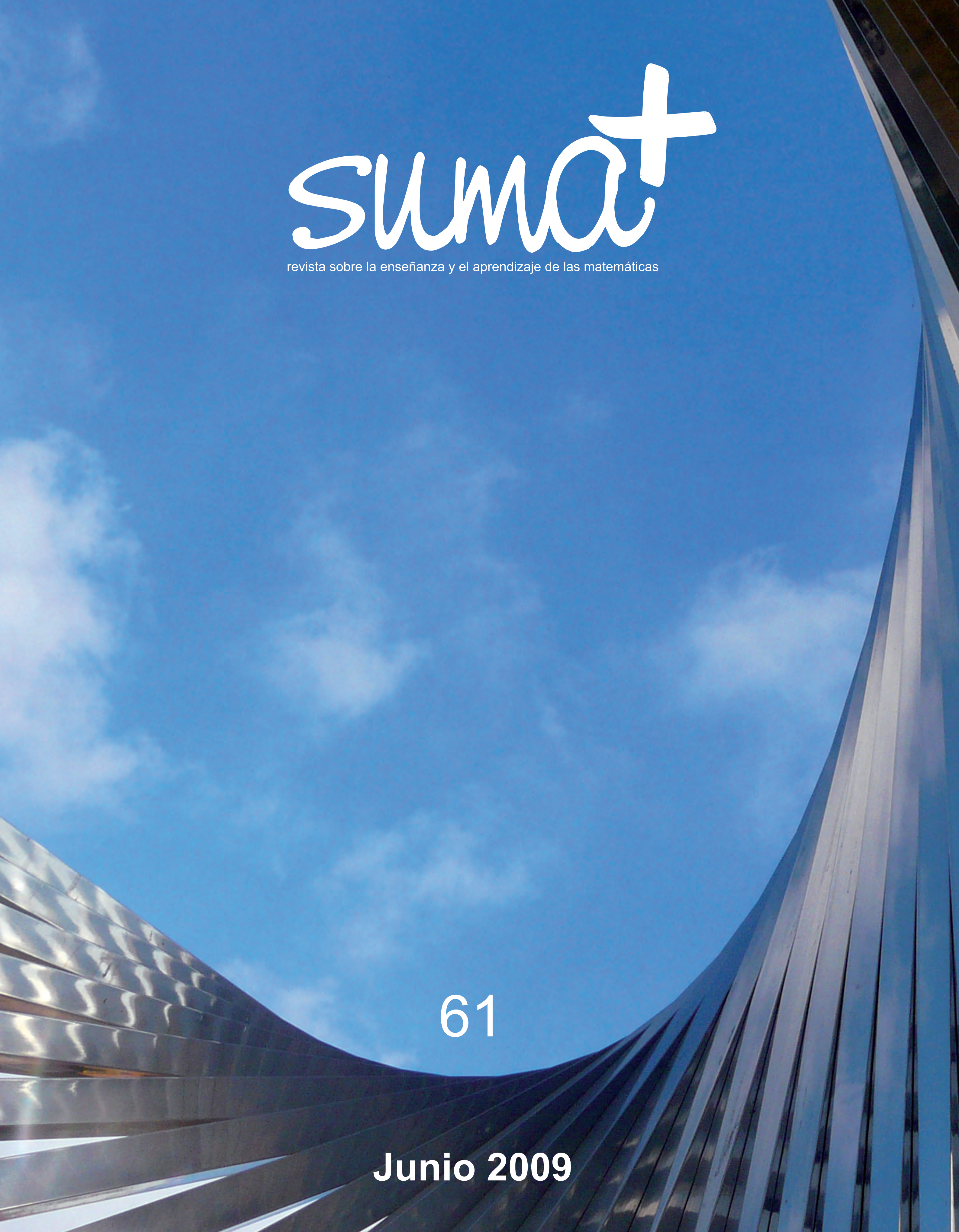


suma+

revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

61

Junio 2009

suma+
revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

Directores
Onofre Monzó del Olmo
Tomás Queralt Llopis
direccion@revistasuma.es
Administrador
Gregori García Ferri
administracion@revistasuma.es
Consejo de redacción
Salvador Caballero Rubio
(CEFIRE d'Alacant)
Marisa Fernández Villanueva
(IES Veles e Vents, Torrent)
Bernardo Gómez Alfonso
(Universitat de València Estudi General)
Floreal Gracia Alcaine
(IES Politècnic, Castelló)
José Antonio Mora Sánchez
(IES San Blai, Alacant)
Luis Puig Espinosa
(Universitat de València Estudi General)
Consejo Editorial
Serapio García Cuesta
(Presidente de la FESPM)
Francisco Martín Casalderrey
(IES Juan de la Cierva, Madrid)
Inmaculada Fuentes Gil
(IES Ágora, Madrid)
Ricardo Luengo González
(Universidad de Extremadura)
Edita
FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS (FESPM)
Web
Antonio Alamillo Sánchez
www.revistasuma.es

Diseño de la portada: *O. Monzó*
Fotografía de la portada:
Alfaroparàbola, *Marc Monzó*
Maquetación
T. Queralt y O. Monzó
Revista Suma
Apartado 498
E-46900-Torrent (España)
Fax:*+(34) 912 911 879*
Tirada: *6700 ejemplares*
Depósito legal: *Gr 752-1988*
ISSN: *1130-488X*

61 *Junio 2009*

actividades de la FESPM

Asesores

Claudi Aguadé Bruix
Amador Álvarez del Llano
David Arnau Vera
Carmen Azcárate Jiménez
Luis M. Botella López
Encarnación Castro Martínez
Abilio Corchete González
Manuel Díaz Regueiro
Alejandro Fernández Lajusticia
Mª José Fuente Somavilla
Horacio Gutiérrez Álvarez
Arturo Mandly Manso
Rafael Martínez Calafat
Ricardo Moreno Castillo
Miguel Ángel Moreno Redondo
Maite Navarro Moncho
Olimpia Figueras
Mª Jesús Palacios de Burgos
Pascual Pérez Cuenca
Antonio Pérez Sanz
Ana Belén Petro Balaguer
Luis Puig Mosquera
Mariano Real Pérez
Francesc A. Rosselló Llompart
Manuel José Sastre Álvarez
Carlos Oswaldo Suarez Alemán
Francisco Villegas Martín

SUMA es una revista de didáctica de las matemáticas de periodicidad cuatrimestral, cuyo objetivo es tratar sobre aquellos aspectos relacionados con su enseñanza y aprendizaje, destinada al profesorado que trabaja en educación infantil, primaria, secundaria y universitaria.

La revista SUMA se edita en Torrent (Valencia) - ESPAÑA

suma+

no se identifica necesariamente con las opiniones vertidas en las colaboraciones firmadas.

SUMA+ 61
Junio 2009

El Máster de profesor en secundaria

Cuando en octubre de 1988 nació la revista SUMA, al poco de constituirse la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, había muchos profesores deseosos de cambiar la manera en que se estaban enseñando las matemáticas. Muchos de ellos estaban enrolados en un movimiento colectivo dispuesto a mejorar la calidad de la enseñanza con un bagaje lleno de responsabilidad, esfuerzo personal, voluntarismo y, a falta de formación inicial en el caso de los profesores de secundaria, con una gran dosis de autodidactismo.

Desde los años 70, la formación inicial del profesorado se había integrado plenamente en el sistema universitario en una de sus partes, la que corresponde al nivel de primaria mediante los títulos de maestro; la otra parte, la que corresponde al nivel de secundaria solo se integró parcialmente mediante los cursos de especialización en el denominado CAP.

El proceso de convergencia hacia el Espacio Europeo de Educación Superior ha proporcionado algunas herramientas que han sido utilizadas para integrar totalmente la formación inicial de profesores en el sistema universitario, en un intento de dar respuesta institucional a algunas de las carencias en la formación inicial de profesorado. Esta respuesta se concreta bajo la fórmula del Grado más un Máster de 60 créditos, que equivale a un curso anual a tiempo completo. Con esta fórmula se pretende articular una formación matemática de carácter general en el periodo de graduación, y una formación especializada en el periodo de postgrado que constituya una primera formación inicial para el ejercicio y para el desarrollo de las diversas actividades relacionadas con la matemática educativa

El Máster de profesorado consta de módulos o materias relativas a complementar la formación disciplinar, la formación didáctica, la formación pedagógica, psicológica y sociológica en general, así como la iniciación a la investigación y a la innovación educativa. También se asigna especial importancia a las prácticas docentes y se requiere una memoria o trabajo *fin de máster, cuyos 16 créditos deben permitir la observación, la reflexión y la participación activa de los estudiantes en prácticas en todas las actividades programadas.*

En líneas generales se podría decir que el punto de vista oficial está de acuerdo con la idea de que el buen profesor de matemáticas tenga una variedad de conocimientos relacionados que afectan a distintas áreas del conocimiento. Alguien que es capaz de hacer uso de heurísticas que se expresan en infinitivo: analizar, valorar, planificar, construir, dirigir y realizar su enseñanza; interpretar, determinar, caracterizar y favorecer el desarrollo personal del estudiante; colaborar con la comunidad dentro y fuera del marco escolar; y reflexionar, desarrollar e innovar su propia práctica profesional.

Y, lo que es muy importante, rompe definitivamente con la creencia según la cual cualquiera que acredite conocimientos de la disciplina está capacitado para ser profesor de matemáticas. Por el contrario, considera que la preparación específica ideal para el futuro profesor de matemáticas ha de tener una componente diferente de la de las otras personas implicadas exclusivamente en la cultura matemática formal. Una componente, predominantemente educativa y didáctica, caracterizada por su compromiso y formación en los problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas del curriculum.

Sería ingenuo pensar que el Máster de profesorado va a ser por sí mismo la panacea que resuelva la enormidad y complejidad de los problemas que afectan a la enseñanza de las matemáticas. Pero peor sería el inmovilismo que supondría seguir manteniendo un CAP obsoleto, desvirtuado, devaluado e incluso fraudulento. Por fin se ha impuesto la voluntad de cambio, a sabiendas de que el camino que se inicia está lleno de incertidumbres y dificultades.

En el diseño del nuevo Máster de profesorado el buen funcionamiento del Practicum es fundamental. Para alcanzar el éxito en la integración de la formación teórica con la práctica, la cuidadosa selección de los tutores y centros de prácticas es decisivo. También lo es la creación de condiciones que posibiliten el reconocimiento, la acreditación y la dedicación de los tutores. Para favorecer la calidad de las prácticas docentes se tienen que formar equipos de trabajo mixtos entre los tutores de los centros de secundaria y los tutores de universidad y esto necesita disponibilidad de tiempo para reuniones periódicas de coordinación y para reuniones con los alumnos. ¿Estarán las administraciones educativas dispuestas a colaborar para facilitar estas condiciones, o, por el contrario, se limitarán a apelar a la responsabilidad, esfuerzo personal y voluntarismo, para atender las demandas académicas del Practicum sin más contrapartidas? No tardaremos en averiguarlo.

suma+

Manuscrito de Pedro Puig Adam

artículos

suma+ 61
Junio 2009, pp. 7-15

La recta tangente: notas históricas y actividades para el aula

Se hace un recorrido histórico por el concepto de tangente, se analizan las ideas que del mismo tienen los alumnos, y se exponen algunas actividades relacionadas, para el aula de matemáticas.

A historical itinerary has bean done on the tangent concept, the pupils ideas of this theme are analyzed, and some activities related to it are shown, for the mathematics classroom.

Este artículo trata de la recta tangente. Los alumnos de Cálculo, tanto en bachillerato como en la Universidad saben, en su mayoría, encontrar la tangente a una curva en un punto utilizando la derivada. Sin embargo, la mayoría dudan cuando se les muestra un dibujo de una curva y una recta, y se les pregunta si esa recta es tangente a la curva. Esto quiere decir que no tienen una idea clara del concepto geométrico de tangencia. Cosa que, por otro lado, no es de extrañar teniendo en cuenta que los matemáticos tardaron más de 2000 años en aclarar este concepto.

En primer lugar, se hace un breve recorrido histórico donde se muestran algunos intentos por calcular esta recta, cuando no se sabía exactamente qué características tenía. En segundo lugar se analizan las ideas que tienen los alumnos acerca de la recta tangente, y se propone una actividad, útil para afianzar la idea geométrica de la tangencia, que consiste en obtener la tangente a un polinomio, sin usar la derivada. En tercer lugar se exponen algunas actividades relacionadas con la tangente para el aula de matemáticas. Todas ellas se estructuran en tres pasos: exploración, enunciado y prueba guiada. Tienen que ver con las subtangentes, las tangentes a exponenciales o las rectas tangentes de Descartes.

Notas históricas

Desde la época griega, la búsqueda de la recta tangente a una curva en un punto ha sido uno de los asuntos que más ha interesado a los matemáticos. El problema era que el concepto de tangente se intuía, pero no se era capaz de dar una definición formal e inequívoca del mismo. Hasta que Cauchy, en 1823, definió la derivada y solventó el problema, los matemáticos intentaron obtener la tangente a una curva en un punto mediante diversos e ingeniosos métodos, hoy día totalmente olvidados. En esta sección se hará un breve recorrido por estos métodos.

Los griegos tenían la idea de que la tangente a una curva era una recta que “tocaba” a la curva sin cortarla. Hay que destacar a Euclides (325 a. C., 265 a. C.), quien analizó el comportamiento de una recta trazada por una circunferencia y formando un ángulo recto con su diámetro (ver Suzuki, 2005). Las dos propiedades que observó parecían constituir para él las características de la tangente:

1. La recta sólo tiene en común un punto con la circunferencia.
2. Es imposible interponer otra línea entre esa recta y la circunferencia.

Apolonio (262 a. C., 190 a. C.), en sus libros dedicados a las cónicas desarrolló métodos geométricos para la construcción

Félix Martínez de la Rosa
Departamento de Matemáticas. Universidad de Cádiz

de rectas tangentes a parábolas, elipses e hipérbolas. Aquí mostramos su método para construir rectas tangentes a parábolas:

Sea P un punto de la parábola de vértice E, con PD perpendicular al eje de simetría de la parábola. Si A está el eje de simetría y AE = ED, entonces AP será tangente a la parábola en P (Figura 1).

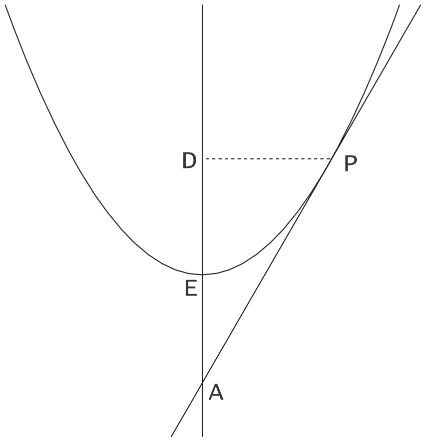


Figura 1

En la primera mitad del siglo XVII (antes de los trabajos de Newton y Leibniz), se desarrollaron algoritmos puramente algebraicos para encontrar tangentes. Los algoritmos, basados en la resolución de ecuaciones y en las propiedades de las curvas, dieron lugar a un tipo de Cálculo enteramente libre del concepto de límite. Sin embargo, a finales del siglo XVII (a partir de Newton y Leibniz) estas técnicas fueron relegadas al papel de curiosidades históricas.

Como muestra de esas técnicas antiguas, destacamos la ideada por Descartes (1596-1650), descrita en su libro "La Géométrie" de 1637, para obtener tangentes a curvas (ver Suzuki, 2005):

> Encontrar una circunferencia tangente en un punto C a una curva dada. Esto se hace igualando circunferencia y curva y obligando a que sólo se corten en un punto.
>
> Ya que la recta tangente a una circunferencia es perpendicular a su radio, como decía Euclides, esta recta es fácil de calcular.

Es obvio que este método sólo es viable para curvas sencillas, pero vale la pena ver un ejemplo.

Encontrar la tangente a la curva $y = \sqrt{x}$ en el punto $C(a^2, a)$ (Figura 2).

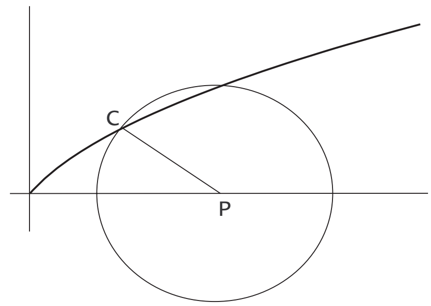


Figura 2

Solución: Tomemos una circunferencia de radio r y centro, $P(h, 0)$ cuya ecuación es:

$$(x-h)^2 + y^2 = r^2$$

Los puntos de intersección entre circunferencia y curva se obtienen de resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y^2 + x^2 - 2hx + h^2 - r^2 = 0 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de y en la primera ecuación se obtiene:

$$x^2 + (1-2h)x + (h^2 - r^2) = 0$$

Suponiendo que la circunferencia y la curva se cortan en $C(a^2, a)$, entonces $x = a^2$ es raíz de la ecuación. Pero para que se produzca la tangencia, debe ser la única raíz. Por tanto debe cumplirse que:

$$x^2 + (1-2h)x + (h^2 - r^2) = (x - a^2)^2$$

Igualando los coeficientes de x se obtiene que $1 - 2h = 2a^2$, y por tanto:

$$h = a^2 + \frac{1}{2}$$

Es decir, el centro de la circunferencia tangente a $y = \sqrt{x}$ en (a^2, a) es:

$$P(a^2 + \frac{1}{2}, 0)$$

La tangente en C es perpendicular al radio PC, cuya pendiente es $-2a$, por tanto la pendiente de la tangente en $C(a^2, a)$ es

$$\frac{1}{2a}$$

En el siglo XVII, las curvas se describían, a menudo, como la trayectoria de una partícula que se mueve. Por ejemplo, una circunferencia es la trayectoria recorrida por un punto en el borde de una rueda giratoria. Esta idea fue utilizada por Newton (1643 – 1727) y Roberval (1602 – 1675) para estudiar las tangentes. Newton visualizó la tangente a una curva como la dirección en la que la partícula se mueve en un instante concreto, asociando la tangente con el vector velocidad de la partícula. El método de encontrar tangentes a través del vector velocidad lo denominó "método cinemático". Así mismo, Roberval especificó que la dirección del movimiento de un punto que describe una curva es la tangente a la curva en cada posición del punto. Un recorrido por estos métodos puede verse en Suzuki (2005) y Wolfson (2001).

En ese mismo siglo, los matemáticos fueron adoptando lentamente la idea de la recta tangente a una curva como la posición límite de una secante para la cual los puntos de corte con la curva se acercan y se acercan hasta coincidir. De modo que la recta tangente a una curva $y = f(x)$ en un punto A(x, $f(x)$), es la recta a la que se aproximan las rectas secantes trazadas por A y por un punto cercano de la curva, B($x+h$, $f(x+h)$), cuando B se aproxima a A (Figura 3).

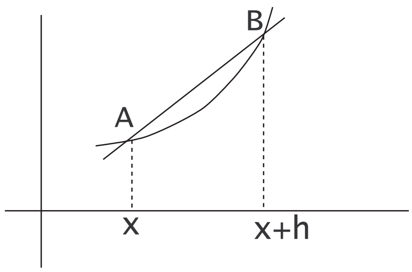


Figura 3

En la figura 3 se intuye que si h desaparece, la secante se convierte en tangente. Fermat (1601-1665), rival de Descartes, fue uno de los primeros en desarrollar esta idea, anticipando ya el concepto de derivada (ver Coolige, 1951).

Los matemáticos del siglo XVII (Fermat, Descartes, Wallis, Barrow, etc) eran capaces de calcular la pendiente de la tangente a una curva en un punto. Por ejemplo para $f(x) = x^3$, la pendiente de la secante por A y B es:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} = 3x^2+3xh+h^2$$

Así que para obtener la pendiente de la tangente, hay que considerar que h es una cantidad que puede despreciarse, de donde se deduce que la pendiente buscada es $3x^2$.

Observemos que la pendiente de la recta AB está bien definida, siempre que A y B sean distintos, es decir si $h \neq 0$. El problema era cómo definir la pendiente cuando $h = 0$ y A=B. Naturalmente, esa pendiente está ligada al concepto de derivada, que aún tardaría en concretarse.

El camino recorrido hasta llegar a la solución definitiva fue arduo. Resulta interesante ver, en el artículo Grabiner (1983), el orden cronológico en el que se desarrollaron los estudios que culminaron con el concepto de derivada: primero fue usada, después fue descubierta, después explorada y desarrollada, y por último fue definida.

Hubo que esperar hasta el siglo XIX para que Cauchy (1789-1857) resolviera, definitivamente el problema en 1823, dando una precisa definición de la derivada en términos del nuevo concepto denominado límite, definiendo a $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ como la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $(a, f(a))$.

La idea de la recta tangente

La relación entre recta tangente y derivada, expresa una bella conexión entre la geometría y el análisis. Sin embargo esta relación parece una simple obviedad, ya que en la propia definición formal de recta tangente se incluye la derivada. Pero ¿podemos darle un sentido geométrico a la recta tangente, aparte de la derivada, y relacionar después ambos conceptos?

1) Para saber qué idea tienen los alumnos acerca de la recta tangente, es interesante mostrarles las figuras 4, 5, 6, 7 y 8, y preguntarles si creen que alguna de ellas representa una recta tangente a una curva.

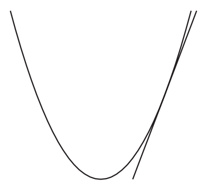


Figura 4

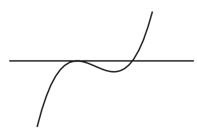


Figura 5

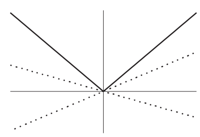


Figura 6

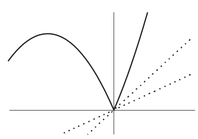


Figura 7

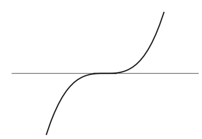


Figura 8

En la figura 4 la respuesta no admite discusión, ahí hay una recta tangente. Los motivos de esta opinión son dos: la recta sólo corta a la curva en un punto, y en ese punto esa recta roza a la curva sin atravesarla.

En cuanto a la figura 5, existen dudas, porque, aunque la recta roza a la curva en un punto, tiene el problema de que la atraviesa por otro, aunque en general se inclinan por que existe tangencia en el punto de la izquierda.

En las figuras 6 y 7, parece evidente que el eje x es tangente en el origen: toca a la gráfica en un solo punto y no atraviesa a la curva. Claro que otras rectas que pasan por el origen también cumplen esas condiciones y podrían ser tangentes.

Por último, no hay dudas para la figura 8, la recta no puede ser tangente porque atraviesa por la mitad a la curva.

2) Una primera justificación, exclusivamente geométrica, del concepto de tangente a funciones polinómicas, puede hacerse a través de la exploración de las dos siguientes cuestiones (ver Arao, 2000).

¿Cuándo el eje X es tangente a la gráfica de un polinomio en $x = a$?

Para ilustrar esta pregunta mostramos las figuras 9, 10 y 11.

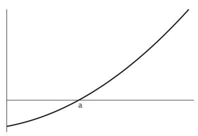


Figura 9

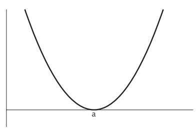


Figura 10

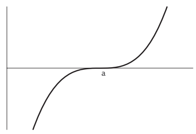


Figura 11

La primera condición de tangencia debe ser que el polinomio pase por el punto $(a, 0)$, cosa que cumplen las tres gráficas, y para ello debe contener el factor $(x - a)$.

Pero la tangencia necesita algo más: un contacto superior al que se produce en la figura 9. Es decir, el roce entre la tangente y la curva debe ser más intenso, como en la figura 10. Para que esto se produzca, el polinomio debe contener, al menos, el factor $(x - a)^2$. En cuanto a la figura 11, primero debemos eliminar la idea preconcebida de que una tangente no puede atravesar a la curva. Salvadas la sorpresa inicial de los alumnos, en seguida advierten que la intensidad del contacto entre tangente y polinomio es mayor que en las otras figuras. Esto se debe a que el polinomio contiene el factor $(x - a)^3$, y al aumentar el grado, aumenta la intensidad del contacto.

¿Cuándo una recta es tangente a la gráfica de un polinomio en $x = a$?

La intuición obtenida de la primera cuestión, nos lleva a la conclusión de que una recta $y = mx + b$ es tangente a la gráfica de un polinomio $p(x)$ en $x = a$, cuando el contacto entre ambos, en ese punto, es tan intenso como para que $p(x) - (mx + b)$ contenga, al menos, el factor $(x - a)^2$. Es decir, $p(x)$ debe tener la forma:

$$p(x) = (mx + b) + q(x)(x - a)^2.$$

De esta manera, es muy fácil construir polinomios cuya tangente en un punto sea una recta dada.

Obtener un polinomio cuya tangente en $x = 1$ *sea* $y = 3x - 1$.

Solución: Un polinomio con las características pedidas puede ser $p(x) = (3x - 1) + (x + 3)(x - 1)^2$ (Figura 12).

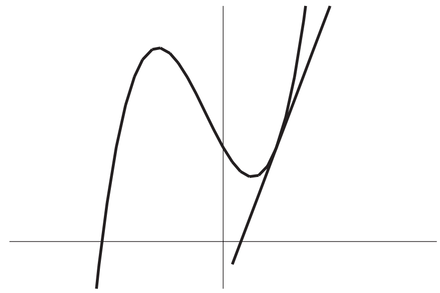


Figura 12

La exploración anterior puede expresarse a través de una curiosa relación entre la tangente y la división de polinomios (ver Arao, 2000):

La recta $y = mx + b$ es tangente a la gráfica de un polinomio $p(x)$ en $x = a$ si y sólo si $mx + b$ es el resto del cociente $p(x)/(x - a)^2$.

3) En general, para funciones de cualquier tipo, el concepto del contacto intenso entre recta y curva, se relaciona con la idea del parecido: cuanto mayor sea el contacto, mayor es el parecido entre la tangente y la curva cerca del punto de tangencia.

Pero además, la tangente debe ser la recta que más se parece a la curva en el punto. De hecho, mostrando la gráfica de $y=|x|$ (Figura 6), se aprecia que cualquier recta que pase por el origen se parece menos que la recta $y = x$ por la derecha, y menos que $y = -x$ por la izquierda, y esto nos hace intuir que no existe tangente en ese punto: no es posible dibujar una recta que se parezca más que ninguna otra a la gráfica de la función, cerca del punto de tangencia (para la figura 7 el razonamiento es análogo).

En otras palabras, el concepto de máximo parecido significa que la tangente en un punto es la mejor aproximación lineal a la curva en ese punto. De acuerdo con esta idea, en el artículo de Bivens (1986) se propone la siguiente definición de recta tangente:

Una recta L que pase por $P(a, f(a))$, se denomina recta tangente a la gráfica de f en P, si L es la mejor aproximación lineal de *f* cerca de P.

De esta manera se muestra a la recta tangente como un objeto geométrico por sí mismo, independiente de la derivada. La relación entre recta tangente y derivada se aclara con el siguiente enunciado (cuya demostración puede verse en Bivens, 1986):

La gráfica de una función *f* tiene una recta tangente $y = f(a)+ m(x-a)$, *en* $P(a, f(a))$, si y sólo si existe $f'(a)$ y coincide con la pendiente m de la recta.

4) Una última observación geométrica sobre la tangente surge planteando la figura 13.

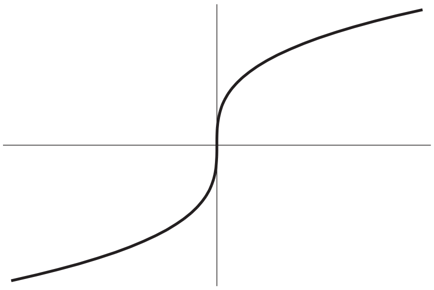


Figura 13

Esta gráfica es la misma que la figura 8, intercambiando los ejes. Por tanto si la recta de la figura 8 es la mejor aproximación lineal a la curva en el origen, la de la figura 13 también debería serlo. Geométricamente tenemos una tangente. El problema es que por ser una recta vertical, su pendiente es infinito. Por eso, para casar el concepto geométrico de recta tangente con el analítico de derivabilidad, cuando el límite:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

es infinito y f es continua en a, la función también se considera derivable en $x = a$, con derivada infinita.

Actividades para el aula

En relación con los ejercicios relacionados con la recta tangente, los profesores, básicamente, nos limitamos a calcular su ecuación. En este trabajo proponemos algunas actividades para el aula, que dan una sencilla y particular mirada a estas rectas. Dos de ellas están relacionadas con conceptos clásicos (subtangentes y rectas de Descartes) pero muy interesantes para plantearlos en la clase, debido a las reflexiones y al afianzamiento de conceptos que de ellos se deriva.

Se propone estructurar cada una de ellas en tres partes:

Primera: Realizar una sencilla exploración que aclare la actividad, y oriente sobre la posible conclusión.

Segunda: Enunciar correctamente el resultado que se observa en la exploración.

Tercera: Probar, de una manera guiada, los enunciados.

Gráfica de tangentes mediante las subtangentes

Esta actividad consiste en el trazado de rectas tangentes, uniendo el punto de tangencia con el punto de corte de la tangente con el eje x. Dicho punto se obtiene gracias al clásico, pero muy poco utilizado, concepto de la subtangente.

Exploración

Dada una curva $y=f(x)$, la ecuación de la recta tangente en $(a, f(a))$ es $y = f(a) + f'(a)(x-a)$. Supongamos que $f'(a)\neq 0$. Haciendo $y = 0$, se obtiene el punto por el que la tangente corta al eje x:

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

Por tanto, la recta tangente pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(a-s(a), 0)$, donde $s(a)$ es la denominada *subtangente* (ver figura 14), definida en cada punto a donde $f'(a)\neq 0$, por

$$s(a) = \frac{f(a)}{f'(a)}$$

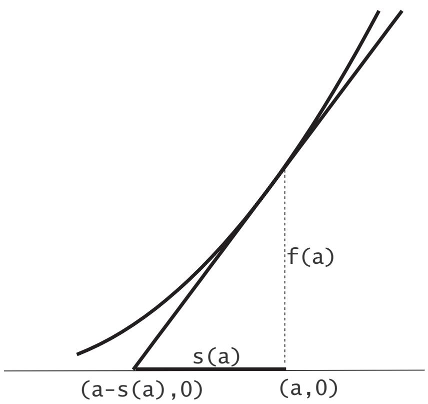


Figura 14

El trazado de tangentes mediante el cálculo de las subtangentes es útil si éstas son fáciles de calcular. Para funciones exponenciales y potencias de x, este método es especialmente sencillo.

El concepto de subtangente, es un clásico del análisis. Por ejemplo, las curvas exponenciales fueron introducidas en 1684 cuando Leibniz (1646-1716) planteó el problema de encontrar todas las curvas con subtangentes constantes. La solución son las curvas exponenciales. Para una constante $b\neq 0$, se verifica:

$$f(x) = Ke^{\frac{x}{b}}$$

para alguna constante $K\neq 0$, si y sólo si $s(x) = b$.

Actividad 1: obtener, a través de las subtangentes, la tangente en $x=a$ para e^x y e^{-x}.

La subtangente de $f(x) = e^x$ en $x = a$ es $s(a)=1$. Por tanto, la recta tangente en $x = a$ pasa por los puntos (a, e^a) y $(a - s(a), 0) = (a-1, 0)$ (Figura 15).

La subtangente de $f(x) = e^{-x}$ en $x = a$ es $s(a)=-1$. Por tanto, la recta tangente en $x = a$ pasa por los puntos (a, e^{-a}) y $(a - s(a), 0) = (a + 1, 0)$ (Figura 16).

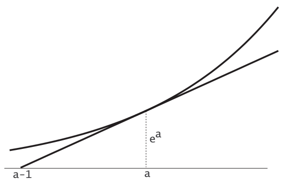


Figura 15

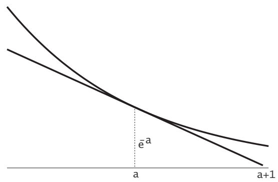


Figura 16

Actividad 2: obtener, a través de las subtangentes, la tangente en $x=a$ para x^2, x^3 y x^{-1}.

La subtangente de $f(x) = x^2$ es $s(x)=x/2$. Por tanto, la recta tangente en $x = a$ pasa por los puntos (a, a^2) y $(a - s(a), 0) = (a/2, 0)$ (Figura 17).

La subtangente de $f(x) = x^3$ es $s(x)=x/3$. Por tanto, la recta tangente en $x = a$ pasa por los puntos (a, a^3) y $(a - s(a), 0) = (2a/3, 0)$ (Figura 18).

La subtangente de $f(x) = x^{-1}$ es $s(x)=-x$. Por tanto, la recta tangente en $x = a$ pasa por los puntos (a, a^{-1}) y $(a - s(a), 0) = (2a, 0)$ (Figura 19).

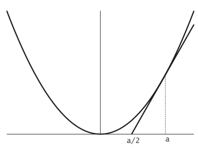


Figura 17

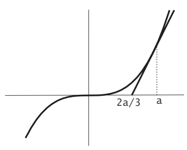


Figura 18

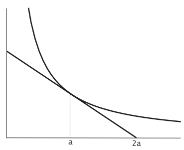


Figura 19

Enunciado para las exponenciales

Para una constante *$b \neq 0$, se verifica que $f(x)=Ke^{x/b}$,* para alguna constante *$K \neq 0$,* si y sólo si *$s(x)=b$.*

Demostración: Dada la función $f(x)=Ke^{x/b}$, se cumple que $f'(x)=(K/b)e^{x/b}$, por tanto $s(x)=b$.

Recíprocamente, si $f(x)/f'(x)=b$, entonces $1/b = f'(x)/f(x)$. Realizando la integral de obtiene que $\ln f(x)= (x/b) + \ln K$. Por tanto $f(x)=Ke^{x/b}$.

Enunciado para las potencias de x

Se verifica que $f(x)=Kx^{1/b}$, para alguna constante *$K \neq 0$,* si y sólo si *$s(x)=bx$.*

Demostración: Dada la función $f(x)=Kx^{1/b}$, se cumple que $f'(x)=(K/b)x^{(1/b)-1}$, por tanto $s(x)=bx$.

Recíprocamente, si $f(x)/f'(x)=bx$, entonces $1/(bx) = f'(x)/f(x)$. Realizando la integral de obtiene que $\ln f(x)= (1/b)\ln x + \ln K$. Por tanto $f(x)=Kx^{1/b}$.

En Apostol y Mamikon (2002) y Martinez de la Rosa (2004), puede encontrarse más información sobre las subtangentes y sobre su utilidad para calcular visualmente el área de una región sencilla.

Tangentes a funciones exponenciales

En Skala (1997) se propone una interesante actividad relacionada con las tangentes a las funciones exponenciales, que afianza el conocimiento de estas funciones.

Exploración

En primer lugar, se dibujan algunas funciones exponenciales $f(x) = a^x$, para $a>1$(Figura 20). El caso $0< a <1$ es análogo. A continuación se trazan las rectas tangentes, pasando por el origen, a esas curvas. Una vez trazadas, se marcan los puntos de tangencia. Parece cumplirse el hecho de que estos puntos están situados en una línea horizontal (Figura 21).

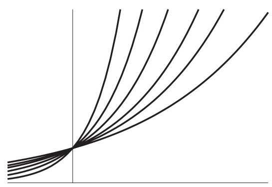


Figura 20

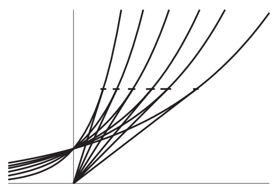


Figura 21

Las rectas que pasan por el origen y son tangentes a una exponencial verifican que sus puntos de tangencia están todos alineados.

Demostración. Tomemos $f(x) = a^x$, para $a>0$, $a \neq 1$. La pendiente de la tangente es la derivada. Además, la pendiente es la tangente del ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje x. Con estas dos ideas, es sencillo comprobar que el punto de tangencia es:

$$\left(\frac{1}{\ln a}, a^{\frac{1}{\ln a}} = e\right)$$

Por tanto los puntos buscados están sobre la recta horizontal $y = e$.

Rectas tangentes de Descartes

Las funciones polinómicas se analizan con amplitud en los cursos de bachillerato. Aquí se propone una actividad, relacionada con las rectas tangentes, que requiere el análisis de este tipo de funciones, y afianza los conceptos *puntos de inflexión*, *concavidad* y *convexidad*.

Se propone hacer un estudio de aquellas funciones polinómicas, que tengan una recta tangente que corte a la curva únicamente en el punto de tangencia. Este tipo de rectas se denominan tangentes de Descartes.

1ª parte. Exploración de las parábolas y polinomios cúbicos.

La observación de una parábola permite intuir que, en cada punto, la tangente corta a la curva únicamente en el punto de tangencia (Figura 22). Por otro lado, una breve exploración nos convence de que los polinomios cúbicos cumplen la propiedad buscada cuando la tangente se traza por el punto de inflexión (Figura 23).

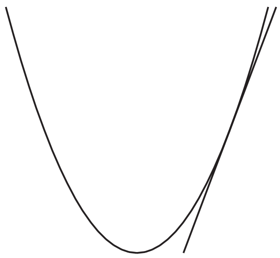


Figura 22

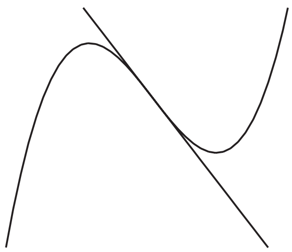


Figura 23

Enunciado para las parábolas

Las parábolas tienen una tangente de Descartes en cada punto.

Demostración. Tomemos la parábola $f(x)=ax^2+bx+c$. Si $a>0$ entonces $f''(x)=2a>0$, por tanto la tangente en cada punto siempre queda por debajo de la curva, y sólo la corta en el punto de tangencia (Figura 22).

Enunciados para polinomios cúbicos

a) Los polinomios cúbicos tienen un único punto de inflexión.

Demostración. Tomemos $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Ya que $f''(x) = 6ax+2b$, el punto de inflexión es $x=-(b/3a)$.

b) En el punto de inflexión existe una recta de Descartes.

Demostración. Sea $x=x_0$ el punto de inflexión de f. Entonces sólo en ese punto la función pasa (por ejemplo) de convexa a cóncava, por lo que la tangente en x_0 no vuelve a cortar a la curva (Figura 23).

c) En un punto distinto al de inflexión, no existe recta de Descartes.

Demostración. Si un punto no es de inflexión, podemos suponer que $f''(x)>0$ en un entorno del punto (Figura 24). Entonces la tangente en ese punto quedará por debajo de la curva. Si el coeficiente de x^3 es positivo, entonces, alejándonos lo bastante hacia la izquierda del punto de tangencia, la curva se situará por debajo de la tangente y por ello volverá a cortarla, por lo que no será una tangente de Descartes.

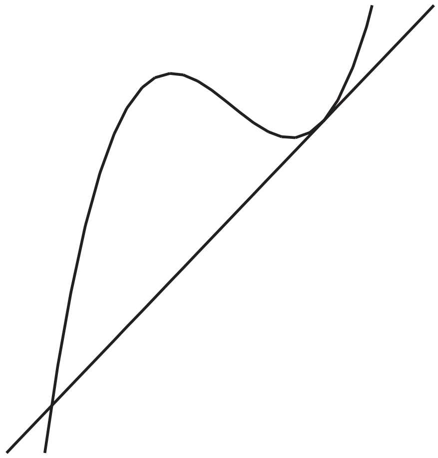


Figura 24

2ª parte. Encontrar una función polinómica que tenga exactamente dos rectas tangentes de Descartes.

En la primera parte vimos que las parábolas tienen tangente de Descartes en cada punto, y que las cúbicas sólo tienen una. Ampliamos el estudio a funciones de grado cuatro y cinco.

La figuras 25, 26 y 27 representan las gráficas de las funciones de grado cuatro: x^4, $x^4 - x^2$, $x^4 - x^2 + x$. La observación nos permite deducir que no pueden cumplir la condición que se busca, porque cualquier punto alejado de los de inflexión, admite una recta de Descartes.

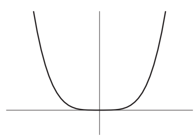


Figura 25

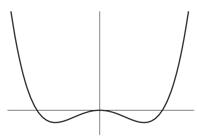


Figura 26

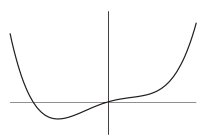


Figura 27

Probemos con funciones de grado cinco. Un análisis similar al hecho en la primera parte para las cúbicas nos dice que las tangentes de Descartes deben trazarse por los puntos de inflexión. Construyamos una función de grado cinco, con dos puntos de inflexión, como la de la figura 28.

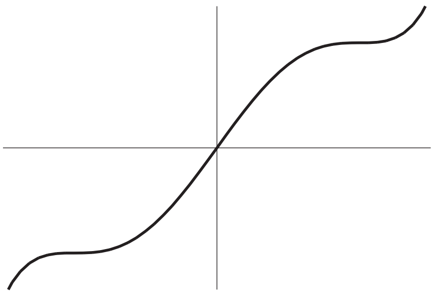


Figura 28

Tomemos $f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$. Podemos fijar los puntos de inflexión en $x = 2$ y $x= -2$. Para simplificar podemos suponer que las tangentes en 2 y -2 sean horizontales y, por ejemplo, que $f'(0) = 1$. Hay que resolver el sistema:

$$\begin{cases} f'(0) = 1 \\ f'(2) = 0 \\ f'(-2) = 0 \\ f''(2) = 0 \\ f''(-2) = 0 \end{cases}$$

La solución es:

$$a = \frac{1}{80}, b = 0, c = -\frac{1}{6}, d = 0, t = 1$$

Por tanto la curva buscada es:

$$f(x) = \frac{1}{80}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + x$$

Las dos tangentes de Descartes (figura 29) son:

$$y = f(2) = \frac{16}{15}, y = f(-2) = -\frac{16}{15}$$

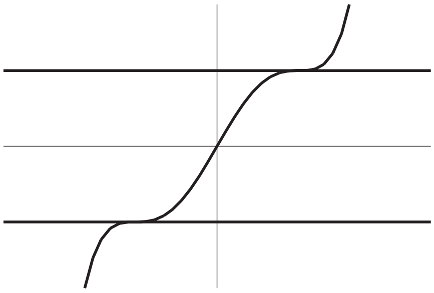


Figura 29

Un estudio más completo sobre las rectas tangentes de Descartes puede verse en Barnier (2007).

Una curiosa propiedad de la tangente

La optimización es uno de los temas destacados en el estudio de las funciones de una variable. Aquí proponemos ilustrarlo con una actividad, (ver Eddy y Fritsch, 1994 y Paré, 1995), sobre la minimización de un área.

Dada una curva convexa en un intervalo, se trata de encontrar un punto por donde trazar una tangente, de manera que el área comprendida entre la curva y la tangente sea mínima. Destacamos esta interesante propiedad, porque su demostración puede hacerse sin recurrir a cálculo alguno.

Exploración

Se dibuja una curva convexa en un intervalo. Trazando tangentes, se puede intuir que el área entre la curva y la tangente se va haciendo más pequeño a medida que el punto de tangencia se acerca al punto medio del intervalo (Figura 30). ¿En qué punto se minimiza el área? Lo sorprendente de esta exploración es que el aparente resultado (el punto medio) es independiente de la ecuación de la curva.

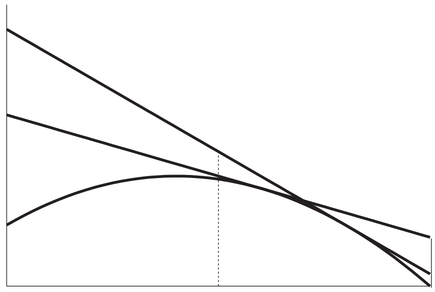


Figura 30

El área comprendida entre una función convexa en un intervalo y su tangente, es mínima si la tangente se traza por el punto medio del intervalo.

Demostración. Veamos la figura 31.

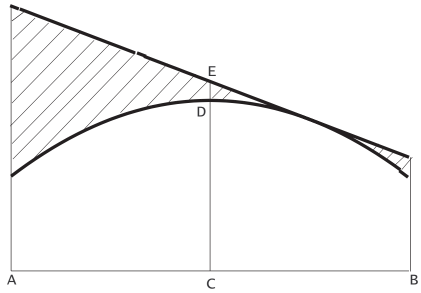


Figura 31

El área del trapecio es la suma del área constante bajo la curva y del área rayada. Por tanto, para minimizar el área rayada basta con minimizar el área del trapecio. Ya que el área del trapecio es el producto de la base por la altura trazada desde el punto medio C, para minimizar su área basta hacerlo con la altura CE. La altura CE se hace mínima cuando E=D, por tanto tenemos el resultado.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

APOSTOL, T. M. Y MAMIKON, A. M. (2002): Subtangents. An aid to visual calculus. *The American Math. Monthly*, vol. 109, nº 6, 525-533.

APOSTOL, T. M. Y MAMIKON, A. M. (2002): Tangents and subtangents used to calculate areas. T*he American Math. Monthly*, vol. 109, nº 10, 900-907.

ARAO, J. (2000): Tangents without calculus. *The College Math. Journal*, vol. 31, nº 5, 406-407.

BARNIER, W. (2007): Descartes tangent lines. *The College Math. Journal*, vol. 38, nº 1, 47-49.

BIVENS I. C. (1986): What a tangent line is when it isn´t a limit. *The College Math. Journal*, vol. 17, nº 2, 133-143.

COOLIGE, J. L. (1951): The story of tangents. *The American Math. Monthly*, vol. 58, nº 7, 449-462.

EDDY R. H. Y FRITSCH, R. (1994): An optimization oddity. *The College Math. Journal*, vol. 25, nº 3, 227-229.

GRABINER, J. V. (1983): The changing concept of change: the derivative from Fermat to Weiertrass. *Mathematics Magazine*, vol. 56, nº 4, 195-206.

MARTINEZ DE LA ROSA, F. (2004): Aportaciones a la matemática visual. *Epsilon*, vol. 20, nº 60, 449-459.

PARÉ, R. (1995): A visual proof of Eddy and Fritsch's minimal area property. *The College Math. Journal*, vol. 26, nº 1, 43-44.

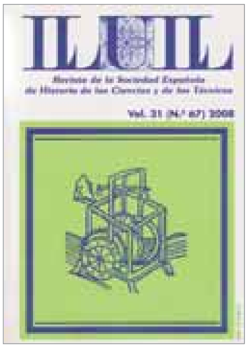
SKALA, H. (1997): A discover-e. *The College Math. Journal*, vol. 28, nº 2, 128-129.

SUZUKI, J. (2005): The lost Calculus (1637-1670): Tangency and optimization without limits. *Mathematics Magazine*, vol.78, nº 5, 339-353.

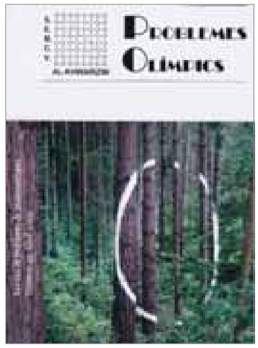
THURSTON H. (1969): Tangents: an elementary surveys. *Mathematics Magazine*, vol. 41, nº 1, 1-11.

WOLFSON P. R. (2001): The crooked made straight: Roberval and Newton on tangents. *The American Math. Monthly*, vol. 108, nº 3, 206-216.

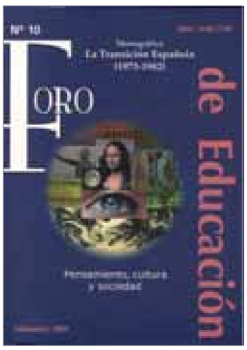
Publicaciones recibidas



LLULL
SEHCYT
Vol. 31 (nº67) 2008
Zaragoza
ISSN: 0210-8615

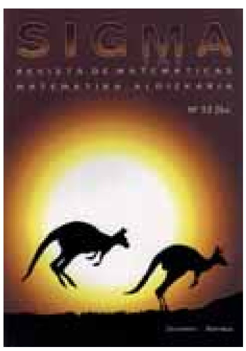


Problemes olímpics
SEMCV Al Khwārizmī
N.º 49, Abril 2009
Valencia
ISSN: 1578-1771



Foro de Educación
Nº. 10 2009
Salamanca
ISSN: 1698-7799

La Gaceta de la RSME
RSME
Vol.12, n.º 1, 2009
Madrid
ISSN: 1138-8927



Sigma
Gobierno Vasco
Departamento de Educación,
Univ. e Investigación
N.º 33, Diciembre 2008
Vitoria
ISSN: 1131-7787

suma+ 61
Junio 2009, pp. 17-26

Criptografía y matemáticas

La criptografía nació en el mismo momento en que se empezó a usar la escritura. El arte de codificar mensajes para burlar a los enemigos y el arte de descodificar los mensajes captados a los mismos, ha ido cambiando de estrategias y métodos a lo largo de la historia hasta llegar a convertirse en lo que es hoy en día: una ciencia que usa a las matemáticas como herramienta perfecta para sus intereses. En este artículo se da un breve repaso a los métodos criptográficos más famosos de la historia así como una breve muestra de aquellos que usan las matemáticas para la codificación y descodificación de mensajes.

The cryptography was born in the same moment in which it was begun using the writing. The art of codifying messages to avoid the enemies and the art of decoding the messages caught to the enemy, has been changing strategies and methods along the history up to managing to turn what is today: a science that uses the mathematics as ideal tool to mask messages. Here it is given a brief revision to the most famous cryptographic methods of the history as well as a brief sample of those cryptographic methods that use the mathematics for the codification and decodification of messages.

Una vez fui testigo presencial, en una conferencia que no logro recordar con total clarividencia, de la siguiente afirmación sobre la Teoría de Números: "La teoría de números es como la música o el ajedrez: no sirven para nada pero entretienen". Por suerte he tenido la oportunidad de comprobar que no tenía razón en la totalidad de su afirmación, ya que la teoría de números, siendo bonita y entretenida, sí que tiene muchas aplicaciones. En concreto, la teoría de números es el eje fundamental sobre el que giran todos los estudios que, últimamente, se están haciendo en relación con la *criptografía*, tema que es el motivo de este artículo.

La Real Academia de la Lengua define la *criptografía* como "el arte de escribir con clave secreta o de un modo enigmático", y ciertamente es una definición acertada, pues la criptografía se considera actualmente como la ciencia dedicada a estudiar métodos para *codificar* (*cifrar o encriptar*) mensajes secretos; evidentemente el objetivo último de la criptografía es la imposibilidad, por parte de cualquier persona ajena al mensaje, de descifrar un mensaje codificado, pues hay que contar siempre con la existencia gratuita de un adversario, que pondrá todos los medios posibles a su alcance para descifrar los *mensajes secretos*. A la ciencia que estudia los métodos que permiten descifrar mensajes encriptados se le conoce como *criptoanálisis*, y a la unión de ambas ciencias se le ha denominado *criptología*.

Aunque actualmente la criptografía basa todos sus métodos en la teoría de números, la estadística y distintas teorías de la información, la criptografía se originó en el mismo momento en que apareció la escritura. Siempre han existido situaciones en las que el hombre ha necesitado comunicar mensajes de vital importancia a sus semejantes, intentado que sus enemigos no los conocieran, ya que estos mensajes solían estar referidos a las estrategias militares que pudieran usar.

En una primera parte se hace un sucinto recorrido por los métodos criptográficos más relevantes que se han usado a lo largo de la historia, y en una segunda parte se muestra la maquinaria matemática de una serie de métodos criptográficos que se usan o solían usar en una época más reciente.

La utilización de métodos criptográficos de cierta importancia se remonta a 400 años antes de Cristo, en Esparta, donde los espartanos usaban un sistema secreto de escritura durante los enfrentamientos con Atenas. Este sistema de codificación de mensajes consistía en algo tan simple como lo siguiente: el emisor del mensaje y el receptor de éste poseían, cada uno, cilindros idénticos con bases de igual radio, el emisor enrollaba una tira de papel en el cilindro como si de una

Juan José Ortiz Muñoz
IES Miguel Fernández. Melilla

venda se tratara, y una vez enrollada escribía el mensaje a lo largo del cilindro; una vez escrito el mensaje original, se desenrollaba la tira de papel, quedando un mensaje aparentemente caótico que se mandaba al receptor, única persona capaz de descifrar el mensaje a menos que el cilindro fuera robado, único método que puede aportar el criptoanálisis. Los historiadores griegos denominaban a este método *la scitala espartana*.

Scitala espartana

En el siglo II a. C, el historiador griego Polibio, miembro de la Liga Aquea cuando era dirigida por Filipémenes[1] y que fue derrotada por los romanos, usaba un sistema de encriptación y desencriptación muy original y que comunicaba a través de nueve antorchas. Concretamente su método consistía en insertar el alfabeto en una tabla de doble de entrada de cinco filas y cuatro columnas asignando a cada letra el número formado por el número de la fila y el número de la columna en la que la letra estaba situada, como si de coordenadas se tratara. Teniendo en cuenta que el alfabeto romano constaba de veintiuna letras, la I se agruparía junto con la K, y la tabla quedaría así:

	1	2	3	4
1	A	B	C	D
2	E	F	G	H
3	I/K	L	M	N
4	O	P	Q	R
5	S	T	V	X

(Se elegirá I o K según el contexto)

De esta forma al corresponderse la letra T con el número 52, ésta se comunicaría encendiendo las cinco primeras antorchas y las dos últimas. Este método, conocido como *cuadrado de Polibio*, tiene variaciones que hacen de él un buen método, pues a diferencia de lo que ocurre con los cifrarios monoalfabéticos de sustitución, que analizaremos a continuación, altera la frecuencia de los caracteres.

Una de las variaciones más conocidas del cuadrado de Polibio es la conocida como *Cifrado Bífido de Polibio*, usado en los siglos XIX y XX por los nihilistas rusos. En este caso el cuadro de Polibio está compuesto por cinco filas y cinco columnas, y consiste en: primero desordenar el alfabeto escribiendo primero una palabra clave; en segundo lugar y una vez obtenidos todos los números del texto, se disponen en dos filas, de forma que se vuelve a obtener un mensaje numérico que transformaremos en texto codificado usando el cuadrado de Polibio en sentido contrario tomando como números de dos cifras cada uno de los pares numéricos que forman las nuevas columnas. Como ejemplo tomemos como palabra clave CLAVE, la cual permitirá desordenar el alfabeto, y codifiquemos la palabra POLIBIO:

	1	2	3	4	5
1	C	L	A	V	E
2	B	D	F	G	H
3	I/J	K	M	N	O
4	P	Q	R	S	T
5	U	W	X	Y	Z

La palabra POLIBIO será entonces 41351231213135. Ahora La disponemos en dos filas:

4135123
1213135

De esta forma sale el texto numérico 41123153112335, que corresponde con PLIXCFO.

El proceso de desencriptación consiste entonces en hallar la serie numérica del mensaje codificado y disponerlo en dos filas, la primera formada por los números de los lugares impares y la segunda formada por los de lugares pares; una vez hecho esto se coloca la segunda fila consecutiva de la primera que será la serie numérica del texto original.

En el siglo I a. C. el general romano Julio César creó un sistema de encriptación muy simple, consistente en sustituir unas letras por otras. Más concretamente, la sustitución que Julio César utilizó consistía en asignar a cada letra del alfabeto la letra que estaba tres lugares más a su derecha, adoptando el criterio lógico de que tras la letra Z se empezaba de nuevo por la letra A.

La clave de encriptación del conocido como *Cifrario de César* es por tanto el número "3". Teniendo en cuenta que el alfabeto romano sólo tenía veintiuna letras, el cifrario de César se basa en la siguiente sustitución de letras:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	V	X
D	E	F	G	H	I	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	V	X	A	B	C

La primera línea es el alfabeto sin cifrar y la segunda línea es el alfabeto de cifrado. Así por ejemplo, la frase ALEA IACTA EST *(la suerte está echada)*, que Julio César usó en el 49 a. C. cuando decidió atravesar el Rubicón con sus legiones, utilizando su cifrario se convierte en: DOHD MDFAD HXA.

Evidentemente, el cifrario de Julio César es uno de los 20 cifrarios que se pueden hacer de este tipo, basta con ir rotando el alfabeto de la línea de cifrado (la segunda línea).

El cifrario de Julio César está enmarcado dentro de los denominados *cifrarios monoalfabéticos de sustitución*, cuya clave de encriptación es el nuevo alfabeto encriptado. Así pues el cifrario de Julio César es el cifrario de sustitución por excelencia al ser el primero que se conoce a lo largo de la historia. Los cifrarios monoalfabéticos de sustitución perduraron a lo largo del tiempo; así por ejemplo, la Orden de Los Templarios usaba en el siglo XII un método criptográfico de sustitución que asociaba a cada letra del alfabeto un símbolo gráfico.

La ventaja que tienen estos cifrarios es la facilidad con que se encriptan los mensajes, pero unido a esta facilidad a la hora de encriptar mensajes, nos encontramos también con la facilidad de desencriptarlos cuando se dispone de tiempo suficiente.

Un fascinante e ingenioso ejemplo sobre cómo descifran un mensaje codificado por medio de un cifrario de sustitución se encuentra en la obra “El escarabajo de oro” de Edgar Alan Poe. El método que se utiliza en esta obra consiste prioritariamente en conocer cuáles son las letras, parejas de letras y tríos de letras que aparecen con mayor frecuencia en el idioma en que se ha escrito el mensaje original, e intentar encontrar el mensaje original por ensayo-error teniendo estos datos en cuenta. En España, la frecuencia relativa con la que aparecen las letras en los textos depende del estudio estadístico que se realice, pues no se obtiene el mismo resultado si se estudia directamente el diccionario de la Real Academia Española que si estudia libros de texto en general; a continuación se muestran, en orden descendente de aparición, las letras, pares de letras y tríos de letras de nuestro idioma sobre estudios realizados en libros de texto:

E, A, O, S, R, I, N, L, D, C, T, U, P, M, Y, Q, G, V, H, F, B, J, Z, K, X, W.

ES, EN, EL, DE, LA, OS, UE, AR, RA, RE, ON, ER, AS, ST, AL, AD, TA, CO.

QUE, EST, ARA, ADO, AQU, CIO, DEL, NT, EDE, OSA, PER, NEI, IST, SDE.

Pero como es lógico, los criptógrafos, una vez que se dan cuenta de la vulnerabilidad del método, intentan encontrar variantes de los métodos para que éstos no sean tan vulnerables. Este es el caso de los cifrarios *homofónicos* y los *nomenclátores*, cifrarios monoalfabéticos de sustitución que intentan luchar contra el análisis estadístico de los textos cifrados. Los *cifrarios homofónicos* consisten en considerar el alfabeto con unas cuantas letras repetidas, principalmente las de mayor frecuencia de aparición en el idioma, y en el alfabeto cifrado colocar tantos símbolos distintos como letras se han insertado en el alfabeto original. De esta forma se consigue que las frecuencias de aquellas letras más relevantes queden disminuidas.

La forma de codificar un mensaje original es igual que en los anteriores, salvo para aquellas letras que aparecen repetidas en el alfabeto original, para las cuales habrá una regla para determinar qué letra escoger. El primer cifrario homofónico del que se tiene constancia se utilizó en 1401 en la correspondencia cruzada entre la Corte de Mantua y Simeone de Crema. En el siguiente ejemplo de cifrario homofónico la palabra MAREA es sustituida por AHD%$:

A	A	B	C	D	E	F	G	H	I	I	J	K	L	M	N	O	O	P	Q	R
H	$	Y	N	J	%	U	M	I	K	O	L	P	Q	A	Z	W	S	X	E	D

S	T	U	V	W	X	Y	Z
C	R	&	F	G	V	T	B

Desde el siglo XVI hasta la primera mitad del siglo XIX, el sistema de cifrado más utilizado en las correspondencias diplomáticas fue un sistema mixto que se denomina *nomenclátor*. Los cifrarios nomenclátores están formados por dos núcleos: un primer núcleo formado por un cifrario homofónico, y un segundo núcleo compuesto por una serie de símbolos especiales que se corresponden con algunas palabras o frases concretas. De entre los cifrarios nomenclátores más famosos se encuentra el empleado en 1571 por el embajador en Francia de la Reina Isabel de Inglaterra.

Paralelamente a los cifrarios nomenclátores, se usaban con mucha frecuencia los denominados *cifrarios polialfabéticos de sustitución*, que tal y como su nombre indica, utilizan varios alfabetos a la hora de encriptar un mensaje. De entre estos cifrarios, el más importante es el conocido como *cifrario de Vigenère*[2]. La clave de este cifrario es una *palabra-clave*; se trabaja sobre una tabla formada por 26 alfabetos dispuestos uno bajo el otro de forma que el segundo alfabeto empieza por la letra B, el tercero por la letra C, y así sucesivamente hasta el último que empezará por la letra Z. A continuación se muestra cómo queda la disposición de la tabla:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	**R**	S	T	U	V	W	X	Y	Z
B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	**S**	T	U	V	W	X	Y	Z	A
C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	**T**	U	V	W	X	Y	Z	A	B
D	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	V	W	X	Y	Z	A	B	C
E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D
F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E
G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F
H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G
I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H
J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I
K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	Z
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	Z	A

Para encriptar un mensaje con el cifrario de Vigenère, debajo del mensaje que se va a encriptar se escribe la palabra clave tantas veces como sea preciso y, en su caso, truncarla al final del texto. De esta forma, cada letra del mensaje posee una letra clave que se encuentra mediante la intersección de la columna cuya primera letra es la original con la fila cuya primera letra es la letra clave correspondiente. Con un ejemplo se comprenderá mejor: supongamos que la palabra clave es DIA, y que queremos codificar la palabra RAREZAS, entonces se tiene la siguiente situación:

R A R E Z A S
D I A D I A D

La letra clave correspondiente a la primera R es la letra D, entonces la letra que se genera mediante este cifrario es la letra U, ya que la intersección de la columna que empieza peor la letra R con la fila que empieza con la letra D es la letra U. De esta forma la palabra codificada será:

UIRHHAV

Desencriptar un mensaje codificado por este cifrario es bastante fácil: se escribe debajo de la palabra codificada la palabra clave tantas veces como haga falta, como se hace para el proceso de codificación, y para encontrar cada letra original se busca la letra codificada en la fila de la correspondiente letra clave, miramos la letra inicial de la columna a la que pertenece y ésta determina la letra original.

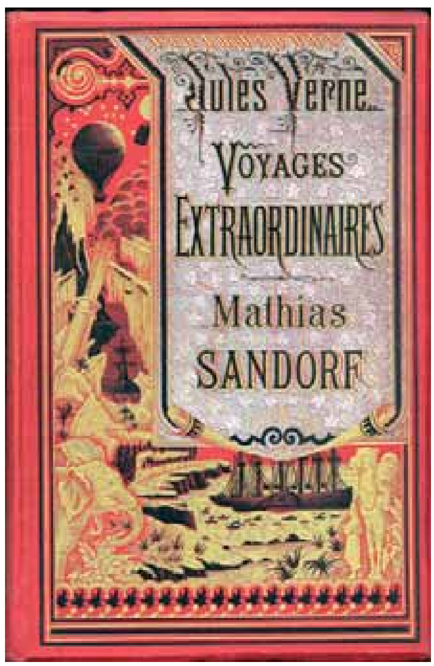
Como se puede observar el proceso descrito para la descodificación es tan sólo el proceso inverso al de codificación.

Existen otros cifrarios polialfabéticos de sustitución que utilizan una tabla un poco más pequeña que el cifrario de Vigenère, y para los que la clave, en vez de ser una palabra, es un *número-clave*.

Un ejemplo de este tipo de cifrario son los conocidos como *cifrarios de Gronsfeld*. Estos cifrarios no tienen demasiada importancia teórica por ser en esencia cifrarios de Vigenère; la diferencia radica en los métodos de encriptación y desencriptación, los cuales son leves modificaciones de los utilizados en aquel.

En cierto modo, podemos afirmar que todos los métodos de desencriptación vistos hasta ahora proceden del cifrario de César, ya que todos son cifrarios de sustitución. Sin embargo la s*citala espartana* no es un cifrario de sustitución, sino un *cifrario de transposición*. Los métodos criptográficos por transposición quedaron en olvido hasta que alrededor del siglo XVI el científico, excelente y prolífico matemático italiano Cardano introdujo los cifrarios de *rejillas.* Estos cifrarios reciben este nombre porque gran parte de los códigos secretos que se utilizan se basan en el empleo de un conjunto de distintas rejillas perforadas. Las rejillas se colocan sobre un cuadro polialfabético determinando, gracias a éstas, las letras codificadas.

En la obra *Mathias Sandorf* de Julio Verne, a veces la trama se centra en temas de criptografía relacionados con la utilización de ciertas rejillas perforadas que permiten encriptar y desencriptar mensajes secretos de gran importancia. Esta obra deja además constancia del gravísimo problema que tiene este tipo de cifrarios: la desencriptación la puede hacer toda persona que posea la rejilla adecuada, y puede ocurrir, como bien lo plasmó en la obra su autor, que la rejilla sea robada por una persona no deseada.



Los cifrarios de transposición y los de sustitución, tanto monoalfabéticos como polialfabéticos, cayeron en desuso en la primera mitad del siglo XIX cuando a finales del siglo XVIII se dio lugar la denominada hoy en día *Revolución Industrial.* La nueva corriente filosófica que esta revolución trajo consigo hizo que los criptógrafos inventaran sistemas criptográficos basados en las máquinas. Es por este motivo que a los cifrarios anteriormente mencionados se les denominan vulgarmente *cifrarios de lápiz y papel*.

El cifrario mecánico más antiguo que se conoce fue creado a finales del siglo XVIII por el que fuera presidente de los Estados Unidos: Thomas Jefferson. Este cifrario, conocido como *el cilindro de Jefferson*, tras caer en el olvido al no ser usado por su inventor, fue reconstruido por un famoso criptógrafo llamado Etienne Bazeries alrededor del año 1890. A partir de ese momento, el cilindro de Jefferson fue de gran utilidad, hasta tal punto que fue utilizado por los EEUU durante la segunda Guerra Mundial, y esporádicamente en la postguerra. El cifrario de Jefferson consiste en un cilindro formado por 26 discos iguales (el que construyó Bazeries sólo tenía 20 discos) que rotan sobre un eje que atraviesa los centros de los discos. Cada disco tiene su borde exterior dividido en 26 partes iguales, en los que se colocan aleatoriamente las 26 letras del alfabeto, intentado que cada disco tenga una ordenación diferente del alfabeto. El mensaje a codificar se agrupa en bloques de 26 letras, y si el último bloque no completa las 26 letras, se colocan letras nulas hasta completarlo. De esta forma, después de rotar los discos hasta conseguir escribir el bloque original, el bloque cifrado es el que se lee en la línea que, contada al rotar el cilindro en sentido positivo, nos indica la clave.

Cilindro de Jefferson

El cifrario de Jefferson fue el precedente de cifrarios mecánicos que, basándose en la rotación, son de mecánica mucho más complicada. Tal es el caso de la famosa máquina encriptadora *Enigma*, usada por los alemanes en la Segunda Guerra Mundial. El funcionamiento de esta máquina se basa en el cifrario de Jefferson, solo que en este caso cada disco giratorio tiene 26 nodos eléctricos (uno por cada letra del alfabeto) en cada cara, de forma que cada nodo de un disco está en contacto con cada nodo del disco siguiente. Cuando se inserta en la máquina una letra, el primer disco gira un lugar, si es el giro número 26 el segundo disco gira también un lugar, si en el segundo disco también es el número 26 entonces el tercer disco también gira un lugar, y así sucesivamente. Una vez que se producen los giros de discos, una señal eléctrica que parte del nodo correspondiente a la letra original, pasa por los nodos de contacto alineados con él; el nodo activado en el último disco corresponde a una letra que será la letra codificada de la inicial.

La clave de *Enigma* queda determinada por la estructura interna de los rotores y por su posición inicial. A pesar de que utilizaban distintas máquinas y distintos tipos de discos, como todas funcionaban mediante el mismo mecanismo, cuando los criptoanalistas británicos y polacos conocieron dicho funcionamiento, los ingleses recurrieron a enormes máquinas de calcular que le permitieron descifrar los mensajes encriptados de los alemanes. Este hecho está muy bien reflejado en la obra *Fuerteventura* de Alberto Vázquez Figueroa, la cual basa su trama en el intento de adquisición, por parte de la inteligencia Británica, de una *Enigma* incorporada en un submarino del ejército Alemán.

Máquina Enigma

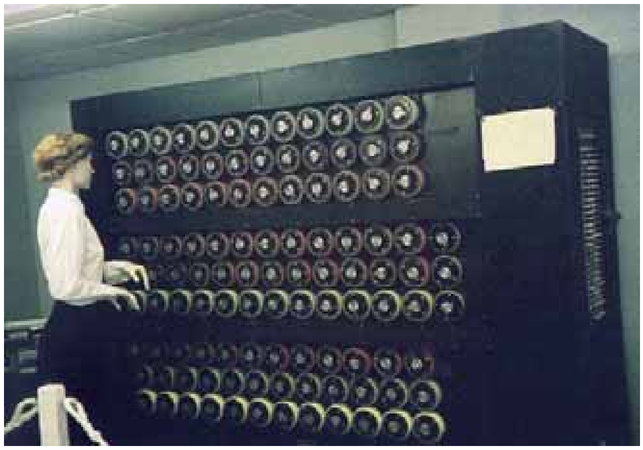
Es importante mencionar que el ejército estadounidense, al mismo tiempo que usaba el cilindro de Jefferson, encontró un método criptográfico muy sencillo pero no por ello menos fiable. Quizás es el método más fiable de todos los comentados anteriormente: incluían en su ejército indios navajos, cuyo idioma no puede ser aprendido por nadie que no fuese criado entre ellos, y transmitían los mensajes en ese idioma. Se dice que sus mensajes no fueron descifrados nunca.

Si recordamos, el problema fundamental que tienen los cifrarios de rejillas recae en que si alguna persona no deseada se apodera de la rejilla entonces el mensaje es fácilmente descifrable. Este problema es igualmente aplicable al cifrario de Jefferson y a Enigma, que una vez en manos enemigas, es más fácil desenmascarar su sistema de cifrado y descifrado. A finales del siglo XIX, el criptógrafo holandés Auguste Kerckhoffs estableció una serie de recomendaciones que deben cumplir los sistemas criptográficos para considerarlos óptimos. Las recomendaciones establecidas por Kerckhoffs son:

1º) El sistema de cifrado debe ser impenetrable, si no en teoría, el menos en la práctica.
2º) El hecho de que el sistema se vea comprometido no debe dañar a los corresponsales.
3º) La clave debe ser fácil de memorizar y fácil de sustituir.
4º) Los criptogramas deben ser idóneos para su comunicación por los medios de transmisión habituales.
5º) El aparato y los documentos de cifrado deben ser fáciles de transportar; es necesario que la operación de cifrado la pueda realizar una sola persona.
6º) El sistema debe ser sencillo, no se debe basar en el conocimiento de largas listas de normas ni requerir esfuerzos mentales excesivos. Al menos la complejidad del proceso de recuperación del texto original debe corresponderse con el beneficio obtenido.

Como se puede observar, los sistemas criptográficos comentados anteriormente no cumplen, entre otras, la primera de las seis recomendaciones.

La invención de máquinas gigantes de cálculo con el objetivo de intentar desenmascarar a *Enigma* es sin duda el comienzo de la era informática. La informática desde su comienzo hasta nuestros días ha avanzado a un ritmo vertiginoso que ha desembocado, entre otros logros, en la creación de redes informáticas de comunicación, como es el caso de Internet. La utilización de estas redes informáticas ha hecho necesario el uso de criptosistemas seguros para cifrar mensajes, ya que los mensajes transmitidos a través de estas redes pueden ser capturados por miles de personas. Debido a este motivo se hace imprescindible utilizar sistemas de encriptación que sean impenetrables, si no en teoría sí en la práctica. Es alrededor de 1975 cuando se crean criptosistemas con las características propias que los hacen óptimos. Estos sistemas de encriptación basan su funcionamiento en la teoría de números, aprovechando al servicio de la criptografía la increíble capacidad de cálculo numérico que poseen los ordenadores. Es aquí donde entra la parte puramente matemática y cuando la criptología en general deja de ser considerada un arte para pasar a ser considerada una ciencia.



Bomba de Turing en Bletchley Park

En principio se hace necesario buscar un modo de trasladar las letras a números. Esto no es una novedad histórica, ya que el código Morse que se usaba en el telégrafo utiliza rayas y puntos para caracterizar cada letra del alfabeto. Cambiando puntos por ceros y rayas por unos, cada letra del alfabeto se corresponderá de esta forma con un número cuyos dígitos solo cuentan con ceros y unos, es decir, cada letra del alfabeto se corresponderá con un número del sistema binario.

Sin embargo, esta forma de trasladar letras a números no es la que nos conviene para los sistemas criptográficos actuales, sino que nos conviene la que asigna a cada letra el número de dos cifras que refleja el lugar que ocupa en el alfabeto, es decir:

A = 00 B = 01 C = 02 D = 03 E = 04 F = 05 G = 06
H = 07 I = 08 J = 09 K = 10 L = 11 M = 12 N = 13
Ñ = 14 O = 15 P = 16 Q = 17 R = 18 S = 19 T = 20
U = 21 V = 22 W= 23 X = 24 Y = 25 Z = 26

Para trabajar con estos criptosistemas numéricos hay que recurrir a la teoría de números congruentes *módulo n*, siendo "n" un número natural (n=27 en el ejemplo anterior). Los números congruentes van a ser por tanto una invención matemática que va ser útil, a diferencia de otros mundos abstractos inventados por los matemáticos, y que además será de vital importancia para conseguir el objetivo que nos proponemos: encontrar un criptosistema que sea prácticamente imposible de vulnerar en su puesta en práctica y que además verifique las recomendaciones de Kerchoffs.

Se recuerda rápidamente que los números *módulo n*, n número natural, son los números naturales que van desde el cero hasta el número n-1, ambos inclusive. En sí esto no parece tener mucha importancia, pero sí que la tiene: los números mayores o iguales que "n" y los números negativos se identifican con alguno de los números módulo n a través de la siguiente regla:

El número entero p se identifica con el número q, siendo $0 \leq q < n$, si el resto de dividir p entre n resulta ser q, en cuyo caso se escribe en la forma: "$p \equiv q \pmod{n}$" y se nombra *p es congruente con q módulo n.*

La primera aplicación que podemos hacer de los números módulo n es bastante curiosa. Recuérdese por un momento cuál era el método utilizado en el cifrario de Julio César: sustituir cada letra por la situada tres lugares más allá. Si convertimos las letras en números según la tabla correspondiente, el sustituir una cierta letra por la situada tres lugares más allá, no es sino que sumar a su número de identificación tres unidades, teniendo en cuenta de que cuando nos pasamos de 25 hay que empezar de nuevo por 0. Este método de sustitución numérica es muy fácil de expresar por medio de congruencias módulo 27 en la siguiente forma: Si m representa la letra original y h representa la letra cifrada, entonces el cifrario de Julio César es el resultante de aplicar la sencilla fórmula $\eta \equiv \mu + 3 \pmod{27}$.

Con la notación modular y con los números modulares es más fácil detallar todos los distintos cifrarios de sustitución como los de Julio César, ya que todos ellos siguen la regla: $\eta \equiv \mu + k \pmod{27}$ para $0 \leq k < 27$. Es por este motivo por el que se puede afirmar de nuevo que existen 26 cifrarios de Julio César diferentes cuando el alfabeto tiene 27 letras. Está claro entonces que en estos casos la clave será el número k.

A continuación se muestran una serie de criptosistemas basados todos ellos en la teoría de números. Los tres últimos, a diferencia de los dos primeros, tienen en común el hecho innovador de hacer pública una parte de la clave del sistema; concretamente suele ser la clave de codificación la que se da a conocer públicamente mientras que la de descodificación se mantiene en secreto. De esta forma se resuelve el problema de comunicar previamente la clave entre el emisor y el receptor del mensaje, problema que se encuentra principalmente en encontrar un canal seguro para transmitir dicha clave.

Criptosistemas matriciales

Los cifrarios matriciales son un tipo de sistemas criptográficos que basan su funcionamiento en la teoría de matrices. El primer paso consiste en disponer las letras del mensaje original en forma de tablas, es decir, disponerlas en un número determinado de filas y columnas. Una vez dispuestas en forma de tablas de tamaños predeterminados, cada letra se sustituye por su homólogo numérico, obteniendo así una matriz.

La clave del sistema está compuesta por dos números enteros positivos k y n, y una matriz inversible U de tamaño k y de matriz inversa U^{-1} módulo 27, es decir m.c.d.(det(U), 27)=1. Para cifrar un mensaje se deben seguir los siguientes pasos:

1º) Escribir el mensaje original en bloques de k filas y de n columnas.
2º) Sustituir las letras de cada bloque por sus números correspondientes, obteniendo así matrices M de k filas y de n columnas (es decir, son matrices de $M_{k \times n}$). Se les llaman matrices originales.
3º) Para cada matriz original M, calculamos su matriz cifrada C mediante la relación siguiente:
$C \equiv U \cdot M \pmod{27}$
4º) Sustituir los términos de cada matriz C por sus letras homólogas.

De esta forma se obtiene una serie de bloques de letras de k filas y de n columnas que al deshacerlos nos dará el mensaje cifrado. Como el receptor sabe que se está trabajando con matrices de k filas y de n columnas, éste seguirá los siguientes pasos para desencriptar el mensaje recibido:

1º) Escribir el mensaje cifrado en bloques de k filas y de n columnas.
2º) Sustituir las letras de cada bloque por sus números correspondientes, obteniendo así las matrices cifradas C.
3º) Calcular las matrices originales M mediante la siguientes relación: $M \equiv U^{-1} \cdot C \pmod{27}$.
4º) Sustituir los términos de cada matriz M por sus letras homólogas.

Criptosistema DES (Data Encryption Standard)

Este criptosistema fue creado en los Estados Unidos en el año 1977 con el fin de ser un sistema de protección de información utilizado en los diferentes estados bajo un sistema criptográfico común, admitido como estándar. El sistema DES fue desarrollado por IBM e inspirado en un sistema anterior que consistía en una concatenación de transformaciones.

El algoritmo en que se basa el sistema DES es un algoritmo de cifrado-descifrado que usa concretamente bloques de ocho filas por ocho columnas, es decir, bloques de 64 números. Dar explícitamente el algoritmo es muy engorroso, basta con tener una clara idea de su funcionamiento.

La clave del sistema es privada, está compuesta por 16 subclaves k_1, ..., k_{16} y otra clave que es una permutación P de los 64 números que componen cada bloque obtenido a raíz del texto original. Para cada bloque B, el algoritmo es el siguiente:

1º) Aplicar la permutación P al bloque, obteniendo así un nuevo bloque B´ con los mismos números pero en un orden diferente.
2º) El bloque B´ se divide en dos subbloques de 32 números: L_0 y R_0. Es decir B = (L_0 | R_0).
3º) Mediante la clave k_1, R_0 se transforma en R_1,y como bloque L_1 se toma R_0.
4º) Mediante la clave k_2, R_1 se transforma en R_2, y como bloque L_2 se toma R_1.
....
....
17º) Mediante la clave k_{15}, R_{14} se transforma en R_{15}, y como L_{15} se toma R_{14}.
18º) Mediante la clave k_{16}, R_{15} se transforma en R_{16}, y como L_{16} se toma R_{15}.
19º) Al nuevo bloque B´´ = (R_{16} | L_{16}) se le aplica la permutación inversa de P, obteniendo así el bloque cifrado.

Criptosistema Exponencial

El cifrario exponencial fue creado en 1978. Tiene como clave pública un número primo "p" y como clave privada un número entero "e" de forma que el máximo común divisor de "e" y "p – 1" es uno: m.c.d. (e, p – 1) = 1, es decir, e y p son tales que de entre los divisores de e y de p –1 no existen comunes a ambos salvo quizá el 1. La clave de descifrado también es secreta al ser un número "d" tal que $d\cdot e \equiv 1 (\bmod\ p-1)$.
La forma de encriptar un mensaje mediante el cifrado exponencial es la siguiente:
1º) Se convierten las letras del mensaje en sus equivalentes numéricos.
2º) Buscamos un número m de forma que 2m sea el mayor número natural tal que todos los bloques de números correspondientes a 2m letras sean menores que p.
3º) Se agrupan los números resultantes del primer paso en bloques de 2m dígitos. Si el último bloque no cubriera los 2m dígitos, se implementarían letras nulas.
4º) Cada bloque μ del mensaje original se cifra siguiendo la relación $\eta \equiv \mu^e \pmod p$, obteniendo para cada bloque original el codificado η.

De esta forma el texto codificado obtenido estará formado por una serie de números enteros menores que p, pues para cada bloque pedimos que se obtenga un número de entre los números módulo p. Cada entero obtenido se corresponde con cada uno de los bloques iniciales.

El emisor del mensaje, a la hora de codificarlo toma la clave pública (e, p) del receptor para que al mandarlo sea el receptor la "única" persona que puede descodificarlo, ya que es éste quien únicamente conoce la clave secreta d. La forma en que se realiza la desencriptación del mensaje recibido es fácil, pues sólo requiere los siguientes pasos:

1º) A cada número entero menor que p se le hace la siguiente operación: $\mu^* \equiv \eta^d \pmod p$.
Teniendo en cuenta que $\eta \equiv \mu^e \pmod p$ y que $d\cdot e \equiv 1 \pmod{p-1}$, con un poco de álgebra y un poco de teoría de números se deduce que $\mu^* \equiv \mu$.
2º) Una vez obtenidos los bloques de números originales, cada dos números tiene su letra correspondiente, dando así el mensaje original.

Obsérvese que mientras mayor sea el número primo p, más difícil debe ser para el criptoanalista descifrar el mensaje. Aun conociendo una parte del texto inicial μ y la correspondiente parte codificada η, el criptoanalista debe encontrar un número e de forma que $\eta \equiv \mu^e \pmod p$, y por tanto debe ser un logaritmo de η en base μ módulo p. Cuando el número primo p es muy grande se requieren una cantidad tal de operaciones para encontrar el mencionado logaritmo, que los ordenadores más modernos con los métodos actuales tardarían miles de años.

Criptosistema RSA

Este cifrado fue presentado, paralelamente al cifrado exponencial, en 1978. Recibe este nombre por los apellidos de sus creadores: R. L. Rivest, A. Shamir y L. Adleman.

El criptosistema RSA tiene como clave pública un par de números (e, N) con las siguientes condiciones:

- N = p·q, donde p y q son dos números primos.
- El número e debe ser tal que mcd (e, $\phi(N)$) = 1, donde $\phi(N)$ es el número de enteros que son menores que N y primos con él (función ϕ de Euler).

La clave privada para el par (e, N) es un número "d" inverso de "e" en el conjunto de los números módulo $\phi(N)$, es decir: tal que $d\cdot e \equiv 1 \pmod{\phi(N)}$.

La forma de encriptar un mensaje mediante el cifrado RSA es la siguiente:
1º) Se convierten las letras del mensaje en sus equivalentes numéricos.
2º) Se agrupan los números resultantes en bloques de números del mayor tamaño posible y con un número par de dígitos. Si el último bloque no cubriera los 2m dígitos, se implementarían letras nulas.
3º) Cada bloque μ del mensaje original se encripta siguiendo la relación $\eta \equiv \mu^e \pmod N$, obteniendo para cada bloque original el bloque codificado h.

Cada persona tendrá una clave (e, N) que hará pública y un número "d" inverso de "e" módulo N que será su clave privada. De esta forma si una persona quiere mandar un mensaje, a la hora de codificarlo tomará la clave pública (e, N) del receptor para que de esta forma sea el receptor la "única" persona que puede desencriptar el mensaje codificado, ya que es ella quien únicamente conoce la clave secreta "d".

La forma en que se realiza la desencriptación del mensaje recibido es fácil, pues sólo requiere los siguientes pasos:

1º) A cada bloque de números h se le hace la siguiente operación: $\mu^* \equiv \eta^d$ (mod p).
Teniendo en cuenta que $\mu^* \equiv \eta^e$ (mod N) y que $d \cdot e \equiv 1$ (mod ϕ(N)), con un poco de álgebra y un poco de teoría de números se deduce que $\mu^* \equiv \mu$.
2º) Una vez obtenidos los bloques de números originales, cada dos números tiene su letra correspondiente, dando así el mensaje original.

Como se ha podido observar los dos criptosistemas son muy parecidos, pero es algo más sutil que una simple similitud, ya que el sistema RSA es una generalización del sistema Exponencial. Esta generalización se ve más clara con las siguientes precisiones:

Criptosistema Exponencial	Criptosistema RSA
Clave pública modular: Número primo p Clave exponencial de cifrado: Numero privado e con mcd (e, p) =1	Clave pública modular: Producto de dos primos, es decir un número N tal que N = p·q Clave exponencial de cifrado: Número público e tal que mcd (e, p·q)=1
Clave exponencial de descifrado: Número privado d tal que es el inverso de e módulo p-1.	Clave exponencial de descifrado: Número privado d tal que es el inverso de p·q módulo ϕ(p·q). **Observación:** Cuando p y q son primos se verifica que ϕ (p·q) = (p-1)·(q-1).

El criptosistema RSA es uno de los más útiles hoy en día. Esta utilidad se debe principalmente a dos hechos importantes:

1º) Existen hoy en día algoritmos muy rápidos para crear números primos. Estos algoritmos son tales que, con los ordenadores de hoy en día, en pocos minutos se encuentran números primos del orden de cien o más dígitos, lo cual permite encontrar el número N fácilmente. Del mismo modo existen algoritmos muy rápidos para calcular el inverso de e módulo ϕ(N) conocidos p y q.
2º) Por el contrario no se conocen algoritmos rápidos para descomponer un número compuesto. Con los métodos que se conocen hoy en día, ni los ordenadores actuales más potentes tardarían menos de algunos miles de años en descomponer un número que sea producto de dos números primos de cien dígitos cada uno (¡El producto de dos números de cien dígitos tiene al menos ciento noventa y nueve dígitos!)

Como la desencriptación de un mensaje por parte de una persona ajena al mensaje pasa por conocer el número d, esta persona tiene dos caminos posibles: encontrar la descomposición factorial del número N en sus dos números primos y así conocer ϕ(N), o encontrar f(N) directamente. Por desgracia para los criptoanalistas, si ya es difícil encontrar la factorización en números primos del número N, no es menos difícil encontrar directamente el número ϕ(N). Esto hace al sistema infalible en la práctica.

Aún así, se hace recomendable dar una serie de recomendaciones a la hora de escoger los números primos p y q para evitar posibles métodos especiales de factorización:

- p – 1 y q –1 deben tener grandes factores primos.
- El m.c.d.(p – 1, q – 1) debe ser pequeño.
- Los números primos p y q deben tener una cantidad de dígitos similares.

Criptosistema de ElGamal

El criptosistema que se muestra a continuación es otro criptosistema de clave pública basado también en la exponenciación modular. Para trabajar con el sistema de ElGamal, se necesita fijar un número primo "p", y encontrar un número "α" tal que $0 \leq \alpha \leq p-1$ y $\alpha^{p-1} \equiv 1$ (mod p). Ambos números son números fijos para todos los usuarios, y por tanto en cierto modo forman parte de la clave pública.

Cada usuario debe escoger al azar un número natural "r" tal que $2 \leq r \leq p-1$; este número r será su clave secreta. La clave pública será el número "b" con $0 \leq b \leq p-1$ que verifica $b \equiv \alpha^r$ (mod p).

Para cifrar un mensaje original el emisor tomará la clave pública del receptor y realizará la siguientes operaciones:

1º) Transformar el mensaje original en su homólogo numérico. Tomar bloques de números pares, siempre con un número de dígitos menor que el que tiene el número primo p. Los denotaremos por μ.
2º) Escoger al azar un entero "k" y calcular a^k módulo p.
3º) Cifrar cada bloque original m mediante la relación:
$\eta \equiv \mu \cdot (b^k)$(mod p)
4º) Transmitir el par (α^k, η).

El resultado de la transmisión se puede ver como el texto original cubierto con una máscara b^k junto con una pista α^k que sirve para desenmascarar el texto cifrado. Lo bueno del método es que la pista sólo podrá usarla quien conozca el número r.

Como el receptor del mensaje tiene su clave privada de descifrado, tan sólo tendrá que realizar la siguientes operaciones:

1º) Calcular el número β tal que $\beta \equiv (\alpha^k)^r \pmod p$.
2º) Calcular η/β, cuyo resultado será el mensaje numérico original μ.

A pesar de que los sistemas de encriptación de clave pública tienen bastantes ventajas, ninguno de ellos puede competir en rapidez con los sistemas de clave secreta como el sistema DES.

Actualmente lo que se intenta es aprovechar las ventajas del RSA y la rapidez del DES, obteniendo de esta forma lo que se ha denominado como *sistemas híbridos*, pero este tema habrá que estudiarlo con mucho detenimiento.

NOTAS

[1] La Liga Aquea era una confederación de doce ciudades-estados de la región costera Acaya en el norte del Peloponeso en la Antigua Grecia. Filipémenes fue uno de sus más destacados generales.

[2] Diplomático francés que vivió en la segunda mitad del siglo XVI.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRAMSON N. (1981): *Teoría de la Información y Codificación*. Paraninfo.

ALLAN POE, E. (1991): “El escarabajo de Oro” en *Cuentos*. Planeta, Barcelona.

CABALLERO, P. (1996)*: Introducción a la Criptografía*. Ra-Ma, Madrid.

CESID (1991): *Glosario de términos de Criptología*. CESID. Madrid.

DE GUZMÁN, M.(1996): *Aventuras matemáticas. Una ventana hacia el “caos” y lo impredecible*. Pirámide, Madrid.

MOLINA MATEOS, J. M. (1994): *Seguridad, información y poder*. Incipit.

RIFÁ, J. y HUGUET, LL. (1991): *Teoría matemática de la información. Criptología*. Masson, Barcelona.

SGARRO, A. (1990): *Códigos secretos*. Pirámide, Madrid.

TUCHMAN, B. W. (1984): *El telegrama Zimermann*. Argos-Vergara.

VACCA, J. (1997): *Los secretos de la Seguridad en Internet*. Anaya Multimedia.

VAZQUEZ FIGUEROA, A. (1999): *Fuerteventura*. Plaza y Janés, Barcelona.

suma+ 61
Junio 2009 pp. 27-33

Barro y matemáticas: 9 sucesiones y una escala

El objeto de este artículo es presentar el cartel didáctico que relaciona matemáticas y cerámica titulado La successió del fang *(La sucesión del barro) y las actividades que entorno a él se han realizado en el marco de la* Fira del Fang *(Feria del Barro) que organiza el Ayuntamiento de Marratxí (Mallorca). En esta ocasión, el cartel didáctico ha corrido a cargo de la Societat Balear de Matemàtiques SBM-XEIX. El público escolar al que va dirigido abarca principalmente edades desde 4 a 12 años.*

The aim of this article is to present the didactic poster that relates mathematics and ceramics, entitled La successió del fang (the succession of mud) and the activities around it has been made under La Fira del Fang (the Fair of Mud) that the council of Marratxí (Mallorca) organizes. On this occasion, the didactic poster has been elaborated by the Balearic Society of Mathematics SBM-XEIX. The public school to be targeted mainly covers from ages 4 to 12 years.

El mes de marzo de 2008 tuvo lugar en Marratxí, municipio mallorquín con larga tradición ceramista, la edición número 24 de la Fira del fang (Feria del Barro) que año tras año congrega aproximadamente a unos cincuenta ceramistas isleños, así como también a una representación de artistas de otras comunidades.

La estructura básica del recinto ferial contempla tres espacios:

- Un espacio exterior distribuido como mercado para el comercio de la cerámica.

- Un espacio interior distribuido por estands y con formato expositivo de concurso.

- Un espacio interior para acoger a los grupos escolares que acuden al taller didáctico.

Cada año se escoge un tema, que plasmado también en formato de cartel, se convierte en el eje entorno al que gira la muestra. Desde la creación de la Sociedad Balear de Matemáticas SBM-Xeix el año 2005, con sede en Marratxí, veníamos perfilando la idea de que, en alguna edición, el tema relacionara barro y matemáticas. Esta idea fue compartida desde el primer contacto por la concejalía de Cultura del Ayuntamiento de Marratxí y se materializó en la edición del pasado año 2008.

La versión original de este artículo, en catalán, se puede obtener en la siguiente dirección: http://www.revistasuma.es

Josep Lluís Pol i Llompart
Conselleria d'Educació i Cultura del Govern de les Illes Balears
Catalina Pol Quetglas
Maria Triay Magraner
IES Son Ferrer. Calvià (Mallorca)

El objetivo de esta aventura es también uno de los objetivos principales de SBM-Xeix, hacer llegar las matemáticas al público en general y contribuir a fomentar la observación del mundo desde una perspectiva matemática.

Quizá en principio pueda sorprender la relación entre barro y matemáticas pero pronto los ejemplos afloran y el maridaje acontece claro y diáfano: apoyo para los primeros sistemas numéricos, construcción de piezas contables, simetrías, teselas, piezas torneadas, volúmenes y figuras, etnomatemáticas, sonidos...

Ante la variedad y dispersión temática, hacía falta encontrar un hilo conductor, que finalmente se concretó en el de las sucesiones. De ahí, el título de “La sucesión del barro”, que además nos permitía una interpretación generosa, no solamente matemática, sino también referida a la problemática actual de la continuidad de un oficio que lucha entre la mecanización y la personalidad propia de las piezas artesanales.

La propuesta temática se debía concretar ahora en una propuesta visual, en forma de cartel didáctico, que debía servir a la vez como inspiración para que los alfareros elaboraran su montaje de estand, el cual les permitiría optar a los premios *Benet Mas*.

El cartel didáctico[1]

Es bien sabido que la dificultad de un buen cartel radica siempre en el equilibrio entre dos aspectos: el conceptual, el peso del cual aporta mayoritariamente el texto, y el gráfico, integrado por dibujos, esquemas e imágenes. Por eso es importante recalcar la función didáctica que tradicionalmente viene cumpliendo este cartel: los centros escolares que visitan la feria, se llevan un ejemplar por clase con el fin de poder trabajar algo más el tema en las aulas. Este hecho permite -y de hecho aconseja- introducir algo más texto del que en principio sería aconsejable en un formato como este.

Para la elaboración del cartel didáctico se seleccionaron nueve ejemplos que serían expuestos bajo el prisma de las sucesiones. Con respecto al nivel conceptual en la redacción de los textos, se procuró hacer una redacción adulta (el cartel también está al alcance del público en general) con el máximo de información pero sin dar por supuestos demasiados conceptos matemáticos, de forma que cualquier docente pudiera hacer una lectura provechosa y la pudiera adaptar posteriormente al nivel de su alumnado.

Completarían el cartel una introducción no formal a las sucesiones y los créditos correspondientes.

A continuación hacemos algunas consideraciones adicionales a los textos del cartel.

El sistema indoarábigo

Es la sucesión aritmética por excelencia. Las imágenes han sido tomadas de las placas de terracota que numeran las casas en las calles de Sa Cabaneta y Pòrtol, dos poblaciones del municipio de Marratxí. Se aprovecha el espacio del texto para datar el origen del sistema numérico actual e indicar de la manera más intuitiva posible la diferencia entre un sistema aditivo como el romano y un sistema posicional.

Las piezas sumerias

Entre el Tigris y el Éufrates, en el país de Sumeria, la materia prima por antonomasia fue el barro. No es de extrañar que uno de los primeros sistemas contables organizados fuera esta colección de “imnus” o cálculos sumerios que tiene base sesenta con una base auxiliar de diez. Es curioso observar como una pieza agujereada, multiplica su valor por diez, que es el valor de la bola pequeña. Las fotografías están tomadas sobre recreaciones de Joan Vich a partir de los gráficos del libro de Ifrah (1997).

Las cifras cuneiformes de Babilonia

El gran invento de la humanidad, la escritura, tiene su origen en las tablillas de terracota de Babilonia (con sus precursores los sumerios). Realmente los babilonios utilizaban un sistema decimal, pero al amparo de los sabios persistió el sistema sexagesimal sumerio, bajo una escritura prodigiosa que con la invención del sistema posicional y sólo dos símbolos, una cuña para el uno y un ángulo para el diez, llegó a inventar incluso una grafía arcaica para el cero, que desgraciadamente no consiguió persistir. La imagen corresponde a la recreación de Pilar Sastre de una tablilla explicada por Ifrah (1997).

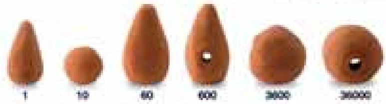
La baldosa de cartabón

Se trata de una baldosa de diseño sencillo y amplia distribución, al menos dentro del ámbito de la cultura catalana, documentada desde el siglo XIII. Las de procedencia valenciana suelen presentar tonalidades combinadas de azul cobalto y blanco estannífero, mientras que las catalanas parecen decantarse por la combinación verde de cobre y blanco estannífero. En Mallorca se pueden encontrar muestras bastante antiguas en Ca’n Óleo de Palma o en el convento de Sant Bonaventura de Llucmajor. Es una baldosa perfecta para jugar y construir cenefas y mosaicos. Las de la imagen son de la sede del Institut d’Estudis Catalans.

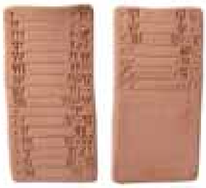
La successió del fang

Quan parlam de successions, normalment ens referim a objectes o fets que esdevenen un rere l'altre en l'espai o en el temps, en una cadena lògica de causa-efecte. Les successions sempre han tingut un punt de joc, de repte per encertar els elements següents a partir dels anteriors. Aquí teniu doncs, diverses successions que han estat tradicionalment lligades al fang des de la nit dels temps.

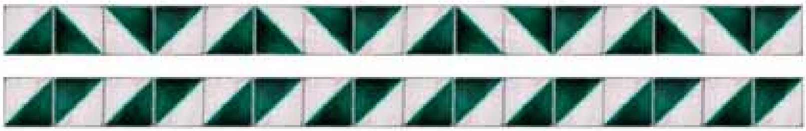
EL SISTEMA INDOARÀBIC El nostre sistema de numeració fou inventat a l'Índia entorn a l'any 500 dC i transmès a Occident a través dels àrabs. Contràriament al sistema romà, és un sistema de posició on cada xifra té un valor o un altre segons la posició que ocupa. Per això, si en el sistema romà dues X juntes volen dir vint, en el nostre sistema dos 7 junts no fan catorze sinó setanta-set.



LES PECETES SUMÈRIES El sistema comptable organitzat més antic que coneixem en l'actualitat són unes pecetes de fang que ja utilitzaven els sumeris ara fa més de quatre mil anys. Es tracta d'un sistema de numeració de base seixanta en el qual la forma i la grandària de les pecetes n'indica el valor. Una quantitat romania enregistrada quan totes les pecetes es guardaven dins una bolla de fang.



LES XIFRES CUNEÏFORMES DE BABILÒNIA Fa gairebé quatre mil·lennis els savis babilonis –hereus dels sumeris– ja eren capaços d'escriure qualsevol nombre només amb dos símbols, gràcies al principi de posició. Aparegué així el primer sistema numèric posicional, també de base seixanta. Les quantitats es gravaven sempre sobre tauletes de fang, com aquesta taula de multiplicar del vint-i-cinc (amb errada històrica inclosa al dinou).



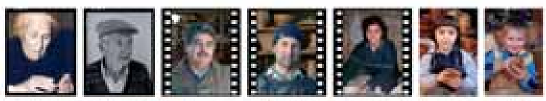
LA RAJOLA DE CARTABÓ Aquesta rajola quadrada, de tradició gòtica, anomenada també de mocadoret, està dividida per la diagonal en dues parts: una en blanc estannífer i l'altra en verd coure o blau cobalt. Tot i tractar-se d'un model de rajola extremadament senzill, només canviant l'orientació de cada peça, les seves combinacions ofereixen moltíssimes possibilitats de sanefes i mosaics diferents.

LA TEULA ÀRAB És una peça d'uns cinquanta centímetres de llargària amb forma de canal aproximadament cònica i que té, per tant, un dels dos extrems més estret que l'altre. Aquest fet permet, a l'hora d'enteular, col·locar les teules en línia, de baix a dalt, encaixant la part estreta dins la més ampla. El resultat és una successió elegant de formes ondulades.

DEL CASSOLÍ A LA QUATRE ANSES *On hi mengen dos n'hi mengen tres*, diu l'adagi popular, però evidentment no és el mateix cuinar per a dos que per a vint. La diversitat d'ocasions, des de petits sopars fins a grans trobades familiars, ha motivat l'adaptació d'algunes peces, com les greixoneres o les olles, a diferents grandàries: borda, perol, deu, mitja mà, setze...

UNA SUCCESSIÓ MODERNA Des de les escudelles talaiòtiques fins a les peces actuals, la ceràmica ha experimentat una constant evolució. Apareixen nous materials, es descobreixen nous usos, s'inventen noves formes, s'imaginen noves decoracions... El respecte per la tradició i la curiositat per innovar conviuen en harmonia a molts de tallers.

UNA SUCCESSIÓ CAÒTICA Una lleugera ullada al nostre voltant adverteix de la tendència natural al desordre. El caràcter artesanal de la ceràmica fa que realment no existeixin dues peces iguals. De vegades la diferència pot ser imperceptible i d'altres, més evident, però en qualsevol cas, quan una peça de ceràmica es trenca, s'ha recorregut un camí sense retorn.



LA SUCCESSIÓ DE L'OFICI Al municipi de Marratxí són moltes les persones que, d'una manera o una altra, treballen el fang i d'això en fan art. És una feina que es transmet de pares a fills i que té el caliu de la tradició i de la familiaritat, de l'amor per un art ben nostre. Només amb la feina ben feta i un just reconeixement es conservarà aquest ofici en un món globalitzat.

SBM Xeix
Societat Balear de Matemàtiques

GOVERN de les ILLES BALEARS

fira del fang

De l'1 al 9 de març de 2008

Ajuntament de Marratxí

www.marratxi.es • www.firadelfang.com

La teja árabe

Se trata de una sucesión periódica y visual por excelencia. Aquí, el acento se pone en la sucesión de líneas cóncavas y convexas que a partir de un canalón aproximadamente cónico, permiten entejar una superficie para protegerla del agua. La fotografía es de una casa tradicional de la aldea de Marratxinet.

Del "cassolí" a la "quatre anses"

Contemplamos aquí la sucesión de tamaños de una pieza tradicional en la cocina mallorquina: la "greixonera". Es interesante comprobar como, con el cambio de tamaño, no se conservan las proporciones, especialmente respecto al fondo del recipiente, más plano en las pequeñas, y con más tendencia al casquete esférico en las grandes. Las piezas son de la olleria de Ca'n Vent de Pòrtol.

Una sucesión moderna

Se propone aquí, casi como un juego, otra sucesión periódica en cuanto al tamaño de las piezas, pero que además juega con la decoración. El color del plato de un elemento, define el color del interior de la taza del siguiente. Las piezas son del Porxet de Pòrtol.

Una sucesión caótica

Casi como un homenaje a Edward Lorenz, padre de la teoría del Caos, decidimos incluir esta clase de sucesión como un toque de atención al hecho que no todo es siempre linealmente ordenable, como el contrapeso de un cartel que pudiera ser excesivamente programático. Aprovechamos también la ocasión para hablar de entropía y valorar el hecho artesanal. Las piezas son del taller de Ca Madò Bet de Sa Cabaneta.

La sucesión de los oficios

Tengan o no existencia en sí mismas, el caso es que en el conocimiento de las matemáticas las personas somos sujeto activo. Interesaba aquí remarcar el mismo hecho en el caso del oficio de los ceramistas, incidiendo en su transmisión tradicional de progenitores a hijos e hijas, y también en la supervivencia que tanto hombres como mujeres han permitido hasta nuestros días.

Los talleres escolares

Durante una semana, de lunes a viernes, la Fira del Fang habilita un espacio interior para acoger los talleres didácticos que, entorno al tema escogido, se ofrecen a los centros escolares de la isla. Son cinco mañanas intensas en las cuales, a través de turnos de media hora, se intenta dar cabida al máximo de peticiones, que siempre superan con creces la disponibilidad horaria y de personal del taller.

Habitualmente el público escolar de estos talleres es alumnado de primaria e infantil, pero debido al tema tratado, se notó un pequeño incremento en la demanda de alumnado de secundaria. Asimismo lo visitaron un centro de educación de adultos y dos centros de educación especial.

La monitorización corrió a cargo de un alfarero, Antoni Vich, de uno de los autores del cartel, Josep Lluís Pol (liberado por gentileza de la Conselleria d'Educació i Cultura del Gobierno de las Islas Baleares), y de otras personas relacionadas con el ayuntamiento. Debido a los treinta minutos de disponibilidad, fue obligado seleccionar sólo algunos de los temas tratados en el cartel. Estos fueron el de las piezas sumerias, el de la baldosa de cartabón, el de las tejas y, para los más pequeños, el de las cifras indoarábicas.

Ochenta y tres: 60 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1

Las piezas sumerias

Disponíamos de piezas sumerias clasificadas según su valor y repartidas en dos mesas de trabajo. Los escolares debían agrupar piezas para conseguir un determinado valor y hacer operaciones de suma y resta. Según el nivel, se manejaban cantidades sencillas, o se llegaban a efectuar restas en las cuales fuera necesario la descomposición de piezas en equivalentes de menor valor. En los niveles más altos (de 6º de E.P. hasta 3º de ESO) se llegó a improvisar la división. Como curiosidades, la de una niña a la que le pedimos que construyera el número once y puso juntas dos piezas de valor uno, en una clara traducción posicional de nuestro sistema actual. También eran frecuentes las respuestas equivocadas a la pregunta de qué forma tenían las piezas que se mostraban. A menudo se hablaba de círculos en lugar de esferas y de triángulos en vez de conos. A menudo y en casi todos los niveles. ¿Será porque siempre empezamos por la geometría plana en vez de por la real de tres dimensiones?

La teja árabe

Ya hemos dicho que la teja denominada árabe es una pieza de cerámica de sección longitudinal aproximadamente cónica que se ha utilizado tradicionalmente para cubrir los tejados de las casas. La forma cónica, permite ensamblar una pieza dentro de otra, cosa que sería imposible con una sección cilíndrica. A partir de ahí, se hablaba de otros objetos que se pueden apilar: como sillas, envases, etc. y cual es la propiedad geométrica que lo permite. Para favorecer la participación y el trabajo en grupo, en los niveles menores, se construía de verdad un tejado en miniatura, a partir de piezas más pequeñas que las habituales encargadas expresamente para facilitar su manipulación.

Antoni Vich colocando tejas con un grupo de 2º y 3º de primaria

La baldosa de cartabón

Es la actividad que dio más juego. Según el nivel del grupo se dirigía más o menos la actividad. Los más pequeños desarrollaban un trabajo más libre que, curiosamente, solía converger en la creación espontánea de sucesiones ordenadas a partir del dibujo que inicialmente (y de manera casual) les había salido, ya fuera lineal (en cenefas) o de dos dimensiones (en mosaicos). A los mayores, se les proponía que construyeran todas las cenefas posibles de dos elementos, cosa que siempre sorprendía por su dificultad con una baldosa de diseño tan simple. Hemos encontrado alguna referencia didáctica en la web pero pensamos que merece un estudio como el de Ramellini (SUMA, 2008). El taller se montó a partir de piezas más pequeñas reproducidas especialmente para la ocasión en el taller de Ca'n Vich de Santa Maria del Camí.

Un grupo de adultos de necesidades educativas especiales con el ajulejo de *mocadoret*

Las cifras indoarábicas

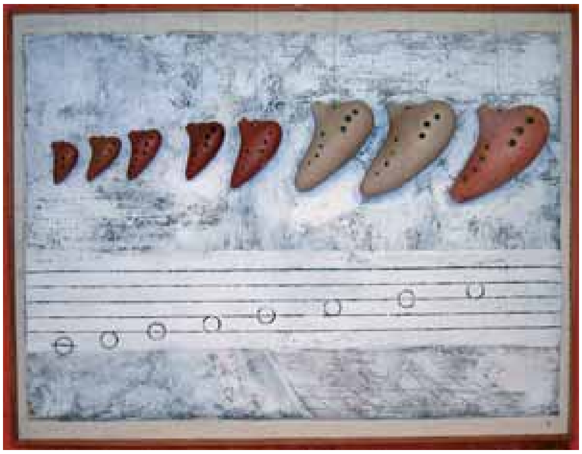
Finalmente se contó con algunos juegos de cifras indoarábicas realizadas en cerámica para los más pequeños. Con ellas, y con la ayuda de sus maestras, se podían ir ordenando las cifras conocidas hasta llegar a representar, en función de sus edades, algunas cantidades de dos cifras.

La colección de cifras indoarábicas para los más pequeños

Los talleres realizados pusieron de manifiesto las magníficas posibilidades de la cerámica para trabajar de manera contextualizada y real temas tan diversos como las bases numéricas, las simetrías, las sucesiones, la geometría, etc. En caso alguno la fragilidad de la materia prima supuso ningún impedimento para su manipulación y la rotura de piezas fue realmente insignificante.

Los premios Benet Mas

El otro aspecto interesante donde el tema matemático apareció de manera plástica fue el del concurso expositivo. Anualmente se conceden los premios Benet Mas a los tres mejores estands de la feria y, en esta ocasión, se valoró la concepción matemática. El primer premio fue para Carme Hermoso y su sucesión musical y ábaco de ocarinas. (Sólo después nos dimos cuenta por la indicación de una compañera que la sucesión de ocarinas debería haber sido invertida para que realmente tuviera una relación directa con el tono de la nota correspondiente. Como en todos los instrumentos musicales, mayor tamaño implica un sonido más grave y no más agudo).



Un elemento del estand ganador de Carme Hermoso

Recreación de un ábaco japonés a partir de ocarinas

El segundo premio fue para Núria Soley, quien rendía homenaje a Gabriel Pinto y José Ignacio Zubizarreta, dos profesores de la Universidad Politécnica de Madrid que consiguieron modelizar matemáticamente el proceso físico de evaporación del agua de un cántaro que refresca el agua de su interior.

Estand de Núria Soley con la modelización matemática del funcionamiento de un botijo

El tercer premio fue para Ramon Canyelles, quien presentó las fórmulas estequiométricas de los esmaltes rojo y sangre de buey de sus piezas.

Finalmente queremos mencionar la mesa redonda y coloquio que, sobre cerámica y matemáticas, tuvo lugar el día de la inauguración de la feria y que contó con la asistencia de un público curioso y numeroso.

NOTAS

1 El diseño gráfico corrió a cargo de Miquel Trias y las fotografías son también de Miquel Trias y de Josep Lluís Pol. La idea, la concepción y la redacción de los textos son de los autores de este artículo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

IFRAH, G. (1997): *Historia universal de las cifras*, Espasa (colección Ensayo y Pensamiento), Madrid.

NEUGEBAUER, O. (1969): *The exact sciences in antiquity*, Dover Publications INC. New York.

RAMELLINI, G. (2008): De SUMA a clase y de vuelta a SUMA. Itinerario de un material didáctico. *Suma*. Febrero, 2008, pp. 65-72.

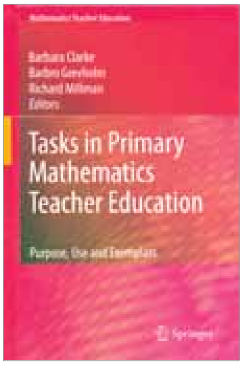
Internet

http://www.xtec.es/centres/b7004955/ciencia/fitxers/mosai3.htm

Web realizada por la comisión de informática del CEIP Pompeu Fabra de Lloret de Mar.

(Consultada por última vez el 8 de abril de 2009)

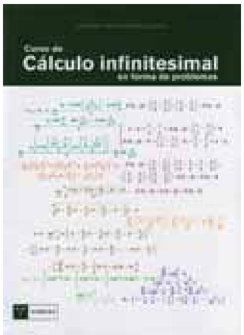
Libros recibidos



Tasks in Primary Mathematics Teacher Education: Purpose, Use and Exemplars

B. Clarke, B. Grevholm & R. Millman (Editors)

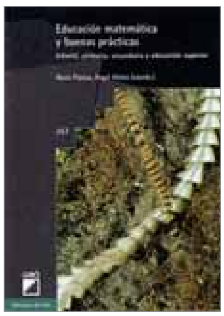
Springer Science+Business Media
New York, 2009
ISBN: 978-0-387-09668-1



Curso de Cálculo infinitesimal en forma de problemas

Alfredo Fernández Alonso

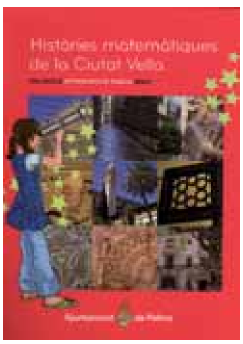
Ediciones Trea, S.L.
Gijón, 2009
ISBN: 978-84-9704-421-9
675 páginas



Educación matemática y buenas prácticas

N. Planas y A. Alsina (coords.)

Editorial GRAÓ
Barcelona, 2009
ISBN: 978-84-7827-605-0
272 páginas



Històries matemàtiques de la Ciutat Vella

R. Bilbao, M. Magraner, P. Oliva, A. B. Petro i J. Ll. Pol

Ajuntament de Palma
Palma, 2008
ISBN: 178-84-89034-28-0
66 páginas

Competencia matemática. La resolución de problemas en el primer ciclo de primaria

A. Moncho, L. M. Martínez, T. Queralt y B. Villar

Generalitat Valenciana. Conselleria d'Educació
Valencia, 2009
ISBN: 978-84-482-5202-1
Orientaciones: 50 páginas
Propuestas: 92 páginas

suma+ 61
Junio 2009, pp. 35-44

Identificación de los errores en los contrastes de hipótesis de los alumnos de Bachillerato

En este trabajo se recoge un estudio de los errores que cometen los alumnos de bachillerato al resolver problemas de Contrastes de Hipótesis en los exámenes de la PAU (Prueba de Acceso a la Universidad). A raíz de éstos, se señalan aquellas dificultades y confusiones más frecuentes con las que tropieza el alumno, y se sugieren algunas alternativas para ayudar a superarlas, tratando de contribuir en el proceso de enseñanza-aprendizaje de esta materia.

In this work we present a study of the mistake that high school students make when solving Contrasts of Hypothesis problems in access to university test (PAU exam). As a result of these, those more frequent difficulties and confusions, where students find a hurdle are pointed out, and some alternatives are suggested to help to overcome them. Thus we try to contribute in the process of teaching-learning of this matter.

Introducción

El reconocimiento de la utilidad de la Estadística en distintas disciplinas científicas, ha llevado a incrementar los contenidos de Inferencia en la enseñanza no universitaria, tal vez sin un estudio didáctico previo de la complejidad de los conceptos implicados. Así, en España, los dos años de bachillerato de la especialidad de Ciencias Sociales, contemplan la asignatura: "Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales" donde figura entre los contenidos de Inferencia Estadística, conceptos como la estimación de la media, la estimación de la proporción, y los contrastes de hipótesis para la media y para la proporción.

Los Contrates de Hipótesis son uno de los procedimientos de Inferencia Estadística, utilizados para valorar la evidencia proporcionada por los datos de una muestra a favor o en contra de una hipótesis sobre la población. Esto conlleva el conocimiento por parte del alumnado, de la lógica global del desarrollo del proceso de decisión, así como la comprensión de una serie de conceptos como son hipótesis nula y alternativa, población y muestra, parámetro y estadístico, nivel de significación, región de aceptación y de rechazo. Algunos de estos conceptos tienen cierta complejidad para los estudiantes de bachillerato, sobre todo aquellos relacionados con el concepto de probabilidad, como es el caso del nivel de significación. Esto unido al hecho de que los alumnos estudian muchas veces la materia de manera aislada, sin establecer ninguna relación con las aplicaciones originales donde surge el problema, hace más difícil el aprendizaje de los contrastes.

El interés por analizar las concepciones erróneas de los estudiantes sobre los Contrastes de Hipótesis, a nivel universitario, se puede apreciar en trabajos como Batanero (2000); Vallecillos y Batanero (1997); Moreno y Vallecillos (2005). No obstante, el origen de estos errores es anterior a la universidad, surgiendo a nivel de bachillerato. De hecho se ha constatado en trabajos como Ramos y Espinel (2003) y Espinel, Ramos y Ramos (2007), que algunos de los errores cometidos por los alumnos de bachiller no se corrigen y se mantienen a nivel universitario. Así se pueden citar algunos errores detectados frecuentemente, como es confundir el nivel de significación a con el punto critico z_a, o también, confundir el valor

Carmen Elvira Ramos Domínguez
Departamento de Estadística, Investigación Operativa y Computación. Universidad de La Laguna
María Candelaria Espinel Febles
Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna
Rosa María Ramos Domínguez
Departamento de Estadística e Investigación Operativa I. Universidad Complutense de Madrid.

que toma el estimador con el valor hipotético del contraste. El estudio de los errores es una línea de trabajo muy eficaz en Didáctica de la Matemática, que está motivada por la inquietud en la forma de enseñanza aprendizaje más adecuada (Socas, 1997).

Las Pruebas de Acceso a la Universidad (PAU) tienen como objetivo valorar la madurez académica, los conocimientos y las competencias adquiridas en el bachillerato. Dicha prueba esta regulada por Real Decreto y se celebra durante 3 días, mañana y tarde, sobre seis materias del segundo curso de bachillerato. La calificación global de la prueba se obtiene mediante la media ponderada de los exámenes de las asignaturas obligatorias (40% de Matemáticas + 40% de Física + 20% de Dibujo). La calificación definitiva para el acceso a la universidad es una media ponderada de la nota media del expediente académico en el bachillerato (60%) y la calificación en la PAU (40%).

Este trabajo se centra en una muestra de exámenes de la PAU del Distrito de Canarias, en la especialidad de Matemáticas de Ciencias Sociales de la convocatoria de Junio de 2007. En base a una revisión de estos exámenes, hemos realizado un estudio sobre las dificultades de concepción e interpretación que tienen los bachilleres con la Inferencia Estadística y en particular con las pruebas de significación. En primer lugar se recoge la estructura de la prueba y las preferencias del alumnado ante los ejercicios planteados. De este análisis y de otros estudios previos (Ramos y Espinel, 2003; Espinel, Ramos y Ramos, 2007) se ha observado que los alumnos optan mayoritariamente por las preguntas de Inferencia Estadística, y más concretamente, por las de Contrastes de Hipótesis. En el siguiente apartado se analizan dos preguntas, referidas a los Contrastes de Hipótesis. En ambos casos se ha llevado a cabo un conteo sistemático de los errores cometidos por los alumnos, y se especifican las estrategias utilizadas por los mismos, que generalmente coinciden con las recogidas en los libros de textos. Finalizamos aportando diversas sugerencias para subsanar las dificultades que, de forma más persistente, presentan los alumnos en los problemas de Contrastes de Hipótesis, y proponiendo algunas alternativas de mejora de su enseñanza - aprendizaje.

Datos generales del estudio

En este apartado se presenta una descripción de las preguntas del examen de la PAU además de los porcentajes de preferencias y superación de las preguntas.

La estructura del examen para la asignatura de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales se plantea con dos opciones excluyentes: Prueba A y Prueba B.

www.gobiernodecanarias.org/educacion/general/pwv/scripts/materias.asp

En la anterior dirección de Internet se pueden encontrar los enunciados de las preguntas que componen ambas pruebas. Cada una de estas opciones consta de cinco preguntas. El alumno debe elegir una de las pruebas (A ó B) y dentro de ella, sólo debe responder como máximo a cuatro de las cinco preguntas. La prueba A se compone de dos preguntas de Estadística (Contraste e Intervalos, y Tamaño muestral e Intervalos), dos de Análisis (Funciones y Máximos) y una de Ecuaciones. La prueba B tiene tres preguntas de Estadística (Estimación puntual e Intervalos, Tamaño muestral y Probabilidades, y Contrastes), una de Análisis (Funciones) y una de Programación Lineal.

La muestra obtenida para el estudio consta de 399 exámenes (204 de la prueba A y 195 de la B) de la asignatura “Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales” de la convocatoria de Junio de 2007 procedente de alumnos presentados en la Universidad de La Laguna.

Las siguientes Tablas 1 y 2 muestran los resultados obtenidos tanto en lo referente a las preguntas elegidas, como al porcentaje de alumnos con la pregunta aprobada. Entendiendo por aprobada que hayan obtenido una puntuación superior a la mitad (1,25) de la puntuación máxima asignada a cada pregunta (2,5). El porcentaje de Elección de la pregunta se realiza teniendo en cuenta el número de alumnos que han elegido la correspondiente opción. Y el porcentaje de Aprobados de cada pregunta se ha calculado en relación al número de alumnos que han elegido dicha pregunta, no simplemente la prueba, ya que no tienen que contestar todas las preguntas de la prueba elegida.

Preguntas de la prueba A:	Elección	Aprobados (≥1,25)
1.- Contraste de Hipótesis e Intervalo de Confianza	87,19%	67,80%
2.- Intervalos de Confianza y Tamaño muestral	92,61%	84,04%
3.- Funciones	83,74%	27,65%
4.- Máximos y mínimos	13,79%	53,57%
5.- Resolución de Ecuaciones	92,61%	75,00%

Tabla 1: Preferencias y resultados de la prueba A

Preguntas de la prueba B:	Elección	Aprobados (≥1,25)
1.- Estimación puntual e Intervalo de Confianza	67,35%	32,57%
2.- Tamaño muestral y Probabilidades	96,43%	78,83%
3.- Contrastes de Hipótesis	96,43%	61,90%
4.- Funciones	39,28%	54,54%
5.- Programación Lineal	78,57%	42,21%

Tabla 2: Preferencias y resultados de la prueba B

Como se puede apreciar en las Tablas 1 y 2 se refleja una cierta tendencia por parte del alumnado a elegir las preguntas con contenidos estadísticos. Mientras que las preguntas menos elegidas son las relacionadas con el Análisis Matemático. Señalar también que las preguntas de Estadística son las que más alumnos las superan, a excepción de la pregunta 1 de la opción B, con un 32,57% de aprobados. Esta pregunta presenta tres apartados, dos de estimación puntual, y un tercero de estimación por intervalos. El motivo de que pocos alumnos hayan superado la puntuación de 1,25 en la misma, creemos que se debe, a la dificultad que surge en el razonamiento que debe hacer el alumno, ante la obtención de los datos necesarios para contestar los apartados, a partir del enunciado. De forma general, los alumnos aplican las técnicas aprendidas para resolver los problemas, aunque no las lleguen a entender completamente. Parece que no son capaces de razonar y buscar la forma de conseguir determinados resultados a partir de la información disponible. Posiblemente la enseñanza en bachillerato incide más directamente en la estimación por intervalos, y no hace tanto hincapié en el significado de tal intervalo. De hecho como se observa en la Tabla 1, la pregunta 2 de estimación por intervalos muestra bastante éxito, un 84,04% de aprobados, frente al 32,57% sobre estimación puntual e intervalo de confianza de la pregunta 1 en la Tabla 2.

Asimismo se puede observar que dentro de las preguntas de Estadística, las preguntas relacionadas con Contrastes de Hipótesis, pregunta 1 prueba A y pregunta 3 prueba B, son de las más elegidas por el alumnado, siendo los porcentajes de elección superiores al 85%. Además, el porcentaje de aprobados en estas preguntas es bastante alto, entre el 60% y 70%.

Por otra parte, a pesar de que las preguntas de Inferencia Estadística son de las más elegidas, los alumnos no consiguen completar estas preguntas con éxito. De hecho el porcentaje de alumnos que se quedan por debajo del 1,25 es considerable, siendo en las dos preguntas de contrastes, un 32% y 38%, en las opciones A y B, respectivamente. Además aunque el porcentaje de aprobados es alto, sin embargo sólo un porcentaje reducido llegan a alcanzar la máxima nota de 2,5, lo que conduce a que las calificaciones en la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales sean bajas. Como se refleja en la siguiente Figura 1, las calificaciones medias en los últimos años oscilan entre 4,42 y 5,47, siendo la nota media de éstas 5,03.

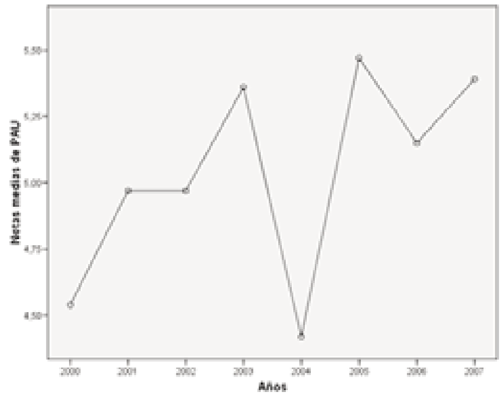


Figura 1: Evolución de las Notas de las Matemáticas Aplicadas a las CC.SS. II en la PAU

Análisis de los problemas de contraste de hipótesis

En este apartado se presentan las dos preguntas sobre contrastes que aparecen en el examen tanto en la prueba A como en la B, con sus respectivas soluciones y un listado de los errores encontrados en la corrección del examen. Para este estudio nos hemos centrado en los exámenes de dos correctores de la prueba, que corresponden a una submuestra de 132 exámenes de la opción A y 97 de la opción B.

Prueba A. Problema 1

Enunciado: En el año 1990 el 25% de los partos fueron de madres de más de 30 años. Este año se ha tomado una muestra de 120 partos de los cuales 34 fueron de madres de más de 30 años.

a).- Con una significación del 10%, ¿se puede aceptar que la proporción de partos de madres de más de 30 años sigue siendo como mucho del 25%, frente a que ha aumentado?

b).- Obtener un intervalo de confianza de la proporción de partos de madres de más de 30 años al 90% de confianza.

Solución del problema propuesta por los coordinadores de la prueba:

Apartado a).-

Formulación del contraste:

$$\left.\begin{array}{l} H_0: \ p \leq 0{,}25 \\ H_1: \ p > 0{,}25 \end{array}\right\}$$

Datos recogidos del problema:

$$n = 120; \quad \hat{p} = \frac{34}{120} = 0{,}283; \quad \alpha = 0{,}1; \quad z_{0.1} = 1{,}28$$

Región de rechazo:

$$\left\{\hat{p} > p_0 + z_\alpha \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right\} =$$

$$= \left\{\hat{p} > 0{,}25 + 1{,}28 \sqrt{\frac{0{,}25 \times 0{,}75}{120}}\right\} = \left\{\hat{p} > 0{,}3\right\}$$

Como $\hat{p} = 0{,}283 < 0{,}3$ se acepta H_0.

Apartado b).-

Datos:

$$n = 120; \quad \hat{p} = \frac{34}{120} = 0{,}283; \quad \alpha = 0.1; \quad \frac{\alpha}{2} = 0{,}05; \quad z_{0{,}05} = 1{,}64$$

Intervalo de confianza:

$$\left[\hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \ \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right] =$$

$$= \left[0{,}283 - 1{,}64 \sqrt{\frac{0{,}283(1-0{,}283)}{120}}, \ 0{,}283 + 1{,}64 \sqrt{\frac{0{,}283(1-0{,}283)}{120}}\right] =$$

$$= \left[0{,}283 \pm 0{,}067\right] = \left[0{,}216, \ 0{,}35\right]$$

A continuación se presenta la Tabla 3 que recoge la distribución del número de alumnos que han elegido la prueba A, según responden o no a la pregunta 1. Hay 26 alumnos que eligiendo la opción A no realizan la pregunta 1, y 106 que si la contestan. De estos últimos, sólo 50 la realizan de forma correcta, el resto, 56, cometen algún tipo de error.

Resultados:	**Total**
Bien	50
No la eligen	26
Incorrectas	56
Totales	132

Tabla 3: Resultados de la Pregunta 1 de la prueba A

Errores que cometen los alumnos en el apartado a) de la pregunta 1			Total
Formulación Equivocada del Contraste	Colocación errónea del signo igual	9	23
	Permuta de las Hipótesis	8	
	Confusión entre el estimador de p y el valor hipotético p_0	4	
	Causa indeterminada	2	
No formula el contraste		8	8
Estadístico erróneo		2	2
Confusión entre el α y el punto crítico		2	2
Elección incorrecta del α		4	4
Búsqueda errónea en las tablas		13	13
Región Crítica y de Aceptación mal construidas	Consecuencia del error de formulación	4	34
	Confusión entre el estimador de p y el valor hipotético p_0	14	
	Región de aceptación construida con un menos	9	
	Error de cálculo	5	
	Consecuencia de un punto crítico erróneo	1	
	Cambio de la región de aceptación por la de rechazo	1	
Errores de números reales		2	2
Total de errores encontrados:			88

Tabla 4: Descriptiva de los errores del apartado a) de la pregunta 1

En la Tabla 4 se muestra una descripción de los errores cometidos en el apartado a) de la pregunta 1, junto al número de alumnos que presentan tal error en su examen. En un total de

56 exámenes se observan 88 errores, ya que un mismo alumno puede presentar varios errores en la pregunta. Como se aprecia en dicha Tabla 4, el error más frecuente (34 veces) está relacionado con la construcción de las regiones crítica y de aceptación, principalmente debido a la confusión entre el estimador $\hat{p}$ y el valor hipotético p_0. Otro error a destacar en la respuesta de los estudiantes, que repiten con frecuencia (23 veces), es la equivocación en la formulación del contraste, a veces por causa de una confusión de la colocación del signo igual, o por el intercambio de la hipótesis nula y alternativa, o incluso, por confundir el valor que toma el estimador $\hat{p}$ con el valor hipotético p_0. Este tipo de error es muy importante, porque condiciona los resultados del resto del proceso de decisión. También merece especial atención, por el número de veces que aparece (13 veces), los errores debidos a la búsqueda del punto critico z_a en la tablas.

El apartado b) de este problema 1, pide construir un intervalo de confianza. Aunque aquí no se muestra una descripción de los errores cometidos por los alumnos, hay que resaltar el error de sustituir $\hat{p}$ (0,283) por el valor hipotético p_0 (0,25) en la desviación típica del estimador. Este tipo de error es en cierta medida justificable, ya que los alumnos, en el apartado a) destinado al contraste de la proporción consideran el estadístico:

$$\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

que se distribuye, supuesta cierta la hipótesis nula, como una normal estándar. Dicho estadístico $\hat{p}$ contiene p_0 en la media y en la desviación típica. Sin embargo, en el intervalo de confianza que no se dispone de información, se debe considerar el estimador

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}}}$$

que usa $\hat{p}$ en la desviación típica del estimador y también se aproxima a la distribución normal estándar.

Prueba B. Problema 3

Enunciado: Dos estudiantes quieren contrastar si el consumo medio en teléfono móvil entre los estudiantes es como máximo de 10 euros frente a si es mayor. El primero, en una muestra de 36 estudiantes, obtuvo una media de 10,4 euros con una desviación típica de 2 euros. El segundo obtuvo, en una muestra de 49 estudiantes, una media de 10,39 con una desviación típica de 2 euros.

a).- ¿Qué decisión toma el primero con un nivel de significación del 10%?

b).- ¿Qué decisión toma el segundo con un nivel de significación del 10%?

Solución del problema propuesta por los coordinadores de la prueba:

Apartado a).- Formulación del contraste:

$$\left.\begin{matrix} H_0: \mu \le 10 \\ H_1: \mu > 10 \end{matrix}\right\}$$

Datos recogidos del problema:

$$n = 36; \quad \bar{x} = 10,4; \quad \sigma = 2; \quad \alpha = 0,1; \quad z_{0.1} = 1,28$$

Región de rechazo:

$$\left\{\bar{x} > \mu_0 + z_a \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = \left\{\bar{x} > 10 + 1,28 \frac{2}{\sqrt{36}}\right\} = \left\{\bar{x} > 10,42\right\}$$

Como $\bar{x} = 10,4 < 10,42$ se acepta H_0.

Apartado b).- Formulación del contraste:

$$\left.\begin{matrix} H_0: \mu \le 10 \\ H_1: \mu > 10 \end{matrix}\right\}$$

Datos recogidos del problema:

$$n = 36; \quad \bar{x} = 10,4; \quad \sigma = 2; \quad \alpha = 0.1; \quad z_{0.1} = 1,28$$

Región del rechazo:

$$\left\{\bar{x} > \mu_0 + z_a \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = \left\{\bar{x} > 10 + 1,28 \frac{2}{\sqrt{49}}\right\} = \left\{\bar{x} > 10,36\right\}$$

Como $\bar{x} = 10,39 > 10,36$ se rechaza H_0.

En la Tabla 5 se presenta el total de alumnos de la muestra que eligen la prueba B, 97 alumnos, y su reparto según responden o no a la pregunta considerada. Del total de alumnos, 10 optan por no elegir dicha pregunta mientras que 87 si la contestan. Señalar además, que 42 alumnos contestan correctamente la pregunta 3, y 45 cometen algún tipo de error.

Resultados:	**Total**
Bien	42
No la eligen	10
Incorrectas	45
Totales	97

Tabla 5: Resultados de la Pregunta 3 de la prueba B

En la Tabla 6 se muestran los errores detectados en esta pregunta 3 y se indica el número de alumnos que presentan tal error. En un total de 45 exámenes se observan 63 errores. Aunque pueda parecer que son menos los errores cometidos, se ha de tener en cuenta que esta opción la eligen menos alumnos.

Errores que cometen los alumnos en la pregunta 3			Total
Formulación equivocada del contraste	Colocación errónea del signo igual	2	13
	Permuta de las hipótesis	8	
	Falta el parámetro en el contraste	3	
Búsqueda errónea en las tablas		20	20
Región crítica y de aceptación mal construidas	Confusión entre el estimador de μ y el valor hipotético μ_0	11	24
	Región de aceptación cambiada de signo	4	
	Error de cálculo	2	
	Región de aceptación incorrecta	1	
	Cambio de la región de aceptación por la de rechazo	6	
Errores de números reales		6	6
Total de errores encontrados:			63

Tabla 6: Descriptiva de los errores de la pregunta 3

En este problema 3, al igual que en el problema de la opción A, el error más frecuente (24 veces) está relacionado con la construcción de las regiones crítica y de aceptación. Y es también motivado por no distinguir el valor que toma el estimador $\bar{x}$ y el valor hipotético μ_0. El siguiente error por orden de frecuencia (20 veces), es en este caso, la búsqueda incorrecta en las tablas, debido a equivocaciones o a concepciones erróneas de la probabilidad. En cuanto al error sobre el enunciado equivocado de las hipótesis, cometido en 13 ocasiones, hemos de manifestar que en este caso, se debe sobre todo al intercambio de la hipótesis nula por la alternativa. Aunque a nivel teórico los alumnos saben que la hipótesis nula se enuncia con el propósito de ser rechazada, no son consecuentes a la hora de extraer tal hipótesis del enunciado del problema.

Estrategias usadas por el alumnado

Las estrategias metodológicas que siguen los libros de texto para introducir los contrastes de hipótesis se basan en la estrecha relación que hay entre los intervalos de confianza y los contrastes. Esto es, la hipótesis que se contrasta se puede rechazar si el valor muestral del estimador no pertenece al intervalo de confianza. Al consultar las tres editoriales más utilizadas en los centros de bachillerato de Canarias: Anaya (Colera y otros, 2003), Santillana (Nortes y otros, 2003) y SM (Vizmanos y otros, 2004), se observa que todas sugieren una serie de pasos a seguir. Tanto Anaya como Santillana explican de forma teórica y sobre el contraste bilateral, el cálculo de la región de aceptación de forma similar a la construcción del intervalo, partiendo de la ley de probabilidad del estimador del parámetro. Mientras en los contrastes unilaterales presentan las regiones de aceptación sin un desarrollo previo de las mismas, sino como una deducción del caso bilateral. Si bien, la editorial Santillana para el caso del contraste de la proporción utiliza indistintamente el intervalo de confianza y el estadístico del contraste. Por otro lado, la editorial SM centra su proceso metodológico en el cálculo del estadístico del contraste e indica la distribución que éste sigue cuando la hipótesis nula es cierta. Entonces de forma intuitiva y apoyándose en gráficos muestra al alumno que cuando el valor muestral no está próximo al valor hipotético se rechaza la hipótesis nula. A modo de resumen, el siguiente esquema de la Figura 2 muestra las estrategias de los libros de texto.

Figura 2: Estrategias de los Libros de Texto

En los exámenes de la muestra analizada se observa que los alumnos utilizan sobre todo los intervalos de confianza para construir la región de aceptación. No obstante, algunos alumnos calculan el estadístico del contraste y construyen las regiones de aceptación y rechazo, representándolas mediante un gráfico. Se ha apreciado también que el uso de los gráficos de la distribución del estimador del parámetro, parece facilitar la comprensión de los conceptos usados, y permite al alumno reflexionar de forma natural, lo que le conduce a conclusiones adecuadas del problema.

Reflexiones y alternativas para la mejora del aprendizaje de los contrastes

Como hemos podido observar en los errores mostrados en las Tablas 4 y 6, muchos de los alumnos presentan dificultades de comprensión del proceso de decisión e interpretan de forma incorrecta los resultados. Algunas de las causas de estos errores se deben a dificultades lingüísticas, a la falta de herramientas lógicas, a dificultades de extraer la estructura del proceso de decisión de las experiencias, y a la dificultad de comprender el concepto de aleatoriedad. A continuación se listan y analizan los distintos errores encontrados en la revisión de los exámenes, y se proponen algunas sugerencias para tratar de subsanarlos y allanar los obstáculos del aprendizaje de esta materia.

Formulación equivocada del contraste

Se observa en los alumnos una dificultad a la hora de elegir las hipótesis adecuadas, a partir del enunciado de los problemas. Así se pueden apuntar principalmente, tres tipos de errores relacionados con el planteamiento del contraste: Colocación errónea del signo igual al plantear el contraste; Permuta de las hipótesis y Confusión entre el estimador y el valor hipotético.

En lo que refiere a la *colocación errónea del signo igual al plantear el contraste*, tanto el hecho de repetirlo en ambas hipótesis, como sólo ponerlo en la hipótesis alternativa, proponemos insistir a los alumnos que el signo igual ha de colocarse siempre en la hipótesis nula, independientemente del contraste unilateral o bilateral que se plantee; ya que en otro caso, no se sabría que distribución sigue el estimador del parámetro cuando la hipótesis nula es cierta.

Otro tipo de fallo muy común en la formulación de los contrastes unilaterales es la *permuta de las hipótesis*. Esto es, los alumnos tienden a confundir los papeles de las hipótesis nula y alternativa, en ocasiones como consecuencia de no prestar mucha atención a la forma en que se presentan las cuestiones. Es conveniente evitar las ambigüedades del enunciado que pueden confundir al alumno. Hay que dejar claro en el enunciado a donde se quiere llegar con la investigación, lo que iría en la hipótesis alternativa. O por el contrario, la afirmación que se "duda" y que se pretende comprobar, que iría en la hipótesis nula. Frases tales como: "existen evidencias estadísticas de que los datos indiquen cierta afirmación" o "de los datos se deduce esta afirmación", o bien "se puede concluir de estos datos la afirmación" pueden ayudar a enseñar al alumno que dicha afirmación es lo que va en la hipótesis alternativa. Mientras que expresiones como "comprobar o contrastar tal afirmación" llevan a colocarla en la hipótesis nula.

De igual forma, es conveniente que el profesorado en sus explicaciones sobre contrastes hagan hincapié en la interpretación correcta de expresiones del lenguaje como: a lo sumo, como mucho, no sobrepasa, al menos, se mantiene, como máximo, como mínimo. Tales expresiones, en ocasiones, generan dudas de interpretación del enunciado en los alumnos.

El uso de analogías o metáforas a la hora del planteamiento del contraste también pueden ayudar al alumno a comprender cómo se debe de formular, y a relacionar la situación estudiada con una situación familiar para el mismo (Martín, 2003). Ver en Feinberg (1971), el ejemplo del juicio de un presunto culpable de asesinato.

Por último, la *confusión entre el estimador y el valor hipotético* proviene de no discernir entre los parámetros muestrales, parámetros poblacionales y datos a comprobar. Tal vez sería aconsejable antes de comenzar con la estimación y contrastes de hipótesis, enseñar al alumno con diversos problemas y ejemplos en los que identificarán cual es la característica en estudio, cómo se distribuye, parámetros poblacionales de qué depende, estimador del parámetro, valores que toman dichos estimadores en la muestra y valores de los parámetros poblaciones que se pretende comprobar, esto es, valores hipotéticos.

En resumen, cabe admitir el hecho de que la ambigüedad verbal y la insuficiente comprensión del enunciado del problema, sean las causas potenciales de los errores acerca del planteamiento apropiado de las hipótesis nula y alternativa.

Ausencia de la formulación del contraste

En muchos exámenes se observa como el alumno pasa directamente al cálculo del estadístico sin formular el contraste. En este sentido, sería beneficioso orientar al alumno a seguir los siguientes pasos en la resolución del problema (Vizmanos y otros, 2004):

- Paso 1. Formulación de hipótesis: nula y alternativa
- Paso 2. Fijar el nivel de significación
- Paso 3. Elegir el estadístico del contraste y determinar su distribución.
- Paso 4. Construcción de la región de aceptación.
- Paso 5. Calcular el valor que toma el estadístico del contraste para la muestra.
- Paso 6. Aceptación o rechazo de la hipótesis nula, e interpretación de la decisión en el contexto del enunciado del problema.

Estos pasos o similares, se recogen en los textos de las editoriales más utilizadas, y muchos alumnos parecen seguirlos. No obstante, algunos siguen el proceso de decisión pero omiten algunos pasos que parecen considerar irrelevantes, cuando no es cierto. Este es el caso de los que se saltan la formulación del contraste, y al llegar al final no tienen claro lo que se acepta o se rechaza. Como dice Moore (1998), "los datos son números con un contexto". Por tanto sería conveniente, en el paso 6, acostumbrar al alumnado a interpretar los resultados en el contexto del enunciado y no a quedarse simplemente en la conclusión estadística de aceptar o rechazar la hipótesis nula.

Construcción errónea del estadístico

Otro error detectado en los exámenes es que equivocan la expresión del estadístico. Creemos que esto es debido a que se han aprendido de memoria su formula sin asimilar su significado. Posiblemente los alumnos no se percatan que el estadístico proporciona el grado de proximidad o separación entre el valor muestral ($\hat{p}$ o $\bar{x}$) y el valor hipotético con el que se quiere comparar (μ_0 o p_0), teniendo en cuenta la variabilidad de los datos:

$$\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ o } \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right)$$

Para evitar este error, sugerimos explicar al alumno de forma intuitiva y lógica, que el estadístico surge de manera natural como una medida de esa separación, para tratar de decidir sobre la población a partir de los datos observados en la muestra. Por tanto, los valores pequeños del mismo conducen a aceptar la hipótesis nula, y por el contrario, valores grandes a rechazarla. De esta forma, creemos que es más fácil que deduzcan su expresión y no la aprendan de memoria.

Confusión entre el nivel de significación α y el punto crítico z_α

Según hemos observado en los exámenes, los alumnos confunden con frecuencia el nivel de significación α con el punto crítico z_α, esto es, no distinguen que uno es una probabilidad, mientras que el otro es un valor de la recta real. Este error también aparece con frecuencia en los problemas de cálculo de probabilidades. Sin embargo, aquellos alumnos que utilizan estrategias gráficas, diferencian con más facilidad ambos conceptos y cometen menos errores. Como consecuencia de esto, sería aconsejable incentivar al alumnado para que utilice las representaciones gráficas de la distribución muestral, donde se representen los puntos críticos sobre la recta real, y las probabilidades, como el área que deja dicha distribución debajo de ella y a la derecha del punto critico. En este sentido el uso de algunos "applets" puede ayudar al alumno a reforzar los conceptos requeridos, mediante imágenes de los mismos.

Elección incorrecta del α

Existen algunos valores del nivel de significación usados de forma general por los libros de textos. El alumno por costumbre tiende a utilizar éstos, sin comprobar el que se cita en el enunciado. Para evitar este tipo de error es aconsejable trabajar con distintos valores de α. De hecho, a veces al realizar un cambio del nivel de significación, valores no demasiado significativos del estadístico, esto es, que están en el límite, hacen que la decisión elegida cambie. Esto contribuye de forma favorable al hecho, de que los alumnos puedan apreciar mejor que el aceptar la hipótesis nula no supone que sea cierta, o al contrario, rechazarla no supone que sea falsa, sino que existe cierta posibilidad de cometer un error.

Otro tipo de confusión que se observa en los exámenes es entre z_α y $z_{\alpha/2}$. Este intercambio de los puntos críticos obedece a dos posibles causas. Por un lado, debido a que tienden a elegir $z_{\alpha/2}$ con independencia de que el contraste sea unilateral o bilateral. O bien, por la búsqueda en las tablas, donde se usa la misma notación para la probabilidad α, que deja bajo la curva y a la derecha de un punto arbitrario, y el nivel de significación. Habría que insistir en el manejo de las tablas, calculando para distintos valores de α, los valores críticos z_α y $z_{\alpha/2}$.

Búsqueda errónea en las tablas

Una equivocación muy común es la confusión en las tablas de las probabilidades por los puntos de la recta real. El apoyo en los gráficos supone una ayuda para tratar de identificar y diferenciar ambos valores. De esta forma el alumno puede verificar si el valor encontrado se encuentra en el rango del estimador, y no es una probabilidad entre 0 y 1. Aunque a veces éste intervalo [0,1] coincida con el rango del estimador.

Región Crítica y Región de Aceptación mal construidas

De los errores encontrados en relación con las regiones de aceptación y rechazo destacamos cuatro: Confusión entre $\hat{p}$ y p_0; Región de aceptación construida con un signo menos; Error de Cálculo y Cambio de la región de aceptación por la de rechazo.

En lo que se refiere a la *confusión entre* $\hat{p}$ *y* p_0, un aspecto a tener en cuenta de los contrastes sobre la proporción, y que puede conducir a este tipo de error, es el hecho de que en el intervalo de confianza el estimador del parámetro $\hat{p}$, se distribuye como una

$$N\left(p, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right)$$

mientras que en el contraste, el estadístico $\hat{p}$ se distribuye supuesta cierta la hipótesis nula, como una

$$N\left(p_0, \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right)$$

Por otra parte, en los dos problemas de contrastes analizados, se presenta un contraste unilateral con cola a la derecha, esto es, de la forma menor o igual frente a mayor. Esto induce al error de construir una r*egión de aceptación con un signo menos.* La mayoría de los alumnos utilizan la región de aceptación en lugar de la de rechazo para resolverlo. Por este motivo, al fijarse en la hipótesis nula tratando de recordar la expresión de la región de aceptación, pueden llegar a confundir el menor o igual con un signo menos en la expresión. Una solución a esta dificultad podría consistir en incentivar que el alumno siempre represente gráficamente en la distribución del estimador la estimación obtenida y el valor hipotético, y aplique la lógica de la proximidad de ambos valores para obtener las conclusiones.

Los exámenes reflejan que los *errores de cálculo* cometidos en el proceso, se deben sobre todo a las prisas a la hora de despejar. Así operaciones como elevar al cuadrado, las convierten en raíces cuadradas, o en lugar de multiplicar, dividen, etc. Una forma para evitar esto, es la práctica de ejercicios de resolución de ecuaciones.

Por último, suelen realizar un *cambio de la región de aceptación por la de rechazo.* Muchos de ellos confunden el propósito de ambas regiones. No llegan a captar que las regiones se construyen a partir de la idea de que determinados valores del estadístico (condicionados por la separación entre el valor muestral y el hipotético) conducen a aceptar la hipótesis nula y otros valores a rechazarla. Se propone entonces incidir en el concepto de estadístico y los valores que pueda tomar.

Errores de Números Reales

El manejo de los números reales no es una cuestión intrínseca de la Estadística, pero el no dominarlos lleva a errores en los resultados. Un tipo de error, que frecuentemente se ha visto en los exámenes, es el de posicionar de forma errónea un valor negativo o decimal en la recta real. Esto supone regiones de aceptación mal construidas, e interpretación inadecuada de los resultados.

Téngase en cuenta que la partición de los errores detectados al corregir los exámenes de la PAU no es totalmente disjunta, ya que algunos de los errores vienen condicionados por otros anteriores en el proceso de decisión. Por otro lado, en la mayoría de los errores se aporta como solución el uso de gráficos, donde el alumno pueda ver representados muchos de los conceptos que intervienen en el proceso. Por este motivo, consideramos conveniente trabajar con "applets" didácticos en los que los estudiantes perciban de forma clara sus concepciones erróneas. En este sentido está claro, que cada vez más, se necesita usar las nuevas tecnologías para ayudar a los estudiantes en su proceso de aprendizaje. A continuación se citan algunas direcciones donde encontrar determinados "applets", que pueden contribuir en el proceso de enseñanza de la Estadística a los alumnos de bachillerato.

http://ucs.kuleuven.be/java/index.htm

Aquí se recogen una serie de "applets", que muestran diversos conceptos sobre Estadística, en particular, se presenta un grupo de "applets" destinados a los Contrastes de Hipótesis.

http://www.aulademate.com/article-topic-10.html

En la anterior dirección se pueden encontrar unidades didácticas con "applets", además de exámenes de la PAU sobre las matemáticas de bachillerato.

http://www.math.csusb.edu/faculty/stanton/m262/

En esta dirección se muestran algunos "applets" sobre Probabilidad y Estadística, cuyo autor es el profesor Charles Stanton del Departamento de Matemáticas de la Universidad de California en San Bernardino.

http://bcs.whfreeman.com/bps3e/

Esta dirección contiene la página web de la tercera edición del libro titulado "The Basic Practice of Statistics" del famoso estadístico Moore (1998). Aquí también se puede enlazar con una serie de recursos didácticos para el estudiante, entre los que se encuentran un bloque de "applets" estadísticos. En especial se destaca el "applet" destinado al razonamiento sobre el estadístico del contraste. Además en castellano se encuentra el libro *Estadística Aplicada Básica* del mismo autor, que se referencia en la bibliografía.

Finalmente, nos gustaría señalar que cómo la Inferencia Estadística sirve para resolver problemas de las ciencias y de la vida cotidiana, la enseñanza de la misma debería realizarse con problemas reales, mediante los cuales los estudiantes puedan desarrollar su conocimiento de esta materia, trabajando las diferentes etapas de un problema práctico. De esta forma, las analogías con situaciones reales contribuirían de forma positiva a la hora de un mejor entendimiento del significado de los conceptos utilizados, y favorecería el aprendizaje. En este sentido, desde las Instituciones Estadísticas se está fomentando la divulgación de la Estadística mediante concursos escolares. En esta línea citamos las siguientes páginas webs:

http://www.seio.es/descarga/IIIConcursoProyectosEducativo.pdf

En esta dirección se encuentran las bases para el concurso de proyectos educativos de Estadística e Investigación Operativa para profesores de enseñanza secundaria y bachillerato, promovido por la Sociedad de Estadística e Investigación Operativa.

http://www.gobiernodecanarias.org/istac/w_escolar.htm

En esta página web se encuentra información y materiales relativos a la colaboración entre el Instituto Canario de Estadística y la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas “Isaac Newton”, para promover acciones que favorezcan el conocimiento de la Estadística, con el fin de ayudar a profesores y alumnos en su labor de enseñanza y aprendizaje de esta materia, a través de datos del entorno Canario.

Otras páginas web a resaltar por su calidad en cuanto al contenido sobre Inferencia Estadística, son las que se citan a continuación.

http://descartes.cnice.mecd.es/materiales_didacticos/inferencia_estadistica/contraste.htm

Esta corresponde al Proyecto Descartes de Innovación en el área de Matemáticas, para la Enseñanza Secundaria Obligatoria y el Bachillerato desarrollada por el Ministerio de Educación y Ciencia (2004).

http://www.cnice.mec.es/pamc/pamc_2001/2001_inferencia_estadistica/

Página creada por José Miguel Rodríguez Morales, dirigida, a alumnos de 2º de Bachillerato de Ciencias Sociales.

http://www.terra.es/personal2/jpb00000/home.htm

Pagina diseñada por el profesor Juan del Pozo Baselga que recoge apuntes y ejercicios de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BATANERO, C., GODINO, J.D., GREEN, D.R., HOLMES, P. Y VALLECILLOS, A. (1994): Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology,* 25(4), 527-547.

BATANERO, C. (2000): Controversies around the role of Statistical tests in experimental research. *Mathematical Thinking and Learning,* 2(1-2), 75-98.

COLERA, J., GARCÍA, R. Y OLIVERA, M. J. (2003): *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales. Segundo bachillerato.* Anaya, Madrid.

ESPINEL, M.C., RAMOS, R. Y RAMOS, C. E. (2007): Algunas alternativas para la mejora de la enseñanza de la inferencia estadística en secundaria. *Números 67. Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas.* http://www.sinewton.org

FEINBERG, W. E. (1971): Teaching the Type I and II errors: the judicial process. *The American Statistician,* 25, 30-32.

MARTÍN, M.A. (2003): “It’s like…you know”: The use of Analogies and Heuristics in Teaching Introductory Statistical Methods. *Journal of Statistics Education,* 11(2).

http://www.amstat.org/publications/jse/v11n2/martin.html

MOORE, D. (1998): *Estadística Aplicada Básica.* Antoni Bosch Editor. Barcelona.

MORENO, A. J. Y VALLECILLOS, A. (2005): La Inferencia Estadística Básica en la Enseñanza Secundaria. *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.

NORTES, A., JIMÉNEZ, P. Y OTROS (2003): *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales. 2º bachillerato.* Santillana, Madrid.

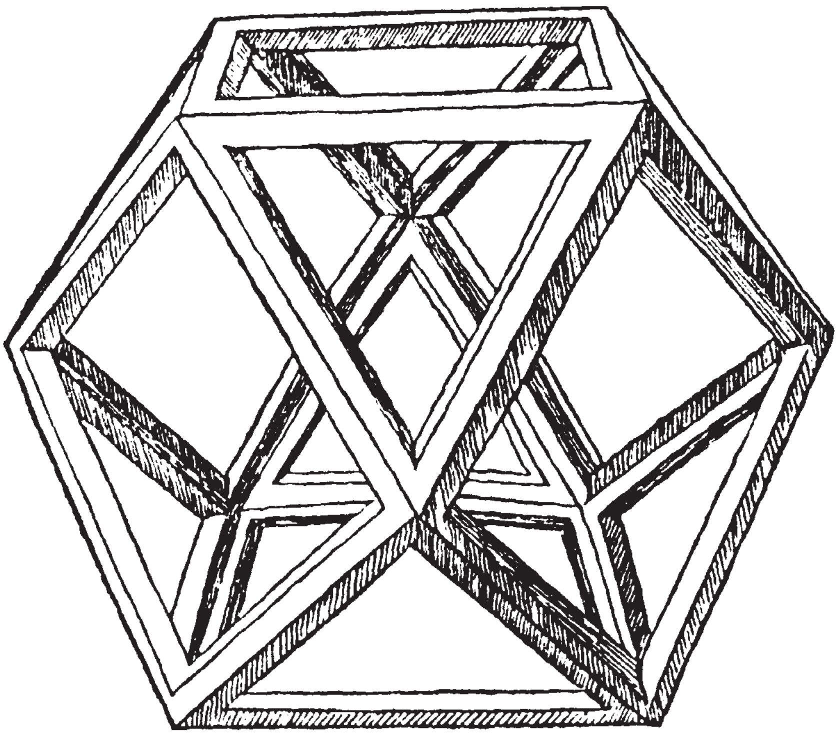
RAMOS, R. Y ESPINEL, M.C. (2003): Estimación Estadística: Algunas dificultades observadas en la PAU. *Actas de las XI Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas.* Puerto de la Cruz. Tenerife.

SOCAS, M. (1997): Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En Rico (coordinador) *La educación Matemática en Enseñanza Secundaria.* 12 ICE. Universitat de Barcelona. Barcelona.

VALLECILLOS, A. Y BATANERO, C. (1997): Conceptos activados en el Contraste de Hipótesis Estadísticas y su comprensión por estudiantes universitarios. *Recherches en didactique des mathématiques* 17(1), 29-48.

VIZMANOS, J. R. Y ANZOLA, M. (2004): *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales. Segundo de Bachillerato.* Algoritmo. SM, Madrid.

suma+


Dibujo de Leonardo da Vinci para *La divina proporción* de Luca Pacioli

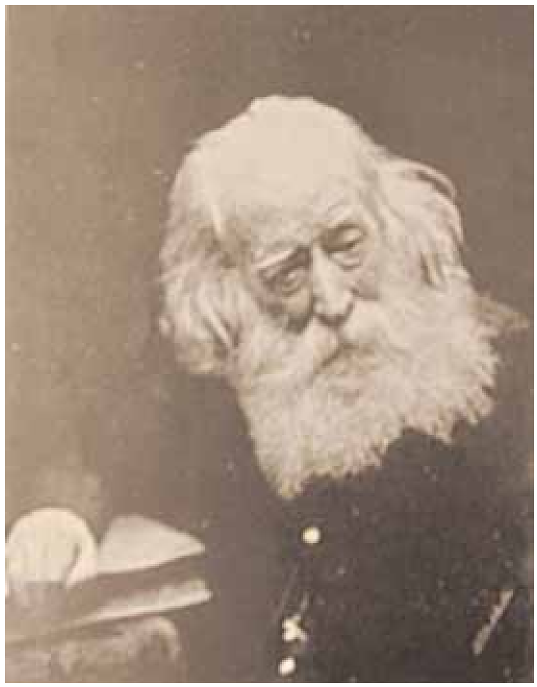
poliedro

suma+ 61
Junio 2009, pp.47-51

Henry Perigal

Hasta ahora en esta sección hemos tratado muchos recursos, dedicando cada entrega a un tipo de material distinto: puzzles, dominós, trucos de magia, juegos de tablero y fichas, etc. A veces hemos citado el material presentado por el nombre del matemático creador, como Pitágoras o Arquímedes, pero hasta ahora no habíamos dedicado un artículo completo a una persona, y quizás iba ya siendo hora.

Esta entrega la vamos a dedicar a todas aquellas personas que, no siendo matemáticos, han sido unos apasionados de esta materia, y aunque dedicados a otras profesiones más o menos alejadas de las matemáticas o las ciencias, la han estudiado y han aportado sus descubrimientos a la historia de esta disciplina. Quizás el nombre que a todos se nos viene a la cabeza como más representativo de este grupo de personas es el de Fermat, aunque existen muchas otras personas que han quedado inscritas en la historia unidas a algún resultado que ha alcanzado notoriedad. Ese es el caso de Henry Perigal, nuestro personaje de hoy.



Un gran aficionado a los puzzles geométricos.

Henry Perigal[1] (1801–1898) fue corredor de bolsa hasta los 87 años en que se retiró para dedicarse más a fondo a sus estudios, pero durante toda su vida fue un gran aficionado a las matemáticas y a la astronomía. La mayoría de sus trabajos y pensamientos los conocemos gracias a que un hermano menor, Frederick, los publicó después de su muerte.

Grupo Alquerque de Sevilla
Constituido por:
Juan Antonio Hans Martín. *CC Santa María de los Reyes.*
José Muñoz Santonja. *IES Macarena.*
Antonio Fernández-Aliseda Redondo. *IES Camas.*
juegos@revistasuma.es

Tuvo gran amistad con científicos y matemáticos de la época, entre ellos Augustus de Morgan, J.J. Sylvester, Lord Kelvin, Lord Rayleigh o James W. Glaisher (que llegó a ser presidente de la Sociedad Matemática londinense). Perigal perteneció a varias sociedades científicas, entre ellas la Royal Astronomical Society, incluso fue tesorero de la Royal Meteorological Society. En estas sociedades destacó por sus conocimientos sobre los movimientos circulares. Fue conocido con el título de *El venerable patriarca de las sociedades científicas de Londres*. Intentó, sin lograrlo, ser admitido en la prestigiosa Royal Society, seguramente debido a su defensa a ultranza de que la Luna no rotaba, lo que según él explicaba que siempre presentara la misma cara.

Entre sus aficiones se encontraba el trabajo con el torno de madera, por lo que fue un experto en la técnica del torneado conocida por el nombre de *Geometry Check*, realizando un estudio sobre la clasificación matemática de las figuras que pueden obtenerse mediante torneado. Tenía además un gran dominio del dibujo geométrico lo que le permitió el estudio de disecciones geométricas, de las que vamos a ver varios ejemplos en estas páginas.

La razón por la que su nombre se ha inscrito en el paraninfo matemático fue el descubrimiento, en 1830, de una disección que demostraba geométricamente el Teorema de Pitágoras. Sobre esta demostración ya se ha hablado en varias ocasiones en esta revista[2] pero nunca está de más repetirla.

Demostraciones del Teorema de Pitágoras.

La disección se construye trazando por el centro del cuadrado sobre el cateto mayor una paralela y una perpendicular a la hipotenusa tal como puede verse en la figura 1. Tan satisfecho quedo Perigal de su disección que encargó que se hiciera una inscripción con ella en su tumba, según puede verse en la figura 2.

Perigal, en el artículo "On Geometric dissections and transformations" publicado en el volumen 1 de la publicación *The Messenger of Mathematics* de 1874, donde presentó su disección[3] plantea otra manera de hacer esta división. Podemos ver en la figura 3 una copia de su dibujo. Se colocan juntos los dos cuadrados que irían sobre los catetos y se trazan líneas que pasan por el centro del cuadrado mediano y por el punto medio de la suma y la resta de los dos lados de los cuadrados.

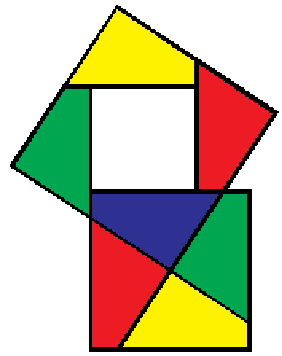


Figura 3

Esta división la podremos ver más clara en los enlosados pitagóricos que siguen un poco más adelante.

Años después de la muerte de Perigal, el matemático alemán Paul Mahlo (1883-1971) planteó que la anterior demostración era solamente un caso particular de una gran familia de disecciones. En concreto Mahlo presentó otra disección en 1908, que sitúa el punto por el que se traza la paralela en la intersección entre el cateto mayor y la perpendicular trazada a la hipotenusa por el vértice superior. En este caso también hay que diseccionar el cuadrado sobre el cateto menor, trazando una paralela a la hipotenusa por el vértice del triángulo rectángulo donde está el ángulo recto. Lo podemos ver en la figura 4

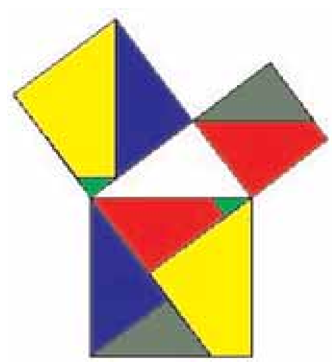


Figura 4

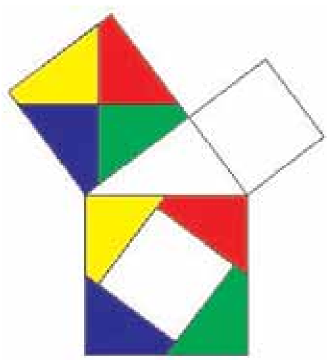


Figura 1

Figura 2

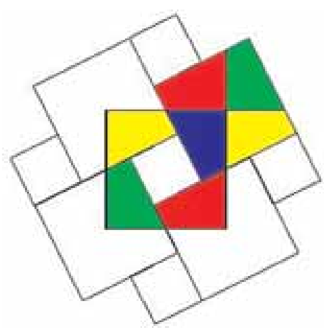


Figura 5

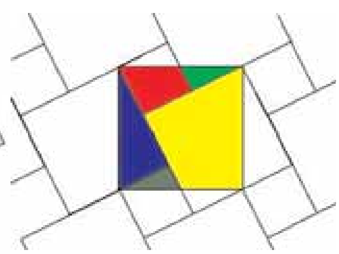


Figura 6

En realidad, todo este grupo de demostraciones del Teorema de Pitágoras proviene del llamado *enlosado de Pitágoras*, que está formado por dos cuadrados de distinto tamaño (equivaldrían a los construidos sobre los catetos) que se repiten sucesivamente para rellenar el plano. En dicho enlosado puede realizarse una división como se observa en las figuras siguientes para dar lugar a las divisiones que aparecían en las demostraciones anteriores[4]. En la figura 5 tenemos la división del enlosado que da lugar a la disección de Perigal y donde puede reconocerse el dibujo realizado por el propio autor. En la figura 6 aparece la que genera la demostración de Paul Mahlo.

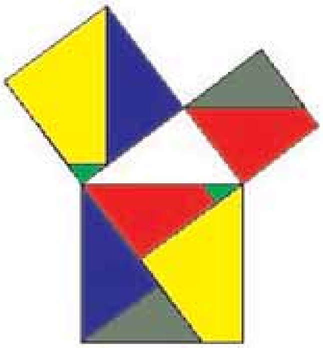


Figura 7

Existe además otra disección del Teorema de Pitágoras que se suele adjudicar a Perigal. En la figura 7 vemos la nueva división. Las líneas discontinuas marcan donde deben ir los cortes de los cuadrados sobre los catetos. Los trozos en que se trazan las líneas superiores coinciden en anchura con los trozos donde se divide el cateto al trazar el arco de circunferencia.

Esta disección tiene el valor añadido de que sirve para demostrar el Teorema del Cateto utilizando cualquiera de las divisiones de los dos cuadrados sobre los catetos.

Otros puzzles geométricos.

Aparte de las demostraciones del Teorema de Pitágoras, entre los papeles de Perigal se encontraron muchos estudios de divisiones y recomposiciones de polígonos. Vamos a ver algunos de ellos.

1.- Los tres cuadrados de Perigal

Quizás uno de los más conocidos sea la división de tres cuadrados iguales, que permiten construir un cuadrado con triple superficie. Un cuadrado está completo y los otros dos están divididos como aparecen en la figura 8.

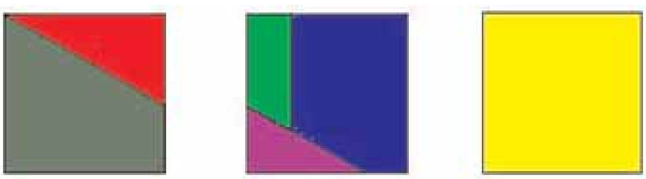


Figura 8

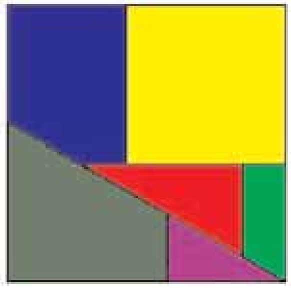


Figura 9

2.- Otro puzzle con tres cuadrados

Existe otra disección de tres cuadrados, de la que no hemos encontrado su autor, pero que sigue la misma línea que la anterior de Perigal, por eso la vamos a incluir aquí. En este caso, los tres cuadrados son de distinto tamaño y sus divisiones podemos verlas en la figura 10.

En este puzzle, se pueden variar las disecciones de los cuadrados de forma que se obtengan puzzles diferentes. En este caso varían los tamaños de los cuadrados pequeños que al unirlos dan lugar al grande. Se puede llegar a tener dos cuadrados iguales sin dividir y un tercer cuadrado que a partir de sus divisiones y con los otros dos hacen que se construya el grande.

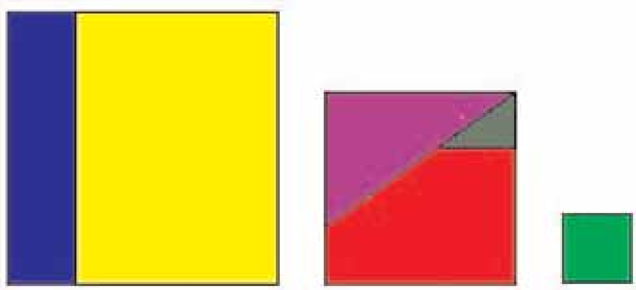


Figura 10

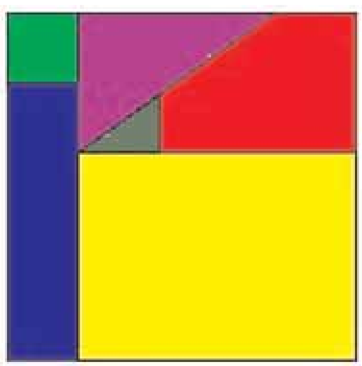
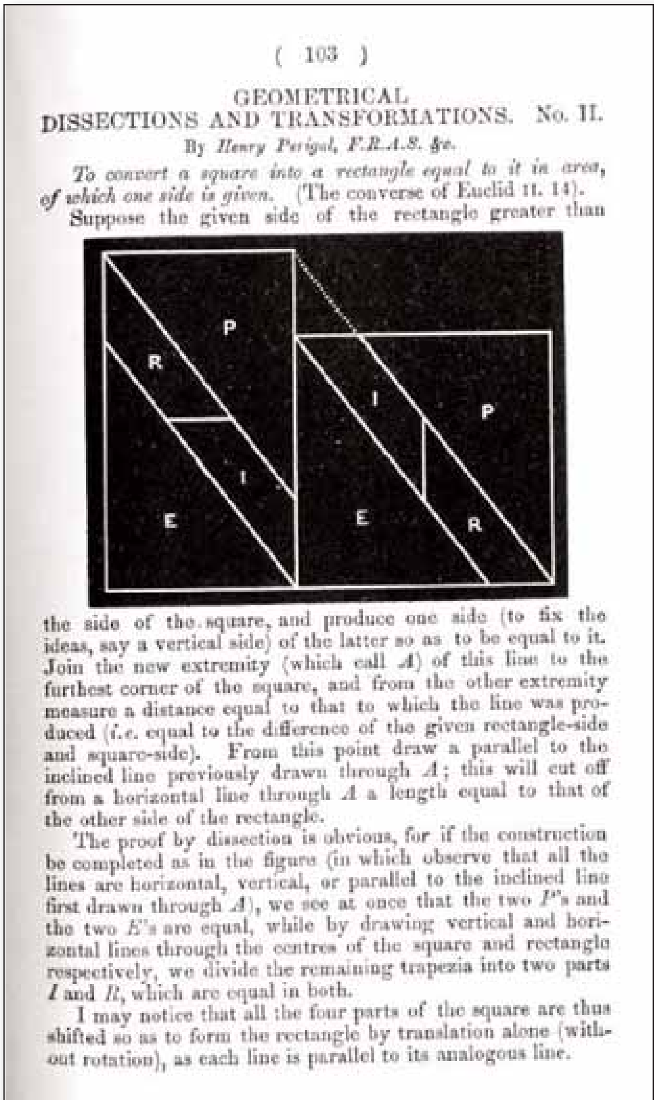


Figura 11



(103)

GEOMETRICAL
DISSECTIONS AND TRANSFORMATIONS. No. II.

By *Henry Perigal, F.R.A.S. &c.*

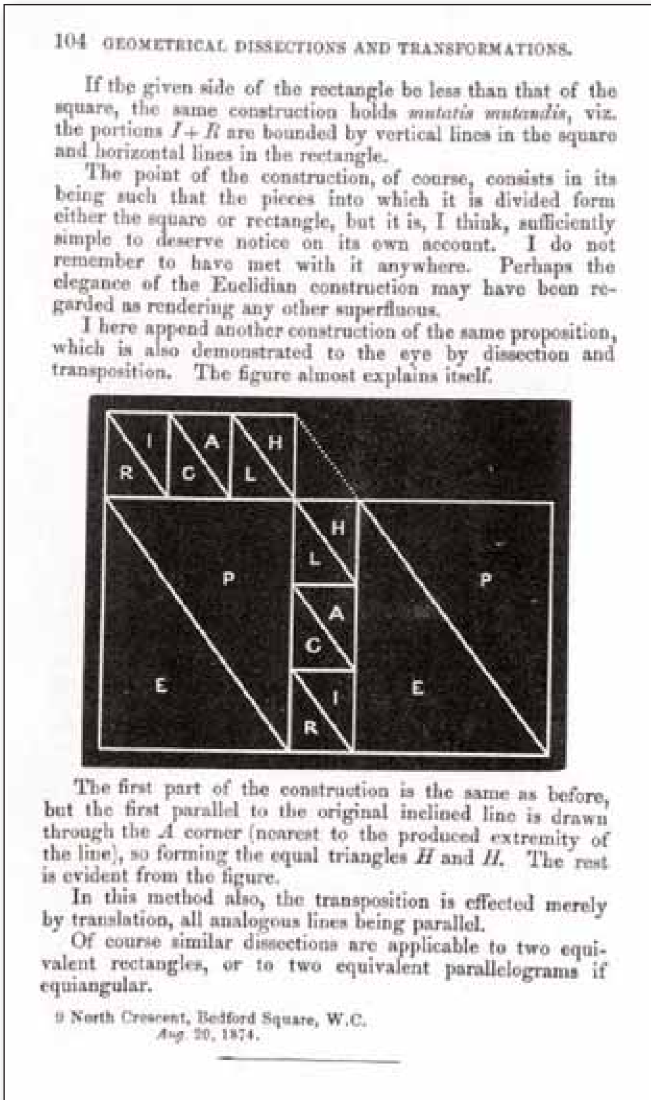
To convert a square into a rectangle equal to it in area, of which one side is given. (The converse of Euclid II. 14).

Suppose the given side of the rectangle greater than the side of the square, and produce one side (to fix the ideas, say a vertical side) of the latter so as to be equal to it. Join the new extremity (which call *A*) of this line to the furthest corner of the square, and from the other extremity measure a distance equal to that to which the line was produced (*i.e.* equal to the difference of the given rectangle-side and square-side). From this point draw a parallel to the inclined line previously drawn through *A*; this will cut off from a horizontal line through *A* a length equal to that of the other side of the rectangle.

The proof by dissection is obvious, for if the construction be completed as in the figure (in which observe that all the lines are horizontal, vertical, or parallel to the inclined line first drawn through *A*), we see at once that the two *P*'s and the two *E*'s are equal, while by drawing vertical and horizontal lines through the centres of the square and rectangle respectively, we divide the remaining trapezia into two parts *I* and *R*, which are equal in both.

I may notice that all the four parts of the square are thus shifted so as to form the rectangle by translation alone (without rotation), as each line is parallel to its analogous line.

Figura 12



104 GEOMETRICAL DISSECTIONS AND TRANSFORMATIONS.

If the given side of the rectangle be less than that of the square, the same construction holds *mutatis mutandis*, viz. the portions *I* + *R* are bounded by vertical lines in the square and horizontal lines in the rectangle.

The point of the construction, of course, consists in its being such that the pieces into which it is divided form either the square or rectangle, but it is, I think, sufficiently simple to deserve notice on its own account. I do not remember to have met with it anywhere. Perhaps the elegance of the Euclidian construction may have been regarded as rendering any other superfluous.

I here append another construction of the same proposition, which is also demonstrated to the eye by dissection and transposition. The figure almost explains itself.

The first part of the construction is the same as before, but the first parallel to the original inclined line is drawn through the *A* corner (nearest to the produced extremity of the line), so forming the equal triangles *H* and *H*. The rest is evident from the figure.

In this method also, the transposition is effected merely by translation, all analogous lines being parallel.

Of course similar dissections are applicable to two equivalent rectangles, or to two equivalent parallelograms if equiangular.

9 North Crescent, Bedford Square, W.C.
Aug. 20, 1874.

Figura 13

3.- La cuadratura del rectángulo

En el volumen 2 de la publicación *The Messenger of Mathematics*, Perigal presenta dos formas de dividir un rectángulo de forma que al reordenar sus piezas se obtenga un cuadrado. En las figuras 12 y 13 podemos ver imágenes de las hojas originales del artículo con las dos disecciones.

En la primera une un vértice del rectángulo con el lado opuesto, a una altura correspondiente al cuadrado resultante, y luego traza una paralela a esta recta por el vértice opuesto al anterior y la franja interior resultante la divide en dos partes iguales con una línea paralela a los lados del rectángulo.

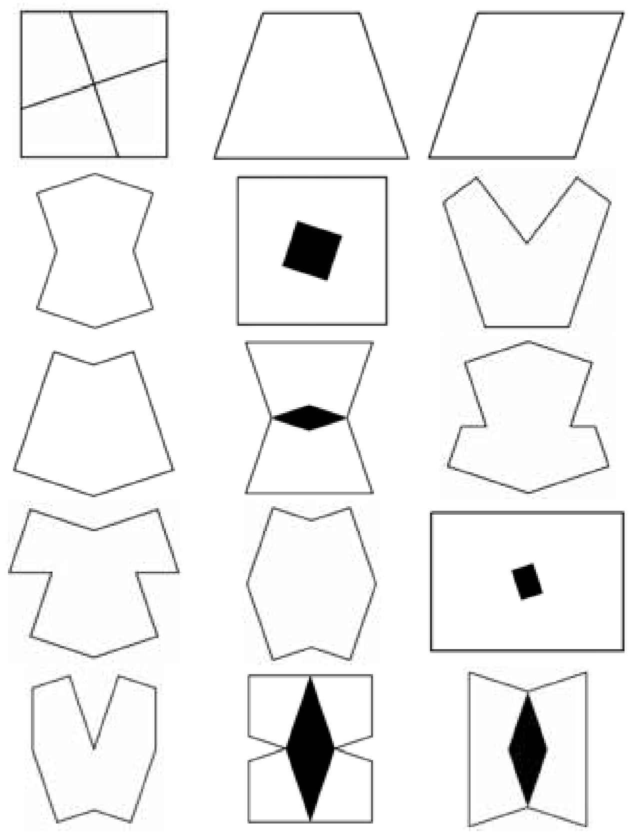
En la segunda disección, se recorta el rectángulo a la altura del cuadrado, y la parte sobrante se divide en tantos dobles triángulos rectángulos como sean necesarios para completar el rectángulo. En el dibujo que se ve en el artículo son necesarios tres dobles triángulos, pero eso depende de las medidas del rectángulo. Suponemos que el dividir en dobles triángulos rectángulos lo sobrante, en lugar de en rectángulos directamente es para que todas las piezas sean triángulos rectángulos semejantes, pues las diagonales de división son paralelas a las del rectángulo base.

Un paso más allá.

Con el objetivo de sacar más provecho para nuestras clases de aquellas ideas que encontramos, a partir de la disección de Perigal hemos trabajado con nuestros alumnos un problema nuevo: tomando las cuatro piezas iguales en que se divide el cuadrado sobre el cateto mayor, construir, uniéndolas, todas las figuras que tengan algún tipo de simetría.

Las siguientes son las que hemos hallado.

Las zonas negras en los dibujos son huecos vacíos entre las cuatro piezas.



Como complemento.

En la dirección :
http://www.cabri.net/abracadabri/abraJava/Dissection/Duplik1.html aparecen varios archivos interactivos en java con las demostraciones de Pitágoras de Perigal y Mahlo que hemos comentado, así como las dos composiciones de tres cuadrados que permiten componer uno mayor. También es posible encontrar varias de las disecciones que presentamos en nuestra sección del número 48 de esta revista con el título de "Cuadratura de polígonos regulares"[5].

JUEGOS ■

NOTAS

1 En la dirección
http://plus.maths.org/issue16/features/perigal/ aparecen más aspectos de la vida de Perigal. En la parte de bibliografía hay enlaces a imágenes donde aparecen los artículos de Perigal en que presentó sus disecciones.

2 Hay al menos dos ocasiones, que recordemos en este momento. Una fue en el artículo de esta sección de título "Rompecabezas del teorema de Pitágoras", aparecido en el número 43 (puede verse en: http://divulgamat.ehu.es/weborriak/RecursosInternet/Juegos/Rompecabezas.asp) y la otra en el siguiente número en la sección *Desde la historia*, de los compañeros Ángel Ramírez y Carlos Usón, en el artículo titulado "En el entorno del teorema Kou-Ku (I)".

3 En la dirección
http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Historia/AsiLoHicieron/Perigal/Perigal1.asp aparece un artículo de nuestro amigo Vicente Meavilla Seguí, en donde se presentan las demostraciones de Perigal con traducciones de los textos de sus artículos.

4 En la dirección
http://www.ies.co.jp/math/java/geo/pythashi/pythashi.html podemos encontrar un enlosado de Pitágoras interactivo en java, en el que podemos mover la cuadrícula y ver distintas versiones del teorema.

5 Puede leerse en
http://divulgamat.ehu.es/weborriak/RecursosInternet/Juegos/Cuadraturas.asp.

MSEL es una publicación electrónica que pretende dar voz a todos los grupos que se dedican a utilizar la modelización como herramienta de enseñanza en el aula. Se pretende poner al alcance de la comunidad educativa trabajos, de carácter fundamentalmente práctico, que incluyan experiencias y material susceptible de ser utilizado en el aula.

Modelling in Science Education and Learning
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada
Volume 1, 2008.
ISSN: 1988-3145
http://msel.impa.upv.es

Convegno Nazionale n. 23: Incontri con la Matematica

Simposio Nacional Nº. 23: Encuentros con la Matemática

Pratiche matematiche e didattiche in aula   Prácticas matemáticas y didácticas en el aula

Castel San Pietro Terme (Bolonia - Italia)

6 - 7 - 8 noviembre de 2009

Dirección: Bruno D'Amore, Martha I. Fandiño Pinilla y Silvia Sbaragli

En el Simposio Nacional se han programado:

- conferencias generales, para todos los niveles escolares de:
  Bruno D'Amore, Giorgio Bagni, Piergiorgio Odifreddi, Ornella Robutti, Luigi Tomasi, Bernard Sarrazy y Nicolina Malara
- conferencias especificas, para docentes de la Escuela Infantil
- alrededor de 60 seminarios, divididos por niveles escolares de diferentes interés
- alrededor de 20 muestras y laboratorios
- un espectáculo teatral
- otros eventos.

Para obtener más información, dirigirse a:
Maria Rita Baroncini, Oficio Cultura y Turismo
Comune de Castel San Pietro Terme, Piazza XX Septiembre 3 40024 Castel San Pietro Terme BO
Tel. 051/6954268 Fax 051/6954180 horario laboral: 9.00 - 13.30
Correo-e: ufficioturismo@cspietro.it cultura@cspietro.it silvia.sbaragli@infinito.it
Sitios: http://www.dm.unibo.it http://www.cspietro.it http://www.dm.unibo.it/rsddm

Las actas (editores: Bruno D'Amore y Silvia Sbaragli) serán publicadas por Pitagora (Bolonia) y estarán disponibles al inicio del Simposio.

suma+ 61
Junio 2009, pp. 53-54

Una recta, un rombo y la aparición del mono

Este es un curioso clip sobre rombos que empezó con un recuerdo a los mecanismos para trazar líneas rectas y acabó, como verán, con la compra de diversos monos metálicos.

En la figura puede observar un curioso mecanismo de la colección de la Universidad de Cornell dedicada a los mecanismos de Reuleaux. Frans Reuleaux fue un conocido ingeniero alemán que hizo grandes contribuciones a la mecáncia y a su enseñanza construyendo originales mecanismos (además de su famoso triángulo).

En esta colección destaca esta pieza S35 que hay en la figura que es el mecanismo de Peaucellier-Lipkin pensado para describir líneas rectas.

Sir William Thomson (Lord Kelvin) llegó a decir "es la cosa más bella que he visto en mi vida". Creo que no hay para tanto pero estas expresiones exaltadas siempre vienen bien.

Siguiendo un famoso escrito de A.B. Kempe de 1877 podemos meditar sobre la provocativa cuestión: ¿cómo dibujar una línea recta? A primera vista parece una tontería pues la experiencia de disponer de una regla y un lápiz para trazar rectas ya parece algo inmejorable. Pero nunca hacemos una circunferencia resiguiendo con un lápiz una pieza redonda. Nos dá mucha más seguridad un compás cuyo movimiento nos garantiza que estamos cumpliendo con la definición del círculo como lugar geométrico. Piense un momento: ¿cómo puede tener la seguridad de que la regla es recta? ¿apoyándola bien sobre una mesa? ¿y cómo sabe que la mesa es plana? Esta cuestión, suscitó durante siglos controversias: ¿cómo idear un mecanismo cuyo funcionamiento garantizara la "rectitud" de su desplazamiento?. Como ya puede sospechar, más allá de la especulación geométrica, se ponía en evidencia

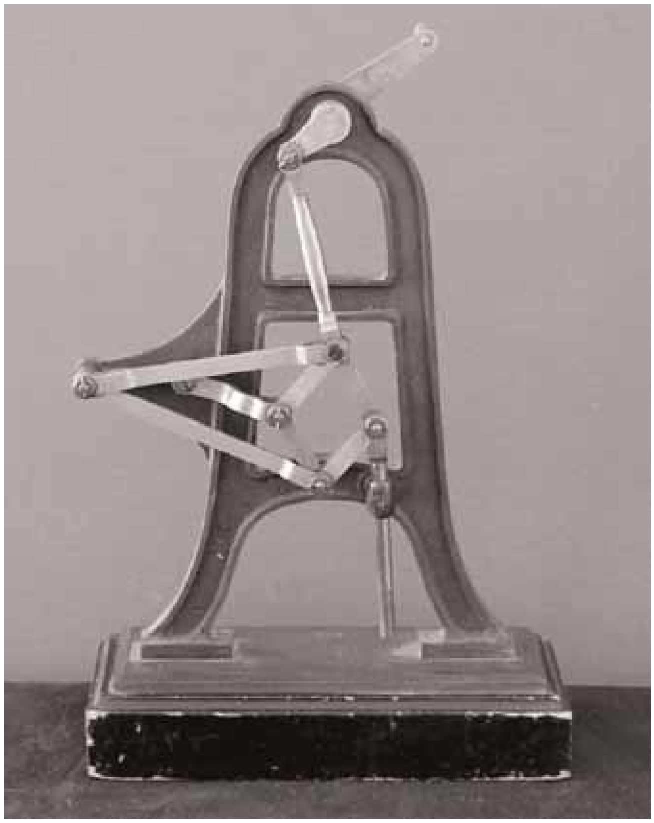


Figura 1. Mecanismo de Peaucellier-Lipkin

la necesidad de crear mecanismos que tendrían luego aplicaciones técnicas muy diversas (telares, máquinas de coser, máquinas de vapor,...).

El primer libro sobre mecanismos basados en barras articuladas lo editó Agostino Ramelli en 1588. Pero los grandes avances tuvieron que esperar a la genialidad de James Watt (1736-1819) y del matemático Pierre-Frederic Sarrus (1798-1861). Este fue un tema estrella de la época romántica y por esto

Claudi Alsina
Universitat Politècnica de Catalunya
elclip@revistasuma.es

Reuleux en su colección incluyó los mejores 39 inventos de trazadores de líneas rectas.

Fue Charles Nicolas Peaucellier (1832-1913), que era capitán del ejército francés, quien logró un modelo perfecto en 1864. Peaucellier fue ascendido a general pero no es evidente que lo fuera por este diseño. Y lo mismo logró, independientemente. Lipmann I. Lipkin (1851-1875), un joven estudiante de Pafnuty Lvovich Chebychev conocido matemático ruso que durante décadas estudió el problema no trivial de acotar el error de desviación en los mecanismos de trazar rectas. James Joseph Sylvester (1814-1897) contagiado por Chebychev dedicó también la atención a este problema. Este tema adquirió gran popularidad y dichos mecanismos formaron parte en su día de las Exposiciones Universales, como la de Viena de 1873.

El libro de Alfred Bray Kempe *Como Dibujar en Línea Recta* de 1877 (hoy on-line) contribuyó definitivamente a poner un broche de oro a un intenso periodo de creatividad de mecanismos y a mostrar diversas variaciones que el propio Kempe diseñó. La clave de este mecanismo es el *rombo* movible uno de cuyos vértices se ve obligado a describir una circunferencia y el opuesto traza la recta buscada.

Rombos actuales

Unas figuras tan bonitas como los rombos forman parte importante de los diseños humanos. Tenemos rombos en los logos de Renault y Mitsubishi; en las placas de las paradas de metros; en multitud de joyas como pendientes y collares; en insignias militares; en las cartas de diamantes; en cometas voladoras; en mecanismos de lámparas; instrumentos para colgar la ropa a secar o en los salvamanteles flexibles…

eee

Ampliando estas líneas pensaba acabar este clip rómbico, pero tuve la idea de dar antes un paseo el resultado del cual me llevó a alterar los planes de este escrito.

Andando por la calle Verdi de mi barrio de Gracia en Barcelona, entre multitud de restaurantes libaneses y supermercados paquistanís que los “Erasmus” del barrio contemplan como algo típico, miro en una librería y descubro en el escaparate ¡un mono!.

Con gran acierto se han comercializado de nuevo estos juguetes para aprender la tabla de multiplicar y las demás (1916 Educational Toy Co.). Este fue un invento de William Robertson de 1916. Los brazos del mono forman un rombo y al mover los pies del simpático animal (que recuerda al del Anís del Mono) y señalar dos números aparece la multiplicación entre las manos del mono.

En la época de las calculadoras la operación de la tabla de multiplicar en manos del mono resulta una experiencia entrañable. La distribución de los numeritos en este juguete, del 1 al 144 también puede dar pie a una indagación interesante. Entro en la tienda y compro los seis monos que tienen, agotando las existencias. El librero me mira con cara de sorpresa quedando seguramente intrigado sobre la necesidad de tantos monos.

Esta es la grandeza de nuestro oficio: poder disfrutar de la historia de un rombo, ver rombos por todos los sitios y encima coleccionar monos. Y para culminar la dicha, poder compartir todo esto con los demás.

Para saber más

KEMPE A.B. (1877): *How to Draw a Straight Line*, Macmillan and Co., London.

RAMELLI, A. (1976): *The Various and Ingenious Machines of Agostino Ramelli: A Classic Sixteenth-Century Illustrated Treatise on Technology*, trans. Martha Teach Gnudi, Dover Publications, New York.

WILLIAMS, T. (2000): *A History of Invention: From Stone Axes to Silicon Chips*, Revised Edition, Checkmark Books, New York.

http://kmoddl.library.cornell.edu, Reuleaux Kinematic Model Collection, part of National Digital Science Library www.nsdl.org.

http://www.rechenwerkzeng.de/consul.htm

http://www.americanartifacts.com/summa/advert7az392.htm

EL CLIP

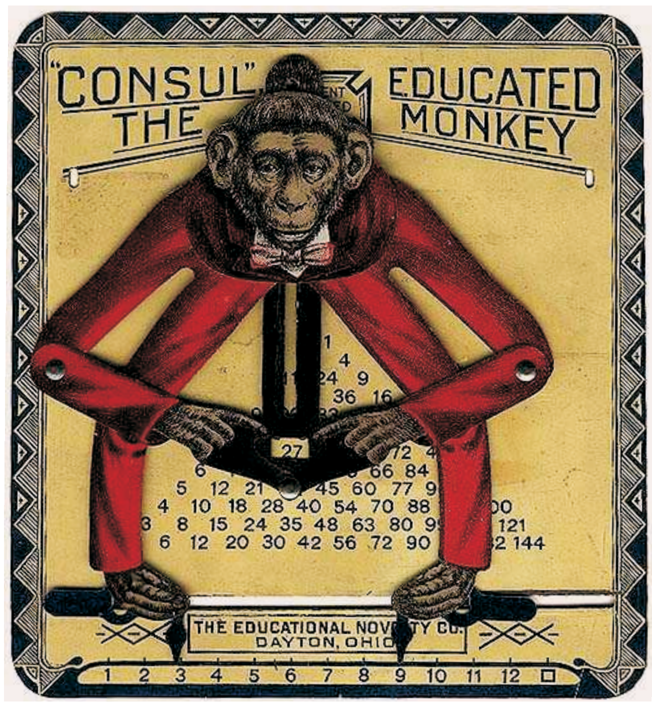


Figura 2. Consul. El mono educado

suma+ 61
Junio 2009, pp. 55-61

La potencia de las TIC para el cálculo simbólico

Desde esta sección Mate*más*TIC intentamos en cada número dar a conocer alguna herramienta informática relacionada con las matemáticas a la que poder sacarle partido en el aula. Dada la apuesta que desde distintas comunidades autónomas se ha hecho o se está haciendo por el software libre, las herramientas que damos a conocer son para este tipo de sistemas, existiendo en algunos casos la réplica de la misma aplicación para sistemas propietarios.

En nuestro propósito de, por un lado, dar a conocer estas aplicaciones, y por otro, intentar que las mismas incidan de forma directa en el proceso de enseñanza-aprendizaje que se desarrolla en el aula, debemos tener en cuenta que la utilización de estas herramientas debe ir acompañada de un cambio de metodología en la que los alumnos sean partícipes del propio proyecto.

Para que pueda servirnos de reflexión y como curiosidad, os aconsejamos que visualicéis el vídeo que se encuentra en la siguiente dirección del portal *Youtube:*

http://www.youtube.com/watch?v=IJY-NIhdw_4

En la imagen 1 observamos un fotograma del mencionado vídeo.

Imagen 1: Las TIC sin metodología

Mariano Real Pérez
CEP de Sevilla
matemastic@revistasuma.es

De nada nos servirá todo el equipamiento de que podamos disponer en nuestras aulas y el conocimiento de múltiples aplicaciones que podamos utilizar en nuestra materia si no incidimos en un cambio de metodología. Sirvan estas líneas para invitar a la reflexión sobre las aportaciones que un uso adecuado de las TIC pueden reportar a la labor que desarrollamos diariamente. Más aún pensando en la sociedad tecnológica en la que nosotros, los docentes, hemos entrado pero en la que nuestros alumnos han nacido.

Una vez hecha esta pequeña invitación a la reflexión y entrando de lleno en el trabajo que nos ocupa, hemos pensado para esta vez, analizar un software que, aunque no es tan atractivo, visualmente hablando, sí lo es por el potencial que el mismo nos ofrece. Un software que podríamos denominar *generalista* y que podemos localizar tanto para sistemas libres como propietarios.

Maxima es una evolución de Macsyma, el que fuera innovador sistema de álgebra computacional desarrollado a finales de 1960 en el instituto tecnológico de Massachusetts (MIT)

De entre las aplicaciones *generalistas* o de cálculo simbólico podemos localizar en el mercado algunas como *Derive* o *Mapple* a las que nada tienen que envidiar la que aquí presentamos en este número.

Dado lo extensa que es y la gran cantidad de herramientas que tiene, sería imposible hacer un recorrido completo por la misma, por lo que hemos decidido hacer este recorrido en tres pasos diferentes, siendo el de este número de SUMA el primero de ellos.

Cálculo simbólico I: Comenzando con Maxima

A medida que los alumnos van avanzando en el sistema educativo se le exige un mayor razonamiento y nivel de abstracción. En matemáticas esto se traduce en la resolución de ejercicios matemáticos en los que el nivel de simbolismo es creciente o en la generalización de problemas ya resueltos con el consiguiente aumento de las variables que intervienen en el original. En otras ocasiones, la resolución de determinados problemas conlleva la realización de múltiples y repetitivas operaciones con gran cantidad de variables que, lejos de profundizar y agilizar la resolución del mismo, propicia el alejamiento del objetivo final y del razonamiento inicial.

Con el fin de facilitar esta tarea, comenzamos en este número el recorrido por una aplicación de software libre con la que realizar cálculo simbólico. Una aplicación que se podría utilizar a partir de cuarto de ESO, incluyendo este curso como un nivel ideal para la introducción de la misma, siendo los cursos del bachillerato y universitarios en los que más partido se le puede sacar. El recorrido por la misma lo vamos a realizar en tres entregas siendo este número de *Suma* la primera de ellas.

El software que vamos a tratar se llama *Maxima*.

Maxima es una evolución de *Macsyma* (MAC's SYmbolic MAnipulation System, donde MAC, Machine Aided Cognition, era el nombre del Laboratory for Computer Science del MIT durante la fase inicial del proyecto *Macsyma*), el que fuera innovador sistema de álgebra computacional desarrollado a finales de 1960 en el instituto tecnológico de Massachusetts (MIT). *Mapple* y *Matemática* son software que también está basado en el que fuera revolucionario sistema *Macsyma*.

Maxima es un Sistema de Computación Algebraica (CAS), es decir, un programa informático que nos permite realizar manipulaciones algebraicas como, por ejemplo, operar con números en forma exacta, manejar expresiones con variables, factorizar enteros o polinomios, resolver ecuaciones de forma exacta, calcular derivadas y primitivas, operar con matrices y calcular determinantes que contienen parámetros, etc. También permite el empleo de enteros de longitud arbitraria y realizar cálculos aproximados con un número arbitrario de dígitos.

William Schelter fue quien mantuvo *Maxima* desde 1982 hasta su muerte en 2001. En 1998 obtuvo permiso para liberar el código fuente bajo la licencia pública general (GPL) de GNU, cosa que influyó definitivamente sobre este software para conseguir la espectacular evolución que presenta en la actualidad. Esto mismo ha influido para que este software se pueda compilar para cualquier sistema, no sólo sistemas libres como Linux, sino además para los sistemas propietarios. En un principio, los paquetes del sistema se encuentran en el repositorio de cada una de las distribuciones Linux. Pero estos mismos paquetes se pueden localizar en la web del proyecto *Maxima* (http://maxima.sourceforge.net) para todos los demás sistemas, incluido el propio Linux. Es fácil también encontrar en Internet otros sitios que ofrezcan *Maxima* para los sistemas propietarios. Entre esos sitios podemos destacar la web de CdLibre

www.cdlibre.org/consultar/catalogo/Matematicas_Calculo-simbolico.html

Como venimos haciendo en los distintos números de esta sección, el recorrido por la aplicación lo vamos a realizar sobre Linux.

Podemos decir que el sistema de álgebra computacional *Maxima* es un motor de cálculo simbólico escrito en lenguaje Lisp publicado bajo licencia GNU GPL como hemos mencionado anteriormente. *Maxima* cuenta con un amplio conjunto de funciones para hacer manipulación simbólica de polinomios, matrices, funciones racionales, integración, derivación, manejo de gráficos en 2D y 3D, manejo de números de coma flotante muy grandes, expansión en series de potencias y de Fourier, entre otras funcionalidades.

Maxima funciona en modo consola, sin embargo vamos a ver que en su evolución también ha ido mejorando su aspecto gráfico conservando su potencia.

Una vez que hemos instalado en nuestro equipo *Maxima* mediante *apt-get* o bien utilizando la aplicación gráfica *Synaptic* (Linux) debemos ejecutarlo mediante consola, tecleando únicamente *maxima*.

Si realizamos lo anterior, nos aparecerá la información sobre la versión de *Maxima* que estamos utilizando. Al final de esta información encontramos el símbolo:

(%i1)

Observamos el siguiente texto que se nos muestra en la consola una vez que ejecutamos *Maxima*:

```
Maxima 5.13.0 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp GNU Common Lisp (GCL) GCL 2.6.8 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function
bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1)
```

En el caso anterior nos dice que la versión que estamos utilizando es la 5.13.0, aunque en los enlaces que propusimos anteriormente encontraréis versiones posteriores.

De forma general en la aplicación, debemos conocer que (%*ik*) pide que introduzcamos (*i*=input) la expresión numérica *k* y de forma análoga (%*oj*) nos indica que la expresión resultante (*o*=output) numérica *j* es la que se muestra. Para familiarizarnos con este funcionamiento vamos a realizar operaciones sencillas con números y expresiones. En la Imagen 2 podemos observar varias operaciones que hemos realizado con *Maxima*, tanto con números como con expresiones algebraicas. La forma que tenemos de indicarle a la aplicación que hemos acabado de introducir una determinada operación o expresión es escribir punto y coma (;) y pulsar enter.

Es importante tener presente que debemos indicar todas las operaciones a la hora de escribir las distintas expresiones

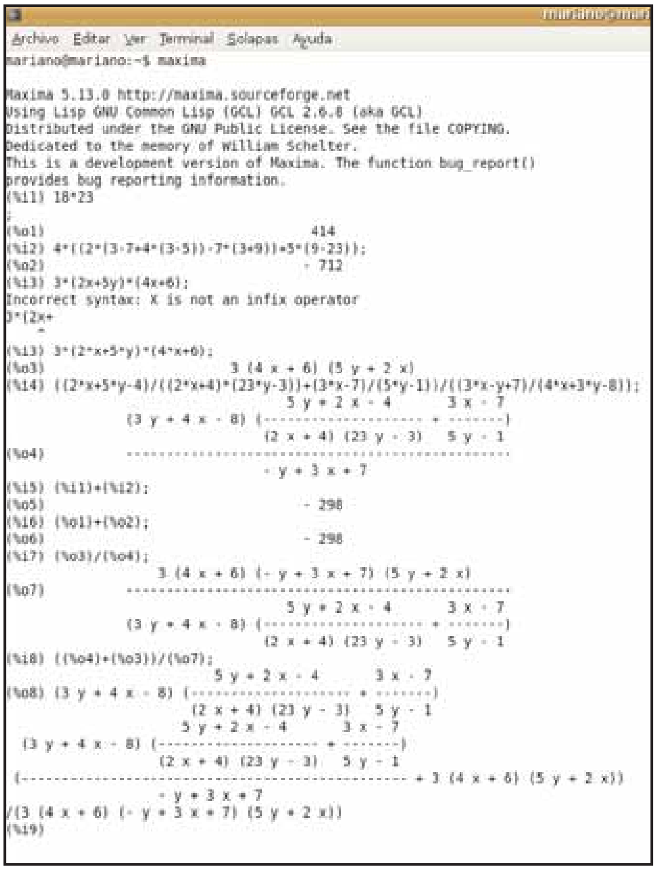


Imagen 2: Operaciones realizadas con *Maxima*

algebraicas, esto es, la falta de un símbolo de operación no es interpretada por la aplicación como un producto, indicándonos que hemos cometido un error. En la expresión tercera que hemos introducido en la Imagen 2 observamos que entre el número 2 y la variable *x*, y entre el número 4 y la variable *x* no hemos introducido ninguna operación. Como observamos en la Imagen 2, para introducir el exponente debemos hacerlo utilizando el símbolo ^ antes de colocar el número o expresión que servirá de exponente.

Si observamos la Imagen 2 podemos distinguir que hemos seguido los siguientes pasos:

1. Hemos introducido una expresión numérica en (%*i1*) detrás de la que hemos tecleado punto y coma (;) y nos ha aparecido resuelta en (%*o1*).

2. Hemos introducido otra expresión numérica que nos ha aparecido resuelta en (%*o2*).

3. Hemos introducido una expresión algebraica en (%*i3*) pero con errores ya que no hemos indicado la operación existente entre el número 2 y la variable *x*. Tras colocar el punto y coma correspondiente y pulsar enter, el sistema

nos informa del primero de los errores que detecta que hemos cometido. Al tener errores no nos proporciona la correspondiente salida (%*o3*) y vuelve a solicitarnos que introduzcamos nuevamente (%*i3*).

4. Hemos vuelto a introducir la expresión algebraica anterior, pero esta vez sin errores, lo que nos a proporcionado la correspondiente salida (%*o3*): 3 (4 x + 6) (5 y + 2 x)

5. Hemos introducido la expresión algebraica (%*i4*), proporcionándonos la correspondiente salida (%*o4*).

   Las correspondientes notaciones que van apareciendo a lo largo de la aplicación van acumulando los valores o expresiones que nos indican. Este hecho lo podemos observar en la entrada (%*i5*), en el que le indicamos que multiplique (%*i1*) y (%*i2*), proporcionándonos la salida (%*o5*) que es el resultado de realizar la anterior operación.

6.- En las siguiente entradas que aparecen en la imagen hemos realizado operaciones con las distintas entradas (%*ik*) o salidas (%*oj*) que habíamos utilizado anteriormente.

La aplicación funciona a base de órdenes y operaciones, marcando la finalización de cada una de ellas un punto y coma (;). Una vez que está funcionando la aplicación, si deseamos salir de ella debemos teclear la orden quit() seguida del punto y coma correspondiente.

La potencialidad de *Maxima* radica en la gran cantidad de comandos que tiene implementados y que pueden servirnos para resolver operaciones matemáticas que nos supondrían invertir gran cantidad de esfuerzo en realizarlas. Además, *Maxima* posee gran cantidad de información de cómo utilizar cada uno de los comandos que tiene implementados. Para obtener información sobre uno de los comandos basta con teclear *describe(comando)* seguido de punto y coma. Podemos probar, por ejemplo con:

describe(*factor*);

Si lo hacemos obtenemos la información que puedes observar en la Imagen 3.

En esta imagen observamos toda la información que la aplicación nos muestra sobre el comando factor. Esta información viene acompañada además de una gran cantidad de ejemplos.

Ahora vamos a realizar algunas de las operaciones con *Maxima* para observar el comportamiento que tiene la aplicación y el potencial que nos proporciona. Dado que sería imposible, por el espacio de que disponemos, realizar un recorrido por todos los comandos que tiene implementados la aplicación, utilizaremos algunos de estos comandos obser-

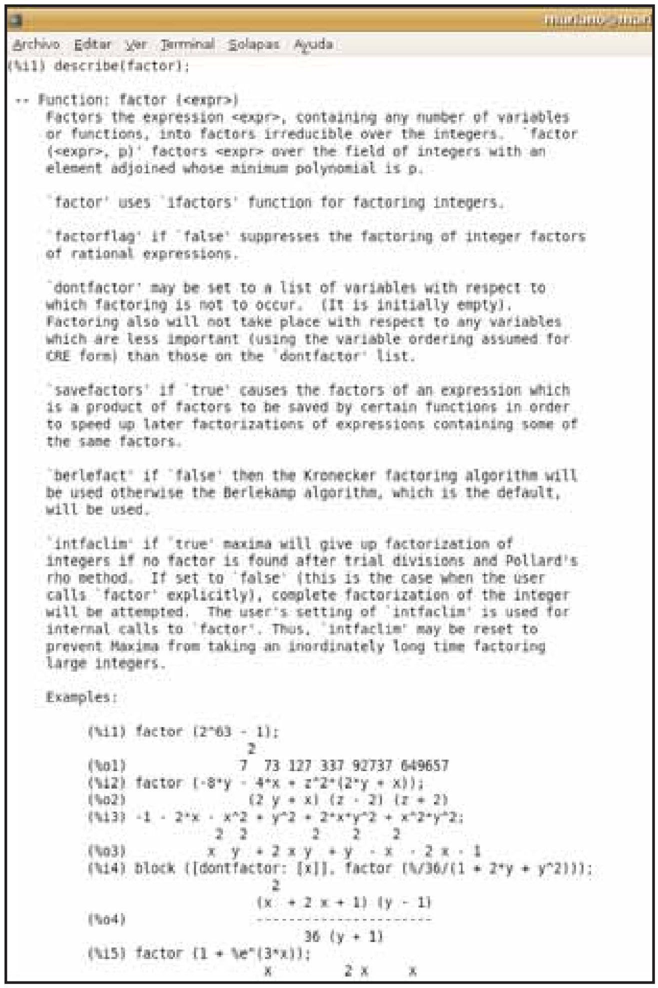


Imagen 3: Información sobre el comando *factor*

vando el comportamiento que tienen y la potencialidad que nos ofrecen. En los ejemplos anteriores hemos observado la forma de escribir distintas operaciones:

+ Para la suma. Ejemplo: 23 + 4
– Para la resta. Ejemplo: x – 5
* Para el producto. Ejemplo: 3*x + 7
/ Para la división. Ejemplo: (2*x + 9)/(x – 3)
^ Para la potencia. Ejemplo: 3*x^2 – 7*x + 8
La potencia también se puede escribir como **.
Ejemplo: 2*x**2 – 7*x + 8
sqrt Para la raíz cuadrada. Ejemplo: sqrt(x^3 + 7)

Además, *Maxima* ya tiene implementada algunas constantes que nos pueden resultar muy útiles como:

%PI es el número π.
%e es el número *e*.
%i indica el complejo puro.

En la Imagen 4 hemos utilizado las anteriores operaciones entre expresiones algebraicas y constantes, observando en la salida correspondiente la operación realizada o la expresión algebraica resultante.

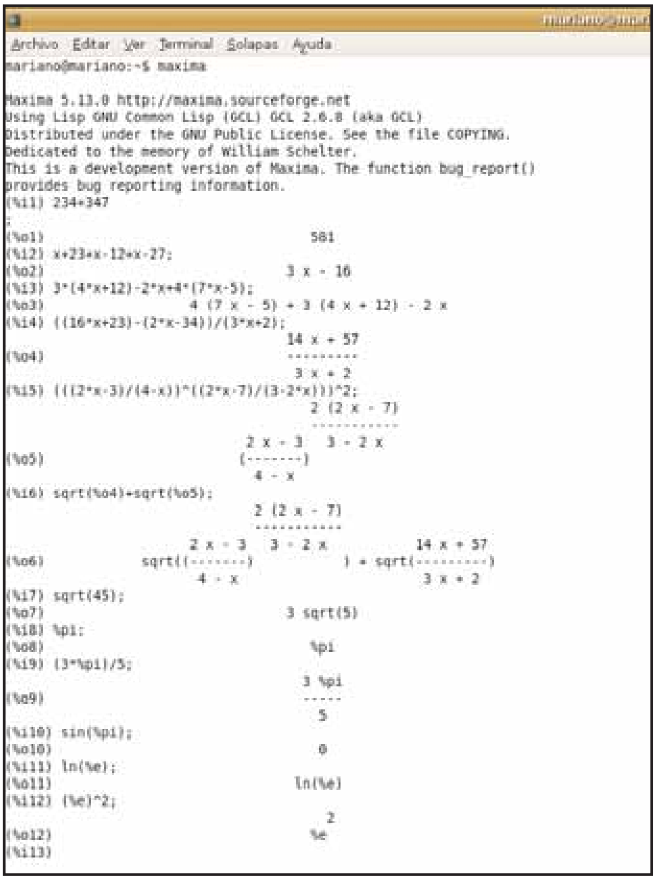


Imagen 4: Operaciones entre expresiones algebraicas y constantes

Como venimos indicando, *Maxima* es una herramienta muy potente y muy versátil para utilizarla en el aula de matemáticas, por lo que podemos intuir que, dado el funcionamiento que hemos contemplado a lo largo del texto anterior, la aplicación dispone de una gran cantidad de comandos que pueden dar respuesta a los distintos cálculos simbólicos que nos podemos plantear, disponiendo además de una serie de parámetros con los que poder configurar o que sirven de complemento a muchos de esos comandos. Así, *Maxima* sirve como herramienta para resolver ejercicios relacionados con operadores, expresiones, simplificación, gráficos, números y funciones de punto flotante, contextos, polinomios, constantes, logaritmos, trigonometría, funciones especiales, polinomios ortogonales, límites, diferenciación, integración, ecuaciones, ecuaciones diferenciales, cálculo numérico, estadística, tablas, matrices y álgebra lineal, espacios afines, tensores, ctensores, series, teoría de números, simetrías, grupos... *Maxima* posee además un entorno de programación con funciones lógicas que nos permite realizar múltiples acciones a la hora de afrontar la resolución de un problema e incluso realizar operaciones de cálculo simbólico compuestos a través de una única expresión.

Dado que sería imposible recoger ejemplos para todos los comandos que posee *Maxima*, hemos recogido algunos solamente que muestren la guinda de este pastel. Así, en la Imagen 5 podemos observar algunos de esos ejemplos.

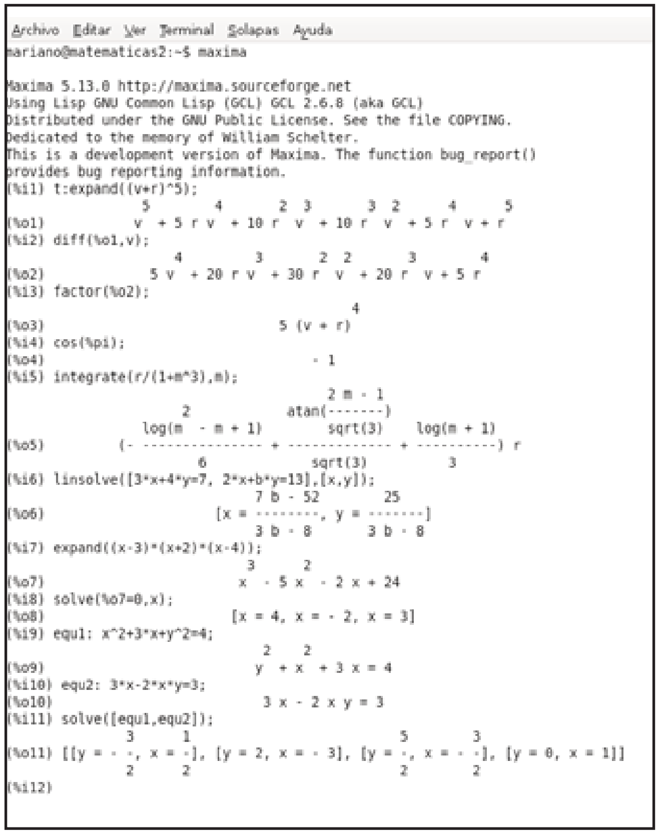


Imagen 5: Algunos comandos con *Maxima*

En la imagen 5 observamos algunos comandos de *Maxima* que hemos utilizado para efectuar cálculos simbólicos. Analicemos las distintas operaciones que se recogen en esta imagen:

a) Para comenzar hemos definido t como la potencia quinta de la expresión $(r + v)$, pero desarrollada. Para definirla, en lugar del símbolo igual hemos utilizado los dos puntos que es la sintaxis correspondiente para asignarle a una variable una expresión o un valor constante. Y para indicar que debe efectuar la operación hemos utilizado el comando *expand*, colocando al final el punto y coma (;) para finalizar el comando:

t:expand$((r + v)$^5);

Como resultado hemos obtenido la salida (%*o1*)

b) Nos planteamos ahora calcular la derivada de la expresión obtenida en el paso anterior, respecto a la variable v. Dado que la expresión anterior se llama t utilizaremos el siguiente comando:

diff(*t*,*v*);

Con esta acción obtenemos la salida (%*o2*). Debemos tener en cuenta que también podríamos haber escrito el comando de la siguiente forma:

diff(%*o1*,*v*);

ya que la expresión que pretendemos derivar es la obtenida como salida (%*o1*).

c) Posteriormente hemos realizado la factorización de la expresión obtenida en la salida (%*o2*). Para ello utilizamos el siguiente comando:

factor(%*o2*);

Obteniendo la salida (%*o3*).

d) En el siguiente paso calculamos el coseno del número π. Para ello utilizamos

cos(%*pi*);

La salida que hemos obtenido en este caso es (%*o4*) que nos indica que la operación tienen como resultado –1

e) Para calcular la integral indefinida de una función utilizamos el comando *integrate*. En este caso vamos a realizar la integral, respecto a la variable m de la función:

$$\frac{r}{1+m^3}$$

Para hacer esto utilizaremos el comando

integrate(*r/(1 + m^3),m*);

También podríamos haber realizado la operación en dos pasos. Escribiendo primero la función, asignándole un nombre, por ejemplo h. Posteriormente habríamos realizado la integral con el comando

integrate(h,m);

f) Con Maxima también podemos resolver sistemas de ecuaciones lineales. Para hacer esto utilizaremos la orden *linsolve*. Por ejemplo, para resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x+4y=7 \\ 2x+by=13 \end{cases}$$

utilizaremos el comando

linsolve([3*x + 4*y = 7, 2*x + b*y = 13], [x,y]);

Aquí le indicamos que resuelva el sistema anterior en el que las variables son x e y.

g) Con *Maxima* también podemos resolver ecuaciones no lineales. Para ello, vamos a calcular primero un polinomio con raíces enteras. En este caso volvemos a utilizar el comando *expand* que ya utilizamos en el apartado a). Vamos a calcular un polinomio cuyas raíces sean 3, –2 y 4. Para esto utilizaremos el siguiente comando

expand((*x* – 3)*(*x* + 2)*(*x* – 4));

Este comando ha dado como salida la (%*o7*)

h) Ahora nos planteamos calcular las raíces del polinomio anterior. Para ello vamos a resolver la ecuación, con variable x, que se obtiene al igualar el polinomio anterior a cero. El comando que utilizaremos será:

solve(%*o7*=0,*x*);

Observamos que nos proporciona las raíces del polinomio en la salida (%*o8*).

Aunque hemos calculado las raíces de un polinomio del que previamente conocíamos las raíces y sabíamos que eran números enteros, con este comando podemos calcular las raíces de cualquier polinomio. El comando nos proporciona todas las raíces, incluso las complejas.

i) Por último, en la imagen 5 hemos realizado los pasos necesarios para resolver un sistema de ecuaciones no lineales. El sistema de ecuaciones que nos hemos propuesto resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} x^2+3x+y^2=4 \\ 2x+2xy=3 \end{cases}$$

Para resolverlo hemos definido cada una de las ecuaciones que compone el sistema no lineal. A la primera ecuación la hemos denominado *equ1* utilizando el siguiente comando:

*equ1: x^2 + 3*x + y^2 = 4*;

Esto nos ha proporcionado la salida (%*o9*). Posteriormente hemos denominado *equ2* a la segunda ecuación utilizando el comando:

*equ2: 3*x – 2*x*y = 3*;

Este comando nos ha proporcionado la salida (%*o10*). Ahora ya estamos en disposición de resolver el sistema de ecuaciones. Volvemos a utilizar el mismo comando que en expresiones anteriores:

solve([*equ1*,*equ2*]);

Podríamos haber utilizado un comando más directo que recogiera los tres pasos anteriores en un único paso. El comando que deberíamos haber escrito en este caso sería:

solve([*x*^2 + 3**x* + *y*^2 = 4,3**x* – 2**x***y* = 3]);

Otra forma de resolverlo hubiese sido con el comando

solve([%*o9*,%*o10*]);

Hagamos de la forma que lo hagamos, el comando nos proporciona como salida las cuatro soluciones posibles que tiene el sistema de ecuaciones.

Hasta aquí hemos recogido una pequeña muestra de los comandos con los que cuenta está aplicación y la forma de utilizarlos. Pero como venimos insistiendo a lo largo de todo el texto, *Maxima* es una completísima y potente aplicación para el cálculo simbólico, por lo que cuenta con numerosos comandos que podemos utilizar. En la siguiente dirección podemos obtener un manual de la misma:

http://maxima.sourceforg.net/docs/manual/es/maxima.pdf

El anterior manual ocupa 4.95Mb y tiene una extensión de 878 páginas, lo que nos puede dar una idea del potencial que se esconde detrás de *Maxima*, un software que nos ofrece además, la posibilidad de programar nuestros propios comandos.

El potencial y robustez de *Maxima* ha ido creciendo con la evolución de sus versiones, pero este potencial se veía mermado por lo complicado de su utilización ya que se necesitaban conocer numerosos comandos para poder sacarle partido a la misma. Tal como hemos podido comprobar, *Maxima* no tiene nada que ver en lo que a gráficos se refiere, con aplicaciones que se utilizan actualmente como las que hemos analizado en otras ocasiones en esta sección.

Para dar solución a este problema, paralelamente al desarrollo de *Maxima* se fue trabajando sobre un entorno gráfico que facilitara el uso de de este software. El primero de estos pasos se denomina *Xmaxima*, que es una implementación de *Maxima* basada en TCL/TK que puede ejecutarse en entornos Unix, Linux y sistemas propietarios y que está bajo licencia GNU-GPL.

Posteriormente, el trabajo sobre el entorno gráfico de *Maxima* evolucionó hasta el actual *Wxmaxima*.

Wxmaxima es el entorno gráfico basado en wxwidgets. *Wxmaxima* se debe instalar después de tener instalado en nuestro equipo *Maxima*, aunque en versiones más recientes, como la 5.17 de *Maxima*, las dos aplicaciones se instalan a la vez.

El funcionamiento de *Wxmaxima* y el potencial de este nuevo entorno será objeto de esta sección en el siguiente número de SUMA.

Con este recorrido hemos podido entrever la gran potencialidad que nos ofrece esta aplicación. Un software cuya introducción es recomendable comenzar a realizarla en 4º de ESO y que es muy útil en bachillerato y en niveles universitarios.

MatemásTIC

Sobre este mismo tema ver SUMA 60, pp. 7-20 [N. de la R.]

Ficha educativo - técnica	
Nombre	Maxima
Sistema	Aunque es una aplicación propia de Linux y para cada distribución cuenta con el archivo de instalación en su repositorio, también encontramos las versiones correspondientes para Windows y para Mac.
Descarga	Repositorio de la distribución de Linux correspondiente o http://maxima.sourceforge.net
Licencia	GPL
Contenido	Cálculo simbólico.
Nivel	Multinivelar: 4º ESO, Bachillerato y Universidad.
Metodología	Aplicación para utilizar a partir de 4º de ESO. Los alumnos utilizarán individualmente la aplicación como herramienta de ayuda para la resolución de problemas y tareas matemáticas

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Comisión Ejecutiva

Presidente: **Serapio García Cuesta**
Secretario General: **Francisco Martín Casalderrey**
Vicepresidente: **Manuel Torralbo Rodríguez**
Tesorera: **Claudia Lázaro del Pozo**

Secretariados:
Prensa: **María Peñas Troyano**
Revista SUMA: **Tomás Queralt Llopis/Onofre Monzó del Olmo**
Relaciones internacionales: **Sixto Romero Sánchez**
Publicaciones: **Ricardo Luengo González**
Actividades y formación del profesorado: **Juana Mª Navas Pleguezuelos**
Actividades con alumnos: **Jordi Comellas i Blanchart**

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidenta: Carme Aymerich Padilla
CEIP Rocafonda
C/Tàrrega, 41
08304 Mataró (Barcelona)

Organización Española para la Coeducación Matemática *Ada Byron*
Presidenta: M.ª Carmen Rodríguez
Almagro, 28. 28010 Madrid

Sociedad Andaluza de Educación Matemática *Thales*
Presidente: Manuel Torralbo Rodríguez
Facultad Matemáticas. Apdo. de Correos 1160. 41080 Sevilla

Sociedad Aragonesa *Pedro Sánchez Ciruelo* de Profesores de Matemáticas
Presidenta: Ana Pola Gracia
ICE Universidad de Zaragoza. C/ Pedro Cerbuna, 12. 50009 Zaragoza

Sociedad Asturiana de Educación Matemática *Agustín de Pedrayes*
Presidente: Juan Antonio Trevejo Alonso
Apdo. de Correos 830. 33400 Avilés (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas *Isaac Newton*
Presidenta: Ana Alicia Pérez
Apdo. de Correos 329. 38200 La Laguna (Tenerife)

Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática *Miguel de Guzmán*
Presidente: Antonio Arroyo
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Víllalar, s/n. 09006 Burgos

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García Cuesta
Avda. España, 14, 5ª planta. 02002 Albacete

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidente: Bienvenido Espinar Cepas
CPR Murcia II. Calle Reina Sofía n.º1. 30007 Murcia

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Manuel Rodríguez Mayo
Apdo. de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Extremeña de Educación Matemática *Ventura Reyes Prósper*
Presidente: Ricardo Luengo González
Apdo. de Correos 590. 06080 Badajoz

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*
Presidente: Juan A. Martínez Calvete
C/ Limonero, 28. 28020 Madrid

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: María José González López
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidente: Luis Serrano Romero
Facultad de Educación y Humanidades. Ctra. Alfonso XIII, s/n. 52005 Melilla

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas *Tornamira*
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea *Tornamira*
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.
Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra. 31006 Pamplona

Sociedad *Puig Adam* de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Facultad de Educación. (Sec. Deptal. Álgebra). Despacho 3005.
C/ Rector Rollo Villanova, s/n. 28040 Madrid

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas *A prima*
Presidente: Elena Ramirez Ezquerro
CPR. Avda. de la Paz, 9. 26004 Logroño

Sociedade Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)
Presidente: Manuel Díaz Regueiro
C/ García Abad, 3, 1ºB. 27004 Lugo

Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana *Al-Khwarizmi*
Presidente: Onofre Monzó del Olmo
Departamento de Didáctica de la Matemática. Apdo. 22045. 46071 Valencia

Societat Balear de Matemàtiques *Xeix*
Presidente: Josep Lluís Pol i Llompart
C/ Martí Rubí 37/alts. 07141 Sa Cabaneta (Marratxí). Islas Baleares

suma+ 61
Junio 2009, pp. 63-70

Piero della Francesca y el engaño de los ojos. I El espacio

Piero di Benedetto d'Franceschi (1416ca -1492), conocido como Piero della Francesca, era natural de Borgo Sansepolcro, un pueblo pequeño en el alto Tíber. Además de pintor fue matemático y realmente combinó ambas profesiones, ilustrando con dibujos sus libros de matemáticas y valiéndose de las matemáticas en su trabajo de pintor. En este cuadro esa simbiosis es patente, aunque, al mirarlo con ojos matemáticos nos llevaremos más de una sorpresa. En la Pala di Brera *nada carece de intención; está llena de engaños visuales y de guiños matemáticos. Trataremos de desvelar al lector algunos de ellos, referentes al espacio, en esta entrega de* Arte con ojos matemáticos, *dejando para la siguiente los relativos a la luz .*

Pala di Brera o Sacra Conversazione, Piero della Francesca, ca. 1472, Pinacoteca di Brera, Milán

Francisco Martín Casalderrey
IES Juan de la Cierva (Madrid)
fmc@revistasuma.es

Piero matemático

De la vida de Piero se sabe poco. Vasari en *Le vite* dice de él:

> Piero estudió matemáticas en su juventud; y, aunque desde los quince años se había encaminado a la pintura, nunca abandonó el estudio de esta ciencia. [...] Fue Piero un grandísimo estudioso del Arte, se ejercitó mucho en la perspectiva, y alcanzó un altísimo conocimiento de Euclides. Comprendió mejor que todos los demás geómetras el trazado de los giros de los cuerpos regulares, y las mejores explicaciones que sobre estos asuntos que existen, provienen de su pluma.

Nació en el Borgo Sansepolcro (Toscana) en la segunda década del Quattrocento. En una familia relativamente acomodada dedicada al comercio. Su padre fue por dos veces concejal de Sansepolcro. Debió, por tanto, Piero, como era habitual entre los hijos de los comerciantes, acudir a una *scuola d'abacco*, donde aprendería rudimentos de aritmética, geometría y un poco de álgebra y contabilidad.

Sus estudios como pintor, parece que empezaron como aprendiz en algún taller en su pueblo natal, hasta que sus capacidades personales superaron el estrecho marco geográfico de su entorno y tuvo que viajar a Florencia y a otras cortes italianas renacentistas. Viajó también a Roma, donde trabajó al servicio del Papa Pio II, pero sus frescos en las estancias vaticanas, fueron destruidos poco tiempo más tarde, durante el pontificado de Julio II, para ser sustituidos por los de Rafael.

Su obra artística fue poco conocida y estudiada hasta prácticamente el siglo XX. En los noventa se restauraron sus frescos del *Ciclo de la Vera Cruz* de la Basílica de San Francisco en Arezzo, que son una auténtica maravilla.

Fue maestro y amigo de Luca Pacioli, el autor de la *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalità* (1494) y *De Divina Proportione* (1497) natural también de Sansepolcro, al que, como veremos retrató en la *Pala Montefeltro*, en el papel de San Pedro Mártir de Verona.

En sus últimos años, con la vista ya muy escasa, redactó los tres libros matemáticos que han llegado hasta nuestros días: *De prospectiva pingendi*, *Trattato d'abaco* y *De quinque corporibus regularibus*; aunque Vasari afirma que escribió muchos otros que no nos han llegado.

De prospectiva pingendi, es un expéndido tratado de cómo dibujar en perspectiva, no sólo un paisaje o un interior arquitectónico, sino incluso la figura humana.

El *Trattato d'abaco,* según confiesa el autor en la introducción, no fue escrito para su uso en una escuela de ábaco, sino a petición de sus amigos, probablemente, artesanos como él de la pintura. Por lo demás su estructura es similar a la de otros tratados de ábaco, con una única novedad muy significativa: el peso de la geometría es mucho mayor de lo habitual. De hecho, 48 de las 127 páginas están dedicadas a ella.

En el ámbito meramente aritmético el *Trattato d'abaco* puede servir de muestra de otros tratados de la época. Veamos como ejemplo cómo introduce la regla de tres:

> Siete varas de tela cuestan nueve libras, ¿cuánto costarán cinco varas?

La libra era una moneda de la época, cuyo nombre derivaba del antiguo valor de una libra (de peso) de plata. Cada libra florentina estaba dividida en 20 sueldos, y estos en 12 dineros, exactamente como las libras esterlinas, divididas en 20 chelines y estos en 12 peniques, hasta la reforma decimal de 1971. La respuesta al problema es la siguiente:

> Deberás hacer esto: multiplica la cantidad que desees saber por lo que cuestan las siete varas de tela, que eran 9 libras, esto es 5 por 9, que hacen 45; divide después el resultado por 7, obtendrás 6 libras y te restarán 3 libras; conviértelas en sueldos y obtendrás 60, divídelos por 7, te dará como resultado 8 sueldos y te restarán otros 4; trasfórmalos en dineros, eso hace 48; divide otra vez entre 7, el resultado es 6 dineros y 6/7. Por tanto tendrás que 5 varas de tela a ese precio costarán 6 libras 8 sueldos 6 dineros y 6/7.

En el *Libelus de quinque corporibus regularibus* retoma muchos de los problemas geométricos del tratado de ábaco, pero, en algunos casos, de manera más desarrollada y completa. El objetivo central de este libro es el estudio de los cinco sólidos platónicos: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el icosaedro y el dodecaedro.

Los problemas presentados en este tratado son del tipo:

> Tomemos un cuerpo esférico cuyo diámetro mida 7. Quiero poner en él una figura con cuatro caras triangulares equiláteras, de manera que cada vértice toque la circunferencia [sic]. ¿Cuánto medirán las aristas?

Como aproximación de π usa 22/7. Estudia también en el *Libelus* seis de los trece poliedros arquimedianos.

Como vemos, Piero, además de un pintor excelente, fue un matemático de cierta altura en el contexto de su época, y aunque esta faceta de su vida sea mucho menos conocida para el gran público, era obligado hacer referencia a ella en esta sección por ser SUMA una revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Además, como veremos, sin esta consideración no se podría entender la obra artística de Piero della Francesca en su conjunto, ni de la *Pala di Brera*, objeto central de este artículo, en particular.

La *Pala di Brera*

El cuadro de Piero titulado *Sacra conversazione* o *Pala Montefeltro*, viene denominándose unánimemente desde el ochocientos *Pala di Brera*, por encontrarse en la actualidad, y desde las requisiciones napoleónicas, en la Pinacoteca de Brera, en Milán.

Observándolo, vemos un espacio arquitectónico de estilo clásico representado en perspectiva cónica central, casi absolutamente simétrico, en su disposición. Destaca lo que parece ser el ábside de una iglesia que en una primera impresión parece de planta semicircular. Los arcos de los lados, nos hacen pensar en una planta de dos naves perpendiculares. El ábside se cubre con una bóveda de cañón cubierta de casetones. La bóveda termina en un cascarón a cuarto de esfera, cubierto interiormente por una concha de vieira gigante, desde la que pende sostenido por una cadena dorada un huevo.

También aparentemente en semicírculo, se disponen nueve personajes agrupados que rodean a la Virgen, que sentada en un trono, con las manos juntas, sostiene sobre el regazo al Niño, que relajadamente distendido parece que duerme.

La composición de los personajes resalta la simetría de la arquitectura y la rubraya; la Virgen junta las manos y nos mira frontalmente resaltando el eje vertical. Los restantes personajes se reagrupan en dos tríos de santos y otras dos parejas de ángeles, dispuestos también de manera simétrica con respecto al eje central. La simetría sólo se rompe, de una manera muy marcada, en la disposición del donante, arrodillado a la derecha en el primer plano. Se trata de Federico de Montefeltro, Duque de uranio, personaje controvertido, apasionado y apasionante de la Italia del *Quattrocento,* vestido con una armadura de gala y como en todos sus retratos, de perfil, ya que había perdido el ojo derecho y parte del entrecejo en un torneo. La asimetría en la disposición de Federico resalta por ausencia la reciente muerte de su mujer Battista Sforza, pocos meses después del nacimiento muy esperado de su primer hijo varón, Guidobaldo. La crítica no se pone de acuerdo en la datación del cuadro, aunque la mayoría de los autores lo situan entre 1472, año del nacimiento de Guidobaldo y 1474.

La palabra *pala* en italiano, hace referencia a un cuadro de altar, y la de Brera parece ser que estaba destinada en un primer momento a la iglesia de San Donato degli Osservanti, donde fue enterrado Federico, para trasladarse a la iglesia de San Bernardino, concebida como mausoleo para los Montefeltro, una vez que ésta fue acabada. El traslado a Milán, sede actual, se realizó en 1811, en las requisiciones hechas por Napoleón, en las que participó el matemático Gaspar Monge.

Los santos son, de izquierda a derecha, San Juan Bautista, patrono de Battista Sforza, San Jerónimo y San Bernardino de Siena, de la orden franciscana, canonizado en 1450; en la derecha están San Francisco, mostrando sus estigmas, San Pedro Mártir de la orden dominicana, con la herida en el cráneo que le causó su asesino, y San Juan, con su evangelio en la mano.

Pala di Brera, Piero della Francesca, Pinacoteca de Brera Milán (detalle). De izquierda a derecha, San Francisco, San Pedro Mártir (retrato de Luca Pacioli) y San juan Evangelista

Sabemos que el rostro de uno de los santos retrata a un amigo de Piero. Se trata de fra Luca Pacioli, otro importante matemático renacentista. Los rostros de los ángeles, al contrario que los de los santos, resultan mucho menos realistas, probablemente era más difícil encontrar caras de amigos a los que retratar como ángeles y Piero los crea de su propia imaginación, vistiéndolos con telas lujosas, decoradas con joyas variadas.

Simbólicamente el cuadro establece un paralelismo entre la arquitectura representada y los personajes. Así la Virgen, en el centro, se identifica con el edificio que simbólicamente representa la Iglesia, como comunión de los fieles. Además, las cabezas de los santos están dispuestas en correspondencia con los pilares corintios acanalados del edificio y los ángeles con los paneles de mármol que decoran el ábside, de los cuales, el central, de pórfido, es el único que vemos de frente y se sitúa exactamente detrás de la Virgen.

Por último está la concha y sobre todo el huevo que, en el plano de la imagen, pende sobre la cabeza de la Virgen. Parece ser que no era extraño en las iglesias colgar huevos de avestruz, objeto extraño que podía atraer la atención de los visitantes, símbolo según algunos de la virginidad y según otros de la Iglesia.

Con ojos matemáticos

Empecemos a mirar con ojos matemáticos y comencemos analizando el espacio delimitado por la arquitectura que vemos en el cuadro. Aprovechándonos de la simetría haremos el trazado de la mitad izquierda, para luego duplicarlo de forma especular sobre la derecha. El resultado aproximado es el siguiente (ver figuras 1 y 2).

El soporte está formado en la actualidad por ocho tablas de madera dispuestas horizontalmente, pero parece demostrado que originariamente el número de tablas era nueve. Podemos suponer, sin por ello dar mucho margen al error, que el cuadro era, por tanto, de una altura aproximada de 9/8 de la actual.

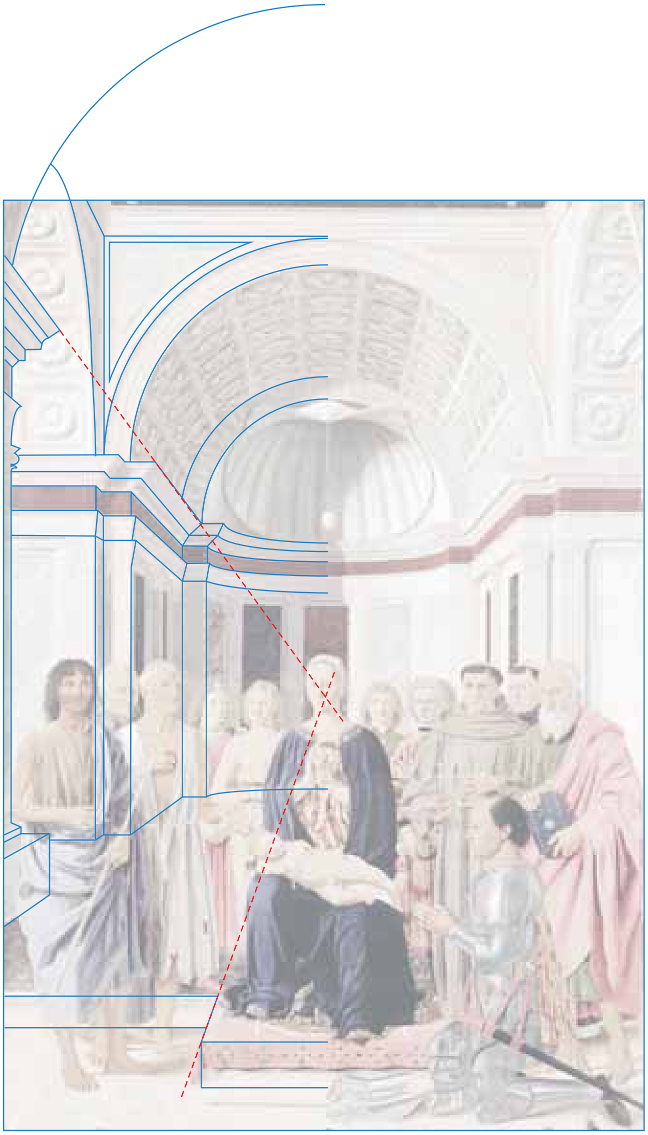


Figura 1. Trazado de la arquitectura de la *Pala di Brera*, con el punto de fuga

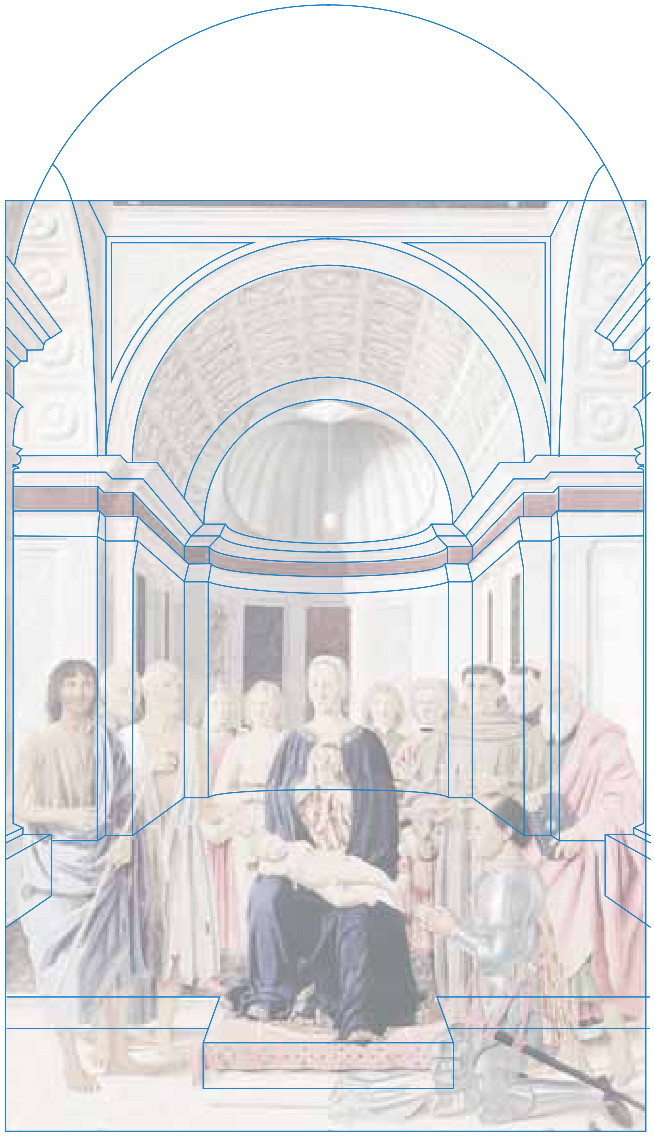


Figura 2. Compleción por simetría del trazado de la arquitectura de la *Pala di Brera*

Observando el proceso vemos que la simetría del edificio representado es total, con excepción hecha de una estrecha franja en el lado derecho, que en la figura 2 viene marcada por las líneas arquitectónicas que sobresalen del contorno del cuadro. Se sabe, a raíz de la restauración llevada a acabo en 1982, que las dimensiones del cuadro original fueron recortadas en todos sus lados, pero fundamentalmente en la parte inferior.

Si observamos en detalle los arranques de los arcos que se ven sobre las molduras en los dos laterales, veremos que no pueden corresponder a la parte final de los que vemos en escorzo a ambos lados, sino que son los extremos de un nuevo arco, paralelo a los del ábside y al plano de la imagen, que hemos completado en las figuras 1 y 2. El recorte en los laterales y en la parte superior, serían, en nuestra opinión mucho menores y probablemente ocasionados sólo por el normal deterioro de los cantos sufrido en los traslados. El inferior, sin embargo, correspondería a una tabla entera.

La reconstrucción de las medidas originales. Una hipótesis

Las medidas actuales de la tabla son 170 cm × 250 cm. Si añadimos en vertical 1/8 del total obtendríamos unas medidas de 170 cm × 281 cm, faltando por considerar los recortes laterales y superiores. Es razonable pensar, al menos, en el terreno de la hipótesis, que al encargar la tabla al carpintero se le dieran una medidas determinadas, y que probablemente una de las dos se expresase en un número entero de unidades de medida. Pues bien, la unidad de medida de longitud usada en esa época era el *braccio fiorentino*, que equivale a 58,36 cm.

Expresadas las medidas en brazos florentinos vemos que la anchura corresponde prácticamente a tres brazos florentinos (175,08 cm) y, multiplicando esta altura por el número áureo, Φ, obtendríamos 283,29 cm. La coincidencia numérica hace bastante plausible la hipótesis. En ese caso, el cuadro original sería un rectángulo áureo de tres brazos florentinos de ancho, que habría sufrido un recorte de aproximadamente un octavo de su altura total en el lado inferior, un par de centímetros en el borde superior y otros recortes similares a ambos lados, algo mayor el de la derecha (figura 3).

El espacio en la *pala* de Piero della Francesca

La perspectiva matemática, inventada poco tiempo antes por Brunelleschi y descrita por primera vez por Leon Battista Alberti en *De pictura* y años después por el mismo Piero della Francesca en su *De prospectiva pingendi*, alcanza un grado altísimo de perfección en la concepción del espacio en el que se desarrolla la escena de la *Pala Montefeltro.* Intentaremos deshacer el proceso de seguido por Piero, para, de esta manera recomponer el espacio que vemos representado en el cuadro.

El proceso de representación en perspectiva no es siempre inversible; es necesario para poder deshacerlo valerse de unos ciertos recursos y poder tener algún dato sobre lo representado. Necesitamos en primer lugar encontrar en la imagen un cuadrado que se sitúe en un plano perpendicular al plano de la imagen es decir paralelo al suelo en un plano horizontal. Usándolo podremos tomar medidas en los planos en profundidad, paralelos al del cuadro, determinar el punto de vista, es decir, la distancia a la que se debe situar el espectador para poder ver el cuadro de manera que la perspectiva resulte realista. Podremos también determinar la planta de la iglesia que vemos y la situación relativa a ella de los personajes representados.

1. La peana sobre la que está el sitial de la Virgen es un cuadrado. Observemos la plataforma en la que se encuentra el sitial de la Virgen. Esta cubierta por una alfombra que hemos reproducido en la figura 4. La alfombra, orlada por una cenefa estrellada, tiene dibujada una estrella de ocho puntas formada por dos cuadrados entrelazados que entre sí forman un ángulo de 45º. Si observamos la distancia de los vértices visibles de esa estrella en el lado izquierdo de la imagen y en el frontal, veremos que la separación de la cenefa es aparentemente la misma. Por simetría, hemos de suponer que la alfombra es cuadrada. Pero si nos fijamos, la cenefa cuelga por delante en su totalidad, mientras que a los lados, casi media cenefa se encuentra sobre la peana de la virgen. Podría esto hacernos pensar que la plataforma

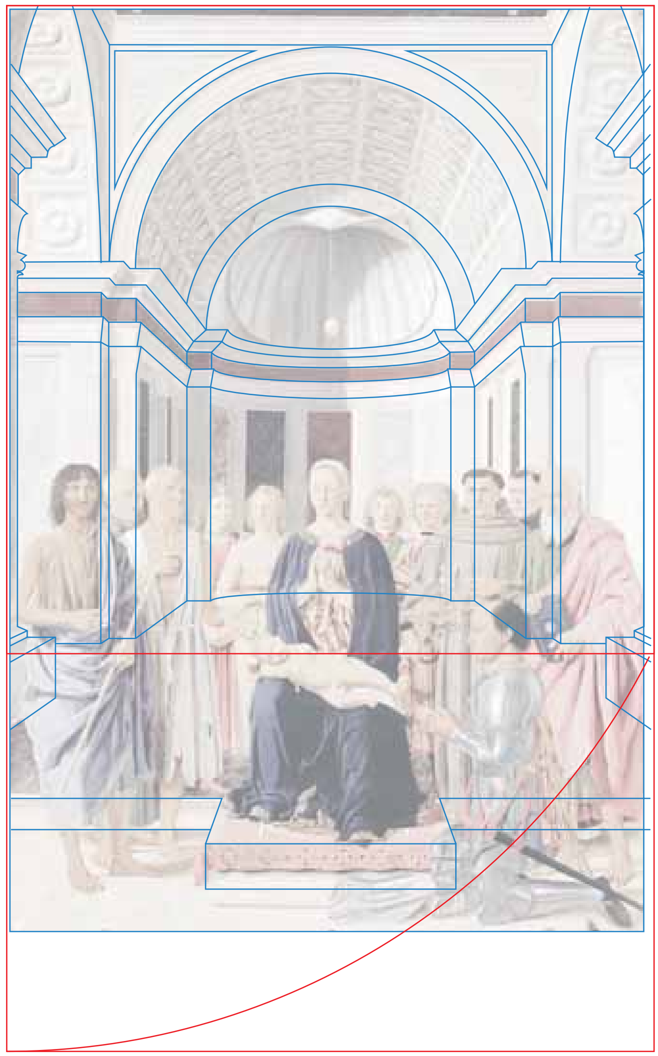


Figura 3. Medidas originales probables de la *Pala di Brera*, formando un rectángulo áureo de tres brazos florentinos de anchura, es decir unos 175 cm × 283 cm, eso significaría que ha sido recortada en unos 33 cm en altura y unos 5 en anchura

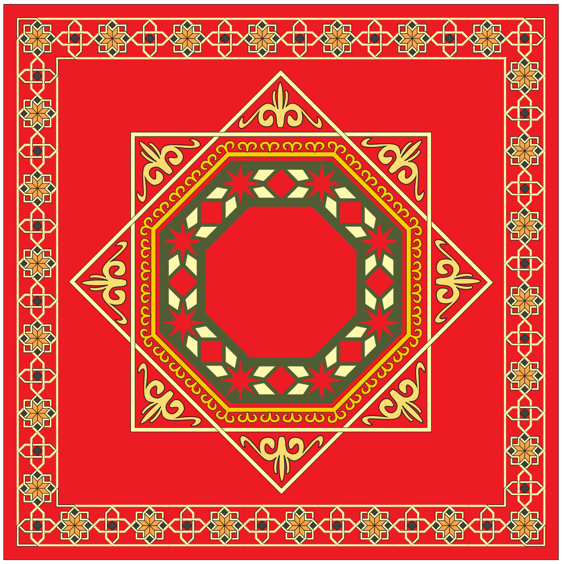


Figura 4. Reproducción de la alfombra bajo el sitial de la Virgen en la *Pala di Brera*

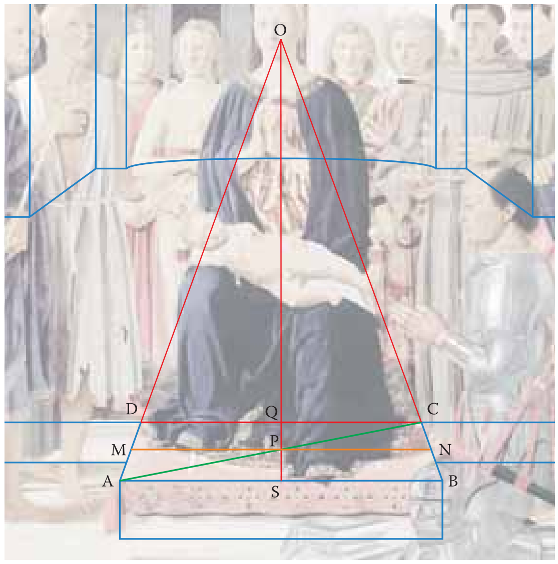


Figura 5. Partición en cuatro cuadrados de la peana de la Virgen

sea rectangular, pero, si analizamos que al estar ésta unida al suelo del presbiterio, la alfombra no puede colgar por detrás, necesariamente y aun siendo ambas, peana y alfombra cuadradas, el trozo que cuelga por delante ha de ser más que el que cuelga a cada lado. Por tanto, podemos afirmar que la Virgen se encuentra sobre una peana cuadrada.

II. El punto de fuga está sobre el rostro de la Virgen. Esto es fácilmente observable prolongando líneas perpendiculares al plano del dibujo y observando dónde se cortan. En la figura 1 hemos usado la de la arista de la cornisa que bordea el ábside y reaparece en el lado izquierdo de la imagen, y una de los lados de la peana sobre la que está sentada la Virgen. En la figura 5 lo hemos señalado con la letra *O*.

III. El eje de simetría del cuadro, divide la peana de la Virgen en dos partes iguales. Esto es obvio, ya que la arista frontal de la peana, es paralela al plano del dibujo, y la línea que pase por su punto medio y por el punto de fuga, es decir el eje de simetría del cuadro, es la mediatriz de dicha arista.

IV. Dividimos la peana en cuatro. Para ello, trazamos la diagonal, figura 5, y una paralela a la arista frontal por el punto de intersección de la diagonal y el eje de simetría. Es decir, sabiendo que *ABCD* es un cuadrado, trazamos la diagonal *AC*, que corta al eje central en *P* y trazando una paralela a *AB* por *P* obtenemos *MN*. Los cuadriláteros *ASPM*, *BNPS*, *CQPN* y *DMPQ* son todos cuadrados e iguales.

V. Ajedrezado del suelo. Usando ahora uno de estos cuadrados, por ejemplo *CQPN*, y trazando una diagonal, podemos formar una retícula de cuadrados sobre el suelo. El resultado del proceso lo podemos ver en la figura 6, en la que hemos cuadriculado el plano en el que se encuentra el presbiterio usando como tesela el cuadrado de la peana de la Virgen.

VI. Medición del Espacio. El proceso anterior nos permite medir distancias en el espacio. Para usar como medida la peana de la Virgen observemos que San Juan Bautista, el primero de los santos por la izquierda mide 3/2 del lado de dicha peana. Si atribuimos una medida al santo de 175 cm, entonces, el lado de la peana sería de 116,7 cm, que es aproximadamente dos brazos florentinos.

Las medidas totales, expresadas en brazos, serían aproximadamente las siguientes (figura 6): La nave mide de anchura 8 brazos florentinos; la longitud visible la podemos dividir en varios tramos; el más cercano a nosotros mide, desde el borde del cuadro original, hasta la línea que delimita el presbiterio, 6 brazos; el tramo comprendido entre la línea del presbiterio y la más cercana del cruce de la nave y el crucero es un cuadrado de 8 brazos de lado, al igual que el cuadrado delimitado por el cruce de las naves; el espacio situado debajo de la bóveda de casetones mide 10 brazos de longitud por 8 de anchura y el ábside en profundidad mediría algo más de 2 brazos. El espacio total resultaría así mucho más profundo de lo que aparenta y mucho menos monumental por su anchura y su altura.

Las medidas resultan por tanto sorprendentes. Por ejemplo, la anchura de la nave mediría sólo 467 cm, el huevo, estaría a una distancia horizontal de la cabeza de la Virgen de 26 brazos, es decir, unos 15 metros. El diámetro de este último sería de 23 cm, lo que confirmaría que es un huevo de avestruz.

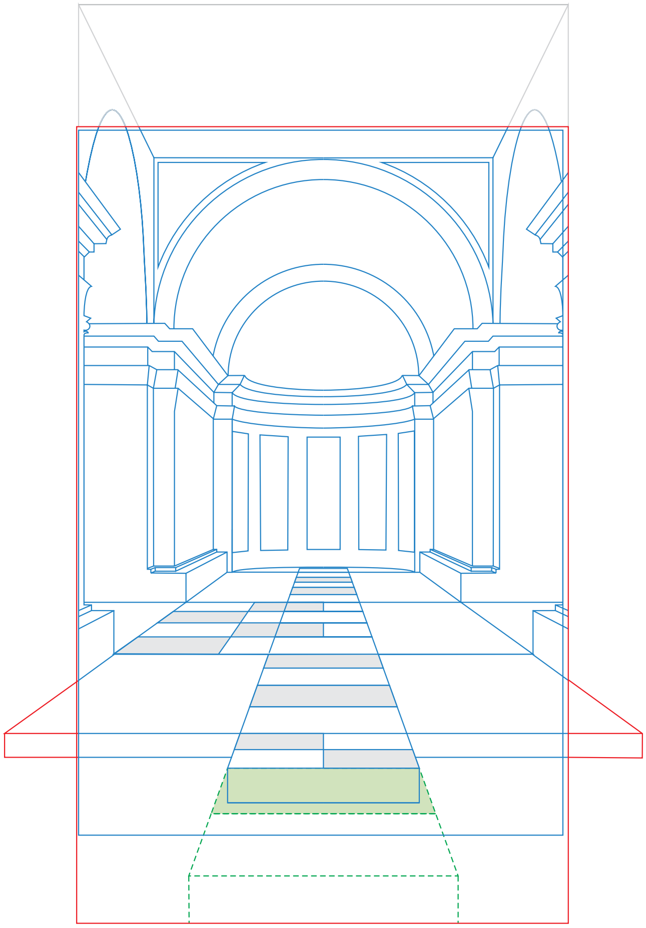


Figura 6. Esquema de la arquitectura representada en la *Pala de Brera.* En trazo azul las líneas en el interior del cuadro, el rectángulo azul delimita las dimensiones actuales, el rectángulo rojo las posibles dimensiones del cuadro originalmente, en gris se ha prologado hacia arriba la arquitectura, por último, las líneas verdes a trazos, prolongan hacia el frente el plano del suelo del presbiterio y la plataforma de la Virgen, hasta el límite de las dimensiones originales

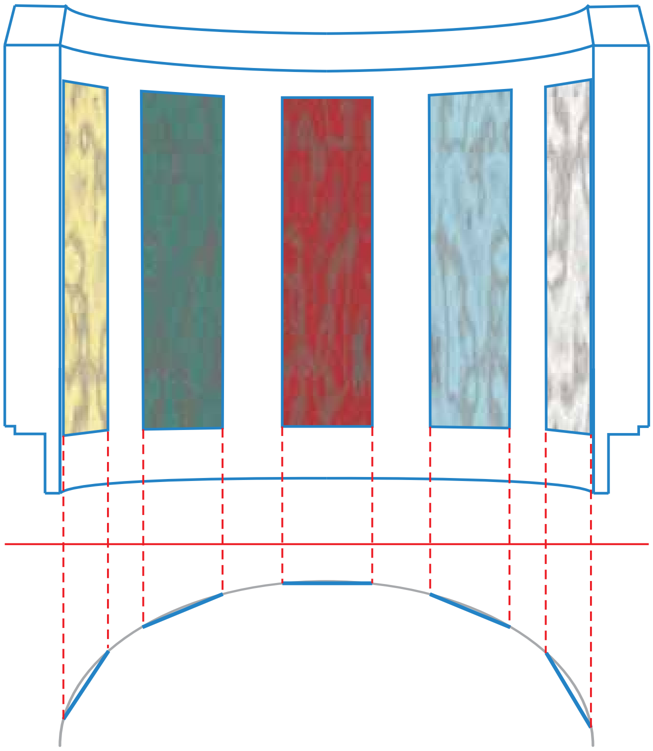


Figura 7. Reconstrucción de la planta del ábside en la *Pala di Brera*

VII El ábside no es semicircular. En efecto, como ya hemos señalado el ábside mide algo menos de 2 brazos de profundidad mientras que de achura mide 7, ya que el arco que lo define tiene medio brazo de anchura. Resulta así semielíptico, con ejes de 7 y 2,15 brazos, Lo que supone que la elipse sea inscribible en un rectángulo áureo. Figura 7.

VII La Virgen mide más de dos metros de altura. Hemos tomado como medida de San Juan Bautista 1,75 metros. San Juan y la Virgen, se encuentran aproximadamente en el mismo plano, paralelo al del dibujo. Una persona sentada en una silla disminuye su altura en un 20% aproximadamente, variando poco este porcentaje con la altura de la silla y, puesto que la cabeza de la Virgen sobresale sobre la línea de las de los santos, aun considerando que éstos se encuentran en un plano unos 15 cm más bajo que el del sitial de la Virgen, ésta mediría en proporción 2,08 m de altura. Aunque pase desapercibido a simple vista, la Virgen es desproporcionadamente grande en relación con los santos. Obviamente Piero sigue también en este cuadro la tradición medieval, que establece la jerarquía en la composición en relación con el tamaño con el que los personajes son representados. Los ángeles, por el contrario resultan ser muy bajitos, poco más de 1,50 m.

IX Reconstrucción de la planta. Estamos ya en condiciones de reconstruir la planta del espacio escénico representado en la *Pala Montefeltro*. De acuerdo con los datos anteriores, la planta sería aproximadamente la siguiente, figura 8.

Como ya hemos señalado las dimensiones sorprenden; el espacio, que parecía mucho menos profundo resulta ser enorme, de 20 m; la anchura es de medidas casi domésticas, no alcanzando siquiera los cinco metros.

X Determinación del punto de vista. En su *De prospectiva pingendi,* escrito en la misma época en que pintó la *Pala*, Piero establece las reglas de la perspectiva matemática. En esencia, éstas no difieren de las de Alberti en su *De pictura* (1436), ni de las que definió a principios del *Quattrocento* Brunelleschi.

El proceso propuesto es el siguiente. Queremos representar en el plano del dibujo *ABCD* un cuadrado perpendicular a él y de las mismas dimensiones, de la manera en la que se vería desde un punto *V*, situado sobre la perpendicular al plano *ABCD* por *O*. Alargamos el plano *ABCD* hacia uno de sus lados y dibujamos, en la horizontal que pasa por O, un punto V' de manera que *OV* sea igual a *OV'*. Trazamos la línea *V'B* que corta a *AD* en P; por P trazamos una horizontal que corta a *OA* y *OB* en los puntos *A'* y *B'*. El trapecio *ABB'A* es la representación buscada del cuadrado .

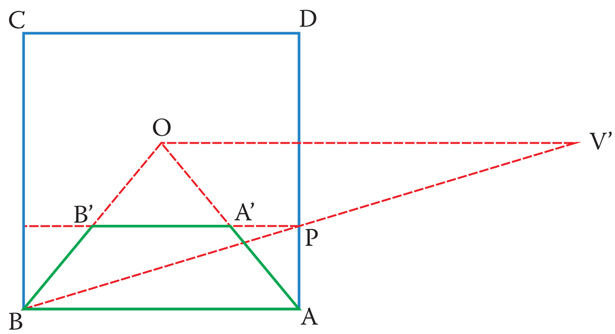


Figura 9. Método de representación en perspectiva propuesto por Piero en *De prospectiva pingendi*

Aplicando este proceso de manera inversa a la *Pala de Brera,* obtenemos la figura 10, que fija el punto de vista a una distancia aproximada de 5,8 m, es decir 10 brazos florentinos.

En la siguiente entrega terminaremos el análisis matemático del cuadro, mirando en él la luz con ojos matemáticos.

ARTE CON OJOS MATEMÁTICOS ■

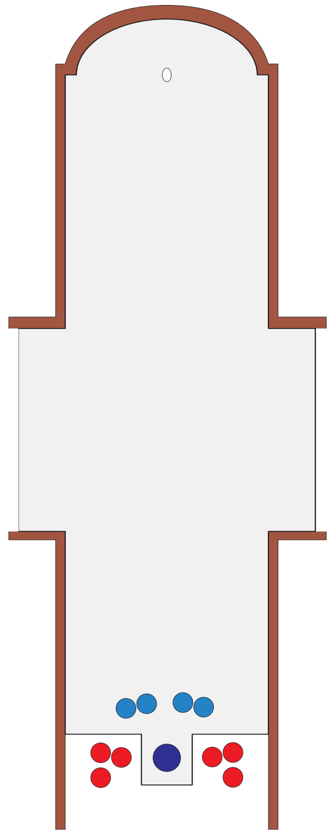


Figura 8. Reconstrucción de la planta en rojos ubicación aproximada de los santos, en azul oscuro la Virgen y en azul claro los ángeles; el huevo de avestruz aparece en blanco

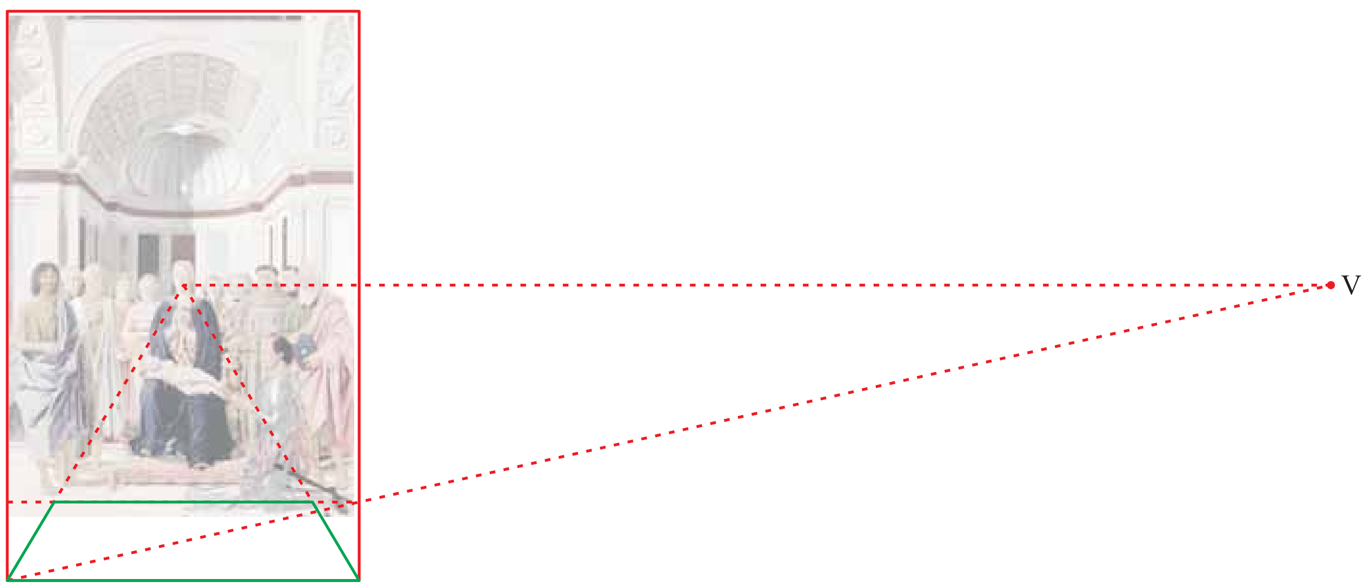


Figura 10. Determinación del punto de vista en la *Pala de Brera*, siguiendo el método de Piero della Francesca

suma+ 61
Junio 2009, pp. 71-79

En las ciudades invisibles X

A través de la ventana la ciudad aparece conexa y cubriendo el mundo entero –*Trude*–, pero al salir a la calle veo rectángulos de cielo entre los edificios contiguos de cada manzana reticular –*Zora*–. El carácter conexo de la ciudad era sólo aparente, las casas y rascacielos no se adosan a sus vecinos, sino que mantienen una separación mínima que les permita vibrar sin peligro durante un seísmo. En el paseo me despisto. Pensaba haber salido ya de la ciudad, pero todavía estoy en ella –*Zoe*–. Supongo que atravieso limbos imperceptibles buscando un centro inexistente o ubicable en cualquier lugar –*Pentesilea*–. Desciendo las escaleras que conducen al metro y otra ciudad aparece bajo tierra –*Argia*–, más bulliciosa si cabe que la de arriba. El mapa de estaciones y recorridos reproduce en el plano un ovillo tridimensional –*Zobeida*– que recorren a diario millones de personas. Está salpicado de signos indescifrables que, en lugar de ayudarme, inducen a engaño –*Ipazia*–. Cuando vuelvo a emerger a la luz del día me encuentro un panorama similar. Inconscientemente elaboro relaciones de equivalencia –*Zirma*– para poder fijar imágenes, ideas y cosas en mi memoria.

Durante los últimos instantes de vigilia admito haber vivido la contradicción esencial del viajero: temer y anhelar sentirse perdido. La antigua Edo no es una, sino muchas ciudades a un tiempo –*Eutropia*–. Ni desde cien metros de altura se ven sus confines. Una metrópoli real en la que coexisten muchas ciudades invisibles y cuya extrema complejidad suaviza una excelente gestión de la cantidad. Una gestión regida por leyes cuyo conocimiento aliviará el despiste del visitante: *...el día que llegue a conocer sus leyes poseeré finalmente mi imperio, aunque jamás consiga conocer todas las ciudades que contiene*' –Kubali Jan–. *Descubrir un sistema coherente y armonioso por debajo de las infinitas deformidades y desarmonías* –Kublai Jan– alivia al visitante y la ciudad le recompensa con un tiempo y un espacio libres de infierno.

En otras ciudades asiáticas el cumplimiento de las reglas no escritas no garantiza un espacio y un tiempo sin agobio. ¿Significa eso que sus leyes no son realmente identificables? ¿Acaso inexistentes? ¿Qué ley asegura la identificación de las demás? El infierno reside ahí, donde el aprendizaje no asegura la ciudadanía.

Esta es la última visita a las ciudades invisibles. Pero antes de abandonarlas recapitulemos el viaje con relación a tres características. Primero, relacionar la obra con las matemáticas. Segundo, ver que algunas interpretaciones artísticas de las ciudades invisibles también se han basado en aspectos matemáticos del texto. Por último, señalar el potencial educativo de esta obra de Ítalo Calvino.

Diseño y maquetación FMC

Miquel Albertí Palmer
IES Vallés, Sabadell
ciudadesinvisibles@revistasuma.es

Las ciudades invisibles y las Matemáticas

En las interpretaciones realizadas el referente principal fue la lectura de términos, conceptos e ideas matemáticas presentes en el texto. El otro fue la inspiración matemática infundida por el texto. Su lenguaje salpicado de conceptos matemáticos hace visible lo invisible y verosímil lo irreal. Una posible conclusión es que tal vez las ciudades de las que habla Calvino sean invisibles, pero no por ello son imaginarias. Ni irreales.

De la lectura más literal y objetiva y la más libre e interpretativa, se derivan modelos matemáticos para cada ciudad. Los primeros son directos, sacados del texto; los otros, indirectos, inspirados por el texto.

De ambos referentes, la lectura más literal y objetiva y la lectura más libre e interpretativa, se derivan modelos matemáticos para cada ciudad. Los primeros son directos, sacados del texto; los otros, indirectos, inspirados por el texto. Al desarrollar un modelo matemático de una entidad cualquiera, el matemático actúa como el artista. Ofrece una figura o una fórmula que resume los aspectos más relevantes de su interpretación. Tanto es así que mediante las ideas matemáticas del texto es posible elaborar una guía matemática de las ciudades invisibles estructurada en cinco bloques.

Las ciudades y la geometría

Se agrupan en esta serie aquellas ciudades y diálogos en los que se habla de magnitudes del espacio y de elementos determinados por cuestiones de magnitud: localización, longitud, perímetro, área, simetría…

Longitud:	*Zaira, Marozia*
Perímetro:	*Isaura, Leonia, Olinda*
Área:	*Olinda*
Hélice o espiral:	*Isidora, Fedora, Zobeida, Esmeraldina, Andria,* IX.b
Parábola:	*Esmeraldina*
Polígonos:	*Cloe, Sofronia, Ersilia, Procopia*, IX.a
Poliedros:	*Zoe, Pentesilea*
Figuras circulares:	*Anastasia, Moriana, Fílides, Eudoxia, Olinda,* IX.a
Cuerpos circulares:	*Fedora, Zenobia*
Retícula:	*Zora, Esmeraldina*, IX.a
Proyección ortogonal:	*Isaura*
Simetría:	*Valdrada, Eudoxia*
Vector:	*Diomira, Anastasia, Eufemia*, VI.a

Las ciudades y la topología

Ahora no importa la medida, sino las características que determinan la forma (punto, recta, curva). En esas ciudades se plantean algunas dicotomías, como las que conllevan las ideas de frontera (dentro/fuera), la de continuidad (continuo/discreto) y el concepto de dimensión.

Punto:	*Leandra*, *Olinda*, *Laudomia*
Línea recta:	*Esmeraldina*, *Pirra*, *Eudoxia*, II.b
Línea curva:	*Isidora*, *Fedora*, *Zobeida*, *Esmeraldina*,*Andria*, IX.b
Frontera (dentro/fuera):	*Despina, Zoe, Pentesilea*, VII.a
Conetividad/Continuidad:	*Eutropia*, V.b, *Esmeraldina, Trude, Cecilia, Laudomia, Pentesilea*, IX.b
Continuo/Discreto:	*Despina, Leandra*, V.b, *Laudomia*, IX.b
Dimensión:	*Esmeraldina, Moriana, Pentesilea*, V.a

Las ciudades y las relaciones

Se trata de ciudades en cuyos textos aparecen los conceptos de correspondencia 1–1, diferentes tipos de relaciones (de equivalencia, anti reflexiva, de orden), la recurrencia (composición de una función consigo misma), la intersección vacía (partición) o no vacía, y la correspondencia 1–1.

Partición/Intersección:	*Isidora, Dorotea, Maurilia, Laudomia*
Relación y clases:	*Dorotea, Zirma, Clarisa, Laudomia*
Recurrencia (fºf):	*Isidora, Zaira, Fedora, Ipazia, Olivia, Tecla, Laudomia*
Relación 1–1:	*Isaura, Valdrada, Eudoxia*
Combinaciones:	*Cloe, Zenobia, Esmeraldina,* I.b, IX.a
Cohesión estructural:	V.b, VIII.a

Una posible conclusión es que tal vez las ciudades de las que habla Calvino sean invisibles, pero no por ello son imaginarias. Ni irreales.

Las ciudades y los números

Son ciudades en las que aparecen números, sucesiones, se habla de cálculos o se plantean cuestiones de numerabilidad e infinitud.

Cantidades diversas:	*Diomira, Dorotea, Zora, Eufemia, Olivia, Fílides, Perinzia, Procopia*
Cálculos:	*Zenobia, Cloe, Perinzia, Raísa*
Sucesiones numéricas:	*Melania, Laudomia, Procopia*
Finito e infinito:	*Laudomia*
Numerabilidad:	*Leandra*
Límite:	IV.a, IX.b

Las ciudades y la lógica

La lógica está presente a lo largo de todo el texto de Italo Calvino, pero me refiero en este epígrafe a casos concretos, ciudades y diálogos, en los que el autor conduce al lector hacia contradicciones o paradojas, como la autodefinición. También se incluye aquí la modelización perfecta determinada por una correspondencia 1–1, pues conlleva implícita una paradoja muy señalada por Italo Calvino: ¿cuál es el objeto y cuál el modelo?

Paradoja:	*Eudoxia, Moriana, Argia,* I.b, III.b, IV.b, VII.b
Definición:	*Tamara*, III.a, VI.a
Cambio de significado:	*Ipazia, Olivia*
Identidad:	*Eutropia*
Objeto y modelo:	*Olivia, Ersilia, Esmeraldina, Eudoxia, Perinzia, Andria*

De esta clasificación pueden extraerse las ideas matemáticas más frecuentes del texto:

Recurrencia (fºf)
Frontera (dentro/fuera)
Conectividad (continuidad)
Paradoja (absurdo, contradicción)
Relación 1-1 entre el objeto y su modelo
(entre original y representado)
Figuras circulares (concéntricas)
Curva helicoidal (espiral)

Sólo hay dos sabios matemáticos explícitamente ligados a las ciudades invisibles: Pitágoras –en *Tamara*– y Tales –en *Andria*–. Sobre sus teoremas se levanta gran parte del conocimiento matemático.

La interpretación matemática no es gratuita. Está confirmada por los detalles geométricos y cuantitativos del texto y por el propio Calvino en su *Nota preliminar* a la edición castellana de la obra. Además, y como suele ocurrir con obras literarias calificadas como fantásticas, la lógica y el rigor del texto hacen verosímil lo que en un principio parece fantasía. Pero el lector no debe dejarse engañar por este argumento. Las ciudades invisibles no son fantásticas, sino verdaderas, y reales. ¿Quién no vive en *Diomira, Isidora, Dorotea, Zaira, Anastasia, Tamara, Zora, Despina, Zirma, Isaura, Maurilia, Fedora, Zoe* …? ■

Las ciudades invisibles y el Arte. Pedro Cano

Cloe, Pedro Cano

Moriana, Pedro Cano

Laudomia, Pedro Cano

Pedro Cano es un artista murciano que tuvo la oportunidad de conocer a Ítalo Calvino y que al fallecimiento de éste recibió el encargo de su viuda de completar el trabajo que ya había iniciado sobre *Las ciudades invisibles*. Sus 55 acuarelas se expusieron en otoño de 2005 en la *Galleria Falteri* (Palazzo Vecchio) de Florencia *http://www.falteri./Calvino.html* y en marzo

En *Cloe*, …líneas unen una figura con otra y dibujan flechas, estrellas, triángulos …

Moriana …no tiene espesor, consiste sólo en un anverso y un reverso, como una hoja de papel. Es una ciudad bidimensional. De nuevo no cabe sino aplaudir al artista al destacar la bidimensionalidad, el espesor nulo, la complementariedad de un anverso y un reverso de un objeto corriente extremadamente fino como una hoja de afeitar. Cano transforma esa hoja en bidimensional mediante el negativo del color.

Laudomia es la …ciudad triple, …cuanto más aguzan la mirada menos reconocen un trazo continuo … los que van a nacer se presentan puntiformes como motas de polvo, separados del antes y del después …las generaciones se sucederán hasta alcanzar cierta cifra y no seguirán adelante …y habrá un último habitante de Laudomia por nacer … Cano expresa el carácter puntiforme de los no nacidos todavía de un modo admirable, ya que por la intersección de las dos rectas que trazan el vértice del reloj de arena ideal sólo pasa un único punto.

de 2006 en la *Galleria del Leone* (Arsenale) de Venecia *http://www.galleriadelleone.com*. Varias de sus interpretaciones se dirían inspiradas por las ideas matemáticas del texto. Las reproducciones presentadas a continuación proceden del catálogo de su exposición en Florencia: CANO, P: *Le citta invisibili*, Edizioni Falteri Grafica, Milano, 2005.

Zenobia posee ...miradores cubiertos de techos cónicos ... que Cano retrata de forma literal.

***Zenobia*, Pedro Cano**

En *Pentesilea* ...hace tiempo que avanzas y no ves claro si estás ya en medio de la ciudad o todavía fuera ...¿O por más que te alejes de la ciudad no haces sino pasar de un limbo a otro y no consigues salir de ella? La acuarela de Cano difumina las intersecciones de los distintos limbos atravesados por el visitante. ¿Dónde acaba un limbo y comienza el siguiente? ¿Qué diferencia el interior del exterior de la Pentesilea del artista?

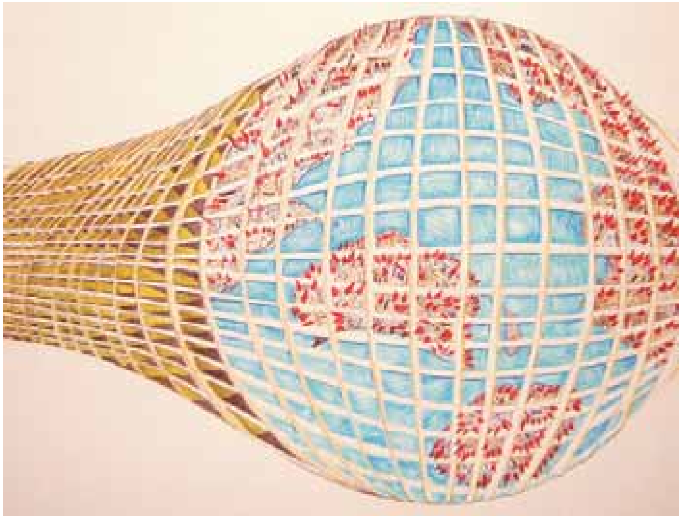
***Pentesilea*, Pedro Cano**

De *Procopia* destaca ...un pedazo de cielo azul en forma de trapecio ... Cano crea el trapecio sin ningún esfuerzo geométrico, sino con poesía. Basta con retirar la cortina de la ventana.

***Procopia*, Pedro Cano**

Las ciudades invisibles y el Arte. Colleen Corradi Brannigan

Colleen Corradi Brannigan es una artista italiana que está finalizando su trabajo sobre las ciudades invisibles. Su obra consiste en grabados, acuarelas, litografías y dibujos que pueden verse en *www.cittainvisibili.com*. Algunas de las ciudades de Corradi incorporan aspectos matemáticos presentes en el texto. Es el caso de *Trude*, *Valdrada*, *Pentesilea* y *Olinda*.



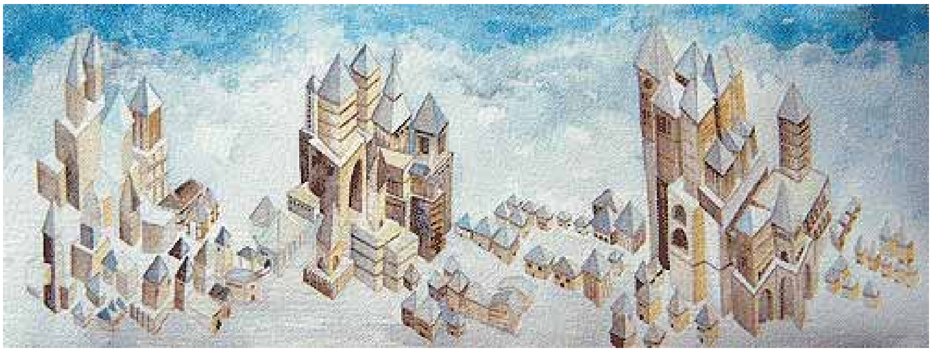
Trude, Colleen Corradi, ©2006

Trude es una ciudad continua: ...el mundo está cubierto por una única Trude que no empieza ni termina ... Extraordinario el modo en que Corradi interpreta el texto dibujando una ciudad atrapada en una característica urbana primordial como es la retícula, que cubre el mundo entero sin principio ni final. Una retícula, además, tridimensional.

Valdrada, Colleen Corradi, ©2006

Recordemos que de *Valdrada* ...al llegar el viajero ve dos ciudades: una directa sobre el lago y una de reflejo, invertida ...fue construida de manera que cada uno de sus puntos se reflejara en su espejo ...Las dos ciudades gemelas no son iguales, porque nada de lo que existe en Valdrada es simétrico: a cada rostro y gesto responden desde el espejo un rostro o un gesto invertido punto por punto. La Valdrada de Corradi es excelente por dos motivos. Por una parte, refleja la simetría de la ciudad. Por otra, reproduce lo que en matemáticas se llama inversión geométrica y que el autor de esta sección había pasado por alto en su momento. El lago donde se refleja la Valdrada de Corradi es circular. La perspectiva visual sugiere una ciudad reflejada con pináculos apuntando a hacia el centro del lago. A esto hay que añadir otro detalle. ¿Vemos Valdrada desde arriba, sobrevolándola, o desde abajo, sumergidos en el lago?

Los limbos de Corradi para *Pentesilea* son distintos de los de Cano. Sin embargo, conservan la ambigüedad remitiendo quizá a una configuración fractal tridimensional de la ciudad.



Pentesilea, Colleen Corradi, ©2006

Las interpretaciones artísticas ponen de manifiesto el hecho de que los autores no matemáticos no sólo toman como referente algunas ideas matemáticas del texto para sus obras, sino que a menudo aciertan a ver y a transmitir con gran claridad las claves fundamentales. Más de lo que debiéramos los matemáticos nos liamos en fórmulas y gráficos para explicar algo que puede expresarse y comprenderse de modo simple y claro. Por eso son necesarias las perspectivas distintas a la nuestra, para ver mejor y con mayor nitidez. Y esto puede ser muy útil en el ámbito educativo.

Olinda, Colleen Corradi, ©2006

Hay varias ciudades que Corradi interpreta con el desarrollo espiral tan frecuente en el texto de Calvino: *Melania*, *Anastasia* y *Olinda*. Ésta posee, como la del texto, carácter circular, pero su escalera de acceso se levanta como la de una superficie helicoidal.

Las ciudades invisibles y la Educación

No es difícil entrever el potencial educativo de una obra como *Las ciudades invisibles*. A su carácter interdisciplinario cabe añadir el de la interpretación de un texto. Ya se han llevado a cabo proyectos semejantes en la ESO en relación con la obra de Pedro Cano, pero pensé que un buen modo de cerrar esta sección sería ver si los alumnos de mi centro tomarían como referente alguna idea matemática del texto de Calvino a la hora de interpretar las ciudades que no pueden verse.

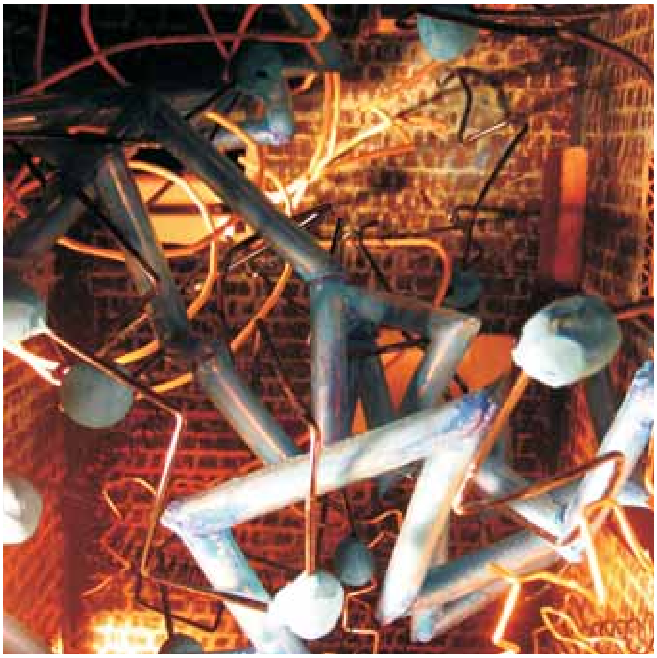
Moriana, Ingrid Aguilar, Meritxell Escusa, Berta Busuldu, Anna Rico

De las Matemáticas y del Arte y de dos de sus profesores (Josep Moreno y Miquel Albertí) en el *IES Vallès* de Sabadell, nació el proyecto *Viaje a las ciudades invisibles de Ítalo Calvino* consistente en una interpretación artística tridimensional de *Las ciudades invisibles*. Estaba dirigido al alumnado de primero de Bachillerato Artístico del centro, concretamente en el marco de la asignatura de *Volumen*, y organizado por los mencionados profesores con la colaboración de alumnos del CAP de Dibujo –Montse Duran, Lourdes Carmelo, Cèlia Prat, Montse Florensa, Diana Bernardos–.

El objetivo era doble. Por un lado, desarrollar en el alumnado una actitud creativa mediante una mirada artística interdisciplinaria y rica, utilizando el Arte como herramienta de reflexión y de creación al mismo tiempo. Por otro, ver si la reflexión y creación incorporaban o se basaban en aspectos matemáticos del texto, sin que en ningún momento se les obligase a realizar representaciones de este tipo.

Valdrada, Micael Katzman, Cirus Zamora, Lucas Valdepérez

Las limitaciones del trabajo se supeditaron a tres aspectos. Por una parte, no todas las ciudades incluyen elementos matemáticos, que eran los que se esperaba que aflorasen. Además, una lectura exhaustiva puede empachar al lector novel, mientras que lo importante era incentivar su capacidad de interpretar con claridad. Por último, cada una de las once series de ciudades de la obra de Calvino debería estar representada. De ahí que el trabajo se centrara en *Dorotea*, *Isaura*, *Zoe*, *Valdrada*, *Leandra*, *Esmeraldina*, *Eudoxia*, *Moriana*, *Argia*, *Trude* y *Olinda*. Las siguientes son algunas de sus construcciones.

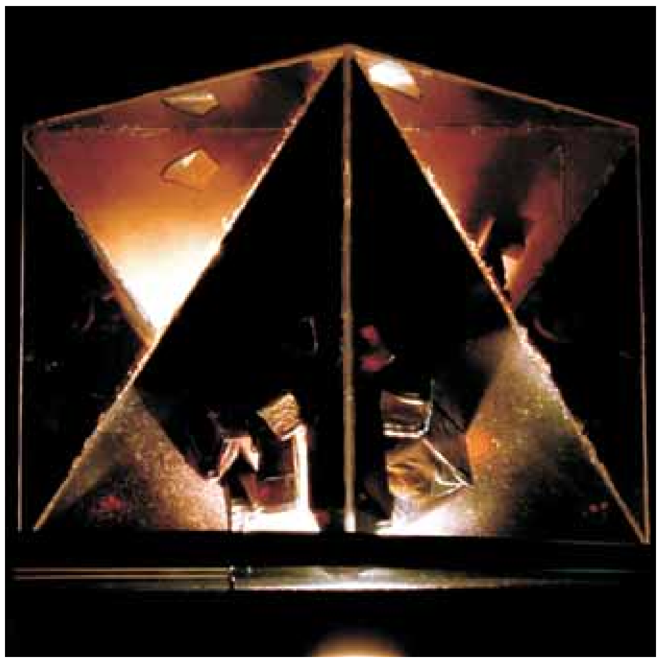


Esmeraldina, Marta Marquina, Judit Rifà

Dorotea, Rocío López, María Hernández, Neus Grau

Estas interpretaciones no se corresponden mucho con las expuestas a lo largo de esta sección. Sin embargo, convendremos con Josep Moreno en que:

> Trabajaron sobre la extracción de códigos del texto. Éstos fueron los puntos de partida, generalmente de tipo formal, que les proporcionaban la posibilidad de construir algo referencial. Lo cierto es que no partieron demasiado de lecturas matemáticas, aunque esto no significa que sus planteamientos no contengan reflexiones geométricas o matemáticas.
>
> En *Valdrada* partieron de la simetría y el reflejo especular, todo suspendido en el vacío. *Moriana* la construyeron a partir de la idea de límite, del plano separador que se abre en el espacio para obtener un diedro fruto de la proyección o prolongación del propio plano, y donde el contraste entre los dos lados resulta fundamental. En *Esmeraldina* fueron más literales, ya que la descripción de la ciudad era más evidente. Las calles y canales desordenados y entrecruzados invitan al caos y a la visión tridimensional de una estructura suspendida en el vacío. En *Dorotea* tomaron la forma del paraguas. Además de su carga alegórica, su forma permitía dividir con hilos el volumen y construir una estructura tan concreta como la descrita, donde las líneas determinan la forma actuando como límites espaciales.

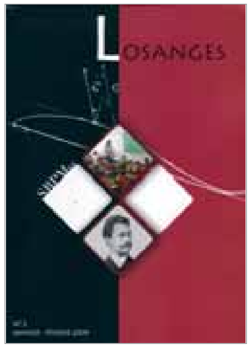


Eudoxia, Clara Lozano, Ariadna Muñoz, Albert Orenes

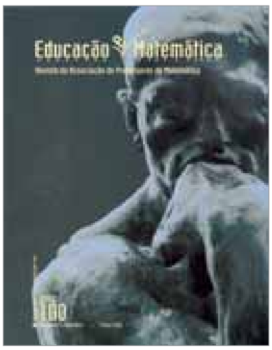
Aunque no de un modo literal, los estudiantes también basaron sus interpretaciones en ideas matemáticas. Siendo menos literales fueron más sutiles. El proyecto educativo no se detiene, sino que continuará para ampliarse a las tres dimensiones que han configurado esta sección: Literatura, Arte y Matemáticas. ■

Publicaciones recibidas

Epsilon
SAEM THALES
Vol. 26 (1) 2009
Sevilla
ISSN: 1131-9321



Losanges
SBPMeF
N.º3, Janvier-Février 2009



Educação e Matemática
Revista da Associação de Professores de Matemática
N.º 100, Novembro-Dezembro 2008
ISSN: 0871-7222

PNA. Revista de Investigación en Didáctica de las Matemáticas
Universidad de Granada
Vol. 3 n.º 3, marzo 2009
ISSN 1886-1350
http://www.pna.es

Grand N
Irem de Grenoble
N.º83, Avril 2009
Saint Martin d'Hères Cedex
ISSN: 0152-4682

suma+ 61
Junio 2009, pp. 81-91

Biblioteca

Mi presentación

Daniel Sierra Ruiz

Peligroso profesor de Matemáticas (con sus gafas y todo) secundado por sus dos hijas pequeñas atenta gravemente contra la seguridad de toda la policía municipal de Zaragoza. Este texto podría resumir lo que escribió cierto periódico de Zaragoza (que no nombraré por varios motivos) contra el firmante de *Mi biblioteca particular* de este número. De acuerdo, lo he ridiculizado un poco, pero no piensen que algunos textos que hace unos años escribieron sonaban menos ridículos. También lo he redactado con un leve tono humorístico, pero la verdad es que entonces aquellos infundios hicieron pasar a Carlos Usón por varios tragos desagradables y le dieron muchos quebraderos de cabeza.

Los hechos que dieron lugar a tal campaña de desacreditación se produjeron en unas fiestas del Pilar, y, en esencia, fue un acto ciudadano espontáneo de solidaridad e indignación ante varias actuaciones municipales arbitrarias y abusivas. Un acto de compromiso en el que participó Carlos. Y esta es una de las palabras que pueden definirle: compromiso. Fuera y dentro del aula. Compromiso social y compromiso con la didáctica de las matemáticas.

Claro, este último aspecto es el que más puede interesar a los lectores de *Suma,* pero me parece que Carlos es de esas personas que no puede separar el interior del exterior del aula; ni quiere. Me viene a la cabeza una ponencia suya en la que debía hablar sobre modelización de la realidad. Por supuesto, el asunto iba sobre matemáticas. Pero él habló, sobre todo, de la realidad del aula; de cuales son los problemas que les interesa solucionar a los adolescentes, de qué problemas se encuentran los emigrantes, incluso los hispanohablantes, y de los que les provocan al profesorado que afronta el reto con cierto grado de implicación. Cuando llevaba un rato largo dinamitando el sistema educativo a diversos niveles, dijo algo así como «A lo mejor pensáis que estoy siendo tendencioso… Pues sí, lo estoy siendo».

Compromiso. Lo podemos ver reflejado en todos y cada uno de sus trabajos o actividades, incluso en el texto que viene a continuación. Compromiso. Que le hace ver que incluso las Matemáticas necesitan una memoria histórica y lo lleva hasta sus últimas consecuencias. Compromiso. Que trasladado al

Daniel Sierra Ruiz (coordinador de la sección)
IES Benjamín Jarnés, Fuentes de Ebro (Zaragoza)
biblioteca@revistasuma.es

aula nos hizo quedarnos boquiabiertos al verlo reflejado en aquél *Variaciones sobre un mismo tema.*

Muchos lectores recordarán también la sección que durante años escribió junto a Ángel Ramírez. Yo era uno de los lectores fijos. Empezaba la revista por esa parte y leía los artículos con fruición. Así que, lo que en realidad ocurre, es que echaba de menos aquellos momentos, y me he aprovechado de mi situación como coordinador de la sección para pedirle que vuelva a colaborar en la revista. Pero claro, escribir este párrafo como presentación hubiera quedado un poco escaso, por lo que me ha venido muy bien todo el asunto del compromiso, como excusa. Prepárense un buen café, busquen un sofá cómodo y disfruten como yo he hecho de la *biblioteca particular* de Carlos Usón Villalba.

Mi biblioteca particular

Carlos Usón Villalba

Una vida escrita en el lomo de los libros

Hace muchos años, un adolescente todavía, unos meses antes de alistarme en la Universidad de Zaragoza, escribí, en una pequeña libreta en la que anotaba versos y otras bagatelas, una frase: *Al poder, sea del signo que sea, no le interesa la libertad de pensamiento, ni la verdad, ni la justicia. De la educación sólo le interesa el sometimiento.* En el fondo, el hecho de sentir la necesidad de anotarla, demuestra que todavía había dentro de mí un hilo de esperanza. Quería creer que aquella clarividencia era exagerada. Un ejemplo de la terrible ingenuidad que ha caracterizado toda mi vida.

Años más tarde me hice enseñante y, desde entonces, la realidad se ha encargado, día tras día, de dar respaldo práctico a aquella obviedad. Mi biblioteca —nunca antes había pensado en ello, ni siquiera había reflexionado sobre su contenido— está plagada de argumentos de contrarréplica. Edificada sobre la certidumbre de que estimular el ejercicio de la libertad y la independencia de pensamiento, la creatividad, la pasión, el entusiasmo, la curiosidad…, no sólo ES POSIBLE, es lo que da sentido a nuestra profesión.

Puede parecer sencillo el pequeño ejercicio *estriptease* que sustenta esta sección, pero yo soy una persona reservada y llevo meses pensando, sin éxito, si debo empezar por desnudar las manos, las dudas o las alas. Para lo que sí me ha servido este ejercicio selectivo es para dos cosas, la primera para darme cuenta del privilegio de haber nacido en el siglo XX, y también, por qué no admitirlo, en esta sociedad capitalista, profundamente impregnada de positivismo: ¡Mi biblioteca es más extensa que la del rey de Francia Carlos V el Sabio! ¡Valiente despropósito! ¡Y además sé leer! La segunda conclusión es lo difícil que resulta seleccionar unos pocos libros con los que conjurar este desnudo. Aún hay otra de menor importancia…, a estas alturas es imposible ser original en esta sección y yo no voy a intentar evitar repetirme ni un instante tan siquiera.

Mi afición por la lectura es, sin ningún lugar a dudas, una consecuencia de la lucha de clases y de nuestro aislamiento. No me refiero al de la España franquista en relación con Europa, sino al de El Buste, lugar en el que nací, respecto de cualquier otro núcleo de población del universo. Quien haya vivido allí, es seguro que se habrá sentido más cercano a cualquiera de las estrellas que adorna su firmamento nocturno que a núcleo de población alguno. La carencia de otros medios de diversión, TV incluida, me entregó en brazos de la lectura con la que he vivido un apasionado romance durante 40 años. De esa primera época busteña no conservo más que algunos libelos publicados por el Círculo de Lectores[1] —ninguno de ellos relacionado con las Matemáticas de forma directa— pero recuerdo con deleite la selección que los censores del franquismo habían hecho para dotar los Tele Clubs. Al margen de lo que se les coló, descubrí allí a Delibes, por ejemplo, del que leí todo lo que cayó en mis manos.

Los primeros románticos

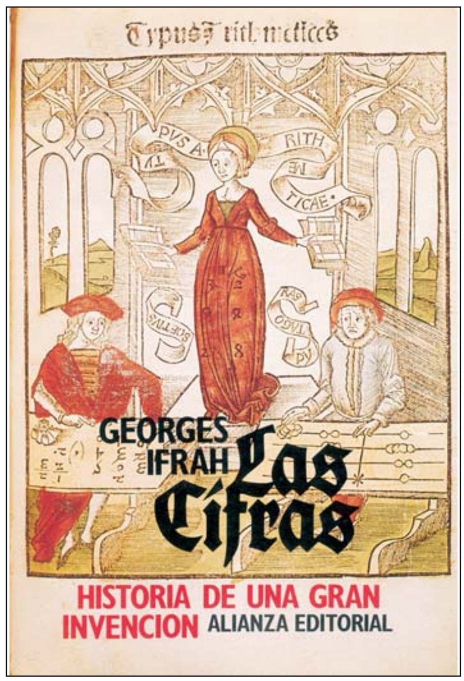
Entre los primeros libros que dejaron una huella imperecedera en mí y que marcaron ideológicamente mi futura profesión debo destacar, entre otros muchos: *¿Queréis la escuela?* Del Colectivo del Martes[2] y *Las invariantes pedagógicas* de Célestin Freinet. De esta misma época en que empecé a estudiar Matemáticas y en la que muchos libros los conseguías de préstamo, otros los robabas[3] y los menos los comprabas a medias con otros, he seleccionado *La pedagogía del oprimido* de Paulo Freire y *La Escuela Moderna* de Francisco Ferrer Guardia. Todavía hoy conservan su actualidad plena, no sólo en mi memoria, también como comprometido análisis el primero y como ejemplo, como horizonte, como estímulo. Lo peor de La escuela Moderna es que no se le puede tildar de utopía y refugiarse en esa gratificante excusa antes de hundirse cómodamente en el sofá.

Freire modificó aquella primera reflexión de adolescente por una frase de Simone de Beavoir: «Lo que pretenden los opresores es transformar la mentalidad de los oprimidos y no la situación que los oprime». Es verdad que la eficacia de la escuela que perpetuamos cada día evitó que estos últimos tomaran conciencia de tal. Después, desde la perspectiva de una didáctica de resolución de problemas, muchas veces Ángel Ramírez y yo hemos ahogado en este poderoso vino de la pedagogía de Paulo algunas decepciones: *...reaccionan incluso instintivamente; contra cualquier tendencia de una educación que estimule el pensamiento auténtico*[4].

> Dos medios de acción se ofrecen a los que quieren renovar la educación [...]: trabajar para transformar la escuela [...][5] o fundar escuelas nuevas en las que se apliquen directamente principios encaminados al ideal que se forman de la sociedad y de los hombres los que reprueban los convencionalismos, las crueldades, los artificios y las mentiras que sirven de base a la sociedad moderna.

Si tuviera que empezar mi biblioteca de didáctica de nuevo empezaría por estos mismos libros. Mantienen su vigencia en muchas de sus formulaciones. Su fuerza arrastra, su frescura resulta embriagadora en algunos casos[6] y mantienen los retos claros y las certidumbres intactas. Estos textos se colaban entre lecturas políticas mucho más sesudas e igualmente comprometidas con otras causas de las que ya no soy lector asiduo, si excluimos a *Le monde Diplomatique* que me sigue informando de lo que los nuevos censores del pensamiento acallan.

Después de deambular por Piaget, Neil (Summerghil) y otros, y de superar la ortodoxia burbakista de los primeros años, acabé recalando en el Grupo Cero. Su posicionamiento fue para mi determinante. Para entonces yo ya había publicado *Matemáticas sin Pizarra*, junto a Pilar García, Concha Alonso y Eva Cid. Una búsqueda que, a pesar de los excelentes resultados que nos daba en el aula, yo sentía que me dejaba insatisfecho.

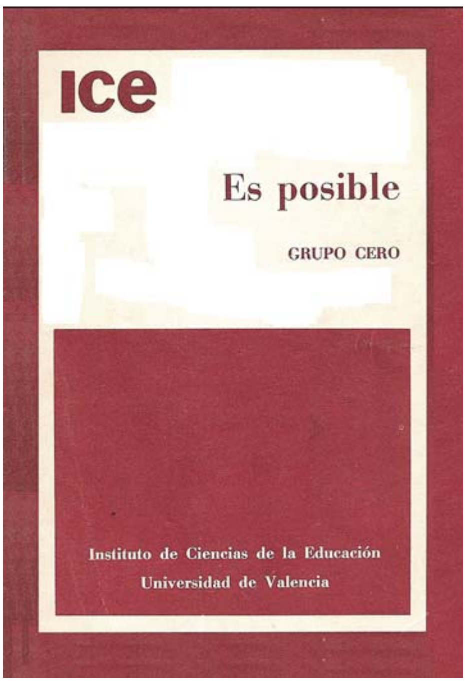


Rumbo a Ítaca

Devoré cuanto de ellos caía en mis manos. *Es posible* y *De 12 a 16*, *Dominós, Ábaco, Estadística…*, marcaron la decisión de abordar una didáctica basada en la resolución de problemas en la que sigo instalado. *Retrato de una profesión imaginada* llegó a mis manos cuando nada de lo que allí se relataba me era ajeno. Sigo considerando que es el mejor homenaje que se puede hacer a la profesión cuando se ve como reto y no como mera prosopopeya. El canto de cisne de Paco Hernán en esta guerra despiadada y perdida por sacar las matemáticas de la condición de disciplina anuladora y reduccionismo algorítmico que siguen alimentando las clases y por convertirlas en esencia de pensamiento y creatividad personal y colectiva.

Con ellos llegó el NCTM y sus libros, los traducidos y los que había que interpretar del inglés. Pero, sobre todo, arribó la necesidad de una fundamentación ideológica de lo que se estaba haciendo: Primero fue el devastador Popper, luego Polya y Lakatos, Kunt y Feyerabend. Con ellos, la filosofía de la ciencia ocupó un lugar prioritario en mis preocupaciones y lecturas. Tengo que agradecer a Carmen Magallón sus extraordinarias clases en el Curso de Postgrado de Historia de las Ciencias y de las Técnicas.

La teoría de la inteligencia creadora de José Antonio Marina —el único de sus libros que he sido capaz de leer— reforzó mis ideas acerca de la creatividad, de la necesidad de dotar de intención a la mirada y la fuerza revolucionaria que, en cualquier campo del saber o de la creación artística, filosófica, intelectual o incluso técnica, tiene el pensamiento divergente.



Es verdad que, tanto la entrada de los primeros textos, como la llegada después de *Es posible* y el resto de las aportaciones del Grupo Cero, *Seis para cuadrar*, *Rompiendo las cadenas de Euclides*, *Probalidad y Estadística* de Arthur Engel, junto a otros, definieron mi trabajo en el aula ofreciéndose como una vía para dotar a cada alumno y alumna de la posibilidad de crecer en seguridad y autonomía de la mano de su propia independencia de pensamiento. Pero, no lo es menos, que fue la Historia y la Filosofía de la Ciencia las que pasaron a ocupar el centro de mis preocupaciones y se convirtieron, como consecuencia, en el núcleo central de las adquisiciones de mi particular biblioteca.

La carga argumental

Hasta entonces, poner en duda las verdades más firmemente asentadas no pasó de ser un juego ingenuo y un posicionamiento ideológico, edificado desde esas convicciones internas tan profundas que uno no alcanza a saber si son desconfianza genética frente el poder instituido o una intuición labrada en tantos años de leer entre líneas lo que a la censura se le escapaba entre los dedos, pero que, en cualquier caso, son tan inconsistentes, desde un punto de vista epistemológico, como el gusto por las garrapiñadas.

Mi primer contacto con la historia de la ciencia fue a través de un gran libro: *La historia general de las ciencias* que coordinara René Taton y que tuve después la posibilidad de conseguir editada por Orbis en un formato más manejable. Todavía sigo consultándola. A pesar de los años continúa siendo un libro fiable, y lo es por la seriedad y honestidad con la que está escrito.

Después los cursos de Mariano Hormigón, me permitieron reconstruir la historia de la ciencia desde una perspectiva marxista e integrarla sociológicamente. En ellos me concedí la libertad de reelaborar las hipótesis sobre las que se asientan la historia oficial. Los que amamos la libertad de pensamiento nunca estaremos suficientemente agradecidos a aquellas clases.

A través de ellas llegó a mis manos la *Historia Social de la Ciencia* de John D. Bernal. Su encomiable seriedad, el profundo análisis que hace de las razones del avance científico en cada momento, fuera de las referencias a los hitos que tanto gustan a algunos historiadores serviles, hacen de él un libro imprescindible, de esos que, si hay juicio final, estoy seguro que nos preguntarán a todos si nos lo hemos leído. Sus puntos de vista son tan odiosos para las concepciones internalistas de la historia de la Ciencia, que tanto gustan a la oficialidad, que es fácil distinguir de qué lado está el historiador que la redacta sin más que mirar si lo cita en su bibliografía. Este libro acabó con mis dudas acerca de la diferencia entre lo que es y lo que significa hacer ciencia y lo que algunos pretenden que sea. A partir de ahí dejó de interesarme el academicismo científico y me empecé a preocupar por aquellas matemáticas que el pensamiento dominante y las historias más renombradas se habían encargado de negar.

Uno de los textos que es seguro que salvaría en caso de incendio, por encima de otras muchas cosas, es *La cresta del pavo real*. Creo que no hay una sola página de ese libro en la que no haya subrayado un pasaje. Es verdad que, como libro de historia de las matemáticas, tiene algunas lagunas[7] y que su traducción en ocasiones es desafortunada. Es cierto que pesa más la componente divulgativa que la doctrinal. Pero es imposible sustraerse a la herida de su daga. No se puede seguir siendo eurocentrista después de leer ese libro, ni se puede evitar sentir nauseas cada vez que ojeas un libelo en el que se supone que la ciencia nació en Grecia y que vivió hibernado en manos de los árabes hasta que el renacimiento la rescató para Europa.

Edificada sobre la certidumbre de que estimular el ejercicio de la libertad y la independencia de pensamiento, la creatividad, la pasión, el entusiasmo, la curiosidad..., no sólo ES POSIBLE, es lo que da sentido a nuestra profesión

La negación de la componente musulmana de nuestra cultura es una de las más soeces añagazas que inventarse pueda. Joaquín Lomba en *La raíz Semítica de lo Europeo*, Ahmed Djebbar con *Une historie de la science arabe* y algunos textos posteriores del Magreb pueden dejar satisfecha la necesidad de saber de cualquiera. Seguir negando esa información a nuestros hijos es un delito de lesa humanidad. No pretendo exagerar: igual que la UNESCO decide nombrar patrimonio de la Humanidad a determinados monumentos, no veo por qué no debiera hacer lo mismo con determinados hechos históricos.

En ese empeño secular en negar la verdad, uno de los episodios más burdos y de los oprobios más lacerantes que es posible recibir de aquellos que se llenan la boca de rigor cuando escriben la historia de las matemáticas es la negación del elenco de matemáticos árabes con los que el avance de esta disciplina tiene una importante deuda, pero yo quiero remarcar aquí la importancia decisiva de personajes como Pedro Alfonso, Abraham ben Ezra, Avempace, Averroes o el mismísimo al-Mu'taman. El futuro, nuestro presente, de la ciencia occidental se decidió en sus manos y ni siquiera los recogen los libros de historia al uso. Cuanta patraña cubierta de oropeles, han hecho de una gran mentira, contada muchas veces y publicitada a los cuatro vientos, una verdad insoslayable.

Hay dos libros, sin embargo, que, por encima de todo lo que me han enseñado, que ha sido mucho, los destaco aquí porque su lectura ha sido un autentico deleite. Me refiero a *Las cifras: Historia de una invención* de Georges Ifrah y a *La medida de la realidad* de Alfred Crosby.

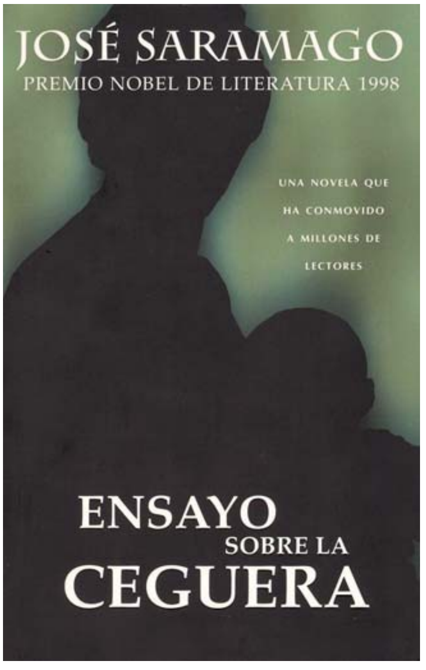
En esa postura de revisión permanente de los tópicos que han conformado la historia que pretendieron enseñarme, y que pocas veces me creí, quiero rendir un homenaje especial a *Los sonámbulos* de Arthur Koestler. Un superviviente que llevó su coherencia hasta el extremo de elegir su muerte. Forma, junto a Polya y Lakatos, esa tríada mágica que supo mirar las verdades firmemente asentadas desde una perspectiva diferente. Prófugos de la ortodoxia han sabido hacer de la heterodoxia método, creando así un modelo de construcción de la ciencia y de tratamiento didáctico de su aprendizaje. El libro es una apasionante historia de la cosmología que analiza a sus autores, las razones de su comportamiento y que, en definitiva, desbanca de sus pedestales de cristal a los hitos más señeros de la historia de la astronomía. Espero que lo reediten y que me dejen dar *Ciencias del mundo contemporáneo* para poder leerlo con mis alumnos y alumnas.

Entre los libros que están asociados a momentos especialmente delicados de mi vida tengo que citar: *Historia del pensamiento en el mundo islámico* de Miguel Cruz Hernández. De aquellos difíciles momentos de convalecencia tras la embolia pulmonar en los que la lentitud de las horas pesaban como una condena y en los que sólo cabía esperar a que el azar fuera benévolo, recuerdo como una caricia la silueta de un platanero, que conservaba las hojas contra el destino y los fríos designios del invierno, y los tres libros de Miguel. Los devoré con fruición a pesar de su dureza y me sirvieron para entender la mayor parte de las dudas que siempre había tenido de cosas tan peregrinas como las razones políticas de la creación de la Casa de la Sabiduría o las concepciones filosófico-religiosas que precedieron al Islam. Aquellos libros me sustraían de la terrorífica espera, de la monótona existencia en aquella celda del corredor de la muerte y del febril intento de amigos, médicos y enfermeras por conseguirme un indulto.

No puedo dejar de rendir homenaje de agradecimiento desde estas páginas a todos los que escribís en la revista *Suma*. Su presencia ocupa un generoso espacio dentro de mi biblioteca y con ella acumulo una deuda de complicidad y generosidad. Me ha ayudado a resolver muchas clases y ha sido un recurso inagotable en el acceso a cátedras, en la licencia por estudios y cada vez que he tenido que diseñar un proyecto de trabajo o dar respuesta a una propuesta innovadora.

Sobre la delicada piel del desierto

Ese desierto que me dio la vida, en el que viví, hacia el que me dirijo… En prosa son escasos los libros que me han dejado una huella imperecedera. *La escarcha sobre los hombros* de Lorenzo Mediano es, junto a *El Principito*, uno de los pocos libros que he regalado infinidad de veces. Me sentí identificado con el protagonista, con el paisaje y con la rudeza rural que acompañó mi infancia. Me ha servido de guión en algunas ocasiones para mitigar el cansancio de mis hijos cuando subíamos al Pirineo y es uno de los pocos libros en prosa que ojeo de vez en cuando en busca de su amable desasosiego. Y, por cuestiones de cercanía, elijo *La seda*. Su título hace referencia al argumento de la obra pero es una perfecta definición de su prosa. Las frases te llevan con una dulzura tal que parece que sobre seda se deslizan las palabras.



Destaco por último el *Ensayo sobre la ceguera* de José Saramago. La descripción que hace de una violación consentida me produjo nauseas y no es una metáfora. Era la primera vez que un libro me había producido efectos físicos. Siempre había adoptado un distanciamiento entre la realidad y la ficción. No fue así en el texto de Saramago. Recuerdo dónde y cuando lo leí, recuerdo las sensaciones vividas y, sobre todo, recuerdo haberme metido con tal intensidad en su trama que me sentí protagonista indeseado de la misma.

Y llegó el momento más esperado del estriptis…, aquel en el que…, la poesía ocupa el lugar preponderante que toma en mis estanterías. Son los libros más baratos que existen. Los abres tantas veces, los relees con tanta frecuencia, recurres a ellos con tanta asiduidad, te ahorran tantas sesiones de siquiatra que merece la pena gastarse el dinero en ellos. En los de prosa no. Raramente recurres a sus páginas, ni siquiera para buscar citas que no hayas apuntado cuando los leíste por primera y última vez[8].

Elegir un libro entero de poesía resulta difícil. Es complicado encontrar uno que te haya seducido de principio a fin y, sin embargo yo puedo nombrar tres. El primero de ellos: *La nieve horizontal de los vilanos* de Emilio Pedro Gómez, me robó el alma. Es el primer y único libro de poesía que leí de un tirón, sin tregua, como si en cada verso estuviera a punto de encontrar la piedra filosofal de la vida. La sensación de gozo emocionado me llevaba de una página a otra sin transición alguna, como si me negara a salir de aquel paraíso único capaz de transformar el dolor en ternura embelesada.

El otro es de Mario Bendetti, *Poemas de otros.* Benedetti tiene la extraña capacidad de acuchillar la conciencia con la desnuda crudeza de la verdad y curar con dulzura la desesperanza. El tercer libro que elegiría es de José Antonio Labordeta. Su pesimismo dibuja la faz de lo que fue la izquierda aragonesa. De sus palabras bebí, con sus versos me embriagué de razones para el compromiso, para la lucha sin cuartel por la libertad, por la paz, la justicia, la utopía… Sus banderas rotas son las mías. No sería quien soy sin ellas. A ellas vuelvo una y otra vez cuando me siento huérfano de certezas. Aún debo de guardar por casa un catálogo suyo de poesías censuradas por la dictadura. Sobre las interiores y los bloqueos hablamos otro día.

NOTAS

1 A algunos les tengo cariño porque contienen mentiras descaradas de aquellas que ideaba el franquismo para sus propios crédulos.

2 Los lectores más sagaces habrán adivinado ya que soy mayor, pero seguramente, salvo que también lo sean, no podrán ni imaginar que, en aquel entonces, existían colectivos, les publicaban libros ¡y los comprábamos! Es más ¡hasta se discutían!

3 Nunca agradeceré suficientemente a la Librería General el escaso celo que parecía poner en evitar que algunos accediéramos a la cultura confiscando algunos ejemplares, eso sí, muy seleccionados. Espío aquel miedo a ser pillado y las justificaciones ideológicas que esgrimíamos para acallar la conciencia, convertido en un buen cliente de la citada librería y no siéndole infiel con la de enfrente.

4 Los oprimidos de Freire estaban en el sur. Sigue habiendo favelas en Río y en nuestras ciudades. Pero, hoy y aquí, en el norte, la televisión, la publicidad, el cine, la prensa (con escasísimas excepciones)… alimenta los sueños de aquellos y los nuestros. Las cadenas, aunque de oro, siguen siendo cadenas. ¡Qué gastada está ya esta frase! ¡Qué ganas de fastidiar con el pensamiento y la libertad! ¡Con lo felices que somos en esta esclavitud! ¡Cuando tenemos dinero podemos elegir entre comprar en El Corte Inglés o en Galerías Primero! ¡Panda de resentidos!

5 No comparto las frases que niega el paréntesis. No importa. Comparto el sentido general. El libro de Ferrer no es un catecismo.

6 Ya lo veis, no me arrepiento de nada.

7 Y también que tratar de evitarlas lo convertirían en una enciclopedia.

8 Excluyo el ensayo obviamente.

Escaparate 1: 3^2–2 ideas clave. El desarrollo de la competencia matemática

3^2–2 IDEAS CLAVE. EL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA MATEMÁTICA
Jesús Mª. Goñi Zabala
Graó, Barcelona, julio 2008
ISBN: 978-84-7827-630-1
236 páginas

Posiblemente, Graó sea la única editorial española que publica de forma continua trabajos sobre didáctica en general, y didáctica de las matemáticas en particular. Por ello hemos creído conveniente dedicar las reseñas de este número exclusivamente a libros publicados por ellos. Son tres libros de cariz bastante distinto pero con el denominador común de las matemáticas y su enseñanza.

El primer libro que reseñamos pertenece a la colección "Ideas clave" y en él Jesús María Goñi afronta un tema de actualidad como es el desarrollo de la competencia matemática. Aunque bien se podría decir que de tanta actualidad no es, ya que este tema se viene trabajando en determinados círculos desde hace muchos años. Es más, el propio autor no es, ni mucho menos, un recién llegado. Sin embargo, la inclusión explícita en los últimos currículos ha producido una oleada de actividades, cursos, trabajos…, que tratan de dar respuesta a los desasosiegos de muchos departamentos de matemáticas de nuestros institutos. En este marco, el texto de Goñi ofrece una cantidad sobrada de ideas (más de siete) para poder reflexionar y trabajar el tema. El propio autor reconoce que algunas de sus aportaciones tienen un carácter algo general, que no se circunscriben a las matemáticas, lo que da un valor añadido a la obra.

No se trata de una serie de recetas mágicas aplicables de forma inmediata. Tampoco vamos a encontrar toda la enrevesada terminología con la que se bombardea al profesorado en los distintos cursos que se están impartiendo desde algunas instancias. En este sentido el autor acierta de pleno cuando afirma:

> El problema que tenemos en este momento es que sólo disponemos de unos enunciados generales de qué son las competencias matemáticas, y que todavía no han llegado a manos de los educadores mejores propuestas operativas que concreten esta generalidad en objetivos y tampoco las tareas escolares que sustituyan a las actuales. A falta de esta concreción, lo que sí tenemos es mucha retórica y bastante palabrería en los diferentes niveles y escalafones del sistema educativo.

Así pues, no vamos a encontrar en este libro palabrería ni retórica, sino pautas concretas y claras sobre qué aspectos hay que trabajar y mejorar para avanzar en este terreno.

Se dedica un capítulo a cada una de las siete ideas clave, que a su vez se agrupan en las tres temáticas que Goñi considera esenciales para el desarrollo de la competencia matemática: el currículo de matemáticas (tres primeras ideas), el desarrollo del currículo (las tres siguientes) y la formación de los profesores de matemáticas (la última).

Para establecer estas ideas el autor se plantea al principio del libro otras tantas preguntas, que, además, ilustra con una metáfora. Por poner un ejemplo, la cuarta idea clave es *La educación matemática se basa en la comunicación y debe ir más allá de la mera instrucción*, y surge de la pregunta *¿Por qué*

Daniel Sierra Ruiz
IES Benjamín Jarnés, Fuentes de Ebro (Zaragoza)

hay que ir más allá de la instrucción de las matemáticas, hacia una educación matemática? La metáfora utilizada en este caso es *La inducción electromagnética*: el conocimiento no se puede transmitir pero sí inducir («Mientras no se puedan transplantar cerebros no se podrá transmitir conocimiento»).

La estructura expositiva es siempre la misma. Debajo de la idea clave que ejerce de título aparece la metáfora ilustrativa de lo que se defiende. Goñi se proclama aficionado a las metáforas y, la verdad, es que utiliza este recurso con gran acierto logrando el objetivo de que el lector visualice la idea clave. Cada capítulo consta de una pequeña introducción que centra el camino a seguir, y de un resumen final que sincretiza todas los argumentos esgrimidos. Además, se añade una sección final, una especie de apéndice, que titula *En la práctica* en la que aparecen de forma resumida aspectos concretos sobre los que habrá que trabajar para la consecución del objetivo planteado.

Toda la estructura de los capítulos, el uso acertado de metáforas y el lenguaje poco recargado pero atractivo, logran primero, una lectura agradable, y, segundo, que cada idea clave pueda ser abordada como una unidad independiente, aunque es altamente recomendable leerlas todas y en el orden que propone Goñi.

Él mismo reconoce que insiste mucho en el asunto que considera básico y que es la necesidad imperiosa de realizar, de una vez por todas, una reforma real del currículo. Por ello parece conveniente acabar con un par de frases que pueden reflejar el transfondo del libro:

> En mi opinión, mientras no se aborde de manera decisiva la cuestión del currículo de matemáticas, seguiremos como el coche que una vez que ha hundido las ruedas tractoras en la arena blanda cuanto más acelera más se hunde. Pasará el tiempo, el nivel de frustración de docentes y estudiantes aumentará, pero no mejorarán los resultados de los aprendizajes en matemáticas.

Escaparate 2: Conversaciones matemáticas con Maria Antònia Canals

Conversaciones matemáticas con Maria Antònia Canals

O cómo hacer de las matemáticas un aprendizaje apasionante

Purificación Biniés Lanceta

Graó, Barcelona, septiembre 2008
ISBN: 978-84-7827-652-3
93 páginas

Hablar de Maria Antònia Canals es un reto para los que la conocemos porque siempre corres el riesgo de recibir un tirón de orejas por su parte. Por otro lado, si aciertas a formular con las palabras justas alguna de las ideas que ella ha sembrado en tu cabeza puede ser que recibas a cambio una reconfortante sonrisa cercana a un guiño de picardía. Maria Antònia es así.

Ofrecer un libro sobre Maria Antònia Canals es una oportunidad que no se puede desperdiciar. A riesgo de recibir por su parte un tirón de orejas me atreveré a deciros que éste se me ha hecho especialmente interesante porque presenta algunas de sus ideas de forma muy clara, incluso tanto como cuando Maria Antònia escribe directamente. El hecho de estar escrito en su mayor parte en forma de conversación hace aflorar su carácter tal como lo muestra en público: dueña y señora de un montón de ideas claras, concretas y bien fundamentadas sobre cuáles son las matemáticas que niños y niñas necesitan conocer. A ello ha dedicado su vida profesional y sigue en el empeño de contribuir a la mejora del nivel de los profesionales de la educación de las primeras edades, y de cuántos quieran escucharla: profesores de secundaria, universitarios, técnicos o políticos.

Las conversaciones matemáticas que nos presenta Purificación Biniés muestran esa Maria Antònia cercana, lúcida, realista, que a veces duda del éxito de la empresa pero que no se rinde nunca porque le apasiona conjugar la manera de pensar de los más pequeños y el mundo de las matemáticas.

El libro, prologado por Claudi Alsina, presenta dos partes diferenciadas: la primera en formato de capítulos dónde repasa los principales aspectos didácticos de la enseñanza de las matemáticas y la segunda ofrece opiniones de alumnos (de 7 a 17 años) y extractos de documentos y opiniones usados por Maria Antònia en conferencias y artículos.

En la primera parte Purificación Biniés nos ofrece una breve semblanza personal de Maria Antònia para inmediatamente establecer con ella un diálogo sobre los principios de la enseñanza de las matemáticas claramente aplicables al resto de disciplinas, no sólo las científicas. En el segundo capítulo plantea el tema de la resolución de problemas destacando en primer lugar cuál es la percepción del término por parte de los niños y niñas para seguir con una clasificación clara de las distintas tipologías y de los requisitos necesarios para que sean identificados por ellos. Un capítulo imprescindible para ir cerrando el debate sobre problemas que tienen como único objetivo el cálculo.

La aproximación didáctica a los cuatro grandes bloques de las matemáticas enumera uno a uno los pilares para su provechoso trabajo en las primeras edades destacando el tratamiento de los procesos a seguir. Maria Antònia ha declinado en la actualidad entrar en el análisis del currículum vigente, pero éste está impregnado de la línea didáctica que ella promueve. Para muestra y hablando de probabilidad y azar : «… como siempre que se hacen matemáticas, se trata de ir reflexionando, contando, extrayendo conclusiones que nos sirven para la propia vida»

El cuarto capítulo nos presenta las reflexiones sobre los puntos débiles del aprendizaje de las matemáticas en la actualidad ligados a la forma de enseñanza escogida por los docentes. No hay concesiones en el texto,

> ...Es un drama para muchos educadores que se sienten frustrados porque, en el mejor de los casos, cuando los niños y niñas vuelven a la escuela después del verano es muy fácil comprobar que un 90% ha olvidado aquello que *parecía* que había aprendido sobre la *resta llevando*.

Pero sobre todo hay una defensa de los niños y niñas que se ven obligados a llevarse la «peor parte» y optar por desconectar o (por) contentar a la maestra.

Finalmente, citar un capítulo dedicado a Educación y escuela, una reflexión serena del papel de cada agente educativo, medio, escuela, familia, maestros…, y de la necesidad de digerir los cambios para hacerlos realidad e ir aún más allá planteando que sin intención de mejora los cambios no se pueden asumir. Como muestra su propia experiencia:

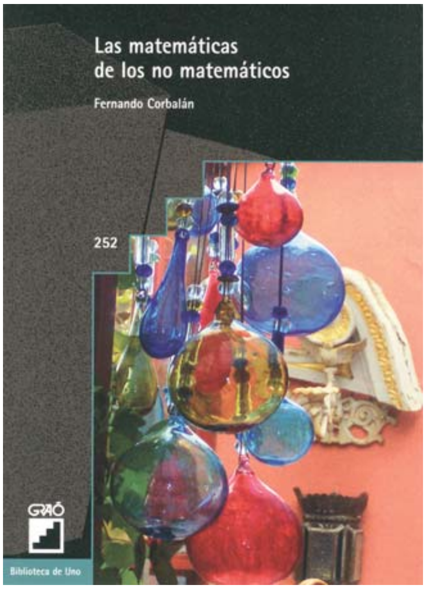
> Yo sé muy pocas cosas, la única que sé segura es que pienso trabajar, mientras pueda, para que la escuela mejore. Ni tan sólo estoy segura de que lo que hago sea siempre correcto y eficaz. Has de saber cuestionarte tu propio trabajo y los mejores indicadores son siempre los propios niños y niñas, por eso es tan importante saberlos escuchar.

Reflejar el mundo de Maria Antònia es una tarea compleja y Purificación Biniés lo consigue tanto por el formato como por el diálogo que ambas mantienen. La lectura resulta amena al tiempo que profunda y todo cuanto plantea puede ser aplicado a todas las etapas educativas.

¡No os lo perdáis!

Carme Aymerich Padilla
CEIP Rocafonda, Mataró (Barcelona)

Escaparate 3:
Las matemáticas de los no matemáticos



Las matemáticas de los no matemáticos
Fernando Corbalán Yuste
Graó, Barcelona, octubre 2008
ISBN: 978-84-7827-649-3
120 páginas

¿Cuántas veces el profesor de matemáticas se queda suspendido de su tiza, como flotando, enfrentado a una formidable división de polinomios que satura la pizarra, y se siente ridículo (y un poco cruel, también), y se pregunta cuándo y dónde esos pobres ciudadanos de los pupitres, indefensos, utilizarán el algoritmo que se les viene encima? Seguro que Fernando Corbalán, autor de *Las matemáticas de los no matemáticos*, ha pasado más de una vez por este trance y, quizá por eso, intenta contestar a la pregunta que ronda en la cabeza de muchos: ¿Qué matemáticas son, realmente, necesarias?

El libro se divide en cinco capítulos. En el primero, Matemáticas, educación y sociedad, el autor repasa las necesidades matemáticas de la humanidad desde el principio hasta la actualidad: Sistemas distintos de numeración, calendarios, medición de superficies, estadísticas. Ya en el mundo contemporáneo, un individuo normal puede arreglárselas bien con el uso de las llamadas cuatro reglas, los porcentajes y algún rudimento de geometría (medición de superficies y volúmenes sencillos utilizando el sistema métrico decimal). El autor recorre la evolución de la enseñanza pública desde la Edad Media hasta nuestros días. Numerosas y muy interesantes citas refuerzan las tesis del autor: Las matemáticas han sido siempre y en todos los sitios consideradas como ciencia fundamental (*…sin la alfabetización masiva de la población en conocimientos básicos de aritmética y medida no es posible el desarrollo industrial,* p. 16); los programas de matemáticas son casi los mismos en todos los países (*…una sorprendente uniformidad en los currículos de matemáticas en la escuela a lo ancho del mundo*, p. 16); el currículum de matemáticas no ha cambiado esencialmente con los últimos avances tecnológicos (*…cuando las calculadoras son de uso común fuera de los centros educativos, en ellos todavía tienen que librar batallas que no siempre se ganan*, p. 17). Acaba el primer capítulo con el apartado *Las matemáticas en nuestra sociedad* en el que el autor se pregunta si la presencia de las matemáticas en el sistema educativo está sobrevalorada (cuestión que trasladará a la encuesta) e insiste en una idea que repite en otros apartados, que hay muchas matemáticas invisibles en la vida cotidiana.

Miguel Barreras Alconchel
IES Matarraña, Valderrobres (Teruel)

En el segundo capítulo, *Opiniones sobre las matemáticas*, Fernando cede la palabra a escritores (Machado), filósofos (Russell), arquitectos (Le Corbusier) que nos hablan de sus roces o caricias con las matemáticas. También opinan pedagogos y matemáticos.

En el tercer capítulo, *La enseñanza de las matemáticas*, se exponen las necesidades matemáticas según varios autores, distintos informes (Informe Cockroft, entre otros) y según marca la ley (desarrollo de la competencia matemática, pp. 49-51).

Tras este largo e interesante preámbulo, Corbalán entra en materia. En el capítulo cuatro, *Las matemáticas de los no matemáticos*, presenta y justifica el estudio realizado a través de la encuesta:

> El objeto de este libro no es llevar a cabo una investigación exhaustiva, sino iniciar una indagación en la que una serie de profesionales destacados en diferentes actividades explican sus vivencias matemáticas, tanto a lo largo de su vida escolar como en la actualidad, manifestando el uso que hacen de ellas en su trabajo y en su vida privada. (Contraportada)

Podría parecer que, desde el principio, el estudio está viciado: todos los encuestados son profesionales destacados, esto es, personas que, odiando o amando las matemáticas, no fracasaron en sus estudios, muy al contrario, triunfaron académicamente. ¿Dónde están los camioneros, las cajeras, los albañiles?, puede preguntarse. Corbalán es consciente de ello y observa que el trabajo es solo *el inicio de una tarea larga e interesante* (p. 112) y que *en el futuro sería conveniente continuarlo con una muestra más amplia o en territorios más acotados* (p. 112). Con una muestra más heterogénea las conclusiones, sin duda, hubieran resultado más borrosas, cuando no inexistentes.

Cuarenta páginas del libro las ocupan las respuestas de los profesionales destacados que atendieron a la solicitud de Corbalán (*ha habido un número importante de profesionales que han desistido de participar en este trabajo*, p. 57). Tienen en común que todos (salvo uno) tienen título universitario y todos cursaron el bachiller del COU.

Este es un esquema de la encuesta:

1. ¿Cuál fue su experiencia escolar con las matemáticas? (Recuerdos escolares, qué matemáticas del cole le parecen útiles, qué matemáticas que aprendió allí no ha utilizado nunca)
2. ¿Qué matemáticas utiliza en su trabajo?
3. En su vida personal y social, fuera del ámbito profesional, ¿cree que son importantes las matemáticas? (¿Imagina una vida sin matemáticas?)

Antes de adentrarse en las respuestas cabe plantearse un ejercicio de adivinación: ¿Qué habrá contestado el filósofo? ¿Y el banquero? ¿Y la filóloga o el poeta o la bióloga?

En el último capítulo, Corbalán analiza y comenta las respuestas y avanza media docena de conclusiones, que no detallaré. A nadie le gusta que le cuenten el final de la película.

En fin, cabe entender el libro como una reflexión y un inicio de investigación muy interesantes. Un proyecto con puntos suspensivos, sin conclusiones robustas. Una invitación.

NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, Apartado de Correos 498, E-46900 Torrent (Valencia), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.

2. Los gráficos, diagramas, fotografías y figuras se enviarán impresos en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración. Indíquense los créditos de las fotografías y dibujos.

2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original impreso ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos no serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.

4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de un máximo de 625 caracteres contando los blancos, que no necesariamente tiene que coincidir con la introducción al artículo. De este resumen se remitirá también su traducción al inglés.

5. Los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; correo electrónico; sociedad federada a la que pertenecen (si procede) y el resumen en castellano y en inglés deberán ir escritos en una misma hoja aparte.

6. Se enviará también en soporte magnético (disco de tres pulgadas y cuarto con formato PC, CDRom o DVDRom) una copia de los archivo de texto que contenga el artículo y del que contega la hoja con los datos y los resumenes, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quieran incluir. La etiqueta debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda Microsoft Word para Windows o RFT. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF. Para las fotografías se recomienda archivos TIF o BMP y con una definición mínima de 600x600 puntos por pulgada cuadrada.

7. Al menos un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.

8. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.

9. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo y se incluirán al final del texto.

10. La bibliografía se dispondrá también al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:
TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma*, n.° 20, 91-98.
En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas*, Labor, Barcelona.
En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2*, ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

11. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ... supone un gran avance (Hernández, 1992). Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ... según Rico (1993).

12. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como -en caso afirmativo- la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido.

13. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

suma+ 61
Junio 2009, pp. 93-98

Protoálgebra en Babilonia (1ª entrega)

Hago un paréntesis en las entregas de historias de al-Khwārizmī para cambiar de época, pero no de zona geográfica. Voy a presentar un ejercicio de análisis de un problema tomado del corpus del álgebra babilónica[1], en el que haré algunas hipótesis sobre lo que sabía quien escribió el texto que se conserva, comparándolo con estructuras conceptuales, procesos de resolución de problemas y sistemas de signos que pondríamos en juego actualmente ante problemas similares que se plantean en la enseñanza[2].

El problema lo he tomado de Høyrup (2002, pp. 206-209)[3], quien lo presenta en lo que él llama una "traducción conforme"[4], que traduzco a mi vez al castellano:

> 2 gur 2 pi 5 bán de aceite he comprado
>
> De la compra de 1 shekel de plata, 4 silà, de cada (shekel), de aceite he separado.
>
> 2/3 mina de plata como beneficio he visto.
>
> ¿Con qué equivalencia he comprado y con qué equivalencia he vendido?

En el enunciado aparecen una serie de unidades metrológicas que es preciso conocer para poder comprenderlo y para poder seguir los cálculos que se presentan en la tablilla. Hay unidades de capacidad (gur, pi, bán, silà), con las que se mide la cantidad de aceite, y unidades de peso (shekel, mina), con las que se mide la cantidad de plata. Como no vamos a examinar los problemas derivados de los cambios de unidades en los sistemas metrológicos de la época, voy a reescribir el enunciado pasando todas las unidades de capacidad a silàs y las de peso a shekels. Para hacer el texto más cercano, cambiaré silàs por litros (parece ser que el silà era aproximadamente un litro) y los shekels por gramos (aunque la equivalencia no fuera ésa).

Además, el sistema de numeración en que están escritos los números que aparecen en este problema es sexadecimal. Esto no se percibe apenas en el enunciado, pero sí en los cálculos subsiguientes. De hecho, 1 mina eran 60 shekel, de manera

Luis Puig
Universitat de València Estudi General
historias@revistasuma.es

que en las unidades de peso, 1 mina equivale a 1` shekel, si escribimos los números en el sistema sexadecimal[5]. El hecho de que los números se escribieran en el sistema sexadecimal tuvo consecuencias importantes en la forma en que se hacían los cálculos de las operaciones aritméticas, en particular en el hecho de que la división se realizara siempre multiplicando por el inverso, inverso que no se calculaba sino que se consultaba en tablas de inversos (se han encontrado muchos ejemplares de tablillas que consisten simplemente en listas de inversos). Como este asunto tampoco voy a examinarlo en esta ocasión, reescribiré todos los números en el sistema de numeración decimal. Mi traducción ahora será menos "conforme", pero continuará siendo conforme en los aspectos que voy a examinar.

> 770 litros de aceite he comprado.
>
> De la compra de 1 gramo de plata, 4 litros, de cada (gramo), de aceite he separado.
>
> 40 gramos de plata como beneficio he visto.
>
> ¿Con qué equivalencia he comprado y con qué equivalencia he vendido?

El problema es una compraventa, pero la pregunta nos resulta extraña. Para entenderla, hay que tener en cuenta que el concepto de precio unitario en una operación de compraventa, que actualmente concebimos como una razón entre una cantidad de dinero y una cantidad del objeto que se intercambia (o, mejor dicho, entre las medidas correspondientes) y, por tanto, la expresamos, por ejemplo, en euros por litro (o €/l), no se concebía así en Babilonia. La idea era la inversa: no cuánto cuesta una unidad de medida de la magnitud (o la cantidad) del objeto que se intercambia, sino cuánto se obtiene en la compraventa por una unidad monetaria. Si el aceite se vendiera en el mercado de esta manera, no hablaríamos de que está a 2 euros el litro, sino de que con un euro puedo comprar medio litro de aceite. Este "precio inverso", que Høyrup prefiere llamar *rate*, tasa, se expresa por tanto en l/€, y no en €/l.

Pero el asunto aún es más diferente porque en Babilonia aún no había moneda, no había dinero en el sentido de una mercancía en la que predomina el valor de cambio sobre el valor de uso, y menos aún el actual dinero, equivalente universal, sin valor material. Sí que había un protodinero, ya que algunas mercancías con valor de uso se empleaban en las transacciones mercantiles como medio de cambio. En un primer momento, este papel parece que lo desempeñó el grano, y en la época de esta tablilla, ya la plata y otros metales. Pero ese protodinero, como mercancía con valor de uso se medía con las unidades corrientes de peso, de modo si el aceite hoy en día se vendiera de esa manera ese precio inverso o tasa se expresaría en gramos (de plata) por litro.

La circulación de mercancías, no en su forma directa, sino en el ciclo que transforma el dinero en capital, el ciclo "comprar para vender más caro", se concibe en Babilonia también de otra manera, "dar menos por la misma cantidad de plata", lo que no sólo es distinto conceptualmente, sino que también conlleva una idea distinta de qué es la riqueza. En efecto, el ciclo D–M–D[6], "comprar para vender más caro", conduce a un aumento del dinero en manos del que compra y vende, la mercancía pasa a otras manos, y en la repetición del ciclo el dinero sigue acumulándose y la mercancía circulando. El ciclo "dar menos por la misma cantidad de plata" no conduce exactamente a aumentar la cantidad de plata, sino que se ve tanto desde el punto de vista de tener más plata, como desde el punto de vista de la mercancía equivalente a esa plata de más que obtiene, y en la repetición del ciclo se acumula mercancía. El beneficio no se concibe sólo como la plata que se consigue, sino como la mercancía que equivale a esa plata de más.

Tablilla protoelamita

Ese "dar menos mercancía por la misma cantidad de plata" como núcleo del ciclo nos permite dar sentido a la segunda frase del enunciado, "De la compra de 1 gramo de plata, 4 litros, de cada (gramo), de aceite he separado". Ahí se está indicando que en la venta se dan 4 litros de aceite menos por cada gramo de plata, de los litros de aceite por gramo de plata que se han obtenido en la compra: la relación entre cantidades que se expresa es una relación entre la tasa de compra, la tasa de venta y una tercera cantidad que es el beneficio en litros de aceite que se obtiene por cada gramo de plata. Ese beneficio unitario no está expresado, como lo hacemos actualmente en euros por litro, sino, inversamente, en litros por gramo (de plata).

La tercera frase del enunciado sí que expresa el beneficio, en este caso el beneficio total, en plata, similarmente a como actualmente lo expresaríamos en dinero. Veremos, sin embargo, que la resolución del problema no termina con la obtención de lo que el enunciado pregunta, sino que después de obtenerlo aún se calcula ese beneficio total en litros de aceite.

También podemos darle sentido a la pregunta del problema a partir del conocimiento de estas prácticas comerciales. Si en las compraventas en la época que nos ocupa no existía el precio unitario en el sentido en que lo concebimos y lo usamos actualmente, sino ese “precio inverso”, que vamos a llamar tasa siguiendo a Høyrup, la frase final del enunciado pregunta por las tasas de compra y de venta[7].

Reescribo el enunciado ya no en una traducción conforme, sino en una versión más libre, pero que describe una situación similar y mantiene implícitamente las mismas cantidades y relaciones.

> Un comerciante compra 770 litros de aceite.
>
> Los vende dando 4 litros menos de los que ha recibido en la compra, por cada gramo de plata.
>
> Obtiene un beneficio de 40 gramos de plata.
>
> Averiguar a cuántos litros por gramo de plata compró el aceite y a cuántos litros por gramo de plata lo vendió.

La inversión del concepto de precio conduce pues a que las relaciones entre las cantidades de la estructura conceptual de una compra para vender sean distintas de las que son usuales para nosotros y complique la comprensión por nuestra parte del enunciado de este problema y de las operaciones que están indicadas en la tablilla que hay que hacer para resolverlo. Pero además, hacen el problema más difícil, en el sentido de que la red de cantidades y relaciones presentes en el problema tiene una estructura que hace más difícil su resolución. Veámoslo.

Las cantidades presentes en una situación similar, pero según nuestra manera de concebirla, son las siguientes:

cantidad comprada y vendida: m (l),
precio unitario de compra: p_c (€/l)
precio unitario de venta: p_v (€/l)
importe de la compra: i_c (€)
importe de la venta: i_v (€)
beneficio total expresado en dinero: b_{td} (€)
beneficio unitario expresado en dinero: b_{ud} (€/l).

Y las relaciones entre esas cantidades son:

$$i_c = p_c \times m$$

$$i_v = p_v \times m$$

$$b_{td} = i_v - i_c$$

$$b_{ud} = p_v - p_c$$

Estas cantidades y estas relaciones podemos representarlas entrelazadas mediante un grafo[8], que muestra la estructura de la red de relaciones entre cantidades que hemos determinado que son las propias de nuestra manera de concebir esa estructura conceptual, como se muestra en la figura 1.

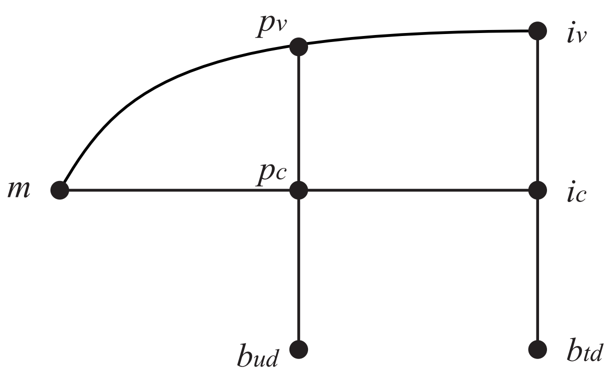


Figura 1

Ahora bien, gracias a que

$$b_{td} = i_v - i_c$$

e

$$i_c = p_c \times m$$

$$i_v = p_v \times m$$

podemos derivar

$$b_{td} = p_v \times m - p_c \times m = (p_v - p_c) \times m$$

y, gracias a

$$b_{ud} = p_v - p_c$$

obtenemos la relación

$$b_{td} = b_{ud} \times m$$

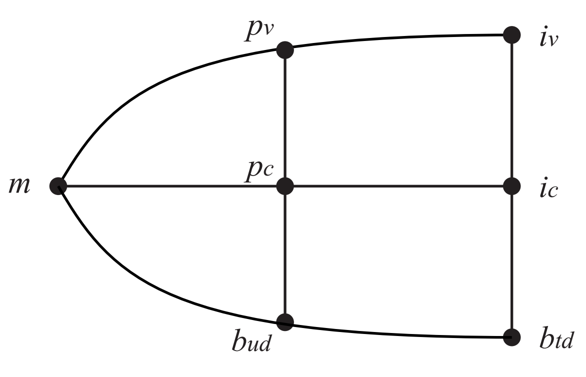


Figura 2

con la que podemos cerrar la red de relaciones del grafo con una nueva relación (ver figura 2) representada por el arco (m, b_{ud}, b_{td}), y observar que las tres relaciones, que en el grafo están representadas con la cantidad m en el vértice común, responden a las relaciones de proporcionalidad

$$\frac{b_{td}}{b_{ud}} = \frac{i_v}{p_v} = \frac{i_c}{p_c} (= m)$$

Ahora bien, en la situación de comprar para vender más caro correspondiente al problema babilónico, las cantidades que aparecen no son las mismas, ya que no están los precios unitarios sino las tasas de compra y de venta, y además el beneficio unitario que aparece no es el beneficio en dinero por unidad de mercancía, sino el beneficio en mercancía por unidad de plata (protodinero):

cantidad comprada y vendida: m (l),
tasa de compra: t_c (l/gr),
tasa de venta: t_v (l/gr),
importe de la compra: i_c (gr),
importe de la venta: i_v (gr),
beneficio total expresado en plata (protodinero): b_{td} (gr),
beneficio unitario expresado en mercancía por unidad de plata: b_{um} (l/gr).

Las tasas, como ya hemos visto, son inversas de los precios unitarios, y el beneficio unitario que aquí aparece es la diferencia entre las tasas, pero restadas en orden inverso a como se restan los precios unitarios para obtener el beneficio unitario. Todo ello conduce a que la mayor parte de las relaciones entre las cantidades sean inversas de las anteriores:

$$i_c = \frac{m}{t_c} \text{ o } i_c \times t_c = m$$

$$i_v = \frac{m}{t_v} \text{ o } i_v \times t_v = m$$

$$b_{td} = i_v - i_c$$

$$b_{um} = t_c - t_v$$

Y el beneficio total en plata ya no tiene una expresión simple en términos del beneficio en mercancía por unidad de plata, ya que de las relaciones anteriores se sigue

$$b_{td} = i_v - i_c = \frac{m}{t_v} - \frac{m}{t_c} = \frac{t_c - t_v}{t_v t_c} \times m$$

de donde

$$\frac{b_{td}}{b_{um}} = \frac{m}{t_v t_c}$$

Y, como los importes de la compra y la venta están relacionados con las tasas de compra y venta ahora por una proporcionalidad inversa en vez de por una proporcionalidad directa,

$i_c \times t_c = i_v \times t_v = m$,

entonces

$$\frac{b_{td}}{b_{um}} = \frac{i_c t_c}{t_v t_c} = \frac{i_v t_v}{t_v t_c}$$

y, en definitiva, las relaciones de proporcionalidad que existen son

$$\frac{b_{td}}{b_{um}} = \frac{i_c}{t_v} = \frac{i_v}{t_c}$$

a las que no es posible darles sentido en el contexto del enunciado del problema.

Por ello, la red de relaciones entre cantidades que tienen sentido en el contexto del problema se reduce a una red de relaciones similar a la primera de las dos que hemos representado antes, que además tiene casi todas las relaciones invertidas en algún sentido. (Ver figura 3, en la que he diferenciado las cantidades conocidas de las desconocidas, señalando éstas con cuadrados en blanco y aquéllas con puntos negros.)

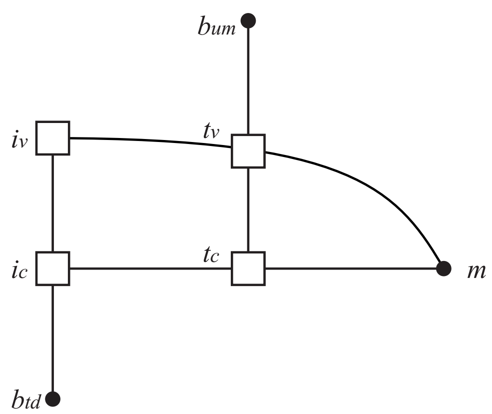


Figura 3

Con el sistema de signos del álgebra actual no hemos tenido, sin embargo, ningún problema para representar esas relaciones que carecen de sentido en el contexto del problema. Y no sólo para representarlas, sino también para encontrarlas, ya que podemos operar en el nivel de la expresión sin necesidad de recurrir continuamente al significado que esas cantidades y relaciones tienen en el contexto del problema, sino recurriendo sólo al significado que tienen en el contexto, más abstracto, aritmético-algebraico.

Los matemáticos babilónicos no disponían de un sistema de signos como el del álgebra actual, pero sí que disponían de otro sistema de signos al que traducir las enunciados de los problemas como éste para resolverlos, y en el que podían calcular sin recurrir a los significados del contexto del problema, sino usando los significados de ese otro sistema de signos, es decir, disponían de un sistema de signos protoalgebraico.

En Puig (2006)[9] presenté un esbozo del uso de ese sistema de signos en la resolución de problemas. Veamos ahora cómo aparece la solución del problema en la tablilla babilónica, siguiendo la traducción conforme de Høyrup (2002, pp. 207-208), traducida más o menos de forma conforme al español, eliminando las unidades babilónicas, pero sin pasar los números al sistema decimal.

> Tú coloca 4 litros de aceite y coloca el beneficio 40 gramos.
>
> Inverso de 40, 1´30´´, ves[10].
>
> 1´30´´ por 4 multiplica, 6´, ves.
>
> 6´ por 12`50, el aceite, multiplica, 1`17, ves.
>
> ½ de 4 rompe, 2, ves.
>
> 2 cuadra, 4, ves.
>
> 4 a 1`17 añade, 1`21, ves.
>
> ¿Cuál es el lado igual? 9 es el lado igual.
>
> 9 el equivalente coloca.
>
> ½ de 4, que has separado, rompe, 2, ves.
>
> 2 al primer 9 añade, 11, ves.
>
> Del segundo quítalo, 7, ves.
>
> 11 litros cada gramo has comprado, 7 litros cada gramo has vendido.

¿Plata equivalente a qué? ¿Qué a 11 litros [por gramo] puedo poner que 12`50 de aceite me dé?

1´10 coloco 1´10 gramos de plata.

¿Por 7 litros cada gramo de plata que vendes de aceite, los 40 gramos de plata a qué equivalen?

40 por 7 multiplica. 4`40, ves, 4`40 de aceite.

En la próxima entrega de estas historias contaré cómo le doy sentido a esta solución, mientras tanto queda como ejercicio para el lector[11].

HISTORIAS ■

NOTAS

1 La mejor referencia en estos momentos para el estudio del álgebra en la época babilónica es el libro reciente de Jens Høyrup *Lenths, Widths, Surfaces. A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin* (Høyrup, 2002), en el que Høyrup recoge y sistematiza sus investigaciones e interpretaciones desarrolladas a lo largo de más de veinte años. Gran parte de los textos que están recogidos y sistematizados en este libro están en su página web http://akira.ruc.dk/~jensh/, en versiones más cuidadas y con menos erratas que las publicadas. Una breve introducción al conjunto de las matemáticas babilónicas, escrita con humor por uno de los que analizaron las tablillas por primera vez a comienzos del siglo veinte, está contenida en el libro de Otto Neugebauer *The Exact Sciences in Antiquity*, del que hay una reedición accesible y económica en la editorial Dover (Neugebauer, 1969), reedición de la segunda edición que se publicó originalmente en Brown University Press en 1957. En esta misma revista apareció un artículo dedicado al asunto hace tres números (Illana, 2008), que también proporciona un panorama del conjunto de las matemáticas babilónicas.

2 El análisis está hecho, por tanto, más desde el punto de vista de la didáctica de las matemáticas que desde el punto de vista de un historiador de las matemáticas. De hecho, este análisis lo he propuesto como ejercicio a los alumnos del curso "Episodios de la historia de las matemáticas" del programa de doctorado de Didáctica de las Matemáticas de la Universitat de València.

3 El problema aparece en la tablilla TMS XIII. Las siglas TMS significan "Textos Matemáticos de Susa", lo que indica que procede de esa zona del actual Irán. Høyrup (2002, p. 206 y n. 234) indica que hay otras tablillas con el mismo problema que proceden del núcleo central del territorio de Babilonia. Ver también en Høyrup (2002, n. 233) las fuentes de la copia a mano en papel y la transliteración de la tablilla que ha utilizado.

4 En la página 41 y ss de Høyrup (2002) explica cómo está hecha esa traducción conforme intentando establecer una correspondencia con la estructura del texto original, a costa de forzar el idioma al que se traduce, con el fin de que se pueda hacer una lectura en ese idioma muy pegada al texto original. Desde mi punto de vista, sólo una traducción de este estilo permite hacer hipótesis sobre los conceptos, procesos y sistemas de signos que están en uso en el texto en cuestión.

5 Høyrup representa los números en el sistema sexadecimal indicando mediante el signo ` la posición 60, `` la posición 60^2, etc. y mediante el signo ´ la posición 60^{-1}, ´´ la posición 60^{-2}, etc., de modo que, por ejemplo 70'5 lo escribe 1` 10 30´.

6 Así designa al ciclo "Dinero–Mercancía–Dinero" Karl Marx en la Sección segunda del Libro Primero de *El Capital*, en que analiza la transformación del dinero en capital. En los ciclos del capital especulativo de nuestros días la M prácticamente ha desaparecido y la D es un signo sin referente en mercancía alguna. Algo de esto ya apuntaba el propio Marx en el Libro Tercero de *El Capital*.

7 Como bien señala Høyrup la dificultad de la traducción de un texto como éste escrito en un lenguaje tan distinto del inglés o el español reside en que no sólo es diferente el sistema de signos sino el juego de lenguaje, en el sentido wittgensteiniano del término, es decir, "el complejo irreducible de prácticas extralingüísticas, conceptos y uso" (Høyrup, 2002, p. 40). Nuestra lectura también tiene que lidiar con esa diferencia entre juegos de lenguaje para que el sentido que le demos al texto sea afortunado.

8 En Filloy, Rojano and Puig (2008) o en Filoy, Puig y Rojano (2008) describo el uso de esos grafos para la representación de la red de relaciones entre cantidades, que se obtienen al analizar el texto del problema con el fin de traducirlo al sistema de signos del álgebra.

9 En mi página web, http://www.uv.es/puigl/textos.htm, hay una versión en pdf de ese texto, que no tiene las erratas y defectos que aparecieron al pasar el texto que envié en formato electrónico a la imprenta.

10 Este "ves" se repite continuamente. Podemos imaginar que la tablilla recoge los pasos de la solución del problema, y que las acciones correspondientes se estaban haciendo dibujando en el suelo. "Ves" señala, es como si se indicara que se vea lo que está resultando de las acciones: "ves que resulta 1´30´´". Podría haber hecho una traducción menos conforme y haber escrito: "resulta 1´30´´", pero se habría perdido la huella de las acciones que probablemente acompañaban a lo recogido en la tablilla.

11 Ejercicio que quien quiera puede enviar a historias@revistasuma.es

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

FILLOY, E., ROJANO, T., AND PUIG, L. (2008): *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. Springer, New York.

FILLOY, E., PUIG, L., & ROJANO, T. (2008): El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, *26*(3), pp. 327-342.

HØYRUP, J. (2002): *Lengths, Widths, Surfaces. A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin*. Springer Verlag. New York.

ILLANA, JOSÉ C. (2008): Matemáticas y astronomía en Mesopotamia, *Suma 58*, 49-61.

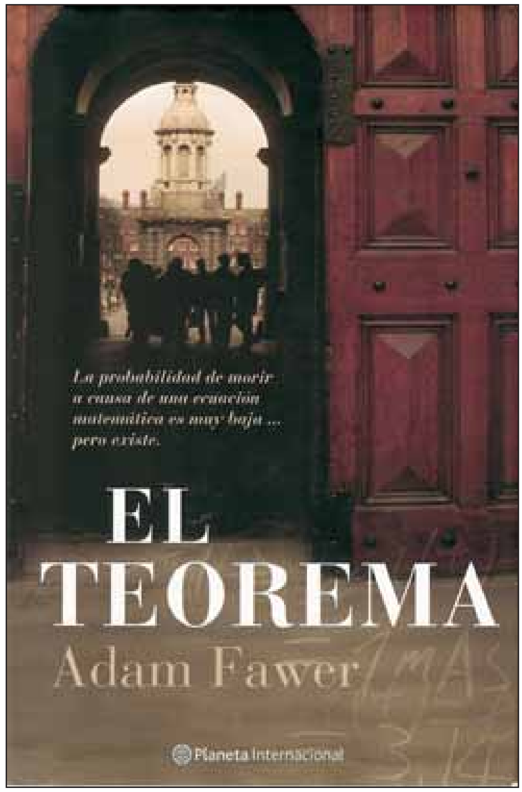
MARX, K. (1964): *El capital*. Traducción española de Wenceslao Roces. Tercera edición. Fondo de Cultura Económica, México, Buenos Aires.

NEUGEBAUER, O. (1969): *The Exact Sciences in Antiquity*. Second Edition. Dover, New York.

PUIG, L. (2006): La resolución de problemas en la historia de las matemáticas. En Aymerich, José V. y Macario, Sergio (Eds.) *Matemáticas para el siglo XXI* (pp. 39-57) Publicacions de la Universitat Jaume I, Castellón.

suma+ 61
Junio 2009, pp.99-106

Matemáticas en lo improbable 2ª parte. Algunos matemáticos, un *Caballero* ludópata y el *Demonio de Laplace*



El teorema
(Título original: Improbable)
Adam Fawer
Editorial Planeta, S. A., Barcelona.
Septiembre de 2005 (1ª Edición)
ISBN: 978-84-08-06096-1.
352 páginas

La presente obra, *El Teorema*, de Adam Fawer, fue presentada en el número 60 de SUMA, junto con una serie de actividades didácticas para la clase. Como el espacio de esta sección está, lógicamente, limitado, varias actividades del guión de trabajo original no se pudieron incluir en el citado número, por ello que aparecen ahora, esperando que respondan a los temas matemáticos que faltaban por tratar en la primera parte.

El tema central de la novela, como muchos lectores ya saben, es la idea del *Demonio de Laplace.* Todo comenzó en la obra del mismo autor: *Ensayo Filosófico sobre las Probabilidades*, de 1814, en la que concretamente nos dice:

Una inteligencia que en un momento determinado conociera todas las fuerzas que animan a la naturaleza, así como la situación respectiva de los seres que la componen, si además fuera lo suficientemente amplia como para someter a análisis tales datos, podría abarcar en una sola fórmula los movimientos de los cuerpos más grandes del universo y los del átomo más ligero; nada le resultaría incierto y tanto el futuro como el pasado estarían presentes ante sus ojos. El espíritu humano ofrece, en la perfección que ha sabido dar a la astronomía, un débil esbozo de esta inteligencia. Sus

Constantino de la Fuente Martínez
IES Cardenal López de Mendoza, Burgos
literatura@revistasuma.es

> descubrimientos en mecánica y geometría, junto con el de la gravitación universal, le han puesto en condiciones de abarcar en las mismas expresiones analíticas los estados pasados y futuros del sistema del mundo. Aplicando el mismo método a algunos otros objetos de su conocimiento, ha logrado reducir a leyes generales los fenómenos observados y a prever aquellos otros que deben producirse en ciertas circunstancias. Todos sus esfuerzos por buscar la verdad tienden a aproximarlo continuamente a la inteligencia que acabamos de imaginar, pero de la que siempre permanecerá infinitamente alejado. Esta tendencia, propia de la especie humana, es la que la hace superior a los animales, y sus progresos en este ámbito, lo que distingue a las naciones y los siglos y cimenta su verdadera gloria (Ensayo Filosófico sobre las Probabilidades, pág. 25).

La idea de Fawer es precisamente la de negar de la imposibilidad de la existencia de este *Demonio*. Para ello se adentra en el terreno de la ciencia ficción y nos acerca, de una manera brillante a lo que parece... ¿imposible? El contexto parece estar construido *con regla y compás*, aunque no sean los instrumentos más útiles para movernos por el mundo de las probabilidades o el de la literatura. El personaje principal padece (pág. 48) *ELT, epilepsia del lóbulo temporal. El médico le informó que las alucinaciones olfativas y visuales eran típicas antes de un ataque, como lo era oír voces o tener la sensación de dejà vu.* Todas las circunstancias configuran una trama que se desarrolla como si estuviera perfectamente planificada por una inteligencia superior, y es que realmente lo está, pero por alguien que no vive para verlo ...

Una propuesta de trabajo en el aula

Desde el punto de vista didáctico, debemos tener muy en cuenta la opinión de Laplace, ya expuesta en el anterior artículo, sobre las peculiaridades del pensamiento probabilístico:

> La teoría de las probabilidades obedece a consideraciones tan delicadas que no es raro que, partiendo de los mismos datos, dos personas lleguen a resultados distintos, sobre todo en las cuestiones más complejas (Ensayo Filosófico sobre las Probabilidades, pág. 31).

Estas consideraciones de Laplace nos traen a la memoria las dificultades con que nos encontramos cuando deseamos comprender y resolver algunos problemas de probabilidades. A este respecto no podemos dejar de mencionar el famoso problema de Monty Hall, que debe su nombre al presentador del programa de televisión *Let's Make a Deal* (*Hagamos un trato*). El lector que desee conocer más a fondo el problema no tiene más que escribir el título en el buscador Google, o si prefiere una versión más literaria, más acorde con esta sección, leer *El curioso incidente del perro a medianoche*, fantástica novela de Mark Haddon, que ya ha sido objeto de esta sección (números 54 y 59 de SUMA); en esta obra se dedican varias páginas al problema, incluyendo cartas de profesores de matemáticas de diferentes universidades, en las que *persisten en el error*...

A propósito de lo anterior, aunque en España no tenemos ningún problema tan famoso como el de Monty Hall, sí que de vez en cuando aparece una *perla* en algún medio de comunicación. Vamos a aprovechar estas líneas para referirnos concretamente al programa Informe Semanal del día 20 de diciembre de 2008. En él apareció el reportaje titulado *Ilusión en tiempos de crisis*, que puede contemplarse en: www.informesemanal.tve.es, afirmándose, y no por un periodista, que la probabilidad de que le toque el gordo a una persona es:

$$\frac{1}{195 \times 85.000}$$

siendo 195 el número de series de cada número y 85.000 el número de billetes que se ponen a la venta (cada billete contiene 10 décimos o fracciones de un número). Dejamos al lector el comentario personal sobre el resultado y animamos a usar en clase el video del reportaje, porque no tiene desperdicio... ¡Qué razón tenía Laplace! Nadie estamos a salvo de cometer errores, aunque sea un elemental cálculo de probabilidades: profesores y profesoras de Primaria, Secundaria, Universidad...

Por último, sobre las actividades para la clase, que componen la propuesta didáctica, proponemos al lector acudir al nº 60 de SUMA; en ese número se hace la presentación general de las mismas, analizando las cuestiones a tener en cuenta antes de llevarlas al aula, y se expone la primera mitad, aproximadamente. El resto aparecen a continuación.

Laplace es mucho Laplace

> En 1770, Laplace presentó su primer trabajo en la prestigiosa Academia de las Ciencias. Después de aquello, quedó claro para todos que era un genio matemático. Así que dedicó el resto de su vida a dos campos: la probabilidad y la astronomía (pág. 212).

El capítulo 19 del libro, además de ser cuando nuestro protagonista cree estar viviendo una larga alucinación, también nos proporciona muchos datos de Pierre Simón Laplace.

a. Elabora una biografía de este ilustre matemático, situando sus obras en el tiempo y aportando algunos de sus más famosos resultados.

En relación con estos últimos, no podemos dejar pasar esta oportunidad sin señalar que Laplace es el autor de una fórmula que sirve para calcular probabilidades, conocida en ESO y Bachillerato, y que se denomina Fórmula de Laplace.

b. ¿En qué consiste? ¿Cuándo se puede utilizar? Pon algún ejemplo en el se vea su utilidad.

En el capítulo 19 habrás visto gráficas que representan distribuciones de datos, con una característica común: tienen forma de campana. En matemáticas, a estas formas de distribuirse los datos o resultados se le llama *Distribución Normal*, y la función que tiene esa representación gráfica se llama *Campana de Gauss.*

c. Profundiza en el significado de la Distribución Normal y averigua la expresión general de la función que la representa. ¿Por qué se denomina la campana de Gauss?

En 1812 Laplace publicó su obra *Teoría Analítica de las probabilidades*. En ella aparece el método de los mínimos cuadrados, útil para minimizar los errores.

d. Explica en qué consiste el método anterior. Explícalo con un ejemplo.

Laplace como excusa para resolver un problema sencillo

> Laplace demostró que la mejor manera de predecir la realidad no es calcular la respuesta correcta, sino establecer cuál sería la respuesta menos errónea. En el ejemplo de la moneda, a pesar de que la posibilidad de conseguir dos caras en cuatro tiradas es sólo del 37,5%, la posibilidad de conseguir cualquier otro número de caras es incluso menor y, por lo tanto, la predicción de tener dos caras es la menos errónea y por consiguiente la más correcta (pág. 216).

Vamos a estudiar a fondo el problema que se trata en la cita anterior, para ello tiramos una moneda cuatro veces… Gira y gira, parece que se contornea, cae, choca, rebota y por fin deja de moverse. Anotamos el resultado de cada tirada y nos preguntamos:

a. ¿Cuántos resultados podemos obtener después de las cuatro tiradas? Escríbelos todos.

P.S. de Laplace

El conjunto de los resultados posibles de un *experimento aleatorio* se llama *espacio muestral*, y si lo conocemos con exactitud, la mayoría de las preguntas que nos puedan hacer, sobre resultados del experimento, las podemos contestar con relativa facilidad. Vamos a calcular la respuesta a alguna de ellas, sobre la probabilidad de obtener:

b. Exactamente dos caras. Compara tu resultado con el de la cita.
c. Alguna cruz.
d. Exactamente una cara.
e. Distinto número de caras que de cruces.

Uno de nuestros deseos es llevarte un poco más lejos… Para ello vamos a tirar la moneda un número n de veces, siendo n un número natural mayor o igual que 1. A partir de aquí nos interesa calcular la probabilidad de obtener:

f. Al menos una cara.
g. Exactamente dos cruces (siendo $n \geq 2$).
h. El mismo número de caras que de cruces (n debe ser par).
i. Un número de caras menor que cuatro (n debe ser $n \geq 3$).
j. Exactamente c caras, siendo $n \geq c$.

Grandes subidas y grandes desplomes…

> Cuando la noticia se hizo pública al cabo de unas semanas, las acciones subieron como la espuma, desde la cotización de 20,24 $ la acción, que mantenía desde hacía cincuenta y dos semanas, a 101,50 $ (pág. 111).

Por un rato, vamos a ponernos en la piel de Grimes, el personaje, y vamos a pensar en lo que pasa con nuestro dinero invertido en la Bolsa.

a. Si tenemos 200.000 $, como Grimes, compramos acciones a 20,24 $ cada una y al cabo de 52 semanas se ponen a 101,50 $, ¿qué porcentaje de ganancia hemos conseguido?

Poco después de lo anterior, las acciones pierden el 98% de su valor. Es una pena, pero hemos perdido mucho dinero…

b. ¿Es cierto que entonces las acciones no valen ni 10.000$?

El mundo económico tiene uno de sus santuarios en la Bolsa, también denominada *Mercado de Valores*.

c. Busca la información que necesites para hacer un informe sobre la Bolsa: ¿Qué se negocia en ella? ¿Qué son las acciones? ¿Qué significa que la Bolsa suba o baje? ¿cuáles con los principales índices de la Bolsa española? Añade además toda la información que te parezca relevante.

Laplace demostró que la mejor manera de predecir la realidad no es calcular la respuesta correcta, sino establecer cuál sería la respuesta menos errónea

El Demonio de Laplace

> Una inteligencia que en un momento determinado conociera todas las fuerzas que animan a la naturaleza, así como la situación respectiva de los seres que la componen, si además fuera lo suficientemente amplia como para someter a análisis tales datos, podría abarcar en una sola fórmula los movimientos de los cuerpos más grandes del universo y los del átomo más ligero; nada le resultaría incierto y tanto el futuro como el pasado estarían presentes ante sus ojos (pág. 217).

La cita anterior está tomada de la página 25 del libro de Pierre Simón De Laplace, *Ensayo filosófico sobre las probabilidades.* En ella se ilustra el concepto central desarrollado en *El Teorema*, el Demonio de Laplace, aunque aparece en bastantes otras páginas de la novela: 135, 209, 217, 218, 365,…

a. Resume con tus palabras en qué consiste.

En el libro de Laplace, E*nsayo filosófico…* las palabras de la cita continúan con las siguientes:

> El espíritu humano ofrece, en la perfección que ha sabido dar a la astronomía, un débil esbozo de esta inteligencia. Sus descubrimientos en mecánica y geometría, junto con el de la gravitación universal, le han puesto en condiciones de abarcar en las mismas expresiones analíticas los estados pasados y futuros del sistema del mundo. Aplicando el mismo método a algunos otros objetos de su conocimiento, ha logrado reducir a leyes generales los fenómenos observados y a prever aquellos otros que deben producirse en ciertas circunstancias. Todos sus esfuerzos por buscar la verdad tienden a aproximarlo continuamente a la inteligencia que acabamos de imaginar, pero de la que siempre permanecerá infinitamente alejado. Esta tendencia, propia de la especie humana, es la que la hace superior a los animales, y sus progresos en este ámbito, lo que distingue a las naciones y los siglos y cimenta su verdadera gloria.

b. Estas palabras, que lógicamente no se mencionan en *El Teorema,* ¿son un jarro de agua fría para los intentos de la ciencia de conseguir hacer realidad el Demonio de Laplace? ¿Podrá ser una realidad en el futuro? Expón tus argumentos con claridad.

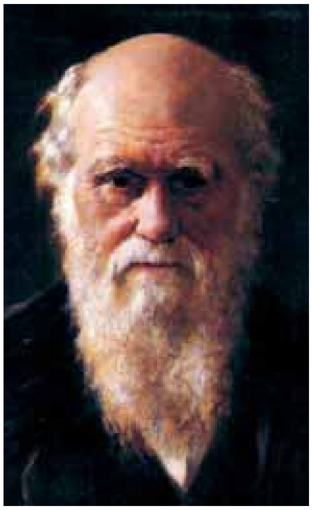
En la página 296 del libro, David Caine, el protagonista principal, se siente culpable de las cosas que pasan, puesto que parece que son planificadas y programadas por él. Este sentimiento podrías tenerlo tú mismo si te vieras en la misma situación.

c. Imagínalo y describe alguna sensación y algún sentimiento que podrías tener como consecuencia de tus *poderes.*

El origen de las probabilidades: ¿el Caballero de Meré era ludópata?, ¿los números nos hacen trampas?

> De Meré era un jugador compulsivo y sus preguntas se referían a un juego de dados muy popular donde el jugador tira cuatro dados. Si lo hacía sin sacar un seis cobraba la apuesta, pero si sacaba un seis, entonces ganaba la casa (Pág. 41).
>
> ¿Alguien conoce de dónde viene la teoría de las probabilidades? (Pág. 40).

Fermat



Darwin

Pascal

La primera cita continúa en la página 42, donde se muestra que si un jugador hace 100 tiradas, probablemente ganaría 48 y perdería 52 veces.

a. Demuestra que es cierto el resultado anterior.
b. Estudiar la probabilidad de ganar en este juego, en función del número de dados que se puedan lanzar.

El Caballero de Meré, que realmente se llamaba Antoine Gombaud, proporcionó a la historia de las matemáticas algunos problemas que se recordarán siempre. Este jugador escribía a Pascal y le proponía problemas que a él le hubiera gustado tener resueltos, con el fin de tener ventaja en sus partidas. El primero de ellos, que Pascal denominaba *el problema de los partidos*, dice así:

> Después de iniciado un juego en el que participan dos jugadores de igual destreza, donde se requiere conseguir un cierto número de puntos para ganar, es interrumpido antes de que esto ocurra, ¿cómo se han de dividir los premios, sabiendo el número de puntos de cada jugador en el momento de la interrupción?

Está claro que las partes en que se reparten los premios deben ser proporcionales a sus probabilidades respectivas de ganar la partida. Por tanto habrá que calcular esas probabilidades.

c. Resuelve el problema si el número de puntos necesarios para ganar fuera de 5 y los puntos obtenidos por los jugadores al dejar la partida fueran 4 y 3 respectivamente. Haz lo mismo si ahora lo hubieran dejado después de conseguir 2 y 3 puntos respectivamente.

Este problema, en su enunciado original, fue propuesto por el Caballero de Meré a Pascal, y éste, a su vez, se lo envió a Fermat. Cuenta Laplace que lo resolvieron los dos por caminos diferentes y entablaron una discusión entre ellos sobre cuál de los dos métodos era mejor. Al final uno reconoció la generalidad del método del otro.

d. ¿Quién fue el ganador de esta amigable disputa, Fermat o Pascal?

El segundo problema del Caballero de Meré a Pascal iba acompañado con el comentario en el que decía *que había hallado falsedad en los números por la siguiente razón. Si uno se propone obtener un seis con un dado, hay una ventaja como de 671 a 625 en intentarlo en cuatro jugadas. Si uno se propone obtenerlo con dos dados, es desventajoso intentarlo en 24 jugadas. Sin embargo, 24 es a 36, número de caras de dos dados, como 4 es a 6, número de casos en un dado. He aquí un gran escándalo*, que le hacía decir que las proporciones no eran constantes y que la aritmética *se desmentía*.

¿Qué ocurría? Pues ni más ni menos que el Caballero de Meré creía que el número de jugadas debía aumentar proporcionalmente el número de oportunidades totales, cosa que no es exacta, pero está cada vez más próxima a serlo a medida que aumenta el número de oportunidades.

Lee de nuevo el segundo problema del Caballero de Meré y contesta a las siguientes cuestiones:

e. Calcula la probabilidad de obtener un seis al tirar un dado hasta cuatro veces. ¿Por qué dice De Meré que hay una ventaja de 671 a 625?
f. Calcula la probabilidad de obtener dos seises al tirar dos dados hasta 24 veces. ¿Es desventajoso, es decir, la probabilidad es menor que 0,5? Si nos dejan tirar más de 24 veces, ¿entonces la probabilidad es mayor que 0,5?

En el principio estuvo, sobre todo, Blaise Pascal

> Después de ver cómo Blaise se tragaba Euclides, el padre contrató a los mejores maestros de matemáticas, algo que resultó ser una sabia decisión, porque Blaise Pascal se convirtió en uno de los matemáticos más importantes del siglo XVII. (pág. 41).

El genio de Pascal fue la principal materia prima para que se originara una parte nueva en las matemáticas; los problemas del Caballero de Meré no hubieran servido de nada si la genialidad de Pascal no se hubiera fijado en lo que había detrás de ellos. Pero Pascal también se ocupó de otras cosas en matemáticas.

a. Elabora una biografía de Pascal, recogiendo sus aportaciones al campo de las matemáticas.
b. El triángulo de Pascal, también llamado de Tartaglia, ¿en qué consiste? Expón sus principales propiedades.
c. Haz un comentario sobre la máquina de Pascal para calcular como precursora de las calculadoras.
d. Estudia el denominado Teorema de Pascal, enúncialo y expón las características del *hexagrama místico*.

Laplace también tenía problemas…

> Dos años después de la publicación de Teoría analítica de las probabilidades, escribió un trabajo titulado Ensayo filosófico sobre la probabilidad (pág. 215).

A propósito del segundo de los trabajos, Laplace expone en él varios problemas, algunos de los cuales te vamos a presentar. El primero de ellos es el *problema de San Petersburgo*, denominado así porque fue publicado en los *Comentarios* de la Academia de San Petersburgo por Daniel Bernouilli, utilizando un concepto nuevo que él llamó *esperanza moral*. Su enunciado es el siguiente:

> Pablo juega a cara o cruz con la condición de recibir dos francos si saca cara en la primera tirada, cuatro si no lo saca hasta la segunda, ocho si no lo saca hasta la tercera tirada, y así sucesivamente.

a. Calcula la probabilidad de tener que tirar el dado exactamente seis veces para obtener cara por primera vez.
b. Calcular la probabilidad de tener que tirar el dado n veces para obtener cara por primera vez.
c. Calcula la ganancia obtenida en el caso de obtener cara con las condiciones del apartado anterior.
d. Bernouilli es un apellido muy importante en las historia de las matemáticas. Recoge la información necesaria para elaborar un esquema con todos los matemáticos de esta familia, sitúa a Daniel y elabora una biografía suya.

El segundo problema tiene el siguiente enunciado:

> Dos jugadores juegan juntos a cara o cruz, de tal modo que, en cada tirada, si sale cara A le da una ficha a B, y si sale cruz B le da una ficha a A. El número de fichas de A es ilimitado y el de B es limitado. La partida se acaba cuando B se quede sin fichas. Se trata de averiguar en qué número de jugadas se acabará la partida, en función del número de fichas de B.

Laplace dice que se podría apostar un poco menos de uno contra uno a que la partida terminará en 23780 tiradas, y un poco más (de uno contra uno) a que terminará en 23 781 tiradas en el caso en que B tenga 100 fichas.

d. Resuelve el problema para el caso en que B tenga una ficha.
e. Analiza la veracidad de la afirmación de Laplace en el caso en que B tenga 100 fichas.

La Ley de los Grandes Números

> Caine tuvo que admitir que su amigo sabía aceptar las cosas tal comovenían. Eso es algo que siempre le había gustado de Doc: nada le sorprendía.
>
> Es la ley de los grandes números –le había comentado en una ocasión– lo sorprendente sería que algo extraño les ocurriera a todos los habitantes del planeta al mismo tiempo (pág. 298).

La Ley de los Grandes Números fue enunciada y demostrada por primera vez por Jacques Bernouilli, por lo que inicialmente se le denominó teorema de Bernouilli. Más tarde fue Poisson quien le puso el nombre con el que actualmente se le conoce.

a. Enuncia la Ley de los Grande Números.
b. Haz una biografía de Jacques Bernouilli y averigua en qué obra suya aparece por primera vez la citada Ley.
c. Escribe una biografía breve de Poisson.

Laplace, en su obra *Ensayo filosófico sobre las probabilidades* explica la Ley de los Grandes Números con un ejemplo:

> Tenemos una urna con bolas blancas y negras y cada vez que extraemos una bola de la urna la volvemos a introducir de nuevo en ella antes de proceder a una nueva extracción.
>
> Lo que dice la ley de los grandes números es lo siguiente: *la probabilidad de que la razón entre el número de bolas blancas extraídas y el total de bolas sacadas no se aparte de la probabilidad de extraer una bola blanca en cada extracción, es muy alta siempre que el número de extracciones sea muy grande.*

Dicho en un lenguaje más actual lo podemos decir de las formas siguientes:

Cuando el número de extracciones sea muy grande (tienda a infinito), la razón entre el nº de bolas blancas extraídas y el nº total de extracciones efectuadas se acerca a la probabilidad de extraer bola blanca en cada extracción.

La frecuencia relativa del suceso aleatorio “sacar bola blanca” se acerca al valor de la probabilidad de sacar bola blanca, cuando el número de extracciones tiende a infinito.

d. En el último de los enunciados se habla de frecuencia relativa. ¿Qué significa? También se habla de suceso aleatorio. ¿Qué significa?
e. Reflexiona sobre el enunciado en cualquiera de las formas que te hemos expuesto y da tu opinión sobre si es lógico y comprensible.
f. Idea un método basado en la Ley de los Grandes Números para averiguar el número aproximado de peces que puede haber en un lago. Intenta averiguar también el número de peces de una cierta especie que hay entre los peces del mismo lago.

Del Big Bang a la Teoría matemática del Caos

> Caine había pasado horas atrapado en el despacho de Doc mientras el profesor hablaba poéticamente de todo, desde el Big Bang a la teoría del caos (pág. 113).

a. ¿Qué es el Big Bang? Explica razonadamente en qué consiste, su origen, defensores, etc.

Así como el Big Bang se encuadra dentro de los conocimientos de la Física, la teoría del caos forma parte de los conocimientos matemáticos surgidos en el siglo XX.

b. Explica en qué consiste la teoría matemática del caos.

Para que tengas un conocimiento más profundo sobre esta nueva teoría matemática, vamos a presentarte un ejemplo sacado de la obra literaria El curioso incidente del perro a medianoche, concretamente en la página 132 de este libro aparece:

> He aquí una fórmula para una población de animales

$$N_{nueva} = \lambda \cdot (N_{vieja}) \cdot (1 - N_{vieja})$$

La ecuación anterior se llama de P. F. Verhulst, que fue un científico que estudió el crecimiento demográfico y la planteó en 1845.

Para simplificar las cosas y que todos la entendamos mejor, vamos a escribir la fórmula así $N' = \lambda \cdot N(1-N)$, donde N es la población vieja (del año anterior), N' es la población nueva (del año siguiente) y λ es una constante que llamamos de fertilidad, que puede cambiar con las condiciones ambientales, de alimentación, depredadores, climáticas, etc. Suponemos, para trabajar con números sencillos, que N y N' son números entre 0 y 1 y que representan los millones de individuos de esa especie.

c. Comprueba que si $\lambda<1$, la población es cada vez más pequeña y se extingue. Hazlo para los casos $\lambda = 0{,}5$ y $N = 0{,}8$, calculando la población en años sucesivos.
d. Si $\lambda = 1{,}5$ y la población inicial es 0,1, puedes comprobar que al cabo de 3 años la población será de 0,21676. ¿La población va creciendo? Comprueba que se va estabilizando hacia el valor 0,3333. ¡Y esto ocurre aunque el tamaño inicial sea otro! Compruébalo.
e. Verifica que si $\lambda = 2{,}5$ la población se estabiliza en las cercanías del valor 0,6.
f. En el caso $\lambda = 3{,}2$ puedes comprobar que la población se estabiliza en valores cercanos a 0,5 y 0,8; un año en uno de ellos y al siguiente en el otro.
g. En el caso de $\lambda = 3{,}5$ la población se acerca a cuatro valores: 0,38; 0,83 y otros dos valores que debes descubrir por tus propios medios.
h. Comprueba que para $\lambda = 3{,}57$ aparece el caos; es decir, no podemos predecir el resultado de un año sabiendo el del año anterior.

Este ejemplo fue estudiado en el siglo XX por el biólogo Robert May con la colaboración de otras personas. A su vez, estos resultados, junto con los de otras situaciones, fueron la base para la aparición de un nuevo campo de las matemáticas que estudia este tipo de fenómenos y que se denomina Teoría del Caos.

i. Recopila información y presenta alguna otra situación en la que podamos encontrar el caos.

Algunas ideas que han influido y revolucionado la Ciencia

> Todas las teorías y deducciones que lo habían conducido hasta este punto pasaban en ese momento por su cabeza. La teoría de la relatividad de Einstein, el principio de indeterminación de Heisenberg, el gato de Schrödinger, el multiuniverso de Deutsch, y, por supuesto, el demonio de Laplace (pág. 135).

Esta cita resume de forma clara muchas de las ideas científicas que aparecen en *El Teorema*, que se discuten y se explican intentando que el lector reflexione sobre ellas y forme su opinión personal.

David Deutsch

Nosotros también vamos a proponerte que traslades al papel tus reflexiones sobre estos temas (excepto del Demonio de Laplace, que lo tratamos específicamente):

a. Elabora una pequeña biografía de cada uno de los personajes, de no más de una página cada una: Einstein, Heisenberg, Schrödinger y Deutsch.
b. Explica con palabras sencillas en qué consiste cada una de esas ideas, poniendo, si es posible, algún ejemplo que ayude a entenderlas.
c. Expón tu opinión personal sobre la importancia de cada una de ellas.

Y para acabar unos problemillas...

> La probabilidad de hacer una pareja con cualquiera de las dos cartas que tenía en la mano era del 13 por ciento (pág. 314).

a. Vuelve a leer la página citada, si es necesario y comprueba si la afirmación es cierta.

> Pero sólo había una probabilidad de 0,5 por ciento que pudiera convertir la jota o el nueve en un trío (pág. 314).

b. Repasa la situación que se plantea en el libro y averigua si la afirmación anterior es correcta.

> ¿Sabes cuáles son las probabilidades de conseguir cincuenta caras consecutivas? –preguntó Tversky-. Es un medio elevado a la quincuagésima potencia. Eso nos da...-Doc lo calculó en el ordenador- 1 entre 1125.8999.906.842.620 (pág. 345).

Si te fijas en el número anterior, que debe ser el resultado de 2^{50}, puedes *ver* que no es correcto; 2^{50} da un resultado distinto.

c. Averigua la causa. Vamos a dar por bueno el posible error cometido al poner un grupo de 4 cifras separadas por puntos, lo más probable es que sobre uno de los nueves. El error es otro.

Olvidemos lo anterior y sigamos con la moneda. Ahora se trata de tirar una moneda hasta conseguir una cara.

d. ¿Cuál es la probabilidad de obtenerla?

LITERATURA Y MATEMÁTICAS ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Dejando a un lado Internet, que en muchos casos es lo más parecido a la jungla, proponemos algunos títulos interesantes para consultar y extraer información. Desde el punto de vista histórico es imprescindible el libro de Laplace y muy útil el de Mankiewicz, aunque pueden encontrarse muchas cosas en los innumerables libros de historia de las matemáticas. Desde el punto de vista didáctico los primeros libros de Miguel de Guzmán, José Colera y Adela Salvador, según va pasando el tiempo, se están convirtiendo en pequeñas joyas. Por último, desde el punto de vista científico y de divulgación, el libro de Sautoy es fascinante, aunque su tema central es la hipótesis de Riemann; para nuestro trabajo es muy útil la parte que desarrolla muchas ideas de divulgación sobre la Criptografía.

BERGASA, J. (2003): *Laplace. El matemático de los cielos*, Nivola libros y ediciones, S. L., Madrid.

LAPLACE, P. S. de (1985): *Ensayo filosófico sobre las probabilidades*, Alianza Editorial, Madrid.

GUZMÁN, M. de; COLERA, J; SALVADOR, A. (1987): *Bachillerato 1. Matemáticas*, Ediciones Anaya S. A, Madrid.

GUZMÁN, M. de; COLERA, J; SALVADOR, A. (1988): *Bachillerato 3. Matemáticas*, Ediciones Anaya S. A., Madrid.

GUZMÁN, M. de; COLERA, J; SALVADOR, A. (1989): *COU. Matemáticas II Opciones C y D*, Ediciones Anaya S. A., Madrid.

MANKIEWICZ, R., (2000): *Historia de las matemáticas*, Ed. Paidós Ibérica, Barcelona.

SAUTOY, M. du. (2007): *La música de los números primos*, Ed. Acantilado, Barcelona.

suma+ 61
Junio 2009, pp. 107-112

Luca Pacioli y la *Divina Proporción*

Hace 500 años, el 9 de mayo de 1509, escribía Daniele Gaetani al patricio veneciano Andrea Mocenigo lo siguiente:

> Me complace sumamente, oh magnífico Andrea, la suerte que tiene el actual siglo de que se halle recién publicado el libro sobre *La Divina Proporción*, escrito por el maestro Luca Pacioli de Borgo Sansepolcro, esclarecidísimo representante de la orden minoritaria, de quien dudo que podamos en lo sucesivo encontrar algún émulo en materia matemática.

La fama que en los ambientes científicos y artísticos de la Italia renacentista de comienzos del siglo XVI expresa en este texto Andrea Mocenigo, se debía no tanto a sus aportaciones matemáticas originales cuanto a su capacidad para recopilar, difundir y enseñar los diversos contenidos de la materia conocidos en aquella época. Y es que, si hay talentos que destacan por su capacidad creativa, por su originalidad, hay también talentos que sobresalen por su capacidad de recoger y dar unidad a multitud de saberes dispersos de una determinada época. Los primeros contribuyen al avance del conocimiento, mientras que los segundos preparan las condiciones para que otros realicen los avances. Entre estos últimos, se encontraba preponderantemente Luca Pacioli.

Luca Pacioli había nacido en 1445 en el pueblecito de Borgo Sansepolcro, situado en los confines de la Toscana, perteneciente a finales del siglo XV a la república de Florencia. Aquí transcurre su juventud, y el ambiente y la tradición franciscana del pueblo debieron de influir no poco en su decisión posterior de ingresar en la Orden Menor de San Francisco. Sus primeros conocimientos laicos se los debe a la familia Folco

de Belfolci, en cuya casa trabajó como “apprenti”. Por otra parte, tiene ocasión de trabar amistad con Piero Della Francesca, y de asistir a las clases que este impartía, en las frecuentes visitas que realizaba a su pueblo natal de Borgo Sansepolcro. El propio Piero debió de introducirle en la corte de Urbino, cuyo duque poseía una espléndida biblioteca, donde encontró sin duda abundante material de textos antiguos que estimularon su afición por el estudio de las ciencias.

Santiago Gutiérrez
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*
hace@revistasuma.es

A los veinte años se dirige a Venecia, para trabajar en casa del mercader Antonio Rompíasi, como preceptor de sus hijos Francesco y Paolo. Con este motivo escribe un primer libro de *Álgebra*, que dedica a sus jóvenes alumnos. En Venecia asiste a las lecciones públicas de Doménico Bragadino, mejorando así notablemente su formación matemática. Como quiera que acompaña a Rompíasi en sus frecuentes viajes de negocios, lo aprovecha para aumentar sus conocimientos comerciales.

En 1470, al morir Rompíasi, se traslada a Roma, a casa de Leone Alberti, a la sazón secretario en la cancillería papal. Comienza sus estudios de Teología, y en 1472 ingresa en la Orden de los Franciscanos Menores. Aquí sirve de modelo a Piero Della Francesca para pintar la figura de San Pedro Mártir en el cuadro *Pala di Brera*, pintado entre 1472 y 1474.

En 1475, es nombrado, a propuesta de los estudiantes, lector de Matemáticas en Perugia, y es contratado en 1477, para enseñar Matemáticas, con un sueldo anual de 30 fiorines. En 1480, comienza una serie de viajes por varias universidades, enseñando Matemáticas, y regresa de nuevo a Perugia, en cuya universidad obtiene una cátedra para enseñar el Abaco, de 1486 a 1487. A continuación se toma un tiempo de descanso, dado el agotamiento que le ha producido su intensa actividad docente, y reaparece en 1490 en Nápoles para enseñar Teología y Matemáticas. De 1490 a 1493 se retira a su pueblo natal, donde se dedica a preparar la edición de su obra *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportione et Proportionalità,* que se publica en 1494, para lo cual se traslada a Venecia, donde se va a imprimir.

La Summa...

Conviene detenerse un momento en la *Summa de Aritmética, Geometría, Proportioni et Proporcionalità* por la importancia que tuvo en su época. Efectivamente, escrita en lengua vulgar, puede ser considerada como el primer libro de álgebra del Renacimiento, dada la difusión que adquirió entre sus contemporáneos, a pesar de que ya diez años antes se había publicado la obra *Triparty* del francés Chuquet. La difusión llegó a tal extremo que, como señala C. Boyer, los antiguos historiadores del Álgebra pasaban directamente del *Liber abaci* de Fibonacci de 1202 a la *Summa* de 1494. En realidad, para su elaboración, Pacioli se apoyó fundamentalmente en los *Elementos* de Euclides, del que había hecho una traducción al Latin, y en los trabajos de Leonardo de Pisa o Fibonacci, el más grande matemático de la Edad Media.

El libro, en el que recopila todo el saber de su época, se compone de cinco capítulos. El primero de ellos, dedicado extensamente a la Aritmética y al Álgebra, es el más importante de todos. En él trata, por lo que se refiere a la Aritmética, de los números perfectos e imperfectos, el sistema de numeración decimal, las progresiones aritméticas y geométricas, las fracciones y sus operaciones, y la teoría de las proporciones que sostiene "rige todas las cosas" (en este sentido, señala su importancia en Medicina, Mecánica, Pintura con la mezcla de colores, Arquitectura, y arte militar).

En cuanto al Algebra, estudia las diferentes operaciones con polinomios y potencias, y resuelve las ecuaciones de grado no superior al cuarto. Además de las letras *p* y *m* para representar la suma y la resta, como era costumbre en la época, utiliza los términos: *co* para *cosa* (como llamaban a la incógnita), *ce* para censo (el cuadrado de la cosa), *cece* para la cuarta potencia de la cosa (cuadrado del cuadrado), y *ae*, inicial de aequalis, para el signo igual. En cuanto a las ecuaciones, resuelve las de primer y segundo grado, y al llegar a las de tercer grado sostiene que son imposibles de resolver, de modo que su álgebra no suponía ningún tipo de avance sobre la del propio al-Khwarizmi.

> *la* Summa de Aritmética, Geometria, Proportioni et Proporcionalità*, suponía la gran ventaja de reunir en un solo libro prácticamente todo el saber de la época*

Por cierto, que la lectura de los escritos de Pacioli le supuso a Cardano una pequeña desmoralización al ver que, según decía, no se podía resolver la ecuación de tercer grado. No obstante, Cardano superó fácilmente el contratiempo y continuó trabajando la cuestión.

Los capítulos segundo, tercero y cuarto, los más originales, los dedica Pacioli a las aplicaciones comerciales de la Aritmética, con una detallada exposición de la doble contabilidad. En este sentido, se le considera como el padre de la moderna contabilidad. Hay que tener en cuenta que en aquella época, en Italia, había una gran actividad comercial, de modo que esta actividad demandaba una mayor aplicación de los conocimientos matemáticos.

El quinto capítulo, lo dedica a la Geometría. Trata de los triángulos, los cuadriláteros, el círculo, las áreas de diversos polígonos, y los volúmenes de sólidos. Pero, en esta parte no va más allá de Éuclides.

Con todo, la *Summa de Aritmética, Geometría, Proportioni et Proporcionalità,* suponía la gran ventaja de reunir en un solo libro prácticamente todo el saber de la época. Sin él no se hubieran producido los avances que los matemáticos inmediatamente posteriores nos legaron, sobre todo en *Álgebra*, materia que, como se sabe, caracterizó la matemática del Renacimiento. Así lo reconoce Cardano, cuando después de señalar los errores que la *Summa...* contiene, sobre todo en los aspectos teóricos, afirma que si no llega a ser por ella, no habría podido él escribir su *Ars Magna*.

Publicada la *Summa*, Pacioli regresa a Urbino. Allí es acogido por numerosos cortesanos, pues su fama es ya notoria. Y de esta época data la famosa pintura que lo representa explicando uno de los teoremas de Euclides, de pintor desconocido, si bien se han formulado varias hipótesis acerca de la autoría del cuadro, pero ninguna demostrada. El cuadro es históricamente importante, ya que se trata del primer matemático retratado en vida.

En 1496, se traslada a Milán para enseñar Matemáticas, invitado por el duque Ludovico Sforza. Aquí se encuentra con Leonardo da Vinci, que se hallaba entonces al servicio del duque, para quien realizaba su famosa estatua ecuestre. Pacioli, establece una gran amistad con Leonardo, que cristaliza incluso en una colaboración, de la cual se verán más adelante los brillantes frutos.

Pero, cae el duque en 1499, y ambos personajes se ven obligados a abandonar Milán, asentándose por algún tiempo en Florencia, no sin antes haber visitado algunas otras ciudades. De 1500 a 1505 desempeña varios puestos como docente en centros y universidades de Pisa, Perugia, Bolonia y Florencia. Precisamente, Alberto Durero realizó un viaje a Bolonia, en 1506, seguramente con la esperanza de encontrarse en ella con Pacioli, a quien le unía una gran amistad.

En 1505, se encuentra en Roma, donde permanecerá hasta 1508, año en que su protector, Pietro Soderini le concede el privilegio de la publicación de los *Elementos* de Euclides, por un periodo de 15 años. Con este motivo, realiza un último viaje a Venecia al objeto de preparar su impresión.

Permanece en Venecia hasta 1509 para cuidar de la edición de su otro gran libro, *De Divina Proportione*, que vería la luz ese mismo año.

De Divina Proportione

De todos los escritos de Luca Pacioli, solo dos han sido relevantes, la *Summa de Aritmética, Geometría, Proportioni et Proporcionalità,* y este *De Divina Proportione*, cuya publicación hoy conmemoramos.

El libro, *De Divina Proportione*, como indica su título, se dedica a exponer la teoría de una determinada proporción, la que hoy llamamos sección áurea o, como dirían los clásicos, "división de un segmento en media y extrema razón". Trata de responder a la preocupación de los pintores del momento, interesados como estaban por sacar conclusiones prácticas de las matemáticas acerca de la teoría de la visión, esto es, la perspectiva. Así lo confirman los tratados y las ideas difundidas por pintores como Leonardo, Alberti, Piero Della Francesca, Bellini, Mantenga, Botticelli, Lippi,…y tantos otros ilustres renacentistas.

> *El libro,* De Divina Proportione, *como indica su título, se dedica a exponer la teoría de una determinada proporción, la que hoy llamamos sección áurea*

Igual que ocurrió con la *Summa*, el tratado de la proporción áurea fue comenzado varios años antes, durante la estancia de Pacioli en la corte del duque Ludovico M. Sforza (il Moro), en Milán, fruto tanto de sus conversaciones de entonces con Leonardo da Vinci, como del ambiente que en los años finales del Quattrocento rodeó la corte del duque.

Para su elaboración, se sirve Pacioli de fuentes tan importantes como el *Timeo* de Platón, donde se habla del origen de la ciencia matemática, los *Elementos* de Euclides, los escritos de Vitruvio, y otras muchas obras procedentes tanto del mundo clásico como de la Edad Media y de la corriente humanista de su época.

Pacioli tiene en cuenta un principio fundamental, y es el de la primacía de las Matemáticas sobre cualquier otra disciplina. Para él, las Matemáticas están unidas a la observación, de modo que el acto de ver es el elemento básico que hace posible el conocimiento. Puede apreciarse aquí hasta qué punto llega en Pacioli la influencia de Platón. Efectivamente, según leemos en el *Timeo*, dice Platón:

> Lo que ahora hemos de tratar es la utilidad esencial de los ojos, en orden a la cual nos lo ha dado el dios. De hecho, la vista según yo lo razono, ha sido creada para ser, en beneficio nuestro, el principio de la mayor utilidad. En efecto, de todas las disertaciones que actualmente cabe hacer acerca del Mundo, ninguna podría haberse hecho nunca, si los hombres jamás hubieran visto ni los astros, ni el sol, ni el cielo. En cambio, en la situación actual, existen el día y la noche, los meses, los periodos regulares de las estaciones, los equinoccios, los solsticios, todas las cosas que vemos, que nos han procurado el conocimiento del número, que nos han dado el conocimiento del tiempo y nos han permitido especular sobre la naturaleza del universo. Gracias a ello nos ha sido dada esta especie de ciencia, de tal calidad que ningún bien mayor fue dado ni será dado a los mortales por los dioses. Este es, digo, el beneficio más considerable que nos dan los ojos.

La importancia de la visión se halla tan extendida en esta época que no es de extrañar que haya sido precisamente entonces cuando se ha inventado la Perspectiva, materia que considera Pacioli como formando parte de las disciplinas matemáticas. Y siendo como era la perspectiva una preocupación de los pintores, no es de extrañar así mismo la relación y hasta la colaboración entre matemáticos y pintores de la época.

Pues bien, nos encontramos con que el sustrato matemático de la perspectiva es la teoría de las proporciones. Y es una de esas proporciones lo que estudia Pacioli en la primera parte de su libro. En total, son 71 los capítulos de que consta, redactados a modo de cartas dirigidas al duque de Milán, Ludovico M. Sforza. Comienza, por definir los vocablos *matemático* y *disciplinas matemáticas*. Como buen renacentista, profesa un concepto muy amplio de la palabra *matemáticas*. Así nos dice, en el capítulo III:

> … y, para nuestro propósito, por ciencias y disciplinas matemáticas se entienden la aritmética, la geometría, la astronomía, la música, la perspectiva, la arquitectura y la cosmografía, así como cualquier otra dependiente de estas.

En el capítulo V, trata de la *sección áurea*, que Pacioli llama *divina proporción,* y que da lugar al título de la obra. La justificación de tal nombre hay que buscarla en el doble razonamiento que solía hacer nuestro fraile, místico y científico. De las cinco razones que aporta para conceder el apelativo de *divina* a esta proporción, veamos, a modo de ejemplo, la tercera:

> … así como Dios no se puede propiamente definir ni puede darse a entender a otros mediante palabras, nuestra proporción no puede nunca determinarse con un número inteligible ni expresarse mediante cantidad racional alguna, sino que es oculta y secreta y es llamada irracional por los matemáticos.

Aplica la divina proporción a la división de un segmento en dos partes tales que el todo sea a la mayor como la mayor es a la menor. En nuestro lenguaje simbólico, si tomamos como unidad la longitud de un segmento, y este lo dividimos en dos partes, *a* y *1 — a,* podemos expresar la divina proporción así:

$$\frac{1}{a}=\frac{a}{1-a}$$

La razón 1/*a* es la razón áurea o, como la designó Leonardo da Vinci, el Número de Oro. De la ecuación se obtiene:

$$\frac{1}{a}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}618034...$$

El número de oro es pues irracional y suele simbolizarse por la letra griega ϕ. Está considerado como el canon de la belleza. Se halla presente en la arquitectura, desde la antigua Grecia, en el Partenón, por ejemplo, hasta el diseño de documentos actuales, como el DNI, las hojas de papel DIN, …, incluso se encuentra ampliamente difundido en la naturaleza.

Asombró tanto a los matemáticos que hizo decir a Kepler:

> La geometría tiene dos grandes tesoros: uno de ellos es el Teorema de Pitágoras; el otro, la división de un segmento en media y extrema razón. El primero lo podemos comparar a una medida de oro, el segundo lo podríamos considerar como una preciosa joya.

Pacioli tiene en cuenta un principio fundamental, y es el de la primacía de las Matemáticas sobre cualquier otra disciplina

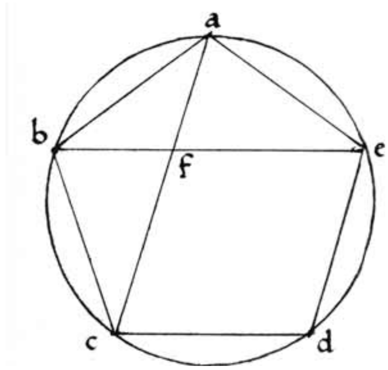
En los siguientes capítulos, estudia Pacioli las 13 propiedades y consecuencias más importantes de la divina proporción. En el capítulo XII, por ejemplo:

> Si una cantidad se divide según nuestra proporción y a su parte menor se le añade la mitad de la mayor, el cuadrado de la suma será siempre el quíntuplo del cuadrado de la mitad de dicha parte mayor.

Da ejemplos numéricos de las propiedades y remite, en cuanto a las demostraciones a las correspondientes de los *Elementos* de Euclides.

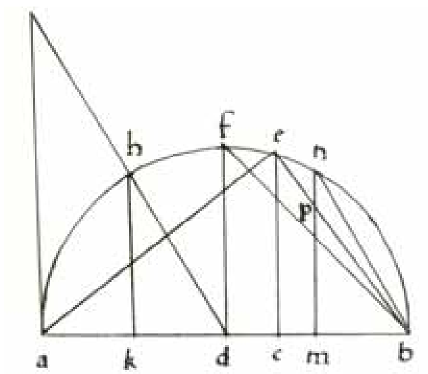
En el capítulo XVIII, estudia la que considera como más "excelsa" de las propiedades, y que va a servir para enlazar con las otras partes del libro, que se refieren a los poliedros, a saber:

> Si en el círculo se forma el pentágono equilátero y en sus dos ángulos más próximos se trazan dos líneas rectas desde los extremos de sus lados, estas, necesariamente, se dividirán entre sí según nuestra proporción, y cada una de sus partes mayores será siempre el lado de dicho pentágono.



La segunda parte del libro estudia los poliedros regulares y otros dependientes de ellos, cómo se forman y qué relación existe entre sus lados y el diámetro de la esfera circunscrita a ellos. De este modo, en los capítulos XXIV a XXX, demuestra por qué hay solo cinco poliedros regulares, e indica cómo se construyen los cinco poliedros regulares inscritos en una esfera.

En el capítulo XXXI, describe cómo se pueden encontrar los lados de los cinco poliedros regulares a partir del diámetro de una misma esfera, en la cual quedan inscritos.



En los capítulos siguientes, estudia la proporción de todos los poliedros regulares entre sí en cuanto a capacidad y superficie se refiere; las posibles inclusiones de unos en otros, deduciendo que son doce y no veinte, dado que no todos admiten ser incluidos en los demás; trata asímismo de los poliedros dependientes de los regulares, obtenidos a partir de ellos, por adición de otros cuerpos, produciendo los poliedros estrellados, o por truncamiento, produciendo los que denomina poliedros *abscisus,* (abscisión, en castellano: separación de una parte de un cuerpo con un instrumento cortante); estudia los cuerpos oblongos, cilindros, prismas, conos, pirámides y figuras truncadas; finaliza con la definición de varios términos matemáticos (centro, diámetro, diagonal, cateto, perpendicular, hipótesis, etc.).

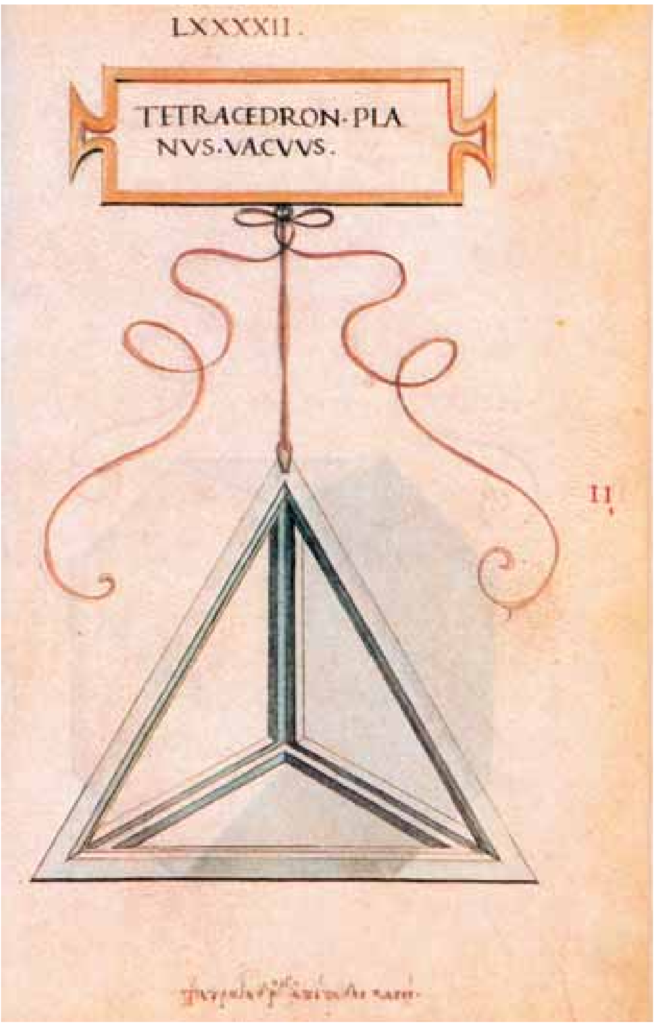
El libro, además, ofrece unas maravillosas ilustraciones de los distintos cuerpos geométricos estudiados, realizadas nada menos que por Leonardo da Vinci, con quien, según se ha dicho, había trabado Pacioli una especial amistad.

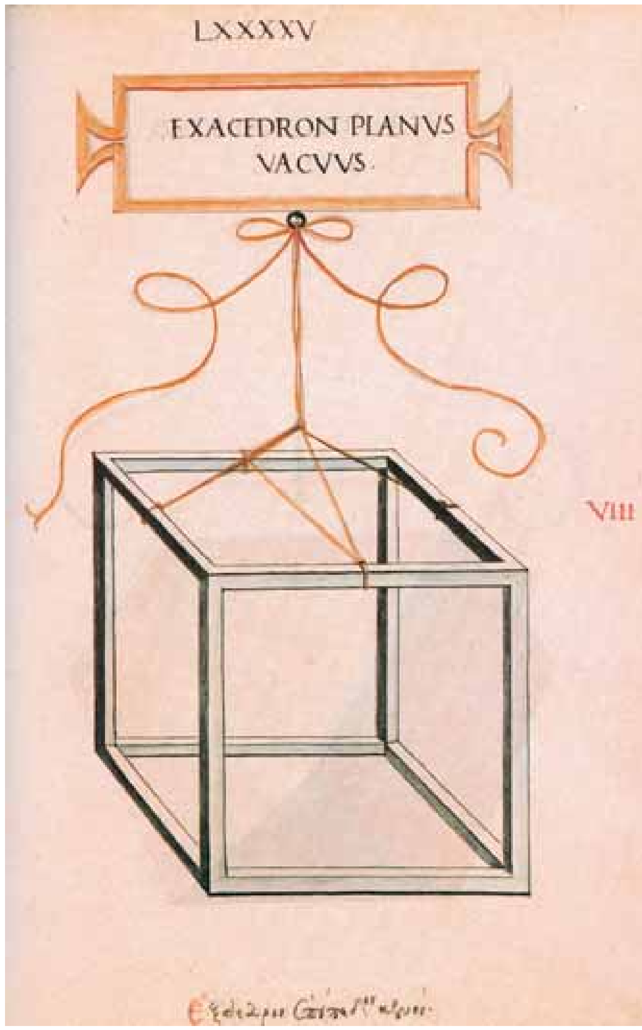
Acabada la edición de su *Divina Proporción*, se traslada a la universidad de Perugia, donde ejerce de nuevo la docencia, cosa que realiza no sin dificultades, dado lo avanzado de su edad y lo mermado de su salud. En 1510, le nombran comisario del monasterio de Borgo Sansepolcro. A instancias del papa León X, en 1514, se traslada a Roma para hacerse cargo de la cátedra de Matemáticas en la Sapiencia. Parece ser que su muerte se produjo en su pueblo de Borgo el año 1517.

HACE

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

PACIOLI, L. (1991): *La Divina proporción*, Ediciones Akal, Madrid.



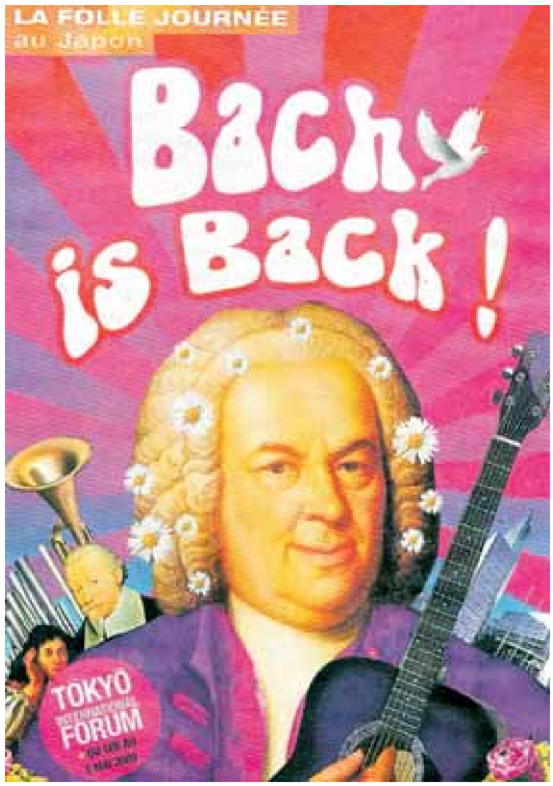


suma+ 61
Junio 2009, pp.113-118

Las matemáticas de Johann Sebastian Bach

Lo que Newton fue como científico, Bach lo fue como músico

C. F. Daniel Schubart, (1784/1785)



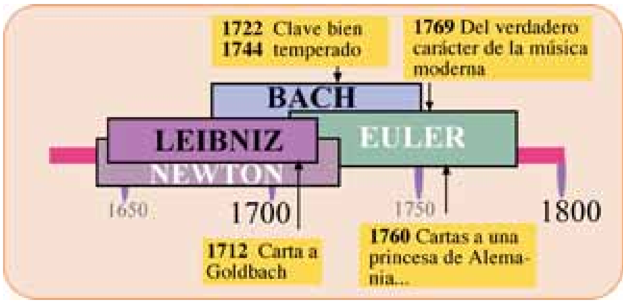
Mientras unos celebrábamos el Año Mundial de las Matemáticas, otros conmemoraban el doscientos cincuenta aniversario de la muerte de Johann Sebastian Bach (Eisenach, 1685 – Leipzig, 1750). Aunque no se aprovechó mucho esta coincidencia, lo cierto es que aparecieron algunos trabajos que mostraban el aspecto científico de sus composiciones. Actualmente, muchos festivales de música clásica, como el *Musika-Música* de Bilbao o *La Folle Journée* en Tokyo, por ejemplo, están dedicando la edición de 2009 a homenajear la figura de Bach. Por esta razón, no queremos dejar pasar de nuevo la oportunidad para reflexionar acerca de la vertiente matemática del compositor de Eisenach.

Bach perteneció a una de las familias de músicos más extraordinarias de la Historia, con más de treinta y cinco compositores famosos y muchos intérpretes destacados. Su reputación como organista y clavecinista se extendió por toda Europa. Además, tocaba el violín y la viola de gamba y fue, sin duda, el primer gran improvisador de renombre de la Historia de la Música. A pesar de esto, hubo que esperar a la generación de Mozart (1756 – 1791) y Beethoven (1770 – 1827) para que se le reconociera como uno de los más grandes compositores de todos los tiempos. Precisamente, atendiendo a la cantidad y calidad de su producción, fue Beethoven quien, haciendo un juego de palabras con el significado de su apellido en alemán, dijo de él que *"no debiera llamarse Bach (arroyo, en alemán), sino mar"*.

Contemporáneo de algunos de los más grandes matemáticos y científicos de la Historia –Leibniz, Newton y Euler–, Bach vivió en una época de auténtica revolución intelectual a la que, sin duda, contribuyó desde la Música. A pesar de la carta que su hijo Carl Philipp Emanuel escribió a J. N. Forkel advirtiendo que su padre "no era amante del seco material mate-

Vicente Liern Carrión
Universitat de València Estudi General
musymaticas@revistasuma.es

mático", lo cierto es que la grandeza estructural de sus obras, así como la manera de zanjar un problema secular a través de *El clave bien temperado* (1722, 1744) son formas brillantes de hacer Matemáticas de las que Bach sólo fue consciente al final de su vida.



J. S. Bach fue contemporáneo de grandes matemáticos

De la simbología numérica a la Sociedad de Ciencias Musicales

Como bien afirma S. Russomanno (2000), la obra de Bach está plagada de claves numéricas. Por ejemplo, al sumar las cifras que corresponden a la posición en el alfabeto de las letras B-a-c-h, se obtiene el número 14 (2+1+3+8) y las cifras correspondientes a las letras J-S-B-a-c-h suman 41, o sea el revés de 14. Esta observación, que podría haber sido una simple anécdota, manifestaba una tácita predisposición hacia las leyes de la simetría y de la armonía universales que proporcionó muchas sorpresas en su obra. El manuscrito del coral para órgano *Von deinen Thron tret ich hermit* contiene en la primera línea 14 notas, mientras que el coral en su integridad suma 41 notas. Sin duda, la frecuencia con la que estos dos números aparecen en las obras de Bach no puede atribuirse a una casualidad. Por otra parte, en la primera sección del *Credo de la Misa en Si menor,* la palabra credo se repite 43 veces. Si se suman las posiciones en el alfabeto de las letras c-r-e-d-o, se obtiene precisamente el número 43. Las dos primeras secciones del mismo *Credo* suman 129 compases, o sea, 43 multiplicado por 3, número que simboliza la Trinidad. En la *Chacona* para violín aparecen continuas referencias a su primera mujer, María Bárbara: en la pieza aparece insistentemente el número 211 correspondiente a las palabras *In Christo Morimur*, y también los números 81 y 158 que se corresponden con la suma de las letras de María (40) Bárbara (41) y Johann (58) Sebastian (86) Bach (14), respectivamente. Pero, más allá de esta simbología numérica, que poco aporta a las Matemáticas, ¿había razonamientos matemáticos en sus composiciones?

Durante muchos años, Bach no fue consciente del rigor científico de sus obras porque, en palabras de su hijo Carl Philipp Emanuel, "no se dejaba arrastrar por profundas consideraciones teóricas y dedicaba, en su lugar, sus energías a la práctica". Pero, tras nueve años de negativa, en el verano de 1747, Johann Sebastian accedió a ingresar en la *Sozietät der Musicalischen Wissenschaften* (Sociedad de las Ciencias Musicales). Era una sociedad elitista, que sólo llegó a contar con veinte miembros, creada por L. C. Mizler (1711 - 1778), un alumno de Bach, que además de músico fue matemático, físico, filósofo y médico. El propósito era investigar la relación entre música y matemáticas y, de hecho, el propio Mizler contribuyó al objetivo de la Sociedad publicando un tratado de composición basado en el *ars combinatoria* de Leibniz. Cuando Johann Sebastian ingresó en la Sociedad, ya sabía que en su manera de abordar los cánones o las fugas se ocultaban razonamientos matemáticos. De hecho, para formar parte de la Soziëtat presentó como trabajo científico una pieza canónica basada en su *Vom Himmel hoch* (BWV 769), junto con un canon a seis voces de las Variaciones Goldberg. Además de estas dos obras aportó un retrato, otra de las exigencias de la selecta sociedad, que se ha convertido en la imagen más conocida de Bach.

Retrato de Bach encargado para su entrada en la Sozietät der Wissenschaften Musicalischen

La estructura de sus obras es pura geometría

La genialidad de Bach alcanza su cénit con el contrapunto y la fuga, composiciones en las que la estructura geométrica es incuestionable. Se parte de uno o varios temas y se les somete a transformaciones geométricas que mantienen la forma del tema: *traslaciones, giros y simetrías* que confieren a la obra una estructura muy rígida, pero en la que el compositor encontró una fuente de inspiración[1]. Se planteaba las fugas con el mismo rigor estructural que un geómetra, pero les añadía una velocidad y brillantez en la improvisación, que resultaron admirables. Sirvan como muestra las palabras de J. N. Forkel (1749 – 1818) refiriéndose a una visita Bach al rey Federico II de Prusia (1712 – 1786):

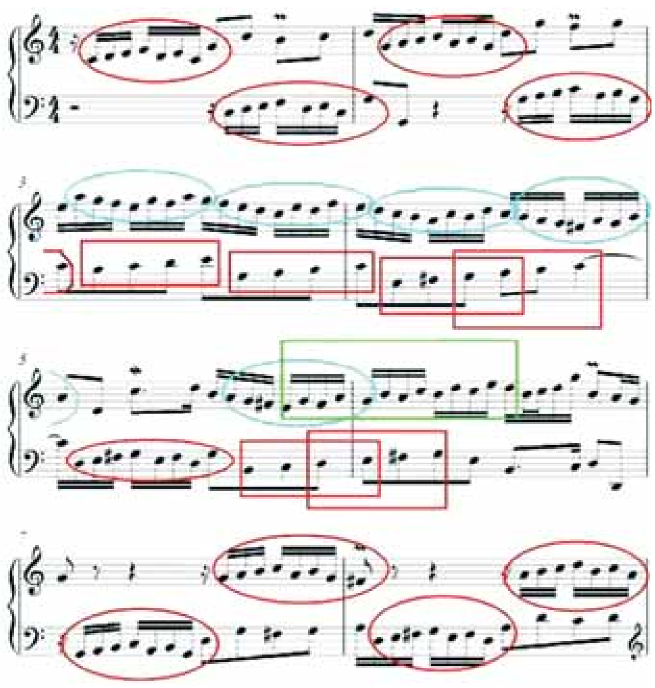
> Una noche, en los momentos en que [Federico el Grande de Prusia] preparaba ya su flauta y sus músicos estaban preparados para comenzar, un funcionario [...] dijo [...] 'Señores el viejo Bach está aquí'. [...] El rey renunció a su concierto de esa noche e [...] invitó a Bach a probar cada uno de los fortepianos y tocar en ellos alguna improvisación. [...] Bach le pidió al rey un tema para una fuga, ofreciéndose a ejecutarla de inmediato, sin preparación alguna. El rey quedó admirado[2] [..] y expresó el deseo de oír una fuga a seis voces obligadas. Pero como no cualquier tema se presta para una armonía tan rica, Bach mismo eligió uno, y al punto, con asombro para todos los presentes lo desarrolló de la misma sabia y magnífica manera como había desarrollado antes el tema del rey.

La dificultad que entraña componer una fuga a seis voces es altísima, y la de improvisarla sólo ha estado al alcance de unos pocos. En palabras de Hofstadter (1987), la tarea de improvisar este tipo de fugas podría compararse, por decir algo, a la de jugar con los ojos vendados sesenta partidas simultáneas de ajedrez y ganarlas todas.

Aunque hacer el análisis preciso de una fuga exige conocimientos musicales que exceden en mucho de nuestro objetivo, a continuación veremos un análisis gráfico de ocho compases de la *Invención I* a dos voces en el que se da una muestra de la técnica (figura 1).

Sólo a modo de ejemplo, veamos algunas de las operaciones matemáticas a las que somete Bach el tema principal (*sujeto*) de la fuga. Para facilitar los cálculos hemos supuesto que la obra está afinada en el temperamento igual de 12 notas en el que las notas vienen dadas por

Do	Do#	Re	Mi^b	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	Si^b	Si
1	$2^{1/12}$	$2^{2/12}$	$2^{3/12}$	$2^{4/12}$	$2^{5/12}$	$2^{6/12}$	$2^{7/12}$	$2^{8/12}$	$2^{9/12}$	$2^{10/12}$	$2^{11/12}$



El sujeto de la fuga aparece en el primer compás con las notas que se han marcado con una elipse roja:

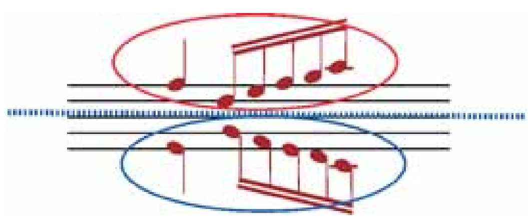
do, re, mi, fa, re, mi, do, sol.

En el compás siguiente, de nuevo marcado con una elipse roja, el tema se repite pero subiéndolo una quinta (do – sol), es decir

sol, la, si, do, la, si, sol, re = $2^{7/12}$ × [do, re, mi, fa, re, mi, do, sol]

Este tipo de operación se repite muchas veces a lo largo de la fuga. Cada vez que en el pentagrama aparece una elipse de color rojo, se ha hecho una traslación (*transposición*) del tema principal subiendo o bajando un intervalo.

Otra operación muy utilizada por Bach es la simetría: toma las notas del sujeto y les aplica una simetría (en el pentagrama éstas aparecen en una elipse azul):



Muestra del tipo de simetría utilizada por Bach

Por ejemplo, hace una simetría de las notas la primera elipse roja,

$$do\times\left[1,\ 2^{2/12},\ 2^{4/12},\ 2^{5/12},\ 2^{2/12},\ 2^{4/12},\ 1,\ 2^{7/12}\right]$$

para obtener las notas de la primera elipse azul (la, sol, fa, mi, sol, fa, la sol):

$$la\times\left[1,\ 2^{-2/12},\ 2^{-4/12},\ 2^{-5/12},\ 2^{-2/12},\ 2^{-4/12},\ 1,\ 2^{-4/12}\right]$$

Salvo la última nota de la secuencia, los exponentes del 2 en ambas series son los mismos pero con el signo contrario.

Pero, sería injusto dar una idea demasiado simplista de una fuga. Además de estas operaciones, que se repiten con el resto de motivos de la composición, no podemos olvidar que el resultado de la obra debe ser armónico y agradable al oído.

Una demostración constructiva: El clave bien temperado

La mayoría de la música que escuchamos actualmente en occidente se basa en doce notas en cada octava: siete de ellas, *do, re, mi fa, sol, la, si*, llamadas naturales, y cinco más *do#, mi^b, fa#, sol#, si^b*, a mitad de camino entre cada dos de las naturales (excepto entre el mi – fa y si – do), llamadas alteradas. Para llegar a este consenso ha habido muchas batallas, pero la guerra la ganó Bach.

En el siglo VI a. C. los pitagóricos establecen un método para obtener las notas basado en el intervalo de quinta. Si al pulsar una cuerda tensa suena una nota, la nota que produce una cuerda que mide dos tercios de la longitud de la primera está una quinta más alta que la primera. Si volvemos a coger dos tercios de la nueva cuerda, tenemos otra nota y así sucesivamente.

Entre dos notas de frecuencias f_1 y f_2, de manera que $f_1 < f_2$, hay un intervalo de quinta si $f_2 = 3/2\ f_1$.

Si tomamos como referencia la nota Fa, el orden en el que aparecen las quintas es

Fa-do-sol-re-la-mi-si.

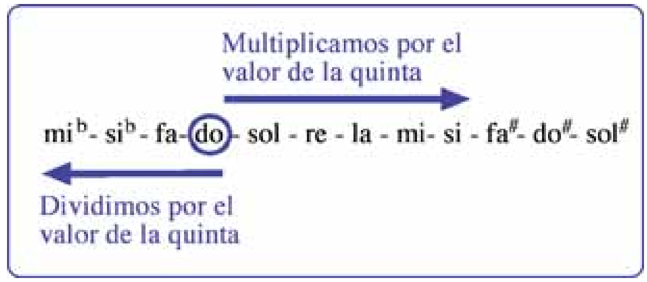
Para obtener más notas podemos subir más quintas, con lo cuál surgen notas alteradas por sostenidos

Fa$^\#$-do$^\#$-sol$^\#$-re$^\#$-la$^\#$-mi$^\#$-si$^\#$,

o bajar quintas para obtener los bemoles

Si^b-mi^b-la^b-re^b-sol^b-do^b-fa^b.

Si nos quedamos con 12 notas, el esquema que se obtiene es el siguiente:



Desde cualquier nota, por ejemplo el Do, para ir hacia la derecha se multiplica por el valor de la quinta y para ir hacia la izquierda se divide por este valor, así

$$Sol = \frac{3}{2}Do$$

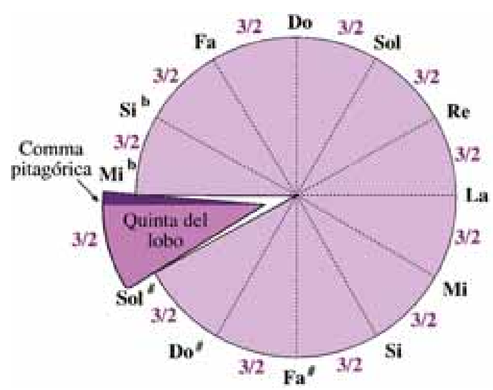
Si el esquema anterior lo planteamos sobre un círculo (círculo de quintas), comprobamos que la duodécima quinta no lo cierra, sino que lo sobrepasa ligeramente, porque con 12 quintas no tenemos 7 octavas exactamente,

$$2^7 = 128 \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^{12} = 129{,}7463$$

La diferencia entre estos dos valores se llama **comma pitagórica**, y se calcula utilizando las reglas para restar intervalos[3]:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \langle - \rangle\ 2^7 = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{2^7} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = 1{,}0136$$

Por pequeña que parezca, esta imprecisión ha sido uno de los principales temas de investigación de los musicólogos a lo largo de más de veinte siglos, porque dependiendo de la nota por la que se empiece, el desajuste se produce en una nota u otra.



Al haber una quinta más corta, denominada quinta del lobo, el sonido de ésta era desagradable, y esto hacía que no se pudiese utilizar, lo que imposibilitaba el uso de algunas tonalidades, la transposición o la convivencia de algunos instrumentos dentro de la misma agrupación. Mientras las composiciones se hacían para pocos instrumentos, esta dificultad no resultaba grave, pero en el Barroco, al aumentar el número de voces, el problema se hace insostenible, y más si pensamos en compositores como Bach, para los que las transposiciones eran una herramienta fundamental de su obra, como hemos visto en el apartado anterior.

A pesar de que desde el siglo XV los intérpretes cerraban el círculo "ajustando" (*temperando*) sus instrumentos, lo cierto es que los teóricos no llegan a un acuerdo. Grandes matemáticos, como Leibniz o Euler, propusieron modos diferentes de acabar con el problema. Para Bach, que además de extraordinario intérprete era constructor y reparador de órganos, contar con soluciones teóricas plausibles no era suficiente, necesitaba soluciones que conjugasen teoría y práctica. Por eso se plantea *El clave bien temperado*[4] como el matemático que hace una demostración constructiva. Necesitaba dar una solución práctica que acabase con las dificultades de poder interpretar en todas las tonalidades y a la vez zanjase las discusiones sobre qué temperamentos y sistemas de afinación eran los más adecuados.

Se ha discutido mucho acerca de si la propuesta de Bach era el temperamento igual de doce notas o alguno de los temperamentos que circulaban en Alemania, en especial a alguno de A. Werckmeister (1645 – 1706). En la actualidad, parece probado que Bach no se refería al temperamento igual (véase Di Benedetto, 2000), sino probablemente al temperamento de 1/4 de comma al que luego haremos referencia.

La solución al problema

Está claro que la mejor solución para cerrar el círculo de quintas no era quitar toda la comma de la última quinta, sino que podría distribuirse entre varias de ellas. Si se resta 1/12 de coma pitagórica, a cada quinta, la nueva quinta mide

$$\frac{3}{2}\ \langle - \rangle\ \frac{1}{12}\ \text{de comma} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt[12]{\frac{3^{12}}{2^{19}}}} = \frac{3\cdot 2\sqrt[12]{2^7}}{2\cdot 3} = \sqrt[12]{2^7} \approx 1{,}49831$$

y con esto se obtiene el temperamento igual de 12 notas, que es el sistema de afinación que se utiliza normalmente. Este sistema de afinación, que ahora nos parece incuestionable, deforma todas las quintas en la misma cantidad y a muchos músicos del Barroco les parecía inaceptable. De hecho, los principales teóricos de la época de Bach proponen muchas variedades de temperamentos que consistían en reducir parte de la comma sólo en algunas quintas. A continuación mostramos algunos ejemplos:

Quinta	Werckmeister (1645-1706) 1/4 comma	Werckmeister (1645-1706) 1/3 comma	Neidhart (1685-1739) 1/12, 1/6 comma	Lambert (1728-1777) 1/7 comma
Sol#⇒Mi^b	3/2	3/2	3/2–1/12 de comma	3/2
Mib⇒Si^b	3/2	3/2	3/2–1/12 de comma	3/2
Sib⇒Fa	3/2	3/2	3/2	3/2
Fa⇒do	3/2	3/2	3/2	3/2–1/7 de comma
Do⇒sol	3/2–1/4 de comma	3/2–1/3 de comma	3/2–1/6 de comma	3/2–1/7 de comma
Sol⇒re	3/2–1/4 de comma	3/2–1/3 de comma	3/2–1/6 de comma	3/2–1/7 de comma
Re⇒la	3/2–1/4 de comma	3/2	3/2–1/6 de comma	3/2–1/7 de comma
La⇒mi	3/2	3/2	3/2–1/6 de comma	3/2–1/7 de comma
Mi⇒si	3/2	3/2	3/2–1/12 de comma	3/2–1/7 de comma
Si⇒fa#	3/2–1/4 de comma	3/2–1/3 de comma	3/2–1/12 de comma	3/2–1/7 de comma
Fa#⇒do#	3/2	3/2	3/2	3/2

Parece ser que el sistema de afinación al que se refería Bach con *El clave bien temperado* era el de Werckmeister de 1/4 de comma, que cierra el círculo de quintas acortando 1/4 de comma en las quintas siguientes:

Do-Sol, Sol-Re, Re-La, Si-Fa$^{\#}$.

Por lo tanto, el valor de estas quintas sería

$$\frac{3}{2}\ \langle - \rangle\ \frac{1}{4}\ \text{de comma} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt[4]{\frac{3^{12}}{2^{19}}}} = \frac{3\cdot 2^4\sqrt[4]{2^3}}{2\cdot 3^3} = \frac{8\sqrt[4]{2^3}}{9} \approx 1{,}49493$$

Como es de suponer, cada uno de los temperamentos que circulaban a principios del siglo XVIII, con sus ventajas e inconvenientes, tenían sus seguidores y esto hacía que la situación fuese realmente complicada. Probablemente si Bach se hubiese dedicado a defender un temperamento, desde un punto de vista teórico, su propuesta no habría sido efectiva, por esto, para zanjar el problema era necesaria la "demostración constructiva": crear el clave bien temperado. Esta obra, que no se imprimió en vida del autor, consta de dos volúmenes con preludios y fugas compuestos en todas las tonalidades mayores y menores de la gama cromática y su principal objetivo era mostrar que su propuesta era viable y sonaba bien.

Esta composición, como gran parte de la obra de Bach, fueron ignoradas por la mayoría de sus contemporáneos, pero la revolución se había iniciado, y el hecho de que por primera vez el *temperamento* se desligase explícitamente de la idea de "truco práctico" de los intérpretes ya no tenía vuelta atrás: el temperamento formaba parte de la esencia misma de la composición.

MUSYMÁTICAS

«El que usted quiera editar las obras de Johann Sebastian Bach es algo que regocija mi corazón, que late todo para el arte sublime y grandioso de este verdadero padre de la armonía. Deseo ver pronto esa empresa en plena actividad. En cuanto abra usted mismo la suscripción, espero aportar yo mismo desde aquí»

Carta a F.A. Hofmeister, editor vienés. Ludwig van Beethoven S. XIX

Carátula original de la copia manuscrita del "Clave bien temperado"

NOTAS

1 Por ejemplo, *El arte de la fuga* (1751), una de las obras maestras de la Historia de la Música, se puede ver como una colección de ejemplos brillantes de estas transformaciones.

2 Tan exigente era Bach consigo mismo que quedó defraudado con la fuga hecha sobre el tema del rey, y a las dos semanas le hizo llegar conjunto de piezas basadas en este tema que se conocen como *La ofrenda musical*.

3 Podéis ver la aritmética de intervalos musicales en el cuadernillo del Día Escolar de las Matemáticas 2008, por ejemplo.

4 Creemos interesante aclarar que la expresión "bien temperado" no designa un temperamento concreto. Que el temperamento sea bueno no significa que sea mejor que los otros, hace alusión a que permite cerrar el círculo de quintas y, por tanto, la modulación en todas las tonalidades.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GOLDÁRAZ GAÍNZA, J. J. (2004): *Afinación y temperamentos históricos*, Alianza Editorial, Madrid.

LIERN, V. (2009): "Las matemáticas de Johann Sebastian Bach", *El Diario de Bilbao*, 28 de febrero de 2009.

HOFSTADTER, D. R. (1987): *Göedel, Escher, Bach. Un eterno y grácil bucle*, Tusquets Editores, Barcelona.

Internet

DI BENEDETTO, A. (2000): Johann Sebastian Bach odiava il temperamento equabile,

http://www.initlabor.net/controeducare/dibenedetto-bach.html#contenuto—

http://descargas.cervantesvirtual.com/servlet/SirveObras/01371852900163850770035/210294_0002.pdf

http://es.wikipedia.org/wiki/Johann_Sebastian_Bach

RUSSOMANNO, S. (2000): Una firma divina,
http://www.abc.es/cultural/dossier/dossier15/fijas/dossier_004.asp

suma+ 61
Junio 2009, pp. 119-124

Escenas

CineMATEca es una "sección Guadiana", con apariciones discontinuas. Surgió como una serie de tres artículos (Suma 47, 48 y 49) en los que, desde la experiencia personal, se exponía una propuesta de uso didáctico del Cine en clase de Matemáticas y se concluía con el propósito de localizar nuevas escenas de interés. Después ha tenido continuación con frecuencia irregular (Suma 50, 52, 55 y 59), al hilo de las novedades que ofrece la pantalla, siempre fijándonos especialmente en lo aprovechable para la clase.

A la espera de *Ágora*, la nueva película de Alejandro Amenábar sobre Hypatia de Alejandría, en el último año no ha habido grandes novedades. En ese tiempo, la única película cuyos protagonistas son matemáticos es *21 Blackjack* (Robert Luketic 2008); aunque algo heterodoxos, pues no es la docencia, ni la utilidad social, ni la investigación lo que les mueve, sino alcanzar fortuna en los casinos. Hablaremos de ella más adelante.

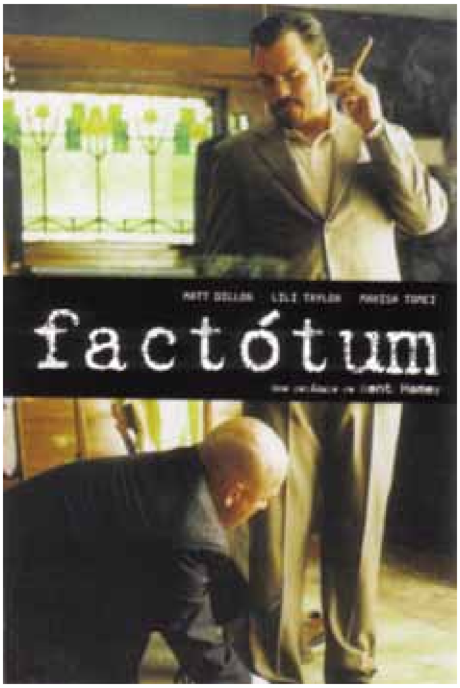
Registramos otras dos apariciones de matemáticos, ambas en películas espléndidas, pero esporádicas y desesperanzadoras. En *La clase* (Laurent Cantet 2008), Palma de Oro del Festival de Cannes 2008, los profesores del claustro se presentan al comienzo de un nuevo curso. Uno de ellos dice: *"Me llamo... Soy profesor de tablas de multiplicar y a veces también de Matemáticas"*; comentario ácido y lacónico que nos anuncia la dificultad de la tarea docente en un centro de Secundaria en la periferia parisina, tan parecido a los nuestros.

En *Revolutionary Road* (Sam Mendes 2008), versión cinematográfica de la magistral novela de Richard Yates, aparece el personaje de John Givings, un matemático más que añadir a la lista de colegas con desórdenes mentales que nos ofrece el Séptimo Arte. Givings está internado en un manicomio, donde los tratamientos de electroshock han anulado su capacidad de razonamiento matemático. Pero sin embargo, es el personaje más lúcido en el asfixiante y acomodaticio ambiente del *American way of life* que rodea a los Wheeler, la pareja protagonista. Expone con crudeza su certero análisis de la realidad, lo cual le convierte en una visita incómoda. No se dice que las Matemáticas fueran la causa de su trastorno, pero ahí queda una vez más esa odiosa asociación.

Retomando el sentido inicial de la sección, comentaremos cuatro escenas, interesantes para los docentes de Matemáticas desde diversos criterios: las dos primeras, utilizables en el aula, las dos últimas para hacernos reflexionar. Como novedad, para cada escena se indica el enlace que permite verla en Youtube (activo a día de hoy, algo que puede cambiar).

José María Sorando Muzás
IES Elaios, Zaragoza
decine@revistasuma.es

Fuera de las normas... también de las aritméticas



FACTÓTUM
Director*:* **Bent Hamer**
Actores*: Matt Dillon, Lili Taylor, Marisa Tomei, Didier Flamand, Fisher Stevens y Karen Young*
Guión y producción*: Ben Hamer y Jim Stark,* según la novela *Factótum* de Charles Bukowski. EE.UU. y Noruega 2005
Distribución*: Cameo*

Argumento.- El protagonista, Hank Chinaski (interpretado por Matt Dillon), encarna en la ficción al novelista Charles Bukowski, pudiendo decir que la novela de referencia es autobiográfica. La suya es una opción vital límite, buscando siempre la intensidad, pese al riesgo. Saltando de trabajo en trabajo (a veces no dura ni un día), repudiado por su familia, bebedor, jugador y despegado en el amor, no conoce otra lealtad que a la Literatura. Su propuesta se resume en estos versos: *Si vas a intentarlo, ve hasta el final. No existe una sensación igual. Estarás sólo con los dioses y las noches arderán en llamas. Llevarás las riendas de la vida, hasta la risa perfecta. Es por lo único que vale la pena luchar.*

Escena.- Dura 1 min. 26 seg. Éste es el diálogo (en realidad, casi todo él monólogo), donde hay nada menos que cuatro errores, que aparecen destacados en negrilla:

Jan - *¡Eh, quiero saber qué hora es! Dijiste que arreglarías el reloj.*

Hank (para sí) - *Vale, vamos a ver... Pusimos el reloj en hora, con la tele, anoche a las 12. Sabemos que adelanta 35 minutos cada hora. Marca las 7 y media de la tarde. pero sabemos que no puede ser, porque apenas ha oscurecido. Vale.* ***Son 7 horas y media****. 7 veces 35 minutos son 245 minutos. La mitad de 35 son 17 y medio.* ***Eso hace, 252 minutos y medio****. Bien,* ***entonces, restamos 4 horas y 42 minutos y medio****. O sea, que* ***hay que atrasar el reloj a las 5 y 47****. ¡Eso es...!*

Hank (en voz alta) - *¡Son las 5 y 47! La hora de cenar y no tenemos nada que comer.*

Enlace en Youtube:
http://www.youtube.com/watch?v=dO-GseNQOrE

Comentario.- Sorprende en una película sobre un modo de vivir extremo y arriesgado, que se dedique minuto y medio a realizar cálculos. Y aún sorprende más que, habiéndoles dedicado tanto tiempo (que en cine es lo mismo que decir dinero), se cometan 4 errores matemáticos de bulto. He comprobado en la banda sonora en inglés que también se incurre en ellos, así que no se trata de un problema de doblaje. Intrigado, he acudido a la novela de Bukowski y descubro que se siguen cometiendo cuatro errores, nuevamente en negrilla, aunque el último mucho más leve. Dice así la novela:

—*Bueno, vamos a ver, pusimos en hora el reloj con la radio ayer a medianoche. Sabemos que se adelanta 35 minutos cada hora. Señala ahora las 7 y media de la tarde, pero sabemos que no es verdad porque todavía no está lo bastante oscuro. Muy bien. Esto* ***son 7 horas y media****. 7 veces 35 minutos son 245 minutos. La mitad de 35 son 17 y medio.* ***Eso nos da 252 minutos y medio****. De acuerdo,* ***eso son 4 horas y 43 minutos y medio*** *que le restamos y que* ***nos lleva a las 3 menos 12 minutos y medio****.*

Así que en este caso la fidelidad al texto es fidelidad al gazapo… Esta escena no incluye pasajes escabrosos, como otras de la película, así que se puede usar sin reparos en los primeros cursos de E.S.O, ofreciendo a los alumnos el aliciente de localizar los errores. Para completar esa posible sesión de crítica matemática, he aquí otro video con gazapos aritméticos, éstos de televisión:

http://www.youtube.com/watch?v=jnLX60tUqyo

21 BLACKJACK.
Director*:* **Robert Luketic***.*
Actores*: Jim Sturgess, Kevin Spacey, Kate Bosworth, Laurence Fishburne, Aaron Yoo, Liza Lapira, Jacob Pitts y Osh.*
Guión*: Peter Seinfeld y Allan Loeb, según el libro* Bringing down the house *de Ben Mezrich.*
Producción*: Dan Brunetti, Kevin Spacey y Michael De Luca. EE.UU. 2008.*
Distribución*: Sony Pictures*

Argumento.- Se basa en una historia real. Ben Campbell (Jim Sturgess), estudiante superdotado del M.I.T., desea estudiar Medicina en Harvard pero para ello necesita 300.000 dólares que no tiene. Su profesor de *Ecuaciones no lineales* (Kevin Spacey) le propone unirse a un grupo de estudiantes aventajados. Éstos dedican los fines de semana a ganar mucho dinero en los casinos de Las Vegas jugando al Blackjack. El método se basa en contar las cartas que van saliendo y calcular en cada momento probabilidades sobre las que quedan por salir, pero no está al alcance de cualquiera. Se precisa primero la observación sistemática por parte de un compañero del grupo y el paso de información al "gran jugador" mediante un sistema de gestos y claves. Éste debe ser capaz de razonar fríamente bajo presión, aplicando rápidamente el cálculo mental de probabilidades mientras apuesta grandes cantidades de dinero. Ben acepta y empieza su carrera de éxitos. Pero en un momento dado las emociones le dominan y los matones del casino le descubren. Empiezan los problemas; y el mayor de ellos será el conflicto con el profesor.

Escena.- Dura 3 min. 2 seg. En clase de *Ecuaciones no lineales*, el profesor descubre el gran talento de Ben. Ante seis pizarras llenas de desarrollos matemáticos, pide a los alumnos un comentario al *Método de Newton* para ecuaciones no lineales, ocasión que aprovecha Ben para hacerse notar con una crítica histórica al propio Newton. A raíz de esta intervención, el profesor le pone a prueba:

Profesor – *A esto lo llamaremos el* Problema del presentador de concursos*, ¿de acuerdo? Ben, imagina que vas a concursar y se te ofrece elegir entre 3 puertas distintas, ¿de acuerdo? Tras una de estas puertas hay un coche nuevo; tras las otras dos, cabras. ¿Qué puerta elegirías Ben?*

Ben – *La número 1.*

Profesor - *¡La número 1! ¡Ben elige la puerta número 1! Ahora el presentador, que por cierto sabe lo que hay detrás de todas las puertas, decide abrir otra puerta. Digamos que elige la número 3, tras la cual aparece una cabra. Y ahora Ben, el presentador va y te dice:* ¿Sigues con la puerta número 1 o la cambias por la 2?. *Ben, ¿te interesa cambiar de puerta?*

Ben – *Sí.*

Profesor – *Espera. Recuerda que el presentador sabe dónde está el coche, así que ¿cómo sabes que no intenta engañarte? ¿Y si utiliza la Psicología al revés para que elijas la cabra?*

Ben – *Bueno, en realidad no me importaría, porque mi respuesta está basada en la Estadística, en el cambio de variable.*
Profesor - *¿Cambio de variable? Te he hecho una simple pregunta.*
Ben – *Es que eso lo ha cambiado todo.*
Profesor – *Ilumínanos…*
Ben – *Cuando dijo por primera vez que eligiera una puerta, tenía un 33,3% de hacer la elección certera. Pero cuando se ha abierto una de las puertas y puedo volver a elegir, ya tengo un 66,7% si elijo cambiar. Así que escojo la puerta número 2 y… gracias por ese 33,3% más de ventaja.*
Profesor (sonriendo) - *¡Exacto! Chicos, recordad: si no sabéis qué puerta debéis abrir, siempre tened en cuenta el cambio de variable. La mayoría no cambiará de puerta, por paranoia, miedo o emociones. Pero el Sr. Campbell ha dejado las emociones de lado y sencillamente ha permitido que la Matemática ¡meta su culo en un coche nuevo!; lo cual está mejor que esa cabra que conduce.*

Enlace en Youtube:
http://www.youtube.com/watch?v=SUMWnh6-XEg

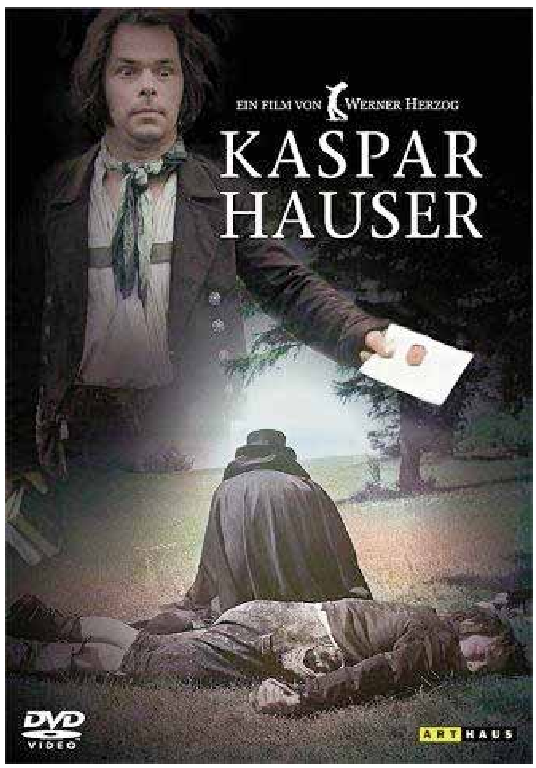
Comentario.- Se trata del famoso *Problema de Monty Hall*, que toma su nombre del presentador de T.V. de EE.UU. que en el concurso *Let's Make a Deal* planteaba a los concursantes esa situación. La solución de Ben es correcta, pero su alusión al “cambio de variable”, corroborada por el profesor, despista un poco. La apertura de una puerta cambia la asignación de probabilidades o, según se mire, el espacio muestral; pero no hace falta definir variables aleatorias. Los diagramas en árbol de la situación, según se siga la estrategia del cambio de puerta o la estrategia de no cambiar, suelen despejar las dudas.

Otra escena, ésta de la serie *Numb3rs*, donde Charlie Eppes trata el mismo problema, la encontraréis en:

http://www.youtube.com/watch?v=_mbO-ndr740

Éste es un problema muy interesante para Bachillerato: contradice la primera intuición de casi todo el mundo (asignar igual probabilidad a cada una de las dos puertas que quedan) y por ello genera polémica en clase. Puede parecer recurrente y con poco sentido proyectar en el aula una escena donde se resuelve un problema en otro aula. Pero si son dos, con variaciones de enfoque, queda claro que es un problema “con historia”, que así cobra relevancia y resulta todavía más interesante.

Lógica formal contra lógica natural



EL ENIGMA DE KASPAR HAUSER
(Eder für sich und gott gegen alle: Cada uno para si y Dios contra todos) versión original en alemán, subtitulada.
Director: **Werner Herzog**
Actores: *Bruno S., Walter Ladengast, Brigitte Mira, Welly Semmelroge, Michael Kroecher.*
Guión: *Werner Herzog*
Producción: *Werner Herzog Alemania 1974*
Distribución: *Manga Films.*

Argumento.- En 1828 apareció en Nuremberg con una carta un hombre criado en cautividad, lejos de cualquier contacto humano, un *hombre salvaje* que no sabía caminar ni hablar. Fue llamado el *huérfano de Europa* y se especuló sobre su origen noble y los posibles motivos políticos de su reclusión. Se le llamó Kaspar Hauser. Tras ser explotado como fenómeno de feria, un protector se ocupó de su educación. Aprendió a andar, a leer y escribir, a tocar el piano y a relacionarse en sociedad. Pero la sencillez y bondad de un adulto que veía y expresaba aquel mundo decadente con ojos y sinceridad de niño no fueron bien aceptadas por todos.

Escena.- Dura 4 min. 8 seg. En esta escena se enfrentan la lógica académica y formalista de un profesor y la lógica natural y directa de Kaspar, en el siguiente diálogo:

- Ama: *Este profesor ha venido de lejos para hacerte una pregunta. Quiere ver cómo piensas, qué has aprendido en estos dos años y si puedes pensar con lógica. ¿Le responderás?*
- Kaspar: *Sí.*

El profesor distribuye varias piezas de la vajilla sobre la mesa.

- Profesor: *Kaspar, pongamos que esto es un pueblo. En el pueblo vive gente que sólo dice la verdad. Aquí hay otro pueblo. Su gente sólo dice mentiras. Hay dos caminos que van de estos pueblos al sitio en que te encuentras y tú estás en el cruce. Se acerca un hombre y quieres saber de qué pueblo procede; del pueblo de los honestos o del pueblo de los mentirosos. Ahora, para poder resolver este problema sólo puedes hacer una pregunta y sólo una. ¿Cuál es esa pregunta?*
- Ama: *Eso es demasiado difícil para él, ¿cómo podría saberlo?*
- Profesor: *Admito que la pregunta es complicada. Si le preguntas al hombre si viene del pueblo de los honestos y es verdad, dirá que sí, honestamente sí. Pero si viene del pueblo de los mentirosos mentirá y también dirá sí. Aún así, hay una pregunta que resuelve el problema.*
- Ama: *Eso es muy difícil, demasiado complicado.*
- Profesor: *Tienes una pregunta, Kaspar, y sólo una, para resolver este problema lógico.*

Se produce un largo silencio.

- Profesor: *Kaspar, si no puedes pensar en la pregunta yo te la diré. Es ésta: Si tú vinieras del otro pueblo, ¿responderías "no" si yo te preguntara si vienes del pueblo de los mentirosos? Aplicando una doble negación, el mentiroso se ve forzado a decir la verdad. Esta construcción le obliga a revelar su identidad, ya ves. Esto es lo que yo llamo argumento lógico para descubrir la verdad.*
- Kaspar: *Bueno, sé otra pregunta.*
- Profesor: *¿Sí? No hay ninguna otra pregunta según las leyes de la Lógica.*
- Kaspar: *Pero yo sé otra pregunta.*
- Profesor: *Escuchémosla entonces.*
- Kaspar: *Le preguntaría a ese hombre si era una rana. El hombre del pueblo de los honestos diría: "No, no soy una rana", porque dice la verdad. El hombre del pueblo de los mentirosos diría: "Sí, soy una rana", porque me está mintiendo. Así sabría de dónde procede.*
- Profesor: *Ésa no es una pregunta correcta.*

Se ve a Kaspar muy contrariado.

- Profesor: *No sirve, no puedo aceptarla como pregunta. No es lógica. La Lógica es deducción, no descripción. Lo que has hecho es describir algo, no deducirlo.*
- Ama: *Pero entendió su pregunta.*
- Profesor: *Entender es secundario. El razonamiento es lo importante.*

Enlace en Youtube:
http://www.youtube.com/watch?v=CuCiWjgpqSQ

Comentario.- En la anterior secuencia se escenifica bastante bien el paradigma de la educación formal que sofoca la intuición. ¡Cuántas veces como profesores pusimos una pregunta buscando cierto tipo de respuesta y luego quedamos desconcertados al descubrir que algún alumno daba nuevas soluciones, válidas pero diferentes a la esperada! En tales casos, seamos capaces de valorarlas y no despreciar - hundir la creatividad. Y para terminar, una declaración personal: el logicismo como guía autosuficiente de la enseñanza es un desastre; razonar es importante, pero entender lo es más.

Matemáticas nazis

La vida es bella - La vita é bella
Director: *Roberto Benigni*
Actores*: Roberto Benigni, Nicoletta Braschi, Giorgio Cantarine, Giustino Dorano, Giuliana Lojodice y Marisa Paredes.*
Guion: *Vincenzo Cerami y Roberto Benigni*
Producción: *Gianluigi Braschi, Mario Cotone y Elda Ferri. Italia 1997.*
Distribución: *Miramax. Premiada con 3 Oscars: Mejor Película Extranjera, Mejor Actor y Mejor Banda Sonora.*

Argumento.- Italia, años 40: tras un divertido romance, Guido y Dora se casan y son padres de Josué, un niño encantado con los permanentes juegos e historias de su padre. El origen judío de Guido le lleva junto a su hijo a un campo de concentración. Pese a no estar en la lista de deportados, Dora seguirá a los suyos por amor, como una presa más del campo. Una vez allí, Guido desarrolla un titánico esfuerzo de imaginación por simular ante Josué que todo es un juego y evitarle la consciencia de la miseria y el dolor que les envuelve. Como en una fábula, al final Josué puede alzar los brazos victorioso. El sacrificio de Guido ha conseguido que el amor y la risa prevalezcan sobre la muerte.

Escena.- Dura 1 min. 8 seg. En la cena donde se va a anunciar el compromiso de Dora con un mandatario fascista local, la directora de la escuela expone así su fascinación por la Alemania hitleriana:

Directora - *Ya no digo en Berlín, sino en provincias, en Graverick. En el tercer grado, ¡fijaos qué problema les pusieron! Me acuerdo porque me impresionó.*
Problema: un demente cuesta al Estado 4 marcos diarios, un mutilado 4 marcos y medio, un epiléptico 3 marcos y medio. Visto que la cuota media es de 4 marcos diarios y que los pacientes son 300.000, ¿cuánto se ahorraría el Estado si estos individuos fueran eliminados, suprimidos?
Dora - *¡Dios mío, no es posible!*
Directora - *Ésa es la reacción que tuve yo, Dora: ¡Dios mío, no es posible! No es posible que un pequeño de 7 años resuelva un problema de este género. Es un cálculo complejo, con proporciones, con porcentajes. Se requieren unas nociones mínimas de Álgebra. Es un problema de Escuela Superior para nosotros.*
Novio de Dora - *¡Qué va! Basta con una multiplicación. ¿Cuántos lisiados ha dicho que había? ¿300.000?*
Directora - *Sí.*
Novio de Dora - *Pues 300.000 por 4. Si los matamos a todos nos ahorramos 1.200.000 marcos diarios. Es fácil, ¿no?*
Directora - *¡Bravo! Pero tú eres un adulto. En Alemania lo resuelven los alumnos de 7 años. ¡Verdaderamente es otra raza!*

Enlace en Youtube:
http://www.youtube.com/watch?v=49pjtXcFDlk

Comentario.- Ésta es una película con corazón, a la vez divertida y emotiva. En esta secuencia se escenifica cómo la ideología se puede colar en cualquier resquicio de la enseñanza y cómo puede nublar el entendimiento de las personas. Cuando Dora expresa su espanto ante semejante enunciado, la directora lo toma como asombro en apoyo de su tesis. Cuando el novio de Dora hace ver a la directora que la cosa puede ser mucho más fácil que lo que ella supone, nuevamente da la vuelta a la situación diciendo que le es fácil por ser adulto y tener la madurez que esos chavales de la "raza superior" ostentan con 7 años.

Es una anécdota inventada y por lo tanto no tiene valor histórico. Pero, como ocurre a menudo en el Cine, al igual que en otras artes, en casos como éste la ficción nos permite penetrar de forma certera en la realidad interna de las cosas y de las ideas.

CineMATeca

suma+ 61
Junio 2009, pp. 125-130

Análisis y desarrollo de la competencia matemática. Seminario federal.

Córdoba, octubre, 2008

Universidad de Córdoba

Desde el Consejo Europeo de Lisboa en el 2000, pasó a ocupar un lugar central la determinación de las capacidades básicas que deberían ser adquiridas por los ciudadanos a través del aprendizaje a lo largo de la vida. En marzo de 2005 se reactivo la llamada *Estrategia de Lisboa* de cara a la consolidación de la dimensión europea en la enseñanza. En este contexto y formando parte del programa «Educación y Formación 2010» se constituyó un grupo de trabajo encargado del desarrollo de un marco de competencias clave. Este grupo optó por el uso de los términos «competencia», para referirse a una combinación de conocimientos, capacidades y actitudes, y «competencia clave», para definir las competencias necesarias para todo ello.

La Ley Orgánica de Educación, LOE 2/2006 de 3 de mayo, determinó que en la etapa de la Educación Secundaria Obligatoria se prestase una atención especial a la adquisición y el desarrollo de las competencias básicas. Por último, el Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria, determina las competencias básicas que los alumnos y las alumnas deberán haber adquirido al final de esta etapa y que son:

- Competencia en comunicación lingüística.
- Competencia matemática.
- Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.
- Tratamiento de la información y competencia digital.
- Competencia social y ciudadana.
- Competencia cultural y artística.
- Competencia para aprender a aprender.
- Autonomía e iniciativa personal.

El análisis y el desarrollo de la segunda de estas competencias –la competencia matemática– es el objeto de este Seminario.

La incorporación del término de "competencia" como elemento organizador del sistema educativo en la etapa de la ESO es un cambio que parece trascender el meramente terminológico. Por otra, son muchos los profesores que han mostrado un cierto escepticismo ante esta enésima reforma, que supone en algún sentido una nueva revisión de su trabajo cotidiano desde una nueva perspectiva.

La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, encargó a la Sociedad Andaluza de Educación Matemática *Thales* la organización de un Seminario de trabajo para abordar el *Análisis y desarrollo de la competencia matemática* en relación con las otras competencias básicas, de manera que al finalizar este seminario se pudiera redactar un documento que refleje las opiniones que los miembros de la FESPM sostienen a este respecto así como las recomendaciones tanto para las Administraciones Educativas como para el profesorado y para otros estamentos sociales involucrados en la educación.

El seminario se desarrolló en Córdoba durante los días 27 al 30 de noviembre de 2008 con participación de representantes de la mayoría de las sociedades federadas. Intervinieron además los profesores Luis Rico, de la Universidad de Granada y Jesús María Goñi de la Universidad del País Vasco. Coordinaron la actividad Agustín Carrillo de Albornoz, por la sociedad organizadora y Francisco Martín Casalderrey, por la FESPM.

El seminario se estructuró en cuatro grupos cuyos temas de trabajo han sido los siguientes:

1. *Qué es y qué no es la competencia matemática*
2. *Cómo medir si los alumnos son o no competentes*
3. *Desarrollo de la Competencia Matemática: Tareas nuevas. Reciclaje de viejas actividades*
4. *Competencia matemática y las otras competencias. Conexiones.*

El trabajo en cada uno de los grupos aparece reflejado en los documentos que exponemos a continuación.

1. Qué es y qué no es la competencia matemática

Situado el concepto en el contexto, el grupo de trabajo realizó un análisis comparativo de las definiciones de competencia que aparecen en distintos documentos: el elaborado por el grupo de trabajo de la Comisión Europea sobre competencias clave, la recomendación sobre este tema del parlamento europeo y algunas definiciones que aparecen en la legislación educativa y marcos teóricos para la evaluación de diagnóstico de algunas CCAA. Entre las estudiadas destacamos las siguientes:

- La competencia matemática es la aptitud de un individuo para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, alcanzar razonamientos bien fundados y utilizar y participar en las matemáticas en función de las necesidades de su vida como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo (Informe PISA).

- La competencia matemática consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral (Real Decreto de Enseñanzas Mínimas 1631/2006).

Se concluyó lo siguiente:

– En la definición del Real Decreto se menciona expresamente dos contextos en la resolución de problemas: vida cotidiana y mundo laboral. Esta selección, por amplia que pueda considerarse la idea de vida cotidiana, limita el trabajo en otros contextos para los que se necesita ser competente, como el propio contexto matemático. Además corresponde al profesor, en su independencia pedagógica, decidir en qué contextos se hace hincapié a lo largo del proceso de aprendizaje de los alumnos.

– En la definición del R.D. se indica "utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático". Consideramos que pone el énfasis en el sentido numérico y en la idea de alfabetización numérica.

– La definición de PISA es más sencilla y clara, redactada en términos de objetivos: indica acciones con verbos en infinitivo como identificar, comprender, alcanzar, utilizar, participar,… Esto permite identificar las subcompetencias que faciliten el diseño de actividades y la evaluación del desarrollo de las competencias. Como no alude a contenidos permite la mejor selección del currículo y tampoco alude a contextos concretos, dejando a los docentes la decisión del peso que a los distintos contextos se le de en función de las características de los alumnos.

– En definitiva, el grupo de trabajo ha considerado más operativa para trabajar la definición de PISA de competencia matemática que la definición del Real Decreto.

La competencia debe ser considerada una capacidad que se pone de manifiesto en la práctica y por ello puede ser definida por los procesos que se ponen en juego. En este sentido creemos que la Administración educativa tiene que definir la competencia matemática en términos de subcompetencias con sus indicadores correspondientes para facilitar la comprensión del concepto a los docentes. Este grupo de trabajo considera que las tres dimensiones determinadas en el marco teórico de la prueba de evaluación de diagnóstico de Andalucía son insuficientes y parecen más adecuadas las subcompetencias propuestas por PISA.

Conviene hacer hincapié en los centros educativos en la distinción entre área de matemáticas y competencia matemática y que esta última es una competencia básica. Esto significa que para su desarrollo se necesita la implicación y contribución de todas las áreas de conocimiento.

La introducción del concepto de competencia matemática en el currículo ha supuesto una serie de cambios:

– Se pone el énfasis en los contextos de utilización de lo aprendido.
– Cambio en el modo de evaluación y su trascendencia en términos de titulación y promoción, de tal manera que rendimientos académicos buenos en la evaluación por objetivos no significa necesariamente desarrollo de la competencia matemática.
– Para que el alumno sea capaz de transferir lo aprendido a otras situaciones es necesario un cambio metodológico.

Por ello sugerimos las siguientes orientaciones metodológicas:

– El desarrollo de la capacidad de comunicación de resultados matemáticos necesita el establecimiento de diálogos entre el profesor y los alumnos y entre los alumnos.
– Las inquietudes de los alumnos deberán ser escuchadas para definir actividades y contextos de aplicación de tareas.
– Potenciar la realización de tareas abiertas y con estrategias de solución no predefinidas.
– Reivindicar el papel del profesor como guía del aprendizaje frente al profesor depositario del conocimiento.
– Evitar la presentación de las matemáticas como un conocimiento terminado y promover la construcción de conceptos así como convertir las matemáticas en objeto de discusión.
– Trabajar contextos variados, evitando tareas en las que el contexto aparezca de modo anecdótico.
– Emplear diversos recursos y materiales.
– Las tareas o actividades propuestas deben involucrar varias subcompetencias.

Recomendaciones

A la Administración educativa

Para facilitar al profesorado la programación por competencias, el lenguaje (subcompetencia, descriptores, unidades de competencia,…) tendría que unificarse y establecer indicadores de las subcompetencias para unificar la evaluación.

Promover un cambio de cultura de trabajo sobre planificaciones didácticas, no basadas en la inspección sino en el asesoramiento y la formación.

Solicitar un plan de formación en desarrollo de competencias básicas realista, basado en tiempos y formas adecuadas.

Es necesaria la voluntad de la administración para coordinar el desarrollo de los indicadores de las subcompetencias y el establecimiento de niveles de desarrollo en primaria y secundaria.

A la Federación

Animar al profesorado de primaria a participar en cuantos encuentros se promuevan para el trabajo sobre competencias.

Conferencia del Dr. D. Jesús Mª Goñi

Fomentar e incentivar iniciativas encaminadas a desarrollar propuestas curriculares.

Liderar la elaboración de una propuesta de currículo por competencias que sirva de referencia no vinculante.

A las editoriales

Echamos en falta materiales que desarrollen la competencia matemática.

Al profesorado

La planificación por competencias tiene que realizarse en los departamentos y centros educativos. No puede venir de la administración, para no perder independencia pedagógica y para que las propuestas no se tomen por irrelevantes. Tampoco puede provenir exclusivamente de los libros de texto porque podría aplicarse la planificación de forma irreflexiva.

2. Cómo medir si los alumnos son o no competentes

El enfoque curricular

El enfoque curricular por competencias constituye un marco que afecta a los objetivos, contenidos, metodología y evaluación.

Si se pretende la evaluación del desarrollo de las competencias se necesitan instrumentos a medio y largo plazo. En el trabajo cotidiano, no se trata tanto de medir el desarrollo de cada una de ellas como de tenerlas en cuenta en todo el proceso de planificación, aprendizaje y evaluación. La elaboración de diferentes indicadores del desarrollo de competencias facilitaría la tarea de la evaluación.

Las pruebas diagnóstico

Los resultados de las pruebas diagnóstico (autonómicas, nacionales, PISA...) han de ser un punto de partida para reflexionar sobre el trabajo en el aula. Los ítems de estas pruebas no son el referente fundamental para utilizarlas como tareas de aprendizaje y evaluación en el aula. Aspectos muy importantes como trabajo en equipo, utilización de las TIC, comunicación oral... no se evalúan en estas pruebas.

Cambios del currículo

El análisis de las medidas de evaluación está muy condicionado por un conjunto de cambios en todos los elementos del currículo:

- En el área del contenido, seleccionar desde la perspectiva de una funcionalidad social.

- En el área de la metodología, propiciar la diversificación de tareas:
  - Resolución de problemas
  - Trabajos por proyectos
  - Trabajos en grupo
  - Búsqueda y selección de información
  - Informes escritos
  - Exposiciones orales

- En el área de las expectativas, disminuir el énfasis en el aprendizaje de contenidos y dirigirlo hacia los procesos y la transferibilidad.

Conferencia del Dr. D. Luis Rico

- En el área del diseño de las tareas de aprendizaje y evaluación:
  - Utilizar contextos variados y problemas auténticos.
  - Priorizar las conexiones frente a la atomización.
  - Trabajar diferentes contenidos simultáneamente.
  - Interdisciplinariedad con otras áreas.
  - Ser resolubles a partir de diferentes estrategias.
  - Incorporar recursos tecnológicos.

- En el área de la evaluación en el aula,
  - las pruebas escritas y puntuales sólo permiten llegar a algunas de las competencias. Será necesario utilizar diferentes instrumentos de evaluación adecuados a la diversidad de tareas realizadas y que nos permitirán una observación más amplia de las competencias.
  - El sentido de la evaluación no tiene que ser siempre profesor–alumno. La autoevaluación y la coevaluación también contribuyen a la formación del alumno por competencias.
  - Cualquier evaluación tiene que retroalimentar el proceso de enseñanza-aprendizaje.
  - En el marco de las competencias, es de vital importancia tener en cuenta la evaluación relativa y no sólo la evaluación absoluta.
  - Se debe dar más importancia a la evaluación cualitativa frente a la cuantitativa.

Propuestas

Crear una base de datos de referencia sobre tareas, indicadores de desarrollo de las competencias e instrumentos de evaluación:

- Seleccionar y clasificar tareas ya elaboradas.
- Crear baterías de tareas en contexto. Estas tareas deben ir acompañadas de orientaciones y criterios de evaluación.

Se debe informar y formar al profesorado, siempre teniendo en cuenta su punto de partida y sus expectativas.

3. Desarrollo de la competencia matemática: Tareas

La aparición del nuevo marco normativo de la LOE resalta la importancia en los aprendizajes del alumnado como grado de adquisición de las competencias básicas. Añade la complejidad de entender que los aprendizajes se consiguen no desde las áreas de conocimiento tradicionales, sino desde el trabajo que se debe realizar en los centros escolares para que el alumnado sea competente. En este sentido, se presenta un panorama en el que es necesario reflexionar libremente y atreverse, incluso, a cuestionar modelos vigentes presentes en la propia organización del centro, en tiempos, espacios y recursos, de los equipos docentes y/o departamentos didácticos, las programaciones docentes y la definición, temporalización y secuenciación de las tareas con las que se interviene.

Dado que la palabra tarea es una palabra de uso común en la vida docente, en este documento se tratará como una propuesta de trabajo cuyo análisis y diseño se intenta definir.

Las tareas deben ser planeadas en un marco general de referencia que necesariamente se debe tener en cuenta. No debe entenderse que ante cualquier tarea el docente se enfrente a una relación exhaustiva de estos factores, pero se deben tener presentes para conseguir una dinámica de propuestas de tareas coherente y organizada. Este marco de referencia debe contemplar:

- Objetivos de la etapa, que provoquen la coordinación de la evolución de los aprendizajes.
- Objetivos específicos que persigue.
- Competencias a cuyo desarrollo contribuye.
- Contexto en el que se propone.
- Metodología y organización del aula.
- Recursos que se utilizan y que adquieren gran relevancia.
- Criterios de evaluación de la tarea, necesarios para observar el grado de consecución de los objetivos propuestos.
- Contenidos previos necesarios para el desarrollo de la tarea.
- Contenidos que va a tratar.
- Temporalización y secuenciación.
- Entorno escolar, que implique la colaboración con otros departamentos para buscar contextos, encontrar conexiones, reconocer contenidos comunes…

De todas formas, en una dinámica de trabajo habitual, si queremos que la tarea educativa que se propone contribuya a la adquisición de las competencias básicas por parte del alumnado, los siguientes aspectos son fundamentales:

- Contexto.
- Contenidos.
- Recursos.
- Competencias.

Subcompetencias		Procesos cognitivos
Pensar y razonar Argumentar Comunicar Modelizar Plantear y resolver problemas Representar Utilizar operaciones y lenguaje técnico, formal y simbólico Emplear material y herramientas de apoyo	⟷	Reproducción Reflexión Conexión

Debemos considerar, además, como pautas a tener en cuenta el grado de contribución a la adquisición de lo que podemos entender como subcompetencias matemáticas (podemos tener en cuenta diferentes definiciones, pero hemos considerado como referencia común las detalladas en PISA 2006) y el tipo de procesos cognitivos que el alumnado pone en juego cuando realiza la tarea (o grupos de competencias, tal y como se denomina en PISA 2006).

Entendemos que el análisis de los diferentes aspectos planteados puede ser un buen marco de referencia, en general, para realizar propuestas que contribuyan a la adquisición de la competencia matemática. No es el momento de indicar si actividades habituales en nuestros centros son desechables en beneficio de otras, o si determinadas actividades son inadecuadas, aunque una buena reflexión podrá indicar qué propuestas son las más adecuadas. Cada cual, según su función, estimará si este patrón puede tenerlo en cuenta tanto para planificar la programación de un curso o etapa, para elaborar material de aula, como para analizar en su conjunto el grado en que se han tratado cada uno de los contenidos, por ejemplo; pero sí tenemos claro que tareas que contribuyan a la adquisición de la competencia matemática deben ser planteadas en estos términos y que la observancia de estas indicaciones servirán para potenciar el grado de adquisición de las competencias o subcompetencias, es decir, los aprendizajes.

4. Competencia matemática y las otras competencias. Conexiones

Independientemente del enfoque o definición que tomemos de competencia, el área de matemáticas, creemos, que tiene un importante papel en el desarrollo y consecución de todas las competencias básicas, no sólo de la competencia matemática. En esta parte del documento trataremos sobre las matemáticas y las competencias básicas, excluida la competencia matemática por considerar que ésta es merecedora de atención específica en estudios diferenciados e independientes.

Las competencias básicas deben ser trabajadas desde todas las áreas de educación primaria y secundaria obligatoria, incluida la competencia matemática. Consideramos que el estudio de lo que otras materias diferentes a las matemáticas pueden aportar a la competencia matemática debe ser tratado por los especialistas correspondientes a cada materia, por tanto el enfoque que le vamos a dar al documento es en la dirección del área de matemáticas hacia las competencias básicas.

La educación matemática contribuye al desarrollo del resto de las competencias básicas a lo largo de la educación obligatoria. En especial, consideramos que la contribución al desarrollo de la competencia digital debe comenzar ya en la Educación Infantil.

El documento irá estructurado de manera que cada competencia básica seguirá el mismo esquema: primero se darán indicaciones metodológicas que desde el área de matemáticas contribuyen al desarrollo de la competencia, en segundo lugar se presentarán los aprendizajes específicos que consideramos más relevantes desde el área de matemáticas, entendiendo que en este apartado consideramos no sólo aprendizajes, sino también capacidades, procesos, objetivos, contenidos, actitudes, sentimientos, etc.; en tercer lugar sugeriremos qué recursos pueden ser apropiados para cada competencia.

Entendemos que ideas tales como “tareas”, “evaluación de competencias”, etc., asociadas a las competencias básicas pueden aparecer de alguna manera en el presente documento. ■

Notas.- Las fotografías del presente artículo han sido realizadas por Iolanda Guevara. Hemos extraído las ideas fundamentales del informe cuyo texto completo se puede bajar de la página web de SUMA: www.revistasuma.es

suma+ 61
Junio 2009, pp. 131-136

Seminario sobre el Prácticum del Máster de Profesor de Secundaria en la especialidad de Matemáticas

Informe final

Comité Español de Matemáticas

Organización

Organizado por la Comisión de Educación del Comité Español de Matemáticas (CEMAT) tuvo lugar los días 26 y 27 de febrero de 2009, en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid (UCM), un Seminario sobre el Prácticum del Máster de Profesor de Educación Secundaria en la especialidad de Matemáticas. El Seminario contó con la cooperación de la Cátedra UCM Miguel de Guzmán.

Los documentos presentados en el Seminario pueden verse en la dirección:
http://www.ce-mat.org/educ/icmies/documentos.html

Objetivos

El Seminario se planteó con los siguientes objetivos:

1. Delimitar las funciones del *Prácticum en la titulación Máster de Profesor de Secundaria* en la especialidad de matemáticas.
2. Delimitar los agentes que intervienen en la puesta en funcionamiento del Prácticum, sus condiciones administrativas y de coordinación, con especial consideración al caso de los profesores de matemáticas de secundaria.
3. Presentar experiencias de buenas prácticas relativas a la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria en el aula.
4. Ofrecer una reflexión conjunta y colegiada sobre el Prácticum, útil para las universidades y para las comunidades autónomas responsables de su puesta en marcha.

Asistentes

Al Seminario asistieron, por invitación, 50 profesores de las sociedades e instituciones que constituyen la Comisión de Educación. También participaron profesores y estudiantes de postgrado de Universidades así como de centros de distintos niveles educativos de la Comunidad Autónoma de Madrid .

Luis Rico
Raquel Mallavibarrena
Jordi Deulofeu
Comisión Educación CEMAT

Programa

El Programa se estructuró en una sesión inaugural, una conferencia y tres mesas redondas.

Sesión inaugural

La sesión inaugural estuvo presidida por D. Felipe Pétriz, Director General de Universidades del Ministerio de Ciencia e Innovación (MICINN), D. Antonio Pérez, Director del Instituto Superior de Formación y Recursos en Red (ISFTIC) para el Profesorado del Ministerio de Educación, Política Social yDeportes (MEPSyD), D. Carlos Andradas, Vicerrector de Ordenación Académica de la Universidad Complutense de Madrid (UCM), D. Juan Tejada, Decano de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, Dª Olga Gil, presidenta del Comité Español de Matemáticas (CEMAT) y D. Luis Rico, presidente de la Comisión de Educación del CEMAT. En esta sesión se destacó la importancia del nuevo Máster para Profesor de Educación Secundaria (MAES), se subrayó la necesidad de una especialidad de Matemáticas y resaltó el carácter esencial del Prácticum para la titulación. La organización del Seminario expresó el compromiso de CEMAT con la formación inicial del profesorado de matemáticas de secundaria, mostró el interés crítico de la Comisión de Educación por la nueva titulación y transmitió su apoyo a la necesaria puesta en marcha de este plan de formación.

El Seminario es un espacio para la reflexión estratégica sobre el nuevo plan, al que contribuyen expertos de distintas procedencias que quieren aportar ideas y contribuir a la toma de decisiones en el momento de su inicio, con atención rigurosa a criterios de calidad y mediante optimización de los conocimiento y recursos disponibles.

Conferencia

La conferencia inicial, *El Prácticum y las competencias profesionales del profesor de matemáticas de secundaria*, fue impartida por D. Antonio Pérez Sanz, Director del Instituto Superior de Formación y Recursos en Red para el Profesorado (ISFTIC). En esta conferencia se destacaron las aportaciones que desde el Prácticum se hacen al desarrollo de las competencias profesionales establecidas para esta titulación.

Mesas redondas

En cada una de las mesas redondas intervinieron los distintos ponentes durante un tiempo de hora y media. Cada mesa fue seguida de un amplio debate con participación de ponentes y asistentes. Un resumen de las cuestiones planteadas, las intervenciones de los ponentes y las ideas principales resultado del debate en cada una de las mesas, se sintetizan a continuación.

Primera mesa redonda

La primera mesa redonda versó sobre *La práctica en la formación inicial del profesor de matemáticas*. El debate se centró en las cuestiones:

1. ¿Cuáles son las funciones generales a las que atiende el Prácticum? ¿cuáles no deben ser?.
2. ¿Cómo contribuye el Prácticum al logro de las competencia profesionales establecidas por ORDEN ECI/3858/2007?
3. ¿Qué tipo de conocimiento profesional se promueve para el profesor de matemáticas durante el periodo de prácticas? ¿qué tensiones surgen entre el conocimiento teórico y el práctico?
4. ¿Cuáles actitudes y creencias del profesor de matemáticas se detectan durante las prácticas? ¿cómo evolucionan? ¿qué oportunidades ofrece el Prácticum para las actitudes, valores y creencias?

Esta primera mesa fue coordinada por L. Rico y tuvo como ponentes a:

- Pilar Azcárate, de la Universidad de Cádiz, quien trató sobre el S*entido de las practicas de enseñanza en la formación inicial del profesorado de Secundaria*.
- Pablo Flores, de la SEIEM, quien versó sobre el *Prácticum en formación de profesores: oportunidad para reflexionar y desarrollarse a partir de problemas profesionales*.
- Serapio García Cuesta, de la FESPM, quien trató sobre E*l master de Formación Inicial del Profesorado visto desde la Enseñanza Secundaria*.
- Tomás Recio de la RSME, quien trató sobre *La práctica en la formación inicial del profesor de matemáticas*.

Balance de la primera mesa

1. Por lo que se refiere a las funciones generales a las que debe atender el Prácticum, destacaron las siguientes:
   - Establecer un primer contacto con la profesión docente para integrar al futuro profesor en esta comunidad profesional,
   - Avanzar en el desarrollo de competencias y contribuir al ejercicio de destrezas profesionales,
   - Conectar la docencia práctica con la teoría y la transferencia de resultados de investigación.

2. En relación a la contribución del Prácticum a las competencias establecidas por la Orden que regula el máster, se destacó que se producirá mediante:

- Ejercitación en diversas destrezas profesionales, tales como la capacidad de comunicación, la aproximación a los problemas de los estudiantes, la tutorización, el desarrollo de técnicas de gestión del aula, de enseñanza y análisis de la práctica, entre otras,
- Motivación para interpretar y comprender los contenidos didácticos, favorecida por la relación que los estudiantes para profesor establecen con la práctica profesional.

3. Sobre el tipo de conocimiento profesional que se promueve y desarrolla en este periodo, se destacó que el Prácticum contribuye a:

- Concretar la formación teórica,
- Conocer la organización y comprender el funcionamiento de los centros,
- Mejorar los conocimientos docentes específicos relativos a observación, diagnóstico, comunicación, planificación, gestión y evaluación del trabajo escolar.

Se apunta como posible foco de tensión las diferencias entre la concepción del conocimiento profesional que puedan tener el tutor y el supervisor de prácticas.

4. Respecto de la aportación que el periodo de prácticas hace a las actitudes y creencias del profesor de matemáticas, se destacó su contribución para :

- Promover una actitud reflexiva,
- Fomentar la autoestima profesional,
- Iniciar un desarrollo profesional como profesor de matemáticas,
- Superar una visión convencional y formal de la ciencia; complementar la necesidad de formación tecnológica.

Segunda mesa redonda

La segunda mesa se centró en *La organización y gestión del Prácticum*. El debate en esta segunda mesa se centró en las siguientes cuestiones:

1. La prioridad para organizar el Prácticum, ¿debe estar en la selección de centros o de tutores?
2. ¿Qué actividades debe realizar el estudiante para profesor durante el periodo de prácticas?
3. ¿Qué modelos de prácticas son los que favorecen la relación con la teoría?
4. ¿Cuáles características requiere un profesor tutor de prácticas?
5. ¿Cómo organizar la coordinación entre los participantes en el Prácticum?

La mesa fue coordinada por J. Deulofeu de la Comisión de Educación del CEMAT y tuvo como ponentes a:

- José Luis Álvarez, de la FESPM, quien trató sobre *Organización y gestión del Prácticum, el oficio de profesor.*
- Juan Miguel Belmonte, de la UCM, quien presentó la *Organización y gestión del Prácticum en la Universidad Complutense de Madrid*.
- Iolanda Guerrero, de la SCM, quien trató *El Prácticum desde la perspectiva de la coordinación del CAP de matemáticas del ICE de la Universidad de Barcelona*.
- Constantino de la Fuente, de la RSME, quien versó sobre *Organización y gestión del Prácticum*.
- Mar Moreno, de la SEIEM, quien presentó la *Organización y gestión del Prácticum en la Universidad de Lleida*.

Balance de la segunda mesa

Dos de las presentaciones mostraron ejemplos concretos de organización del master. Las otras tres consistieron en reflexiones y propuestas sobre el Prácticum desde la óptica de los profesores de secundaria.

1. Hay acuerdo que el Prácticum debe ser uno de los ejes principales del master y que debe desarrollarse en períodos amplios a lo largo del curso. Se propone hacerlo en dos o tres fases (la última más larga) de acuerdo con las principales actividades que debe realizar el estudiante en su estancia en los centros de secundaria: Observación, actuación y reflexión.
2. Con respecto a la intervención de los estudiantes en el aula se han planteado dos visiones: aquella que considera que el estudiante debe responsabilizarse de un tema completo (unidad didáctica o unidad de programación), aunque sea de características reducidas y limitada a un período corto, pero que comprenda el diseño, la realización y la evaluación; y aquella que considera que esto no es posible (por la insuficiente preparación de los estudiantes y los perjuicios que puede causar en los alumnos), de modo que su actuación deben limitarse a acciones puntuales diversas siempre guiadas por el tutor.
3. En relación con el modelo organizativo del Prácticum, la normativa deja claro que deberán seleccionarse centros (que deberán ser reconocidos como tales). El problema es cómo garantizar, con este modelo, una adecuada selección de tutores. Los centros que se presenten deberían proponer, de acuerdo con la universidad, en que áreas aceptarán estudiantes, que deberían ser aquellas en las que haya tutores preparados para ejercer como tales, es decir, profesores con experiencia, innovadores, conocedores de los recursos actuales para enseñar la materia, implicados en el proyecto del centro y que reconozcan que su actividad como tutores también puede ayudarles a mejorar su propia práctica, a través de la reflexión sobre la misma que realizan con sus estudiantes de prácticas.
4. La coordinación entre los tutores de centro, los de la universidad y los profesores del módulo específico es fundamental para garantizar, tanto el papel nuclear del Prác-

ticum en el master, como la necesaria relación entre teoría y práctica. El Prácticum debe servir para conocer los problemas reales del centro y del aula, con especial atención a los procesos de enseñanza aprendizaje, pero la teoría es imprescindible para identificar y analizar dichos problemas. Aunque hay distintos modelos para establecer la coordinación es importante que los tutores de universidad visiten los centros y las aulas donde trabajan sus estudiantes, y también que los tutores de los centros puedan participar en sesiones teóricas del módulo específico; en todo caso, es imprescindible la realización de sesiones conjuntas entre todos los participantes en el proceso formativo, incluidos los estudiantes.

5. En relación con la evaluación se constata la necesidad de establecer criterios (y generar instrumentos) y hacerlos explícitos a los estudiantes. Esta evaluación deben realizarla conjuntamente los tutores de centro y de la universidad. Por otra parte, se considera necesaria una relación entre el Prácticum y el trabajo de fin de master. No parece lo más adecuado pedir una memoria del Prácticum y un trabajo de fin de master (que es obligatorio y con presentación pública). Una posible alternativa es que el estudiante elabore un portfolio sobre las prácticas y luego elabore un trabajo final donde integre tanto el Prácticum como lo realizado en los otros dos módulos, con la finalidad de mostrar el nivel de adquisición del conjunto de competencias del master.

Tercera mesa redonda

La tercera mesa se dedicó al tema *Experiencias de buenas prácticas en la organización del Prácticum*. El contenido de las intervenciones versó sobre experiencias relativas al Prácticum en cursos tipo CAP, asignaturas de licenciaturas, tutorías y otros, destacando en todas ellas puntos e ideas que sirvan como referentes para poner en marcha el Prácticum del futuro master de profesor de secundaria.

Coordinó la mesa R. Mallavibarrena de la Comisión de Educación del CEMAT y tuvo como ponentes a:

- Josep Gascón, de la SEIEM, quien disertó sobre *Integrar las prácticas en laformación matemático. Didáctica: análisis de una experiencia (1987-2009)*.
- Inés Gómez-Chacón, de la UCM, quien trató sobre *Prácticas de enseñanza en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid*.
- Salvador Guerrero, de la RSME, quien trató sobre *Dos ejemplos de prácticas desarrollados como tutor y responsable del CAP en la Universidad de Málaga*.
- Francisco Martín Casalderrey, de la FESP, quien trató sobre *Organización del Prácticum*.

Balance de la tercera mesa

Las ideas principales transmitidas por las experiencias presentadas de buenas prácticas en la organización del Prácticum fueron:

1. La Formación inicial de los profesores de Matemáticas de Enseñanza Secundaria se está llevando a cabo desde hace muchos años, desde ámbitos variados y con formatos distintos. El Prácticum forma parte de todos ellos y el conocimiento de estas experiencias puede ser muy útil a la hora de diseñar el Prácticum del futuro master de formación inicial de profesor.
2. Las prácticas suponen para el futuro profesor una etapa nuclear en su preparación, y tienen una doble dimensión: ver en la práctica los aspectos formativos que ha recibido y a la vez matizar una observación de la realidad de la tarea educativa que lleva a formular preguntas que, a su vez, llevan de nuevo a sesiones de contraste de opiniones, de formación matemático – didáctica, de reflexión crítica sobre lo que ha podido observar etc.
3. En las prácticas el estudiante conoce el sistema educativo español a través del funcionamiento de un centro educativo, además aprende a elaborar e implementar una unidad didáctica (diseño, aplicación y evaluación) y se plantea los rasgos de identidad profesional – vocacional del profesor de Matemáticas.
4. Las prácticas constituyen una oportunidad para analizar hasta qué punto los futuros profesores tienen instrumentos para dar respuesta a las cuestiones cruciales de su problemática profesional.
5. Es conveniente que las prácticas se desarrollen simultáneamente con actividades formativas del futuro master o, al menos, con unas sesiones de trabajo programadas y estructuradas con el tutor asignado, tanto en el centro de secundaria como en la Universidad.
6. La interacción entre los estudiantes para profesor es también positiva cuando un grupo de estudiantes trabaja con el mismo tutor.
7. El papel activo del profesor tutor de secundaria en la planificación de las prácticas siempre será muy beneficioso para que se cumplan los objetivos. Por ello la coordinación y cooperación entre los distintos tutores, de secundaria y universitarios, es muy importante.
8. Hay experiencias positivas en la línea de que el alumno de prácticas tenga asignada una docencia en el centro, siempre con la supervisión del tutor. El estudiante podrá acertar o equivocarse pero sabrá que se le toma en serio y que se valora su trabajo.

Balance global

El debate realizado durante el Seminario ha puesto de relieve la presencia en el contexto educativo de una serie de amenazas y oportunidades, así como ciertas debilidades y fortalezas del Prácticum derivadas de su regulación actual y de los antecedentes y experiencias previas. Entre las amenazas detectadas, que hay que superar, destacan:

- Un reconocimiento Insuficiente de la identidad profesional del profesor de matemáticas de secundaria,
- La eventual desconexión entre los módulos teóricos y el Prácticum,
- La limitación de las prácticas a actuaciones puntuales,
- Una elección inadecuada de tutores en los centros de secundaria,
- La imprecisión en la coordinación entre tutores y orientadores,
- El desconocimiento y no reconocimiento del trabajo de los tutores,
- Los eventuales perjuicios a los escolares de secundaria por la intervención de los profesores en formación

La regulación de estos estudios adolece así mismo de una serie de debilidades, entre las cuales se han subrayado:

- Ausencia de un convenio marco regulador del Prácticum entre las Consejerías de Educación y las Universidades,
- Escasa experiencia en la organización del Prácticum para la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria,
- Limitaciones de los modelos para evaluación del Prácticum,
- Escasez de instrumentos para abordar la orientación y la solución de los problemas profesionales de los profesores en formación.

Por el contrario, las oportunidades que se presentan dentro del nuevo marco de formación son significativas e importantes, ya que el Prácticum:

- Contribuye a la necesaria conexión entre el conocimiento teórico y el práctico,
- Refuerza el aprendizaje de técnicas, destrezas y capacidades para el diseño, desarrollo y evaluación de tareas matemáticas,
- Mejora el conocimiento sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y las competencias profesionales asociadas,
- Contribuye a conocer el funcionamiento de los centros,
- Refuerza la actitud reflexiva y la autoestima profesional de los profesores en formación,
- Promueve el aprendizaje en grupo y el trabajo en equipo.

Finalmente, los asistentes al Seminario constataron una serie de fortalezas, que proporcionan garantía suficiente para avalar la viabilidad de este plan:

- Existencia de una comunidad de profesores de matemática activos y competitivos, comprometida con la formación de sus profesionales,
- Existencia de un número aceptable de experiencias prestigiosas de buenas prácticas,
- Valoración de las oportunidades para el aprendizaje de la profesión de profesor,
- Valoración de las capacidades y destrezas profesionales y de la motivación para entender los contenidos didácticos.

Recomendaciones

La Comisión de Educación del Comité Español de Matemáticas, como expresión de su compromiso con la formación inicial del profesorado de matemáticas, manifiesta su apoyo al Máster para Profesor de Educación Secundaria (MAES), y subraya la necesidad de una especialidad de matemáticas en esta titulación. El Master es un proyecto valioso para el aprendizaje de la profesión de profesor, del cual el Prácticum es parte esencial. El aprendizaje e iniciación a la profesión de profesor de matemáticas se debe sostener en las competencias profesionales establecidas para la titulación. Las prácticas deben contribuir al desarrollo de esas competencias y al conocimiento de los centros. La regulación y organización del Prácticum debe ser objeto de convenio entre las Administraciones Públicas y las Universidades, con reconocimiento del trabajo de los profesores tutores y coordinación con el trabajo de los otros módulos. La organización del Prácticum para la formación de profesionales cualificados deberá contar con los especialistas en el campo de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y apoyarse en las experiencias realizadas previamente por las instituciones.

Conclusiones

La Comisión de Educación de CEMAT, como resultado del trabajo realizado en el Seminario, formula las siguientes conclusiones.

1. El Prácticum es una parte esencial en el Máster que se va a poner enmarcha a partir del próximo curso académico. Supone la necesaria conexión entre el conocimiento teórico y la práctica. Ésta suscita, a su vez interrogantes que llevarán de nuevo a la reflexión teórica.
2. Los distintos módulos teóricos, el trabajo de fin de Máster y el Prácticum deben planificarse con una visión de conjunto que permita la interrelación entre ellos y la secuencia temporal más adecuada para el Prácticum.
3. Los profesores al cargo del Prácticum y los tutores de los centros de Secundaria en que se realicen las prácticas deben colaborar estrechamente tanto en el diseño de las actividades que se van a desarrollar como en el seguimiento y acompañamiento de los estudiantes del Máster.
4. La regulación y organización del Prácticum debe ser objeto

de convenio entre Administraciones Públicas y Universidades, con reconocimiento del trabajo de los profesores tutores y coordinación con el trabajo de los otros módulos. Este necesario reconocimiento del trabajo de los tutores por parte de las universidades y, por parte de las autoridades educativas debe ser efectivo a la hora de valorar la tarea que se les va a encomendar.

5. El decreto que regula el Máster hace referencia a la formación y selección de tutores y centros de prácticas. Las administraciones educativas y las universidades deben colaborar también en este aspecto para facilitar que los tutores y los centros elegidos tengan las características adecuadas paraque haya coherencia entre lo que se imparta en los módulos teóricos y las prácticas que realicen los estudiantes.
6. Las tasas del Máster se ajustarán a precios públicos, dado que se trata de un título oficial y obligatorio para ejercer la docencia en la Enseñanza Secundaria privada, concertada y pública.
7. Se apoya la existencia de la especialidad de Matemáticas en el Máster y se entiende que esta especialidad debe ser requisito para la oposición de Profesor de Matemáticas, porque no es coherente que se requiera un Máster de Formación de Profesores para acceder a la oposición de Profesor de Matemáticas y que se establezca en dicho Máster la especialidad de Matemáticas, pero no se requiera la misma, específicamente, para la oposición en Matemáticas.
8. Las fechas de convocatoria de oposiciones los plazos establecidos para su inscripción y el calendario del Máster deberán coordinarse de manera que hagan posible que los alumnos que lo cursen puedan, al finalizar éste, presentarse a la oposición convocada ese mismo año.
9. El criterio de selección para acceder a la especialidad de Matemáticas del Máster dependerá de las universidades que lo impartan con el visto bueno de ANECA y las Comunidades Autónomas. En el debate surgido durante el seminario se informó del escaso número de créditos de formación específica en Matemáticas que algunas universidades estaban proponiendo para poder acceder a la especialidad de Matemáticas del Máster. Las universidades deberán en todo caso requerir un nivel de conocimientos y de competencias matemáticas adecuado para los estudiantes admitidos en el Máster.
10. Las experiencias previas de cursos tipo CAP o equivalentes tienen aspectos muy valiosos que habrá que tener en cuenta a la hora de diseñar el Prácticum del nuevo Máster, pero también son indicadores de los riesgos que pueden correr el Máster y el Prácticum y que lleven a la devaluación de éstos por un número excesivo de estudiantes, poca exigencia para obtener el título o un escaso reconocimiento de la tarea de los tutores que lleve a que éstos puedan limitarse a un cumplimiento de mínimos que no garanticela necesaria formación práctica de los estudiantes.
11. Las sesiones y debates del seminario dejaron claro que el diseño propuesto para la formación inicial de los profesores en forma de Máster es una opción válida y aceptable, dentro de los modelos de formación existentes.
12. Uno de los aspectos valorados positivamente se centra en que la iniciación a la profesión de profesor de matemáticas se sostiene en competencias profesionales establecidas para la titulación. Las prácticas deben contribuir al desarrollo de esas competencias y al conocimiento de los centros.
13. En este sentido, estas conclusiones quieren poner de manifiesto que la formación inicial de los profesores de secundaria requiere necesariamente la existencia de un buen Prácticum que debe de estar bien gestionado y apoyado con recursos suficientes.
14. El trabajo conjunto de especialistas en el campo de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas con profesores de Matemáticas, tanto universitarios como de Secundaria, en el diseño y organización del futuro Máster y en concreto el Prácticum será un elemento clave para que secumplan de modo efectivo los objetivos que se pretenden.

suma+ 61
Junio 2009, pp.137-143

La corona de las lunas

La luna y el tejo

Tiene forma gótica,
Los ojos, siguiéndolo se alzan y encuentran la luna
La luna es mi madre
Calva y salvaje.
Y el mensaje del tejo es negrura: negrura y silencio.

Silvia Plath

Y en la negrura evoluciona el camino de la luna…
y en la negrura el camino del engaño,
del engaño que atenaza al miedo,
del miedo que atenaza la vida
de la vida no vivida,
secuestrada.

El zodíaco, la precesión y sus leyendas

El camino de las lunas, llena, menguante, nueva y creciente, es el zodíaco, una corona de estrellas, extendida 9° por encima y por debajo de la eclíptica, ese lugar imaginario de cuyos puntos "parte" el sol cada día, acompañado, casi siempre, de una constelación distinta a lo largo de aproximadamente 30 días, en los que la atraviesa hasta alcanzar la siguiente.

Esta corona de estrellas está formada por doce zonas, de 30º de amplitud cada una, caracterizadas por la presencia de una constelación particularmente prominente (o dos en el caso de Escorpio y Ofiuco).

El camino de las lunas lo es también del Sol y de los planetas, solemos decir "Saturno está en Leo", por ejemplo.

Alrededor del 128 a.C., Hiparco de Rodas descubrió que la posición de los puntos equinocciales no era fija y dedujo que el equinoccio de primavera había estado alguna vez en la constelación de Tauro, 4.000 años antes de nuestra era, en el neolítico superior.

Xaro Nomdedeu Moreno
Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi"
ariadna@revistasuma.es

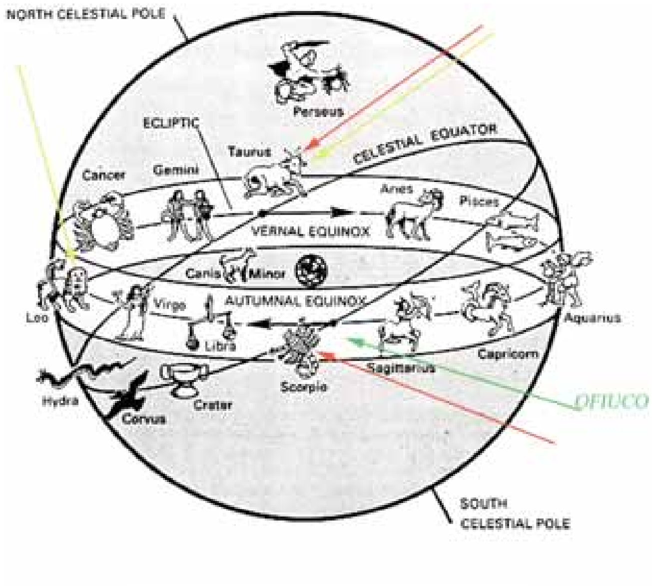


Figura 1

Pero, en su época, se había movido hasta Aries. Descubrió que este movimiento del punto vernal medio era debido al movimiento de giro del eje terrestre en torno a un eje imaginario, al estilo de una peonza. A este movimiento del eje terrestre le llamó *precesión*. La precesión también cambia la referencia estelar del polo norte celeste, que actualmente apunta a la estrella Polar.

La conjunción de este descubrimiento y la opresión del imperio romano sobre los súbditos de las provincias orientales, fueron, seguramente, el caldo de cultivo en el que se desarrolló un nuevo mito, que se había originado unas decenas antes de nuestra era, durante el reinado de Mitrídates del Ponto, en Frigia, en cuyo panteón moraban Cibeles y también Mitra, una deidad solar, de origen remoto, de la que se conocen referencias en la India arcaica y en la primitiva religión irania.

En Persépolis abundan las representaciones de la lucha entre un toro y un león. Simbolizan el cambio de las estaciones en el equinoccio de primavera: el león, símbolo del sol estival, vence al toro que representa al invierno: cuando Leo está en el zénit, Tauro entra en su ocaso (ver flechas amarillas en la figura 1). También este símbolo forma parte esencial del nuevo mito.

Cuando nació la religión mistérica mitraica, habían transcurrido más de 4.000 años desde que Tauro, más bien la vaca, había dejado paso al carnero, Aries. El paso de Tauro a Aries significaba, para esta religión secretista, que moría el toro, y reinaba el carnero y que, por ello, durante su reinado, se ofrecerían a los dioses sacrificios de toros, a imagen de aquel del hermano de Ariadna en el dédalo minoico. La nueva religión también ofrecería sacrificios de toros a los dioses: los taurobolios en honor a la diosa madre Cibeles. Además, ese movimiento de la esfera celeste tenía que deberse a un poder sobrenatural, y el mito asignó este poder a Mitra, representado en el cielo por la constelación de Perseo, situado sobre Tauro y amenazante con la espada y la cabeza de la Medusa.

Según la leyenda mitraica, uno de los hijos de Perseo y Andrómeda se llamó también Perseo y fue fundador de Persia. De este modo la leyenda otorgó a Persia parentesco con los reyes etíopes Cefeo y Casiopea, padres de Andrómeda y con los dioses del Olimpo griego a través de Zeus y Dánae, padres de Perseo.

En los taurobolios, suele representarse a Mitra matando a un toro y tocado con un gorro frigio (una mitra o tiara). Es una imagen que sintetiza los elementos iranios rescatados por la nueva religión, para autoasignarse una genealogía prestigiosa.

Actualmente se siguen haciendo interpretaciones mágicas de estos eventos celestes. No falta quien opine que el periodo regido por el carnero termina con el sacrificio del cordero pascual y que con su fin se inicia la era de los peces, símbolo del cristianismo, religión en la que los sacrificios al dios único serán siempre el sacrificio del cordero, oficiado en las misas. Siguiendo el hilo mágico de estas explicaciones astrológicas, que no astronómicas, estaríamos a punto de entrar en la era de acuario y el final de los peces. ¿Auguran los gurús de la nueva era un cataclismo global? ¿Aluden al cambio climático? ¿Es Acuario el símbolo de la descongelación de los casquetes polares y de la contaminación de las aguas?

Siguiendo estas conjeturas mistéricas retroactivamente, podemos llegar a épocas tan remotas como la que vivieron los hombres y mujeres de Lascaux, que produjeron pinturas a las que se asignan interpretaciones fantásticas, más o menos forzadas.

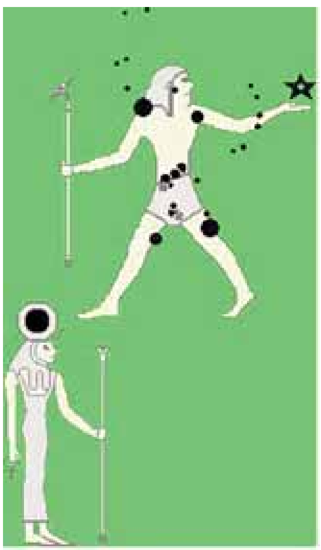
Según una de esas interpretaciones, la pintura del Pozo de la Cueva de Lascaux sería una representación propiciatoria de las lluvias necesarias para que la semilla germine y las plantas maduren hasta la producción de sus frutos. En ella se encuentran representados los protagonistas de la historia de la agricultura: flecha clavada en bisonte hembra, soltando bolsa de agua de sus entrañas, junto a un hombre ¿muerto?, seis puntos y un ave que parece elevarse.

Las réplicas respectivas son las constelaciones Flecha, Tauro, las Híades o Lluviosas, Orión, las Pléyades y el Cisne, visibles todas a la vez en el cielo en el atardecer estival de hace 18 milenios.

Estas figuras y sus réplicas celestes simbolizarían el sacrificio litúrgico de la vaca a la Diosa Madre, el agua de la lluvia, la semilla que se entierra, las danzarinas en este rito primaveral y la resurrección o inicio de un nuevo ciclo agrícola, ligado a un nuevo ciclo celeste anual.

En la época en que se pintaron las figuras de Lascaux, el punto vernal estaba en Escorpio, es decir, la primavera empezaba con el sol en Escorpio. Por lo tanto, al anochecer, ¡¡¡la constelación que brillaba en el cielo era Tauro!!! (Ver flechas rojas en figura 1)

Las interpretaciones prehistóricas de las constelaciones dejaron su reflejo en los mitos de civilizaciones como la egipcia.



Para los egipcios la constelación de Orión, símbolo actual del invierno, representaba al dios Osiris, a veces Horus, sosteniendo en sus manos a la estrella Aldebarán o alfa de Tauro.

Isis, hermana de Osiris, está representada como la estrella Sirio, la más brillante del firmamento. La constelación a la que pertenece y que desde la Grecia Clásica reconocemos como el Can Mayor, **era una vaca**, en tiempos egipcios.

Su calendario empezaba cuando observaban a Sirio en su orto, poco antes del amanecer, fenómeno que anunciaba la crecida del Nilo, suceso crucial para la economía egipcia que ocurría en junio. Hoy, por la precesión de los equinoccios, se produce a finales de Agosto.

De este extraño mundo astronómico egipcio quedan hoy pocos rastros en el firmamento, ya que las constelaciones actuales tienen un origen fundamentalmente babilónico y griego. La única excepción de una constelación genuinamente egipcia, que hoy podemos ver en el cielo, es Ophiuco, la treceava zodiacal, que se ha mantenido fija en el firmamento, como una ruina arqueológica o un dinosaurio celeste.

También la constelación de Bootes, Epet para los egipcios, mantenía unos límites más o menos parecidos a los actuales, lo cual unido a su posición próxima a la osa o pata de la vaca celeste egipcia, justificaría su nombre, pastor de bueyes. El paso de vaca a buey y más tarde a toro, se explica por la patriarcalización de los mitos.

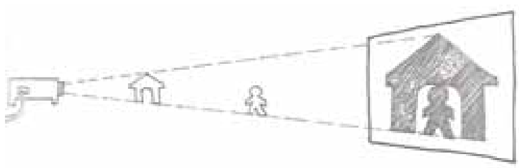
Sin embargo, es obvio que el interés de los antiguos pueblos por la disposición de las estrellas tuvo un motivo fundamentalmente práctico: servir de orientación a navegantes y viajeros, pues, por entonces, cuando un barco perdía de vista la costa corría grave riesgo de perderse. Así, relacionando cada una de las 88 constelaciones con algo conocido, era más fácil de recordar su contorno y su posición relativa, especialmente si se le asociaba una leyenda existente o incluso se inventaba una nueva, como una regla nemotécnica.

Imágenes fantásticas que ayudan a reconocer los cielos.
Fantasías que impiden reconocer las tierras.
Tierras que hablan el lenguaje de las ciencias:
Las matemáticas.

Problemas propuestos

Los problemas que proponemos en los números del año 2009, en esta sección, tienen como objetivo contribuir a deslindar las luces de las sombras, la literatura astronómica de la literatura astrológica, los mitos y las místicas de ayer y de hoy, de las aportaciones científicas, las creencias racionales de las creencias irracionales, las asociaciones infundadas de las observaciones contrastadas .

Los problemas de este número muestran que las posiciones, los tamaños, las distancias y los movimientos aparentes de los astros no coinciden con los que nos da el método científico, la razón, que, como dice Sabater, busca opiniones más reales, más próximas a lo real, con más carga de realidad. No está igualmente próxima a la realidad cualquier tipo de forma de ver, operar, entender… Y, además, *las apariencias engañan:*



Posiciones, distancias y tamaños aparentes

1. *De qué tamaño os parece la Luna llena? ¿Es mayor o menor que el sol? ¿Es de igual tamaño a lo largo del día?*

2. *¿Son las estrellas de una constelación puntos luminosos de una figura plana?*

3. *¿Cómo podríamos medir las distancias y tamaños de la Tierra, la Luna y el Sol?*

4. *¿Y la altura de las montañas de la Luna?*

5. *La luna se mueve sobre sí misma y alrededor de la Tierra, ésta también gira sobre su eje y en torno al sol ¿Y el sol, está quieto?*

Soluciones a los problemas del número anterior[1]

Por Daniel Gozalbo Bellés

El calendario

El calendario empieza cada año el día uno de enero, pero no siempre empieza en el mismo día de la semana ¿Cuántos modelos de calendario distintos pueden cubrir todas las posibilidades?

¿Podrías calcular, con agilidad, el día de la semana de un día cualquiera, si es una fecha posterior al viernes 15 de octubre de 1582?

a. *El Ciclo Solar*

Es conocido el hecho que la feliz coincidencia en domingo, del día 25 de Julio fiesta religiosa del Apóstol Santiago, es el origen de los años llamados Jubilares o año Jacobeo. Esto sucede en una sucesión regular de 6, 5, 6 y 11 años, por tanto se repite en un ciclo global de 28 años. ¿Cual es la razón de dicha repetición?. Es el llamado ciclo solar, en que los días del año, vuelven a coincidir con los días de la semana.

Si no existieran bisiestos, empezaría el año en domingo cada 7 años, al ser 7 los días distintos de la semana. Si dicho ciclo se entremezcla con el ciclo de bisiestos, aparece un ciclo común de 28 años que hace repetir la secuencia de los días del año con la de días de la semana. Existe por tanto una secuencia de 28 términos en la fecha de la semana en que empieza el año, que se repite cíclicamente.

La existencia de la reforma gregoriana, con la supresión de 3 bisiestos cada 400 años, hace que el ciclo de 28 días deba fraccionarse, a partir de la reforma, en cada una de las centurias en que no se considera bisiesto el año secular, o bien tomar en cuenta un ciclo gigantino de 2800 años que no tiene ningún valor práctico.

b. *Fecha Juliana.*

Un año después de aprobada la reforma Gregoriana, Joseph Justus Scaliger, propuso un nuevo calendario de uso para astrónomos, que usaba únicamente el día como unidad de medida, con objeto de tener definido de manera unívoca cada día con un número real. Necesitaba para el nuevo sistema de referencia un origen. Con objeto que coincidieran los tres ciclos que latían en el calendario, desde la antigüedad, se propuso conseguir un nuevo ciclo que respetara el ciclo solar, el ciclo lunar y el ciclo de la indicción romana.

El primero servía para computar el tiempo en que vuelven a coincidir las fechas del calendario anual, con el orden de los días de la semana. Ese ciclo solar constaba de 28 años. Además sabía que el último ciclo solar empezó en 1560.

El segundo ciclo, de 19 años, garantizaba que las fases lunares, coincidieran con la fecha del calendario. El orden de un determinado año, dentro del ciclo era el número áureo del año, llamado así al ser escrito con letra de oro en los calendarios medievales. Conocía que el año 532, fue el primero de un ciclo Lunar.

La indicción romana indicaba el cómputo de los años en que se pagaba el tributo fiscal por los bienes, que había instaurado en su día por Constantino en el año 313 y se mantenía en vigor desde entonces. Sabía por tanto que el año 313 era el primero de un ciclo de indicción.

Es evidente que el nuevo ciclo debía ser el MCM (28,19,15) o sea 7.980 años. Pero cual debía ser el posible origen para que se cumplieran las tres condiciones que quería cumplir: que el año 1.560 fuera el primero de un ciclo de 28, el 532 primero del ciclo de 19 y que 313 fuera el primero del ciclo de la indiccion romana. Si x es el número buscado

$$\left.\begin{array}{ll} x\equiv 1560 & \text{mod } 28 \\ x\equiv 532 & \text{mod } 19 \\ x\equiv 313 & \text{mod } 15 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} x\equiv 20 & \text{mod } 28 \\ x\equiv 0 & \text{mod } 19 \\ x\equiv 13 & \text{mod } 15 \end{array}\right\}$$

Sistema de congruencias que tiene solución de acuerdo con un clásico teorema al ser los módulos, dos a dos, primos entre si.

De la primera ecuación: $x = 20 + 28k$; sustituyendo en la segunda, $20 + 28k \equiv 0 \text{ mod. } 19 \Rightarrow 1 + 9k \equiv 0 \text{ mod. } 19 \Rightarrow$ $9k \equiv 18 \text{ mod. } 19 \Rightarrow k \equiv 2 \text{ mod. } 19 \Rightarrow k = 2 + 19t$

Sustituyendo los resultados en la tercera ecuación obtenemos $20 + 28\,(2 + 19t) \equiv 13 \text{ mod. } 15 \Rightarrow 76 + 532t \equiv 13 \text{ mod. } 15$

$\Rightarrow 1 + 7t \equiv 13$ mod. 15 $\Rightarrow 7t \equiv 12$ mod. 15 $\Rightarrow t \equiv 6$ mod. 15 o también $t = 6 + 15r$.

Por tanto $x = 76 + 532\,(6 + 15r) \Rightarrow x = 3.268 + 7.980r$

Si $r = 0$ el año origen sería el 3.268, año no utilizable si se quería que la mayoría de fenómenos astronómicos conocidos estuviera incluida con signo positivo. Tomó por tanto la decisión que r = -1 y, en dicho caso, x = -4.712. Para evitar el error de cómputo por la inexistencia de año cero, lo corrigió y adoptó como origen el 1 de Enero del año - 4.713 a las 12 del mediodía, que seria por tanto el origen 0 del nuevo calendario.

c. *Cálculo del día de la semana de un día cualquiera, si es una fecha posterior al viernes 15 de octubre de 1582*

El enunciado nos proporciona un dato necesario, el 15 de Octubre de 1582 era viernes. Partiremos por tanto de esa fecha, primer día del calendario renovado por el Papa Gregorio XIII.

Sea **d/m/a** la fecha indicada para conocer su día de la semana. Si a = 1.582 contamos los días transcurridos entre el 15 de Octubre y el cálculo es elemental. El número de días transcurridos, módulo 7, nos indica los días adicionales a semanas completas, por tanto basta con calcular el resto y si es 1 será sábado, 2, domingo, etc. Supondremos pues que el año es posterior al 1.582.

a. Días transcurridos entre esa fecha y la finalización del año 1.582: 16 días de octubre + 30 días de noviembre + 31 días de diciembre. Un total de 77 días que módulo 7 es congruente con 0. Por tanto el año 1.582 finalizó en Viernes[2].

b. Años completos transcurridos entre la fecha dada y 1.583 (éste incluido). La cifra será la diferencia a – 1.583. Sea:

$$\mathbf{m} \equiv (\mathbf{a} - 1.583) \text{ módulo } 7.$$

c. Bisiestos incluidos entre ambas fechas[3]. Sea [4]

$$\mathbf{n} = [\mathbf{a} - 1.583] + 1$$

d. Introducir la Reforma gregoriana, minorando el cómputo de bisiestos según los años centenarios no bisiestos, 1.700, 1.800, 1.900, 2.100, ... incluidos entre las fechas indicadas. Sea $\boldsymbol{p}$ = número de años centenarios no bisiestos entre las dos fechas.

e. Cálculo de los meses completos trascurridos del año indicado[5]: Sea $\boldsymbol{q}$ el resto congruente módulo 7 con la suma de los días de los meses completos transcurridos.

f. Días transcurridos en el mes indicado. Sea $\boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{d}$ módulo 7

g. Sea $\boldsymbol{s}$ $(\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n} - \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} + \boldsymbol{r})$ módulo 7

h. Trasladar s al cómputo del día de la semana: Si s =1 entonces es Sábado, s = 2 domingo, s =3 lunes, s = 4 martes, s = 5 Miércoles, s = 6 jueves, s = 7 viernes.

Eclipses

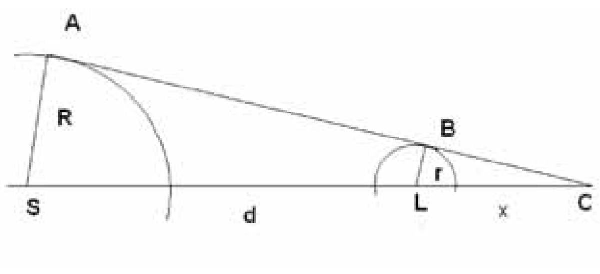
¿Cuánto tardan los eclipses en volver a ocurrir en el mismo orden?
¿Cuál es la condición para que se produzca un eclipse de sol anular, visible desde un lugar de la Tierra?
¿Y total?
¿Podríamos estimar su probabilidad?

Un eclipse, sea de Sol o de Luna, solamente puede ocurrir si la Tierra, el Sol y la Luna están alineadas. Si el objeto que está en el centro es la Tierra, la Luna en el extremo opuesto será Luna Llena y si el objeto central es la Luna, estará en Luna nueva. El plano de la órbita de la Luna con el plano que describe la tierra alrededor del Sol, se cortan en una recta que se llama eje o recta de los Nodos. Por tanto para producirse un eclipse necesita como segunda condición que esten en el mismo plano o sea que la Luna esté en un Nodo. El tiempo entre pasajes sucesivos de la Luna a través de sus nodos se llama mes Dracónico, y tiene una duración de 27,212220 días. El tiempo entre dos sucesivas Lunas Nuevas o Llenas, es llamado el mes Sinódico, y es igual a 29,530589 días.

El ciclo común[6] que los engloba es de 223 meses sinódicos (6.585,321 d), que coincide prácticamente con 242 meses dracónicos (6.585,357 d). Este período es el Saros, conocido ya en la antigüedad y equivale a 18 años, 10 días y 8 horas[7].

Eclipses de Sol[8]

Representemos el cono de sombra de la Luna generado por la luz del Sol. Sea R el radio del Sol, r el radio de la Luna, d la distancia Sol–Luna, S el centro del Sol y L centro de la Luna, A punto de tangencia del Sol con la visual del espectador y B punto de tangencia de la visual de la Luna.



De la proporcionalidad de los triangulos OLB y OSA se deduce:

$$\frac{x}{r}=\frac{x+d}{R} \qquad x=\frac{rd}{R-r} \qquad x=\frac{d}{\frac{R}{r}-1}$$

Luego conocemos la longitud de la sombra en función de la distancia entre la Tierra y la Luna, y de sus radios respectivos. Veamos entre qué extremos puede variar dicha distancia x.

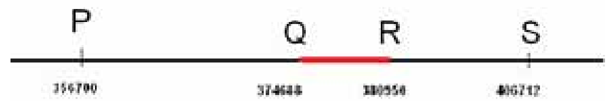
Sabemos que:

147,08 M Km ≤ Distancia Tierra-Sol ≤ 152,11 M Km
356.375 Km ≤ Distancia Tierra-Luna ≤ 406.712 Km

La distancia menor buscada serà si la Luna ocupa el lugar más alejado posible de la Tierra y en cambio el Sol está lo más cercano posible a la Tierra. En ese caso, la longitud del cono de sombra es de 374.688 km.

La distancia mayor buscada será en el caso que la Luna esté lo más cercana posible y en cambio el Sol lo más alejado posible; en dicho caso la longitud del cono de sombra es 380.950 Km. Si lós cálculos se realizan en función del radio terrestre, la longitud del cono de sombra de la Luna varía entre 57 y 59 radios terrestres, mientras que la distancia Tierra Luna varia de 56 a 64 radios terrestres.

Si el cono de sombra de la Luna alcanza la superficie de la Tierra, habrá un eclipse de Sol total.



Por tanto, solamente si la distancia Tierra-Luna se encuentra entre P y Q habrá eclipse total, entre Q y R, es una zona mixta de totales y anulares, y si la distancia está entre R y S el eclipse será anular.

Oposiciones

¿Cuánto tiempo es necesario para que Marte o Júpiter vuelvan a estar en oposición a la Tierra?

Marte y La Tierra

Los periodos de traslación de Marte y La Tierra son conocidos, 687 y 365,25 días respectivamente. Basta plantear:

$$365{,}26\,x = 687\,y \Rightarrow x = 1'88\,y \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{188}{100} \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{25}{47} \Rightarrow$$

$$\frac{y}{x}=\frac{1}{\frac{47}{25}} \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{1}{1+\frac{22}{25}} \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{25}{22}}} \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{3}{22}}} \Rightarrow$$

$$\frac{y}{x}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{22}{3}}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{7+\frac{1}{3}}}}$$

Despreciando el 1/3, con esta aproximación ya resulta: $\frac{y}{x}=\frac{8}{15}$: cada 15 años terrestres se repite la oposición de Marte.

Júpiter y la Tierra

Sabiendo que un "año" de Júpiter son 11,86 años terrestres, podemos encontrar una aproximación usando el siguiente desarrollo:

$$\frac{x}{y}=\frac{11{,}86}{1}=11+\frac{86}{100}=11+\frac{1}{\frac{100}{86}}=11+\frac{1}{1+\frac{14}{86}}=11+\frac{1}{1+\frac{1}{6+\frac{1}{7}}}$$

Cortando el desarrollo obtenemos la aproximación:

$$x = 83, \quad y = 7$$

Cada 83 años terrestres Júpiter repetirá la oposición con la Tierra.

Los días de la semana

¿Conoces el origen de los nombres y el orden de los días de la semana?

Es conocido que desde la remota antigüedad se conocen 7 astros en el cielo, les asignaban unas virtudes especiales y los consideraban protectores de sus trabajos y sus tiempos. En concreto cada uno protegía una hora diaria. Desde muy antiguo se consideró que el protector de la primera hora del día, era el protector primordial de ese día, e incluso, el día pasó a denominarse igual que al Dios protector de la primera hora.

La ordenación de esos astros la indicaba la mayor o menor distancia de dicho astro a la Tierra. Durante siglos se considero: Luna, Mercurio, Venus, Sol, Marte, Júpiter y Saturno. Téngase en cuenta que hasta el renacimiento no se acepto que Mercurio estaba más cercano al Sol que Venus. Como las 24 horas no son múltiplo de 7 y $24 \equiv 3$ módulo 7, el planeta protector del día siguiente era el que ocupaba tres posiciones posteriores al que empezó ese día y así sucesivamente.

Si el Planeta protector del primer día era p.e. la Luna, la primera hora del día siguiente era protegida por Marte, la primera del posterior día por Mercurio,... de forma que se inducía como orden de los días de la semana el actualmente conocido. Para que su visualización fuera pública, se representaba sobre un círculo en cuya circunferencia estaban marcados los planetas y en su interior un esquema indicaba la sucesión de los planetas para los días sucesivos.

EL HILO DE ARIADNA

NOTAS

1 En la solución de los problemas, debe tenerse en cuenta que tanto su planteamiento como los métodos utilizados, se adaptan necesariamente para el alumnado de 12 y 13 Años, –Primero o segundo curso de ESO–, para el que fueron concebidos. Se obvia por tanto cualquier fórmula más compleja, o procedimiento informático, que por otra parte se pueden encontrar con facilidad.

2 Esta simplificación nos sirve para reducir el cálculo en cualquier fecha posterior y considerar únicamente como fecha inicial el 31 de diciembre de 1583.

3 Es importante hacer notar si la fecha propuesta fuera de un año Bisiesto, que para el cálculo de los bisiestos transcurridos, debe tenerse en cuenta el carácter de bisiesto lo marca la existencia de un 29 de Febrero, por tanto, si la fecha dada es anterior al 29 de febrero, el calculo de n debe disminuirse en una unidad. En caso de ser posterior, ese año sí entra en el cómputo de bisiestos.

4 Usamos [ ] para indicar el cálculo de la parte entera.

5 Recordar que $31 \equiv 3;\ 30 \equiv 2;\ 28 \equiv 0$ todos ellos módulo 7.

6 Un método sencillo para el cálculo de esa aproximación se realiza desarrollando en fracción continua el cociente: 272.120/295.306

$$\frac{x}{y}=\frac{272120}{295306}=\cfrac{1}{11+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\dots}}}}}}$$

las diferentes aproximaciones que se obtienen son:

$$\frac{12}{11};\frac{13}{12};\frac{38}{35};\frac{51}{47};\frac{242}{223}\dots$$

7 Esas 8 horas provocan que la Tierra debe rotar 8 horas o 120° adicionales con cada ciclo. Esto implica, para los eclipses solares, un desplazamiento en cada ruta de la sombra de unos 120° hacia el oeste. De este modo una serie Saros de eclipses retorna a casi la misma región geográfica cada 3 periodos Saros o sea cada 54 años y 34 días.

8 En este ejercicio de proporcionalidad, solamente consideramos el caso de alineación exacta de los centros de los tres cuerpos. Hay numerosos estudios para los otros casos en que no están exactamente en línea recta denominada de los nodos lunares y en cambio pueden producirse eclipses, fundamentalmente parciales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BERGUA, J.B. (1979): *Mitología Universal*, Ediciones Ibéricas, Madrid

HICKS, J. (1975): *Les Origins de l'Homme. Les Perses*. TIME-LIFE International (Nederland) B.V.

MARTÍNEZ, B. (1997): *Materials didàctics per a l'ensenyament de l'astronomia*, NAU libres, València.

OSUNA, L. (1998): *Astronomía*, Aguaclara, Valencia.

RICHEPIN, M.J. (1990): *La nueva mitología griega y romana*, MUSA, Ripollet.

Boletín de suscripción

Tarifas	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	25 €	10 €
Centros	40 €	15 €
Europa	50 €	20 €
Resto del mundo	60 €	22 €

Fotocopiar esta hoja y enviar:

por correo a: Revista SUMA. Apartado de correos 498
46900-Torrent (Valencia)
por Fax al: (+34) 912 911 879
por correo-e a: administracion@revistasuma.es

Deseo suscribirme a la revista SUMA:

Nombre y apellidos: NIF/CIF:

Dirección: Teléfono:

Población: CP:

Provincia: País:

Correo electrónico: Fax:

Importe (€)

☐ Suscripción a partir del año (3 números) ________

☐ N.os sueltos ________

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)

☐ Transferencia bancaria (CCC 2077-0347-11-1101452547)

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista SUMA

☐ Giro postal dirigido a Revista SUMA

Fecha y firma:

Nombre y apellidos:

Código Cuenta Cliente: Entidad: Oficina: DC: Cuenta:

Banco/Caja:

Agencia n.º: Dirección:

Población: Provincia:

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (fecha y firma):

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Σ

ISSN 1130-488X

SUMA. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.