Universidad de Buenos Aires, en donde ya había estado en 1927, y se trasladó allí en octubre de 1936, aunque poco después se establecería en la Universidad de La Plata.

Esteban Terradas, científico de talla impresionante, fue matemático, físico, ingeniero industrial e ingeniero de caminos, miembro de las Reales Academias de Ciencias y de la Lengua, vicepresidente de la Sociedad Matemática Española… y ganó las cátedras de Mecánica racional, Acústica y Óptica, Ecuaciones diferenciales, Estadística matemática y Física matemática en las Universidades de Zaragoza, Barcelona y Madrid. Como ya se ha mencionado, dirigió el Laboratorio Seminario Matemático junto a Álvarez Ude y Plans, fue vocal de la Unión Matemática Internacional, desempeñó puestos de responsabilidad en la industria (fue director de la Compañía Telefónica Nacional), etc.

A la vuelta de su exilio en Argentina, en donde asimismo desarrolló una importante labor científica, se convirtió en un personaje de gran relevancia en la política científico–técnica española. Y baste para convencerse de ello con observar cuáles fueron dos de los cargos que desempeñó: primer presidente del patronato del Instituto Nacional de Técnica Aeronaútica y presidente de la Junta de Investigaciones Atómicas, dependiente de la Presidencia del Gobierno[18].

Sus líneas de investigación fueron variadas: integrales de Fourier–Stieltjes, movimiento de los planetas, hidrodinámica… y su relevancia científica ha sido unánimemente reconocida: *uno de los seis primeros cerebros mundiales de su tiempo* (Albert Einstein), *nuestro primer maestro de Física teórica* (Julio Palacios), *una de las más preclaras figuras de la Ciencia, la Técnica y la Cultura que ha tenido España en este siglo* (Sixto Ríos),[19]etc.

Uno de sus innumerables discípulos fue Pedro Puig Adam, en quien influyó sobremanera en la investigación en física–matemática y, es especial, en cibernética, área de conocimiento entonces incipiente (téngase en cuenta, por ejemplo, que cuando Puig ingresa en la Academia de Ciencias sucediendo a Terradas, lo hace con el discurso *Matemáticas y Cibernética*, que ofrenda *a quien tan indignamente sustituyo y en ocasión de dicha sustitución*[20]). A Puig precisamente se deben las siguientes palabras, pronunciadas el día del fallecimiento de su maestro, que ratifican, en todo caso, las opiniones vertidas más arriba acerca de la significación científica de Terradas:

> En él se extinguió un cerebro prodigioso, el de más extenso y universal alcance, que en materia mixta de ciencia pura y aplicada jamás naciera en tierras de España. Una sed insaciable de saber, unida a una rapidez vertiginosa de asimilación y a una voluntad de superación capaz de vencer toda fatiga, concentraron en esa prodigiosa vida una suma de conocimientos y de actividades que rebasa los límites de toda explicación humana[21].

Otro científico de talla internacional exiliado en octubre de 1936 es el eminente físico lanzaroteño **Blas Cabrera Felipe** (1878–1945).

Al inicio de la guerra, y desde 1934, Cabrera era rector de la Universidad Internacional de Verano de Santander, que había sido creada por las autoridades republicanas en 1932. A pesar del conflicto bélico esta Universidad pudo continuar con su actividad docente durante el verano del 36, pero en septiembre el rector tuvo que organizar su evacuación; no obstante, la situación se hizo muy complicada, pues en Santander el poder había pasado a los partidos de izquierda y organizaciones obreras, y unos alumnos de la Universidad partidarios de la rebelión militar fueron detenidos y más tarde fusilados. Aunque Cabrera trató por todos los medios de impedirlo, sin embargo, se le relacionó con tales sucesos, y finalmente hubo de optar por exiliarse. Transcurrido el verano pasó a Francia y se instaló en París, alojándose en el Colegio de España, en la ciudad universitaria, donde fijó su residencia. Después, en 1941, emigró a México, y trabajó cuatro años como profesor de la Universidad Autónoma de México, hasta su fallecimiento.

Blas Cabrera Felipe

Si bien, como se ha dicho, Blas Cabrera fue físico y su estudio habría de quedar fuera del propósito de este trabajo, no me resisto a decir, al menos, que fue el director del Laboratorio de Investigaciones Físicas, verdadero motor de los avances científicos en nuestro país de esa materia. Catedrático de Electricidad y Magnetismo de la Universidad de Madrid, de la que fue rector; presidente de la Academia de Ciencias y miembro de la Academia de la Lengua; doctor honoris causa por las Universidades de Estrasburgo, Buenos Aires, México… miembro del Comité Científico de Física Solvay de Bruselas, a propuesta de Marie Curie y Einstein; secretario del Comité Internacional de Pesas y Medidas y un largo etcétera[22]. Cabrera, en resumen, es considerado el padre de la física española.

El exilio a México

Desde abril de 1939, final de la guerra civil, fueron llegando a México por su cuenta algunos grupos de emigrantes que se encontraban en Francia o New York. Procedentes de Francia y con pasaje pagado por el SERE –organismo de ayuda de los propios republicanos españoles, creado a mediados de marzo del 39 gracias a Negrín–, desembarcaron en Veracruz trescientos doce, que habían hecho la travesía en el buque *Flandre*.

De mayor importancia fue la expedición del *Sinaia*, organizada por un comité de ayuda inglés, con unos mil seiscientos refugiados, que llegó al mismo puerto anterior. Y a éstas siguieron otras emigraciones, como la del *Ipanema* y la del *Mexique*, con novecientos y dos mil sesenta y siete exiliados, respectivamente, coordinadas ambas por el SERE. Así, según Lloréns[23], el 1 de Julio de 1940 habría ya en México ocho mil seiscientos veinticinco emigrados españoles, aunque contando además los procedentes de otros países y los que llegarían en los años inmediatamente siguientes, estima que el número total de exiliados a México se situó entre quince y veinte mil. Sin embargo, de acuerdo con otras fuentes, la cifra global posiblemente habría sido algo superior; así, Javier Rubio[24] afirma que entre 1939 y 1948 emigraron a México 21.750 españoles; Alicia Alted[25] considera por su parte que el número de exiliados de 1939 a 1950 estaría comprendido entre 20.000 y 24.000; etc.

De los anteriores, la cantidad de titulados científico–técnicos; esto es, de licenciados en medicina, farmacia y ciencias, junto a ingenieros y arquitectos, sumarían unos trescientos veinticinco –sin contar otros muchos cuyo expediente se extravió–, según consta en el archivo del Comité Técnico de Ayuda a los Republicanos Españoles. De ellos, el grupo más numeroso estaría constituido por 141 médicos, que representa un cuarenta y tres por ciento; mientras que el conjunto de matemáticos ocuparía el penúltimo lugar –sólo por encima de los licenciados en ciencias naturales–, con tan solo 16 personas, lo que equivale al cinco por ciento de los científicos emigrados[26].

Como es lógico, también llegaron a México muchos niños, hijos de padres exiliados, motivo por el cual se crearon varios colegios, con la doble finalidad de dar trabajo a profesores refugiados y la formación de aquellos niños. Dicha empresa corrió a cargo de las instituciones de ayuda a los republicanos surgidas en México: el SERE, ya mencionado, y la Junta de Auxilio a los Republicanos Españoles (JARE), fundada a finales de julio del 39 y dirigida por el ex–ministro socialista Indalecio Prieto. En todo caso, conviene decir desde un principio, que los centros de enseñanza que se abrieron[27] contaron con profesores de una alta cualificación.

De este modo nace en 1939 el Instituto Hispano–Mexicano Ruiz de Alarcón, establecimiento educativo de enseñanzas primaria y secundaria en el que dieron clase ilustres profesores, algunos de ellos catedráticos universitarios. Otros centros de gran calidad que también se crearon, fueron el Colegio Cervantes, con sedes en diferentes ciudades; el Colegio de Madrid, institución modelo fundada en 1941 con fondos de la JARE, dirigido inicialmente a alumnos de educación infantil y primaria, aunque desde 1948 se amplió a la enseñanza secundaria; y el Instituto Luis Vives, que proporcionó a sus estudiantes una amplia formación científica.

Mención aparte merece la Academia Hispano–Mexicana, que data de 1940, y que abarcó toda la enseñanza preuniversitaria y diversas secciones profesionales (comercial, bancaria, administrativa y de ciencias económicas), contando asimismo con servicio de internado y de residencia universitaria; además, desde 1975, impartió también enseñanzas propiamente universitarias, como Economía, Historia, Derecho… Parece oportuno aclarar, no obstante, que aunque se tardara tantos años en crear una universidad española, podría haberse fundado mucho antes –posiblemente, incluso, en 1939–, debido a la cantidad y calidad de profesores universitarios exiliados.

Una vez citados los centros educativos más importantes establecidos en México por los republicanos españoles, me referiré ya a los que fueron los principales matemáticos que emigraron a ese país. El científico más destacado, pero que trabajó en áreas limítrofes entre las Matemáticas y la Física, es sin duda Pedro Carrasco.

Pedro Carrasco

Pedro Carrasco Garrorena, físico y astrónomo, nace en Badajoz en 1883 y fallece en México en 1966. Su trayectoria profesional en España está vinculada a la Universidad Central y al Observatorio de Madrid. Así, por un lado, sucede a Echegaray en la cátedra de Física matemática de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid y, en 1931, a Octavio de Toledo en el decanato de la Facultad; por otro, se sabe que entra muy joven en la plantilla del Observatorio de Madrid, y dirige la institución en los últimos años de la Segunda República, así como el *Anuario de Astronomía*, que continúa publicándose durante la guerra civil. También, es miembro de la Academia de Ciencias de Madrid, en la que ingresa en 1929 con el discurso: *La investigación de periodicidades y la actividad solar*.

Se exilia a México en 1939, y pasa a ser profesor de su Universidad Nacional Autónoma y del Instituto Politécnico y la Escuela Normal Superior de México. Asimismo da clases en el Instituto Hispano–Mexicano, es presidente del Patronato del Instituto Luis Vives de México y vocal de la Junta de Cultura Española (presidida por José Bergamín, Josep Carner y Juan Larrea).

Al Observatorio de Madrid perteneció igualmente el físico **Honorato de Castro Bonell** (1885–1962), nacido en Borja (Zaragoza) y fallecido en México, que había sido catedrático de Cosmología y Física del Globo y luego de Astronomía esférica y Geodesia en la Facultad de Ciencias de la Universidad Central. También fue diputado a Cortes de 1931 a 1933 y director general del Instituto Geográfico Catastral y de Estadística.

Honorato de Castro

De Castro se exilió primero a Puerto Rico, en donde fue profesor de Astronomía y Geodesia de la Universidad y colaborador de la revista *Puerto Rico Ilustrado*. Desde 1945 hasta su muerte residió en México, y fue profesor de la Universidad de Monterrey y miembro del Instituto de Investigaciones Científicas de la Universidad de Nuevo León; asimismo, escribió en las revistas *Ciencia* y *Las Españas*[28].

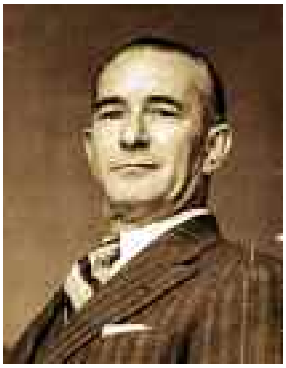
A lo largo de esta sección, y a partir de ahora, me centraré ya en los exiliados a México estrictamente matemáticos[29].

Posiblemente, el matemático refugiado en México más importante sea **Marcelo Santaló Sors** –hermano de Luis Santaló, exiliado a Argentina, de quien más adelante se hablará–, nacido en Gerona en 1905. En España hizo el doctorado en Ciencias Exactas y fue catedrático del Instituto de Segunda enseñanza de Huesca y vocal delegado, en esa cuidad, de la *Revista Matemática Hispano–Americana*; catedrático y director del Instituto de Gerona; astrónomo del Observatorio de Madrid; profesor ayudante de Astronomía de la Universidad Central y profesor adjunto del Instituto–Escuela de Madrid.

Marcha a México en la expedición del *Sinaia*, y el Servicio de Emigración le busca trabajo en el Instituto Luis Vives; posteriormente es también profesor del Instituto Hispano-Mexicano Ruiz de Alarcón, del Colegio de Madrid y de la Escuela Nacional Preparatoria de México; y trabaja asimismo en la Dirección General de Revalidación e Incorporación de Estudios. Escribe excelentes libros de Matemáticas –algunos de ellos en colaboración con Vicente Carbonell, de quien enseguida se tratará– sobre los primeros conocimientos de Aritmética y Geometría, Astronomía, Geometría analítica, Cálculo integral… lo que unido a sus otros méritos le vale ser nombrado, en 1957, jefe de la sección de Ciencia y Tecnología de la OEA, y en 1960 la UNESCO le encarga realizar un estudio sobre la enseñanza de las Matemáticas y la Cosmografía en Ecuador, Perú, Chile, Argentina y Paraguay. Su implicación y reconocimiento en el espacio de la emigración española quedan asimismo confirmados a la vista de su colaboración en diversos foros culturales en el exilio, tales como la revista *Las Españas*[30].

Otro de los más prestigiosos matemáticos emigrados a México es **Ricardo Vinós Santos**. Nacido en Vitoria en 1888, es doctor en Ciencias por la Universidad de Madrid y realiza estudios de posgrado en las Universidades de Roma, París y Berlín. En España funda y dirige la Escuela de Orientación Profesional de Madrid y es vocal del Consejo Nacional de Cultura y vicepresidente de la Junta de Reorganización de la Enseñanza Secundaria y Profesional. En 1939 marcha a México, donde crea y dirige hasta su fallecimiento en 1957, la Academia Hispano–Mexicana, con la idea de conformar la mejor escuela del país (murió precisamente al salir de su última clase de Matemáticas en esa Academia). Es de reseñar, además, que participó activamente en distintos escenarios de la cultura española en México; así, fue vocal de la Junta de Cultura Española, colaboró en la revista *España Peregrina*, etc.

También **Vicente Carbonell Chauro**, nacido en Madrid en 1914, matemático y profesor de Instituto en España, se exilió a México y fue profesor de la Academia Hispano–Mexicana, en la que desempeñó el cargo de secretario de 1940 a 1952, bajo la dirección de Vinós. Escribió varios libros en colaboración con Marcelo Santaló, y fue también profesor del Colegio de Madrid, el Instituto Luis Vives, la Escuela Nacional Preparatoria, el Instituto Politécnico Nacional y la Universidad Nacional Autónoma de México.



Lorenzo Alcaraz

El matemático **Lorenzo Alcaraz**, nacido en Guadalupe (Cáceres), en España fue profesor de Matemáticas en academias para el ingreso de ingenieros. Emigró a México, y allí sucedió a Vinós en la dirección de la Academia Hispano–Mexicana, desde 1957 (cuando falleció Vinós) hasta su muerte, en 1973. En México dio asimismo clase en otros colegios fundados por exiliados españoles y fue profesor de Matemáticas para economistas en el Instituto Tecnológico Autónomo de México, la Universidad Anáhuac y el Centro de Estudios Monetarios Latinoamericanos.

Enrique Jiménez González, nacido en Madrid en 1888 y doctor en Ciencias Exactas por la Universidad Central, fue profesor del Instituto Cardenal Cisneros de la capital y profesor numerario de Aritmética, Álgebra, Geometría analítica y Cálculo infinitesimal de Escuelas Superiores de Trabajo, como también director de las Escuelas de Sevilla y Madrid. Cuando estalló la guerra civil era profesor de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid y tuvo que exiliarse a México, en donde llegó a ser director del Instituto Luis Vives y profesor de la Academia Hispano–Americana. Es de resaltar que divulgó en ese país la teoría de las sustituciones y los sistemas polares. Falleció en México en 1957.

Asimismo fue profesor del Luis Vives **Jesús Bernárdez Gómez**, que defendió a la República en el campo de batalla como teniente del Ejército. Con clara tendencia pedagógica escribió en México, como coautor, catorce libros de texto o de ejercicios para primaria, para secundaria, libros básicos y de prácticas y, para la Escuela Preparatoria, unas tablas numéricas y una Geometría analítica. Ejerció un significado papel entre los republicanos españoles exiliados y fue uno de los fundadores del Colegio de Madrid. Además, fue profesor del Instituto Hispano–Mexicano Ruiz de Alarcón y de la Escuela Normal Superior.

También **Luis Bolívar Tapia**, nacido en Madrid en 1905, fue profesor del Luis Vives. Técnico industrial y licenciado en Ciencias Exactas, en España había sido profesor de Instituto y de las Escuelas de Capacitación del Sexto Cuerpo del Ejército Republicano y Militar para Oficiales en Paterna (Valencia). Al terminar la contienda fue hecho prisionero durante un año, aunque logró evadirse por Galicia para pasar a Lisboa y desde allí se embarcó para llegar a México en 1942. En su capital, como se ha dicho, fue profesor del Luis Vives, en donde dio clase de Matemáticas y Física, y ocupó el cargo de director técnico y, más tarde, de director general del mismo.

En fin, hay algún otro profesor de Matemáticas español, la mayoría ingeniero o físico, que también emigró a México, como **José Fernández de Lema**, **Teodoro Gonzales** o **Luís Torón**, profesores de la Academia Hispano–Mexicana; **Miguel del Río Guinea** o **Juan Valero Serrano**, profesores del Luis Vives; etc.

Es posible que asimismo debieran citarse, al menos de pasada, a otros españoles que se exiliaron a México cuando eran niños, pero que luego llegaron a ser destacados matemáticos en ese país. En esta *segunda generación de inmigrados* hay que mencionar a **Ignacio Canals Navarrete**, nacido en Santander en 1924, que obtuvo el título de ingeniero de montes en España después de la guerra, y más tarde estudió Matemáticas en México, donde también se doctoró; fue profesor de la Universidad Nacional Autónoma de México y su investigación principal se centró en la teoría de números algebraicos. Igualmente se encuentra entre los matemáticos de esta generación **Emilio Lluis Riera**, que se exilió a los trece años de edad, se licenció en Matemáticas en México y realizó su doctorado en Francia, con una interesante tesis en Geometría algebraica (publicada en la Universidad de Princeton), área en la que escribió numerosos artículos de importancia; además, fue presidente de la Sociedad Matemática Mexicana, miembro fundador y vicepresidente del Comité Interamericano de Educación Matemática… Otros relevantes profesores e investigadores de origen español son **Francisco Tomás Pons**, barcelonés nacido en 1931; **Carlos Ímaz Jahnke** y **Manuel Meda Vidal**, madrileños nacidos en 1932 y 1934, respectivamente; etc. ■

NOTAS

1 Véase por ejemplo PERALTA, J., *La matemática española y la crisis de finales del siglo XIX*. Madrid, Nivola, 1999.

2 PERALTA, J. "El movimiento renovador de la matemática española de finales del siglo XIX", *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, n.º 50 (1998), pp. 42–44.

3 HORMIGÓN, M., "Las matemáticas en España en el primer tercio del siglo XX", en SÁNCHEZ RON, J. M. (ed.), *Ciencia y sociedad en España: de la Ilustración a la Guerra Civil*. Madrid, CSIC, Ed. El Arquero, 1988, pág. 261.

4 RÍOS, S., "Julio Rey Pastor (1888–1962)", *Gaceta Matemática*, 2ª serie, Vol. 1, n.º 2 (1888), pág. 261.

5 El alemán David Hilbert (1862–1943) es sin duda uno de los mejores matemáticos de su época y acaso el más influyente (a veces se considera que la matemática del siglo XX se inicia con él). Los 23 problemas son probablemente los más importantes de la Matemática que en 1900 esperaban solución, aunque hoy estén en su mayor parte resueltos. Podría decirse que el estudio de tales problemas, así como de los nuevos que aparecieron al enfrentarse a ellos, han guiado de algún modo la matemática del siglo XX. Los enunciados de los 23 problemas aparecen por ejemplo en REY PASTOR, J. y BABINI, J., *Historia de la Matemática*, vol. 2. Barcelona, Gedisa, 1985, pág. 167.

6 PERALTA, J., "El liderazgo de Rey Pastor en el renacimiento de la matemática española", *Cátedra Nova*, n.º 13 (2001), pág. 289.

7 *ibídem*, pp. 287–298.

8 GONZÁLEZ REDONDO, F. A., "La vida institucional de la Sociedad Matemática Española entre 1929 y 1939", *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol. 5, n.º 1 (2002), pp. 234–235.

9 ETAYO, J. J., "75 años de vida matemática", en *Actas de las XI Jornadas Hispano–Lusas de Matemáticas* (Conferencia de clausura), Vol. I. Badajoz, Universidad de Extremadura, 1987, pág. 28; PERALTA, J., "Octavio de Toledo, la sucesión de los promotores de nuestro despertar matemático", *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol. 8, n.º 2 (2005), pág. 532.

10 Citado en SÁNCHEZ RON, J. M., *Cincel, martillo y piedra. Historia de la Ciencia en España (siglos XIX y XX)*. Madrid, Taurus, 1999, pág. 271.

11 Citado en GONZÁLEZ REDONDO, F. A., "La vida institucional...", *op. cit.*, pág 240.

12 GARCÍA CAMARERO, E., "La ciencia española en el exilio de 1939", en ABELLÁN, J. L. (dir.), *El exilio español de 1939*, Tomo 5. Madrid, Taurus, 1978, pág. 202.

13 Por ejemplo, en ACOSTA, C., CUVI, N. y ROQUÉ, X, *Ciencia entre España e Hispanoamérica. Ecos del siglo XX*. Barcelona, CEHIS, Universitat Autònoma de Barcelona, 2003, pág. 56, se dice que la migración forzosa alcanzó a unos 500.000 españoles. En CAUDET, F., *Hipótesis sobre el exilio republicano de 1939*. Madrid, Fundación Universitaria Española, 1997, pp. 84–85, se citan distintas fuentes, según las cuales el número de exiliados serían: 750.000, pero con el flujo de salidas y entradas a España se quedarían en 475.000 (de acuerdo con RUBIO, J., *La emigración de la guerra civil de 1936–1939*, Vol. I. Madrid, San Martín, 1977, pág. 106); 527.843 [conforme a CLIMENT, J. B., "España en el exilio", *Cuadernos Americanos*, n.º 126 (1963), pág. 99]; etc.

14 ABELLÁN, J. L. (dir.), *El exilio español de 1939*, Tomo 1. Madrid, Taurus, 1976, pág. 16.

15 LLORÉNS, V., "La emigración republicana de 1939", en ABELLÁN, J. L. (dir.), *El exilio español de 1939*, Tomo 1. Madrid, Taurus, 1976, pág. 104.

16 Citado en CAUDET, F., *Hipótesis sobre el...*, *op. cit.*, pp. 294–295.

17 Citado en CLARET, J., *La repressió franquista a la Universitat espanyola*. Tarragona, Universitat Pompeu Fabra, 2005, pág. 372.

18 SÁNCHEZ RON, J. M., *Cincel, martillo y ...*, *op. cit.*, pp. 420–421.

19 Citado en PERALTA, J., "Sobre los maestros de Pedro Puig Adam", *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, n.º 56 (2000), pág. 51.

20 *ibídem*, pág. 52.

21 Citado en RÍOS, S., "Rasgos humanos de Don Esteban Terradas", *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, n.º 3 (1984), pp. 29–30.

22 TRUJILLO, L., "Blas Cabrera Felipe y Canarias", en GONZÁLEZ DE POSADA, F., GONZÁLEZ REDONDO, F. A. y TRUJILLO, D. (eds.), *Actas del IV Simposio "Ciencia y Técnica en España de 1898 a 1945: Cabrera, Cajal, Torres Quevedo"*. Lanzarote, Academia de Ciencias e Ingenierías de Lanzarote y Amigos de la Cultura Científica, 2004, pág. 71.

23 LLORÉNS, V., "La emigración republicana ...", *op. cit.*, pp. 126–127.

24 RUBIO, J., *La emigración de ...*, *op. cit.*, pág. 180.

25 ALTED, A., *La voz de los vencidos. El exilio republicano de 1939.* Madrid, Aguilar, Santillana, 2005, pág. 222.

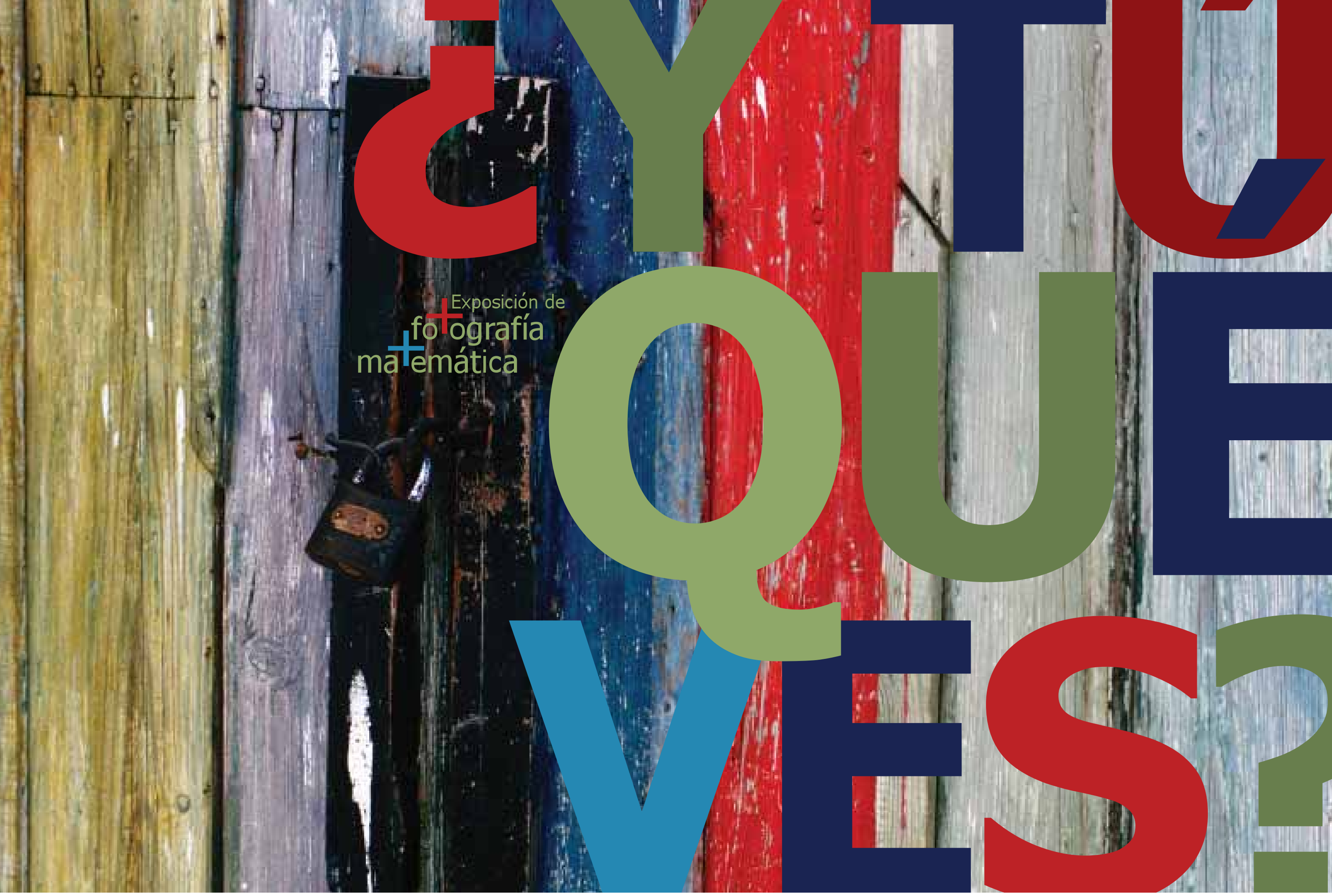
26 ORDÓÑEZ, M. M., *El Comité Técnico de Ayuda a los Republicanos Españoles: historia y documentos, 1939–1940*. México, INAH, 1997.

27 SÁENZ DE LA CALZADA, C., "Educación y Pedagogía", en ABELLÁN, J. L. (dir.), *El exilio español en 1939*, Tomo 3. Madrid, Taurus, 1976, pp. 253–259.

28 SÁENZ DE LA CALZADA, C., "Educación y ...", *op. cit.*, pág. 241; VV. AA.,"Índice bibliográfico del exilio español en México", en VV. AA., *El exilio español en México, 1939–1982* (Fondo de Cultura Económica). México, Salvat, 1982, pág. 754.

29 CUELI, J., "Matemáticas, física y química", en VV. AA., *El exilio español en México, 1939–1982* (Fondo de Cultura Económica). México, Salvat, 1982, pp. 531–535; GARCÍA CAMARERO, E., "La ciencia española ...", *op. cit.*, pp. 217–223 y 230–240; LLORÉNS, V., "La emigración republicana ...", *op. cit.*, pp. 128–139; VV. AA., *El exilio español ...*, *op. cit.*

30 ANDÚJAR, M., "Las revistas culturales y literarias del exilio en Hispanoamérica", en ABELLÁN J. L. (dir.), *El exilio español de 1939*, Tomo 3. Madrid, Taurus, 1976, pág.49.



Exposición de
fotografía matemática

Del 26 de octubre de 2007 al 6 de enero de 2008
Cosmocaixa Madrid
C/ Pintor Velázquez, Alcobendas s/n

¿Y TÚ, QUÉ VES?

exposición fotográfica colectiva de: Pilar Moreno, José Luis Belmonte, Olga Martín, Lucía Morales, Leopoldo Martínez, Juan José Martín, Mª Carmen Pérez, Helena Valencia, Alejandro Medina, Álvaro García, Carlos Alberto Aguirre, José Alberto Alvarado, Rubén Crespo y Sergio Borralo.

Fotografía: "Capricho". Autora: Pilar Moreno. Diseño: Uría Fernández

COSMOCAIXA MADRID

Dirección General de Mejora de la Calidad de Enseñanza
Subdirección General de Formación del Profesorado
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN
Comunidad de Madrid

SUMA 56
Noviembre 2007,pp. 23-31

Cómo aumentar la motivación para aprender matemáticas

Este estudio se ha realizado con 240 estudiantes de matemáticas de 14 a 16 años divididos en dos grupos (experimental y control). Se han aplicado protocolos diseñados desde una perspectiva constructivista al grupo experimental, y posteriormente se ha comparado (cualitativa y cuantitativamente) el grado de motivación de este grupo con el grupo control, que han trabajado los mismos contenidos matemáticos de forma expositiva. Los resultados evidencian que los protocolos inciden positivamente en la motivación de los estudiantes.

This study has been made with 240 students of mathematics of 14 to 16 years divided in two groups (experimental and control). Protocols designed from a constructivist perspective have been applied to the experimental group, and later the degree of motivation of this group has been compared (qualitatively and quantitatively) with the control group, that has worked such contained mathematical of expositive form. The results demonstrate that the protocols affect the motivation of the students positively.

Nos encontramos ante el reflejo de una preocupación educativa que se ha manifestado en artículos de diversos autores en el ámbito de la Didáctica de las Matemáticas (Granville, Singh y Dika, 2002; Middleton y Spanias, 1999; Stevens, Olivarez y Hamman, 2006; Winstead, 2004; entre otros), y que ha trascendido a la opinión pública a través de distintos medios de comunicación (algunos de ellos pueden consultarse en la web http://www.divulgamat.net): los estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) realizan un aprendizaje poco sólido de las matemáticas, ya que hay una gran distancia entre lo que pretende el currículo cuando se basa en el constructivismo en las aulas y lo que pasa en los centros actualmente.

Son múltiples los factores que inciden en esta realidad. Una posible categorización podría ser la siguiente (Alsina, À., 2001):

- Factores internos: se incluyen aquí tanto variables de tipo cognitivo (atención, memoria, razonamiento, etc.), como variables afectivo-emocionales (autoconcepto y autoestima, motivación, creencias, representaciones sociales, etc.).
- Factores externos: contexto socio-económico, tipo de centro educativo, nº de estudiantes por aula, etc.).

En los últimos años, probablemente a raíz de la demanda social, se ha visto incrementada en nuestro país la investigación educativa aplicada que ha pretendido analizar la incidencia de uno o diversos de los factores mencionados en el aprendizaje de las matemáticas (Alsina, À. y Sáiz, D., 2003, 2004; Gorgorió y Planas, 2005; Planas y Gorgorió, 2004; entre otros).

En este trabajo analizamos la incidencia de la motivación en el aprendizaje de las matemáticas, al considerar que es un factor determinante para incrementar el rendimiento en las clases de matemáticas. En esta línea, hace ya unos años Font (1994) afirmaba que cualquier análisis del aprendizaje de las matemáticas debe considerar la motivación:

> En función de si el estudiante tiene un patrón motivacional positivo o negativo, su actitud hacia las matemáticas será diferente. Si el patrón es positivo, el estudiante, frente a una dificultad reaccionará analizándola, buscará una nueva estrategia, preguntará al profesor, etc.; ... Si el estudiante presenta un patrón motivacional negativo, frente a una dificultad, aumentará su ansiedad y hasta se angustiará pensando que la causa de la dificultad es su incapacidad y, por tanto, adoptará una actitud defensiva, como por ejemplo: no hacer nada, no preguntar porque solamente preguntan los tontos, intentará copiar la respuesta, etc. (pp. 14).

Àngel Alsina
Marta Domingo
Universidad de Gerona. Gerona

Tradicionalmente, la psicología de la educación ha analizado la motivación de los estudiantes para aprender matemáticas. Estas investigaciones se han realizado sobre todo desde la perspectiva de la motivación académica, al centrarse en el contexto de las aulas (Alonso, 1991, 1997; Alonso y Montero, 2001; Escaño y Gil de la Serna, 2001, 2006; Gonzáles, 1997; Garrido, 1996; entre otros). La mayoría de estos autores coinciden al afirmar que la motivación académica es el contrario de la indiferencia, es decir, un estudiante está motivado académicamente cuando no permanece indiferente ante cualquier aprendizaje nuevo o tarea que se le proponga, o dicho de otra forma, cuando más indiferente se muestra un estudiante, menos motivado está. Existen varios subtipos de motivación académica:

- Motivación de competencia, basada en incrementar la propia competencia.
- Motivación de control, que persigue actuar con la máxima autonomía, sin ser obligado.
- Motivación intrínseca, basada en experimentarse absorbido por la naturaleza de la tarea.
- Motivación de logro, basada en experimentar el orgullo que sigue al éxito.
- Motivación por miedo al fracaso, para evitar la experiencia de vergüenza o de humillación que acompaña al fracaso.
- Motivación para el premio, para conseguir premios o recompensas.

Tradicionalmente, la psicología de la educación ha analizado la motivación de los estudiantes para aprender matemáticas.

Trabajos anteriores tanto de ámbito internacional como en el contexto de nuestro país han permitido llegar a la conclusión que el patrón motivacional que puede incrementar el rendimiento matemático y, en definitiva, favorecer un aprendizaje significativo de esta materia es la motivación intrínseca (Baroody, 1988; Skemp, 1980; entre otros), afirmación con la que coincidimos plenamente. Skemp (1980), por ejemplo, se refiere a las motivaciones extrínsecas como aquellas que consiguen *motivar* a los estudiantes a través de premios y castigos; mientras que por intrínsecas entiende aquellas que surgen de dentro del sujeto, y que hacen que las matemáticas sean una actividad que recompensa en sí misma. Baroody (1988) pretende determinar algunos factores que llevan a un patrón motivacional extrínseco o negativo ante tareas matemáticas:

> Exagerar la importancia de memorizar datos y procedimientos de una manera preestablecida y rígida cultiva creencias debilitadoras. Cuando la instrucción asigna una importancia fundamental a la memorización de datos y técnicas, es muy probable que los estudiantes obtengan una impresión equivocada de las matemáticas (pp. 77).

De ahí se deduce que la elaboración de un patrón motivacional negativo ante tareas aritméticas es debida a las propias creencias de los estudiantes, que resume en las siguientes: la incapacidad para aprender datos o procedimientos con rapidez es señal de inferioridad en cuanto a inteligencia y carácter; la incapacidad para responder con rapidez o emplear un procedimiento con eficacia indica lentitud; la incapacidad total para responder es señal de una estupidez absoluta; las respuestas inexactas, como por ejemplo las estimaciones, son inadecuadas.

Diversas investigaciones realizadas en nuestro país llegan a conclusiones similares: Gavilán (2002) realiza un estudio sobre la resolución de problemas matemáticos en 3º de ESO y, a través de la comparación de dos grupos, pone de relieve el contraste entre la poca motivación del grupo control y el alto grado de satisfacción y de implicación del grupo experimental, así como también el aumento de la motivación. Cubillo y Ortega (2002) realizan una investigación con estudiantes de 15 a 17 años, y a través de un análisis pretest/postest encuentran una correlación positiva entre la valoración de los estudiantes hacia las matemáticas y el grado de motivación.

Los datos anteriores revelan un acuerdo prácticamente unánime en la literatura científica respecto al papel que juega la motivación en el aprendizaje de las matemáticas, pero son pocos los estudios que explican cómo mejorar la motivación. En el contexto de nuestro país, por ejemplo, los trabajos de Alonso y sus colaboradores realizan una aproximación en esta línea, centrándose sobre todo en el papel que juega el profesor:

> En primer lugar, la intervención del profesor debe garantizar que el estudiante perciba o experimente que es competente (…) Esto puede verse facilitado si el clima de clase en el que se mueve el estudiante –los mensajes que recibe, especialmente– se orienta a estimular la motivación hacia el aprendizaje, evitando los mensajes que implican una crítica y que subrayan la incompetencia del sujeto. En segundo lugar, es imprescindible que el profesor favorezca la autonomía … (Alonso, 1991, pág. 29-30).

A partir de este marco teórico hemos planteado nuestro estudio, cuya finalidad es aportar a las comunidades científica y educativa una propuesta que permita mejorar el grado de motivación académica (y más concretamente la motivación intrínseca) de los estudiantes de ESO para aprender matemáticas. Con este objeto, se ha elaborado un programa de diferentes contenidos matemáticos para la ESO (Domingo, 2004), y se ha aplicado esta propuesta didáctica de aprendizaje activo en diferentes centros educativos.

Se ha partido de dos grupos de estudiantes en cada centro (experimental y control) con un rendimiento matemático similar antes de la aplicación del programa, medido a partir del nivel en la Prueba C de Matemáticas de las pruebas de evaluación *Competències Bàsiques. Educació Secundària Obligatòria. Primer cicle*, del Departament d'Educació (2004). Durante la aplicación del programa al grupo experimental, el grupo control ha seguido aprendiendo matemáticas de la forma tradicional, que a grandes rasgos consiste en que el profesor explica el concepto y a continuación los estudiantes realizan ejercicios para practicar dicho concepto, siguiendo un paradigma de aprendizaje asociacionista basado en la repetición y en la práctica, de acuerdo con los postulados de la psicología del aprendizaje humano en general y del aprendizaje de las matemáticas en particular formulados a inicios del siglo XX por Thorndike (1922), entre otros. Una vez aplicado el programa al grupo experimental de cada centro se ha medido el nivel motivacional de todos los estudiantes (tanto del grupo experimental como del grupo control) a través del Test AF-5 de Musitu y García (1999), con el objeto de evaluar la posible efectividad del programa diseñado para aumentar el nivel de motivación, que es nuestro principal objetivo.

Participantes

La muestra está formada por 240 estudiantes de 4 centros educativos de Cataluña Central (Vic y alrededores), de edades comprendidas entre los 14 y los 16 años. Dentro de cada centro se eligen dos clases de 2º de ESO (una es el grupo experimental y otra el grupo control) a partir de los criterios siguientes: que los dos grupos presenten un rendimiento matemático similar antes de la aplicación del programa y que los dos grupos tengan el mismo profesor, para controlar así variables extrañas que podrían haber contaminado el estudio.

Material

Programa de transposición didáctica de los conceptos matemáticos en la ESO (Domingo, 2004)

En el momento de redactar este trabajo, el programa está formado por siete protocolos para introducir los siguientes contenidos matemáticos: el concepto de poliedro regular; los conceptos de sistema de referencia, función, y función lineal, afín y constante; el concepto de probabilidad y deducir la Regla de Laplace; el concepto de desigualdad e inecuación; el concepto de razones trigonométricas y el concepto de sucesión. Cada protocolo tiene una estructura muy similar:

- Título del protocolo.
- Conocimientos previos.
- Propuesta de material manipulable a utilizar.
- Propuesta de protocolo a seguir, con ejemplos de preguntas que fomenten la interacción, el diálogo y la negociación entre los estudiantes y entre el profesor y los estudiantes.
- Propuesta de ficha de trabajo escrito.

Insistimos en el hecho de que se trata de propuestas, dado que cada profesor puede y, de hecho, debería ajustar estas orientaciones a las características de sus estudiantes. Por razones obvias de espacio reproducimos aquí un único protocolo como ejemplo:

Título

Introducción al concepto de probabilidad y conceptos asociados (espacio muestral, experimento aleatorio...). Regla de Laplace.

Conocimientos previos

Curriculares	Vida cotidiana
Cálculo con enteros y racionales Estadística (curso anterior)	Juegos de azar Procesos electorales Fenómenos meteorológicos Deportes

Propuesta de material

Moneda, dado, ficha de trabajo.

Propuesta de protocolo

La propuesta para presentar este tema se basa en dos aspectos: el diálogo alumno-alumno y alumno-profesor, mediante el cual los alumnos se puedan ir acercando a diferentes casos en que se hable de probabilidades; y la experimentación, a partir de la cual los alumnos puedan llegar a deducir la Regla de Laplace, a pesar de darse cuenta de que para concordar con la realidad la muestra tiene que ser muy grande.

El profesor, cuando llega a clase explica al grupo que el último tema del curso es empírico, es decir, pueden experimentar primero y analizar después las respuestas. Así pueden deducir una regla teórica. Para establecer contacto con hechos cotidianos, el profesor empieza la clase con preguntas del estilo:

> ¿Qué probabilidad hay de que haga salir un chico a la pizarra? ¿y de que haga salir a alguien que lleve gafas?

Los alumnos pueden contestar en tantos por ciento si son capaces de hacerlo aproximadamente; pueden responder de manera cualitativa, diciendo probabilidad alta, baja, etc. o pueden no saber qué decir. En cada caso, el profesor tendrá que hacer un esfuerzo más o menos grande para acompañar la situación, haciéndoles conscientes de dos aspectos básicos:

- Hay dos datos a tener en cuenta: por una parte, el total, y por otra, el número de casos favorables (n.º chicos en el primer caso y n.º personas con gafas en el segundo).
- Para expresar una probabilidad, se hace en tanto por uno (observamos que este segundo aspecto se puede dejar para más adelante si el grupo lo entiende mejor en tantos por ciento, no hay prisa).

A partir de aquí, el profesor puede empezar a hablar de que cualquier experimento próximo a ellos (tirar un dado, hacer una apuesta para una canasta de baloncesto, escoger a alguien de un grupo al azar, etc.) puede ser sometido a este análisis. Hace falta, sin embargo, que el experimento cumpla dos condiciones:

- No sabemos qué pasará.
- Conocemos todos los resultados posibles.

Ha llegado el momento de definir experimento aleatorio, así como ir analizando alguno, para comprobar que cumplen las dos propiedades.

Ejemplo: El lanzamiento de un dado es aleatorio, pues no sabemos qué saldrá pero sabemos todos los resultados posibles, que son 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

Se pueden hacer tantos ejemplos como se crea necesario. Los alumnos también pueden proponer. El profesor sólo tiene que controlar que los alumnos propongan experimentos no compuestos, pues estamos en el inicio.

Una vez realizada esta actividad se puede introducir el concepto de conjunto, es decir, el espacio muestral, como el conjunto de todos los resultados posibles.

Ejemplos:

- Lanzamiento de una moneda: $\Omega = \{c,+\}$
- Lanzamiento de un dado: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- En un examen tipo test con cuatro opciones sé la respuesta de todas las preguntas excepto de la última. Si acierto ésta última tendré un sobresaliente, pero si me equivoco tendré un notable, porque restará puntos. No puedo dejar ninguna pregunta sin contestar. ¿Qué probabilidad tengo de adivinar si respondo al azar?
- Estoy jugando a cartas con dos compañeros más. Cada uno de nosotros tiene 4 cartas en la mano y el resto están en un montón encima de la mesa. Me toca coger una carta. Si me sale una carta de copas habré ganado. ¿Qué probabilidad tengo?

A partir de aquí se les proporciona la Ficha de Trabajo. Se puede optar por una dinámica de grupos (máximo 3 personas) para llenarla y responder a las cuestiones. Después se pondrán en común con todo el grupo.

Propuesta de ficha de trabajo

Ficha de actividades de Enseñanza-Aprendizaje 1: lanzamiento de una moneda.

Anota los resultados obtenidos al lanzar 100 veces una moneda sobre tu libreta. Puedes utilizar un código para cara y otro para cruz vigilando sobre todo de no descontarte y de sumar 100 tiradas entre las caras y las cruces.

	C (cara)	+ (cruz)
Total		

Responde a las preguntas siguientes:

- ¿Qué tanto por ciento de caras y cruces te ha salido?
- ¿Teóricamente, qué tanto por ciento de probabilidades tenemos de obtener cara? ¿Y de obtener cruz? ¿Por qué?
- ¿Cuál de tus compañeros se ha acercado más al resultado teórico?
- ¿Cómo lo podríamos hacer para acercarnos más?

Ficha de actividades de Enseñanza-Aprendizaje/2: lanzamiento de un dado.

Anota los resultados obtenidos al lanzar 100 veces sobre tu libreta un dado. Vigila que el total de lanzamientos de los seis resultados posibles diferentes sumen 100.

	1	2	3	4	5	6
Total						

Responde a las preguntas siguientes:

- ¿Qué tanto por ciento de números pares te ha salido?
- Teóricamente, ¿qué tanto por ciento de probabilidades tenemos de obtener número par? ¿Por qué?

- ¿Qué tanto por ciento de doses te ha salido?
- ¿Teóricamente, qué tanto por ciento de probabilidades tenemos de obtener un dos? ¿Por qué?
- ¿Qué tanto por ciento de números inferiores a tres te ha salido?
- ¿Teóricamente, qué tanto por ciento de probabilidades tenemos de obtener un número inferior a tres? ¿Por qué?

A partir de aquí, se pueden introduir las notaciones de A (hecho o suceso), así como recalcar las de Σ y Ω (sumatorio y espacio muestral respectivamente), y proponer, para el próximo día, que busquen una norma general para calcular probabilidades. Se les dice que van a recogerse todas les propuestas en voz alta y que se discutirán.

Es importante que, durante la siguiente sesión, antes de hacer decir las propuestas, el profesor pueda hacer un repaso de la clase anterior, destacando los aspectos más relevantes y recordando la notación que deben utilizar. Una vez hechas las propuestas, si van encaminadas hacia hacer divisiones y buscar proporciones, la experiencia se puede calificar de éxito. Hará falta, sin embargo, que el profesor escriba formalmente y con la notación adecuada la Regla de Laplace.

A continuación presentamos la Regla de Laplace según aparece en el libro de texto de este grupo de alumnos (Ed. Casals):

Regla de Laplace

Dado un espacio muestral Ω, formado por n elementos (se escribe $\#\Omega = n$) equiprobables (es decir, con la misma probabilidad de ocurrir), entonces la probabilidad de un hecho A, formado por k elementos de Ω (se escribe $\#A = k$), es igual al número de casos favorables dividido por el número de casos posibles. Se escribe de la manera siguiente:

$$P(A) = \#A \,/\, \#\Omega$$

Ejemplo: calcular la probabilidad de que al lanzar un dado salga un número más pequeño que 5.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\#\Omega = 6$
$A = \{1,2,3,4\}$, $\#A = 4$
$P(A) = 4/6 = 0{,}6666...$

Test AF-5 (Musitu y García, 1999)

De los tests estandarizados que existen en el mercado para medir el grado de motivación hemos elegido el AF-5 ya que, dadas sus características, este instrumento es el que nos podía aportar datos más fiables en relación a la motivación académica de los estudiantes.

Evalúa cinco dimensiones: la social, la académico-profesional, la emocional, la familiar y la física. En nuestro estudio elegimos la dimensión académico-profesional, que en el caso de los sujetos de la investigación (estudiantes entre 14 y 16 años) corresponde a una dimensión puramente académica, omitiendo por tanto a partir de ahora el término laboral y pudiendo así hablar de la dimensión académica.

> *La percepción que el sujeto tiene del desarrollo de su rol como estudiante se correlaciona positivamente con el rendimiento académico, la aceptación de los compañeros, el liderazgo y la responsabilidad.*

De forma más concreta, esta dimensión se refiere a la percepción que el sujeto tiene del desarrollo de su rol como estudiante. Semánticamente la dimensión gira en torno a dos ejes: el primero se refiere al sentimiento que el estudiante tiene de este desarrollo del rol a través de sus profesores; y el segundo se refiere a cualidades específicas valoradas especialmente en el contexto (inteligencia, capacidad de trabajo…). Esta dimensión se correlaciona positivamente con el rendimiento académico, la aceptación de los compañeros, el liderazgo y la responsabilidad. Por otra parte, se correlaciona negativamente con el absentismo escolar, el conflicto y la indiferencia.

Prueba C de matemáticas de las pruebas de evaluación *Competències Bàsiques. Educació Secundària Obligatòria. Primer cicle* (Departamento de Educación, 2004)

Estas pruebas vienen aplicándose desde el curso 2001-2002 en el primer ciclo de la ESO en Cataluña. Las finalidades de estas pruebas son las siguientes:

- Facilitar elementos que permitan la reflexión y la discusión, en los claustros y entre los equipos docentes y los departamentos didácticos, y la toma de decisiones sobre aspectos de gestión del currículum y resultados de aprendizaje dentro del plan de evaluación interna de cada centro.
- Disponer de referentes externos, una vez establecidos unos baremos estandarizados, al valorar los resultados propios y de tomar decisiones de mejora en el centro.
- Aportar datos estadísticos para el conjunto del sistema educativo en Cataluña.

En estas pruebas se entiende por competencia la capacidad de poner en práctica de forma integrada, en contextos y situaciones diferentes, los conocimientos, las habilidades, y los rasgos de la personalidad adquiridos. El concepto de competencia, pues, incluye los saberes (conocimientos teóricos), las habilidades (conocimientos prácticos o aplicables) y las actitudes (compromisos sociales), y va más allá del *saber* y *saber hacer o aplicar*, porque incluye también el *saber ser o estar*. Competencia, pues, significa capacidad de usar funcionalmente los conocimientos y las habilidades de una forma transversal e interactiva, en contextos y situaciones diferentes, e implica comprensión, reflexión y discernimiento.

Se entiende por competencia la capacidad de poner en práctica de forma integrada, en contextos y situaciones diferentes, los conocimientos, las habilidades, y los rasgos de la personalidad adquiridos.

El currículo de la ESO recoge las competencias básicas en un sentido amplio y extenso. A partir de las conclusiones de la Conferencia Nacional de Educación (2000-2002) y de diferentes trabajos de campo, basados en los Objetivos Generales de Etapa, se concretan cuáles son las competencias de cada ámbito. En el caso concreto del Área de Matemáticas se seleccionaron las competencias siguientes:

- M1 – Aplicar el conocimiento del sistema de numeración decimal y de las operaciones para comparar, relacionar números y operar con rapidez, buscando según la situación un resultado exacto o aproximado.
- M2 – Utilizar las técnicas y convenciones y el lenguaje de la representación geométrica para componer y descomponer formas geométricas complejas a partir de formas simples.
- M3 – Utilizar con precisión y criterio las unidades de medida.
- M4 – Usar con propiedad instrumentos y técnicas para dibujar, medir y calcular.
- M5 – Planificar y seguir estrategias de resolución de problemas y modificarlas, si no se muestran eficaces.
- M6 – Usar e interpretar lenguaje matemático como cifras, signos y otras representaciones gráficas o dibujos para describir fenómenos habituales.
- M7 – Interpretar la función que hacen los números cuando aparecen en un contexto real (expresar cantidad, identificación, tiempo, medida, intervalos) y usarlos de acuerdo con sus características.
- M8 – Reconocer e interpretar gráficamente relaciones sencillas de dependencia funcional existentes entre conjuntos de datos de uso cotidiano, en particular en casos de proporcionalidad directa.
- M9 – Comparar la factibilidad de hechos aleatorios en situaciones simples.

Procedimiento

El procedimiento seguido ha sido el siguiente: después de la pertinente revisión bibliográfica y de la selección de la muestra, se establece contacto con los distintos centros para fijar las fechas pertinentes a las pruebas y tests: primeramente, se elabora una comparación estadística de los resultados obtenidos por los dos grupos de cada centro en la Prueba C de matemáticas de las pruebas de evaluación *Competències Bàsiques. Educació Secundària Obligatòria. Primer cicle* (departamento de educación, 2004), para poder demostrar que las medias no presentan diferencias significativas y que, por tanto, se pueden suponer dos grupos de nivel similar, de acuerdo con Coon (1998), que afirma que para demostrar que un método funciona deben compararse dos grupos a nivel experimental.

Después de aplicar los siete protocolos del Programa de transposición didáctica de los conceptos matemáticos (Domingo, 2004) a los grupos experimentales de cada centro, se administra el Test AF-5 (Musitu y García, 1999) a los grupos experimental y control y se analiza mediante el programa SPSS (Versión 9.0) si hay o no diferencias significativas entre las medias de ambos grupos. Finalmente, estos resultados se contrastan con un breve análisis cualitativo que consta de una entrevista a cada profesor, así como un grupo de discusión entre los profesores participantes en el estudio.

Resultados

En primer lugar presentamos los resultados del análisis que nos ha permitido comparar el rendimiento matemático de los dos grupos de cada centro (experimental y control) antes de la aplicación del programa. Ver tabla I.

En dicha tabla se puede apreciar que en todos los centros educativos las medias de las puntuaciones directas obtenidas en la Prueba C de matemáticas no presentan diferencias significativas entre los grupos control y experimental.

Tal como hemos explicado en el procedimiento, una vez verificado que los dos grupos no presentan diferencias estadísticamente significativas respecto al rendimiento matemático se aplica el Programa de transposición didáctica de los conceptos matemáticos de Domingo (2004) a los grupos experimentales de cada centro participante en el estudio. A continuación se analiza si el Programa de transposición didáctica de los conceptos matemáticos mejora o no la motivación del alumnado, que como hemos indicado es nuestro principal objetivo. Para comparar los grados de motivación del grupo experimental y del grupo control. En la tabla II se comparan los resultados obtenidos en el Test AF-5.

A partir de los resultados de la tabla II se elabora un contraste de hipótesis para ver si la diferencia que presentan los dos grupos a nivel general es significativa. Se realiza la prueba de hipótesis siguiente, utilizando la prueba *t* de Student:

H_0: no existen diferencias significativas entre el grado medio de motivación de los estudiantes del grupo experimental y los estudiantes del grupo control.

H_1: hay diferencias significativas entre el grado medio de motivación de los estudiantes del grupo experimental y los estudiantes del grupo control.

Los datos estadísticos que hemos obtenido son los que se muestran en la tabla III.

Los datos estadísticos de la prueba *t* de Student que se aprecian en la tabla III nos revelan que existen diferencias significativas entre el grado medio de motivación de los estudiantes del grupo experimental y los del grupo control, en el sentido que se ha incidido positivamente sobre el grado de motivación del alumnado.

Prueba *t* de Student para igualdad de medias						
	t	gl	g (bilateral)	Diferencia de medias	Error típico de la diferencia	Intervalo de confianza para la diferencia inferior/superior
Centro 1	0,22	51	0,83	0,69	3,12	–5,57/6,95
Centro 2	1,44	25	0,16	4,53	3,13	–1,93/10,98
Centro 3	–0,13	114	0,99	2,68	2,05	–4,08/4,03
Centro 4	–0,46	34	0,65	–1,10	2,37	–5,91/3,71

Tabla I. Prueba *t* de Student para muestras independientes de los estudiantes del grupo experimental y los estudiantes del grupo control, para encontrar el p-valor que contrasta les diferencias entre las medias de los resultados de las Competencias Básicas de estos dos grupos, filtrados para cada una de los cuatro centros.

Grupo experimental			Grupo control		
Media	D. T.	Mediana	Media	D. T.	Mediana
6,29	1,84	6,37	5,43	2,18	5,92

Tabla II. Tabla descriptiva de las medidas de centralización y dispersión de la variable motivación, filtrada según el método.

Prueba *t* de Student para igualdad de medias						
	t	gl	g (bilateral)	Diferencia de medias	Error típico de la diferencia	Intervalo de confianza para la diferencia inferior/superior
Motivación	3,25	233	0,001	0,86	0,26	0,34/0,38

Tabla III. Prueba *t* de Student para muestras independientes de los estudiantes del grupo experimental y los estudiantes del grupo control, para encontrar el p-valor que contrasta les diferencias entre las medias del grado de motivación académica.

Paralelamente al estudio cuantitativo hemos realizado también un breve análisis cualitativo. De forma muy sintética, tanto en la entrevista a cada profesor como en el grupo de discusión entre los profesores participantes en el estudio, se han constatado los siguientes datos:

- La propuesta es motivadora en todos los casos y mejora la memoria comprensiva de los estudiantes.
- El programa diseñado permite avanzar a los estudiantes en la mayoría de protocolos trabajados. Así, en términos generales, puede afirmarse que el programa tiene un alto grado de comprensividad.
- Los elementos que, según la perspectiva de los entrevistados, más significativos son: la participación y el diálogo, la deducción de fórmulas o de hechos sin la intervención directa del profesor, el uso de material manipulable, el hecho de trabajar en grupo, la inducción y la anticipación (el estudiante sabe a priori qué se trabajará en los días siguientes y cuáles serán los objetivos).
- Por otro lado, los profesores destacan que se economiza el tiempo, que siempre ha sido un aspecto preocupante entre el profesordo.

Si un estudiante quiere terminar su tarea sólo para tener buena nota, es probable que adopte una actitud defensiva.

Discusión

A partir de los resultados de nuestro estudio ha quedado demostrado estadísticamente que el grado de motivación que presenta el grupo experimental después de la aplicación del Programa de transposición didáctica de los conceptos matemáticos en la ESO es significativamente superior que el que presenta el grupo control. Abrantes, Serrazina y Oliveira (1999) argumentan que la motivación es esencial para aprender pero la naturaleza de esta motivación determina la manera que los estudiantes se manejan en las tareas que hacen y en el aprendizaje, en la línea ya manifestada por Skemp (1980) o Baroody (1980), entre otros. Así, si un estudiante quiere terminar su tarea sólo para tener buena nota, es probable que adopte una actitud defensiva, procurando sólo obtener el resultado correcto y no hacer errores. Pero si está intrínsecamente motivado para realizar una tarea, si realmente la valora, correrá riesgos para mejorar su trabajo y probablemente se implicará en una exploración de la situación más profunda y tendrá en cuenta todo lo que le rodea. Desde esta perspectiva, en nuestro estudio se parte de la idea que la motivación intrínseca no viene dada de forma natural en la mayoría de estudiantes, y es con el diseño de propuestas didácticas de aprendizaje activo en la línea del programa presentado desde donde se intenta provocar este tipo de motivación.

Diversos estudios apuntan en esta línea y, más concretamente, se centran en el tipo de intervención del profesor o bien en el tipo de material utilizado. Por ejemplo, y en relación a la intervención del profesor, diferentes autores tratan la importancia de la comunicación, la forma de introducir nuevos contenidos: Gómez-Chacón (1999), por ejemplo, pone de relieve los factores afectivos que influyen en la calidad del aprendizaje y presenta algunos instrumentos que puede aplicar el profesor en su aula y que tienen en cuenta la dimensión emocional y sociocultural de los estudiantes. Núñez (1996) destaca la importancia del contexto para aprender matemáticas, e impulsa el uso de situaciones problemáticas de la vida cotidiana como elemento motivador para introducir nuevos contenidos matemáticos. Planas (2002), resalta la importancia de la comunicación profesor-estudiante en la clase de matemáticas, con el objeto de asegurar que los estudiantes atribuyan el significado que el profesor ha intentado transmitir y no otro. Si no se produce este diálogo, el estudiante puede interiorizar aprendizajes erróneos y extraer falsas conclusiones en la construcción de su significado. Vemos, pues, que el papel del profesor dentro de la clase es de crucial importancia para aumentar la motivación de los estudiantes o, dicho de otra forma, el papel de la comunicación dentro de la clase de matemáticas es fundamental. Cuando se pretende articular un diálogo, favorecer la participación, conseguir un trabajo de grupo eficaz o, simplemente, no anticipar resultados a los que los estudiantes pueden llegar con la ayuda de procesos inductivos, el profesor debe estar preparado y sensibilizado para realizar este tipo de actividad. Alsina, C. (2000), haciendo referencia a los principales retos del futuro de las matemática alude también a este aspecto:

> Se debe recordar que educar, en matemáticas, no es transmitir fórmulas y recetas. Una parte del profesordo de matemáticas ha trabajado a partir de la confusión de creer que simplemente deben explicarse algoritmos (...). Y el último reto de las matemáticas sería el de la emotividad, que la gente se sienta feliz haciendo matemáticas, que le haga ilusión ir a clase, que se sepa transmitir la ilusión por el descubrimiento, por compartir lo que se está haciendo. (pág. 8).

En relación al uso de material manipulable, autores como Corbalán y Deulofeu (1996) presentan una investigación a partir de una muestra de estudiantes de 12 a 16 años en la que ponen de manifiesto que el hecho de recurrir a materiales manipulables y de introducir juegos recreativos en la clase aumenta la motivación de los estudiantes ante los retos matemáticos que se les proponen. Además, según estos autores, el uso de materiales permite hacer mejor los procesos inductivos, es decir, una matemática *desde abajo hacia arriba*. También Chamoso y Rawson (2001) destacan como variables importantes el papel del profesor, el hecho de trabajar cooperativamente y el uso de material manipulable.

Así pues, a partir del estudio realizado y otros trabajos precedentes que hemos revisado y discutido, parece claro que es posible mejorar la motivación de los estudiantes de la ESO para aprender matemáticas. En este trabajo, además, hemos aportado también una propuesta concreta para aumentar dicha motivación, que parte de la idea, de acuerdo con Abrantes, Serrazina y Oliveira (1999) que el aprendizaje requiere implicar a los estudiantes en actividades significativas. Desde esta perspectiva, estos autores defienden que las explicaciones del profesor en el momento adecuado y de forma apropiada son fundamentales. De ello se desprende que no es eficaz enseñar cosas nuevas de forma únicamente expositiva, sino que debe darse a los estudiantes la oportunidad de vivir experiencias concretas a las que estas explicaciones puedan dar sentido, idea estrechamente relacionada con el programa de transposición didáctica de los conceptos matemáticos en la ESO que hemos presentado. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRANTES, P., SERRAZINA, L. y OLIVEIRA, L. (1999): *A Matematica na Educaçao Bàsica*, DEB, Lisboa.

ALONSO, J. (1991): *Motivación y aprendizaje en el aula. Cómo enseñar a pensar*, Santillana, Madrid.

ALONSO, J. (1997): *Motivar para el aprendizaje. Teoría y estrategias*, EDEBÉ, Barcelona.

ALONSO, J. y MONTERO, I. (2001): *Orientación motivacional y estrategias motivadoras en el aprendizaje escolar*. En C. Coll, J. Palacios y A. Marchesi (Eds.), *Desarrollo psicológico y educación 2. Psicología de la educación escolar*, (pp. 259-284), Alianza, Madrid.

ALSINA, Á. (2001): *La intervención de la memoria de trabajo en el aprendizaje del cálculo aritmético*, Tesis doctoral editada en http://www.tdcat.cesca.es/TDCat-0613101-113720, Bellaterra, Servei de Publicacions U.A.B.

ALSINA, Á. Y SÁIZ, D. (2003): *Un análisis comparativo del papel del bucle fonológico versus la agenda viso-espacial en el cálculo en niños de 7-8 años*, Psichotema, 15 (2), 241-246.

ALSINA, Á. Y SÁIZ, D. (2004): *El papel de la memoria de trabajo en el cálculo mental un cuarto de siglo después de Hitch. Infancia y Aprendizaje*, 27 (1), 15-25.

ALSINA, C. (2000): *L'entrevista*, Biec, 31, 8-9.

BAROODY, A.J. (1988): *El pensamiento matemático de los niños*, Aprendizaje VISOR/MEC, Madrid.

CHAMOSO, J.M. y RAWSON, W. (2001): "En la búsqueda de lo importante en el aula de matemáticas", *SUMA*, 36, 31-43.

CONN, D. (1998): *Psicología. Exploración y Aplicaciones*, Ed. Thomson, Madrid.

CORBALÁN, F. y DEULOFEU, J. (1996): "Juegos manipulativos en la enseñanza de las matemáticas", *Uno*, 7, 71-80.

CUBILLO, C. y ORTEGA, T. (2002): "Influencia de un modelo didáctico en la opinión/actitud de los estudiantes hacia las matemàticas", *Uno*, 31, 57-72.

DEPARTAMENT D'EDUCACIÓ (2004): "Competències Bàsiques. Educació Secundària Obligatòria. Primer cicle. Prova C (Matemàtiques)", Servei de Difusió i Publicacions, Barcelona.

DOMINGO, M. (2004): *Una aproximació a la construcció significativa del coneixement matemàtic a l'ESO*, Trabajo de investigación no publicado, Universitat de Vic, Vic.

ESCAÑO, J. y GIL DE LA SERNA, M. (2001): "Motivar a los estudiantes y enseñar a motivarse", *Aula de innovación educativa*, 101, 6-12.

ESCAÑO, J. y GIL DE LA SERNA, M. (2006): *Motivar a los estudiantes y enseñarles a implicarse en el trabajo escolar*. En C. Borrego (Ed.), *Modelo integrado de mejora de la convivencia*, Graó, Barcelona.

FONT, V. (1994): "Motivación y dificultades de aprendizaje en matemáticas", *SUMA*, 17, 10-16.

GARRIDO, I. (1996): *Psicología de la motivación*, Editorial Síntesis, Madrid.

GAVILÁN, P. (2002): "Comparación de modelos de resolución de problemas en una clase tradicional y una clase cooperativa", *Uno*, 31, 34-43.

GÓMEZ-CHACÓN, I. (1999): "Toma de conciencia de la actividad emocional en el aprendizaje de la matemática", *Uno*, 21, 29-45.

GONZÁLEZ, M. C. (1997): *La motivación académica*, Eunsa, Pamplona.

GORGORIÓ, N. y PLANAS, N. (2005): "Social representations as mediators of mathematics learning in multiethnic classrooms", *European Journal of Psychology of Education*, XX, (1), 91-104.

MIDDLETON, J.A. y SPANIAS, P.A. (1999): "Motivation for achievement in mathematics: findings, generalizations, and criticisms of the research", *Journal for Research in Mathematics Education*, 30 (1), 65-88.

MUSITU, G. y GARCÍA, F. (1999): *AF5* , TEA Ediciones S.A, Madrid.

NUÑEZ, C. (1996): "Lo que subyace tras el comportamiento de nuestro alumnado en una clase de matemáticas", *Uno*, 7, 118-124.

PLANAS, N. (2002): "Enseñar matemáticas dando menos cosas por supuestas", *Uno*, 30, 114-124.

PLANAS, N. y GORGORIÓ, N. (2004): "Are different students expected to learn norms differently in the mathematics classroom?", *Mathematics Education Research Journal*, 16 (1), 19-40.

SINGH, K., GRANVILLE, M. y DIKA, S. (2002): "Mathematics and science achievement: effects of motivation, interest, and academic engagement", *Journal of Educational Research*, 95, (6), 323-332.

SKEMP, R. (1980): *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*, Ed. Morata, Madrid.

STEVENS, T., OLIVAREZ, A. JR. y HAMMAN, D. (2006). "The role of cognition, motivation, and emotion in explaining the mathematics achievement gap between hispanic and white students", *Hispanic Journal of Behavioral Sciences*, 28, (2), 161-186.

THORNDIKE, E.L. (1922): *The psychology of arithmetic*, The McMillan Co, Nueva York.

WINSTEAD, L. (2004): "Increasing academic motivation and cognition in reading, writing, and mathematics: meaning-making strategies", *Educational Research Quarterly*, 28 (2), 29-47.

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Comisión Ejecutiva

Presidente: **Serapio García Cuesta**
Secretario General: **Josep Sales Rufí**
Vicepresidente: **Manuel Torralbo Rodríguez**
Tesorera: **Claudia Lázaro del Pozo**

Secretariados:
Prensa: **María Peñas Troyano**
Revista SUMA: **Francisco Martín Casalderrey/Inmaculada Fuentes Gil**
Relaciones internacionales: **Sixto Romero Sánchez**
Publicaciones: **Ricardo Luengo González**
Actividades y formación del profesorado: **Salvador Guerrero Hidalgo**
Actividades con alumnos: **Floreal Gracia Alcaine/Esther López Herrainz**

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidenta: Pili Royo Regueiro
Apdo. de Correos 835. 17080 Girona

Organización Española para la Coeducación Matemática *Ada Byron*
Presidenta: M.ª Carmen Rodríguez
Almagro, 28. 28010 Madrid

Sociedad Andaluza de Educación Matemática *Thales*
Presidente: Manuel Torralbo Rodríguez
Facultad Matemáticas. Apdo. de Correos 1160. 41080 Sevilla

Sociedad Aragonesa *Pedro Sánchez Ciruelo* de Profesores de Matemáticas
Presidenta: Ana Pola Gracia
ICE Universidad de Zaragoza. C/ Pedro Cerbuna, 12. 50009 Zaragoza

Sociedad Asturiana de Educación Matemática *Agustín de Pedrayes*
Presidente: Juan Antonio Trevejo Alonso
Apdo. de Correos 830. 33400 Avilés (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas *Isaac Newton*
Presidenta: Ana Alicia Pérez
Apdo. de Correos 329. 38208 La Laguna (Tenerife)

Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática *Miguel de Guzmán*
Presidente: Antonio Arroyo
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Víllalar, s/n. 09006 Burgos

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García Cuesta
Avda. España, 14, 5ª planta. 02002 Albacete

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidente: Bienvenido Espinar Cepas
CPR Murcia II. Calle Reina Sofía n.º1. 30007 Murcia

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Manuel Rodríguez Mayo
Apdo. de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Extremeña de Educación Matemática *Ventura Reyes Prósper*
Presidente: Ricardo Luengo González
Apdo. de Correos 590. 06080 Badajoz

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*
Presidente: Juan A. Martínez Calvete
C/ Limonero, 28. 28020 Madrid

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: María José González López
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidente: Luis Serrano Romero
Facultad de Educación y Humanidades. Ctra. Alfonso XIII, s/n. 52005 Melilla

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas *Tornamira*
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea *Tornamira*
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.
Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra. 31006 Pamplona

Sociedad *Puig Adam* de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Facultad de Educación. (Sec. Deptal. Álgebra). Despacho 3005.
C/ Rector Rollo Villanova, s/n. 28040 Madrid

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas *A prima*
Presidente: Javier Galarreta Espinosa
CPR. Avda. de la Paz, 9. 26004 Logroño

Sociedade Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)
Presidente: Manuel Díaz Regueiro
C/ García Abad, 3, 1ºB. 27004 Lugo

Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana *Al-Khwarizmi*
Presidente: Onofre Monzó
Departamento Didáctica de la Matemática. Apdo. 22045. 46071 Valencia

Societat Balear de Matemàtiques *Xeix*
Presidente: Josep Lluís Pol i Llompart
C/ Martí Rubí 37/alts. 07141 Sa Cabaneta (Marratxí). Islas Baleares

SUMA 56
Noviembre 2007,pp. 33-38

Matemáticas el primer día de curso. Un nuevo enfoque de la evaluación inicial

En el siguiente artículo se plantea un nuevo modelo de evaluación inicial a partir de dos principios básicos: "Todo el mundo sabe algo relacionado con las matemáticas" y "Todos los días se nos plantean problemas que tienen que ver con la matemática".
Este nuevo enfoque de la evaluación inicial pretende establecer como punto de partida lo que el alumno realmente sabe y no aquello que debería saber. La experiencia planteada en este trabajo nos hacer reflexionar sobre los contenidos que se imparten en las aulas de matemáticas en Educación Secundaria, desde las aportaciones directas de los alumnos.

In the following article, a new model of initial assesment is set up from two basic points: "Everybody knows something about Maths" and "We face problems related to Maths everyday".
This new approach of the initial assesment tries to establish as a starting point what students really know and not what they should know. The experience set out for this work makes us reflect upon the contents which are taught in Maths lessons in Secondary Education, from the direct contrubution of students.

Primer día de curso. Tras varios meses de desconexión con todo aquello que tiene que ver con las matemáticas, comienza un nuevo año lectivo.

Presentación del profesor, descripción de la programación de la asignatura y criterios de evaluación. En total 10, a lo sumo 15 minutos consumidos de toda la hora, y *como es el primer día no vas a poner la prueba inicial...* ¿Qué hacer durante los tres cuartos de hora que restan con todos esos adolescentes desconocidos? Solución: Dar clase. *¡No, es el primer día...!*

Es necesario plantear una evaluación inicial porque marca el punto de inicio del camino que recorreremos con nuestros nuevos alumnos durante todo el curso.

Por otra parte está el eterno debate. ¿Son representativas las pruebas iniciales al principio de curso? ¿es mejor dejar unos días de rodaje para realizar esas pruebas? ¿merece la pena repasar durante un tiempo prudencial y luego hacer una prueba sobre el repaso? ¿o por el contrario empezar con el temario y hacer un examen lo antes posible? ¿debe ir la evaluación inicial dirigida a otros elementos que no sean el examen, como puede ser el cuaderno de clase? ¿La evaluación inicial debe hacerse solo en la ESO o ha de tenerse en cuenta también el Bachillerato?

Lo que a estas alturas parece indiscutible es la necesidad de plantear una evaluación inicial. Entre otros factores, porque marca el punto de inicio del camino que recorreremos con nuestros nuevos alumnos durante todo el curso y porque nos sirve para tener una percepción más amplia de cómo llegan a nuestras manos esos estudiantes.

Reflexiones sobre la evaluación inicial

Prestemos un momento de atención a estas proposiciones:

¡Todo el mundo sabe algo de matemáticas!

Y cuando digo todo el mundo, me estoy refiriendo a cualquier persona con una edad suficiente. Los niños pequeños ya empiezan a contar con sus padres poco después de comenzar

Antonio Israel Mercado Hurtado
IES Sixto Marco
Elche. Alicante

a andar, saben decir perfectamente su edad (incluso con limitaciones en el lenguaje)… Así que no digamos las matemáticas que puede llegar a conocer un adolescente de Educación Secundaria.

A diario se nos plantean problemas que han de resolverse con las matemáticas.

Lectura de facturas, descuentos en establecimientos, tratamiento de la información, problemas de proporcionalidad, cálculo de superficies y volúmenes, …

Estas dos proposiciones nos dan la pista de qué podemos hacer con todo el tiempo de clase que nos resta el primer día de clase.

¡Todo el mundo sabe algo de matemáticas!

A diario se nos plantean problemas que han de resolverse con las matemáticas.

Durante cinco cursos en tres centros públicos de Educación Secundaria: IES Bahía de Babel (Alicante), IES Torrellano e IES Sixto Marco (Elche), y con diferentes alumnos de 3º y 4º de ESO y de Bachillerato, he estado realizando la misma actividad de evaluación inicial el primer día de clase. La actividad tenía dos partes y siempre era presentada al alumnado de la misma manera:

Estoy seguro de que todo el mundo sabe algo relacionado con las matemáticas y de que a diario se os plantean problemas que tienen que ver con ellas. Por eso, en una cara de un folio me vais a contar algo que sepáis de matemáticas (acorde con vuestro nivel) y en la otra cara me vais a proponer un problema.

El enfoque es muy diferente al de una prueba inicial convencional:

En una prueba inicial de ese tipo, el discente siempre aporta conocimientos matemáticos que posee, aunque sean sencillos, por tanto puede hacerse en cualquier momento, en particular el primer día de clase. En este caso el adolescente explica algo que conoce (o que cree conocer). Cuando un tema no se domina, es imposible poder explicarlo correctamente; y en ocasiones, podemos observar que alumnos que dominan ciertos temas, no son capaces de explicarlos de forma adecuada.

Hay una diferencia abismal entre enfrentarse a un problema como resolutor, a plantear el enunciado de un problema con coherencia. La información que podemos extraer de uno u otro enfoque son muy diferentes.

Este enfoque de la evaluación inicial plantea los siguientes interrogantes que tienen que ver con la formación de los estudiantes y también con nuestra práctica docente:

¿Saben nuestros alumnos realmente lo que es un problema?

¿Hay una confusión generalizada entre problema y ejercicio mecánico?

¿Qué nivel de expresión tiene el alumnado que recibimos?

¿Los adolescentes de Educación Secundaria saben matemáticas?

O mejor dicho, ¿saben explicar las matemáticas que saben?

¿Hay errores matemáticos que se repiten reiteradamente en diferentes niveles?

¿Aparecerán todos los bloques de contenidos en las respuestas de nuestro alumnado? ¿Hay bloques que aparecen más que otros? ¿Hay bloques que ni siquiera aparecen?

¿Qué información objetiva puede sacarse con este tipo de enfoque sobre los conocimientos de matemáticas del alumnado que recibimos a principio de curso?

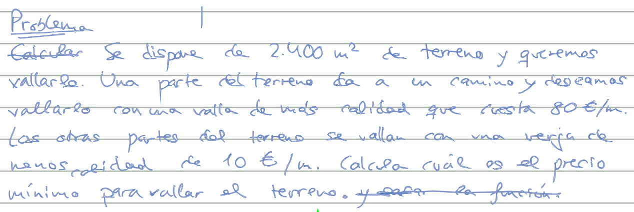
A lo largo del siguiente artículo, intentaré ir respondiendo a estas y otras cuestiones de la mano de una selección de las aportaciones hechas el primer día de clase por un grupo de unos 250 estudiantes de segundo ciclo de ESO y Bachillerato. La selección de las aportaciones que aparecen a continuación responde a varios criterios: por una parte, algunas de ellas aparecen de manera reiterada en alumnos de distintos centros, en otros casos se remarca desde el punto de vista de los adolescentes la aparición de las matemáticas en la vida cotidiana. También aparecen ejemplos de errores comunes, así como desarrollos matemáticos de un valor considerable, teniendo en cuenta que se trata del primer día de curso. Por último se ha tenido en cuenta que los enunciados de los problemas que aparecen sean una representación proporcional de las aportaciones hechas por los 250 alumnos, en relación con los bloques de contenidos que trabajan en ESO y Bachillerato.

Los problemas que plantean nuestros alumnos

Cuando el *tipo de problema* que muchos adolescentes plantean es: resuelve la siguiente ecuación, o el siguiente sistema; realiza las siguientes operaciones con fracciones; divide o multiplica los siguientes polinomios; desarrolla la siguiente identidad notable…, es evidente que existe una confusión real en el significado de problema versus ejercicio mecánico.

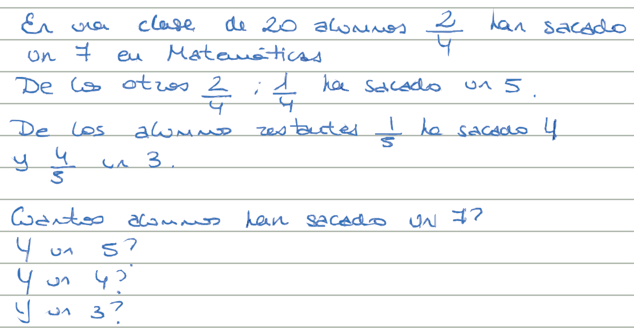
Es muy común que el alumno olvide describir datos importantes para el planteamiento del problema.

No obstante aparecen problemas de enunciado interesantes que darían bastante juego en clase:


Problema

~~Calcular~~ Se dispone de 2.400 m² de terreno y queremos vallarlo. Una parte del terreno da a un camino y deseamos vallarlo con una valla de más calidad que cuesta 80 €/m. Las otras partes del terreno se vallan con una verja de menos calidad de 10 €/m. Calcula cuál es el precio mínimo para vallar el terreno. ~~y saca la función.~~

Problema propuesto por un alumno de 2º de Bachillerato Tecnológico. En el enunciado falta describir la forma del terreno que suponemos será rectangular. Este tipo de errores son relativamente comunes y son debidos a que, no olvidemos, estamos en el primer día de clase.


En una clase de 20 alumnos $\frac{2}{4}$ han sacado un 7 en Matemáticas

De los otros $\frac{2}{4}$; $\frac{1}{4}$ ha sacado un 5.

De los alumnos restantes $\frac{1}{5}$ ha sacado 4 y $\frac{4}{5}$ un 3.

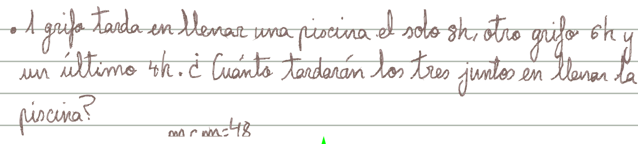
Cuantos alumnos han sacado un 7?

Y un 5?

Y un 4?

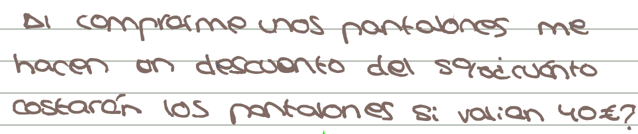
Y un 3?

Problema planteado por un alumno de 4º ESO. Resulta evidente que este estudiante ha trabajado bastante en cursos anteriores con fracciones y que domina el tema. En la mayoría de los casos, con este tipo de evaluación inicial se destaca, de forma clara, a los alumnos que tienen facilidad para las matemáticas (sus aportaciones en general son bastante interesantes) y los que tienen dificultad (en sus aportaciones aparecen incoherencias, errores muy graves en relación al curso en el que están ubicados,…) Si que es cierto que deja sin demasiada información sobre un grupo de estudiantes que iremos descubriendo durante el curso.


• 1 grifo tarda en llenar una piscina el solo 3h, otro grifo 6h y un último 4h. ¿Cuánto tardarán los tres juntos en llenar la piscina?

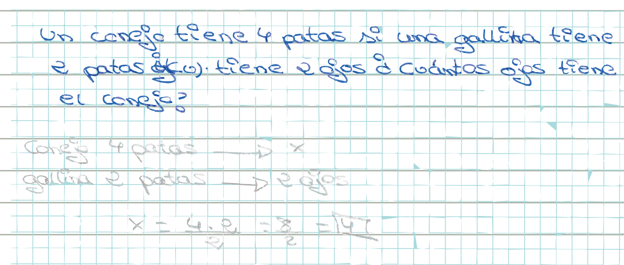
m.c.m.=48

Problema planteado por un alumno de 4º ESO. En muchos casos, los problemas de expresión son bastante acusados. Este no es el caso. Usualmente es difícil encontrarse con problemas de proporcionalidad en las aportaciones de los estudiantes; resulta paradójico que la proporcionalidad será uno de los temas matemáticos trabajados en ESO que está más presente en la vida cotidiana.


Si compraramos unos pantalones me hacen un descuento del 5% ¿cuánto costarán los pantalones si valían 40€?

Problema planteado por una alumna de 3º ESO. Destacaría lo cotidiano del enunciado. En muchos casos nuestros alumnos no son capaces de enunciar problemas, pues no son conscientes de que están rodeados de situaciones que tienen que ver con las matemáticas.

Hay enunciados de problemas que nos informan directamente de la forma de estudiar del estudiante en cuestión:


Un conejo tiene 4 patas si una gallina tiene 2 patas ~~ojos~~ (o). tiene 2 ojos ¿Cuántos ojos tiene el conejo?

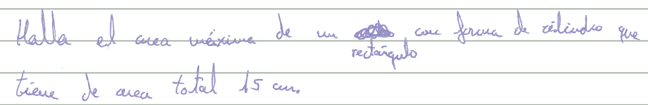
Conejo 4 patas → x

gallina 2 patas → 2 ojos

$x = \frac{4 \cdot 2}{2} = \frac{8}{2} = \boxed{4}$

Problema planteado por una alumna de 3º de ESO. ¿Quién no ha resuelto este problema en su época de estudiante? Cuando se estudia sin entender los razonamientos matemáticos que hay detrás de un problema pasan estas cosas. Se trata de un aprendizaje *memorístico* que no es el más adecuado en matemáticas. Enunciados similares a este aparecen con demasiada frecuencia. Se denota que un uso excesivo del álgebra a la hora de resolver los problemas lleva al alumnado a obviar el proceso básico de resolución de los mismos: ¿Esta alumna se ha parado a comprobar el resultado de su problema?

Y por supuesto hay problemas que son cargas de profundidad a la moral de cualquier docente:



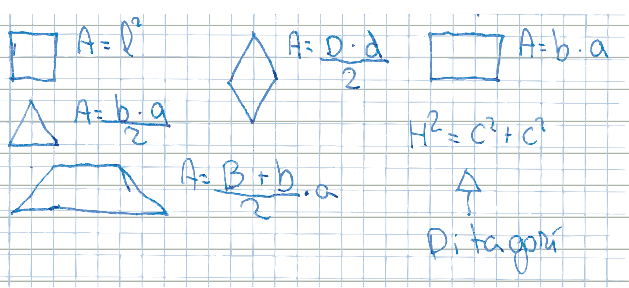
Problema planteado por un alumno de 2º de Bachillerato de Ciencias Naturales y de la Salud.

¿Dónde queda la probabilidad en ESO? ¿qué formación geométrica tiene nuestro alumnado? ¿se dedica demasiado tiempo a los bloques de números y de álgebra en comparación con los otros bloques de contenidos?

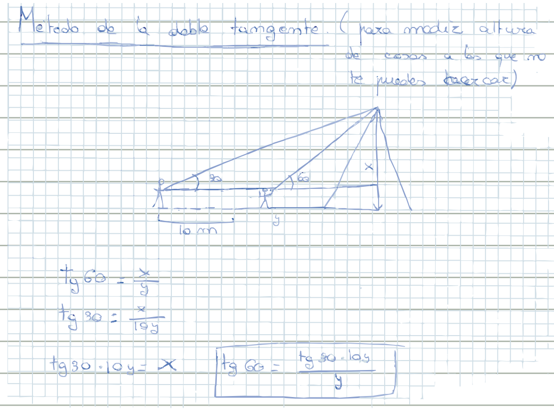
Los conocimientos matemáticos de nuestros alumnos

Si hiciéramos un sondeo al profesorado de matemáticas sobre los contenidos matemáticos que se imparten en Educación Secundaria, probablemente estaríamos de acuerdo en que hay grandes olvidados. ¿Dónde queda la probabilidad en ESO? ¿qué formación geométrica tiene nuestro alumnado? ¿se dedica demasiado tiempo a los bloques de números y de álgebra en comparación con los otros bloques de contenidos?

Evidentemente eso se refleja en este tipo de prueba. ¡Ningún estudiante a los que se les ha planteado este tipo de evaluación inicial ha mencionado nada de probabilidad! La geometría es la otra gran damnificada, aunque cuando aparece algo de este campo sabe como agua de mayo:



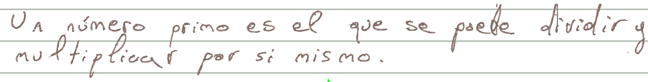
Aportación de una alumna de 3º de ESO. Lo razonable sería que en este tipo de evaluación inicial aparecieran los objetivos mínimos conseguidos durante los cursos anteriores.



Aportación hecha por un alumno de 1º de Bachillerato Tecnológico. Los errores en la resolución deben entenderse por ser el primer día de clase. A la vista de una aportación así, ¿se puede concluir que este estudiante domina la trigonometría? Efectivamente sí. Con un simple repaso estará en disposición de afrontar la trigonometría para triángulos no rectángulos.

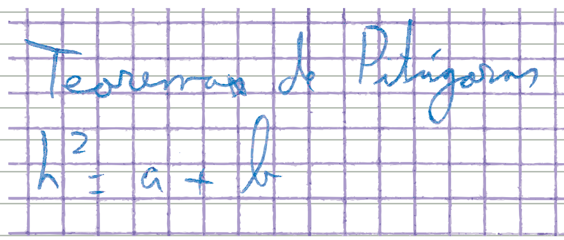
Cuando los estudiantes explican *algo acorde con su nivel matemático*, aparecen aspectos matemáticos muy diversos:

Aparecen definiciones:



Aportación hecha por un alumno de 4º de ESO. Este modelo de evaluación inicial puede utilizarse en clases sucesivas para comenzar un repaso de conceptos matemáticos que debían dominarse, a partir de los errores que han aparecido.

Aparecen enunciados de teoremas (nunca demostraciones):



Aportación hecha por un alumno de 1º de Bachillerato Tecnológico. Ejemplo claro de resultado matemático que el alumnado presenta de forma errónea en muchas ocasiones y en diferentes niveles. Aparecen errores en su enunciado y en su aplicación.

Aparecen generalizaciones:

Sucesiones

$$\frac{3}{5}, \frac{6}{8}, \frac{9}{11} \dots, \frac{3n}{3n+2} \longrightarrow \frac{3}{3} = 1$$

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d} = 3 + (n-1) \cdot 3 = 3 + 3n - 3 = 3n$$

$$\text{"} \quad = 5 + (n-1) \cdot 3 = 5 + 3n - 3 = 3n + 2$$

Aportación hecha por un alumno de 1º de Bachillerato Tecnológico.

Lo que buscamos con este tipo de evaluación inicial es buscar potencialidades matemáticas o buscar grandes dificultades matemáticas.

Aparecen interpretaciones geométricas:

· Interpretación geometrica de la ecuación de una recta

$ax = 0$ a = pendiente (indica la inclinada que esta la recta; Ej: $1x = 0$ cada unidad sube 1)

$ax + c = 0$ c = indica el punto de corte con el eje y.

· Si la x esta elevada al cuadrado es una parabola:

$ax^2 = 0$ a = indica lo abierta o cerrada que esta la parabola

$ax^2 + c = 0$ c = indica lo que se desplaza la parabola hacia arriba o abajo

$ax^2 + bx + c = 0$ b = indica lo que se desplaza la parabola hacia la derecha o izquierda.

Aportación hecha por un alumno de 1º de Bachillerato Tecnológico. Evidentemente que aparecen errores graves. La corrección de este modelo de prueba inicial no debe resumirse en una cantidad numérica. Lo que buscamos con este tipo de evaluación inicial es buscar potencialidades matemáticas, (resulta claro que este alumno las tiene) o buscar grandes dificultades matemáticas, (el problema de los conejos y de las gallinas planteado por la alumna de 3º de ESO es un ejemplo claro de este hecho).

Y aparecen pequeños razonamientos lógicos a partir de definiciones:

La derivada en la pendiente de la recta tangente a la función. La derivada por definición és:

$$\left(f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right).$$

$$y = 4x - 2$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{4(x+h) \cancel{-2} - (4x \cancel{-2})}{h}$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{4x} + 4h - 4x}{h}$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{4\cancel{h}^{0}}{\cancel{h}_{0}} =$$

$$\boxed{y' = 4}$$

Aportación hecha por un alumno de 2º de Bachillerato Tecnológico. La indicación que se hace a los alumnos es clara. Sus aportaciones han de estar acordes con su nivel. Esto no siempre se produce. Evidentemente conforme se avanza de curso, el estudiante ha de tener más herramientas matemáticas, pero, ¿son nuestros estudiantes conscientes de esa evolución? ¿Debemos mostrar especial interés los docentes en mostrar esa evolución de forma clara? Entiendo que no sólo debía ser un deber, sino una obligación.

De una evaluación inicial no podremos aventurarnos a saber quién aprobará o no la asignatura, para eso está todo el curso por delante.

Conclusiones

La evaluación inicial, es una primera toma de contacto con unos estudiantes que llevan muchos años de rodaje con las matemáticas. Es por ello que no debemos esperar conclusiones concluyentes: de una evaluación inicial no podremos aventurarnos a saber quién aprobará o no la asignatura, para eso está todo el curso por delante.

Al llevar muchos años estudiando matemáticas, no deberíamos tener la sensación de que nuestros estudiantes parten de cero a partir de los, casi siempre, malos resultados obtenidos en el examen convencional de inicio. Estos resultados tampoco resultan demasiado objetivos: pueden deberse a factores memorísticos, a carencias matemáticas, a aprendizajes erróneos, a descoordinación entre lo que los alumnos debían haber trabajado en cursos anteriores y lo que realmente trabajaron…

Ese bagaje matemático sí que aparece en una evaluación inicial como la que se propone en este artículo. Aparecen aportaciones interesantes y aparecen errores a partir de los cuales se puede comenzar un trabajo matemático positivo. Este tipo de evaluación inicial aplicada a estudiantes de ESO y de Bachillerato permite apreciar la progresión de los conocimientos adquiridos por nuestro alumnado.

> *El alumnado debe tomar conciencia de que sabe matemáticas desde el primer día de clase pues muchos de los errores que comenten nuestros estudiantes se deben a inseguridades.*

Hay una confusión generalizada entre problema y ejercicio mecánico. Además los problemas de expresión en algunos de nuestros alumnos aumenta la dificultad para enunciar problemas de manera coherente. Estos problemas de expresión así como los problemas de comprensión lectora, hacen que la resolución de problemas se convierta en un bloque difícil de trabajar. Se hace necesaria la colaboración con el área de Lengua para mejorar estos dos aspectos básicos.

El alumnado debe tomar conciencia de que sabe matemáticas desde el primer día de clase. Muchos de los errores que comenten nuestros estudiantes se deben a inseguridades. El discente ha de ser consciente de que todos los años que lleva estudiando matemáticas le han aportado unos conocimientos que él ha de saber transmitir. Este modelo de evaluación inicial es el punto de partida para desarrollar esta idea en clase.

Por otra parte aparecen errores reiterados y que parecen instalados de forma permanente en las mentes de muchos de nuestros estudiantes: en el enunciado del teorema de Pitágoras, en la resolución de problemas algebraicos, en la diferencia entre área y perímetro, en las operaciones con fracciones… Este tipo de evaluación permite partir del error del discente y permitir al docente buscar nuevas formas de enfocar ciertos contenidos, para procurar que estos errores no aparezcan.

En ninguna de las 250 pruebas iniciales aparecen contenidos relacionados con la probabilidad, además la geometría aparece cada vez más de manera residual. Los profesoros de matemáticas hemos de revisar la temporalización de nuestras programaciones para que la formación matemática de nuestros alumnos no se resuma al bloque de números, de álgebra y un poco de funciones.

Ser capaces de transmitir la idea de que el motor que mueve la matemática es la resolución de problemas, y de que en lo cotidiano está presente la necesidad de ser unos resolutores efectivos, es una tarea que debe dirigir nuestro quehacer diario dentro de las aulas. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALSINA, C. (1995): *Enseñar Matemáticas*, Graó, Barcelona.

CAMILLONI, A. (1998): *La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo*, Paidós, Ecuador.

GIMÉNEZ, J. (1997): *Evaluación en Matemáticas. Una integración de perspectivas*, Síntesis, Madrid.

GUZMÁN, M. de (1992): *Tendencias innovadoras en educación matemática*, OMA-Bs.As.

KILPATRICK, J., RICO, L. y SIERRA, M. (1994): *Educación matemática e investigación*, Síntesis, Madrid.

PAJARES, R., SANZ, A. y RICO, L. (2004): *Aproximación a un modelo de evaluación: el proyecto Pisa 2000*, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, Madrid.

RICO, L. (1997): *La educación matemática en la Enseñanza Secundaria*, Editorial Horsoni, Barcelona.

SUMA 56
Noviembre 2007, pp. 39-42

Los misterios de la fracción prohibida

En este artículo se muestran varios significados posibles para la misteriosa fracción (a+c)/(b+d) asociada a dos fracciones a/b y c/d. Haciendo esto encontramos algunas consideraciones didácticas interesantes.

In this article we show several possible meanings for the mysterious fraction (a+c)/(b+d) associated to two fractions a/b and c/d. In doing this we find some interesting didactical remarks.

La multiplicación de fracciones $a/b*c/d=(ac)/(bd)$ es extraordinariamente simple de ejecutar y recordar: se multiplican numeradores y se multiplican denominadores. Sin embargo la suma $a/b+c/d=(ad+bc)/(bd)$ tiene una inesperada complejidad. Por ello, desde la noche de los tiempos, los estudiantes acostumbran a calcular por iniciativa propia *la suma alternativa*

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \quad (*)$$

Salvo en algunos casos de severa incompetencia en que el profesor da por buena la igualdad (*) la reacción normal ante la aparición de (*) en clase (si el profesor sobrevive al susto) es proferir varios "¡no!, ¡no!, ¡no!" guturales seguidos de diversos ejemplos que ponen en evidencia la maldad de la suma alternativa. A partir de esta escena la fracción maldita queda totalmente prohibida y la autoridad pertinente avisa de las consecuencias que una nueva aparición de ella podría implicar, ya sea a nivel individual o colectivo.

En una encomiable actitud comprensiva ya Henri Poincaré encontró una justificación a la aparición impulsiva de la misteriosa fracción en clase:

> Sólo hay dos métodos para enseñar fracciones: cortar, aunque sea mentalmente, un pastel, o hacerlo con una manzana. Con otro método cualquiera de enseñanza, los escolares prefieren sumar numeradores con numeradores y denominados con denominadores.

Atraídos por *esta suma alternativa* hemos estado indagando matemáticamente y didácticamente el tema y quisiéramos compartir con los lectores de este artículo los sorprendentes resultados de nuestras pesquisas.

Nombre y definición

A partir de dos fracciones a/b y c/d con $c, d > 0$ se puede, legítimamente, considerar la nueva fracción $(a+b)/(c+d)$. A esta fracción se la denomina en inglés mediant (o según Ervin Wilson *freshman sum* la suma de los que están en el primer curso de la universidad). La palabra mediant tiene raíz latina pero no posee equivalente en español. Por tanto lo mejor que podemos hacer es bautizar a este objeto con un nombre, por ejemplo, la fracción mediadora, expresión que recoge el sentido de *ponerse en medio de.*

Claudi Alsina
Universidad Politécnica de Cataluña. Barcelona
Carme Burgués
Universidad de Barcelona. Barcelona

Como se ha visto al principio, la fracción mediadora no es el resultado de una operación interna bien definida en los números racionales $\mathbb{Q}$ pero sí puede formalizarse como una operación entre ciertos pares ordenados de enteros. Si

$$\mathbb{Z}_+ = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Z}, b > 0\}$$

podemos considerar:

$$(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$$

En este caso con la representación vectorial de (a, b) y (c, d) en el 1º y 2º cuadrantes, permite visualizar el elemento $(a+c,b+d)$ como la suma de los vectores, es decir como diagonal principal del paralelogramo determinado por (a, b) y (c, d).

Una interesante localización

Si $a/b < c/d$, con $b, d > 0$, la fracción mediadora $(a + c)/(b + d)$ es un valor que siempre está *situado entre* las dos fracciones iniciales:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Aritméticamente basta notar que:

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{cb-ad}{b(b+d)} = \frac{d}{b+d}\left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right)$$
$$\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{cb-ad}{d(b+d)} = \frac{b}{b+d}\left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right)$$

Pero en el caso usual positivo, si $0 < a/b < c/d$ con a, $b, c, d > 0$ resulta la siguiente visualización (Alsina-Nelsen, 2006).

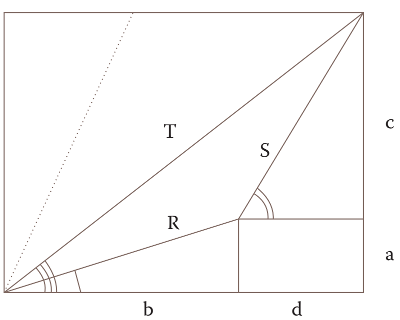


Figura 1

Si la pendiente de R es a/b y es menor que la de S que es c/d resulta que la de T que es $(a + c)/(b + d)$ debe ser intermedia.

En el caso extremo $a/b = c/d$ resultará

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

y la figura 1 pone en evidencia la necesidad de $a{\cdot}d = b{\cdot}c$ que es la condición de equivalencia de fracciones.

Cafés con leche: largos y cortos

Carme prefiere el café con leche corto de café y Claudi lo prefiere largo.

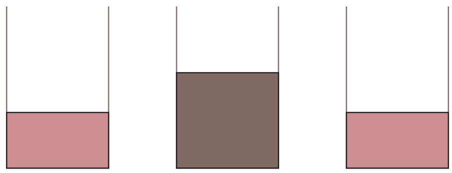


Figura 2

En mezclas de líquidos (y en cocina en general) tiene mucho sentido *considerar las razones* entre un elemento y otro: 1 parte de café por cada 2 de leche, 1 parte de café por tres de leche, … Y en este *contexto* tiene pleno sentido calcular la *razón resultante* de mezclar, la cual corresponde a la fracción mediadora

$$\text{Med}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1+1}{2+3} = \frac{2}{5}$$

Si mezclamos efectivamente café y leche se visualiza el efecto de la fracción mediadora en el color de la mezcla. Éste siempre se sitúa entre el de las 2 razones de partida (para el interés pedagógico de este tipo de visualizaciones véase (Biermann-Blum, 2002)).

Esta experiencia permite estudiar una situación sencilla del *significado de fracción como razón heterogénea*. Los alumnos entienden que si ½ representa la razón café/leche, las fracciones ⅓ y ⅔ representan relaciones parte/total (suponiendo que no hay ningún otro ingrediente). En esta situación se percibe que si una fracción se substituye por otra equivalente los efectos no son los esperados.

Observemos que en la primera situación

$$\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3} = \frac{2}{5}; \qquad \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}; \qquad \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

es decir, la fracción ⅖ está más cercana a ⅓.

En la segunda mezcla, $3/7$ no es equivalente a $2/5$:

$$\frac{2}{4}\oplus\frac{1}{3}=\frac{3}{7}; \qquad \frac{2}{4}-\frac{3}{7}=\frac{2}{28}=\frac{1}{14}; \qquad \frac{3}{7}-\frac{1}{3}=\frac{2}{21}$$

Si tomamos una fracción equivalente como $20/40$ es

$$\frac{20}{40}\oplus\frac{1}{3}=\frac{21}{43}; \qquad \frac{20}{40}-\frac{21}{43}=\frac{860-840}{1720}=\frac{20}{1720}=\frac{1}{86}$$

vemos que la fracción mediadora está mucho más cerca de $1/2$ que de $1/3$.

Esta situación nos lleva a considerar el papel de la *unidad de comparación* en el caso de magnitudes continuas.

La paradoja de Simpson

Esta paradoja (que tiene implicaciones estadísticas en medicina y ciencias sociales) hace ver cómo los éxitos de diversos grupos presentan resultados sorprendentes cuando los grupos se reúnen. Se puede entender muy bien con urnas de bolas blancas y negras... o con jugadores de fútbol. De nuevo las fracciones que aparecen deben interpretarse como razones.

Un jugador de fútbol A juega 10 partidos en la primera mitad de una liga y marca 4 goles; en la segunda mitad juega 20 partidos y marca 5 goles. El jugador B marca 6 goles en sus 20 partidos de la primera parte y marca 2 goles en los 10 partidos restantes. La situación parcial y global es la siguiente:

	1ª parte	2ª parte	Global
Jugador A	4/10	5/20	9/30
Jugador B	8/20	2/10	10/30

Mirando cada parte de la liga el A fue igual o mejor que el B en cada parte, pero mirando *globalmente* el B resultó mejor (ver http://es.wikipedia.org/wiki/Paradoja_de_Simpson).

El tema afecta a todos los niveles de la vida: pueden sacarse *conclusiones* diferentes según se miren poblaciones por separado o reuniendo a todas. Es el efecto de la dichosa mediadora.

Cortando cajas de Kellogs©

Junto al café con leche aparecen las cajas de cereales. Si la caja se coloca verticalmente y se corta según una sección plana resulta una sección que necesariamente es un paralelogramo.

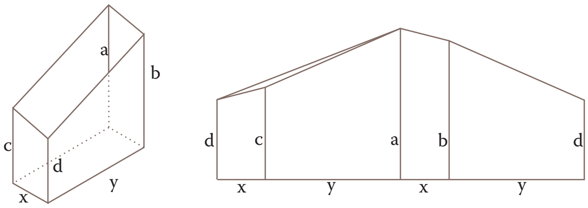


Figura 3

Designemos por a, b, c, d las alturas de los vértices del paralelogramo sección y consideremos el caso $a > b > c > d$ tal como indica la figura de la izquierda que admite un desarrollo plano como el de la derecha.

¿Qué relación debe haber entre a, b, c y d? Por tratarse de un paralelogramo, los lados opuestos deben de tener igual pendiente y por tanto $(c - d):x = (a - b):x$, es decir $a + d = b + c$. En el caso de que la sección plana no solo sea paralelogramo sino que se trate de un rectángulo, si D indica la diagonal de la tapa de abajo, deberá verificarse

$$\sqrt{D^2+(a-d)^2}=\sqrt{D^2+(b-c)^2}$$

es decir $a + c = b + d$, condición que al valer simultáneamente con $a + d = b + c$ nos lleva a $a + d = b + b + d - a$, es decir $a = b$ y $c = d$. Observemos las dos primeras pendientes en el desarrollo plano. La primera es $(c - d):x$, la segunda $(a - c):y$... y la pendiente de la línea de puntos resulta ser

$$\frac{a-d}{x+y}=\mathrm{Med}\left(\frac{c-d}{x},\frac{a-c}{y}\right)$$

apareciendo de nuevo la misteriosa fracción. Salió en el café y repite en los cereales.

Tomemos otra caja de Kellogs y ahora hagamos la sección de forma que

$$(c-d):x=(a-c):y=(a-d):(x+y).$$

Se logra con un solo corte recto al doblar la caja convenientemente. Este es un caso límite del considerado anteriormente. Cuando $x = y$ en una caja cuadrada, entonces aparece una magnífica sección rómbica.

Las sucesión de Farey

La sucesión de conjuntos F_1, F_2, F_3, ... llamada de Farey viene dada por la siguiente definición: para cada entero $n \geq 1$ el conjunto F_n es el de los números racionales irreducibles a/b con

$0 \le a \le b \le n$ y m.c.d.$(a, b) = 1$. Ordenando en forma creciente los elementos en F_n resulta

$$F_1 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\}$$
$$F_2 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right\}$$
$$F_3 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right\}$$

Si $a/b \le c/d \le e/f$ son tres fracciones ordenadas consecutivamente en uno de los conjuntos F_n entonces, necesariamente resulta:

$$bc - ad = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{c}{d} = \frac{a+e}{b+f},$$

así pues la mediadora tiene pleno sentido como operación bien definida en estos conjuntos.

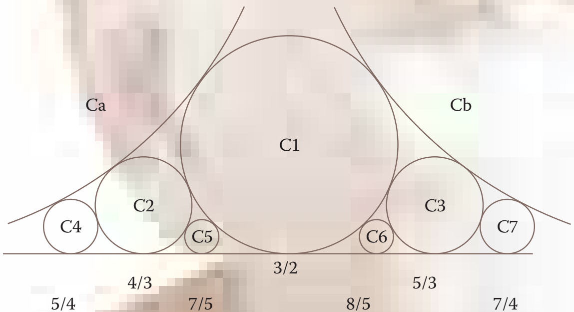


Figura 4

Los círculos de Ford

Se atribuye a Lester R. Ford el siguiente resultado: sobre la recta real (eje OX) se considera el círculo tangente $(a/b, 0)$ y radio $1/b^2$ y el círculo tangente en $(c/d, 0)$ con $c/d > a/b$ y radio $1/d^2$. Si ambos círculos son tangentes entonces (es un bonito ejercicio) existe entre ellos y la recta un tercer círculo tangente a los tres elementos… siendo el punto de tangencia a la recta el

$$\left(\frac{a+c}{b+d}, 0\right)$$

Véase la figura 4.

La función de Minkowski

Existe una patológica función cuyo sorprendente símbolo es *?* Minkowski la definió para tener una función $?(x)$ en el intervalo unidad que enviase los racionales a irracionales cuadráticos. Resulta que $?(x)$ es estrictamente creciente, singular… y lo más curioso $?(x)$ verifica la ecuación funcional

$$?\left(\frac{a+c}{b+d}\right) = \frac{?\left(a/b\right) + ?\left(c/d\right)}{2}$$

para a/b y c/d dos fracciones en (0, 1) irreducibles y consecutivas en la secuencia de Farey correspondiente (véase por ejemplo (Viader, Paradís y Bibiloni, 1998)).

Epílogo

La fracción misteriosa tiene su gracia. Pero debemos situarnos en la interpretación de razones o pendientes. Entonces multitud de ejemplos interesantes surgen. Lo encantador de las Matemáticas es lo sorprendentes que son. Incluso los errores, a veces, tienen interés. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BIERMANN, M. y BLUM, W. (2002): *Realitäts bezogenes Beweisen-Der Schorle-Berocis und andre Beispiele*, Mathematik Lehren (110), 19-22.

BOGOMOLNY, A.: “Farey Series, A Story”.

http://www.cut-the-knot.org/blue/ FareyHistory.shtml

CONWAY, J.H. y GUY, R. K. (1996): “Farey Fractins and Ford Circles”, *The Book of Numbers*, Springer-Verlag, pp. 152-154 y 156, Nueva York.

DENJOY, A. (1938): *Sur une fonction réelle de Minkowski*, J. Math. Pures Appl. 17, 105-155.

FAREY, J. (1816): *On a Curious Property of Vulgar Fractions*, London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. 47, 385.

GIRGENSOH, R. (1996): *Constructing Singular Functions via Farey Fractions*, J. Math. Anal. Appl. 203, 127-141.

MINKOWSKI, H. (1991): “Zur Geometrie der Zahlen”, *In Gesammeite Abhandlungen, Vl. 2*, pp. 44-52, Nueva York, Chelsea.

VIADER, P.; PARADIS, J. y BIBILONI, L. (1998): *A New Light on Minkowski’s ?(x) Function*, J. Number Th. 73, 212-227.

WEISSTEIN, E.W.: “Minkowski’s Question Mark Function”, From MathWorld-A Wolfram Web Resource.

http://mathworld.wolfram.com/MinkowskisQuestionMarkFunction.html

WEISSTEIN, E.W.: “Mediant”, From MathWorld-A Wolfram Web Resource.

http://mathworld.wolfram.com/Mediant.html

Foto del fondo: Lester Randolph Ford (1886-1975)

SUMA 56
Noviembre 2007, pp. 43-54

El problema de los dados del caballero de Méré: soluciones publicadas en el siglo XVII

El Caballero de Méré fue un filósofo y escritor que vivió durante el reinado de Luis XIV. En primer lugar, propuso lanzar un dado cuatro veces consecutivas y apostar que saldría por lo menos un seis; si el seis no saliese, entonces el oponente ganaría el juego. En el segundo juego, de Méré propone lanzar dos dados 24 veces y apostar que la pareja de seis aparecería por lo menos una vez. Estos dos juegos son llamados problemas de Méré. De Méré acudió a su amigo Blaise Pascal (1623-1662) y le planteó calcular la probabilidad de ganar en estos juegos. En este artículo son examinadas las soluciones propuestas en el siglo XVII.

Chevalier de Méré was a philosopher and a man of letters during the reign of Louis XIV. Firstly, he proposed to throw one die four times in a row and wagered that at least one six would appear; if no six turned up then the opponent won. In his second game, de Méré proposed to throw two dice 24 times and bet that two sixes would turn up at least once. Theses two games are called de Méré's problems. De Méré approached his friend Blaise Pascal (1623-1662) and asked him to calculate the probability of winning in theses games. In the current paper the three solutions given in the seventeenth century are examined.

A veces ha ocurrido en la historia de las matemáticas y, en particular, en la del cálculo de probabilidades. Un determinado problema se convierte en una especie de río donde vierten agua todos sus afluentes. El problema es la excusa para que diferentes autores en distintas épocas (muchos de ellos dedicados a otras ramas del saber) entren en este particular mundo del cálculo en el azar y aporten sus soluciones, sus experiencias en otras investigaciones, y su visión de la probabilidad y del campo donde se quiere aplicar. Se nos vienen a la mente problemas como *el de Los Tres Dados* (juego del Azar), que ya estaba presente en el Libro de Ajedrez de Alfonso X el Sabio, *El Problema de los Puntos*, *El Problema de la Ruina del Jugador*, *La Paradoja de San Petesburgo*, etc.

De Méré conocía que si apostaba por conseguir al menos un seis al lanzar un dado perfecto en 4 tiradas, había una ventaja a su favor de 671 contra 625, lo cual es cierto.

Uno de los problemas que podría formar parte de la categoría antes mencionada es el que podríamos llamar (de hecho así ha sido referenciado alguna vez) *El Problema de los Dados del Caballero de Méré*. Autores célebres de la historia temprana del Cálculo de Probabilidades lo abordaron con mejor o peor acierto. Así, podemos citar a Cardano, Huygens, Caramuel, Montmort, de Moivre, Bernoulli, Struyck o Simpson. En la correspondencia entre Blaise Pascal (1623-1662) y Pierre de Fermat (1601-1665) (que se produjo entre el verano y el otoño de 1654) este problema estuvo presente aunque, entre las cartas que se conservan de esta correspondencia, sólo encontramos una referencia al mismo, sin resolución alguna por parte de uno ni de otro, dándose a entender que ambos conocían perfectamente la solución y que no merecía la pena *perder el tiempo* con ella. En concreto, el problema lo encontramos en la carta que Pascal envió a Fermat el 29 de julio de 1654, donde se evidencia que había sido propuesto por el Caballero de Mére, amigo del primero.

En la carta, Pascal expone *una dificultad que asombraba mucho al caballero de Méré*. De Méré conocía que si apostaba por conseguir al menos un *seis* al lanzar un dado perfecto en 4 tiradas, había una ventaja a su favor de 671 contra 625, lo cual es cierto como comprobaremos más adelante. En cambio, si se intenta conseguir un *sonnez* con dos dados (o

Jesús Basulto Santos
José Antonio Camúñez Ruiz
Universidad de Sevilla. Sevilla

sea, obtener un seis doble al lanzar dos dados al mismo tiempo), hay desventaja al intentarlo en 24 tiradas. De Méré usaba el argumento de que 4 es a 6 (siendo 6 el número de posibles resultados al lanzar un dado) como 24 es a 36 (con 36 el número de posibles resultados al lanzar dos dados). Si con 4 lanzamientos de un solo dado hay ventajas a mi favor, ¿por qué no con 24 de dos dados? Y añade Pascal:

> Esto provocaba su gran escándalo, que le hacía decir a todo el mundo que las proposiciones no eran constantes y que la Aritmética es contradictoria.

En la carta, Pascal dice que no tiene tiempo de enviarle *la solución al problema que ha confundido al señor de Méré* y escribe *pero usted lo verá fácilmente por los principios que tiene*.

Es posible que De Méré tuviera dos reglas de cálculo que le llevaban a resultados contradictorios, razón por la cual le plantea el problema a Pascal.

La contestación de Fermat a esta carta ha desaparecido, por lo que no sabemos si en la misma abordó este problema. Como ya se ha dicho, en el resto de la correspondencia que se conserva entre ambos, no se vuelve sobre este asunto, con lo que no conocemos cuál fue *la solución* de Pascal, ni tampoco por qué de Méré conocía que, efectivamente, no hay ventajas en 24 tiradas de dos dados. Como veremos más adelante, la probabilidad de obtener al menos un *sonnez* en 24 tiradas es 0,4914. ¿La capacidad y la experiencia del Caballero como jugador llegaban a tal extremo como para intuir empíricamente que esa probabilidad es inferior a 0,5, es decir, que *no hay ventaja*? Lo dudamos. Probablemente de Méré tenía sus propias reglas de cálculo. Nos atrevemos a aventurar que, realmente, tenía dos *reglas de cálculo* que le llevaban a resultados contradictorios, razón por la cual se lo plantea a Pascal.

Una presentación formal del problema en sí puede ser la siguiente:

Conociendo la probabilidad que un jugador tiene de conseguir éxito en una partida, ¿qué número de partidas garantiza al mismo una probabilidad igual de conseguir al menos un éxito que de no conseguirlo (o sea, una probabilidad 0,5 de conseguirlo)?

Se supone que las partidas son independientes entre sí, de forma que el resultado de cada una de ellas no altera los resultados futuros (el jugador no va aprendiendo conforme se va desarrollando el juego), lo cual queda perfectamente representado en un juego de puro azar como el lanzamiento de una moneda equilibrada o de un dado no trucado. Por tanto, el problema plantea la determinación del número de lanzamientos que producen el equilibrio: cuando coinciden las probabilidades de ganar y perder, con lo que, la idea de *juego justo* tan presente en todos los autores de la historia temprana de la probabilidad subyace como razón de ser del mismo.

Una resolución actual del problema sería la siguiente:

Si p y q son las probabilidades de éxito y fracaso, respectivamente, que tiene el jugador en cada partida con, lógicamente, $p + q = 1$, y si n es el número buscado de partidas, la solución se encuentra despejando n en la igualdad:

P[éxito en la 1ª partida] + P[fracaso en la 1ª y éxito en la 2ª] + P[fracaso en la 1ª y 2ª y éxito en la 3ª] + ... + P[fracaso en las n-1 primeras partidas y éxito en la n-ésima] = ½

O sea, $p + qp + q^2p + \ldots + q^{n-1}p = \frac{1}{2}$, lo que es lo mismo que $(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1})p = \frac{1}{2}$, donde la suma del primer miembro es la de una progresión geométrica limitada de razón q, y teniendo en cuenta que $p = 1 - q$, la igualdad anterior se reduce a $1 - q^n = \frac{1}{2}$, o bien, $q^n = \frac{1}{2}$. El valor de n que satisface esa igualdad es la solución buscada. Bajo forma logarítmica tendríamos

$$n = -\frac{\ln 2}{\ln q}$$

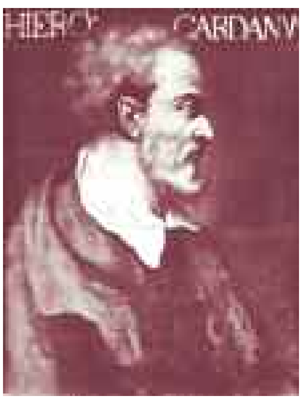
¿Es didáctico mostrar lo que intentaron nuestros clásicos a la hora de resolver problemas tan conocidos en la historia de esta disciplina?

Realmente, estamos usando la modelización probabilística conocida como Modelo Geométrico de parámetro p, que mide el número de experimentos independientes de Bernoulli hasta conseguir el primer éxito. El primer miembro de la igualdad anterior es la Función de Distribución de este modelo, que viene dada por $F(x) = 1 - q^{[x]}$, lo que nos lleva de nuevo a $1 - q^n = \frac{1}{2}$.

Este problema se fue generalizando con el discurrir de la historia y, así, leemos como enunciado más universal encontrar el número de partidas que debe disponer un jugador para intentar conseguir al menos c éxitos con una probabilidad igual de conseguirlo que de no conseguirlo. Como veremos, Huygens hará esta generalización para el caso de $c = 2$.

Cuando un estudiante está iniciándose en el cálculo de probabilidades, disponiendo de un bagaje matemático básico como el que ya tiene en el bachillerato, creemos interesante que él mismo aborde la resolución de problemas como éste. Se puede aprovechar, entonces, para describirle el contexto en el que se plantea por primera vez en la historia conocida de este cálculo (probablemente, el problema es más antiguo de lo que conocemos) y, usando la táctica de aprendizaje a partir del error o a partir de los intentos de resolución de los primeros autores, podemos conseguir, creemos, una motivación añadida en el alumno. ¿Es didáctico mostrar lo que intentaron nuestros clásicos a la hora de resolver problemas tan conocidos en la historia de esta disciplina? Creemos que sí, y esta razón justifica el análisis de lo que algunos de ellos hicieron en este contexto. Así pues, el objetivo de este trabajo es describir las primeras resoluciones publicadas de este problema, las cuales aparecieron en el siglo XVII. En este siglo es cuando comienzan a publicarse los primeros libros sobre el cálculo bajo el dominio del azar, y tres autores incluyeron en sus publicaciones la resolución de este problema: el italiano Girolamo Cardano (cuyo texto aunque escrito sobre 1540 no fue publicado hasta mucho después de su muerte, en 1663), el holandés Christiaan Huygens (cuyo pequeño tratado fue publicado en latín en 1657, y en holandés en 1660) y el español Juan Caramuel (cuya obra enciclopédica sobre matemáticas fue publicada en 1670 y en ella se incluía un fragmento dedicado al cálculo que estaba naciendo). En ese orden serán analizadas sus soluciones en los siguientes epígrafes. Para los dos últimos ya existía el precedente de la resolución del Problema de los Puntos o Regla de los Repartos para Juegos Inacabados, conocida a partir de la correspondencia entre Pascal y Fermat, cuyos principios y métodos fueron guía y fuente de inspiración para los autores posteriores, como se comprueba en la forma de resolver el problema que nos ocupa por parte de Huygens y Caramuel.

Cardano



Girolamo Cardano (1501 – 1576), médico, matemático, filósofo, escritor, astrólogo, jugador,… dejó como manuscrito sin publicar el *Liber de Ludo Aleae* (Libro de Juegos de Azar) que fue impreso por primera vez, después de su muerte, en el año 1663, en el primer volumen de las obras completas de este autor.

En este texto encontramos 8 capítulos dedicados a introducir reglas de cálculo en juegos de azar. En el capítulo 6, el autor establece un principio básico:

> En todo juego el principio más fundamental es simplemente la igualdad de condiciones, esto es, de los contrincantes, de los mirones, del dinero, de la situación, del cubilete y del mismo dado. En la medida en que usted se aparte de la igualdad, si es a favor de su contrincante, usted es tonto, y si es al suyo propio, usted es injusto.

Como ya se ha comentado, y como se puede observar cuando se estudian a los primeros autores del cálculo de probabilidades, la idea de juego justo, de la equidad, está siempre presente como principio y guía para el cálculo. Así, Bellhouse (2005) mantiene que la idea aristotélica de justicia está presente en el trabajo de Cardano.

> *Al final del* Liber de Ludo Aleae *encontramos muchas secciones enteramente lúcidas, mostrándonos un Cardano que conoce perfectamente el juego y que acaba entrando en los dominios del cálculo en el azar.*

Hay autores que, al hablar sobre la parte probabilística del *Liber de Ludo Aleae*, se quejan de lo difícil de su lectura. Todhunter (1865) resume sus impresiones en una nota de desesperación: *El tratado está tan mal escrito que apenas resulta inteligible*. Se puede asentir que ciertas secciones del libro no son comprensibles al estudiarlas por primera vez; algunos de los pensamientos de Cardano sólo surgen después de mucho análisis y usando información sobre reglas de juegos de su época, muchas de ellas desconocidas hoy. Pero el esfuerzo que se dedique al estudio del libro es recompensado; al final encontramos muchas secciones enteramente lúcidas, mostrándonos un Cardano que conoce perfectamente el juego y que acaba entrando en los dominios del cálculo en el azar.

Una razón por la que resulta confuso el tratado, en cuanto a sus argumentos probabilísticos, está en el hecho de que, para algunos casos, el autor hace uso de dos métodos de cálculo distintos. El primero es nuestro método estándar para hallar una probabilidad, recuento directo de los resultados favorables frente al total de posibles. Siempre que usa este procedimiento sus cálculos son correctos. El segundo método parece representar lo que fue su primera aproximación a estos problemas. Es el que Ore (1953) llama *razonamiento sobre la ganancia media*. La lectura del texto nos hace pensar que recurre a este método en los problemas que le resultan más difíciles. El mismo, en general, es fácil de aplicar, pero sus aproximaciones a la solución correcta resultan poco afinadas. El mismo Cardano era consciente de que los resultados obtenidos de esta forma no coincidían con los resultados correctos, pero no era capaz de dar explicaciones satisfactorias a las discrepancias; algunas de sus oscuras elucidaciones en este contexto podrían estar influidas por el problema de intentar conseguir armonizar los dos puntos de vista.

Para explicar este *razonamiento sobre la ganancia media* consideramos el lanzamiento de un dado, caso donde el autor lo introduce por primera vez. La probabilidad que tiene una cara cualquiera de aparecer en un único lanzamiento es $1/6$. Entonces, Cardano argumenta que dos lanzamientos producirían $2 \cdot 1/6 = 1/3$ de probabilidad de conseguir el punto deseado, y en tres lanzamientos dicha probabilidad sería $3 \cdot 1/6 = 1/2$. El valor correcto de la probabilidad de que un punto concreto (por ejemplo, un as) aparezca una vez, y sólo una, en tres lanzamientos consecutivos de un dado es $75/216$, y la probabilidad de que aparezca al menos una vez es $91/216$, por lo que en ninguno de los casos se da el resultado de Cardano.

Es obvio que el razonamiento de la ganancia media produce, en general, resultados erróneos, como enseguida se comprende. Por ejemplo, para 6 lanzamientos esto implicaría que el seis aparecería con seguridad, e incluso llevaría a probabilidades mayores que uno para más de 6 lanzamientos. Realmente, Cardano está calculando la media o esperanza de una variable aleatoria de tipo binomial, con probabilidad de éxito igual a $1/6$ y con n igual al número de lanzamientos, y él convierte dicha media en probabilidad. Ese es su error.

En el capítulo 11 del Liber aparece el problema que más de un siglo después será planteado por De Méré a Pascal. En el ejemplo que ambos citan, Cardano y De Méré, el jugador lanza dos dados varias veces consecutivas hasta que consigue doble seis.

Cardano no encuentra la solución correcta del problema dado que recurre al razonamiento sobre la media que, según el ejemplo de arriba, da lugar al siguiente argumento: sea p la probabilidad de éxito en una prueba individual. Si se realizan n intentos la probabilidad de conseguir éxito sería np (como ya se ha dicho, esto no es una probabilidad, es una esperanza). Si este número se iguala a $1/2$ se producirá la *igualdad*, esto es, tendría igual chance de tener éxito o de fracasar. Entonces, el correspondiente número de intentos sería $n = 1/2p$.

Cardano aplica ese resultado a algunos ejemplos. Así, si uno lanza dos dados hasta que aparece el doble seis, cuya probabilidad es $1/36$, entonces el número de partidas necesarias, según su criterio es 18. El valor correcto se encuentra entre 24 y 25, por lo que la aproximación de Cardano no es especialmente buena. Y si lanzamos un solo dado hasta que sale el seis, cuya probabilidad es $1/6$, el número buscado según Cardano es 3, resultado que él ya había presentado en su capítulo 9 y que se aproxima más que el anterior al valor correcto, dado que éste se encuentra entre 3 y 4.

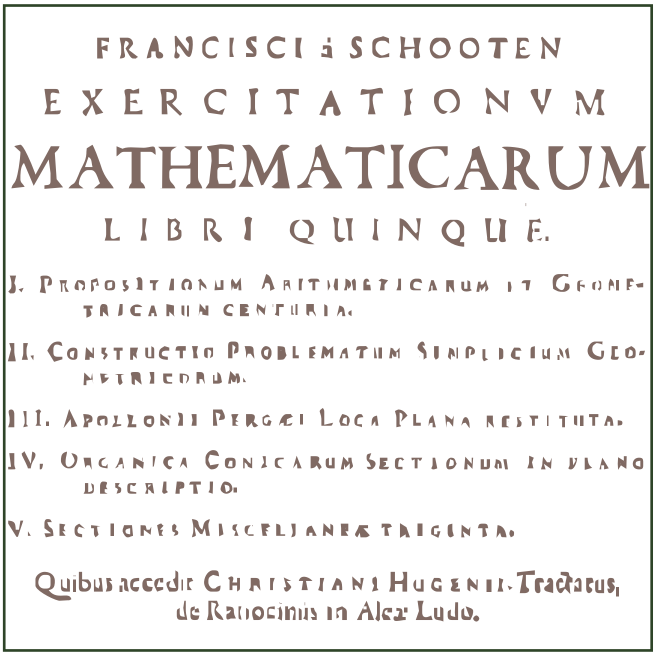
Huygens

Christiaan Huygens (1629 – 1695), científico holandés con aportaciones muy importantes a la física y a la astronomía a lo largo de su rica vida científica. En 1655, cuando sólo tenía 26 años, se traslada a Francia para recibir un doctorado en leyes en la Universidad Protestante de Angers, estableciéndose en París entre julio y noviembre de aquel año. Allí tuvo conocimiento de la correspondencia entre Pascal y Fermat que se había producido un año antes, accediendo a los problemas resueltos por ambos y a los métodos empleados en sus resoluciones, aunque el acceso no fue directo, sino, quizás, a través de comentarios en tertulias científicas.

> De Ratiociniis in Ludo Aleae *estaba destinado para ser incorporado como apéndice de una gran obra que su maestro van Schooten quería publicar.*

A su vuelta a Holanda escribió *De Ratiociniis in Ludo Aleae* (Calculando en juegos de azar), un pequeño tratado donde se resuelven los problemas sobre juegos de azar que flotaban en el ambiente en aquellos momentos. Estaba destinado para ser incorporado como apéndice de una gran obra que su maestro van Schooten quería publicar. Esa obra, y en particular el tratado de Huygens, fue publicada en latín en 1657. En la carta al lector que aparece al principio del tratado, van Schooten presenta este tratado como una oportunidad más de mostrar *las aplicaciones de este arte* (el álgebra), el cual había enseñado hacía algún tiempo a su discípulo: en ese momento estaba en juego la aplicabilidad universal de la recién creada Ars Analítica. La carta de Huygens, que sirve de prefacio, también es empleada para enfatizar *la grandeza del campo sobre el cual se extiende nuestro Arte Algebraico*. Y para reforzar el argumento añade:

> …cuanto más difícil parece determinar por la razón lo que es incierto y sometido al azar, tanto más admirable parecerá la ciencia que consiga este resultado.


FRANCISCI à SCHOOTEN
EXERCITATIONVM
MATHEMATICARUM
LIBRI QUINQUE.
I. Propositionum Arithmeticarum et Geometricarum Centuria.
II. Constructio Problematum Simplicium Geometricorum.
III. Apollonii Pergæi Loca Plana restituta.
IV. Organica Conicarum Sectionum in plano descriptio.
V. Sectiones Miscellaneæ triginta.
Quibus accedit Christiani Hugenii Tractatus, de Ratiociniis in Aleæ Ludo.

Índice del libro V de van Schooten donde se incluye en el último apartado el Tratado de Christaan Huygens

¿No será grande una ciencia, si ésta consigue dominar el azar?

El pequeño tratado se convirtió en el primer trabajo impreso sobre cálculo de probabilidades y referencia básica para los autores que en los inicios del siglo XVIII irrumpieron tan arrolladoramente en la consolidación del mismo.

En el tratado, Huygens establece el principio que debe regir lo que él entendía por juego justo. A partir del mismo, demuestra 14 proposiciones, en las que las tres primeras definen las bases del cálculo. Desde la 4ª a la 9ª están dedicadas a aportar diversas formas y soluciones del Problema de los Puntos, y las últimas a problemas de los que nos interesan en este trabajo.

Las proposiciones básicas son introducidas para efectuar valoraciones de juegos o loterías simples a través de la esperanza matemática. De esta forma, cuando después el autor tropieza con loterías compuestas, para llevar a cabo la valoración de las mismas procede a la sustitución de las simples por sus respectivas esperanzas. O sea, sustituye la situación de incertidumbre que supone una lotería por la valoración de la misma. Es lo que hoy día se conoce como *equivalente cierto* (Basulto, Camúñez y Domínguez, 2002). De las tres proposiciones básicas, exponemos aquí el enunciado de la tercera por ser la que el autor usó después para resolver el problema que nos ocupa:

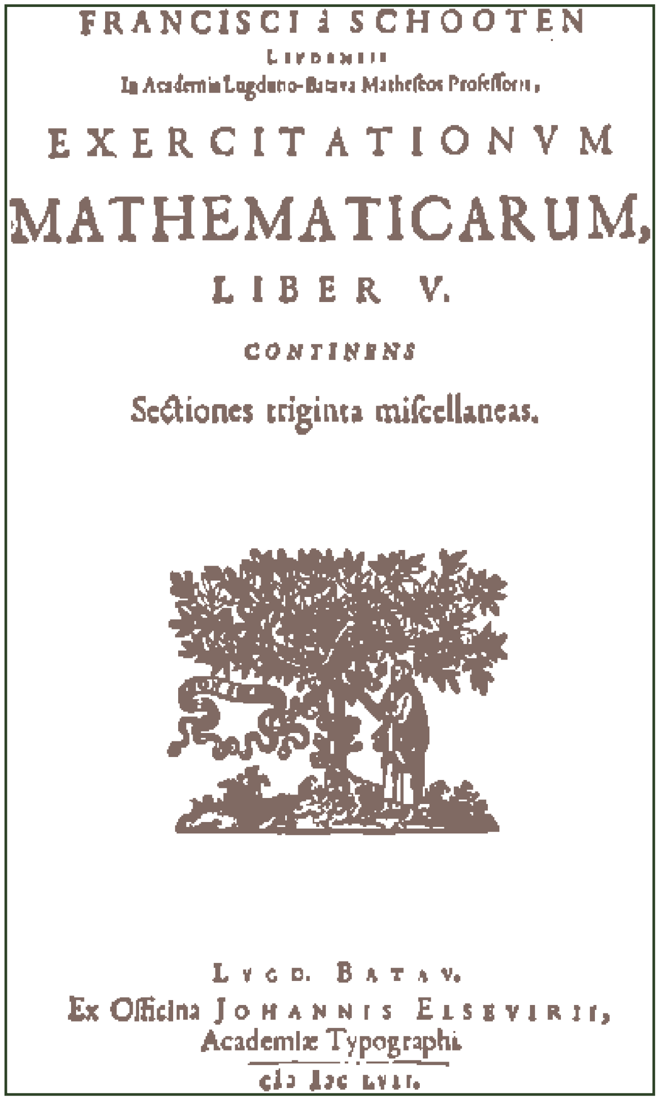
> Siendo p el número de casos en que me puede corresponder a y q el número de casos en que puede hacerlo b, asumiendo que todos los casos son igualmente posibles, mi esperanza será igual a $(pa + qb)/(p+q)$.

Vemos pues que, en esta proposición, se valora una lotería con dos posibles resultados o *premios* y con probabilidades distintas.

En las *proposiciones 10, 11 y 12*, Huygens enuncia y resuelve los problemas que nos ocupan. La *proposición 10* tiene el siguiente enunciado:

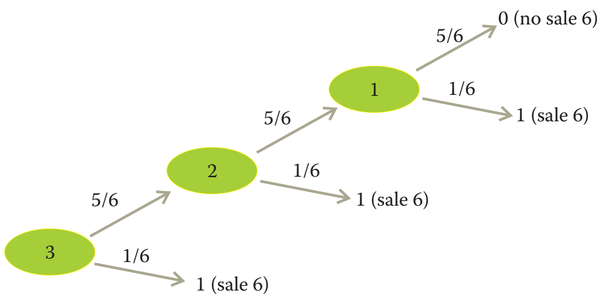
> Encontrar en cuántas veces se puede aceptar lanzar un seis con un dado.

O sea, analiza en primer lugar el caso que sí conocía el Caballero de Méré. Estudiemos este caso. Nos planteamos ¿qué número mínimo de lanzamientos será necesario para garanti-


FRANCISCI à SCHOOTEN
Leydensis
In Academia Lugduno-Batava Matheseos Professoris,
EXERCITATIONVM
MATHEMATICARUM,
LIBER V.
CONTINENS
Sectiones triginta miscellaneas.
LVGD. BATAV.
Ex Officina Johannis Elsevirii,
Academiæ Typographi.
cIↄ Iↄc LVII.

zar que exista ventaja para el jugador, que la probabilidad de obtener al menos un seis en esos lanzamientos sea superior a 0,5?

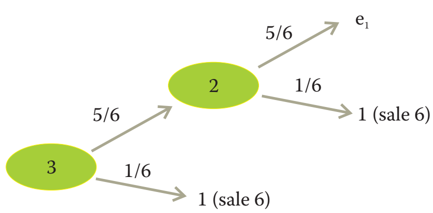
Para resolverlo, el autor construye una ecuación recurrente de valoraciones o esperanzas del jugador que lanza, en los distintos lanzamientos que va a efectuar. Veamos cómo lo hace con un ejemplo. Pensemos en un juego en el que se va a efectuar hasta un máximo de tres lanzamientos de un dado perfecto (hasta un máximo de tres partidas), y en el que un jugador, que ya hemos identificado como *jugador que lanza*, ganará el juego y, por tanto, se detendrán los lanzamientos, si en uno de ellos sale un seis. Si han transcurrido los tres lanzamientos y no ha conseguido el seis, el jugador que lanza pierde el juego. En cada lanzamiento definimos una variable tipo Bernoulli, que toma el valor 1, *éxito* (sale el seis) con probabilidad $1/6$ y 0, *fracaso*, (no sale el seis) con probabilidad $5/6$. Representamos el juego con el siguiente diagrama, en el que se han enumerado las partidas en sentido contrario a la ocurrencia cronológica de las mismas.



Usando su *proposición 3*, Huygens valora la partida número 1 de este juego. Si el premio es 0 (si pierde la partida) y 1 (si la gana), el valor esperado de esta partida para el jugador que lanza es

$$e_1 = \frac{5}{6}\cdot 0 + \frac{1}{6}\cdot 1 = \frac{1}{6}$$

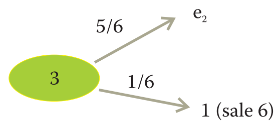
A continuación, Huygens sustituye la partida número 1 por su valoración e_1. El esquema muestra la nueva situación.



Entonces, la valoración de la segunda partida para el jugador que lanza (usando de nuevo la *proposición 3*) es

$$e_2 = \frac{5}{6}\cdot e_1 + \frac{1}{6}\cdot 1 = \frac{5}{6}\cdot e_1 + \frac{1}{6}$$

En el siguiente paso, Huygens sustituye esa segunda partida por su valoración y consigue así el valor esperado de la tercera. El esquema refleja la nueva sustitución.



Obtiene entonces

$$e_3 = \frac{5}{6}\cdot e_2 + \frac{1}{6}$$

Generalizando, el autor obtiene la ecuación recurrente

$$e_{n+1} = \frac{5}{6}\cdot e_n + \frac{1}{6}$$

donde

$$e_1 = \frac{1}{6}.$$

que permite calcular la esperanza o valoración del jugador que lanza, de la partida (n+1)-ésima a partir de la n-ésima. O sea, esa ecuación relaciona los valores esperados de dos partidas consecutivas.

La ecuación puede resolverse por sustituciones sucesivas, obteniéndose e_n como la suma de los términos de una progresión geométrica finita de razón $5/6$. La solución que se obtiene es

$$e_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

o bien

$$e_n = \frac{6^n - 5^n}{6^n}$$

Una vez obtenido e_n, Huygens construye tres funciones sobre los enteros positivos asociadas al caso de n partidas o lanzamientos en el juego:

$f(n)$ = número de alternativas favorables al jugador que lanza.
$g(n)$ = número total de alternativas.
$h(n)$ = número de alternativas desfavorables al jugador que lanza.

Y concluye que $f(n) = 6^n - 5^n$, $g(n) = 6^n$ y $h(n) = 5^n$.

Sea ahora n_0 el número mínimo de lanzamientos tal que el número de alternativas favorables al *seis* supere al de las desfavorables. Se ha de verificar $f(n_0) \geq h(n_0)$. Esa desigualdad conduce a $6^{n_0} \geq 2 \cdot 5^{n_0}$. En la tabla siguiente mostramos los valores que toman los dos miembros de esta desigualdad para los sucesivos números de lanzamientos y comprobamos que n_0=4, o sea, que para 4 lanzamientos se produce el cambio de sentido en la desigualdad, con lo que, con 4 lanzamientos consecutivos de un dado hay ventajas para el jugador que apuesta a obtener al menos un seis.

N.º de lanzamientos n	$2 \cdot 5^n$	Total de alternativas 6^n	Alternativas favorables $6^n - 5^n$	Alternativas desfavorables 5^n
1	10	6	1	5
2	50	36	11	25
3	250	216	91	125
4	1250	1296	671	625

En el último caso, para 4 lanzamientos, el número de alternativas favorables al jugador es $f(4) = 6^4 - 5^4$ =671, el total de alternativas es $g(4) = 6^4$ = 1296, y el número de alternativas desfavorables es $h(4) = 5^4$ =625, coincidiendo estos resultados con los expresados por el caballero de Méré. La tabla siguiente es la que, realmente, Huygens presentó como solución a este problema.

Número de lanzamientos	Chance del primero al segundo
1	1 a 5
2	11 a 25
3	91 a 125
4	671 a 625 (más de 1 contra 1, añade Huygens)
5	4651 a 3125 (aproximadamente 3 a 2)
6	31031 a 15625 (aproximadamente 2 a 1)

En la proposición 11, Huygens estudia este problema pero cuando se lanzan dos dados a la vez y se quieren conseguir dos *seises* (el caso cuya solución *escandalizaba* al Caballero de Méré). La resolución es idéntica, reemplazando las chances 1 y 5 anteriores con un lanzamiento de un dado, por las chances 1 y 35 por un lanzamiento con dos dados, lo que le da, como valoración del primer lanzamiento para el primer jugador, $\frac{1}{36}$ (entre los 36 posibles lanzamientos de dos dados sólo hay 1 que favorece al jugador que lanza), o bien, $e_1 = \frac{1}{36}$, en términos de esperanza del primer jugador, si el total apostado es 1, siendo esta cantidad para el que gana y 0 para el que pierde. Para dos lanzamientos (de los dos dados a la vez), Huygens encuentra como relación entre las esperanzas del jugador que lanza la ecuación recurrente

$$e_2 = \frac{35}{36}e_1 + \frac{1}{36}$$

donde sustituyendo e_1, tenemos el resultado $e_2 = \frac{71}{1296}$: esperanza del jugador que lanza los dos dados apostando por obtener el doble seis en dos lanzamientos consecutivos y cuando la apuesta total es 1. Podemos interpretar la cantidad anterior en términos de probabilidades de ganar de ambos jugadores, o parafraseando a Huygens, la relación entre las chances de ambos jugadores es como 71 (para el que lanza) a 1225, o sea 1296 – 71, para el otro jugador. Por tanto, la opción de dos lanzamientos sigue siendo muy desfavorable para el jugador que lanza.

Llegado a este punto, Huygens observa que necesita acelerar la recurrencia para no hacer los cálculos excesivamente tediosos.

Entonces, utiliza los números anteriores, 71 y 1225, para saltar de la situación de 2 lanzamientos con los dados a la de 4. Señala que el recorrido desde e_4 hasta e_2 es similar al de e_2 hasta el final. Usando las chances de este último recorrido concluye que el jugador que lanza tiene 1225 posibilidades de llegar a e_2 y 71 de ganar. Obtiene entonces

$$e_4 = \frac{1225}{1296}e_2 + \frac{71}{1296} = \frac{178991}{1679616}$$

por lo que las chances de ambos están en la relación 178991 a 1500625, pues 1500625 = 1679616 – 178991.

Después informa que ha usado este método para encontrar e_8, e_{16} y e_{24}, y que, en el último las chances son ligeramente menores que 1:1 (*tiene aún una ligera desventaja*), mientras que con 25 ya hay ventaja para el primer jugador, pues las chances son superiores a 1:1. Escribimos de nuevo la ecuación recurrente que está planteando:

$$e_{n+1}=\frac{5}{36}e_n+\frac{1}{36},\quad e_1=\frac{1}{36},\quad n=1,2,\ldots$$

Con esta termina lo que Huygens explica sobre este caso. Completamos nosotros la resolución del problema añadiendo las funciones *f*, *g* y *h* que Huygens construyó para el caso anterior: $f(n) = 36^n - 35^n$, $g(n) = 36^n$ y $h(n) = 35^n$.

También deducimos que el número mínimo de lanzamientos, n_0, para que haya más alternativas favorables al seis doble que en contra, debe verificar la desigualdad $36^{n_0}\geq 2\cdot 35^{n_0}$.

En la tabla siguiente comprobamos que dicho número mínimo ha de ser 25, y no 24 como argumentaba el caballero de Mére. No presentamos las potencias exactas, sino aproximaciones en las que aparecen las primeras cifras, puesto que son suficientes para efectuar las comparaciones.

N.º de lanzamientos del gran dado	36^n	$2 \cdot 35^n$
24	$2{,}24 \cdot 10^{37}$	$2{,}28 \cdot 10^{37}$
25	$8{,}08 \cdot 10^{39}$	$7{,}99 \cdot 10^{39}$

Así, la probabilidad de obtener al menos un *seis doble* en 24 tiradas es

$$\frac{36^{24}-35^{24}}{36^{24}}=1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}=0'49140388\ldots$$

Mientras que la de obtenerlo en 25 tiradas es

$$\frac{36^{25}-35^{25}}{36^{25}}=1-\left(\frac{35}{36}\right)^{25}=0'50553154\ldots$$

En la *proposición 12*, Huygens presenta el siguiente problema:

> Encontrar el número de dados con el que se puede aceptar lanzar 2 seises en la primera tirada.

O sea, con cuántos dados apostaría un jugador con ventaja, a conseguir dos *seis* en un solo lanzamiento de todos ellos. Esto es, obviamente, una generalización de las *proposiciones 10 y 11*. Huygens reformula el problema como sigue:

> Encontrar cuántas tiradas de un dado son necesarias para tener al menos una chance igual de conseguir dos seises.

En términos de esperanza, sea e_n la del *jugador que lanza* cuando apuesta que conseguirá al menos 2 seises en *n* lanzamientos. Hablando en términos de probabilidad, Huygens plantea la siguiente ecuación recurrente para resolver este problema: *La probabilidad de obtener al menos 2 seises en n+1 lanzamientos es igual al producto de la probabilidad de obtener al menos 1 seis en primer lanzamiento por la probabilidad de obtener al menos 1 seis en los n lanzamientos últimos más la probabilidad de no obtener seises en el primer lanzamiento por la probabilidad de obtener al menos 2 seises en los n lanzamientos últimos.*

Observamos que la última probabilidad del segundo miembro es la misma que la del primer miembro pero con *n* lanzamientos en lugar de *n* + 1. Ahí está la clave de la ecuación recurrente que Huygens obtiene para este problema. Además, la probabilidad de obtener al menos un seis en n lanzamientos es la complementaria de la de no obtener ninguno en esos lanzamientos, o sea:

$$P\begin{bmatrix}\text{obtener al menos 1 seis en los}\\ n\text{ lanzamientos últimos}\end{bmatrix}=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Si la apuesta es 1, la probabilidad se convierte en esperanza del jugador que lanza y la ecuación recurrente de Huygens toma la forma

$$e_{n+1}=\frac{1}{6}\cdot\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)+\frac{5}{6}e_n$$

lo que, partiendo de $e_2 = 1/36$, encuentra $e_3 = 16/216$, y así hasta e_{10}, que es ligeramente superior a 0,5. Escribe:

> …tomando así cada vez un lanzamiento más, se encuentra que se puede aceptar con ventaja cuando el número de lanzamientos es 10. O sea, con *n* = 10 dará una ventaja ligeramente superior a 1:1.

Con esto termina lo que Huygens aporta a la resolución del problema que nos ocupa en su tratado. Hemos de notar que, como se ha visto, Huygens no utiliza logaritmos para facilitar el cálculo. Korteweg (1920) señala que ese hecho ha impedido a Huygens la generalización del problema. Se pregunta

> *¿Por qué Huygens se limitó en su tratado de 1657 al caso de uno y dos dados y no ha sabido resolver el problema en este último caso nada más que por unos cálculos que debían ser bastante penosos?*

Y añade

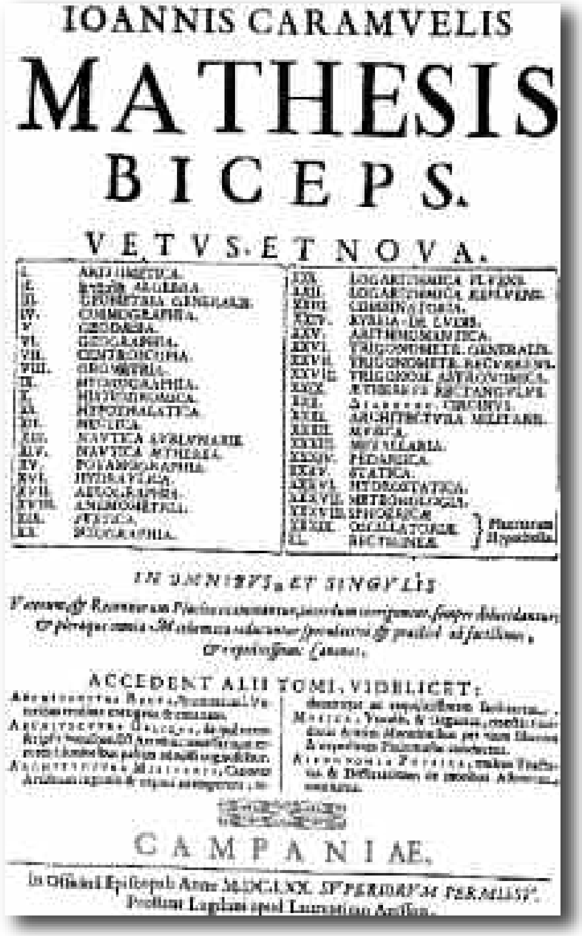
> Es cierto que el cálculo de los logaritmos no parece haber formado parte de los cursos enseñados por van Schooten y que se encuentra en los manuscritos de Huygens, alguno escrito antes de 1661… Sin embargo, parece inadmisible que Huygens no haya tenido conocimiento antes de 1657 de una rama tan importante de la matemática, sin duda bien conocida en Holanda por los trabajos de Vlack[1].

Caramuel

Juan Caramuel y Lobkowitz (1606 – 1682), nacido en Madrid, estudia humanidades y filosofía en la Universidad de Alcalá y a los 17 años inicia la carrera eclesiástica ingresando en la orden del Cister. Pasa varios años en los Países Bajos donde recibe una elevada formación matemática. Publica tratados sobre matemáticas y arquitectura y fallece siendo obispo de Vigevano, a unos 50 kilómetros de Milán.

Caramuel se nos muestra como un hombre enciclopédico, que aborda todas las disciplinas del saber con pasión y con dignidad, aunque sin someterse a ninguna escuela o argumento de autoridad. A veces, se nos presenta como un rebelde para la ciencia. Para uno de sus enemigos

> tenía Caramuel ingenio como ocho, elocuencia como cinco y juicio como dos.



IOANNIS CARAMVELIS

MATHESIS BICEPS.

VETVS, ET NOVA.

IN OMNIBVS, ET SINGVLIS

ACCEDENT ALII TOMI, VIDELICET:

CAMPANIAE.

In Officina Episcopali Anno MDCLXX. SVPERIORVM PERMISSV.

Prostant Lugduni apud Laurentium Anisson.

> *Caramuel se propuso escribir un curso completo de todas las matemáticas de su tiempo en 1667 y, durante tres años, dedica un arduo esfuerzo a este asunto, que se vio culminado con la publicación en 1670 de* Mathesis biceps. Vetus et nova.

Un hombre así no podía dejar pasar la oportunidad de ofrecer su particular visión sobre el cálculo naciente en juegos de azar.

Este autor se propuso escribir un curso completo de todas las matemáticas de su tiempo en 1667 y, durante tres años, dedica un arduo esfuerzo a este asunto, que se vio culminado con la publicación en 1670, en la imprenta de su obispado, en Campania, de una monumental obra, en dos volúmenes, titulada *Mathesis biceps. Vetus et nova*. La misma está dividida en 10 sintagmas, 4 en el primer volumen y 6 en el segundo. Sus 1800 páginas constituyen una auténtica enciclopedia de las matemáticas, recogiéndose en ella todos los conocimientos matemáticos de los antiguos, las aportaciones de los modernos y sus propias contribuciones a esta ciencia. Para Franklin (2001) esta obra constituye el *compendio más completo de la ciencia matemática publicada hasta aquel momento.*

En el *Sintagma VI*, nuestro autor estudia la Combinatoria, tema al que ya había dedicado algún esfuerzo en su anterior obra, *Mathesis audax*. Caramuel sigue el estudio anterior de Sebastián Izquierdo[2], a quien cita muchas veces. Pero la combinatoria es para Caramuel algo más, es la ramificación del *ars lulliana* que más validez conserva. Considera la combinatoria como un instrumento indispensable para estudiar cualquier disciplina, como lo muestra el apartado incluido en este sintagma, el *Kybeia*[3], fragmento que nos interesa, pues es el que dedica a estudiar los juegos, dando una visión bastante interesante sobre el origen de los mismos, e introduciendo sus principios que servirán de base para llevar a cabo los cálculos necesarios en la resolución de problemas.

Kybeia ocupa las páginas 972-995 del segundo volumen de *Mathesis biceps*, o sea, apenas 24 páginas, de las que las ocho últimas están dedicadas a reproducir el tratado de Huygens que Caramuel, erróneamente, atribuye al astrónomo danés, Christiaan Severin Longomontanus.

Igual que sus antecesores, lo primero que se plantea Caramuel es definir la situación de equidad en el juego y, por tanto, establecer lo que para él era un *juego justo*. Introduce el término *peligro*, tan español, como sinónimo del más actual *riesgo*. Y también, el término *esperanza* como lo contrario de peligro. Como primer principio establece que *en una partida no sólo debe saberse de antemano si existe peligro, sino también cuánto. Pues la cantidad de dinero a arriesgar depende de la cantidad de peligro*. O sea, a mayor peligro menos dinero a apostar.

El artículo III de Kybeia *está dedicado a la resolución de problemas del tipo de los del Caballero de Méré. Ahora bien, sólo trata los casos en los que se lanza un único dado, que son los recogidos por Huygens en su proposición 10.*

Se propone, por tanto, medir la cantidad de esperanza y peligro que tiene cada jugador y definir su apuesta en función de ello. Como uno de sus ejemplos ilustrativos, introduce el caso de un jugador que lanza dos dados al mismo tiempo y se propone conseguir un determinado resultado. Para este caso presenta una tabla con las *esperanzas* y *peligros* de dicho jugador, equivalentes a lo que hoy llamamos *casos favorables* y *casos desfavorables* y, entonces, añade una tabla de apuestas en situaciones de desigual probabilidad. Así, de manera implícita está construyendo una tabla con las probabilidades de obtener los diferentes resultados al lanzar dos dados. Nos dice que si, por ejemplo, un jugador apuesta a que la suma de las puntuaciones de los dos dados al ser lanzados será 7, entonces, este jugador tiene 6 esperanzas (6 resultados favorables) y 30 peligros (30 posibles lanzamientos de dos dados que no suman 7) por lo que, si el jugador apuesta una moneda, el que apuesta en su contra ha de poner cinco (en la proporción de 6 a 30).

El *artículo III* de *Kybeia* está dedicado a la resolución de problemas del tipo de los del Caballero de Méré. Ahora bien, sólo trata los casos en los que se lanza un único dado, que son los recogidos por Huygens en su *proposición 10*. Como veremos, aunque los resultados que da Caramuel son correctos, su forma de resolución es algo distinta a la de Huygens.

En el primer número del *artículo III* encontramos el caso más sencillo: el jugador quiere lanzar un cinco tirando el dado una sola vez. Para el jugador que lanza, la proporción entre esperanza y peligro es de 1 a 5 (su probabilidad de ganar el juego es $\frac{1}{6}$). Se pregunta nuestro autor, si el jugador ganase 12 doblones por conseguir ese éxito, ¿cuánto ha de pagar por participar en ese juego? Una sexta parte, o sea, 2 doblones.

Después resuelve el caso en el que el jugador intenta conseguir un éxito en dos pruebas. Sabemos que dicha probabilidad es

$$\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{11}{36}$$

Caramuel obtiene este mismo resultado razonando sobre lo que deben apostar tanto el que lanza como quien le reta *para que se observe una equidad y, de este modo, la diferencia en la apuesta se fije conforme a la desigualdad establecida en el peligro*.

Supongamos que el total apostado es de 36 monedas. Si en el primer lanzamiento el jugador que lanza obtuviese éxito, se llevaría las 36 monedas, si no, le queda aún un lanzamiento más cuya probabilidad es $\frac{1}{6}$. Nos dice el autor que este jugador sólo se juega ganancia en el primer lanzamiento: o bien lo gana todo (y no se efectúa el segundo lanzamiento), o bien, gana su derecho a una segunda tirada cuyo valor es 6, o sea, $\frac{1}{6}$ de 36 (introduce también, como Huygens, la valoración de una partida que no se ha jugado, o sea, la valoración de una situación de incertidumbre). Entonces, si la segunda tirada vale 6 y, en total, puede ganar 36, los 30 de diferencia (el *resto* lo llama Caramuel) son los que se utilizan para saber lo que se acumula a esos 6 a la hora de valorar la primera tirada: la sexta parte de esos 30, que es 5, sumados a los 6 de la segunda tirada nos dan 11, siendo ésta la valoración inicial del juego para el jugador que lanza. La diferencia hasta 36, o sea 25, es la valoración para el otro jugador.

Con un razonamiento recurrente resuelve el caso en el que se intenta conseguir un éxito en tres pruebas. Según lo anterior, el valor del segundo lanzamiento es $\frac{11}{36}$. O sea, si se apuestan 36 monedas, el segundo lanzamiento (la posibilidad de lanzar una segunda y una tercera vez, para ser más correcto) vale 11 monedas. La diferencia con 36 es 25. Pues bien, $\frac{1}{6}$ de 25 es lo que hay que sumar a esos 11 para valorar la primera tirada, o la posibilidad de intentarlo en tres pruebas, resultando $15\cdot\frac{1}{6}$ de las 36. O sea, la probabilidad de conseguir éxito en tres lanzamientos es $(15\cdot\frac{1}{6})/36$ pero

> *como me parece que no te gustan las fracciones de fracciones, dividamos estos números por seis: así, $(15\cdot\frac{1}{6})/36$ se convierte en $\frac{15}{216}$.*

N.º de intentos	Apuesta del jugador	Apuesta del contrario
1	$\frac{1}{6}A$	$\left(1-\frac{1}{6}\right)A=\frac{5}{6}A$
2	$\frac{1}{6}A+\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{6}\right)A=$ $=\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{36}\right)A=\frac{11}{36}A$	$\left[1-\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{36}\right)\right]A=\frac{25}{36}A$ o bien, $\frac{5}{6}A-\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}A=\frac{25}{36}A$
3	$\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{36}\right)A+\frac{1}{6}\left[1-\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{36}\right)\right]A=$ $=\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{36}+\frac{25}{216}\right)A=\frac{91}{216}A$	$\left[1-\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{36}+\frac{25}{216}\right)\right]A=\frac{125}{216}A$ o bien, $\frac{25}{36}A-\frac{1}{6}\cdot\frac{25}{36}A$

Tabla 1

Escribe Caramuel, siendo éste el resultado correcto. Y añade:

> Podrás desarrollar esta operación hasta el infinito, dando para ello la siguiente regla general: Súmale al resultado inmediatamente anterior, para el que expone, quien tira el dado, la sexta parte del resto.

Si A es la apuesta total, la tabla 1 , construida según esta regla, muestra lo que ha de apostar el jugador que lanza y quien le reta, según el número de intentos que tiene para conseguirlo.

Por tanto, para saber lo que ha de apostar el contrario, al aumentar un intento, se resta una sexta parte de lo que apostó en el número de intentos anterior. Una tabla similar, pero con más simplificación en el desarrollo algebraico, es la que ofrece Caramuel llegando hasta seis intentos.

A continuación aborda la resolución de este tipo de problemas usando logaritmos (es la primera vez en la historia de la probabilidad que se usa esta herramienta para resolver el problema del Caballero de Méré). Ahora bien, el uso de los mismos es sólo para apoyar los cálculos ya realizados. Por ejemplo, si el jugador pretende sacar un cinco en tres lanzamientos, y el total apostado es 36, entonces lo que él ha de poner es $36 \cdot 91/216$, y el contrario $36 \cdot 125/216$. Pues bien, el cálculo de esa cantidad lo lleva a cabo tomando primero el logaritmo de la misma y, luego, el antilogaritmo, siendo éste para el jugador contrario 20,834, por lo que el que lanza debe apostar 15,166. De esta forma presenta una tabla donde, en la primera columna está el número de intentos, en la segunda, el logaritmo de la cantidad que debe apostar el contrario, en la tercera el antilogaritmo, o sea, la cantidad que debe apostar el contrario en forma decimal (no fraccionaria), en la cuarta, lo que debe apostar el que lanza (también en forma decimal), y en la última, la opinión más generalizada entre los jugadores respecto a cómo se debía apostar y que difiere sensiblemente de sus propios cálculos. Esta columna demuestra, además, que Caramuel conocía bastante bien estos ambientes de juego.

NOTAS

1 A1 Trigonometría Artificialis, sive Magnus Canon Triangulorum Logarithmus, del año 1663.

2 Pharus Scientarum, 1659, Disp. XXIX, De Combinatione.

3 En griego Kybeia significa juego de dados.

Tabla de Caramuel

Si tengo que sacar el punto	Logaritmos 07918	Mi rival pondrá	Luego apostaré	Opinión general
De una vez	1,47712	30=000	contra 6=000	6 contra 30. Total 36
En dos	1,39794	25=000	contra 11=000	12 contra 24. Total 36
En tres	1,31876	20=834	contra 15=166	18 contra 18. Total 36
En cuatro	1,23958	17=362	contra 19=638	24 contra 12. Total 36
En cinco	1,16040	14=468	contra 22=532	30 contra 6. Total 36
En seis	1,08122	12=056	contra 23=944	36 contra 6. Total 36
En siete	1,00204	10=047	contra 25=953	
En ocho	0.92286	8=373	contra 27=627	
En nueve	0.84368	6=977	contra 29=023	
En diez	0.76450	5=814	contra 30=186	
En once	0,68532 C			
	0,79180 D			
	1,47712 E	Suma de ambos 36,000 F		

El signo = entre las cifras de la segunda y tercera columnas representa la coma decimal.

En la tabla se muestra, aunque Caramuel no hace referencia a ello, el cambio en las apuestas de los dos jugadores al pasar de 3 a 4 lanzamientos, siendo a partir de 4 el juego favorable al jugador que lanza.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BASULTO SANTOS, J.; CAMÚÑEZ RUIZ, J. A. y DOMÍNGUEZ QUINTERO, A. M. (2002): "El Método Universal de Pascal como un Equivalente Cierto: el Problema de los Puntos", *Historia de la Probabilidad y de la estadística*, Editorial AC, Madrid, 19-34.

BELLHOUSE, D. (2005): "Decoding Cardano's Liber de Ludo Aleae", *Historia Matemática*, Vol. 32, Is. 2, mayo 2005, 180-202.

BERNSTEIN, P.L. (1996): *Against the Gods. The Remarkable Story of Risk*, John Wiley & Sons, New York.

CARAMUEL, J. (1670): *Kybeia, quae Combinatoriae Genus est, de Alea et Ludis Fortunae serio Disputans en Methesis bíceps (vetus et nova)*, Campania.

CARDANO, G. (1663): L*iber de Ludo Aleae, impreso por primera vez en Opera Omnia*, Vol. 1, traducido al inglés por S. H. Gould en Ore (1953).

DAVID, F. N. (1962): *Games, Gods and Gambling*, Charles Griffin & Co. Ltd., London.

FRANKLIN, J. (2001): *The Science of Conjeture. Evidence and Probability before Pascal*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore.

HACKING, I (1975): *The emergence of probability*, Cambridge University Press.

HALD, A. (1990): *A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750*, John Wiley & Sons. New York.

HUYGENS, C. : (1888-1950): *Oeuvres Complètes*, 22 volúmenes, Société Hollandaise des Sciences. Nijhoff, La Haye. Los volúmenes usados aquí son: Vol. I, II, IV, V, VI, XVI y XXII.

IZQUIERDO, S. (1659): *La Combinatoria de Sebastián Izquierdo. Pharus Scientarum, Disp XXIX, De Combinatione*, texto latino y traducción española, publicado por Instituto de España. Madrid, 1974.

KORTEWEG, D. J. (1920): *Apercy de la Genèse de l'Ouvrage De Ratiociniis in Ludo Aleae et des Recherches subséquentes de Huygens sur les Questions de Probabilité*, Oeuvres de Huygens, Vol. 14, 3-48.

ORE, O. (1953): *Cardano, The Gambling Scholar*, Princenton University Press. Pricenton, New Jersey. Reimpreso por Dover, New York en 1965.

PASCAL, B. (1963): *Oeuvres Complètes*, Edición de Lafuma, París.

SCHNEIDER, I. (1980): "Christiaan Huygens's Contribution to the Development of a Calculus of Probabilities", *Janus LXVII*, 269-279.

TODHUNTER, I. (1865): *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace*, Macmillan, London. Reprinted by Chelsea, New York, 1949.

VELARDE LOMBRAÑA, J. (1989): *Juan Caramuel. Vida y Obr*a, Pentalfa Ediciones, Oviedo.

SUMA 56
Noviembre 2007, pp. 55-61

Resolución de problemas mediante la regla de falsa posición: un estudio histórico

Durante siglos los métodos aritméticos fueron utilizados en la resolución de problemas (entre ellos aquellos para cuya solución había que plantear y resolver una ecuación lineal). Sin embargo, con la aparición del álgebra, los métodos algebraicos fueron sustituyendo paulatinamente a éstos hasta relegarlos a meros métodos de aproximación. Este es el caso de la regla de falsa posición, utilizada hasta el siglo XVIII. Puede resultar interesante analizar la evolución de dicho método en los textos históricos incidiendo en las causas de su desaparición, así como en las consecuencias que ha acarreado para la enseñanza.

Over the centuries, arithmetic methods had been employed in problem-solving (among them, those requiring the analysis and solution of a linear equation for their solving). However, with the emergence of algebra, algebraic methods gradually replaced arithmetic ones to the point of relegating the latter to mere methods of approximation. This is the case of the false position rule, which was employed until the XVIII century. It might be interesting to analyse the evolution of such method within historic texts, focusing particularly on the causes of its disappearance as well as on the consequences which this may bring to the teaching context.

Durante muchos siglos los métodos aritméticos fueron utilizados en la resolución de problemas (entre ellos aquellos para cuya solución había que plantear y resolver una ecuación lineal). Sin embargo, con la aparición del álgebra, los métodos algebraicos fueron sustituyendo paulatinamente a éstos hasta relegarlos a meros métodos de aproximación. Este es el caso de la regla de falsa posición, utilizada hasta el siglo XVIII.

Puede resultar interesante, desde el punto de vista de la didáctica de las matemáticas, analizar la evolución de dicho método en los textos históricos incidiendo en las causas de su desaparición, así como en las consecuencias que ha acarreado para la enseñanza.

Los primeros tratados de aritmética tenían como objeto servir para la resolución de un determinado tipo de problemas.

Este análisis, realizado para la regla de falsa posición, es extensible para otros métodos aritméticos. En Gómez (1999)[i] se analiza el caso de la regla de compañía, obteniéndose aquí conclusiones similares.

Lo que subyace a este proceso de sustitución de unos métodos por otros es un cambio en el enfoque metodológico. La potencia de los métodos algebraicos ha podido con los métodos aritméticos, más intuitivos, y que, en ocasiones, recurren a cantidades no naturales. Además, cada uno de ellos responde a un enfoque radicalmente distinto. Los primeros tratados de aritmética tenían como objeto servir para la resolución de un determinado tipo de problemas. Por ello, los textos se concebían como una colección de problemas. No hay un afán pedagógico sino un propósito práctico. A medida que transcurre el tiempo, la cantidad de métodos va proliferando, así como la variedad de problemas, por lo que se produce un primer intento de concentración de cada tipo de problemas alrededor de un método canónico de resolución. El siguiente paso, que involucra un planteamiento didáctico contrapuesto, es la utilización de los métodos algebraicos para resolver dichos problemas.

Abilio Orts Muñoz
IES Benlliure.
Valencia.

El marco teórico

En el presente trabajo se ha seguido un marco teórico basado en la revisión de documentos históricos. Así, se realiza un estudio de la regla de falsa posición a partir de diferentes textos, desde el papiro de Rhind (1650 a. C.), donde la regla citada era el método utilizado para resolver problemas, hasta textos del siglo XIX (Tratado Elemental de Matemáticas de J. M. Vallejo) en el cual ya es considerado como un método eficaz de aproximación numérica de ecuaciones (no necesariamente lineales).

Metodología

Modelo de competencia formal

¿Qué es la regla de falsa posición?

Se trata de un procedimiento aritmético que permite resolver ecuaciones lineales. Para ello parte de un valor cualquiera (método simple) o de dos valores (doble falsa posición). A partir de estas falsas posiciones se obtiene la solución de la ecuación por proporcionalidad.

Ejemplo 1: Calcula un número tal que ese número más su mitad sea 15.

Para resolver el problema partimos de un número (posición) cualquiera. Sea 2 (puesto que de ella es sencillo calcular su mitad). El número, 2, más su mitad, 1, es 3, distinto de 15. Se trata de una falsa posición. Para encontrar la posición verdadera procedemos por proporcionalidad:

Posición	Solución
2	3
x	15

$$\frac{2}{x}=\frac{3}{15}$$

Luego, x = 10.

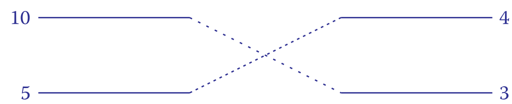
Ejemplo 2: Halla un número tal que cinco veces ese número menos 10 sea 0.

Para resolver este problema por la regla doble partimos de dos posiciones. Sean 3 y 4. Para 3: 5·3-10 = 5 y para 4: 5·4-10=10. Tenemos dos falsas posiciones. Para obtener la solución calculamos:

$$x=\frac{10\cdot 3-5\cdot 4}{10-5}=2$$

que es la solución del problema.

Gráficamente:



- Método simple:

Ecuación: $ax = b$

Falsa posición: $ax_0=e$

Solución:

$$x=\frac{x_0 b}{e}$$

- Método de doble falsa posición:

Por tratarse de una relación de proporcionalidad la relación se puede expresar de forma lineal:

$$ax + b = 0$$

Para nuestras dos aproximaciones:

$$ax_1 + b = e_1 \qquad (1)$$

$$ax_2 + b = e_2 \qquad (2)$$

Restando ambas expresiones:

$$a(x_1 - x_2) = e_1 - e_2 \qquad (3)$$

Multiplicando (1) por x_2 y (2) por x_1:

$$ax_1x_2 + bx_2 = e_1x_2$$

$$ax_2x_1 + bx_1 = e_2x_1$$

y restando ambas expresiones obtenemos:

$$b(x_2 - x_1) = e_1x_2 - e_2x_1 \qquad (4)$$

Por último, dividiendo (4) entre (3):

$$\frac{b(x_2-x_1)}{a(x_1-x_2)}=\frac{e_1x_2-e_2x_1}{e_2-e_1}$$

y como

$$x=\frac{-b}{a}\Rightarrow x=\frac{e_1x_2-e_2x_1}{e_2-e_1}$$

Revisión histórica
Primer período: Resolución por métodos aritméticos.

El método de falsa posición utilizado para resolver ecuaciones lineales se remonta a los primeros documentos matemáticos que se conocen. Así, en el papiro de Rhind (1650 a. C.) los problemas 24 a 27 son resueltos recurriendo a este procedimiento[ii].

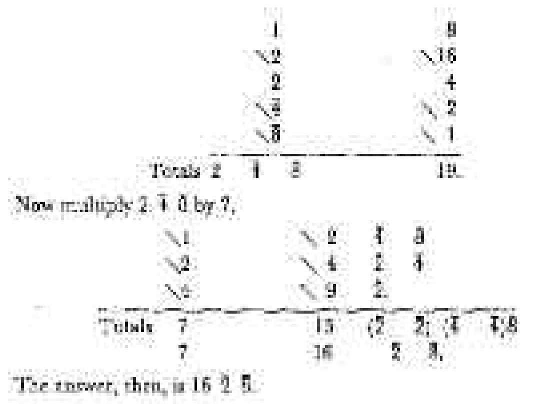
El problema 24 dice así: Una cantidad y su séptima parte suman 19. ¿Cuál es esa cantidad?

Problema 24 del Papiro de Rhind. Tomada de Gillings (1982).

Solución: Tomamos como posición 7 (es el número que permite realizar las operaciones de una forma más sencilla):

Así 7 + ⁷⁄₇ = 8. Por tanto, se trata de una falsa posición.

Entonces, el escriba procede de la siguiente manera: Tantas veces como 8 debe ser multiplicado para dar 19 es tantas veces como 7 debe ser multiplicado para dar la cantidad correcta. El resultado es 16 ½ ⅛.



Solución del problema 24 propuesta en el papiro de Rhind. Es interesante observar el método utilizado para multiplicar basado en la duplicación y partición (división entre 2) así como el empleo de fracciones unitarias. Tomado de Gillings (1982).

Las matemáticas chinas también utilizaron la regla de falsa posición. El libro más célebre de la época *Zhui Zhang Suan Shu* (El arte matemático en nueve secciones), escrito alrededor del año 250 a.C., contiene 246 problemas sobre agrimensura, agricultura, pertenencia de bienes, contribución, cálculo de longitudes y superficies, solución de ecuaciones y propiedades de los triángulos rectángulos. En la sección séptima se utiliza la regla de falsa posición para resolver ecuaciones lineales.

Posteriormente, en el siglo III d.C., aparece en los *Sulvasütras* como ayuda para resolver problemas que permitieran la construcción de templos. Uno de ellos es el siguiente:

> Halla el área de un rectángulo conociendo el otro lado y sabiendo que su área es igual al área de un cuadrado dado.

Es decir, se trata de resolver una ecuación del tipo $ax = S$. En el *Lilavati* es llamada *Ishtacarman* u operación con un número asumido.

Los árabes conocieron este método aritmético a través de los maestros indios. En los siglos IX y X, el algebrista Abu Kamil resuelve problemas de ecuaciones lineales por el método de simple y doble falsa posición.

Leonardo de Pisa (Fibonacci) utiliza el término *elchataym* (del árabe *hisab al-Khataayn*) para designar la regla de la doble falsa posición. En el capítulo 13 del *Liber Abaci* (Cap. 13: *Sobre el método Elchataym y como en él son resueltos fácilmente todos los problemas*) explica este método en detalle y lo usa para resolver problemas. Anteriormente, en el capítulo 12, había presentado la regla de simple falsa posición.

Los posteriores tratados de aritmética italianos siguen utilizando la regla de falsa posición. Un ejemplo de ello es el siguiente problema propuesto por Luca Di Borgo (Luca Pacioli):

> Una persona compra una joya por una cierta cantidad desconocida de fiorini y la vende por 50. Una vez realizada la operación obtiene unos beneficios de 3 ⅓ soldi por cada fiorino, que contiene 100 soldi. Pregunto el primer coste.

En España, en 1482, Francesc Santcliment[iii] presenta la regla de falsa posición[iv], distinguiendo tres casos en la resolución de la ecuación $ax + b = c$:

1. que x_1 y x_2 sean ambos mayores que c (al calcular ax_1+b y ax_2+b). Santcliment dice que ambas posiciones dan más.
2. que x_1 y x_2 sean más pequeñas que c. Santcliment dice que ambas posiciones dan menos.
3. que x_1 y x_2 sean alternos. Santcliment dice que una posición da más y otra menos.

Esta distinción en tres casos perdura todavía en el *Tratado de Arithmetica Práctica y Speculativa* de *Pérez de Moya*[v] (1573). Sin embargo, aquí se introduce ya un tratado de la *cosa* o arte mayor.

Segundo período: Convivencia de ambos métodos

De esta forma, en la página 457, recurre a este método para resolver el siguiente problema:

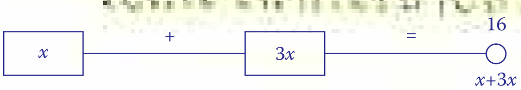
> Dame dos números en proporción tripla que summados hagan 36,

cuya solución es:

> Para hazer ésta presuppondrás que el número es una cosa (que se figura assí: 1 co.), el segundo, porque dize que ha de ser de tripla proporción, será 3 co., los quales dos números summados montarán 4 co. Estas 4 co. dirás que es ygual a los 36 números que quisieras que vinieran,... Decir que 4 co. son yguales a 36 números no es otro sino que 4 co. valen 36 números, que partidos 36 a 4 viene 9, y éste es el valor de una cosa.

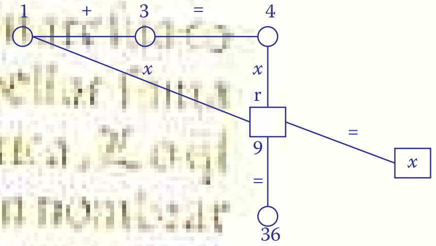
Es decir, está resolviendo la ecuación lineal $x + 3x = 36$ mediante un procedimiento de tipo algebraico.

Si resolvemos el problema mediante una solución de tipo algebraico obtenemos un diagrama del siguiente tipo (en la nomenclatura de Puig, (1996)[vi]):



En cambio, la solución aritmética (regla de falsa posición):

Supongamos que el número es 1. Por tanto, el triple es 3. Sumándolos obtenemos 4, que se trata de una falsa posición. Como 4·9 = 36, entonces 1·9 = 9, que es la solución correcta:



También realiza mediante este método otros problemas como: *uno compró 11 paños por 108 ducados, entre los quales ay paños que costavan a 9 ducados y otros que costavan a 12, pídese ¿quántas piezas ay de cada precio?*

Pero no abandona el método de falsa posición (en la mayoría de problemas resueltos por esta regla aparecen partes de un número):

Dame un número que juntándose su quinto y su tercio mente 6.

Dame un número que añadiéndole su mitad y tercio más 9 mente sesenta.

Uno fue a comprar carneros, y vistos los carneros que avía menester y los dineros que llevaba, halló que si comprava cada carnero a 20 reales le faltavan 10 ducados, si los comprava a 18 reales le sobravan 6 ducados, pídese: ¿quántos eran los carneros y quántos ducados llevava?

Uno hizo tres viajes, en el primero dobló el dinero que sacó de su casa y gastó 12 ducados, en el segundo tresdobló y gastó 7 ducados, en el tercero dobló lo que le avía quedado de los primeros viajes y gastó 9. Al fin de todos tres viajes hizo cuenta qué dinero tenía y hallóse con tres ducados, pídese: ¿quánto sacó de su casa?

Parece que, debido a las dificultades que tienen para manejar expresiones algebraicas, todavía recurren a diferentes métodos aritméticos para resolver problemas de mayor dificultad. Por ello, en el libro tercero enuncia un gran número de métodos: regla de tres, regla de compañía, división de rentas eclesiásticas y averiguación de algunos contratos y leyes que consisten en cuenta, pujas (*que dizen*) de rentas, regla que *dizen* de baratar o trocar: barata simple, barata compuesta y barata con tiempo, regla de aneajes, regla de una y dos falsas posiciones y finezas de oro y plata y sus aleaciones.

Posteriormente, en 1715, Andrés Puig publica una *Arithmetica Especulativa y Practica*; y *Arte de Algebra*[vii] en el que también se exponen ambos métodos: el aritmético y el algebraico. Así, en el libro cuarto (pg. 225) introduce la regla de una y dos falsas posiciones.

En el capítulo III define la falsa posición como:

> No es otra cosa que de un numero fingido hallar, y alcanzar la verdad de lo que se pide. Llamaronle falsa posicion, no porque nos enseñe cosa falsa, sino porque de numero fingido, o imaginado se alcanza la verdadera respuesta de la demanda. Dividese en simple, y en compuesta; la simple es quando con un solo numero fingido, o imaginado se alcanza lo que se pide. La compuesta, es quando para responder en alguna question se han de fingir, e imaginar dos numeros, ò mas, como adelante veràs: Advirtiendo, que todos los exemplos o demandas de la simple se pueden hazer por la compuesta, pero no al contrario. (pg. 241).

Más adelante, en el capítulo IV en el que pone ejemplos de las dos falsas posiciones, comienza con una aclaración interesante al lector pues en los anteriores textos no se hacía constar:

> De dos modos acostumbran los Arithmeticos enseñar esta regla de dos falsas posiciones, de los quales he determinado tratar primeramente el menos usado; pero como dizen el mas celebrado de los mas insignes Autores, el mas curioso, facil y breve, y de mas arte, que es la regla de tres, tomando por el primer numero, la diferencia de los dos errores o la suma de aquellos; y por segundo numero, la diferencia que huviere entre los dos numeros fingidos, y el tercero numero será el numero que mas se llegará a la verdad, y el cociente se añadirá o quitará del numero fingido que mas se allegará a la verdad, según la demanda pidiere, lo que con los exemplos siguientes entenderás.

Exemplo 1: Dame tres numeros que el segundo sea duplicado del primero menos 19, y el tercero sea triplicado del segundo más 39 y que sumado montan 1748.

Pon que el primero sea 240. Según esto el segundo serà 461, esto es el duplo del primero menos 19, y tercero serà 1422, esto es, el triplo del segundo mas 39. Y sumados estos tres numeros 240, 461 y 1422 hazen 2123. Porque avian hazer 1748, figurese que vienen 375 mas de lo que se pide. Por tanto assentarás primeramente los 240 que pusistes por el primero, y adelante los 375 que vienen de mas, diziendo, por 240. mas 375. Ya que por la primera posicion no hallamos la verdad, pongamos por segunda posicion que el primero numero de los tres que se piden sea 200, el segundo serà 381 y el tercero 1182 y sumados hazen 1763 que son 15 mas de los 1748. Por tanto assentaràs esta segunda posicion, diziendo, por 200. mas 15 lo que assentaràs debaxo de la primera posicion desta manera

Por 240. más 375
Por 200. más 15

Mira ahora la diferencia de los errores, y hallaràs sea 360. Mira assimismo la diferencia de los numeros fingidos, y hallaràs ser 40. Dì ahora por regla de tres: si 360. vienen de 40. de quantos vendran 15? (error que mas se allega à la verdad). Sigue la regla y hallaràs lo que quitaràs del numero fingido que mas se allega a la verdad que es 200 (por razon que dize mas, si dixera menos se añadieran) y quedaran 198[viii] *por el primer numero demandado, y según esto el segundo serà y el tercero 1172, y sumados hazen 1748, como se propone. (pp. 245 a 247).*

En cuanto al segundo método aritmético empleado para resolver problemas mediante las dos falsas posiciones, Puig lo introduce del siguiente modo: *Aora passarèmos adelante, declarando el otro modo mas frequentado de los Arithmeticos, y hazese multiplicando en cruz los numeros fingidos por los errores, y luego seguir las reglas del mas, y menos, que dizen, que mas, y mas con el menos, y menos se han de restar; y que el mas, y menos con el menos, y mas, se han de sumar; lo que con los siguientes exemplos entenderàs.*

Exemplo 11: Dame dos numeros, que el primero junto con 12. del segundo, la suma sea igual con la resta del segundo; y el segundo junto con 8. del primero, la suma sea duplicada de la resta del primero.[ix]

Pongamos que el primero sea 12. Serà el segundo 36 porque 12 del primero junto con 12 del segundo, la suma es igual con la resta del segundo, pero 36 del segundo juntos con 8 del primero hazen 44 y porque no avian de hazer mas del duplo de 4. resta del primero; figurese que hazen 36. mas de lo que avian de hazer: dì, pues, por 12. mas 36. Luego pon por segunda posicion que el primero sea 24 y según esto, el segundo fuere 48. en los quales se considera la primera propiedad, pero 48. juntos con 8. del primero hazen 56. y no avian de hazer mas de 32. esto es el duplo de la resta del primero quitados los 8. Figurese, pues, que vienen 24. de mas, por tanto diràs por 24. mas 24. Hecho esto multiplicaràs en cruz los numeros fingidos por los errores, poniendo las multiplicaciones adelante àzia la mano derecha, desta manera.

Por 12. más 36. ——— 864
Por 24. más 24. ——— 288

Aora porque los dos errores son mas, quitaràs la una multiplicacion de la otra, y quedarán 576. los quales partiràs por la resta, ò diferencia de los errores, que es 12. y vendrán 48. por el numero primero de los dos que se piden; y porque este primero junto con 12. del segundo hazen 60. y estos han de ser iguales à la resta del segundo, por tanto se sigue, que el segundo serà 72. esto es, 60 que le han de quedar, y 12. que ha de dar al primero; y es assi, porque 72. del segundo juntos con 8. del primero hazen 80, esto es el duplo de los 48. del primero quitados los 8. como se propone. (pp. 252-253).

En el libro quinto se establecen los principios del álgebra. Sin embargo todavía persisten los problemas en el manejo de expresiones algebraicas:

> Considerando la mucha dificultad que trae consigo la regla que en los capítulos 9 y 10 deste libro he enunciado... (pg. 407)[x].

Por tanto, se destaca el método algebraico por su carácter de regla general pero, debida a las complicaciones reseñadas, no permite resolver problemas con la familiaridad con que lo hacen los métodos aritméticos, y en particular, la regla de dos falsas posiciones.

En opinión de Usón y Ramírez (2001):

> Lo que parece muy probable es que convivieran en la época sistemas artesanales de resolución de problemas como la regla de la falsa posición (se sabe que los chinos la manejaban desde épocas muy antiguas), con los procedimientos algebraicos que empezarían a abrirse paso. La creatividad de Al-Khwarizmi, suponiendo que fuera el primero, estaría en haber optado, con acierto, por lo que consideró métodos generales de trabajo. Su libro sobre álgebra no contiene ni una sola referencia a la falsa posición que sí aparece en algunos textos italianos del Renacimiento.[xi]

En sentido similar se expresa Vallejo:

> Hemos dicho que las proporciones eran los recursos de que se valían los antiguos para suplir la falta del Análisis.[xii]

Tercer período: Resolución por métodos algebraicos

Vallejo agrupa todos los métodos aritméticos bajo el título *De la regla de tres y de otros métodos que dependen de ella*. Respecto de la regla de falsa posición dice:

Supongamos x *el número que buscamos,* a *y* b *los dos números supuestos y* α *y* β *las dos equivocaciones:*

$$x = \frac{ab - ba}{a - b} \quad \text{(dos equivocaciones positivas)}$$

$$x = \frac{ab + ba}{a + b} \quad (\text{si } b < 0, \text{es decir, una equivocación negativa})$$

$$x = \frac{ab + ba}{a + b}$$
$$(\text{si } a, b < 0, \text{es decir, dos equivocaciones negativas})$$

Como se ve, ya enuncia la regla recurriendo a expresiones algebraicas, aunque todavía necesita recurrir a la distinción del valor de x según el signo de la equivocación. Sin embargo, antes de introducir la regla de tres y sus aplicaciones ya ha explicado métodos (algebraicos) de resolución de ecuaciones (hasta cuarto grado) y sistemas. La gran importancia de la regla de falsa posición reside ahora en su potencia como *nuevo método seguro y general, que hasta el presente no se le conoce ningún vacío, límite, ni excepción para encontrar las raíces reales de las ecuaciones numéricas de todos los grados, aún en las que se resisten a cuantos medios y recursos ofrecen los tratados más sublimes de las Matemáticas, incluso los que suministra el cálculo Infinitesimal* (pg. 348).

A continuación inserta un apéndice en el que resuelve 29 ecuaciones de diferente grado (entre 5 y 80) por el método de la doble falsa posición. Además de resolver ecuaciones polinómicas también resuelve ecuaciones transcendentes como

$$\sqrt[3]{x} = 1{,}4423$$

En la actualidad, el método de falsa posición ha desaparecido del currículo.

> *Con la universalización del álgebra, la regla de falsa posición es relegada a método de aproximación numérica y desaparece del currículo escolar.*

Conclusiones

El estudio de los textos históricos muestra una evolución en el tratamiento de la regla de falsa posición, que nos permite resaltar los siguientes rasgos:

- Un primer momento en el que el interés se centra en aspectos prácticos (transacciones comerciales), de ahí que se presente la regla dentro de un conjunto de ejemplos concretos y particulares.

- Un segundo momento en el que, tras la aparición del álgebra, comienzan a combinarse ambos métodos.

Finalmente, con la universalización del álgebra, la regla de falsa posición es relegada a método de aproximación numérica y desaparece del currículo escolar.

Esta evolución no es exclusiva de la regla de falsa posición sino que puede extenderse a otros métodos aritméticos. En particular, en Gómez (1999) se expone, para las reglas de compañía, un proceso similar: *el paso de un planteamiento centrado estrictamente en la resolución de ejemplos concretos y particulares a un planteamiento centrado en la resolución de un problema general, el paso de ofrecer métodos alternativos* *de apariencia inconexa, a ofrecer un método general, bien en su versión algebraica o bien en su versión aritmética.*

Durante el desarrollo de la revisión histórica se ha indicado cuáles pueden haber sido las causas del abandono de la regla de falsa posición en beneficio del método cartesiano. Posiblemente el principal motivo sea un cambio en el enfoque metodológico: el método cartesiano resulta más natural, además de tener un carácter universal (permite resolver todo tipo de problemas), frente a la regla de falsa posición que únicamente es válida para problemas cuya solución viene dada al resolver una ecuación lineal. En la elección de un método algebraico como método idóneo para la enseñanza ha influido también el carácter reglado, y por tanto memorístico, de la regla de falsa posición.

Además, el método cartesiano permite incidir no solo en la solución del problema sino en el proceso realizado para tal fin, es decir, mejora la competencia de los alumnos en la resolución de problemas, les dota de una serie de herramientas para mejorar en este campo. Si bien en el método cartesiano hay un paso que provoca enormes dificultades a los alumnos: la traducción del problema al lenguaje simbólico, y que es innecesario si se resuelve mediante una solución aritmética (sin necesidad de plantear las correspondientes ecuaciones lineales). En mi opinión, el beneficio obtenido al no tener que traducir al lenguaje simbólico el problema no contrarresta las dificultades que el método de falsa posición presenta, algunas de ellas debidas a las dificultades que tienen los alumnos para entender el concepto de proporcionalidad entre dos magnitudes. ■

NOTAS

i GÓMEZ, B. (1999): "Tendencias metodológicas en la enseñanza de la proporcionalidad derivadas del análisis de libros antiguos. El caso de los problemas de compañías", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Vol. 2, n.º 3, 19-29.

ii GILLINGS, R. (1982): *Mathematics in the time of the pharaohs*, Dover Publ., N. York.

iii SANTCLIMENT, F. (1998): *Summa de l'art d'Aritmética, textos d'Història de la Ciència*, Eumo Ed., Barcelona, pg. 320.

iv Aquí se ve la dificultad que tenían para tratar con cantidades generales distinguiendo tres casos según los signos de dichas cantidades.

v PÉREZ DE MOYA, J. (1573): *Tratado de Mathematica en que se contienen cosas de Arithmetica, Cosmografía y Philosophia natural*, Juan Gracián, Alcalá de Henares, pp. 251-259.

vi PUIG L. (1996) *Elementos de Resolución de Problemas*, Ed. Comares, Granada.

vii PUIG, A. (1715): *Arithmetica Especulativa y Practica y Arte de Algebra*. Ed. Joseph Giralt, Barcelona. La editorial Maxtor (Valladolid) publicó una edición facsímil de dicha obra en 2001, por la cual se cita.

viii Se trata de un error pues el valor que debería aparecer es $198/3$. Este error persiste en una edición posterior de 1745.

ix En notación actual:

$$\begin{cases} x+12=y-12 \\ y+8=2(x-8) \end{cases}$$

x Capítulo 9: En el qual con regla general se enseña responder y hazer qualquier demanda ò question que por Arithmetica se puede hallar. Capítulo 10: En que se ponen exemplos, para mayor explicacion de las igualaciones en el Capítulo antecedente declaradas.

xi USÓN, C., RAMÍREZ, A. (2001): "Desde la historia: Leyendo entre líneas la historia", *SUMA* n.º 36, 117-120.

xii VALLEJO, J.M. (1841): *Tratado Elemental de Matemáticas*, 4ª ed. Tomo I, parte 1ª, que contiene la Aritmética y Álgebra, Imp. Garrayasaza, Madrid, pg. 348.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GILLINGS, R. (1982): *Mathematics in the time of the pharaohs*, Dover Publicatios, Nueva York.

GÓMEZ, B. (1999): "Tendencias metodológicas en la enseñanza de la proporcionalidad derivadas del análisis de libros antiguos. El caso de los problemas de compañías", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Vol. 2, N.º. 3, 19-29.

PÉREZ DE MOYA, J. (1573): *Tratado de Mathematica en que se contienen cosas de Arithmetica, Cosmografía y Philosophia natural*, Juan Gracián, Alcalá de Henares.

PUIG A. (1715): *Arithmetica Especulativa y Practica y Arte de Algebra*, Ed. Joseph Giralt, Barcelona.

PUIG L. (1996): *Elementos de Resolución de Problemas*, Ed. Comares, Granada.

SANTCLIMENT, F. (1998): *Summa de l'art d'Aritmética, textos d'Història de la Ciència*, Eumo Ed., Barcelona (1ª Edición: 1482).

USÓN, C., RAMÍREZ, A. (2001): "Desde la historia: Leyendo entre líneas la historia", SUMA n.º 36, 117-120.

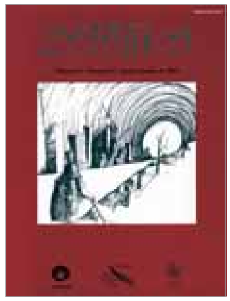
VALLEJO, J. M. (1841): *Tratado Elemental de Matemáticas*. 4ª ed. Tomo I, parte 1ª, Imp. Garrayasaza, Madrid.

Publicaciones recibidas

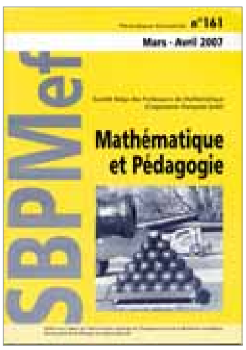
Investigação Operacional
Associação portuguesa de Investigação Operacional
Vol. 26, N.º 1, Junho 2006
ISSN: 0874-5161

Sigma
Gobierno Vasco
Departamento de Educación, Univ. e Investigación
N.º 30, Vitoria 2007
ISSN: 1131-7787

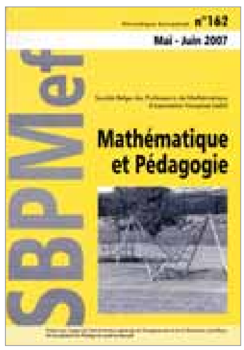
Revista Matemática Complutense
Vol. 20, Núm.2, 2007
Madrid, 2007
ISSN: 1139-1138



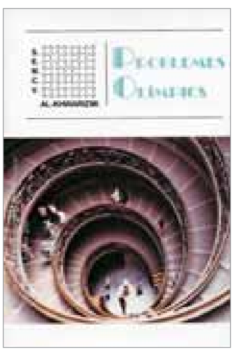
Zetetiké
Círculo de Estudio, Memória e Pesquisa em Educação Matemática
UNICAMP
Campinhas(Brazil)
Vol. 15, Núm. 27 Jan./Jun. 2007
ISSN: 0104-4877



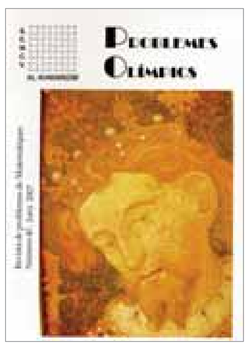
Mathématiques et Pédagogie
SBPMeF
N.º161, Mars-Avril 2007
ISSN: 0773-7378



Mathématiques et Pédagogie
SBPMeF
N.º162, Mai-Juin 2007
ISSN: 0773-7378



Problemes olímpics
SEMCV Al Khwarizmi
N.º 39, Febrer 2007
Valencia
ISSN: 1578-1771



Problemes olímpics
SEMCV Al Khwarizmi
N.º 40, Junio 2007
Valencia
ISSN: 1578-1771

SUMA 56
Noviembre 2007, pp. 63-71

Cambio climático en 4º de ESO

La utilización de herramientas informáticas permite utilizar conceptos matemáticos sencillos para describir y estudiar problemas complejos. Este artículo es una propuesta para el aula de 4º de ESO (16 años) en la que se aplican algunos contenidos matemáticos de este curso al estudio, con rigor científico, de un problema real: la existencia de un cambio climático originado por las actividades humanas (calentamiento global antropogénico). Los contenidos matemáticos empleados son: lectura e interpretación de gráficas, pendiente de una recta como medida de variación y dependencia e independencia probabilística.

Using computer tools allows the use of easy mathematical concepts to describe and analyse complex problems. This article is meant to be a proposal for a 4º ESO class (16 yrs average), in which some mathematical concepts are applied to scientifically studying a real problem: the evidence of climate change due to human actions (anthropogenic global warming). The mathematical contents envolved are: reading and intepreting graphics, slope of a straight line for variation measurement, conditional dependence and independence.

El cambio climático es, indudablemente, un tema de actualidad y una de las principales cuestiones científicas en estos momentos: ¿Se está produciendo un cambio en el clima? en caso de ser así, ¿son las actividades humanas las responsables? ¿Cuáles serán sus consecuencias?

Si los pronósticos más pesimistas son correctos, los ciudadanos del mundo quizás debamos adoptar complicadas decisiones sobre nuestro cómodo modo de vida actual para evitar esas consecuencias, y esas decisiones debamos empezar a tomarlas ya.

Por el contrario, es posible que no debamos preocuparnos tanto, y que los posibles efectos sean mucho menos graves y fáciles de corregir.

Parece un tema interesante para llevar al aula, pero lejos de las posibilidades de nuestra materia.

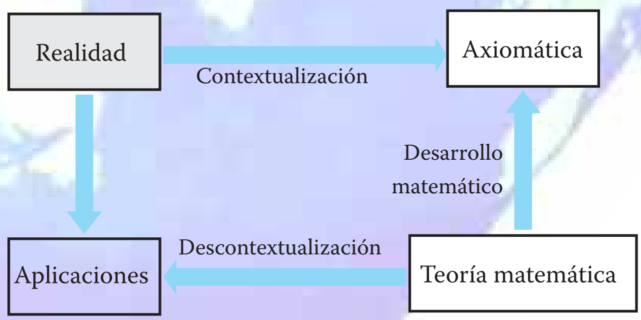
Abordar, con las limitadas herramientas de las Matemáticas de secundaria, ese tipo de cuestiones tan complejas parece una tarea imposible, máxime si queremos hacerlo de forma rigurosa.

Claro que, por otra parte, existen ordenadores, calculadoras...

¿Podemos estudiar de un modo científico y riguroso el cambio climático en secundaria?

Realmente, quizás deberíamos invertir el sentido de la pregunta: ¿Tiene sentido enseñar unas Matemáticas que no permitan estudiar de forma rigurosa esas cuestiones?

El gran matemático Sixto Ríos (1975) definía la Matemática como *el estudio de diversos modelos* y describía el proceso de elaboración de esos modelos mediante el esquema:



En secundaria, nuestros esfuerzos se centran en la enseñanza de desarrollos matemáticos ya elaborados, esencialmente

Francisco Manuel Rodríguez Mayo
IES Miguel Ángel González Estévez
Vilagarcía de Arousa. Pontevedra

algoritmos de cálculo numérico y simbólico, pero sólo de forma marginal se aborda su aplicación a problemas reales.

En mi opinión hay al menos dos aspectos que deberían tratarse con mayor profundidad:

- Abrir la posibilidad de emplear otros algoritmos mucho más potentes (TIC, calculadoras gráficas, etc) y valorar más positivamente los algoritmos desarrollados por los propios alumnos.
- Aplicar los conceptos matemáticos a situaciones reales en las que muestren su utilidad.

Son aspectos relacionados. La utilización de TIC permite centrarse en los aspectos *interpretativos* de los modelos y aplicarlos a situaciones totalmente reales.

Este artículo pretende mostrar cómo podemos llevar las Matemáticas que enseñamos un poco más allá y emplearlas en la resolución de problemas reales de forma totalmente rigurosa y científica, utilizando versiones intuitivas de conceptos aparentemente complejos.

Solo necesitaremos algunos datos accesibles en Internet y emplear algunas herramientas simples que cualquiera alumno de bachillerato o incluso de los últimos cursos de la ESO pueden comprender.

Esas herramientas matemáticas son, en este caso, la noción de recta de regresión (no su cálculo) y la dependencia e independencia de sucesos.

Rectas de regresión

En secundaria, dedicamos una gran cantidad de tiempo a enseñar la manipulación de funciones polinómicas de primer grado: dibujamos sus gráficas, calculamos los puntos de corte de esas gráficas con los ejes de coordenadas, incluso encontramos la fórmula de la función correspondiente a una tabla de valores dada (valores rigurosamente funcionales claro).

Finalmente, algunos alumnos, serán capaces de resolver esos ejercicios con cierta destreza, pero difícilmente serán capaces de aplicar esos conocimientos a situaciones diferentes a las propuestas en el aula ni comprenderán el interés de su aprendizaje.

La aplicación a situaciones reales sólo requiere un pequeño paso más. Introducir la noción de recta de regresión: es la recta que mejor se adapta a un conjunto de puntos.

De considerarlo necesario, se puede proponer un ejemplo de una tabla de valores no estrictamente funcional (peso y estatura, temperaturas en varios días anteriores...) y encontrar la recta que, a ojo, mejor se adapte a esos valores e, incluso, comparar esa recta con la calculada por un ordenador o calculadora.

Dependencia e independencia de sucesos

El concepto de independencia de sucesos es difícil de entender pero, al menos en mi comunidad, figura en el currículo de 4º de ESO y también en los libros de texto[i].

Curiosamente se estudia en situaciones más o menos complicadas de juegos con bolas o naipes pero no en situaciones reales partiendo de tablas de contingencia, mucho más interesantes y sencillas.

Una tabla de contingencia es, simplemente, una tabla de doble entrada:

	B	No B	Totales
A	n_{11}	n_{12}	$n_{2-} = n_{11} + n_{12}$
No A	n_{21}	n_{22}	$n_{2-} = n_{21} + n_{22}$
Totales	$n_{-1} = n_{11} + n_{21}$	$n_{-2} = n_{12} + n_{22}$	n

Nuestro interés será contrastar la dependencia o independencia de los sucesos A y B, comparando sus probabilidades con las que obtendríamos en caso de ser independientes.

Podemos estimar las probabilidades de cada una de las celdas por las frecuencias relativas observadas:

- La probabilidad estimada de la intersección será:

$$P(A \cap B) = \frac{n_{11}}{n}$$

- Si fuesen independientes, la probabilidad estimada sería:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{n_{1-}}{n} \cdot \frac{n_{-1}}{n}$$

Si esos valores son similares, A y B posiblemente sean independientes y no lo serán en caso contrario.

Podemos limitarnos a esa comparación o aplicar también el mismo razonamiento a las demás celdas:

- Probabilidades observadas:

	B	No B
A	$\frac{n_{11}}{n}$	$\frac{n_{12}}{n}$
No A	$\frac{n_{21}}{n}$	$\frac{n_{22}}{n}$

- Probabilidades suponiendo independencia:

	B	No B
A	$\frac{n_{1-} \cdot n_{-1}}{n^2}$	$\frac{n_{1-} \cdot n_{-2}}{n^2}$
No A	$\frac{n_{2-} \cdot n_{-1}}{n^2}$	$\frac{n_{2-} \cdot n_{-2}}{n^2}$

Como puede observarse, se trata de una versión intuitiva de la prueba Chi-cuadrado[ii]: comparamos las frecuencias relativas observadas con las teóricas en caso de independencia.

Cambio climático

El cambio es inherente al clima, nuestra preocupación es averiguar si se está produciendo un aumento global de las temperaturas debido a la actividad humana, calentamiento global antropogénico (CGA).

Podemos establecer dos etapas en nuestro estudio:

- Análisis de la situación: para el que, habitualmente, se emplean datos observacionales y datos obtenidos con modelos de simulación.
- Estudio de las posibles consecuencias en caso de que se esté produciendo.

Los datos observacionales son fundamentalmente de dos tipos: datos climáticos directos, obtenidos de mediciones en estaciones meteorológicas que se remontan, como mucho, a principios del siglo pasado y datos indirectos obtenidos, por ejemplo, en testigos de hielo en los polos que recogen datos de hace miles de años.

En los testigos de hielo se mide la concentración de CO_2 en burbujas de aire aprisionadas y las concentraciones de diferentes isótopos variables según la actividad biológica, lo que permite estimar las temperaturas.

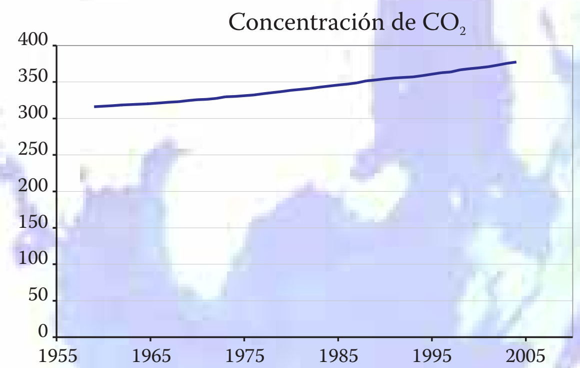
En cuanto a los modelos climáticos, consisten básicamente en simulaciones por ordenador del intercambio de calor en nuestro planeta y su eficacia está muy testada, por lo que sus conclusiones deben, al menos, tenerse en cuenta[iii].

Este es el panorama en el que nos desenvolveremos pero, curiosamente, para una primera valoración sobre la realidad del CGA, sólo necesitaremos algunos datos accesibles en Internet, algo de matemáticas y herramientas informáticas simples (hoja de cálculo).

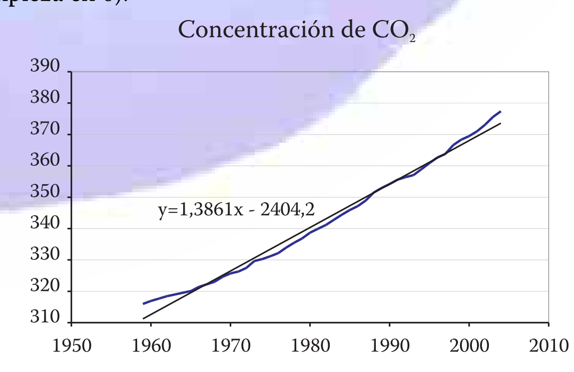
Analizando datos

Que la cantidad de CO_2 en la atmósfera está aumentando debido a las ingentes cantidades emitidas por las actividades humanas es un dato incontrovertible y que el CO_2 es un gas de efecto invernadero es también conocido y aceptado.

En la gráfica podemos ver la concentración anual media de CO_2 desde 1958, medida en partes por millón:



Añadiendo la recta de regresión[iv] podemos interpretar esos valores con mayor facilidad (se ha cambiado la escala del eje y para facilitar su lectura y se debe tener en cuenta que no empieza en 0):

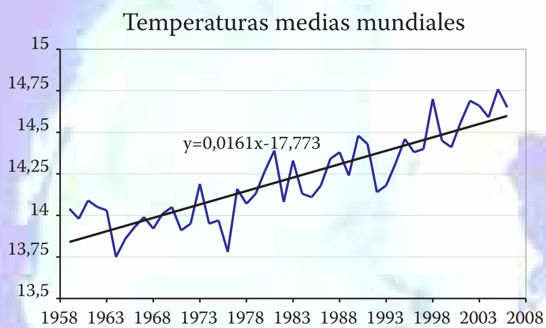


La pendiente de la recta de regresión indica el aumento anual medio, 1,39 ppm/año de CO_2. 66,5 ppm desde 1958 (un 21%).

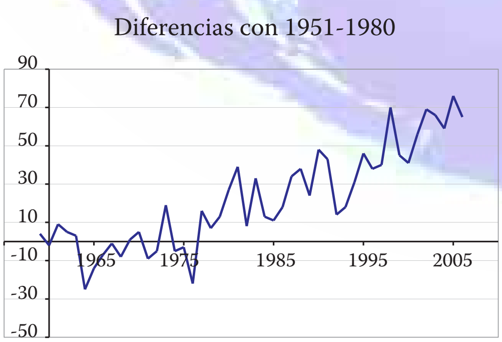
El cambio es inherente al clima, nuestra preocupación es averiguar si se está produciendo un aumento global de las temperaturas debido a la actividad humana, calentamiento global antropogénico (CGA).

También podemos apreciar que se está produciendo un aumento cada vez más rápido y que, posiblemente, se obtenga un mejor ajuste empleando una función exponencial o en parte exponencial ($y = c + a{\cdot}b^x$), pero la interpretación resulta mucho más fácil con la recta de regresión.

En la siguiente gráfica aparecen las temperaturas anuales medias calculadas en base a una serie de estaciones meteorológicas de todo el mundo y la recta de regresión correspondiente.



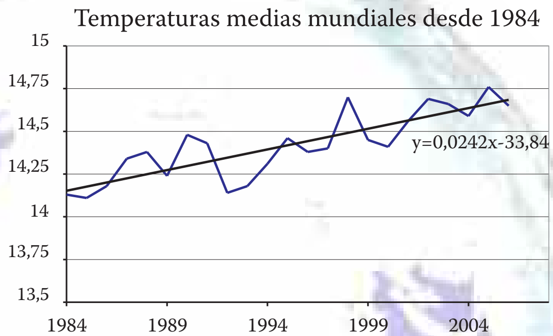
Puede observarse que la evolución de las temperaturas dista mucho de ser lineal pero sí se constata un aumento anual gradual de 0,0161 ºC, similar a los 0,15 ºC por década mencionados en el informe del IPCC.



Este gráfico, igualmente clarificador, corresponde a las diferencias entre la temperatura media anual y la media correspondiente al período 1951-1980.

En la gráfica de la concentración de CO_2 se aprecia un aumento cada vez más rápido de la concentración. ¿También se está produciendo ese aumento acelerado en las temperaturas?

Podemos comprobarlo estudiando sólo los últimos 20 años:

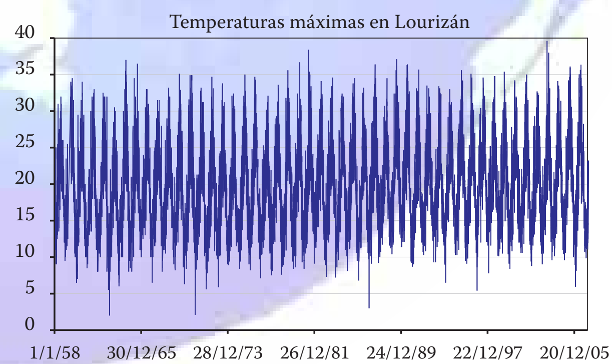


La pendiente de la recta de regresión es muy superior a la obtenida para el período 1958–2007, lo que confirma la aceleración en el aumento de las temperaturas[v].

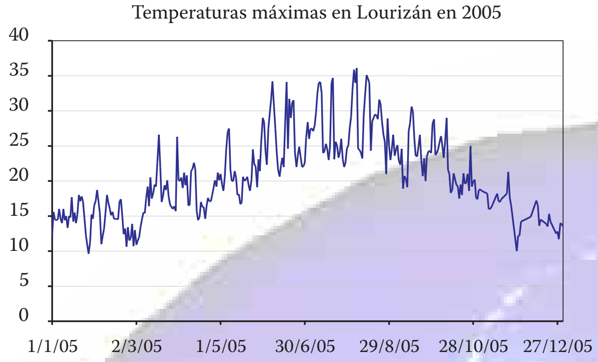
Cambio climático: ¿También aquí?

Los datos de la red de estaciones meteorológicas de Galicia permiten estudiar si también aquí se está produciendo un aumento de las temperaturas.

La gráfica recoge las temperaturas máximas diarias en Lourizán, Pontevedra (la estación meteorológica gallega que registra datos más antiguos, desde 1958)[vi]:

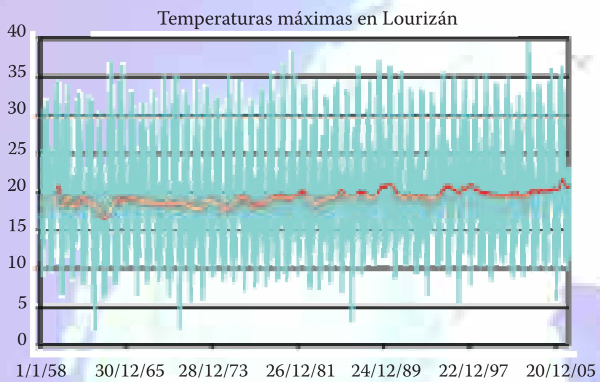


El grosor de la línea corresponde a las variaciones diarias de la temperatura y las oscilaciones a las variaciones estacionales a lo largo de un año. La gráfica de las temperaturas máximas durante 2005 permite apreciarlo con más detalle:



Estos datos forman una serie temporal y, para facilitar su interpretación, debemos eliminar las variaciones diarias y estacionales.

Uno de los métodos más habituales para hacerlo es el de medias móviles que consiste en sustituir cada uno de los datos por la media de, en este caso, los 365 días anteriores.

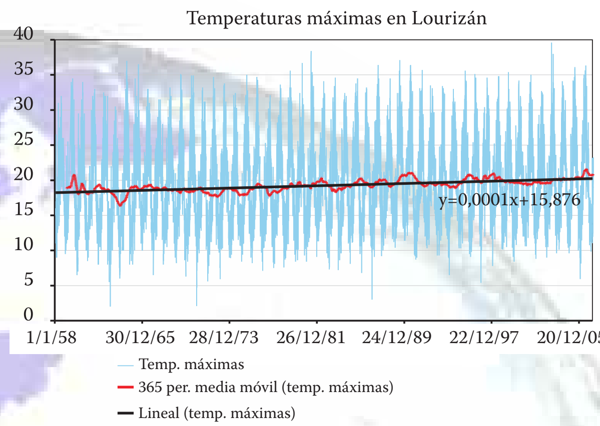


La línea de medias móviles permite comprobar que, con oscilaciones, las temperaturas máximas han aumentado en el período estudiado: hasta 1980 la línea está casi constantemente por debajo de 20º y de 1980 en adelante está por encima.

Uno de los métodos más habituales para eliminar las variaciones diarias y estacionales es el de medias móviles, que consiste en sustituir cada uno de los datos por la media de, en nuestro caso, los 365 días anteriores.

Esta línea también permite apreciar oscilaciones en las temperaturas que pueden abarcar varios años (un período con máximas bajas en 1962 – 64, por ejemplo).

Si incluimos además la recta de regresión, podemos incluso cuantificar el aumento producido.

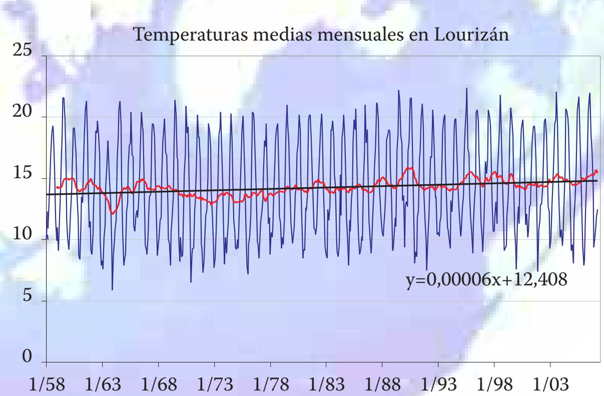


La ecuación de esa recta es:

$$y = 0{,}00011142x + 15{,}8770.$$

Su pendiente es la variación diaria media de la temperatura máxima en Lourizán desde 1958, aumenta 0,00011142 ºC/día, es decir 0,04 ºC/año, unas tres veces el aumento medio mundial calculado por el IPCC, si bien debemos destacar que se trata de temperaturas máximas y no de temperaturas medias.

Podemos repetir el estudio con las temperaturas medias mensuales:

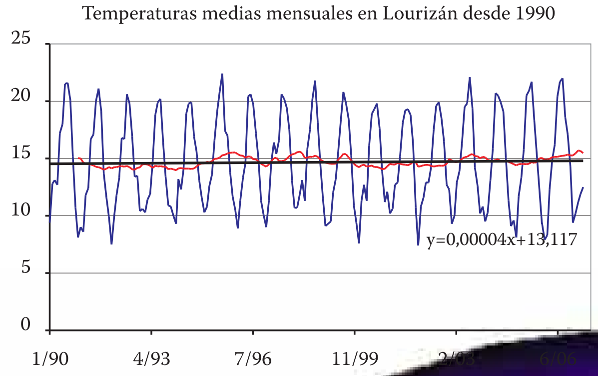


En este caso, la ecuación de la recta de regresión es:

$$y = 0{,}000061482x + 12{,}965.$$

La pendiente indica un aumento medio de 0,000615 ºC/mes, 0,0074 ºC/año, la mitad del calculado por el IPCC.

Comprobemos si, también en Lourizán, el aumento de temperaturas es cada vez más rápido:



La pendiente de la recta de regresión es ligeramente menor que la correspondiente al período 1958-2007. En Lourizán, el aumento de temperaturas no parece estar acelerándose en estos últimos años.

Primeras conclusiones

Los datos anteriores indican la existencia de un aumento de la temperatura en el planeta pero, ¿podemos afirmar que se debe a las emisiones de gases de efecto invernadero?

Establecer relaciones causa efecto en situaciones complejas no es fácil. El método seguido habitualmente por la ciencia puede aclararnos un poco las ideas.

- Se comprueba la relación estadística entre el efecto y las posibles causas. Los análisis anteriores establecen esa relación.
- Se investiga en laboratorio si existe algún mecanismo para que esos factores originen los efectos observados. Ese mecanismo también está perfectamente estudiado, es el efecto invernadero.

Parece clara la existencia de un CGA que también afecta aquí.

También se evidencia que la relación es muy compleja. Aquí solo estamos considerando una única variable, la concentración de CO_2, pero es claro que existen muchos otros gases de efecto invernadero que deberíamos tener en cuenta (algunos mucho más eficaces que el CO_2 como el metano) y muchas otras variables a considerar.

También se aprecian algunas incoherencias, en especial las diferencias entre la evolución de la concentración de CO_2 y la de las temperaturas.

Si observamos las gráficas, puede apreciarse claramente que la concentración de CO_2 parece aumentar de forma exponencial, cosa que no parece tener un reflejo en las temperaturas, algo que debe ser explicado[vii].

http://visibleearth.nasa.gov/view_rec.php?id=787

Las consecuencias

Este es un terreno mucho más resbaladizo. Se habla de aumento del nivel del mar, de acidificación de los océanos, pérdida de sincronía entre los ciclos vitales de diferentes animales y plantas, aumento de fenómenos catastróficos, ...

Unos simples cálculos nos permiten descubrir qué sucedería si todo el hielo de Groenlandia se derritiese.

Groenlandia está cubierta por una inmensa capa de hielo de 1,71 millones de Km^2 de superficie y una altura media de 2135 m. (http://www.wikipedia.org). Unos $2,85\cdot10^6$ km^3.

Calculamos la superficie del mar (3/4 de la terrestre):

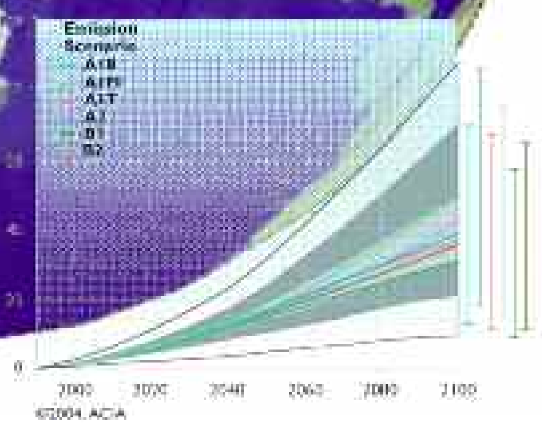
$$S = 4pr^2\frac{3}{4} = 3p6372^2 = 3,83\cdot10^8\ \text{km}^2$$

Calculamos la altura de un cuerpo con base la superficie del mar y volumen igual al del hielo de Groenlandia:

$$\text{altura} = \frac{2,85\cdot10^6}{3,83\cdot10^8} = 0,0074\ \text{km} = 7,4\ \text{m}$$

Pero esta predicción parece demasiado catastrofista. Sólo las simulaciones más pesimistas, con aumentos de temperatura de 8ºC, llegan a esta conclusión y solo después de cientos de años.

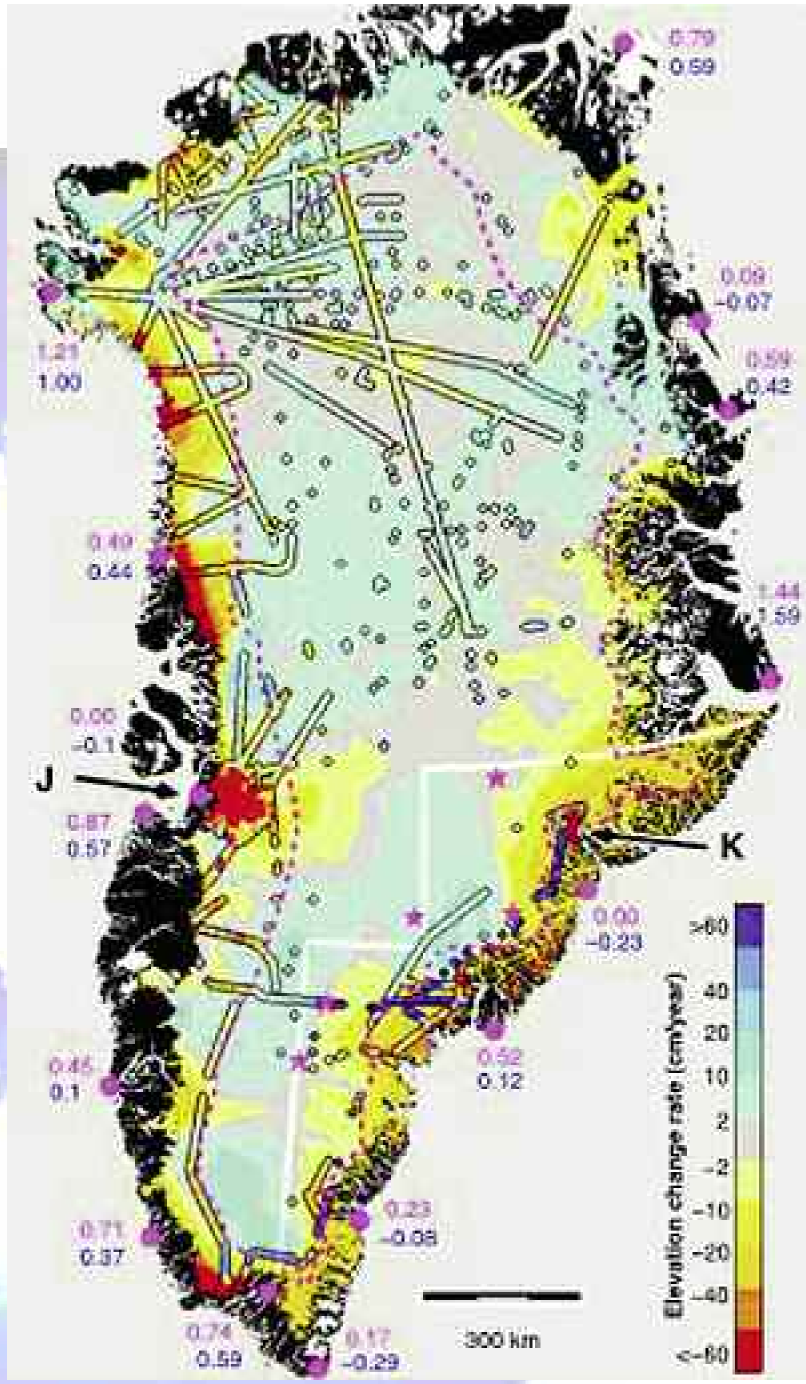
El gráfico muestra las estimaciones sobre el aumento del nivel del mar obtenidas con diferentes escenarios de emisión de CO_2.



Arctic Climate Impact Assessment (ACIA)

Los estudios sobre la evolución de la capa de hielo en Groenlandia muestran que efectivamente se está derritiendo por los bordes pero también recogen un aumento de espesor en la zona central (el mapa muestra esa evolución, las líneas indican las zonas en las que se realizan las mediciones empleando radar desde aviones) aunque sí parece estar produciéndose una disminución neta en la cantidad de hielo.

En cualquier caso, ese aumento del nivel del mar sería paulatino a lo largo de décadas o incluso siglos. Claro que, para un país como el nuestro, ligeros aumentos del nivel del mar pueden tener muy desagradables consecuencias económicas al reducirse o incluso desaparecer muchas de nuestras playas.

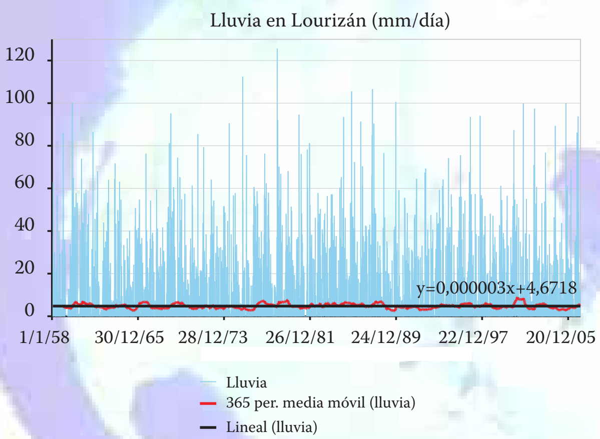


http://www.nasa.gov/vision/earth/lookingatearth/thinningice.html

Las consecuencias del CGA aquí

El aumento de fenómenos catastróficos es otro posible efecto del CGA. Lluvias torrenciales, olas de calor, vientos huracanados forman un terrible panorama. ¿Está aumentando ese tipo de fenómenos?

Podemos valorar, por ejemplo, si se aprecia un cambio significativo en el régimen de lluvias en Lourizán:



La pendiente de la recta de regresión es 0,00000309 mm/día, una variación casi insignificante de 0,001127 mm/año.

No llueve más, pero quizás lo haga de forma más concentrada. ¿Se producen más lluvias torrenciales (más de 50 mm/m²·día)?

Construimos la siguiente tabla de contingencia[viii]:

	Lluvia >50	Lluvia <50	Total
Antes 1990	120	11446	11566
Después 1990	59	6253	6312
Total	179	17878	18057

Para comprobar si existe alguna relación entre las dos variables, comparamos las probabilidades de cada celda con las que se obtendrían si suponemos que son independientes (en ese caso las probabilidades de las celdas serían el producto de la probabilidad de la fila por la de la columna en la que se encuentra):

Probabilidades observadas		
	Lluvia <50	Lluvia >50
Antes 1990	0,00671	0,64023
Después 1990	0,00330	0,34976

Probabilidades suponiendo independencia		
	Lluvia <50	Lluvia >50
Antes 1990	0,00648	0,64046
Después 1990	0,00354	0,34952

No hay diferencias significativas entre las dos tablas. No podemos afirmar que se esté produciendo un aumento en la intensidad de las precipitaciones en Lourizán.

También podemos estudiar el número de días con temperaturas máximas muy elevadas (35 ºC en Lourizán es una temperatura muy alta):

	Temp. max. >35	Temp. max. <35	Total
Antes 1990	13	11552	11565
Después 1990	16	6253	6269
Total	29	17805	17834

Probabilidades observadas		
	Temp. max. >35	Temp. max. <35
Antes 1990	0,000729	0,647751
Después 1990	0,000897	0,350622

NOTAS

i En el libro de texto que elegimos en nuestro centro para 4º ESO, se define la independencia de experimentos de forma incorrecta: *Dos o más experiencias aleatorias se llaman independientes cuando el resultado de una de ellas no depende del resultado de las demás.*

ii La prueba Chi-cuadrado es una de las más empleadas. Permite comparar las frecuencias observadas en un experimento con las que deberíamos obtener de darse una cierta hipótesis:

$$c^2 = \sum_i \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

Donde n_i frecuencias observadas y $n \cdot p_i$ frecuencias esperada.

El estadístico χ^2 sigue una distribución Chi-cuadrado, si su valor está dentro de los márgenes de confianza establecidos, se considerará que los resultados del experimento encajan con la hipótesis que se deseaba contrastar.

iii Es curioso que predecir el tiempo que hará en Galicia en los próximos diez días esté más allá de las capacidades de los modelos pero sí sea posible estimar con razonable exactitud la evolución del clima en el planeta en cientos de años.

Las razones de esa aparente contradicción son fáciles de entender, los modelos globales sólo deben tener en cuenta unas pocas variables (emisión de energía por el Sol, absorción por la atmósfera, albedo…) pero los modelos locales deben describir el comportamiento de la atmósfera y, dado que describir el comportamiento de cada átomo es imposible, se divide la atmósfera en prismas (elementos finitos) y se estudia la evolución de esos elementos (movimiento, intercambios de calor entre ellos y con el mar y la tierra, etc.). Son modelos aproximados y sus predicciones necesariamente limitadas.

iv Para calcular la recta de regresión, sólo necesitamos utilizar la correspondiente función de la hoja de cálculo (solo algunas pulsaciones del ratón).

v Este resultado contradice las afirmaciones de Antón Uriarte Cantollo en su enormemente interesante artículo *Protocolo de Kioto, opinión de un disidente*.

vi Lourizán está justo a orillas del mar, en la Ría de Pontevedra. Esta estación proporciona dos series de datos: manuales, de 1958 a 2005, y automáticos de 2001 en adelante.

Eso obliga a mezclar datos de las dos series, si queremos abarcar desde 1958 a la actualidad. Datos que no son exactamente iguales.

Para evitar esas diferencias, se comparan en el intervalo común (2001-2005) y se compensa la diferencia (0,46ºC mayor para las temperaturas de la serie automática).

Es posible que esa compensación provoque un cierto desajuste. En cualquier caso, la influencia en el análisis de esos valores no parece muy importante.

vii Esa explicación ya existe: el CO_2 absorve sólo un estrecho intervalo de longitudes de onda que, en la actualidad, ya está bastante saturado por lo que, para un cierto incremento de temperatura, se necesitan cantidades cada vez mayores de CO_2.

viii La tabla puede construirse fácilmente *a mano* si la cantidad de datos no es muy alta, lo que no es el caso (unos 18000). Las hojas de cálculo permiten construir esa tabla de forma automática pero es necesario una cierta soltura en su manejo.

Probabilidades suponiendo independencia		
	Temp. max. >35	Temp. max. <35
Antes 1990	0,001054	0,647426
Después 1990	0,000572	0,350948

En esta ocasión sí que parece apreciarse una mayor probabilidad de que se produzcan días con temperaturas mayores de 35 ºC desde el año 1990, si bien se trata de fenómenos muy poco frecuentes. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

RIOS, SIXTO (1975): *Métodos Estadísticos*, Ediciones del Castillo, Madrid.

En Internet:

Imágenes y datos de deshielo en Groenlandia, NASA: http://www.nasa.gov

Estimación del aumento del nivel del mar: http://www.acia.uaf.edu/pages/overview.html

Datos de Groenlandia: http://www.wikipedia.org

Datos meteorológicos y de emisiones de CO2:

De Lourizán, Galicia: http://www.meteogalicia.es

Mundiales, Carbon Dioxide Information Analysis Center: http://cdiac.esd.ornl.gov/home.html.

Informe del IPCC: http://www.ipcc.ch

Artículo de Antón Uriarte Cantollo: http://antonuriarte.blogspot.com

Fe de erratas de SUMA 55

Artículo: Joyas matemáticas de una caja de música

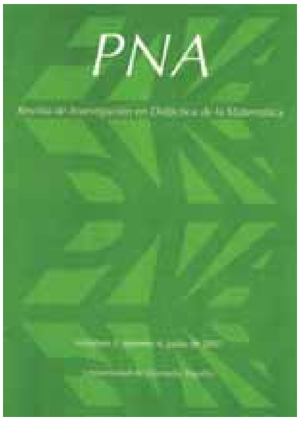
Pág. 15, columna izquierda. Donde dice:

"...nota inmediatamente anterior mediante el factor 21/12. Y..."

Debería decir:

"...nota inmediatamente anterior mediante el factor $2^{1/12}$. Y..."

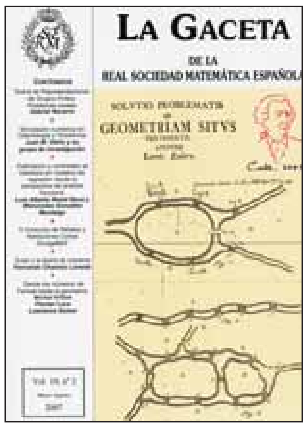
Publicaciones recibidas



PNA. Revista de Investigación en Didáctica de las Matemáticas
Universidad de Granada
Vol. 1 n.º 4, jun. 2007
ISSN 1886-1350

Paseos Matemáticos
COLECTIVO DE AGAPEMA
Colección Lemniscata
Maio 2007
pp.145

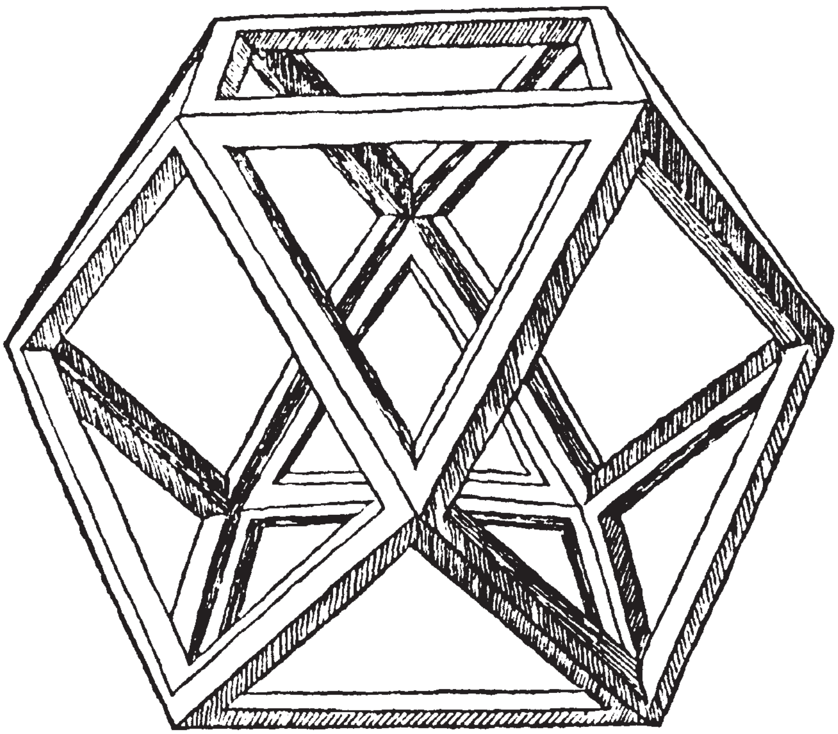
La Gaceta de la RSME
RSME
MADRID
Vol.10, n.º 1, Enero-Abril 2007
ISNN 1138-8927



La Gaceta de la RSME
RSME
MADRID
Vol.10, n.º 2, Mayo-Agosto 2007
ISNN 1138-8927

SUMA

poliedro



Dibujo de Leonardo da Vinci para *La divina proporción* de Luca Pacioli

SUMA 56
Noviembre 2007, pp. 75-80

Bebedores de Jerez

Terminamos el artículo anterior afirmando que hay que aprender a desconfiar de la historia, pero quizás la expresión no sea muy afortunada: no vemos muchos motivos para leer a Boyer (1985) con recelo; sí con la capacidad crítica –como siempre– activada, pero no con recelo. Ocurre que entre los muchos libros de divulgación que proliferan últimamente, encontramos cosas que nos dan la sensación de una vuelta atrás, hacia un tiempo en que Colerus (1972), por ejemplo, justificaba la hermosa aventura de la ciencia y de la matemática europea por lo que él llamaba, siguiendo a Spengler el espíritu fáustico del occidente moderno[1].

Fig. 1: José Ribera, *Aquímedes.*

NOTA DE LOS EDITORES: En el número 55 de SUMA, correspondiente a junio de 2007, en el artículo titulado: *En un aula cualquiera de un IES cualquiera: el día a día*, publicado dentro de esta misma sección, aparecía por error como autor Santiago Gutiérrez, cuando los autores fueron realmente Ángel Ramírez Martínez y Carlos Usón Villalba.

Ángel Ramírez Martínez
Carlos Usón Villalba
historia.suma@fespm.org

I

Hay una historia escrita y hay una historia sublimada por el arte. Comparemos los Arquímedes de las figuras 1 y 2. ¿Qué podemos opinar de la visión que el tenebrismo del barroco español ofrece del genio de Siracusa? ¿Una especie de San Jerónimo, libre por un momento de sus diabólicas tentaciones? ¿Un truhán que usurpa el papel del científico? ¿Un hombre de carne y hueso, sin idealizar, mostrando con ello la pequeñez y la grandeza del ser humano? ¡Qué diferencia con los dos Pitágoras, el clásico y el medieval, que figuraban en nuestro artículo anterior del número 55 de SUMA! Concepciones ideológicas diferentes plasmadas en pintura o escultura, reflejando su época y educando a sus contemporáneos, pero en las tres representaciones comentadas lo que interesa es el ser humano antes que el resultado de su actividad.

Fig. 2: Grabado de Arquímedes de Walter Riff

En el grabado del s. XVI se observa otra actitud. Impregnado sin duda de optimismo por la ciencia, la ilustración es ante todo didáctica y, por tanto, simplificada. La ausencia de simbolismo convierte casi a Arquímedes en un personaje de tebeo; a cambio, se da importancia al hecho científico que aparece representado –adquiere categoría de protagonista– a la derecha del barreño en el que se encuentra Arquímedes.

Pero, ciertamente, no pretendemos discutir con las ilustraciones sino con los textos. Nadie se molestará porque un libro de historia de las matemáticas esté ilustrado con el cuadro de Ribera o con el grabado de Walter Riff. Quizás sí se pudiera molestar si la ilustración fuera actual, pero esto mismo vale para los textos: no reñimos con un texto de historia escrito en el pasado sino con los actuales. Y es que una de las principales tareas de un texto de historia es conformar la opinión sobre el momento y la sociedad que vive quien escribe. La Historia no es aséptica por eso mismo: porque, en el fondo, habla del presente y para el presente. Toda la historia es *historia contemporánea* [ii].

II

Hay un magnífico libro en el que el historiador inglés E. H. Carr se pregunta *¿Qué es la historia?* [iii]. En el primer capítulo –*El historiador y los hechos*– comenta los dos extremos de oscilación del péndulo que marca la consideración que cada época tiene de lo que es la historia: el positivismo (la historia como 'ciencia objetiva': *Primero averiguad los hechos, decían los positivistas; luego deducid de ellos las conclusiones* [iv]) y la historia como *experiencia del historiador; nadie la 'hace' como no sea el historiador* [v]. Entre ambos hay puntos intermedios, pero sospechamos que el tópico empirista sigue vigente como ideología para muchas personas, de la misma manera que siguen vigentes los conceptos de tiempo y espacio absolutos de Kant y Newton.

Es el mismo tópico que habitualmente encontramos aquí y allá sobre la ciencia, que también se supone indubitable, objetiva e infalible. Hace una semana, alumnas de primero de bachillerato de ciencias sociales se sorprendían cuando Mateo, su profesor, les comentaba que hay problemas de matemáticas sin resolver. Ellas parecían creer que está todo hecho y, a fin de cuentas, si la didáctica de las matemáticas que se sigue en nuestras aulas consigue estos resultados, ¿no será razonable pensar que la didáctica de la historia –igual de lamentable, por lo general, que la de nuestra asignatura– produzca efectos parecidos? Y, si matemáticos, científicos e investigadores de todo tipo, trabajan desinteresada y objetivamente para que todo sea y funcione de la mejor forma posible, cómo se va a hacer la historia sino cierta, sin desviaciones que la alejen de cómo fueron las cosas. Estamos hablando, por supuesto, de la historia académica, la de 'bata blanca', no de revisiones interesadas. El investigador serio, científico, n*o marcado por la ideología*, se ciñe a los hechos. La ciencia, ya se sabe, no sigue esos interesados caminos: las manzanas caen según la gravedad porque el mundo es así y César pasó el Rubicón y de ahí se deducen una serie de hechos, todos ellos objetivos.

Pues bien: el caso es que Carr –en absoluto un relativista– afirma que el paso del Rubicón es un hecho histórico porque así se ha decidido que lo sea. Si este ejemplo resulta excesivo, pensad en la escasa importancia que los cronistas árabes de su época dieron a dos momentos que todavía motivan encendidos comentarios entre nosotros: Covadonga y Poitiers. Para ellos fueron más determinantes otras batallas posteriores. En palabras de Carr: *El historiador es necesariamente selectivo. La creencia en un núcleo óseo de hechos históricos existente objetivamente y con independencia de la interpretación del historiador es una falacia absurda pero dificilísima de desarraigar* [vi].

III

La primera frase del libro de David Berlinski (2006), afirma:

> La historia de las matemáticas comienza en el año 532 a. C., la fecha que señala el nacimiento del Pitágoras matemático.

Nos encontramos, otra vez, ante la reivindicación como hecho histórico de un suceso , que ya era ampliamente aceptado como tal. Ya nos ha dicho Carr que este tipo de reconocimiento *dependerá de una cuestión de interpretación*, pero lo cierto es que los tópicos fundacionales terminan alcanzando un arraigo fortísimo. Nos sorprende que reaparezca en un libro reciente, después de la difusión alcanzada durante 16 años por obras de divulgación como Gheverghese (1996) que sin duda ha tenido que conocer Berlinski. Puestos a apostar, más lo haríamos porque haya leído a este autor antes que a Carr, conocido sobre todo como historiador de la revolución rusa. En los últimos veinte años se ha producido mucha historia académica y para la divulgación rebatiendo el mito eurocentrista y ha dejado poso. Un poso realmente poco profundo pero suficiente incluso para que algún libro de texto se haya dado por enterado. De manera que pensamos que si Berlinski empieza con la reivindicación del tópico, lo hace conscientemente. Y si lo hace así, es porque no quiere que pierda fuerza.

Las tres primeras páginas de *Ascenso infinito* testimonian hasta qué punto ese empeño del autor es consciente. La segunda frase del libro afirma que Pitágoras había viajado a Egipto donde '*aprendió número y medida de los egipcios y quedó asombrado de la sabiduría de los sacerdotes*'[vii].

Una de las principales tareas de un texto de historia es conformar la opinión sobre el momento y la sociedad que vive quien escribe. La Historia no es aséptica por eso mismo: porque, en el fondo, habla del presente y para el presente. Toda la historia es historia contemporánea.

Hemos leído las dos primeras frases juntas a algún amigo poco ducho en historia de las matemáticas: un ligero encogimiento de hombros ante nuestra pausa al terminar la primera –*bueno, eso ya se sabía*– y una fuerte sorpresa después de la segunda: *pero, entonces, ¿dónde empezaron?, ¿En Egipto o en Grecia?* Ciertamente nuestro amigo desconoce que, en nuestro gremio, aunque ya sabemos que los egipcios sabían, sabemos también que no enfocaban las cosas "como es debido"; quizás Berlinski junta las dos frases sin dificultad a causa de esas cosas que sabemos quienes estamos en el mundo de las matemáticas. En cualquier caso, estas tres primeras páginas son una excelente antología de tópicos de todo tipo. Aquí va un listado.

1) Vamos al párrafo segundo: *Hasta mediados del siglo XX no requería demasiado esfuerzo defender que en las matemáticas, como en casi todo lo demás, los griegos fueron los primeros.*
¿Qué quiere decir *todo lo demás*? ¿El derecho, la poesía, la física, la tecnología…? Parece que, hasta mediados del siglo XX parecía fácil defender que en estos campos no fueron los primeros… Afortunadamente, hay quienes hilan más fino y han mostrado que en Grecia hubo, por ejemplo, ciencia aplicada (Gille (1985)). Es que lo contrario… ¡sería tan raro!

2) *Llevados por su amor a las togas, los clasicistas, (…) consideraban con naturalidad a 'los griegos como los colegas de otra universidad'.*
Leída la frase, la primera reacción fue agradecer a la Naturaleza por habernos dado a los empiristas. En realidad, es una muy mala variante de una observación de Littlewood a Hardy[viii] .

3) Pero se investigó en el s. XX la historia del Oriente Próximo y resultó que había *una anterior a*. Una historia previa a la historia clásica. Incluso, *las muescas de hachas neolíticas parecen sugerir que (…) ya los hombres de las cavernas, con sus torsos peludos cubiertos de pieles malolientes...*
¿Suponemos, implícitamente que los clasicistas y las togas no eran –no son– malolientes? La verdad es que no nos habíamos planteado cómo olería Euclides… ¡Nos chirrían estas anécdotas inventadas! Pitágoras describía círculos en el aire *denso por el humo* con sus *manos venosas*, etc.

4) *¿Y por qué no? Como el propio lenguaje, las matemáticas son un legado de la raza.*
¿Y por qué no *las matemáticas son un legado de la evolución*, o de la 'especie'? ¿Por qué recurre a esa palabra, *raza*? ¿Qué quiere transmitir con ella? ¿Está avalando con esta frase un cierto elitismo corporativo? Clasicistas y togados se dedican a las matemáticas, aunque procedan, *¿por qué no?*, ¡de la raza! Por cierto, ¿de dónde podrían provenir? ¿De los dioses? El Prometeo de Esquilo afirma haber sido él quien descubrió los números a los humanos…

5) Párrafo tercero (sólo hemos avanzado una página en el libro): *Nos encontramos unos siglos antes del nacimiento de Cristo. Los griegos están a punto de entrar en todos los caminos de la cultura. Muestran todos los indicios de conocer todo y haberlo conocido siempre.*
Resultan desesperantes estos juegos de palabras dirigidos a rebatir *elegantemente* cosas que hoy sabemos, como la deuda del pensamiento jónico con Oriente Medio, la explosión creativa en Alejandría como resultado de un cruce de tres culturas...

6) *Sin embargo, los babilonios ya poseían un cuerpo notablemente sofisticado de conocimientos matemáticos.*
¡Este 'sin embargo' es absolutamente significativo! ¿Por qué 'sin embargo'? ¿Hace Berlinski su historia a la contra de alguien? ¿Escribe para dirimir una disputa? ¿Lo fundamental de la historia de la ciencia es determinar primacías? ¿Pasa algo porque 'otros' –aunque no fueran 'togados'– hubieran tenido también buena cabeza? ¿Tanto complica eso la historia?

7) Más aún: la inteligencia de estos babilonios *era portentosa.* Pero eso no evita que este primer apartado del primer capítulo se cierre con esta rotunda afirmación: *pero aquellos clasicistas que saboreaban sorbos de jerez en las salas del tiempo siempre han tenido razón. Los griegos estuvieron allí desde los albores.*

Volvamos a Carr: *En general, puede decirse que el historiador encontrará la clase de hechos que busca. Historiar significa interpretar.* La elección de Grecia como principio es un hecho histórico establecido como tal desde muy antiguo. Ya los propios griegos se ocuparon de ello: *Desde la constitución del espíritu griego europeo* (se refiere a Hesíodo)*, encontramos un punto de ruptura en el que el mito griego decide alejarse de sus fuentes mesopotámica y mediterránea para constituir una 'autoctonía' europea y nacional.*[ix]. La decisión de mantener ese hecho indiscutido después de 'los incordios' al tópico que el s. XX ha podido producir, sólo es concebible en personas cultivadas –bebedores de jerez, universitarios de Princeton– conocedoras sin duda de las últimas publicaciones, desde el empeño ideológico o desde un fuerte autismo corporativo. Y ambas cosas se retroalimentan.

IV

Berlinski repite el mismo esquema en el capítulo tercero que empieza, de nuevo, con otra declaración solemne: *Todos los méritos para los griegos. Todos los méritos y después sólo silencio. (…) Los romanos no poseían el don de las matemáticas,* antes de despachar en página y media las aportaciones matemáticas del Imperio musulmán.

Hoy resulta imposible, después de los trabajos de Youschkevitch, Djebbar, o Rashed, obviar la aportación de los matemáticos del mundo islámico, así que los cita, resalta a tres de ellos y afirma que la gran mayoría de los escritos científicos árabes permanecen sin estudiar[x], pero concluye que, de todas maneras, eso no cambiaría mucho las cosas: *Sean cuales sean las joyas que los estudiosos desconocen aún, el hecho es que para estudiar* hoy *la historia de las matemáticas, los historiadores pueden saltar desde el final de la época griega hasta el principio de la era moderna sin que su conciencia científica se inmute.*

Realmente se guarda un poco las espaldas –subraya la palabra 'hoy'– pero remata, como en el primer capítulo, rompiendo cualquier atisbo de ambigüedad: *Sobra decir que, estando ellos prestos a saltar, ¿por qué habríamos de dudar nosotros?*

De nuevo la historia con agujeros. Las matemáticas son como el Guadiana. Aparecen y se esconden en función de lo que nos apetezca o no ver o que sea visto. Y esto es así, no sólo por eurocentrismo sino por la propia concepción de la historia y de las matemáticas, puestas al servicio de un Jardín del Edén teórico en el que los conceptos son los que definen el orden y dictaminan cuál es la línea que debió seguir la historia escrita. Los matemáticos islámicos –como no podía ser de otra manera– realizaron la tarea que su tiempo les encargó hacer; si esa tarea se considera de orden menor desde el punto de vista de la construcción conceptual que las matemáticas se dieron como canónica en la mitad del s. XX, debe desaparecer de los textos de historia. *Fueron audaces* –afirma Berlinski, siempre cortés– pero ya se ve que su atención estuvo mal enfocada. ¿A quién se le ocurre dedicarse a la trigonometría? ¿Qué fallo de prospectiva les impidió adivinar que Dieudonné anatemizaría todo eso, mil años más tarde? ¿Qué sentido tiene descubrir el teorema de los senos en un triángulo esférico? ¿Que era necesario para la astronomía, para la vida? Ah, ¿pero es que las matemáticas tienen algo que ver con la vida? ¿No ha quedado claro que provienen de un sistema arbitrario y lógicamente coherente de axiomas? Nada hombre, nada, queda usted fuera de la historia…

El eurocentrismo se combina así con la visión (estructuralista) de las matemáticas para decidir cuándo salta el historiador y qué es lo que se salta. Ciertamente, es legítima y puede ser útil una historia conceptual de las matemáticas, pero a condición de que se advierta. El mito empirista de la objetividad de los hechos hace que quien lee un texto de divulgación tienda a dar por objetivo lo que se le ofrece, y más si concierne a una materia como ésta que se supone la cima de la objetividad.

Por lo demás, tampoco Euclides se salva de las críticas. Sus definiciones *son decepcionantes. Los lógicos critican que estas definiciones son o bien circulares, o llevan a un desafortunado retorno.* Ni siquiera al admirado padre de lo que pomposamente se denomina 'método deductivo'[xi] se le perdona no haber hecho las cosas totalmente bien desde el principio. Y, obsérvese con cuidado la frase de Berlinski: son los 'lógicos', no los historiadores –en el sentido social de la expresión– o los matemáticos, quienes forman el tribunal inquisitorial. No nos da la impresión, sin embargo, de que Berlinski hable por su boca. Se nos antoja más bien un mero repetidor de cánones oficiales.

V

Antes de concluir, queremos referirnos a alguno de los tópicos que acompañan a toda esta parafernalia histórica y a los que, por supuesto, también recurre Berlinski.

En primer lugar, Ramanujan o, mejor dicho, Hardy. No tenemos nada contra el matemático indio. Al revés: su figura nos mueve al cariño. Interpretamos de forma natural su famosa referencia a las propiedades del número 1729 –mientras estaba tendido en el lecho de la enfermedad– como una humana reacción para alejar mentalmente lo inevitable. Que los divulgadores hayan hecho de esa anécdota una muestra de pertenencia a un mundo de privilegiados mentales roza nos parece excesivo, sobre todo por el halo con el que la recubren. Le cuadra mucho al misántropo Hardy que, desde luego, no nos parece un buen ejemplo para adolescentes (a los que sacamos a relucir porque esas ocurrencias figuran a veces en textos dirigidos a ellos) Seguramente, todos recordamos observaciones hechas con mucha más sensibilidad humanística, en momentos semejantes, por otros personajes históricos.

¿Qué tiene este gremio? ¿Cómo puede seguir manteniendo los tópicos que mantiene? ¿Qué sentido tiene seguir recurriendo a la comparación entre las glorias de Esquilo y Arquímedes que hace Hardy[xii]? Recordemos la cita exacta: *Se recordará a Arquímedes aún cuando Esquilo haya sido olvidado, pues los lenguajes perecen mientras que las ideas matemáticas no mueren nunca*. Pensadla un poco, por favor: los ‘lenguajes’ perecen … ¿Qué significa esa palabra: ‘lenguajes’? ¿La tragedia de Prometeo Encadenado puede ser despachada tan alegremente? Es verdad que desde el positivismo no hay contenido en un mito … pero ¿qué tremendo alejamiento de la vida, o qué incapacidad para vivirla desde dentro, sin recluirse en un refugio ficticio, son necesarios para menospreciar el lamento de Prometeo?

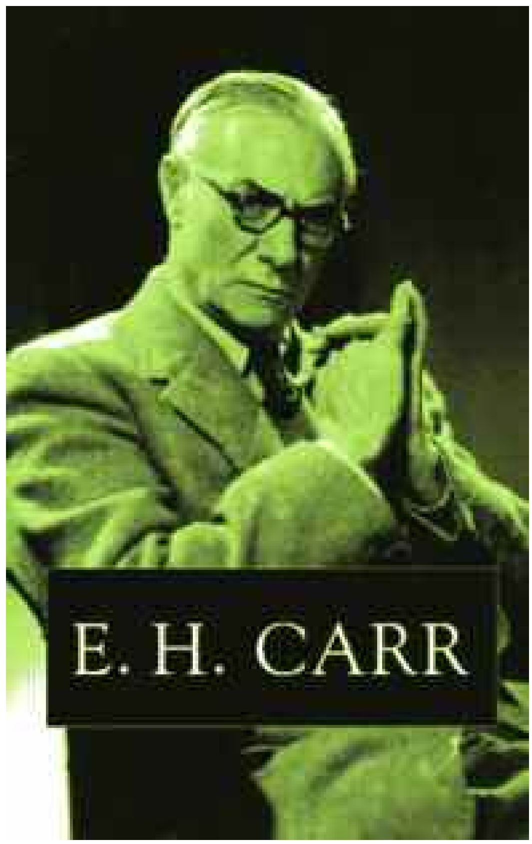
> (…) escuchad, en cambio, las desdichas de los hombres y cómo torné en seres conscientes, aptos para pensar, a quienes eran antes como niños (…)[xiii]

Nos decía un amigo hace poco, en un momento de exaltación, que los matemáticos son tontos. Ciertamente, admitimos sin problema que la reducción académica de las matemáticas al cálculo, las estupidiza. Ciertamente también, toda esta mitología gremial no puede sino sorprender a una persona que la observe desde fuera con lucidez[xiv]. Pero, al final, terminamos tomando en serio la hiriente observación de nuestro amigo al toparnos con otro párrafo de Berlinski. Como ejemplo de la *portentosa inteligencia* de los babilonios, ofrece el enunciado de un problema:

> He encontrado una piedra (dice el escriba) y no la he pesado. Entonces calculé seis veces su peso, añadí dos gin y añadí un tercio de un séptimo, multiplicando por 22. Lo pesé. El resultado fue un mana. ¿Cuál era el peso original de la piedra.

Sin comentarios. La sorpresa de las dos personas profanas a las que se lo hemos leído ha sido mayúscula: “Pero, si podía pesar, ¿por qué no lo hizo desde el principio?”. Sí, ya sabemos que se fuerza la naturalidad para componer un ejercicio, pero entonces, ¿de qué nos ocupamos?

Carr comenta los dos extremos de oscilación del péndulo que marca la consideración que cada época tiene de lo que es la historia: el positivismo Primero averiguad los hechos, *decían los positivistas;* luego deducid de ellos las conclusiones *y la historia como* experiencia del historiador; nadie la ‘hace’ como no sea el historiador.



Están saliendo estos días a los kioscos, en entregas semanales, libros clásicos de pasatiempos matemáticos. ¿Cómo no entusiasmarse ante, por ejemplo, las conversaciones de Alicia con el León y el Unicornio o con los dos hermanos gemelos en el Bosque del Olvido, en el libro de Smullyan[xv]? Pero también, al cabo de un rato… ¡qué agobio ante tanto juego mental alejado de la más cotidiana realidad!

VI

En fin, paramos aquí nuestros comentarios destructivos. Gracias a unos párrafos –sólo unos párrafos– de Berlinski hemos cumplido nuestro último compromiso con la sección *Desde la Historia* de SUMA. En el caso improbable de que nos leyera, imaginamos que –profesor en Princeton, Paris y pariente lejano de Mandelbrot– no nos tomará muy en serio. Lo dejamos con Borges –como era de esperar, empieza su libro con una cita de Borges– y, suponemos, bebiendo un jerez. Nosotros nos vamos con Cortázar al bar de la esquina a tomar un aperital con soda.

> En vista de que la Tota le ha pedido que baje a comprar una caja de fósforos, Lucas sale en piyama porque la canícula impera en la metrópoli, y se constituye en el café del gordo Muzzio donde antes de comprar los fósforos decide mandarse un aperital con soda.[xvi] ■

NOTAS

i Una crítica cariñosa la que hacemos a Colerus. En aquel entonces nos abrió muchas ventanas.

ii B. Croce citado por Carr (1961).

iii La décima edición en Seix Barral lleva fecha de 1981. La primera edición en inglés es de 1961. Todas la citas de Carr están cogidas de este libro.

iv Carr.

v M. Oakeshott, citado por Carr.

vi Carr.

vii La frase viene entrecomillada en el libro, pero Berlinski no dice de dónde ha salido. Da la impresión de que la pone en boca de Pitágoras.

viii Hardy (1981): "Como Littlewood me dijo en cierta ocasión, los griegos no fueron hábiles colegiales o "candidatos a eruditos", sino "miembros de otra universidad"". Esta versión, de más calidad que la de Berlinski, también nos parece discutible.

ix Seddik (2005). ¿Qué palabra emplear para 'autochtonie' ? Hemos recurrido a la traducción literal, aunque sea poco elegante y que, de todas formas, parece que es legítima en castellano.

x En las referencias bibliográficas de la bonita obra de divulgación de Jacquart (2005), se recogen 17 traducciones de textos científicos sólo al francés. Y, la lista, obviamente, es una pequeña selección. Sin duda, hay muchos textos sin estudiar, pero sí se han estudiado los suficientes como para que las conclusiones que extrae Berlinski no se sostengan.

xi Expresión ambigua, porque la deducción euclídea es un método para ordenar la demostración pero no para producir conocimiento.

xii Hardy (1981)

xiii *Prometeo encadenado*, en Esquilo (1993)

xiv Como toda mitología gremial, desde luego. El problema, el atontamiento, se produce por la incapacidad para escaparse de ella desde dentro.

xv Smullyan: *¿Cómo se llama este libro?*

xvi Cortázar (2000). Es el comienzo del cuento *Lucas. Sus compras*. El cuento, claro, lleva rodando desde 1979.

REFERENCIAS BIBLIOGÁFICAS

BERLINSKI, David (2006): *Ascenso infinito. Breve historia de las matemáticas.* Mondadori

BOYER, Carl B. (1985): *Historia de la matemática*. Alianza Universidad. Madrid.

CARR, E. H. (1981): *¿Qué es la historia?* Seix Barral. Barcelona.

COLERUS, Egmont (1972): *Breve historia de las matemáticas.* Doncel. Madrid.

CORTÁZAR, Julio (2000): *Un tal Lucas*. Santillana. Madrid.

ESQUILO (1993): Tragedias completas, Planeta, Barcelona.

GHEVERGHESE JOSEPH, G. (1996): *La cresta del pavo real.* Pirámide, Madrid.

GILLE, Bertrand (1985): *La cultura técnica en Grecia,* Ed. Granica. Barcelona.

HARDY, G. H. (1981): *Autojustificación de un matemático*. Ariel. Barcelona.

JACQUART, Danielle (2005): *L´épopée de la science arabe.* Gallimard. Paris.

SEDDIK, Youssef (2005): *¿Qui sont les barbares ?* Ed. l´Aube. Paris.

SMULLYAN, R.: *¿Cómo se llama este libro?*

SUMA 56
Noviembre 2007, pp. 81-85

Estrella de seis puntas

Ya en el número 46 de la revista SUMA apareció en esta sección un artículo dedicado a papiroflexia. En aquel momento hablamos sobre lo interesante y atractivo que resulta trabajar con papel con los alumnos. Existen muchas posibilidades de ver elementos del curriculo doblando papel y repasar bastantes conceptos de una forma amena y entretenida.

Retomando la idea que planteó nuestro amigo Antonio Ledesma en el número 24 de la revista Epsilon, hoy queremos presentar la construcción de un polígono estrellado de seis puntas. Hemos de partir de un triángulo equilátero, pero como normalmente no tenemos ya preparado ese polígono, vamos a ver cómo conseguirlo a partir de una hoja en un papel cualquiera.

Hemos preparado una hoja especial con unos textos descompuestos de forma que al construir la estrella aparezcan una serie de frases, en este caso relacionadas con la revista SUMA. La mayor dificultad es colocar adecuadamente las letras e imágenes para que al final queden colocadas en el sitio adecuado. Como es de suponer la forma de hacerlo es utilizar un heurístico típico de la resolución de problemas, partir de la solución, colocar las frases adecuadas y después deshacer el camino para ver cómo quedan.

Pero si no queremos tomarnos el trabajo de particularizar nuestra estrella podemos hacerlo con cualquier hoja.

Partimos de una hoja A4 sobre la que hemos impreso algunas imágenes y algún texto (como se ve en la figura 1). Para que nos quede exacta la disposición de estos textos debemos recortar la hoja por el marco rectangular (ver figura 2).

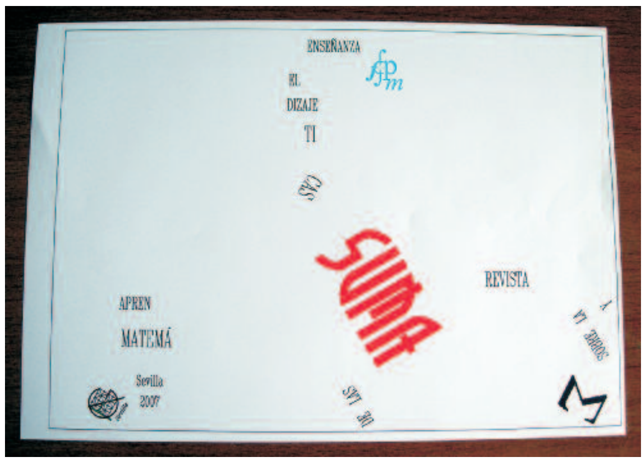


Figura 1

Grupo Alquerque de Sevilla

Constituido por:
Juan Antonio Hans Martín. *CC Santa María de los Reyes.*
José Muñoz Santonja. *IES Macarena.*
Antonio Fernández-Aliseda Redondo. *IES Camas.*
juegos.suma@fespm.org

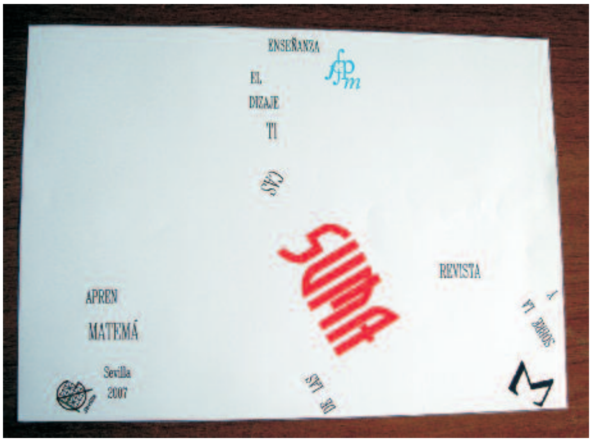


Figura 2

Doblamos por la mitad a lo largo de la hoja (figura 3). Hasta conseguir la estrella, todos los dobleces deben hacerse quedando las letras fuera del doblez.

Figura 3

Se vuelve a abrir la hoja y se da la vuelta. A continuación doblamos la hoja desde el vértice inferior izquierdo (de la cara blanca) haciendo coincidir el vértice superior izquierdo con el doblez que hemos obtenido en el paso anterior (ver figura 4).

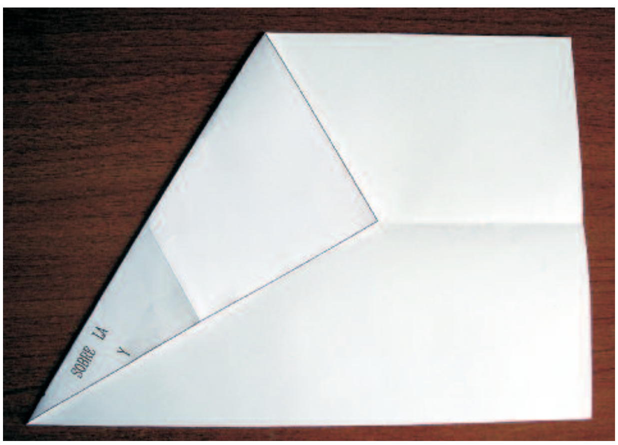


Figura 4

Sobre el trozo de lado superior que llega hasta la línea divisoria inicial, doblamos el resto de la parte superior haciendo coincidir el trozo de lado superior de la hoja que estaba sin doblar con la diagonal que nos ha aparecido en el doblez anterior (ver figura 5).

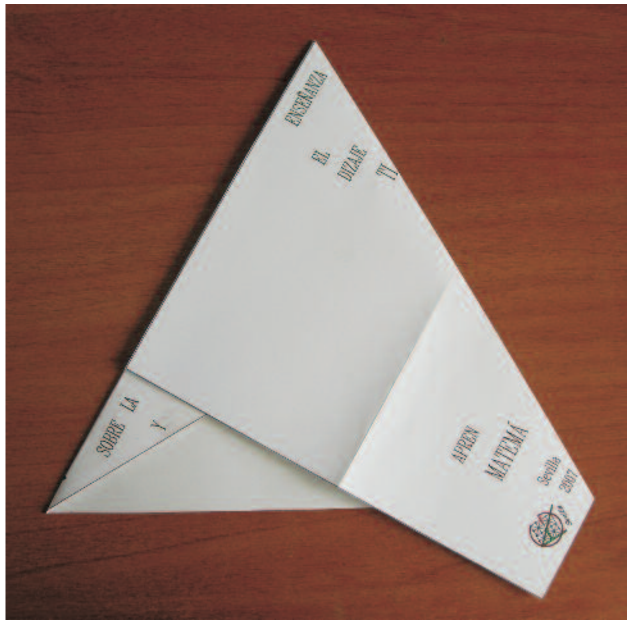


Figura 5

Es fácil comprobar que el ángulo superior que hemos obtenido es de 60° pues divide al lado superior del rectángulo (ángulo de 180°) en tres partes iguales (figura 6).

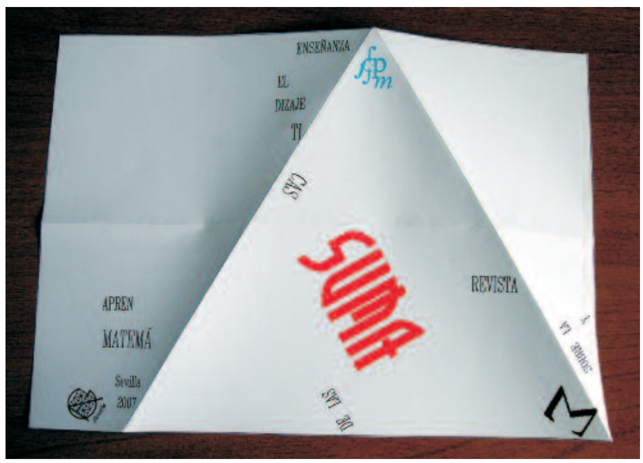


Figura 6

Por último, el trozo de papel que sobra por abajo en la figura 5 se dobla siguiendo el lado inferior del rectángulo original y obtenemos un triángulo (figura 7). Como el último ángulo que hemos conseguido es de 60°, lo que es fácil de ver, el triángulo es equilátero.

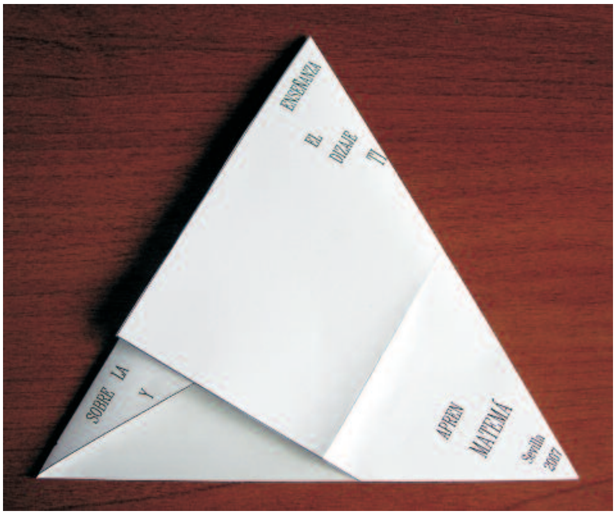


Figura 7

A continuación (o partiendo desde aquí, si disponemos inicialmente de un triángulo equilátero). Doblamos uno de los lados, haciendo coincidir los dos vértices. De esta forma se obtiene una línea que pasa por el vértice opuesto (figura 8).
Dado que estamos en un triángulo equilátero, en esta línea coinciden la altura, la mediatriz y la mediana del lado, así como la bisectriz del ángulo opuesto al lado.

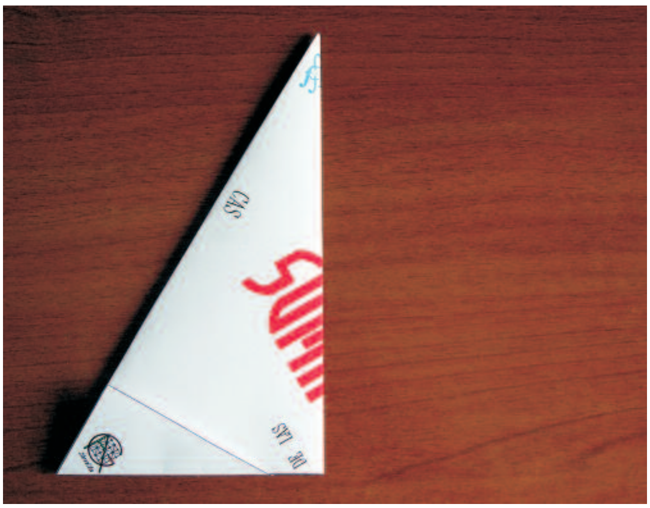


Figura 8

Se realiza el mismo doblez con los otros lados y obtenemos el punto central del triángulo, ya que por las propiedades de las rectas notables las tres líneas deben coincidir en un punto como muestra la figura 9 (que puede comprobarse mediante doblado que es el ortocentro, circuncentro, baricentro e incentro).

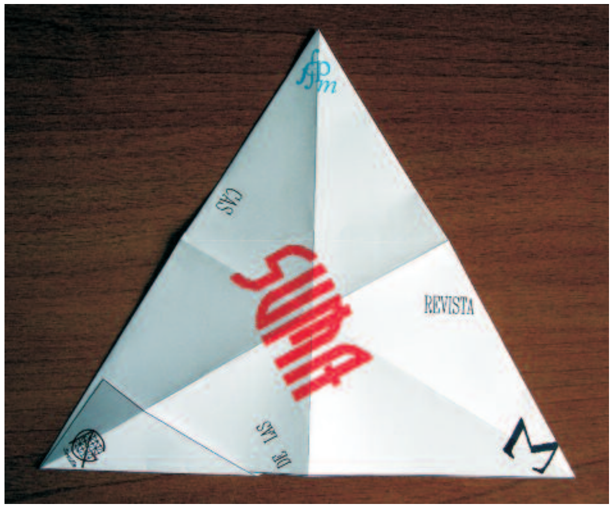


Figura 9

El siguiente paso es doblar un vértice del triángulo (este doblez es opuesto en sentido a los realizados anteriormente) haciéndolo coincidir con el punto central que nos ha determinado los dobleces anteriores (ver figura 10).

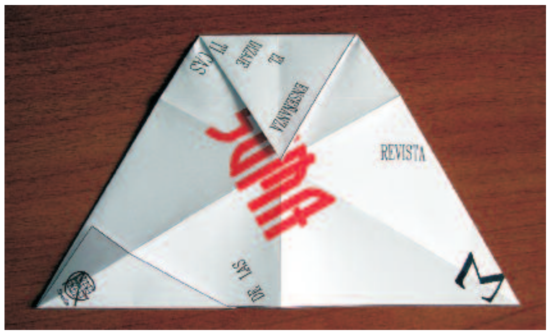


Figura 10

Al realizar lo mismo con los otros dos vértices conseguimos obtener un hexágono regular (figura 11).

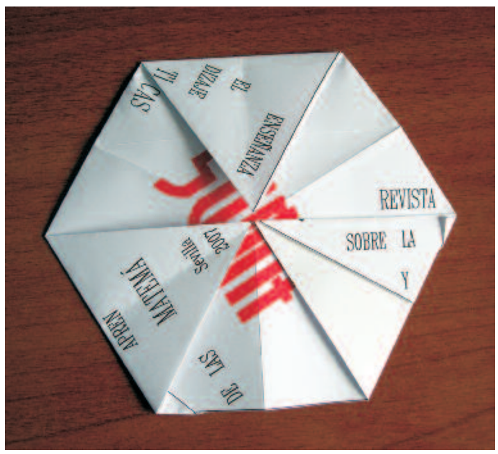


Figura 11

Para la última parte de la construcción, deshacemos los dobleces que han dado lugar al hexágono.

Damos la vuelta a la hoja (observándola por tanto por donde no aparece la palabra SUMA en rojo) y a continuación llevamos un vértice al punto medio del lado opuesto (figura 12).

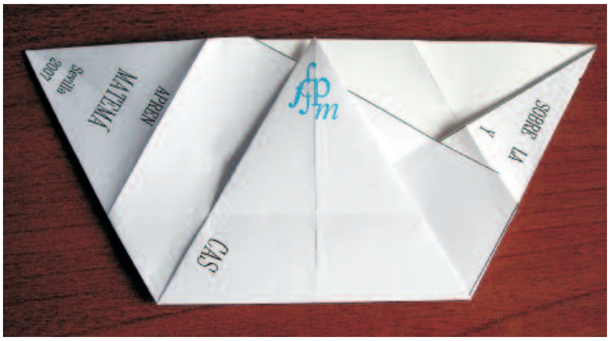


Figura 12

Sobre el doblez obtenido al realizar el hexágono (según vimos en la figura 11), doblamos hacia atrás el vértice (como en la figura 13).

El doblez del hexágono debe estar a la misma altura que el punto central del triángulo, pues no olvidemos que es el baricentro, y por tanto está a una tercera parte del lado y a dos tercios del vértice.

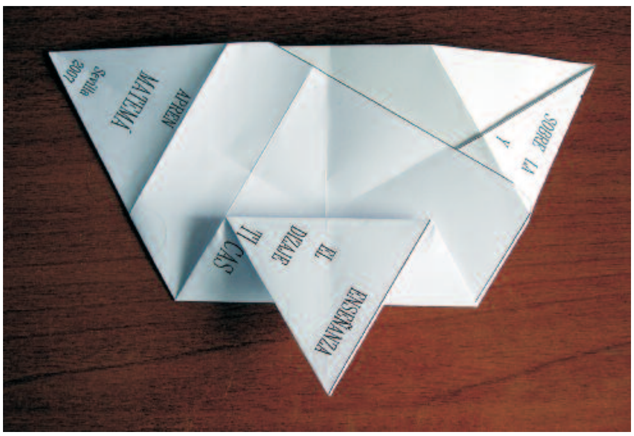


Figura 13

A continuación realizamos un doblez igual en otro vértice, de forma que quede por encima del que hicimos en el primer vértice (figura 14).

Y para acabar doblamos el tercer vértice. Para que quede sujeta la figura introducimos uno de los extremos del último doblez debajo del primero (figura 15).

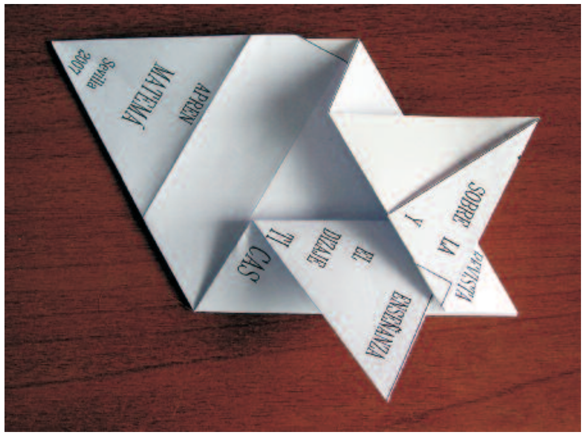


Figura 14

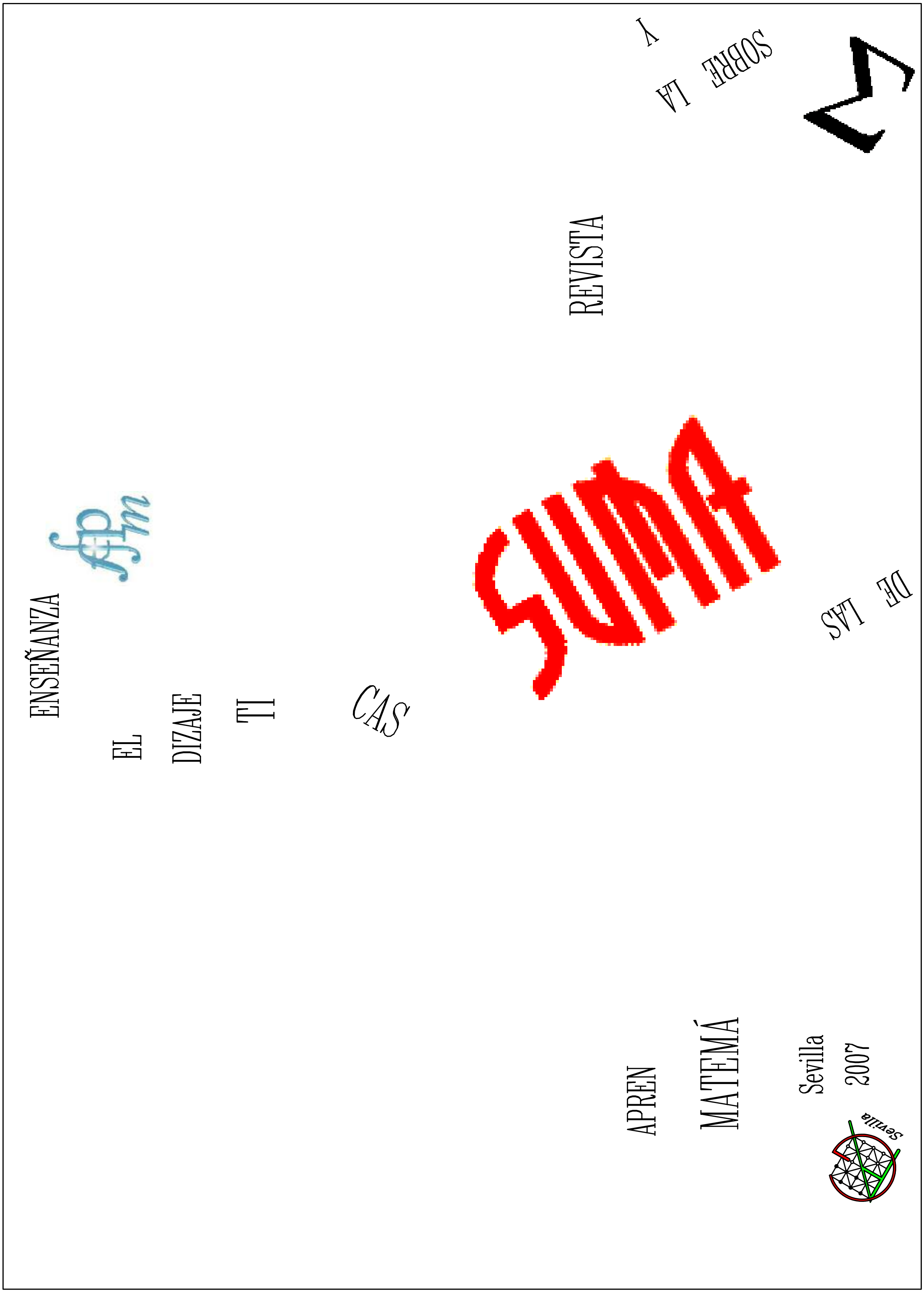
Figura 15

Ya hemos conseguido el polígono estrellado de seis puntas.

En la página siguiente tenéis la hoja que podéis fotocopiar, recortar y doblar para obtener la estrella anterior. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

LEDESMA, A. (1992): “Geometría con un folio”, *Épsilon* n.º 24, pp. 51-68.


REVISTA
SOBRE LA
Y
DE LAS
ENSEÑANZA
EL
DIZAJE
TI
CAS
APREN
MATEMÁ
Sevilla
2007

X EDICIÓN DE LOS CURSOS THALES-CICA a través de Internet

La Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES y el Centro de Informática Científica de Andalucía convocan los siguientes cursos de formación a distancia:

Grupo A. Herramientas informáticas de apoyo a la docencia:

- Elaboración de contenidos Web interactivos para la enseñanza.
- Guadalinex: Introducción al uso de las TIC en el aula.
- Java para programadores.
- PHP como herramienta para la enseñanza.
- Curso de diseño Web accesible con XHTML y CSS.
- Todo Openoffice.
- Diseño y desarrollo de bases de datos.

Grupo B. Especialización en áreas de matemáticas:

- Estadística interactiva en el aula. Laboratorio virtual de estadística.
- Astronomía de posición.
- Matemáticas recreativas en el aula.
- Materiales y recursos en el aula de matemáticas de secundaria y bachillerato.
- Simetra: un camino de ida y vuelta de la geometría a la teoría de grupos.

El periodo de preinscripción comenzará el 5 de noviembre y finalizará el 25 de noviembre de 2007.

Más información sobre contenidos y procedimiento de inscripción en la Web:

http://thales.cica.es

COLABORAN:

JUNTA DE ANDALUCIA
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN

JUNTA DE ANDALUCIA CONSEJERÍA DE INNOVACIÓN, CIENCIA Y EMPRESA

SUMA 56
Noviembre 2007, pp. 87-88

Necesitamos más medios... y más medias

Este clip versará sobre las medias. Las palabras media / medio ocupan un lugar destacado en nuestro lenguaje al poseer multitud de significados: hay medias para las piernas, hay puntos a la mitad de algo, hay instantes o lugares que se encuentran entre dos referencias, hay medios de comunicación, hay audiencias medias, hay medios de transporte, hay medias horas, hay mediodía, hay medio tontos, hay necesidad de más medios, líneas medias en fútbol, medios culturales y hay medio ambiente, medias naranjas… y las medias propiamente matemáticas.

Con las medias matemáticas logramos poner en práctica esta moderna obsesión por el resumen, pasar de unos datos interesantes a un número (la media) que *condense* en sí mismo todo lo que se ha obtenido. De la misma manera que el malabarista de circo busca los centros de gravedad para aguantar sus platos, nosotros estamos empeñados en el malabarismo numérico de calcular medias, lo cual puede tener mucho sentido estadístico cuando hay muchos datos y muy poco cuando éstos escasean.

Algunas de estas medias tienen consecuencias drásticas: se suprime el programa si baja la aceptación media, se suspende el examen si la media no llega a cinco, etc. Otras medias en cambio tienen repercusiones optimistas: se supera un valor medio europeo, se destaca por encima de la media, etc.

Claudi Alsina
elclip.suma@fespm.org

El caso de los medios de comunicación es curioso. Es evidente que no se llaman así porque sólo expliquen *la mitad* de las cosas sino por el deseo de llegar a medias altas de audiencia de personas medias.

Las personas que son críticas con la educación apelan también a medias de resultados a través de las cuales lloran amargamente por el nivel *degradado*. No obstante, el hecho de que este nivel haya ido bajando desde el 300 a.C. hasta hoy puede tranquilizar a más de uno.

Nuestra responsabilidad no sólo es ser críticos con las medias utilizadas socialmente, sino explicar claramente que de medias hay muchas y hay que elegir bien en cada caso. Veamos los tres casos paradigmáticos.

Media aritmética: $\dfrac{a+b}{2}$

Esta sencilla media es la que más destaca a nivel social. A menudo con expresiones más complejas (sumar *n* términos y dividir por *n*) o incluso con expresiones ponderadas, este promedio nos da un valor central y nos invita a contemplar la dispersión de datos respecto a dicho valor. Ya en un clip anterior dedicamos nuestra atención a la esperanza estadística. Todos calculamos salarios medios, precios medios de alimentos, alturas medias… y notas medias. La selectividad es una típica media ponderada de notas que repercute en el acceso universitario y cuyos pesos (60% y 40%) deberían discutirse algún día.

Media geométrica: $\sqrt{ab}$

Con valores menores que la media aritmética,

$$\sqrt{ab} \le \frac{(a+b)}{2}$$

esta media tiene especial interés en problemas geométricos pero también nos puede ayudar en situaciones normales. Por ejemplo, para *promediar razones o factores*. He aquí un bonito ejemplo: si un negocio con una inversión de *D* euros da un 25% el primer año (es decir, obtenemos $D+25D/100=\frac{5}{4}D$, actuando pues el factor $a=\frac{5}{4}$) y el mismo dinero *D* permite pasar a un beneficio del 80% al siguiente año (obtenemos $D+80D/100 = \frac{9}{5}D$ y por tanto el factor es $b=\frac{9}{5}$) entonces el promedio anual de beneficio *r* viene dado por $r=\sqrt{ab}$ es decir, o sea 50%. Un uso indiscriminado de la media aritmética, promediando los factores $\frac{5}{4}$ y $\frac{9}{5}$ nos llevaría a $\frac{61}{40} = 1{,}515$.

Media armónica: $\dfrac{2ab}{a+b}$

Con valores finales menores que la media geométrica, resulta que esta mítica media de dignos orígenes griegos y parienta cercana del número de oro, también puede ayudarnos en situaciones cotidianas: Si conducimos 100 km a la ida con una velocidad de 80 km/h y recorremos la misma distancia a la vuelta a 120 km/h ¿cuál habrá sido la velocidad *media* de todo el viaje ida y vuelta?... Pues 96 km/h, la media armónica de 80 y 120, como se puede verificar trivialmente mirando bien los tiempos.

eee

Las medias cuadráticas, las medias logarítmicas… y un sinfín de medias matemáticas se ponen al servicio de *promediar* adecuadamente en cada caso. El hecho de que las medias puedan calcularse sobre números hace que nos olvidemos a veces de contemplar los significados y las interpretaciones de las mismas.

Para pensar un rato

Usar bien las medias es una gran idea pues permite relacionar matemáticas con muchísimas situaciones interdisciplinarias: ya sea en la propia matemática (aritmética, estadística, geometría…) o en otras fuentes del conocimiento (física, ciencias sociales, etc…). La lectura de noticias también nos invitará a reflexionar sobre las medias estadísticas.

Aquí se incluye también un bonito problema geométrico de E. Beckenbach y R. Bellman:

Problema. Considere un trapecio *ABCDC* con $\overline{AB}=a$ paralelo a $\overline{CD}=b$. Sea O el punto de intersección de las diagonales. Determine las longitudes que deben tener segmentos *XY* paralelos a *AB* y *CD* para que se den los siguientes casos:

a) Que *XY* esté a medio camino entre *AB* y *CD*
b) Que *ABXY* y XYCD sean figuras semejantes
c) Que *XY* pase por el punto de corte O de las diagonales
d) Que *XY* divida a la figura en dos de igual área ■

PARA SABER MÁS

MOORE D. (2006): *The basic practice of statistics*, 4th edition, Freeman, New York.

MOORE, D. y NOTZ, I. (2006): *Statistics: Concepts and controversies*, 6th edition, Freeman, New York.

SUMA 56
Noviembre 2007, pp. 89-96

Tartaglia: El desafío de una ecuación

Hace 450 años, el 14 de diciembre de 1557, moría en la ciudad de Venecia el matemático Niccolò Fontana, más conocido por su apodo de *Tartaglia*. Como afirma el dicho popular, hay personas que nacen con estrella y otras que nacen estrelladas. Pues a este último grupo pertenece Tartaglia, maltratado por la vida e injustamente considerado por la historia, a pesar de haber sido uno de los matemáticos que más contribuyó, sin embargo, al impulso dado al desarrollo del álgebra por los matemáticos italianos, con la resolución de las ecuaciones de tercer y cuarto grado, en los comienzos del Renacimiento.

Hace 450 años, el 14 de diciembre de 1557, moría en la ciudad de Venecia el matemático Niccolò Fontana, más conocido por su apodo de Tartaglia.

NICOLAVS TARTAGLIA, BRIXIANVS.

Nacido en Brescia en 1499 o 1500, Tartaglia era hijo de un correo postal llamado Michele Fontana que murió cuando el pequeño Niccolò contaba solo con 6 años de edad, quedando la familia, madre y tres hijos, en una situación de clara pobreza. La ciudad de Brescia, que dependía de la República de Venecia, pasó a manos de Francia desde 1509 hasta 1513. En

Santiago Gutiérrez
hace.suma@fespm.org

una de las invasiones de la ciudad por las tropas francesas, al mando de Gaston de Foix, el 19 de febrero de 1512, sus habitantes se refugiaron en la catedral, pero allanada ésta, a pesar del derecho de asilo propio del lugar, uno de los soldados infirió varias heridas a Niccolò, que tenía entonces 12 años, y una de ellas le dañó la boca de tal modo que durante mucho tiempo no podía hablar ni comer. Fueron los cuidados de su madre los que le salvaron, como él mismo dice en las notas autobiográficas de su obra *Quesiti et inventioni diverse*:

> (...) imitando a los perros, que se curan lamiéndose las heridas.

Sin embargo las secuelas de las heridas le impedían hablar correctamente, de ahí el apodo de *Tartaglia* (el tartamudo) con que se le conoce, apodo que llegó a asumir, asociado a su nombre, como si fuera un apellido y con el que firmaba sus libros.

Quesiti et inventioni diverse, Niccolò Tartaglia

Iglesia de San Zanipolo, Venecia. Foto FMC

Debido a estas circunstancias no comenzó Tartaglia su asistencia a una escuela hasta dos años más tarde. Fue con el Maestro Francesco con el que se inició en el aprendizaje del alfabeto y las cuatro reglas. Al parecer, las lecciones se desarrollaban por orden alfabético y cuando interrumpió sus estudios, por la falta de medios para sostenerlos, iba todavía por la letra k, con lo que no había conseguido aprender lo suficiente como para escribir su nombre. Tartaglia fue pues un autodidacta. Así nos lo refiere en su obra antes mencionada:

> Nunca volví a tener un profesor desde aquel día. Continué trabajando por mi cuenta sobre las obras de autores ya fallecidos, acompañado tan solo por la hija de la pobreza que recibe el nombre de trabajo.

Debió progresar en sus estudios de matemáticas de manera bastante rápida, pues no tardó en trasladarse a Verona, donde en 1518 trabajaba ya como maestro de ábaco. Allí se casó y ejerció como profesor durante algunos años. En 1526 impartió sus enseñanzas en Mantúa. En 1534 se trasladó a Venecia para impartir sus clases de matemáticas en la escuela anexa a la iglesia de *San Zanipolo*. Además de enseñar trabajaba como calculista, resolviendo problemas de cálculo a ingenieros y arquitectos. Tras una breve estancia en su Brescia natal, en 1548, regresó a Venecia donde permaneció hasta su muerte.

Las ecuaciones de grado superior

Nos encontramos en una época clave para el desarrollo de los métodos algebraicos y por tanto de toda la matemática. No sin muchos esfuerzos, y con un cierto retraso sobre el resto de Europa, se había impuesto al fin en Italia la numeración India y con ello había desaparecido la barrera que separaba la Aritmética práctica de la Aritmética teórica. El álgebra retórica que se practica es una ciencia de origen árabe dedicada al

Los matemáticos renacentistas se plantean la cuestión clave: ¿Será posible resolver las ecuaciones de grado superior al segundo?

Pero, ocurren tres hechos que van a influir decisivamente en el auge que experimenta la Matemática: la toma de Constantinopla por los turcos, la invención de la imprenta y el descubrimiento de América.

Nova Scientia, Tartaglia

estudio de las ecuaciones o regla de la cosa, que así se denomina a la incógnita, la cosa. No tiene una entidad en sí misma, es más bien un método de trabajo mecánico auxiliar para la resolución de determinados problemas.

Pero ocurren tres hechos que van a influir decisivamente en el auge que experimenta la Matemática: la toma de Constantinopla por los turcos, la invención de la imprenta y el descubrimiento de América. Los griegos cultos que huyen de la invasión otomana dan a conocer al occidente europeo los originales de las obras de los grandes matemáticos de la antigüedad, un tanto desfiguradas, por cierto, a través de malas traducciones árabes y peores copias manuales. La abundancia de los viajes marítimos, a raíz del descubrimiento de América, plantea nuevas exigencias al desarrollo de la ciencia y de la técnica. Por su parte, la imprenta se encarga de difundir todo ello ampliamente. Renace entonces el interés por el álgebra que había permanecido intocable desde la época de su iniciador Diofanto de Alejandría. La matemática y particularmente el álgebra adquieren así un importante desarrollo en toda Italia, y preparan el terreno para que a fines del siglo XVI el francés Viète dé el salto hacia el álgebra simbólica.

Las ecuaciones estudiadas y resueltas hasta entonces eran las de primer y segundo grado, bien mediante métodos geométricos o más tarde mediante el laborioso lenguaje del álgebra retórica. El estado de la cuestión es recogido ampliamente por el monje franciscano italiano Luca Pacioli en su obra *Summa de aritmética, geometría, proportioni et proportionalita*, escrita en italiano y no en latín según era costumbre entre los científicos, excelente compilación tanto de los trabajos de épocas anteriores como de los conocimientos de su tiempo. En esta obra nos dice Luca Pacioli, en referencia a la ecuación de tercer grado:

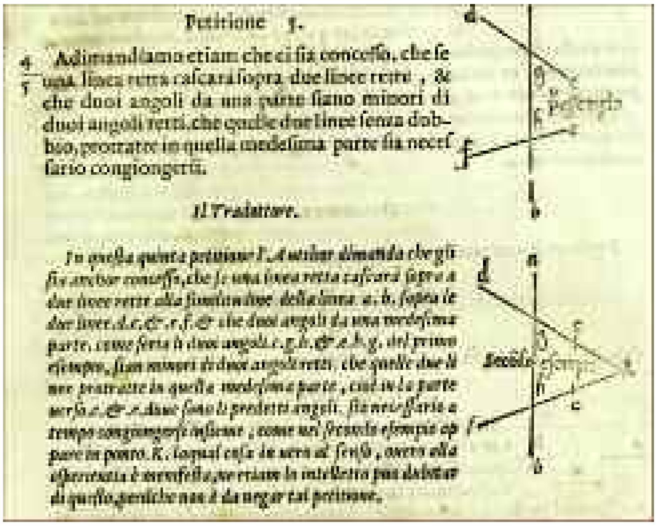
> Diría que el arte (el álgebra) a tal caso todavía no ha dado modo (solución), así como todavía no ha dado modo al cuadrar del círculo.

Es decir, que es tan difícil de resolver una ecuación de tercer grado como la cuadratura del círculo, o bien, que nadie hasta la fecha había logrado resolverla.

Los matemáticos renacentistas se plantean la cuestión clave: ¿Será posible resolver las ecuaciones de grado superior al segundo?

La obra de Tartaglia

Tartaglia fue al parecer un notable profesor y calculista. Destacaban sus exposiciones por el orden y la claridad de los conceptos. Se dedicó así mismo a traducir a los clásicos. En este sentido, es autor de una edición en italiano comentada de los *Elementos de Euclides* (Venecia, 1543). En la dedicatoria deja clara su intención:


Petitione 5.

Adimandiamo etiam che ci sia concesso, che se una linea retta cascarà sopra due linee rette, & che duoi angoli da una parte siano minori di duoi angoli retti, che quelle due linee senza dubbio, protratte in quella medesima parte sia necessario congiongersi.

Il Tradottore.

Página de la edición de Tartaglia de los *Elementos* de Euclides

> Actualmente no sólo han sido destruidas por los modernos sino anuladas hasta tal punto que las ciencias matemáticas se han perdido completamente.

En su opinión tal estado de cosas era debido a las variaciones de las lenguas y al desorden de las proposiciones llevadas a cabo por copistas y traductores. Su pretensión es pues que:

> (...) las proposiciones vuelvan a su primitivo estado y que la obra del más sabio Euclides vuelva a ser conocida.

A partir del manuscrito latino de Guillermo de Moerbeke (s. XIII), publicó una traducción de varias obras de Arquímedes. Tras su muerte, dejó un trabajo sobre una obra de Jordano Nemorario, importante porque en ella enuncia Jordano por primera vez la ley del plano inclinado.

Traducidas originalmente por él o copiadas de otras traducciones, lo cierto es que Tartaglia se había preocupado por ir a las fuentes para sus estudios matemáticos y no se dejaba seducir por versiones más o menos divulgativas de la época.

El primer libro original publicado por Tartaglia fue *Nuova scientia* (1537). En él establece los principios de la balística y trata de matematizar los conocimientos físicos en que se basa, si bien lo consigue sólo en parte. Estudia principalmente el movimiento de un cuerpo en el caso particular del proyectil lanzado por un cañón en el supuesto de una resistencia nula por parte del aire. Algunas de sus conclusiones las corregirá en publicaciones posteriores.

En 1546 publica *Quesiti et inventioni diverse* (Diferentes problemas y descubrimientos), obra escrita en italiano en forma de preguntas y respuestas. Consta de nueve libros, en los que revisa parte de las conclusiones sobre balística de su *Nova scientia*, trata de otros problemas relativos a la Mecánica y aborda diversos problemas de Álgebra y Geometría, además de incluir por distintas partes datos de carácter autobiográfico. Uno de los interlocutores que aparecen en el libro es Diego Hurtado de Mendoza, embajador, a la sazón, de Carlos V en la República de Venecia y Trento. Debió ser este hombre un buen aficionado a las matemáticas ya que poseía una gran colección de manuscritos matemáticos de los clásicos, que pasaron, por cierto, posteriormente a engrosar los fondos de la Biblioteca de El Escorial. Parece ser que fue amigo y protector de Tartaglia, lo que indicaría que la tal colección pudo ser una de las fuentes utilizadas por Tartaglia en su tarea de traductor.

El último libro escrito por Tartaglia, aunque no publicado totalmente hasta después de su muerte, fue el *General trattato di numeri et misure*. Una especie de enciclopedia de seis partes desarrolladas en 40 volúmenes y un total de 711 páginas. Es como si tratara Tartaglia de actualizar la *Summa aritmética* de Luca Pacioli. Esta obra recoge los conocimientos de Aritmética y Álgebra de la época. No añade ninguna novedad, pero expone la materia con tanta claridad que no es de extrañar que fuese uno de los textos matemáticos más leídos de todo el siglo XVI. Al parecer, era intención de Tartaglia acabar la obra con la resolución de la ecuación de tercer grado, pero, bien porque no tuviera tiempo o porque no hubiera sido esa su intención, el hecho es que no lo hizo. Sin embargo, esto merece capítulo aparte.

En 1546 publica Quesiti et inventioni diverse*, obra escrita en italiano en forma de diálogo. Uno de los interlocutores es Diego Hurtado de Mendoza, embajador de Carlos V en la República de Venecia.*

El desafío de la ecuación de tercer grado

Ya hemos visto que hasta el siglo XV los matemáticos consideraban prácticamente imposible resolver ecuaciones de grado superior al segundo, al decir de Luca Pacioli, con los métodos entonces disponibles. Por otra parte, sólo se trabajaba con números positivos, por lo que ecuaciones de tercer grado había de muchos tipos, según que cualquiera de sus términos estuviera en un miembro u otro de la ecuación.

La cuestión es que un profesor de Matemáticas de la Universidad de Bolonia, llamado Scipione del Ferro (ca. 1465-1526) encontró (en 1505?), no sabemos cómo, quizá a partir de alguna obra árabe, la fórmula para resolver la ecuación que hoy escribimos $x^3 + px = q$, con p y q positivos. Pero no le dio publicidad, y poco antes de morir se la comunicó a su yerno, Annibale Della Nave y a uno de sus alumnos, Antonio María del Fiore. El comportamiento de Scipione del Ferro es inconcebible para nuestra mentalidad, ya que cualquiera de nuestros científicos trataría de publicar sus descubrimientos en cuanto los tuviera por seguros. No ocurría así por aquel entonces. Era frecuente, en efecto, que los profesores de las universidades se retaran públicamente a resolver o discutir cualquier problema, asunto o tema, con el fin de ganar prestigio, un premio económico previamente apostado, o incluso la misma cátedra de la universidad. En estas condiciones era frecuente que se guardasen los resultados de las investigaciones para sacarlos en el momento oportuno como objeto de un desafío.

En el caso de la ecuación de tercer grado, fueron tantos los retos y los personajes intervinientes que, más que una disputa, lo que se produjo fue un drama que duró casi veinte años e impregnó prácticamente toda la vida de sus personajes. Como dice Mario Livio:

> (…) en el Renacimiento italiano ninguna historia, ni siquiera de matemáticos, llega sin sus momentos operísticos.

Estamos, pues, ante un drama en tres actos con prólogo y epílogo incluidos.

El Prólogo

Parece ser que un profesor de Milán, Zuanne del Col, pidió a Tartaglia, estando este en Brescia, en 1530, que le resolviera estos dos problemas:

1. Encontrar un número que, multiplicado por su raíz aumentada en tres, de cinco.
2. Encontrar tres números que se diferencien en dos y cuyo producto sea mil.

> *El último libro escrito por Tartaglia, aunque no publicado totalmente hasta después de su muerte, fue el* General trattato di numeri et misure*. Una especie de enciclopedia de seis partes desarrolladas en 40 volúmenes y un total de 711 páginas.*

Sabemos que estos problemas conducen a sendas ecuaciones cúbicas, que Pacioli había declarado imposibles de resolver, pero que Tartaglia afirmó que sí eran resolubles.

La *Calle del Sturion*, muy cerca del puente de Rialto, donde murió Tartaglia. Foto FMC

Acto primero

Naturalmente no tardó en salir a escena Antonio María del Fiore, mediocre matemático, natural de Venecia, a donde se había trasladado Tartaglia en 1534. Transcurría el año 1535, cuando Del Fiore, tratando de impostor a Tartaglia, aseguraba que él sí tenía una fórmula para resolver la ecuación cúbica, que le había entregado su maestro Scipione del Ferro, treinta años antes. Como Tartaglia insistiera en su capacidad para resolver las ecuaciones cúbicas de los tipos:

$$x^3 + px = q$$
$$x^3 = px + q$$
$$x^3 + q = px$$
$$\text{con } p>0 \text{ y } q>0$$

se planteó el desafío. Cada contrincante debía de resolver treinta problemas propuestos por su oponente en el plazo máximo de cuarenta días. La apuesta suponía por parte del perdedor pagar una comida al vencedor y a sus amigos.

Mientras Del Fiore no supo resolver ni uno sólo de los problemas, Tartaglia los resolvió todos en menos de dos horas. Pero, le perdonó la comida, quizá se vio suficientemente pagado con el éxito y el prestigio que esto podía suponerle. A partir de ese momento, Del Fiore desaparece de la escena, en tanto que Tartaglia ve aumentada su fama y su popularidad.

Acto segundo

La crónica de la disputa se difunde por todas las universidades de Italia, la fama de Tartaglia se ve acrecentada y llega a conocimiento de Gerolamo Cardano, médico, astrólogo, matemático, filósofo y, por si fuera poco, gran aficionado a los juegos de azar. Era Cardano hijo ilegítimo del abogado Fazio Cardano, asesor de Leonardo da Vinci en cuestiones de geometría, quien se había preocupado por dar una esmerada educación a su hijo, al principio por él mismo en matemáticas, y posteriormente enviándolo a las universidades de Pavía y Padua.

Estamos en el año 1539, con Cardano terminando de escribir su *Practica Aritmética Generalis*. Debió considerar interesante incluir en su libro la resolución de la ecuación de tercer grado mediante la fórmula de Tartaglia y realiza al efecto sucesivos intentos de aproximación con el objeto de conseguir la preciada fórmula. Primero, a través de un conocido común, el librero Zuantonio da Bassano, que se encontró con Tartaglia el 2 de enero de 1539, en Venecia, para pedirle, en nombre de Cardano, la forma de resolver la ecuación cúbica, a fin de publicarla en su libro, eso sí, indicando la autoría por parte de Tartaglia. Pero, éste se opuso a tal cuestión.

Ante semejante fracaso, Cardano no se desanimó e insistió de nuevo, mediante carta que le envió a Tartaglia el 12 de febrero de ese mismo año, con elogiosos comentarios sobre su libro *Nuova Scientia*. Volvió a negarse Tartaglia. Cardano entonces cambió de táctica. El 13 de marzo, le escribió de nuevo invitándole a pasar unos días en Milán donde le presentaría al Marqués del Vasto, noble militar español y hombre de prestigio, al cual podría Tartaglia presentarle sus estudios y descubrimientos sobre balística.

Alocución de Alonso de Ávalos, Maqués del Vasto,
Tiziano, 1541, Museo del Prado

Y por fin aceptó Tartaglia, que se encontró con Cardano el 25 de marzo de 1539, en la casa que éste tenía en Milán.
Tras muchas presiones por parte de Cardano, y el juramento por los Santos Evangelios de que no daría a conocer la fórmula y que la guardaría en lenguaje cifrado para que a su muerte nadie pudiera comprenderla, accedió Tartaglia a comunicarle su descubrimiento. Se trataba del método para resolver las ecuaciones:

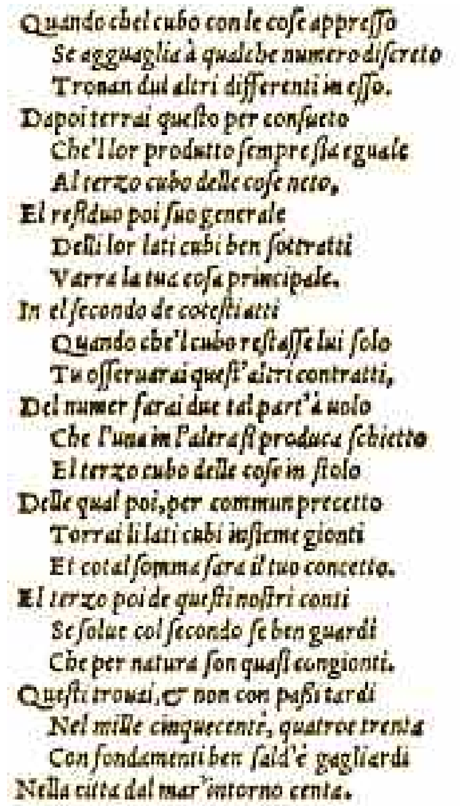
$$x^3 + px = q$$
$$x^3 = px + q$$
$$x^3 + q = px$$
$$\text{con } p>0 \text{ y } q>0$$

Y esto lo hizo Tartaglia por medio de unos versos que favorecerían su memorización. A título de ejemplo, reproducimos los correspondientes a la resolución de la ecuación $x^3 + px = q$. (Ver figura a la derecha).

Que, siguiendo a F. Martín Casalderrey (2000), se podrían traducir así, (entre paréntesis se ha escrito su equivalente en notación simbólica actual):

Cuando está el cubo con las cosas preso	$(x^3 + px)$
y se iguala a un número discreto	$(x^3 + px = q)$
busca otros dos que difieran en eso.	$(t - s = q)$
Después tu harás esto que te espeto	
que su producto siempre sea igual	$\left(t \cdot s = \left(\frac{p}{3}\right)^3\right)$
al tercio cubo de la cosa neto,	
Después el resultado general	
de sus lados cúbicos bien restados	$\left(\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{s}\right)$
te dará a ti la cosa principal.	$\left(x = \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{s}\right)$

No se sabe por qué circunstancias Tartaglia abandonó la casa de Cardano al día siguiente de haber entregado su tan guardado secreto, regresando a su domicilio de Venecia, sin haber sido presentado siquiera al Marqués del Vasto.


Quando chel cubo con le cose appresso
Se agguaglia à qualche numero discreto
Trovan dui altri differenti in esso.
Dapoi terrai questo per consueto
Che'l lor produtto sempre sia eguale
Al terzo cubo delle cose neto,
El residuo poi suo generale
Delli lor lati cubi ben sottratti
Varra la tua cosa principale.
In el secondo de cotesti atti
Quando che'l cubo restasse lui solo
Tu osservarai quest'altri contratti,
Del numer farai due tal part'à uolo
Che l'una in l'altra si produca schietto
El terzo cubo delle cose in stolo
Delle qual poi, per commun precetto
Torrai li lati cubi insieme gionti
Et cotal somma sara il tuo concetto.
El terzo poi de questi nostri conti
Se solue col secondo se ben guardi
Che per natura son quasi congionti.
Questi trouai, & non con passi tardi
Nel mille cinquecente, quatroe trenta
Con fondamenti ben sald'è gagliardi
Nella citta dal mar'intorno centa.

Fórmula en verso de Tartaglia para la resolución de la ecuación de tercer grado

Acto tercero

Cardano tenía un joven sirviente, Ludovico Ferrari, dispuesto y muy inteligente, que, dirigido por su amo, había aprendido griego, latín y matemáticas. Sus progresos eran tales que se convirtió en su secretario personal y, más tarde en amigo y colaborador de Cardano.

Con la ayuda de Ferrari, se dedicó Cardano por un tiempo a estudiar detenidamente el método de Tartaglia, y consiguió incluso resolver la ecuación general de tercer grado, $x^3 + px^2 + qx = r$, suprimiendo el término de segundo grado, mediante una transformación, y reduciéndola en consecuencia a uno de los casos anteriores.

Pero, se encontró con una nueva dificultad, y es que en algunas ecuaciones resultaban radicandos negativos, en una época en que ni siquiera los números negativos eran aceptados. Es el tipo de ecuación que luego se llamó irreducible. Así que, junto con su ya decidido colaborador Ferrari, en el año 1542, se dirigió a Bolonia. Quien sabe si entre los papeles de Del Ferro no habría alguna idea sobre este caso. Allí se pusieron ambos en contacto con el yerno de Del Ferro, Annibale Della Nave, quien les permitió buscar entre los papeles de aquél y revisar todos sus trabajos. No apareció nada de lo que buscaban, pero sí se encontraron con el método de resolución de las ecuaciones reducibles, exactamente el mismo que les había comunicado Tartaglia, y, por tanto, descubierto con fecha muy anterior. Ahora podrían darlo a conocer sin faltar al juramento.

Cardano decidió publicarlo en un libro que recogería el estado de la cuestión sobre el álgebra. Tardó algún tiempo en redactarlo, y, al fin, en el año 1545 salió a la luz, en la imprenta de Johannes Petreius, de Nuremberg, su mejor obra, *Artis Magnae sive de regulis algebraicis* (*Del gran arte, o de las reglas algebraicas*), más conocida como *Ars Magna*. En ella aparecen los métodos de resolución de los casos posibles de ecuaciones de tercer grado, los tres de Tartaglia más otros diez, que son todos los que resultan de poner cada uno de los términos en un miembro u otro de la ecuación, puesto que ningún coeficiente podía ser negativo. Se incluye además la resolución de la ecuación de cuarto grado, descubierta por Ferrari, que logró reducirla a una de tercer grado, mediante un artilugio consistente en esencia en completar cuadrados perfectos.

Por lo que se refiere a la procedencia de la fórmula de la ecuación de tercer grado, lo describe así Cardano, en el capítulo XI de su *Ars Magna*:

> Scipione del Ferro, de Bolonia, hace más de treinta años, inventó esta regla y la comunicó a Antonio María del Fior,

Puente de Rialto, Venecia. Foto FMC

de Venecia, quien celebró un certamen con Niccolò Tartaglia de Brescia, lo que dio ocasión a que Niccolò por sí mismo la descubriera, el cual me la dio a mi, suprimida la demostración, como consecuencia de mis ruegos. Pertrechado de este auxilio, busqué la demostración por varias vías, lo que fue muy difícil.

Epílogo

Al ver el libro publicado por Cardano, la indignación de Tartaglia no pudo ser mayor. Consideraba que Cardano había incumplido su juramento, fuera cual fuese su explicación y las citas de reconocimiento que le ofrecía en su libro. Producto de todo ello es el libro que Tartaglia publicó en 1546, *Quesiti et inventioni diverse*, en el que cuenta su versión de los hechos, vuelca toda la irritación que le embarga, e invita a Cardano a desdecirlo si algo encuentra de incierto en los *Quesiti*… Pero, Cardano da la callada por respuesta y no vuelve sobre el asunto, sino que lo deja en manos de su secretario y alumno Ferrari. Parece como si Cardano pasase a una postura de desprecio hacia Tartaglia y prefiriese ignorarlo.

Se produce entonces un cruce de carteles (un cartel, *cartello* en italiano, era una carta de desafío que se distribuía entre eruditos y dignatarios de Italia) entre Tartaglia y Ferrari, en los que se criticaban mutuamente y acusaban de plagios y errores. Hasta un total de doce carteles, seis cada uno, se enviaron en distintas fechas. Todo finalizó con el reto por parte de Ferrari a una disputa pública, que Tartaglia se vio obligado a aceptar. Se celebró en Milán el 10 de agosto de 1548. Cada contrincante debía proponer 31 cuestiones a su oponente. Acudió al duelo lo más granado de la sociedad milanesa incluido el gobernador. Faltaba una persona, Cardano, la que más interesaba a Tartaglia. Todo lo que sabemos del resultado final apunta a una derrota por parte de Tartaglia, que hubo de regresar a Venecia casi como un fugitivo.

Comentario final

En primer lugar, independientemente de quien tuviera razón, interesa resaltar el hecho, que no sería el último en la historia de la Matemática, de que dos personas, Del Ferro y Tartaglia, casi simultáneamente hubieran resuelto un problema del mismo modo. ¿Cómo es esto posible? ¿De qué modo se interrelaciona el cerebro humano con su ambiente para producir semejantes fenómenos? ¿O es que simplemente ambos personajes habían bebido en las mismas fuentes? Eso, hoy por hoy, no podemos saberlo. Quizá algún día aparezca un papiro que nos lo ilustre.

En segundo lugar, debo decir que he preguntado a muchas personas, profesores y alumnos, si les sonaba el nombre de Tartaglia. La mayoría lo desconocía, y los que lo conocían era por *El triángulo de Tartaglia*. Y es que la historia no le reconoció en apenas ninguna otra cuestión de interés, incluso el mismo Triángulo de los coeficientes binómicos es con frecuencia atribuido más a Pascal que a él. No obstante, son varios los resultados, fórmulas y teoremas que podían haber reclamado la paternidad de Tartaglia. Mala suerte la de este hombre, de gran ingenio, que no tuvo más defecto que haber nacido pobre y carecer del ambiente cultural necesario para dar todo lo que su talento prometía. Pues, pobre y solo, en el espacio y en el tiempo, murió Nicolo Fontana, el Tartaglia, en Venecia, en el año de 1557, muy cerca de donde se encuentra actualmente el puente de Rialto. ■

REFERENCIA BIBLIOGÁFICA

MARTIN CASALDERREY, F. (2000): *Cardano y Tartaglia. Las matemáticas en el Renacimiento italiano,* Nivola, Madrid.

SUMA 56
Noviembre 2007, pp. 97-104

En las ciudades invisibles III

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

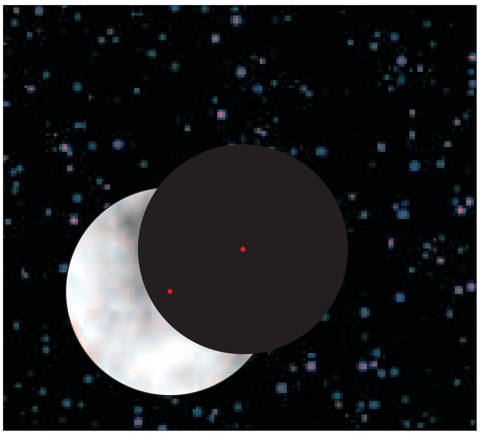
De ahora en adelante seré yo quien describa las ciudades y tú verificarás si existen y si son como las he pensado.

La función de Marco es describir a Kublai ciudades reales mediante el relato de sus características. Pero Kublai quiere saber ahora si una serie de características que él reúne corresponde a las de una ciudad real. La función de Kublai es inversa de la de Marco, pero está por ver si su dominio no es vacío.

...en un golfo en medialuna.

Me detengo en esa bahía. El de la medialuna es un problema geométrico interesante: ¿Qué distancia separa los centros de dos círculos cuando uno oculta la mitad del otro?

...del número de ciudades imaginables hay que excluir aquellas en las cuales se suman elementos sin un hilo que los conecte, sin una norma interna, una perspectiva, un discurso.



Si los radios son iguales el ángulo mayor A del rombo formado por los dos centros y las intersecciones de ambos círculos conduce a la ecuación: $\mathrm{sen}(A)=A-\pi/2$. Luego, $A\approx 2{,}31$ rad y la distancia entre los centros es ($r=R=1$): $d=2\cdot\cos(A/2)\approx 0{,}808$. El caso general ($r<R$) es más complejo, pero nada que la trigonometría no pueda resolver. Marco advierte que aún recombinando características auténticas no se obtienen ciudades reales. La función de Kublai, inversa de la de Marco, no proporciona imagen para cualquier conjunto de características.

...mis sueños los compone la mente o el azar.

Pero ni el capricho ni el azar erigen ciudades.

También las ciudades creen que son obra de la mente o el azar, pero ni la una ni el otro bastan para mantener en pie sus muros.

Con la una y el otro, mente y azar, se componen las ciudades y se levantan en la intersección determinada por esa conjunción copulativa. La medialuna de dos círculos superpuestos. Fuera de ella la ciudad no se sostiene. ■

Diseño y maquetación FMC

Miquel Albertí Palmer
ciudadesinvisibles@revistasuma.es

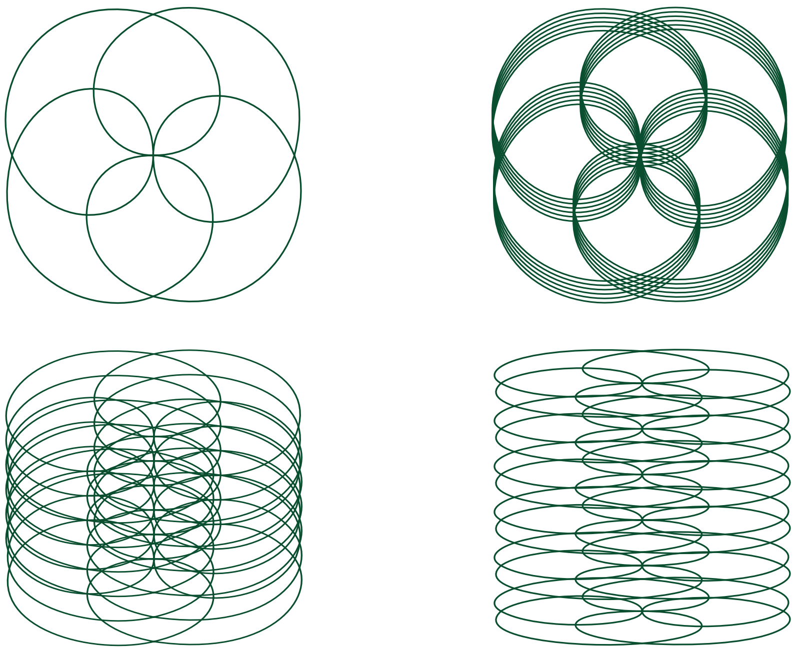
Zobeida

Zobeida

La esencia del ovillo es enrollar un hilo en torno a un pequeño tubo. Vuelta tras vuelta alrededor de ese eje el hilo describe una línea helicoidal con cambio de sentido cada vez que llega a uno de los dos extremos. El modo en que se enrolla y la longitud del hilo determinan la forma, más o menos abultada del ovillo.

(...) con calles que giran sobre sí mismas como un ovillo.

Perdido en Zobeida tuve tiempo de esbozar un modelo del ovillo que sus calles me obligaron a recorrer:



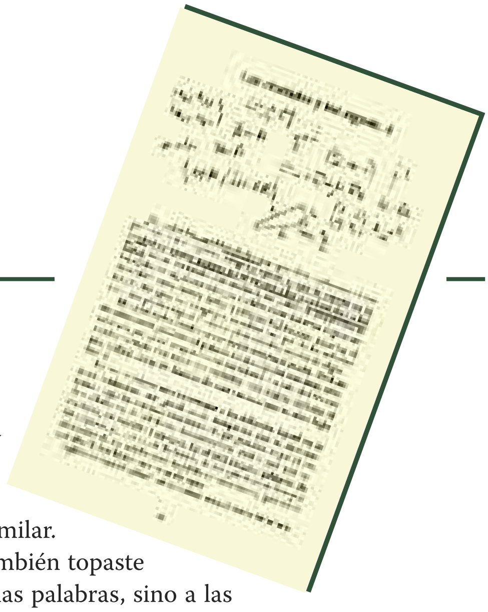
La fórmula de este lío abarca las 24 vueltas que para $t \in [0, 12\pi]$ di en torno a sus ejes:

$$[\cos(t)\mathrm{sen}(t)\cos(3t),\ \cos(t)\mathrm{sen}(t)\mathrm{sen}(3t),\ t]$$

Pero la clave de Zobeida no es deshilvanar su ovillo, sino averiguar qué parte o partes de la ciudad son los ejes que le dan forma. ■

Zobeida*: ciudad ovillo de ejes múltiples.*

Ipazia



De todos los cambios de lengua (...) ninguno iguala al que le espera en la ciudad de Ipazia, porque no se refiere a las palabras sino a las cosas.

Al poco de llegar a esta ciudad tienes la impresión de haber vivido antes la desazón del cambio de significados. Un breve paseo basta para recordar cuándo y dónde viviste algo similar. Fue al entrar en clase de Matemáticas. Ahí también topaste con un cambio de lengua que no se refería a las palabras, sino a las cosas, pues, como en Ipazia, muchos términos que hasta entonces habías utilizado con seguridad significaban otras cosas:

Adjunto, anillo, base, cerrado, compacto, complejo, complementario, composición, cuerpo, dependiente, dominio, grupo, unidad, inversa, irracional, límite, matriz, menor, razón, real, recorrido, seno, ...

También la gramática que articulaba sus explicaciones era distinta. Y cuando creías haber aprendido qué cosas daban nuevos significados a tu vocabulario, de pronto esas mismas cosas se habían renovado en estructuras mayores de las que acababan siendo meros casos particulares. Algunas palabras como número y curva nunca adquirían un significado definitivo.

Los signos forman una lengua, pero no la que crees conocer –comprendí que debía liberarme de las imágenes que hasta entonces me habían anunciado las cosas que buscaba: sólo entonces lograría entender el lenguaje de Ipazia.

Como en Ipazia, tu asimilación de conocimiento no hallaba sosiego. Por eso muchos no querían ni oír hablar de Matemáticas y tenían a sus ministros por estafadores al prometer una felicidad que no llegaba nunca y a la que muy pocos accedían. Muchos las abandonaron para no volver jamás.

Alcanzaron aquella felicidad prometida quienes se sometieron a la premisa de liberarse de las imágenes que hasta entonces les habían anunciado las cosas que buscaban. Sólo así se introdujeron en una nueva interpretación del mundo y del lenguaje. Ahora, cuando oyen a alguien decir lo suave que es la seda, se imaginan la caricia de un pañuelo de esa tela en la mejilla o el roce de otra piel con la suya, pero saben también que esa suavidad está en la tangencia común de dos variedades topológicas diferenciables.

No hay lenguaje sin engaño.

Abandonas Ipazia preguntándote qué es más verdadero y real, ¿el roce entre la piel y la seda o el de superficies diferenciables? Acabas pensando que no hay uno sin el otro y que, al mismo tiempo, ambos se desmienten. ■

Ipazia: *un modelo para el lenguaje matemático.*

Valdrada

El espejo de agua en Valdrada es un verdadero plano de simetría geométrico. Su papel no se reduce a reflejar lo que el observador ve, sino que también refleja lo invisible. Tras cada fachada de la Valdrada virtual se extiende el interior de una casa y los actos de quienes la habitan.

La relación establecida, aunque biyectiva, no es una identidad. Si *a cada rostro y gesto responden desde el espejo un rostro o gesto invertido punto por punto*, las cosas son y ocurren siguiendo direcciones distintas. ¿Quiere decir Calvino que el espejo invierte lo que refleja, que permuta izquierda con derecha?

Reflexiono contemplado la Valdrada sumergida mientras mi yo virtual parece mirarme desde el otro lado del cristal. Su derecha se corresponde con mi izquierda, su izquierda con mi derecha. Pero esa relación es la que le atribuyo yo al considerar mi reflejo otra persona y puesto que cuando alguien me mira de frente sé que su derecha se corresponde con mi izquierda y al revés, lo mismo pienso de mi yo virtual.

Sin embargo, quien parece mirarme se ha dado media vuelta para hacerlo. ¿Qué papel juega ese giro cenital de 180º en la permutación de derecha e izquierda?

Mi reflejo no soy yo. Ni tan siquiera es otra persona. Pero como su aspecto me remite al de otro le trato como tal. Pese a ser ciego, diría que mi reflejo me mira. Y como lo tomo como tomaría a alguien frente a mí, es decir, como otra persona, le atribuyo las mismas características que a quienes me miran. Le interpreto como alguien que se ha dado media vuelta para hablar conmigo: *...pensamos que es otro el que tenemos delante, ...pero nosotros no somos esa persona virtual que está dentro del espejo* (Eco, 1999, pag. 423).

Veo que esa copia de mi mismo que tengo delante lleva el reloj en una muñeca distinta. Si lo creo así es porque le veo como un doble mío. Un doble del que me separan unos pasos y una media vuelta. Así es como le percibo. La causa de la permuta de izquierda con derecha está en un giro de 180º, media vuelta (fig. 1).

Ése es el giro que atribuyo a mi imagen dentro del espejo y que es falso, fruto de mi imaginación. Un espejo no produce giros ni da medias vueltas a lo que se le pone delante, sólo replica cada punto en otro equidistante de él, simetriza con respecto a un plano, refleja.

Lo que ocurre es que la imagen en un espejo de una figura con simetría axial no se distingue de la que se obtiene mediante rotación de 180º alrededor de un punto. En efecto, merced a la simetría axial del objeto original, el reflejo en el espejo puede ser interpretado como resultado de un giro de 180º con centro en el punto de intersección del espejo con el eje de simetría del objeto (fig. 2).

(...) el viajero ve dos ciudades: una directa sobre el lago y una de reflejo, invertida. (...) la ciudad fue construida de manera que cada uno de sus puntos se reflejara en su espejo, y la Valdrada del agua (...) contiene no sólo todas las canaladuras y relieves (...), sino también el interior de las habitaciones ...

Las dos ciudades gemelas no son iguales, porque nada de lo que existe o sucede en Valdrada es simétrico: a cada rostro y gesto responden desde el espejo un rostro o gesto invertido punto por punto.

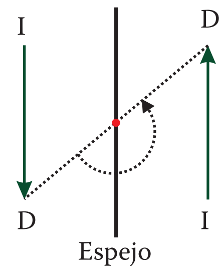
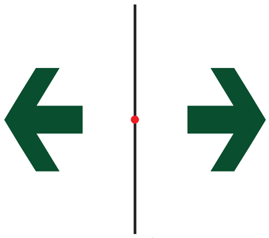


Figura 1: Simetría de reflexión y de giro

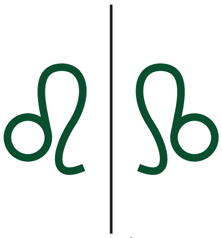
Valdrada

Puesto que yo mismo me considero simétrico, veo mi imagen en el espejo no sólo como resultado de una simetría, sino también de un giro. En esa media vuelta ficticia se basa la consideración del intercambio de derecha con izquierda.



Espejo

Figura 2: Simetría de reflexión y de giro



Espejo

Figura 3: Simetría de reflexión

Si el objeto original carece de simetría axial su reflejo sólo puede interpretarse en términos de simetría, no de giro (fig. 3), y no hay lugar para la confusión.

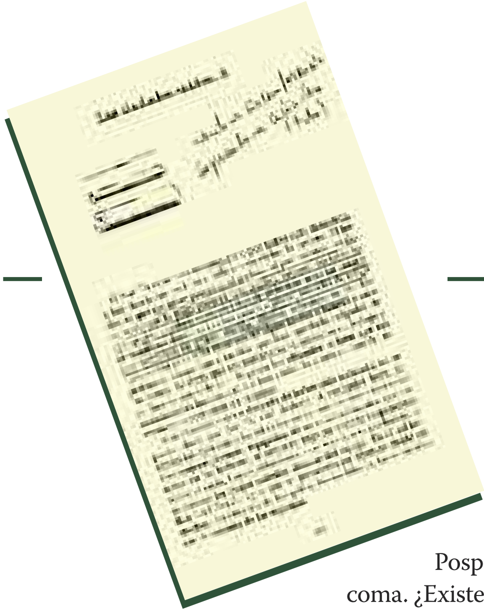
Si nuestra cara y cuerpo no fuesen simétricos y nos pareciésemos al objeto de la figura 2, no tomaríamos por otra persona la imagen reflejada.

Quienes se sorprenden al considerar que los espejos permutan izquierda y derecha pero no arriba y abajo, deberían pensar qué sucede si se pone un espejo en el techo. ‘Si miro un espejo en el techo debería pensar que cambia lo de arriba con lo de abajo’ (Eco, 1999: 423).

El lago de Valdrada es un espejo en el suelo. Cuando lo contemplo veo que, en efecto, el cielo está allí abajo, el suelo encima. Pero sé que no es así. En la Valdrada del lago las cosas están en su sitio. ■

Valdrada*: elogio de la simetría.*

ECO, U. (1999): *Kant y el ornitorrinco*. Editorial Lumen. Barcelona.



Armilla

Armilla

Me detengo en este punto y coma. ¿Es posible que una ciudad carezca de paredes, techos y pavimentos?

(...) no tiene paredes, ni techos, ni pavimentos; (...)

Pospongo la continuación de la lectura al llegar a esa coma. ¿Existe una ciudad que *no tiene nada que la haga parecer una ciudad*? Tal vez valdría como modelo de una ciudad semejante una población muy numerosa viviendo al raso en medio del desierto. Una aglomeración de personas sin casas y sin calles cuyo número la distinguiese de aldeas y pueblos.

(...) no tiene nada que la haga parecer una ciudad...

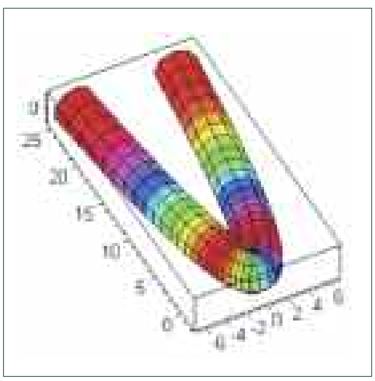
Poco antes de visitar Armilla soñé que un atardecer sobrevolaba la sabana africana. Al pasar por encima del lago Nakuru me sorprendió su color exageradamente rosado. Descendí, y la masa se transformó en una nube de puntos. Miles y miles de flamencos bebían y se refrescaban agitando las alas. Por la noche hallarían cobijo en las ramas altas de las acacias. En mi sueño pensé que un árbol es una casa sin paredes ni techo y que las calles y avenidas del vuelo de un ave carecen de pavimento. Desperté convencido que Armilla era la ciudad de los flamencos, ya que no tiene nada que la haga parecer una ciudad.

Sin embargo, la frase de Calvino no termina donde la dejé, sino que habla de un aspecto eminentemente urbano como es el agua corriente.

La esencia de Armilla no está en la sabana, sino en la *selva de tubos que acaban en grifos, duchas, sifones, rebosaderos.* Esa selva certifica su urbanidad. Una maraña de caños convertida en estructura arquitectónica vicaria de la que en su día sostuvo la población.

(...) excepto las tuberías del agua que suben verticales donde deberían estar las casas y se ramifican donde deberían estar los pisos: una selva de tubos que terminan en grifos, duchas, sifones, rebosaderos.

Desde que me fui de Armilla mis representaciones gráficas han cambiado. Antes, al ver $f(x)=x^2$, pensaba en (x, x^2). Ahora, en cambio, pienso en **tubeplot**$(x, x^2, 0)$: ■



Armilla*: ciudad tubular*

Cloe

Algo corre entre ellos, un intercambio de miradas como líneas que unen una figura con otra y dibujan flechas, estrellas, triángulos, hasta que en un instante todas las combinaciones se agotan (...)

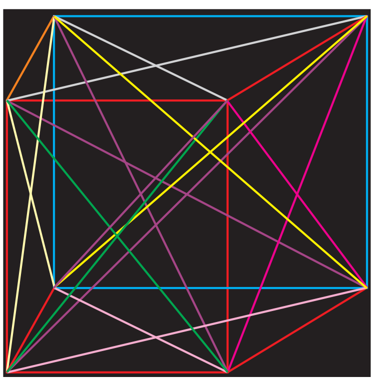
Y nos vemos inmersos en la versión tridimensional de un problema geométrico. ¿Cuántas líneas, aristas y diagonales, pueden trazarse en un polígono irregular, cóncavo o convexo?

El número de diagonales de un polígono regular convexo de n lados es $n(n-3)/2$. Pero en Cloe el intercambio de miradas no se refiere a los lados, sino a los vértices. Si n representa los vértices, el número de líneas posibles (aristas y diagonales) se obtiene sumando las n aristas a las diagonales:

$$n(n-3)/2+n=n(n-1)/2.$$

Puntos	Líneas
1	0
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15
...	...
n	$L_n=C_n^2=n(n-1)/2$

Tampoco los vértices que las miradas conectan en Cloe se restringen a los de un poliedro regular. Abarca todos los segmentos que las miradas dibujan uniendo parejas de puntos *hasta que todas las combinaciones se agotan*. El número de líneas L_n que pueden trazarse en un poliedro irregular, es decir, en un conjunto de n puntos en el que no hay tres alineados, es independiente de la regularidad, es el mismo de antes. ■



Cloe: *en la mirada se origina el espacio*

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

Kublai sueña una ciudad, se la describe a Marco, y luego le ordena que la busque.

Kublai quiere saber si la ciudad que ha soñado existe realmente.

De la ciudad se puede partir pero no regresar. Se trata de una ciudad centrífuga que sólo admite una visita.

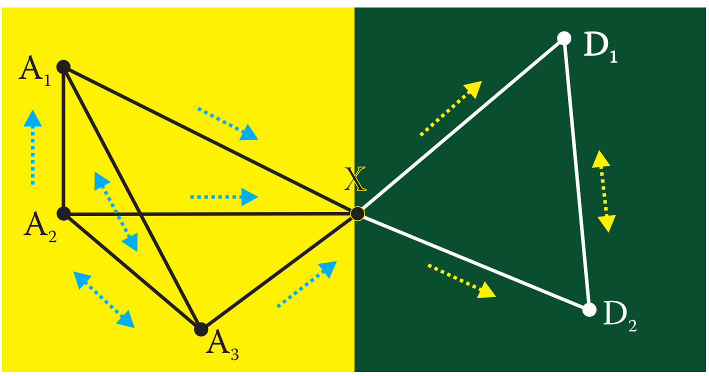
Si Marco jamás ha estado en ella, ¿qué problema hay en ir allí y volver después para contarle a Kublai que ciertamente existe? Si nunca la ha visitado, ¿cómo sabe de su existencia y peculiaridad? Si es por boca de otros, también ésos podrían habérsela dado a conocer a Kublai.

Si la conoce por haberla visitado, ya no puede regresar a ella. Pero como Marco afirma que tarde o temprano se embarcará en aquel muelle, tiene que poder ir allí. Luego, no ha estado todavía. Por tanto, una de dos. O bien lo que sabe –entre otras cosas la premisa particular de esa ciudad centrífuga–, debe saberlo por otros. O bien no quiere negar las ensoñaciones de Kublai.

Puesto que sólo se pasa una vez por esa ciudad X tan peculiar, desde una ciudad D_i posterior a X no hay modo de regresar a una A_j anterior a X. *A* no ser que uno se quede por siempre en A_j. Bisagra del espacio y del tiempo, X separa el antes y el después del viajero que la visita. ■

> *Después vuelve a decirme si mi sueño responde a la verdad.*

> *(...) no hay duda de que tarde o temprano me embarcaré en aquel muelle – dice Marco –, pero no volveré para contártelo. La ciudad existe y tiene un simple secreto: sólo conoce partidas y no retornos.*



SUMA 56
Noviembre 2007, pp. 105-110

El embrujo de los números perfectos

Los matemáticos han intentado en vano desde hace mucho tiempo descubrir alguna secuencia en el orden de los números primos, pero tengo razones para creer que éste es un misterio en el que la mente humana jamás podrá penetrar.

Leonhard Euler

Empezábamos hace ya más de dos años, allá por la primavera del 2005, esta sección extraña y polisémica en su título. En su presentación decía que pretendíamos que fuese duradera. Por suerte y por desgracia las cosas duran lo que duran y los equipos de dirección de SUMA también tienen derecho a un merecido descanso relativo. Así que con esta octava entrega cerramos un capítulo que confíamos os haya resultado cuando menos entretenido.

Y si entonces acompañábamos a Don Quijote y Sancho a desfacer entuertos matemáticos hoy nos lanzamos a perseguir un sueño de más de 2 000 años: la búsqueda de los números perfectos.

En matemáticas, como en la vida misma, lo simple y lo sencillo suele ser a la postre lo más bello. Y qué más simple que los números naturales. Esta pretendida simplicidad y las sorprendentes propiedades y relaciones entre ellos ya atrajo la

...un sueño de más de dos mil años: la búsqueda de los números perfectos.

Antonio Pérez Sanz
decabeza@fespm.org

atención de los fundadores de nuestra ciencia, los pitagóricos. A ellos les debemos todas las clasificaciones tan familiares de los números: pares, impares, primos, compuestos, abundantes, deficientes... y ¡*perfectos*!

El mejor de los nombres para una definición anodina:

> Un número perfecto es aquel que coincide con la suma de sus partes alícuotas.

En lenguaje más prosaico: el que es igual a la suma de sus divisores, excluído él mismo como divisor.

Seguramente Dios creó el mundo en 6 días, porque 6 es un número perfecto:

$$6 = 1 + 2 + 3$$

Y puso a la Luna a dar vueltas alrededor de la Tierra, una vez cada 28 días porque 28 es otro número perfecto:

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

Ya no se le ocurrió qué hacer con el siguiente 496 y parece que lo dejó en paz:

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$$

Y los hombres tomaron el relevo de la divinidad y siguieron investigándolos atraídos por su magia y por su escasez. Los números perfectos, como los hombres (o las mujeres) perfectos, son difíciles de encontrar.

Euclides habla de ellos en los *Elementos*, en los tres libros dedicados a la Aritmética, el VII, el VIII y el IX. Precisamente en este último Euclides nos deja perplejos con la proposición 36, que curiosamente es la que cierra el libro y que proporciona un método original para encontrar números perfectos.

> Si tantos números como se quiera a partir de una unidad se disponen en proporción duplicada hasta que su total resulte primo, y el total multiplicado por el último produce algún número, el producto será perfecto.

Lo curioso del caso es que a pesar de un resultado tan aplastante, del que por cierto nos da una preciosa demostración...¡geométrica!, Euclides sólo habla de los dos primeros números perfectos; el 6 y el 28. En este esquema de construcción, 6 y 28 corresponden a $n = 1$ y a $n = 2$

$$(1 + 2) \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6$$

$$(1+ 2 + 2^2) \cdot 2^2 = 7 \cdot 4 = 28$$

Algo parecido le ocurre a Teón de Esmirna, a caballo entre el siglo primero y el segundo de nuestra Era, en su obra *Expositio rerum mathematicarum*. Se atasca en el 28.

El gran impulsor de los números perfectos, y de paso de los números poligonales, es un neopitagórico militante: Nicómaco de Gerasa, a principios del siglo II d. de C. Es él en su *Introducción a la Aritmética*, libro que acabaría convertido en una especie de libro de texto a lo largo de la Edada Media, el que introduce los términos *números abundantes* y *números deficientes* para aquellos cuyas partes alicuotas suman respectivamente más o menos que el propio número. Los términos *abundante* y *deficiente* seguramente están elegidos pensando en la cantidad de divisores del número.

> (...) en lo que se encuentra entre demasiado y demasiado poco, es decir en el igual, se produce la virtud, la medida justa, la armonía y la belleza, del que la forma más ejemplar es la especie de número llamado *perfecto*.

Como buen pitagórico Nicómaco habla de los números como de seres vivos, con propiedades no sólo físicas sino también morales, que definen su propia esencia. En el fondo los números son la sustancia de todas las cosas. En el cap. XVI, nos dice:

> Encontramos que, igual que las cosas bellas y excelentes son escasas y fáciles de contar, mientras que las cosas feas y viles abundan, de igual forma los números abundantes y los deficientes son muy numerosos y se los encuentra sin

Como buen pitagórico Nicómaco habla de los números como de seres vivos, con propiedades no sólo físicas sino también morales, que definen su propia esencia. En el fondo los números son la sustancia de todas las cosas.

El teorema de Euclides-Euler de los números perfectos

Si $2^{n+1}-1$ es primo, entonces $2^n(2^{n+1}-1)$ es perfecto y todo número perfecto tiene esa forma.

Y otra vez Euler, en su Tratactus de numerorum doctrina*, nos proporciona una demostración que luego completará en su obra* De numeris amicabilibus.

> regla y sin concierto, mientras que los números perfectos son fáciles de contar y dispuestos según un orden conveniente. Así encontramos uno solo entre las unidades, el 6; otro solo entre las decenas, 28; un tercero entre las centenas, el 496 y un cuarto en el interior de los millares, 8128. Y encontramos que terminan alternativamente en 6 y en 8 y que siempre son pares.

Por fin aparecen los cuatro primeros números perfectos de forma explícita: 6, 28, 496, 8128. Además Nicómaco nos traduce a lenguaje sencillo la proposición de Euclides. De forma un tanto alambicada viene a decir, en lenguaje actual:

> Si la suma de las n primeras potencias de 2 es un número primo, entonces el producto de la suma por la última potencia sumada es un número perfecto.
>
> Si $(1+2+2^2+...+2^n)$ es primo, entonces $(1+2+2^2+...+2^n)\cdot 2^n$ es perfecto.

$$(1+2+2^2+2^3+2^4)\cdot 2^4 = 31\cdot 16 = 496$$
$$(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6)\cdot 2^6 = 127\cdot 64 = 8128$$

Todo parece encajar a la perfección. Pero el bueno de Nicómaco se aventura por caminos mucho más peligrosos.

Según sus palabras entre 10 000 y 100 000 ha de haber un número perfecto y sólo uno. Y lo mismo ha de suceder entre 100 000 y 1 000 000. Y entre 10^6 y 10^7... y, en general, entre 10^n y 10^{n+1}.

Pero, incomprensiblemente, no nos dice cuáles son los números perfectos de 5, 6 y 7 cifras. Bueno, en realidad no nos da ninguno a partir de 8128... Se ve que no estaba por la labor de perder su tiempo comprobando si

$$(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+...+2^n) = 2^{n+1}-1$$

era o no un número primo para cada valor de n, a partir de 6.

Propongo al lector que haya llegado hasta aquí, que calcule DE CABEZA (o con una calculadora o una hoja de cálculo) el quinto número perfecto. Merece la pena....¡Sorpresa!

Los 10 primeros

Los que lo hayan hecho habrán descubierto por qué Nicómaco no siguió con la lista. Se había equivocado en algo...

Por cierto, los números de la forma $2^k - 1$, que son primos son los populares primos de Mersenne. El más grande conocido en 2006 era:

$$2^{32582657}-1$$

Un número con 9 808 358 dígitos. Es el 44º número primo de Mersenne

Así que podemos afirmar que el mayor número perfecto conocido hasta la fecha es:

$$(2^{32582657}-1) \cdot 2^{32582656}$$

Y por ahora es el cuadragésimo cuarto número perfecto. ¡Sólo 44 números perfectos con menos de 10 millones de dígitos! Efectivamente son escasos. Muy escasos.

El número primo de Mersenne más grande conocido en 2006 era:

$$2^{32582657}-1$$

Un número con 9.808.358 dígitos. Es el cuadragésimo cuarto número primo de Mersenne.

Y sin embargo Nicómaco afirma que hay infinitos. ¿En qué se basaría? ¿Simple intuición? Ni Nicómaco ni nadie después ha podido demostrar que sea cierto y tampoco nadie ha demostrado que no lo sea. ¿Existirán de verdad infinitos números perfectos?

Cuando Euclides hace su demostración de la proposición 36 del libro IX y encuentra la máquina de fabricar números perfectos, nunca pensó que sería una máquina con tan poca productividad. Tanto esfuerzo para tan poco fruto.

De hecho hasta el siglo XX sólo se conocían 9 números perfectos. El quinto, que tú, lector, has podido calcular con una simple calculadora científica en unos segundos, se descubre en el siglo XV.

$$(2^{13}-1)\cdot 2^{12} = 33550336$$

El sexto y el séptimo se los debemos a un matemático boloñés del siglo XVI poco conocido, Pietro Antonio Cataldi, que tuvo la santa paciencia de hacer una tabla con la factorización de los 800 primeros números. El sexto y el séptimo son

$$(2^{17}-1) \cdot 2^{16} = 8\ 589\ 869\ 056$$
$$(2^{19}-1) \cdot 2^{18} = 137\ 438\ 691\ 328$$

¡Doce dígitos! No está mal. Animado por el éxito Cataldi afirmó, sin probarlo claro, en *Utriusque Arithmetices* que para los exponentes p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 la expresión

$$2^{p-1}(2^p - 1)$$

daba números perfectos.

Tenía razón para los primeros. Para p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, pero sólo una de sus cuatro siguientes aserciones, 23, 29, 31, 37, es correcta, la correspondiente a 31. Será el propio Fermat el encargado de demostrar que los exponentes 23 y 37 no proporcionan números perfectos. Sin embargo nada dice de 29 y 31. Y no es de extrañar, que ya lo dice el propio Mersenne hablando del trabajo de factorizar estos números de tantos dígitos:

> (...) para decir que un número dado de 15 o 20 dígitos es primo, o no, haría falta todo el tiempo del mundo.

Por cierto, el avezado lector ya habrá descubierto que el pobre Nicómaco estaba poco inspirado pues, en contra de su afirmación de alternancia entre las cifras 6 y 8 como terminaciones, el quinto y el sexto números perfecto terminan ambos en 6. Se le puede disculpar el lapsus sobre todo pensando en sus pobres herramientas de cálculo aritmético. Con un ábaco no se podía ir muy lejos...

Para encontrar el siguiente, el octavo, hay que esperar casi doscientos años y, ¡como no!, viene presentado por un genio: el mismísimo Euler en 1732.

$$(2^{31}-1) \cdot 2^{30} = 2\ 305\ 843\ 008\ 139\ 952\ 128$$

(de 19 dígitos)

De paso demostró que el número $(2^{29}-1)$ no era primo y por tanto $(2^{29}-1)\cdot 2^{28}$ no es perfecto.

A lo largo del siglo XIX sólo se descubrirán dos nuevos números perfectos. El décimosegundo correspondiente al exponente 127:

$$(2^{127}-1)\cdot 2^{126}$$

descubierto por Lucas en 1876 y el noveno correspondiente al exponente 61:

$$(2^{61}-1)\cdot 2^{60}$$

descubierto por Pervusin en 1883.

El décimo y el decimoprimero y todos los que les siguen hasta el trigésimo primero se han descubierto ya en el siglo XX. Y los últimos seis a partir del año 2000.

Todos terminan en 6 u 8. En algo llevaba razón Nicómaco

La demostración no es complicada.

Las potencias de 2 terminan de forma secuencial en 2, 4, 8 y 6

Para los valores de n = 1, 5, 9 ... sólo el primero proporciona un número perfecto, el 6. El resto, al ser n + 1 par, hace que $(2^{n+1}-1)$ no sea primo.

El resto de los números perfectos sale de las filas segunda y cuarta y por tanto terminan forzosamente en 6 u 8, aunque no de forma alternada.

n	Terminación de 2^n	Terminación de $2^{n+1}-1$	Terminación de $(2^{n+1}-1)\cdot 2^n$
1, 5, 9...	2	3	6
2, 6, 10...	4	7	8
3, 7, 11...	8	5 (no es primo)	0
4, 8, 12...	6	1	6

Lo que sí está claro es que todos los números perfectos generados con la fórmula de Euclides son pares. Pero ahora nos asalta otra duda: ¿habrá números pares que sean perfectos y que no se ajusten a esa fórmula? Es decir, ¿será cierto el recíproco de la proposición 36 de Euclides para los números pares?

El teorema de Euclides-Euler de los números perfectos

> Si la suma de las n primeras potencias de 2 es un número primo, entonces el producto de la suma por la última potencia sumada es un número perfecto. Y además todo número perfecto par es de esta forma.

Y otra vez Euler, en su *Tratactus de numerorum doctrina*, nos proporciona una demostración que luego completará en su obra *De numeris amicabilibus*.

Veamos esta demostración, según sus propias palabras:

> Un número perfecto N es un número cuya suma de sus divisores S(N) es dos veces más grande que él mismo. Así, si S(N) = 2N , N es un número perfecto.
>
> Si es par será de la forma $2^n A$, siendo A un número impar, primo o compuesto. Ahora bien, si
>
> $N = 2^n$ A , tendremos que S(N) = $(2^{n+1}-1)$ S(A), de donde se deduce que
>
> $$\frac{S(A)}{A}=\frac{2^{n+1}}{(2^{n+1}-1)}$$
>
> Como el numerador es una unidad mayor que el denominador, no puede superar a la suma de los divisores del denominador, es decir, es igual o inferior a la misma. En el segundo caso no hay solución, y en el primero no existirá solución a menos que $2^{n+1}-1$ no sea un número primo. Así cada vez que $2^{n+1}-1$ sea un número primo, es preciso tomar $A=2^{n+1}-1$, y entonces tendremos un número perfecto $N=2^n(2^{n+1}-1)$.
>
> Así todos los números perfectos pares están contenidos en esta fórmula $2^n\,(2^{n+1}-1)$, con la condición de que $(2^{n+1}-1)$ sea un número primo, lo que sólo ocurre si n +1 es un número primo, aunque no es cierto que todo número primo de la forma n+1 haga que $2^{n+1}-1$ sea prim.

Euler comete en esta demostración un pequeño fallo, al suponer que al ser

$$\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1}$$

irreducible, también lo ha de ser la fracción

$$\frac{S(A)}{A}$$

Podría ocurrir que

$$\frac{S(A)}{A}=\frac{k\cdot 2^{n+1}}{k\cdot(2^{n+1}-1)}.$$

Euler analizará este caso y demostrará que es imposible en su trabajo *De numeris amicabilibus*.

Pero Euler no se atreve a afirmar que éstos sean los únicos números perfectos. Es más, afirma que hasta entonces nadie lo ha demostrado, pero que eso no significa que existan.

¿Existen números perfectos impares?

Descartes, en una carta a Mersenne, ya confíaba poder demostrar que los únicos números perfectos pares eran los de Euclides y que si había números perfectos impares tenían que ser el producto de un número primo por un cuadrado cuya raíz fuese un producto de números primos.

Euler, cómo no, otra vez Euler, comenzaría la carrera de descubrir como habría de ser ese raro ejemplar de número perfecto impar en el caso poco probable de que existiera...

> Si existe un tal número perfecto tendrá la forma
>
> $$(4n+1)^{4\lambda+1} P^2$$
>
> donde P es un número impar y $4n + 1$ un número primo.

Sylvester, en 1888, basándose en el hecho de que la suma de los inversos de los divisores de un número perfecto es igual a 2, demostró, y no es muy complicado, que de existir un número perfecto impar debe tener al menos tres factores primos distintos.

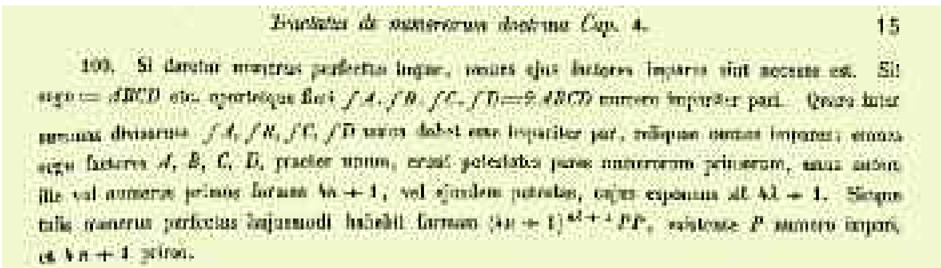
Hoy gracias a la ayuda de potentes ordenadores sabemos que de existir un número perfecto impar ha de tener al menos 8 factores primos distintos y que ha de ser mayor que 10^{300}.

A la mayoría de nosotros este dato nos haría pensar que es inútil proseguir la búsqueda. Y sin embargo sólo hay 12 numeros perfectos pares con menos de 300 cifras...

La búsqueda, o la demostración de que no hay que continuar buscando, nos sigue esperando.

Me temo que durante muchos años los números perfectos van a traer a los matemáticos...

DE CABEZA



Epígrafe 109 del Tratactus de numerorum doctrina

REFERENCIAS BIBLIOGÁFICAS

CRUBELLIER y SIP, (1994): *Histoires de problèmes. Histoire des mathématiques,* IREM, París.

DUNHAM, William, (2000): *Euler el maestro de todos los matemáticos*, Ed. Nivola, Madrid.

EUCLIDES, (1994): *Elementos*, *Libros V-IX*. Ed Gredos. Madrid.

EULER, (1994): *Tratactus de numerorum doctrina capita sedecim, Opera Omnia vol. I-V,* Leipzig. Disponible en Internet en: *http://math.dartmouth.edu/~euler/pages/E792.html*

EULER (1994): *De numeris amicabilibus. Opera Omnia vol. I-V*. Leipzig . Disponible en Internet: *http://www.math.dartmouth.edu/~euler/pages/E152.html*

WAGON, Stan, (1985): "Perfect numbers" en *The Mathematical Intelligencer*, 7 (2) (1985), pp. 66-68.

SUMA 56
Noviembre 2007, pp. 111-118

Biblioteca

Mi biblioteca particular

Emilio Pedro Gómez

Destaca unos pocos libros de matemáticas (o de su enseñanza) que a lo largo de tu vida te hayan influido de forma especial y explica por qué fue, así como si crees que siguen de actualidad.

Para mucha gente de mi generación, que acabamos *Exactas* antes de que falleciera el ilustre –que no ilustrado– dictador, los libros de matemáticas eran poco más que complementos de los apuntes que tomábamos en la facultad. Constituían un elemento más de aquel país en blanco y negro. Significaban instrumentos de la gimnasia mental imprescindible para la superación de los exámenes, antes que atractivos motivos de placer.

Algunos de nosotros, alentados por las reivindicaciones autogestionarias practicadas en la universidad –*lucha por el control* le llamamos en el campus zaragozano– iniciamos nuestra profesión educativa intentando infundir en los alumnos ese espíritu crítico de libertad solidaria que habíamos vivenciado en nuestro enfrentamiento con las autoridades académicas. Tal vez por eso, el libro que marca en mi recuerdo aquella época no tiene un contenido específicamente matemático, sino primordialmente pedagógico: *El maestro compañero y la pedagogía libertaria*. Una muestra de la experiencia llevada a

Complicidad.
El libro quiere leer
mi mente en blanco.

Fernando Corbalán (coordinador de la sección)
medios.suma@fespm.org

cabo en algunos colegios públicos de Alemania que gozaron de una extraña libertad, en un periodo comprendido entre la primera y la segunda guerra mundial. Los propios alumnos iban acordando con el profesor los contenidos básicos a tratar e iban realizando pequeñas investigaciones que integraban diferentes áreas del saber (incluidas, claro, las matemáticas), con una metodología cercana al hoy considerado novedoso *aprendizaje cooperativo*.

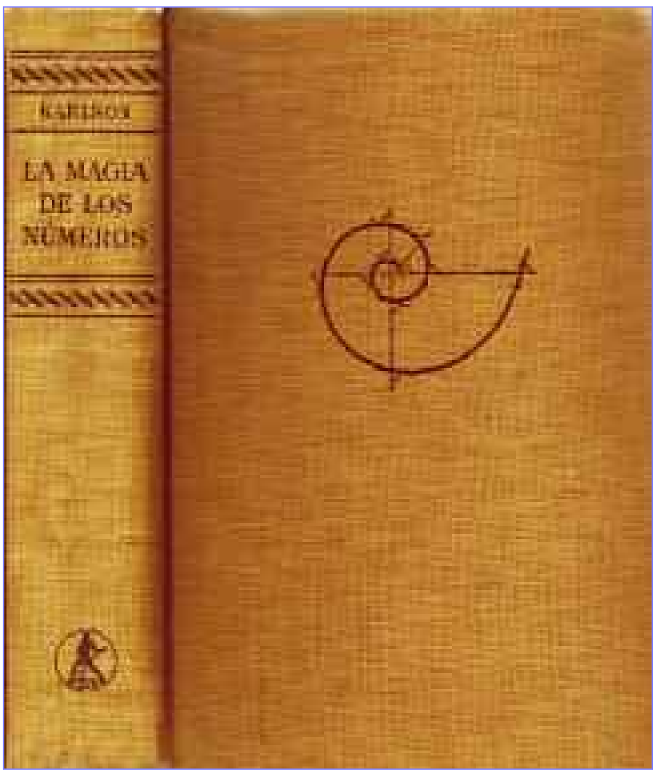
Libros de Historia

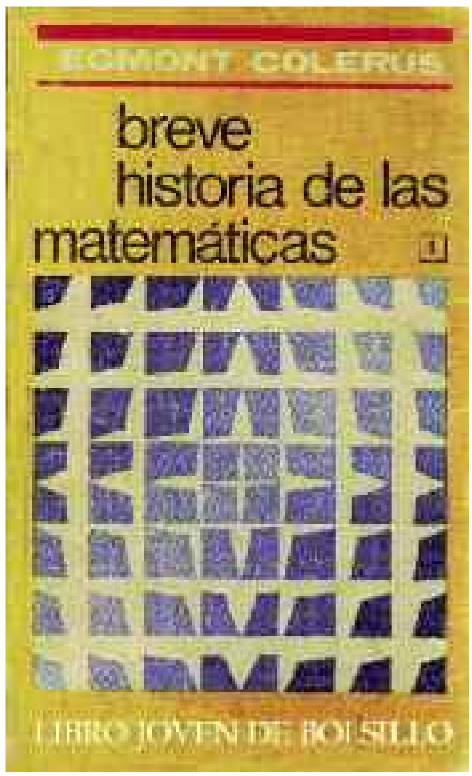
Evidentemente, resultaba inviable aquella práctica en los tiempos autoritarios que corrían. Se presentaban los conocimientos en los compartimentos estancos de cada asignatura, de manera no muy diferente a como hoy, lamentablemente, sigue haciéndose en la generalidad de los centros educativos de este país. Así que, al margen de la práctica de la asamblea y otros instrumentos participativos del alumnado en clase –informe semanal, equipo gestor, plan del día...– tuve que plantearme qué hacer con la didáctica específica del área que me correspondía impartir. Pero, por aquel entonces, no sabía de recursos ni publicaciones del aprendizaje matemático alternativo que buscaba. Una primera y relativa tabla de salvación fueron los libros de historia de las matemáticas. El azar trajo a mis manos uno de ellos: *La magia de los números,* de Paul Karlson (Editorial Labor, 1960). Un libro de matemáticas en el que lo mismo podías encontrarte la imagen de una guía de ferrocarriles, un tablero de ajedrez o la clasificación de la liga española de fútbol. Donde era posible descubrir una introducción al mundo de los vectores a través de un hombre con una botella de ron que corre desconsolado en la cubierta de un trasatlántico perseguido por un tiburón, un ejemplo concreto del lenguaje gráfico numérico de la tribu de los papúes, o una reproducción del cuaderno de apuntes donde Newton tomaba minuciosa nota de sus gastos cotidianos. Un libro de supuesta aridez científica, marcado por su amenidad.

Después de su lectura vinieron otros de índole similar como *Breve historia de las matemáticas* de Egmont Colerus (sólo conservo uno de los dos ejemplares de que consta la edición, uno de los libros de mi biblioteca más gastados por el uso), donde encontré el primer enunciado poético de un problema escolar:

> Un quinto de un enjambre de abejas se posa sobre una flor de Silindha; tres veces la diferencia entre los dos números voló a las flores de Kutuya, y se quedó una sola abeja que se alzó por el aire, igualmente atraída por el grato perfume de un jazmín y de un pandamus... Dime tú ahora, mujer fascinante, cuál era el nº de abejas.
>
> Bhaskaracarya

Me sirvieron estos libros para animar mis clases con la introducción histórica de ciertos conceptos y el apunte de algunas de sus conexiones con la realidad. Y poco a poco fui enriqueciendo estas lecturas con otras que aportaban una perspectiva social que les faltaba. Principalmente *Ciencia y filosofía en*





la antigüedad, de Farrington B. (Ariel, 1972) e Hist*oria social de la ciencia*, de *John D. Bernal* (Península, 1976) que me desvelaron unas interacciones entre la evolución de la ciencia y de la sociedad que se me habían ocultado. Tendrían que pasar algunos años más para tomar conciencia de la limitación eurocentrista de los manuales históricos que hasta entonces conocía. El aporte de *La cresta del pavo real,* de George Cheverghese Joseph (Ediciones Pirámide, 1996) me resultó revelador:

> El tratamiento estándar de la historia de las matemáticas europeas muestra un sesgo historiográfico muy arraigado en la selección e interpretación de hechos. La actividad matemática de fuera de Europa ha sido ignorada, devaluada cuando no distorsionada.

Hubo otros libros de *matemática recreativa* que me ayudaron a insertar en mis clases algunas actividades esporádicas de carácter lúdico. Usé problemas de Martin Gadner y, sobre todos, *¿Cómo se llama este libro? El enigma de Drácula y otros pasatiempos lógicos,* de Raymond M. Smullyan (Ediciones Cátedra) que incluía algunos ingeniosos e intrigantes retos asequibles a mis alumnos de bachillerato.

Libros de Didáctica

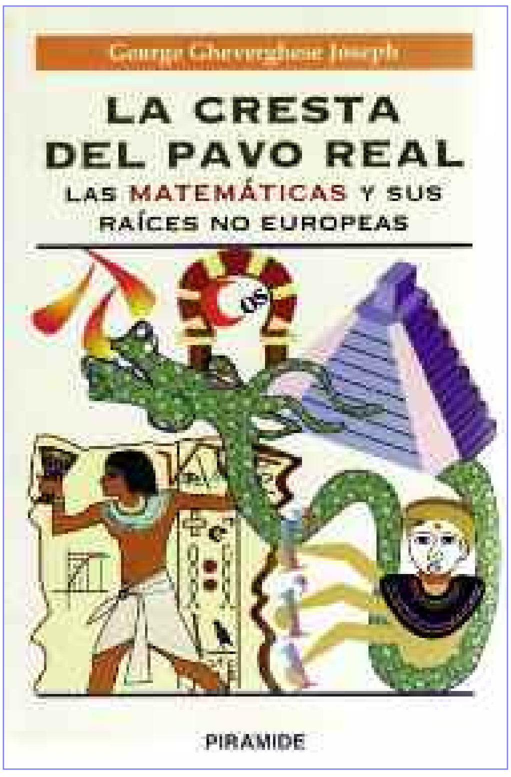
En la década de los ochenta, el panorama de aridez de publicaciones de didáctica matemática se transforma a mis ojos. Publican sus trabajos los grupos Zero de Cataluña, Azarquiel de Madrid, Cero de Valencia, Miguel de Guzmán... Nos llegan aires frescos de otras latitudes: Polya, Mason-Burton-Stacey, Shel Centre for Mathematical Education... Los recursos y materiales didácticos, antes tan escasos, se prodigan en un crecimiento aparentemente exponencial. Parece vislumbrarse un proyecto de aprendizaje de las matemáticas, sustentado en la metodología propia de la resolución de problemas, impulsado desde el propio Ministerio de Educación y sus recién creados Centros de Profesores. Un espejismo que la tozuda realidad ha ido, sin compasión, deconstruyendo.

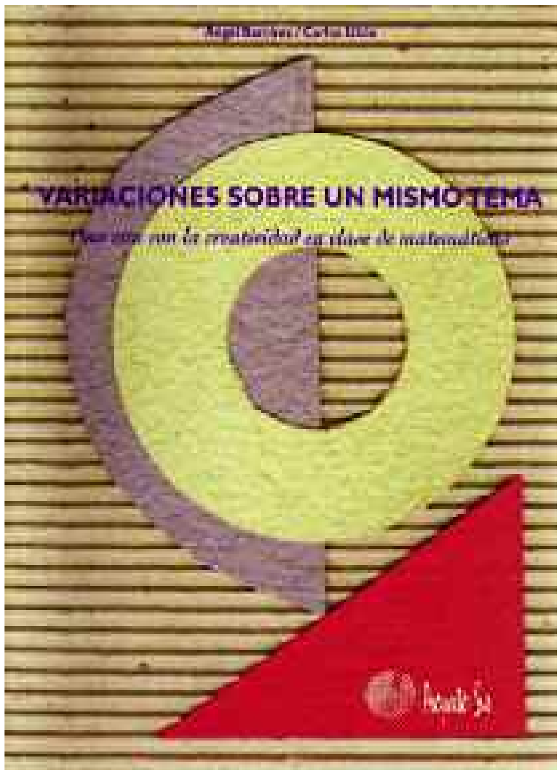
Tal vez por eso, significa tanto para mí la experiencia recogida en *Variaciones sobre un mismo tema. Una cita con la creatividad en clase de matemáticas,* de Ángel Ramírez y Carlos Usón (Proyecto Sur, 1998). Un libro donde, desde esa mencionada perspectiva de resolución de problemas, e inspirado en las propuestas de Fielker, el grupo Cero o Paco Hernán, se muestran los resultados extraordinarios que es posible lograr en una clase ordinaria de alumnos normales en institutos iguales a cualquier otro, con un profesor como Ángel o Carlos convencidos con J. L. Higgins, de que:

> No obtenemos sino lo que pedimos... No hay metas imposibles, hay actitudes desconfiadas y pusilánimes.

Eso sí, siendo muy conscientes de que

> Sólo si está estimulada nuestra propia creatividad, podemos aspirar a potenciarla en nuestros alumnos y alumnas.





Un libro que, desde la práctica cotidiana de una clase de matemáticas y de los problemas resueltos por los alumnos, reflexiona sobre la vida y el arte, sobre la utilidad del uso del tiempo, sobre la atención a la diversidad como estímulo de la creatividad y la autoestima... Para los que actualmente llevamos una práctica mucho más acomodaticia de la enseñanza de las matemáticas, un libro que duele, que te pone la carne pedagógica en carne viva.

Matemáticas en lecturas ajenas a las matemáticas

Pudiera sorprender la cantidad de poetas que han escrito algún poema con contenido matemático, que han utilizado permutaciones o series en su elaboración, que-en ocasiones de forma descarnada- insertan terminología matemática en sus versos, que emplean una impensable variedad de ritmos, o que han sabido apropiarse de estructuras geométricas en su creación. Un ejemplo muy significativo lo constituye *Fórmulas para Cratilo,* del escritor argentino Bernardo Schiavetta, donde cada poema constituye un signo mimético y, en ocasiones, la significación inherente a este signo es el tema mismo de las palabras del poema. Una fusión de forma y de sentido, donde la forma se corresponde con sugerentes configuraciones geométricas: poema-círculo, *uróboro* –serpiente fabulosa que se muerde la cola–, poemas cuadrado, *carmina quadrata* –el número de versos es igual al número de letras de cada verso–, laberintos cúbicos, poemas de variables simetrías, *estella octángula* –octaedro estrellado formado por los dos tetraedros entrecruzados que están contenidos en el cubo–, o el llamado *Cubo de Kepler* –la perspectiva de un cubo que se obtiene al dividir un hexágono en tres partes iguales.

No me resisto a dar a conocer el curioso "Cuarenta poemas" de Jacques Roubaud, un matemático y poeta francés, miembro activo del OULIPO, colectivo descendiente del grupo Bourbaki por un lado y del surrealismo francés por el otro. Entre sus páginas es posible encontrar un poema dedicado a uno de los metros de mármol colocados en 1796 en París o versos más o menos *matemáticos* como estos:

> Tal vez nuestras calles no son más que sombras
> de números que vierte la lluvia,
> cachitos de la infinita calle de los números
> donde de por vida bajar y subir.

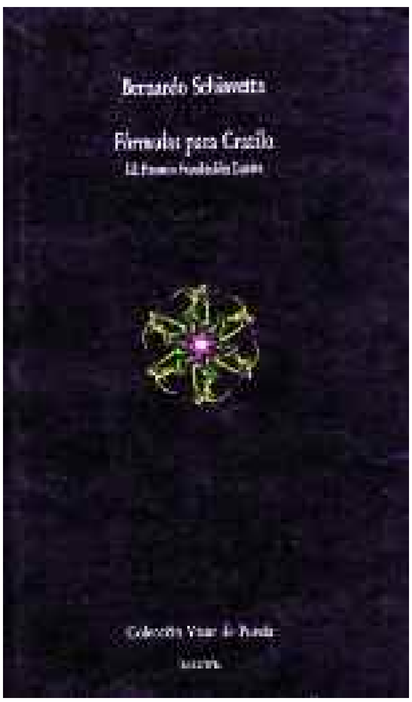
Afirmaciones *chocantes* referidas a las matemáticas

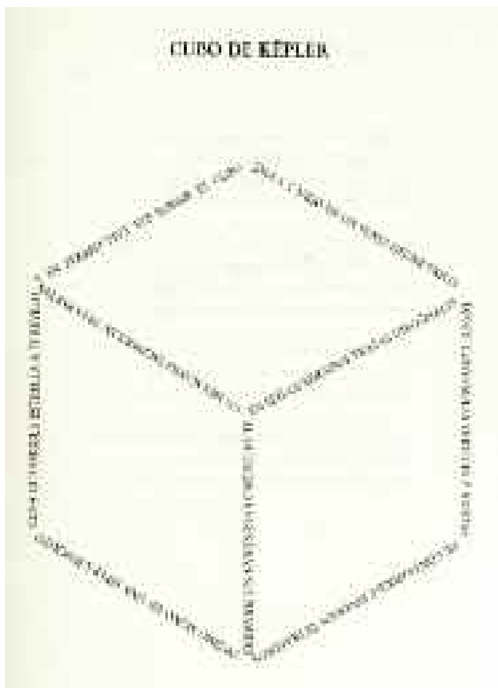
> Nunca he hecho algo que fuera útil....el valor de una vida matemática es igual a cero...sólo tengo una posibilidad de sustraerme al veredicto de la completa trivialidad y consiste en que se me conceda que he creado algo que merecía la pena ser creado.

Godfrey Harold Hardy

A este respecto, matiza Hans Magnus Enzensberger, en su excelente *Los elixires de la ciencia* (Anagrama, 2002):

> La actitud de Hardy se aproxima a la de un artista. Desde un punto de vista estrictamente empresarial, no sólo





Ovidio y Bach lo habrían tenido difícil, sino también Pitágoras y Cántor. Su trabajo apenas habría podido producir ese 15% de interés inmediato que hoy es considerado normativo bajo el pabellón del *shareholder value*. Claro que entonces una parte abrumadora de las actividades humanas resultarían inútiles y la investigación matemática se cuenta entre las más baratas de la producción cultural. El valor del nuevo acelerador de partículas CERN de Ginebra ronda los 4 o 5 mil millones, mientras que el instituto Max Planck de Matemática Teórica de Bonn –centro investigador de fama mundial– absorbe sólo el 0´3% del presupuesto de la sociedad Max Planck. Y Galois o Abel fueron pobres como ratas. Sería difícil encontrar genios tan baratos.

Claro que las afirmaciones más chocantes relacionadas con las matemáticas las he encontrado en libros de poemas. Recuerdo un verso de José Mª Parreño:

...elegir una cifra y repetirla hasta que sepa a fruta

Último libro sobre matemáticas

Atañe al mundo matemático y, simultáneamente, al narrativo. Recientemente he tenido la suerte de conocer *Apropiaciones debidas*, un libro de José del Río todavía en el umbral de su publicación, en el que logra enlazar historias muy dispares de muy diversas novelas que tienen en común su relación con las matemáticas. Imagino que, dado su logro de escarbar con fértil inteligencia en esa frontera tan estereotipada entre matemáticas y literatura, y el empeño tan exhaustivo de la empresa, podría convertirse en un libro imprescindible para los interesados en las conexiones entre ambas disciplinas.

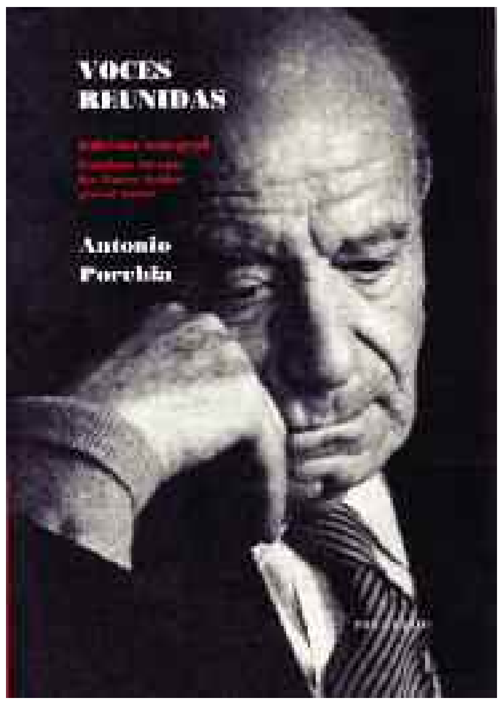
Mi último libro no matemático

Voces reunidas constituye posiblemente la mejor aproximación posible a las obras completas del que fuera poeta *secreto* argentino –aunque nacido en Italia– Antonio Porchia. Nos ofrece en este libro unos íntimos, breves, certeros, misteriosos pensamientos que, con su humilde sabiduría, superan el género del aforismo para convertirse en pura poesía. He aquí algunas muestras:

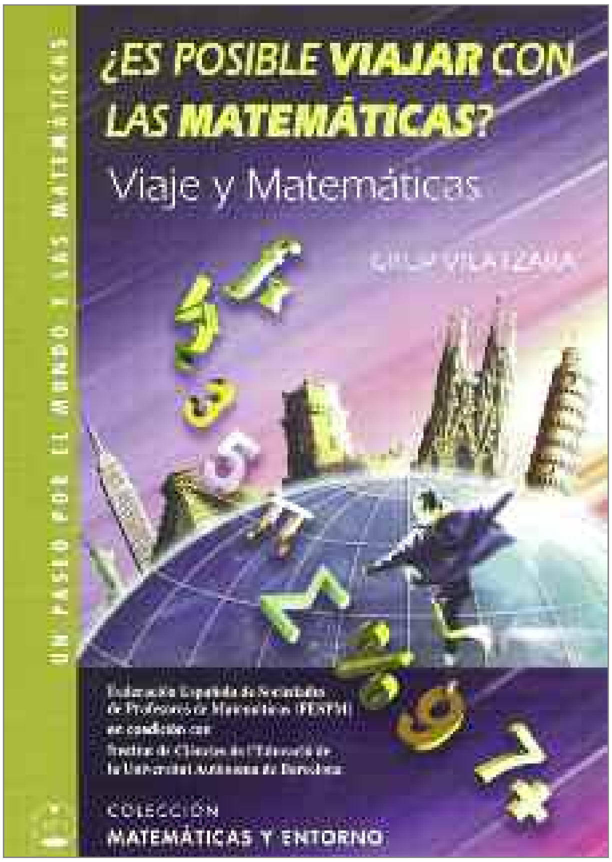
Las pequeñeces son lo eterno, y lo demás, todo lo demás, lo breve, lo muy breve.
El misterio apacigua mis ojos, no los ciega.
La razón se pierde razonando.
Te ayudaré a venir si vienes y a no venir si no vienes.
Un infinito de cosas es infinitamente más que todas las cosas y no es todas las cosas.

Con su humanizado y profuso prólogo, el CD anexo con las *voces* leídas por el propio poeta, y la evocadora muestra de cartas y fotografías... al pasar las páginas uno tiene la sensación de irse adentrando en el cuarto de estar interno del autor.

Despido este fugaz paseo por "Mi biblioteca particular" con las mismas palabras que empleaba Antonio Porchia para decir adiós a sus amigos: *Traten de estar bien... Acompáñense.* ■



Escaparate: Viajes y paseos matemáticos



¿Es posible viajar con las Matemáticas? Viaje y Matemáticas
Grup Vilatzara
Colección Matemáticas y entorno, nº 1
FESP/ICE-UAB, Badajoz, 2006
ISBN: 84-934488-2-6
143 PP.

No hay que ser muy perspicaz para apreciar la importancia de las Matemáticas en el sistema educativo: desde que se traspasa el umbral de la escuela por primera vez hasta que se culmina la enseñanza obligatoria es una de las asignaturas obligatorias. Pero después de tantos años cursando matemáticas (casi) todos los días, si se pregunta a cualquier ciudadano en qué utiliza las matemáticas en su vida diaria, tenemos una probabilidad muy alta de que nos conteste que para comprar y vender, para llegar a fin de mes y poco más. En resumen que lo más habitual es que no 'necesiten' mucho más que las clásicas *cuatro reglas*.

Algo de *culpa* debemos tener el colectivo de profesores de matemáticas que, en su conjunto, no debemos de abrir demasiado los ojos de nuestros alumnos para que puedan ver las matemáticas en la sociedad, en su organización y en la solución de los problemas que se les planteen. Pero, a pesar de que esa es la situación global, hay muchos ejemplos, individuales y

Fernando Corbalán
medios.suma@fespm.org

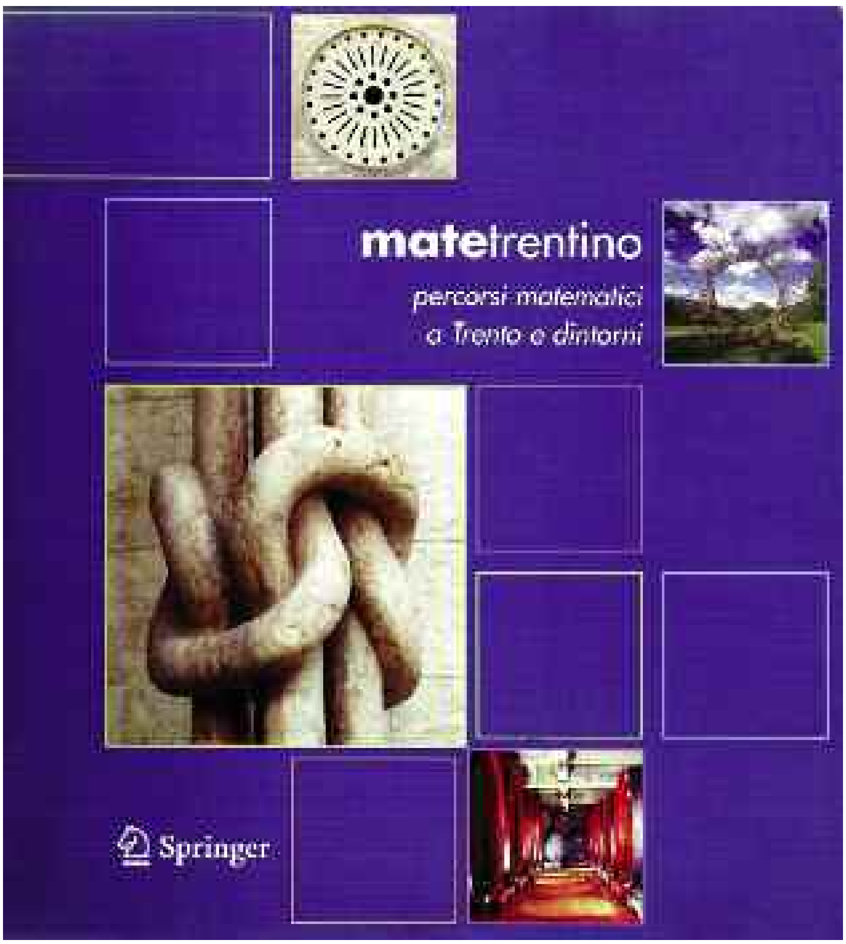
colectivos, de que no sólo se preocupan de mostrar la presencia de las matemáticas, sino que además lo publicitan. A dos de esos ejemplos en forma de libro dedicamos este comentario.

El primero de ellos está escrito por un conocido grupo de profesores de secundaria y universidad del entorno de Barcelona que desde hace años realizan con sus alumnos una serie de viajes, reales o imaginarios, a lugares próximos y lejanos, accesibles y remotos. Con el convencimiento declarado de que *si, como dicen, algunos errores del pensamiento humano se corrigen viajando, hagamos que nuestros alumnos y alumnas viajen, aunque sea virtualmente, por las matemáticas de las culturas del mundo. Seguro que, además de matemáticas, aprenderán valores que preparan para un mundo mejor*.

Tras un prólogo de Claudi Alsina y una presentación, explicitan los principios de su propuesta y van desgranando sus etapas. Se detienen en Barcelona y, con parada más larga, en la Plaza de la Glorias, para reflexionar sobre *La medida de las cosas: el metro*. Hacen un viaje en el tiempo para visitar a los íberos y romanos y finalizan su recorrido cercano con una mirada matemática al modernismo. Se desplazan después, ya en viajes virtuales, a Centroamérica para decodificar lenguajes y descubrir otros sistemas de numeración; dan un salto a Chicago y su impresionante colección de rascacielos y finalizan en un lugar exótico e inhóspito: el Polo Norte. En ese largo camino se han podido descubrir variados aspectos matemáticos que están en la vida social y en el planeamiento urbano, en la construcción y en el descubrimiento histórico, en el arte y la técnica... En resumen, en los fundamentos de la sociedad. Y todo ello no por medio de discursos sino por el descubrimiento de cada uno de los alumnos/viajeros.

En definitiva una fuente de sugerencias para realizar esos recorridos u otros parecidos que permitan ir viendo matemáticas, y una contestación afirmativa y entusiasta a la pregunta del título: ¡Se puede viajar con las matemáticas! Y constituye el inicio por parte del Servicio de Publicaciones de la FESPM de una colección que esperamos continúe con propuestas tan sugerentes y útiles.

Matetrentino es un catálogo ampliado de la exposición del mismo nombre que tuvo lugar en Trento (Italia) del 18 de febrero al 29 de octubre de 2006 (puede verse información en



MATETRENTINO. PERCORSI MATEMATICI A TRENTO E DINTORNI
D. Luminati/I. Tamanini (editores)
Springer-Verlag Italia, Milano, 2006

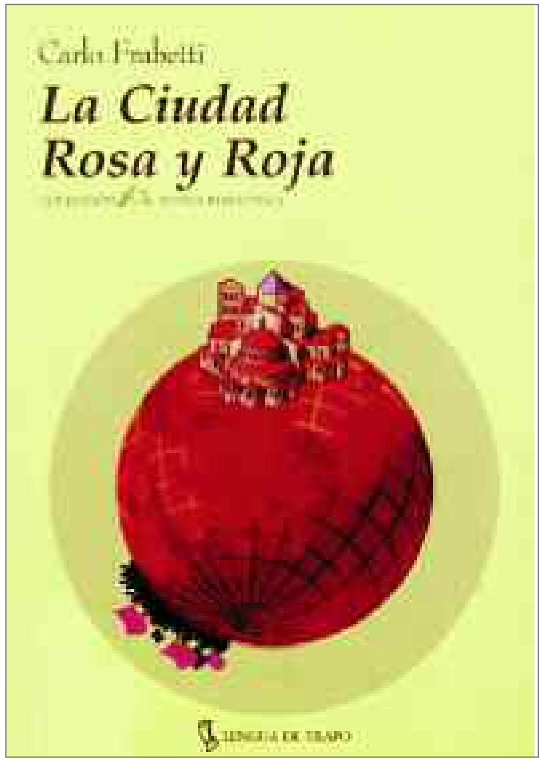
la dirección *http://www.mtsn.tn.it/matetrentino/dentro.htm*) y que era continuación de la misma idea de otra titulada *Matemilano*, que estuvo expuesta en Milán del 12/9/2003 al 30/5/2004 (*http://matemilano.mat.unimi.it/presenta.htm*). En su génesis participaron profesores universitarios, responsables de museos y profesionales de la comunicación y el diseño.

En la primera parte del libro hay cuatro capítulos dedicados a topología, máximos y mínimos, visualización y simetría. Todos ellos tienen interesantes ideas y están acompañados de hermosas ilustraciones, de aparatos y de lugares naturales o artísticos, en los que se plasman los conceptos que se tratan. Cierto que Italia proporciona muchos ejemplos artísticos de casi todo, pero hace falta también una profunda labor de búsqueda y depuración de cada tema para llegar a encontrar ejemplos tan apropiados y tan bellos (y si se hace en cualquier otro lugar se tendrían también excelentes resultados).

La segunda parte trata de la exposición en sí misma, con reflexiones sobre cada uno de los aspectos a tener en cuenta (el proyecto, la relación con el arte, los títulos...) y, como elemento a destacar, se detiene en la parte dedicada de forma espacial a los niños de 3 a 6 años, que solían ser los grandes olvidados en las exposiciones científicas (y que por suerte lo son cada vez menos). E incluye la reproducción de todos los pósteres de *Matetrentino* y que constituyen un magnífico recorrido por la región. Con todo ello se conforma un libro muy bien editado, con abundantes y magníficas fotos y todo un caudal de sugerencias para cualquier exposición matemática que nos propongamos. ■

SUMA 56
Noviembre 2007, pp. 119-126

La ciudad de colores



La ciudad Rosa y Roja
Carlo Frabetti
Lengua de trapo
Colección Nueva Biblioteca, n.º 36
Madrid, 1999
ISBN: 84-89618-35-6
140 pp.

En esta ocasión cambiamos de estilo en el libro presentado, siendo esta vez un ejemplar de literatura de divulgación científica, y, más concretamente, de razonamiento lógico llevado hasta las últimas consecuencias.

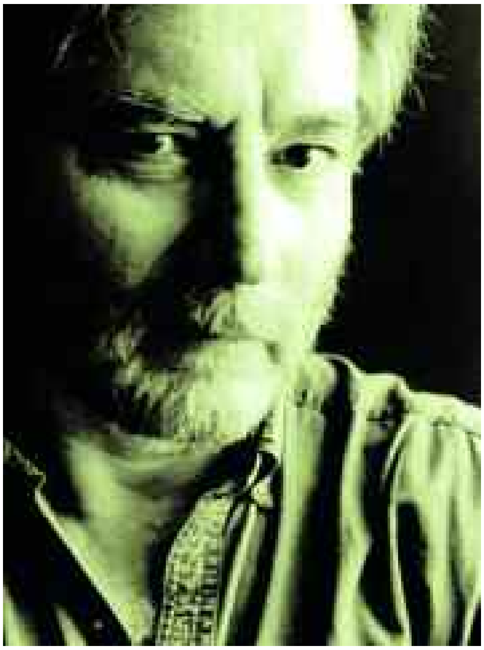
En la contraportada podemos leer su presentación:

> ¿Podría Narciso abrazarse a sí mismo si su imagen especular adquiriera realidad corpórea? ¿Es realmente la geometría un lenguaje universal de la inteligencia? ¿Han sido escritos ya todos los versos posibles? ¿Es la lectura una actividad degradante? ¿Cuál es el centésimo nombre de Alá? ¿Podría un Dios omnisciente predecir el próximo movimiento de un jugador de ajedrez? ¿Quién y por qué disparó la flecha del tiempo? ¿Cómo pueden menguar las murallas de una ciudad a medida que ésta crece?
>
> Éstas son algunas de las preguntas que, con sus asombrosas respuestas, asaltan al lector desde las páginas de *La ciudad Rosa y Roja*, libro que retoma varias de las inquietan-

Constantino de la Fuente Martínez
literatura@revistasuma.es

tes ideas expuestas en la novela *Los jardines cifrados* (publicado en esta misma colección) y las desarrolla mediante el apólogo, la parábola, el diálogo socrático o el cuento maravilloso, con una singular mezcla de ironía, rigor intelectual y belleza literaria.

Un libro inclasificable y perturbador que, a partir de los más antiguos recursos del arte de narrar y conmover, propone un nuevo género en el que lo científico y lo literario se armonizan y complementan. ■



Carlo Frabetti es italiano (Bolonia, 1945), pero reside en España desde los 8 años y escribe habitualmente en castellano. Escritor y matemático, miembro de la Academia de Ciencias de Nueva York, cultiva asiduamente la divulgación científica y la literatura infantil. Ha publicado más de 40 libros, muchos de ellos para niños y jóvenes: *primero era un matemático que escribía por hobby, ahora es al revés*. Su novela infantil *La magia más poderosa* (1994) ha sido traducida a varios idiomas y ha superado los cien mil ejemplares. También ha creado, escrito o dirigido numerosos programas de televisión, como *La Bola de Cristal, Ni a tontas ni a locas, Tendencias* y *El Duende del Globo,* y ha estrenado varias obras de teatro.

Él mismo se define como *un ratón de biblioteca que ha tratado de no convertirse en ratón de su propio cerebro dedicando demasiado tiempo a la literatura y, sobre todo, a los números.* Una de sus más recientes obras, *El libro infierno,* constituye todo un ajuste de cuentas con sus filias y sus fobias. ■

Nuestro comentario

Hay veces, sobre todo cuando se leen narraciones cortas y seguidas, que al final de cada una de ellas uno percibe una determinada sensación interior que le sirve para evaluar, de forma global y rápida, el relato. Es lo mismo que nos puede ocurrir después de leer un chiste de Peridis en *El País*... Los ejemplos anteriores ilustran fehacientemente lo que podemos sentir después de la mayoría de los relatos cortos que componen *La ciudad Rosa y Roja:* el esbozo de una sonrisa, un pensativo "...muy ingenioso", la imagen de Nietzsche y su subversión de valores, o los pensamientos de Fernando (un compañero de departamento) cuando dice: *¡qué culebrilla!*

Frabetti, en *La ciudad Rosa y Roja*, desea pasearnos por muchos caminos cuyos finales son, a veces, sorprendentes por inesperados, a veces contrarios a lo tradicionalmente esperado, pero siempre lógicos y coherentes con los principios establecidos en su inicio.

Si, como decíamos, son muchos los caminos, no son menos los personajes y los temas que nos podemos encontrar: el mundo clásico y algunos de sus mitos; la dicotomía Dios y diablo; la ciencia en general y, con abundancia, las matemáticas y los matemáticos; el lenguaje, la poesía y las palabras; los libros y las bibliotecas....; sin olvidar el espacio y el tiempo, la recursividad hasta el infinito, los mapas y territorios, o personajes reiterados como el matemático, el filósofo, el político, el economista y varios seres mágicos a medio camino entre magos, druidas o duendecillos, todos ellos, imaginamos, de baja estatura. ■

Una propuesta de trabajo en el aula

El libro que nos ocupa tiene una ventaja de la que otros no disfrutan: su versatilidad. El hecho de estar compuesto de pequeñas narraciones independientes, nos ofrece la posibilidad de encomendar la lectura de determinados capítulos en vez de la lectura completa. Esta es una cuestión para decidir por el profesor.

Por otra parte, el guión que proponemos es lo suficientemente amplio como para que pueda ser propuesto también de forma parcial, ya que cada tema contiene varias cuestiones a desarrollar, resolver o reflexionar, convirtiéndose así en un pequeño trabajo con entidad suficiente como para ser abordado de forma exclusiva por determinados alumnos/as.

Como siempre, son variados los niveles a los que se puede dirigir el guión, de ESO o Bachillerato. Esta circunstancia está más marcada por el tipo de alumno o alumna a los que se plantee, que por el nivel educativo en el que se encuentren.

Pasamos, a continuación, a presentar la propuesta de trabajo.

El tiempo es una forma de orden

Vamos a tomar un primer contacto con algunos nombres que figuran en distintas páginas del libro y que son personajes muy relacionados con las matemáticas: profesores, filósofos, matemáticos, escritores, etc.

- Eratóstenes, Carl F. Gauss, Lewis Carroll, Arquímedes, Anaximandro,Wittgenstein, Jacques Bernouilli

A) Fíjate en ellos y ordénalos cronológicamente.

Cálculos sobre la Tierra

Uno de los personajes anteriores calculó el radio de la Tierra con una aproximación muy cercana a su valor real.

A) ¿Quién fue? Explica la historia y el procedimiento que utilizó para calcularlo.
Suponiendo que la Tierra sea una esfera, vamos a plantearnos algunas preguntas sobre ella:

B) Escogemos un punto de la superficie esférica. ¿Cuántas rectas podemos trazar, que sean tangentes a la esfera en ese punto? ¿Y cuántos planos? ¿Qué relación hay entre ellos?

C) Si una persona se sitúa de pie, en un punto de su superficie y a nivel del mar, ¿hasta qué distancia podría divisar, en función de su altura? Resuélvelo primero para una altura de 1,80 m y después para cualquier altura conocida h.

Relatos con semejanzas

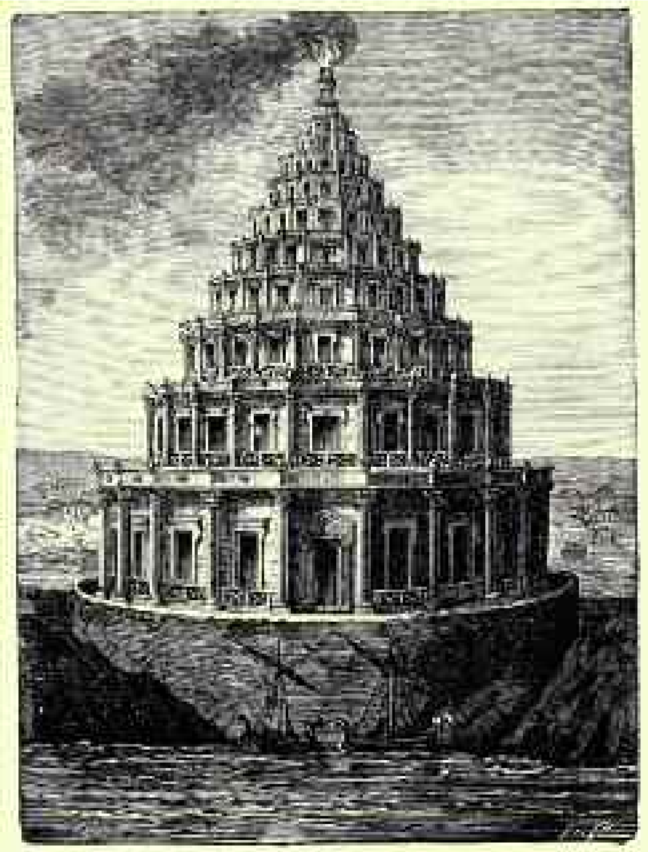
En los relatos “La pulga desmedida” y “El mapa y el territorio” se hace alusión a la escala de un mapa y a la razón de semejanza entre figuras semejantes.

A) Explica el significado de estos conceptos matemáticos:
- figuras semejantes- razón de semejanza- escala

B) Explica razonadamente la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:
- Dos cuadrados son siempre figuras semejantes.
- Dos rectángulos son siempre semejantes.
- Dos triángulos equiláteros son siempre semejantes.

C) ¿Por qué es imposible que exista una pulga con sus dimensiones multiplicadas por 1000?

D) Enumera ventajas e inconvenientes de tener un mapa de escala 1:1.



Érase una vez un viejo mago que poseía una enorme biblioteca, ni siquiera superada por la de Alejandría.

Un lugar importante en la historia de las matemáticas

A) ¿En qué lugar del libro aparece la cita anterior?
B) Recopila información y cuenta la historia de la biblioteca de Alejandría hasta su destrucción final.
C) En Alejandría se podía admirar, además de su biblioteca, una de siete maravillas del mundo antiguo, ¿cuál era? Explica su estructura arquitectónica, dimensiones, superficie, volumen, etc.
D) A lo largo de los siglos, Alejandría fue un foco de cultura y sabiduría, también en lo que hace referencia a las matemáticas. Escribe una pequeña biografía de un hombre y una mujer que sobresalieran como matemáticos de Alejandría.

Las dos cuestiones siguientes profundizan en algunos de los conocimientos matemáticos que surgieron en Alejandría:

E) Explica lo que es una ecuación diofántica y expón algún método para resolver ecuaciones de este tipo. ¿Qué relación tienen las ecuaciones diofánticas con el celebérrimo Último Teorema de Fermat?
F) Explica el origen matemático de la fórmula de Heron. ¿Cómo la obtuvo su autor?

¡Eureka!... Un genio en Siracusa

Arquímedes hizo grabar sobre su tumba... (pág. 35)

A) ¿Qué había grabado sobre la tumba de Arquímedes? ¿A qué resultado matemático hacía referencia? Comprueba su veracidad haciendo los cálculos necesarios en las fórmulas apropiadas.
Arquímedes obtuvo unas aproximaciones del número Π, a partir de polígonos inscritos y circunscritos a una circunferencia.
B) Explica cómo se puede hacer eso y obtén los resultados correspondientes.
Según cuenta Plutarco, el rey Hieron de Siracusa, tenía ciertas sospechas relativas a su corona... y acudió a Arquímedes, que era pariente y amigo suyo.
C) Explica su problema y expón la solución que..., ¡eureka!, consiguió Arquímedes. Por cierto, este momento es el idóneo para dar explicaciones sobre el origen de la celebre expresión *¡eureka!, ¡eureka! ¡Lo he conseguido!*

También son muy famosos unos espejos surgidos de la genialidad de Arquímedes.

D) ¿De qué espejos estamos hablando? Explica el fundamento científico en que se basaban.

E) Comenzábamos haciendo referencia a la tumba de Arquímedes, y ya va siendo hora de hablar de su vida... y de su muerte: Recoge los principales datos de su biografía y explica el trágico episodio de su muerte.

Un monumento para hablar de Gauss

Vamos a dedicar un rato a conocer a uno de los mayores genios de la historia de las matemáticas: Gauss.

A) Siendo niño calculó una suma de una forma ingeniosa. Explica el episodio y su relación con la fórmula de la suma de los términos de una progresión aritmética.

B) También es el autor de una forma de construir, con regla y compás, un polígono regular de 17 lados. Suponiendo que el lado de ese polígono es conocido, encuentra una fórmula para hallar su área en función (exclusivamente) de la longitud conocida del lado.

C) Los números complejos ¿qué clase de números son? Explica alguna aportación de Gauss al conocimiento de estos números.

Como puedes imaginar, Gauss conoció a mucha gente a lo largo de su vida...

D) Elabora una biografía suya.

E) De entre la gente que no conocía en persona y con la que mantenía correspondencia, había alguien que le enviaba las cartas firmadas con un seudónimo. ¿Quién era? ¿Por qué no mostraba su verdadera identidad? ¿Cómo lo supo Gauss? Recoge los principales datos biográficos de este personaje escondido.

Una tumba para hablar de Jakob Bernouilli

Jacques Bernouilli, uno de los padres del cálculo infinitesimal... (pág. 35)

A) El apellido Bernouilli es casi sinónimo de personaje relacionado con las matemáticas. Busca una explicación a la afirmación anterior.

En la universidad de Gotinga hay un monumento dedicado a Gauss...
(pág. 36)

B) Encuentra los tipos de espirales que hay, explica sus características y diferencias esenciales.
C) Y como aparece en la cita del principio, no podemos dejar escapar la oportunidad: ¿Qué es el Cálculo Infinitesimal? En el libro se califica a J. Bernouilli como uno de los padres del Cálculo Infinitesimal.
D) Encuentra otros precursores del Cálculo. ¿Quiénes, casi simultáneamente, lo descubrieron?

Lewis Carroll y el mapa... ¿del país de las maravillas?

A) ¿quién fue Lewis Carroll? ¿Cuál era su verdadero nombre?

... Lewis Carroll alude a ciertos cartógrafos alemanes...
(pág. 56)

¿Qué famoso libro, para niños y jóvenes, escribió? Escribe su biografía.

B) L. Carroll resolvió mentalmente algunos problemas que él mismo se proponía para distraerse, relajarse, o para evitar pensar en preocupaciones. Algunos de ellos te los presentamos a continuación para que los resuelvas tú:

- Sumar los 100 primeros términos de la serie 1·5+2·6+… Sumar también los *n* primeros.
- ¿Cuántos triángulos diferentes existen cuyos ángulos sean todos divisores de 360º?
- Demostrar que la suma de dos cuadrados distintos, multiplicada por la suma de otros dos cuadrados distintos, es igual a la suma de dos cuadrados distintos de dos formas distintas.

La lógica de Los tres sombreros blancos

En ese relato se habla de un rey y del indulto a un condenado.

A) Explica el enunciado del problema de los tres sombreros blancos y dos negros, y la solución obtenida.
B) Resuelve los siguientes problemas lógicos:
  - Un hombre está mirando una foto, en la que hay otro hombre con sombrero, y dice: no tengo hermanos ni hermanas, pero el padre de este hombre es el hijo de mi padre. ¿Qué parentesco hay entre el que mira la foto y el que está fotografiado?
  - Estás de viaje en un país imaginario y te encuentras con dos de sus habitantes: V*erdadcasi,* que dice siempre la verdad excepto los lunes, martes y miércoles, y el *Menticasi,* que miente siempre excepto los lunes, martes, miércoles y domingos. Tú puedes saber el día de la semana en que estás a partir de los dos mensajes que te han facilitado cada uno de ellos:

Verdadcasi: *Ayer fue un día de los que me tocaba mentir.*
Menticasi: *Ayer fue uno de los días en los que tocaba mentir.*

Más tarde, has recordado que, en un determinado momento, Verdadcasi te dijo: *Ayer mentí y mañana mentiré de nuevo* ¿En qué día de la semana te ha podido decir esto Verdadcasi?

Lewis Carrol

Un problema para tirarse de los pelos...

En el relato “El largo duelo” se plantea una pregunta al *astuto lector*.

A) Estudia el enunciado del problema y resuélvelo. Puedes usar la pista que se da en el relato *“La cabellera de la princesa”.* Aprovecha este momento para explicar razonadamente cuál es la duración media de un cabello de la princesa.

Hablando de cabelleras..., hay una idea matemática llamada *Principio del Palomar,* que puede ayudarte a resolver la siguiente cuestión:

B) ¿Podrías demostrar que en España, con más de 40 millones de habitantes, hay varias personas con el mismo número de cabellos? ¿Cuántos, por lo menos, tendrán el mismo número de cabellos?
C) Explica en qué consiste el llamado *Principio del Palomar.*

Sobre números grandes...

Un número sobrecogedor, que ni remotamente alcanzo a concebir.
(pág. 116)

A) Explica las posibles posiciones en las primeras jugadas del desarrollo de una partida de ajedrez.
B) Hablando de números grandes y sin calcular su valor, ¿cuántas cifras tiene el número ?
C) Explica la razón por la que dos espejos paralelos no puedan repetir infinitas imágenes.
D) Hay números grandes que tienen nombre propio, por ejemplo *Google*. ¿Qué número es 1 google? ¿Quién le puso este nombre?
E) Hay un número grande de leyenda; éste es el que resulta en la narración que relata la recompensa solicitada por el inventor del ajedrez. Explica la leyenda, estudia la magnitud del número del que estamos hablando.
F) Un matemático de la antigüedad escribió una obra titulada *El Arenario* en la que estima el volumen de toda la materia existente. Averigua su nombre y explica el método que siguió y los cálculos que planteó.

Laberinto trivial y laberinto irresoluble

Un laberinto sin posibilidad de extravío no merece tal nombre.
(pág. 110)

A) ¿Qué es un laberinto trivial y qué es un laberinto irresoluble?
El laberinto más famoso de la historia –precisamente el del palacio de Labertinto mandado construir por el rey Minos– está relacionado con un ser mitológico llamado *el Minotauro*...
B) ¿De qué laberinto estamos hablando? Cuenta su historia.
En algunas catedrales, palacios, jardines, etc, en distintas épocas, también se construyeron laberintos; unos en el interior de los edificios y otros en el exterior.
C) Encuentra lugares de distintos tipos en los que haya un laberinto. ¿Qué sentido podría tener tal hecho? ¿Qué querían simbolizar con ellos?
D) ¿Hay algún procedimiento para salir de un laberinto? Explícalo con un ejemplo.
E) Comenta la frase:

El que se obsesiona con la búsqueda de la salida del laberinto nunca comprenderá su estructura, que es lo que más interés tiene.

Los laberintos de las catedrales góticas a menudo seguían un modelos concéntrico

La paradoja de "La ciudad incontenible"

> *Siglo tras siglo, las murallas fueron menguando a medida que contenían una ciudad más extensa*
> (pág. 127)

A) ¿Podría ser cierto eso en un planeta que fuera plano?
B) ¿Qué pasaría en un planeta cilíndrico?
C) Explica por qué es posible en un planeta esférico.
D) Cuál es la distancia más corta entre dos puntos de un planeta plano? ¿Y en uno esférico? ¿Y en uno cilíndrico? ■

REFERENCIAS BIBLIOGÁFICAS

CARROLL, L (2005) *Problemas de almohada*. Ed. Nivola.

DUNHAM, W. (2002): *Viaje a través de los genios*, Pirámide, Madrid.

Guedj, D. (2000): *El Teorema del loro. Novela para aprender matemáticas*, Ed. Anagrama, Barcelona.

INVESTIGACIÓN Y CIENCIA (1995): *Grandes matemáticos. Temas 1*. Ed. Prensa Científica, S. A., Barcelona.

KLEIN, M. (1985) *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*, Ed. Siglo XXI, Madrid.

SANTARCANGELLI, P. (1997): *El libro de los laberintos*, Siruela, Madrid

SUMA 56
Noviembre 2007, pp. 127-136

Maria Antònia Canals, Premio *Gonzalo Sánchez Vázquez* a los valores humanos, 2007

Maria Antònia Canals y Pilar Royo, durante el acto de entrega. Foto Miquel Mallen

En el transcurso de las recientes Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas, las JAEM, que se celebraron en Granada los pasados días 4, 5, 6 y 7 de julio, tuvo lugar como acto esperado y emotivo para toda la comunidad que formamos el colectivo de docentes de matemáticas, la entrega del premio Gonzalo Sánchez Vázquez, que de manera tan acertada instauró la junta de la FESPM en recuerdo de quien fue uno de los puntales destacados en la creación de la SAEM *Thales* de Andalucía y de la propia FESPM.

Muchas han sido las semblanzas y recuerdos que se han hecho desde las diversas Sociedades que constituyen la FESPM de nuestro querido y recordado maestro Gonzalo.

Dejando aparte la pericia en sus tareas y su profundo conocimiento de las matemáticas, los que tuvimos la suerte de conocer a Gonzalo coincidimos en recordar de manera primordial su carácter bondadoso y entusiasta, que nos permitía disfrutar de los momentos vividos junto a él.

Pili Royo Regueiro
Joan Carles Ferrer Comalat
FEEMCAT

Jamás faltaba a las citas con sus compañeros docentes para aportar ideas en pro de la mejora de la enseñanza de sus amadas matemáticas. Su interés especial por atraer la atención de las personas jóvenes y ser capaz de contagiarles de su entusiasmo hacia el movimiento asociativo para mejorar los procesos de enseñanza y los métodos de aprendizaje de las matemáticas, ha constituido la seña de identidad de Gonzalo que le han convertido en una persona singular y querida por todos.

Por ello, cuando la FESPM otorga el premio *Gonzalo Sánchez Vázquez* se busca primordialmente reconocer el trabajo por la pervivencia de los valores que nos dejó como legado aquel hombre bueno, preparado y entusiasta que fue Gonzalo, así como su profesionalidad en la transmisión del conocimiento matemático a los jóvenes y a la sociedad en general.

Valoramos pues como un acierto otorgar el premio *Gonzalo Sánchez Vázquez* en la edición de este año a la estimada maestra de maestros, Maria Antònia Canals i Tolosa. En el acto de entrega del premio el pasado 7 de julio en Granada, los más de 800 asistentes pudieron brindar el inmenso cariño y el agradecimiento a Maria Antònia Canals, porque, siguiendo la huella de Gonzalo, es una verdadera maestra que ha hecho de su trabajo un reto personal, vivido con energía, inteligencia, creatividad, responsabilidad y amor. Estas cualidades son las que impregnan todas sus aportaciones a la educación matemática y las que el jurado ha deseado destacar.

La FESPM decidió otorgar el premio *Gonzalo Sánchez Vázquez* a Maria Antònia Canals por su constante lucha por la calidad de la formación del profesorado de Educación Infantil y Primaria; por su personal forma de investigar e innovar, enfrentándose con decisión a los cánones institucionales cuando lo ha creído necesario; por su carácter insistente, con el que ha logrado la fabricación comercial de material didáctico como las regletas; y, finalmente, por su capacidad y energía en la creación y dinamización de grupos de trabajo de maestros y maestras, imprescindibles para la innovación en Didáctica de las Matemáticas. ■

Maria Antònia Canals rodeada del sus colegas de la FEEMCAT, en Granada. Foto FMC

Perfil biográfico de Maria Antònia Canals

Maria Antònia Canals. Foto FMC

El trabajo generoso, vital e incansable, marcan la vida de Maria Antònia Canals, nacida en Barcelona el año 1930 en el seno de una familia muy vinculada al mundo de la enseñanza. Puede decirse que su padre, Emili Canals Ferrer, un ingeniero muy aficionado a las matemáticas que murió cuando Maria Antònia contaba 8 años, fue la primera persona que ejerció una influencia decidida en su vocación, que posiblemente nace a partir de la vivencia personal, íntimamente ligada con el juego, la manipulación y la intuición. También fue decisiva la influencia de sus tías Dolors y Francesca Canals, introductoras del método Montessori en Cataluña. En 1953 se licencia en Ciencias Exactas por la Universidad de Barcelona, a la par que culmina los estudios de Magisterio en la Escuela Normal de Tarragona, para seguir con la vocación marcada por la larga tradición familiar. Paralelamente, cultiva el amor por su país y su pasión por el montañismo.

Sus primeros contactos con la docencia los tuvo en el Liceo Francés, una de las escuelas de mayor prestigio social de Barcelona, donde impartió durante dos años clases de matemáticas en el bachillerato superior. En 1956, como integrante del equipo estructurado por la maestra M. Teresa Codina, pone en funcionamiento la escuela *Talitha*, donde puso en práctica, entre 1956 y 1962, una verdadera renovación pedagógica en la educación infantil, basada en algunas ideas fundamentales del método Montessori y otras corrientes pedagógicas europeas del primer tercio del siglo XX, —personalizadas en Cataluña por la figura del pedagogo Alexandre Galí— junto con otras que iban tomando cuerpo como descubrimientos y aportaciones personales de Maria Antònia en la educación matemática de las primeras edades. Tenía 27 años y dejó el trabajo anterior porque el proyecto de la nueva escuela le entusiasmaba y porque, según sus palabras, *no hay que quedarse nunca cerrado sino que siempre debe hacerse aquello en lo que realmente se cree*. Así, su influencia como conocedora del método Montessori y como innovadora decidida empezó ya a repercutir en otros maestros en aquellos años de la dictadura franquista, tan oscuros y tan difíciles. El paso siguiente fue la construcción de todo el material necesario, tarea que realizó con minuciosa precisión.

Seis años después de iniciar el proyecto de *Talhita*, Maria Antònia atraviesa una crisis espiritual que la lleva a decidir iniciar un nuevo proyecto en un barrio con más necesidades. Enterada de que un sacerdote del barrio barcelonés Verdum había celebrado una misa en la calle para protestar por las malas condiciones en que se encontraba el barrio, decide canalizar su compromiso social en esta dirección. El barrio disponía de un barracón propiedad de la parroquia donde cada tarde se impartían clases de capacitación profesional.

Allí, en octubre de 1962, Maria Antònia puso en marcha la escuela "Ton i Guida" colgando simplemente un cartel donde escribió: *parvulario*. Comenzó ella sola con 42 niños y niñas de entre 4 y 6 años, el noventa por ciento de los cuales eran inmigrantes llegados de diversas zonas de España, en unas condiciones pésimas y mal atendidos. La escuela se mantenía con las cuotas que pagaban las familias según sus posibilidades económicas, aunque para llegar a hacer realidad la construcción de un nuevo edificio se contó con importantes donativos de gente con mayores recursos que creía en el proyecto.

En 1968 las obras para la nueva escuela ya habían empezado y Maria Antònia llevaba con frecuencia a los alumnos a observar su progreso. El momento del traslado es recordado emotivamente: *Todo eso se hizo para que los alumnos tuviesen conciencia que era su escuela.*

Al igual que había sucedido en *Talhita*, Maria Antònia forjó en la escuela *Ton i Guida* un equipo de maestros conscientes de la importancia de su tarea y del espíritu del trabajo en equipo. La escuela gozó de su máximo esplendor entre 1972 y 1975, en que contaba con más de 400 alumnos y se había convertido en un ejemplo y modelo de escuela.

Deja *Ton i Guida* para dedicarse al cargo de Jefa del Área de Servicios de Educación del Ayuntamiento de Barcelona, con el apoyo de todos los grupos representados en el consistorio. Pero no acaba de sentirse bien en la política y al cabo de un año deja el cargo. Se había involucrado en el ámbito universitario, impartiendo clases de Didáctica de la Matemática en la Escuela de Maestros de la Universidad Autónoma de Barcelona. En 1982 obtiene la plaza en las oposiciones y pide el traslado a la Escuela Normal de Girona, entonces dependiente de la UAB. Ya desde los últimos años de Barcelona, también daba clases de Didáctica de las Matemáticas en infantil y en primaria en la Escuela de Magisterio de Vic.

Hay otra actividad que en Maria Antònia no se puede obviar, y que surge como consecuencia natural y como exigencia de la creación de escuelas con una pedagogía entonces llamada *activa,* su postura de compromiso para cambiar los esquemas de un régimen político que mantuvo una posición muy dura con la educación y muy cerrada respecto a la realidad social de Cataluña.

Estas inquietudes personales la llevaron en octubre de 1965 a formar parte del equipo fundador de la institución *Rosa Sensat*, junto con Pere Darder, Enric Lluch, Marta Mata, M. Teresa Codina, Anna M. Roig y Jordi Cots, entre otros. Participó en las escuelas de verano, desde la primera (en 1966) hasta la cuadragésima primera (en 2006), y en innumerables cursos y seminarios en invierno y en verano, repartidos por nuestras comarcas y por toda la geografía española.

Uno de los frutos de estas actividades de formación permanente fue el surgimiento alrededor de Maria Antònia de diversos *grupos de maestros,* con el objetivo de compartir experiencias docentes y de profundizar en la propia formación matemática. Los primeros empezaron en Barcelona, en *Rosa Sensat*, y luego siguieron en Girona, Vic, Manresa, Lérida, etc… Entre ellos destaca, en Girona el año 1992, el grupo *Perímetre*, que después de 14 años sigue reuniéndose un sábado al mes y trabajando para que las matemáticas mejoren en nuestras escuelas. Este grupo y el equipo ICE de matemáticas, fundaron la *Associació d'Ensenyants de Matemàtiques de les Comarques Gironines* (ADEMGI), de la cual Maria Antònia fue presidenta durante los cuatro primeros años, del 1992 al 1996. Durante este periodo, en 1994, la *Associació de Professors de Matemàtiques de les Comarques Meridionals* (APMCM) y ADEMGI fundan la Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT), de la cual será presidenta durante los tres primeros años, y bajo cuya presidencia se integró en la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM).

Su tarea ha sido reconocida con diversos premios y homenajes: Medalla del trabajo *President Macià* (Barcelona, 1984); Premio *Mestres 68,* por su aportación a la renovación de la Didáctica de la Matemática y a la de la Educación Infantil (Girona, 1994); Homenaje por la tarea docente e innovadora desarrollada en el campo de la didáctica de las matemáticas (Girona, 29 de abril del 2000); Homenaje en el CEM2000 e instauración del *Premio Maria Antònia Canals*, de la FEEMCAT (julio del 2000); Insignia de oro de la Universidad de Vic (2000); Profesora emérita de la Universidad de Girona (2001); Distinción *Jaume Vicens Vives* a la calidad en la docencia universitaria de la Generalitat de Cataluña (2001); *Creu de Sant Jordi* de la Generalitat de Cataluña (2006), por su tarea en la formación de maestros, sus publicaciones matemáticas y su acción en la Escuela *Ton i Guida*; Homenaje conjunto de la *Associació d'exalumnes, mestres, pares i mares de* Ton i Guida, del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la UAB, y de la institución *Rosa Sensat* (2007); Premio *Nou Barris* (distrito municipal correspondiente a *Verdum*) de Barcelona (2007).

Desde el 30 de septiembre del 2001, Maria Antònia está oficialmente jubilada y ha sido nombrada profesora emérita de la Universitat de Girona, donde actualmente, desde enero del 2002, dirige el GAMAR (*Gabinet de Materials i de Recerca per la Matemàtica a l'escola*), que ella misma creó como fruto del premio Vicens Vives antes mencionado y que sigue creciendo con el apoyo de la Universitat de Girona y del Departamento de Educación de la Generalitat de Cataluña. Compartiendo su actividad entre el GAMAR y las escuelas del país, Maria Antònia sigue incansable en las tareas de innovación en la didáctica, que bien podríamos llamar investigación a través de la acción, y de formación permanente del profesorado de Infantil y Primaria, tanto en Cataluña como en toda España. ■

Mi premio es vuestro, vosotros sois mi verdadero premio

Semblanza de Maria Antònia Canals. Foto FMC

Por el interés que creemos supone para todos aquellos lectores de la revista SUMA, algunos de los cuáles quizás no tuvieron ocasión de asistir a las JAEM de Granada, hemos creído interesante transcribir la intervención de Maria Antònia Canals en la recepción del premio Gonzalo Sánchez Vázquez. Maria Antònia nos hizo saber que esta distinción suponía para ella el mayor reconocimiento que ha recibido a lo largo de toda su vida profesional, por venir justamente del colectivo de docentes de matemáticas.

Granada 07-07-07.
¿Alguien se ha fijado en los números de la fecha de hoy?
¿Sabíais que uno de mis números preferidos es el 7?

Muchas gracias por este premio. ¿Qué decir? Todas las palabras se me hacen cortas... Ante todo, gracias a la Federación Española que lo ha decidido, a mi pequeña Federación Catalana, que lo pidió, y a todas y todos vosotros, que estáis aquí acompañándome a recibirlo.

Me hace una especial ilusión este premio, que es siempre una memoria reconocida de nuestro común amigo y maestro Gonzalo, a quien tuve la suerte de conocer, ya de antes de la creación de nuestra FEEMCAT, y luego mucho más con ocasión de nuestro ingreso en la Federación Española. Es a él a quien con este acto recordamos y rendimos homenaje de una manera especial.

La verdad es que estoy, desde luego emocionada, y muy contenta. ¿Por qué estoy tan contenta? Probablemente porque es el premio más *profesional* que he recibido; quiero decir que me hace una especial ilusión porque me llega de vosotros, de mi *gente de las matemáticas*.

Maria Antònia Canals
Premio Gonzalo Sánchez Vázquez *a los valores humanos 2007*

Maria Antònia recibiendo el premio,
junto al Presidente y al Vicepresidente de la FESPM. Foto Miquel Mallen

Esta manera de nombrarnos, ya sabéis que quiere ser cordial, y si la formulo así es porque estoy convencida de que para todos nosotros, los que estamos aquí, las matemáticas son una parte importante de nuestra vida… Incluso para los recién llegados, que seguro que los habrá como cada año, el estar aquí quiere decir que han sentido un interés especial, un gusanillo matemático, y que probablemente ya no les dejará, como no nos ha dejado a ninguno…

Porque todos estamos convencidos de que las Matemáticas no son algo que se sabe o que se enseña, o que se utiliza… Son mucho más: Nuestro interés, lo que hoy y aquí nos mueve, lo que movió a Gonzalo, ha empezado en las Matemáticas, pero se ha concretado y ha tomado cuerpo en su didáctica, que yo prefiero nombrar como la Educación Matemática, la cual, para todos nosotros, siempre es y será:

- UN ARTE que surge de nuestro interior y se proyecta en los demás, y
- UNA VIDA, es decir, algo que llevamos en nosotros inseparable de la vida misma.

Por esto hoy, en esta ocasión para mi muy señalada, he pensado compartir lo que ha sido a lo largo de mi camino, y sigue siendo para mí este *Arte de vivir las Matemáticas*.

Lo haré no con una disertación seria, sino con algunas frases en la pantalla, organizadas en dos partes, simplemente comentadas. En la segunda parte, irán apareciendo también aquellos y aquellas que me han acompañado en este caminar con las matemáticas, y que muchas veces han sido no sólo la ocasión sino la causa de él. Ninguna vida es solitaria, y de manera muy especial la educación es siempre compartida. Es por esto que creo que ningún premio, y menos éste de hoy, es personal, sino que es de muchos, en realidad es de todos… Al final quiero terminar dedicándolo.

¿Por qué creo que la Educación Matemática es un arte?

Ésta es una idea que siempre he tenido, pero que me resulta difícil de concretar.
Si comparo la educación matemática con un arte, quizás es porque con ella siempre me suceden cosas que creo que les suceden a los artistas.
Intentaré concretar algunas, que probablemente nos suceden a todos:

Nos enamoramos de nuestro trabajo, no por motivos lógicos, como podría suponerse, sino emocionales, es decir no con la mente sino con el corazón.

La realidad, nos crea un interrogante, que es éste: ¿cómo lograr que los niños y niñas, también se enamoren de las matemáticas? Y vamos pensando, rumiando, y no paramos hasta que un día se nos enciende la luz de la solución…

Vamos a empujones en el encuentro de soluciones. Es como la inspiración del artista, que éste no llega a dominar; como mucho llega a aprender a seguirla.

Cada artista tiene su estilo. Se forma mirando y aprendiendo e inspirándose en otros artistas, pero en definitiva realiza su arte a su manera como puede, como le sale, con tanteos y correcciones, y siempre mejorando y recreándolo de nuevo.

El verdadero trabajo educativo no tiene nada que ver con seguir un programa . De verdad que es como un arte que se va desarrollando en su momento oportuno, nunca previsto y que requiere de nosotros… Pero para decirlo mejor, voy a citar una frase de Marta Mata, que descubrí recientemente, y que expresa muy bien esta idea:

> (…) dejar sentado el carácter de arte, de creación que tiene la acción educativa, sino también la necesaria capacidad de romper con prejuicios, y de echar mano de la comprensión más arriesgada y de la imaginación más creativa, por parte de quienes ejercen el papel de educador
>
> Prólogo al libro *La educación infantil*, de A. Makarenko, Nueva Cultura. Madrid 1978

La educación matemática, como el arte, no es para beneficio del artista. Por su misma naturaleza o razón de ser, es para comunicarse, para los demás, para que gocen y progresen en este goce.

Finalmente tiene momentos duros, pero nos hace felices. Incluso tiene algunos momentos en los que se piensa en tirar la toalla, pero la fuerza interior es mayor y la inspiración siempre vuelve y supera todos los resultados. Porque, al mismo tiempo, sabemos por experiencia que la educación matemática es precisamente aquello que nos corresponde hacer en este mundo, y por ello es el único quehacer que puede darnos y nos da una auténtica felicidad, la que tiene el artista con su obra.

¿Qué ha significado para mí vivir la Educación Matemática?

Para mí las matemáticas, y más concretamente la educación matemática de los niños y niñas, no puedo decir que haya sido una buena parte de mi vida, puesto que aún no me despido. Para ser sincera he de decir simplemente que ha sido y es mi vida entera.

Creo que vivimos las matemáticas, porque las llevamos dentro, no en la mente, como muchos piensan, sino en la mente y en el corazón.

Foto Miquel Mallen

Intentaré hacer un repaso de cómo he ido viviendo yo con ellas, y de cómo las voy llevando, repaso inseparable de aquellos amigos y amigas que me han ido abriendo este camino o acompañándome en él. No lo haré en un orden meramente cronológico, sino en un orden organizado según diversas circunstancias y características.

En mi primera infancia
Vivir con las matemáticas fue un abrir los ojos, ver propiedades del espacio, cantidades, relaciones, y jugar con ellas. Empecé a valorar las matemáticas.

> *Las matemáticas pusieron los cimientos de mi personalidad*

Me acompañó mi padre al que a menudo le pedía *hazme contar…*

Durante mi juventud
En esta etapa de grandes opciones personales, la que hice por estudiar matemáticas tuvo un gran papel en la afirmación de mi autonomía. Recuerdo que eran para mí un ideal de verdad, estética y arte.

> *Las matemáticas me ayudaron a construirme libremente, como mujer*

Me acompañó mi madre, que primero aceptó mi decisión, que no compartía, y luego estuvo orgullosa de mí.

Desde las primeras clases hasta hoy
Fue creciendo en mí el interés por la realidad y por el progreso de los niños y niñas. Siempre me ha fascinado la primera infancia.

> *Las matemáticas se van uniendo a la sensibilidad pedagógica*

Me acompañaron mi abuela y tías maestras, un fuerte componente de tradición familiar.

En una época en que practiqué el montañismo
Empecé a tener un cierto amor por las situaciones de riesgo, y por todo lo que supone un reto. Fue creciendo mi voluntad de construir, y de trabajar en equipo, no sólo para enseñar, sino para educar a los niños y niñas.

> *Las matemáticas están en la base de mi compromiso con la educación*

Me acompañaron M. Teresa Codina, la escuela *Talitha* y la memoria de los pedagogos que nos precedieron.

En mi edad adulta
Va creciendo el compromiso con aquellos campos en que me aparece una mayor necesidad. Urge la lucha contra la dictadura para la recuperación histórica de nuestro país, y se encarna en la escuela de suburbio y en la formación de maestros.

> *¡Las matemáticas asequibles a todos! Se define mi vocación definitiva*

Me acompañaron la escuela *Ton i Guida*, “Rosa Sensat”, con Marta Mata, mis innumerables alumnos pequeños…

En el nivel de la intimidad
Quisiera expresar lo que ha sido la educación matemáticas en el fondo de mi corazón: Si doy todo lo que tengo, aunque sea poco, se multiplica; la esperanza siempre crece más allá de lo que veo y me lleva a seguir con esta utopía, aceptando los límites, pero sin renunciar a nada. Por eso puedo decir:

> *Las matemáticas, en mi interior, son como un milagro*

Me acompañaron los amigos que me dieron su confianza: Claudi A., Francesc E., Anton A., Josep M. F.

Me acompañan los maestros que luchan por cambiar las mates y los niños que las ven con gusto

Una etapa de plenitud
Cada día constato que nosotros, como los números, no somos nadie sin los demás.
Siempre que he sentido la cercanía de mis compañeros he dado un paso adelante.

Mi último paso es ahora el *Gabinete de materiales e investigación para la matemática en la escuela*, llamado GAMAR, de la Universidad de Girona, para las maestras y maestros, y que espero presentaros en las próximas JAEM.

Es fantástico constatar que en nuestro camino de educadores no estamos solos.

Las matemáticas han sido siempre y son un camino de solidaridad

Me acompañan una legión de maestros y maestras para compartir.

Con diversas citas personales, he intentado mostrar hasta qué punto en ningún camino andamos solos. La conducta de cada uno o una provoca a todos, compañeras y compañeros, paisanos o recién llegados, con ideas afines u opuestas, dando margen a respuestas personales y comunitarias. Este hecho, que es una de las bases de nuestro tejido social, para mí ha sido una gran fuerza y un eje vertebrador en mi manera de vivir la educación matemática. Y he de decir, para ser fiel a la verdad, que mis interlocutores más importantes han sido siempre los alumnos: los que más me han interrogado, los que han sido capaces de encender pequeñas lucecitas en mi mente y en mi corazón, y de conseguir que estas lucecitas llegasen, muchas veces, a hacerse realidades.

Es por esto, porque juntos hemos hecho y hacemos el camino, que hoy afirmo que este premio es realmente de todos, no como una frase bonita, sino como una firme realidad. Es de los que he ido nombrando en mis anteriores palabras, e igualmente de algunos que quizás he olvidado. Es de los que estamos aquí y de muchos que están lejos.

Este premio es para mí una nueva fuerza en mi vida para la educación matemática, y con el deseo de que lo sea también para muchos, quiero gritar que:

Lo dedico a todos los que me habéis acompañado en mi camino.

Voy a intentar reunirlos en una lista, aunque sé que es imposible hacerlo bien.

Foto Eloi Ferrer

Lo dedico a todos los que me habéis acompañado en mi camino.

- Mis padres, mis tías y abuela maestras, toda mi familia.
- Los alumnos y compañeras de mis primeros años de la escuela Talitha
- Los compañeros, padres y alumnos de la escuela *Ton i Guida* y el barrio de Verdum de Barcelona
- Los más que amigos de “Rosa Sensat” y en especial Marta Mata
- Mis innumerables alumnos pequeños
- Los alumnos de magisterio, en Barcelona, Vic y Girona
- Los compañeros de matemáticas que me han animado, y que antes he citado
- Algunos maestros que van cambiando sus metodologías
- Los jóvenes que luchan y los que lucharán por un cambio en la enseñanza de las matemáticas
- Los de los primeros grupos de maestros de Cataluña
- Los de muchas escuelas de verano en Barcelona y en toda España
- Mis compañeros de la Universidad Autónoma de Barcelona, de la Universidad de Vic, de la Universidad de Girona
- El grupo *Perímetre*, con sus jornadas, y todos los maestros de Girona
- Los amigos de Lleida, Tarragona, Mallorca, Menorca, Castilla la Mancha, Burgos, León, Illescas, Gijón, Villarrobledo, Galicia, Murcia, Comunidad Valenciana, Córdoba, Soria, Madrid, Navarra… etc.
- Todos los que ahora colaboran conmigo en el *GAMAR*
- Los compañeros y compañeras de la primera cita de 1981 en Barcelona
- Los compañeros de FEEMCAT, de cada uno de sus grupos
- Los de la FESPM. Y los de todas las JAEM
- Y entre todos ellos...Gonzalo Sánchez Vázquez

Quisiera dedicar también este premio a todos los niños y niñas del mundo, y especialmente a tantos que crecen sin escuelas. Que nuestros esfuerzos sirvan para que la educación matemática algún día llegue a todos, y en la forma de hacerles avanzar realmente como personas.

A todos los que estamos hoy aquí reunidos, a todos los que queréis la educación matemática en la línea de la dignidad humana y trabajáis para ello, os digo:

Mi premio es vuestro.
Vosotros sois mi verdadero premio.
Muchas gracias. ■

Epílogo

Por nuestra parte, sólo deseamos destacar por encima de todo que, tal como se desprende de la intervención de Maria Antònia, su compromiso vital sigue firme para conseguir que todos los niños y niñas vivan, disfruten y amen las matemáticas.

Muchas felicidades a Maria Antònia por proseguir el camino esbozado por nuestro amigo y maestro Gonzalo.

Finalmente, esperamos poder coincidir con todos los lectores de la revista SUMA en la próxima edición de las JAEM que tendrá lugar en Girona el próximo 2009, y poder asistir juntos con la misma satisfacción que en Granada a la entrega de una nueva edición del premio “Gonzalo Sánchez Vázquez”. ■

SUMA 56
Noviembre 2007, pp.137-142

XIII JAEM, cuatro días de julio en Granada

La Alhambra, durante la visita programada en las JAEM. Foto FMC

Dentro de dos años, nos vemos en Gerona 2009…

Esas y otras similares eran las expresiones más utilizadas al terminar las XIII JAEM (Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas) de Granada 2007 –o, como dirían los supersticiosos, las XII + I JAEM– organizadas por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática *Thales* con el lema *El profesorado de matemáticas mira hacia el futuro*.

Las JAEM han resultado un éxito, no sólo por la perfecta organización lograda por el Comité local, presidido por Luis Berenguer, sino también por la calidad del programa científico, responsabilidad del comité presidido por Pablo Flores. Cierto que no todo fue perfecto y que, inevitablemente, hubo pequeños fallos no achacables a la organización, sino más bien a la desbordante y masiva afluencia de participantes. Las JAEM celebradas en Albacete en 2005, contaron con la presencia de más de 600 personas .En Granada, la organización se vio desbordada ante la llegada de casi 1000 asistentes, que abarrotaron la Facultad de Ciencias de la Universidad andaluza, atraídos no sólo por el interés que suscitan las jornadas, sino también por el indudable atractivo de Granada –una de las siete maravillas del mundo, digan lo que digan las votaciones populares.

Ciertos aspectos organizativos pudieron mejorarse. Entre éstos, el insuficiente aire acondicionado en las salas donde se desarrollaban las ponencias y la falta de aforo en alguna de las ponencias más interesantes, lo que impidió la asistencia a muchos de los interesados.

> NOTA DE REDACCIÓN: Nos indican que la crónica oficial de las XIII JAEM, redactada por el comité organizador, se publicará en el próximo número.

Las fotos, excepto cuando se indica lo contrario, son del autor del artículo.

Arturo Olivares López
Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
IES Alto Guadiana de Tomelloso

Adentrándonos en el desarrollo mismo de las JAEM, se hace imprescindible, felicitar y agradecer a los voluntarios y a todas las personas de la organización su esfuerzo para que nos encontrásemos a gusto. Otro importante punto a favor fue la presencia de al menos una persona de la organización en cada uno de los talleres, comunicaciones y ponencias presentando a la persona encargada de las mismas. Un hecho que ha sido muy bien recibido por parte de los ponentes, a tenor de los comentarios recibidos tras las Jornadas.

Como ya hemos dicho, éstas se desarrollaron del 4 al 7 de Julio en la ciudad de Granada.

todo lo largo y ancho de nuestra geografía, compartiendo experiencias, puntos de vista y, por supuesto, algún que otro rato de ocio.

Tras la entrega de las últimas documentaciones y la inauguración, tuvo lugar la primera conferencia plenaria a cargo de Luis Rico, que bajo el título *Herramientas matemáticas y competencias escolares*, resultó de gran interés. A su término y en el mismo emplazamiento, un excelente espectáculo flamenco a cargo del *Cuadro Flamenco del Sacromonte*, tornaba el arte matemático en el embrujo y la magia que impregna la cuna de Falla.

4 de Julio, primer día

La mañana del día 4, fue para todos nosotros tan sólo una toma de contacto con la organización de las JAEM y sirvió para comenzar lo que a mi parecer es una de las consecuencias fundamentales de estas jornadas: la interrelación entre los asistentes. Así, esa misma mañana muchos de nosotros tuvimos la ocasión de conocer compañeros de

El ocaso de este primer día llegaba cuando ya el cansancio dominaba a la mayoría. La organización de las Jornadas había planificado un acto social para todos los participantes: una copa de bienvenida. Una nueva oportunidad para entablar conversación con otros asistentes a esta edición granadina de las JAEM.

5 de Julio, segundo día

Sin duda el pistoletazo de salida para la parte más práctica de las JAEM tuvo lugar en esta jornada, en la que hubo de todo y para todos. No obstante, comenzaban a surgir los primeros problemas de espacio anteriormente mencionado, y que provocaron que muchos de los asistentes no pudiéramos disfrutar de algunas interesantes ponencias.

El extensísimo y atrayente programa hace complicado seleccionar las intervenciones a destacar, pues todas tuvieron su importancia por uno u otro motivo. Entre ellas, sin embargo,

Foto FMC

podría mencionarse la desarrollada por Luis Balbuena llamada *Al menos lo intenté,* que resultó una emotiva reflexión acerca de toda una vida dedicada a la docencia. También merece una mención especial la ponencia *Visualizar la geometría plegando papel* a cargo de las profesoras M.ª Teresa Otero, Covadonga Blanco y Alicia Pedreira, que juntas abrieron los ojos de muchos de los asistentes a nuevas formas de enseñar y, porqué no decirlo, aprender geometría a través de sencillos dobleces en un simple trozo de papel y demostrándonos lo acertado del proverbio chino que dice:

> Oigo y olvido
> Veo y recuerdo
> Hago y aprendo

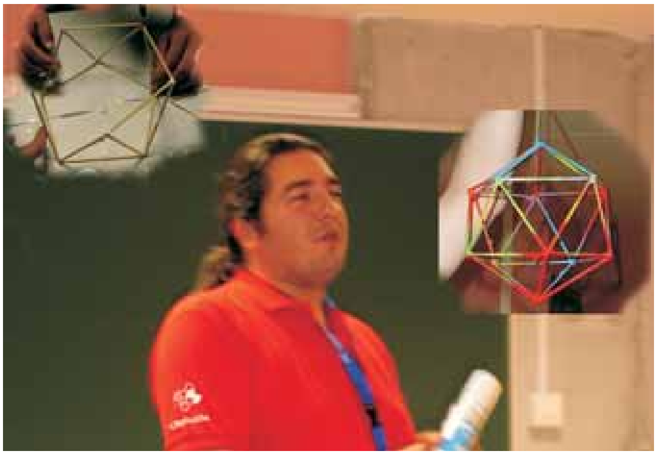
Estas mismas profesoras, desarrollaron el último día un taller donde volvieron a impresionarnos con la habilidad de sus manos para crear figuras imposibles a partir de un simple

Foto FMC

folio y haciendo que cada uno de nosotros se sintiera capaz de realizarlo.

Completaron la mañana una serie de interesantes comunicaciones: *Elementos matemáticos en las máquinas de Leonardo*, por el profesor Antonio Bueno; *Lengua y Matemáticas. Punto de encuentro en espacio y tiempo,* por José y Sixto Romero; además de la conferencia plenaria de Abraham Arcavi titulada *Hacia una visión integradora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* y el homenaje a Francisco Puerta.

Durante la tarde, hubo tal cantidad de comunicaciones que resultaría largo y tedioso hablar sobre todas ellas; eso sí, resulta necesario y merecido destacar lo acertado de la composición de las mismas, ya que hubo tantas y tan variadas que permitía conectar con el centro de interés de todos los asistentes, pues no sólo hubo comunicaciones con distintos grados de profundización, sino para todos los niveles educativos.



Además del grupo de debate coordinado por Tomás Recio sobre la conexión con los diferentes niveles educativos de la enseñanza de las matemáticas en la universidad, a esa misma hora, se organizaron varios talleres en los que pudimos *aprender a enseñar* de una manera distinta y novedosa. De todos ellos nombraremos el taller *Bricolaje matemático. Construcción de poliedros en madera de bambú*, a cargo de Juan Francisco Guirado, donde pudimos disfrutar del trabajo cooperativo –tan nombrado como difícil de poner en práctica muchas veces en el aula– con nuestros compañeros, mientras veíamos surgir icosaedros, rombicuboctaedros… donde antes sólo teníamos montones de palos y cola en un bote.

Un total de 51 comunicaciones: *Números sonoros: las Matemáticas y Mozart* ,de Rafael Ángel Martínez; *Taller de problemas cooperativos en primaria,* de Juana M.ª Navas y el Grupo LaX; *Estadística con las manos,* de María Vega, Antonio Parrales y J. M. Cardeñoso… y un largo etcétera que lamento no poder incluir, completaban la parte académica del ecuador de las Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas 2007.

6 de julio, tercer día

Éste fue el día más relajado de cuantos compusieron las XIII JAEM. Por la mañana, hubo talleres en los que tuvimos la oportunidad de volver a sentir el placer de disfrutar aprendiendo de otros compañeros y asombrarnos descubriendo cómo un mismo tema puede ser abordado de tantas y tan entretenidas formas que nada tienen que ver con el método tradicional de explicar.

Como cada uno de los días, todos deberían ser nombrados aquí por el esfuerzo y la entrega con que fueron abordados pero por resultar imposible, mencionaremos entre ellos el coordinado por Ángel Alsina sobre *Nuevos recursos para trabajar el razonamiento lógico-matemático en la educación infantil* en el que recordamos la vital importancia que, en la formación del alumnado, tiene esta etapa educativa y el taller de Antonio Israel Mercado sobre la teselación de camisetas con símbolos nazaríes que, aparte de un agradable entretenimiento por lo divertido del taller, resultó una potente y amena herramienta para trabajar la teselación del plano en clase.

Destaquemos además el grupo de debate coordinado por Pilar Azcárate sobre la formación de profesores de Matemáticas y por supuesto, el esfuerzo realizado por los profesores Manuel J. Martínez, Marta Molina, María Peñas, María C. Cañadas y Sandra Gallardo para presentar en la misma mañana dos talleres consecutivos sobre temas tan distintos como los *Tangram en el aula de Matemáticas* y los *Fractales*, amén de varias e interesantes comunicaciones.

Completaron la mañana la muy amena conferencia plenaria de Antonio Pérez Sanz. El divulgador de *Universo Matemático* nos hizo plantearnos muchas de las convicciones y 'normas' que acompañaron a la geometría en sus comienzos. Siguió la presentación de las XIV JAEM que tendrán lugar en Girona.

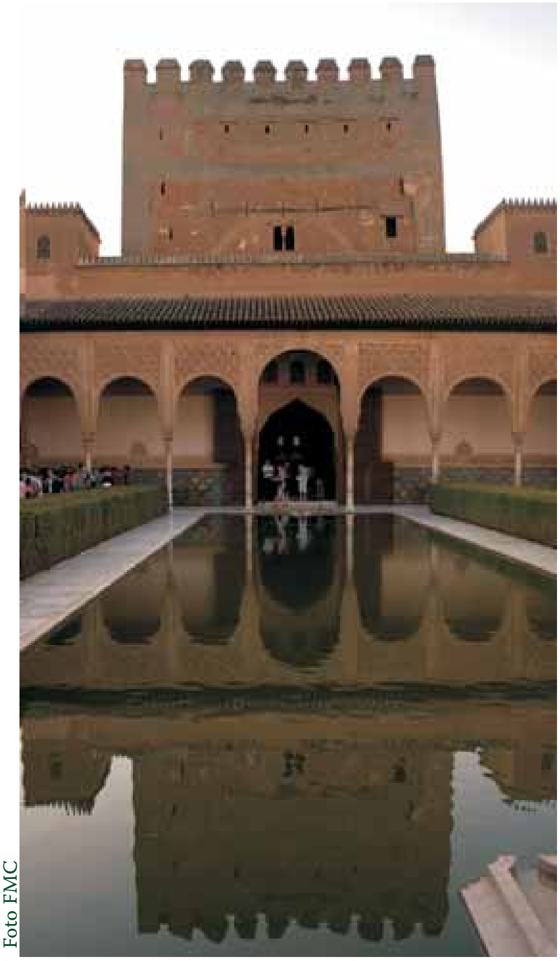


Foto FMC

Comenzamos la tarde disfrutando de dos obras de teatro. La primera, representada por el grupo de teatro *Nora* del IES *Mar Menor*, de San Javier (Murcia) y titulada *Matemática es nombre de mujer*. La obra resultó una atractiva y profunda revisión de las biografías de algunas de las mujeres más importantes en el mundo de las matemáticas a lo largo de la historia, así como los problemas que encontraron para difundir sus conocimientos. La segunda, fue una divertidísima comedia titulada *Del color del cristal con que se mira. Crónica de un curso escolar* a cargo de la profesora Ana Rodríguez Chamizo, quien demostró su enorme talento interpretativo y su camaleónica habilidad para el disfraz.

Al terminar ambas obras de teatro, aquellos que quisimos, pudimos disfrutar de una visita a la séptima maravilla del mundo: *La Alhambra*, tras la cual tuvo lugar una cena de gala en Los Cármenes a la que asistió parte del grupo que visitamos la Alhambra, con la que dimos por concluida la jornada.

... y 7 de julio, último día

De entre todas las actividades de este último día, por no extendernos más, destacaremos el ameno taller titulado *Taller de magia Matemática*, presentado por el profesor Fernando Blasco, en él contemplamos, entre otras emocionantes experiencias, que la cuadratura del círculo sí es posible. Destacamos también la ponencia titulada *Formación de profesores de matemáticas en los centros: un proyecto de investigación-acción*, a cargo de Elba Peparelli, Patricia Konic, Nora Zon y Pablo Flores.

Por la tarde acudimos a la comunicación *Filosofía y Geometría. Reflexiones en torno al símil platónico de la línea*, de Antonio M. Oller. Después vino el emotivo acto de entrega del V Premio *Gonzalo Sánchez Vázquez* a la profesora Maria Antònia Canals i Tolosa.

Llegamos así a la última conferencia plenaria de estas JAEM, ofrecida por Rafael Pérez Gómez, titulada *37º*, en referencia a la latitud de Granada. Rafael hizo un recorrido por las matemáticas en Al-Andalus, explicó el porqué del diseño del cartel de estas XIII JAEM... y acabó su intervención entre aplausos con un poema de Federico García Lorca, acompañado por música de Manuel de Falla y la guitarra de Paco de Lucía.

No podemos acabar, sin reseñar el esfuerzo realizado por el comité organizador para conectar con los intereses de los asistentes, ofreciendonos, aparte de las conferencias y los talleres:

- Tres magníficas exposiciones:
  Geometría sobre metal, de Baltasar Pradas
  Números y Figuras, de Francisco González
  De cerca, naturaleza y forma de Lucía Morales Rufo

- Varios puestos en el zoco matemático:
  Las matemáticas y el cine, Abel Martín y Marta Martín
  6 años de tarjetas navideño matemáticas, Teresa Valdecantos
  Matematecalia, mateposters y momentos matemáticos, Isabel Marrero
  y *Matemáticas a la vista,* Ángeles Gil

Ya sólo queda decir:

Enhorabuena por la labor realizada y...

¡Nos vemos en Girona en 2009! ■

XIV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas
Girona, 2009

NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, Apartado de Correos 498, 46900 Torrent (Valencia), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.

2. Los gráficos, diagramas, fotografías y figuras se enviarán impresos en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración. Indíquense los créditos de las fotografías y dibujos.

2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original impreso ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos no serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.

4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de un máximo de 625 caracteres contando los blancos, que no necesariamente tiene que coincidir con la introducción al artículo. De este resumen se remitirá también su traducción al inglés.

5. Los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede) y el resumen en castellano y en inglés deberán ir escritos en una misma hoja aparte.

6. Se enviará también en soporte magnético (disco de tres pulgadas y cuarto con formato PC, CDRom o DVDRom) una copia de los archivo de texto que contenga el artículo y del que contega la hoja con los datos y los resumenes, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quieran incluir. La etiqueta debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda Microsoft Word para Windows o RFT. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF. Para las fotografías se recomienda archivos TIF o BMP y con una definición mínima de 600x600 puntos por pulgada cuadrada.

7. Al menos un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.

8. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.

9. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo y se incluirán al final del texto.

10. La bibliografía se dispondrá también al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:
TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma*, n.° 20, 91-98.
En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas*, Labor, Barcelona.
En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2*, ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

11. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ... supone un gran avance (Hernández, 1992). Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ... según Rico (1993).

12. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como -en caso afirmativo- la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido.

13. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

SUMA

Boletín de suscripción

Tarifas	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	25 €	10 €
Centros	40 €	15 €
Europa	50 €	20 €
Resto del mundo	60 €	22 €

Fotocopiar esta hoja y enviar:

por correo a: Revista SUMA. Apartado de correos 498
46900-Torrent (Valencia)
por Fax al: (+34) 912 911 879
por correo-e a: administracionv@revistasuma.es

Deseo suscribirme a la revista SUMA:

Nombre y apellidos: .... NIF/CIF: ....

Dirección: .... Teléfono: ....

Población: .... CP: ....

Provincia: .... País: ....

Correo electrónico: .... Fax: ....

Importe (€)

☐ Suscripción a partir del año (3 números) ________ [ ]

☐ N.^{os} sueltos ________ [ ]

Total [ ]

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)

☐ Transferencia bancaria (CCC 2077-0347-11-1101452547)

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista SUMA

☐ Giro postal dirigido a Revista SUMA

Fecha y firma:

Nombre y apellidos: ....

Código Cuenta Cliente: Entidad: [| | |] Oficina: [| | |] DC: [|] Cuenta: [| | | | | | | | |]

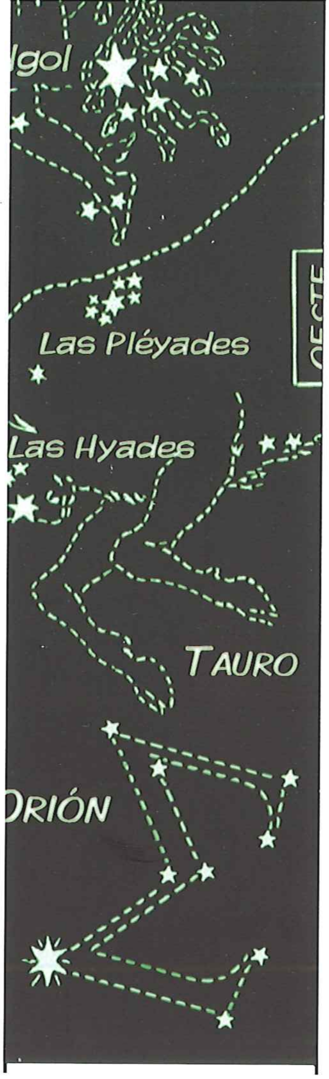
Banco/Caja: ....

Agencia n.º: .... Dirección: ....

Población: .... Provincia: ....

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (fecha y firma):



SUMA.
REVISTA SOBRE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS.

ISSN 1130-488X
9 771130 488006 00056

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS