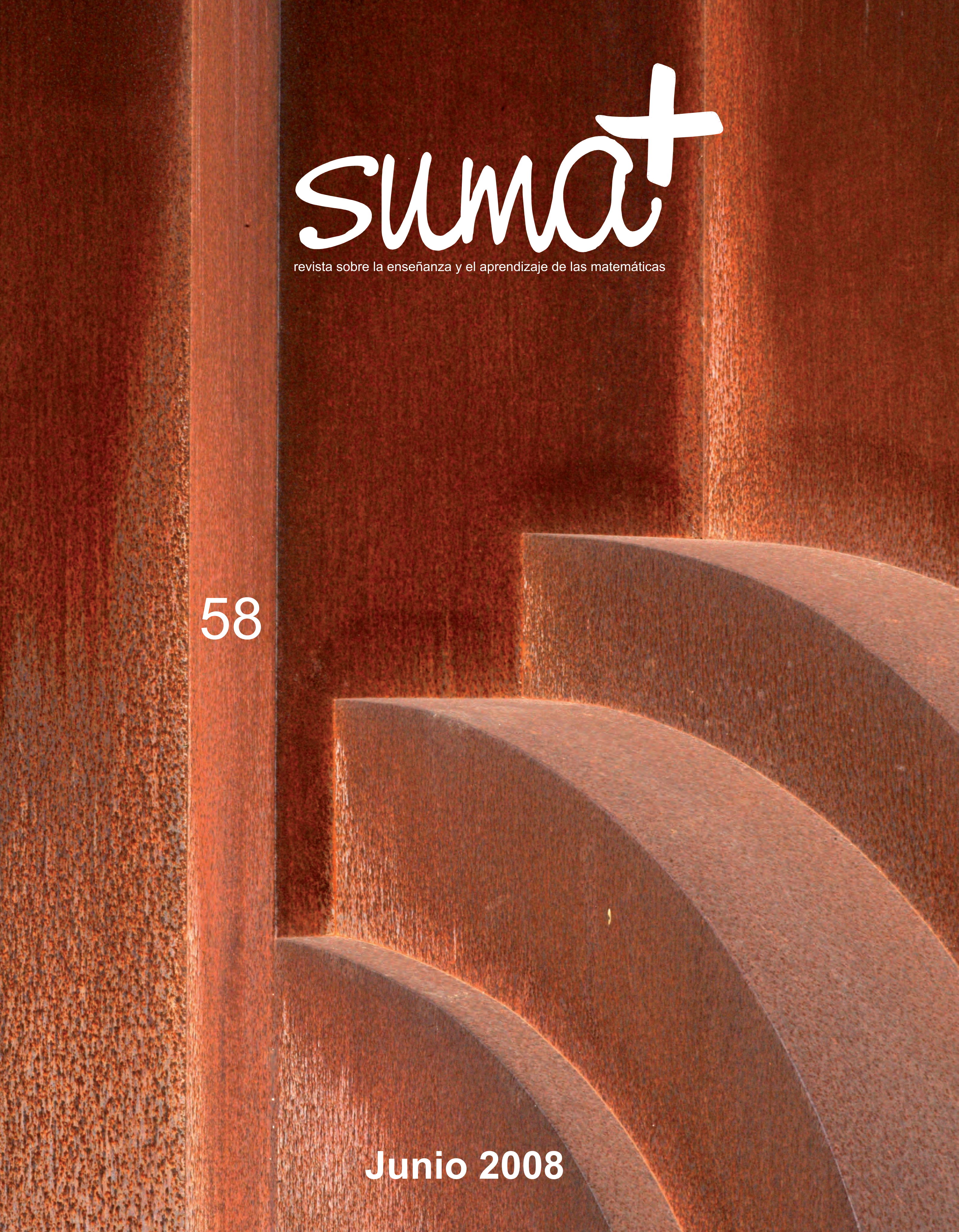


suma+

revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

58

Junio 2008

Índice

suma+

revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemáticas

Edita
FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS (FESPM)
Web
Antonio Alamillo Sánchez
www.revistasuma.es

Diseño de la portada / Fotografía
Onofre Monzó / Pilar Moreno
Maquetación
T. Queralt y O. Monzó
Revista Suma
Apartado 498
E-46900-Torrent
España
Fax: *+(34) 912 911 879*
Tirada: *6700 ejemplares*
Deposito legal: *Gr 752-1988*
ISSN: *1130-488X*

58 *Junio 2008*

actividades de la FESPM

SUMA es una revista de didáctica de las matemáticas de periodicidad cuatrimestral, cuyo objetivo es tratar sobre aquellos aspectos relacionados con su enseñanza y aprendizaje, destinada al profesorado que trabaja en educación infantil, primaria, secundaria y universitaria.

La revista SUMA se edita en Torrent (Valencia) - ESPAÑA

suma 58
Febrero 2008

La competencia matemática

En todas las culturas se ha considerado importante la enseñanza de las matemáticas, como prueba el hecho de que este conocimiento siempre ha formado parte de los contenidos que deben ser objeto de aprendizaje. Su carácter instrumental ha determinado que se considere como un conocimiento básico.

En la historia de la educación de nuestro país las matemáticas siempre han estado presentes, pero las sucesivas leyes que han organizado el sistema educativo español han ido evolucionando respecto del carácter que debe tener el aprendizaje de las matemáticas. Desde el punto de vista socio-cultural, este cambio ha ido desde posiciones formativas, centradas en la ordenación de conocimientos y creación de estructuras formales, a otras más ligadas a la realidad, donde se resaltan las necesidades matemáticas de la vida adulta como referente de la finalidad utilitaria del área en la escuela.

En la Ley Orgánica de Educación se produce una modificación en nuestra estructura curricular tradicional mediante la introducción del concepto de competencia básica*, siendo la competencia matemática una de las ocho a conseguir tras la terminación de la enseñanza obligatoria. Este concepto debe fomentar entre el profesorado de matemáticas una perspectiva que proporcione a sus alumnos la conexión de las matemáticas con la realidad que nos envuelve, con otros conocimientos, con los verdaderos problemas* *que exigen el uso de las herramientas propias de las matemáticas. Nuestro objetivo debe ser mucho más ambicioso que 'solamente' conseguir que nuestros alumnos sepan matemáticas, y es que nuestros alumnos sean capaces de usar las matemáticas que saben en aquellos contextos reales en los que sea necesario hacerlo. Se trata de una oportunidad para introducir cambios que vayan encaminados a mejorar el aprendizaje de las matemáticas, y un reto a los profesores que debemos afrontar con profesionalidad.*

La creación del espacio europeo de educación superior, los resultados de informes internacionales de evaluación como PISA, y las exigencias del mundo en el que nos ha tocado vivir, empujan al mundo educativo hacia metas diferentes a las establecidas hasta ahora. Si hasta ahora dichas metas se han marcado en forma de objetivos educativos, a partir de ahora se plasman en la consecución de las competencias básicas por parte de los alumnos. Pero no perdamos de vista que se trata de competencias educativas, no competencias profesionales.

Conseguir personas matemáticamente competentes no es tarea fácil, pues requiere de medios y de tiempo necesario para trabajar según este enfoque. Es mucho más fácil enseñar un conjunto de algoritmos que se aplican como recetas en un momento determinado. Pero con esto no se consigue que las personas aprendan a utilizar las matemáticas en contextos realistas. Por esto, desde la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas pedimos a las autoridades educativas que mejoren las condiciones para su aprendizaje, mediante el incremento de las horas semanales dedicadas a la enseñanza de las matemáticas así como de los medios necesarios para llevar a cabo esta tarea.

En el presente número incluímos el primer anuncio de la convocatoria de las XIV JAEM, a celebrar el próximo año 2009 en la ciudad de Girona. El lema elegido: Educación matemática: Competentes en un mundo global *nos da a entender cual va a ser el foco de atención alrededor del cual girarán las propuestas que allí se expongan. Los profesores de matemáticas hemos aceptado el reto y vamos a aprovechar esta oportunidad.* ■

suma+

Manuscrito de Pedro Puig Adam

artículos

suma+ 58
Junio 2008, pp. 7-23

Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los Números Naturales

En los planes de formación inicial del profesor de matemáticas de Secundaria actuales se considera la planificación como una competencia principal que debe desarrollarse. Presentamos el Análisis de Contenido como un procedimiento que se ocupa de analizar y organizar los diferentes significados que admiten las matemáticas escolares, de cara a la planificación de unidades didácticas. El profesor en formación desarrolla mediante este análisis diversas capacidades necesarias para la planificación. Ejemplificamos el procedimiento y sus fases mediante el tema Sistema de los Números Naturales.

In the current mathematics secondary teacher training syllabi, planning is considered as a main competence that should be emphasized. We introduce content analysis as a procedure for analyzing and organizing the different school mathematics meanings that should be taken into account to plan didactical units. We use the system of whole numbers for exemplifying the phases of this procedure.

La Ley Orgánica 2/2006 de Educación establece, en su artículo 94, que para impartir las enseñanzas de Educación Secundaria Obligatoria y de bachillerato será necesario tener el título de Licenciado, Ingeniero o Arquitecto, además de una formación pedagógica y didáctica de nivel de Postgrado. En el marco de la actual reforma universitaria basada en la convergencia europea, se presentan como finalidades prioritarias la elaboración de nuevas titulaciones, actualización de su orientación profesional y vinculación con el mercado de trabajo.

La noción de competencia resulta central en la nueva orientación de las titulaciones:

> El plan de estudios conducente a la obtención de un título debe tener en el centro de sus objetivos la adquisición de competencias por parte de los estudiantes, ampliando por tanto (aunque no excluyendo) el tradicional enfoque basado principalmente en contenidos y horas lectivas. Se deberá hacer énfasis en los métodos de aprendizaje de dichas competencias, así como en los procedimientos para evaluar su adquisición. (…) Se utiliza el término competencia exclusivamente en su acepción académica, y no en su acepción de atribución profesional. Las competencias son una combinación de conocimientos, habilidades (intelectuales, manuales, sociales, etc.), actitudes y valores que capacitarán a un titulado para afrontar con garantías la resolución de problemas o la intervención en un asunto en un contexto académico, profesional o social determinado. (MEC, 2005; p. 14).

En el contexto actual de nuevas estructuras para planes de estudios universitarios, la norma establece la formación inicial del profesorado de Secundaria mediante un título. Esta formación debe centrarse en la adquisición y desarrollo de unas competencias generales y específicas, de carácter profesional propio (Ley Orgánica 2/2006).

El Ministerio de Educación y Ciencia resalta la aproximación a la formación basada en la noción de competencia en un borrador de directrices para los títulos de *Master* que organicen la formación inicial del profesorado de Secundaria (Consejo de Universidades, 2006). La caracterización de las competencias y del conocimiento profesional del profesor de Educación Secundaria ha traspasado el ámbito de la reflexión teórica, limitada a especialistas, para ocupar a los responsables de la política educativa, gestores de centros de formación superior y expertos universitarios. El marco de competencias parece especialmente adecuado para abordar la formación inicial del profesorado de Secundaria mediante titulaciones de postgrado, ya que la docencia es un campo profesional

Luis Rico
Antonio Marín
José Luis Lupiáñez
Pedro Gómez
Universidad de Granada

prioritario para los licenciados en Ciencias y Humanidades y de otras titulaciones, que corresponden a campos y materias que se estudian en Educación Secundaria.

Competencias del profesor de matemáticas

Son varios los equipos y grupos de trabajo que, recientemente, vienen estudiando las competencias básicas para estructurar planes de formación, inicial y permanente del profesorado (Oser, Achtenhagen & Renold, 2006; TEDS-M, 2007).

En efecto, la determinación de las competencias asociadas a cada una de las titulaciones universitarias pone el acento en la preparación para el ejercicio de la actividad profesional y su vinculación a la formación universitaria. Distintos documentos, elaborados en España por instituciones o grupos de estudio, han sintetizado las competencias del profesor, necesarias para su desempeño como profesionales autónomos y críticos (Pérez, 2005). Entre esas propuestas destacan competencias relativas a la revisión de significados de los conceptos y a su tratamiento. La propuesta de Directrices para el Máster de Profesor en Secundaria (Consejo de Universidades, 2006) señala, entre las competencias propias de estos profesores, las siguientes:

> Conocer los contenidos curriculares de las materias correspondientes a la especialidad cursada, así como el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje respectivos. (…)
>
> Ser capaz de planificar, desarrollar y evaluar el proceso de enseñanza y aprendizaje potenciando procesos educativos que faciliten la adquisición de las competencias propias de las respectivas enseñanzas, atendiendo al nivel y formación previa de los estudiantes así como la orientación de los mismos, tanto individualmente como en colaboración con otros docentes y profesionales del centro. (p. 3).

Estos y otros documentos contemplan similares tipos de competencias en el modelo básico de formación y actualización docente para el profesorado de Secundaria. Tales trabajos han tenido especial incidencia en las reflexiones acerca de la formación inicial de profesores de matemáticas de Secundaria. En el momento actual, la formación del profesorado de Educación Secundaria requiere incorporar reflexión teórica e instrumentos técnicos que promuevan la competencia en el proceso de planificación de la enseñanza y aprendizaje en el aula del futuro profesor (Comisión Educación CEMAT, 2004; Campillo, 2004; Rico, 2005).

Planificación docente

La planificación es una de las competencias profesionales clave para el profesor y que está menos desarrollada en los planes de formación del profesorado. Resulta especialmente importante para el profesorado de matemáticas, dadas las dificultades inherentes al aprendizaje y enseñanza de esta materia. En este documento se precisan algunas capacidades que contribuyen al desarrollo de esta competencia.

La información que aportan a la planificación docente los currículos de Educación Secundaria establecidos y las secuenciaciones de contenidos que los boletines oficiales publican, se muestran claramente insuficientes para llegar al nivel del aula y decidir acerca de qué debe aprender un alumno o alumna de secundaria en cada tema y cómo hacerlo operativo cada día. Los libros de texto que publican las editoriales y su complemento en forma de libro del profesor ocupan el espacio intermedio entre la secuenciación general del Boletín Oficial del Estado y la planificación diaria de actividades que el profesor debe realizar, ya que responden a preguntas como ¿qué contenidos trabajo con mis alumnos? ¿qué expectativas tengo respecto a su aprendizaje? ¿cómo selecciono y estructuro las clases para que el alumno alcance las expectativas previstas? Sin embargo los libros de texto se redactan para perfiles de alumnos y profesores que no coinciden con la realidad de cada centro y aula. La información que contienen, las estrategias didácticas con las que organizan los contenidos, la selección de tareas que realizan y la limitación de recursos que suponen, obligan, cada vez más, a que el profesor utilice el libro de texto como un apoyo a su trabajo en el aula y no como una guía de actuación para seguir de modo prescriptivo.

> *La planificación es una de las competencias profesionales clave para el profesor y que está menos desarrollada en los planes de formación del profesorado.*

La normativa educativa señala la obligatoriedad de elaborar documentos curriculares específicos para cada centro, que contengan instrumentos para tomar decisiones y propuestas para ajustar el contenido oficial del currículo a la realidad del alumnado de cada centro. Igualmente, enfatiza la necesidad de responder a la diversidad del alumnado en sus condiciones de vida, expectativas y conocimientos con variedad de actividades. Estas consideraciones, refuerzan la importancia del trabajo de programación y selección de tareas en la labor del profesor. La planificación, como competencia clave del profesor de matemáticas, demanda el desarrollo de capacidades específicas para identificar, organizar, seleccionar y priorizar los significados de los conceptos matemáticos mediante el análisis cuidadoso de su contenido, análisis necesario para establecer las expectativas de aprendizaje, previo al diseño de tareas y necesario para la elección de secuencias de actividades.

Matemáticas escolares

Para la formación inicial del profesorado de matemáticas de Secundaria consideramos prioritario el desarrollo de un conocimiento especializado sobre matemáticas escolares, es decir, sobre las matemáticas consideradas como objeto de enseñanza y aprendizaje. Nuestro planteamiento sobre matemáticas escolares postula que ideas, estructuras y conceptos matemáticos se han generado y constituido como herramientas para organizar los fenómenos de los mundos natural, mental y social. Los términos y conceptos matemáticos que se usan y presentan en el sistema educativo corresponden a nociones socialmente útiles y culturalmente relevantes, que se transmiten para la formación de todos los ciudadanos. El sistema educativo organiza y estructura dichos conceptos e ideas a los efectos de su enseñanza, y contribuye a que los ciudadanos lleven a cabo su aprendizaje en el uso de tales herramientas en contexto.

Las matemáticas son un modelo paradigmático de proporcionar significado a relaciones y expresiones abstractas, que no corresponden a objetos o propiedades físicas, pero que satisfacen un marco de experiencias estructuradas, relacionadas con las acciones de clasificar, contar, ordenar, situar, representar, medir, expresar armonía, buscar relaciones y regularidades, jugar y explicar (Devlin, 1994; Steen, 1990).

Para la formación inicial del profesorado de matemáticas de Secundaria consideramos prioritario el desarrollo de un conocimiento especializado sobre matemáticas escolares, es decir, sobre las matemáticas consideradas como objeto de enseñanza y aprendizaje.

Las conexiones internas en los sistemas de conceptos matemáticos los constituyen en estructuras; de este modo proporcionan referencia –valor veritativo- a cada noción, por medio de sus vínculos en la estructura conceptual en que se inserta. Un concepto adquiere objetividad y potencial argumentativo cuando forma parte de una estructura. Las conexiones y usos externos aportan sentido, basado en la experiencia propia o en la experiencia culturalmente acumulada; incorporan modos de actuar ante situaciones, contribuyen a resolver problemas, a procesar información y al ajuste a modelos.

Nuestro interés por el significado de los conceptos matemáticos está, pues, centrado en el ámbito de la matemática escolar, en su consideración funcional. En el ámbito escolar, un mismo concepto matemático puede expresar una variedad de significados. Basándonos en las ideas de sentido y referencia (Frege, 1996), establecemos que los diferentes significados de un concepto matemático vienen dados por las estructuras conceptuales en que se inserta –referencia-, por los sistemas de símbolos que lo representan –signos-, y por los objetos y fenómenos de los que surge -sentido. En la reflexión sobre matemática escolar, que corresponde al estudio curricular, el *significado* de un concepto se establece mediante la terna Estructura Conceptual-Representaciones-Fenómenos. Adecuamos así la terna de Frege: Signo-Sentido-Referencia, con la cual caracterizamos el *significado* de un concepto de las matemáticas escolares.

Hay diferentes significados para un mismo concepto matemático, que vienen dados por las estructuras conceptuales que lo refieren, por los sistemas de símbolos que lo representan, y por los objetos y fenómenos de los que surge y que le dan sentido. Sostenemos que esto es así porque un mismo concepto admite una pluralidad de relaciones internas, de modos de representación y de sentidos, que vienen determinados por las relaciones externas del concepto de referencia (Rico, 1997).

Análisis de contenido

El Análisis de Contenido, tal y como aquí se presenta, es una herramienta técnica para establecer y estudiar la diversidad de significados de los contenidos de las Matemáticas Escolares. El Análisis de Contenido es parte del Análisis Didáctico, que configura un conjunto de procedimientos necesarios para llevar a cabo el diseño y planificación de unidades didácticas. Mediante este Análisis se desarrollan las capacidades del profesor de matemáticas para establecer diversos significados de los temas matemáticos escolares, que son conocimientos necesarios para marcar expectativas sobre el aprendizaje de los alumnos y para delimitar y diseñar tareas basadas en la concreción de unas demandas cognitivas. Es decir, el Análisis de Contenido contribuye al desarrollo de capacidades profesionales para la enseñanza vinculadas con la competencia de planificación.

En reiteradas ocasiones hemos subrayado la conveniencia de comenzar las tareas de planificación y diseño de unidades didácticas por medio del Análisis de Contenido, es decir, por medio del estudio de los diversos significados de los conceptos matemáticos, que hemos estructurado mediante diversos organizadores del currículo (Rico, 1997; Segovia y Rico, 2001; Gómez, 2002; Gómez, 2007).

El Análisis de Contenido sobre un tópico se lleva a cabo mediante distintas fases, las cuales desarrollan ciertas capacidades y contribuyen a la competencia de planificación. En este trabajo se muestra una aplicación de las nociones del Análisis de Contenido mediante su ejemplificación con un tema de

Primer Ciclo de Educación Secundaria Obligatoria. El tema elegido como ejemplo es *Sistema de los Números Naturales*.

Tratamiento curricular

Fijado el nivel en que va a realizarse el Análisis de Contenido de un tópico, en este caso el Primer Ciclo de Secundaria, es obligado acercarse a la normativa curricular y analizar las referencias al tema contenidas en los diferentes niveles. Tanto los Decretos de Enseñanzas como las secuenciaciones caracterizan al tema, dando un programa de contenidos organizado en epígrafes, junto con algunas referencias metodológicas que proporcionan información sobre su extensión y aportan especificidad a los contenidos. La referencia básica para el Sistema de los Números Naturales, que se ejemplifica, es:

> Primer curso. Contenidos:
>
> 1º. Aritmética y álgebra. Números naturales. El sistema de numeración decimal. Divisibilidad. Fracciones y decimales. Operaciones elementales. Redondeos. Potencias de exponente natural. Raíces cuadradas exactas. Las magnitudes y su medida. El sistema métrico decimal. El euro. Magnitudes directamente proporcionales. Porcentajes.
>
> 2º. Relación de divisibilidad. M.C.D. y m.c.m. de dos números naturales. Estimaciones, aproximaciones y redondeos. Precisión y estimación en medidas (MEC, 2000; p. 61).

A partir de esta información se abre la posibilidad de:

- Destacar conexiones con otros temas y núcleos temáticos del currículo.
- Establecer una secuenciación de los aspectos del tema que se podrán desarrollar en varios cursos o a lo largo de otros tópicos.
- Delimitar el contenido en un curso en el marco de una programación global.

Pero la información de los documentos curriculares es amplia y genérica, lo suficiente como para admitir una diversidad de interpretaciones. De hecho, los distintos libros de texto y otros desarrollos muestran diferentes aproximaciones que, por razones diversas, se suelen aceptar como modelos de propuestas curriculares. Conviene, pues, destacar algunos instrumentos y técnicas de trabajo para el profesor en formación, que contribuyan al desarrollo de capacidades relativas al diseño de tareas y planificación de unidades didácticas; estas técnicas marcan criterios para organizar y seleccionar contenidos, focalizar prioridades y configurar itinerarios de aprendizaje (Gómez, 2007).

El desarrollo del currículo de matemáticas lo debe establecer, en definitiva, el seminario de profesores de cada centro.

Tipos de contenido

Para el correcto desarrollo de las tareas docentes y el logro de las expectativas de aprendizaje, el profesor tiene que planificar su trabajo y, como se ha dicho, necesita considerar el significado de conceptos e ideas matemáticas desde una perspectiva más amplia que la de su exclusiva fundamentación formal y axiomática y de su justificación deductiva, superando pretendidas versiones canónicas del currículo que lo estancan y limitan. El análisis de los significados de ideas y conceptos de las matemáticas escolares obliga a revisar los contenidos y las estructuras en las que tales conceptos se insertan.

Por ello el Análisis Didáctico comienza por el Análisis de Contenido, es decir, hace una revisión de las estructuras matemáticas desde la consideración de su aprendizaje y enseñanza, y de ahí la importancia de revisar los contenidos desde una perspectiva cognitiva. Algunos investigadores en educación matemática, expertos en su aprendizaje, han organizado el conocimiento matemático escolar con criterios cognitivos y, para ello, usan la clasificación del contenido de las matemáticas escolares en dos grandes bloques: *conceptual* y *procedimental* (Bell, Costello & Küchemann, 1983; Hiebert y Lefevre, 1986; Rico, 1995). Dentro de estos dos bloques establecen tres niveles de complejidad.

> *Para el correcto desarrollo de las tareas docentes y el logro de las expectativas de aprendizaje, el profesor tiene que planificar su trabajo.*

En el campo conceptual se señalan *hechos*, *conceptos* y *estructuras* como los tres tipos de conocimientos que articulan el campo en grado de complejidad creciente. Los hechos constituyen el nivel básico de complejidad conceptual, y se pueden diferenciar en *términos*, *notaciones*, *convenios* o *resultados*. En un nivel medio de complejidad están los *conceptos*, que pueden tener diferentes significados, como es el caso del número natural o la relación de divisibilidad. En un nivel de complejidad superior están las *estructuras*. El conocimiento de la estructura del Sistema de los Números Naturales se inicia con las operaciones internas, relaciones y propiedades características del semianillo arquimediano de los números naturales ($\mathbb{N}$, +, x, ≤).

En el ámbito de los procedimientos los tres niveles de complejidad que se consideran son: *destrezas*, *razonamientos* y *estrategias.* Por ello, algunos contenidos del Sistema de los

Números Naturales se presentan en este nivel básico como *destrezas* para adquirir o afianzar (es el caso del uso del paréntesis y la jerarquía de operaciones o los algoritmos del producto y la división); otros conocimientos se consideran formas de *razonamiento* (deductivo, o inductivo en el tratamiento de regularidades numéricas); finalmente, otros tienen un mayor nivel de complejidad, que corresponde a las *estrategias* (como son las estrategias de “estimar” o “reconocer patrones numéricos).

Un profesor en formación ha de ser capaz de discriminar los contenidos matemáticos como objetos de aprendizaje, para lo cual es útil esta clasificación. También ha de tener capacidad para establecer una clasificación detallada de los contenidos que intervienen en un tema concreto, de su tipología y nivel de complejidad.

La Tabla 1 aplica esta clasificación para el *Sistema de los Números Naturales*.

Focos conceptuales

Para avanzar y profundizar en el proceso de análisis del contenido de un tema conviene que el profesor determine relaciones y prioridades entre conceptos, procedimientos y estrategias. Es fácil observar que dentro de un mismo tema hay conceptos y procedimientos que pueden estar al servicio de una estrategia importante. Desde la perspectiva del tema que se está planificando las estrategias ocupan lugares predominantes y hacen que otros conceptos o procedimientos se supediten a ellas. Para ello, se requiere capacidad del estudiante para profesor para fijar los conceptos que articulan el tema y mostrar el sistema de relaciones que se generan entre los distintos tipos de contenidos a partir de dichos focos conceptuales.

Para avanzar y profundizar en el proceso de análisis del contenido de un tema conviene que el profesor determine relaciones y prioridades entre conceptos, procedimientos, estrategias.

Con estas premisas se habla de *focos conceptuales prioritarios* cuando se propone la organización de los contenidos de un tema a partir de un número reducido de ideas prioritarias. Los focos conceptuales consisten en agrupaciones específicas de conceptos, estrategias y estructuras, que adquieren importancia especial ya que expresan, organizan y resumen agrupamientos coherentes de los contenidos. Los focos conceptuales se identifican porque establecen prioridades sobre las expectativas de aprendizaje del tema y permiten una adecuada secuenciación de tareas para su enseñanza.

Términos: cero, uno, dos, tres, ….; igual, mayor/menor que; suma; resta; producto; división; siguiente a; anterior de; … decena, centena, unidad de millar, millón, decena de millón, …; billón, trillón, …; Notaciones: 0, 1, 2 ,3 4, 5, 6, 7, 8 y 9; =, <, ≤,+, -, x, :; 10, 100, 1000,…; 102,103,… Convenios: • Los naturales comienzan en 0 • Periodicidad de los órdenes del sistema: [(u, d, c), (um, dm, cm)], [(uM, dM, cM)],… • Valor posicional de las cifras en un número • Lectura: todo número se lee comenzando por la cifra de mayor orden, con indicación de dicho orden, continúa por… • Colocación de sumandos; de los factores de un producto; de los términos en una resta; de los términos en una división. Resultados: • Cada 10 unidades de un orden forman una unidad de orden superior. • Comparación de naturales por tamaño y, en caso de igualdad, por su cifra de mayor orden. • Todo número n tiene un siguiente n+1 y, excepto 0, un anterior n-1. • Tablas de sumar y de multiplicar. • Regularidades numéricas. Conceptos Numéricos: • Significados del número. • Diversos conceptos de número natural • Secuencia numérica. • Recta numérica. • Sistema decimal de numeración. • Orden entre naturales. • Suma, resta producto y división de naturales. • Divisibilidad. • Propiedades de las operaciones numéricas.	Estructuras: • (N, +) y (N, x) Semigrupos conmutativos. • (N, ≤) Orden total y arquimediano. • (N, +, x, ≤) Semianillo arquimediano. Destrezas: • Escritura y lectura de números • Descomposición polinómica de un número • Uso del paréntesis y jerarquía de las operaciones • Algoritmos de la suma y de la resta • Algoritmos del producto; algoritmos de la división. • Expresiones de un mismo número como resultado de distintas operaciones • Diversidad de representaciones de un mismo número. • Orden de magnitud de un número o cantidad. • Usos básicos de la calculadora con naturales. Razonamiento: • Deductivo: propiedades de las operaciones • Inductivo: regularidades numéricas • Recta numérica. Propiedades y operaciones en la recta • Figurativo: estructuras que se expresan gráficamente • Argumentos para justificar propiedades numéricas Estrategias: • Calculo mental • Estimación de los resultados de una operación • Reconocimiento de patrones numéricos • Reconocimiento de la estructura que comparten dos o más números • Construcción de un conjunto de números con ajuste a una regla • Estrategias de cálculo con la calculadora manual • Resolución de problemas aritméticos y numéricos

Tabla 1. Clasificación cognitiva del contenido del Sistema de los Números Naturales.

En nuestro caso, los conceptos que consideramos prioritarios para centrar el aprendizaje y abordar la enseñanza del tema *Sistema de los Números Naturales*, son:

- Nociones sobre significados y usos de los naturales
- Sistema Decimal de Numeración
- Relación de orden
- Suma de naturales
- Producto de naturales
- Divisibilidad. Teorema Fundamental de la Aritmética

Cada uno de estos focos prioritarios incluye una diversidad de hechos, conceptos y procedimientos ligados al mismo. Si combinamos esta elección de focos con la clasificación cognitiva podemos elaborar varios listados que expresan prioridades en la organización de los contenidos del tema *Sistema de los Números Naturales*.

La elaboración de estas listas no tiene un carácter exhaustivo, pero son importantes ya que desarrollan la capacidad del profesor en formación para organizar los contenidos de un tema tomando como base ideas centrales que, de otro modo, se muestran aisladas; también desarrolla la capacidad de usar los tipos y niveles establecidos en la clasificación cognitiva. Así, a partir de los focos antes mencionados, elaboramos los siguientes listados de ideas prioritarias para el Sistema de los Números Naturales:

Significados y usos	Sistema Decimal de Numeración	Suma de naturales	Orden entre naturales	Producto de naturales
*Secuencia/ Contar *Ordinal/ Ordenar *Cardinal/Cuantificar *Signo/ Codificar *Símbolos/ Estructurar *Números/ Operar *Recta/ Visualizar *Nociones y conceptos de número natural * Tipos de números por su tamaño; pequeños, medianos y grandes.	* Símbolos. Cero * Base: principio de agrupamiento * Unidades de orden superior * Escritura y lectura de números * Notación polinómica * Tablas numéricas * Algoritmos de suma y resta * Algoritmos de producto y división	* Símbolos de suma y resta * Noción de suma y resta *Composiciones aditivas de un número * Tabla de sumar * Algoritmos de suma y resta * Suma con la calculadora * Propiedades de la suma * Estructura de ($\mathbb{N}$ +) * Estimación de sumas y restas	* Siguiente y anterior * Secuencia numérica * Comparar naturales cualesquiera * Relación de orden * Estructura ordinal de $\mathbb{N}$ * Orden de magnitud de un número * Orden de aproximación en una estimación.	* Simbolización del producto * Términos del producto y división. * Notaciones * Tabla de multiplicar * Algoritmos * Productos y divisiones con la calculadora * Divisibilidad. * Factorización * Estructura de ($\mathbb{N}$; ×) * Estimación de productos y divisiones

Tabla 2: Focos Conceptuales del Sistema de los Números Naturales

Conviene advertir las limitaciones a que puede conducir un énfasis excesivo en la elaboración de listas. Centrar el trabajo del profesor en formación en una actividad exclusivamente analítica plantea diversos interrogantes:

- Grado de precisión: ¿todas las listas dicen lo mismo?
- Desconocimiento de sus límites: ¿hasta donde llega una lista?
- La extensión de una lista: ¿cuándo agotan un tema?
- La definición de una lista: ¿por qué incorporan cuestiones diferentes?

La elección de conceptos prioritarios ha permitido transitar desde un listado a varios listados paralelos, pero no ha producido aún la consideración de conexiones entre diferentes focos, ni tampoco al interior de los focos conceptuales. Surge la necesidad de destacar y reconocer las relaciones dentro de los distintos focos y conceptos que intervienen en una misma estructura.

Mapa relacional de conceptos y procedimientos

La organización alrededor de conceptos básicos admite una primera representación en modo de mapa conceptual, específico a cada uno de los focos. Con esta representación se establecen nexos entre el conocimiento conceptual y procedimental de un mismo núcleo de conceptos básicos. Entre las ventajas de los mapas conceptuales destacan:

- Establecer una jerarquía de nociones dentro de cada concepto, que se expresa por su ordenación dentro de una lista mediante una representación lineal secuenciada.

- Conectar las nociones de las distintas listas; las relaciones y conexiones se muestran mediante segmentos o posiciones conectadas que, a veces, se identifican mediante etiquetas.

- Mostrar un grafo con nodos y conexiones como producto final; los nodos con mayor número de conexiones son los conceptos principales.

- Considerar distintos recorridos en el grafo; cada recorrido muestra un modo coherente de secuenciar varias nociones centrales en una estructura conceptual.

- El mapa conceptual es, fundamentalmente, un esquema para entender e interpretar una estructura conceptual determinada.

En la Figura 1 vemos la expresión de los conceptos y procedimientos básicos, que corresponden al foco *Sistema Decimal de Numeración* del tema *Sistema de los Número Naturales*, en forma que muestra los conceptos principales de ese foco y nociones básicas asociadas a los correspondientes conceptos.

Por cada uno de los focos prioritarios puede y debe establecerse un sistema de relaciones con el que se articulen las nociones del foco, ya destacadas en la Tabla 2; en cada caso dará lugar a un mapa conceptual. Con este ejercicio se desarrollan las capacidades de síntesis y estructuración, y su logro

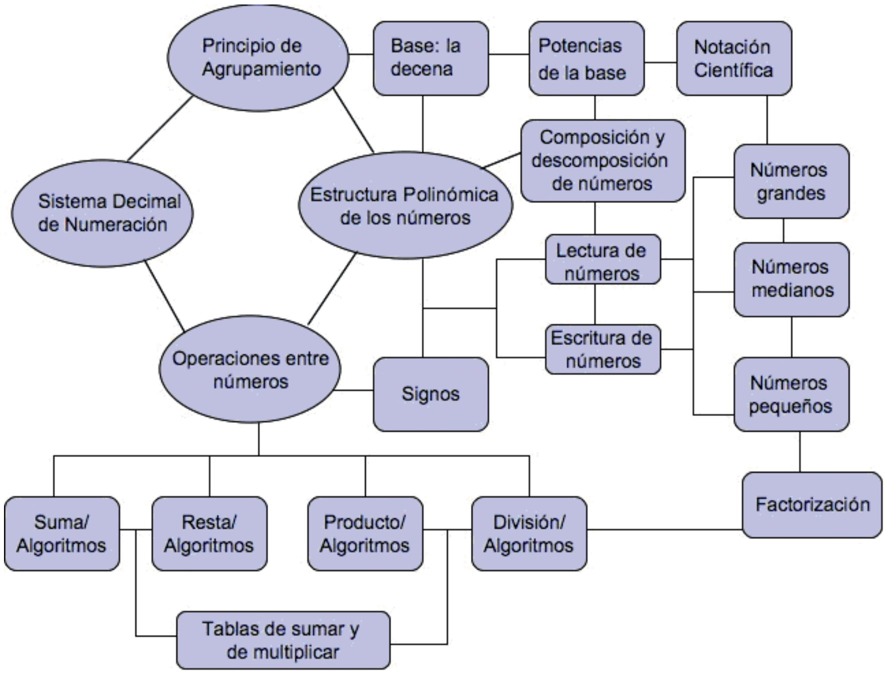


Figura 1: Mapa Conceptual Sistema Decimal de Numeración

se muestra al elaborar la red de nociones básicas mediante el mapa conceptual correspondiente, al conectar y estructurar las nociones centrales de las distintas listas presentadas según los focos señalados.

Mapas conceptuales: de los focos a la estructura

Ahora bien, consideremos la estructura conceptual *Sistema de los Número Naturales*, que contempla los focos prioritarios mostrados en la Tabla 2. Corresponde al profesor en formación expresar tal estructura mediante un único mapa conceptual, que sintetice las aportaciones de los seis mapas específicos a cada uno de los focos. La capacidad del profesor en formación para sintetizar y estructurar las principales ideas de los distintos focos prioritarios, sus conexiones y las conexiones entre los focos, se intensifica y desarrolla con la realización del mapa conceptual conjunto, que muestra la riqueza de relaciones entre los contenidos y entre los focos conceptuales del tema escogido. Se pueden considerar diferentes criterios a la hora de elaborar un mapa para una estructura conceptual. Ejemplificamos con la estructura *Sistema de los Números Naturales* el paso de mapas conceptuales centrados en focos al mapa de la estructura global completa.

En el esquema de mapa conceptual de la Figura 2 ocupan un lugar central las nociones del Sistema Decimal de Numeración, los tres tipos de números ya mencionados en el primer foco y los sistemas de representación que presentamos más adelante. Dependiendo de la complejidad del patrón del cual proceden, se distinguen los siguientes tipos de números *pequeños* (números de uno o dos dígitos, números de la vida cotidiana), *medianos* (números que se expresan mediante la totalidad de sus cifras, hasta un orden de magnitud del billón, números usuales de las magnitudes cotidianas) y *grandes* (números que se expresan mediante notación científica, de un orden de magnitud elevado y que corresponden a magnitudes de disciplinas científicas) (Rucker, 1988; pp. 72-73). También destacan, además del Sistema Decimal de Numeración, cuatros grandes sistemas de representación, en la recta o en tablas, mediante configuraciones puntuales, en notación factorizada y en notación científica.

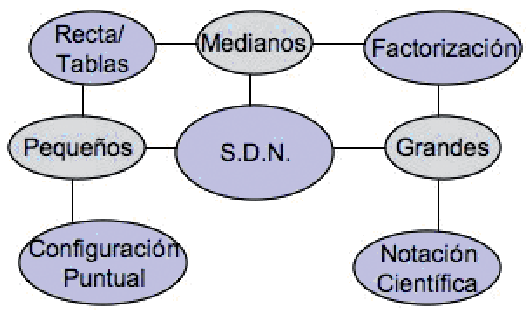


Figura 2: Aproximación al mapa conceptual del Sistema de los Números Naturales

Así, los números pequeños suelen representarse en tablas, en la recta o mediante configuraciones puntuales. Para los números medianos se maneja la escritura en forma factorizada, además, los números grandes requieren también la notación científica. Por otra parte, todos los números se pueden representar en el Sistema Decimal de Numeración. Ligadas a estas representaciones están la gran mayoría de conceptos y procedimientos ya enumerados anteriormente y que presentan al menos conexiones con ciertos procedimientos a los que se vinculan para su formulación o desarrollo matemático.

Establecer estos nexos conduce a un tipo de mapa más completo. En este caso se incorporan algunos nuevos conceptos y procedimientos ligados a los focos prioritarios tercero, quinto y sexto del Sistema de los Números Naturales y nociones referentes a estrategias de resolución de problemas y otros usos y significados del número, con sus correspondientes conexiones; se obtiene así el mapa conceptual de la Figura 3, que muestra una visión global de los focos considerados prioritarios en el Análisis de Contenido de esta estructura conceptual en Educación Secundaria.

El resultado más importante de esta actividad es la profundidad del análisis de relaciones entre conceptos y procedimientos que el profesor en formación realiza, lo que contribuye al dominio de la estructura en estudio a los efectos de su consideración como objeto de enseñanza y aprendizaje.

Estructura conceptual y análisis de contenido

Los mapas conceptuales son las herramientas propuestas para llevar a cabo el estudio de la estructura conceptual de un tópico matemático. Con los mapas se inicia el Análisis de Contenido del tema. La delimitación de la estructura conceptual de un tópico matemático ubica los correspondientes conceptos y procedimientos y sus relaciones, establece prioridades, destaca conexiones y muestra las diversas opciones y trayectorias que pueden marcarse para organizar las expectativas sobre su aprendizaje; igualmente, aporta las referencias necesarias para establecer sus significados.

Los mapas conceptuales proporcionan una técnica para mostrar una estructura conceptual; mediante esta técnica se desarrollan las capacidades del profesor que contribuyen a su comprensión de dicha estructura. Como toda técnica tiene diversas vías e interpretaciones, que llevan a una diversidad de mapas conceptuales. Aunque esta técnica es útil, no conviene olvidar que tiene limitaciones ya que los mapas conceptuales son un modo de expresar la estructura conceptual, pero no la sustituyen.

El Análisis de Contenido tiene su primera fase en la consecución de un marco de relaciones que muestre la complejidad

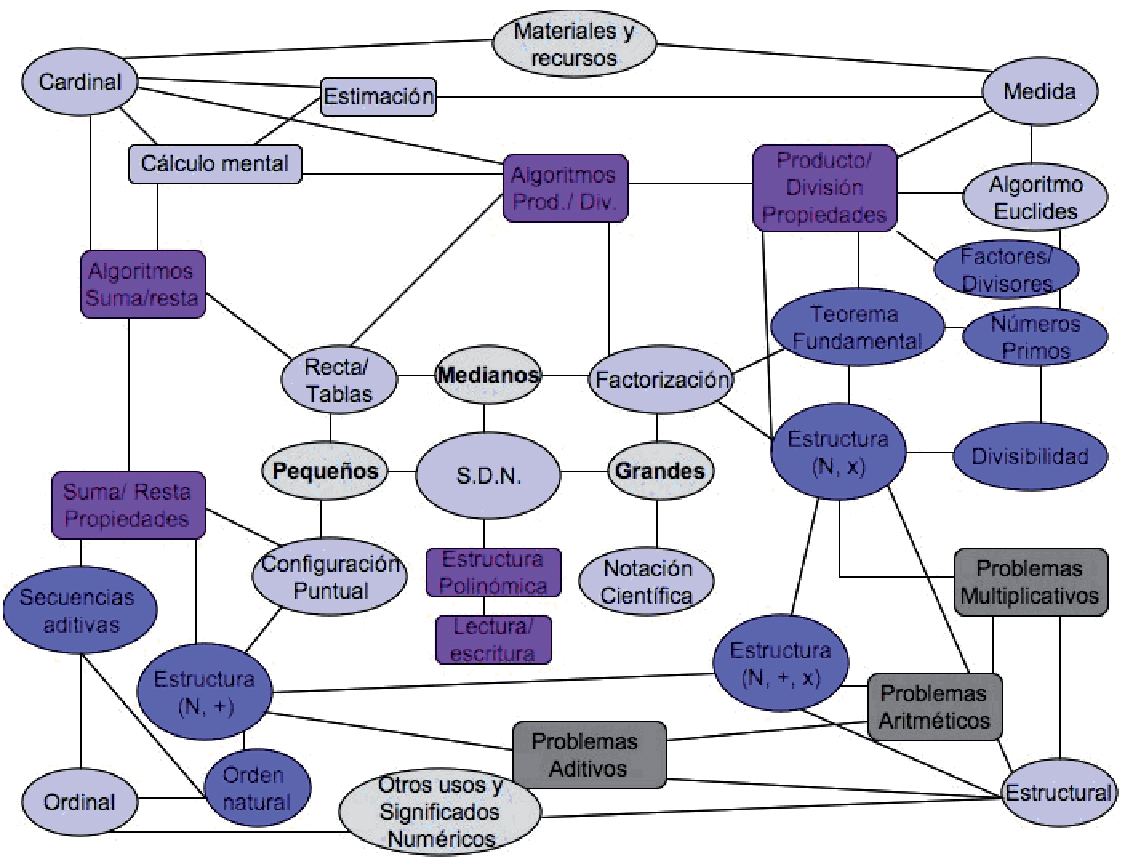


Figura 3: Mapa Conceptual del Sistema de los Números Naturales

de la estructura conceptual en estudio. Adquirir destrezas y desarrollar capacidades para seleccionar focos conceptuales prioritarios para cada uno de los temas del currículo de matemáticas de Secundaria, junto con los conceptos, ideas y procedimientos principales que se articulan en cada foco, permite el desarrollo de un segundo nivel de capacidades, con las que sintetizar y expresar la estructura de un tema. La técnica propuesta muestra una diversidad de mapas que organizan la complejidad. En primer lugar, en cada uno de los focos y, en segundo lugar, para toda la estructura conceptual conjuntamente considerada.

Sistemas de representación

El estudio y revisión de los sistemas de representación es otra de las componentes del Análisis de Contenido, junto a la estructura conceptual y el Análisis Fenomenológico. Por representación entendemos cualquier modo de hacer presente un objeto, concepto o idea. Conceptos y procedimientos matemáticos se hacen presentes mediante distintos tipos de símbolos, gráficos o signos y cada uno de ellos constituye una representación (Castro y Castro, 1997).

Hay diversidad de modos de representar conceptos matemáticos: mediante signos o símbolos especiales, mediante esquemas, gráficos o figuras, principalmente. Lo peculiar de ideas y conceptos matemáticos es que cada uno de ellos admite diversas representaciones. Los modos de representar nociones matemáticas destacan las propiedades de los conceptos y procedimientos. Los modos de representación muestran objetos que forman parte de una estructura, se presentan organizados en sistemas; por ello se habla de sistemas de representación (Janvier, 1987; Kaput 1992).

Cada sistema de representación pone de manifiesto y destaca alguna peculiaridad del concepto que expresa; también permite entender y trabajar algunas de sus propiedades. Así lo vemos con las operaciones dentro de un mismo sistema de representación:

$$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 3 \cdot 5 = 4^2 - 1 = (4+1) \cdot (4-1)$$

Los sistemas de representación son centrales en la caracterización del significado de las nociones matemática, contribuyen a la comprensión de conceptos y procedimientos. No hay jerarquía entre los sistemas de representación. Cada uno de ellos permite resaltar aspectos particulares de esos conceptos y de sus relaciones, y oculta otros.

Mediante las conexiones entre los sistemas de representación se muestra la riqueza de aspectos y relaciones involucrados en un concepto, como ocurre con las relaciones de la Figura 4 que exploran la igualdad $n^2 = 1 + 3 + 5 + \ldots + [2n-1]$:

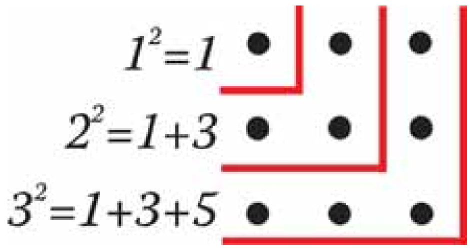


Figura 4: Formación de los números cuadrados con dos sistemas de representación

Toda la complejidad de significados que pone de manifiesto la estructura conceptual de un tema de matemáticas se hace operativa mediante sus diferentes sistemas de representación. Las conexiones entre sistemas de representación contribuyen a plantear nociones convencionales de manera no convencional, destacar alguna propiedad no reconocible en la representación usual de un tema. Conocer un contenido se sustenta en el dominio de sus sistemas de representación y de los modos de expresar una misma propiedad mediante diverso sistemas. Como se ha visto en los mapas conceptuales de las Figuras 2 y 3, los sistemas de representación centran y organizan la estructura conceptual. El estudio de los sistemas de representación de un tema matemático tiene como objeto que los profesores en formación desarrollen su capacidad para analizar diferentes formas de representación de los conceptos matemáticos involucrados en ese tema y explorar y mostrar sus diferentes conexiones.

Sistemas de representación de los Números Naturales

Al considerar el sistema de los números naturales, desde su estructura conceptual y desde una revisión histórica de su desarrollo (Ifrah, 1997), destacan cuatro modalidades de representación: simbólica, verbal, gráfica, y la que suministran los materiales manipulativos.

La Figura 5 muestra la riqueza de sistemas que surgen del estudio de las diferentes modalidades de representación de los números naturales y los diferentes significados, en cada caso, para este concepto. En la figura hemos señalado con asteriscos una ejemplificación de diferentes modos de representar el natural 4 en esos sistemas. Comentamos las principales características de algunos de los sistemas de representación considerados para los Números Naturales.

Sistemas de Representación Simbólicos

Dentro de esta modalidad de representación se considera los sistemas para representar naturales dependiendo de si se usa una estructura simple, aditiva o posicional; dentro de ésta última sobresale el sistema decimal de numeración y, a partir de él, las relaciones numéricas y de factorización.

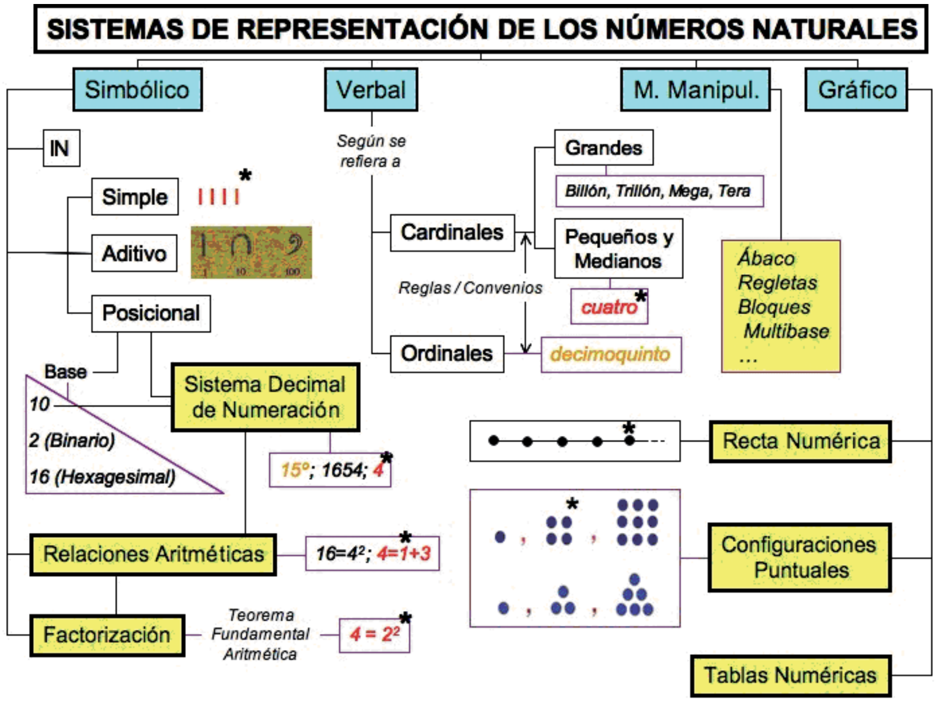


Figura 5: Sistemas de representación en el Sistema de los Números Naturales

En su forma más sencilla, está el *sistema simple*, en el cual los números naturales se emplean para contar cantidades pequeñas tomando como unidad una única marca que se repite tantas veces como sea necesario. Con motivo de utilizar símbolos para designar agrupaciones de la unidad, surgen los *sistemas aditivos*, entre los que destacan los sistemas de numeración egipcio, romano y chino. Estos sistemas permiten escribir números grandes con relativa economía, usando sencillas reglas aditivas.

Finalmente están los *sistemas posicionales*, entre los que destaca el sistema decimal de numeración.

El empleo y estudio de relaciones aritméticas entre números (expresión de un número como suma, resta, producto y división de otros) pone de manifiesto nuevas formas de representar números naturales. Además, el estudio de la estructura multiplicativa muestra otras facetas de esos números. El Teorema Fundamental de la Aritmética establece, igualmente, una única forma de expresión de cada número en función de sus factores y ciertas propiedades multiplicativas.

Sistema de Representación Verbal

Vinculado al sistema de representación simbólico está el verbal, en el que las reglas del lenguaje organizan y condicionan la representación de los números naturales. En este caso, nuestro lenguaje impone normas y reglas para representar números que se organizan en torno al uso del significado ordinal o cardinal de los naturales.

En el caso del significado ordinal, también existen un conjunto de reglas nemotécnicas para nombrar los diferentes órdenes

Sistemas Gráficos de Representación

Dentro de esta modalidad de sistema de representación destaca la recta numérica, las configuraciones puntuales y la Tabla-100, como se muestra en la Figura 5.

La primera representación gráfica que consideramos es la *recta numérica*. Su significado más inmediato es que los números naturales se pueden construir con regla y compás, usando un sencillo procedimiento que parte de que cualquier número natural *n* se obtiene como suma reiterada de la unidad *n* veces.

En relación con las *configuraciones puntuales*, en la Figura 5 aparecen los primeros términos de la sucesión de números cuadrados y triangulares. Las configuraciones puntuales, o números figurados, expresan en su estructura propiedades aritméticas que no son visibles en su representación decimal. Por ejemplo, en la Figura 4 observamos que cualquier número cuadrado es suma de impares consecutivos. También existen números pentagonales, hexagonales, etc. En Castro (1995) puede encontrarse un amplio estudio de las configuraciones puntuales y sus propiedades.

Finalmente, destacamos aquellas representaciones de los naturales que se expresan mediante una tabla. Entre ellas destaca la Tabla-100, que consiste en representar los naturales del 1 al 100 en una tabla 10 x 10, como se ve en la Figura 6:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 6: La Tabla-100.

Sobre esta tabla se pueden explorar relaciones aritméticas, algebraicas y geométricas entre números, así como estudiar patrones gráficos que siguen determinadas sucesiones numéricas, basadas en estructuras aditivas o multiplicativas. En Rico y Ruiz (2004) se describen, ejemplifican y analizan en detalle estas relaciones.

Las tablas de sumar y de multiplicar son variantes usuales de tablas numéricas. El Triángulo de Pascal es otra representación numérica en forma de tabla, construida sobre relaciones combinatorias.

Sistemas de representación y análisis de contenido

Los sistemas de representación, como se muestra en la Figura 3, constituyen elementos centrales para organizar la estructura conceptual de un tema. Mediante un trabajo explícito sobre la diversidad de sistemas de representación en una misma estructura y sobre las conexiones entre ellos, se profundiza en el dominio del contenido en estudio. La búsqueda de nuevas o diversas expresiones de una misma propiedad contribuye a clarificar y a profundizar el entramado de conceptos en que se sustenta.

El Análisis de Contenido alcanza una segunda fase cuando logra mostrar la complejidad de la estructura conceptual mediante sus principales sistemas de representación. Adquirir destrezas y desarrollar capacidades para seleccionar relaciones entre distintos sistemas de representación de un mismo concepto, con las cuales traducir sus propiedades y regularidades de un sistema a otro, proporciona una técnica para relacionar distintos conceptos, interpretar propiedades y desarrollar argumentos de prueba y demostración. Estas capacidades, derivadas del estudio de los sistemas de representación enriquecen la competencia de planificación de los profesores.

Análisis fenomenológico

¿A qué se refiere la fenomenología? Nuestra aproximación a la fenomenología se vincula con un planteamiento funcional de las matemáticas escolares que, como se ha dicho, afirma que las ideas y conceptos son el núcleo de nuestro pensamiento, las herramientas con las que pensamos. Esta aproximación sostiene que el pensamiento matemático surge de los fenómenos y que las estructuras matemáticas abstraen y organizan grandes familias de fenómenos de los mundos natural, social y mental. Ideas, estructuras y conceptos matemáticos se han construido por grupos humanos y se han desarrollado a lo largo de la historia, como herramientas para entender y organizar el mundo de los fenómenos y poder trabajar sobre ellos. En el modelo funcional que seguimos, el significado de los conceptos matemáticos se logra mostrando su conexión con el mundo real, con los fenómenos en cuyo tratamiento se implican tales conceptos. Por ello, cuando se quiere presentar una estructura matemática en toda su plenitud de significados, se considera la conexión de sus diferentes subestructuras con distintas familias de fenómenos y se vincula con aquellos campos del conocimiento donde tiene una utilidad establecida. El Análisis de Contenido necesita del análisis fenomenológico.

El análisis fenomenológico que aquí se presenta aporta una técnica para mostrar cuáles son los sentidos con que se utilizan conceptos y estructuras; pone el acento en el uso y aplicación de los conceptos, en los medios y en los modos en que, con ellos, se abordan distintas tareas y cuestiones cuando dan respuesta a determinados problemas, en definitiva, cuando contribuyen a la comprensión de ciertos fenómenos.

El análisis fenomenológico se propone mostrar la vinculación de conceptos y estructuras matemáticos con ciertos fenómenos que están en su origen, y que los vinculan con los mundos natural, cultural, social y científico. Y esto con la finalidad de dotar de sentido el aprendizaje de tales conceptos y estructuras. Para ello se ayuda de la reflexión sobre situaciones y contextos, con la cual el profesor en formación inicia el análisis fenomenológico.

Situaciones

El análisis fenomenológico de una estructura matemática comienza por delimitar aquellas situaciones donde tienen uso los conceptos matemáticos involucrados, aquéllas en las que éstos muestra su funcionalidad. Las situaciones destacan el medio en el cual una determinada estructura matemática tiene uso regular. Cualquier tarea matemática a la que se enfrenta un individuo viene asociada a una situación, considerando ésta como aquella parte del mundo real en la cual se sitúa la tarea para el individuo. Una situación viene dada por una referencia al medio (natural, cultural, científico y social) en el cual se sitúan tareas y cuestiones matemáticas que pueden encontrar los ciudadanos, que se proponen a los estudiantes y que centran su trabajo. Según el medio que destaquen, los expertos consideran distintos tipos de situaciones. Ejemplificamos aquí el caso de los números naturales con las situaciones del estudio PISA: personales, educativas o laborales, públicas y científicas (OCDE, 2005; pp. 41- 42).

Las situaciones personales son las relacionadas con las actividades diarias de los alumnos. Se refieren a la forma en que un problema matemático afecta inmediatamente al individuo y al modo en que el individuo percibe el contexto del problema. Estas situaciones se relacionan con prácticas cotidianas y suelen poner en juego los conceptos más básicos. En el caso del Sistema de los Números Naturales, la práctica de la secuencia numérica es el uso cotidiano básico más común y extendido. También el conocimiento de los números pequeños y de sus relaciones aditivas es obligado en la mayor parte de las situaciones personales.

Situaciones educativas, ocupacionales o laborales son las que encuentra el alumno en el centro escolar o en un entorno de trabajo. Se refieren al modo en que el centro escolar o el lugar de trabajo propone tareas que necesitan una actividad matemática para encontrar una respuesta. El mundo del trabajo incluye el conocimiento de horarios, retribuciones, manejo de cuentas corrientes, pagos y adquisiciones. La administración del tiempo, del dinero y la gestión de cantidades de determinados materiales forma parte de la práctica usual de la población adulta, en toda la gama de niveles laborales y sociales. El campo de aplicaciones y usos de los números en cada una de las profesiones de nuestra sociedad es objeto de reflexión y de enseñanza en la escuela actual.

Situaciones públicas se refieren a la comunidad local u otra más amplia, en la cual los estudiantes observan determinados aspectos sociales de su entorno o que aparezcan en los medios de comunicación. Los estudiantes como ciudadanos deben estar capacitados para interpretar, analizar y evaluar información numérica que se presente en los medios de comunicación, que forme parte de las decisiones que afectan a la vida política y social de una comunidad. También deben dominar las operaciones básicas para seguir argumentos cuantitativos, tener sentido del número, capacidad para hacer estimaciones y dominio de distintos códigos que se emplean en la presentación de datos numéricos.

Situaciones científicas son más abstractas e implican la comprensión de un proceso tecnológico, una interpretación teórica o un problema específicamente matemático. De hecho, cada una de las disciplinas científicas o técnicas hacen cierto uso técnico específico, en ocasiones muy elaborado, de los conceptos y estructuras numéricas. El dominio de los distintos conjuntos numéricos junto con las estructuras matemáticas del Análisis y del Álgebra constituyen el marco conceptual donde se sitúan las aplicaciones y usos científicos numéricos más avanzados.

Por tanto, un primer paso en el análisis fenomenológico de una estructura o concepto matemático, consiste en la revisión de sus usos según los tipos de situaciones. Esta revisión debe concluir con un conjunto de situaciones en las que los conceptos y estructuras considerados se utilizan, destacando aquellos usos que tienen especial relevancia para la formación del estudiante de Secundaria.

Contextos numéricos

Un contexto matemático es un marco en el cual conceptos y estructuras atienden unas funciones, responden a unas necesidades como instrumentos de conocimiento. Los contextos de una determinada estructura se reconocen porque muestran posibles respuestas a la pregunta ¿para que se utilizan estas nociones? El contexto refiere el modo en que se usan los conceptos, en una o varias situaciones.

En el Sistema de los Números Naturales son varios los contextos numéricos, ya que los números naturales satisfacen distintas funciones y atienden diferentes necesidades cuando se usan para contar y medir, para ordenar y cuantificar, para operar y simbolizar.

El contexto numérico más sencillo utiliza los números para *contar*; en este caso su utilidad consiste en asignar los términos de la secuencia numérica a los objetos de una colección, bien señalando cada objeto o marcando pautas y realizando espaciamientos temporales. Sin el dominio de la secuencia numérica, que es una función básica de dominio lingüístico, no es posible el uso de los números.

El segundo tipo de contexto es aquel que usa los números como *cardinal*; utilizamos este sentido cuando queremos dar respuesta a la cuestión ¿cuántos hay? ante una colección discreta de objetos distintos. Cuantificar los objetos de un conjunto en el ámbito de la Educación Secundaria aparece en problemas diversos. En algunos casos se determina un cardinal mediante la aplicación de operaciones, cuando se responde a preguntas como el número de objetos que hay en diversos agrupamientos y conviene sumar o multiplicar. En otros casos se determina un cardinal de un conjunto de objetos para cuya construcción se requiere algún procedimiento combinatorio o algoritmo elemental, o bien se aplican fórmulas sumatorias o factoriales.

El contexto de *medida* permite conocer la cantidad de unidades de alguna magnitud continua; en este caso el sentido viene dado porque proporciona respuesta a la pregunta ¿cuánto mide? Un tipo específico de problemas en este contexto surge cuando se pretende obtener longitudes, superficies u otras magnitudes, o bien valores de magnitud en los que una divide necesariamente a la otra. Todas las aplicaciones del Sistema de los Números Naturales en la Física o la Economía se encuentran en este contexto.

Un cuarto tipo lo constituye el contexto *ordinal*, cuya modalidad propone conocer la posición relativa de un elemento en un conjunto discreto y ordenado; proporciona respuesta a la pregunta ¿qué lugar ocupa?
Los estudios sobre sucesiones numéricas, en particular las progresiones aritméticas y geométricas, incluyen este contexto ya que se refieren al estudio de conjuntos numéricos ordenados. Igualmente, cualquier problema numérico para cuya resolución sea necesario establecer un tipo de orden natural se encuentra dentro de este contexto ya que responde a la misma cuestión de origen.

El contexto *operacional* es el más fecundo, en el que hay que dar respuesta a la cuestión ¿cuál es el resultado? Las acciones de agregar, separar, reiterar y repartir expresan multitud de *acciones sobre* y *transformaciones con* los objetos; también se pueden establecer relaciones de comparación e igualación. Todas estas acciones tienen su expresión en el sistema de los números naturales mediante las operaciones aritméticas básicas que, a su vez, modelizan y proporcionan respuesta a las cuestiones cuantitativas que se plantean con las acciones mencionadas. La diversidad de problemas aritméticos aditivos y multiplicativos elementales muestran el contexto operacional básico.

También podemos considerar una variante estructural dentro de los contextos operacionales, dada por la pregunta clave ¿cómo se expresa (un número) mediante determinadas operaciones? En este caso se trata de mostrar cuál es la estructura operatoria que tiene un número o que comparten varios números, es decir, de expresar uno o varios números como resultado de las mismas operaciones. La función principal consiste en expresar la estructura de relaciones dentro del Sistema de los Números Naturales. Los diversos desarrollos aditivos y multiplicativos de los números, puestos de manifiesto mediante configuraciones puntuales, también la factorización de números pequeños o medianos, notación científica, u otras son ejemplos de este contexto.

Finalmente, un sexto tipo menos convencional, lo constituye el denominado contexto *simbólico* en el cual los números se utilizan para distinguir y denominar clases de fenómenos o elementos, confundidos a veces con etiquetas; en cualquiera de ellos hay que dar respuesta a la cuestión ¿cuál es el código? Se establecen así diferentes contextos numéricos basados, en las cuestiones planteadas y en los modos de uso de las estructuras numéricas. Conviene subrayar que determinadas tareas y problemas matemáticos pueden proponer, simultánea o consecutivamente, cuestiones que afectan a más de uno de los contextos considerados.

Fenómenos y subestructuras

Hemos visto que se puede reconocer el uso de un determinado tema, de hecho de todos los temas matemáticos de la Educación Secundaria, en una variedad de situaciones. También hemos visto que conceptos y estructuras desempeñan diferentes funciones según el marco estructural –el contexto- en que los situemos, y que estos contextos son reconocibles, básicamente, por la cuestión o cuestiones a las que se proponen dar respuesta. Estas cuestiones permiten marcar los principales modalidades de uso y señalan, junto con las situaciones, las principales familias de fenómenos que están en el origen de la estructura conceptual que se considera.

Pero caracterizar la relación de una estructura matemática con los fenómenos sólo por el medio en que se localizan y por los modos en que los trata, es un resultado limitado. Familias de fenómenos y subestructuras se vinculan porque éstas modelizan a aquéllas y, así, expresan su sentido. La Figura 7 muestra esta relación:

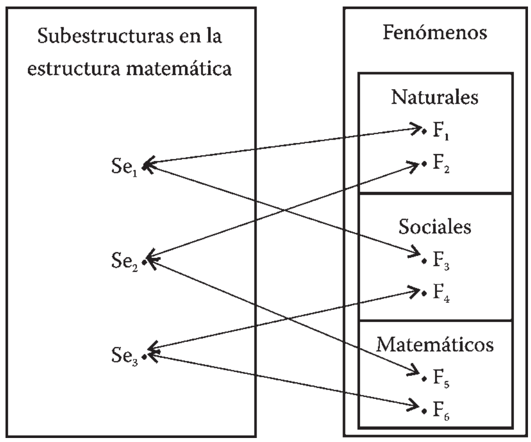


Figura 7: Relaciones entre fenómenos y subestructuras

Sostenemos que es posible establecer relaciones entre fenómenos y subestructuras, donde cada fenómeno conecta con una subestructura que lo expresa matemáticamente mediante su modelización, con la cual contribuye a plantear y resolver cuestiones y problemas vinculados a tales fenómenos o familias de fenómenos. Se pueden establecer parejas (Subestructura, Fenómeno), en las que la subestructura ofrece un modelo para el fenómeno. Nuestra técnica para el análisis fenomenológico concluye cuando vincula las familias de fenómenos con las subestructuras detectadas. Consideremos este tercer paso para el *Sistema de los Números Naturales*.

Análisis fenomenológico de los Números Naturales

El sistema de los números naturales tiene un amplio campo de subestructuras, ya consideradas en el estudio de su Estructura Conceptual, que ofrecen distintos modelos para las acciones reales sobre objetos y cantidades. Entre las diferentes subestructuras destacan las establecidas inicialmente en los focos prioritarios:

1. El Sistema Decimal de Numeración, como subestructura orientada a representar verbal y simbólicamente los términos numéricos; la simbolizamos por S.D.N.

2. La subestructura de Orden de los números naturales, basada en la relación "siguiente de" o "sucesor de", con sus propiedades; la simbolizamos por ($\mathbb{N}$, ≤).

3. La subestructura Aditiva de los números naturales, basada en las relaciones aditivas (suma y resta) y en sus propiedades, que simbolizamos por ($\mathbb{N}$, +).

4. La subestructura Multiplicativa de los números naturales, subestructura basada en las relaciones multiplicativas (producto y división entera) y en sus propiedades; la simbolizamos por ($\mathbb{N}$, x).

5. La subestructura Factorial de los números naturales, basada en el teorema fundamental de la aritmética, la relación de divisibilidad y sus propiedades.

Ejemplificamos con la subestructura cuarta el tercer paso del análisis fenomenológico, ya que las operaciones numéricas dotan al Sistema de los Números Naturales de su gran poder modelizador y contribuyen a su uso dinámico (Freudenthal 1983).

Los fenómenos que están en la base del Sistema Multiplicativo son aquellos que se basan en la consideración de la reiteración de colecciones, en las acciones de repetir/ repartir una cantidad, formar una cantidad varias veces mayor que otra/ o hacer un número dado de partes de una cantidad, en las comparaciones multiplicativas basadas en las relaciones tantas veces más que/ tantas veces menos que, en los emparejamientos de los elementos de dos colecciones y otras variantes similares; el listado de fenómenos multiplicativos puede ampliarse si se contemplan otras condiciones dadas por la situación concreta que se considere y otras variables. Según sus modos de uso, tenemos que la Subestructura (N, x) se vincula con los contextos cardinal, de medida y operacional, fundamentalmente, dando lugar a tres tipos de modelos o relaciones entre las subestructuras y los fenómenos, que en la literatura especializada (Castro, 2001) se presentan como Problemas Aritméticos Multiplicativos:

- Problemas Multiplicativos de Proporcionalidad Simple,
- Problemas Multiplicativos de Producto Cartesiano, y
- Problemas Multiplicativos de Comparación.

Otra familia de fenómenos específicamente matemáticos, consistente en las relaciones multiplicativas entre números y su estudio, conecta con la subestructura ($\mathbb{N}$, x).

Análisis fenomenológico y análisis de contenido

El primer paso que proponemos para el Análisis Fenomenológico consiste en el estudio de las situaciones vinculadas a la estructura en estudio; seguimos en este caso los tipos propuestos en el estudio PISA 2003. La delimitación de los distintos contextos es el segundo paso en el Análisis Fenomenológico de un tema. Subrayamos que un contexto es un marco en el cual conceptos y estructuras atienden unas funciones, es decir, responden a unas determinadas necesidades como instrumentos de conocimiento.

> *Un contexto es un marco en el cual conceptos y estructuras atienden unas funciones, es decir, responden a unas determinadas necesidades como instrumentos de conocimiento.*

Este segundo paso del Análisis Fenomenológico de un tema delimita los contextos de uso, las demandas cognitivas a las que atienden tales conceptos y, por ello, las funciones cognitivas que satisfacen. Para llevarlo a cabo conviene enunciar las cuestiones o interrogantes a los que da respuesta la estructura conceptual considerada: ¿Cuáles son los usos principales de los conceptos y estructuras considerados? ¿A qué cuestiones e interrogantes dan respuesta?

El Análisis Fenomenológico de una estructura matemática incluye un tercer paso, que consiste en identificar las relaciones entre subestructuras y fenómenos, dentro de una misma Estructura Conceptual.

> La fenomenología de un concepto matemático la componen los fenómenos para los cuales dicho concepto constituye un medio de representación y organización. (…) Un análisis fenomenológico consiste en describir fenómenos asociados a los conceptos matemáticos así como la relación que existe entre ellos (Segovia y Rico, 2001; p. 89).

A los efectos del Análisis de Contenido que venimos desarrollando, el Análisis Fenomenológico culmina cuando se establecen asociaciones entre las distintas familias de fenómenos detectados y las subestructuras y conceptos que conforman la Estructura Conceptual en estudio. En la realización del Análisis Fenomenológico se desarrollan capacidades tales como tipificar diferentes medios en los que se usan los conocimientos matemáticos; conectar las matemáticas con las ciencias experimentales, con el arte, la economía y otras ramas del conocimiento; atender distintos modos de uso de los conceptos, es decir, precisar las funciones que se llevan a cabo mediante la estructura contemplada, enunciar las cuestiones y familias de problemas a las que dan respuesta; finalmente, establecer relaciones entre fenómenos y subestructuras en tanto las segundas modelizan a los primeros.

Todas estas capacidades contribuyen a la competencia de planificación del profesor en formación, ya que son otros tantos datos que conviene considerar en el momento de establecer las expectativas de aprendizaje para los alumnos, seleccionar y organizar los contenidos y diseñar secuencias metodológicas, ejemplos, motivaciones y materiales para su transmisión.

Conclusiones

Este trabajo está centrado en una de las competencias profesionales básicas para el profesor, considerada en un contexto de formación inicial de profesores de matemáticas de Educación Secundaria: la planificación. Para determinar y establecer un conjunto de capacidades que contribuyen al desarrollo de esa competencia en el contexto considerado, se explicita qué se entiende por Matemáticas Escolares, Significado de un Concepto y Análisis de Contenido, así como la complementariedad de estas ideas. Se ha disertado con cierto detalle sobre la complejidad detectada por estas nociones y se ha realizado un estudio sobre la diversidad de significados de una estructura matemática, las fases para su tratamiento técnico y las capacidades que se impulsan.

En este marco las decisiones basadas en el Análisis de Contenido se centran, en primer lugar, sobre la noción de Estructura Conceptual, en segundo lugar sobre los Sistemas de Representación y, en tercer lugar, sobre el Análisis Fenomenológico. En cada una de estas fases hay una serie de pasos y técnicas que organizan el Análisis de Contenido, que se han detallado y ejemplificado para el tema Sistema de los Números Naturales en Educación Secundaria. Subrayamos algunas ideas que se desprenden de este estudio:

La clasificación cognitiva de los contenidos los organiza en destrezas, hechos, conceptos, razonamientos, estructuras y estrategias. Esta clasificación orienta al profesor en su formulación específica sobre las expectativas de aprendizaje de los escolares de Secundaria mediante capacidades, referidas a demandas cognitivas tales como identificar, reconocer, calcular, aplicar, justificar, y otras. Las capacidades de los escolares están ligadas a tipos de contenidos, según los criterios contemplados.

El análisis de los sistemas de representación contribuye a facilitar la toma de, al menos, dos importantes decisiones:

- Una vez analizado qué significados y aplicaciones del tema están ligados a cada sistema de representación es posible decidir qué significados y aplicaciones van a ser objeto de planificación en un curso o nivel concreto.

- Los diferentes sistemas de representación, que muestran los significados de un concepto, actúan a modo de valores de una variable de tarea. Las decisiones tomadas para seleccionar tareas escolares ligadas a una misma capacidad deberán de tener en cuenta que el alumno puede y debe activar la capacidad o desarrollarla, utilizando representaciones diferentes.

Las conexiones entre conceptos y procedimientos, sentidos y representaciones en un mismo mapa conceptual facilita la definición de las secuencias de tareas que el profesor elabora para provocar el aprendizaje

Las conexiones entre conceptos y procedimientos, sentidos y representaciones en un mismo mapa conceptual facilita la definición de las secuencias de tareas que el profesor elabora para provocar el aprendizaje. En la planificación del trabajo en el aula, las tareas no son agentes de acción aislados. Están conectadas mediante una lógica que las encadena a las capacidades, a los contenidos y entre ellas. En las decisiones que toma el profesor para elaborar estas secuencias, se manejan criterios de coherencia en el ámbito de las matemáticas escolares, como el de combinar tareas de contenido conceptual, con otras de tipo procedimental, o de aplicaciones según distintos contextos. Realizar una caracterización de conexiones entre estos ámbitos en un mapa conceptual facilita una elección del itinerario, buscando la complementariedad de tareas y previniendo exclusiones u olvidos.

Finalmente, el análisis fenomenológico muestra el o los medios en que conceptos y subestructuras se usan, los modos de uso y la potencialidad modelizadora de las subestructuras para dar respuesta a los problemas que en cada contexto se plantean. En la planificación de tareas deben considerarse, pues, las situaciones y contextos en que se aplican los conceptos y en los que reciben respuesta cuestiones y problemas relevantes.

El análisis fenomenológico muestra el o los medios en que conceptos y subestructuras se usan, los modos de uso y la potencialidad modelizadora de las subestructuras para dar respuesta a los problemas que en cada contexto se plantean

En todo este trabajo la principal finalidad ha ido orientada a mostrar el dominio sobre el contenido y desarrollo de capacidades que contribuyen a la planificación del profesor competente. Entre ellas hemos destacado las siguientes:

- seleccionar focos conceptuales prioritarios en cada uno de los temas del currículo de matemáticas de Secundaria;

- establecer los conceptos y procedimientos que se articulan en cada foco;

- sintetizar y expresar la estructura de un tema mediante diversos mapas que organicen su complejidad,

- relacionar distintos sistemas de representación de un mismo concepto y traducir sus propiedades y regularidades de un sistema a otro,

- relacionar mediante distintos sistemas de representación los conceptos y propiedades así como desarrollar argumentos de prueba y demostración;

- tipificar diversos medios en los que se usan unos determinados conocimientos matemáticos;
- conectar las matemáticas con las ciencias experimentales, con el arte, la economía y otras ramas del conocimiento;

- atender distintos modos de uso de los conceptos y precisar las funciones que se llevan a cabo mediante la estructura contemplada,

- establecer relaciones entre fenómenos y subestructuras en tanto las segundas modelizan a los primeros;

- enunciar cuestiones y familias de problemas a los que las subestructuras dan respuesta.

El adiestramiento sobre estas capacidades viene dado mediante diversas técnicas, que contribuyen a su ejercicio, desarrollo y perfeccionamiento. El Análisis de Contenido proporciona un marco conceptual en que estas capacidades se articulan y complementan. Las capacidades contempladas constituyen, conjuntamente, un marco de destrezas y habilidades, necesarias para el dominio del contenido matemático a los efectos de planificar las expectativas e itinerarios de aprendizaje de los alumnos, las demandas cognitivas que se les plantean expresadas en términos de tareas, y la organización de su enseñanza mediante secuencias de instrucción.

El Análisis Cognitivo, centrado en los procesos de planificación del aprendizaje (Lupiáñez y Rico, 2006) y el Análisis de Instrucción, centrado en los proceso de planificación de la enseñanza (Marín, 2005), siguen al Análisis de Contenido, que se centra en los procesos de planificación de la materia. Conjuntamente, estos tres tipos de análisis forman parte del Análisis Didáctico. Por razones de extensión no hemos desarrollado las otras componentes del Análisis Didáctico, procedimiento cuyo dominio resulta imprescindible para planificar las unidades didácticas de matemáticas en Secundaria (Gómez, 2007).

Planificar el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas escolares no es tarea trivial, se trata de una competencia profesional importante que supone el dominio de diversos campos y el desarrollo de ciertas capacidades para interpretar y organizar el conocimiento de las matemáticas escolares. La formación profesional del profesor de matemáticas de Secundaria debe incluir una preparación didáctica específica sobre planificación, de la cual el Análisis de Contenido es sólo un primer paso para interpretar el conocimiento matemático en términos de las matemáticas escolares, al que hemos dedicado este trabajo. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BELL A., COSTELLO J. & KÜCHEMANN D. (1983). *Research on learning and teaching. A Review of Research in Mathematical Education*. NFER- Nelson. Windsor .

CAMPILLO, A. (Coord.) (2004). *Título de Grado en Matemáticas*. Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación. Madrid.

CASTRO, E. (1995). *Exploración de Patrones Numéricos Mediante Configuraciones Puntuales*. Comares. Granada.

CASTRO, E. (2001). Multiplicación y división. En E. Castro (Ed.) *Didáctica de la matemática en Educación Primaria*. Síntesis. Madrid.

CASTRO, E. Y CASTRO E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.): *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). Horsori. Barcelona.

COMISIÓN DE EDUCACIÓN DE CEMAT (2004). *Itinerario Educativo de la Licenciatura de Matemáticas* ITERMAT. Descargado de el 08/01/07 de

http://www.ugr.es/~vic_plan/formacion/itermat/.

CONSEJO DE UNIVERSIDADES (2006). *Propuesta de Título Universitario Oficial de Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria* según RD 56/2005. Descargado de http://www.mec.es/educa/jsp/plantilla.jsp?area=ccuniv&id=840 el 08/01/07.

DEVLIN, K. (1994). *Mathematics: The Science of Patterns*. Scientific American Library. New York.

FREGE, G. (1996). *Escritos filosóficos*. Crítica. Barcelona.

FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematics Structures*. Reidel. Dordrecht

GÓMEZ, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 7(3), 251-293.

GÓMEZ, P. (2007). *Desarrollo del Conocimiento Didáctico en un Plan de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. Granada.

HIEBERT, J. & LEFEBRE, P. (1986). *Conceptual and Procedural Knowledge: the case of Mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates. Hillsdale, NJ.

IFRAH, G. (1997). *Historia Universal de las Cifras*. Espasa Calpe. Madrid.

JANVIER, C. (Ed.) (1987). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates. Hillsdale, NJ.

KAPUT, J. (1992). Technology and Mathematics Education. En D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). Macmillan. New York.

LUPIÁÑEZ, J. L. y RICO, L. (2006). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. En P. Bolea, M. J, González y M. Moreno (Eds.): *X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 225-236). Instituto de Estudios Aragoneses. Huesca

MARÍN, A. (2005). *Tareas para el aprendizaje de las matemáticas: organización y secuenciación*. Trabajo presentado en el Seminario Análisis Didáctico en Educación Matemática, Málaga.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (2005). *Real Decreto 55/2005, de 21 de enero, por el que se establecen la estructura de las enseñanzas universitarias.* Boletín Oficial del Estado. Madrid.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (2000). *Real Decreto 3473/2000, de 29 de diciembre que modifica el Real Decreto 1007/1991, de 14 de junio, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*. Boletín Oficial del Estado. Madrid.

OCDE (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Santillana.

OSER, F., ACHTENHAGEN, F. & RENOLD, U. (2006). *Competence Oriented Teacher Training. Old Research Demands and New Pathways*. Sense Publishers. Rotterdam.

PÉREZ, A. (Coord.) (2005). *Informe sobre Innovación de la Docencia en las Universidades Andaluzas (CIDUA)*. Dirección General de Universidades de la Junta de Andalucía.

RICO, L. (2005). Reflexiones sobre la Formación Inicial del Profesorado de Matemáticas de Secundaria. *Profesorado, revista de currículum y formación del profesorado* 1, 8, 1-15. Sevilla.

RICO, L (1997). Los Organizadores del Currículo de Matemáticas. En Rico, L. (Coord.): *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 39- 59). Horsori. Barcelona.

RICO, L. (1995). Consideraciones sobre el Currículo Escolar de Matemáticas. *Revista EMA*, 1, 4-24.

RICO, L. y RUIZ, F. (2004). Geometric Visualization of Additive Operators. En B. Clarcks y cols. (Eds.): *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics* (pp. 351-362). Nacional Center for Mathematical Education. Goteborg.

RUCKER, R. (1988). *Mind Tools. The Mathematics of information*. Penguin Books. London.

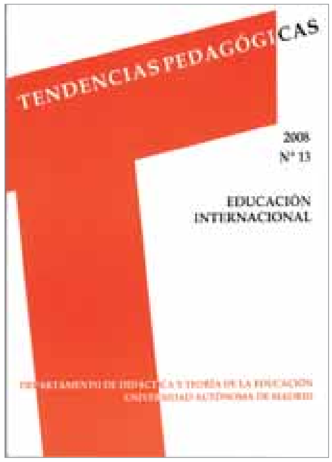
SEGOVIA, I. y RICO. L. (2001). Unidades Didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.): *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (pp. 83- 104). Síntesis. Madrid.

STEEN, L. (Ed.) (1990). O*n the shoulders of Giants*. National Academy Press. Washington D. F.

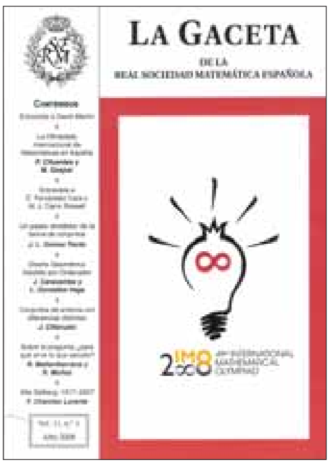
TEDS-M (2007). *Teacher Education Study in Mathematics*. Descargado el 08/01/07 de https://teds.educ.msu.edu/.

Publicaciones recibidas

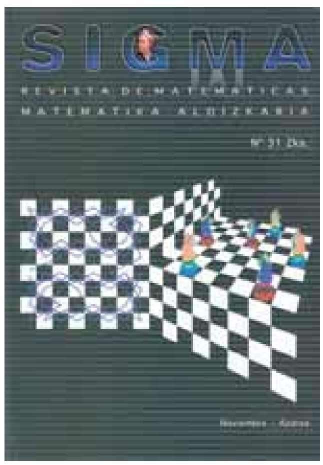
Pubicaciones de la Facultad de Educación y humanidades del Campus de Melilla
Universidad de Granada
N.º37, Noviembre 2007
ISSN: 1577-4147



Tendencias Pedagógicas
Departamento de Didáctica y Teoría de la Educación. Universidad Autonoma de Madrid
N.º13, 2008
Madrid
ISSN: 1133-2654



La Gaceta de la RSME
RSME
Vol.11, n.º 1, 2008
Madrid
ISNN 1138-8927



Sigma
Gobierno Vasco
Departamento de Educación, Univ. e Investigación
N.º 31, Vitoria 2007
ISSN: 1131-7787

Suma+ 58
Junio 2008, pp. 25-40

Un estudio del aprendizaje de validación matemática a nivel pre-universitario en relación con distintas interacciones en el aula

En este artículo presentamos los resultados cuantitativos sobre estados y cambios en el aprendizaje de la validación matemática (para los contenidos función de proporcionalidad directa y función cuadrática) en relación con diversas modalidades de enseñanza. En ellas se promovieron diferentes interacciones en el aula: interacciones entre experto y aprendiz (E-A) e interacciones en un grupo de aprendices (G-A). Los datos recabados y procesados, referidos al estado y al cambio producido en el aprendizaje de la validación, son individuales. Esto se ha llevado a cabo en la asignatura Matemática de nivel pre-universitario del Curso de Aprestamiento Universitario (CAU) en la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS), de la provincia de Buenos Aires.

In this article we present quantitative results on states and changes in the learning of mathematical validation (for the contents function of direct proportionality and quadratic functions) in relation to diverse teaching modalities. In them, different interactions in the classroom were promoted: interactions between expert and apprentice (E-A) and interactions in a group of apprentices (G-A). The obtained and processed data referred to the state and the change produced in the learning of validation, are individual. This study has been carried out in a mathematics pre-university course at the National University of General Sarmiento, Buenos Aires, Argentina.

Introducción

La validación matemática es una actividad reconocida como fundamental en la Matemática científica y su aprendizaje presenta múltiples aristas. Nos proponemos estudiar los resultados en el aprendizaje de la validación en relación con distintas interacciones que se generan en la clase. Más precisamente, estudiamos el estado y los cambios en el aprendizaje de la validación en clases cuya gestión promueve interacciones entre un "experto" y un "aprendiz" o también entre un "grupo de aprendices".

El contexto en el que se trabaja es el Curso de Aprestamiento Universitario (CAU) de la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS) y el aspecto de validación está entonces restringido a los contenidos allí desarrollados, particularmente al tema "funciones numéricas", relevante tanto en el nivel pre-universitario como en las materias siguientes de Matemática.

Se han implementado modalidades de enseñanza que promueven interacciones muy diferentes entre sí. Bajo estas modalidades estudiamos el estado del aprendizaje de la validación (que llamaremos *estado en validación*) en distintos momentos del curso así como los cambios que se evidencian en el aprendizaje de la validación matemática a lo largo del proceso (que llamaremos *cambios en validación*). Para realizar este estudio, utilizamos un modelo que permite evaluar estas cuestiones en base a una serie de criterios y mediante un determinado procedimiento. Para obtener información sobre el aprendizaje utilizamos tres evaluaciones de resolución domiciliaria cuyos contenidos fueron: función de proporcionalidad directa, función cuadrática y álgebra básica, este último presente en las tres instancias.

Este artículo se organiza de la siguiente forma:

Marco teórico: se incluyen las cuestiones teóricas referidas a la validación matemática y las interacciones entre sujetos.

Metodología de investigación: se detalla cómo se diseñó la metodología y cómo se recabó información de lo que sucedió en el aula.

Diseño de las evaluaciones: se explica cómo fueron confeccionadas en contenido y formato y se incluyen precisiones sobre el contexto de aplicación (a quiénes fueron aplicadas,

Gustavo Carnelli[1]
Marcela Falsetti
Alberto Formica
Mabel Rodríguez
Instituto del Desarrollo Humano.
Universidad Nacional de General Sarmiento
Buenos Aires. Argentina

distribución en el tiempo, condiciones de compromiso de los alumnos, complejidad del contenido, etc.)

Criterios de corrección y procesamiento de datos: se detalla el método con el que se corrigieron las evaluaciones y cómo se obtiene el estado en validación de cada estudiante a partir de los resultados.

Resultados: se incluyen los resultados cuantitativos del estudio realizado referido al estado y a los cambios en el aprendizaje en validación

Consideraciones finales.

Marco teórico

La validación matemática en situación de aprendizaje

En el ámbito de la Matemática científica, la validación es una actividad que se considera fundamental y transversal a cualquier contenido matemático. La validación de un conocimiento va asociada a la "prueba o demostración matemática" que, en su paradigma clásico, se presenta como una sucesión finita de funciones proposicionales (expresiones de lógica cuantificacional) y de proposiciones, encadenadas por inferencias lógicas. Se parte de axiomas, que son los enunciados que se asumen verdaderos sin demostración y se dervian proposiciones que han sido ya deducidas de los axiomas por reglas tautológicas. Los métodos de validación en este paradigma, y por lo tanto de elaboración de las pruebas matemáticas, no son empíricos, ni de observación y dependen de las leyes lógicas que se asuman para el desarrollo de la misma. Por ejemplo, la corriente de creación matemática llamada "intuicionista", no asume el "principio del tercero excluido" (o bien p es verdadero o bien –p lo es) ni las definiciones de objetos que no cumplan propiedades efectivamente verificables. Esto nos sugiere que la validación matemática, al igual que otros tipos de validaciones científicas o tecnológicas, resulta de una serie de tradiciones y "acuerdos" en el seno de una comunidad, en este caso la matemática, sobre lo que es correcto y verdadero, y sobre los medios, lógicos y simbólicos, que permiten aceptarlo. Este carácter "institucional"–nos referimos a la Ciencia Matemática como institución (Godino y Batanero, 1994; Chevallard, 1992)– que tiene la validación le confiere una componente social y comunicativa que se pone en juego al momento de aceptar como matemáticamente válido un cierto conocimiento, pues para ello debe existir una teoría consolidada, comunicada y científicamente aceptada, capaz de explicarlo.

Consideramos que para lograr un aprendizaje significativo en Matemática se debe abordar la validación pues es fundamental en la construcción del conocimiento matemático. Por otro lado, fortalecer este aspecto estimula el aprendizaje autónomo pues el estudiante distingue y discierne aquello que es correcto y válido respecto de lo matemáticamente instituido sin depender del aval de otra persona (el profesor, por ejemplo).

Es posible que durante una situación de aprendizaje un estudiante no esté en condiciones de mostrar que lo que hizo es válido, de acuerdo a lo recién definido, pero sí puede tomar decisiones, seleccionar argumentos y procedimientos que utiliza para elaborar las razones que justifican sus acciones. La validación en el seno de la Matemática es un punto de referencia para lo que llamamos *validación en situación de aprendizaje,* que es el concepto que abordamos en este artículo.

> *La validación es una actividad que se considera fundamental y transversal a cualquier contenido matemático. La validación de un conocimiento va asociada a la "prueba o demostración matemática"*

Entendemos la *validación de un conocimiento matemático en situación de aprendizaje* como el resultado de cualquier proceso del sujeto por el cual éste es capaz de manifestar y sostener en un ámbito social las razones, elaboradas autónomamente, de por qué un enunciado es o no verdadero, un procedimiento es o no correcto o un razonamiento es o no válido. Al manifestar sus razones debe hacer explícitos los sentidos de los objetos matemáticos que manipula y estos sentidos deben corresponderse con los significados aceptados por la Institución Matemática. De ahora en más cuando hablemos de "validación de un conocimiento matemático" nos referimos a este concepto. Para simplificar la redacción, en algunos casos en los que no queremos poner el énfasis en el contenido específico, nos referiremos a esta noción simplemente como "validación" o "validación matemática".

Para caracterizar el estado en validación de un estudiante analizamos las siguientes cuestiones: a) las acciones del sujeto (qué hace para mostrar que lo que hizo es válido); b) lo que comunica, ya sea en lenguaje simbólico o estándar (cómo explica que lo que hizo es válido, es decir cuáles significantes y sentidos el estudiante utiliza para explicar que lo que hizo es válido); c) el grado de proximidad con lo matemáticamente correcto (es decir, si el sentido asignando por el estudiante se corresponde con el significado matemático). Tomamos de Falsetti, Marino y Rodríguez (2004) un desagregado de la primera de estas cuestiones en "acciones" (incluimos el listado completo en el apartado sobre criterios de corrección y procesamiento de datos), tales como: Hacer ensayos o intentos / Generalizar inductivamente (observar alguna regularidad) / Enumerar ambigüedades / Anticipar, predecir / Elegir entre varias opciones dadas justificando su elección / Encontrar analogías / Ejemplificar mostrando regularidades / Explicar (dar razones y relaciones) / Formular un razonamiento simple (elaborar las premisas y derivar una conclusión) / Reconocer que las herramientas empleadas no son suficientes para garantizar la validez de un conocimiento (puede no saber cuáles necesita para garantizar la validez), etc. En el mismo trabajo hemos propuesto una tabla de doble entrada en la que pueden verse los cruces posibles entre las tres cuestiones mencionadas de este proceso. La incluimos, para mayor claridad, en el apartado sobre criterios de corrección y procesamiento de datos, mostrando cómo la hemos utilizado.

Para evaluar los aprendizajes referidos a validación es necesario considerar tanto lo que se expresa simbólicamente, que se manifiesta en general en el lenguaje escrito, como así también lo que se explica de esos símbolos, de sus usos, de sus funciones y relaciones. En algunos casos, lo escrito puede estar matemáticamente correcto, pero la forma en que el estudiante manipuló los símbolos no se corresponde con los significados matemáticos que asocia a los mismos, ver análisis de ejemplos en Falsetti, Marino y Rodríguez (2004).

Sobre las interacciones en el aula

Consideramos como *gestión de clase* al conjunto de intervenciones que el docente realiza en la clase con la intencionalidad de orientar y favorecer el aprendizaje de sus estudiantes. Estas intervenciones se refieren a metodología, contenidos, selección de actividades, evaluación, etc., y están reguladas mediante una programación de aula en la que el docente diseña actividades, adecua o selecciona entre ya existentes. Al llevar la propuesta al aula se generan interacciones, pensadas éstas como el intercambio comunicativo, recíproco y voluntario entre quienes participan del acto de enseñar y aprender. Dicho intercambio puede ser de experiencias, interpretaciones, opiniones, conocimientos, actitudes, etc. y conlleva en sí mismo la potencialidad de provocar, entre los sujetos participantes, alguna transformación en lo intelectual o en lo actitudinal.

La atención a las interacciones sobreentiende que damos importancia a la componente social y comunicativa en el aprendizaje de la validación. Por esto es que consideramos un supuesto teórico sobre el aprendizaje del Constructivismo Social que "reconoce que tanto los procesos sociales como la asignación de sentidos individuales juegan un papel central y fundamental en el aprendizaje" (Ernest, 1999). Como parte de la dimensión social se encuentran el aspecto lingüístico, el cultural y el interpersonal siendo justamente a este último al que nos dedicamos teniendo en cuenta las interacciones en el aula. Los estudios y experimentaciones que se realizan en la presente investigación pueden enmarcarse en la siguiente pregunta que es una de las que define la problemática del Constructivismo Social: "¿cómo dar cuenta, desde el Constructivismo Social, del aprendizaje individual y la construcción de las matemáticas?"[2](Ernest, 1999) ya que se busca con este trabajo conocer el desempeño de los estudiantes en validación de ciertos contenidos luego de haber vivenciado una situación interpersonal determinada para su aprendizaje, regulada por la gestión de clase. El interés por evaluar los aprendizajes en validación en diferentes contextos interpersonales, y no sólo en contextos sociales de paridad y de grupos de estudiantes, nos sitúa más cerca de la vertiente del Constructivismo Social allegada a la teoría vigotskiana (Pozo, 1994) en la que se asume que el conocimiento individual también es moldeado y potenciado por el contexto social y sus actores, exteriores al sujeto que aprende. En este trabajo nos interesa también saber qué se aprende de validación tanto cuando el contexto está dado por un modelo en el que un experto enseña qué es validar un cierto contenido matemático y cómo se hace, como cuando el contexto es el de un grupo de pares.

> *Tanto los procesos sociales como la asignación de sentidos individuales juegan un papel central y fundamental en el aprendizaje*

Los tipos de interacción que consideramos aquí son *experto-aprendiz* (E-A) y *grupo-aprendiz* (G-A). En experto-aprendiz, el profesor, o uno o varios de los alumnos avanzados (los que juegan el papel de "el experto"), toma las decisiones, orientando la acción del individuo o del colectivo, tomando la responsabilidad de la validación y dispensando formas en que se debe validar el conocimiento. Cabe aclarar que esta modalidad no es netamente de tipo expositiva pues en ella se alienta la participación de los estudiantes, aunque siempre en interacción con el experto. En los diseños de clases se utilizan los conceptos de Vigotsky de Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) y el de enseñanza recíproca, pues en principio se trabaja con el alumno o grupo de alumnos para realizar un tipo de tarea específica orientando su avance en el conocimiento y luego se asigna una función de "profesor" al alumno más avanzado (rol que puede ir variando a lo largo de la clase) quien debe tomar responsabilidades sobre la forma de validar y de orientar el aprendizaje de otros. El experto manifiesta los siguientes roles:

- Modélico: por que manifiesta conductas, formas de pensar un problema y modos de razonar que luego serán imitados o recreados por el sujeto que aprende.

- Responsable de la validación: es quien manifiesta expresamente qué es lo correcto o incorrecto y cómo se debe proceder para asegurar que lo hecho es válido.

- Conductor: el que responde sobre las dudas o muestra los caminos correctos; es quien posee la fuente del conocimiento válido para la situación planteada.

- Orientador de la acción.

En contraposición, en la planificación de la acción didáctica el aprendiz no es responsable de la validación y además no se fomenta el intercambio entre pares. En esta modalidad, también se deja un espacio para la creatividad y las estrategias personales que son supervisadas por el experto quien responde a las dudas directamente.

En cambio, en la interacción *grupo–aprendiz*, el que aprende comparte desde el inicio la responsabilidad de la decisión y de la acción en el grupo de pares del cual forma parte. Las formas de validación surgen de manera consensuada por el grupo y el papel que juega el profesor en la gestión de esta clase es de mediador de discusiones, de organizador del discurso dado por los estudiantes y de las tareas de los distintos grupos, asegurando que no se den casos en que alumnos más avanzados jueguen el papel de expertos para que haya diferencias bien notorias con el tipo de interacción E-A. Se espera que, a partir de esta dinámica, cada individuo progrese en su aprendizaje gracias al vínculo que establece con sus compañeros para lo cual es fundamental garantizar condiciones de paridad de conocimientos entre los integrantes de los grupos. Los estudiantes son organizados en pequeños equipos, o en plenarios (la totalidad de los alumnos de la clase sentados en círculo, intercambiando y defendiendo sus producciones grupales) y, para controlar la aparición de alguno de los actores jugando el papel de "experto", se evita en un primer momento que los alumnos más avanzados interactúen con los menos avanzados así como el profesor se limita a moderar la dinámica de los grupos y no regula directamente la construcción del conocimiento en los momentos en que las interacciones tienen lugar. En esta modalidad el docente debe realizar la devolución, es decir, pasar al alumno la responsabilidad de construir su conocimiento y decidir cuáles son las acciones que validan el mismo (Brousseau, 1995)[3].

Metodología de investigación

La metodología de investigación desarrollada es compleja por cuanto combina métodos corroborativos, de experimentación, comparativos y analíticos.

Para estudiar los estados y cambios logrados en validación cuando en la clase predomina el tipo de interacción E-A o G-A hemos elegido dos contenidos matemáticos del programa de la materia: "función de proporcionalidad directa" y "función cuadrática", ambos encarados desde la modelización matemática. Para cada tema hemos diseñado las propuestas didácticas de acuerdo con la interacción que quería favorecerse, para un detalle de los diseños de clases ver Carnelli, Falsetti, González y Rodríguez (2005) y Carnelli, Falsetti, Formica y Rodríguez (2006). En la planificación del curso, entre ambos contenidos se intercala el estudio de la "función lineal", tema durante el cual los cursos siguieron con su metodología habitual.

Los cuatro diseños de clases, E-A y G-A para función de proporcionalidad, E-A y G-A para función cuadrática, se aplicaron en los cursos seleccionados agrupados de la siguiente forma:

- El Grupo 1 (formado por tres cursos) en los que se aplicó la E-A para función de proporcionalidad y la G-A para función cuadrática y

- El Grupo 2 (también formado por tres cursos) en los que se dieron en orden inverso: G-A para función de proporcionalidad y E-A para función cuadrática.

Para cada tema se eligieron los mismos problemas y ejercicios en ambas modalidades de clases aunque las consignas para el trabajo de los alumnos y del profesor fueron diferentes. Se planificaron detalladamente las situaciones a abordar, en qué momentos de la clase, con qué disposición espacial de los actores, etc. Se preparó además un libreto de cuáles deberían ser las intervenciones del docente de acuerdo a conductas previstas o esperadas de los alumnos en relación con la actividad propuesta.

Para obtener información sobre los aprendizajes logrados, se administraron tres evaluaciones sobre los dos temas enseñados durante la experimentación y sobre un tercer tema, Álgebra, enseñado previamente en el curso pero presente en los dos nuevos contenidos, para el que se espera encontrar también avances en validación al término del proceso.

- La evaluación 0 (usamos la notación T0 –de test 0), aplicada antes de la experimentación como evaluación inicial, cuyo contenido estuvo limitado a Álgebra.

- La evaluación 1 (T1), aplicada luego del estudio de función de proporcionalidad, sobre este tema y Álgebra.

- La evaluación 2 (T2), aplicada luego del estudio de la función cuadrática, sobre este tema y Álgebra.

Con el propósito de disponer de información sobre las acciones referidas a la validación que los estudiantes ponen en juego durante los momentos de elaboración en los grupos, diseñamos grillas o tablas de observación para ser utilizadas en cada una de las clases. Pretenden organizar la tarea de seguimiento del trabajo de un grupo a cargo del docente que oficia de observador. Para mayores detalles ver Carnelli, Falsetti, González y Rodríguez (2005).

El siguiente esquema creemos que facilita la lectura del diseño metodológico.

Grupo 1	**Grupo 2**
Test Álgebra (T0)	
Experimentación Función Prop. Directa Experto - aprendiz	Experimentación Función Prop. Directa Grupo- aprendiz
Test Función Proporcionalidad Directa + Álgebra (T1)	
Experimentación Función Cuadrática Grupo - aprendiz	Experimentación Función Cuadrática Experto - aprendiz
Test Función Cuadrática + Álgebra (T2)	

Diseño de las evaluaciones

Los instrumentos fueron aplicados a la totalidad de los alumnos de los cursos seleccionados, con lo cual cada alumno debía completar cinco entregas (un test sobre la percepción que tienen acerca de las interacciones que favorecen su aprendizaje –que no informamos aquí– junto con el T0, el T1, el T2 y el mismo test de percepción al final). La realización de T0, T1 y T2 fue obligatoria ya que estos trabajos formaron parte de la evaluación del curso. Sin embargo por distintos factores como la deserción de los alumnos, el no cumplimento con alguna de las entregas, el cambio de profesor en uno de los cursos, etc. reunimos el juego de las cinco entregas sólo para cincuenta y un alumnos.

Las evaluaciones T0, T1 y T2, se confeccionaron con una serie de problemas y ejercicios que puedan ser abordados con lo trabajado en las clases. Uno de los criterios de elaboración fue que se contemplen la mayor cantidad posible de las acciones de validación (el listado completo puede verse en la sección 5) para poder evaluar y tener más y mejores elementos para poder diagnosticar la situación de cada alumno. En cada actividad los estudiantes deben completar tres ítems: resolución, explicación y un tercero, si acaso la entrega del ejercicio es incompleta. En la resolución hacen el planteo, la manipulación algebraica y expresan claramente el resultado tal como lo presentarían en un examen. En la explicación justifican y explican paso a paso lo realizado, diciendo el porqué del planteo, la resolución y la elección de símbolos tal como lo explicarían oralmente a otra persona. En el último ítem deben indicar las razones por las cuales no pueden resolver la actividad, por ejemplo: falta de claridad del enunciado, no disponibilidad de fórmulas, falta de tiempo, falta de conocimiento, etc. En este ítem se solicita que dejen por escrito todo lo que hayan pensado sobre el ejercicio y su resolución, aunque esté incompleto. El propósito de estas tres partes para cada ejercicio, que resultó sumamente tedioso para algunos de los estudiantes, persigue el objetivo de tener suficiente material para llevar a cabo la evaluación planteada.

Sobre T0 (ver anexo): Los contenidos matemáticos son de Álgebra básica. El primer ejercicio es un planteo coloquial de una ecuación con infinitas soluciones en donde se presentan alternativas de resolución, pensadas por dos personajes ficticios, que el estudiante debe analizar, evaluar y luego aceptar o refutar y explicar la intencionalidad del resolutor en forma argumentada. Hay que realizar también un planteo y resolución propios en los que quedarán explicitadas las diferencias y similitudes con respecto a las resoluciones presentadas. El segundo problema es del campo aritmético en el que se pide probar que la suma de dos números naturales pares es par. El último problema presenta cuatro enunciados, que aparecen formulados con distintos cuantificadores, sobre las posibles soluciones de las ecuaciones cuadráticas para analizar su veracidad y un quinto enunciado para analizarlo como posible negación de alguno de los anteriores. El estudiante debe ejemplificar, contrajemplificar o demostrar en forma general, según corresponda, para justificar la validez o falsedad. Finalmente, se propone sintetizar las condiciones que deben cumplir los coeficientes de una ecuación cuadrática para tener dos soluciones reales distintas.

Sobre el T1 (ver anexo): En la parte que evalúa función de proporcionalidad directa, se pide que expliquen cómo utilizan los datos sobre el fenómeno descrito (llenado de una botella cilíndrica con líquido medido en vasos) para determinar si la variación entre las magnitudes es directamente proporcional. También se formulan preguntas para que, mediante el marco algebraico, interpreten situaciones en lenguaje gráfico y en lenguaje de funciones. Otro de los ejercicios está planteado para que se utilice la propiedad de linealidad respecto al producto por una constante. La parte de Álgebra presente en esta evaluación tiene ejercicios de igual formato y dificultad que los dos primeros descriptos en T0.

Sobre T2 (ver anexo): En la parte que evalúa función cuadrática hay dos actividades. En la primera se piden, en distintos ítems, condiciones sobre algunos de los coeficientes de la función cuadrática para que la función cumpla con ciertas características específicas tanto gráficas como numéricas. También se pregunta en dichos casos por la unicidad de los coeficientes. El segundo ejercicio es de optimización, se deben buscar las dimensiones de un rectángulo, tres de cuyos vértices yacen sobre los ejes y el cuarto sobre una recta dada, para maximizar su área. El primer ejercicio de Álgebra de esta evaluación es de contexto aritmético mientras que el segundo plantea una ecuación para decidir sobre cuáles son sus posibles soluciones.

Criterios de corrección y procesamiento de datos

Las tres evaluaciones fueron corregidas siguiendo el modelo cuanti-cualitativo desarrollado en González y Rodríguez (2006) que permite obtener información sobre el estado en validación de los estudiantes. Incluimos a continuación un resumen del mismo.

Resumen del modelo para evaluar el estado en validación de un estudiante

El modelo permite, a partir de valores numéricos, llegar a obtener una caracterización del estado en validación del estudiante que da información sobre cómo simboliza matemáticamente, cómo asigna sentidos a los símbolos y en qué grado de corrección matemática lo hace. El método se inicia analizando la resolución escrita de ejercicios (que atiendan a la validación) conjuntamente con la explicación que el alumno da de su resolución. Dicha explicación evidencia la asignación de sentidos que el estudiante concibe entre los significantes matemáticos que usa y el significado de los conceptos en la ciencia Matemática. Luego de elegidas las actividades a resolver, en nuestro caso T0, T1 y T2, se decide si la explicación exigida será oral o escrita. Como hemos mencionado, en nuestro caso fue escrita. Para determinar el estado en validación de cada estudiante a partir de las evaluaciones se hace un procedimiento complejo, que resumimos a continuación, más detalles en González y Rodríguez (2006). Para cada una de las actividades seleccionadas para las evaluaciones se determina lo que hemos llamado el *umbral de validación*. Para ello hemos tenido en cuenta *acciones* observables que se manifiestan en el aprendizaje de la validación (como por ejemplo, encontrar analogías, explicar, predecir, etc.). Entendemos el *umbral de validación* como las acciones, mínimas, cuya presencia resulta imprescindible en la resolución de la actividad para que ésta se considere matemáticamente correcta. La totalidad de las acciones que hemos tenido en cuenta es la siguiente:

Acciones, tomadas de Falsetti, Marino y Rodríguez (2004):

A1. Hacer ensayos o intentos
A2. Usar fórmulas o procedimientos desconectados de la actividad a resolver
A3. Usar fórmulas o procedimientos conectados a la actividad a resolver
A4. Generalizar inductivamente (observar alguna regularidad)
A5. Enumerar ambigüedades
A6. Ejemplificar
A7. Anticipar, predecir
A8. Elegir entre varias opciones dadas justificando su elección.
A9. Encontrar analogías
A10. Describir (mostrar pasos y procedimientos)
A11. Ejemplificar mostrando regularidades
A12. Imitar (reproducir una estructura de razonamiento o procedimiento)
A13. Explicar (dar razones y relaciones)
A14. Comparar (establecer semejanzas y diferencias)
A15. Justificar por la "autoridad" (libro, docente, par experto)
A16. Reconocer contradicciones
A17. Reconocer la adecuación o no del resultado o conclusión respecto del problema o situación de origen.
A18. Enunciar la negación de una regla, propiedad, etc.
A19. Identificar condiciones bajo las que ocurren ciertas regularidades ya reconocidas
A20. Derivar conclusiones con premisas dadas
A21. Formular un razonamiento simple (elaborar las premisas y derivar una conclusión)
A22. Reconocer que las herramientas empleadas no son suficientes para garantizar la validez de un conocimiento (puede no saber cuáles necesita para garantizar la validez).

Entendemos el umbral de validación como las acciones, mínimas, cuya presencia resulta imprescindible en la resolución de la actividad para que ésta se considere matemáticamente correcta

A modo de ejemplo, muy sintéticamente, consideremos la actividad "¿Es cierto que si se suman dos números naturales consecutivos siempre se obtiene un número impar? ¿Por qué?". El umbral de validación está dado por la presencia de las acciones A19 y A21. Es decir, si alguna de estas acciones no estuviera presente en la resolución de la actividad, ésta no podrá ser considerada correcta.

Cada actividad de las tres evaluaciones tiene su umbral de validación. En la tabla que sigue se indican, para todas las actividades de las tres evaluaciones, las acciones del umbral mínimo en las celdas que quedan vacías, y que serán llenadas al corregir.

Acción	Presente en el ítem	T0	T1		T2	
		Alg	alg	prop	alg	Cuadr
A17	1)a)		X	X	X	X
	1)b)		X	X	X	X
	4)	X		X	X	X
	4)a)	X	X	X		X
	1)c)	X	X	X	X	
A21	2)		X	X	X	X
	3)	X	X	X		X
	2)	X	X	X	X	
	3)	X		X	X	X
A19	3)c)		X	X	X	X
	2)		X	X	X	X
	3)	X	X	X		X
	2)	X	X	X	X	
	3)	X		X	X	X
A6	3)a.1)		X	X	X	X
	3)a.2)		X	X	X	X
	3)a.3)		X	X	X	X
	3)a.4)		X	X	X	X
	4)	X		X	X	X
	2)b)	X	X		X	X
	1)a)	X	X	X	X	
	1)a)b)unic	X	X	X	X	
	1)b)	X	X	X	X	
		X	X	X	X	
A8 ancho	3)b)		X	X	X	X
A3	1)c)		X	X	X	X
	4)	X	X	X		X
	1)b)i)	X	X		X	X
	1)b)ii)	X	X		X	X
	1)b)iii)	X	X		X	X
	2)a)	X	X		X	X
	1)c)	X	X	X	X	
A20	1)a)	X	X		X	X

Tabla 1: "Umbrales por evaluación en disposición útil para volcar puntajes"

Pueden verse en González y Rodríguez (2006) ejemplos de la determinación del umbral de varias actividades.

Al corregir cada actividad, el estudiante tendrá un puntaje para cada una de las acciones presentes en el umbral de cada actividad con un valor entre –10 y 10. Este puntaje se asigna haciendo uso de la siguiente tabla numérica.

Explica / *Escribe*	*Bien*	*Regular*	*Mal*	*No hace*
Bien	10	7	3	-3
Regular	9	5	1	-4
Mal	4	2	-5	-9
No hace	-1	-2	-7	-10

Tabla 2: "tabla numérica usada para puntuar cada resolución en cada acción del umbral"

Los criterios utilizados para la asignación de los valores en cada caso (como la no simetría en la tabla, el rango de valores elegido, etc.) pueden verse en el artículo de referencia.

Al corregir, el llenado de las celdas blancas de la tabla 1 se realiza con valores numéricos de la tabla 2. Luego, estos valores son promediados, obteniéndose un único puntaje, por acción, *por evaluación*. Para facilitar el procesamiento, consideramos la tabla 1 A que adjuntamos a la derecha de la tabla 1

Acción	Presente en el ítem	TO	T1		T2			**T1**	**T2**
		Alg	Alg	Prop	Alg	Cuad		Prom	Prom
A17	1)a)		X	X	X	X			
	1)b)		X	X	X	X			
	4)	X		X	X	X			
	4)a)	X	X	X		X			
	1)c)	X	X	X	X				
A21	2)		X	X	X	X			
	3)	X	X	X		X			
	2)	X	X	X	X				
	3)	X		X	X	X			
A19	3)c)		X	X	X	X			
	2)		X	X	X	X			
	3)	X	X	X		X			
	2)	X	X	X	X				
	3)	X		X	X	X			
A6	3)a.1)		X	X	X	X			
	3)a.2)		X	X	X	X			
	3)a.3)		X	X	X	X			
	3)a.4)		X	X	X	X			
	4)	X		X	X	X			
	2)b)	X	X		X	X			

Acción	Presente en el ítem	TO	T1		T2		T1	T2
		Alg	Alg	Prop	Alg	Cuad	Prom	Prom
A6	1)a)	X	X	X	X			
	1)a)b)unic	X	X	X	X			
	1)b)	X	X	X	X			
		X	X	X	X			
A8 ancho	3)b)	X	X	X	X			
A3	1)c)		X	X	X	X		
	4)	X	X	X		X		
	1)b)i)	X	X		X	X		
	1)b)ii)	X	X		X	X		
	1)b)iii)	X	X		X	X		
	2)a)	X	X		X	X		
	1)c)	X	X	X	X			
A20	1)a)	X	X		X	X		

Tabla 1 Tabla 1 A

Tabla 1.A: "Puntajes por cada acción de cada evaluación en disposición útil para promediar"

Promediando estos promedios (los valores de cada una de las celdas de la tabla 1.A, por columna) se obtiene finalmente la nota de cada evaluación y su desvío estándar. Este promedio, que puede ser un valor entre -10 y 10, y su desvío se utilizan para determinar el estado en validación del alumno. Para categorizar dicho estado, definimos distintos niveles que se explican en la tabla 2, pueden verse más detalles en Falsetti, Marino y Rodríguez (2004).

El degradé indica, al tomarse desde el blanco hasta el tono más oscuro, resultados del aprendizaje de la validación desde escasamente logrados hasta acabados. De este modo, el extremo inferior derecho, con un color oscuro, representa un aprendizaje acabado de validación para el contenido evaluado mientras que el blanco es la situación opuesta. Los tonos intermedios, en este esquema, representan las gamas de posibilidades para un estudiante en su aprendizaje de esta noción. Cuando un estudiante escribe y explica regular o bien, consideraremos que está en un *nivel avanzado* de su aprendizaje de validación para el contenido evaluado. Si en cambio, escribe bien o regular pero la explicación que asigna es incorrecta o bien escribe mal, pero explica bien o regular, consideraremos que el estudiante se encuentra en un *nivel intermedio* de su aprendizaje de validación. En otro caso, lo tomaremos como un *nivel inicial*. Para determinar el nivel, se utilizan los promedios y desvíos. Primeramente, el promedio obtenido en la evaluación permite ubicar al estudiante de modo transitorio en un sector de las celdas de la tabla 2, como muestra la tabla 3.

Una vez ubicado en un sector de la celda a partir del promedio, se ajusta la posición utilizando el desvío según el siguiente criterio.

	NIVEL INICIAL (intuiciones, creencias, sospechas, anticipaciones, etc.)		**NIVEL INTERMEDIO** (primeras concreciones, producción incipiente, incompleta, etc.)		**NIVEL TERMINAL** (elaboraciones acabadas)	
	Significantes matemáticos (entran en juego los signos, las reglas sintácticas en la escritura matemática)	**Explicación** (escrita u oral en lengua estándar o lenguaje matemático)	**Significantes matemáticos** (entran en juego los signos, las reglas sintácticas en la escritura matemática)	**Explicación** (escrita u oral en lengua estándar o lenguaje matemático)	**Significantes matemáticos** (entran en juego los signos, las reglas sintácticas en la escritura matemática)	**Explicación** (escrta u oral en lengua estándar o lenguaje matemático)
Grados de lo matemáticamente correcto	Esta columna, en este nivel inicial, no puede evidenciarse					

Tabla 3: Tabla de doble entrada, extraída de Falsetti, Marino y Rodríguez (2004)

	Nivel inicial		Nivel medio	Nivel avanzado
Caracteristicas de cada nivel	Escritura o esplicación escasa e incorrecta o nula		Registro simbólico regular o correcto y explicación incorrecta o registro simbólico incorrecto pero explicación buena o regular.	Buen manejo tanto de la escritura en símbolos como en la explicación de lo realizado.
Subniveles	**Previo** $-10 \leq$ Prom[4] ≤ -5	**Bajo** $-5 \leq$ Prom ≤ 0	**Medio** $0 \leq$ Prom ≤ 5	**Avanzado** $5 \leq$ Prom ≤ 10
Grados de lo matemáticamente correcto				
Mal	Estar ubicado en esta columna es suficiente información respecto del estado en validación por ello no se hace distinción de rangos.	[-5; -4)	[0; 1)	[5; 6)
Regular		[-4; -3)	[1; 3)	[6; 8)
Aceptable		[-3; -1)	[3; 4)	[8; 9)
Bueno		[-1; 0)	[4; 5)	[9; 10)

Tabla 4: “Tabla de ubicación según el promedio obtenido en la prueba”.

Rango para el desvío	Interpretación: la posición dada por el promedio
[0 ; 4)	es confiable; su ubicación final es la misma celda.
[4 ; 6)	decae en un grado
Más de 6	decae en un subnivel manteniendo el grado

Tabla 5: Criterio para ajustar la posición que determina el estado en validación de un estudiante, en función del desvío obtenido en la prueba

De este modo, podemos determinar para cada estudiante el estado en validación en el que se encuentra en función de los resultados de cada evaluación.

Resultados

Diversos análisis

En este apartado hacemos diversos análisis del estado en validación que surgen de agrupar de diferentes maneras los datos consignados en la siguiente tabla. En ella se señalan las modalidades de enseñanza aplicadas en cada grupo en los contenidos evaluados por cada evaluación.

	T1	T2
GR1	E-A	G-A
GR2	G-A	E-A

En el análisis realizado consideramos que un estudiante presenta un “estado satisfactorio” en su aprendizaje de validación, si ha quedado ubicado en el subnivel “Medio” o “Avanzado” de la escala de la tabla 3.

De los 51 alumnos, 24 de ellos son los que hicieron la modalidad E-A en proporcionalidad y G-A en cuadrática (el grupo 1) y los 27 restantes tuvieron las modalidades invertidas (el grupo 2).

En cada análisis mostramos, resaltando en la tabla, de qué manera se agruparon los datos de la misma de acuerdo a la mirada elegida.

Distintas metodologías aplicadas a un mismo contenido

	T1	T2
GR1	E-A	G-A
GR2	G-A	E-A

En las siguientes tablas, consignamos las cantidades de estudiantes que presentan un estado satisfactorio luego de aplicada la evaluación T1:

GR1	E-A en Proporcionalidad	T1
		15/24 (63 %)

GR2	G-A en Proporcionalidad	T1
		15/27 (56 %)

Para el contenido "proporcionalidad", si bien los datos indican que hubo mayor aprendizaje en acciones de validación bajo la modalidad E-A que bajo la G-A, un test de diferencia de proporciones indica que esta diferencia no es significativa a niveles bajos de significación (0.05 ó 0.1). De todos modos informamos que el nivel p que surge del test es p = 0.41, con lo que puede interpretarse que con una probabilidad de error del 0.41 se rechaza la hipótesis nula, H_0: "la proporción de estudiantes con estado satisfactorio en validación para el tema "proporcionalidad" es la misma tanto si la modalidad de enseñanza fue E-A ó G-A" (debe tenerse en cuenta que la hipótesis alternativa que se planteó es H_1: "la proporción de estudiantes con estado satisfactorio en validación para el tema "proporcionalidad" es mayor bajo la modalidad de enseñanza E-A que bajo G-A").

En el caso del contenido "función cuadrática", los resultados se dieron en sentido inverso. El análisis para este contenido arroja los siguientes datos:

GR1	G-A en Cuadrática	T2
		8/24 (33%)

GR2	E-A en Cuadrática	T2
		5/27 (19%)

En este caso, los datos indican que un mayor porcentaje de alumnos con estado satisfactorio en validación surgen de la modalidad G-A (33% con G-A y 19% con E-A). El test de diferencia de proporciones indica que esta diferencia es significativa al nivel p = 0,13 (las hipótesis en este test son: H_0: "la proporción de estudiantes con estado satisfactorio en validación para el tema "función cuadrática" es la misma tanto si la modalidad de enseñanza fue E-A ó G-A" y H_1: "la proporción de estudiantes con estado satisfactorio en validación para el tema "función cuadrática" es mayor bajo la modalidad de enseñanza G-A que bajo E-A").

El contenido transversal en cada grupo: Álgebra

	T1	T2
GR1	E-A	G-A
GR2	G-A	E-A

Debido a la exigencia de las entregas (T0, T1, T2 y los dos tests de percepción) que se dio en el contexto de un curso en el que los estudiantes deben entregar otras producciones como parte de la evaluación y seguimiento que realizan los docentes, se manifestó hacia el final de la experiencia cierto agotamiento de los alumnos. Esta sensación observada se profundizó al momento de corregir el T2 y quedó expresada en la no resolución de algunos ejercicios o en algunas entregas que parecieron hechas para cumplir con el trabajo. Por estos motivos, para el análisis que sigue, que requiere estudiar cambios comparando situaciones iniciales y posteriores, hemos decidido no incluir los resultados del T2.

Más precisamente, nos proponemos estudiar el estado de los aprendizajes en validación y los cambios en dicho estado a lo largo del proceso. Para estudiar los cambios, comparamos los resultados del T0 y del T1, para Álgebra, contenido común a todas las evaluaciones.

En este análisis, entendemos por "evolución" que el nivel obtenido por el estudiante en el T1 sea mayor que el del T0 o que, si ambos niveles son iguales (pero no "Previo", según tabla 3), el grado de lo matemáticamente correcto es mayor en el T1. Las tablas que siguen muestran la cantidad de alumnos (en porcentaje) que han quedado ubicados en un nivel “satisfactorio” y los que han mostrado “evolución”.

Grupo 1	T0	T1
Estado “satisfactorio”	25 %	46 %
Evolución	58 %	

Grupo 2	T0	T1
Estado “satisfactorio”	15 %	48 %
Evolución	56 %	

Si en ambos grupos la cantidad de estudiantes que muestra “evolución” es pareja y la cantidad que muestra estado “satisfactorio” final también, pero el estado inicial es sensiblemente distinto, esto podría interpretarse como que en el Grupo 2 (que tuvo G-A en proporcionalidad) se afianzaron aprendizajes de mayor calidad en validación para el contenido Álgebra que en Grupo 1 (que tuvo E-A en proporcionalidad).

La metodología E-A en ambos grupos

	T1	T2
GR1	E-A	G-A
GR2	G-A	E-A

En Carnelli, Falsetti, Formica, González y Rodríguez (2006), hemos verificado que los alumnos perciben que las interacciones con un experto favorecen mayormente su aprendizaje que las interacciones que se dan con un grupo. Queremos ver ahora si esta percepción se manifiesta en los aprendizajes en validación. Para ello, debemos ubicarnos en los dos grupos cuando predominó la interacción E-A; esto es, en el Grupo 1 en “función proporcional” (con el T1) y en el Grupo 2 en “función cuadrática” (con el T2). Las tablas siguientes muestran las cantidades de alumnos (en porcentaje) que resultaron en un nivel “aceptable” en las evaluaciones mencionadas, acompañadas de los valores obtenidos en el T0 para conocer la situación de partida.

	GR 1 – Estado Satisfactorio
T1	63%
(T0)	(25%)

	GR 2 – Estado Satisfactorio
T2	19%
(T0)	(15%)

Los datos mostrados en la tabla anterior no nos permiten afirmar que haya un aprendizaje significativo en validación cuando predomina la interacción E-A.

Análisis de los resultados luego de las experiencias con ambas interacciones

Nos interesó estudiar los aprendizajes bajo una metodología que combina ambas interacciones, que en nuestro caso, es haber tenido las metodologías E-A y G-A. Para poder estudiar esto, debemos hacer una observación del proceso una vez terminado.

En este sentido, hemos definido cómo analizar los cambios en validación a partir de los resultados de la aplicación del método para evaluar los estados en validación. Para ello hemos determinado, para cada alumno, una “tendencia” en su aprendizaje referido a validación en los temas en cuestión a partir de plasmar una disposición de los cruces entre las evaluaciones T0, T1 y T2 y los estados obtenidos en cada una de ellas. De este modo, dispusimos de tres pares ordenados: (T0; estado en T0), (T1; estado en T1) y (T2; estado en T2) a los que asignamos valores numéricos en cada coordenada y, a partir de ellos pudimos establecer, para cada estudiante, la pendiente de la recta de ajuste de dichos pares ordenados. Pensando en el orden cronológico en que fueron tomadas las evaluaciones, decidimos asignar los valores 0, 1 y 2 a las primeras coordenadas T0, T1 y T2 respectivamente. Con respecto a las segundas coordenadas (estado del alumno en cada evaluación) asignamos valores numéricos a los subniveles Previo, Bajo, Medio y Avanzado, de la siguiente forma: –1 al estado “Previo”, 0 al “Bajo”, 1 al “Medio” y 2 al “Avanzado”. Según el valor obtenido para la pendiente de la recta de ajuste y, en los casos en que este valor dio cero, considerando la información dada por el grado de lo *matemáticamente correcto* del estado, establecimos si hubo cambios en el aprendizaje de la validación del alumno. Así, para este análisis, se consideraron los casos en que la pendiente dio positiva, como correspondientes a estudiantes que *evolucionaron* en su aprendizaje. Además de ello, cuando la pendiente dio cero (lo cual indicaría *igualdad de nivel* en T0 y T2), se tuvo en cuenta el subnivel correspondiente al grado de lo matemáticamente correcto que surge de la tabla 3, considerándose también como casos de progreso a aquellos en los que el grado obtenido en la evaluación T2 superó al de la T0. En estas condiciones, identificando con las letras A al *subnivel Avanzado*, M al *Medio*, B al *Bajo* y P al *Previo*, se observó el grado de lo matemáticamente correcto a los alumnos que presentaron las siguientes combinaciones: APA, ABA, AMA, AAA, MPM, MBM, MMM, MAM, BPB, BBB, BMB, BAB, donde cada terna indica el estado que presentó el alumno en las evaluaciones T0, T1 y T2 respectivamente (por ejemplo, un alumno al que se le asocia la terna MPM es un alumno que registró subniveles Medio en T0, Previo en T1 y Medio en T2). Entre las ternas con igual valoración de estado en la primera y tercera posición, no hemos considerado aquellas que corresponden a estudiantes que presentaron estado Previo en las evaluaciones T0 y T2, o sea, no consideramos las ternas de la forma PXP, por que no resulta evidente que el alumno haya tenido evolución favorable en su aprendizaje.

Según el criterio descrito, 25 de los 51 estudiantes mostraron *evolución* a lo largo del proceso. Estos resultados no nos permiten afirmar en forma contundente que una metodología que combina ambas modalidades favorezca el aprendizaje en validación. Sin embargo, creemos que habilitan a la utilización de esta metodología para la gestión de la clase, así como también avanzar en estudios sobre su implementación.

Consideraciones finales

Nos ha resultado muy costoso llevar adelante este estudio por la complejidad de la metodología, de los instrumentos y su evaluación. También somos conscientes de que los resultados cuantitativos obtenidos son relativos por razones de distintos tipos como el tamaño de la muestra, el hecho de aislar variables del contexto que sin duda influyen en el aprendizaje, por mencionar algunas. De todos modos nos ha interesado mucho desarrollar el trabajo pues creemos que el aporte cuantitativo es un elemento importante a tener en cuenta en las investigaciones educativas y no encontramos en la bibliografía referida a los aprendizajes en validación trabajos de este tipo.

Consideramos que algunas de las razones por las que no hemos tenido resultados contundentes en los análisis pueden ser: la dificultad que tuvimos en tener el material completo de los estudiantes; la poca práctica previa de los alumnos en el trabajo en grupo con las características del G-A, etc. Tal vez habría sido conveniente que el estudiante aprendiera a interactuar en ese "medio" antes de aprender a validar en él. Es probable que a un estudiante le resulte más simple formar parte de una clase E-A que de una G-A dado que el trabajo en grupo es más exigente pues se espera de él una participación activa. También ocurre que el trabajo en grupo demanda más tiempo que en este caso no pudimos dispensar por estar insertos en una materia con su programa y cronograma definido para todos los cursos. Cabe mencionar que los estudiantes no han tenido experiencia previa en completar evaluaciones del tipo de la administrada. Sin embargo empezamos a tener evidencias comunicables que nos permiten esbozar algunas afirmaciones y poner en dudas ciertas cuestiones, originadas tanto en estudiantes como en docentes, que a veces están presentes en las clases o en los textos. Para ejemplificar esto último podemos discutir sobre los beneficios del trabajo en grupo. El trabajo en grupo ha sido estudiado por diversos autores, se cuenta con clasificaciones de los tipos de trabajo posibles, hay estudios que informan sobre el comportamiento de los estudiantes en clases donde se pone en práctica esta modalidad, etc. sin embargo en general no hay informes sobre lo que aprende el estudiante en términos de resultados para un contenido dado sino que más bien están centrados en el ambiente de la clase. Hemos visto en las clases de tipo G-A desempeños y participaciones valiosas, con cuestiones matemáticas puestas en juego y defendidas por los estudiantes. Sin embargo, estos aprendizajes dados en el seno del proceso no han sido tan contundentes como para ser captados por el método cuantitativo presentado. Son evidentes las ventajas del trabajo en grupo: aspectos actitudinales de mayor compromiso, la responsabilidad del aprendizaje es compartida, las clases son ricas en interacciones, intervenciones, etc. Tal vez para que el aprendizaje en términos de resultados sea mayor, debiera destinarse más cantidad de tiempo, lo que haría que el método no sea aplicable en cualquier tipo de curso. Queda pendiente avanzar en estudios en este sentido.

Con los contenidos de menor complejidad el experto podría funcionar de modo equivalente al trabajo en grupos, pero en contenidos de mayor complejidad se han manifestado mejores resultados cuando el estudiante aprendió en grupo de pares

A pesar de que el E-A es el favorito de los alumnos, los resultados no están acordes con esa percepción. Esto obliga a trabajar enfáticamente sobre el contrato didáctico con los estudiantes, evidenciando las posiciones de uno y otro y manifestando las razones por las cuales el docente tal vez no lleve adelante una enseñanza que promueva interacciones de tipo E-A en la totalidad del curso. En base a los resultados numéricos podríamos conjeturar que con los contenidos de menor complejidad el experto podría funcionar de modo equivalente al trabajo en grupos, pero en contenidos de mayor complejidad se han manifestado mejores resultados cuando el estudiante aprendió en grupo de pares.

Nos queda clara también la dificultad de estudiar los cambios en el aprendizaje de la validación dado que dichos cambios se darán en el tiempo y esto obliga a evaluar, para comparar, distintos contenidos matemáticos. Tenemos presente que el aprendizaje de la validación siempre está sujeto a un contenido matemático fijado. Tal es así que cualquiera de las acciones que deben estar presentes en el proceso de validación puede ser más simple o más complejo en función del contenido particular que se trabaje.

Consideramos que sería valioso profundizar en estos aspectos de índole cualitativa que han quedado pendientes así como volver a aplicar los instrumentos y los métodos en otros grupos de estudiantes para completar el estudio. ■

Agradecimientos: Queremos agradecer a la Lic. Patricia Barreiro por su generosa disposición a llevar a cabo las ingenierías didácticas en su curso del CAU y al Prof. Víctor González por su dedicada colaboración en la corrección del trabajo de campo y por sus aportes en las discusiones teóricas.

NOTAS

1 gcarnell@ungs.edu.ar, mfalse@ungs.edu.ar, aformica@ungs.edu.ar, mrodri@ungs.edu.ar

2 How to give a social constructivist account of the individual's learning and construction of mathematics?

3 Se entiende por "devolución" a la actividad mediante la cual el docente logra que el problema o situación planteados se convierta en un problema del alumno para que éste no actúe como consecuencia de la intencionalidad didáctica del maestro sino que asuma la responsabilidad de la construcción de su propio conocimiento.

4 Con Prom nos referimos al promedio obtenido en la prueba

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BROUSSEAU, G. (1995): *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer Academic Publisher.

CARNELLI, G., FALSETTI, M., FORMICA, A., GONZÁLEZ, V. Y RODRÍGUEZ, M. (2006): "Sobre la percepción de interacciones que favorecen el aprendizaje en Matemática: análisis de una experiencia". Documento de trabajo, UNGS.

CARNELLI, G., FALSETTI, M., FORMICA, A. Y RODRÍGUEZ, M.[1] (2006): "Validación matemática en clases que promueven distintos tipos de interacciones". Memorias del VIII Simposio de Educación Matemática, Buenos Aires. Formato CD, ISBN: 10: 987-20239-4-8 / ISBN: 13: 978-987-20239-4-2.

CARNELLI, G., FALSETTI, M., GONZÁLEZ, V. Y RODRÍGUEZ, M. (2005): "Una ingeniería didáctica para el estudio de validación matemática", Memorias del VII Simposio de Educación Matemática, Buenos Aires. Formato CD, ISBN 987-20239-3-X.

CHEVALLARD, Y. (1992): "Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique". Recherches en Didactique des Mathématiques, 12(1), 73-111.

ERNEST, P. (1999): "What is Social Constructivism in the Psychology of Mathematics Education?". POME Journal(12). Disponible en http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/pome12/ article8.htm

FALSETTI, M., MARINO, T. Y RODRÍGUEZ, M. (2004): "Validación en Matemática en situación de aprendizaje" Actas del VI Simposio de Educación Matemática, Buenos Aires. Formato CD, ISBN 987-20239-2-1

GODINO, J. Y BATANERO, C. (1994) Significado institucional y personal de los objetos matematicos Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 14, nº 3: 325-355.

GONZÁLEZ, V. Y RODRÍGUEZ, M. (2006): "Un modelo para evaluar la validación matemática". Educación Matemática, Vol. 18, núm. 3, pp. 103-124. México.

POZO J. I. (1994): *Teorías cognitivas del aprendizaje.* Editorial Morata. Madrid.

ANEXO

T0

Apellido y nombre:……….......……………………DNI:………….………….Comisión:…..……

Para cada uno de los ejercicios se pide:
(R1) Resolvelo: Indicá acá cuál sería tu resolución (como si fuera un ejercicio de un parcial, acá va lo que entregarías como resolución con las justificaciones que consideras necesarias). Hacelo en otra hoja y poné la indicación R1.

(E1) Explicalo. Tratá de explicar lo que hiciste para resolverlo y por qué lo hiciste pensando en que se lo estás explicando a un compañero que no entiende. Hacelo en otra hoja y poné la indicación E1.

(N1) Si no te salió el ejercicio,

a) Oor favor indicá las razones: si no te resulta claro el enunciado, si hay alguna fórmula que necesitás y no recordás, etc.

b) Por favor, escribí lo que pensaste aunque sepas que no es la resolución de ejercicio.

Hacelo en otra hoja y poné la indicación N1.

1) Un mago realiza el siguiente truco: te dice "pensá un número, sumale 2, multiplicá al resultado por tu número, restale tu número y restale el cuadrado de tu número. Obtendrás el mismo número pensado". Pensando si contratar a este mago o no, se les preguntó a María y a José si el truco del mago funciona cualquiera sea el número pensado. María dice que es verdad siempre y justificó diciendo: "yo pensé 1/5 y la cuenta$1/5-2\cdot1/5-1/5-1/5^2$ me da 1/5". José no supo qué responder, entonces revisó la cuenta de María y dijo: "la cuenta que escribiste no da 1/5 , da 9/25 , así que el truco del mago es falso".

a) ¿Es correcto el razonamiento de María?
b) ¿Es correcto el razonamiento de José?
c) Resolvé el problema como si te hubieran preguntado a vos.

2) Si tenemos dos números naturales pares cualesquiera, ¿podemos asegurar que su suma siempre resulta un número par? Justificar.

3) a) Para cada una de los enunciados del cuadro, indicar cuál es verdadero y cuál es falso justificando adecuadamente.

	¿V ó F?	Justificación (si no cabe acá, seguí en otra hoja)
a.1) Cualquier ecuación cuadrática tiene un conjunto solución formado por dos números reales distintos		
a.2) Existe alguna ecuación cuadrática que no tiene un conjunto solución formado por dos números reales distintos		
a.3) Toda ecuación cuadrática tiene un conjunto solución formado por dos números reales iguales		
a.4) Existe ecuaciones cuadráticas que tienen un conjunto solución formado por dos números reales iguales		

b) Dado el enunciado "Cualquier ecuación cuadrática tiene un conjunto solución formado por dos números reales distintos", indicar cuál/cuáles de los enunciados anteriores (de la tabla) es/son su negación.

c) Decir qué condición deben cumplir los coeficientes a, b y c de una ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ para que su conjunto solución esté formado por dos números reales distintos

T1 Apellido y nombre:……………...........………DNI:………...............….Comisión:………………

Para cada uno de los ejercicios se pide:

<u>(R1) Resolvelo:</u> Indicá acá cuál sería tu resolución (como si fuera un ejercicio de un parcial, acá va lo que entregarías como resolución con las justificaciones que consideras necesarias). Hacelo en otra hoja y poné la indicación R1.

<u>(E1) Explicalo.</u> Tratá de explicar lo que hiciste para resolverlo y por qué lo hiciste pensando en que se lo estás explicando a un compañero que no entiende. Hacelo en otra hoja y poné la indicación E1.

<u>(N1) Si no te salió el ejercicio</u>,

a) Por favor indicá las razones: si no te resulta claro el enunciado, si hay alguna fórmula que necesitás y no recordás, etc.

b) Por favor, escribí lo que pensaste aunque sepas que no es la resolución de ejercicio.

Hacelo en otra hoja y poné la indicación N1.

1.- Para un recipiente cilíndrico se sabe que por cada dos vasitos de agua la altura asciende 10 cm. Responder:

a) Las magnitudes *cantidad de vasitos* y *altura del líquido*, ¿son directamente proporcionales? ¿Por qué?

b)Considerando los pares (x;y), donde x es la cantidad de vasitos e y es la altura del líquido en el recipiente, decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando adecuadamente.

i) Al echar medio vaso de agua, la altura del agua en el recipiente asciende 2,5 cm.
ii) El par ordenado (7;35) pertenece al gráfico que representa esta situación.
iii) Al valor 30 de la variable independiente le corresponde el valor 150 de la variable dependiente.

2.- Responder cada una de las siguientes preguntas justificando adecuadamente.

a) En una relación de proporcionalidad directa en la que a le corresponde , ¿se puede asegurar que siempre a le corresponde ?

b) ¿Existen relaciones que no son de proporcionalidad directa?

3.- ¿Es cierto que si se suman dos números naturales consecutivos la suma siempre da un número impar? Justificar adecuadamente.

4.- Un mago le hace a Mirta el siguiente truco “pensá un número cualquiera. El cubo de tu número más el duplo de tu número es igual al triple del cuadrado de tu número”. Mirta dice que pensó el 1 y que el truco le funcionó. Ella está dispuesta a invertir 10000$ en hacer una gira con él mostrando su magia. ¿Qué consejo le darías a Mirta?

T2 Apellido y nombre:……………………...……DNI:……………...…….Comisión:………………

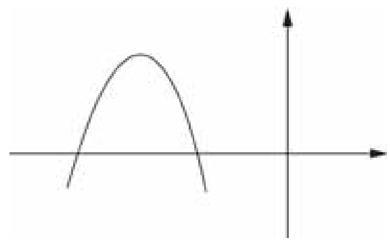
Para cada uno de los ejercicios se pide:

(R3) Resolución: Indicá acá cuál sería tu resolución (como si fuera un ejercicio de un parcial, acá va lo que entregarías como resolución con las justificaciones que consideras necesarias). Hacelo en otra hoja y poné la indicación R1.

(E3) Explicación. Tratá de explicar lo que hiciste para resolverlo y por qué lo hiciste pensando en que se lo estás explicando a un compañero que no entiende. Hacelo en otra hoja y poné la indicación E1.

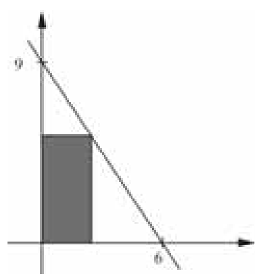
(N3) Si no te salió el ejercicio,
a) Por favor indicá las razones: si no te resulta claro el enunciado, si hay alguna fórmula que necesitás y no recordás, etc.
b) Por favor, escribí lo que pensaste aunque sepas que no es la resolución de ejercicio.
Hacelo en otra hoja y poné la indicación N1.

1.- Dada $f(x)=-3x^2+bx+c$, determinar si existen valores para b y c de forma que:
a) el gráfico de la cuadrática sea de la siguiente forma



b) $f(0)=f(-4)$
c) Vértice = (1,4) y pasa por (2,6)
En cada caso, los valores b y c, ¿son únicos?

2.- Un rectángulo se apoya sobre los ejes y toca el gráfico de una función lineal como lo muestra la figura. ¿De qué dimensiones debe tomarse un rectángulo que respete esta disposición para que el área del mismo sea máxima?



3.- ¿Es cierto que si se multiplica un número par por un impar siempre se obtiene un número par? Justificar adecuadamente.

4.- Dada la ecuación

$$-3\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{x}{2}=-\left(x+\frac{5}{2}\right)-\frac{3}{2}x+1$$

decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando adecuadamente.
a) $x=2$ es el único valor que satisface la ecuación.
b) La ecuación tiene más de una solución
c) La ecuación tiene por *conjunto solución* a los números enteros.

SUMA+ 58
Junio 2008, pp. 41-48

Topología para 2º de ESO con la técnica del puzzle de Aronson

Este artículo describe una actividad en la cual los alumnos adquieren algunos conceptos básicos sobre Topología de forma intuitiva. Teniendo en cuenta su principal ventaja, el aprendizaje cooperativo, el puzzle de Aronson es la herramienta que proporciona la metodología más conveniente para desarrollar esta experiencia.

This article describes a learning activity in which students take on some basic topological concepts in an intuitive way. Focussing on its main advantage, the cooperative learning, the Aronson's puzzle is a tool that provides the suitable methodology to develop this experience.

Introducción

Miguel De Guzmán (1992) ya apuntaba una tendencia a recuperar el pensamiento geométrico y la intuición espacial en los contenidos de la programación del área de Matemáticas. Señala, que si bien es evidente el abandono de la geometría intuitiva a favor de un mayor formalismo en los programas actuales, cada vez más, se considera ineludible la recuperación de contenidos espaciales e intuitivos de la Matemática.

En esta línea se desarrolla la asignatura optativa de Estructuras Espaciales que se oferta en el currículo de secundaria de la Comunidad Valenciana (DOGV, Orden del 9 Mayo de 1995).

Esta asignatura completa y amplía el tratamiento matemático del espacio contenido en el currículo de secundaria[1], abarcando el estudio de la evolución de las formas en el espacio, de su papel modular en la composición de estructuras y del desarrollo de la percepción espacial de objetos.

Algunos de los objetivos[2] generales de esta optativa son (DOGV, Orden del 9 Mayo de 1995):

- Describir el espacio utilizando diferentes lenguajes: geométrico, ordinario, gráfico, numérico, algebraico, etc., y analizarlo desde diferentes ópticas: relaciones, propiedades, secciones, perspectivas, etc.

- Comprender las relaciones entre las formas desde diversas ópticas: regularidad, simetría, proporción, armonía en su disposición, etc. Utilizar la composición, descomposición, movimiento, deformación y desarrollo de configuraciones geométricas para analizarlas y obtener otras nuevas.

- Clasificar figuras y cuerpos atendiendo a distintos criterios.

- Desarrollar el sentido del espacio al construir, dibujar, medir, visualizar, comparar, transformar y clasificar figuras geométricas.

- Valorar la importancia de trabajar en equipo para la discusión de las ideas, para la resolución de los problemas y para la realización de las construcciones, con actitud de cooperación, tolerancia y solidaridad.

- Desarrollar una actitud de curiosidad e interés hacia la investigación de formas y configuraciones geométricas.

Estos objetivos se concretan en los contenidos que se trabajan en esta actividad, concebida para su aplicación en una clase de 2º ESO. Se pueden clasificar en tres tipos: conceptuales, procedimentales y actitudinales.

Elena Thibaut Tadeo
IES Comarcal Rocafort-Godella-Burjassot
SEMCV al Khwārizmī

Los contenidos conceptuales que se trabajan en ella son:

- Conocer intuitivamente algunas características topológicas de superficies
- Conocer lo que es un grafo y el comportamiento de algunos de ellos sobre superficies.
- Calcular la característica de Euler en otras superficies poliédricas.
- Identificar algunas superficies poliédricas mediante su característica de Euler.
- Distinguir entre algunas superficies con bordes y sin bordes.
- Distinguir entre algunas superficies orientables y no orientables.

Los contenidos de tipo procedimental son:

- Realizar figuras poliédricas con papel y acetato.
- Visualizar el espacio tridimensional mediante la manipulación de superficies transparentes

Y los contenidos actitudinales son:

- Favorecer la autonomía en el aprendizaje.
- Aprender a aprender de los compañeros.
- Relacionar a alumnos de edades y precedencia diversa.
- Integrar alumnos de niveles diferentes.
- Fomentar la igualdad de géneros.
- Incitar la curiosidad hacia otras construcciones matemáticas no habituales

Para el desarrollo de esta actividad he escogido la técnica didáctica cooperativa del puzzle de Aronson.

Dinámica de la experiencia

Elemento motivacional

La motivación consiste en suscitar interés hacia la consecución de un objetivo. Existe motivación si existe una necesidad que ha de ser satisfecha. ¿Qué puede crear la necesidad de conocer ciertas superficies en alumnos de 12-13 años? En este caso he elegido como estímulo la película MOEBIUS de Eduardo Mosquera (1996).

En ella se crea una situación dramática sorprendente y surrealista, explicable en cierta medida por las características de una cinta de Moebius. En el metro de Buenos Aires desaparece un tren entero. Los responsables piden ayuda a un matemático para que desentrañe la complejidad de las redes de túneles que puedan haber ocasionado la pérdida. La explicación del matemático sugiere la existencia de una estructura en forma de cinta de Moebius que con un cambio de vías deja encerrados en un bucle a los trenes que estén recorriendo ese tramo. Se sugiere la existencia de otra dimensión, la existencia de un no-espacio, con lo que otra posible explicación sería la existencia de "túneles" pertenecientes a una superficie como la botella de Klein (Thibaut, 2006). El guión de la película está basado en un relato de A. J. Deutsch titulado *A Subway Named Moebius*, publicado en la revista Astounding en diciembre de 1950[3], en el que también se pueden consultar los detalles matemáticos de la historia.

Se trata de apelar a la curiosidad de los alumnos en clave de desafío, y proponerles respuestas a sus interrogantes. La película dura 88', por lo que se emplea en ella una sesión y media.

En las dos ocasiones que he puesto en práctica esta actividad, he dedicado media sesión a poner en común sus impresiones sobre la película. En ambos casos, los alumnos mostraron interés por comprender qué ocurría y el porqué. Después de comentarles brevemente cómo se construye una cinta de Moebius, algunos incluso interpretaron que el argumento de la película era recurrente y cíclico, como parece ser que ellos habían entendido que "funcionaba" una cinta de Moebius.

Elemento manipulativo

La utilización de materiales recortables que puedan ser utilizados para experimentar tiene la ventaja de facilitar la visualización de ciertas estructuras y de centrar la atención en los conceptos que se están trabajando.

Para su uso en la actividad cooperativa los alumnos construyeron una cinta de Moebius con acetato transparente y una botella de Klein poliédrica (imagen 1) construida a partir del recortable de la imagen 2.

En la elaboración de la botella de Klein se empleó una sesión.

Imagen 1.-Botella de Klein poliédrica en acetato transparente

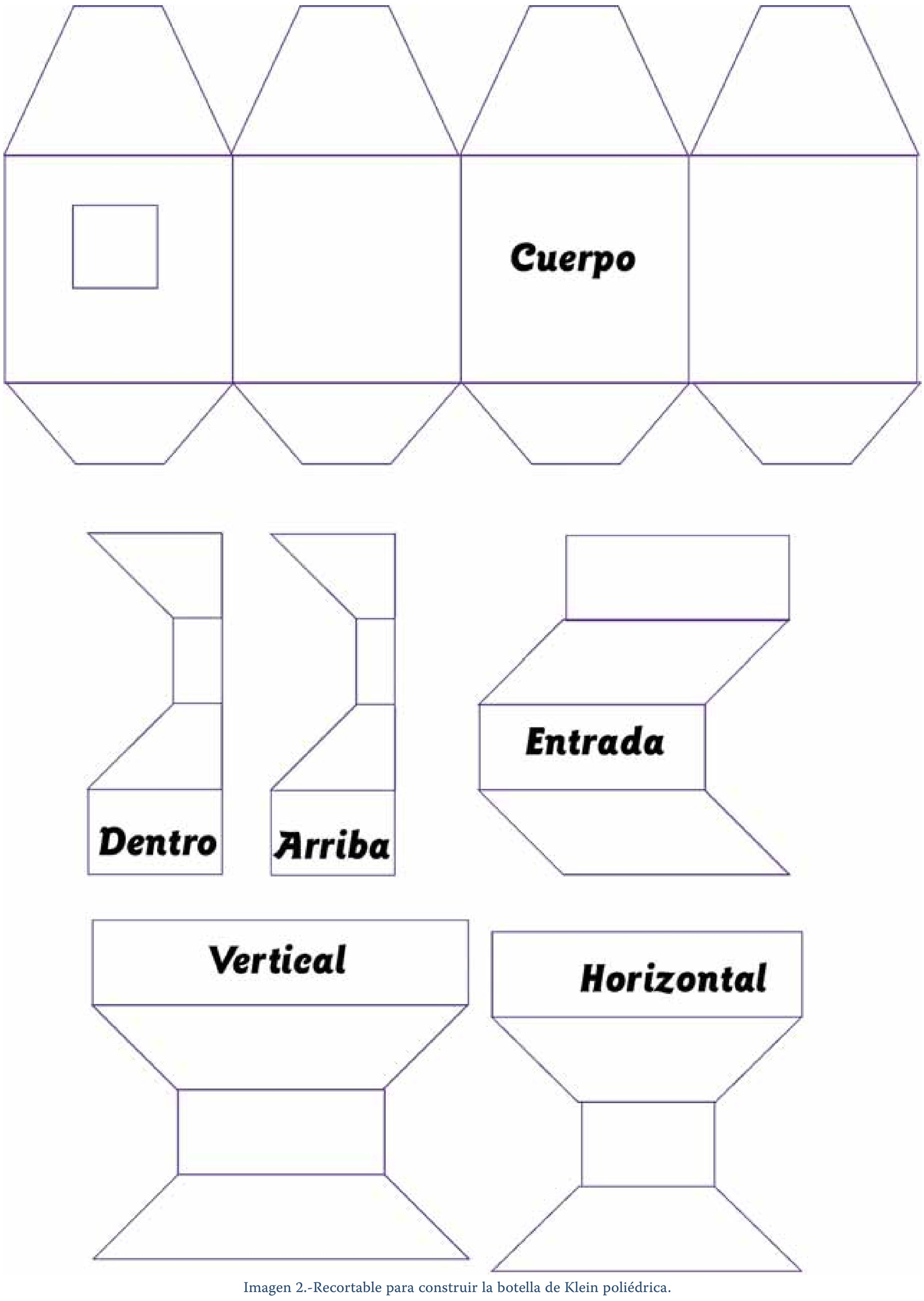


Imagen 2.-Recortable para construir la botella de Klein poliédrica.

Actividad cooperativa: puzzle de Aronson

Las virtudes del puzzle de Aronson no son pocas. Entre ellas destacan las siguientes (García, Traver y Candela, 2001)

- Implica al alumno en el proceso de aprendizaje de forma activa y dinámica

- Le proporciona autonomía y responsabilidad en el aprendizaje propio.

- Le involucra de manera responsable en el aprendizaje del compañero.

El primer grupo de alumnos de Estructuras Espaciales de 2ºESO estaba compuesto por doce alumnos, cuatro chicos y ocho chicas, con los que formé seis grupos de dos alumnos. Cuatro de estos grupos son parejas mixtas. En la elección de las parejas se buscó combinar caracteres relacionales opuestos. Al más extrovertido de cada pareja le asigné el rol de secretario: se encargaría de tomar las notas necesarias que servirán más tarde para su estudio. Y a los más introvertidos los designé como portavoces: se encargarían de exponer las dudas y plantear las cuestiones necesarias en nombre de la pareja.

El segundo grupo de alumnos, también de estructuras espaciales de 2º ESO está formado por dieciséis alumnos, cinco chicos y once chicas, con los que formé cuatro grupos de cuatro alumnos. En este caso se busco que en cada grupo hubiese una persona más extrovertida, otra más aseada en la presentación de los trabajos, otra más creativa y otra con necesidades educativas especiales, cuidando que estuviesen a gusto juntos por su afinidad amistosa. La persona extrovertida se encargaba de moderar, la más creativa de exponer el trabajo en la pizarra, la más aseada fue el portavoz y la persona con necesidades educativas fue el secretario.

En ambos casos he utilizado tres sesiones para el desarrollo completo de esta parte de la actividad. La necesidad de realizar ejercicios manipulativos para la comprensión de los conceptos, que conllevan un tiempo extra en la elaboración de material y su posterior utilización en el grupo, condicionaron la extensión temporal de todo el ejercicio.

La dinámica consiste en entregar a cada componente del grupo, parte del total de los contenidos que han de aprender y desarrollar. El material de trabajo que he utilizado es concreto y breve para que no resulte excesivamente denso en un curso de primer ciclo de la ESO.

En el primer caso repartí el material en dos partes, de forma que cada componente de la pareja debían convertirse en expertos en:

a. Definición de Topología, característica de Euler y superficie no orientable.

b. Superficie con bordes, definición de grafo, tipos de grafos.

En el segundo caso, la información la dividí en cuatro partes porque los grupos estaban formados por cuatro alumnos. De forma que cada componente del grupo debía convertirse en expertos en:

a. Definición de Topología, característica de Euler.

b. Definición de Topología, superficie no orientable.

c.- Definición de Topología, Superficie con bordes.

d.- Definición de grafo, tipos de grafos.

La información completa de la que disponían cada grupo es la siguiente:

> De manera informal, la topología se ocupa de aquellas propiedades de las figuras que permanecen invariantes, cuando dichas figuras son plegadas, dilatadas, contraídas o deformadas, de modo que no aparezcan nuevos puntos, o se hagan coincidir puntos diferentes.
>
> El topólogo considera los mismos objetos que el geómetra, pero de modo distinto: no se fija en las distancias o los ángulos, ni siquiera de la alineación de los puntos. Para el topólogo un círculo es equivalente a una elipse; una bola no se distingue de un cubo: se dice que la bola y el cubo son objetos topológicamente equivalentes, porque se pasa de uno al otro mediante una transformación continua y reversible. Marta Macho Stadler. Sigma 20, Febrero 2002

En un poliedro equivalente a una esfera (cubo, pirámide, tetraedro, prisma...) se puede sumar el número de caras y vértices, y al resultado restarle el número de aristas.

$$C + V - A =$$

El resultado siempre te dará dos.

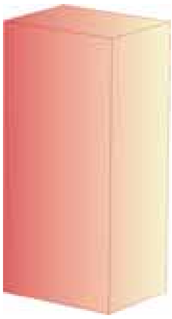
$$C + V - A = 2$$

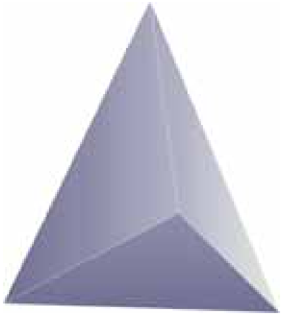
Puedes comprobarlo con cualquier poliedro.

Durante mucho tiempo se pensó que para cualquier figura tridimensional este resultado sería siempre el mismo. Pero de hecho esto sólo es cierto para figuras equivalentes a una esfera.

Al resultado de realizar esta operación se le llama *característica de Euler*.

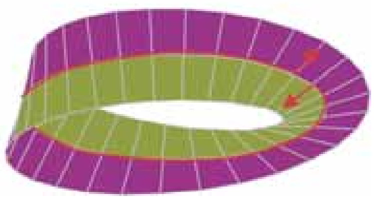
Cuenta el número de aristas de tu botella de Klein y averigua cual es su *característica de Euler*.





La cinta de Moebius tiene una propiedad curiosa. Si coloco dos flechas sobre ella, ambas orientadas hacia arriba, y una de ellas la desplazo por toda la cinta, cuando se encuentra con la anterior, lo hace invertida.

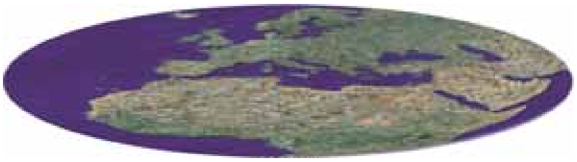
Prueba a hacer el dibujo sobre las cintas de papel transparente.



Esto quiere decir que esta superficie es *no orientable*. Puedes comprobarlo sobre una cinta de Moebius. La botella de Klein, también es *no orientable.*

Un cilindro, ¿será no orientable?

Antiguamente los hombres pensaban que la tierra era plana. Creían que si viajaban más allá del horizonte caerían en un vacío incomprensible. Pero ahora sabemos que no es así, que la tierra es casi una esfera y que podemos caminar sobre ella sin miedo a encontrarnos con uno de sus bordes[4].



La esfera es una superficie cerrada, esto es, que no tiene bordes. En cambio un disco plano, es un superficie con bordes.

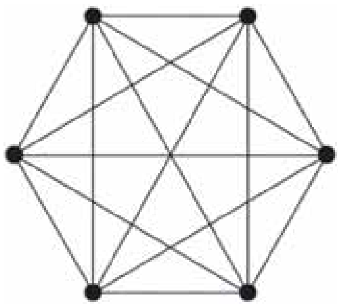
Fíjate en la cinta de Moebius. Parece una carretera. Si te sales de ella vas a parar a una zona que está en el aire. Esto es que tiene *bordes*. A un cilindro le pasa lo mismo. Desde este punto de vista, tanto el cilindro, como la cinta de Moebius son superficies con bordes al igual que un disco plano.

¿Cómo crees que es la botella de Klein?

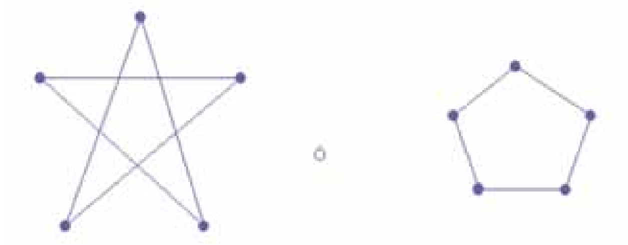
Una botella de Klein está formada por dos cintas de Moebius. Puedes cortar una de ellas y comprobarlo.

Un grafo es un conjunto de puntos unidos por líneas. Cada punto puede representar una ciudad, una estación o un ordenador de una red. O cualquier conjunto de objetos que se hallen conectados. Las líneas que los conectan pueden representar carreteras, vías o cables. O cualquier elemento físico que conecte ciertos objetos. A los puntos se les llama vértices. Y a las líneas aristas.

Hay muchos tipos de grafos. Un grafo completo será aquel en el que todos sus vértices estén unidos con el resto de vértices por una arista.



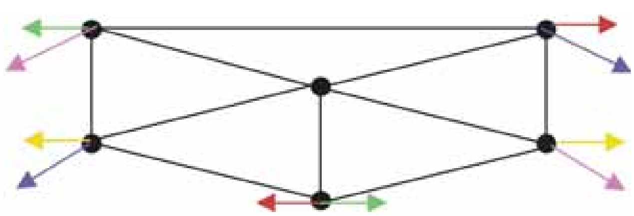
Un grafo conexo será en cambio el que permita recorrer todas sus aristas y sus vértices una sola vez sin levantar el lápiz del papel.



Y por último, un grafo planar será aquel en el que no se cruzan ninguna de sus aristas.

En el plano (o en una esfera), no se puede tener un grafo planar y completo de más de 4 vértices. En cambio en la cinta de Moebius y la botella de Klein sí se puede.

Para convencerte, construye una cinta de Moebius en acetato transparente e intenta unir los 6 puntos según el código de colores. Piensa que la cinta de Moebius tiene una sola cara por tanto basta con que tú veas que se unen.



¿Cómo explicas que sea posible también en la botella de Klein?

Cuando cada alumno tiene la información que va a trabajar, los grupos originales se deshacen para formar los grupos de expertos, que están formados por aquellos alumnos con la misma información asignada.

En estos grupos, los alumnos debatirán, investigarán y desarrollarán los contenidos asignados, ayudados por sus compañeros y por el profesor.

Para orientarles en la comprensión se les plantea a cada grupo preguntas concretas relacionadas con el material que han de trabajar. Las preguntas que utilicé fueron las siguientes

> ¿Qué es la topología?
> ¿Qué es la característica de Euler?
> ¿Cómo es una superficie no orientable?
> ¿Qué significa que una superficie tenga bordes?
> ¿Qué es un grafo?
> ¿En qué superficies se puede dibujar grafos completos y planares?

Dentro de cada grupo deberán llegar a un consenso en sus respuestas y tener claros los conceptos. El profesor juega un papel fundamental, constatando en cada grupo que todos los alumnos saben explicar lo que han aprendido. Durante el desarrollo de esta fase, es necesario orientar a los grupos de expertos incitándoles a utilizar las botellas de Klein y las cintas de Moebius construidas de acetato transparente pintándolas o recortándolas; a contar vértices, aristas y lados de poliedros; a experimentar, en suma, con sus manos los problemas que se plantean en el material escrito. La tendencia del alumno es hacer una primera lectura y contestar las preguntas copiando mecánicamente la respuesta del texto. Como eso no es posible en todos los casos, han de realizar las actividades prácticas y elaborar las respuestas ellos mismos. Si bien este procedimiento es propio del aprendizaje por descubrimiento, no por ello invalida la técnica cooperativa, pues se produce en la fase en la que los grupos de expertos deben elaborar respuestas como resultado de un razonamiento deductivo.

Durante la segunda sesión las parejas o grupos vuelven a reunirse y cada componente le explica al compañero lo que ha aprendido como experto. En este caso también el profesor debe supervisar que se produce un intercambio de conocimiento eficaz.

En la primera experiencia hubo parejas que no se enseñaron todo lo que se había trabajado en el grupo de expertos, por lo que hizo falta revisar en cada pareja si habían puesto en común todo lo aprendido y recordar la necesidad de retomar aquellas cuestiones que no se habían tenido en cuenta.

En la segunda experiencia hubo un grupo que no funcionó correctamente porque no se llevaban bien entre ellos. En los resultados del examen se constató que al no cooperar no pudieron aprender los contenidos necesarios.

La orientación en la que cada alumno expone su tema al compañero es la contraria a la que se ha realizado en el grupo de expertos. Primero se ponen en común las respuestas a las preguntas y después se razonan dichas respuestas con los resultados de las prácticas. Por ejemplo:

> ¿En qué superficies se pueden dibujar grafos completos planares? En aquellas como la cinta de Moebius o la botellas de Klein que tienen característica de Euler igual a 0. Esto se puede ver en este dibujo que he hecho en la cinta de Moebius. ¿Ves? (Imagen 3)

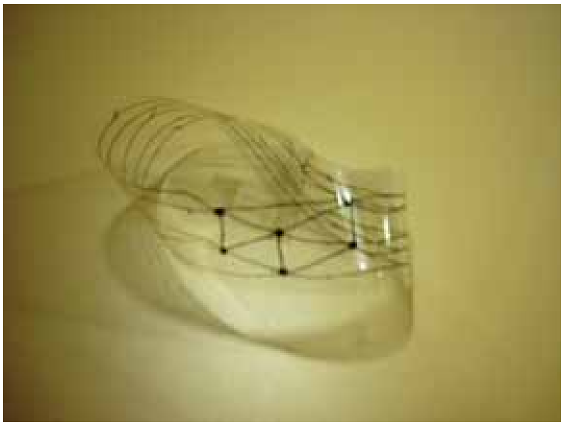


Imagen 3.-Cinta de Moebius con grafo

Algunos alumnos se conformaron en un primer momento con las respuestas dadas sin cuestionarse el porqué de su contestación. De ahí la importancia del profesor para confirmar el aprendizaje, y en caso contrario, redirigir el curso de la conversación de la pareja para retomar aquellos puntos que no han quedado claros.

Evaluación

Para evaluar los contenidos conceptuales opté por una prueba objetiva individual, que constaba de cuestiones directamente relacionadas con las preguntas que planteé a los alumnos en los grupos de expertos.

En el primer año un 75% de alumnos aprobaron la prueba y en el segundo año un 81,25%.

Para evaluar los contenidos procedimentales me basé en la habilidad en la construcción de la botella de Klein y las cintas de Moebius así como en su utilización en los grupos de expertos. Me llamó especialmente la atención un alumno que realizó tres veces el dibujo de los grafos sobre la cinta de Moebius hasta quedar convencido totalmente del resultado.

Para evaluar los contenidos actitudinales me basé en la observación de actitudes positivas mientras trabajaban en grupo y en los comentarios que me hicieron durante una conversación que mantuve con ellos en la que les pregunté sobre el desarrollo de la actividad.

En el primer grupo me dijeron que consideraban que habían aprendido los contenidos bastante bien, que destacaban el hecho de haberse ayudado mutuamente y que se habían sentido igual que siempre. Algunos puntualizaron, cuando les pregunté cómo era eso de “igual que siempre”, que les hubiese gustado trabajar con su grupo habitual, el elegido por ellos, pero reconocieron que al final se habían sentido a gusto, como siempre. También me hicieron notar que la elaboración de la botella de Klein les había resultado muy costosa.

Observé que las tensiones entre los grupos de chicos y chicas habían desaparecido y que no se manifestó la competitividad marcada por la prepotencia masculina y reforzada por el complejo de inferioridad femenino que me encontraba habitualmente.

La segunda vez que realicé la actividad intenté respetar sus amistades y aun así hubo un grupo que no acabó de congeniar. La reflexión fue que deberían haber dejado sus diferencias a un lado y haber trabajado en común.

La integración de tres alumnos con necesidades educativas especiales fue completa y pudieron participar y disfrutar de la ayuda del resto de sus compañeros.

Conclusiones

Viendo los resultados de la evaluación se puede decir que esta es una técnica que resulta eficaz. Además consigue generar ambiente de trabajo e incitar al trabajo. Respecto a los alumnos que no llegaron a adquirir los conocimientos mínimos se puede reflexionar acerca de cuestiones individuales como pueden ser el absentismo o los problemas de aprendizaje a nivel general. Quizás en estos casos se requieran otras técnicas u otros niveles curriculares que no se puedan dilucidar sólo con los resultados de esta actividad. Sería necesario acudir a una evaluación global del alumno y, si la junta evaluadora lo estima conveniente, a un diagnóstico por parte del departamento psicopedagógico.

Esta técnica es susceptible de ser aplicada para el aprendizaje en cualquier área. Las referencias de su aplicación en Matemáticas se encuentran para niveles universitarios (Sanabria, Conejero y Camp, 2004). Para un nivel de secundaria y con contenidos matemáticos que hagan referencias a cuestiones geométricas o topológicas, me parece especialmente adecuada porque permite combinar el aprendizaje por descubrimiento y el trabajo en grupo cooperativo a la vez que se proporciona un texto elaborado que el alumno debe trabajar. Estos conocimientos incipientes sobre Topología requieren para su aprendizaje en un nivel de 2º ESO tanto de manipulaciones deductivas como de definiciones de los nuevos conceptos. La técnica del Puzzle de Aronson permite introducir ambas orientaciones con las ventajas del aprendizaje cooperativo: autonomía, responsabilidad e interacción mutua. ■

NOTAS

1 REAL DECRETO 116/2004, de 23 de enero, del Ministerio de Educación y Cultura y Deporte, por el que se desarrolla la ordenación y se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. (BOE nº 35, de 10/2/2004)

2 Orden de 9 de mayo de 1995, de la Conselleria de Educación y Ciencia, por la que se regulan las materias optativas en la Educación Secundaria Obligatoria (DOGV nº 2544, de 5/7/95)

3 Se puede descargar el relato en formato PDF a través de Internet en la siguiente dirección:

http://littera.wikispaces.com/space/showimage/Deutsch_moebius.pdf

4 Imagen de Google Earth, manipulada.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Conselleria de Educación y Ciencia (1995). Orden de 9 de mayo de 1995, por la que se regulan las materias optativas en la Educación Secundaria Obligatoria. Diari Oficial de la Generalitat Valenciana. Valencia.

GARCÍA, R. TRAVER, J. A. CANDELA, I. (2001): Aprendizaje cooperativo. Fundamentos, características y técnicas. CCS. Madrid.

GUZMÁN, M. GIL, D (1993): Enseñanza de las Ciencias y la Matemática Tendencias e Innovaciones. Editorial Popular. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura.

MACHO, M. (2002): "¿Qué es la Topología?", Sigma, nº 20, 63-77.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE (2004). Real Decreto 116/2004, de 23 de enero, por el que se desarrolla la ordenación y se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. Boletin oficial del Estado. Madrid.

SANABRIA, E. CONEJERO, J.A. CAMP, S. (2004): "Organización del trabajo en grupo mediante la técnica del puzzle de Aronson", en Actas del 3er Congreso Internacional de "Docencia Universitaria e Innovación". Universitat de Girona. Girona

THIBAUT, E. (2006): "Una geometría de cine", en Del punto a los espacios multidimensionales. MEC Secretaria General de Educación. Madrid.

En Internet:

IMAGING MATHS. Inside de Klein bottle.

http://plus.maths.org/issue26/index.html

MATH WORLD

http://mathworld.wolfram.com/

Sobre la película MOEBIUS

http://www.todocine.com/mov/00216224.htm

TOPOLOGÍA FICCIÓN Divulgamat

http://www.divulgamat.net/weborriak/cultura/Paginas/01082006.asp

suma+ 58
Junio 2008, pp. 49-61

Matemáticas y astronomía en Mesopotamia

En Mesopotamia se desarrollaron las matemáticas desde el inicio de la primera cultura sumeria. Junto a la escritura cuneiforme apareció un sistema de numeración de base sexagesimal. Los escribas del primer Imperio babilónico, además de las operaciones aritméticas elementales, calcularon raíces cuadradas y cúbicas, establecieron relaciones trigonométricas en triángulos rectángulos y resolvieron ecuaciones algebraicas lineales y cuadráticas. En menor proporción consideraron algunos tratamientos geométricos en triángulos, trapecios, circunferencia y círculo.

Mathematics are developped in Mesopotamia from the beginning of the first sumerian culture. Together with the cuneiform writting, a sexagesimal numerals system arised. Apart from basic arithmetic operations, the scribes of the first Babilonical empire knew how to calculate square and cubil roots, discovered trigonometric relations of rectangle triangles, and solved linea and quadratic equations. In a lesser extent they considered some geometric treatments, in triangles, trapezoids, circunferences and circles.

Introducción

La ciencia en las culturas fluviales de Egipto y Mesopotamia estuvo inicialmente relacionada con las tecnologías de uso agrícola y ganadero, e íntimamente unida al comienzo de las respectivas escrituras jeroglífica y cuneiforme (Ordoñez, 2004)[1].

La revolución neolítica tuvo lugar en esta zona del mundo antes que en el resto. Se ha considerado que en el inicio del sexto milenio antes de nuestra era, en Tell-es-Sawan dieron comienzo las sociedades agrarias más antiguas (Maza, 2000)[2]. Se perfeccionaron las herramientas de piedra y se utilizaron hachas y azadas con mangos de madera (Ausejo y Hormigón)[3]. Un milenio más tarde en el poblamiento de El Obeid, cercano a la ciudad de Ur, junto al río Eúfrates comenzaron las técnicas de regadío y los primeros agrupamientos de población en aldeas.

Hacia el año 4000 a.C. aparecieron los primeros signos de civilización, tal como modernamente lo consideramos. Ello ocurrió durante el periodo arcaico de Uruk, ciudad situada al sur de Mesopotamia, ligeramente al norte de Ur (Sanmartín y Serrano, 1998)[4]. En esta etapa todavía protohistórica, se generalizó la ocupación de los valles fluviales, se desarrollaron las ciudades-estados y se inició la división del trabajo. Se conoció la metalurgia del bronce, se comenzó a usar la rueda y se realizaron construcciones con bóvedas en edificios de más de un piso.

Escritura y sistema de numeración

Alrededor del año 3500 a.C. se empezó a perfilar una escritura pictográfica entre los sumerios, en el país de Sumer, como se llamó a esta zona del sur de Mesopotamia (Kramer, 1974)[5]. Poco a poco los signos pictográficos fueron disminuyendo en número, y simplificándose, hasta evolucionar hacia unos signos abstractos, en forma de cuña, realizados sobre tablillas blandas de arcilla, secadas posteriormente en hornos o al fuerte sol de esta región del mundo.

En esta época surgieron también los primeros cálculos matemáticos como medios contables, utilizándose como objetos de medida pequeñas piedras, "bulla" o "calculi", como fueron llamadas (Maza, 2000)[6].

Desde el año 3000 a.C. hasta el 2340 a.C. los sumerios desarrollaron sus principales ciudades-estados: Ur, Kish,

José C. Illana Rubio
Inspección de Educación de Madrid

Lagash,... Esta época se ha llamado paleosumeria, protodinástica o presargónica, (previa a la llegada de los acadios al país de Sumer, pueblo de origen semítico, que compitió con los sumerios por este espacio geográfico) (Oppenheim, 2003)[7]. Durante este periodo se implantó el sistema de numeración sumerio, sistema posicional de base mixta, decimal y sexagesimal (Caratini, 2004)[8], además del comienzo de la escritura fonética.

Figura 1: Tablilla escritura cueniforme

El sistema de numeración sumerio fue acumulando signos cuneiformes verticales hasta el número 9, utilizando un signo cuneiforme horizontal (base decimal) para 10 unidades, uno o más signos cuneiformes horizontales y los correspondientes verticales para expresar los números entre 10 y 59, y posteriormente otro signo cuneiforme vertical para el número 60 (sistema sexagesimal) con un valor posicional según el lugar ocupado por este signo en el conjunto general de la representación del número.

Figura 2: Sistema de numeración sumerio

La característica esencial de la numeración cuneiforme es que la nueva unidad está colocada a la izquierda de las cantidades anteriormente representadas. Se encuentra así el primer caso histórico de utilización de un sistema de numeración posicional, de base 60.

Otra forma gráfica, previa a la escritura cuneiforme, del sistema de numeración sumerio, utilizaba conos y esferas. Un cono pequeño era una unidad, varios conos pequeños representaban hasta 9 unidades. Una esfera pequeña eran 10 unidades. Los 59 primeros números se representaban con una composición de conos y esferas, conformando un sistema numérico todavía decimal, que se transformaba en sexagesimal al representar el número 60 por un cono grande. Un cono grande perforado da imagen al número 600, una esfera grande al 3600, y una esfera grande perforada al número 36000. Con este sistema pictográfico se podían representar ya números muy grandes (figura 3).

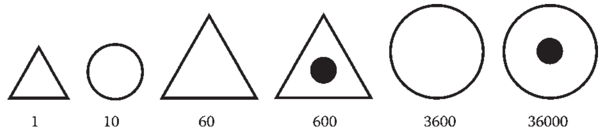


Figura 3: Representación pictórica del sistema arcaico sumerio

El número 118472 se expresaba con 3 esferas grandes perforadas (108000), 2 esferas grandes (7200), 5 conos grandes perforados (3000), 4 conos grandes (240), 3 esferas pequeñas (30) y 2 conos pequeños (2), que hacen el total indicado:

$$108000+7200+3000+240+30+2=118472$$

El sistema sexagesimal mesopotámico, de base 60, facilitaba la subdivisión exacta (fracciones sexagesimales) por dos (30 unidades), tres (20 unidades), cuatro (15 unidades), cinco (12 unidades), seis (10 unidades), doce (5 unidades), quince (4 unidades), veinte (3 unidades), o treinta (2 unidades), además de su idoneidad para las mediciones astronómicas. Todavía se utiliza este sistema para medir ángulos o medir el tiempo, en nuestros días.

En la terminología sumerio-babilónica la sesentena (60) estaba expresada por la palabra "su", la sesentena de sesentena (60^2) por "sac", y unidades mayores (60^3) y (60^4) por "gran sac" y "gran sac intangible" respectivamente (Caratini, 2004)[9].

En nomenclatura moderna algunos números pueden transcribirse de la siguiente manera:

5.8 (significa 5 sesentenas y 8 unidades) =
$5 \cdot 60 + 8 = 308$ unidades
(sistema decimal)

$5.9.2 = 5 \cdot 60^2 + 9 \cdot 60 + 2 =$
$18000 + 540 + 2 = 18542$ unidades
(sistema decimal)

Los acadios. Operaciones aritméticas

Cuando los acadios ocuparon el país de Sumer en el año 2340 a.C. y formaron durante el reinado de Sargón I un gran imperio desde Anatolia, al norte, al Golfo Pérsico, al sur, y desde los Montes Zagros, en la frontera del actual Irán, al este, hasta el mar Mediterráneo, al oeste, asumieron la cultura sumeria, la escritura cuneiforme y el sistema de numeración sexagesimal. La lengua sumeria continuó teniendo funciones científicas y culturales, como nuestro latín en la Europa medieval. Se crearon diccionarios en escritura cuneiforme entre los términos acadios y sumerios, y posteriormente con las otras lenguas de los pueblos que después de invadir el espacio mesopotámico asumieron la cultura sumeria y la escritura cuneiforme.

En esta época se iniciaron las operaciones aritméticas elementales. La adición y la sustración, "a-na" y "bazima", en lengua sumeria (Caratini, 2004)[10]. Se realizaron tal como las actuales operaciones con ángulos o medidas de tiempo:

5.38; 30 + 3.25; 45 = (8. 63; 75) = 9.4; 15
ya que 0;75 = 1; 15 ; 25 + 38 +1 = 64 = 1.4 y 5 + 3 +1 = 9
5.38; 30 - 3.45; 45 = (4.97. 90 – 3.45; 45) = 1.52;45

La multiplicación, "du" en el lenguaje de Mesopotamia, se realizaba con plantemientos similares a las operaciones anteriores. La multiplicación del número 7; 30 por 5 se hacía de la manera siguiente:

7; 30 x 5 = 7 x 5 + 30 x 5 / 60 =
35 + 150 / 60 = 35 + 2; 30 = 37;30

y para multiplicaciones de números más complejos se calculaba de esta forma:

7; 30 x 5; 30 = 7 x 5 + (30 x 5 / 60) +
+ (7 x 30 / 60) + (30 x 30 / 3600)=
=35 + (150 /60) + (210 / 60) + (900 / 3600) =
=35 + 2; 30 + 3; 30 + 0; 15 = 41;15
ya que: 0;30 + 0;30 + 0;15 = 1;15

Los escribas mesopotámicos de los alrededores del segundo milenio antes de nuestra era realizaban estos cálculos con el uso de tablas de multiplicación, del 2 al 20 (sistema sexagesimal), y con tablas complementarias del 30, 40 y 50. De esta manera y con las interpolaciones oportunas se podía hacer cualquier multiplicación incluso de números muy grandes. Transcribimos como ejemplo las tablas (sistema sexagesimal) de 20, 30, 40 y 50 por los primeros números enteros.

20 x 2 = 40	30 x 2 = 60 = 1;00	40 x 2 = 80 = 1;20	50 x 2 = 100 = 1;40
20 x 3 = 60 = 1;00	30 x 3 = 90 = 1;30	40 x 3 = 120 = 2;00	50 x 3 = 150 = 2;30
20 x 4 = 80 = 1;20	30 x 4 = 120 = 2;00	40 x 4 = 160 = 2;40	50 x 4 = 200 = 3;20
20 x 5 = 100 = 1;40	30 x 5 = 150 = 2;30	40 x 5 = 200 = 3;20	50 x 5 = 250 = 4;10
20 x 6 = 120 = 2;00	30 x 6 = 180 = 3;00	40 x 6 = 240 = 4;00	50 x 6 = 300 = 5;00

Tabla 1

La división se realizó siempre como una multiplicación por el inverso del número que actuaba de divisor:

a / b = a · (1 / b)

que se hacía mediante el uso de una tabla de inversos. Transcribimos las tablas de inversos del 2 al 60 con su expresión en fracciones unitarias y sus valores sexagesimales.

1/2 = 0; 30	1/8 = 0; 07.30	1/16 = 0; 03.45	1/27=0; 02.13.20	1/45 = 0; 01.20
1/3 = 0; 20	1/9 = 0; 06.40	1/18 = 0; 03.20	1/30 = 0; 02	1/48 = 0; 01.15
1/4 = 0; 15	1/10 = 0; 06	1/20 = 0; 03	1/32=0; 01.52.30	1/50 = 0; 01.12
1/5 = 0; 12	1/12 = 0; 05	1/24 = 0; 02.30	1/36 = 0; 01.40	1/54=0; 01.06.40
1/6 = 0; 10	1/15 = 0; 04	1/25 = 0; 02.24	1/40 = 0; 01.30	1/60 = 0; 01

Tabla 2

Para dividir el número 17.9 (sistema sexagesimal) por 40, se multiplicaba por 1/40:

17.9 x 1/40 = 17.9 x 0; 01.30 =
17 + 17 x 0; 30 + 9 x 0; 01 + 9 x 0; 00.30 =
17 + 8; 30 + 0; 09 + 0; 04.30 = 25; 43.30[11]

Asiria y Babilonia. Primeros imperios

Las tablas de las operaciones matemáticas básicas se desarrollaron en la última fase del imperio acadio y en la etapa histórica siguiente. La invasión de los "gutti", procedentes de las montañas de Irán, y la de los amorreos, que ocuparon Babilonia, produjo de nuevo la atomización del espacio geográfico mesopotámico en ciudades-estado independientes con el predominio de alguna de ellas. Desde el año 2100 a.C. y por espacio de un siglo tuvo preponderancia la ciudad de Ur, la patria del Abraham bíblico, fundador del pueblo de Israel.

En esta etapa, llamada de Ur III, destacó el rey Ur-Nammu, que promulgó el primer código legislativo de la historia, tres siglos antes que el de Hammurabi. De esta época, la última de predominio del pueblo sumerio, nos ha quedado la leyenda de Utnapischtum sobre la inundación de la región mesopotámica, anterior al diluvio del Noe bíblico, y la Epopeya de Gilgamesh, héroe de Uruk, que un siglo antes se había enfrentado a las exigencias territoriales del rey de Kish.

Hacia el año 1900 a.C. Mesopotamia se estructuró políticamente alrededor de la ciudad de Assur, en el norte, cerca de la desembocadura del río Pequeño Zab, afluente del Tigris, donde se estableció el pueblo asirio, y de Babilonia, en el sur, junto al río Eufrates, donde vivían los amorritas (figura 4).

Inicialmente los asirios se expandieron por la zona norte del río Tigris y establecieron relaciones comerciales con Anatolia y Siria, durante el reinado de Shamsi-Adad I (1814-1782 a.C.), etapa conocida como Imperio Asirio Antiguo.

Figura 4. Mapa de Mesopotamia

A la muerte de Shamsi-Adad I, la preponderancia política y militar pasó a Babilonia, con su célebre rey Hammurabi (1792-1750 a.C.). Este monarca fue un buen administrador y legislador. Su famoso Código legislativo fue encontrado grabado en una estela de diorita negra en Susa, capital del reino de Elam, en tierras del actual Irán. Actualmente se encuentra en el Museo del Louvre, de París. El Código reguló la vida social y económica de su tiempo. Hammurabi recopiló también todo el saber científico y literario de sumerios y acadios en numerosas tablillas cuneiformes, que se han encontrado en las excavaciones de Babilonia, lo que ha permitido conocer en buena medida la matemática y la ciencia de este periodo paleobabilónico, o de la antigua Babilonia, para diferenciarlo de la última etapa neobabilónica, en la época de Nabucodonosor II.

Las transacciones comerciales realizadas por asirios y babilonios en este periodo podían ser expresadas mediante ejemplos prácticos como los siguientes, con las correspondientes operaciones matemáticas que fueron transcritas por los escribas en las tablillas cuneiformes encontradas. (se han adaptado los enunciados originales a una terminología moderna).

> Se venden 25 telas al precio de 7 ¼ siclos de plata la pieza. ¿Cuál es el coste total?

Cálculo:

25 x 7 ¼ = 25 x 7+25 x ¼ = 175+25/4 =
175+6 ¼ = 181+¼ = 180 + 1¼ = 3 minas + 1 y ¼ de siclo[12]
(solución expresada en la tablilla)

Las unidades de peso usadas por babilonios y asirios eran las siguientes:

- mina (equivalente a 500 gramos de plata) = 60 gin o siclos

- siclo (equivalente a 500/60 = 8,33 gramos de plata) = 180 se

- se (equivalente a 8,33/180 = 0,046 gramos de plata)

> Calcular el precio en plata de 3 talentos y 37 ½ minas de estaño si cada siclo de plata equivale a 14 ½ siclos de estaño.
> (1 talento = 3600 siclos de estaño)

Cálculo:

3 talentos · 3600 = 10800 siclos de estaño;
37 ½ minas·60 = 2250 siclos de estaño;
10800 + 2250 = 13050 siclos de estaño;
13050 : 14 ½ = 900 siclos de plata;
900 : 60 = 15 minas (solución expresada en la tablilla)

Los asirios del Imperio Antiguo comerciaban con estaño y telas que vendían en Kanesh (Anatolia) a cambio de plata. La situación práctica citada puede representar alguna de estas transacciones comerciales (Liverani, 1995)[13].

Cálculo de raíces cuadradas

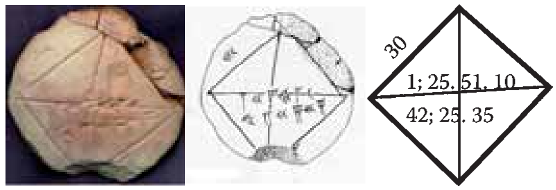


Figura 5. Raíces cuadradas

De la época paleobabilónica se ha encontrado una tablilla cuneiforme (YBC 7289) con el cálculo de raíces cuadradas (Caratini, 2004)[14] y los gráficos e inscripciones de la figura 5. La figura es un cuadrado de 30 milímetros de lado en el que están trazadas las dos diagonales. Encima de la diagonal horizontal está la inscripción 1; 24.51.10 correspondiente al valor sexagesimal de $\sqrt{2}$. Debajo de la diagonal aparece 42; 25.35 correspondiente al valor sexagesimal de $30\sqrt{2}$.

$$1;\ 24.51.10 = 1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 =$$
$$1{+}0{,}40 + 0{,}01416 + 0{,}00004 = 1{,}4142$$
$$30 \text{ x } 1;\ 24.51.10 =$$
$$30 + (30 \text{ x } 24/60) + (30 \text{ x } 51/60^2) + (30 \text{ x } 10/60^3) =$$
$$30 + 12 + 0;\ 25.30 + 0;\ 00.05 = 42{,}25.35$$

tal como aparece en la tablilla.

Los babilonios de la época de Hammurabi calculaban raices cuadradas por métodos aproximativos. Los mismos métodos los emplearon posteriormente Herón de Alejandría, en el siglo I de nuestra era, y Diofanto en el siglo III, casi dos mil años después (Maza, 2000)[15].

El método consiste de forma general en los cálculos siguientes:

$$\sqrt{x} = a \text{ (primera aproximación)} \Rightarrow x = a^2 + e \text{ (error inicial)}$$
$$\sqrt{x} = a + c \text{ (segunda aproximación)} \Rightarrow$$

$$x = (a + c)^2 = a^2 + c^2 + 2ac = a^2 + e´$$
$$\sqrt{x} = \ldots \text{ (tercera aproximación) } \ldots$$
$$e´ = c^2 + 2ac \cong 2ac \quad c <<< a$$

Para el cálculo de la $\sqrt{2}$ el método considerado se puede concretar de la siguiente forma:

$$\sqrt{2}=1;\ x = 1^2 + e \Rightarrow e=2-1=1;\ \sqrt{2} = 1 + c;$$
$$c = e/2a = 1/2 = 0{,}5;\ \sqrt{2} = 1 + 0{,}5 = 1{,}5$$

$$\sqrt{2} = 1{,}5;\ x = 1{,}5^2 + e´ \Rightarrow e´=2-1{,}5^2 = 2-2{,}25= -0{,}25;$$
$$c´= e´/2a = -0{,}25/2= -0{,}125;\ \sqrt{2} = 1{,}5-0{,}125 = 1{,}375$$

$$\sqrt{2}=1{,}375;\ x=1{,}375^2+e´´ \Rightarrow e´´=2-1{,}375^2=2-1{,}890=0{,}110;$$
$$c´´=e´´/2a=0{,}110/2= 0{,}055;\ \sqrt{2} = 1{,}375 + 0{,}055 = 1{,}430$$

$$\sqrt{2}= 1{,}430; \quad x = 1{,}430^2 + e´´´ \Rightarrow$$
$$e´´´= 2-1{,}430^2 = 2-2{,}045 = -0{,}045;$$
$$c´´´= e´´´/2a= -0{,}045/2= -0{,}022;\ \sqrt{2}=1{,}430-0{,}022 = 1{,}408$$

$$\sqrt{2} = 1{,}408;\ x=1{,}408^2 + e^{iv} \Rightarrow$$
$$e^{iv} = 2-1{,}408^2 = 2-1{,}982 = 0{,}018;$$
$$c^{iv} = e^{iv}/2a = 0{,}018/2 = 0{,}009;\ \sqrt{2} = 1{,}408 + 0{,}009 = 1{,}417$$

$$\sqrt{2}= 1{,}417;\ x = 1{,}417^2 + e^{v} \Rightarrow$$
$$e^{v} = 2-1{,}417^2 = 2-2{,}007 = -0{,}008;$$
$$c^{V} = e^{V}/2a = -0{,}008/2 = -0{,}004;\ \sqrt{2} = 1{,}417 - 0{,}004 = 1{,}413$$

$$\sqrt{2}= 1{,}413; \quad x = 1{,}413^2 + e^{vi} \Rightarrow$$
$$e^{vi} = 2-1{,}413^2 = 2-1{,}996 = 0{,}004;$$
$$c^{vi} = e^{vi}/2a = 0{,}004/2 = 0{,}002;\ \sqrt{2} = 1{,}413 + 0{,}002 = 1{,}415$$

Los valores obtenidos por aproximación van alternando con defecto o exceso el valor actual 1,4142... También se obtuvieron de forma similar raíces cúbicas.

Relaciones trigonométricas

Los escribas babilonios conocían las relaciones entre los catetos y la hipotenusa en los triángulos rectángulos varios siglos antes que fueran consideradas por los matemáticos pitagóricos griegos. Se han encontrado un conjunto de relaciones numéricas de estas características en la tablilla Plimpton 322 (figura 6) de la colección de la Universidad de Columbia (Neugebauer, 1957)[16] (Eves, 1964)[17]. Además de una incipiente teoría numérica puede apreciarse el inicio de una cierta prototrigonometría.

Figura 6: Tablilla Plimpton 322

La tablilla presenta cuatro columnas de números en quince filas horizontales, de las que se transcriben las cinco primeras:

Tabla 3

1; 59.0.15	1,59	2,49	1
1;56.56.58.14.50.6.15	56,7	1,20.25	2
1;55.7.41.15.33.45	1,16.41	1,50.49	3
1;53.10.29.32.52.16	3,31.49	5,9.1	4
1;48.54.1.40	1,5	1,37	5

La columna de la izquierda se ha asociado a valores de la $sec^2(A)$ variando desde A=45º hasta A = 31º con intervalos de 1º. Puede apreciarse que:

$$sec245º = 1{,}9834028 = 1;\ 59.0.15$$

También se ha considerado que el primer valor de la columna de la izquierda representa la relación c^2/b^2 para un triángulo rectángulo de lados: a=119; b=120 y c=169. Puede comprobarse que para estos lados:

$$c^2/b^2 = 1692/1202 = 28561/14400 = 1{,}9834028 = 1;59.0.15$$

Las ternas pitagóricas expresadas en la tablilla Plimpton 322 cumplen las condiciones de que los lados a, b y c de los triángulos rectángulos puedan representarse por:

$$a = p^2 - q^2 \qquad b = 2pq \qquad c = p^2 + q^2$$

siendo p y q números enteros sexagesimales que cumplan que: $p > q$ y $p<60$ (Boyer, 1986)[18].

Ecuaciones lineales algebraicas

Los escribas mesopotámicos iniciaron el álgebra y la geometría durante la época del primer imperio babilónico. Se han encontrado tablillas con escritura cuneiforme que tienen la resolución de ecuaciones lineales en ejemplos concretos. Pueden suponerse que eran ejercicios escolares utilizados en la formación de los numerosos escribas que precisaba la administración y la sociedad babilónica para sus transacciones comerciales.

Los ejemplos que han llegado hasta nosotros representan aplicaciones prácticas de préstamos, intereses y repartos proporcionales usados en los repartos de herencias entre varios herederos. También se han encontrado tablillas con cálculos geométricos de medidas de rectángulos (tablillas YBC 5037/ YBC 4657/ YBC 4662 y 4663/ YBC 8558), de problemas de irrigación de campos y almacenaje de agua en cisternas y canales de secciones rectangulares o trapezoidales (tablillas YBC 4666/ YBC 7164/ YBC 8594), o de áreas y volúmenes de ladrillos de arcillas o de las dimensiones de las propias tablillas de escritura cuneiforme (tablilla YBC 4607).

La mayor parte de estas tablillas han sido catalogadas por Otto Neugebauer, matemático y arqueólogo alemán (Neugebauer, 1935-37)[19] (Neugebauer y Sachs, 1945)[20] entre las obtenidas en el yacimiento arqueológico de Nipur, donde han aparecido más de 50000 tablillas. La mayoría de ellas se encuentran actualmente en las bibliotecas de las Universidades americanas de Columbia, Pensilvania o Yale. Una de estas tablillas (YBC 4652) tiene ejemplos de problemas algebraicos sobre el peso de piedras, resueltos mediante ecuaciones de primer grado. En ella se plantean enunciados y soluciones, y en algunos casos métodos de cálculo. Pertenece a la época de Hammurabi y está escrita en lengua sumeria. Entre los enunciados más habituales, adaptados a un lenguaje moderno, podemos destacar los siguientes:

> Tengo una piedra, de la que no sé su peso. La añado 1/7 de su peso, y después 1/11 del resultado. Este peso final es una mina. ¿Cuál es el peso de la piedra?

La tablilla da la solución 2/3 de mina, 8 gin, y 22 1/2 se. El planteamiento actual de resolución podría suponerse así:

x + x/7+ (1/11) (x + x/7) = 1 mina = 60 gin;
x + x/7+ (1/11) (x + x/7) = 60
12 (x + x/7) /11 = 60; x + x/7 = 55; x = 55 · 7 = 385; x = 48,125*
x = 40 + 8 + 0,125 = 2/3 de mina, 8 gin y 22 y 1/2 se.
* (0,125 ·180=22,5)

> Tengo una piedra, de la que no sé su peso. Le resto a su peso una sexta parte y añado una tercera parte de una octava parte de todo lo anterior. Si peso el conjunto es una mina. ¿Cuál es el peso de la piedra?

La solución propuesta es 1 mina, 9 gin, 21 ½ se y además 1/10 de se. El planteamiento de resolución sería:

(x – x/6) + (1/3) (1/8) · (x – x/6) = 1 mina = 60 gin;
(x – x/6) + (x – x/6)/24 = 60
25(x – x/6)/24=60; 25x – 25x/6=24· 60=1440;
150x – 25x=8640; 125x=8640
x = 8640:125 = 69,12 gin = 60 + 9 + 0,12 =
1 mina + 9 gin + 21 ½ se + 1/10 de se 0,12 gin =
0,12 · 180 = 21,6 se = 21,5 + 0,1 = 21 ½ se + 1/10 se

Cálculos geométricos. Triángulos y trapecios

La geometría mesopotámica estuvo menos desarrollada que el cálculo aritmético y algebraico. Las figuras geométricas interesaron a los escribas asirios y babilonios en tanto en cuanto tenían un sentido utilitario (superficie de tierras, volúmenes de agua,...), o podían ser consideradas como un problema algebraico. Otra característica de la geometría mesopotámica es el estilo aproximativo, y no siempre necesariamente exacto de sus cálculos. Se utilizaron por ello métodos de agrimensura para obtener el valor de las superficies de figuras geométricas (trapecios, cuadriláteros irregulares, triángulos, polígonos o círculos).

La expresión del área de un trapecio:

A = (b + c) a/2

se puede generalizar, según las consideraciones aproximativas anteriores, a un cuadrilátero irregular (trapezoide, figura 7), como:

A = ((b + c)/2) · ((a + d)/2) (Maza, 2000)[21]

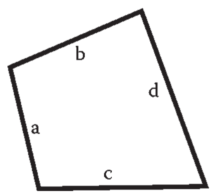


Figura 7: Cuadrilátero irregular

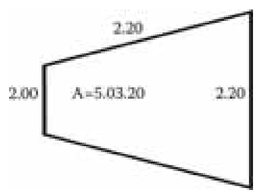


Figura 8: Trapecio isósceles

Se han encontrado las tablillas YBC 7290 e YBC 11126 sobre figuras trapezoidales (Caratini, 2004)[22]. En una de ellas se representa un trapecio isósceles cuyos lados valen (sistema sexagesimal):

base pequeña: 2.00 base grande: 2.20
lados laterales: 2.20 (figura 8)

En forma aproximada, mediante la expresión anterior, su superficie sería:

A = ((2.20 + 2)/2) · ((2.20 + 2.20)/2) = 2.10 · 2.20 =
4 + 0.20 + 0.40 + 200/360= 5 + 0.03.20 = 5.03.20

tal como aparecía en la tablilla.

Ejemplos concretos de problemas sobre la geometría de triángulos (sag-du en lengua sumeria) han sido encontrados en 15 tablillas de las catalogadas por Otto Neugebauer. En una de ellas (tablilla MLC 1950) se describe el cálculo de las bases AC y DE de dos triángulos rectángulos semejantes (figura 9).

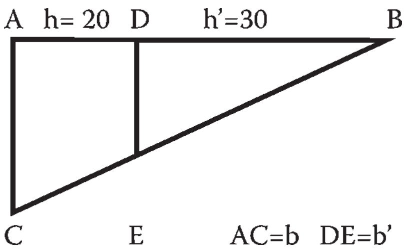


Figura 9: Triángulos rectangulos

La solución actual se plantearía como un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, una de ellas entre ambos triángulos semejantes, y la otra con las dos bases AC y DE del trapecio formado, y el área de ese trapecio, de la forma siguiente:

semejanza de triángulos:

$$h'/DE=(h + h')/AC;\ 30/DE=(20 + 30)/AC;\ 30AC=50DE;$$
$$30b = 50b';\ b' = 30b/50$$

área del trapecio:

$$(b + b') \cdot h/2 = A;\ (b + b') \cdot 20/2 = 320;\ b + b' = 320 \cdot 2/20 =$$
$$32;\ b + b' = 32$$

solución del sistema de ecuaciones:

$$b + (30b/50) = 32;\ 50b + 30b = 32 \cdot 50 = 1600;\ 80b = 1600;$$
$$b = 1600/80 = 20$$
$$20 + b' = 32;\ b' = 32 - 20 = 12$$

En la tablilla mesopotámica se propone como método de resolución lo siguiente:

	Descripción del proceso	Notación sexagesimal	Notación decimal
1º	Toma el inverso de 20	0;03	0,05
2º	Multiplica este inverso por el área del trapecio	0;03·5.20=0.15+0;60= 0.16	320·0,05=16
3º	Añade 60 (h'·2) a 20	80	1.20
4º	Toma el inverso de 80 y multiplícalo por 320	1/80=0; 00.45; 0; 00.45 · 5.20= 3.45 + 0.15 = 4	320/80=4
5º	Añade 4 a16	20	20
	Resta 4 a 16	12	12

Circunferencia y círculo. Número π

En tablillas catalogadas como YBC 7302 e YBC 11120 se plantean relaciones entre el área del círculo y la longitud de su circunferencia representados en la figura 10 (Caratini, 2004)[23]. Dados 14 valores de longitud de la circunferencia y los 14 valores correspondientes a las áreas de los respectivos círculos que aparecen en las tablillas, puede determinarse que:

$$A = c^2/12 = 9.00/12 = 540/12 = 45$$

tal como aparece en la figura 10.

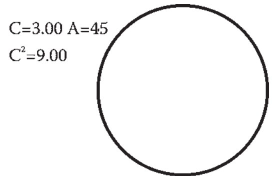


Figura 10: Área del círculo y longitud de la circunferencia

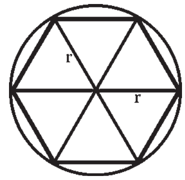


Figura 11: Circunferncia circunscrita y perímetro del hexágono

De la expresión anterior y con los conocimientos actuales puede deducirse que: $\pi = 3$ valor aproximado utilizado por los babilonios en los primeros tiempos.

Posteriormente en otra tablilla encontrada en Susa (Maza, 2000)[24]. se ha consignado un valor de $\pi = 3\ 1/8 = 3{,}125$ (notación decimal).

En ella se relaciona el perímetro de un hexágono regular y la circunferencia circunscrita (figura 11) y se da el valor:
0; 57.36.

$$\text{Perímetro} = 6\ r \qquad c = 2\ \pi\ r$$

$$6\ r / 2\ \pi\ r = 0;\ 57.36; \qquad 6 / 2\ \pi = 0;57.36;$$
$$\pi = 3 / 0;\ 57.36 = 3 \cdot (1/0;\ 57.36) = 3 \cdot (1/0{,}96) = 3{,}125$$
0; 57.36 = 57/60 + 36/3600 = 0,95 + 0,01= 0,96 (notación decimal)

Ciencia y astronomía en el imperio babilónico antiguo

Además de las matemáticas los babilonios destacaron en la organización de la medicina, y la implantación de unas técnicas curativas, que aunque no siempre alejadas de procedimientos mágicos utilizaron plantas y brebajes diversos para el tratamiento de patologías de la piel, el estómago, el resto del aparato digestivo y las vías urinarias. Se han encontrado tablillas cuneiformes en que se describen los síntomas de algunas enfermedades habituales y una relación de diagnósticos y pronósticos sobre su evolución. A nivel farmacológico en Babilonia se usaban pomadas, cataplasmas, inhalaciones, supositorios, e incluso inyecciones de líquidos, sobre todo en las vías urinarias. También se realizaron estudios anatómicos y fisiológicos de alguna relevancia. Es digno de citar las descripciones del hígado, incluso sus representaciones en maquetas tridimensionales realizadas como modelos escolares para iniciar en el arte adivinatorio a futuros augures (Ordoñez, 2004)[25].

La astronomía fue otro de los conocimientos científicos, que aunque también relacionado con fines predictivos de acontecimientos venideros, y poco diferenciada de la astrología, permitió a estos mesopotámicos tener un conocimiento detallado de los movimientos del Sol, la Luna, planetas y cometas, y posiciones de las estrellas y de los ciclos lunares.

Hacia el año 1700 a. C. se estableció un calendario de 12 meses de 30 días, en función de los movimientos del Sol y de la Luna. El día se dividió en 24 horas. Este calendario estuvo vigente hasta el año 500 a. C. Para evitar los errores producidos por estos años de 360 días se añadía otro mes de 30 días cada seis años. Se conseguía así una situación similar a la actual con los años de 365 días.

Hacia el año 1700 a. C. se estableció un calendario de 12 meses de 30 días, en función de los movimientos del Sol y de la Luna. El día se dividió en 24 horas.

Del periodo acadio y del renacimiento sumerio (época de Ur III) se han encontrado representaciones en “cilindros sellos” de constelaciones estelares (Aguila, Acuario, Tauro, Leo,...). Ya en la época babilónica, en la “Oración a los dioses de la noche” aparecen los nombres de más de 17 estrellas (*mul-mul* en lengua sumeria). Entre las constelaciones conocidas por los mesopotámicos pueden citarse: *Margidda* (Osa Mayor), *Girtab* (Escorpión), *Ti* (Aguila), *Guanna* (Tauro), *Iku* (Pegaso), *Urgula* (Leo), *Gula* (Acuario), *Pabilsag* (Sagitario), *Luz* (Lira), *Absin* (Virgo) o *Allul* (el Cangrejo/Cáncer) (Marín Arcones) [26].

Fin del imperio babilónico antiguo

El imperio babilonio antiguo, heredero de los días prósperos de Hammurabi, fue declinando hasta la invasión de la ciudad por los hititas en el año 1595 a.C., durante el reinado de Murshilis I.

Los hititas fueron en esta época (1550 a 1250 a. C.), con Egipto y Asiria, la tercera potencia política del espacio mesopotámico. Si bien su localización fundamental fue Anatolia y su lengua y raza indoeuropeas. Eran procedentes de las montañas del Cáucaso y en la época de mayor apogeo ocuparon Siria y Palestina. Se enfrentaron con éxito al reino hurrita de Mittani y posteriormente a los egipcios del Imperio Nuevo en el año 1296 a. C. (batalla de Qadesh contra Ramses II).

Los hititas adoptaron la escritura cuneiforme y en ella escribieron la historia de sus guerras, relaciones y tratados políticos. Se han encontrado en los alrededores de su capital, Hattusas, en Anatolia, y en Tell-el-Amarna, Egipto, tablillas cuneiformes que describen su enfrentamiento con los egipcios (Ceram, 1985)[27]. Los hititas desarrollaron como los babilonios la astronomía y la astrología, fundamentalmente por su carácter adivinatorio de acontecimientos futuros, preocupación generalizada de los pueblos de la antigüedad.

Tras la invasión de Babilonia por los hititas, ocuparon esta ciudad los cassitas (1530 a 1160 a.C.), pueblo procedente de las montañas de Irán. Los cassitas asimilaron la cultura mesopotámica antigua de la ciudad formando el llamado periodo medio de Babilonia. En esta época se desarrolló la escritura cuneiforme alfabética (1400 a 1300 a.C.) y se potenció grandemente la astronomía durante el reinado de Nabucodonosor I (1124-1103 a.C.). Los sacerdotes y los escribas babilonios realizaron más de siete mil observaciones astronómicas, consistentes en salidas y ocasos de estrellas, conjunciones planetarias y fenómenos meteorológicos, que registraron en setenta tablillas encontradas en las excavaciones de la biblioteca de Nínive.

Anteriormente las llamadas “Tablas de Venus”, del final de la época paleobabilónica, contenían los registros de salidas y puestas del segundo planeta del Sistema Solar, y de varios eclipses de sol. De este periodo se conservan representaciones clásicas de algunas de las constelaciones conocidas por los mesopotámicos, en estelas, *kudurrus*, que refrendaban operaciones comerciales o donaciones de terrenos o inmuebles, por herencias entre padres e hijos (Marín Arcones)[28]. Las constelaciones zodiacales Tauro, Leo, Escorpio, Sagitario, Capricornio y Acuario, quedaron determinadas en este periodo.

Desde 1365 a.C. se inició la política expansionista de Asiria, etapa conocida como Imperio Asirio Medio, en coexistencia con los hititas y los cassitas de Babilonia. En 1235 a.C. el rey asirio Tikulti-Ninurta I ocupó Babilonia, quedando esta ciudad en una posición política debilitada en el escenario mesopotámico durante el resto del milenio.

Durante el siglo XIV antes de nuestra era, en la ciudad siria de Ugarit se desarrolló la escritura fonética y el primer alfabeto cuneiforme compuesto de treinta signos. Posteriormente, en el siglo XII, los fenicios crearon otro alfabeto de base consonante, más simplificado. En esta época se estructuraron los astrolabios, listas de estrellas que asignaban tres astros a cada mes del año, uno por cada región del cielo, lo que atestigua el gran conocimiento astronómico del mundo mesopotámico.

Hacia el año 1200 a.C. los Pueblos del Mar, de procedencia aquea (griega) invadieron Hattusas y acabaron con el Imperio Hitita. En 1190 a.C. fueron derrotados en Egipto por Ramses III, después de asolar Siria y Palestina. En 1050 a.C. los arameos invadieron Asiria, aunque poco después (año 1000 a.C.) quedaron supeditados al poder del reino israelita de David y Salomón. Sin embargo la lengua aramea, de estructura lingüística más sencilla, sustituyó desde esta época a la lengua sumeria y acadia en el espacio cultural del mundo mesopotámico. Todas estas alteraciones políticas y sociales se han conocido como "la crisis final del Bronce", coincidiendo con el final del segundo milenio antes de nuestra era (Roux, 1987)[29].

Imperio neoasirio

Durante el principio del primer milenio mesopotámico Asiria ejerció la preponderancia política y militar sobre los demás estados, estableciendo el Imperio Neoasirio, que ocupó toda Mesopotamia, Siria y Palestina, especialmente durante los reyes de la dinastía sargónida: Assurnasirpal II, Tiglat- Piliser III, Salmanasar V y Sargón II. Senaquerib destruyó Jerusalén en 701 a.C. y Babilonia en 689 a.C. Assurbanipal conquistó Egipto y destruyó la ciudad de Tebas en el año 669 a.C. Los ejércitos asirios asolaron todo lo que encontraron a su paso durante más de un siglo hasta que una coalición de medos y babilonios destruyó definitivamente Nínive, la capital asiria, en el año 612 a.C.

Además de la actuación bélica los asirios también desarrollaron una gran actividad diplomática y una política cultural de primer orden. La biblioteca de Assurbanipal proporcionó más de 20000 tablillas cuneiformes que contenían todo el conocimiento literario y científico de la época (Roux, 1987)[30]. Los astrónomos neoasirios continuaron las observaciones celestes de sumerios, acadios y babilonios. Denominaron estaciones de Marduk (Júpiter) a los equinocios, y camino del dios An, al ecuador celeste. Redactaron las tablillas astronómicas llamadas *mul-apin*, que catalogaban más de setenta estrellas por diversos criterios (salida y puesta/cenit y horizonte) y determinaron las constelaciones del "camino de la Luna" (Zodiaco) (Marín Arcones)[31]. Describieron los movimientos de los planetas y sus diversos ciclos y establecieron periodicidades en los eclipses de sol (observación del ocurrido el 15 de junio del año 763 a.C.) y de luna (eclipse observado en Nínive el 19 de marzo del año 721 a.C.). También se han encontrado calendarios estelares y astrolabios de este periodo, así como el planisferio del siglo VII a.C. con las constelaciones visibles desde la ciudad de Nínive, durante el reinado de Assurbanipal (668 a 626 a.C.), que actualmente está en el "British Museum".

Imperio neobabilónico

Después de la destrucción de Nínive y la anexión de los territorios asirios Babilonia lideró otra vez el espacio mesopotámico, floreciendo el Imperio Neobabilónico. Nabopolasar, antiguo gobernador de la ciudad en la etapa asiria instauró la dinastía caldea. Su hijo Nabucodonosor II (605 a 562 a.C.) derrotó a los egipcios en Karkemish, invadió Israel y destruyó Jerusalén en el año 587 a.C. deportando a los judíos a Babilonia. El Imperio Neobabilónico ocupó toda Mesopotamia, Siria y Palestina.

La característica más importante de esta etapa histórica fue la magnificencia de la capital del Imperio, la ciudad de Babilonia, la urbe más grande y lujosa de todo el Oriente próximo en las referencias de los cronistas de la época. Herodoto visitó la ciudad en el siglo V a.C. y su relato sirvió para su conocimiento por el emergente mundo griego hasta su conquista por Alejandro Magno en el año 331 a.C.

> *La biblioteca de Assurbanipal proporcionó más de 20000 tablillas cuneiformes que contenían todo el conocimiento literario y científico de la época.*

Los Jardines Colgantes fueron construidos por Nabucodonosor II en el año 580 a.C. en una de las alas de su palacio. Junto a ellos discurría la Vía Procesional, gran avenida de más de un kilómetro de longitud que partía la ciudad en dirección norte-sur. En uno de los patios del palacio estaba el imponente "Zigurat", que la Biblia llamó la "Torre de Babel". Las murallas exteriores de la ciudad tenían un millar de torres defensivas y más de 18 kilómetros de perímetro total, con una calzada en lo alto que permitía el paso de un carro de guerra con cuatro caballos (cuadriga).

En el siglo XIX d.C. el arqueólogo alemán Robert Koldewey excavó sistemáticamente la ciudad de Babilonia durante 18 años, en la zona del barrio residencial de Merkes, cercano al palacio de Nabucodonosor II. Además de la estructura de la ciudad en el periodo neobabilónico (612 a 539 a.C.) Koldewey encontró millares de tablillas cuneiformes de esta época, con observaciones astronómicas realizadas desde el *Etemenanki* (Zigurat) (Champdor, 1985)[32].

El Zodiaco, "camino de la Luna" tenía 18 constelaciones. Durante el reinado de Nabucodonosor II se redujeron a 12 para igualarlas al número de meses del año (lunaciones), siendo similares a las actuales con las excepciones de las Pléyades por Tauro y Orión por Géminis. De esta época son los textos "Ziqpu" sobre las estrellas del meridiano del observador, o el texto "Gu" (cuerda) aparecido en la tablilla catalogada como BM 78161 perteneciente al "British Museum", que detalla las diferentes estrellas que componen las constelaciones y su forma en el cielo.

El Zodiaco, "camino de la Luna" tenía 18 constelaciones. Durante el reinado de Nabucodonosor II se redujeron a 12 para igualarlas al número de meses del año (lunaciones), siendo similares a las actuales con las excepciones de las Pléyades por Tauro y Orión por Géminis.

La astronomía mesopotámica influyó directamente en la mitología y la astronomía griega. Las relaciones entre las constelaciones citadas por Hiparco son similares a las del texto "Gu". Las referencias astrales citadas por Homero tienen relación con las tablas "mul-apin" de la época neoasiria. La influencia de la astronomía mesopotámica llegó a la India (nakshatras) y a los árabes (Marín Arcones)[33].

Renacimiento algebraico en Babilonia

En el Imperio Neobabilónico se produjo un renacimiento del álgebra. Aunque ya se habían desarrollado en el periodo antiguo las ecuaciones cuadráticas y cúbicas, es en esta etapa histórica cuando se afianza la resolución de problemas del estilo siguiente:

> Hallar el lado de un cuadrado si su área menos el lado es igual a 14.30 (valor sexagesimal)

Neugebauer ha catalogado en la década de 1930 tablillas cuneiformes con soluciones de problemas de este tipo de la forma siguiente:

1º Toma la mitad de 1. Igual a 0; 30 (valor sexagesimal)

2º Multiplica 0; 30 por 0; 30. Corresponde a 0; 15 (valor sexagesimal)

3º Suma 0; 15 a 14.30: 14.30 + 0; 15 = 14.30; 15 (valor sexagesimal)

4º 14.30; 15 es el cuadrado de 29; 30:
29; 30 · 29; 30 = 29 · 29 + 29 · 0; 30 + 29 · 0; 30 + 0; 30 · 0; 30 = 4.01 + 14; 30 + 14; 30 + 0; 15 = 14.30; 15 (valor sexagesimal)

5º Suma 0; 30 a 29; 30 y se obtiene 30 que es el valor del lado del cuadrado.

Actualmente el planteamiento del problema sería el siguiente:

$$x^2 - x = 870 \text{ (valor decimal de 14.30)};$$
$$x^2 - x - 870 = 0,\ \ x = (1 \pm \sqrt{1 + 3480})/2 = \begin{array}{l} \nearrow 30 \\ \searrow -29 \end{array}$$

La mayoría de estas ecuaciones cuadráticas son del tipo:

$$x^2 \pm bx = c, \text{ siendo } b > 0 \ \text{ y } \ c > 0.$$

Un ejemplo que cumple estas condiciones sería el siguiente:

> La longitud de un rectángulo excede a su anchura en 7 unidades, y su área es 1.00 (valor sexagesimal). Hallar su longitud y su anchura.

Los babilonios lo plantearon de la siguiente manera:

1º La diferencia 7 divídase por 2. Resultado 3; 30 (valor sexagesimal).

2º Multiplica 3; 30 por si mismo:
3; 30 · 3; 30 = 9 + 1; 30 + 1; 30 + 0; 15 = 12; 15.

3º Añade 1.00 a 12; 15. Resultado 1.12; 15.

4º Halla la raíz cuadrada de 1.12; 15. Resultado 8; 30:
8; 30 · 8; 30 = 64 + 4 + 4 + 0; 15 = 1.12; 15.

5º Suma 3; 30 a 8; 30. Resultado 12. Resta 3; 30 a 8; 30. Resultado 5.

Son los valores de la longitud = 12, y de la anchura = 5.

La ecuación propuesta en la actualidad sería:

$$x \text{ (anchura)} \cdot (x+7) \text{ (longitud)} = 60;$$

$$x^2 + 7x = 60;\ \ x^2 + 7x - 60 = 0;$$
$$x = (-7 \pm \sqrt{49 + 240})/2 = (-7 \pm \sqrt{289})/2 =$$
$$(-7 \pm 17)/2 = \begin{array}{l} \nearrow 5 \\ \searrow -12 \end{array} \quad \text{anchura} = 5; \quad \text{longitud} = x + 7 = 12$$

Otros ejemplos en que se hallan dos números x e y, dada su suma: $x + y$ o su diferencia $x - y$ y su producto $x \cdot y$ fueron habituales en la matemática babilónica. En una tablilla cuneiforme, actualmente en la Universidad de Yale (Boyer, 1986)[34] se plantea resolver un sistema de ecuaciones cuadráticas con los datos:

$x + y = 6; 30$ $\qquad x \cdot y = 7; 30$ (valores sexagesimales)

Thureau-Dangin, asiriólogo francés, planteó un problema similar a los anteriores (Thureau-Dangin)[35], expresado de la manera siguiente:

> He sumado siete veces el lado de mi cuadrado y once veces su superficie. Me ha dado 6,25. ¿Cuánto vale el lado?

Para su solución se dan estas indicaciones:

1ª Inscribirás 7 y 11.

2ª Multiplicarás 11 por 6,25. Resultado 68,75.

3ª Fraccionarás 7 por 2. Resultado 3,5.

4ª Elevarás 3,5 al cuadrado. Resultado 12,25.

5ª Añadirás este resultado a 68,75. Ello da 81, que es el cuadrado de 9.

6ª Restarás 3,5 a 9. Resultado 5,5.

7ª Multiplicaras 5,5 por el inverso de 11. Resultado 0,5, que es el valor del lado del cuadrado.

La solución actual a este problema sería la siguiente:

Lado del cuadrado = x; Superficie del cuadrado = x^2;

Ecuación: $11x^2 + 7x = 6,25$;

$11x^2 + 7x - 6,25 = 0$; $\quad a = 11 \quad b = 7 \quad c = -6,25$

$\Delta = b^2 - 4ac = 49 - ((4\cdot 11\cdot (-6,25)) = 49 + 275 = 324$;
$\sqrt{324} = 18$;

$$x = (-7 \pm 18)/22 = \begin{cases} 11/22 = 0,5 \\ -25/22 \end{cases}$$

La relación entre la resolución mesopotámica y el planteamiento actual puede considerarse de la siguiente manera:

	Forma mesopotámica	Forma actual
1º	Inscribirás 7 y 11	$a = 11, \quad b = 7$.
2º	Multiplicarás 11 por 6,25	$a \cdot c = 11 \cdot 6,25 = 68,75$.
3º	Fraccionarás 7 por 2	$b/2 = 7/2 = 3,5$.
4º	Elevarás 3,5 al cuadrado	$(b/2)^2 = b^2/4 = 3,5^2 = 12,25$.
5º	Añadirás este resultado a 68,75 Resultado 81. Es el cuadrado de 9	$(b^2/4) - a\cdot c = (b^2 - 4ac)/4 = 12,25 + 68,75 = 81$. $\sqrt{b^2 - 4ac}/2 = \sqrt{81} = 9$.
6º	Restarás 3,5 a 9	$-(b/2)+ \sqrt{b^2 - 4ac}/2 = -3,5+9 = 5,5$.
7º	Multiplicaras 5,5 por el inverso de 11	$5,5 = 11x$; $x = 5,5/11 = 0,5$

Las ecuaciones cúbicas más sencillas estarían expresadas de la forma siguiente:

$x^3 = 0; 07.30$ $\qquad x^3 = a$

en que 0; 07.30 es un número en el sistema sexagesimal y a representa un valor general.

Los escribas mesopotámicos las resolvían con tablas de cubos o raíces cúbicas. En el caso indicado la solución es: $x = 0; 30$ (valor sexagesimal). En el sistema decimal la ecuación anterior estaría representada por: $x^3 = 0,125 \quad x = 0,5$

Cuando los valores no estaban en las tablas se realizaba una interpolación lineal, ligeramente aproximada:

$$x^3 = 0,15 \quad 0,6 > x > 0,5$$
$$0,5^3 = 0,125;\ 0,6^3 = 0,216;\ 0,216 > 0,15 > 0,125$$
$$0,216 - 0,125 = 0,091;\ 0,15 - 0,125 = 0,025;$$
$$0,025/0,091 = m/0,1;\ m = 0,027$$
$$x = 0,5 + 0,027 = 0.527$$

Ecuaciones cúbicas mixtas, del tipo: $x^3 + x^2 = a$ también podían resolverse por interpolación en tablas: $n^3 + n^2$ existentes para valores de n entre 1 y 30.

$$x^3 + x^2 = 4,12; \quad \text{para } n = 1, \ n^3 + n^2 = 1 + 1 = 2;$$
$$\text{para } n = 2, \ n^3 + n^2 = 8 + 4 = 12$$

$$12 - 2 = 10;\ 4,12 - 2 = 2,12;\ 2 - 1 = 1;\ 2,12/10 = m/1;$$
$$m = 0,212 \quad x = 1 + 0,212 = 1,212$$

Las ecuaciones de cuarto grado del tipo: $ax^4 + bx^2 = c$ fueron también consideradas por los escribas babilónicos como ecuaciones cuadráticas en:

$ay^2 + by = c$ $\quad$ suponiendo $\quad x^2 = y$

Últimos tiempos

La ciudad de Babilonia fue conquistada por los persas de Ciro II el Grande en el año 539 a. C. y toda Mesopotamia quedó integrada en el Imperio Persa durante doscientos años, hasta la conquista de Alejandro Magno en el año 331 a. C. Después de la muerte de Alejandro, Babilonia fue regida por la dinastía seléucida, iniciada por Seleuco, uno de los generales de Alejandro Magno. La cultura mesopotámica se fue diluyendo poco a poco en el helenismo dominante. La última inscripción cuneiforme conocida data del año 75 d. C. ■

NOTAS

1 Así lo considera Javier Ordoñez, profesor de Filosofía e Historia de la Ciencia. (Ordoñez, 2004, pp 27).

2 Aunque hay dataciones ligeramente diferentes sobre el inicio del Neolítico nos remitimos a la que cita Carlos Maza en "Las Matemáticas de la antigüedad y su contexto histórico". (Maza, 2000, pp 17).

3 Elena Ausejo y Mariano Hormigón, plantean una cronología sobre los perfeccionamientos tecnológicos producidos con la revolución neolítica: http//www.oei.es/selectisi/historia1.htm.

4 Aprecian los profesores Sanmartin y Serrano en "Historia antigua del próximo oriente" que signos incipientes de civilización pueden observarse durante el periodo arcaico de Uruk, en el sur de Mesopotamia. (Sanmartin y Serrano, 1998, pp 20).

5 La historia empieza con la inicial escritura pictográfica en el país de los sumerios (Kramer, 1974).

6 Op. cit. (Maza, 2000, pp 24).

7 En "La antigua Mesopotamia. Retrato de una civilización extinguida", se describe el inicio de las ciudades-estado en el país de los sumerios, antes de la llegada de los acadios, y del posterior imperio sargónido. (Oppenheim, 2003, pp 22).

8 El sistema de numeración sumerio está tratado por Roger Caratini en "Los matemáticos de Babilonia" como un sistema de numeración posicional sexagesimal (base 60) análogo a nuestro sistema decimal (base 10) expresado con signos cuneiformes. (Caratini, 2004, pp 91-92).

9 Op. cit. (Caratini, 2004, pp 90).

10 Op. cit. (Caratini, 2004, pp 190-193).

11 El número 17.9 corresponde en sistema decimal a 1029. El resultado de la división 25;43.30 corresponde al número decimal 25,725. Puede comprobarse que ese es el resultado de la división 1029/40.

12 En esta época no existía el uso monetario en la mayoría de las transacciones comerciales. Se utilizaban en el cambio cantidades de algún metal (estaño, plata, oro).

13 Mario Liverani ha descrito esta situación en "El antiguo oriente. Historia, sociedad y economía" con ejemplos similares a los citados, durante el primer Imperio asirio, antes del apogeo de Babilonia con Hammurabi. (Liverani, 1995, pp 289).

14 El tratamiento de las raices cuadradas y de la geometría puede verse en el libro de Roger Caratini. Op. cit. pp 162-163.

15 Según Carlos Maza. Op. cit. pp 44.

16 Una descripción más completa puede verse en el libro de Otto Neugebauer "The Exact Sciences in Antiquity". (Neugebauer, 1957, pp 36-40).

17 También realiza un estudio de la tablilla Plimpton 322 Howard Eves en "An Introduction to the History of Mathematics". (Eves, 1964, pp 35-37).

18 Analizado por Carl B. Boyer en "Historia de la matemática", donde considera la relación de los valores expresados en las columnas de la tablilla Plimpton 322 con los de la secante al cuadrado de ángulos entre 45º y 31º. (Boyer, 1986, pp 58-62)

19 Textos matemáticos originales de la primera versión alemana de Otto Neugebauer: Mathematische Keilschift Texte (MKT). (Neugebauer, 1935-37, pp 95 y ss.).

20 Versión inglesa de Neugebauer y Sachs: Mathematical Cuneiform Text (MCT). (Neugebauer y Sachs, 1945, pp 43).

21 Según aproximación dada por Carlos Maza en "Las Matemáticas de la antigüedad y su contexto histórico". Op. cit. pp 61.

22 Roger Caratini cita los casos encontrados sobre figuras trapezoidales en las tablillas catalogadas por Otto Neugebauer en "Los matemáticos de Babilonia". Op. cit. pp 164.

23 Según Roger Caratini. Op. cit. pp 168.

24 Aproximación mayor del valor de π citada por Carlos Maza en "Las Matemáticas de la antigüedad y su contexto histórico".Op. cit. pp 62.

25 Javier Ordoñez en su "Historia de la Ciencia" describe las características de la medicina en la época del Imperio babilónico de Hammurabi. El famoso código legislativo trataba las posibles penas por el uso fraudulento de ésta. Op. cit. pp. 35.

26 Daniel Marín Arcones en "Atlas de constelaciones mesopotámicas" cita las diversas constelaciones conocidas en Mesopotamia durante el imperio babilónico antiguo:

http//www.danielmarin.es/hdc/atlamesop.htm

27 Los hititas, pueblo de lengua indoeuropea, escribieron sus documentos oficiales en tablillas de escritura cuneiforme (Ceram, 1985, pp 91 y ss.).

28 Daniel Marín Arcones en "Astronomía mesopotámica" cita estas estelas como documentos de uso diverso en el ámbito mesopotámico en esta época:

http://www.danielmarin.es/hdc/AAGC%20-%20mitomesop.htm

29 George Roux en "Mesopotamia. Historia política, económica y cultural" describe el tiempo de confusión que se produjo en la península de Anatolia y en Mesopotamia al final del segundo milenio antes de nuestra era (Roux, 1987, pp 291-303).

30 Así lo cita George Roux en el capítulo sobre los escribas de Nínive en el libro "Mesopotamia. Historia política, económica y cultural Op. cit. pp 376-382.

31 Daniel Marín Arcones en "Historia del zodiaco" describe estas constelaciones: http://www.danielmarin.es/hdc/zodiaco.htm

32 Champdor ha escrito en "Babilonia" sobre las observaciones astronómicas realizadas durante el Imperio neobabilónico. (Champdor, 1985, pp 134-135).

33 Daniel Marín Arcones considera la influencia del la Astronomía mesopotámica en la India y en el mundo árabe: http://www.danielmarin.es/hdc/zodiaco.htm

34 Sobre ecuaciones cuadráticas ver "Historia de la matemática" de Carl B. Boyer. Op. cit. pp 56-57

35 Thureau-Dangin en "Revue d' asyriologie". nº 33, ha descrito problemas con ecuaciones algebráicas de segundo grado procedentes de planteamientos geométricos. (Thureau-Dangin, 1936, pp 65-84).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER, C. B. (1986). *Historia de la matemática*. Ed. Alianza Universitaria. Madrid.

CARATINI, R. (2004). *Los matemáticos de Babilonia*. Ed. Bellaterra - Arqueología.

CERAM, C. W. (1985). *El misterio de los hititas.* Ed Orbis. Biblioteca de la Historia. Barcelona.

CHAMPDOR, A. (1985). *Babilonia*. Ed Orbis. Biblioteca de la Historia. Barcelona.

EVES, H. (1964). *An Introduction to the History of Mathematics*. Ed Holt. New York. 2ª edición.

KRAMER, S. (1974). *La historia empieza en Sumer*. Ed. Ayma. Barcelona.

LIVERANI, M. (1995). *El antiguo oriente. Historia, sociedad y economía*. Ed. Grijalbo Mondadori. Barcelona.

MAZA, C. (2000). *Las Matemáticas de la antigüedad y su contexto histórico.* Universidad de Sevilla. Sevilla.

NEUGEBAUER, O. (1935-37). *Mathematische Keilschift Texte (MKT)*. Springer. Berlín.3 volúmenes.

NEUGEBAUER, O. (1957). *The Exact Sciences in Antiquity*. Brown University Press. New York.

NEUGEBAUER, O. y SACHS, A. (1945). *Mathematical Cuneiform Text (MCT)*. Yale University Press. New Haven, Conn.

OPPENHEIM, A. L. (2003). *La antigua Mesopotamia. Retrato de una civilización extinguida*. Ed. Gredos. Madrid.

ORDOÑEZ, J. et al. (2004). *Historia de la Ciencia*. Ed. Espasa Calpe. Madrid.

ROUX, G. (1987). *Mesopotamia. Historia política, económica y cultural*. Akal Universitaria. Madrid.

SANMARTIN, J. y SERRANO, J.M. (1998). *Historia antigua del próximo oriente*. Akal Textos. Madrid.

THUREAU-DANGIN, F. (1936). "Textes mathematiques babyloniens". *Revue d' asyriologie*. 33.

En internet

AUSEJO, E. y HORMIGON, M. Universidad de Zaragoza.
http//www.oei.es/selectisi/historia1.htm

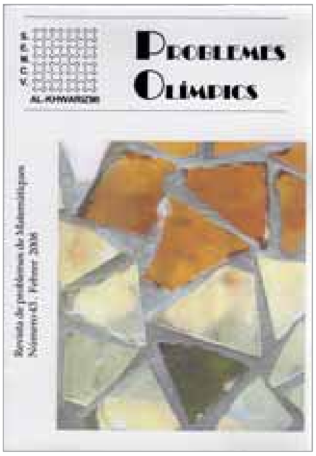
MARÍN ARCONES, D. "Atlas de constelaciones mesopotámicas".
http//www.danielmarin.es/hdc/atlamesop.htm

MARÍN ARCONES, D. "Astronomía mesopotámica".
http://www.danielmarin.es/hdc/AAGC%20-%20mitomesop.htm

MARÍN ARCONES, D. "Historia del Zodiaco".
http://www.danielmarin.es/hdc/zodiaco.htm

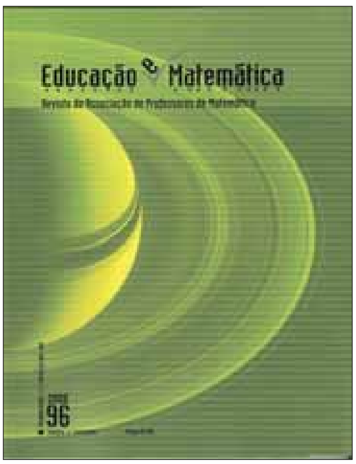
Himno a Iddin-Dagan, rey de Larsa.
Inscripciones cuneiformes en sumerio
de en trono al 1950 a. C.

Publicaciones recibidas



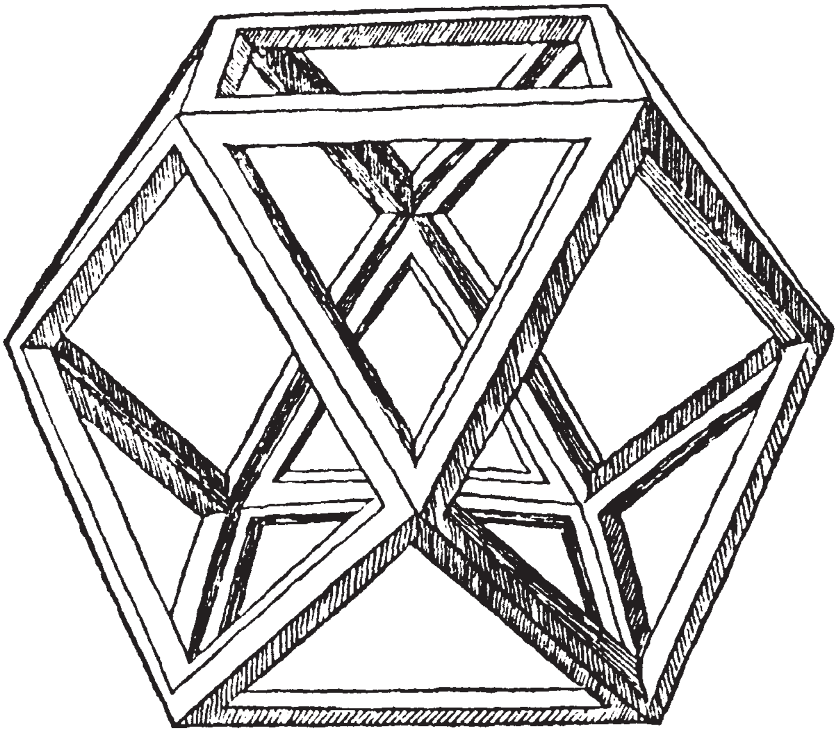
PROBLEMES OLÍMPICS
SEMCV Al Khwārizmī
N.º 43, Febrer 2008
Valencia
ISSN: 1578-1771

PROBLEMES OLÍMPICS
SEMCV Al Khwārizmī
N.º 44, abril 2008
Valencia
ISSN: 1578-1771



EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA
Revista da Associação de Professores de Matemática
N.º 96, Janeiro-Fevreiro 2008
ISSN: 0871-7222

PNA. REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS
Universidad de Granada
Vol. 2 n.º 3, marzo 2008
ISSN 1886-1350



Dibujo de Leonardo da Vinci para *La divina proporción* de Luca Pacioli

poliedro

suma+ 58
Junio 2008, pp.65-69

Juegos de intercambio

Ya en otras ocasiones hemos defendido la utilidad didáctica de los juegos de estrategia. Aunque al no aparecer conceptos matemáticos lleva muchas veces a crear rechazo a su utilización en clase, lo cierto es que promueven la utilización de variados heurísticos de la resolución de problemas, que pueden después utilizarse en los problemas que planteemos en clase. Por ejemplo, cuando los juegos (problemas) son parecidos la estrategia suele ser la misma, por lo que pueden buscar juegos similares para intentar aplicar la misma estrategia. También empezar resolviendo casos más simples, para buscar regularidades y después generalizar, es una técnica frecuente en la resolución de problemas.

Además son interesantes porque desarrollan actitudes imprescindibles para el quehacer matemático, por ejemplo la constancia. No es raro que ante un problema desconocido el alumno, tras un primer intento infructuoso, abandone y si tiene interés en la solución (un truco de magia, un solitario, un pasatiempo, etc.) nos la demande inmediatamente sin tomarse el esfuerzo de insistir en su resolución. Pensamos que los juegos de estrategia pueden fortalecer la constancia en el trabajo. Y sin olvidar que al implicarles en el juego, y por tanto en la resolución de problemas, se favorece la autoestima de muchos de ellos.

Si los juegos de estrategia son como en esta ocasión solitarios, los alumnos deben ser aún más precisos en el estudio del juego. Deben poner mucha atención en el proceso que siguen para no repetir movimientos.

Hoy vamos a presentar juegos con una misma estructura: una serie de fichas de dos colores distintos, colocadas en un tablero han de intercambiarse de posición en el menor número posible de movimientos.

Hay dos aspectos del estudio muy interesantes que siempre planteamos a los alumnos y que van a ser comunes a todas las presentaciones:

- Encontrar la estrategia para cambiar las fichas en el menor número posible de veces.
- Elegir una notación adecuada para representar la solución.

El interés del primer aspecto es obvio; el segundo merece una pequeña reflexión.

Para evaluar el nivel de competencia matemática de los alumnos, el estudio OCDE / PISA se basa en las competencias matemáticas específicas identificadas por M. Niss en 1999:

Grupo Alquerque de Sevilla

Constituido por:
Juan Antonio Hans Martín. *CC Santa María de los Reyes.*
José Muñoz Santonja. *IES Macarena.*
Antonio Fernández-Aliseda Redondo. *IES Camas.*
juegos@revistasuma.es

1. Pensar y razonar.
2. Argumentar.
3. **Comunicar**. Involucra la capacidad de expresarse, tanto en forma oral como escrita, sobre temas con contenido matemático y de entender enunciados de otras personas sobre estas materias en forma oral y escrita.
4. Modelar.
5. Plantear y resolver problemas.
6. **Representar**. Incluye codificar y decodificar, traducir, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representaciones de objetos y situaciones matemáticas, y las interrelaciones entre distintas representaciones; escoger entre diferentes formas de representación, de acuerdo con la situación y el propósito particulares.
7. Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones.

Normalmente los aspectos de notación se trabajan poco en clase, salvo el lenguaje simbólico y formal, y cuando se tocan se presentan ya acabados. Al pedir al alumno una forma de escribir los pasos seguidos para resolver el problema planteado, que pueda ser entendida y seguida por otro compañero, estamos activando las destrezas de Comunicar y Representar. Ya sabemos la dificultad que muchas veces tienen nuestros alumnos para explicar cómo han hecho un problema y sobre todo ponerlo por escrito, por lo que pensamos que esta parte de la actividad es bastante importante.

Vamos ya con los juegos que os proponemos hoy. Se basan en intercambiar bloques de fichas entre sí y los hemos agrupado en dos tipos: aquellos en que las fichas pueden saltar por encima de una del otro color (Juegos de intercambio con salto) y los que sólo pueden deslizarse a una casilla vacía (Juegos de intercambio sin salto).

Juegos de intercambo con salto

El primero de estos juegos es quizás el más conocido, al menos es el que ha sido más estudiado y ha producido mayor bibliografía. Es nombrado de formas distintas aunque el que más nos gusta a nosotros es:

El salto de la rana

Tenemos un tablero con siete casillas y tres fichas de un color y tres de otro. La distribución inicial del juego es la que aparece en la figura 1.

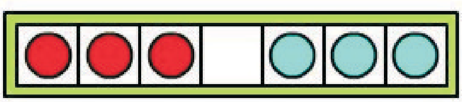


Figura 1

El objetivo del juego es permutar las posiciones de las fichas azules y rojas. Para ello son válidos los siguientes movimientos:

- Una ficha puede moverse a un lugar contiguo, si éste está vacío.
- Una ficha no puede retroceder, es decir las fichas rojas solo pueden moverse hacia la derecha y las azules hacia la izquierda.
- Una ficha junto a otra de distinto color puede saltar por encima de ella si el salto (por encima de una sola ficha) le lleva a una casilla vacía.
- Si en algún momento no puede hacerse ningún movimiento, el juego termina y hay que comenzar de nuevo.

Como siempre el primer paso que se ha de seguir es familiarizarse con el juego y sus reglas. Una vez conseguido esto hay muchos aspectos que podemos investigar en este juego además de los dos generales que hemos comentado antes:

1. Investiga otras disposiciones, por ejemplo, una, dos, cuatro, cinco fichas de cada color…
2. Si jugamos con n fichas de cada color, dejando una casilla vacía, ¿cuál será ahora ese número mínimo de movimientos?
3. ¿Y si jugamos con n fichas de cada color, pero dejando m casillas vacías en el centro?
4. ¿Cómo se modifica la estrategia si el número de fichas de cada color no es el mismo, por ejemplo tenemos 3 fichas rojas y 1 azul? ¿Y si tenemos tres fichas de un color y dos de otro?... ¿Y si tenemos n rojas y m azules?

El salto de tres

Siguiendo la misma filosofía, los tres siguientes juegos lo que modifican es el tablero y el número de fichas con que se juega. Un ejemplo sería el salto de tres que se juega sobre el tablero de la figura 2.

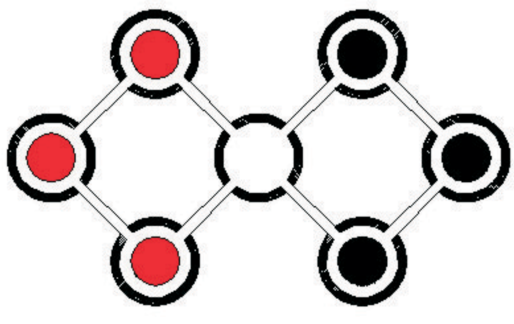


Figura 2

Las reglas del juego son las usuales:

- En cada movimiento sólo se puede mover una ficha.
- Las fichas rojas se desplazan hacia la posición de las negras y las negras hacia la posición de las rojas.
- Las fichas no pueden retroceder.
- Los movimientos posibles son mover una ficha a una casilla vacía o saltar sobre una ficha de distinto color a una casilla vacía.

El salto del ocho

Este es una generalización el caso anterior.

Ahora hay que intercambiar ocho fichas de cada color con las mismas restricciones que en el juego de tres. Se ve que la distribución sobre el tablero (tal como tenemos en la figura 3) sigue la misma estructura que el salto de tres.

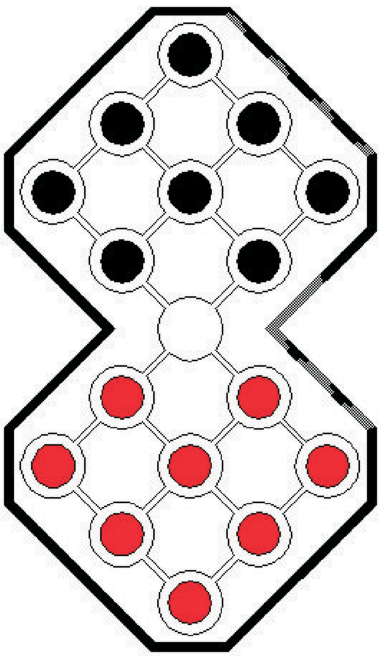


Figura 3

El solitario del Alquerque

Por último un solitario planteado sobre el tablero del juego Alquerque (juego al que en una próxima entrega tendremos que dedicarle más tiempo).

Ahora tenemos que intercambiar doce fichas de cada color sobre el tablero que aparece en la figura 4.

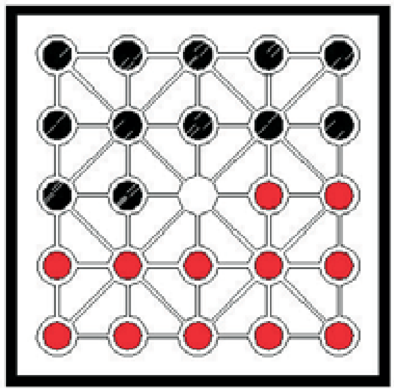


Figura 4

La intención es la misma que en los juegos anteriores, pero la cosa se complica al aumentar el número de fichas. En cada caso, con este aumento, se ve más importante el seguir una estrategia clara, pues si no se pierde uno y se eterniza el intercambiar las fichas.

Cuatro caballos

En un tablero 3X3 de ajedrez (figura 5) el único movimiento permitido es el movimiento de un caballo a otra casilla según las reglas del ajedrez. Por supuesto, dos caballos no pueden ocupar la misma casilla. El objetivo del rompecabezas es intercambiar los caballos rojos y azules en el menor número de movimientos.

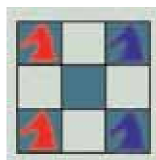


Figura 5

Con un tablero algo más extraño, pero con el mismo objetivo de intercambio entre los caballos, está el siguiente problema. Está prohibido salirse del tablero de la figura 6.

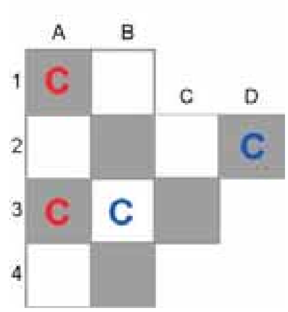
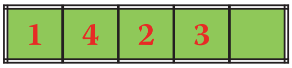
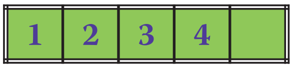


Figura 6

Transformación numérica

Cuatro fichas con números forman 1423. En ocho movimientos forma 1234 en el mismo espacio. Un movimiento consiste en hacer saltar un número sobre uno, dos o tres números contiguos (a la izquierda o derecha), para ir a la casilla vacía inmediata siguiente. No se puede mover sin saltar.





Juegos de intercambio sin salto

Veamos ahora los juegos en los que no se puede saltar. Suelen ser conocidos como juegos de “moviendo peones”. En este tipo de juegos el tablero suele disponer de alguna casilla que sirve para colocar en ella una ficha y permitir el paso de las restantes.

Es importante la restricción en este caso de que los movimientos pueden ser en horizontal o vertical, nunca en diagonal, y como es de suponer las fichas no pueden saltar una sobre otra.

Quizás el tablero más simple sería el que aparece en la figura 7.

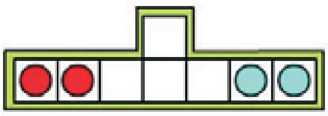


Figura 7

Una línea de investigación, una vez encontrada la solución, es plantear si es posible resolver el mismo juego si el tablero tuviese alguna casilla blanca menos. Es interesante ver la argumentación que se sigue para afrontar este problema.

Otra investigación sería cómo cambiaría la resolución del solitario si se añaden fichas de colores en casillas adyacentes. Por ejemplo si en el tablero de la figura 7 hubiese una casilla más en cada extremo y tres fichas rojas y tres azules, ¿seguiría teniendo solución?

Otra distribución distinta aparece en la figura 8.

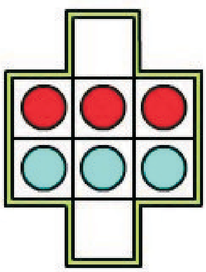


Figura 8

Aquí hay varias investigaciones que podríamos hacer:

- ¿Alguna de las dos casillas vacías podría desaparecer del tablero y seguir teniendo solución?
- ¿Qué pasaría si en la figura 8 tuviésemos cuatro fichas rojas y cuatro azules?
- ¿Importaría si las casillas blancas de la figura 8 no estuviesen una enfrente de la otra?

La ampliación de número de fichas en el puzzle hay veces que provoca que no se pueda resolver y en otros casos no. A continuación tenemos otro modelo en el que vemos que trabajar con tres fichas o con cuatro no importa para poder encontrar la solución.

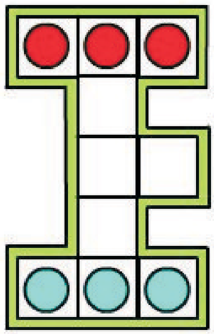


Figura 9

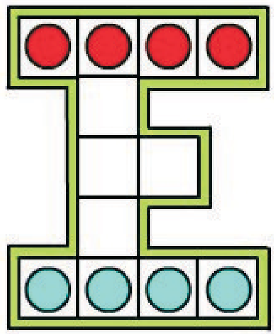


Figura 10

La pregunta lógica sería, si tenemos cinco fichas en cada extremo, ¿sigue siendo resoluble el juego?

Y ya que hemos visto un tablero parecido a una E bien está que veamos otra letra, la H de la figura 11.

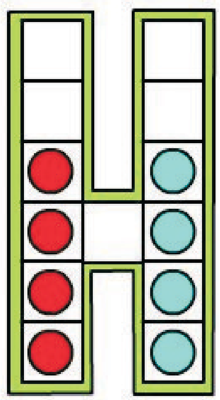


Figura 11

Las cinco letras

Se toman cinco discos de colores con las letras A (naranja), B (rojo), C (azul), D (verde) y E (amarillo) y se colocan en el tablero en su letra correspondiente (figura 12). Hay que mover los discos a los círculos de su color, sin levantarlos, sin pasar unos por encima de otros y sin atravesar las líneas marrones. Un movimiento puede recorrer varios círculos.

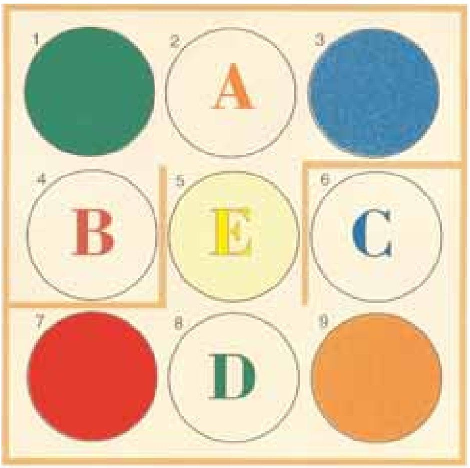


Figura 12

Agrupamiento

Tenemos ahora cinco monedas, tres de 10 céntimos y dos de 1 euro, colocadas alternadas. Usando dos dedos (índice y medio) de una mano se han de coger a la vez dos monedas de distinto valor y que estén contiguas, para en el menor número de movimientos alcanzar la posición final donde las monedas de igual valor estén juntas ya sea a la izquierda o a la derecha.

Para terminar, más para jugar

Este último tipo de juego de intercambio es en cierta forma la presentación esquematizada de una inmensa colección de puzzles o juegos que tienen como objetivo intercambiar piezas entre sí dentro de una zona limitada y siempre moviendo las fichas en horizontal o vertical, pero nunca en diagonal. Dentro de ellos está el conocido *Juego del 15* creado por Sam Loyd en la década de 1870 o en tres dimensiones el *Cubo de Rubik*.

A continuación tenemos dos puzzles de este tipo (algunos son bastante antiguos como por ejemplo el de la figura 14). El objetivo del primero es intercambiar **ON** con **OFF** y el del segundo meter la cabra dentro del redil. Aunque pueden parecer de estructura simple, el primero necesita 44 movimientos para resolverlo mientras que el segundo requiere solo 28.

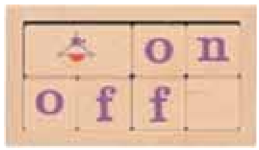


Figura 13

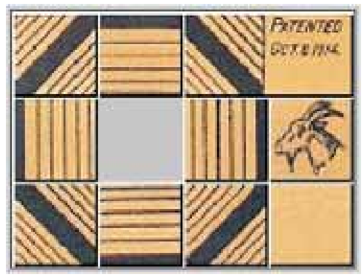


Figura 14

Por si les apetece probar con ellos, existe una página donde hay una gran cantidad de estos juegos en formato Java que se pueden jugar on-line. Pueden encontrarlos en:
http://www.johnrausch.com/SlidingBlockPuzzles/

Ánimo y mucha suerte.

JUEGOS

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Comisión Ejecutiva

Presidente: **Serapio García Cuesta**
Secretario General: **Francisco Martín Casalderrey**
Vicepresidente: **Manuel Torralbo Rodríguez**
Tesorera: **Claudia Lázaro del Pozo**

Secretariados:
Prensa: **María Peñas Troyano**
Revista SUMA: **Tomás Queralt Llopis/Onofre Monzó del Olmo**
Relaciones internacionales: **Sixto Romero Sánchez**
Publicaciones: **Ricardo Luengo González**
Actividades y formación del profesorado: **Salvador Guerrero Hidalgo**
Actividades con alumnos: **Floreal Gracia Alcaine/Esther López Herrainz**

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidenta: Carme Aymerich Padilla
CEIP Rocafonda
C/Tàrrega, 41
08304 Mataró (Barcelona)

Organización Española para la Coeducación Matemática *Ada Byron*
Presidenta: M.ª Carmen Rodríguez
Almagro, 28. 28010 Madrid

Sociedad Andaluza de Educación Matemática *Thales*
Presidente: Manuel Torralbo Rodríguez
Facultad Matemáticas. Apdo. de Correos 1160. 41080 Sevilla

Sociedad Aragonesa *Pedro Sánchez Ciruelo* de Profesores de Matemáticas
Presidenta: Ana Pola Gracia
ICE Universidad de Zaragoza. C/ Pedro Cerbuna, 12. 50009 Zaragoza

Sociedad Asturiana de Educación Matemática *Agustín de Pedrayes*
Presidente: Juan Antonio Trevejo Alonso
Apdo. de Correos 830. 33400 Avilés (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas *Isaac Newton*
Presidenta: Ana Alicia Pérez
Apdo. de Correos 329. 38208 La Laguna (Tenerife)

Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática *Miguel de Guzmán*
Presidente: Antonio Arroyo
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Víllalar, s/n. 09006 Burgos

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García Cuesta
Avda. España, 14, 5ª planta. 02002 Albacete

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidente: Bienvenido Espinar Cepas
CPR Murcia II. Calle Reina Sofía n.º1. 30007 Murcia

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Manuel Rodríguez Mayo
Apdo. de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Extremeña de Educación Matemática *Ventura Reyes Prósper*
Presidente: Ricardo Luengo González
Apdo. de Correos 590. 06080 Badajoz

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*
Presidente: Juan A. Martínez Calvete
C/ Limonero, 28. 28020 Madrid

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: María José González López
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidente: Luis Serrano Romero
Facultad de Educación y Humanidades. Ctra. Alfonso XIII, s/n. 52005 Melilla

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas *Tornamira*
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea *Tornamira*
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.
Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra. 31006 Pamplona

Sociedad *Puig Adam* de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Facultad de Educación. (Sec. Deptal. Álgebra). Despacho 3005.
C/ Rector Rollo Villanova, s/n. 28040 Madrid

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas *A prima*
Presidente: Javier Galarreta Espinosa
CPR. Avda. de la Paz, 9. 26004 Logroño

Sociedade Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)
Presidente: Manuel Díaz Regueiro
C/ García Abad, 3, 1ºB. 27004 Lugo

Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana *Al-Khwarizmi*
Presidente: Onofre Monzó del Olmo
Departamento de Didáctica de la Matemática. Apdo. 22045. 46071 Valencia

Societat Balear de Matemàtiques *Xeix*
Presidente: Josep Lluís Pol i Llompart
C/ Martí Rubí 37/alts. 07141 Sa Cabaneta (Marratxí). Islas Baleares

suma+ 58
Junio 2008, pp. 71-73

Cerveza 0,0%, refrescos "zero" y productos light

Una de las obsesiones humanas en las sociedades desarrolladas es el tema de "*mantener la línea*", presuponiendo que este mundo es euclidiano y por tanto la línea es recta. Pero atrapados en un entorno de consumo, en lugar de aplicar soluciones expeditivas como beber o comer menos, se busca alcanzar iguales objetivos consumiendo "más" productos que tengan "menos". La oferta del "café desgraciado" en los establecimientos "Cafè di Roma" es todo un símbolo: café descafeinado con leche descremada y sacarina.

A las aspiraciones estéticas corporales se añade hoy el razonable e implacable control de alcoholemia en la conducción, lo que lleva a unir la conservación de la línea recta con el mantenimiento de los puntos. El sueño de Descartes en vivo y en directo. Para conservar los puntos, de nuevo, en lugar de la solución "no beber" surge todo un negocio del beber "sin alcohol" y el intrigante 0,0%.

El misterioso 0,0% cerve(cero)

Decimales del tipo 0,1%, 0,02%, etc. son normales. Y el 0% es contundente. Pero hoy proliferan cervezas "sin alcohol" que a pesar del radical "sin" no optan por el 0% sino por el 0,0%. Francamente curioso. Lo único matemáticamente razonable es intuir que el 0,0% es el resultado de truncar una expresión del tipo 0,0X% para así poder pasar del "poco" al "sin". Estudios sobre diversas marcas hacen ver que, en efecto el 0,0% esconde normalmente el segundo decimal (Bavaría 0,04% Vol.; Bucler 0,05% Vol.; San Miguel 0,03% Vol.,…) y en

marcas donde en lugar del 0,0% se hace referencia al "sin" existen valores del estilo 0,85% Vol. (Laiker), 0,95% Vol. (Kaliber), 1,1% Vol. (Ambar green), 0,85% Vol. (Damm Bier), etc. Los niveles de alcohol son todos muy bajos pero, con rigor, lo del "sin" y lo del "0,0%" son engañosos.

Si para cervezas el 0% de alcohol es una virtud, para otros refrescos la virtud ha habido que buscarla en el 0% de azúcar o 0% de calorías.

Claudi Alsina
Universitat Politècnica de Catalunya
elclip@revistasuma.es

El “zero” de la Coca-Cola

Las bebidas refrescantes, basadas en fórmulas más o menos esotéricas, son el mágico resultado de agua, gas carbónico, azúcares, proteínas y aditivos diversos, aportando con ello una cantidad determinada de calorías. Las versiones light de Coca-Cola (acuérdense del viejo Tab) toman como estrategia el cambio radical del azúcar por edulcorantes no calóricos (ciclomato, sacarina, aspartamo,…) reduciendo pues el contenido calórico a cero. Si la Coca-Cola clásica contiene 10,60 g de azúcar y aporta 42 calorías por cada 100 ml, la versión light tiene 0 g de azúcar y aporta sólo 0,20 calorías por 100 ml (es decir, a la lata de 330 ml le corresponden 0,66 calorías). Es de agradecer además que el precio de la light sea el mismo que el de la clásica.

Sin embargo, la propia marca Coca-Cola ha ido más allá al crear la “Coca-Cola Zero”. Para eliminar las minicalorías aludidas del light y en base a los edulcorantes aspartamo y asesulfame-k nace con igual sabor y cero calorías la Coca-Cola Zero. El cero absoluto calórico pero con “la chispa de la vida”.

La definición rigurosa del concepto “light”

Aunque no hay aquí una definición legal operativa, en base al acuerdo de 1990 de la Comisión Interministerial para la Ordenación Alimentaria, se maneja en España la siguiente:

Definición. *Un alimento puede ser calificado de light si y sólo si cumple con los siguientes requisitos:*

(i) Para que exista un light debe existir en el mercado su homólogo no-light;

(ii) Debe haber un 30% de reducción mínima del valor energético respecto del alimento de referencia no-light;

(iii) Debe tener un etiquetado explícito sobre reducción de calorías y valor energético (por 100 g o 100 ml) con referencia al homólogo no-light.

La más curiosa es la condición (i) pues impide la denominación light a un producto si el mercado no ofrece otra no-light, es decir lo de light es “relativo” y no una condición autónoma. Para lograr las versiones light hay dos trucos elementales: o usar edulcorantes (sorbitol, manitol, xilitol, sacarina, aspartame, ciclamato, etc.) en lugar de azúcar (sacarosa) o fructosa o bien substituir grasas por otros elementos que simulen sabor y características pero disminuyan calorías.

La cifra relevante en el mundo light es el aludido 30% de reducción mínima de aporte de calorías (reducción a un tercio menos de calorías o mitad de grasa en la ley americana).

Dada la definición hecha la trampa

Educados con el Lazarillo de Tormes y dotados de una capacidad olímpica para saltarse a la torera cualquier definición, cualquier lector/a de SUMA ya puede imaginarse la picaresca en el mundo light. La primera es no usar la palabra y dar otras denominaciones que para el consumidor signifiquen lo mismo, pero que libren al producto de reglamentaciones. Ahí están los “bajo sin grasa”, “sin azúcar”, “0% materia grasa”, “diet”, “ligero/a”, “desnatado/a”, “bajo en calorías”, “+fibra-grasa” y un sin fin de alternativas. Liberados de la denominación “light”, ya no debe cumplirse ni (i), ni (ii), ni (iii) y problema resuelto. Generalmente, como lo light o equivalente parece exigir más esfuerzo, surge el siguiente

Teorema empírico del precio. *Todo producto light tiende (76%) a ser más caro que su producto homólogo no-light.*

La paradoja de los diet más energéticos

Para colmo, los alimentos no-light pero si "diet", "menos...", "sin..." pueden ser incluso más energéticos y dar más calorías que sus homólogos "más...", "con...". Valgan de referencia mermeladas sin azúcar pero con fructosa o determinadas leches condensadas, chocolates, etc.

La realidad de los light en cifras

Los estudios de Eroski realizados recientemente sobre 52 alimentos light fueron realmente alarmantes al presentar los siguientes problemas: todos los etiquetados eran deficientes, tres de cada cuatro eran más caros "por ser light" y la tercera parte de los light no lo eran al no alcanzar la reducción del 30% calórico respecto de sus versiones no light. El siguiente párrafo del estudio Eroski es concluyente:

> Según concluye el estudio, no son light ninguno de los alimentos estudiados de cereales "tipo línea" para desayuno (Kellog's Special K y Nestle Fitness), chocolates (Santiveri Fondant, Pagesa Fondant), patatas fritas (Celigüeta light y Matutano light), galletas (Gullón ligeras y Lú Vitalínea), leche condensada (Nestle), nata líquida (Central Lechera Asturiana Cocina ligera), pan tostado (Recondo sin sal y sin azúcar, y Recondo sin grasa y sin sal) y pan de leche (Martínez integral "— grasa"). Asimismo, tampoco son light uno de los batidos de leche (Central Lechera Asturiana "vainilla bajo en grasa") incluidos en el informe y una de las mermeladas (Vieja Fábrica "fresa diet").

Nos quedan los números

Al final la única solución es incorporar la aritmética a nuestras compras, leer etiquetas bien, buscar las cantidades que convengan y dejar al margen los tantos por cientos relativos y mirar los contenidos absolutos. Como se nos recuerda en PISA: comprensión lectora-ciencias-matemáticas.

En una publicación inminente Angel Alsina y Nuria Planas al proponer trabajar matemáticas inclusivas en contexto hacen especial referencia a experiencias de trabajar en clase con productos comerciales (como los light) y plantear con ellos en clase de matemáticas cálculos que en la vida cotidiana deberíamos hacer a diario. Una línea pedagógica muy interesante que nos ha de permitir enlazar con temas de salud, consumo y calidad de vida. Y este es un tema educativo no light.

Para saber más

CORBALÁN, F. (2007): *Matemáticas aplicadas a la vida cotidiana*, Graó, Barcelona.

GOMIS, R. (2006): *La fi de la diabetis?*, Col. Sense fronteres, Edicions Bromera-Publicacions de la Universitat de València, València.

GUARNIS, B. (2006): "La innovación en el sector agroalimentario" en *Apropa't a la ciencia*, Generalitat de Catalunya, Barcelona.

MANS, C. (2007): *Los secretos de las etiquetas*, Ariel, Barcelona.

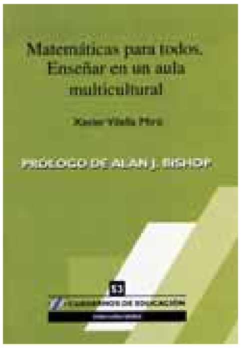
Internet:

http://www.alimentación-sana.org
http://www.cocacolazero.com/home.jsp
http://www.consumer.es.Eroski
http://www.consumo-inc.es

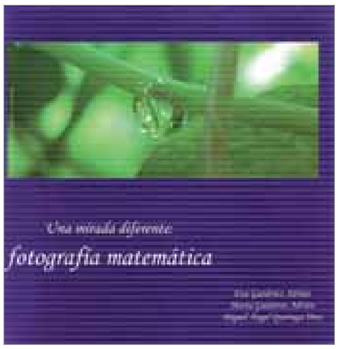
EL CLIP ■

Libros recibidos

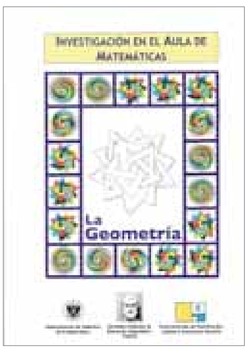
Andrés y la Bruja Lingüista
Mario Campos Pérez
Aventura, 28
Laertes
Barcelona, 2008
ISBN: 978-84-7584-614-9
284 páginas



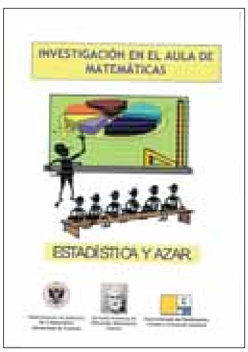
Matemáticas para todos. Enseñar en un aula multicultural
Xavier Vilella Miró
Cuadernos de educación, 53
Editorial Horsori, S. L.
Barcelona, 2007
ISBN: 978-84-96108-30-1
188 páginas



Una mirada diferente: Fotografía Matemática
Eva Gutíerrez Adrián
Marta Gutiérrez Adrián
Miguel Ángel Queiruga Dios
Editorial Queitec
A Coruña, 2008
ISBN: 978-84-612-2529-3
170 páginas



Investigación en el aula de matemáticas. la geometría
José Luis Lupáñez, José maría Cardeñoso, Margarita García (Editores)
SAEM Thales y Departamento de Didáctica de la Matewmática de la Universidad de Granada
Granada, 2006
ISBN: 84-689-7030-I
334 páginas



Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y azar
Pablo Flores, Rafael Roa, Raquel Pozuelo (Editores)
SAEM Thales y Departamento de Didáctica de la Matewmática de la Universidad de Granada
Granada, 2007
ISBN: 978-84-690-8988-0
334 páginas

suma+ 58
Junio 2008, pp.75-80

Dr. Geo: una aplicación geométrica libre

Aunque matemáticas y TIC suelen tener estrechas relaciones de funcionamiento, aportando las TIC claras ventajas para la utilización en el aula de matemáticas, unos contenidos de esta asignatura se prestan más al uso de las TIC. Este es el caso de la geometría, a la que dedicamos en este número la sección MatemásTIC.

Comenzamos haciendo referencia a dos sitios de Internet que se ajustan a este perfil.

El primero es la Web personal del profesor José Manuel Arranz del IES "Europa" en Ponferrada y miembro de la sociedad castellano y leonesa de educación matemática "Miguel de Guzmán" que observamos en la foto 1 y cuya dirección es: http://roble.pntic.mec.es/~jarran2/

En esta web encontramos múltiples animaciones para geometría en CabriWeb. Para poder observarlas necesitamos tener instalada la máquina Java en nuestro equipo.

Las actividades interactivas aparecen distribuidas en 7 grupos: construcciones básicas, triángulos, cuadriláteros, polígonos, circunferencias, movimientos en el plano y matemática recreativa.

Foto 1

En la sección de applets con Cabri de la web encontramos gran cantidad de animaciones aportadas por este profesor útiles para su uso en el aula: www.matematicas.net

Mariano Real Pérez
CEP de Zafra (Badajoz)
matemastic@revistasuma.es

En la web anterior encontramos también un enlace a la página http://mimosa.cnice.mecd.es/clobo/

En esta web, bajo la denominación "Geometría activa", encontramos gran cantidad de animaciones interactivas para el estudio de la geometría en los cursos de la ESO. Al entrar, los contenidos están distribuidos en dos grupos. El primero dedicado a primero y segundo de ESO y el segundo dedicado a tercero y cuarto de la ESO.

Así, para primero y segundo de la ESO encontramos animaciones agrupadas para los distintos temas: elementos de la geometría plana, triángulos, cuadriláteros, polígono, circunferencia y círculo, perímetros y áreas, y semejanzas. Para tercer y cuarto de la ESO, los temas en los que aparecen divididas las animaciones son: espacio, poliedros, cuerpos de revolución, áreas y volúmenes, trigonometría, geometría analítica, movimientos en el plano y mosaicos.

Una de las aplicaciones que encontramos en software libre para utilizar en el aula de geometría es *Dr Geo* y esta es la aplicación que vamos a tratar ahora.

Dr. Geo: una aplicación geométrica libre

Para este número de SUMA hemos seleccionado una aplicación educativa a la que podemos sacarle mucho partido en el aula. Un programa cuya utilización es muy recomendable en el bloque de geometría, siempre dentro del estudio de la geometría plana. No solamente es un software práctico para el desarrollo teórico de los contenidos propios de este bloque por parte del profesor, sino que su facilidad de uso, permite que el alumno interprete los distintos problemas y traslade su interpretación a un área de trabajo interactiva. Un área de trabajo en el que la práctica enriquece el aprendizaje y ayuda a asimilar los nuevos contenidos.

DRGeo o DRGenius es una aplicación muy intuitiva en su manejo así como interactiva en las pantallas que elaboramos, proporcionándonos imágenes finales en las que el alumno participa activamente sobre ellas y observando los fenómenos de cambio que se producen en la escena matemática cuando ellos mismos varían las condiciones iniciales de los problemas para los que estemos utilizando DrGeo. Esa aplicación comenzó llamándose DrGeo, pasando posteriormente en algunas versiones a denominarse DrGenius para, en 2003, volver a llamarse DrGeo, nombre por el que es más conocida y con el que se encuentra en todas las distribuciones Linux y, por tanto, en las que están desarrollando las distintas comunidades autónomas.

Dr Geo, acrónimo para *Geometry Exploration and Observation,* es un programa interactivo de geometría y, por tanto, una excelente herramienta para las clases de matemáticas tanto de primaria como de secundaria.

Para conocer parte del aspecto técnico de la herramienta, podemos indicar que Dr. Geo integra características avanzadas del lenguaje de programación Scheme para definir los scripts en una figura y definir su funcionalidad interactiva, siendo ahora una poderosa herramienta a la que le podemos sacar mucho partido en las clases de matemáticas.

La web oficial de esta herramienta, que ha sido desarrollada por el francés Hilaire Fernandes, es:

http://www.ofset.org/en/drgeo

En ella podemos encontrar abundante documentación sobre la aplicación. Entre ella os recomendamos la zona de vídeos que se encuentra en:

http://documentation.ofset.org/drgeo/videos/

en la que observamos que aparecen algunos vídeos de utilización de DrGeo y la interacción de éste con otras herramientas como *Texmacs* o *Squeak*, aunque aquí no vamos a tratar estas relaciones, sino que daremos unas pinceladas sobre la utilización de esta herramienta.

Aunque DrGeo es una aplicación para Linux, existen versiones para Windows, aunque tiene limitada muchas de las funcionalidades que permite el programa. Una de esas versiones la encontramos en la web de matematicas.net, concretamente en la siguiente dirección:

www.matematicas.net/archivos/programas/msdos/dosmath/drgeo060.zip

Los usuarios de Mac también tienen una versión para su equipo. Es fácil encontrarla en Internet y uno de los lugares de la que podemos descargarla es:

http://mac.softpedia.com/progDownload/Dr-Geo-Download-6831.html

Para comenzar, haremos un recorrido por la aplicación, indicando las distintas funcionalidades que nos ofrece Dr. Geo para la geometría y, posteriormente, realizaremos un sencillo ejemplo utilizando esta herramienta.

Un paseo por el Dr Geo

Cuando entramos en la aplicación, nos aparece una pantalla inicial en la que debemos pulsar sobre el icono que aparece en la parte superior izquierda que hace que entremos en un espacio de trabajo nuevo. Ese espacio de trabajo es el que contemplamos en la imagen 1.

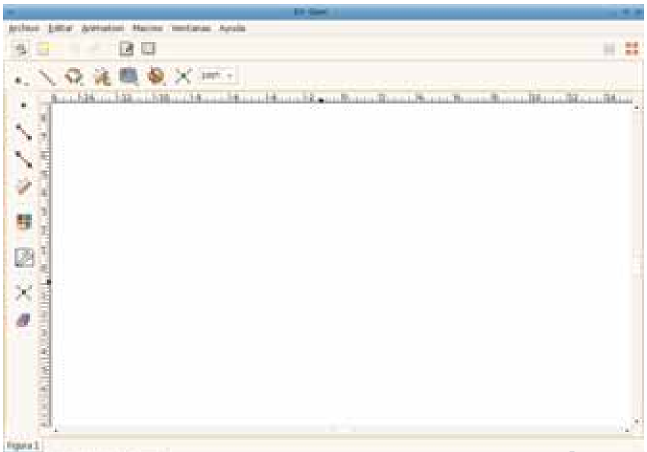


Imagen 1

El icono de la parte superior izquierda de la imagen 1 que aparece enmarcado es al que hacíamos referencia anteriormente, por lo que en cualquier momento podemos disponer de un espacio de trabajo nuevo. En esta imagen observamos varias partes claramente distinguibles.

En la parte superior se encuentra una barra de menú de características similares a otras aplicaciones, con las opciones *archivo*, *editar*, etc. Justamente debajo de esta barra de menú encontramos una botonera compuesta de seis botones que nos van a servir para crear nuevos espacios de trabajo y movernos entre los distintos espacios de trabajo creados. También nos va a permitir utilizar una rejilla en nuestro espacio de trabajo que nos sirva de guía para la construcción que pretendamos realizar.

Debajo de la botonera anterior se encuentra un menú botonera que es la que nos va a servir para crear las figuras geométricas que necesitemos y para interactuar con las figuras realizadas. Esta botonera la vamos a estudiar seguidamente más a fondo.

Para continuar con la descripción de la pantalla de la imagen 1, en la parte izquierda se encuentran distintas herramientas de la aplicación. Estas herramientas se encuentran incluidas en la botonera anterior, pero aparecen destacadas aquí ya que son las herramientas más utilizadas.

Finalizando con la descripción, nos encontramos en la parte central, en blanco, con el espacio de trabajo propiamente dicho. Tanto en la parte superior como en la izquierda de ese espacio de trabajo aparecen dos regletas que nos van a servir de referencia en las construcciones geométricas que realicemos.

Procedemos ahora a hacer un recorrido por las distintas posibilidades que nos ofrece la botonera principal de Dr Geo, aunque con el ejemplo final, observaremos mejor la utilización de la herramienta.

En la sección MatemásTIC pretendemos informar sobre herramientas TIC existentes que nos puedan resultar útiles en el aula de matemáticas.

Imagen 2

Las herramientas del Dr Geo

En la imagen 2 aparece la botonera principal con las distintas opciones que ofrece cada uno de los botones.

Para hacer un descripción de cada uno de las herramientas que aparecen en la imagen 2, vamos a numerar cada uno de los botones de la botonera principal de izquierda a derecha, de forma que el botón 4 se corresponde con el botón en el que aparece un regleta sujeta por una mano. En cada uno de los botones, vamos a numerar las opciones de arriba a abajo, de forma que 4.3 se corresponde con el icono en el que aparece un semicírculo con un ángulo de 45º marcado. De esta forma, en los siguientes apartados indicaremos lo que hace cada una de ellas.

1.- Puntos: En este botón se nos ofrecen distintas opciones para dibujar un punto con Dr Geo. Así, las cuatro posibilidades que nos ofrece son las siguientes:
- 1.1.- Dibujar un punto cualquiera en el espacio de trabajo.
- 1.2.- Dibuja el punto medio de un segmento.
- 1.3.- Dibuja el o los puntos de corte de dos figuras geométricas que tengamos en el espacio de trabajo.
- 1.4.- Dibuja un punto a partir de sus coordenadas. Estas coordenadas serán números que ya aparezcan en la construcción.

2.- Líneas. Este menú contiene las distintas opciones para dibujar líneas con Dr Geo.
- 2.1.- Traza la recta que pasa por dos puntos.

2.2.- Traza la semirrecta que une dos puntos, siendo el primero de ellos el puntos de comienzo de la semirrecta.
2.3.- Dibuja el segmento anterior que une dos puntos del espacio.
2.4.- Dibuja el vector que une dos puntos previamente existentes en el espacio de trabajo.
2.5.- Representa la circunferencia con centro un punto y que pase por otro punto.
2.6.- Traza el arco que pasa por tres puntos del espacio de trabajo.

Dr Geo es un programa interactivo de geometría y, por tanto, una excelente herramienta para las clases de matemáticas tanto de primaria como de secundaria.

2.7.- Dibuja el lugar geométrico definido por un punto libre y un punto con restricciones, relacionado con el primero. Un punto con restricciones se puede dibujar al representar, con la herramienta 1.4 un punto cuyas coordenadas dependan de una determinada medida de la construcción que estemos realizando.
2.8.- Dibuja la superficie encerrada entre varios puntos.

3.- Herramientas de transformación. Aquí se encuentran recogidas las herramientas con las que podemos efectuar transformaciones sobre la construcción que tengamos en nuestro área de trabajo.
3.1.- Traza la recta paralela a una existente y que pase por otro punto existente en el espacio de trabajo.
3.2.- Traza la recta perpendicular a una existente y que pase por un punto.
3.3.- Dibuja el punto simétrico a uno dado, respecto a una recta existente en el área de trabajo.
3.4.- Simetría central. Con esta herramienta trazamos el simétrico de una figura respecto a un punto.
3.5.- Traslación. Esta opción nos permite dibujar la figura obtenida al aplicar a una existente una traslación cuyo vector sea uno que se encuentre en el espacio de trabajo.
3.6.- Giro. Realiza el giro de un objeto del área de trabajo. Una vez seleccionada esta opción, pulsaremos sobre el objeto que deseemos rotar, posteriormente sobre el centro del giro y por último sobre el valor del ángulo de giro.
3.7.- Homotecia. En este caso, pulsaremos sobre el objeto al que deseamos aplicar la homotecia, seguidamente sobre el punto que será centro de la homotecia y finalmente sobre el valor que será valor de proporción de la homotecia.

4.- Herramientas numéricas. Aquí encontramos la distintas opciones numéricas que podemos utilizar en nuestro espacio de trabajo.
4.1.- Esta herramienta permite hacer tres cosas diferentes:
4.1.a.- Escribir un valor numérico para utilizarlo posteriormente en nuestra construcción.
4.1.b.- Calcular la distancia entre dos objetos del área de trabajo.
4.1.c.- Calcular la longitud de una curva..
4.2.- Calcula el ángulo definido por tres puntos del área de trabajo o por dos vectores.
4.3.- Esta herramienta es muy interesante para pasar del marco geométrico al algebraico ya que, en una construcción geométrica del área de trabajo, nos proporciona las coordenadas de un punto existente, las coordenadas de un punto o de un vector, la ecuación de una recta o la ecuación de una circunferencia.
4.4.- Crea un *Script Sheme*. Esta es una opción bastante potente de Dr Geo y tiene múltiples aplicaciones. Se puede utilizar de dos formas:
4.4.a.- Si no va a depender de ningún elemento de nuestra área de trabajo: pulsaremos primeramente sobre esta opción y posteriormente pulsaremos sobre el fondo de nuestro espacio de trabajo, sin tocar ninguno de los elementos existentes, apareciendo el texto "Dr Genius". Más adelante, veremos una opción para cambiar las propiedades de un objeto ya que lo que debemos hacer ahora, es cambiar las propiedades de este texto y colocar en su lugar alguna sentencia que nos conduzca a un valor determinado que deseemos obtener. Por ejemplo, si colocamos (random 10) nos aparecerá un número aleatorio entre 1 y 10. Así, si posteriormente dibujamos un punto cuya primera coordenada, por ejemplo, sea este número, a medida que cambia el valor, observaremos que cambia de posición el punto.
4.4.b.- Si va a depender de algún objeto de los que se hallan en nuestra área de trabajo: tras seleccionar esta opción, pulsaremos sobre los objetos de los que dependerá este script (punto, recta, ángulo, círculo,..), siendo el primer objeto a_1, el segundo a_2,... En este caso podremos utilizar, en el cambio de propiedades, sentencias que rescatarán características de los objetos que hemos seleccionado. Un ejemplo de estas sentencias son (getAbscissa a_1,), (setAbscissa punto x), ... que posteriormente utilizaremos en la definición de otros objetos o para comprobar determinadas propiedades geométricas de la composición sobre la que estemos trabajando.

5.- Macros. Otra de las potentes herramientas con las que está dotado Dr Geo es la posibilidad de realizar macros y de utilizarlas posteriormente en otras construcciones.
5.1.- Aquí comenzamos la construcción de una macro. Antes de comenzar a construirla, necesitamos tener realizada la composición de la que la macro va a obtener

el método de construcción. Tras pulsar sobre esta opción, nos aparece una pantalla que nos indica que pulsemos con el ratón sobre los elementos que van a servir de base o los elementos de definición de la macro. Cuando hayamos pulsado sobre todos los elementos base, pulsaremos en el botón "Adelante" de la pantalla que nos había aparecido y aparecerá una nueva ventana que nos pedirá que le indiquemos el producto final que desea que la macro construya. Cuando finalicemos, pulsaremos sobre el botón "Adelante" y nos pedirá que indiquemos un nombre para nuestra macro y una descripción de la misma. Es conveniente que en esta descripción indiquemos textualmente los elementos básicos que necesita la macro.

5.2.- Esta opción nos permite utilizar una macro ya creada. Si pulsamos sobre la misma, nos presentará un listado de las macros que tengamos creadas y nos pedirá que seleccionemos una de ellas. Tras seleccionarla, nos pedirá que introduzcamos los elementos que servirán de base para la utilización de la misma. Ni que decir tiene que estos elementos se deben encontrar previamente en nuestro área de trabajo. Cuando hayamos marcado todos los elementos de definición necesarios, la macro trazará el objeto final correspondiente.

6.- Diversas herramientas. En este botón se encuentran tres herramientas que no son del trazado de figuras propiamente dicho.

6.1.- Borra un objeto y todos aquellos que dependan de él en el dibujo geométrico que tengamos en nuestro espacio de trabajo.

6.2.- Cambia el estilo de un objeto. Con esta acción nos aparecerá una ventana en la que podremos modificar el color y grosor del objeto, además de su nombre.

6.3.- Esta opción cambia las propiedades de un objeto y es a la que hacíamos referencia en puntos anteriores como el 4.4.a. Así, si pulsamos sobre un punto de nuestro espacio de trabajo, nos indicará las coordenadas del mismo.

7.- Este botón nos da la posibilidad de interactuar con la construcción realizada en nuestro espacio de trabajo. Para ello, una vez pulsado el botón, arrastraremos en nuestro espacio de trabajo alguno de los elementos básicos sobre los que hemos hecho la construcción y observaremos el efecto que produce.

Hemos explicado básicamente las acciones que nos permite realizar cada una de las opciones del área de trabajo. Cabe destacar además, que estas opciones, además de encontrarse en esta barra de botones, están accesibles en cualquier parte del área de trabajo sin más que pulsar el botón derecho del ratón.

Un caso práctico

Ahora, a modo de síntesis, vamos a realizar paso a paso una construcción utilizando DrGeo y las herramientas necesarias. En este caso vamos a realizar una construcción con la que comprobaremos que las alturas de un triángulo se cortan en un punto. Un punto que vamos a llamar *ortocentro*. Para ello seguiremos los siguientes pasos:

a.- Trazamos los vértices del triángulo. Para ello utilizaremos la opción 1.1 y pulsaremos sobre tres puntos de nuestro espacio de trabajo, obteniendo la imagen 3. En esta imagen observamos los puntos retocados con la opción 6.2 de forma que se observen mejor los tres puntos.

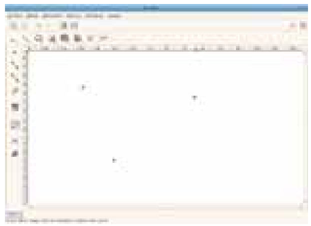


Imagen 3

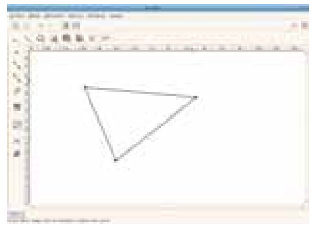


Imagen 4

b.- Una vez trazados los vértices, procedemos a trazar los segmentos que componen los lados del triángulo. Para ello utilizamos la opción 2.3, obtenido la pantalla que se observa en la imagen 4. En ella hemos retocado los lados obtenidos con la opción 6.2 para que se vean mejor.

c.- Ahora vamos a trazar las alturas del triángulo. Para ello utilizamos la opción 3.2. Una vez seleccionada esta opción, pulsamos sobre un lado del triángulo y sobre el vértice opuesto, trazándose la primera altura. Procedemos de la misma forma con los otros dos lados, obteniendo la pantalla que se observa en la imagen 5. En este caso hemos retocado las alturas del triángulo con la opción 6.2 para proporcionarles otro color distinto al de los lados.

d.- Ahora vamos a señalar el punto de corte de las tres alturas. Para ello vamos a utilizar la herramienta 1.3 que marca el punto de corte de dos objetos. Tras elegir esta herramienta pulsamos sobre dos de las alturas y se marcará el punto de corte de las dos como observamos en la imagen 6.

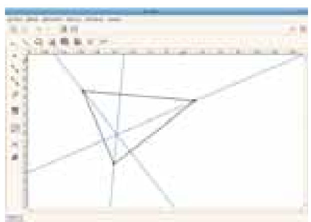


Imagen 5

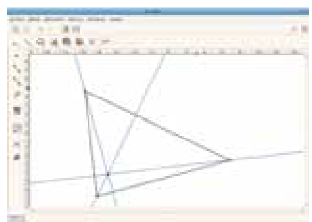


Imagen 6

Ahora, si lo deseamos, podemos utilizar la opción 6.2 para denominar “ortocentro” a este punto, para denotar a cada vértice con una letra, para denotar a cada lado con una letra, etc.

e.- Por último, vamos a interactuar con la imagen. Para ello vamos a utilizar la opción 7 y, pulsando sobre uno de los vértices del triángulo, lo arrastraremos a otro punto de la pantalla, observando que las tres alturas del triángulo se siguen cortando en un punto.

f.- Una vez construida la imagen existen varias posibilidades para guardarla y utilizarla posteriormente. Si pulsamos en “Archivo2 y después en “Guardar como”, la guardaremos como una imagen de Dr Geo que posteriormente podremos abrir y utilizar con este mismo programa.

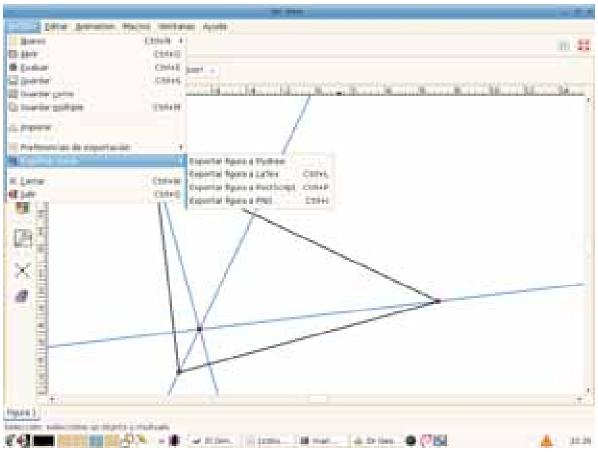


Imagen 7

Otra opción es exportarla. En la imagen 7 observamos las posibilidades de exportación que nos ofrece la aplicación figura de Flydraw, LaT, PostScript, PNG que nos posibilitan utilizar esta imagen con otros programas.

g.- Dado que esta construcción nos puede servir para realizar construcciones más complejas, vamos a guardarla como una macro. Para ello seguimos los siguientes pasos:

g.1.- Pulsamos sobre la opción 5.1 para crea una macro. En este momento se abrirá una nueva ventana en la que nos piden que pulsemos sobre los elementos que servirán de base para nuestra macro. En este caso, pulsaremos sobre los tres vértices del triángulo como observamos en la imagen 8.

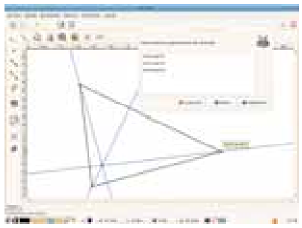


Imagen 8

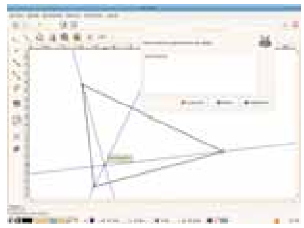


Imagen 9

g.2.- Pulsamos sobre el botón “Adelante” y nos aparece una nueva pantalla en la que nos indica que pulsemos sobre los elementos que deseamos que dibuje la macro a partir de los anteriores. En nuestro caso solamente le vamos a indicar que dibuje el ortocentro, por lo que solamente pulsaremos sobre él como se observa en la imagen 9.

g.3.- Pulsamos sobre el botón “Adelante” y nos aparece una nueva pantalla en la que nos pide que introduzcamos el nombre de la macro, en nuestro caso “ortocentro” y una descripción en la que indicaremos “construcción del ortocentro de un triángulo a partir de sus vértices”.

Una vez guardada la macro, la utilizaremos con la opción 5.2 de Dr Geo. La aplicación os pedirá que le indiquemos la macro que deseamos utilizar y los elementos de nuestro área de trabajo que servirán de base para esa macro.

MatemásTIC ■

Ficha educativo - técnica	
Nombre	Dr Geo
Sistema	Aunque es una aplicación propia de Linux y para cada distribución cuenta con el archivo de instalación en su repositorio, también encontramos una versión para Windows y otra para Mac.
Descarga	Repositorios de las distribuciones Linux y las indicadas en el texto para Windows y Macintosh.
Licencia	GPL
Contenido	Representaciones geométricas interactivas en el plano.
Nivel	Multinivelar: primaria, secundaria, bachillerato, universidad.
Metodología	Los alumnos la utilizarán individualmente, aunque lo más aconsejable es que dos alumnos la utilicen en un mismo equipo. Es conveniente en periodos prolongados en los que los alumnos realicen sus construcciones.

suma+ 58
Junio 2008, pp. 81-86

Un Zurbarán anamórfico

Se encargó este cuadro a Francisco de Zurbarán para decorar el Salón de Reinos del Palacio del Buen Retiro. En él, se colgaron doce cuadros de batallas del reinado de Felipe IV, realizadas por los más insignes pintores españoles del momento; entre ellos la famosa Rendición de Breda *de Velázquez, más conocido como* Las lanzas. *Completaban la escenografía diez cuadros de los trabajos de Hércules, también de Zurbarán y los retratos ecuestres de Felipe III y su esposa, y Felipe IV y la suya, además del retrato del priíncipe Baltasar Carlos, todos ellos de Velázquez.*

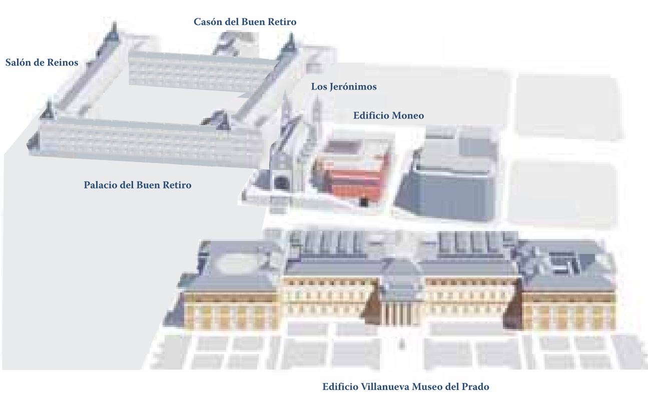
La defensa de Cádiz contra los ingleses, Francisco de Zurbarán, 1634, M.N. del Prado, Madrid

Francisco Martín Casalderrey
IES Juan de la Cierva (Madrid)
fmc@revistasuma.es

Los reyes vivían en el Alcázar, pero Felipe IV quería tener una segunda vivienda, más cómoda y menos húmeda en la que pasar ciertas temporadas de esparcimiento y recreo. Así surgió la idea de hacerse construir un nuevo palacio, a las afueras de Madrid, hacia levante, en la zona llamada *El Prado*, cerca de las *Huertas* que, desde el centro de la ciudad, en ligera pendiente, descendían hacia el río Manzanares.

De la obra se encargó Gaspar de Guzmán y Pimentel, Conde Duque de Olivares, quien probablemente eligió el sitio para la construcción, al lado del *Cuarto del Rey*, que había mandado construir Felipe II como anexo al claustro de los Jerónimos. El palacio debería construirse a la mayor brevedad posible y Olivares se comprometió a entregar la obra en 1634.

Realmente el palacio se construyó por acumulación de diversos elementos, que ampliaban el Cuarto del Rey, hasta transformarse en un verdadero palacio, con dos grandes patios para recepciones –el primero se quedó enseguida pequeño–. Las prisas hicieron que los materiales usados no fueran especialmente nobles. Para compensar se consideró que el interior debía estar magníficamente decorado, con los mejores muebles, los más bellos tapices y los cuadros de los más afamados pintores del momento de los Reinos de la Corona Española y de otros lugares.



Reconstrucción aproximada de la ubicación relativa del Palacio del Buen Retiro, con respecto a los Jerónimos y al actual Museo del Prado. (Composición FMC)

Olivares consiguió, como había prometido, la obra en plazo, aunque para la decoración tuviera que recurrir a la adquisición urgente de obras, tarea que encomendó a los embajadores del reino, a encargos a pintores españoles e, incluso, a la expropiación de muebles y otros elementos suntuosos de los palacios de la nobleza, que los cedía de más o menos mala gana.

El salón más emblemático del Palacio del Buen Retiro era el llamado *Salón de Reinos*. En él el rey recibía a los embajadores y altos dignatarios. Se concibió para decorarlo una escenografía completa, que subrayara las victorias en famosas batallas de los ejércitos reales en los más remotos lugares del planeta. El Salón de Reinos era una gran sala de planta rectangular de aproximadamente 10 m × 30 m y ocupaba una de las alas del palacio. Se encargaron 12 cuadros de *batallas,* además de otras obras para completar la decoración.

Las *batallas* representadas tuvieron lugar en un plazo muy breve de tiempo y, aunque magnificadas por el régimen, todas resultaron bastante irrelevantes desde un punto de vista político con el paso del tiempo. La propaganda al servicio del rey, e indirectamente también de su valido el Conde Duque de Olivares, se concibió y planificó en varios frentes. Además de estos magníficos cuadros, en muchos casos las *batallas* fueron llevadas también al teatro de la mano de los mejores dramaturgos, aunque el orden de ejecución no fue siempre pintura-teatro.

Por ejemplo, el 2 de Junio de 1625, las tropas asediadas de la ciudad de Breda, al mando de Justino de Nassau, se rinden al vencedor, Ambrosio de Spínola, marqués de los Balbases. Ese mismo año, Calderón de la Barca estrena su obra teatral *El sitio de Breda*. La escena culminante es la entrega de las llaves:

> Justino: Aquestas las llaves son/ de la fuerza, y libremente/ hago protesta en tus manos / que no hay temor que me fuerce /a entregarlas, pues tuviera /por menos dolor la muerte. (...)
>
> Spínola: Justino, yo las recibo,/ y conozco que valiente/ sois, que el valor del vencido/ hace famoso al que vence. Y en el nombre de Filipo/ Quarto, que por siglos reyne,/ con más vitorias que nunca,/ tan dichoso como siempre,/ tomo aquesta posesión.

Sin duda, esta escena teatral inspiraría después a Velázquez en la composición de su *Redición de Breda*.

La defensa de Cádiz, de Zurbarán

El cuadro que nos ocupa es otra de las batallas pintadas por encargo para decorar el Salón de Reinos. Se trata de *La defensa de Cádiz contra los ingleses*, un óleo sobre lienzo de 302 × 323 cm², pintado por Francisco de Zurbarán y que se conserva en el Museo Nacional del Prado. El primero de noviembre de 1625 una escuadra inglesa compuesta por cien naves y diez mil hombres, al mando de sir Henry Cecil, duque de Wimbledon atacó la ciudad de Cádiz. La defensa de la plaza estuvo a cargo de don Fernando Girón y Ponce de León, que había sido Consejero de Guerra y se había ofrecido a Felipe IV como gobernador de Cádiz a pesar de padecer gota y hallarse prácticamente impedido. Zurbarán lo representa por eso sentado, dando órdenes a don Diego de Ruiz, su teniente de maestre de campo. En la mañana del día 8 de noviembre la batalla se inclinó del lado castellano y desmoralizados y fuertemente hostigadas las tropas inglesas abandonaron el campo de batalla. También esta real hazaña sería llevada al teatro bajo el título de *La fe no ha menester de armas y venida del inglés a Cádiz*, de Rodrigo de Herrera.

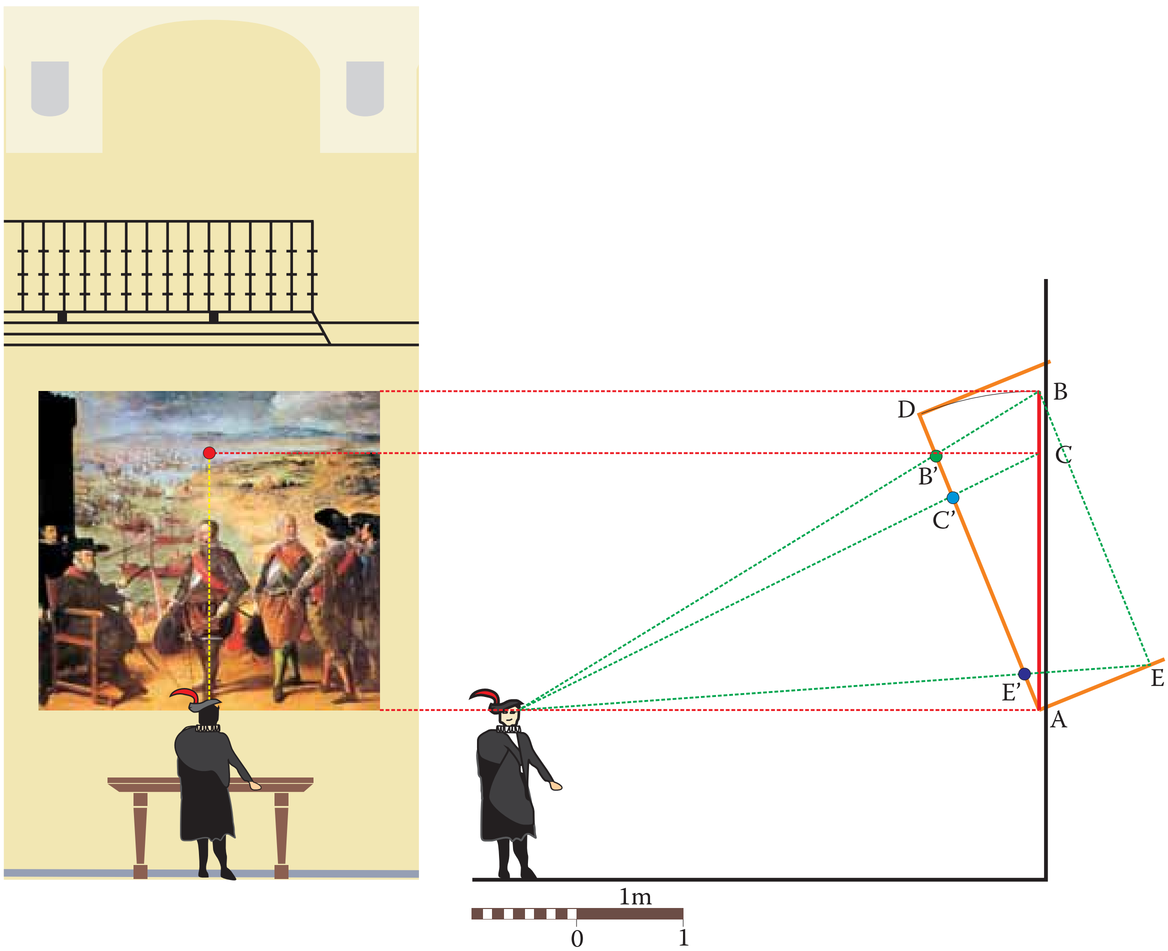
Me topé con este cuadro casi por casualidad, paseando por el Prado mientras preparaba un recorrido matemático. Me llamó la atención la calidad descriptiva de los retratos, seguramente debido al escaso margen de años pasados desde el hecho conmemorado y la realización de la pintura. El rey y el Conde Duque conocían sin duda a los protagonistas y por tanto en cuadro tenía que cumplir la función, entre otras, de retrato colectivo. Pero, a la vez, la composición resultaba extraña. Los dos planos, el primero con los personajes y el segundo con el paisaje parecían no encajar bien. Se podría casi pensar que se representaba una escena teatral: Los personajes sobre un escenario y el paisaje plano, como decorado sin profundidad, al fondo. Los personajes además se veían fusiformes. He de decir que el cuadro ocupa en el Prado una pared entera de una sala pequeña y se cuelga a menos de medio metro del suelo. La otra posibilidad era que Zurbarán no supiera dibujar bien en perspectiva. De hecho, eso es lo que afirman muchos críticos. Pensé que la causa de esas discordancia debía ser la ubicación concreta actual en el museo; que, por el contrario, el gran pintor Zurbarán había deformado el dibujo en el cuadro a propósito, de manera que, una vez colocado en su ubicación, quedaran compensadas las deformaciones visuales del ojo del espectador, para lograr así una imagen perfecta en su cabeza.

Posible disposición de *La Rendición de Breda* y de *La Defensa de Cádiz* en el Salón de Reinos del Palacio del Buen Retiro. (Dibujo FMC)

Mirando con ojos matemáticos

Mi primera hipótesis fue que el cuadro había sido concebido para ser colgado más arriba y me propuse determinar cuánto. Si situamos un rectángulo en alto y lo miramos dirigiendo nuestra mirada al centro, el rectángulo se trasformará en un trapecio isósceles. La deformación dependerá de la altura h a la que lo situemos y de la distancia d, medida en el suelo, entre el cuadro y el observador. El valor de d se podía estimar con base a las medidas del cuadro en unos 4,5 m. Sólo quedaba por determinar h. O mejor, cuánto se estrecha la base superior del trapecio y su altura en función de h. Con algunos cálculos trigonométricos no resulta difícil aproximar ambas funciones. Los cálculos me llevaron a la conclusión de que lo más plausible era que el cuadro debería ser colgado de modo que el lado inferior del marco quedara a la altura de los ojos del espectador. Pero, como veremos, con algunos cálculos geométricos el razonamiento resultará mucho más sencillo. Partiremos de esa hipótesis y trataremos, experimentalmente, de confirmarla.

Situémonos en el Salón de Reinos, delante del cuadro de Zurbarán, a unos cuatro metros y medio de distancia, y supongamos que éste está colgado a la altura de nuestros ojos, como muestra la figura. El punto de fuga de nuestra imagen, al mirar el paisaje, lo situamos en la parte central de la línea del horizonte (punto rojo en la gráfica). Construiremos en el lado derecho el perfil de la escena. Para ello transportamos la medida

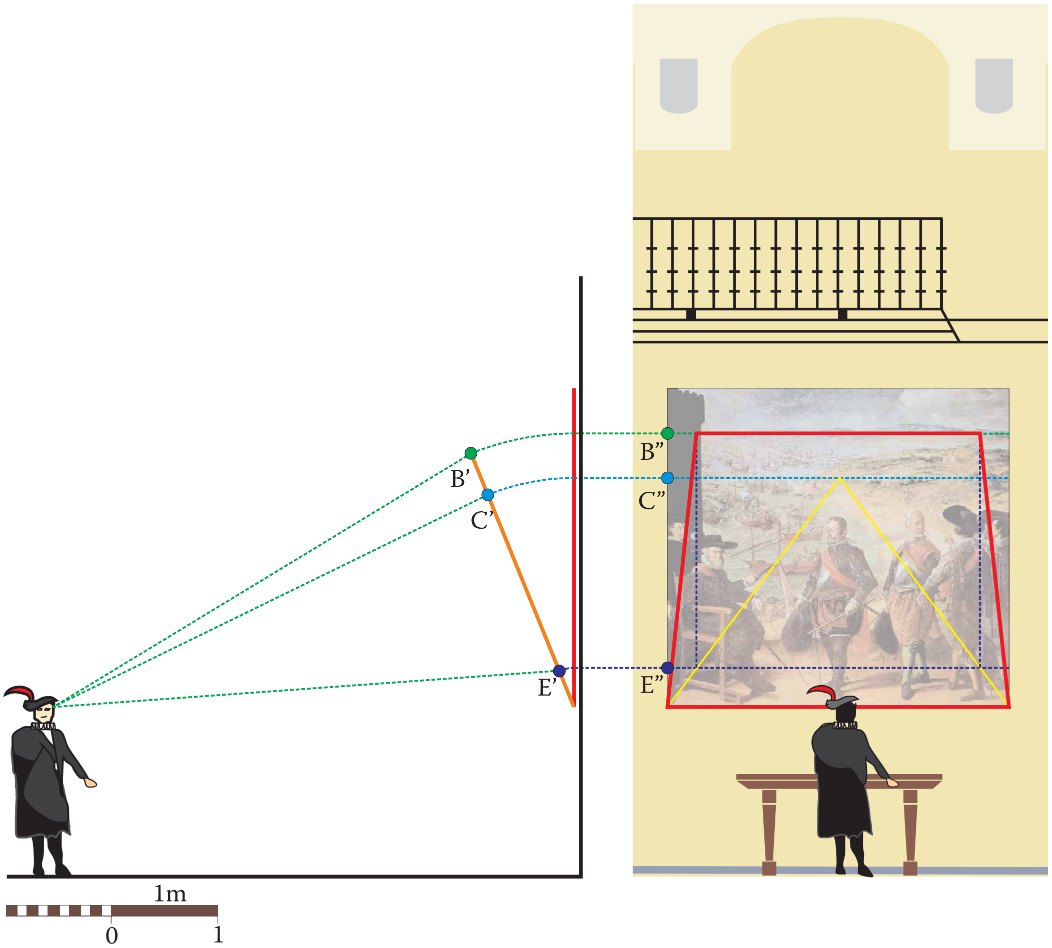


del cuadro, *AB*, y el punto de fuga, *C*. El espectador dirige su mirada hacia *C*, y la imagen virtual de lo que ve, se forma, por tanto, sobre un plano perpendicular a la línea que va de su ojo a *C*, el plano *AD*. El cuadro se ve aparentemente inclinado, es decir, la parte superior está más lejos del espectador que la inferior, eso provocará que la veamos más estrecha. La inclinación aparente hace que el cuadro se vea, además, más estrecho en altura. Trataremos de calcular cuánto.

El cuadro lo vemos como si estuvera inclinado dentro de una caja, la señalada por las líneas naranja. Proyectamos el extremo superior del cuadro *B* en esa caja obteniendo el punto E. Si el espectador lanza una visual al punto *E* y otra al *B*, estas visuales incidirán en el plano de la imagen en los puntos *E'* y *B'* respectivamente. Por último, la visual lanzada al punto de fuga *C*, incide en el plano de visión en el punto *C'*. Se trata ahora de recomponer sobre el plano de la imagen lo que el espectador ve.

Sobre el plano de la imagen habíamos determinado tres puntos: *B'* verde, *C'* celeste y *E'* violeta. Se trata ahora de transportar las medidas que determinan estos puntos sobre el cuadro y calcular así las dimensiones del trapecio que ve el espectador.

Situemos a la derecha al espectador de nuevo ante el cuadro. Transportamos *B'*, *C'* y *E'* que se convierten en *B''*, *C''* y *E''* respectivamente. El punto *B''* determina la altura a la que el espectador ve la parte superior del marco. El punto *C''* determina la de la línea del horizonte; en su punto central convergen las líneas de perspectiva del suelo de la escena, en amarillo en la gráfica. Por último, trazando una horizontal a la altura de *E'* obtenemos sobre las líneas amarillas dos puntos. Elevando éstos verticalmente obtenemos sobre B'' otros dos puntos.



Por último, uniendo estos dos ultimos puntos con la línea de la base del cuadro, determinamos el trapecio en el que se incribe la imagen virtual que ve el espectador.

Si nos fijamos en ese trapecio, en rojo en el gráfico, incluso podemos apreciar la sensación de inclinación aparente hacia atrás. La imagen del cuadro se verá deformada anamórficamente hasta quedar encerrada en ese trapecio.

Gracias a los programas de manipulación de imágenes no resulta muy complicado realizar esta trasformación. Se trata de una *proyectividad*. Aplicada sobre el cuadro usando alguno de estos programas, podremos, finalmente, hacernos una idea de qué es lo que vería un espectador, que se paseara por el Salón de Reinos del Palacio del Buen Retiro y se detuviera ante el cuadro de *La defensa de Cádiz contra los ingleses* de Zurbarán. La imagen que vería sería aproximadamante ésta:

La defensa de Cádiz contra los ingleses, Francisco de Zurbarán, 1634, M.N. del Prado, Madrid
Proyección anamórfica del cuadro simulando la visión de un observador
del cuadro en su ubicación original.

Los personajes se han estilizado, resultan menos braquicéfalos y más delgados, pero sobre todo el paisaje de la Bahía de Cádiz ha ganado profundidad y realismo; ahora parece un paisaje y no un decorado. Todo parece haber ocupado de nuevo su lugar y su proporción.

Imagino en la mente de los lectores un cierto grado de escepticismo. ¿Pensó Zurbarán realmente todo ésto para hacer su cuadro? En este caso creo poder afirmar que la respuestas es sí. O Zurbarán o algun otro, quizás el pintor responsable de toda la concepción global de toda la iconografía del Salón de Reinos, quizás Velázquez. Alguno de ellos concibió y calculó la deformación necesaria para que al ser vistos desde el centro del salón se vieran *bien*. De hecho, éste de Zurbarán no es el único que presenta este tipo de anamorfismo. El famosísimo cuadro de *Las lanzas*, de Velázquez, ofrece, de manera mucho menos aparente, el mismo tipo de deformación.

El cuadro de Zurbarán ocupaba el espacio del final de uno de los laterales largos del Salón de Reinos por ello es en anchura un poco más estrecho que *La rendición de Breda*. La inclinación hacia el centro de los lados del trapecio no depende de la anchura del cuadro sino sólo de su altura. Los lados de, *Las lanzas* y *La defensa de Cádiz*, al ser de la misma altura, se inclinan hacia adentro un ángulo igual. Por ello, al ser *Las lanzas* más ancho, el efecto en proporción resulta menor y es más difícil percibirlo a simple vista. Por último, Justino de Nassau y el mismo Ambrosio de Spínola, en el centro del cuadro de Velázquez, hacen una reverencia contribuyendo así a disminuir el efecto fusiforme de los personajes del cuadro de Zurbarán. También, la presencia genial de las lanzas en la composición contribuye a disimular el anamorfismo.

Si aplicásemos, no obstante, la misma trasformación a *La rendición de Breda*, veríamos que la proporción de las formas mejora, como en *La defensa de Cádiz*.

Del Palacio del Buen Retiro sólo se conserva el Casón del Buen Retiro, ahora exento, los jardines y el ala norte, en la que se encuentra el Salón de Reinos. Hasta hace poco tenia su sede allí el Museo del Ejercito. Esperamos que en un futuro, restaurado e incorporado al Museo del Prado, el Salón de Reinos vuelva a lucir como en tiempos de Felipe IV, con las *batallas* en su ubicación original. Así se podrá ver en la realidad lo que ahora sólo hemos podido ver *con ojos matemáticos*.

ARTE CON OJOS MATEMÁTICOS ■

suma+ 58
Junio 2008, pp. 87-92

Nuestro calendario: una medida de gran precisión

Hace 425 años concretamente en octubre de 1582, se estableció el calendario que rige nuestra vida en la actualidad, es el llamado calendario gregoriano. La palabra calendario procede etimológicamente de *calendarium*, palabra latina que designaba cualquier relación de fechas. Un calendario no es más que una distribución del tiempo en periodos que se adapten a las necesidades humanas. Pero, esta distribución no es nada fácil, y ello explica que el calendario actual tenga tan relativamente pocos años de vigencia. Es más, se explica así que distintas civilizaciones y pueblos hayan dado lugar a diferentes calendarios. A día de hoy, aún coexisten unos cuarenta calendarios, sin relación alguna entre ellos.

> *Nuestro calendario está basado principalmente en los movimientos aparentes del sol, aunque en la antigüedad hubo calendarios que tuvieron en cuenta las fases de la luna y ello dejó su impronta en el nuestro.*

Unidades básicas de tiempo

Para comprender las dificultades con que tropezó la humanidad a la hora de confeccionar el calendario conviene recordar cuáles son los criterios que se han tenido en cuenta para su confección. Nuestro calendario está basado principalmente en los movimientos aparentes del sol, aunque en la antigüedad hubo calendarios que tuvieron en cuenta las fases de la luna y ello dejó su impronta en el nuestro.

El periodo de tiempo más importante para la vida humana es el *día* solar verdadero, que, como se sabe, es el tiempo que transcurre entre dos pasos consecutivos del Sol por el meridiano de un lugar, o bien, el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta completa alrededor de su eje. Al día le sigue en importancia el *año* solar o trópico, tiempo que tarda la Tierra en completar una vuelta en su movimiento de traslación alrededor del Sol. Debido a la inclinación de la Eclíptica, o plano en que se produce el movimiento de traslación, respecto al plano del Ecuador, se suceden a lo largo del año las conocidas cuatro estaciones. Los calendarios lunares, basados en el movimiento de la luna y mucho más primitivos que los solares, consideraban como unidad principal de tiempo el *mes* (del latín *mensis*), y esta unidad con distintas variaciones llegó hasta nuestros días.

¿Cuáles han sido las dificultades para la formación de los calendarios?

Santiago Gutiérrez
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas Emma Castelnuovo
hace@revistasuma.es

En primer lugar, una dificultad es que no todos los días solares verdaderos son iguales, y ello por dos razones:

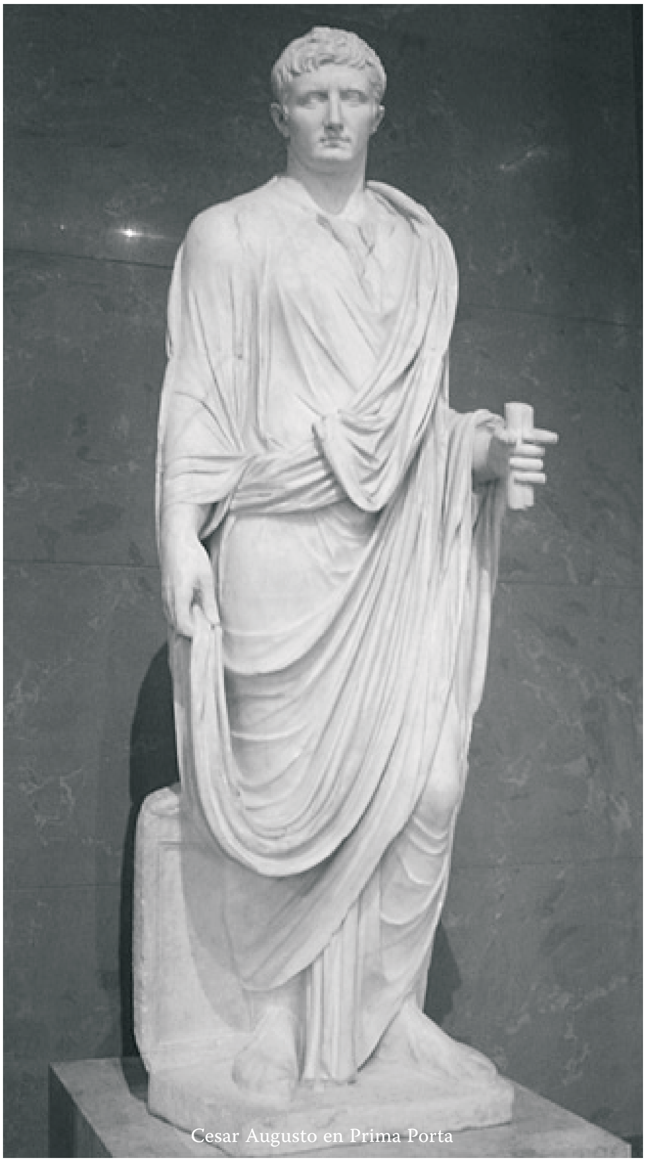
— El movimiento de la Tierra alrededor del Sol se produce sobre una elipse, uno de cuyos focos es el Sol, de modo que la Tierra no siempre se encuentra a la misma distancia del Sol y su velocidad aumenta al acercarse al Sol mientras que disminuye al alejarse de él.

— La inclinación de la Eclíptica respecto al plano del Ecuador incide también en que los días se diferencien unos de otros.

El hecho de que los días solares verdaderos no sean todos iguales llevó a los científicos a tener que definir el día de una forma ideal, como el llamado *día solar medio*, resultado de imaginar el movimiento de traslación de la Tierra sobre una circunferencia (en vez de una elipse), en cuyo centro se encontrara el Sol y cuyo plano coincidiera con el del Ecuador, al objeto de fijar un periodo constante que facilite nuestra vida diaria.

En segundo lugar, la otra dificultad, y decisiva, para construir un calendario es el hecho de que el año no contiene un número exacto de días solares medios.

Veremos de qué manera estas dificultades han ido determinando las distintas vicisitudes por las que ha ido atravesando nuestro calendario, que ahora homenajeamos en su 425 aniversario, hasta épocas bien recientes.



Cesar Augusto en Prima Porta

Los antecedentes próximos

Los orígenes del calendario gregoriano hay que buscarlos en Roma. El año romano primitivo, año de Rómulo, tenía 304 días, agrupados, al parecer, en diez meses, de los cuales cuatro tenían 31 días y los otros seis eran de 30 días. Los nombres de los meses, con sus días correspondientes, eran:

1. *Martius*, de 31 días, dedicado a Marte
2. *Aprilis*, de 30 días, dedicado a Apolo, de sobrenombre Aperta.
3. *Maius*, de 31 días, dedicado a Júpiter, de sobrenombre Maius.
4. *Junius*, de 30 días, dedicado a Juno.
5. *Quintilis*, de 31 días, llamado así por ser el quinto mes.
6. *Sextilis*, de 30 días, llamado así por ser el sexto mes.
7. *September*, de 30 días, llamado así por ser el séptimo mes.
8. *October*, de 31 días, llamado así por ser el octavo mes.
9. *November*, de 30 días, llamado así por ser el noveno mes.
10. *December*, de 30 días, llamado así por ser el décimo mes.

El hecho de que los días solares verdaderos no sean todos iguales llevó a los científicos a tener que definir el día de una forma ideal, como el llamado día solar medio,...

Hacia el año 700 a.d.C., el segundo rey de Roma, *Numa Pompilio*, modificó el número de meses y de días del año. Añadió 51 días, quedando el año en 355 días, y otros dos meses, *Januarius*, en honor de Juno, y *Februarius*, en honor de Febro, sumando en total doce meses. Los 355 días y los doce meses se distribuyeron y ordenaron del siguiente modo:

> *El año romano primitivo, año de Rómulo, tenía 304 días, agrupados, al parecer, en diez meses, de los cuales cuatro tenían 31 días y los otros seis eran de 30 días.*

1. *Martius*, de 31 días.
2. *Aprilis*, de 29 días.
3. *Maius*, de 31 días.
4. *Junius*, de 29 días.
5. *Quintilis*, de 31 días.
6. *Sextilis*, de 29 días.
7. *September*, de 29 días.
8. *October*, de 31 días.
9. *November*, de 29 días.
10. *December*, de 29 días.
11. *Januarius*, de 29 días.
12. *Februarius*, de 28 días.

Busto de Julio Cesar

Todavía con este número de días, el año se quedaba corto en algo más de 11 días, con respecto al año solar. Así que dispuso Numa que se añadiese un nuevo mes cada dos años, de 22 o 23 días, alternativamente. A este nuevo mes lo llamó *Mercedinus*, porque en él se pagaba a los servidores, y se intercalaría entre el 23 y el 24 de Februarius. Pero, de este modo el año se alargaba demasiado y tenía por término medio 366 días y cuarto.

Hacia el año 450 a.d.C., los decenviros adoptaron la llamada octoetérida de Cleostrato de Ténedos, según la cual en cada tercer periodo de ocho años se intercalarían tres meses de 22 días en vez de los cuatro preceptivos. Los pontífices, encargados de dar al mes de *Mercedinus* el número de días necesario para corregir los desfases entre el año civil y el verdadero, realizaban la asignación arbitrariamente de acuerdo con sus propios intereses electorales, o los de sus amigos. Esto provocó tal desfase que en tiempos de Julio Cesar el otoño se presentó en verano y el invierno en otoño, es decir, el año civil difería en tres meses respecto del año verdadero.

La reforma Juliana

Ante el desastre producido por la mala gestión del calendario, en el año 707 de la fundación de Roma (47 a.d.C.), el entonces gran pontífice Julio Cesar se propuso hacer una reforma que permitiese arreglar el desfase producido y establecer un nuevo sistema de calendario, llamado por eso calendario Juliano, para no volver a tener el mismo problema en el futuro. Encargó el asunto al astrónomo alejandrino Sosígenes, que tomó dos decisiones al efecto:

— Añadir al año 707, además del mes *Mercedinus*, de 23 días, otros dos meses, entre *November* y *December*, de 33 y 34 días respectivamente, con el fin de restablecer el siguiente equinoccio de primavera en el 25 de Martius, como ocurría en el calendario de Numa. El año en cuestión resultó ser de 445 días, por lo que es conocido como el *año de la confusión,* si bien tuvo la virtud de devolver así las aguas a su cauce.

— La segunda medida de Sosígenes consistió en establecer el año de 365 días. Pero, consciente de que el año solar verdadero duraba un cuarto de día más, estableció que cada cuatro años se añadiese un día al año, precisamente al final de *Februarius*.

El año del calendario Juliano seguiría teniendo los doce meses de Numa, pero, con *Januarius* y *Februarius* ocupando los dos primeros lugares, y con los días dispuestos de modo que los meses impares tendrían 31 días, esto es, *Januarius*, *Martius*, *Maius*, *Quintilis*, *September*, *November*, mientras que los demás tendrían 30 días, excepto *Februarius* que contaría tan solo con 29, en los años no bisiestos.

Julio César, para satisfacer su vanidad, cambió el nombre del mes *Quintilis*, el de su nacimiento, por el de *Julius*. Posteriormente, Cesar Augusto no quiso ser menos, y dio su nombre de *Augustus* al mes *Sextilis*, que por otra parte no podía tener menos días que el mes de su antecesor, Julius, y añadió un día a su mes, por lo que *Augustus* pasó a tener 31 días. Este día se tomó de *Februarius*, que pasó a tener 28. Pero, entonces había tres meses seguidos de 31 días, y para evitarlo, se redujeron a 30 los días de *September* y *November*, que se añadieron a *October* y *December*.

Los meses se componían de tres partes, las *calendas*, que eran los primeros días de cada mes, las *nonas*, que eran los días 5 o 7, según el número de días del mes, y los *idus*, que eran los días 13 o 15, correspondiendo a las nonas, según fueran el 5 o 7, respectivamente. Esta división procedía de la que se hacía más antiguamente en el mes lunar, coincidiendo con las fases de la Luna, las calendas con la Luna nueva, las nonas con el cuarto creciente, y los idus con la Luna llena. El último día de Februarius era así llamado "ante diem sextum calendas Martius", con lo que al día añadido cada cuatro años en la reforma juliana, se le llamó bis-sextum. De ahí que actualmente los años en que se añade un día se denominen *bisiestos*.

La reforma Gregoriana

No puede dejar de asombrarnos la precisión con que se diseñó la reforma Juliana, en un tiempo en que todavía no había surgido un Copérnico que aclarara los movimientos reales de la Tierra alrededor del Sol, en lugar de los movimientos aparentes del Sol alrededor de la Tierra, con que trabajaban los astrónomos de la época. Tampoco se disponía del telescopio de Galileo, que tantos avances produjo en la observación del firmamento. Sin embargo, a pesar de tanta escasez de medios, al año de Sosígenes le faltaban tan solo 11 m y 12 s para dar la medida real de la revolución de la Tierra alrededor del Sol.

Gregorio XIII

De este modo, el calendario Juliano producía un error de un día cada 128 años, con lo que, al cabo de los siglos, se habían llegado a desplazar las estaciones de manera muy sensible. Así, el equinoccio de primavera, que se había producido el 25 de Marzo tras la reforma Juliana, en el año 325, ya se había adelantado al 21 de Marzo, y en 1582, coincidía con el 11 de Marzo.

Se imponía una reforma del calendario, sentida como necesaria desde hacía tiempo. Ya en 1260, lo había hecho notar el astrónomo inglés Juan de Sacrobosco. Más tarde, Juan de Sajonia y, posteriormente, Nicolás de Cusa y otros varios astrónomos propusieron medios para corregir los desfases del calendario Juliano. Todavía, desde las voces de distintos concilios celebrados por la Iglesia de Roma, se urgió durante más de un siglo a los correspondientes Papas la necesidad de una reforma del calendario. Uno de estos Papas hizo incluso ir a Roma, para elaborar una solución, al matemático Juan Regiomontano. Pero, éste murió en 1476 sin poder terminar su obra.

El papa Gregorio XIII, en 1582, después de consultar a los sabios del mundo conocido, sobre todo a los hermanos Lilio, a Clavio y a Chacón, promulgó un decreto en el que se contenía el nuevo calendario, denominado por ello como Gregoriano, vigente desde entonces y cuyo aniversario celebramos actualmente. Al introducir un día cada 400 años, para corregir el defecto del calendario de Sosígenes, se producía un exceso muy aproximado de tres días al cabo de ese periodo de tiempo, de modo que el equinoccio de primavera se había adelantado 11 días, así que la propuesta de Gregorio XIII consistió en lo siguiente:

— Suprimir 10 días del calendario. Esto se hizo el día 5 de octubre de 1582, pasando a ser 15 de octubre el día siguiente.

— Suprimir tres días cada 400 años, de modo que dejarían de ser bisiestos los años múltiplos de 100 que no lo fueran de 400. Así, desde entonces, no fueron bisiestos los años 1700, 1800, y 1900, y sí lo fue, en cambio el año 2000.

Los pontífices, encargados de dar al mes de Mercedinus el número de días necesario para corregir los desfases entre el año civil y el verdadero, realizaban la asignación arbitrariamente de acuerdo con sus propios intereses electorales, o los de sus amigos.

El Papa Gregorio propuso esta reforma, para su aceptación, a todos los soberanos. Y estos respondieron de la siguiente manera:

— España, Portugal e Italia (este en parte) pusieron en práctica el nuevo calendario, desde el mismo día 15 de Octubre de 1582.

El jesuita alemán Christopher Clavius, Junto con Lilio, fue el miembro más destacado de la Comisión del Calendario. El cráter más grande de la Luna lleva su nombre

— Francia y la Lorena, lo hicieron en el mes de Diciembre del mismo año, en que del 10 se pasó al 20.

— Dinamarca, si bien lo adoptó en el mismo año de 1582, lo abandonó en 1699, cambiándolo por el calendario hecho por los protestantes.

— Los Países Bajos, lo hicieron en 1583 en la mayoría de sus provincias, y en 1700 las restantes.

— En Suiza, los católicos lo adoptaron entre 1583 y 1590, y en 1584 los católicos alemanes. Hay que esperar a 1778 para verlo adoptado de una forma general en todos los estados de Prusia, por una orden de Federico el Grande.

— Polonia y Hungría se sumaron al nuevo calendario en 1586 y 1587, respectivamente.

— Inglaterra no adoptó el nuevo calendario hasta 1752.

Poco a poco el calendario gregoriano se fue imponiendo en otros países, de modo que actualmente es utilizado en la mayoría de los países.

Exactitud del calendario Gregoriano

Con los medios de que disponemos en la actualidad, podemos cifrar con mayor precisión la duración del año solar, que resulta ser de 365 días 5 horas 48 minutos 6 segundos. Por su parte, la duración media del año según el calendario gregoriano, en un periodo de 400 años, es de 365 días 5 horas 49 minutos 12 segundos. Se produce por tanto un exceso en la medida del año, según nuestro calendario, de 26 segundos, sobre el año solar. Esto supone un exceso de un día cada 3 323 años. Como este número de años es bastante próximo a 4000, se ha convenido en que el año 4000 y sus múltiplos, dejen de ser bisiestos, como les correspondía.

> *Los meses se componían de tres partes, las calendas, que eran los primeros días de cada mes, las nonas, que eran los días 5 o 7, según el número de días del mes, y los idus, que eran los días 13 o 15, correspondiendo a las nonas, según fueran el 5 o 7, respectivamente.*

Para ver si cabría efectuar una corrección más precisa del calendario se ha desarrollado en fracción continua la fracción decimal 0,2422, que supone el exceso del año solar sobre 365 días. Y eso da como resultado:

$$0{,}2422=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}$$

cuyas primeras reducidas son:

$$\frac{1}{4},\frac{7}{29},\frac{8}{33},\frac{31}{128},\frac{132}{545},\frac{163}{673},\ldots$$

La primera reducida, 1/4, corresponde a la corrección del calendario Juliano, indica el día que hay que añadir cada 4 años.

La segunda reducida, 7/29, indica los 7 días que habría que añadir en 29 años, con lo que aun nos quedaríamos cortos, en vez de los 7 días que añadimos cada 28 años, lo cual provoca un exceso, como sabemos.

... a pesar de tanta escasez de medios, al año de Sosígenes le faltaban tan solo 11m y 12 s para dar la medida real de la revolución de la Tierra alrededor del Sol.

La tercera reducida, 8/33, indica los 8 días que habría que añadir cada 33 años, y esto provocaría un exceso, en vez de los 8 días que añadimos cada 32 años. Esta forma de intercalación es conocida como de Omar Cheyan, en honor de este astrónomo que fue uno de los ocho convocados por el sultán Gelaledin Match Shah para la reforma del calendario en el año 1079 de nuestra era.

Con los medios de que disponemos en la actualidad, podemos cifrar con mayor precisión la duración del año solar, que resulta ser de 365 días 5 horas 48 minutos 6 segundos.

Con la tercera reducida se conseguiría un año con una duración media de 365 días 5 horas 49 minutos 5,45 segundos, esto es, con solo 19,45 segundos de diferencia sobre el verdadero, cantidad inferior a la que proporciona la reforma gregoriana. Por otra parte, al ser menores los periodos de corrección, estaríamos siempre más cerca del año verdadero de lo que estamos ahora. Parece que un procedimiento similar había sido seguido ya por los Persas en la confección de su calendario.

Una última idea, digna de mención, es la pensada por el matemático francés Jean-Baptiste Delambre (1749-1822), que proponía una combinación de las reducidas segunda y tercera anteriores de la siguiente forma:

$$\frac{7+3+8}{29+3+33}=\frac{31}{128}$$

Es decir, se trataría de intercalar 31 días cada 128 años. Esto daría una aproximación tan cercana a la realidad que solo exigiría suprimir un bisiesto cada 128 años. El error sería inferior a un día cada 100 000 años.

HACE

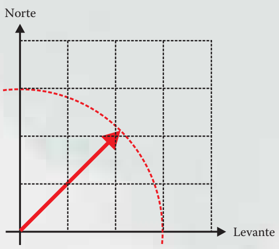
SUMA+ 58
Junio 2008, pp. 93-100

En las ciudades invisibles VI y VII

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

Kublai: –Desde allí parte el hombre y cabalga tres jornadas entre norte y levante...



Polo: –Para distinguir las cualidades de las otras he de partir de una primera ciudad que permanece implícita. Para mí es Venecia.

Kublai: –Entonces deberías empezar cada relato de tus viajes por el lugar de partida, describiendo Venecia tal como es, toda entera, sin omitir nada de lo que recuerdas de ella.

No es la primera vez que Calvino localiza un lugar mediante un ángulo y una distancia. Unas coordenadas polares referenciadas en los puntos cardinales y una distancia medida con unidad de tiempo.

Según Marco Polo las cualidades de las ciudades se distinguen con relación a una primera ciudad implícita. Lo mismo se diría del número 1 y los demás números naturales. La naturaleza de éstos basada en la reiteración implícita del primero en todos ellos:

$$a=[a] \qquad [a]+a=[aa] \qquad [aa]+a=[aaa] \qquad \ldots \qquad [aa\ldots a]+a=[aaa\ldots a]$$

Pero, ¿no se tratará tan sólo de una apariencia? Si Venecia fuese verdaderamente esa ‘primera ciudad que permanece implícita’, Marco Polo no sólo podría, sino que habría comenzado por describirla antes de esbozar las otras ciudades. De igual modo podríamos construir los números naturales. Describiendo el 1 con detalle y a partir de él esbozar los demás cardinales. Kublai Jan invita a Marco Polo a hacerlo así. Sin embargo, no es este el proceder del veneciano. La realidad es otra. En las ciudades que visita Marco Polo encuentra rasgos de su ciudad natal, pero es justamente entonces, hallando en lo extraño detalles de lo conocido, que lo extraño se le hace próximo, asimilable, comprensible. Es entonces y no antes, que el viajero transforma lo conocido en patrón de contraste, de comparación y de medida con el que valorar lo nuevo. Así es como Venecia se convierte en implícita y entera.

Tampoco el 1 es premisa, sino conclusión. El 1 es la entidad mínima común a todas las cantidades, el patrón esencial que permite compararlas y diferenciarlas unas de otras:

$$[aaa\ldots a]=[aa\ldots a]+a \qquad \ldots \qquad [aaa]=[aa]+a \qquad [aa]=[a]+a \qquad [a]=a$$ ■

Diseño y maquetación FMC

Miquel Albertí Palmer
IES Vallés, Sabadell
ciudadesinvisibles@revistasuma.es

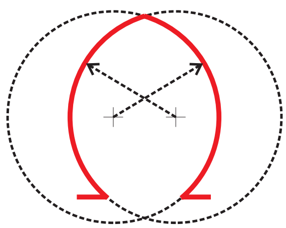

Las ciudades y los ojos. 4

Fílides

Fílides

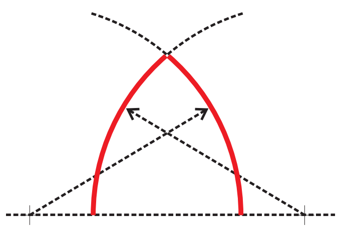
La variedad de las ventanas de Fílides incluye las ojivales, hechas con arcos circulares del mismo radio que se cortan volviendo la concavidad el uno al otro. El morisco y el lanceolado son arcos ojivales. Ambos se trazan con dos arcos centrados sobre la misma horizontal. En el primero, los centros son interiores al arco compuesto resultante, el pie del arco por debajo de la horizontal de ambos centros:

...variedades de ventanas se asoman a las calles: en ajimez, moriscas, lanceoladas, ojivales, coronadas por lunetas o por rosetones ...



Arco morisco

En el segundo, el arco lanceolado, los centros son exteriores y se hallan situados en la misma horizontal que los puntos de apoyo:



Arco lanceonado

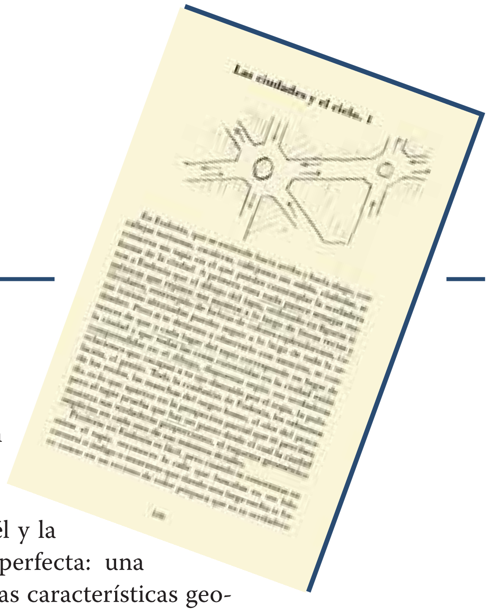
Una ventana en ajimez está dividida en el centro por una columna, formando así un doble arco. El rosetón es un adorno arquitectónico circular, generalmente calado, y que acostumbra a dividirse en 3, 4, 6, 8, ..., 2^m3^n partes iguales. Las lunetas más corrientes son arcos circulares en medialuna o ángulos que a modo de alero o teja cubren la parte superior del rectángulo de un ventanal o se abren en la bóveda de una galería.

Fílides es un espacio donde se dibujan recorridos entre puntos suspendidos en el vacío ...

Pese a toda esa geometría que sorprende al recién llegado, no es la geometría lo que confiere a Fílides su carácter, sino la costumbre que hace invisibles los detalles transformando la ciudad en un *espacio donde se dibujan recorridos entre puntos suspendidos en el vacío*. ■

Fílides: *su geometría es visible, su esencia invisible*

Eudoxia


Las ciudades y el cielo. 1

...se conserva un tapiz ...ordenado en figuras simétricas que repiten sus motivos a lo largo de líneas rectas y circulares ...

...a cada lugar del tapiz corresponde un lugar de la ciudad y que todas las cosas contenidas en la ciudad están comprendidas en el dibujo...

...hay un punto desde el cual la ciudad muestra sus verdaderas proporciones, el esquema geométrico implícito en cada uno de sus más mínimos detalles.

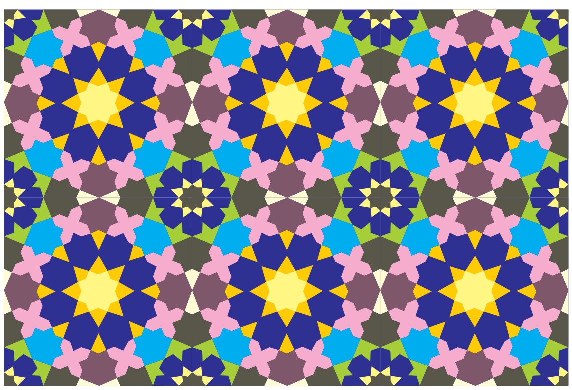
Uno de los dos objetos... tiene la forma que los dioses dieron al cielo...; el otro no es más que su reflejo aproximativo... Pero tú puedes sacar la conclusión opuesta: que el verdadero mapa del universo es la ciudad de Eudoxia tal como es...

El tapiz de Eudoxia desarrolla sus motivos en *lineas rectas y circulares*, esto es, mediante translaciones y giros. El tapiz es un mapa exhaustivo de Eudoxia. La sintonía en entre él y la ciudad, entre la realidad y su modelo, es perfecta: una correspondencia 1-1. En el tapiz se exponen las características geométricas de la ciudad, pues existe un lugar desde el que la ciudad *muestra sus verdaderas proporciones, el esquema geométrico implícito en cada uno de sus más mínimos detalles*.

Si el tapiz es modelo del Cielo y de la ciudad, la ciudad lo es de los otros dos. Ambas interpretaciones tienen sentido, ya que toda correspondencia 1-1 es reversible. Una vez establecida, la imagen y su original se confunden. ¿Cuál es el original y cuál es la imagen? Si un objeto es modelo de una realidad, la realidad es modelo del objeto.

La otra noche soñé con París. Paseaba por una de sus avenidas cuando en un parterre de césped vi algo brillante. Me agaché para cogerlo, pero estaba pegado al suelo. Al acercar más la mirada observé que no era de hojas de hierba de lo que estaba hecho el parterre, sino de hilos de lana y seda. Sorprendido, me incorporé. Toda la avenida estaba tejida de verde. El asfalto había desaparecido. A sus lados se abrían calles de vivos colores. Enfilé una de ellas hacia la plaza del Arco de Triunfo. El suelo era blando y silencioso, los coches pasaban en un susurro. Al llegar rodeé la plaza. Las doce avenidas que desembocan en ella también habían sido tejidas con lana y seda, cada una con un color distinto.

Por la tarde fui a la plaza de Tertre y la encontré vacía. Pregunté por los pintores a un ciudadano y me señaló las fachadas. Todas las ventanas y balcones estaban ocupados por algún artista. Me invitaron a subir. Y fue entonces, mirando París desde arriba, que me di cuenta de la maravilla. El tema de sus obras era el mismo. *Pintamos Paris*, decían entusiasmados. Cierto, pintaban París, el pavimento de París. Un suelo convertido en tapiz de calles rectilíneas y plazas circulares de colores brillantes. ■



Eudoxia*: ciudad real y ciudad modelo*

Esmeraldina

La retícula configura el espacio físico de la ciudad. En Esmeraldina la red reticular es doble; una hecha de calles; la otra, de canales. Ambas se *superponen y entrecruzan* configurando una retícula tridimensional en la que las distancias se salvan con itinerarios zigzagueantes.

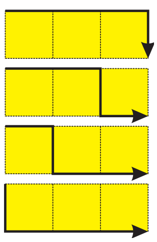
En esa realidad reticular de Esmeraldina Calvino contextualiza una definición tradicional de línea recta. La línea más breve entre dos puntos es una poligonal de segmentos. Y la retícula urbana facilita un sinfín de posibilidades para variar esos zigzagueos, terrestres o acuáticos, entre el origen y el destino de cada trayecto. Y *no son sólo dos, sino muchas* las posibilidades. Pero, ¿de cuántas estamos hablando?

La retícula de Esmerldina no es sólo tridimensional porque se crucen sus calles y canales, como afirmó Calvino antes, sino también porque la *red de pasajes no se organiza en un solo plano*. Calvino explicita así el carácter tridimensional de la retícula urbana de Esmeraldina.

Y volviendo al número de trayectos posibles entre dos puntos, el transeúnte se permite el lujo de variar cada día su itinerario.

Si en cada encrucijada de una retícula plana se citan dos direcciones y cuatro sentidos, en el vértice de una retícula espacial lo hacen tres direcciones y seis sentidos. El paseante del plano puede optar entre ir hacia el Norte-N, hacia el Sur-S, al Este-E o al Oeste-O. En Esmeraldina puede, además, ascender-A o descender-D.

En tales condiciones, el recorrido entre dos puntos P y Q del plano se traduce en una palabra compuesta de dos de las cuatro letras posibles, algo similar a las componentes del vector determinado por los dos puntos, el de origen y el de destino. Por ejemplo, el trayecto desde $P(2, 1)$ hasta $Q(5, 0)$ tiene por componentes $(3, -1)$ y se traduce en la palabra EEES –tres pasos hacia el Este y un paso hacia el Sur. Pero no es ésta la única posibilidad. Cualquier otra versión desordenada de los mismos pasos lleva al mismo lugar:



Disponemos de cuatro maneras distintas de hacerlo (EEES, EESE, ESEE, SEEE):

$$PR_{3+1}^{1,3} = \frac{(3+1)!}{1!3!} = \frac{4!}{3!} = 4$$

...una retícula de canales y una retícula de calles se superponen y se entrecruzan. Para ir de un lugar a otro siempre puedes elegir entre el recorrido terrestre y el recorrido en barca.

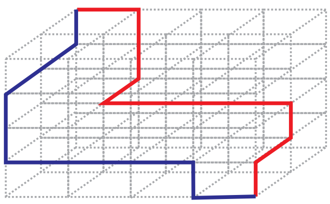
la línea más breve entre dos puntos no es una recta sino un zigzag ramificado en tortuosas variantes, las calles que se abren a cada transeúnte no son sólo dos sino muchas, y aumentan aún más para quien alterna trayectos en barca con transbordos a tierra firme.

la red de pasajes no se organiza en un solo plano, sino que sigue un subir y bajar de escalerillas, galerías, puentes

Un mapa de Esmeraldina debería comprender (...) todos esos trazados, sólidos y líquidos, patentes y ocultos.


Las ciudades y los intercambios. 5

Esmeraldina



En el espacio ocurre igual, sólo que aquí se necesitan, no dos, sino tres letras. Yendo desde $P(1, 2, 3)$ hasta $Q(-1, 3, 6)$ trazamos virtualmente un vector de componentes (–2, 1, 3), cuya versión verbal es OONAAA. Pero cualquier palabra hecha con una N, dos O y tres A nos llevará al mismo destino. No importa la permutación de sus letras. La distancia será la misma si la retícula tridimensional es regular.

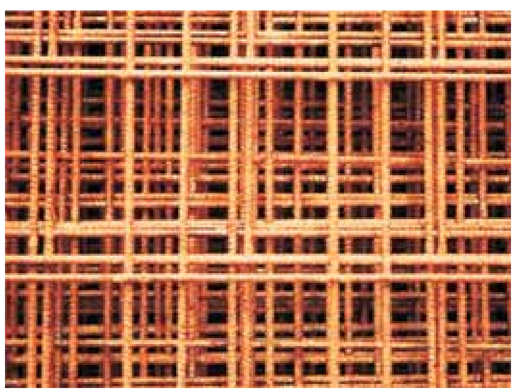
Para calcular cuántas palabras o itinerarios distintos pueden hacerse en el espacio siguiendo las líneas de una retícula tridimensional basta tener en cuenta que cada palabra se hace con tres letras tomadas de {N,S,E,O,A,D}. Puesto que cada una de las tres letras se repite m, n y p veces respectivamente, las posibilidades para ir de un punto a otro sin variar la extensión del recorrido son:

$$PR_{m+n+p}^{m,n,p} = \frac{(m+n+p)\,!}{m!\,n!\,p!}$$

Combinando sectores de los diversos trayectos elevados o de superficie, cada habitante se permite cada día el placer de un nuevo itinerario para ir a los mismos lugares.

A diferencia de lo que ocurre con los vectores numéricos tradicionales en los que interviene el signo, en este contexto el orden de los factores no altera el destino. Dos vectores verbales como [2S, 1N, 4D] y [1N, 4D, 2S] son sinónimos, te llevan al mismo lugar.

Tal y como dice Calvino, y dada su esencia reticular tridimensional, un mapa de la ciudad no debería ser plano, sino espacial. Una red desplegable hecha con alambres parecida a aquéllas con las que muchos jugábamos cuando niños y a las que podías dar la vuelta como a un calcetín. Debido a la humedad de sus canales, esa red estaría siempre oxidada:



Esmeraldina*: la ciudad de mapa tridimensional*


Las ciudades y los ojos. 5

Moriana

Moriana

Algo carente de espesor, que sólo consta de un anverso y un reverso como una hoja de papel, pero que, sin embargo, no es una hoja de papel, con una figura en un lado y otra en el otro que no pueden despegarse. Si no se trata de un plano, se le aproxima mucho. Calvino relata algunas características propias de un objeto bidimensional o casi bidimensional, tal vez consciente de su imposibilidad real en nuestro mundo de tres dimensiones. En cualquier caso no hay duda de que la ciudad de Moriana está inspirada por la bidimensionalidad. Lo reconoce el propio Calvino en su nota preliminar a *Las ciudades invisibles* calificando a Moriana de ciudad bidimensional. Su descripción se basa en la hoja de papel, un modelo físico, literario y real, muy similar al objeto ideal bidimensional del mundo matemático: el plano.

...en realidad no tiene espesor, consiste sólo en un anverso y un reverso, como una hoja de papel, con una figura de un lado y otra del otro que no pueden despegarse ni mirarse.

La visita a Moriana evoca en el matemático gratos recuerdos de su visita a la *Flatland* de Abb ott y de su encuentro con *El disco* de Borges. Tanto una como el otro comparten conMoriana su aspecto bidimensional. Para imaginar *Flatland*, Abbott, como Calvino, utiliza también la hoja de papel, pero algo más extensa y recomienda pensar en las sombras creadas encima ella .

Imagine a vast sheet of paper on which straight Lines, Triangles, Squares, Pentagons, Hexagons, and other figures, instead of remaining fixed in their places, move freely about, on or in the surface, but without the power of rising above or sinking below it, very much like shadows ...

Abbott, 1884

El disco borgiano, en cambio, no se inspira en las sombras ni en la hoja de papel, sino en un detalle crucial de la bidimensionalidad como es la inexistencia de dos caras. El propio Borges dijo de su disco que por eso mismo se trataba del círculo euclidiano.

Es el disco de Odín. Tiene un solo lado. En la tierra no hay otra cosa que tenga un solo lado.

Borges, 1996

Una terrible catástrofe se encargó de proporcionar una Moriana, una Flatland y un disco de Odín reales. Aparte de la mezquita, así quedó la localidad de Lhongka, al noroeste de Sumatra, tras el devastador tsunami de diciembre de 2004. Reducida a una cara de una hoja de papel, reducida a su propia sombra, reducida a plano de sí misma. ■

...basta recorrer un semicírculo y será visible la faz oculta de Moriana...

Moriana: *la ciudad bidimensional*

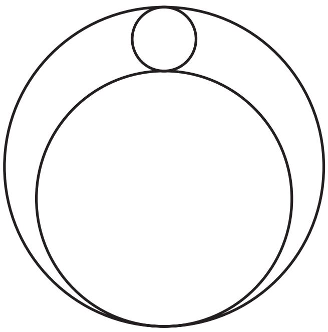

Las ciudades continuas. 1

Leonia

Leonia

...de año en año la ciudad se expande y los basurales deben retroceder más lejos; la importancia de los desperdicios aumenta..., se despliegan en un perímetro cada vez más vasto.

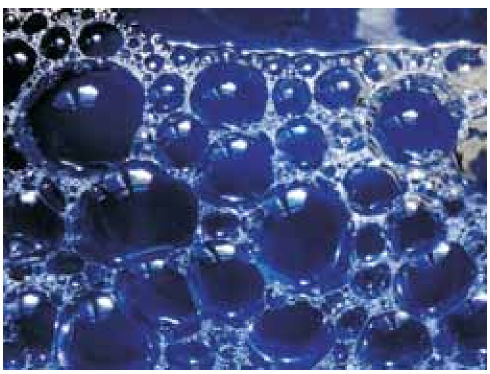
En Leonia los desperdicios rodean la ciudad. El visitante se encuentra en el centro de una circunferencia de inmundicia que se desarrolla de año en año según la ciudad se expande. Y lo hace en un perímetro cada vez más vasto. Esa expansión y ese perímetro cada vez mayores, plantean una cuestión fundamental. Si la expansión significa un aumento del área ocupada por la ciudad, ¿el aumento de ése área implica un aumento de su perímetro?



Supongamos que Leonia es plana y su basural circular. El área A de un círculo puede escribirse como función de su perímetro P: $A=P/(4\pi)$. Y entonces, $A'(P)=P/(2\pi)=r$. Por tanto, el radio mide el cambio de área con respecto al perímetro. Y si el radio r se aumenta en r_0, su perímetro y área aumentan en $2\pi r_0$ y $\pi r_0^2+2\pi r r_0$ respectivamente. Es decir, que el aumento del perímetro equivale al perímetro del círculo correspondiente al aumento del radio ($2\pi r_0$), mientras que el aumento de área es mayor que el área del círculo correspondiente a ése aumento. Esto se observa en la figura al margen. El perímetro del círculo mayor, de radio $R=r+r_0$, es la suma de los perímetros de los dos círculos interiores, mientras que su área sobrepasa en mucho la de ambos.

El mundo sobre el que se extiende Leonia no es plano, sino esférico. Si nada limita su expansión, el perímetro y área circulares de Leonia crecerán de la mano, pero sólo hasta que el perímetro iguale el del ecuador terrestre. A partir de ahí el perímetro decrecerá mientras la expansión de la ciudad continúa. Un fenómeno ya señalado por Frabetti (1999) en la *ciudad incontenible*, cuyas murallas crecían hasta un punto en el que con las piedras de la muralla precedente podía construirse un muro que encerraba un área todavía mayor. De ahí en adelante, el perímetro de la ciudad encierra su basural en el polo opuesto al centro de aquella.

Los desperdicios de Leonia ... invadirían el mundo si no estuvieran presionando, más allá de la última cresta, basurales de otras ciudades que también rechazan lejos de sí montañas de deshechos.



Pero los basurales de Leonia están limitados por la presión de los de otras ciudades como las pompas achatadas de la espuma. ■

Leonia *: la ciudad que crece como la espuma*

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

El diálogo reproducido al margen es un fragmento del que abre el capítulo VII. Leonia podría ser la ciudad de la que hablan Marco y Kublai. El diálogo acaba al final del capítulo y lo hace con un juego lógico-verbal que certifica una paradoja.

> Polo: –A menos que sea cierta la hipótesis opuesta: que quienes se afanan en los campamentos y los puertos sólo existen porque los pensamos nosotros dos…
> Kublai: –Que no existan la fatiga, los alaridos, …sino sólo esta azalea.
> Polo: –Que … sólo existan porque nosotros los pensamos.

Sea P la proposición *nosotros los pensamos* y sea Q la preposición *ellos existen*. Si H_0 es la hipótesis original a la que se refiere Marco Polo, la hipótesis opuesta y que se da como cierta es $-H_0$: *sólo existan porque nosotros los pensamos*. El término *sólo* expresa una equivalencia lógica entre ambas proposiciones, *ellos existen* si y sólo si *nosotros los pensamos*. Luego, $-H_0=[Q\Leftrightarrow P]$. Y si ésta es $-H_0$, su opuesta es $H_0=-[Q\Leftrightarrow P]$. Es decir, $H_0=[Q\Leftrightarrow -P]$, o también $H_0=[-Q\Leftrightarrow P]$.

> Kublai: –A decir verdad, yo no los pienso nunca.
> Polo: –Entonces no existen.

Kublai afirma que no los piensa: $K(-P)$. Y si no los piensa, no existen, ya que si Kublai no los piensa, entonces 'nosotros' no los pensamos. Y si nosotros no los pensamos, $-P$, la hipótesis supuesta, $-H_0$, concluye que $-Q$. Esto es, que *ellos no existen*. Resumiéndolo: $K(-P)\Rightarrow -P\Rightarrow[-P\wedge[-H_0=P\Leftrightarrow Q]]\Rightarrow -Q$. Y la proposición $-Q$ es *que ellos no existen*.

> Kublai: –No creo que esa conjetura nos convenga. Sin ellos nunca podríamos estar meciéndonos en el capullo de nuestras hamacas.

Pero si *ellos no existen*, ¿cómo podríamos mecernos en las hamacas? Entonces *no los pensaríamos*. Es decir, $-Q\wedge[-H_0= P\Leftrightarrow Q] \Rightarrow -P$. ¿Qué hacen pues Marco y Kublai tumbados en sus hamacas?

> Polo: –Entonces hay que excluir la hipótesis. Por lo tanto será cierta la otra: que ellos existen y nosotros no.

Se diría que excluyendo la hipótesis Marco Polo vuelve a la original, H_0, lo que significaría dar por buenas las tres equivalencias: $-[Q\Leftrightarrow P]$, $Q\Leftrightarrow -P$ y $-Q\Leftrightarrow P$. Sin embargo, que *ellos existen y nosotros no* puede interpretarse tomando como equivalencia de *nuestra* existencia el hecho de pensar en *ellos*. Así la proposición de Marco Polo se traduciría en $Q\wedge -P$, una afirmación lógicamente equivalente a $-[Q\Rightarrow P]$ puesto que comparte su tabla de verdad.

Por tanto, el error lógico de Marco y Kublai está en haber incluido el adverbio *sólo* en su hipótesis. En realidad, deberían haberlo excluido y decir *existan porque nosotros los pensamos* en lugar de *sólo existan porque nosotros los pensamos*. La inclusión del adverbio transforma una implicación ($Q\Leftarrow P$) en equivalencia ($Q\Leftrightarrow P$). Esto y el hecho de que el diálogo se desarrolle junto a la imprecisa frontera que separa la lógica de la lingüística es lo que llevará a ambos interlocutores a una contradicción.

> Kublai: –Hemos demostrado que si existiéramos no estaríamos aquí.
> Polo: –Y aquí estamos.

Si *existiéramos* pensaríamos. Y entonces, P. Pero como $P\Rightarrow -Q$, entonces *ellos no existen* y *no estaríamos aquí* pensándolos. Por lo que se deduce $-P$. Polo certifica la contradicción: $-P\wedge P$.

> *Polo: –…Tal vez este jardín sólo exista a la sombra de nuestros párpados …*
> *Kublai: –Tal vez este diálogo nuestro se desenvuelva entre dos miserables apodados Kublai Jan y Marco Polo, que revuelven en un basural …*
> *Polo: –Tal vez del mundo haya quedado un terreno baldío cubierto de inmundicias y el jardín del Gran Jan. Son nuestros párpados los que los separan, pero no se sabe cuál está dentro y cuál fuera.*

suma+ 58
Junio 2008, pp.101-105

Gauss y el polígono regular de 17 lados

Cuando se finaliza un noble edificio no deben quedar visibles los andamios

C.F. Gauss

El sorprendente encuentro entre la Aritmética, el Álgebra y la Geometría.

El 18 de febrero de 1792, antes de cumplir los 15 años el joven Carl Friedrich Gauss hace su inscripción en el Collegium Carolinum de Brunswick. En este colegio da clases de matemáticas y ciencias naturales E. A. W. Von Zimmermann (1743-1815) su valedor ante el duque de Brunswick.

Gauss permanecerá en él hasta 1795, estudiando lenguas clásicas, literatura, filosofía y, por supuesto, matemáticas superiores, siendo un alumno brillante en todas ellas. Entre sus lecturas de matemáticas de esta época están los *Principia Mathematica* de Newton, el *Ars Conjectandi* de Jackob Bernoulli y algunas de las memorias de Euler. En el Collegium Carolinum Gauss iniciará alguna de sus futuras investigaciones matemáticas, según sus propias confesiones posteriores, como la distribución de los números primos o los fundamentos de la geometría.

Antonio Pérez Sanz
IES Salvador Dalí (Madrid)
decabeza@revistasuma.es

Cuando en el otoño de 1795 se traslada a la Universidad Georgia Augusta de Göttingen, con una beca del Duque, Gauss aún no ha decidido su futuro académico dudando entre los estudios de Filología clásica y las Matemáticas. Las lecciones de matemáticas, no muy buenas según la opinión de Gauss, las impartía el anciano profesor Gotthelf Abraham Kästner que tenía entonces 76 años. En esta época conoce a Wolfgang (Farkas) Bolyai, que se incorporó a la universidad un año después que él. Gauss, unos años más tarde llegó a afirmar: *Bolyai fue el único que supo interpretar mis criterios metafísicos sobre las Matemáticas.* Y también que Bolyai fue el *espíritu más complicado que jamás conocí*.

Bolyai es más explícito al hablar de su amistad:

> Nos unía la pasión por las Matemáticas y nuestra conciencia moral, y así paseábamos durante largas horas en silencio, cada uno ocupado en sus propios pensamientos.

Justo un mes antes de cumplir los 19 años, Gauss se decantará definitivamente por las matemáticas y hará su primera anotación en su diario de notas, un pequeño cuaderno de 19 páginas, que acompañará a Gauss hasta 1814, el diario científico más importante de la historia de las matemáticas

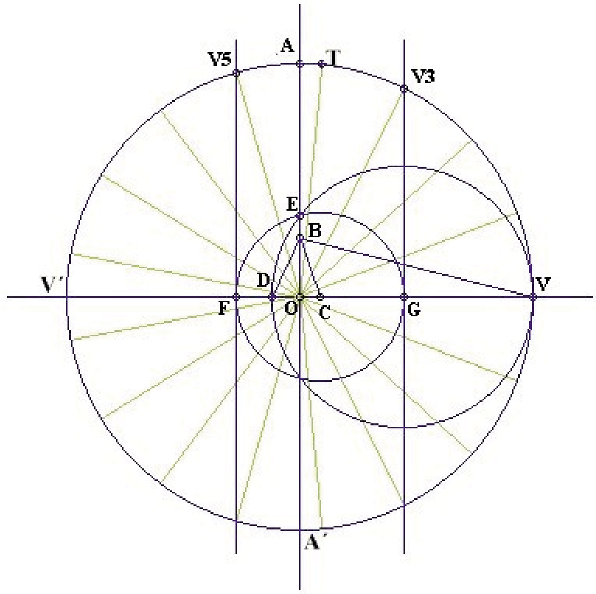
Construcción con regla y compás del polígono regular de 17 lados

Desde su llegada a Göttingen el joven Gauss siguió desarrollando de forma autónoma sus investigaciones sobre números que había iniciado en el Collegium. Sin duda, más fruto de estas investigaciones que de las enseñanzas de Kästner, cuando Gauss estaba en su casa de Brunswick, se va a producir un descubrimiento que será clave, no sólo en la carrera de Gauss, sino en el futuro de las matemáticas: **el heptadecágono, el polígono regular de 17 lados se puede construir con regla y compás.**

Él mismo, muchos años más tarde, recordará el momento en una carta que dirige a Gerling fechada el 6 de enero de 1819:

> Fue el día 29 de marzo de 1796, durante unas vacaciones en Brunswick, y la casualidad no tuvo la menor participación en ello ya que fue fruto de esforzadas meditaciones; en la mañana del citado día, antes de levantarme de la cama, tuve la suerte de ver con la mayor claridad toda esta correlación, de forma que en el mismo sitio e inmediatamente apliqué al heptadecágono la correspondiente confirmación numérica.

El día siguiente, el 30 de marzo, justo un mes antes de cumplir los 19 años, Gauss se decantará definitivamente por las matemáticas y hará su primera anotación en su diario de notas, un



Construcción del polígono regular de 17 lados

Método de Gauss(1796), simplificada por H.W. Richmond (1893)

1. Se construye la circunferencia con centro en O. Se dibujan los diámetros perpendiculares AA´ y VV´
2. Se obtiene un punto B, sobre el radio OA, tal que el segmento OB es la cuarta parte de OA
3. Se obtiene el punto C, sobre OV, tal que el ángulo OBC es la cuarta parte del ángulo OBV (hay que bisectar dos veces un ángulo)
4. Se obtiene un punto D, sobre el diámetro VV´, tal que el ángulo DBV sea de 45º (se puede hacer bisectando un ángulo recto)
5. Se obtiene G, mitad del segmento DV, se dibuja la circunferencia con centro G y radio GV. Esta circunferencia corta al radio OA en el punto E.
6. Se dibuja la circunferencia con centro C y radio CE, dicha circunferencia corta a VV´ en dos puntos: F y G
7. Se levantan perpendiculares a VV´, pasando por F y G , que cortan a la circunferencia en V3 y V5.
8. La mitad del arco V3V5, nos da un punto T. El segmento V 3T es el lado del polígono regular de 17 lados.

pequeño cuaderno de 19 páginas, que acompañará a Gauss hasta 1814, el diario científico más importante de la historia de las matemáticas, en el que irá anotando, a veces de forma críptica, los resultados matemáticos que le vienen a la cabeza, en total 144 anotaciones. Por este diario desfilará un alto porcentaje de los descubrimientos matemáticos del siglo XIX. En este libro no fueron recogidos todos los descubrimientos de Gauss en el período prolífico de 1796 a 1814. Pero muchos de los anotados bastarían para establecer la prioridad de Gauss en campos, donde algunos de sus contemporáneos se niegan a creer que Gauss les precediera.

Muchos hallazgos que quedaron enterrados durante décadas en este diario habrían encumbrado a media docena de grandes matemáticos de haber sido publicados. Algunos jamás se hicieron públicos durante la vida de Gauss, y nunca pretendió la prioridad cuando otros autores se le anticiparon. Sus anotaciones constituían descubrimientos esenciales de la Matemática del siglo XIX. Un documento que por desgracia para la ciencia no verá la luz hasta casi 50 años después de la muerte de Gauss.

> Principia quibus innititur sectio circuli, ac divisibilitas eiusdem geometrica in septemdecim partes, etc. Mart. 30 Brunsv.

Con tan sólo 18 años, el joven Gauss había hecho un descubrimiento que por sí solo le habría hecho pasar a la historia de las matemáticas. Un descubrimiento que constituía sólo la punta del iceberg de una teoría mucho más amplia que dará origen tres años más tarde a las *Disquisitiones Arithmeticae,* obra que Gauss va madurando durante su estancia en la universidad de Gottingën.

En esa misma carta a Gerling, Gauss relata en primera persona cómo llegó a este descubrimiento:

> Por una reflexión muy profunda sobre la relación existente entre el conjunto de raíces de la ecuación
>
> $$\frac{x^p-1}{x-1}=0$$
>
> por razones aritméticas, he llegado a vislumbrar muy claramente la naturaleza de esta relación, tras unos días de vacaciones en Brunswick, la mañana de este día, justo antes de levantarme, de manera que he podido hacer sobre el terreno la aplicación particular al polígono regular de 17 lados y ejecutar los cálculos numéricos correspondientes.

Gauss tiene ya en su cabeza una visión clara del modelo geométrico de representación de los números complejos y de su potencial revolucionario para atacar ecuaciones ciclotómicas. Y justo en un momento de la historia en que la colectividad matemática tiene serios reparos a la utilización alegre de los números imaginarios que Euler ha realizado cincuenta años antes al proponer su revolucionaria fórmula (Prop. 138), que relaciona las cantidades imaginarias con la cantidades trascendentes nacidas del círculo, que así se llama el capítulo correspondiente de la *Introductio in Analisin infinitorum* (1748)

$$e^{+v\sqrt{-1}} = \cos v + \sqrt{-1}\, sen\, v$$

Que tras la introducción de la letra i como notación de la unidad imaginaria, será una de las fórmulas más populares de las matemáticas: $e^{iv} = \cos v + i\, sen\, v$, sobre todo para el valor particular de $v = \pi$

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\, sen\,\pi = -1$$

Porque en la cabeza del joven Gauss las raíces de la ecuación, de la forma

$$e^{i\frac{2k\pi}{p}}$$

se perfilan claramente como los vértices de un polígono regular de p lados.

La Aritmética modular viene en ayuda del Álgebra

Gauss se ocupa del caso especial p = 17.

Si una de las raíces es $r = e^{i\frac{2\pi}{17}}$, las otras raíces son las potencias sucesivas de r, es decir r^m.

Gauss crea una tabla con las 17 raíces ordenadas según las potencias de 3 expresadas en módulo 17.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
m=3k(mod 17)	1	3	9	10	13	5	15	11	16	14	8	7	4	12	2	6	1

Los valores de m forman una permutación de los números enteros del 1 al 16.

¿Por qué ordena Gauss las raíces de esta forma un tanto arbitraria? Sencillamente, esto le permite comprobar las funciones de las raíces que permanecen invariantes para un cierto número de permutaciones.

Los antecedentes algebraicos

La idea de relacionar las funciones de las raíces que permanecen invariantes o que toman un número pequeño de valores al permutar las raíces, con las soluciones de la ecuación, la desarrolla ampliamente Lagrange en una memoria de 1771.

La idea parte del hecho de un resultado explicitado por Vandermonde: todos los radicales que intervienen en las fórmulas de resolución de las ecuaciones de grado menor que 4 se pueden expresar como función de las raíces.

En la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, el discriminante

$$\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac} = a\sqrt{(x_1 - x_2)^2}$$

Es una función simétrica de las raíces.

En la ecuación de tercer grado $ax^3 + b\,x^2 + c\,x + d = 0$, la función $T = (x_1 + jx_2 + j^2x_3)^3$ sólo toma dos valores distintos al hacer:

$$j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$T_1 = (x_1 + jx_2 + j^2x_3)^3 \text{ y } T_2 = (x_1 + j^2x_2 + jx_3)^3$$

Por lo tanto, las funciones $T_1 + T_2$, y $T_1 \bullet T_2$ son simétricas respecto de las raíces de la ecuación y por ello calculables utilizando sólo los coeficientes de la ecuación.

Las tres raíces se pueden calcular resolviendo el sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -b \\ x_1 + jx_2 + j^2x_3 = \sqrt[3]{T_1} \\ x_1 + j^2x_2 + jx_3 = \sqrt[3]{T_2} \end{cases}$$

La existencia de funciones T_i de las raíces, que toman menos valores distintos que el grado de la ecuación, permiten encontrar las soluciones mediante ecuaciones auxiliares construidas a partir de funciones simétricas de las T_i . A estas ecuaciones se las conoce como *ecuaciones resolventes*.

La genialidad de Gauss

La tabla de Gauss le permite construir ecuaciones resolventes agrupando las raíces de 8 en 8, de 4 en 4 o de 2 en 2.

Gauss comienza con dos periodos de 8 raíces

$$p_1 = \omega_1 + \omega_9 + \omega_{13} + \omega_{15} + \omega_{16} + \omega_8 + \omega_4 + \omega_2$$

$$p_2 = \omega_3 + \omega_{10} + \omega_5 + \omega_{11} + \omega_{14} + \omega_7 + \omega_{12} + \omega_6$$

Tanto p_1 como p_2 contienen al mismo tiempo a ω_n y a su inversa ω_{17-n} .

La suma de $p_1 + p_2 = -1$, ya que la suma de las 17 raíces de $x^{17} - 1 = 0$, las 16 de p_1 y p_2 más la raíz 1, ha de ser 0

Y como $\omega_a \cdot \omega_b = \omega_c \quad donde \quad c \equiv a + b \pmod{17}$

El producto de $p_1 \bullet p_2 = -4$

De modo que p_1 y p_2 son las raíces de la ecuación:

$$x^2 + x - 4 = 0$$

A continuación Gauss agrupa las raíces de p_1 y p_2 en cuatro periodos de 4 raíces

$$\begin{cases} q_1 = \omega_1 + \omega_{13} + \omega_{16} + \omega_4 \\ q_2 = \omega_9 + \omega_{15} + \omega_8 + \omega_2 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} q_3 = \omega_3 + \omega_5 + \omega_{14} + \omega_{12} \\ q_4 = \omega_{10} + \omega_{11} + \omega_7 + \omega_6 \end{cases}$$

Podemos comprobar que

$$q_1 + q_2 = p_1 \,; \qquad q_1 \bullet q_2 = p_1 + p_2 = -1$$

Y por tanto q_1 y q_2 son las raíces de la ecuación:

$$x^2 - p_1\,x - 1 = 0$$

Análogamente

$$q_3 + q_4 = p_2; \qquad q_3 \bullet q_4 = p_1 + p_2 = -1$$

Y por tanto q_3 y q_4 son las raíces de la ecuación:

$$x^2 - p_2\,x - 1 = 0$$

Es fácil comprobar que $\omega_a + \omega_{17-a} = 2\cos\frac{2a\pi}{17}$

Así que $q_1 = 2\cos\frac{2\pi}{17} + 2\cos\frac{8\pi}{17}$ y $q_2 = 2\cos\frac{4\pi}{17} + 2\cos\frac{16\pi}{17}$

Con la ecuación $x^2 - p_2\,x - 1 = 0$

Obtenemos que:

$$q_3 = 2\cos\frac{6\pi}{17} + 2\cos\frac{10\pi}{17} \text{ y } q_4 = 2\cos\frac{12\pi}{17} + 2\cos\frac{14\pi}{17}$$

Por fin, formando periodos de 2 en 2 tendremos

$$r_1 = \omega_1 + \omega_{16} \quad ; \quad r_2 = \omega_{13} + \omega_4$$

Y por tanto:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = q_1 \\ r_1 \cdot r_2 = q_3 \end{cases}$$

Así: $r_1 = 2\cos\frac{2\pi}{17}$ y $r_2 = 2\cos\frac{8\pi}{17}$

Y reemplazando en los valores de p_i tendremos... es sólo un problema de paciencia...

$$p_1 = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \quad ; \quad p_2 = -\frac{\sqrt{17} + 1}{2}$$

Y q_i:

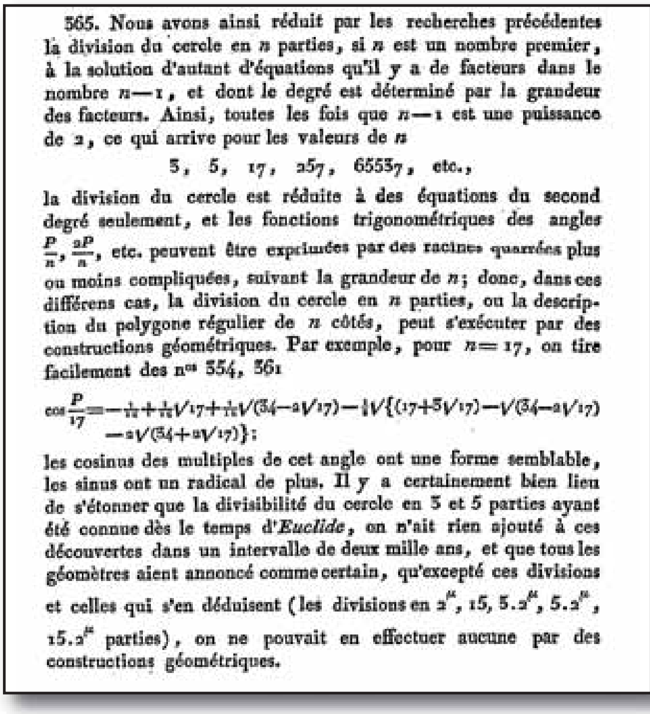
$$q_1 = \frac{p_1 + \sqrt{p_1^2 + 4}}{2} = \frac{\sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4} \quad ;$$
$$q_2 = \frac{p_1 - \sqrt{p_1^2 + 4}}{2} = \frac{\sqrt{17} - 1 - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}$$

$$q_3 = \frac{p_2 + \sqrt{p_2^2 + 4}}{2} = \frac{-\sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4} \quad ;$$
$$q_4 = \frac{p_2 - \sqrt{p_2^2 + 4}}{2} = \frac{-\sqrt{17} - 1 - \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4}$$

y por fin r_i:

$$\frac{r_1}{2} = \cos\frac{2À}{17} = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \\ +\frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}$$

Sustituyendo en las sucesivas ecuaciones podemos calcular las 16 raíces de la ecuación.



365. Nous avons ainsi réduit par les recherches précédentes la division du cercle en n parties, si n est un nombre premier, à la solution d'autant d'équations qu'il y a de facteurs dans le nombre $n-1$, et dont le degré est déterminé par la grandeur des facteurs. Ainsi, toutes les fois que $n-1$ est une puissance de 2, ce qui arrive pour les valeurs de n

3, 5, 17, 257, 65537, etc.,

la division du cercle est réduite à des équations du second degré seulement, et les fonctions trigonométriques des angles $\frac{P}{n}$, $\frac{2P}{n}$, etc. peuvent être exprimées par des racines quarrées plus ou moins compliquées, suivant la grandeur de n; donc, dans ces différens cas, la division du cercle en n parties, ou la description du polygone régulier de n côtés, peut s'exécuter par des constructions géométriques. Par exemple, pour $n = 17$, on tire facilement des nos 354, 361

$$\cos\frac{P}{17} = -\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16}\sqrt{17} + \tfrac{1}{16}\sqrt{(34-2\sqrt{17})} - \tfrac{1}{8}\sqrt{\{(17+3\sqrt{17}) - \sqrt{(34-2\sqrt{17})} - 2\sqrt{(34+2\sqrt{17})}\}};$$

les cosinus des multiples de cet angle ont une forme semblable, les sinus ont un radical de plus. Il y a certainement bien lieu de s'étonner que la divisibilité du cercle en 3 et 5 parties ayant été connue dès le temps d'*Euclide*, on n'ait rien ajouté à ces découvertes dans un intervalle de deux mille ans, et que tous les géomètres aient annoncé comme certain, qu'excepté ces divisions et celles qui s'en déduisent (les divisions en 2^{μ}, 15, 3.2^{μ}, 5.2^{μ}, 15.2^{μ} parties), on ne pouvait en effectuer aucune par des constructions géométriques.

Disquisitiones Arithmeticae. Ed. Francesa de 1809

Del Álgebra a la Geometría

Al final sólo hemos tenido que resolver de forma sucesiva ecuaciones de 2º grado, es decir todo el proceso se puede realizar geométricamente con regla y compás. Esto ha sido así ya que para n = 17 tenemos n – 1 = 16 = 2 • 2 • 2 • 2

La alegría del joven Gauss, ese 30 de marzo de 1796 aún tiene 18 años, está más que justificada. Acaba de resolver un problema de más 2 milenios de antigüedad.

Este hecho, por sí sólo, le haría pasar a la Historia de las Matemáticas. Definitivamente las lenguas clásicas habían perdido un genio para siempre. Las matemáticas y todas las ciencias habían ganado la batalla en la cabeza de Gauss.

Gauss terminará sus *Disquisitiones Arithmeticae*, con las proposiciones 365 y 366, tantas como los días del año, rebosante de alegría, facilitando la lista de los polígonos de menos de 300 lados que se pueden construir con regla y compás. El joven genio ha tocado la gloria y lo sabe.

> Para que la división geométrica del círculo en N partes sea posible, N debe ser 2, o una potencia de 2, o bien un número primo de la forma 2m +1 o bien le producto de una potencia de 2 por uno o varios números primos diferentes de esta forma

Y todo ello antes de cumplir los 19 años... Cuesta creer que todo lo hiciera DE CABEZA...

DE CABEZA ■

REFERENCIAS BIBLIOGÁFICAS

BÜHLER, W. K. (1981): *Gauss A biographical Study,* Springer-Verlag, New York.

DUNNINGTON, G. W., GAUSS, C. F. (1955): *Titan of Science,* New York.

FRIEDELMEYER, J-P. (1994): "Recherche inconnue désespérément", en *Histoires de problèmes. Histoire des mathématiques*, Ellipses, I.R.E.M. París.

GAUSS, C. F., (1973): *Werke*. Georg Olms, Hildesheim.

GAUSS, C. F., (1996): *Disquisicions aritmètiques*. Traducción de la profesora Pascual Xufrí G., Sociedad Catalana de Matemáticas. Barcelona.

PARDO REGO, V. (2003): *Lagrange. La elegancia matemática,* Nivola, Madrid.

RASSIAS G. M., (1991): *The mathematical heritage of C F Gauss,* Singapore.

REICH, K. (1977): *Gauss. 1777/1977*. Inter-Nationes. Bonn-Bad Gedessberg.

Vídeos

PÉREZ SANZ, A. (2000): *Gauss. De lo real a lo imaginario*. Serie Universo Matemático. RTVE.

Internet

http://www.geocities.com/RainForest/Vines/2977/gauss/formulae/heptadecagon.html

http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Historia/MateOspetsuak/Gauss.asp

NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, Apartado de Correos 498, E-46900 Torrent (Valencia), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.

2. Los gráficos, diagramas, fotografías y figuras se enviarán impresos en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración. Indíquense los créditos de las fotografías y dibujos.

2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original impreso ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos no serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.

4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de un máximo de 625 caracteres contando los blancos, que no necesariamente tiene que coincidir con la introducción al artículo. De este resumen se remitirá también su traducción al inglés.

5. Los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; correo electrónico; sociedad federada a la que pertenecen (si procede) y el resumen en castellano y en inglés deberán ir escritos en una misma hoja aparte.

6. Se enviará también en soporte magnético (disco de tres pulgadas y cuarto con formato PC, CDRom o DVDRom) una copia de los archivo de texto que contenga el artículo y del que contega la hoja con los datos y los resumenes, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quieran incluir. La etiqueta debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda Microsoft Word para Windows o RFT. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF. Para las fotografías se recomienda archivos TIF o BMP y con una definición mínima de 600x600 puntos por pulgada cuadrada.

7. Al menos un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.

8. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.

9. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo y se incluirán al final del texto.

10. La bibliografía se dispondrá también al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:
    TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma*, n.° 20, 91-98.
    En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
    GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas*, Labor, Barcelona.
    En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
    VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2*, ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

11. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ... supone un gran avance (Hernández, 1992). Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ... según Rico (1993).

12. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como -en caso afirmativo- la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido.

13. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

suma+ 58
Junio 2008, pp.107-116

Biblioteca

Mi presentación

Daniel Sierra Ruiz

Tal y como se anunciaba en el número anterior, esta sección cambia de coordinador. Contra lo que suele ser habitual, el que suscribe no cree que vaya a ser capaz de igualar la labor realizada por su predecesor, pero no será por falta de ganas e ilusión. Mi primera tarea es retomar la sección, creada por Fernando Corbalán, *Mi biblioteca particular*. En su despedida, Fernando explicaba perfectamente las cualidades que puede tener un artículo de estas características, por lo que nada más voy a añadir para justificar su continuidad.

La prolongada trayectoria del anterior coordinador le ha facilitado la elección de los firmantes, a los cuales conoce desde hace mucho tiempo. Sin duda alguna todos ellos son nombres de reconocido prestigio, lo que logra que cuando uno lee la sección lo haga con gran interés: que un libro sea importante para ciertas personas, te provoca automáticamente el deseo de echarle un vistazo. Así pues, dado que es imposible que yo utilice los mismos criterios, he optado por ser totalmente subjetivo: intentaré que aparezcan aquellas personas de las cuales me apetezca conocer sus principales referencias bibliográficas.

Como novedad, a partir de este número aparecerá un pequeño texto *presentando* al firmante. La cursiva es porque no se va a tratar de una reseña biográfica, ni siquiera una breve semblanza al uso, sino una explicación de *mis* motivos para pedir a esa persona que participe en la sección. Planteado el asunto de esta forma, nos metemos en harina.

El firmante de hoy es Emilio Palacián. Emilio fue director, junto con Julio Sancho, de *Suma* durante ocho años y 24 números. Su paso por la revista fue decisivo en el imprescindible salto cualitativo que dio, en especial en lo referente al nivel de la edición. Considerado uno de los miembros más destacados de la Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas, fue parte esencial, por ejemplo, en la organización de las dos JAEM organizadas en Zaragoza. Por tanto, mencionar el nombre de Emilio Palacián en este foro sería motivo más que suficiente para justificar su presencia aquí. Pero la cosa no va por ahí. Ni siquiera el asunto es porque tiene una biblioteca particular bastante impresionante (quien lo conozca lo sabrá). El tema es mucho más personal.

Daniel Sierra Ruiz (coordinador de la sección)
IES Valle del Huecha, Mallén (Zaragoza)
biblioteca@revistasuma.es

Empezar a trabajar como profesor de matemáticas me supuso iniciar una nueva e ilusionante etapa en mi vida. Como no me arrepiento del paso que di, debo agradecer a Emilio que fuera el primero que me habló de la didáctica de las matemáticas y que lo hiciera lejos de todo dogmatismo. Me contó lo que había, para bien y para mal. Me ofreció todos sus libros. Me regaló varios de ellos. Dedicó mucho tiempo simplemente a hablar conmigo. Me involucró en las X JAEM. Me introdujo como colaborador en su segundo periodo al frente de *Suma*... En fin, conocerlo fue todo un golpe de suerte, el cual, por cierto, se lo debo a cierta persona de Radiquero (otro día hablamos de ella).

Así pues, en este momento en el que ser coordinador de esta sección me supone iniciar una nueva etapa, de menor entidad pero también ilusionante, es para mí un honor que el primer firmante de este serie de *Mi biblioteca particular* sea don Emilio Palacián Gil (aunque él hubiera preferido que le invitara a unas gambas a la gabardina).

Mi biblioteca particular

Emilio Palacián Gil

Al hacerse cargo Daniel Sierra de esta sección de SUMA, en la nueva etapa de la revista, me invita a que hable sobre mis libros de matemáticas. Y, aunque cada vez soy más reacio a escribir (suponiendo que alguna vez no lo hay sido) no puedo negarme por tres razones distintas: porque se trata de SUMA, porque me lo pide Daniel y porque se refiere a libros que constituye en mí una mezcla de afición, pasión y (por qué no decirlo) un cierto fetichismo que hacen que todo lo referido a este tema, de alguna forma, me cautive. Aunque me produce un cierto sonrojo, diré que mi biblioteca pasa de los siete mil títulos, sin contar revistas y otros coleccionismos varios en papel; por supuesto, la «sección matemática» es minoritaria.
Sin más preámbulos, me lanzo a responder el cuestionario:

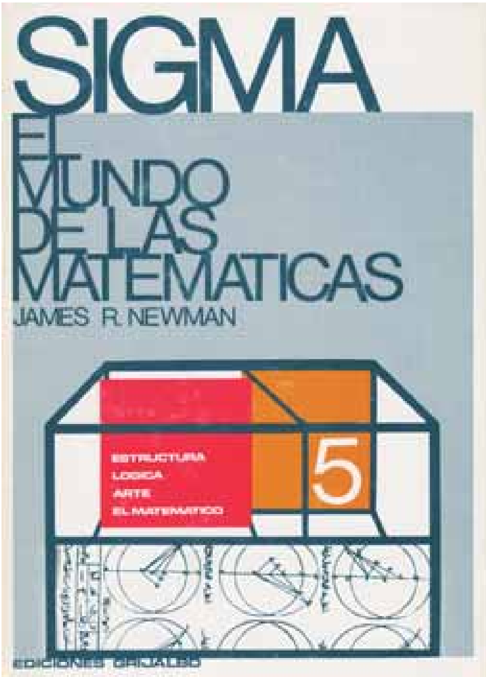
Si tuvieras que empezar tu biblioteca matemática ahora, ¿con qué libro o libros de los de tus primeros años como matemático comenzarías?

Hace casi cuarenta años el mercado editorial de libros relacionados con las matemáticas era mucho más estrecho que el actual, por lo que seleccionar ahora un puñado de libros de entonces, para iniciar una biblioteca personal de matemáticas, es cosa más sencilla que si la misma cuestión se plantease ahora a un recién titulado, pues tendría mucho más para elegir, y por ello la elección sería más difícil.

Una biblioteca personal, aunque sea pequeña, debería disponer inicialmente de al menos medio centenar de libros, para que cubriese adecuadamente diferentes ámbitos. Ello haría larguísima esta primera pregunta y el lector abandonaría rápidamente su atención sobre esta sección. Así, que me voy a autoimponer un número razonable de obras para hacer esto digerible, digamos que una docena, como si fuese una lista de éxitos, pero sin ningún tipo de orden.

Iniciaré la serie con tres manuales de matemática universitaria de los primeros cursos de la titulación, que me parecen de lo más interesante por motivos distintos cada uno; son *Calculus* de M. Spivack, *Estudio de las geometrías* de Howard Eves y *Álgebra* de Godement.

En el número 35 de SUMA hice una recensión amplia de *Sigma, El mundo de las matemáticas*, cuyo editor es J.R. Newman, en donde explicaba ampliamente las razones por las que esta obra ejercieron una gran influencia en mi formación. En esta misma recensión comentaba de pasada la otra obra colectiva que quiero añadir a la lista: *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*, editada por F. Le Lionnais.



... el analfabetismo matemático que existe en la sociedad, incluso en personas muy dotadas intelectualmente en otros campos, constituye un grave problema en el que alguna responsabilidad tenemos los profesores de matemáticas.

Creo que debe haber algún libro de historia de nuestra disciplina, citemos dos: la *Historia sucinta de la Matemática* de Babini y Rey Pastor e *Histoire des matematiques* de Jean-Paul Collette, que fue traducido al castellano años más tarde. (Por supuesto, el Boyer no se había editado todavía en España). Convendría añadir un manual de historia de la ciencia en general; como mayo del 68 estaba reciente, en esa época parecía obligado leer la *Historia social de la ciencia,* de John D. Bernal.

Obra imprescindible (entonces y ahora) en una biblioteca de matemáticas es *Pruebas y refutaciones* de Imre Lakatos.

Siempre han resultado refrescantes las obras de Martín Gardner; de las muchas que actualmente están editadas en España, quizás una de las primeras fue *Izquierda y derecha en el cosmos*.

Y como me faltan dos para la docena prometida me voy a permitir citar dos no excesivamente conocidas, como son *Ciencia y método* de H. Poincaré y *El azar* de Émile Borel.

¿Algún libro de didáctica de las matemáticas ha influido en tu desarrollo docente por encima de otros?

Tal como está definida la pregunta tengo que citar un libro que no es exactamente de didáctica, se trata de *El fracaso de la matemática moderna* de Morris Kline.
A principios de los setenta inicié mi carrera profesional, coincidiendo con la puesta en vigor de la Ley General de Educación que, como es sabido, y siguiendo lo que se había ya iniciado en muchos otros países (en alguno ya estaban un poco de vuelta), ponía a la teoría de conjuntos como eje vertebrador del currículo de las matemáticas en los niveles primario y secundario.

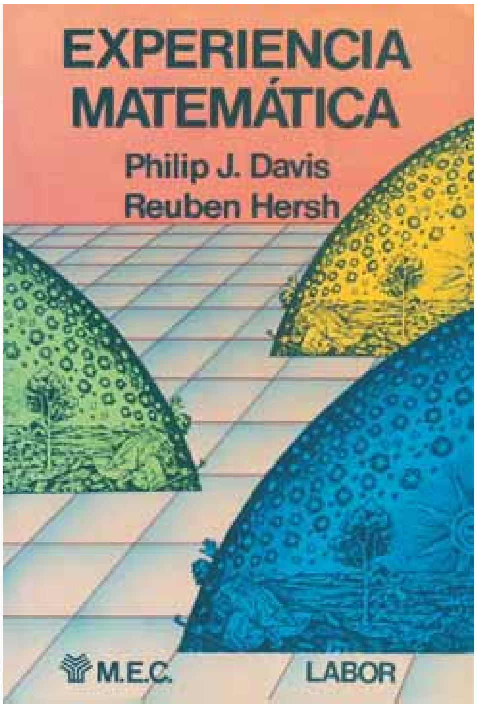
Recién terminada la carrera de Matemáticas (impregnada del espíritu bourbakista) era en aquellas fechas uno de los convencidos de la bondad de esa llamada «matemática moderna», aunque fuese crítico con algunos abusos que se cometieron, sobre todo en algunos manuales de texto, dirigidos a los escolares. Por cierto, yo no era un punto aislado, en aquella época éramos muchos los que pensábamos igual, aunque pasados los años nadie lo reconociese: suele pasar.

Unos pocos años de experiencia fueron suficientes para ir calmando paulatinamente ese ímpetu «moderno». La lectura del libro de Kline, junto con alguna lectura del Grupo Cero, fue un elemento esencial en mi definitiva «conversión».

¿Qué libro de visión general de las matemáticas recomendarías a un no matemático interesado en leer algo sobre el tema?

Misión francamente difícil. En general, incluso los libros de divulgación matemática los leen sólo los matemáticos; a no ser que sean libros tan obvios que no interesan a nadie, los que se refieren a algún tema de tipo matemático espantan a los no iniciados.

A pesar de lo anterior me voy a mojar. Si el supuesto lector está realmente «interesado», tiene una formación matemática al menos elemental y desea hacer el esfuerzo, le recomendaría *Experiencia matemática* de Davis y Hersh, con la consigna de que si encontraba detalles que no entendía que los soslayara y siguiera adelante. Si al final lo conseguía, comprobaría que había merecido la pena.
Por supuesto, también se lo recomendaría a los matemáticos que no lo hayan leído, sobre todo a los recién titulados. No tendrán dificultades en su lectura, pero, quizás les haga modificar su concepción de las matemáticas en algún aspecto.



Aparte de los mencionados, ¿destacarías algún otro libro por su belleza, originalidad, repercusión...?

No voy a citar ningún libro. A cambio, me gustaría destacar los artículos que desde hace unos años viene publicando en Suma, Miquel Albertí. Creo que son de una extraña belleza y de una originalidad innegable; desearía que tuviesen una gran repercusión.

¿Puedes aportar alguna cita de tus lecturas que tenga que ver con las matemáticas que hayas incorporado a tus referencias?

No he sido muy amigo de las citas, fundamentalmente porque, para ello, es necesario ser un lector disciplinado, leer con papel y lápiz cerca, anotar aquello que nos sorprende e ir formando un «banco de citas». Yo nunca lo he hecho y, por ello, he citado muy poco.

Una excepción fue con motivo de la memoria que había que elaborar para las oposiciones a cátedras de la entonces llamada enseñanza media, sobre el concepto y la metodología de las matemáticas. Inicié dicha memoria con una cita muy conocida de Bertrand Russell; en aquella época, recién terminada la licenciatura, estaba plenamente identificado con ella, al leerla ahora, treinta años después, me impresiona menos. Dice así:

> La matemática pura consiste enteramente en afirmaciones tales como la de que si tal o cual proposición es verdadera para cualquier cosa, entonces tal otra proposición es verdadera para dicha cosa. Lo esencial es no discutir si la primera proposición es realmente verdadera y no mencionar cuál es esa cosa cualquiera para la que se supone serlo… Si nuestra hipótesis se refiere a una cosa cualquiera, y no a alguna o varias cosas particulares, entonces nuestra deducción forma parte de la matemática. Y así puede definirse la matemática como aquel campo en el que no sabemos nunca de qué estamos hablando ni si lo que decimos es verdad.

En tus lecturas ajenas a las matemáticas (literatura, arte,...), ¿has encontrado algún libro recomendable en el que las matemáticas (como resultados o como inspiración) jueguen un papel interesante?

Mi gran afición actual es el arte contemporáneo, uno de cuyos movimientos más interesantes en el último siglo (aunque no sea mi preferido) es el de la abstracción geométrica, en el que se combina lo puramente matemático o geométrico con una sutil carga emocional y poética.

Existen multitud de monografías y catálogos que, además de estudios serios sobre este movimiento, reproducen multitud de obras, cuya contemplación, aunque sea con las grandes limitaciones de una reproducción impresa y no d la obra original, produce, al menos a mí, grandes satisfacciones. Mondrian, Malevich, los Delaunay… y entre los españoles, Sempere, José María Iturralde (con sus figuras imposibles, cuya belleza esquemática aguanta perfectamente la comparación con el, a mi modo de ver, sobrevalorado Escher) o los escultores Alfaro o Chirino constituyen ejemplos, entre otros muchos, de artistas, cuya obra tiene un fuerte componente geométrico.

¿Recuerdas algún comentario chocante sobre las matemáticas en alguna de tus lecturas?

No. Y por una razón muy sencilla: cuando en la pregunta se dice comentario chocante me figuro que se quiere aludir a los disparates frecuentes que aparecen en libros no matemáticos cuando se hace alguna alusión a las matemáticas. Se escriben, en este caso, tal cantidad de majaderías que lo más sensato es olvidarlas inmediatamente, por esta razón no recuerdo ninguna. Es una muestra del analfabetismo matemático que existe en la sociedad, incluso en personas muy dotadas intelectualmente en otros campos; constituye un grave problema en el que alguna responsabilidad tenemos los profesores de matemáticas.

¿Qué libro te resulta más interesante entre los últimos que has leído sobre matemáticas?

Uno de los últimos libros sobre matemáticas que he leído, releído en este caso, es *Apología de un matemático* de Hardy. Aunque sólo sea para discrepar, merece la pena leer esta pequeña obra de uno de los más grandes matemáticos del siglo XX.

Coméntanos algún libro no matemático que hayas leído últimamente y que te gustara especialmente.

Creo que la lectura cumple dos objetivos: formar y entretener. Como estoy jubilado, me puedo olvidar del primero, por lo que los libros que en la actualidad leo son los que me proporcionan algún disfrute sin ninguna pretensión. Lo que ahora me interesa es leer (sobre todo ver) libros de arte contemporáneo, esencialmente pintura y escultura españolas de la segunda mitad del siglo XX; junto a esto me dedico a releer novela del siglo XIX, que pienso que es magnífica (Dickens, Balzac, Blasco Ibáñez, Galdós, Baroja…), además de novela más reciente. La última que he leído es *El callejón de los milagros* del Premio Nobel egipcio Naguib Mahfuz. Es una novela que muestra con gran realismo la vida en un barrio de El Cairo en los años cuarenta, aderezada con el ambiente político de la época. ■

Escaparate 1:
Vitaminas matemáticas

Siempre es un festín agradable de degustar un nuevo libro de Claudi Alsina: es la promesa confirmada por los hechos de que algo fascinante ha llegado a nuestras manos. Pero en este caso es todavía mejor porque se trata de una ración de vitaminas de distintas gamas que nos permitirán hacer la digestión con más facilidad.

Ciertamente no son las mismas familias de vitaminas que son esperables en los alimentos habituales o en los medicamentos de las farmacias. Porque aquí la ingesta nos va a proporcionar vitamina N (de números) en el primer capítulo, y en los siguientes las vitaminas G (de geometría), D (que a pesar que esta sí que coincide en el nombre médico en este caso es de Datos), U (de utilidades matemáticas) y M (de las esencias matemáticas más estrictas).

Vemos que el enunciado de las vitaminas ya anuncia un recorrido prometedor, es como el enunciado de un viaje placentero y excitante que los hechos (la inmersión en las páginas) no solo no desmienten sino que confirman con amplitud. Como otras veces algunas de las cosas que vayamos viendo nos sonaran a conocidas, pero muchas otras serán auténticas sorpresas (también para los que ya hemos leído algunos libros de divulgación matemática), y tanto unas como otras con frecuencia presentadas con ese humor y ese punto de vista tan peculiar

Fernando Corbalán Yuste
Coordinador del programa del Gobierno de Aragón “Matemática Vital”

VITAMINAS MATEMÁTICAS. CIEN CLAVES SORPRENDENTES PARA INTRODUCIRSE EN EL FASCINANTE MUNDO DE LOS NÚMEROS.

Claudi Alsina

ARIEL, Barcelona, 2008
ISBN: 978-84-3445-350-0
320 PP.

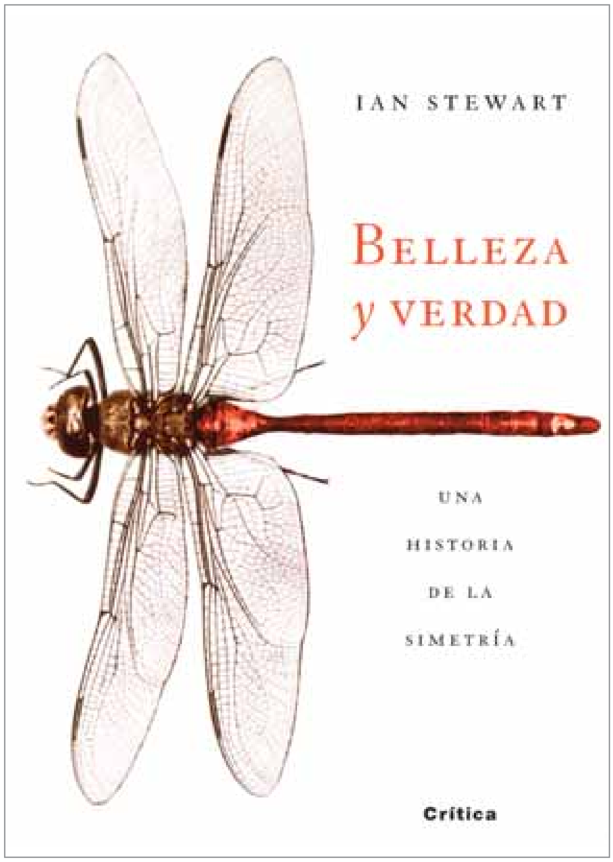
del autor, que ya conocemos los lectores de Suma por su sección *El clip*, con la que hace años que nos deleita. Y todo ello presentado en una cuidada edición, realizada por una editorial generalista, lo que seguro permitirá que el libro esté en librerías normales y hará que muchas más personas (sin limitarse a ámbitos especializados) accedan al mismo y que así se amplíe el espectro social que rompe las barreras matemáticas.

Me gustaría destacar alguna de las vitaminas que propone Claudi Alsina, en una elección obviamente personal. Dentro del grupo de las vitaminas N nos encontramos con una esclarecedora «Autobiografía del número e», que nos dice quién es y para qué sirve, y una selección de poemas matemáticos en «Seis poetas en el paraíso numérico». En el apartado de las vitaminas G encontramos cómo el teorema de Pitágoras se ha abierto camino hasta los tribunales en «Una corte de apelación que es pitagórica» y cómo la geometría del espacio, más todavía que la plana, da lugar a tremendas «Sorpresas geométricas»; en el camino encontraremos una reflexión de A. Robbins: «Las preguntas con calidad crean calidad de vida. La gente exitosa pregunta mejores cuestiones y, como resultado, obtiene mejores respuestas», tan pertinente en una materia y con unos profesores mucho más proclives a dar respuestas que a suscitar preguntas.

Si nos adentramos en las vitaminas D tendremos la oportunidad de abordar aspectos tan opacos socialmente como «La economía de la prostitución» y acercarnos a la forma de encontrar «Los índices de pobreza y desarrollo». En el capítulo de las Utilidades nos podemos deleitar con apartados tan poco habituales como «Matemáticas y sexo» y, por si alguien cree que en esto de las matemáticas puede llegar un momento en que no haya nada que hacer, tendrá razones para tranquilizarse leyendo «Sobran problemas». En las vitaminas M se mira con ojos críticos la personalidad de los matemáticos en «Tics matemáticos» y se hacen reflexiones tan curiosas como que, en un mundo en que lo más importante es el dinero, «Todos los teoremas son gratis».

Si el libro comienza con la cita, de autor anónimo, de que «Las matemáticas son como el amor: una idea simple que puede complicarse», a lo largo del libro se ve que no solo dan líos, sino también ideas sugerentes, perspectivas novedosas, estímulos diversos y bastantes satisfacciones, además de resolver no pocas situaciones de la vida diaria. Y si todo eso está servido con sorpresas abundantes, ráfagas constantes de sonrisas e incluso alguna carcajada, poco más podemos pedir. ■

Escaparate 2: Belleza y verdad



BELLEZA Y VERDAD. UNA HISTORIA DE LA SIMETRÍA
Ian Steward
Colección Matemáticas y entorno, nº 1
CRÍTICA, Barcelona, 2008
ISBN: 978-84-8432-988-6
358 PP.

Nuevo título a añadir a la ya extensa bibliografía del autor de *De aquí al infinito*. El reputado divulgador Ian Stewart vuelve a hacer gala de sus mejores armas para engancharnos en esta *historia*.

Belleza y verdad resulta evocador y recuerda a eso de la belleza de las matemáticas, que cuando se menciona en un grupo de matemáticos, estos asienten, pero que si se dice a quien no lo es suele arquear las cejas mostrando extrañeza y, sobre todo, perplejidad. Sin embargo, pocas personas discutirán que en la simetría existe la belleza o que para buscar la belleza casi todas las manifestaciones artísticas utilizan la simetría en muchas ocasiones. Este juego de tres palabras es el que el autor utiliza para buscar potenciales lectores.

Pero las triquiñuelas de Stewart no acaban ahí. Ojeando el índice, se observan llamativos títulos que invitan, una vez más, a la inmersión en las páginas del libro. *El zorro astuto, El vándalo borracho,...*, enseguida se observa que cada título hace referencia a una persona, y concretamente a matemáticos (o físicos, en algún caso). Y es que es esa la forma elegida para el desarrollo de la obra: va hilando el argumento tomando como referencia uno o a veces dos personajes históricos por capítulo. Para titularlo, toma alguna característica destacable del personaje, no necesariamente una virtud ni siquiera lo que más lo identifique, pero sí que sirva a su objetivo de dar un aspecto novelesco al libro.

Daniel Sierra Ruiz
biblioteca@revistasuma.es

Uno puede pensar que va a encontrar el interior del libro plagado de sugerentes imágenes con bonitas simetrías. Sin embargo, aunque no es así, tampoco nos cuesta adivinar hacia donde quiere ir cuando empieza en el prefacio diciendo:

> La fecha es 13 de mayo de 1832. Entre las nieblas del amanecer se enfrentan dos jóvenes franceses en un duelo a pistola por causa de una mujer.

En estas primeras frases ya se vislumbran dos objetivos del autor. El primero, que ocupa la mitad del libro, es contar la parte de la historia de las matemáticas que condujo hasta la Teoría de Galois; hasta la noción de grupo de simetría. El segundo consiste en mantener al lector no matemático atento al desarrollo, salpicando el libro de detalles de las vidas de los protagonistas, parándose, a veces, en los aspectos más sórdidos (Cardano), desgraciados (Abel) o de carácter inapropiado (Abel). En realidad, lo que hace es mostrar al matemático como un hombre de su época.

es la forma elegida para el desarrollo de la obra: va hilando el argumento tomando como referencia uno o a veces dos personajes históricos por capítulo

Como ya se ha dicho el libro está estructurado en capítulos que utilizan como referencia a uno o dos matemáticos y su trabajo en la rama tratada. Pero no son saltos en el vacío de un personaje a otro, porque en realidad el matemático central no es más que una excusa, un hito, alrededor del cual desarrolla todo lo que a él le parece esencial. Paradójicamente, los capítulos no son en absoluto largos, lo que permite una lectura pausada y sin agobios: cuando un autor cierra un capítulo concede una tregua al lector. Es más, el que los capítulos sean tan concisos es una de las virtudes del libro. Solo Ian Stewart podía decir tantas cosas en tan pocas páginas y tan bien explicadas. No es un libro matemáticamente fácil en algunos de sus apartados, es decir, no es una obra que un no-matemático pueda entender totalmente, pero el autor se vale de recursos, metáforas, dibujos y esquemas, para popularizar temas tan aparentemente agrios como la teoría de Galois: si a un estudiante de la carrera de matemáticas le dicen que sobre la teoría de Galois, que tantos quebraderos de cabeza le da, se puede hacer un libro de divulgación, seguro que se frota los ojos con incredulidad.

Así pues, partiendo de la matemática babilónica (en cuyo capítulo, directamente, inventa personajes y diálogos para darle orientación novelesca) va sentando las bases que le permiten ir desarrollando la historia de la resolución algebraica de ecuaciones que acaba en la teoría de Galois. Hasta entonces, apenas se ha mencionado el tema de la simetría; es más, es en la página 150 donde se hace la pregunta «¿Qué es la simetría?». De hecho, incluso el tono narrativo cambia un poco. Desde el inicio había ido creciendo en complejidad matemática e intensidad, pero, en este punto baja y retoma asuntos más básicos (como un buen profesor, repasa conceptos ya dados). Es como una excursión en la montaña en la que uno alcanza una primera cima pero sabe que su objetivo es otra cima; sin embargo, el camino le ofrece zonas de ligero descenso y cortos llanos, que le permiten descansar, saborear lo hecho y coger fuerzas antes de afrontar la última costera.

La última cima que plantea Ian Stewart en este libro es la «física fundamental». Y para alcanzarla, por supuesto, tiene que pasar por los cuaterniones de Hamilton y por los grupos de Lie, sin olvidar el trabajo de Killing, al que el autor dedica unas páginas como desagravio a los años de no reconocimiento de su obra. De nuevo parte de explicaciones básicas sobre conceptos de la física para, pasando por Faraday, Maxwell y el inevitable Einstein, llegar al capítulo en el que desarrolla los orígenes de la física cuántica, personalizándolo en Planck, Schrödinger, Heisenberg, Dirac y Wigner. Es aquí donde se nos muestra en torno a qué gira toda la obra, como queda claro en estas palabras:

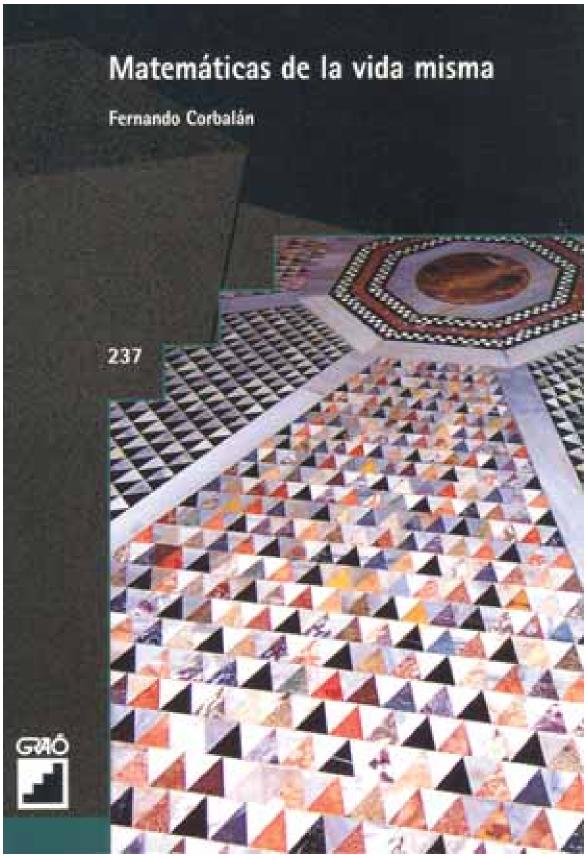
> Los métodos de la teoría de grupos llegaron a dominar la mecánica cuántica, porque, la influencia de la simetría es omnipresente.

Lo cual nos conduce a los últimos capítulos en los que se explican algunos de los esfuerzos actuales por unificar la totalidad de la física, haciendo especial hincapié en Edward Witten. Finalmente, retoma la historia matemática del asunto para contar como un producto del álgebra victoriana, como son los octoniones, se relacionan y pueden ayudar a resolver cuestiones de la teoría de las supercuerdas de la física moderna.

Ian Stewart se reserva el último capítulo para reflexionar sobre los conceptos que encabezan el libro: belleza y verdad. Dejamos al lector que descubra lo que allí se dice, sin embargo, destacamos un significativo párrafo del prefacio:

> ¿Por qué el universo parece ser tan matemático? Se han propuesto varias respuestas pero yo no encuentro ninguna de ellas muy convincente. La relación simétrica entre las ideas matemáticas y el mundo físico, al igual que la simetría entre nuestro sentido de la belleza y las formas matemáticas de más profunda importancia, es un misterio profundo y posiblemente insoluble. Ninguno de nosotros puede decir por qué la belleza es verdad, y la verdad belleza. Solo podemos contemplar la infinita complejidad de la relación. ■

Escaparate 3: Matemáticas de la vida misma



MATEMÁTICAS DE LA VIDA MISMA.
Fernando Corbalán
GRAÓ, Barcelona, 2007
ISBN: 978-84-7827-503-8
285 PP.

Traemos aquí un libro escrito por el anterior coordinador de la sección. Podría parecer una cuestión de pleitesía obligada, y debería serlo, pero no lo es. El libro y el autor aportan méritos más que de sobras para aparecer en esta sección. Para abundar en el acierto de la elección, en los Premios Aula 2008 al mejor libro de Divulgación Educativa, se les ha concedido una Mención Honorífica en el apartado «a la mejor obra educativa o de divulgación científica que puedan despertar el interés de los jóvenes», de lo que nos congratulamos.

Cuando uno coge el libro, echa un vistazo al índice y observa que los títulos de los capítulos empiezan «Las funciones de los números...», «Geometría...», le pueden recordar a esos bloques en los que nos dividen el último currículo (¿o era el penúltimo?, la verdad es que ya no me acuerdo). Si unimos esto al hecho de que la editorial lo encuadra en su serie de didáctica de las matemáticas, podríamos pensar que la obra tiene vocación de libro de texto, pero uno empieza a imaginar que no va por esos derroteros cuando termina por leer sospechosos títulos como «Formas de nuestra vida» y «Rutas matemáticas». Sin embargo, después de leerlo, surge la pregunta ¿por qué no? Es decir, ¿por qué no es esto lo que contamos en las aulas?

El título, *Matemáticas de la vida*, ya deja a las claras (por si no lo estaban suficientemente) las intenciones del autor. Nos lo presenta como una continuación de su libro *La Matemática aplicada a la vida cotidiana* (Graó, 1995), el cual va por su

Daniel Sierra Ruiz
biblioteca@revistasuma.es

décima edición, sin embargo puede ser considerado como una prolongación de todos los frentes que Fernando Corbalán tiene abiertos (que son muchos) y de todas las actividades de la promoción y la mejora de la didáctica de las matemáticas que lleva a cabo.

Puede parecer un tema recurrente y que nos lo sabemos todos: eso de que las matemáticas están por todas partes es algo que reconocemos, pero enseguida volvemos a la abstracción que este libro evita, para mostrarnos pruebas palpables de lo que defiende. Así, escapa de la seriedad matemática tradicional, pero tras esa patina de informalidad subyace toda una ideología didáctica que apoya en auténticas cargas de profundidad. Por ejemplo, ataca con sutileza a aquellos defensores a ultranza de algunos algoritmos tradicionales, personificados en el de la raíz cuadrada (sí, todavía hay quien lo defiende como fundamental): destaca la importancia de saber porque se hace así dicho algoritmo (y nos lo muestra, para que no haya dudas de su interés), por encima de saber ejecutarlo memorísticamente, planteando como alternativa más eficaz para obtener el resultado la aproximación, la calculadora…

Siguiendo con el juego de compararlo con un libro de texto, diríamos que se pueden encontrar unidades didácticas; pero claro, no unas unidades al uso, completas y cerradas: son más bien sugerencias, ideas, en definitiva, invitaciones a investigar y profundizar, y se hace a la manera impresionista, es decir, uno ve la pincelada al detalle y le puede gustar más o menos el color, el trazo, parecerle interesante, pero se puede pensar que carece de sentido, hasta que nos alejamos un poco y contemplamos el conjunto: es ahí cuando todas y cada una de las pinceladas alcanzan su máximo valor. Así, en cada capítulo podemos encontrar historia (pero no como un pegote descontextualizado), indicaciones didácticas, referencias culturales, filosofía, ejemplos concretos de aplicación, ejercicios, propuestas de actividades, contenidos transversales…, y hasta alguna crítica a los planes de estudio («Mientras los temas más interesantes tienen actualidad, aparecen en los medios de comunicación; cuando la pierden se refugian en la enseñanza»). En definitiva, toda una serie de argumentos didácticos apoyados en constantes referencias bibliográficas y a Internet, las cuales suelen venir acompañadas de un comentario al respecto del nivel de dificultad.

El libro está estructurado en seis capítulos. El primero de ellos (*Las funciones de los números. Los números de nuestra vida*) se dedica a mostrar un variado uso de los números, más allá de la mera consideración como herramienta matemática, yendo desde las adivinanzas y juegos de magia hasta el desarrollo en serie de e (pasando por la tipografía utilizada, el número áureo,…). El capítulo denominado *Calcular con rapidez*, entre otros asuntos, nos muestra una interesante historia del cálculo mental y con máquinas, dándonos recetas y mostrando otras formas de calcular. *Geometría. Formas de nuestra vida*, parece el título más fácil de ejemplificar, pero una vez más encontramos aspectos originales, como el paso que hace desde las alcantarillas (literal) al triángulo de Reuleaux.

En el capítulo cuarto (Matemáticas de la comunicación y la organización social), encontramos algunas de las características que debiera tener un ciudadano matemáticamente competente: argumentos matemáticos para apreciar el arte, claves para contemplar críticamente a los medios de comunicación, literatura matemática… Y pasamos a un ciudadano que pasea y observa las matemáticas que encuentra a su alrededor en Rutas matemáticas: un logotipo, una papelera, una catedral…, sus matemáticas nos saltan ya de forma natural.

El libro acaba como el currículo (para los ortodoxos): *La incertidumbre y los problemas complejos*. En él se nos habla de la necesidad de saber probabilidad y estadística para dar respuesta a algunas cuestiones que se escapan a nuestra intuición y a otras que tienen que ver como se reparten el poder los partidos políticos.

En definitiva, un libro que se puede utilizar como herramienta en el aula: por un lado porque siempre habrá quién encuentre aspectos que desconocía, y, por otro, porque hace una recopilación de cuestiones que pueden ser conocidas pero que no suelen estar agrupadas (¿dónde podría encontrar aquello de…?, ¡ah!, en el libro de Fernando Corbalán). Sin embargo, por los contenidos y por su tratamiento también puede encuadrarse en el terreno de la divulgación matemática, y ya no sólo por las curiosidades matemáticas que siempre llaman la atención, sino también por otros aspectos de índole mucho más práctica, como pueden ser las reglas de cálculo rápido, que servirán a quien prepare unas oposiciones en cuya prueba aparezcan este tipo de situaciones.

Así pues, esta obra puede verse desde muchos puntos de vista, puesto que habla de matemáticas y realidad, y ya sabemos que las primeras tienen muchos recovecos y de la segunda dice el autor que «la realidad no es la misma para todas las personas, sino que depende de muchos factores». ■

suma+ 58
Junio 2008, pp.117-124

Penélopes, Ítacas y Ulises

Cuando emprendas tu viaje hacia Ítaca
debes rogar que el viaje sea largo,
lleno de aventuras, lleno de experiencias.

Pero ¡cuidado, navegante!
Recuerda que no existe El camino
Sólo estelas que son huellas
de otros en su navegar
Surca los mares en busca de estelas
para aprender, y aprender de quienes saben.

Que sean muchos los días de verano;
que te vean arribar con gozo, alegremente,
a puertos que tú antes ignorabas.
Los lestrigones y los cíclopes,
el minotauro
y el feroz Posidón no podrán bloquearte
si tú no los llevas ya dentro, en tu laberinto.

No has de esperar que Ítaca te enriquezca:
Ítaca te ha concedido ya un hermoso viaje.
Sin ella, jamás habrías partido;

Y cuando llegues a la pequeña isla,
Mírate en el espejo de Penélope
Sin duda, entonces, comprenderás lo que significan las Ítacas.

Vivir, jugar, crear

Ítaca es el claro del bosque, la falta, lo que no sabes, lo que no conoces, lo que no comprendes, la prueba que el héroe debe superar en los cuentos fantásticos, la salida del laberinto, la libertad. Es el motor, la motivación, lo que nos mueve a crear.

Y **creatividad** es sinónimo de pensamiento divergente, es decir, capaz de romper continuamente los esquemas de la experiencia. Es creativa una mente que trabaja siempre, que siempre hace preguntas, que descubre problemas allí donde los demás encuentran respuestas satisfactorias, que se encuentra a gusto en las situaciones cambiantes donde los demás sólo perciben peligros, capaz de juicios autónomos e independientes, que rechaza lo que está codificado, que remanipula los objetos y conceptos sin dejarse inhibir por el conformismo. Todas estas cualidades se manifiestan en el proceso creativo. Y este proceso -¡escuchad!, ¡escuchad!- tiene un **carácter lúdico**. Siempre. Aunque estén en danza las “severas matemáticas” dice Rodari (2008) en su *Gramática de la fantasía*.

Xaro Nomdedeu Moreno
Societat d’Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana al-Khwārizmī
ariadna@revistasuma.es

Y continúa diciendo que:

> ...la formación matemática no ha de discurrir sobre la vía forzada de la habilidad técnica y de la eficacia, sino que ha de partir del reconocimiento de que la conceptualización es una función libre y creativa de nuestra mente...

La vida y el juego

Ese carácter lúdico que se manifiesta en el proceso creativo, fue elevado a su más alto rango en palabras de Schiller, en sus *Cartes sobre l'educació estètica de l'home*:

> El objeto del impulso sensible, expresado con un concepto universal, es la vida [leben] en el sentido más amplio; concepto que abraza a todo ser material y a toda presencia sensible inmediata. El objeto del impulso formal, expresado con un concepto universal, es la forma [gestalt], entendida tanto en un sentido impropio como en el sentido propio; concepto que abraza todas las propiedades formales de las cosas y todas las relaciones de las cosas con la facultad de pensar [denkkräfte]. El objeto del impulso de juego, presentado en un esquema universal, podríamos llamarlo forma viva [lebende-gestalt]; concepto que sirve para designar todas las propiedades estéticas de los fenómenos y, en una palabra, aquello que en el sentido más amplio de la palabra llamamos belleza. (Shiller, 1983)

Las estelas

Ese impulso de juego es el que crea el resplandor en las estelas de l@s maestr@s, y quien les presta su belleza.

Estelas que se cortan, se cruzan, divergen y convergen, pero, en los tramos esenciales, concurren, como han constatado los muchos buscadores de estelas que han sido (Grupo Deca, 1990):

> La destreza para resolver genuinos problemas es un verdadero arte que se aprende con paciencia y considerable esfuerzo, enfrentándose con tranquilidad, sin angustias, a multitud de problemas diversos, tratando de sacar el mejor partido posible de los muchos seguros fracasos iniciales, **observando los modos de proceder, comparándolos con los de los expertos y procurando ajustar adecuadamente los procesos de pensamiento a los de ellos.** Es la misma forma de transmisión que la de cualquier otro arte, como el de la pintura, la música, etc. (Escudero, página web)

Esos tramos esenciales de concurrencia subyacen en las estrofas del poema que abre este artículo, adaptación libre de los de Constantino Kavafis y Antonio Machado. Y en resumen dicen que l@s maestr@s seguían ciertos pasos:

1. Estudiar la situación, aceptar el reto, tomar contacto.
2. Elaborar la hoja de ruta, el plan de navegación y poner a punto los instrumentos, las estrategias.
3. Iniciar el viaje. Avanzar y retroceder, tejer y destejer, sin perder el ánimo ante los atascos
4. Revisar el cuaderno de bitácora, recapitular, reflexionar, valorar lo vivido en el propio camino y formular nuevas preguntas, proponer nuevos retos.

Diofanto

Entre los grandes maestros se encuentra Diofanto, a quien dedicaré este capítulo y de quien se dice que:

> Rompiendo con la costumbre de enunciar los problemas en forma de historieta redactada, en general, con arreglo a moldes mitológicos, planteó, por celo religioso, todas sus proposiciones, excepto una, en abstracto, con lo que su Aritmética gana en claridad para nosotros, pero debió ser, por el contrario, más oscura para los antiguos, habituados a la forma concreta, como lo demuestra el haber vuelto a adoptar, después de Diofanto, las normas tradicionales. (Vera, 1970)

> *La destreza para resolver genuinos problemas es un verdadero arte que se aprende con paciencia y considerable esfuerzo*

La Antología Palatina muestra que tales historietas se recuperaron con posterioridad. Ejemplos de epigramas matemáticos de dicha Antología son el famoso epitafio del propio Diofanto o el de las manzanas robadas propuesto en el artículo anterior.

Uno de los problemas abstractos más famosos, transitado por el maestro fue, y sigue siendo, el de los números poligonales. Siglos más tarde, Descartes hizo lo propio con otros números figurados, los piramidales.

Pero los problemas que popularizaron el nombre del padre del álgebra, fueron aquellos cuya solución entera depende de dos variables y una sola condición, lo cual se tradujo en una ecuación con dos incógnitas y la condición de que sus soluciones pertenecieran al campo de los números enteros. Estamos hablando de las ecuaciones diofánticas, que han dado mucho juego como adivinanzas y rompecabezas matemáticos.

En su honor he seleccionado las cinco propuestas que siguen. Como ya se indicó en el primer artículo de esta sección, las experiencias, soluciones y sugerencias que aportéis, saldrán en el número siguiente.

Problemas propuestos

Números para contar

Un enunciado sin contexto religioso, ni político, ni económico, ni nada de nada.

Existe un famoso problema que consiste en contar el número de cuadrados cuyos lados están sobre una malla cuadrada. ¿Existe algún número figurado que pueda expresar la solución?

Acertijo

En las antiguas cajetillas de cerillas, solían venir acertijos que, como es de suponer, iban dirigidos al ingenio del público en general. Se suponía que no había que utilizar ningún aparato matemático, sino el puro razonamiento mental. Uno de ellos decía así:

En un corral hay conejos y gallinas, contándose en total 22 patas. ¿Cuántas gallinas y conejos hay?

Tragedia

Y con los contextos volvió la carga de estereotipos que cada sociedad impone. Es el ejemplo del clásico problema anónimo de los maridos celosos:

Cuarenta cortesanos de la corte de un sultán eran engañados por sus mujeres, cosa que era claramente conocida por todos los demás personajes de la corte sin excepción. Únicamente cada marido ignoraba su propia situación. El sultán convocó a los hombres de su corte y les dijo:

- Por lo menos uno de vosotros tiene una mujer infiel. Quiero que el que sea la expulse una mañana de la ciudad, cuando esté seguro de la infidelidad.

Al cabo de cuarenta días, por la mañana, los cuarenta cortesanos engañados expulsaron a sus mujeres de la ciudad. ¿Por qué?.

Es obvio que este enunciado ha dejado de ser polítiamente correcto en las sociedades occidentales contemporáneas. Podemos optar por la solución drástica de Diofanto o por sustituir el contexto, a la manera de Gianni Rodari, para inventar nuevos relatos a partir de los antiguos, basándonos sólo en la estructura interna y cambiando los personajes. Se pueden enunciar así problemas isomorfos mejor adaptados al aula actual. Por suerte, hoy en día circulan ya versiones literarias como el cuento *El rescate* de Luis Balbuena y otras participativas, lúdicas y no sexistas, como la siguiente, planteada como juego en el aula por José Colera:

El material necesario son diez gorros negros y nueve blancos. Diez personas se sientan en corro a la vista del resto de participantes. A cada una de las personas del corro se le pone un gorro en la cabeza. El resto de participantes da una palmada y la persona que concluya que su gorro es negro se pone de pie. Si no se levanta nadie, el resto de participantes da una nueva palmada, y así sucesivamente. Si hay seis personas que llevan gorro negro, se levantarán las seis, a una, cuando oigan la sexta palmada. ¿Qué razonamiento les llevará a tal actuación?

Trozos de tarta

También es famoso un rompecabezas que habla de cómo obtener el máximo de trozos de tarta equivalentes, practicando sólo tres cortes. Ahora os propongo una extensión de dicho rompecabezas:

¿Cuántos trozos de tarta podemos obtener como máximo practicándole sólo cuatro cortes?

Los buenos problemas tienen en común con las buenas historias, los acertijos y los chistes, esa chispa que asombra cuando, al final, se desvela el misterio. Algunos acertijos son casi chistes:

Dinamarca

Piensa un número entero comprendido entre 1 y 9, multiplícalo por 9, réstale 5, suma sus cifras hasta obtener un número de una sola cifra, piensa un país europeo que empiece por la letra del alfabeto que ocupa ese lugar, luego, piensa un nombre de gran mamífero que empiece por la siguiente letra del alfabeto.

Soluciones a los problemas del número anterior

Las manzanas

Cupido está abatido porque las Musas le han quitado casi todas las manzanas que había recogido para Afrodita. Veamos el detalle:

Clio le ha quitado 1/5, Euterpe 1/12, Talía 1/8, Melpómene 1/20, Terpsícore 1/4, Erato 1/7, Polimnia 30, Urania 120 y Calíope 300. De modo que Cupido se ha quedado sólo con 50 manzanas.

Solución

En aquella época no existía todavía el método algebraico clásico, que inauguró precisamente Diofanto con la decisión antes explicada.

> Con Diofanto, el número se desprende de su vestido geométrico, y la forma y el método se apartan de la tradición logística para adentrarse en la zona del razonamiento algebraico que había de proyectar su influencia hasta el siglo XVII con Fermat y Descartes, muchas de cuyas contribuciones no se comprenden sin el matemático de Alejandría, el cual inaugura la época del Álgebra sincopada, es decir, del Algebra que interpola en el lenguaje ordinario algunas abreviaturas para simplificar y mecanizar el razonamiento, sustituyendo la incógnita por un símbolo único e indicando con sendas palabras, siempre las mismas, la adición y la sustracción y la igualdad…

El método seguido era válido en muchos casos como el que nos ocupa. Era el método de la falsa posición, según el cual: supongamos que (falsa posición o suposición) el total de manzanas fuera el mcm de los denominadores (para hacer más sencillos los cálculos). Éste número es 840.

Supongamos que el número buscado fuera 840, entonces su quinta parte sería 168, la doceava 70, la octava 105, la veinteava 42, la cuarta 210 y la séptima 120, por lo que las manzanas restantes hasta completar 840 deberían ser 125, no 500 que suman las 30 más 120 más 300 más 50.

Pero multiplicando 125 por 4 sí que obtenemos ese 500, así pues, el número de partida deberá ser multiplicado por esa misma cantidad y obtendremos la verdadera solución:

$$840 \times 4=3360$$

Entonces Cupido recolectó un total de 3360 manzanas.

Adoptando la notación que introdujo Diofanto y generalizó Vietta, la resolución resulta mucho más mecánica, aunque menos inteligible para quienes no están suficientemente familiarizados con los métodos abstractos.

Sea x el total de manzanas recolectadas por Cupido:

$$x-\left(\frac{x}{5}+\frac{x}{12}+\frac{x}{8}+\frac{x}{20}+\frac{x}{4}+\frac{x}{7}\right)=500$$

$$x-\left(\frac{x}{5}+\frac{x}{12}+\frac{x}{8}+\frac{x}{20}+\frac{x}{4}+\frac{x}{7}\right)=500$$

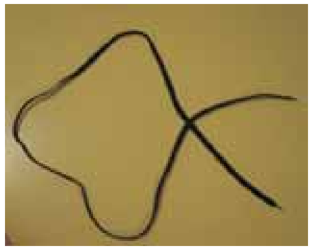
$$x\left(1-\frac{1}{5}-\frac{1}{12}-\frac{1}{8}-\frac{1}{20}-\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)=500$$

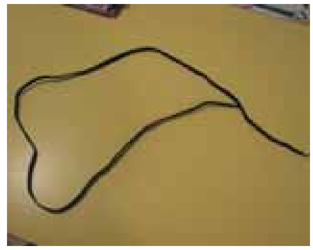
$$\frac{25}{168}x=500 \Rightarrow x=\frac{84000}{25} \Rightarrow x=3360$$

La orquídea

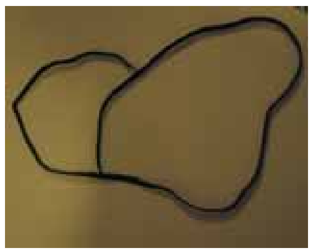
Busca una línea que corte una y sólo una vez a cada uno de los once arcos de la orquídea. No está permitido pasar por los vértices.

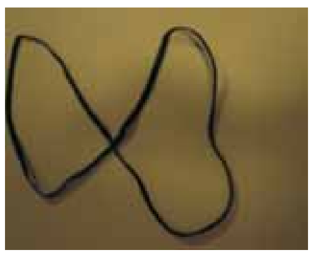
La primera figura tiene un vértice par, el cruce del cordel, y dos vértices impares, los extremos.





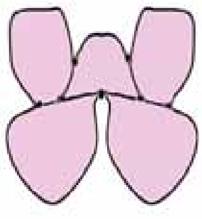
La segunda tiene un vértice de orden 3, el cruce, y otro de orden uno, el extremo. Tiene, pues dos vértices impares también. La tercera tiene dos vértices impares de orden 3. Las restantes tienen cero vértices impares.



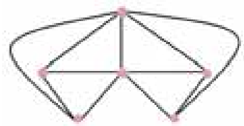


Si el cordel cruza sobre un vértice impar, aumenta en dos unidades su orden, pero no hay posibilidad de aumentar el número de vértices impares, puesto que dependen de los extremos del cordel y éstos sólo pueden situarse en las tres posiciones de las tres fotografías iniciales.

Si engrosamos los bordes de los pétalos de la orquídea, veremos que se van transformando en "ríos" y los pasos en puentes.

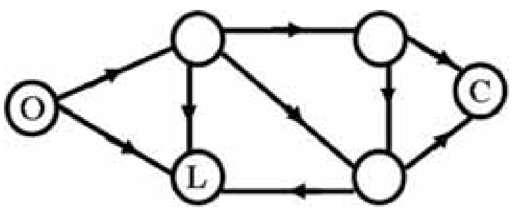


Si los ríos siguen ensanchándose, las islas se transforman en puntos y los puentes en segmentos de un grafo:



El grafo equivalente al laberinto de la orquídea tiene más de dos vértices impares. No es posible obtenerlo con un solo cordel, no es posible dibujarlo de un solo trazo.

La oveja, el lobo y la col



Observa el laberinto que representa el grafo. Tiene una entrada y dos salidas: una guardada por un LOBO *y otra en la que hay una* COL*. Una* OVEJA *está en la entrada y avanza por el laberinto. En cada cruce elige al azar uno de los dos caminos posibles. Si llega a la col, sale del laberinto relamiéndose, pero, si tropieza con el lobo, está irremisiblemente perdida ¿Cuál es la probabilidad de que salga del laberinto con vida y bien alimentada? ¿Y de que se la coma el lobo?*

La jugada representada en las imágenes dio como resultado 18 ovejas muertas y 6 ovejas salvadas. La media obtenida con las jugadas de los distintos grupos se aproximó al resultado teórico obtenido con el diagrama en árbol:

La cueva

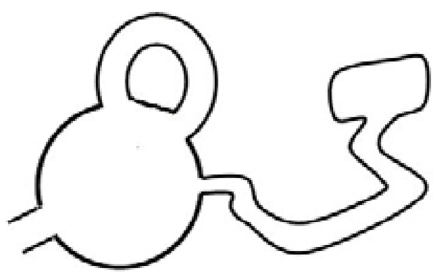
Varios excursionistas se han perdido en una cueva de la que parten cuatro caminos. Uno de ellos conduce al exterior en una hora; otros dos forman un bucle que se tarda en recorrer, de vuelta a la cueva, un día, tanto en un sentido como en el otro; el restante es un camino sin salida, del que deberán retroceder e invertirán en ello dos días.

Como no llevan ninguna luz y la cueva está oscura y llena de obstáculos, eligen, cada vez que hacen un intento de salir, uno de los cuatro caminos al azar. Si sólo tienen comida y agua para sobrevivir hasta tres días, ¿qué proporción de excursionistas crees que logrará salir de la cueva?

Si tuviesen alimentos para subsistir indefinidamente, ¿crees que se salvaría todo el grupo?

¿Cuánto tiempo crees que tardaría cada excursionista en salir, por término medio?

La primera parte del problema fue abordada por alumn@s de 5º de la Escuela Europea de Bruselas, del grupo de la profesora María Luisa Moreno. El nivel de este grupo es equivalente a 4º de la ESO. Se utilizaron 2 periodos de 45 minutos.



Si sólo tienen comida y agua para sobrevivir hasta tres días, ¿qué proporción de excursionistas crees que logrará salir de la cueva?

Conjetura individual ingenua:

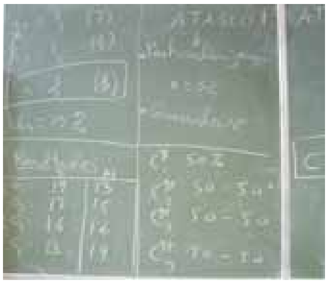
Nº de alumnos	7	5	3	1
Proporción que se salva	1/4	1/3	1/2	15%

Defensa conjeturas, atasco.
Estrategias para salir.
Caso particular n=32.
Simulación: dado, tablero, habichuelas, tabla.

Resultados recogidos en las tablas:
g1= 13-19
g2=17-15
g3=16-16
g4=19-13

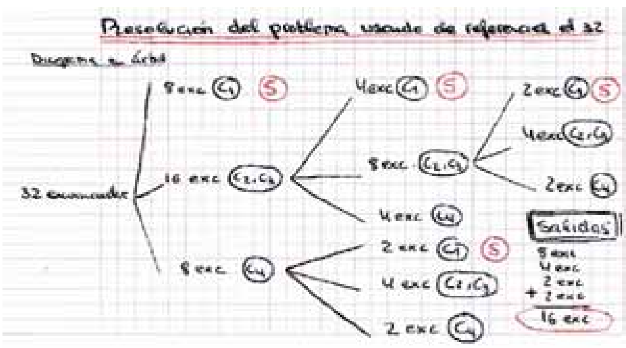
Conjetura de los grupos a la vista de todos los resultados:

g1= 50-50 aunque, opinan que debería ser 52-48, porque han sacado la media de los grupos con la calculadora. Insisten en que debe ser exactamente 52-48
g2=17-15---50-50
g3=16-16---50-50
g4=19-13---50%



Estas ya no son conjeturas ingenuas, han sido inducidas por la experiencia en cuatro jugadas o simulaciones, son mucho más fuertes que las primeras, pero aun no se apoyan en un razonamiento contundente, deIductivo.

Se ponen a buscar ese argumento. El grupo 4 apunta la estrategia del diagrama en árbol. Lo construyen para 32 excursionistas.

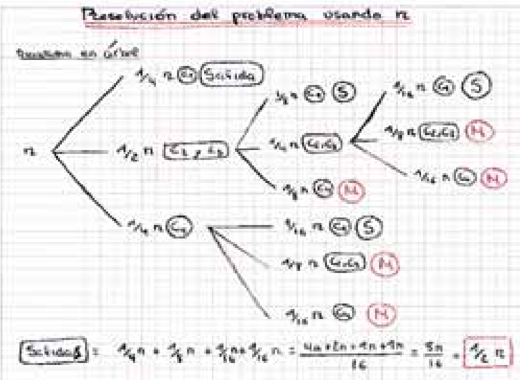


Comprenden que todavía no han encontrado el razonamiento definitivo, pero pierden interés porque para ellos ya está suficientemente claro.

Tabla del grupo 4

Nº excursionista	Recorrido	Duración	Salvado	Muerto
1	2,1	2d+1h=49h	x	
2	4,1	1d+1h=25h	x	
3	4,3,1	1d+1d+1h=49h	x	
4	2,1	2d+1h=49h	x	
5	3,1	1d+1h=25h	x	
6	2,2	2d+2d=96h		x
7	3,3,1	1d+1d+1h=49h	x	
8	1	1h	x	
9	2,4	2d+1d=72h		x
10	2,3	2d+1d=72h		x
11	2,1	2 d+1h=49h	x	
12	2,2	2d+2d=96h		x
13	4,1	1d+1h=25h	x	
14	4,3,3	1d+1d+1d=72h		x
15	1	1h	x	
16	1	1h	x	
17	4,3,2	1d+1d+2d=96h		x
18	1	1h	x	
19	1	1h	x	
20	2,3	2d+1d=72h		x
21	2,2	2d+2d=96h		x
22	4,4,4	1d+1d+1d=72h		x
23	2,2	2d+2d=96h		x
24	1	1h	x	
25	3,1	1d+1h=25h	x	
26	2,3	2d+1d=72h		x
27	3,2	1d+2d=72h		x
28	1	1h	x	
29	1	1h	x	
30	2,1	2d+1h=49h	x	
31	4,3,1	1d+1d+1h=49h	x	
32	4,4,2	1d+1d+2d=96h		x

Algun@s de los que se propusieron al inicio para abordar el problema general de entrada, comprenden que ahora están en mejores condiciones para hacerlo:



Se han divertido y han resuelto el problema a su nivel. La segunda pregunta se aborda también en dos niveles:

> *Si tuviesen alimentos para subsistir indefinidamente, ¿crees que se salvaría todo el grupo?*

Un grupo de alumno@s de 4º de la ESO del IES Francesc Tàrrega de Vila-real, atendido por su profesor Joan Batalla, nos ha hecho llegar su material, del que voy a exponer una pequeña muestra.

Comienzan con una división de opiniones, 12 de 21 opinan que se salvan todos.

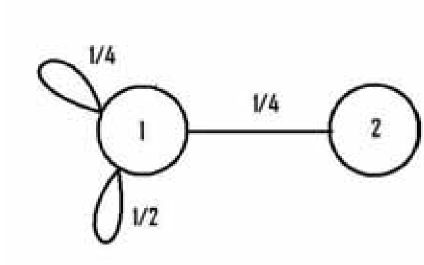
Defender su opinión ya es otra cosa. Preguntamos, la razón de que algún excursionista acierte la salida. “Por casualidad” –dice un alumno. A partir de ahí surgen palabras como suerte, aleatoriedad, azar, probabilidad,… Pronto descubren la necesidad de una notación adecuada. 1 para la salida, 2 para el callejón sin salida, 3 y 4 para las entradas del bucle. La notación da sus frutos rápidamente: una de las alumnas dice, 3 y 4 tienen más posibilidades. Ello conduce a plantear dos tipos de ruleta según el estilo de resolución: una con cuatro sectores equivalentes para quienes prefieren pensar en cuatro salidas equiprobables, otra con dos sectores de un cuarto de círculo y un semicírculo para las dos entradas del bucle. Con un poco de ayuda dibujan el primer árbol, pero la gran mayoría eliminan del proceso las entradas ya visitadas. Por fin plantean la situación correctamente.

Llegan a ver que se salva ¼ de cada ramillete: ¼ del primero, luego ¼ de los ¾ que quedan, luego ¼ de los ¾ de los ¾ y así sucesivamente.

Otros llegan a resultados como:

$$\frac{1}{4}+3\left(\frac{1}{4}\right)^2+9\left(\frac{1}{4}\right)^3+27\left(\frac{1}{4}\right)^4+\ldots$$

Simulando el problema mediante un grafo, podemos ver con mayor contundencia el razonamiento recurrente



$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\left\{1-\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)\right]+\ldots\right\}+\ldots$$

Pero el “sucesivamente” les genera un problema. “No terminaremos nunca de hacer la suma” –dice una alumna.

Tras varias intervenciones recuerdan que el año anterior trabajaron las progresiones geométricas y ya se encuentran en condiciones de abordar la solución. Se trata de la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica ilimitada de primer término ¼ y razón, 3/4:

Se salvan: $\dfrac{1/4}{1-3/4}=1$

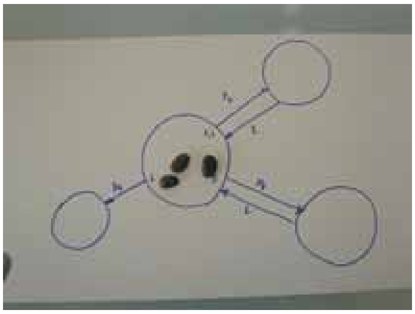
Pero este resultado les despista. Es necesaria otra discusión para que comprendan que ¼ y ¾ eran del total de excursionistas, es decir, realmente debían haber escrito $e/4$ y $3e/4$, con lo que el resultado habría sido e, es decir, se salvan todos. El profesor escribe:

Se salvan: $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}3^i\left(\frac{1}{4}\right)^{i+1}e=\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^i e=\frac{1}{4}\times\frac{1}{1-3/4}\times e=e$

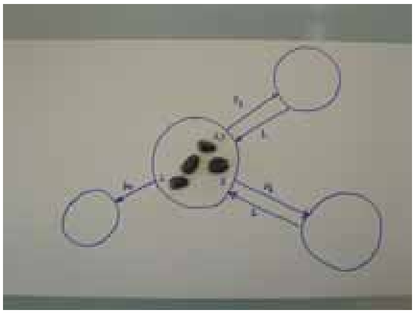
La tercera pregunta se aborda también en dos niveles, el primero más lúdico y concreto y el segundo más formalizado. La profesora Sanja Dabic introduce la pregunta a un grupo de 4º de la ESO:

> *¿Cuánto tiempo crees que tardaría cada excursionista en salir, por término medio?*

En primer lugar comienzan las conjeturas ingenuas.

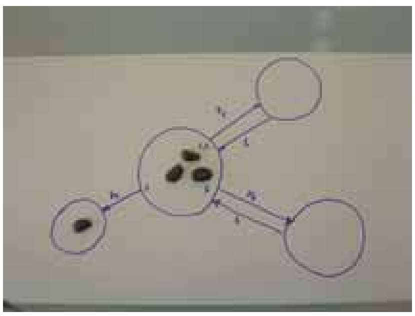


En general manifiestan la dificultad de razonar sobre un proceso ilimitado. Con ayuda de la profesora abordan el problema jugando en el ábaco probabilístico aplicado a un paseo aleatorio. Comienzan con el grafo en estado crítico, es decir, cada estado interior tiene carga crítica, insuficiente para comenzar el juego.



Introducen una ficha en el estado inicial para poder comenzar.

Cuando todos los estados interiores repiten la posición inicial, se para el juego.



Por cada excursionista que sale, debe comenzar el juego de nuevo si queremos que se salve otro, y en cada uno de estos bucles del proceso se invierten los mismos tiempos:
Dos fichas han viajado de 1 a 2 y de 2 a 1, lo que les ha costado un día a cada una. Una ficha ha viajado de 1 a 3 y ha tardado en hacer su camino 2 días.Una cuarta ficha ha tardado una hora en salir al exterior.

Luego:

$$m_{1,2} = \frac{2\times 1d + 1\times 2d + 1\times 1d}{1} = 4d + 1h$$

Considerando el grafo del juego con sus dos bucles, podemos razonar formalmente:

$$m_{1,2} = \frac{\frac{n}{2}\times 1d + \frac{n}{4}\times 2d + \frac{n}{4}\times 1h}{\frac{n}{4}} = 4d + 1h$$

Duración media del paseo aleatorio: cuatro días y una hora.

EL HILO DE ARIADNA

REFERENCIAS BIBLIOGÁFICAS

GRUPO CERO (1989): *De 12 a 16. Un proyecto de curriculum*, Mestral llibres, Valencia.

GRUPO DECA (1990): *Didáctica sobre resolución de problemas*, CEP de Burgos, Burgos.

GUZMAN, M. (1988). *Aventuras Matemáticas*, Labor, Barcelona.

MASON, J., BURTON, L., STACEY, K. (1988): *Pensar matemáticamente*, Labor, Barcelona.

RODARI, G. (2008): *Gramàtica de la fantasia*, Proa, Barcelona.

SCHILLER, F. (1983): *Cartes sobre l'educació estètica de l'home*, Laia, Barcelona.

VERA, F. (1970): *Científicos griegos*, Aguilar, Madrid.

Internet

http://platea.pntic.mec.es/~jescuder/prob_int.htm

SUMA+ 58
Junio 2008, pp. 125-130

Historias de al-Khwārizmī (1ª entrega)

Ahora que SUMA está al cargo de la Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "al-Khwārizmī", parece razonable que esta sección, que se va a dedicar a contar historias de matemáticos y matemáticas, comience contando historias del matemático cuyo nombre pusimos a nuestra sociedad.

Yo fui el culpable del bautizo, que se decidió en un viaje en coche en diciembre de 1993, hace ya quince años, desde Valencia a Castellón, donde íbamos a celebrar la Asamblea Constituyente, después de descartar encomendarnos a un par de matemáticos valencianos, Tosca y Corachán, ambos sacerdotes y de nombres sonoros. De al-Khwārizmī nos interesaba que de su nombre y de su obra provienen dos palabras de la terminología matemática presentes en la enseñanza primaria y secundaria, algoritmo y álgebra. Pero también que, en la época en que vivió al-Khwārizmī, finales del siglo VIII y primera mitad del IX, Valencia formaba parte del emirato de Córdoba, que, aunque era política y administrativamente independiente del califato de Bagdad, seguía manteniéndose unido a él desde el punto de vista cultural y espiritual. Es decir, que al-Khwārizmī trabajó en el mismo ámbito cultural en que entonces estaba Valencia, a pesar de haber nacido en el otro extremo del imperio árabe, a miles de kilómetros. Cercanía y lejanía, proximidad y extrañeza hicieron que al-Khwārizmī haya acabado identificando a nuestra sociedad valenciana de profesores de matemáticas, aunque no fuera un matemático valenciano.

El matemático más antiguo del que tengo noticia que nació en Valencia es ʿAbd ar-Rahmān Ibn Sayyid, cuya vida sitúa Ahmed Djebbar en torno a 1070 (Djebbar, 2005, p. 137), ya, por tanto, un par de siglos posterior a al-Khwārizmī, y en la época en que Valencia era uno de los reinos de taifas en que quedó dividido el califato de Córdoba después de la *fitna*, caos o guerra civil, que acabó con él. Sánchez Pérez también lo menciona en su *Biografía de matemáticos árabes que florecieron en España*, con el nombre de Abuzeid Abderrahman Benabdala Abensayid el Kelbi, y dice de él que "nació en Valencia, no podemos precisar en qué año, pero sí asegurar que vivía en Játiva en el 456/1063" (Sánchez Pérez, 1921, p. 37).

Djebbar afirma que sus libros no se han encontrado, pero que "conocemos los trabajos de Ibn Sayyid a partir de un resumen

Luis Puig
Universitat de València Estudi General
historias@revistasuma.es

que hizo de ellos uno de sus alumnos, que no es otro que el filósofo Ibn Bājja" (Djebbar, 2005, p. 69).

No se qué hubiera pasado si nos hubiéramos encomendado a los valencianos Tosca, Corachán o Ibn Sayyid, pero el haber elegido a alguien lejano y extraño a nuestro(s) idioma(s) ha hecho que desde el primer momento hayamos tenido complicaciones con nuestro nombre. Complicaciones para saber cómo se escribe o cómo se pronuncia, o qué son esas rayas encima de una a y una i, que no son fáciles de escribir con el procesador de textos. Hablaré en esta primera entrega de "Historias" de cómo se escribe, cómo se llama, de dónde era y si era árabe y hablaba árabe al-Khwārizmī. En próximas entregas, lo haré de sus libros.

¿Cómo se escribe al-Khwārizmī?

En los libros de historia podemos encontrarnos con el nombre de nuestro matemático escrito de muchas maneras. Las rayas sobre la a y la i pueden estar presentes o no, o ser substituidas por acentos circunflejos, por razones tipográficas, pero ésa no es la diferencia más importante. Con rayas o acentos circunflejos, podemos encontrarnos con al-Khwārizmī, al-Jwārizmī, o al-Hwārizmī, y también al-Khowārizmī, al-Jowārizmī, o al-Howārizmī, o al-Khuwārizmī, al-Juwārizmī, o al-Huwārizmī, pero también con una e en el lugar de la primera i, al-Khwārezmī, al-Khowārezmī, al-Khuwārezmī, etc.

El origen de tanta variación está en que en realidad el nombre de nuestro matemático se escribe con un alfabeto distinto del latino, el alfabeto árabe o alifato, y se escribe así: الخوارزمي

Para escribirlo en el alfabeto latino hay que transliterar el nombre escrito en árabe, para lo que hace falta que se haya establecido un convenio para hacer corresponder a cada letra del alfabeto árabe una letra, o una combinación de letras o signos del alfabeto latino, que se pronuncien de forma similar. Ahora bien, precisamente como el objetivo de la transliteración es representar la palabra árabe en el alfabeto latino de forma que la pronunciación sea similar, se han establecido sistemas diferentes de transliteración del árabe, al buscarse la similitud de la pronunciación en distintos idiomas.

La primera letra del nombre de الخوارزمي después del artículo "al", es decir, la tercera letra, خ, –empezando por la derecha, ya que el árabe se escribe de derecha a izquierda– es una letra que se pronuncia como la jota castellana, de ahí la transliteración al-Jwārizmī. Pero el sonido de la jota castellana no existe ni en inglés, ni en francés o alemán, y además, en esos idiomas, la letra jota se pronuncia de forma muy distinta, por lo que no resulta razonable usarla para representar ese sonido. En el caso inglés, esa letra árabe se translitera por la combinación de letras kh, de forma convencional, indicando con la k que el sonido se parece al de su hache, pero que es más fuerte. En el caso alemán y francés, se translitera por la letra

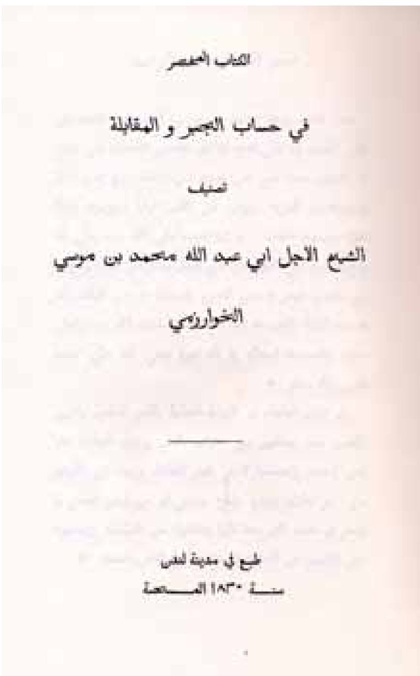

الكتاب المختصر
في حساب الجبر و المقابلة
تصنيف
الشيخ الاجل ابي عبد الله محمد بن موسي
الخوارزمي
طبع في مدينة لندن
سنة ١٨٣٠ المسيحية

Figura 1.
Portadilla árabe de la edición de Rosen del álgebra de al-Khwārizmī

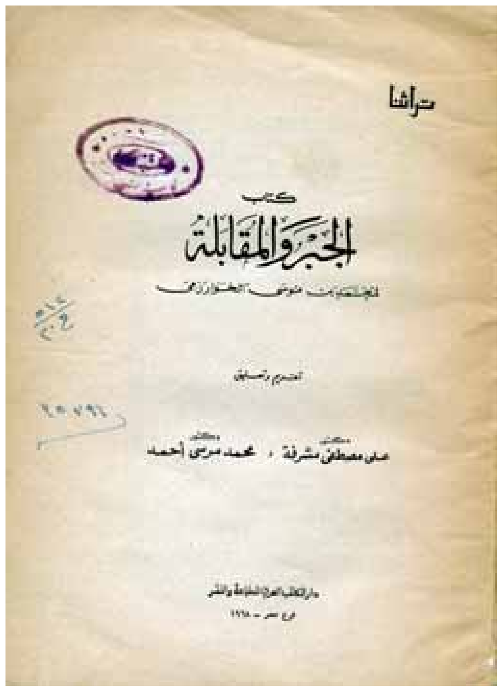

تراثنا
كتاب
الجبر والمقابلة

Figura 2.
Portada de la edición de Masharrafa y Ahmad del álgebra de al-Khwārizmī

hache, a la que se le añade un pequeño arco debajo, que yo no he podido escribir aquí, para indicar también que el sonido se parece al de su hache aspirada, sólo que más fuerte.

Así que las variantes al-Khwārizmī, al-Jwārizmī, o al-Hwārizmī responden a tres sistemas distintos de transliteración del alfabeto árabe al alfabeto latino, que podemos llamar anglosajón, español y franco-alemán[1].

Nosotros decidimos optar por la transliteración anglosajona para nuestra sociedad por el predominio del inglés como lengua científica, por un lado, pero también porque el nombre de nuestra sociedad es Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana, y en cualquiera de las variantes del catalán no existe el sonido de la jota castellana y la letra jota se pronuncia de otra manera. Podíamos haber optado por la transliteración al-Hwārizmī, como hicieron Paradís y Malet en su historia del álgebra escrita en catalán, pero ése no fue el caso. De modo que nos quedamos con la transliteración que es de hecho la más extendida[2].

En cualquier caso, se translitere como se translitere esta primera letra, la primera letra del nombre de nuestro matemático se pronuncia como la jota castellana, no por escribir al-Khwārizmī, se tiene que pronunciar "al-kuarismi".

Ahora bien, la existencia de esas tres normas de transliteración distintas sólo explican las tres variantes Kh, J o H, para la primera letra del nombre de nuestro matemático, pero no el resto de las variantes en las que lo que es distinto es la presencia o ausencia de algunas vocales y el cambio de unas vocales por otras: las variantes que, en el caso de dejar Kh fija, dan al-Khwārizmī, al-Khawārizmī, al-Khowārizmī, al-Khuwārizmī, y al-Khwārezmī, al-Khawārezmī, al-Khowārezmī, al-Khuwārezmī (y las correspondientes variantes con J y con H, en vez de Kh). El origen de estas variantes está, en primer lugar, en una peculiaridad de la escritura de la lengua árabe, y, en segundo lugar, en diferencias de pronunciación del árabe.

La peculiaridad a la que me refiero no es de hecho exclusiva de la lengua árabe, sino que es algo que el árabe comparte con otras lenguas semíticas como el hebreo. En árabe hay dos tipos de vocales: las vocales largas y las vocales breves[3]. Pues bien, en el árabe escrito sólo se representan las consonantes y las vocales largas, pero no las vocales breves. Así, por ejemplo, en الخوارزمي no está escrita una de las íes, porque es breve, de manera que, si sólo transliteráramos lo escrito, escribiríamos al-Khwārzmī.

Leer un texto escrito en árabe es una tarea distinta de leer un texto escrito en castellano, ya que no basta con conocer qué sonidos resultan de la combinación de las letras, sino que hay que reconocer por el contexto cuáles son las vocales breves que no están escritas. En el caso de al-Khwārizmī, apenas faltan vocales, pero, cuando uno se encuentra escrito en un texto árabe, por ejemplo, درس, que son las tres consonantes que transliteramos drs, tiene que decidir por el contexto si se trata de "darasa", con tres aes breves, que significa "estudió", o "durisa", con otras tres vocales breves, que significa "se estudió".

Como hay textos cuya lectura no se quiere que esté sometida a esta necesidad de interpretar por el contexto de qué palabra se trata, en particular los textos sagrados del Islam, se usa también una escritura "vocalizada", en la que, además de las letras del alifato, se utilizan otros signos, que se colocan encima o debajo de las letras del alifato, y que indican las vocales breves y algunos otros rasgos de la pronunciación, como la ausencia de vocal en una sílaba o la duplicación de una consonante al final de una sílaba y el comienzo de la siguiente. A título de ejemplo, en las figuras 1 y 2 reproducimos dos portadas del libro de álgebra de al-Khwārizmī: la portadilla en árabe de la edición bilingüe en árabe e inglés de Rosen de 1831 (figura 1), y la portada de la edición árabe de ʿAlī Mustafā Masharrafa y Muhammad Mursī Ahmad de 1939 (figura 2). En la portadilla árabe de la edición de Rosen, la escritura es la corriente; en la otra, hay algunas palabras vocalizadas, en particular, el nombre de al-Khwārizmī. En la figura 3 hemos recortado al-Khwārizmī escrito sin vocalizar, como lo escribió Rosen, y en la figura 4, vocalizado, como lo escribieron Masharrafa y Ahmad.

Figura 3


Figura 4

Por otro lado, hay diferencias de pronunciación del árabe que afectan a las vocales breves, en concreto, hay una vocal que puede pronunciarse como una "u" o como una "o", según la zona lingüística, y una vocal que puede pronunciarse como una "i" o como una "e".

Las vocales breves no escritas en la escritura corriente árabe y las diferencias de pronunciación son las responsables pues de las variantes al-Khwārizmī, al-Khawārizmī, al-Khowārizmī, al-Khuwārizmī, al-Khwārezmī, al-Khawārezmī, al-Khowārezmī y al-Khuwārezmī, según se escriban o no la "a" breve y la primera "u" breve, y según se tome la pronunciación "u", e "i", u "o" y "e", de las vocales breves cuya pronunciación varía.

¿Cómo se llama al-Khwārizmī?

Las variantes con que puede encontrarse escrito el nombre de nuestro matemático no sólo afectan a lo que en la onomástica árabe se llama su *nisba*, al-Khwārizmī, que es el nombre que indica procedencia, origen, tribu o similares. También hay variantes respecto a su nombre completo.

En la gran mayoría de las referencias, aparece como Muhammad ibn Mūsa al-Khwārizmī, con su nombre propio, o *ism*, Muhammad (Mahoma), su filiación, o *nasab*, ibn Mūsa (hijo de Moisés), y su *nisba*, al-Khwārizmī (el de Khwārizm). En algunas ocasiones, se le añade además lo que en árabe se denomina la *kunya*, que se forma con la palabra Abū, que significa "padre de", seguida del nombre del hijo varón primogénito; éste es el caso, por ejemplo, de la página web *The MacTutor History of Mathematics archive*, http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk, en la que aparece como Abū Ja^{c}far Muhammad ibn Mūsa al-Khwārizmī, es decir, el padre de Ja^{c}far Mahoma el hijo de Moisés el de Khwārizm. Pero aquí empiezan las discrepancias, porque en otros lugares su *kunya*, en vez de Abū Ja^{c}far, es Abū ^{c}Abd Allāh.

Aunque la variante que más consecuencias tiene y que ha dado lugar incluso a alguna agria controversia entre historiadores de las matemáticas es la que proviene del historiador al-Tabarī (838-923), en cuyo libro *Historia de los profetas y los reyes*, aparece en una ocasión escrito Muhammad ibn Mūsa al-Khwārizmī al-Majūsī al-Qutrubbullī. Roshdi Rashed afirma que ése no es el nombre de al-Khwārizmī, sino que ahí se está hablando de dos personas distintas y que algún copista del manuscrito de al-Tabarī dejó de escribir la letra و que corresponde a nuestra conjunción copulativa "y" entre al-Khwārizmī y al-Majūsī (Rashed, 1984, p. 17). Sin embargo, Gerald Toomer en su biografía de al-Khwārizmī, publicada en la monumental obra *Dictionary of Scientific Biography*, toma ése como su nombre completo y saca consecuencias de los nuevos componentes del nombre, al-Majūsī y al-Qutrubbullī, para establecer su biografía, en particular para hacerle nacer cerca de Bagdad. Esto nos lleva a la pregunta sobre de dónde era al-Khwārizmī.

Ruinas de la fortaleza de Ayaz Kala 1 en el antiguo Khwārizm, construida en el siglo V-IV a.n.e., actualmente en Uzbekistán.

Foto: Marisa Fernández

¿De dónde era al-Khwārizmī?

También en este asunto hay discrepancias. La mayor parte de los historiadores derivan del *nisba* al-Khwārizmī que nuestro matemático era oriundo de la región de Khwārizm. En *The MacTutor History of Mathematics archive*, al que he hecho referencia antes, sin embargo, al-Khwārizmī aparece como nacido en Bagdad[4]. Siguen en esto lo que Toomer mantiene en su biografía incluida en el *Dictionary of Scientific Biography*, en la que, a partir del *nisba* al-Qutrubbullī, afirma que nació en Qutrubbull, una pequeña población cercana a Bagdad, y que al-Khwārizmī sólo indicaría la procedencia de sus antecesores.

La idea más extendida, sin embargo, es que al-Khwārizmī habría nacido en algún lugar de Khwārizm, de donde emigraría a Bagdad para trabajar en la Casa de la Sabiduría.

Ruinas de la fortaleza de Ayaz Kala 2 en el antiguo Khwārizm, construida en el siglo IV, actualmente en Uzbekistán.

Foto: Marisa Fernández

Khwārizm era una región situada al sur del lago Aral, al norte de Persia, que en la época de al-Khwārizmī pertenecía al imperio árabe, al haber sido ya conquistada por los abásidas en el año 712, prácticamente al mismo tiempo en que, al otro extremo del mundo, otros árabes cruzaban el estrecho de Gibraltar para conquistar gran parte de la península ibérica. Anteriormente había sido un reino independiente en alguna época, o sometido en mayor o menor medida a los imperios persas. Posteriormente, fue el centro de un imperio con una extensión que incluía toda Persia –período de esplendor que duró desde el siglo XI hasta comienzos del XIII, en que fue arrasado por los mongoles de Genghis Khan. No voy a recorrer la historia de la región de origen de al-Khwārizmī, sólo señalaré a título de anécdota la existencia efímera de una República Socialista Soviética de Khwārizm en los años veinte del siglo pasado, que se incorporó a la URSS, dividiendo su territorio entre varias de las repúblicas socialistas soviéticas caucásicas.

Actualmente, queda con el nombre de Khwārizm una región en Uzbekistán, que es considerablemente más pequeña de lo que fue en el pasado el territorio primigenio. Una región que no se escribe Khwārizm, sino Хорезм, es decir, en el alfabeto cirílico, que es el que se usa en la escritura en Uzbekistán. Por eso, el sello tantas veces usado como ilustración en historias de al-Khwārizmī, que es un sello de la URSS (CCCP, en cirílico), lleva en él el nombre de al-Khwārizmī transliterado del alfabeto árabe, no al alfabeto latino, sino al alfabeto cirílico, аль Хорезми, ¡otra forma pues de escribir el nombre de nuestro matemático!

Sello emitido en la antigua URSS, para conmemorar el 1200 aniversario (aproximado) del nacimiento de al-Khwārizmī

Si al-Khwārizmī procedía de Khwārizm, era en Bagdad un emigrante llegado a la metrópoli desde una región sometida por los árabes. Lo que nos lleva a la última cuestión.

¿Era árabe y hablaba árabe al-Khwārizmī?

Si nació en Khwārizm, al-Khwārizmī no era árabe, y probablemente su lengua materna tampoco era el árabe, ya que en Khwārizm existía en la época una lengua propia, que actualmente es una lengua muerta. Si fueron sus padres o sus abuelos quienes nacieron en Khwārizm y él ya era un inmigrante de segunda o tercera generación que vivía y trabajaba en Bagdad, para responder a esa pregunta habría que examinar cuáles eran las formas de integración de culturas y lenguas en el Bagdad de los abásidas.

Ya hemos visto que los historiadores discuten sobre el lugar de procedencia de al-Khwārizmī. También pueden encontrarse discrepancias con respecto a su adscripción étnica o de nacionalidad. Junto al genérico "matemático árabe", que habitualmente no implica que se esté afirmando que sea de origen árabe, sino su pertenencia a un ámbito político y cultural, puede encontrarse escrito también que es persa o turco. Así, en la versión inglesa de Wikipedia, una fuente que nunca puede tomarse como fiable, está escrito a día de hoy que al-Khwārizmī era un "matemático persa islámico", que "nació alrededor de 780 en Khwarizm". En la versión española de Wikipedia, que aún es menos fiable, está escrito a día de hoy que era "persa musulmán" y que nació en la "ciudad persa de Juarism o Jwarizm", con lo que no sólo hacen persa a al-Khwārizmī, sino también a la "ciudad de Juarism". Una fuente que sí es fiable, el historiador turco Aydin Sayili, argumenta extensamente, al estudiar el lugar del Asia Central en la historia de la ciencia y la cultura, que "hay pruebas de que al-Khwārizmī conocía el turco y pertenecía al sector turco de la población de Khwārizm" (Sayili, 1991, p. 29) y otro historiador turco llega a decir que al-Khwārizmī "era turco de nacionalidad y árabe de lengua" (Ayyubi, 1990, p. 213). La historia de Khwārizm, territorio independiente en ocasiones, centro de un imperio en otras, parte del imperio persa en otras, República Socialista Soviética efímera, parte de lo que en el diccionario puede encontrarse con el nombre de Turquestán, "Forma tradicional española del nombre de la región del Asia central cuyo territorio se extiende por zonas de los actuales países de Afganistán, China, Kazajistán, Kirguistán, Tayikistán, Turkmenistán y Uzbekistán", permite que se puedan reivindicar para al-Khwārizmī nacionalidades diversas si se quiere añadir un nombre ilustre al panteón nacional.

Youschkevitch es más comedido. Al explicar que va a utilizar las expresiones "matemáticas árabes" o "matemáticas de los países islámicos", dice que lo hace "a pesar de que esas expresiones son tan poco satisfactorias una como la otra", porque "había pocos árabes entre los sabios y los filósofos"; y añade: "Al comienzo, eran sobre todo sirios, iraníes, khorasianos, griegos y judíos. Un gran número de sabios no eran por tanto musulmanes y pertenecían a distintas sectas cristianas o paganas. Luego, los habitantes de los territorios que se encuentran situados hoy en día en Irán y las Repúblicas Soviéticas de Tayikistán, Uzbekistán y Turkmenistán desempeñaron un papel decisivo en la vida científica". Pero también advierte contra la pretensión de atribuir nacionalidades de forma anacrónica porque como consecuencia de las invasiones sucesivas "se produjeron de manera constante fusiones de nacionalidades y apariciones de nuevas entidades nacionales", pero además, porque "nuestros conocimientos no nos permiten, en la mayor parte de los casos, más que dar indicaciones sobre el origen y el lugar donde un sabio ha ejercido su actividad, pero no sobre su pertenencia nacional en el sentido étnico del término" (Youschkevitch, 1976, pp. 13-14).

No voy a hacer, por tanto, ninguna afirmación de cuál era la nacionalidad de al-Khwārizmī. Lo que en cualquier caso sí hizo al-Khwārizmī fue escribir en árabe sus libros científicos. El árabe era en su época la lengua de la ciencia y de la religión en el mundo islámico, como lo fue el latín en el occidente cristiano medieval, o lo es el inglés actualmente en todo el mundo. Pero de sus libros hablaré en la próxima entrega de esta sección.

HISTORIAS ■

NOTAS

1 O, de forma más precisa, "anglosajón", "de la escuela de arabistas españoles" y "centroeuropeo", como puede verse en Corriente (2002), en donde se describen estos sistemas y su historia, y se propone un sistema adaptado a las posibilidades de los medios electrónicos de comunicación, que es el anglosajón con ligeras variantes.

2 Si se buscan en Google las variantes en el momento en que estoy escribiendo esta historia, se obtienen los siguientes resultados: al-Khwarizmi, 113000; al-Jwarizmi, 7950; al-Hwarizmi, 1120.

3 En la transliteración del alifato al alfabeto, la diferencia entre las vocales largas y las breves está señalada por la raya que se coloca sobre las vocales largas.

4 Ver http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Al-Khwarizmi.html.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Al-Khwārizmī, Muhammad ibn Mūsa (1939). *Kitāb al-mukhtasar fī hisāb al-jabr wa'l-muqābala*, edited by ᶜAlī Mustafā Masharrafa and Muhammad Mursī Ahmad. al-Qahirah. Reprinted 1968. Cairo.

Ayyubi, N. A. (1990). Contribution of Khwârazmî to Mathematics and Geography. In *Acts of the International Symposium on Ibn Turk, Khwârazmî, Farabî, Beyrûnî, and Ibn Sina* (Ankara, 9-12 September 1985), pp. 213-214.

Corriente, F. (2002). Acerca de la transcripción o transliteración del código grafémico árabe al latino, particularmente en su variante castellana. *Miscelánea de Estudios Árabes y Hebraicos. Sección Árabe-Islam.* 51, 361-368.

Djebbar, A. (2005). *L'algèbre arabe. Genèse d'un art.*Vuibert-Adapt. Paris.

Malet, A. i Paradís, J. (1984). *Els orígens i l'ensenyament de l'Àlgebra simbòlica (1478-1545) Volumen I*. Publicacions de la Universitat de Barcelona. Barcelona.

Rashed, R. (1984). *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des Mathématiques arabes.* Les Belles Lettres. Paris.

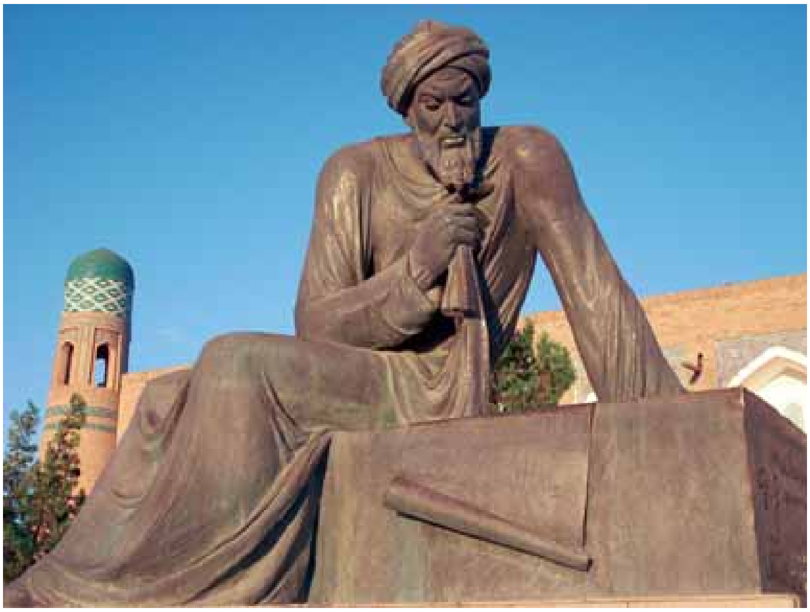
Rosen, F. (1831). *The algebra of Mohammed Ben Musa.* Oriental Translation Fund. London.

Sánchez Pérez, J. A. (1921). *Biografía de matemáticos árabes que florecieron en España*. Imprenta de Estanislao Maestre. Madrid.

Sayili, A. (1991). Al-Khwarizmi, Abu'l-Hamid Ibn Turk and the place of Central Asia in the History of Science and Culture. *ERDEM*, VII, 19, pp. 1-100.

Toomer, G. (1970–1990). Al-Khwārizmī, Abu Jaᶜfar Muhammad ibn Mūsā. In C. C. Gillispie (Ed.) *Dictionary of Scientific Biography. Vol. 7* (pp. 358–365). Charles Scribner's Sons. New York.

Youschkevitch, A. P. (1976). *Les Mathématiques arabes (VIIIᵉ-XVᵉ siècles).* Trad. M. Cazenaze y K. Jaouiche. Vrin. Paris.



Estatua de al-Khwārizmī en Khiva (Uzbekistán).

Foto: Marisa Fernández

Las fotografías que ilustran este artículo se las tenemos que agradecer a nuestra compañera y antigua tesorera de la Societat d'Educació Matemàtica de la C.V. al-Khwārizmī y viajera infatigable, Marisa Fernández, que las hizo en un viaje a Uzbekistán en 2007.

Educación matemática: Competentes en un mundo global

XIV Jornadas sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas

Girona, del 1 al 4 de julio de 2009
www.xivjaem.org

Primer anuncio

La *Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya* (FEEMCAT) aceptó con entusiasmo el encargo que en su día le realizó la *Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas* (FESPM) de organizar las XIV Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas de 2009 (XIV JAEM). El congreso se celebrará en la ciudad de Girona que, además de su interés histórico y monumental, es Ciudad Educadora con una larga tradición y vocación de servicio en pro de la educación.

Las JAEM, desde su nacimiento en 1981, siempre se han caracterizado por ser un espacio vivo de reflexión, debate y encuentro de todos los enseñantes de matemáticas que han hecho de su profesión también una vocación. Estos encuentros nos ayudan sin duda a mejorar nuestra competencia didáctica al incorporar nuevas metodologías y recursos que los participantes en las JAEM ponemos en común a lo largo de cuatro días.

La FESPM y, en particular, la FEEMCAT -con la *Associació de Professsors de Matemàtiques de les Comarques Gironines* (ADEMGI) al frente- animamos al profesorado de de todos los niveles educativos, desde la educación infantil hasta la universitaria, a participar en las XIV JAEM de 2009 en Girona.

Us hi esperem a tots!

Saludo de la Presidenta de la Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT)

Ayer en Granada, mañana en Girona.

El reto de las JAEM pone en marcha lo mejor de todos, de los organizadores y de los asistentes.

La FEEMCAT acordó aceptar la organización de estas Jornadas desde el compromiso con sus objetivos y la corresponsabilidad de las asociaciones que la componen.

A poco más de un año de su celebración el comité organizador y la FEEMCAT tienen la vista puesta en la excelencia de las pasadas ediciones y el deseo de ofrecer una nueva óptica de futuro. Unas JAEM con nuevas propuestas que sigan mostrando las ideas y prácticas de los docentes al tiempo que ofrezcan un foro de intercambio y debate que sea fuente de nuevos objetivos.

Desde Cataluña y en especial desde Girona, estamos trabajando para ofrecer a todos ese marco de encuentro que sirva además para estrechar y descubrir nuevos puentes de diálogo educativo.

Girona os brinda además múltiples actividades turísticas y culturales que pueden ayudar a mejorar aún más el mutuo conocimiento.

Por ello esperamos contar a, partir de este mismo momento, con vuestro interés y confianza para hacer crecer las XIV JAEM.

Carme Aymerich
Presidenta de la FEEMCAT

La enseñanza en general –y la enseñanza de las matemáticas en particular– no puede mantenerse ajena a los cambios constantes y acelerados que se producen en la sociedad. Continuamente surgen nuevas necesidades en la formación matemática de las personas y, a la vez, aparecen nuevas ideas, formas y herramientas educativas para afrontar estos retos. Cada vez es más relevante, en el quehacer y en el trabajo cotidiano, disponer de capacidades matemáticas fundamentales como la de pensar y razonar matemáticamente, la de plantearse y resolver problemas, la de obtener, interpretar y generar información con contenido matemático, la de utilizar técnicas matemáticas básicas e instrumentos para hacer matemáticas, la de interpretar i representar expresiones, procesos i resultados matemáticos, la de comunicar a otras personas ideas matemáticas...

Sin olvidar los habituales contenidos curriculares, la educación matemática actual ha de intentar aportar a las futuras generaciones estas capacidades matemáticas de fondo que les ayudaran a interactuar eficaz y constructivamente con su entorno. Es por todo ello que la XIV edición de las JAEM del 2009 a celebrar en Girona estará centrada en las **competencias matemáticas** en todos los niveles educativos –infantil, primaria, secundaria y universitaria– más que en los contenidos matemáticos.

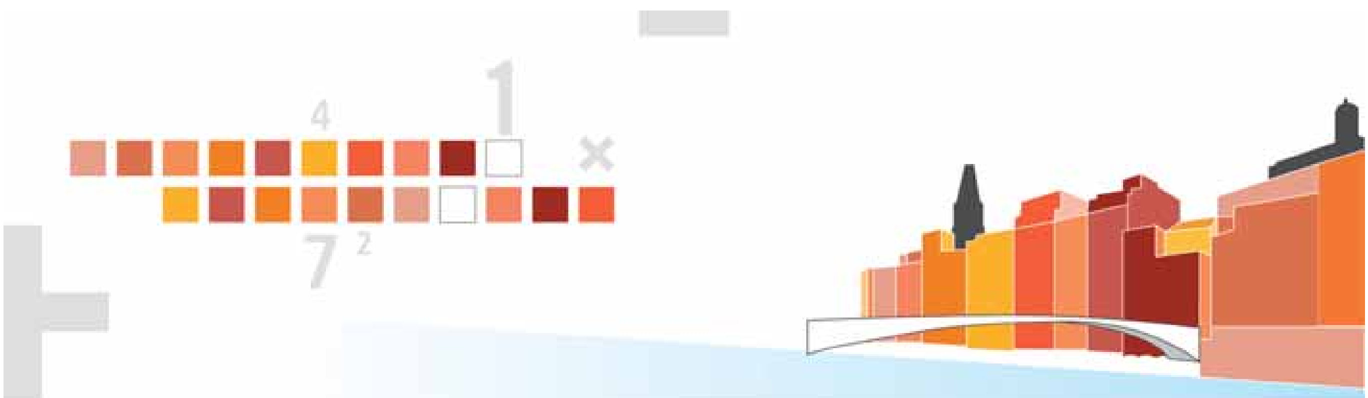
Estructura de las jornadas

Se organizan en tres grandes bloques de actividades.

Primer bloque de actividades

En el primer bloque –el más estructurado y formal– tienen lugar:

a. Cuatro **conferencias plenarias**, a cargo de personas destacadas en el ámbito de la educación matemática de dentro y fuera de nuestro país expresamente invitadas por el Comité de Programa de las Jornadas.



Auditori-Palau de Congressos de Girona

b. **Ponencias** y **comunicaciones** que giran preferentemente en torno a los siguientes temas:

1. Planteamiento y resolución de problemas.
2. Pensamiento y razonamiento matemático.
3. Simbolismo, formalización y demostración en matemáticas.
4. Comunicar en, con, y sobre las matemáticas.
5. Modelización y representación en matemáticas.
6. Herramientas, materiales y otros recursos de apoyo para trabajar matemáticas.
7. Conexiones y contextos.

Para cada uno de los temas están previstas dos ponencias –a cargo de especialistas invitados por el Comité de Programa–, y un número limitado de comunicaciones –o presentaciones orales breves– a cargo de participantes en las Jornadas.

Los interesados en presentar una comunicación deberán remitir previamente el texto completo de la misma al Comité de Programa el cual decidirá sobre su aceptación. En la página web de las XIV JAEM se especifican los detalles al respecto.

Segundo bloque de actividades

El segundo bloque –en un formato más libre– acoge actividades y espacios de encuentro de tipología muy variada:

a. **Talleres**, o cursos breves de 1.5 horas de duración destinados a dar a conocer actividades de todo tipo que comporten la manipulación interactiva de materiales o programas informáticos en torno a la enseñanza de las matemáticas.

b. **Zoco matemático**, espacio físico destinado a facilitar la exposición de material didáctico, recursos, programas informáticos, comunicaciones en formato de póster, etc.

Como novedad, incluiremos en el zoco de las XIV JAEM la presentación de *clips de clase*, videos de corta duración que recogen la realización in situ, en las aulas, de las actividades de los docentes y sus alumnos.

c. **Encuentros entre iguales** o **comunidades**, consistente en el encuentro físico de un grupo de docentes para la discusión e intercambio de experiencias en torno a un determinado tema relacionado con la enseñanza de las matemáticas.

Cada *comunidad* estará vinculada a un tema. Los temas de discusión se abrirán con anterioridad a la celebración de las Jornadas y en torno a aquéllos se organizaran previamente foros de discusión por vía telemática. Tan sólo los asistentes que hayan participado en estos foros podrán inscribirse a las sesiones de trabajo durante la celebración de las Jornadas.

Los interesados en organizar y presentar un taller, presentar comunicaciones en formato poster u otras actividades en el zoco o participar en alguna **comunidad**, deben consultar la página web de las XIV JAEM.

Tercer bloque de actividades

En el tercer bloque de actividades de las XIV JAEM tienen cabida:

a. **Exposiciones** no comerciales vinculadas a la educación matemática.

Están previstas dos exposiciones: una dedicada a la presentación de materiales didácticos por parte del **Gamar** (Gabinete de Materiales de Maria Antonia Canals), y una muestra de módulos interactivos del *Museu de Matemàtiques de Catalunya* (MMACA), actualmente en fase de gestación.

b. **Exposición y venta de materiales didácticos** por parte de la FESPM, de las diferentes Sociedades Federadas y de empresas comerciales.

c. La entrega del *Premio Gonzalo Sánchez Vázquez* convocado por la FESPM. Está también prevista la entrega del *Premio Lluís A. Santaló*, que próximamente convocará la Càtedra Lluís A. Santaló d'Aplicacions de la Matemática de la Universidad de Girona.

d. Diferentes **actividades culturales**.

Fecha y lugar de celebración

Las XIV JAEM tendrán lugar del miércoles 1 al sábado 4 de julio de 2009, en la ciudad de Girona. Está previsto que la mayoría de actos de las Jornadas se realicen en el Auditori-Palau de Congressos, situado en el Parc de la Devesa de Girona.

Inscripciones

La inscripción a las XIV JAEM se hará a través de la página web de las Jornadas.

Alojamiento

Encontraréis información sobre alojamientos en Girona en la página web de las Jornadas.

Actas de las Jornadas

Tras la celebración de las XIV JAEM se publicarán las correspondientes actas que recogerán los textos de las conferencias, ponencias, comunicaciones, talleres y actividades del zoco matemático.

La publicación de los textos deberá ceñirse a las normas que se encuentran detalladas en la página web de las Jornadas.

Puntos de información y correspondencia

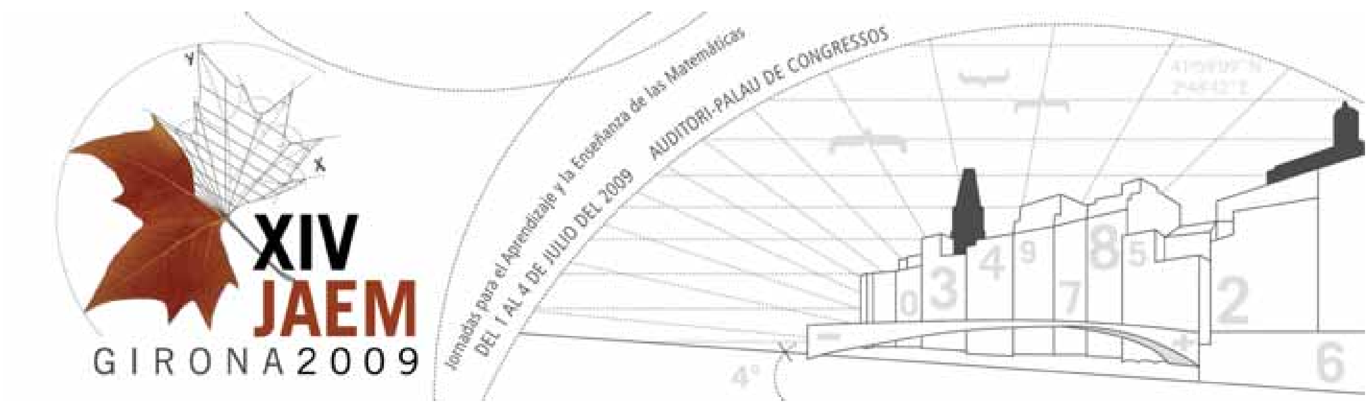
Dirección postal:
XIV JAEM. Girona 2009
Campus Montilivi, Edifici P-IV
17071 Girona

Correo electrónico:
info@xivjaem.org

Página web del congreso:
www.xivjaem.org

Fechas importantes

- *31 de marzo de 2009*: fecha límite para la presentación de comunicaciones, talleres y actividades del zoco matemático.
- *15 de mayo de 2009*: fecha límite para el primer período de inscripción.
- *15 de junio de 2009*: fecha límite para la inscripción a las Jornadas (condicionada a un número máximo de 900 inscripciones).



suma+ 58
Junio 2008, pp. 135-136

XII Congreso Thales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas

Sevilla, del 10 al 13 de Octubre de 2008

Primer Anuncio

La actividad matemática en el aula del siglo XXI

FECHAS: del 10 al 13 de octubre de 2008.

LUGAR: Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla.

WEB: http://thales.cica.es/xiiceam/

CONFERENCIAS PLENARIAS: una por día, girando en torno a la temática del congreso.

- Conferencia Inaugural: D. Juan Núñez Valdés (Universidad de Sevilla).
- Conferencia 2º día: D.ª M.ª Antonia Canals Tolosa (Universitat de Girona).
- Conferencia 3er día: D. Jordi Adell Segura (Universitat Jaume I).
- Conferencia de Clausura: D. José Miguel Díaz Báñez (Universidad de Sevilla).

BLOQUES TEMÁTICOS: el congreso se estructurará en los siguientes bloques temáticos, que contarán con ponencias relativas a cada uno de ellos:

- Complementariedad entre teoría y práctica en educación matemática. Ponente: D. Pablo Flores Martínez (Universidad de Granada).
- El nuevo curriculum de Matemáticas (desarrollo, pruebas de diagnóstico, competencias,...). Ponentes: D. Antonio Fernández- Aliseda Redondo (CEP de Castilleja de la Cuesta, Sevilla), y D. Juan Emilio García Jiménez (CPR de Villarrobledo, Albacete).
- Las Tecnologías de la Información y la Comunicación como motor transformador del proceso de enseñanza-aprendizaje. Ponente: D. José M.ª Chacón Iñigo (IES Llanes, Sevilla).
- Popularización y divulgación de las Matemáticas. Ponente: D. Rafael Ramírez Uclés (Colegio El Carmelo, Granada).
- Heterogeneidad en el aula: el tratamiento de las diferentes situaciones del alumnado en la clase. Ponente: D. Jesús Fernández Domínguez (IES Macarena, Sevilla).
- Materiales y recursos. Ponente: D.ª María Peñas Troyano (IES Américo Castro, Huétor-Tájar, Granada).
- La formación inicial y permanente del profesorado: Ponente: D. Fernando Guevara Garrido (IES Diego Rodríguez Estrada, Huelva).
- El juego en la clase de Matemáticas. Ponente: D. Fernando Corbalán Yuste (Centro de Enseñanza para Adultos de Utebo, Zaragoza).
- Matemáticas, cultura y sociedad. Ponente: D. Carlos O. Suárez Alemán (IES Caballero Bonald, Cádiz; Universidad de Cádiz).

Grupos de debate: serán los siguientes:

- El nuevo currículo de Matemáticas. Moderador: D. Gabriel Moya Molina (IES Averroes, Córdoba). Participantes: profesorado de infantil, primaria y secundaria y universidad.
- ¿Contribuyen las TIC al proceso de enseñanza/aprendizaje de las Matemáticas? Moderadora: D.ª Isabel Pérez Torres (IES Mariana Pineda, Granada). Participantes: profesores de infantil, primaria, secundaria y universidad.
- El uso de las calculadoras en el aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas. Moderador: D. Eugenio M. Fedriani Martel (Universidad Pablo de Olavide, Sevilla). Participantes: profesores de infantil, primaria, secundaria y universidad.

Talleres propuestos por la Organización:

- El juego en la clase de Matemáticas. Responsable: D.ª Ana García Azcárate (Instituto Español Lope de Vega, Nador, Marruecos).
- Wiris y Geogebra en Clase. Responsables: D.ª Pilar Gallego Ortiz (IES Pablo de Olavide, La Luisiana, Sevilla), D.ª Rosario Núñez Castaín (IES San Pablo, Sevilla) y D.ª Teresa Rodríguez Arias (IES San Pablo, Sevilla).
- Astronomía. Responsable: D. José Antonio García Severón (IES Macarena, Sevilla).
- La calculadora Classpad como recurso didáctico en el aula de Matemáticas. Responsable: D. Agustín Carrillo de Albornoz (IES Jándula, Andújar, Jaén).
- Un recurso para la enseñanza de la Estadística: acceso a datos del IEA. Responsable: Instituto de Estadística de Andalucía.

Presentación de Comunicaciones, Zoco y otros Talleres:

- Fecha límite de recepción: 20 de mayo de 2008.
- Confirmación de aceptaciones: 14 de junio de 2008.
- Formato de los trabajos: usar modelo disponible en : http://thales.cica.es/xiiceam/?q=node/20.
- Modo de envío: correo-e a la dirección indicando en el asunto si se presenta comunicación, taller o zoco: xiiceam@thales.cica.es .

Presentaciones especiales:

- Relativas a actividades emblemáticas de la SAEM Thales:
    - Olimpíadas
    - Cursos a distancia
    - Estalmat
    - Matemáticas en la calle.
- Del Instituto de Estadística de Andalucía.

Exposiciones: relacionadas con el mundo de las Matemáticas.

Actas del Congreso: Las Actas se publicarán en CD con el correspondiente ISBN, apareciendo en ellas solo aquellos trabajos que hayan sido expuestos en el Congreso.

Certificación: 30 horas. Se ha solicitado la homologación de la actividad a la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía.

Stands: se instalarán por parte de entidades y empresas con materiales y recursos relacionados con las Matemáticas.

Comité Científico:

D. Antonio Aranda Plata (Presidente)
D. Rafael Bracho López
D. Juan Antonio Hans Martín.
D.ª Juana M.ª Navas Pleguezuelos
D.ª Ana Rodríguez Chamizo
D. Sixto Romero Sánchez

Comité Organizador:

D. Antonio Aranda Plata
D.ª Encarnación Amaro Parrado
D.ª Mª Ángeles Ávila Gómez
D. Manuel Ceballos González
D. Raúl M. Falcón Ganfornina
D. Antonio Fernández-Aliseda Redondo
D. Jesús Fernández Domínguez
D.ª Ana Belén Granados Bastida
D.ª Ángeles Greciano Martín
D. Juan Antonio Hans Martín
D. Manuel Hermoso Prada
D.ª Ana M. Martín Caraballo
D. José Muñoz Santonja
D. Ladislao Navarro Peinado
D. Juan Núñez Valdés
D.ª Concepción Paralera Morales
D. Antonio J. Pérez Jiménez
D.ª Ana Rodríguez Chamizo
D.ª M.ª Jesús Serván Thomas
D. Ángel F. Tenorio Villalón (Presidente)

Sociedad Andaluza de
Educación Matemática

“THALES”

suma+ 58
Junio 2008, pp. 137-143

La Música y el número siete. Historia de una relación controvertida

Una vez celebrado el Día Escolar de las Matemáticas, dedicado a la Música y las Matemáticas, al equipo de redacción de la revista SUMA le ha parecido interesante incluir una sección para tratar estos temas.

Iniciamos así la andadura de *Musymáticas* en donde pretendemos aprovechar la relación entre estas materias para incrementar los recursos en el aula. Como ocurre con el resto de la revista, se trata de una sección abierta en la que esperamos contar con la colaboración de todos vosotros.

La música es un ejercicio matemático inconsciente en el que la mente no sabe que está calculando

G. W. Leibniz (1646-1716)

¿Realmente el número siete es tan esencial para la música?

Las más de cuatrocientas mil entradas que tiene el número siete en *google* dan una muestra del interés que despierta su uso en muchas facetas de la vida cotidiana y entre ellas, cómo no, en la música.

Si dejamos aparte especulaciones numerológicas de origen incierto, la realidad es que a casi cualquier occidental que le preguntemos por el número de notas musicales, no dudará en decir que son siete y que sus nombres[1] son: do, re, mi, fa, sol, la, si. Sin embargo, como veremos más adelante, usando sólo siete notas, la producción musical quedaría muy mermada. Por otro lado, si la pregunta se hiciese a los que están habituados a la música oriental, la respuesta no sería tan contundente, puesto que desde antiguo se han utilizado escalas que no partían de siete notas, como son la javanesa (cinco tonos), la Raga Shruti de India (veintidós tonos), la tailandesa (ocho tonos), etc.

Vicente Liern Carrión
Universitat de València Estudi General
musymaticas@revistasuma.es

Además del número de notas, para la música hay otra relación numérica en la que el número siete juega un papel fundamental: los intervalos o cocientes entre las frecuencias de dos sonidos. De entre todos los intervalos posibles, hay dos que siempre han dado lugar a la polémica, el tritono (o cuarta aumentada) y las séptimas. El tritono, intervalo que se produce, por ejemplo, entre fa-si, resulta difícil de entonar y produce un sonido algo siniestro, que en el medievo[2] se denominó *diabulus in musica* ('el diablo en la música'), y que debía evitarse a toda costa. De hecho, la Iglesia sostenía que el diablo se colaba en la música a través de este intervalo. Una manera de evitarlo era prescindir del uso de la séptima. A este intervalo, que se produce por ejemplo entre do-si, la armonía tradicional posterior al siglo XVII, no le atribuye un carácter diabólico, pero la clasifica como una disonancia absoluta, mientras que el tritono lo trata como una semiconsonancia.

Si con estos antecedentes, la popularidad del número siete en la música queda en entredicho, la situación aún se hace más interesante cuando en el centro de la polémica se sitúan grandes matemáticos que han contribuido a avivar la controversia.

Un doble interés por los números

Al menos desde el siglo VI a. C. con los pitagóricos, se establece de forma clara el doble interés de los números en la música. Por un lado, está la cantidad de notas que hay en la octava y, por otro lado, la propia esencia del número como elemento generador de las notas. Cualquier análisis del papel del número siete en la música sería incompleto si descuidase alguna de estas dos facetas.

En cuanto a que en la música occidental el número de notas por octava sea siete, no es del todo cierto. Siete es la cantidad de nombres de notas que manejamos, pero en realidad, la inmensa mayoría de la música que escuchamos surge del uso de doce notas denominadas[3]:

do – do$^\#$ – re – mi^b – mi – fa – fa$^\#$ – sol –sol$^\#$ – la – si^b – si

Y si esto ya pone en tela de juicio el papel fundamental del número siete, la polémica real surge al analizar la función del número 7 como generador de notas musicales.

Las consonancias pitagóricas que se reducen al *tetractys* (los cuatro primeros números), son ampliadas por la Justa Entonación hasta el *senario* (los seis primeros números). A pesar de que las primeras versiones de la Justa Entonación se deben a Aristóxeno de Tarento (360-300 a.C.), un discípulo de Aristóteles que sostiene que basta con el oído para conseguir la afinación, sin duda debemos a Gioseffo Zarlino (1517-1590) su formulación rigurosa y su popularización. Zarlino, un neopitagórico convencido, estableció que los sonidos cuyas frecuencias son proporcionales a 1, 2, 3, 4, 5, 6 son consonantes y comprobó que éstos eran emitidos por cuerdas de longitudes:

$$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6}$$

Zarlino, un neopitagórico convencido, estableció que los sonidos cuyas frecuencias son proporcionales a 1, 2, 3, 4, 5, 6 son consonantes

Para Zarlino, el número 6 jugaba un papel fundamental. Desde el punto de vista matemático, se trata de un número que se obtiene como suma y producto de sus divisores propios,

$$1+2+3=6,\ 1\cdot 2\cdot 3=6$$

Además, al multiplicar por 6 cualquier número acabado en 6, nos da un número que acaba en 6. A estas propiedades añadía la presencia del senario en el mundo: el número de planetas, los signos del zodíaco en cada hemisferio, las aristas de la pirámide triangular, las superficies del cubo, etc.

Hasta bien entrado el siglo XVIII, las afinaciones que se usaban normalmente en los estudios teóricos eran la pitagórica y la Justa Entonación. En ambas, la cantidad de notas en una octava no está determinada a priori, pero normalmente este número se fija en 12 notas. En estos sistemas de afinación las notas se generan con potencias y cocientes de los números 2 y 3 o de los números 2, 3 y 5. Si consideramos una nota fija, por ejemplo el Do de frecuencia f = 264 Hz, para obtener el resto de notas afinadas hay que multiplicar por las fracciones siguientes:

	Do	Do$^\#$	Re	Mi^b	Mi	Fa	Fa$^\#$	Sol	Sol$^\#$	La	Si^b	Si
12 Notas Pitagóricas	1	$\frac{3^7}{2^{11}}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2^5}{3^3}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^8}{2^{12}}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{3^5}{2^7}$
12 Notas Justa Entonación	1	$\frac{5^2}{3\cdot 2^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3\cdot 2}{5}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{5^2}{3^2\cdot 2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5^2}{2^4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3^2}{5}$	$\frac{3\cdot 5}{2^3}$

Si la frecuencia de la que partimos es 264 Hz, estas notas están en la octava do_2-do_3. Para trasladarlas a otra octava, no hay más que multiplicar por una potencia de 2 adecuada. Así, si queremos trasladarla *n* octavas, multiplicamos sus valores por 2^n, con *n* un número entero.

Está claro que en las dos afinaciones anteriores las potencias del número siete no se utilizan. Es decir que no se considera que estas potencias generen notas agradables. Y aquí está la clave del tratamiento musical del número siete.

Sonidos consonantes

No resulta fácil establecer una definición unánime de sonidos consonantes, de hecho debemos contentarnos con admitir que dos o más sonidos son consonantes si resultan agradables al oído. Evidentemente, se trata de un concepto que depende mucho de la situación socio-cultural y que ha evolucionado a lo largo de la Historia. Ante esta perspectiva, resulta complicado establecer una idea de consonancia que resulte operativa. Entre todos los teóricos que han estudiado el tema, nos quedaremos con la versión del físico John Tyndall (1820 – 1893):

> Cuanto más simple es la relación de las frecuencias de dos sonidos, más consonante será el intervalo que forman.

Este criterio, conocido con el desafortunado nombre de Teorema de Tyndall, no hizo más que recoger la idea con la que los musicólogos venían trabajando desde hacía siglos. Prueba de ello es la carta que L. Euler, escribió a Federica Carlota Ludovica von Brandenburg Schwedt, princesa de Anhalt Dessau (1745–1808), en la que expone de forma casi literal el resultado de Tyndall:

Carta V: Del Unísono y de las Octavas:

> “ [...] Vuestra Alteza comprenderá fácilmente que cuanto más simple sea la proporción [entre las frecuencias], o expresada con menores números, más distantemente se presenta al entendimiento y presenta un mayor sentimiento de placer [...].”

3 de mayo de 1760

Según este criterio, las consonancias pueden ordenarse de la forma siguiente:

1/1 Unísono > 2/1 Octava > 3/2 Quinta > 4/3 Cuarta > > 5/4 Tercera mayor > 5/3 Sexta mayor > 6/5 Tercera menor > 8/5 Sexta menor > ...

A partir de esta ordenación, surgen problemas con las que musicólogos y matemáticos han tenido que convivir:

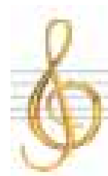
- A partir del siglo XVI, compositores y músicos empiezan a hacer uso de intervalos que habían estado prohibidos. Sirva como ejemplo un fragmento de la polémica entre C. Monteverdi (1567 – 1643), representante de la nueva música, y G. M. Artusi (1540 – 1613), partidario de la música tradicional (véase E. Fubini, 1990):

> No niego que inventar cosas nuevas esté bien; incluso es necesario. Sin embargo, decidme: ¿a qué se debe que queráis hacer uso de aquellas disonancias de la misma manera que las emplean éstos [los músicos ‘modernos’]? Si lo hacéis porque pretendéis que se oigan de modo manifiesto [...] ¿por qué no las usáis de la manera habitual, razonadamente, según en la forma en que compusieron Adriano, Cipriano, Palestrina [...]?

- Por otro lado, no resulta sencillo justificar por qué es más consonante 8/5 que 7/4 ó 7/5 si tanto el numerador como el denominador son más grandes y se alejan más del unísono.

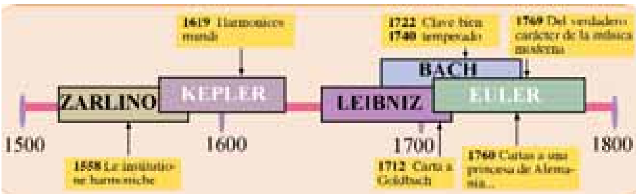
Como veremos a continuación, de nuevo el número siete está en la esencia de estas cuestiones.

Hasta bien entrado el siglo XVIII, las afinaciones que se usaban normalmente en los estudios teóricos eran la pitagórica y la Justa Entonación



Más de dos siglos de polémica

Nuestro objetivo no es hacer un análisis exhaustivo del uso del siete en la música, sino dar una visión global a través de algunos trabajos. Y para esto resultan esenciales las aportaciones de G. Zarlino (1517-1590), J. Kepler (1571-1630), G. W. Leibniz (1646-1716), J. S. Bach (1685-1750) y L. Euler (1707-1783), quienes contribuyeron de forma decisiva a reavivar la controversia. Cualquiera de estos cinco autores merecería un estudio detallado, sin embargo aquí destacaremos algunas publicaciones que reflejan de forma clara argumentos a favor y en contra del número siete en música.



La defensa del Senario: Zarlino y Kepler

Muy influido por el neoplatonismo florentino, G. Zarlino veía la esencia numérica en todas las cosas. En *Le Institutioni Harmoniche* (1558) hace una defensa del senario como límite para las consonancias, pero esto le plantea un problema: hemos dicho que la sexta menor, 8/5, se considera una consonancia, y sin embargo tiene en sus términos el ocho que no pertenece al senario. ¿Por qué no proponer el *ottonario* como recinto de las consonancias? Evidentemente, aceptar el ocho significaría dar cabida al número siete y los intervalos compuestos con este número, 7/6 y 8/7, a las que considera disonancias sin paliativos.


LE ISTITVTIONI HARMONICHE
DI M. GIOSEFFO ZARLINO DA CHIOGGIA;
Nelle quali; oltra le materie appartenenti
ALLA MVSICA;
Si trouano dichiarati molti luoghi
di Poeti, d'Historici, & di Filosofi;
Si come nel leggerle si potrà chiaramente vedere.

Con Priuilegio dell'Illustriss. Signoria di Venetia,
per anni X.
IN VENETIA M D LVIII.

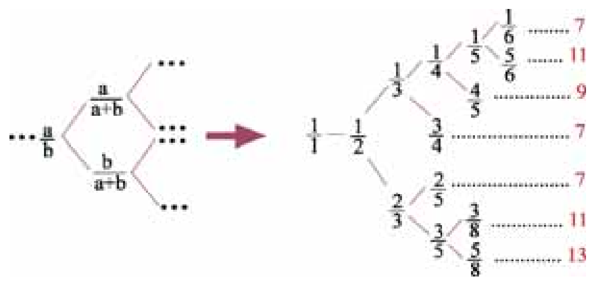
Zarlino, consciente de que el problema tenía difícil solución, recurre a argumentos filosófico-numéricos para resolverlo. Para él, las fracciones 8/5 y 7/6 contienen números de naturaleza muy diferente porque $8 = 2^3$, y esto significa que incluir 8/5 no supone incorporar números primos que no estén contenidos en el senario, mientras que aceptar el 7 escapa de los seis primeros números. Además, sus argumentos se apoyan en la distinción aristotélica entre potencia y acto. Para Zarlino, 8/5 se encuentra en el senario en potencia, pero no en acto, y aprovecha esta circunstancia para justificar que las consonancias que surgen con el senario sean "consonancias propiamente dichas" mientras que la sexta menor produce una "consonancia comúnmente dicha".

Como era de esperar, los razonamientos de Zarlino no fueron capaces de convencer a muchos musicólogos de la época, de ahí que otros autores, como F. Salinas (1513 - 1590), hicieran otro tipo de defensas, basadas en la práctica, argumentando que 8/5 era consonante por ser complementario de la tercera mayor (5/4),

$$\textbf{sexta menor} + \textbf{tercera mayor} = \frac{8}{5}\cdot\frac{5}{4} = 2$$

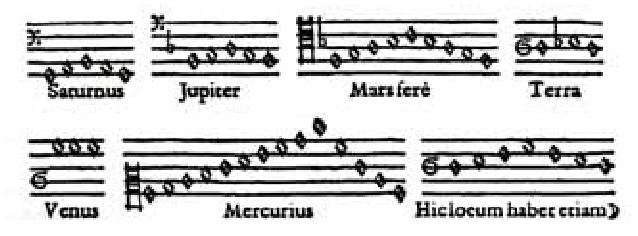
y no por estar dentro o fuera del senario.

Habrá que esperar más de medio siglo hasta que Kepler, en *Harmonices mundi* (1619) proporcione razonamientos mucho más sólidos. Convencido, como los pitagóricos, de que la armonía de la música y la del universo no eran más que dos representaciones de una misma realidad, Kepler basa las proporciones armónicas en los polígonos regulares. Para esto necesitaba quedarse con una cantidad finita polígonos. La manera de elegirlos fue relacionar la condición de ser construible con regla y compás con la capacidad de generar proporciones consonantes. Así ideó un método que, aparentemente, resolvía de una vez por todas, los problemas de rechazar 7/6 o 8/7 pero aceptar 5/8. El método consistía en generar un árbol de consonancias en el que cada fracción a/b en el paso n genera dos fracciones, a/(a+b) y b/(a+b), en el paso n+1. Se partía de la fracción 1/1 y el proceso continuaba hasta llegar a un denominador que representase los lados de un polígono regular no construible con regla y compás (los polígonos de 7, 9, 11 y 13 lados).



En este árbol aparecen todos los intervalos consonantes y no es necesario aceptar ninguna excepción.

Kepler intentó comprender las leyes del movimiento planetario durante la mayor parte de su vida. En un principio, considerando que este movimiento debía cumplir las leyes pitagóricas de la armonía, aprovechó que el número de planetas fuese uno más que el número de poliedros perfectos para intentar demostrar que las distancias de los planetas al Sol venían dadas por esferas en el interior de poliedros perfectos (anidadas sucesivamente unas en el interior de otras). Cuando advirtió que este modelo no explicaba el movimiento de los astros tuvo que recurrir, con gran decepción, a las elipses. Esta falta de simplicidad en el Universo, que Kepler vivió como un fracaso, fue compensada por la perfección de la Armonía Universal al comprobar que las proporciones entre las velocidades angulares de los astros en su afelio y su perihelio reproducían fielmente las proporciones de los intervalos consonantes. Una vez efectuadas las mediciones, la *Música de las Esferas* de los pitagóricos dejan de ser sólo una idea para plasmarse en unos pentagramas que el propio Kepler escribió.



Durante más de siglo y medio, los argumentos de Kepler parecían sólidos, pero después, en menos de veinticinco años, sus justificaciones se desmoronaron. Por un lado, W. Herschel, precisamente un músico de la corte del rey Jorge III de Inglaterra, descubrió Urano en 1781 y, pocos años después, C. F. Gauss (1777 – 1855) demostró que se podía construir con regla y compás el polígono regular de 17 lados.

Leibniz, Bach y Euler

A pesar de que Leibniz no escribió mucho sobre música, además de ser el autor de varias de las frases más citadas en Música y Matemáticas, participó en la polémica del número siete. Su producción en este tema se reduce a algunas cartas dirigidas a C. Goldbach (1690 – 1764). En una de éstas, fechada el 17 de abril de 1712, a pesar de que concede la posibilidad de que el número siete sea capaz de generar sonidos agradables, no deja de verlo como algo anecdótico:

> En música, no contamos más allá del cinco, similares en esto a esta gente que, hablando también de aritmética, no pasaban del número tres y dieron lugar al dicho alemán sobre los simples:'es tan simple que no sabe contar más de tres'. Todos nuestros intervalos en uso vienen en efecto de razones formadas por los pares de los números primos 1, 2, 3, 5. Si tuviéramos la suerte de un poco más de finura, podríamos llegar hasta el número primo 7. Y pienso que realmente hay gente en este caso. Esta es la razón por la que los antiguos no rechazaban completamente el número 7. Pero apenas habrá gente, que llegaría hasta los números primos [siguientes] más cercanos, 11 y 13.

A pesar de que varios autores del siglo XVIII utilizan la séptima en sus composiciones, y de la innegable revolución que supone *El clave bien temperado* (1722, 1740) de J. S. Bach en el que, por supuesto aparecen séptimas y otros intervalos considerados disonantes, los científicos y teóricos de la música se mantienen fieles en su renuncia al número siete como generador de consonancias. Una prueba contundente de ello es la última frase de la carta que Euler escribió a la princesa de Anhalt Dessau en 1760 (Euler, 1990):

Carta VII: De los doce tonos del clavecín:

> "Mi intención era presentar a Vuestra Alteza el verdadero origen de los sonidos empleados en la música. [...] Los principios de la Armonía se reducen en último término a números, [...] el número 2 produce sólo octavas [...]. Después el número 3 produce los tonos que difieren de los anteriores en una quinta. Pero introduzcamos también el número 5 y veamos cuál sería el tono que produce 5 vibraciones, mientras que el F no hace más que una. [...]. Es llamado una tercera mayor y produce una consonancia muy agradable, estando contenido en una proporción de números bastante pequeña, 4 y 5. [...] (Así) tendréis las teclas principales del clavecín que según los antiguos, constituye la escala llamada diatónica que deriva del número 2, del número 3 repetido tres veces y del número 5 [...].
> Si se quisiera también introducir el número 7, el número de tonos de una octava sería mayor, y se llevaría toda la música a un grado más alto. Pero aquí la Matemática abandona la armonía a la Música."

3 de mayo de 1760

Pero el ingenio de Euler no podía permanecer ajeno a la música que se estaba haciendo en su época, y seis años después de haber escrito la carta anterior, en su *Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique* (Euler, 1766a), no sólo se desdice de la última frase de esta carta y propone el número 7 como uno de los artífices de la música, sino que aprovecha la ocasión para rectificar a Leibniz.

> Se sostiene generalmente que no nos servimos en la música más que de las proporciones compuestas por estos tres números primos 2, 3 y 5 y el gran Leibniz ha advertido ya, que en la música no se ha aprendido aún a contar más allá del 5; lo cual es incontestablemente cierto en los instrumentos afinados según la armonía. Pero, si mi conjetura se cumple, se puede decir que en

la composición se cuenta ya hasta el 7 y que el oído está ya acostumbrado; es un nuevo género de música, que se ha comenzado a usar y que era desconocida por los antiguos. En este género el acorde 4, 5, 6, 7 es la armonía más completa, puesto que contiene los números 2, 3, 5 y 7; pero también resulta más complicado que el acorde perfecto en el género habitual que no contiene más que los números 2, 3 y 5. Si ésta es una perfección en la composición, quizá se hará lo posible por llevar los instrumentos al mismo grado.

Posteriormente, Euler, cuando aborda el carácter de la Música Moderna (Euler, 1766b) presenta un sistema de afinación en el que aparece el número siete, aunque quizá por parecerle excesivamente atrevido, a los tonos en los que aparecen potencias de 7 les denomina “extraños”, frente a los tonos “principales” en los que sólo aparecen potencias de 2, 3 y 5.

A pesar de que varios autores del siglo XVIII utilizan la séptima en sus composiciones ... los científicos y teóricos de la música se mantienen fieles en su renuncia al número siete como generador de consonancias

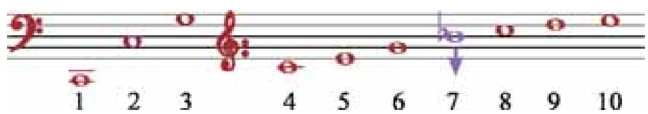
Pero, ¿puede estar desafinada la Naturaleza?

En el siglo XIX, J. B. Fourier (1768 – 1830) abre una nueva brecha en la cuestión del número siete. Uno de sus resultados más célebres y, sin duda, el más utilizado en música, es que cualquier función periódica continua se puede descomponer en funciones periódicas simples.

Esto significa que si un instrumento produce una nota, la onda sonora se puede descomponer en ondas simples con frecuencias 1f, 2f, 3f, ..., denominadas armónico primero, segundo, etc. La amplitud de cada uno de los armónicos es lo que configura el timbre del instrumento y hace que distingamos el do de un piano del do de una trompeta. Así, si tomamos como nota fundamental, o primer armónico, el do_2 con una frecuencia f=132 Hz, los diez primeros armónicos que se producen son los siguientes:

Armónico	Frecuencia	Nota	Intervalo
1º=1 × f	132 Hz	do_2	tono fundamental
2º=2 × f	264 Hz	do_3	octava
3º=3 × f	396 Hz	sol_3	quinta
4º=4 × f	528 Hz	do_4	octava
5º=5 × f	660 Hz	mi_4	tercera mayor
6º=6 × f	792 Hz	sol_4	quinta
7º=7 × f	924 Hz	si^b_4	séptima menor (desafinada)
8º=8 × f	1056 Hz	do_5	octava
9º=9 × f	1188 Hz	re_5	segunda mayor
10º=10 × f	1320 Hz	mi_5	tercera mayor

Normalmente, al expresar estos armónicos en un pentagrama, al séptimo armónico se le adjunta una flecha, o un cambio de grafía, que indica la desafinación.



Sin duda, puede hacerse un sistema de afinación en la que el 7º armónico esté afinado, por ejemplo el siguiente:

	Do	Do#	Re	Mi^b	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	Si^b	Si
Una posibilidad	1	$\frac{3\cdot5}{2\cdot7}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{7}{2\cdot3}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{5\cdot2}{7}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^2\cdot5}{2^2\cdot7}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{2^2}$	$\frac{3\cdot5}{2^3}$

Pero, esto no zanja la cuestión. En primer lugar, en este sistema se modifica ligeramente la afinación habitual de todas las notas y, en segundo lugar, ¿por qué quedarnos en el séptimo armónico y no seguir con el 11º, 13º, etc. que también están desafinados?

Realmente, que estas cuestiones permanezcan sin resolver no supone ningún problema práctico, pero afirmar que algunos armónicos de una nota emitida por un cantante están desafinados, es admitir que la naturaleza está desafinada. Está claro que en los criterios para elegir las notas musicales, los argumentos basados en la física del sonido se entremezclan con los netamente socio-culturales, y éstos no tienen por qué coincidir. Esta desafinación no impide seguir disfrutando de la belleza de la Música, pero, ¿no rompe esto con una tradición de más de veinticinco siglos por la que armonía de la Naturaleza (el Universo) y la armonía musical eran una misma cosa?

Quizás, no admitir esta ruptura ha hecho que algunos compositores del siglo XX, como Z. Kodály, B. Bartók, I. Xenakis o W. R. Lutoslawski, por ejemplo, no sólo hagan intervenir el número siete en la afinación de muchos de sus acordes, sino que realmente den un paso adelante hacia una relación explícita, que no ha cesado, entre las Matemáticas y la composición musical.

MUSYMATICAS

NOTAS

1 El nombre de las notas se debe a Gido D'Arezzo, un monje benedictino del siglo XI, que tomó las primeras sílabas del Himno a San Juan Bautista como nombre de las notas. A parir de ahí, los nombres se han mantenido, excepto en el caso del do, cuyo nombre original, ut, sólo se conserva en Francia. Sin embargo, estos nombres no son unánimes, ni siquiera en la música occidental. En la notación inglesa, las notas se llaman C, D, E, F, G, A, B y en la alemana las notas se denominan C, D, E, F, G, A, H..

2 En los antiguos modos griegos no ocurría esto, ya que el canto solía empezar en la. El problema empezó a manifestarse en la Edad Media cuando Guido D'Arezzo redistribuyó la escala y puso el do en primer lugar.

3 En el temperamento igual, que es el sistema de afinación que se utiliza mayoritariamente en la actualidad, do$^{\#}$=re^{b}, re$^{\#}$=mi^{b}, fa$^{\#}$=sol^{b}, sol$^{\#}$=la^{b}, la$^{\#}$=si^{b}.

REFERENCIAS BIBLIOGÁFICAS

CASPAR, M. (2003): *Johannes Kepler*, Acento Editorial, Madrid.

EULER, L. (1766a): "Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique", *Memoires de l'Académie des Sciences de Berlin 20*, pp. 165-173.

EULER, L. (1766b): "Du véritable caractère de la musique moderne", *Memoires de l'Académie des Sciences de Berlin 20*, pp. 174-199.

EULER, L. (1990): *Cartas a una princesa de Alemania sobre diversos temas de Física y Filosofía*, Ed. Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

FUBINI, E. (1990), *La estética musical desde la Antigüedad hasta el siglo XX*, Alianza Editorial, Madrid.

GOLDÁRAZ GAÍNZA, J. J. (2004): *Afinación y temperamentos históricos,* Alianza Editorial, Madrid.

NEUBAUER, J. (1986): *The Emancipation of Music from Languaje. Departure from Mimesis in Eigteenth-Century Aesthetics*, Yale University Press, New Haven.

RANDEL, D. (1999): *Diccionario Harvard de música,* Alianza Editorial, Madrid.

Internet

BAILHACHE, P. (1995): *La musique, une pratique cachée de l'arithmétique?*,

http://umb-www-01.u-strasbg.fr/lexis/html/cinscription/Leibniz.html.

http://es.wikipedia.org/wiki/Microtonalismo.

IVORRA, C. (2006): *Geometría*

http://www.uv.es/~ivorra/Libros/Geometria.pdf .

Boletín de suscripción

Tarifas	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	25 €	10 €
Centros	40 €	15 €
Europa	50 €	20 €
Resto del mundo	60 €	22 €

Fotocopiar esta hoja y enviar:

por correo a: Revista SUMA. Apartado de correos 498
46900-Torrent (Valencia)
por Fax al: (+34) 912 911 879
por correo-e a: administracion@revistasuma.es

Deseo suscribirme a la revista SUMA:

Nombre y apellidos: NIF/CIF:

Dirección: Teléfono:

Población: CP:

Provincia: País:

Correo electrónico: Fax:

Importe (€)

☐ Suscripción a partir del año (3 números) ________

☐ N.os sueltos ________

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)

☐ Transferencia bancaria (CCC 2077-0347-11-1101452547)

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista SUMA

☐ Giro postal dirigido a Revista SUMA

Fecha y firma:

Nombre y apellidos:

Código Cuenta Cliente: Entidad: Oficina: DC: Cuenta:

Banco/Caja:

Agencia n.º: Dirección:

Población: Provincia:

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (fecha y firma):

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

ISSN 1130-488X

SUMA. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.