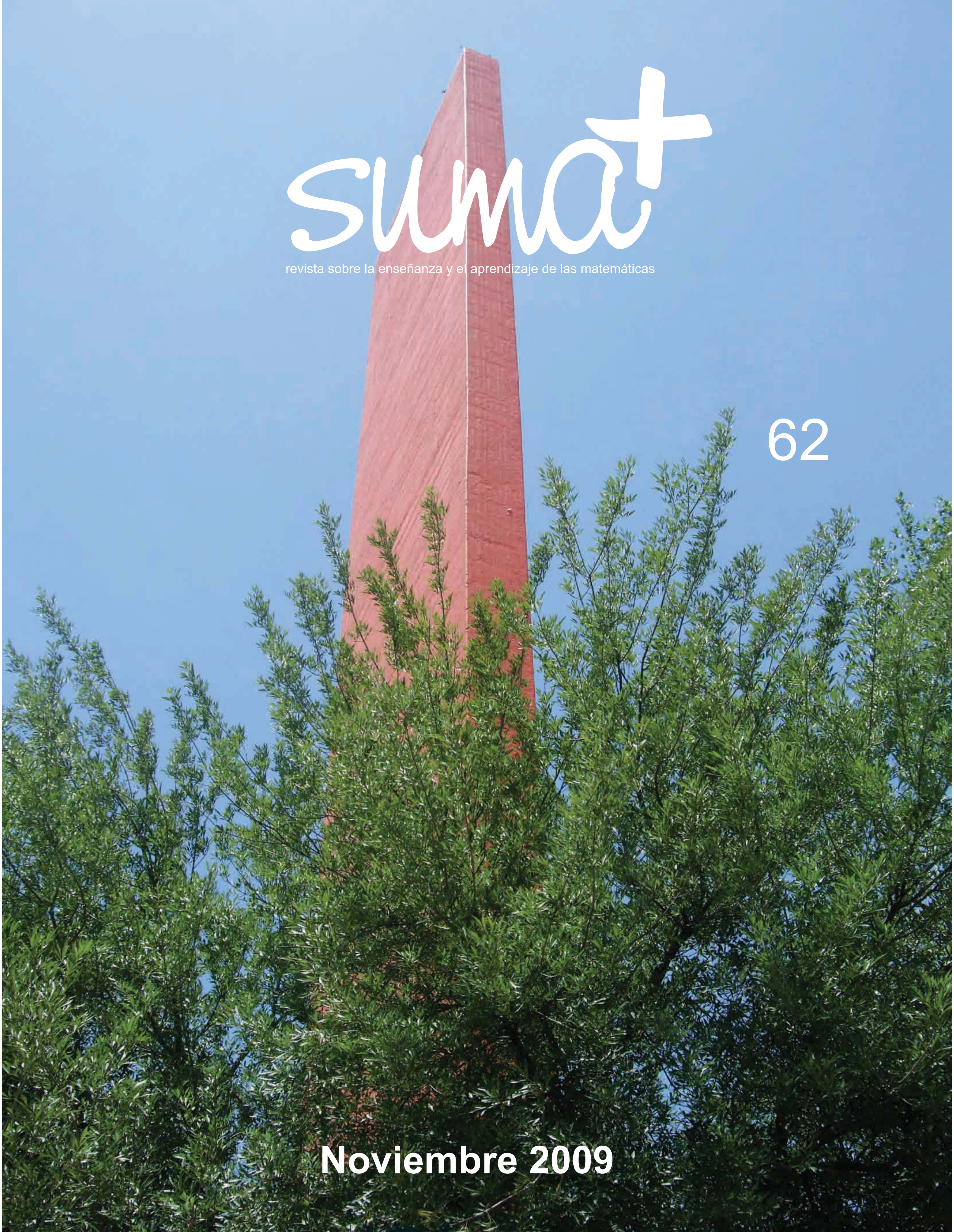


suma+

revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

62

Noviembre 2009

suma+

revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

Directores
Onofre Monzó del Olmo
Tomás Queralt Llopis
direccion@revistasuma.es
Administrador
Gregori García Ferri
administracion@revistasuma.es
Consejo de redacción
Salvador Caballero Rubio
(CEFIRE d'Alacant)
Marisa Fernández Villanueva
(IES Veles e Vents, Torrent)
Bernardo Gómez Alfonso
(Universitat de València Estudi General)
Floreal Gracia Alcaine
(IES Politècnic, Castelló)
José Antonio Mora Sánchez
(IES San Blai, Alacant)
Luis Puig Espinosa
(Universitat de València Estudi General)
Consejo Editorial
Serapio García Cuesta
(Presidente de la FESPM)
Francisco Martín Casalderrey
(IES Juan de la Cierva, Madrid)
Inmaculada Fuentes Gil
(IES Ágora, Madrid)
Ricardo Luengo González
(Universidad de Extremadura)
Edita
FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS (FESPM)
Web
Antonio Alamillo Sánchez
www.revistasuma.es

Diseño de la portada: *O. Monzó*
Fotografía de la portada:
Geometrías, *Elepé*
Maquetación
T. Queralt y O. Monzó
Revista Suma
Apartado 498
E-46900-Torrent (España)
Fax: *+(34) 912 911 879*
Tirada: *6700 ejemplares*
Depósito legal: *Gr 752-1988*
ISSN: *1130-488X*

62 *Noviembre 2009*

actividades de la FESPM

SUMA es una revista de didáctica de las matemáticas de periodicidad cuatrimestral, cuyo objetivo es tratar sobre aquellos aspectos relacionados con su enseñanza y aprendizaje, destinada al profesorado que trabaja en educación infantil, primaria, secundaria y universitaria.

La revista SUMA se edita en Torrent (Valencia) - ESPAÑA

SUMA+ 62
Noviembre 2009

Vamos mejorando

El pasado mes de julio celebramos en Girona las XIV JAEM, con gran éxito de participación y organización. En el próximo número de SUMA incluiremos el reportaje del desarrollo de estas Jornadas, que edición tras edición mejoran en calidad, cantidad de participantes, y entrega generosa de organizadores. Para nosotros es una prueba de que la Federación poco a poco va siendo el mejor referente del estado de la Educación Matemática en España. A través de las diferentes iniciativas que la FESPM lleva a cabo, pensamos que la comunidad de profesores de matemáticas puede encauzar algunas de sus inquietudes que permitan mejorar la Educación Matemática en nuestro país.

Así podemos nombrar la Olimpiada Matemática Nacional, para estudiantes de primer ciclo de Educación Secundaria Obligatoria, y que en este número incluimos el informe de la pasada edición celebrada en Canarias, actividad que repercute en cada una de las sociedades federadas, y que a través de sus diferentes fases, llega a cada colegio e instituto de todo el Estado.

No perdamos de vista los seminarios federales, que realizados periódicamente, permiten trabajar aspectos relacionados con la Educación Matemática y a partir de los cuales, la Federación elabora informes que permiten determinar cuál es la posición al respecto de la FESPM.

La celebración del Día Escolar de las Matemáticas*, que pretende marcar una fecha de referencia para que las matemáticas se conviertan en un tema de interés global para todos los estudiantes.*

Se inicia a través de la secretaria de actividades y formación del profesorado la primera edición de los cursos a distancia de la FESPM, una iniciativa más que va a permitir la formación de los profesores de matemáticas.

A todo esto añadiremos las iniciativas que cada sociedad federada organiza y desarrolla por su cuenta dentro del territorio donde está ubicada.

Como nuestros lectores observarán, hemos modificado las Normas de publicación*, con el fin de facilitar a los autores el envio de los artículos originales. De esta manera se incorpora la posibilidad de mandar las propuestas por correo electrónico (si tienen un peso razonable), además del tradicional correo postal, cuestión que agilizará la recepción de los trabajos, reducirá los costes de envio y el consumo de papel. También incorporamos algunos elementos que van encaminados a mejorar la calidad de SUMA, y que forman parte de los criterios de calidad de las mejores revistas. Entre ellos está la descripción del método de aceptación de los trabajos, que como siempre ha sido a doble ciego, es decir, los asesores a quienes se les manda la propuesta de artículo y que deben valorarlo, desconocen el autor o autores del mismo, y por otro lado éstos también desconocen quién será el árbitro que corregirá su texto. Incorporamos la exigencia de remarcar cinco palabras clave, que orienten sobre el contenido del artículo.*

También se modifica el formato de la relación bibliográfica de referencias, de manera que se ha optado por ajustarse a la normativa de la A.P.A. (American Psycological Association) por ser la normativa que se utiliza habitualmente en el ámbito de nuestra revista.

También nos hemos adaptado a las exigencias de la Ley Orgánica 15/1999 de protección de datos de carácter personal, puesto que la FESPM maneja gran cantidad de datos personales de suscriptores y miembros de las sociedades federadas, que siempre se han tratado con la debida discreción.

Esperemos que estos pequeños cambios faciliten y mejoren el resultado final de la revista y que sean del agrado de todos nuestros lectores. ■

Manuscrito de Pedro Puig Adam

artículos

suma+ 62
Noviembre 2009, pp. 7-9

La superficie que abarca la vista desde la cima de un monte

Muchas veces subimos a pequeños promontorios por el placer de contemplar un paisaje, y quizás alguna vez nos preguntamos qué superfície abarca la vista desde ese punto, pero enseguida desistimos de buscar la respuesta a esa pregunta creyendo que su cálculo será difícil, o cuando menos engorroso. Nada más lejos de la realidad, si no somos demasiado exigentes y nos permitimos un pequeño error (¡inferior al 0,1% !).

People often climb up to high points to view scenic landscapes. They may sometimes wonder how big the area is that they are admiring, but soon give up finding the answer since calculating it seems virtually impossible. Well, nothing farther from the truth, so long as we're not too demanding and allow ourselves a small margin of error (less than 0.1%!).

Hace algunos años, un profesor del Departamento de Matemáticas (el sr. Simó Bosch Estany, catedrático actualmente jubilado) hizo notar al resto de profesores del Departamento que si subimos a un monte de altura L (en km), la superficie de la región que veríamos es aproximadamente 40.000L.

Esta propiedad nos respondería fácilmente a la pregunta que muchas veces nos hacemos cuando admiramos un paisaje desde la cima de un monte: ¿qué superficie debo estar contemplando? Bastaría con conocer la altura del monte (en km) y multiplicarla por 40.000 para tener una muy buena aproximación de dicho valor.

Este resultado se obtiene de considerar que esta altura L es insignificante frente al radio de la Tierra (R_T = 6.371 km) ya que el punto más alto al que podríamos llegar son los 8,848 km del Everest, lugar al que, por otra parte, no todo el mundo puede llegar.

A continuación, argumentamos esta propiedad.

Vamos a suponer que la Tierra sea una esfera perfecta. Entonces, la superficie de un casquete de altura h es $S=2\pi Rh$, siendo R el radio de la esfera.

Esta fórmula se obtiene mediante integrales:

Consideremos la Tierra cortada por un plano que pasa por el centro y tendremos la circunferencia de centro (0,0) y radio R (=6.371 km) y hacemos girar alrededor del eje vertical OY el arco de circunferencia que va de A a B, obteniendo el casquete cuya superficie será:

$$S = 2\pi \int_{R-h}^{R} f(y)\sqrt{1+\left(f'(y)\right)^2}\,dy \text{ , siendo}$$

$$f(y) = x = \sqrt{R^2 - y^2}$$

(esto se obtiene de que la ecuación de una circunferencia de centro (0,0) y radio R es $x^2+y^2=R^2$), y por lo tanto, sustituyendo *f(y)* y

$$f'(y) = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - y^2}}$$

y resolviendo la integral se obtiene que $S=2\pi Rh$

Lluís Sabater Anticó
IES Llançà. Llançà (Girona)

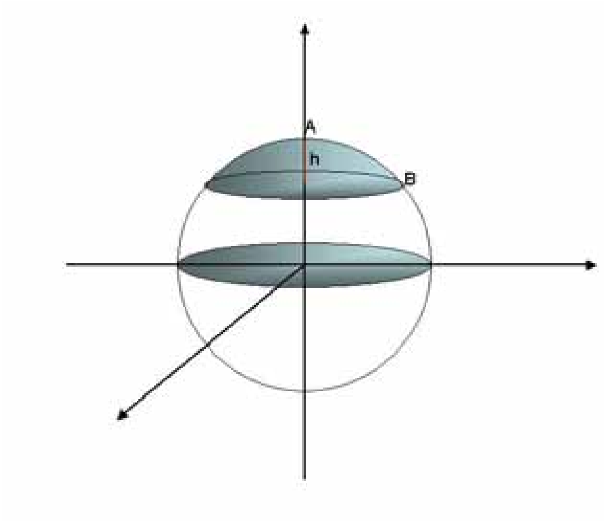


Figura 1

Consideremos ahora la misma sección de la Tierra pero situándonos en un punto P de altura L (la cima de un monte de altura L). Desde allí veremos una distancia m hasta el punto Q en el que la tangente a la circunferencia por el punto P toca a la Tierra. Esta tangente es perpendicular al radio que va de O (centro de la Tierra) a Q y por lo tanto podemos aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo PQO :

$(R+L)^2= m^2+R^2$ y haciendo cálculos se obtiene que $m^2=2RL+L^2$ y por ser insignificante L^2 frente a $2RL$ podemos poner que $m^2 \sim 2RL$

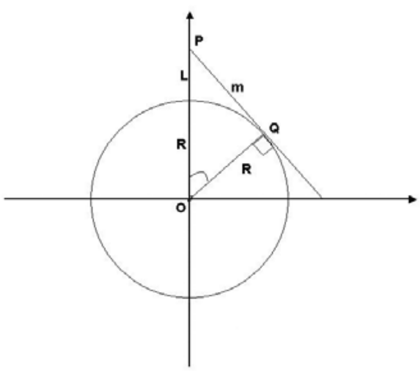


Figura 2

Pero por otra parte, para nosotros la Tierra es muy grande y podemos considerar que la distancia m es prácticamente el radio de un círculo, que por tanto tendrá área $A=\pi m^2 \sim 2\pi RL$ y donde resulta que el producto de los 3 primeros números es constante y vale $2\pi R=2\cdot 3{,}141592...\cdot 6.371 \sim 40.000$(más exactamente, 40.030,17...).

Por tanto, para simplificar cálculos y sin cometer un error excesivamente grande, *para conocer la extensión de terreno (en km^2) que se ve desde lo alto de un monte de altura L (en km) basta con multiplicar L por 40.000.*

El cálculo del radio de este supuesto círculo (es decir, hasta qué distancia llega nuestra vista) es más complicado ya que es el valor de m, que hemos visto que es $m^2 \sim 2RL$ y por tanto habría que extraer una raíz cuadrada, aunque para según qué valores de L el cálculo es sencillo si consideramos que $R \sim 6.400$ km:
L = 0,5 km nos da m = 80 km
L = 2 km nos da m = 160 km

Error cometido

El error cometido no es grande pues resulta que la altura del monte es prácticamente la misma que la del casquete, como puede verse considerando los triángulos semejantes POQ y QOB.

Estos dos triángulos son semejantes por tener los mismos ángulos.

Los dos tienen un ángulo recto y los dos tienen el ángulo $\angle POQ=\angle BOQ$ y por tanto también tienen igual el tercer ángulo, y por tanto las razones entre lados correspondientes son iguales a la razón de semejanza:

$\frac{R}{R+L}=\frac{R-h}{R}$ y por tanto $1-\frac{h}{R}=\frac{R}{R+L}$ y por tanto $-\frac{h}{R}=\frac{R}{R+L}-1=-\frac{L}{R+L}$ y por tanto, por ser $R \sim R+L$ resulta que $h=\frac{R\cdot L}{R+L} \sim L$.

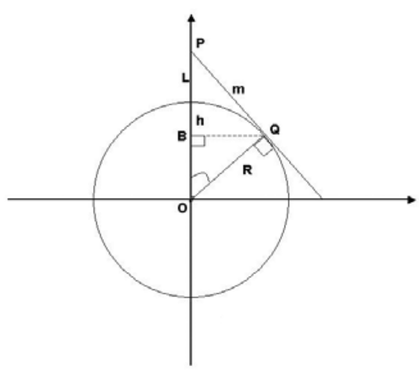


Figura 3

Ejemplos comparativos

En el caso L = 1 km

$$h=\frac{R\cdot L}{R+L}=\frac{6.371}{6.372}=0{,}999843$$, y por tanto el área del casquete es S=40.023,8889 km^2, mientras que aplicando la fórmula A=40.000L se obtiene A= 40.000 km^2, es decir, un error de tan solo casi 24 km^2 donde el verdadero resultado es 40.023,8889 km^2.

Expresado en %, el error cometido es del 0,059%.

El gráfico nos da una idea del error cometido.

Figura 4

En el caso L = 0,5 km

$$h=\frac{R\cdot L}{R+L}=\frac{31.85{,}5}{6.371'5}=0{,}499961$$ km, y por tanto la superficie del casquete es S=20.013,52562 km^2, mientras que aplicando la fórmula A=40.000L se obtiene A=20.000 km^2, es decir, un error de tan solo 13,5 km^2 donde el verdadero resultado es 20.013,52562 km^2.

Expresado en % el error cometido es del 0,067%.

Aplicándolo a 4 casos concretos de España

	Altura (km)	Superfície real casquete (km^2)	Superf. aprox. 40000L (km^2)	Diferencia (% del real)
Montserrat	1,236	49.467,68	49.440	0,056
Teide	3,718	148.745,35	148.720	0,017
Aneto	3,404	136.189,92	136.160	0,022
Sant Pere de Rodes	0,670	26.817,39	26.800	0,065

Obsérvese que la superficie visible desde la cima del Aneto, es mayor que la superficie de Aragón (47.669 km^2), Catalunya (31.980 km^2) y Navarra (10.421 km^2) juntas, y es casi 3 veces la de Aragón.

Los datos referentes a Sant Pere de Rodes han sido calculados por ser un punto emblemático del turismo en la comarca del IES del autor del artículo.

(Los cálculos y razonamientos anteriores se han hecho considerando que el monte al cual hemos subido no tiene alrededor suyo otros accidentes geográficos que puedan aumentar o disminuir el área visible hasta un horizonte tangente a la Tierra).

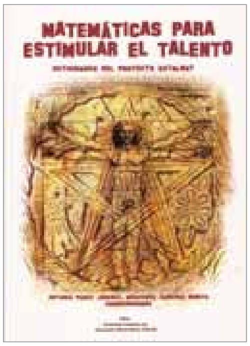
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Carreras, J. (dir.)(1986). *Gran Enciclopèdia Catalana*. Barcelona: Enciclopèdia Calana, S.A.

Publicaciones recibidas

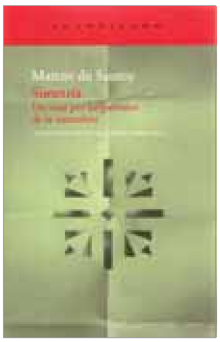
Competencias en razón y proporción en la Escuela primaria
A. Fernández Lajusticia, O. Figueras, B. Gómez, O. Monzó y L. Puig
Departament de Didàctica de la Matemàtica. Universitat de València
Valencia, 2009
ISBN: 978-84-370-7409-2
320 páginas

Razón y proporción. Un estudio en la Escuela primaria
Alejandro Fernández Lajusticia
Departament de Didàctica de la Matemàtica. Universitat de València
Valencia, 2009
ISBN: 978-84-370-7410-8
364 páginas



Matemáticas para estimular el talento
A.Pérez y M. Sánchez (Editores)
SAEM "Thales"
Sevilla, 2009
ISBN: 978-84-935760-2-8
232 páginas

25 Olimpiadas Matemáticas "Thales"
J. Romero y R. Falcón (Editores)
SAEM "Thales"
Sevilla, 2009
ISBN: 978-84-935760-4-2
176 páginas



Simetría. Un viaje por los patrones de la naturaleza
Marcus du Sautoy
Acantilado. Quaderns Crema, S.A.U.
Barcelona, 2009
ISBN: 978-84-92649-17-4
501 páginas

Estadística Aplicada. Una visión instrumental
M. T. González y A. Pérez
Ediciones Díaz de Santos
Madrid, 2009
ISBN: 978-84-7978-913-8
759 páginas

Boletin das Ciencias
ENCIGA
N.º 67, marzo 2009
Santiago
ISSN: 0214-7807

Xla Tangente
Kangouru Italia
N.º 17, ottobre 2009
Monza. Italia
ISSN: 1971-0445

suma+ 62
Noviembre 2009, pp. 11-18

Un análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicaciones didácticas

En este trabajo realizamos un análisis semiótico de los objetos y procesos matemáticos implícitos en algunas soluciones correctas posibles del problema de Monty Hall. También se describen los razonamientos erróneos más frecuentes en su solución, explicándolos en términos de conflictos semióticos. Concluimos con las posibilidades de uso de este problema en la enseñanza y formación de profesores.

In this paper we carry out a semiotic analysis of the mathematical objects and processes that underlie some possible correct solutions to the Monty Hall problem. We also explain some of the most frequent incorrect reasonings in its solution in terms of semiotic conflicts. We conclude with the possibilities of this problem in the teaching of probability and in the training of teachers.

Introducción

La comprensión y correcta aplicación de la probabilidad condicional es fundamental en la vida diaria y las aplicaciones de la Estadística, porque permite incorporar cambios en nuestro grado de creencia sobre los sucesos aleatorios a medida que adquirimos nueva información (Díaz y de la Fuente, 2005). Ello explica que este tema se introduzca en la enseñanza secundaria (MEC, 2007). Sin embargo, muchas investigaciones muestran la existencia de intuiciones incorrectas en la aplicación de este concepto y la enseñanza formal es insuficiente para superarlas. Es necesario que el alumno se haga consciente de estas dificultades y aprenda a afrontar los problemas condicionales con unas herramientas adecuadas.

En este trabajo analizamos un juego (para el cual existen simuladores en Internet) que podría ser útil para lograr enfrentar a estudiantes con algunas de estas intuiciones incorrectas, incluso en cursos de formación de profesores. El juego está inspirado en el concurso televisivo *Let's Make a Deal* (Hagamos un trato), emitido entre 1963 y 1986 en la televisión americana y su nombre proviene del presentador del concurso, Monty Hall. El concurso generó bastante polémica en relación a posibles soluciones del problema matemático latente y muestra las intuiciones incorrectas en relación a la probabilidad condicional. La formulación más conocida de dicho problema (Bohl, Liberatore y Nydick, 1995) se reproduce a continuación:

Supón que estás en un concurso, y se te ofrece escoger entre tres puertas: detrás de una de ellas hay un coche, y detrás de las otras cabras. Escoges una puerta, digamos la nº 1, y el presentador, que sabe lo que hay detrás de las puertas, abre otra, digamos la nº 3, que contiene una cabra. Entonces te pregunta: ¿No prefieres escoger la nº 2? ¿Es mejor para ti cambiar tu elección?

El problema original fue planteado por Selvin (1975 a y b). Un problema análogo denominado "problema de los tres prisioneros", fue publicado por Gardner (1959), aunque su versión hace el proceso de elección explícito, evitando las suposiciones de la versión original. En este trabajo primero estudiamos las posibles soluciones correctas al problema de búsqueda de la mejor estrategia en el juego. Seguidamente, basados en elementos tomados de Godino, Font y Wilhelmi (2008) analizamos los sistemas de prácticas y objetos matemáticos implíci-

Carmen Batanero Bernabeu
Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
José António Fernandes
Departamento de Metodologias da Educação. Universidade do Minho. Portugal.
José Miguel Contreras García
Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

tos en estas soluciones correctas y algunos posibles conflictos semióticos. Finalizamos con algunas conclusiones sobre la idoneidad didáctica del trabajo con este problema en cursos de formación de profesores.

Solución matemática del problema de Monty Hall

Cuando se trabaja con el problema de Monty Hall, en un curso de probabilidad, podemos hacer a los estudiantes alguna pregunta del tipo: *¿Debe el concursante mantener su elección original o escoger la otra puerta? ¿Hay alguna diferencia entre cambiar o no?* Les pediremos que justifiquen su decisión con un argumento de tipo probabilístico.

La solución consiste en ver qué tipo de jugador tiene la mayor probabilidad de ganar el coche, el que nunca cambia de puerta o el que cambia siempre. En caso de que los estudiantes no logren dar la solución o den una solución errónea (lo cuál es lo más frecuente), se puede dar oportunidad de simular el juego usando uno de los *applets* disponibles en Internet y obtener datos experimentales que les ayuden a intuir la solución correcta.

Solución intuitiva 1

Con ayuda de un diagrama en árbol podemos ver las distintas posibilidades. Hay dos puertas sin premio y una con premio. Por tanto la posibilidad de elegir la puerta premiada es $1/3$. Si no cambiamos solo tenemos $1/3$ de posibilidades de ganar y $2/3$ de perder. Si, por el contrario, cambio de puerta, la probabilidad de ganar será la misma que elegir inicialmente la puerta sin premio, es decir $2/3$.

Solución intuitiva 2

Consideramos, en primer lugar, el experimento "puerta que tiene el premio" (cada puerta tiene probabilidad $1/3$). A continuación, consideramos la puerta que se elige ($1/3$ cada puerta). Estos dos primeros experimentos son independientes. El tercer experimento es la puerta que abre el locutor, que es dependiente de los anteriores (Figura 1).

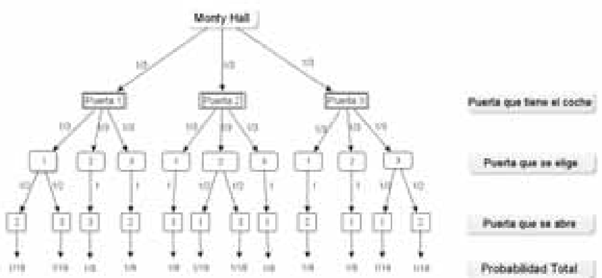


Figura 1: Diagrama de árbol ilustrando el juego

Observamos que si no cambiamos de puerta, sumando las probabilidades de todas las ramas del árbol (elegir puerta 1 si el coche está en la 1; elegir puerta 2, si el coche está en la puerta 2 y elegir puerta 3 si el coche está en la 3), las posibilidades de ganar son de $1/3$. Cada uno de estos sucesos compuestos tiene probabilidad $1/9$.

Suponemos que cambiamos. Si escogemos una puerta con una cabra, el presentador muestra la otra cabra. Cambiamos (a la puerta que tiene el coche) y ganamos. Por ejemplo, si estando el coche en la puerta 1, elegimos la puerta 2, el presentador nos muestra la puerta 3 y sólo podemos cambiar a la 1, que es la que tiene el coche. Este suceso tiene probabilidad $1/9$. Lo mismo ocurriría si estando el coche en la puerta 1, elegimos la 3.

Si elegimos la puerta con coche, el presentador nos muestra una de las dos puertas que tiene la cabra. Si estando el coche en la puerta 1, elegimos la puerta 1, el presentador te abre bien la puerta 2 o la 3, cada una de ellas con probabilidad $1/18$, en total $1/9$. Si cambiamos de puerta perdemos con probabilidad $1/9$. Como hay tres puertas, la probabilidad total de ganar cambiando sería $2/3$ y la de perder cambiando sería $1/3$.

Solución experimental

El trabajo de los alumnos con el *applet*, experimentando con el juego, proporciona a los estudiantes una experiencia intuitiva sobre los resultados que se obtienen en este juego con cada una de las dos estrategias, cambiar o no cambiar de puerta. Partiendo de la evidencia de estos resultados, claramente se observa experimentalmente que las posibilidades de ganar el juego son el doble al cambiar la puerta. El alumno ve sus intuiciones contradichas. Es decir, se produce un conflicto cognitivo y al tratar de resolverlo, eventualmente, puede llegar a uno de los razonamientos intuitivos mostrados anteriormente.

Teniendo en cuenta que los resultados son aleatorios, deberíamos realizar el juego un número de veces considerable para que los resultados se ajusten a la solución del problema, pero el ordenador permite un gran número de simulaciones rápidamente. El *applet* nos proporciona una solución experimental sobre cuál es la estrategia ganadora, pero no nos explica la razón de por qué una estrategia es preferible a la otra. Será necesario que el profesor trate de reconducir al estudiante a una de las soluciones intuitivas anteriores o las formales, que se presentan a continuación.

Solución formal 1

La solución formal de este problema utiliza las propiedades de la probabilidad condicionada, que es un objeto cuya definición es sencilla de entender pero difícil de aplicar. Para llegar a la solución definimos los siguientes sucesos:

A: El jugador selecciona la puerta que contiene el coche en su selección inicial.
B: El jugador selecciona una puerta que contiene una cabra en su selección inicial.
G: El jugador gana el coche.

Estamos interesados en calcular $P(G)$ para cada tipo de jugador, el que cambia de puerta y el que no cambia. Para calcular $P(G)$, basta con notar que $G=(G\cap A)\cup(G\cap B)$, ya que $G\cap B=\emptyset$ y $A\cap B=\Omega$. Esto es equivalente a decir que $\{A, B\}$ es una partición de Ω, siendo Ω el espacio muestral del experimento; por tanto, aplicando el axioma de la unión de probabilidades.

$$P(G)=P((G\cap A)\cup(G\cap B))=P(G\cap A)+P(G\cap B)=$$
$$=P(G|A)P(A)+P(G|B)P(B)$$

Por aplicación de la regla de Laplace: $P(A)=\frac{1}{3}$ y $P(B)=\frac{2}{3}$ pues hay un coche y dos cabras. Finalmente, tenemos que calcular la probabilidad de ganar de cada tipo de jugador:

Jugador que nunca cambia: En este caso $P(G|A)=1$ y $P(G|B)=0$ Por lo tanto, $P(G)=\frac{1}{3}$.

Jugador que siempre cambia: En este caso $P(G|A)=0$ y $P(G|B)=1$ Por donde, $P(G)=\frac{2}{3}$.

Solución formal 2

Sea $\xi: (\Omega,P)\rightarrow\{1,2,3\}$ la variable aleatoria que asigna un número de puerta (aquella detrás de la cual se encuentra el coche). Esta variable aleatoria tiene distribución discreta uniforme (es decir todos los valores son equiprobables) y son estocásticamente independientes.

Sea $\phi: (\Omega'', P'')\rightarrow\{n\}$ la variable aleatoria número de la puerta que abre el presentador y que dependerá de las anteriores. Si $\eta=\xi$ (el concursante elige el coche), entonces hay dos posibles valores con probabilidad $\frac{1}{2}$ (los números de las dos puertas no elegidas por el concursante). En caso contrario, sólo hay un valor, con probabilidad 1 (el número de la puerta sin coche). La probabilidad que el concursante se lleve el coche bajo el supuesto que él no cambia de puerta es entonces $P(\eta=\xi)=\frac{1}{3}$. La probabilidad que el candidato se lleve el coche bajo el supuesto que él cambia de puerta es entonces $P(\eta\neq\xi)=\frac{2}{3}$.

Objetos matemáticos puestos en juego

Presentadas algunas soluciones (intuitivas, experimentales y formales), analizaremos la actividad matemática realizada en estas soluciones recurriendo al marco teórico desarrollado en Godino (2002) y Godino, Batanero y Font (2007). Los autores describen diferentes categorías en los objetos ligados a las prácticas matemáticas, que pueden ser previos (si el alumno los conocía ya) o emergentes (si los aprende durante la práctica):

Situaciones-problemas: aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, problemas, acciones que inducen una actividad matemática. En nuestro caso el problema es la búsqueda de una estrategia óptima en el juego de Monty Hall.

Lenguajes: cualquier forma de representar los objetos matemáticos. En las soluciones analizadas hemos usado diagramas en árbol, símbolos, palabras. En la solución experimental también usamos el lenguaje gráfico e icónico.

Conceptos-definición: en las prácticas que llevan a cabo los estudiantes para resolver un problema matemático se usan implícita o explícitamente conceptos matemáticos, de los cuáles el alumno ha de recordar o aplicar la definición. Por ejemplo, los estudiantes usarán implícitamente o explícitamente los objetos: aleatoriedad, espacio muestral, suceso, probabilidad simple, probabilidad condicional, probabilidad conjunta, independencia, frecuencia relativa.

Proposiciones o enunciados sobre relaciones o propiedades de los conceptos que igualmente se han de emplear al resolver problemas matemáticos. Por ejemplo, cuando los estudiantes tienen que recordar que la suma de probabilidades en el espacio muestral es igual a la unidad. En la solución experimental se usaría la ley de los grandes números.

Procedimientos: en nuestro caso, usamos la regla de Laplace, regla del producto y regla de la suma de probabilidades, enumeración de sucesos, construcción del diagrama en árbol, operaciones aritméticas, ejecutar el *applet* y comparar frecuencias.

Argumentos: son los enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos o bien la solución de los problemas.

Al resolver matemáticamente el juego mediante las soluciones anteriores se utilizan los objetos matemáticos que se muestran en la Tabla 1. Observamos que, dependiendo de la solución, se puede usar una configuración diferente de objetos matemáticos, siendo más complejas las soluciones formales, especialmente la segunda que involucra la idea de variable aleatoria. Tanto el juego como el tipo de solución determinan el trabajo matemático que se hace en la clase. Ello hace que se pueda trabajar a diversos niveles de profundidad, dependiendo del tipo de estudiante.

Tipo	Objetos matemáticos en la situación	Significado en la situación	Sol. Int. 1	Sol. Int. 2	Sol. Exp.	Sol. For. 1	Sol. For. 2
Problema	Elección de la puerta	Determinar la estrategia que da mayor número de éxitos	X	X	X	X	X
Lenguaje	Verbal	Explicación de la situación	X	X	X	X	X
	Gráfico	Diagrama en árbol Representación icónica del juego	X	X			
	Simbólico	Expresión de sucesos y probabilidades				X	X
	Numérico: Probabilidades	Probabilidades de cada suceso	X	X		X	X
	Numérico: Frecuencias	Resultados del experimento			X		
	Icónico	Iconos que representan los sucesos y resultados			X		
Conceptos-Definición	Experimento aleatorio	Elegir una puerta Puerta que abre el locutor Ganar el premio	X X X	X X X	X X X	X X X	X X X
	Sucesos; espacio muestral	Puertas 1, 2, 3 Ganar/no ganar	X X	X X	X X	X X	X X
	Experimento compuesto	Composición de los experimentos anteriores	X	X	X	X	X
	Sucesos en el experimento compuesto	Producto cartesiano de los espacios muestrales anteriores	X	X	X	X	X
	Frecuencia relativa	Exitos / número experimentos			X		
	Convergencia	Tendencia de la frecuencia a la probabilidad			X		
	Intersección de sucesos	Parte común de un conjunto de sucesos				X	
	Unión de sucesos	Conjunto que contiene los sucesos de uno u otro conjunto				X	
	Suceso imposible	Intersección de un suceso y su complementario				X	
	Probabilidad clásica	Proporción de casos favorables a posibles	X	X		X	X
	Probabilidad frecuencial	Límite de la frecuencia			X		
	Axiomas probabilidad	Explicitación de los axiomas				X	X
	Probabilidad condicional	Proporción de cada suceso respecto al total de veces que ha ocurrido otro suceso	X	X	X	X	X
	Regla de la suma	Probabilidad de ganar el coche	X	X		X	X
	Regla del producto	Probabilidad conjunta; dependencia	X	X		X	X
	Variable aleatoria	Número de la puerta en la que está el premio Número de puerta elegida					X
	Igualdad de variables aleatorias	Coincidencia de valores; acierto					X
	Distribución discreta uniforme	Conjunto de valores con sus probabilidades					X
	Variables aleatorias independientes	La distribución de una no depende de la de la otra					X

Tipo	Objetos matemáticos en la situación	Significado en la situación	Sol. Int. 1	Sol. Int. 2	Sol. Exp.	Sol. For. 1	Sol. For. 2
Procedi-mientos	Cálculo de probabilidades intuitivo	Aplicar reglas de cálculo intuitivo	X	X			
	Cálculo de probabilidades formal	Aplicar reglas de cálculo formal				X	X
	Cálculo de probabilidad frecuencias	Estimar la probabilidad mediante la frecuencia			X		
	Representación gráfica	Construcción del diagrama en árbol	X	X			
Proposi-ciones	Relación entre probabilidad condicionada y simple	Restricción del espacio muestral	X	X		X	X
	La frecuencia converge a la probabilidad	Ley empírica de los grandes números			X		
	Teorema probabilidad total	Aplicar a la situación				X	
	Axioma de unión	La probabilidad de la suma es suma de probabilidades	X	X		X	X
Argu-mentos	Razonamiento deductivo	Demostración de la solución	X	X		X	X
	Razonamiento empírico	Comparar aciertos con distintas estrategias			X		

Tabla 1. Configuraciones epistémicas en las soluciones

Dificultades posibles de los estudiantes

La complejidad del problema, aparentemente simple, se muestra en el análisis realizado de objetos matemáticos y de procesos. También en la literatura relacionada con este problema se han descrito varias soluciones erróneas, relacionadas con una deficiente intuición sobre la probabilidad, que comentamos a continuación. Estas soluciones pueden ser debidas a errores en el proceso de representación-interpretación (conflictos semióticos) o bien a la atribución de propiedades que no tienen ciertos objetos o situaciones, como vemos en los casos que siguen.

Razonamiento erróneo 1. Percepción de la independencia

Un primer problema se produce porque *no se percibe la dependencia de los sucesivos experimentos*. Es decir, o no se comprende la estructura del experimento compuesto o se suponen los sucesivos experimentos independientes, habiendo un conflicto consistente en atribuir una propiedad (independencia) que no tienen los experimentos. Pensamos que esto es un conflicto semiótico pues no se ha interpretado correctamente la descripción verbal del experimento, ha habido un fallo de interpretación de esta descripción verbal, que no es más que la representación del experimento real.

A primera vista parece obvio que da igual cambiar de puerta o no, pues no se visualiza la forma en que la información proporcionada por el locutor afecta a la probabilidad inicial de obtener un premio que, sin esta información, es ⅓. De nuevo hay un fallo en percibir una propiedad: se puede condicionar un suceso por otro que aparece antes o después de él y este condicionamiento puede cambiar la probabilidad inicial del suceso.

Este error de razonamiento es explicado mediante la “falacia del eje temporal” descrita por Falk (1986), que consiste en que las personas creen erróneamente que una información actual (la puerta mostrada por el locutor) no puede afectar a un suceso que ocurrió con anterioridad a la misma (en qué puerta estaba el premio). Esta falacia puede estar causada, en parte, por la confusión entre condicionamiento y causalidad (nuevo conflicto semiótico al confundir entre sí dos conceptos diferentes).

Desde el punto de vista de la probabilidad, si un suceso A es la causa estricta de un suceso B, siempre que suceda A, sucederá B, por lo que $P(B|A) = 1$. Donde, si un suceso A es causa de otro suceso B, entonces B es dependiente de A, pero el contrario no siempre se cumple. Según Falk (1986), un suceso B puede ser dependiente de otro suceso A sin que uno sea la causa del otro. Por ejemplo, se sabe que el cáncer de pulmón depende del hábito de fumar; pero fumar en si mismo no es siempre la causa del cáncer.

Razonamiento erróneo 2. Incorrecta percepción del espacio muestral

Otra posibilidad de error en este problema es una incorrecta enumeración del espacio muestral en uno o varios de los experimentos que intervienen. Es decir, habría un fallo en pasar de la idea espacio muestral (intensivo) al espacio muestral concreto (extensivo). La intuición nos dice que, una vez elegida la puerta, y quitando la puerta que abre el locutor, que nunca tiene premio, sólo quedan dos posibilidades equiprobables. Por tanto, la puerta que nosotros escogimos tiene un 50% de probabilidad de tener una cabra, donde da igual cambiar que no hacerlo. En este razonamiento se está realizando una incorrecta enumeración del espacio muestral al calcular la probabilidad condicionada, otro sesgo descrito por Gras y Totohasina (1995).

El problema radica en que estamos cometiendo un error en este planteamiento y es que no consideramos la información disponible de que "el presentador conoce donde está el premio". Ya que el presentador abre la puerta *después* de la elección de jugador, la elección del jugador afecta a la puerta que abre el presentador, por tanto el espacio muestral en el segundo experimento depende del resultado del primero.

Si el jugador escoge en su primera opción la puerta que contiene el coche (con una probabilidad de ⅓), entonces el presentador puede abrir cualquiera de las dos puertas restantes. El espacio muestral tiene dos posibilidades con probabilidad ½. Además, el jugador pierde el coche si cambia cuando se le ofrece la oportunidad.

Pero, si el jugador escoge una cabra en su primera opción (con una probabilidad de ⅔), el presentador *sólo* tiene la opción de abrir una puerta, y esta es la única puerta restante que contiene una cabra. En ese caso, el espacio muestral tiene un solo elemento, la puerta restante *tiene* que contener el coche, por lo que cambiando lo gana.

Razonamiento erróneo 3. Incorrecta asignación inicial de probabilidades

Otra solución incorrecta se obtiene de la siguiente interpretación, que es una variante de la anterior: una vez que el presentador escoge la puerta, la probabilidad que el candidato se lleve el coche (en el caso de no cambiar de puerta) es ½ pues el coche ha de estar en una de las puertas no abiertas. El razonamiento erróneo se debe a incorrecta aplicación de la regla de la suma de probabilidades.

Esto sucede porque lo que muestra el presentador no afecta a la elección original, sino sólo a las otras dos puertas no escogidas. Una vez se abre una puerta y se muestra la cabra, esa puerta tiene una probabilidad de 0 de contener un coche, por lo que deja de tenerse en cuenta. Si el conjunto de esta puerta más la que no has elegido tenían una probabilidad de contener el coche de ⅔ en el experimento inicial (elegir la puerta), entonces, si la puerta abierta tiene probabilidad de 0 en el segundo experimento (que la puerta tenga el coche), la puerta no elegida ni abierta debe tener una probabilidad de ⅔. Es decir, la probabilidad de ⅔ se traspasa entera a la puerta no escogida ni abierta por el locutor (en lugar de dividirse entre las dos puertas sin abrir), porque en ningún caso puede el presentador abrir la puerta escogida inicialmente.

Razonamiento erróneo 4. Interpretación incorrecta de la convergencia

Podría originarse una reafirmación en la creencia de que es indiferente cambiar o no de puerta si, al experimental con el *applet*, el alumno obtiene (debido a la aleatoriedad) un resultado parecido con las dos estrategias.

Esta posibilidad es mayor cuando el número de experimentos que se hagan con el *applet* sea pequeño, pues la convergencia de las frecuencias relativas a la probabilidad se cumple a largo plazo, pero no en pequeñas series de ensayos.

Si el alumno obtiene este resultado, podría llegar a admitir que su suposición inicial era correcta. Habría acá el peligro de que se reafirme en la "creencia en la ley de los pequeños números" (Tversky y Kahneman, 1982), que consiste en esperar convergencia en pequeñas series de experimentos.

> *El juego, que no tiene una solución inmediata, puede utilizarse en la formación de profesores y en la enseñanza de la probabilidad condicional y de la probabilidad simple*

Conclusiones

En este trabajo hemos hecho algunos análisis didácticos de una posible situación de enseñanza de la probabilidad, el juego de Monty Hall, que está basado en una paradoja de Bertrand (1888). El juego, que no tiene una solución inmediata, puede utilizarse en la formación de profesores y en la enseñanza de la probabilidad condicional y de la probabilidad simple. Su solución ilustra algunos principios básicos, incluidos en los axiomas de Kolmogorov, así como la construcción del espacio muestral en experimentos dependientes y los conceptos de dependencia e independencia.

En el trabajo en el aula, se plantearía el problema, dejando un tiempo para que los estudiantes lleguen a una posible solución. Seguidamente se discutirían con los estudiantes las soluciones correctas e incorrectas encontradas por los mismos, hasta lograr que se acepte alguna de las correctas. El profesor ayudaría a analizar las causas de los errores y haría un resumen de lo aprendido. En caso de resistencia a la solución, se dejaría confrontar las soluciones con la evidencia empírica producida por el *applet* para que los estudiantes comprendan las causas de sus intuiciones erróneas y las revisen.

Pensamos que en este juego se dan las condiciones de idoneidad didáctica, que Godino, Wilhelmi y Bencomo (2005) definen como la articulación de seis componentes:

Idoneidad epistémica o matemática: representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia. El proceso descrito podría ser idóneo para el estudio de los conceptos de: probabilidad condicional, experimento compuesto, dependencia e independencia y experimentos dependientes e independientes; pero esta idoneidad depende del tipo de solución encontrada. En general las soluciones formales tienen mayor idoneidad en un curso universitario y de formación de profesores, pero en un curso de secundaria las soluciones intuitivas podrían ser suficientes. La solución empírica, tiene, en general, baja idoneidad matemática, a menos que se complemente con una solución intuitiva o formal.

En los cursos de formación de profesores, el análisis didáctico, similar al descrito, sirve para aumentar el conocimiento de los profesores sobre probabilidad, metodología de la enseñanza de la probabilidad y algunos razonamientos erróneos de los estudiantes

Idoneidad cognitiva: grado en que los significados pretendidos/ implementados son asequibles a los alumnos, así como si los significados personales logrados por los alumnos son los pretendidos por el profesor. La situación planteada tiene suficiente idoneidad en cursos de formación de profesores de secundaria y los últimos cursos de secundaria, pues los razonamientos descritos están al alcance de los alumnos.

Idoneidad interaccional: grado en que la organización de la enseñanza permite identificar conflictos semióticos y resolverlos durante el proceso de instrucción. Este tipo de idoneidad dependerá de cómo organiza el profesor el trabajo en el aula. Será importante que los estudiantes trabajen en grupos para que surja el conflicto y se explicite. Será importante también organizar una discusión colectiva de las soluciones para que los mismos alumnos ayuden a sus compañeros a detectar los puntos equivocados.

Idoneidad mediacional: disponibilidad y adecuación de los recursos necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. No se precisa de muchos recursos, pues incluso podría hacerse una simulación con objetos físicos o con un solo ordenador en el aula, donde los alumnos pueden jugar colectivamente.

Idoneidad emocional: interés y motivación del alumnado en el proceso de estudio. Pensamos que esta es la más alta de todas, pues el juego interesa a todo el que trata de resolverlo.

En los cursos de formación de profesores, el análisis didáctico, similar al descrito, sirve para aumentar el conocimiento de los profesores sobre probabilidad, metodología de la enseñanza de la probabilidad y algunos razonamientos erróneos de los estudiantes. Se podría mejorar el proceso si se dispone de soluciones dadas por alumnos reales que los profesores puedan analizar para detectar los errores descritos. ■

Este trabajo forma parte del proyecto SEJ2007-60110 (MEC- FEDER) y beca FPI BES-2008-003573

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bertrand, J. (1888). *Calcul des probabilités*, Paris: Gauthier Villars.

Bohl, A. H., Liberatore, M. J. Y Nydick, R. L. (1995). A tale of two goats and a car, or the importance of assumptions in problem solutions, *Journal of Recreational Mathematics*, 1-9.

Díaz, C. y De La Fuente, I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística, *Epsilon*, 59, 245-260.

Falk, R. (1986). Conditional Probabilities: insights and difficulties, En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*. (pp. 292-297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

Gardner, M. (1959). Mathematical games. *Scientific American*, 219, 180-182.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática, *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 22 (2 y 3), 237-284.

Godino, J. D., Batanero, C. Y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education, *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Font, V. Y Wilhelmi, M. R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico, *Publicaciones*, 38, 25-48.

Godino, J., Wilhelmi, M. R. y Bencomo, D. (2005). <Suitability criteria of a mathematical instruction process. A teaching experience of the function notion, *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 4(2), 1-26.

Gras, R. y Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(1), 49-95

Selvin, S. (1975a). A problem in probability, *American Statistician* 29(1), 67.

Selvin, S. (1975b). On the Monty Hall problem, A*merican Statistician* 29(3), 134.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases, En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 3-20). Cambridge: Cambridge University Press.

suma+ 62
Noviembre 2009, pp. 19-24

Matemáticas de cine: una propuesta innovadora

En este artículo presentamos "Matemáticas de Cine", una propuesta educativa que pretende contribuir en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas mediante una dinámica innovadora, y que sus autores llevamos trabajando durante varios años. En diciembre de 2008, la Dirección General de Innovación y Calidad Educativa de esta Conselleria otorgaba a nuestro proyecto el primer premio de la Comunidad Valenciana a materiales didácticos en la modalidad cientificotecnológica.

This article presents "Maths in Cinema", an educational proposal that aims to contribute in the process of teaching and learning mathematics by means of an innovative dynamic, whose authors have been working for several years. In December 2008, the General Directorate for Educational Innovation of this Regional Council attached to our project the first prize of the Valencian Community to teaching materials in the scientific and technological modality.

Introducción

El Cine es, sin duda alguna, una poderosa herramienta cautivadora que llega a millones de espectadores de todas las edades y formas de pensamiento. Es por esto por lo que muchas disciplinas han utilizado el cine para divulgar sus contenidos, por la ayuda que presta este medio para formar y trasmitir, y la facilidad con la que permite motivar, gracias al gran poder de atracción, e incluso seducción, que tiene la gran pantalla y la posibilidad de atender a la gran diversidad de público.

En este sentido ya son varios los talleres y proyectos sobre Matemática y Cine que se han desarrollado en los últimos años, organizando ciclos de películas que han culminado con el estudio de los contenidos matemáticos que en ellas podían encontrarse, entonces… ¿Qué tiene de innovador nuestro proyecto?

Nuestro proyecto no visualiza películas, ni organiza ciclos, ni estudia documentales. La edición de video en particular y las nuevas tecnologías en general, nos permiten trabajar sobre escenas e imágenes relacionadas con las Matemáticas, aunque de duración muy breve (de unos pocos minutos muchas de ellas) que podemos descubrir en las películas, series, anuncios, documentales, etc. Una vez seleccionadas las escenas se vuelven a montar creando "nuestra propia película", dándonos la posibilidad de proyectar a nuestro alumnado, en formato de cine, una recopilación de escenas con los contenidos curriculares específicos que queremos trabajar.

El proyecto que hemos desarrollado, se ha centrado en la selección de escenas y propuesta de actividades para 2º curso de secundaria, concretamente para el bloque de números. Aunque bien es cierto que este proyecto podría tener continuidad para los otros bloques de segundo curso e incluso para el resto de cursos de secundaria.

De este modo, y dependiendo de la actividad, hemos seleccionado y recopilado escenas en las que los protagonistas proponen problemas que los alumnos y alumnas tendrán que resolver; escenas que presentan una idea matemática que motivará la explicación de un concepto o procedimiento matemático perteneciente al currículo; otras en las que se trabajan distintos objetivos generales del área… Cada montaje va acompañado de material audiovisual y material escrito donde se presentan los ejercicios relacionados y se guía el trabajo a realizar.

Grupo Cinemat de Valencia
Mª Carmen Raga Benedicto
Sección del IES Federica Montseny. Burjassot (Valencia)
Agustín Muedra Jornet
IES Massamagrell. Massamagrell (Valencia)
José Luis Requena Sala
IES Almussafes. Almussafes (Valencia)

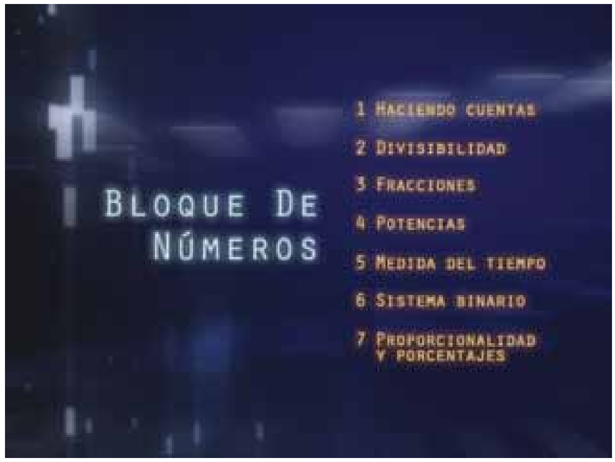
El proyecto

La realización de "Matemáticas de cine" incluía la elaboración de una guía didáctica, audiovisual y escrita, para el profesorado, con orientaciones sobre los objetivos, las competencias, los contenidos, su distribución en bloques y unidades didácticas, la temporalización, la metodología, la evaluación y la bibliografía; un material escrito para el alumnado, donde se presentan las actividades propuestas, y cómo no, la recopilación de las escenas seleccionadas, junto con las actividades correspondientes, plasmadas en dos DVD para llevar al aula como alternativa y complemento del libro de texto y de tan rápida y fácil utilización como éste.

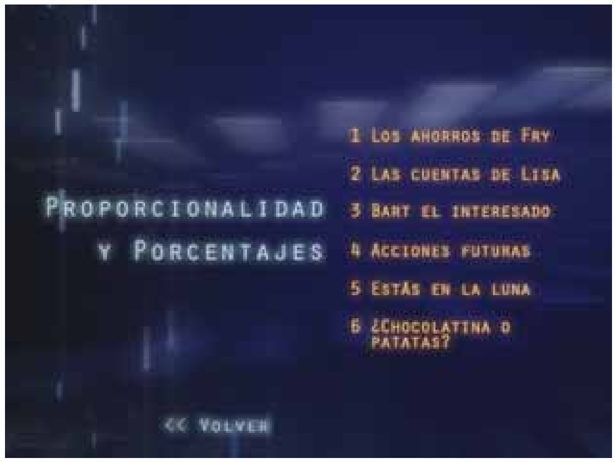
Este material ha sido utilizado como complemento al libro de texto durante los dos últimos cursos para el nivel de 2º de Secundaria; además nos ha servido como material de refuerzo y de ampliación para otros cursos (3º y 4º). Es por esto por lo que podemos afirmar que se adecua al currículum de referencia y que, sin duda alguna, atiende a la diversidad de motivaciones, intereses y capacidades del alumnado.

Todas las actividades presentadas se han llevado al aula, lo cual nos ha permitido evaluar nuestro trabajo, haciendo los cambios oportunos tanto en el material audiovisual como en el material escrito.

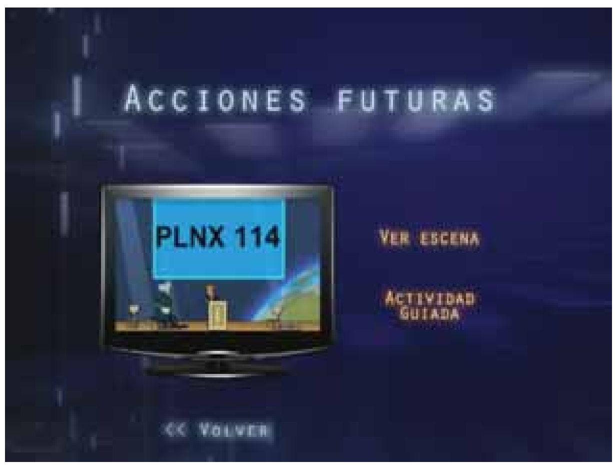
En los DVD se recogen las escenas seleccionadas, ordenadas por contenido, como muestra uno de los menús del primer DVD, correspondiente al bloque de números.



Una vez seleccionado el contenido que deseamos trabajar, se muestra en pantalla otro menú con las diferentes actividades propuestas. En la imagen podemos ver el menú correspondiente a proporcionalidad y porcentajes.



Cuando accedemos a la actividad a trabajar, "Acciones futuras" en la imagen, podremos visualizar la escena de video y posteriormente la actividad guiada.



En el *Libro del profesor* se recogen las orientaciones didácticas correspondientes a esta actividad y en el *Libro del alumno* se muestran las cuestiones que se plantean.

Las actividades

Veamos cómo llevamos al aula, y a modo de ejemplo, tres escenas que plantean diferentes tipos de actividades.

La primera escena corresponde a la película ***Granujas de medio pelo*** (*Small Time Crooks*, Woody Allen, EE.UU., 2000). En ella, Ray Wrinkler (Woody Allen) y sus tres compinches discuten sobre cómo deben repartirse 2 millones de dólares. Frenchy, la mujer de Ray, hace de tapadera de la banda, y también debería tomar parte del botín. Aparece entonces esta discusión:

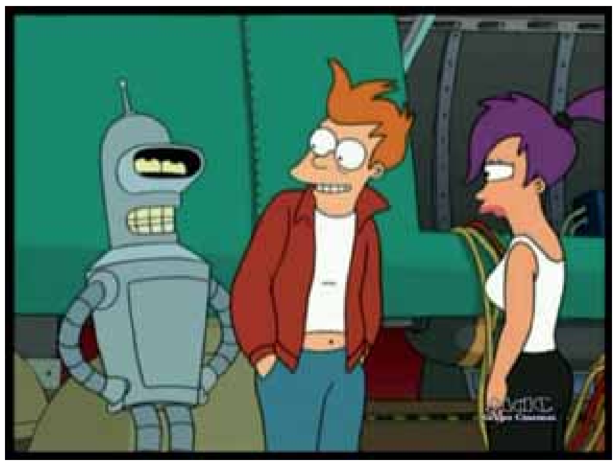
- Que cobre una parte (refiriéndose a Frenchy), pero no una parte entera.
- ¿Qué tal si todos cobramos un cuarto y ella, digamos, un tercio?
- Tú estás "chinao"; entonces cobraría más que nosotros.
- ¿Cómo lo sabes?
- Además, ¿De dónde sacas cuatro cuartos y un tercio? ¿No sabes sumar?
- Mira, yo en quebrados no me meto, ¿vale?

Este bonito guiño nos permite utilizarlo para introducir la unidad de fracciones y motivar al alumnado para su desarrollo. Las cuestiones que se plantean a los alumnos y alumnas son las siguientes

Actividades

1.- Analiza la frase *"entonces cobraría más que nosotros".*
2.- Contesta a la pregunta ¿De dónde sacas cuatro cuartos y un tercio? ¿Sabes sumar fracciones?
3.- ¿Qué parte debería llevarse cada uno? Realiza los cálculos teniendo en cuenta que los cinco deben recibir lo mismo.
4.- ¿Qué parte debería llevarse cada uno si Frenchy recibe una cantidad inferior?

La siguiente escena corresponde a la primera temporada de la serie de animación ***Futurama*** (M. Groening, M. X. Cohen, EE.UU., 1999), concretamente al capítulo "Yo compañero de piso". Bender (el robot) comparte su piso con Fry (uno de los protagonistas principales de la serie), quien, debido al reducido espacio del mismo, decide marcharse de su casa. Mantienen entonces la siguiente conversación:



Fry: Me voy de tu casa.
Bender: ¿Qué?
Fry: Lo siento Bender, no hay espacio suficiente.
Bender: ¿Que no hay espacio? Mi casa mide dos metros cúbicos y sólo ocupamos uno y medio o poco más, ¡Aún sobra sitio para dos tercios de un hombre!

Esta es una escena adecuada para proyectarla una vez terminada la unidad de fracciones. Aquí se utiliza la fracción como operador y permite plantear cuestiones relacionadas con este concepto.

Actividades

1.- ¿Qué volumen ocupa un hombre?
2.- ¿Ocupa lo mismo que un robot?

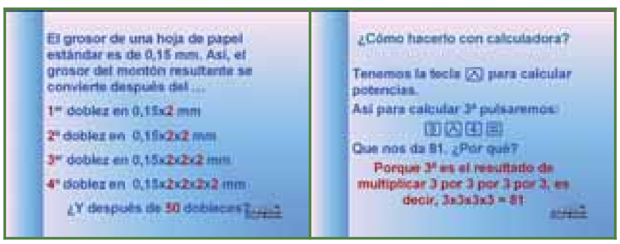
Por último, presentamos una escena de la primera temporada de la serie ***Numb3rs*** (Leslie Linda Glatter, EE.UU., 2005), la cual trata sobre un agente del FBI, Don Eppes (Rob Morrow), que recluta a su hermano Charlie (David Krumholtz), un brillante genio profesor de matemáticas, para que le ayude en la agencia. Charlie, con el uso de la ciencia matemática, ayudará al departamento del FBI a resolver los crímenes más actuales de la ciudad de Los Ángeles.

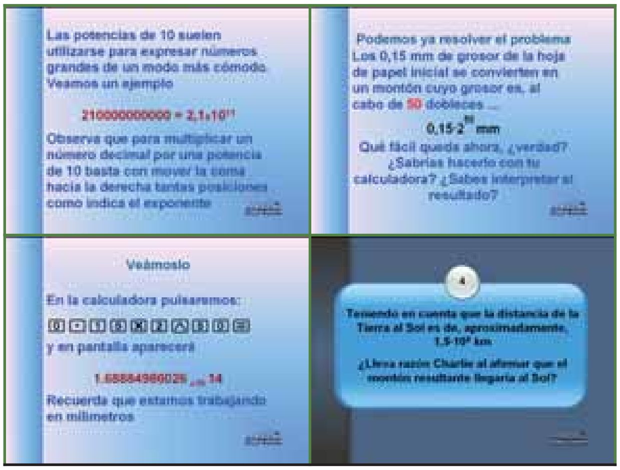
En este capítulo, "Crisis de Identidad", Charlie intenta explicar cómo ha procedido un estafador, que sigue un esquema piramidal, utilizando como ejemplo un curioso problema de matemáticas, en el cual se calcula la altura que se puede conseguir doblando sucesivamente un papel. Charlie comenta:

He doblado este papel dos veces; ahora es cuatro veces más grueso que antes. Si elevásemos los dobleces a la quincuagésima potencia, ¿Qué altura tendría el montón de papel resultante? ... Tan grande que llegaría al Sol

En las transparencias digitales que se muestran en el DVD se analiza el problema guiando a los alumnos y alumnas para tratar de resolverlo.

En ellas se recuerda el concepto de potencia, mostrando al mismo tiempo cómo pueden utilizar la calculadora para ayudarse en los cálculos. A continuación se explica cómo trabajar con notación científica y cómo se interpretan estos resultados en la calculadora.





Video Digital Educativo

Además de este tipo de actividades, motivadas por alguna escena del cine o la televisión, hemos querido ir más allá, y poner en práctica una actividad que, desde hacía tiempo, llevábamos en mente. Si ver cine abre todas estas posibilidades, hacer cine permite además que los alumnos y alumnas entren en contacto con el tratamiento de la información y competencia digital, lo que comporta hacer uso habitual de los recursos tecnológicos disponibles para resolver problemas reales de modo eficiente. Así el proyecto aborda también un nuevo concepto: el **video digital educativo**, realizado y protagonizado conjuntamente con alumnos y alumnas. Esta actividad consiste en la planificación, grabación, edición y producción de cortos de video dirigidos y realizados por el alumnado, en los que se muestran contenidos matemáticos y experiencias educativas de gran interés.

El hecho de que los propios alumnos y alumnas se conviertan en realizadores, guionistas, directores, actores, etc. resulta tremendamente atractivo y motivador. Además, el resultado de estos trabajos es absolutamente satisfactorio. La experiencia nos muestra que el alumnado alcanza una mayor profundidad en los temas de estudio. También contribuye a desarrollar en ellos otros aspectos, no menos importantes, como el manejo espacial de imágenes, la iluminación, composición, edición, lenguaje corporal, sintaxis,..., y cómo no, el trabajo en equipo.

Estos pequeños proyectos se han llevado a cabo dentro del bloque de geometría, por su mayor versatilidad desde el punto de vista práctico, aunque podría plantearse perfectamente en cualquier bloque del curso.

El procedimiento para la realización de estos vídeos, en nuestro caso, siguió la siguiente secuencia temporal, que podría tomarse como una pequeña guía para la elaboración de los vídeos. En cada una de las fases el profesor puede seguir más o menos de cerca el trabajo del alumnado, procurando siempre que avancen en sus tareas. También puede resultar interesante visualizar y analizar en el aula algún vídeo realizado por otros alumnos y alumnas (como los que presentamos aquí o los que pueden encontrarse en la red) con la finalidad de ofrecer ideas, que permitan encontrar un punto de partida.

Secuenciación para la realización del vídeo

- Se propone a nuestros alumnos y alumnas que **elijan**, por grupos de tres o cuatro componentes, un **tema o aplicación práctica** de los contenidos vistos en clase, con el objetivo de realizar un vídeo que desarrolle dicho tema. (También cabe la posibilidad de que sea el profesor quien proponga el tema a tratar).

- Decidido el tema, la siguiente fase será la de **documentación**. Se propone a los diferentes grupos de trabajo que busquen información al respecto desde diferentes fuentes: apuntes de clase, libro de texto, Internet, etc. Posteriormente deberán elaborar un resumen del tema que será utilizado como el audio del vídeo.

- El siguiente paso es el **diseño del vídeo digital**. Cada grupo debe decidir las tomas, encuadres, planos, detalles… que necesita grabar y en qué orden deben aparecer en el vídeo. También deben planificar la necesidad de imágenes fijas o pequeñas animaciones (realizadas la mayoría con sencillos programas como PowerPoint) que, de algún modo, apoyarán la narración. (Es importante que el resultado de esta fase sea revisado por el profesor, por si cabe la necesidad de realizar modificaciones).

- A continuación se pasa a la **grabación** del vídeo. Cada grupo, siguiendo el diseño realizado en la fase anterior, procede a la filmación de su película.

- La última fase es, posiblemente, la más laboriosa: la **edición y realización** de la película. Se concreta en el montaje de los videos (preferiblemente en el aula de informática). Seguramente, en este punto aparecerá la necesidad de explicar el funcionamiento de algún programa sencillo de edición de vídeo (WinDvd Creator o Windows Movie Maker). La experiencia nos dice que en una única sesión de clase, los alumnos y alumnas son capaces de manejar perfectamente el programa, y ya comienzan a recortar los clips de vídeo, añadir títulos o subtítulos, incluir imágenes fijas o animaciones, colocar transiciones. En una sesión posterior, se graba la narración, se coloca música de fondo y se da formato a la película.

- Por último, y a decisión del profesor, cabe la posibilidad de publicar los proyectos en Internet.

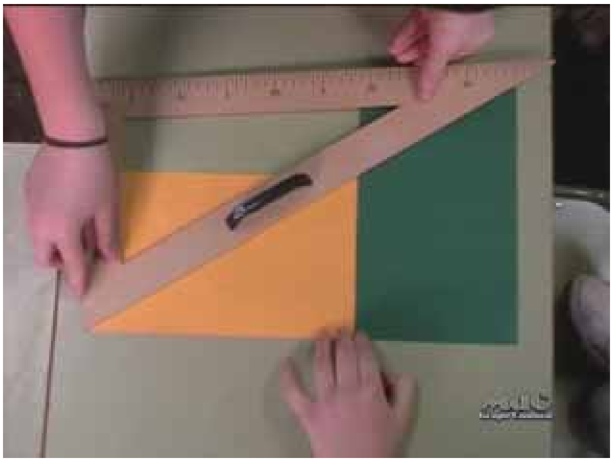
El resultado de varios de estos videos también ha sido incluido en "Matemáticas de Cine", en un segundo DVD, junto con otro material complementario: una propuesta de evaluación inicial y otra actividad sobre la educación para la igualdad de oportunidades entre sexos. La imagen adjunta corresponde al menú de este segundo DVD.

También es posible su visualización en la red.

Taller de geometría: este vídeo explica cómo medir distancias inaccesibles utilizando la semejanza de triángulos. El teorema de Tales nos da las claves para determinar esta semejanza. A partir de aquí será nuestro ingenio el que nos permita calcular estas distancias.

http://www.youtube.com/watch?v=V7Aqbd5BmSI

La forma de los rectángulos: ¿Cómo se diferencian los rectángulos? La respuesta está en la “forma” de los mismos, es decir, la razón entre sus lados. El vídeo muestra la forma de diferentes rectángulos que podemos encontrar a diario. Se analizan las características de dos rectángulos “con nombre”: el DIN-A4 y el rectángulo de oro.



http://www.youtube.com/watch?v=wJGXw4UweRY

suma+ 62
Noviembre 2009, pp. 25-34

Un análisis estadístico implicativo de los resultados de pruebas escritas de Matemáticas en alumnos de Educación Secundaria

En este artículo mostramos un Análisis Estadístico Implicativo de los resultados obtenidos por 39 estudiantes de Tercero de Educación Secundaria Obligatoria en pruebas escritas de matemáticas de los bloques de contenidos curriculares, realizadas a lo largo del curso académico. Los resultados manifiestan las implicaciones y las similaridades entre los resultados en las pruebas mediante la codificación de los datos de dos modos diferentes en la matriz de datos.

This article presents a Statistical Implicative Analysis of the results obtained by 39 students of Third of Compulsory Secondary Education in written maths questionnaires regarding the section of curricular contents, realized along the academic course. The results show the implication and the similarities among the results in the questionnaires through the coding the data in two different ways in the matrix data.

Las matemáticas están actualmente muy diversificadas y constituyen una poderosa herramienta que permite la comprensión conceptual y la modelización de gran número de fenómenos naturales, técnicos y sociales. Las matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) han de permitir a los estudiantes obtener la solvencia necesaria para poderse integrar en una sociedad altamente tecnificada y desarrollar capacidades como explorar, clasificar, analizar, generalizar, estimar, inferir, abstraer, argumentar o tomar decisiones.

La adquisición y desarrollo de actitudes positivas hacia las matemáticas están influenciadas por las concepciones respecto a éstas de la sociedad y por el entorno escolar en que se desarrollan. Como indican Rico et al. (2008), los conceptos y las estructuras matemáticas se generan como herramientas de organización mental, natural y social, siendo el sistema educativo el que realiza la organización de los conceptos e ideas para que puedan ser usados contextualmente por los individuos integrantes de la sociedad. Señalan Rico y colaboradores (p.8) que “la planificación, como competencia clave del profesor de matemáticas, demanda el desarrollo de capacidades específicas para identificar, organizar, seleccionar y priorizar los significados de los conceptos matemáticos mediante el análisis cuidadoso de su contenido, análisis necesario para establecer las expectativas de aprendizaje, previo al diseño de tareas y necesario para la elección de secuencias de actividades”.

En este estudio se presenta un análisis implicativo realizado sobre los resultados obtenidos por alumnos de tercer curso de ESO en pruebas escritas de evaluación de diferentes unidades temáticas, lo que puede usarse como una herramienta para la planificación y mejora instruccional en el proceso de enseñanza y aprendizaje en esta etapa de enseñanza secundaria. Se trata del estudio cuantitativo de un determinado desarrollo curricular de matemáticas que puede permitir a los profesores reflexionar sobre la secuenciación, programación y evaluación de contenidos. Posteriormente tendrá que ser implementada con la introducción de elementos de carácter cualitativo sobre la comprensión que desarrollan los estudiantes de los diferentes conceptos.

El Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria

La Ley Orgánica 2/2006 de Educación (LOE) establece que uno de los ejes centrales del sistema educativo es determinar la definición y organización de currículo. La LOE, en su capítulo III, entiende por currículo “el conjunto de objetivos, competencias básicas, contenidos, métodos pedagógicos y

Samuel David Bodí Pascual
CEFIRE de Alcoi

criterios de evaluación de cada una de las enseñanzas reguladas en la presente Ley" (p.17166). Por su parte, Rico (1997a) denota que el término genérico de currículo denomina cualquier tipo de actividad que planifique la formación, que en el caso de la Educación Secundaria ha de responder a cuestiones como qué es el conocimiento, qué es el aprendizaje, qué es la enseñanza o en qué consiste el conocimiento útil. La organización, planificación y desarrollo del currículo se establece a través de los contenidos, de la metodología, de los objetivos y de la evaluación del proceso (Rico, 1997b). Las directrices estipuladas en los documentos oficiales se concretan en los proyectos curriculares a través de estas componentes.

Las enseñanzas mínimas correspondientes a la ESO están organizadas en el Real Decreto 1631/2006. En este Decreto se definen las competencias básicas del currículo de secundaria como aquellos aprendizajes imprescindibles que deben desarrollar los estudiantes al finalizar esta etapa. La competencia matemática se concreta como la habilidad para utilizar y relacionar los números, las operaciones, los símbolos y razonamiento matemático, que permiten interpretar y producir elementos de la realidad e informaciones, argumentar y resolver problemas de la vida cotidiana, lo que posibilitará una disposición favorable, de seguridad, de confianza hacia la información y las situaciones, y su utilización en diferentes contextos.

El currículo de matemáticas de ESO para la Comunitat Valenciana, establecido en el Decreto 112/2007, incluye en todos los cursos un bloque de contenidos comunes de resolución de problemas como eje transversal de la actividad matemática, distribuyendo el resto de los contenidos en cinco bloques: *números, álgebra, geometría, funciones y gráficas y estadística y probabilidad*. En el currículo anterior, implantado en el Decreto 39/2002, también se hace referencia a la necesidad de la resolución de problemas, agrupando los bloques de contenidos en *aritmética y álgebra, geometría, análisis, estadística y probabilidad.* Los desarrollos que cada uno de estos currículos marcan en el tercer curso de la ESO son sustancialmente análogos. El Decreto del año 2007 incorpora la noción de competencia mientras que el del año 2002 se centra en los conceptos, procedimientos y actitudes.

Señalan Llinares et al. (2005) que la idea de competencia matemática aparece en diferentes propuestas curriculares, resaltándose la idea de la importancia de que los estudiantes aborden problemas que atañan a la vida cotidiana. En este estudio (p.32) se indica que "los diferentes significados dados al término *competencia matemática* como se refleja en las propuestas curriculares subrayan el hecho de que esta competencia se apoya en el desarrollo de ciertas *capacidades* como modelizar, generalizar o comunicar. Estas capacidades se pueden entender como diferentes dimensiones de la idea de competencia".

La concreción del currículo en la Programación Didáctica. El papel del profesor

Como apunta Fortuny (1990, p. 252) "el profesor se encuentra delante de sí con un diseño curricular base que debe desarrollar en sus clases cotidianas. Tiene que asegurar que sus alumnos alcancen unos objetivos terminales clasificados en hechos conceptuales, procedimientos, valores, actitudes y normas en un tiempo escolar determinado… En el desarrollo del proceso de enseñanza/aprendizaje intervienen entre otros los condicionantes de: a) Tiempo, b) Diferenciación, c) Tema, d) Lugar". La programación y planificación que ha de realizar el profesor exige la toma de decisiones que, según Fortuny (1990), han de ser ejecutivas, eficientes y estratégicas, y se llevan a cabo mediante la determinación de categorías de programación que incidirán en una mayor profundidad en unas unidades en detrimento de otras.

El profesor ha de tomar decisiones en aspectos como la programación y secuenciación de contenidos, la organización y control en el aula, el proceso de construcción del conocimiento y la adquisición de significados por los estudiantes, tratando los errores apreciados en el proceso de enseñanza y la evaluación de los logros alcanzados por los alumnos (Parcerisa, 1996; Rico, 1997b; Marín, 1997). Los componentes del currículo (contenidos, metodología, objetivos y evaluación) determinan el nivel de planificación de la materia, teniendo el profesor que concretar el desarrollo curricular en cada bloque de contenidos y en las unidades didácticas.

Esta investigación de carácter implicativo con alumnos de tercer curso de ESO puede ayudar a los profesores en el análisis crítico, en la reflexión, en la planificación de la programación y en la secuenciación de las diferentes unidades didácticas a través de los resultados del análisis de similaridad y de las implicaciones que aparecen.

La selección de los contenidos para su aprendizaje en el aula se encuentra condicionada por la funcionalidad didáctica, por el desarrollo de las diferentes capacidades, por la relevancia social y cultural o por la significatividad psicológica. El profesor de matemáticas tiene que decidir las estructuras conceptuales que quiere que los alumnos adquieran, los elementos que han de organizar el currículo, los conocimientos previos que tienen los estudiantes o el contexto de aplicación de los contenidos, destacando su relevancia desde una perspectiva fenomenológica y la caracterización de los obstáculos epistemológicos. Es importante que el profesor plasme en los documentos no solo los contenidos, sino también el modelo de enseñanza que va a seguir para la aplicación en el aula (Llinares, 1994). Otro aspecto a priorizar por el docente es categorizar las características de las tareas en torno a un determinado tópico matemático que permitan su evaluación, diseño y elección para ser utilizadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje (García y Llinares, 1994).

Afirman Monereo et al. (1999, p.52) que “se tendrá que ofrecer a los profesores instrumentos de interpretación y análisis de la situación en la que se desarrolla su actividad, que les permitan tomar decisiones respecto a su actuación como aprendices y como docentes estratégicos”.

Desde esta perspectiva, asumimos el papel del profesor como agente activo de la construcción del conocimiento y de su propia práctica. Una concepción constructivista del aprendizaje y de la intervención pedagógica se plantea las concepciones y actitudes de los profesores sobre lo que supone enseñar y aprender (Hewson y Hewson, 1987), en la explicitación, en la toma de conciencia y en la evolución para su transformación. Investigaciones como las de Copello y Sanmartí (2001) o Jiménez y Wamba (2004) inciden en el modelo reflexivo de profesor para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje. El conocimiento alcanzado a través de la reflexión permite caracterizar parte del conocimiento práctico adquirido de la teoría. Nosotros postulamos la reflexión del docente respecto al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, fundamentándola en la interacción social para promover y posibilitar la construcción del conocimiento.

Metodología de la investigación.

Participantes

En la investigación han participado 39 alumnos de tercero de ESO (14-15 años) de un Instituto público de Educación Secundaria, distribuidos en dos grupos de años académicos previos al curso 2007-2008. Estos estudiantes han cursado la materia de matemáticas, sin adaptación curricular. La aplicación de las pruebas escritas se ha realizado al final de las unidades didácticas, con aviso previo y después de impartir los contenidos curriculares correspondientes.

Instrumentos

Los instrumentos utilizados en este trabajo son las pruebas escritas realizadas por los estudiantes a lo largo del curso y que forman parte de la evaluación continua. Los cuestionarios responden a contenidos conceptuales y procedimentales de las unidades didácticas de los bloques curriculares.

Las pruebas escritas constan de un número de cuestiones comprendido entre 5 y 7 preguntas, y también contienen actividades de carácter no procedimental y de resolución de problemas. Todas las cuestiones tienen idéntico valor (1) y el resultado se pondera posteriormente para obtener una puntación final en el intervalo [0,10].

Las preguntas han sido formuladas por el mismo profesor en correspondencia a los contenidos curriculares, con actividades similares a las realizadas en el aula. La valoración de las cuestiones resulta de la evaluación de la adquisición de contenidos procedimentales y conceptuales que logran los alumnos en función de sus respuestas. A los estudiantes se les incide en la necesidad de ofrecer la justificación de las soluciones y de los razonamientos utilizados, valorando los procedimientos y justificaciones y no sólo el resultado obtenido.

Las pruebas escritas se realizan en la clase habitual, con una duración aproximada de 55 minutos. Las unidades didácticas que conforman cada una de las pruebas son las mismas para los dos grupos estudiados, con preguntas similares o idénticas para ambos al tratarse de grupos que cursan la misma materia.

Los contenidos de las pruebas de matemáticas de tercero de ESO utilizados en la investigación

Los contenidos que forman parte de las pruebas de nuestra investigación son aquellos que aparecen en la programación didáctica como concreción del desarrollo curricular. Los bloques curriculares tratados en este trabajo están desarrollados en unidades didácticas de *Aritmética y álgebra*, *Geometría* y *Análisis*, pero no tratan en este caso los epígrafes de *Estadística y probabilidad*.

La presentación de las pruebas escritas se realiza sin espacios para las respuestas, respondiendo los alumnos en folio aparte para no limitar sus respuestas, justificaciones y razonamientos. Por lo general, se permite el uso de calculadora científica.

Los contenidos trabajados se explicitan, a continuación, brevemente siguiendo el orden secuencial en que se desarrollaron en el aula.

Contenidos utilizados en las pruebas de la investigación. Tercero de ESO

Aritmética

1. Números.
Números enteros. Números decimales. Fracciones. Operaciones con fracciones. Números racionales. Números irracionales Potenciación. Potencias de exponente entero. Jerarquía de operaciones y uso de paréntesis. Aproximación y redondeo.

2. Proporcionalidad.
Porcentajes. Problemas de proporcionalidad simple y compuesta. Repartos proporcionales. Problemas de interés simple y compuesto.

Álgebra

1. Lenguaje algebraico y polinomios.
Expresiones algebraicas, monomio y polinomios. Operaciones de suma, resta y multiplicación. Identidades notables.

2. Ecuaciones.
Ecuaciones de primer grado. Resolución. Ecuaciones de segundo grado. Resolución. Interpretación de soluciones. Resolución de problemas mediante ecuaciones.

3. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
Sistemas de ecuaciones. Sistemas equivalentes. Resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (reducción, igualación, sustitución). Resolución de problemas.

Análisis

1. Funciones y gráficas.
Formas de expresión de una función. Conceptos básicos. Variables independientes y dependientes. Dominio de definición. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos. Discontinuidad y continuidad en una función. Tendencias y periodicidad. Expresión analítica.

2. Función afín.
Funciones constantes. Función de proporcionalidad. Función afín. Estudio conjunto de dos funciones afines. Puntos de corte de dos gráficas. Situaciones prácticas a las que responden las funciones afines.

Geometría

1. Figuras en el plano. Triángulos. Teorema de Pitágoras. Cuadriláteros y circunferencia. Áreas.

2. Figuras en el espacio.
Poliedros. Esfera. Áreas de prismas, pirámides y troncos de pirámide. Áreas de cilindros, conos y troncos de cono. Área de la esfera, de la zona esférica y del casquete esférico. Cálculo de volúmenes de figuras espaciales. Coordenadas geográficas en la superficie terrestre. Husos horarios.

Las pruebas realizadas en el transcurso del curso agruparon las siguientes unidades didácticas:

Nº Prueba	Unidad(es) didáctica(s)
1	Números
2	Proporcionalidad
3	Lenguaje algebraico y polinomios
4	Ecuaciones
5	Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas
6	Funciones y gráficas. Función afín
7	Figuras en el plano. Figuras en el espacio

Análisis cuantitativo de los datos

Los datos de las pruebas se cuantifican para la evaluación en un rango comprendido entre 0 y 10, a fin de llevar a cabo la posterior evaluación de los alumnos junto con otros instrumentos de evaluación.

Nuestro objetivo de investigación pretende estudiar los datos obtenidos en las pruebas mediante el análisis estadístico implicativo (Gras et al, 1997). Como indica Couturier (2007), este análisis estadístico permite establecer reglas de asociación en un conjunto de datos cruzando variables e individuos, marcando las tendencias de conjuntos de propiedades usando una medida de carácter no lineal de tipo inferencial. El software CHIC (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive) (Bodin et al., 2000) lleva a cabo estas agrupaciones jerárquicas.

El diagrama de similaridad aglutina grupos de variables en función de su homogeneidad lo que da pie a la interpretación de las agrupaciones con que se manejan las variables, produciéndose en cada nivel del gráfico una agrupación de similaridad en orden decreciente. El análisis jerárquico de similaridad permite interpretar en términos de semejanza clases de variables constituidas significativamente a ciertos niveles.

Por su parte, el gráfico implicativo da las relaciones de implicación entre las variables del cuestionario en el sentido que el éxito en la respuesta de un ítem implica el éxito en otra tarea relacionada.

En el estudio mostramos el tratamiento efectuado a los datos con dos tipos de codificación con el programa CHIC. Utilizamos una primera matriz de datos en el intervalo [0,1] que representan el resultado de la calificación de cada uno de los 39 alumnos en las 7 pruebas, trasladado el valor obtenido dividido por 10 para situarlos en el rango entre 0 y 1.

En segundo lugar se realiza una nueva codificación con valores binarios, 0 y 1, considerando que a un estudiante se le asigna un valor 1 en una prueba si el resultado ha sido igual o superior a 5, mientras que en caso contrario se le asigna el valor 0. En este segundo caso se trata de realizar el estudio en función de que los alumnos hayan rebasado el umbral mínimo para superar la prueba.

Resultados

En este apartado se dan los resultados medios de las pruebas realizadas y los estudios de similaridad e implicativo aplicado a las calificaciones otorgadas a los 39 estudiantes participantes.

Análisis de frecuencias

La Tabla 1 muestra las medias globales obtenidas en los 7 cuestionarios resueltos por el conjunto de los estudiantes y la dificultad de las pruebas, atendiendo a los niveles de clasificación de dificultad establecidos por García y Pérez (1989).

Nº Prueba	Unidad didáctica	Media	Dificultad	Porcentaje de éxito
1	Números	0,50	Dificultad media	46,15 %
2	Proporcionalidad	0,58	Fácil	69,23 %
3	Lenguaje algebraico y polinomios	0,47	Dificultad media	51,28 %
4	Ecuaciones	0,46	Dificultad media	48,72 %
5	Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas	0,53	Dificultad media	53,85%
6	Funciones y gráficas. Función afín	0,48	Dificultad media	53,85 %
7	Figuras en el plano. Figuras en el espacio	0,51	Dificultad media	56,41 %

Tabla 1. Medias y porcentaje de éxito en las pruebas.

Observamos que todas las pruebas están clasificadas como de dificultad media o fácil. Cinco de las siete pruebas tienen un porcentaje de alumnos que la superan superior al 50%, siendo el cuestionario más fácil el que trata los contenidos de *Proporcionalidad*, tanto por el resultado medio obtenido como por el porcentaje de éxito de los alumnos que la han superado. La prueba que obtiene menor media es la de *Ecuaciones*, aunque la que tiene un menor porcentaje de superación es la referente a la unidad de *Números*.

Estudio de las similaridades

En el estudio jerárquico de similaridades se puede estudiar la calidad de las agrupaciones en función de la longitud de las ramas, siendo la similaridad más fuerte cuanto menor es esta longitud.

La Figura 1 muestra el árbol de similaridad de los datos de las respuestas de los estudiantes en las siete pruebas, en función de la calificación obtenida y ponderada en el rango [0,1].

En este diagrama aparecen dos clases que establecen las conexiones de similaridad entre los diferentes cuestionarios. El primer grupo está compuesto por dos subclases, siendo la primera un nodo significativo que contiene las pruebas de *Lenguaje algebraico y polinomios* junto con la de *Figuras en el plano y en el espacio*, con un índice de similaridad de 0,758. La segunda subclase de este grupo conexiona en el tercer nivel y está formada por las pruebas de *Números* y *Proporcionalidad*, con un índice de 0,683. Ambas subclases se unen con posterioridad en el penúltimo enlace de niveles con un índice bajo de similaridad de 0,295.

En esta primera clase se unen inicialmente las pruebas que requieren expresiones y relaciones que implican lenguaje algebraico y la traducción a éste de enunciados del lenguaje natural para realizar cálculos en áreas y volúmenes. La segunda conexión en este grupo se refiere a las pruebas que tratan las operaciones con distintos tipos de números y la resolución de problemas de proporcionalidad y porcentajes.

El segundo grupo está constituido por las pruebas de *Sistemas lineales, Gráficas y función afín* y la de *Ecuaciones* que se agrupa a las anteriores en el cuarto nivel. La primera conexión en esta clase, que se produce en el segundo nivel con un índice de 0,730, parece indicar la influencia en los resultados de los estudiantes de la relación funcional entre dos variables lineales y la interpretación de situaciones que requieren conocer la relación lineal entre dos variables o la resolución de situaciones problemáticas donde aparecen dos variables.

El índice de conexión entre las dos clases principales es muy bajo, lo que muestra que existe poca similaridad. Las agrupaciones de similaridad se producen, a excepción de la del primer nivel, entre pruebas que tienen una secuenciación consecutiva en la programación en el aula: 3-7, 5-6, 1-2, 4-(5-6).

Se ha llevado a cabo un segundo estudio de similaridades codificando las calificaciones de los alumnos en las pruebas con los valores binarios 1 ó 0, según han superado o no la prueba con calificación mayor o igual a 5.

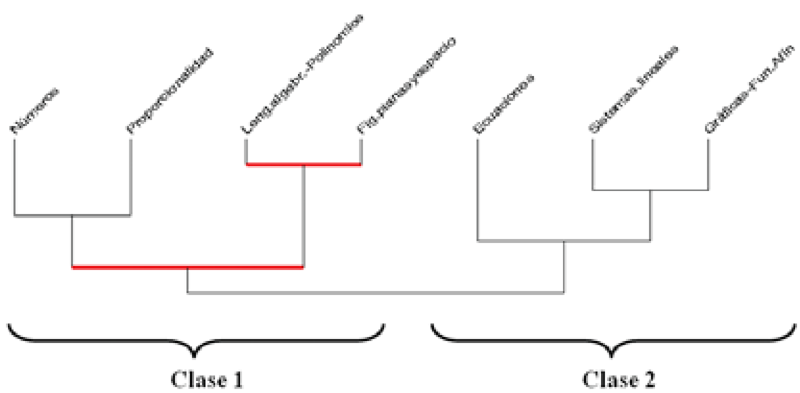


Figura 1. Diagrama de similaridad de los resultados de los estudiantes en las pruebas.

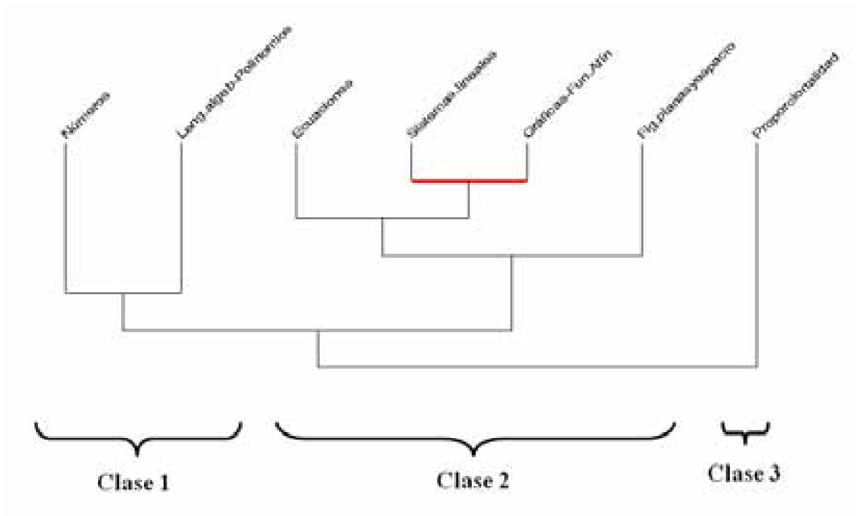


Figura 2. Diagrama de similaridad de la superación de las pruebas por los estudiantes.

Los resultados obtenidos mediante esta codificación en la matriz de datos ha ofrecido como resultado el árbol de similaridades de la Figura 2.

Se observa en este segundo diagrama la formación de tres clases. Las similaridades obtenidas con esta nueva codificación son superiores a las obtenidas con la codificación por resultados en las pruebas. La Clase 1 está formada por las pruebas de *Números* y *Lenguaje algebraico y polinomios*, que tiene un índice de 0,942, en el cuarto nivel de significación.

La Clase 2 es la principal ya que en ella se establecen los tres primeros niveles de conexión. El primero agrupa las pruebas de *Sistemas lineales* con la de *Gráficas y función afín*, con índice de similaridad de 0,989. Esta misma agrupación se realiza en la codificación anterior en el segundo nivel. A continuación se une a las anteriores la prueba de *Ecuaciones* con índice 0,966. Se añade al grupo en el tercer nivel la de *Figuras en el plano y en el espacio*.

Esta clase pone de manifiesto la influencia que tiene el uso de variables en la resolución de ecuaciones, sistemas, representaciones gráficas y problemas de obtención de áreas y volúmenes, para el éxito de los estudiantes en la superación de las pruebas.

En el nivel 5 se unen las Clases 1 y 2, con similaridad 0,841. Posteriormente se asocia con menor índice la prueba de *Proporcionalidad*, que conforma en sí misma una única clase.

Gráficos implicativos

Para comprender mejor las relaciones que se establecen entra las diferentes pruebas podemos examinar los gráficos implicativos obtenidos con el programa CHIC.

En primer lugar examinamos el gráfico implicativo que aparece al codificar los resultados de los participantes en el intervalo [0,1]. Se opta por utilizar diferentes umbrales para que aparezcan todas las pruebas en el grafo y así poder estudiar las implicaciones. En color rojo aparecen las implicaciones al nivel de significación del 88%, en azul las del umbral del 85% y en verde las del 80%. Se usa el nivel del 88% porque es el primero en que al aplicar el programa aparecen implicaciones entre las diferentes variables. Cada flecha representa la implicación entre dos variables, en el sentido que si ocurre una variable conlleva la ocurrencia de la otra variable, considerando la incongruencia de un número pequeño de casos en que no se cumpla cuando se verifique a pero no b.

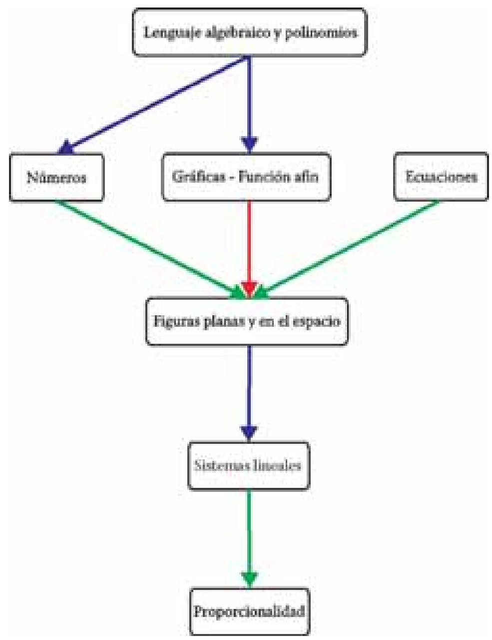


Figura 3. Gráfico implicativo de los resultados de los estudiantes en las pruebas.

Podemos ver en la figura 3 que la prueba que mayor influencia muestra es la de *Lenguaje algebraico y polinomios* al iniciar el árbol implicativo. La unidad didáctica de Ecuaciones pone de manifiesto su implicación en los resultados de las pruebas de *Figuras en el plano y en el espacio*, *Sistemas de ecuaciones lineales* y *Proporcionalidad*, siendo más débil que la intervención que evidencia la unidad de *Lenguaje algebraico y polinomios*.

Se observa que el mayor grado de influencia entre dos pruebas se tiene entre las unidades de *Gráficas y función afín* con la de *Figuras planas y en el espacio.* En el final del árbol se encuentran las unidades de *Sistemas de Ecuaciones lineales* y de *Proporcionalidad.*

En la figura 4 aparecen las implicaciones de los resultados de las pruebas de estos alumnos cuando han sido codificadas únicamente con los valores binarios 0 y 1, éxito o fracaso en la superación del cuestionario.

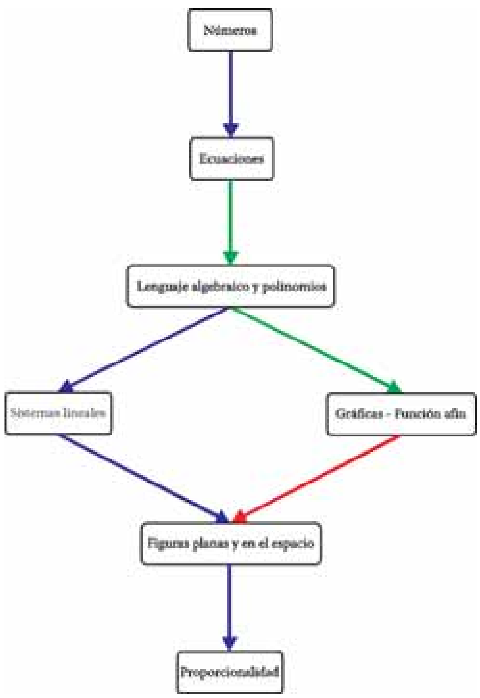


Figura 4. Gráfico implicativo de la superación de las pruebas por los estudiantes.

El gráfico implicativo ha sido diseñado en niveles de significación donde aparezcan todas las pruebas realizadas, para lo que se han utilizado los niveles del 99% (en rojo), del 95% (en azul) y del 90 % (en verde).

En este diagrama se ve que la mayor influencia en la implicación la tiene el cuestionario de *Números*, que es la primera unidad didáctica de la secuenciación temporal, ya que inicia el camino de las implicaciones sobre la prueba de *Ecuaciones* y el resto de unidades didácticas. Cierra el camino el cuestionario de *Proporcionalidad.*

Conclusiones

En este trabajo se lleva a cabo un análisis implicativo y de similaridades de los resultados obtenidos por alumnos de tercero de ESO en las siete pruebas escritas de matemáticas realizadas a lo largo del curso, usando dos tipos de ponderación de los datos. Las relaciones implicativas ponen de manifiesto la implicación de unas pruebas sobre otras, y las de similaridad indican la homogeneidad entre variables. Este tipo de análisis estadístico implicativo ha sido usado en nuestro país para estudiar diferentes aspectos matemáticos en educación secundaria (Pitarch, 2002; Gregori et al., 2007; Bodí et al., 2007; Delgado et al., 2007)

Los resultados de los gráficos de similaridad evidencian dos grandes grupos de similaridad. Uno que contiene las pruebas de *Ecuaciones*, *Sistemas lineales* y *Gráficas y funciones afines*, que se trabajan secuencialmente, y otro que incluye las de *Números* y *Lenguaje algebraico y polinomios.* Los gráficos muestran poca similaridad en la conexión entre estos dos grupos, tanto si se usa el resultado obtenido como si se toma el éxito en las diferentes pruebas. Se observa que la temática de *Proporcionalidad* presenta poca similaridad con el resto de unidades si se considera el éxito de los alumnos en la superación de los cuestionarios, presentando similaridad de índice medio con la unidad de *Números* en la codificación mediante los resultados obtenidos.

El análisis implicativo muestra que se forman dos grupos de implicación cuando se estudian los resultados y aparece sólo uno si se valora el éxito obtenido. En el primer caso, en niveles de significación superiores al 80%, los resultados en la unidad didáctica que presenta más influencia en el resultado de los estudiantes con el resto de cuestionarios, es la de *Lenguaje algebraico y polinomios*, sin que aparezcan implicaciones entre los resultados de ésta y la de *Ecuaciones*. Cuando se analizan las variables en función de la superación de las pruebas aparece la implicación que tiene el éxito en la unidad de *Números* sobre el éxito obtenido en las demás pruebas, así como la de *Ecuaciones*.

En ambos gráficos implicativos se destaca la importancia de los resultados y éxito en los cuestionarios de *Números*, *Ecuaciones* y *Lenguaje algebraico y polinomios.* Estas tres pruebas parecen constituir el núcleo principal de influencia sobre los logros en el resto de unidades. La prueba que atañe a *Proporcionalidad* no manifiesta ninguna implicación sobre el resto ya que ocupa el último lugar del árbol, siendo sin embargo la que obtiene la media más alta en cuanto a resultados y éxito de superación. En ambas ramificaciones el nivel de mayor significación en las implicaciones se produce de la unidad de *Gráficas y función afín* hacia la de *Figuras en el plano y en el espacio.*

Los resultados de esta investigación pueden profundizarse con estudios de carácter cualitativo en las diferentes unidades. Se tendrá que tener en cuenta la organización secuencial del currículo o la variabilidad al aplicar la herramienta de análisis con el programa CHIC en diferentes etapas educativas, cursos o grupos de estudiantes.

La importancia de la selección de los criterios y tareas instruccionales en la evaluación del proceso de enseñanza y aprendizaje es señalada en diferentes trabajos de investigación (Parcerisa1996; Rico 1997a; Llinares et al. 2005). Esta investigación puede servir como herramienta de orientación a los profesores de educación secundaria para la secuenciación curricular o en la aplicación de una metodología de análisis de cuestionarios, de tareas, de unidades didácticas o del proceso de evaluación en su conjunto, situando las variables a estudiar dentro de un determinado contexto escolar. Estos estudios pueden completarse con investigaciones sobre la comprensión conceptual que tiene los estudiantes de secundaria de los tópicos matemáticos utilizados.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Boletín Oficial del Estado. Jefatura del Estado. Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. BOE nº 106 de 4 de mayo de 2006.

Boletín Oficial del Estado. Ministerio de Educación y Ciencia. Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre., por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. BOE nº 5 de 5 de enero de 2007.

Bodí, S.D., Valls, J., Llinares, S. (2007). La comprensión de la divisibilidad en N. Un análisis implicativo. En R. Gras; P. Orús; B. Pinaud y P. Gregori (Eds.), *Nouveaux Apports Théoriques à l´Analyse Statistique Implicative et Applications* (pp.99-110). Universitat Jaume I : Castellón.

Bodin, A., Couturier, R., Gras, R. (2000). CHIC: Classification Hiérarchique Implicative et Cohésive. CHIC 1.2. Rennes: Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.

Copello, M.I., Sanmartí, N. (2001). Fundamentos de un modelo de formación permanente del profesorado de ciencias centrado en la reflexión dialógica sobre concepciones y prácticas. *Enseñanza de las Ciencias. 19*(2) ,269- 284.

Couturier, R. (2007). CHIC: utilisation et fonctionnalités. En R. Gras; P. Orús; B. Pinaud y P. Gregori (Eds.), *Nouveaux Apports Théoriques à l´Analyse Statistique Implicative et Applications* (pp.41-49). Universitat Jaume I: Castellón.

Delgado, M., De María, J.L., Ulecia, T. (2007). Aplicación de CHIC al estudio de las funciones elementales. En R. Gras; P. Orús; B. Pinaud y P. Gregori (Eds.), *Nouveaux Apports Théoriques à l´Analyse Statistique Implicative et Applications* (pp.163-177). Universitat Jaume I : Castellón.

Diari Oficial de la Generalitat Valenciana. Decreto 39/2002, de 5 de marzo, del Gobierno Valenciano, por el que se modifica el Decreto 47/1992, de 30 de marzo, del Gobierno Valenciano por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Valenciana. DOGV nº 4206 de 8 de marzo de 2002.

Diari Oficial de la Comunitat Valenciana. Decreto 112/2007, de 20 de julio, del Consell, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunitat Valenciana. DOCV nº 5562 de 24 de julio de 2007.

Fortuny, J.M. (1990). Información y control en Educación Matemática. En S. Llinares y M.V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en Educación Matemática* (pp. 237-294). Sevilla: Alfar.

García, M., Llinares, S. (1994). Algunos referentes para analizar tareas matemáticas. *SUMA* (18), 13 -23.

García, V., Pérez, R. (1989). *La investigación del profesor en el aula*. Madrid: Escuela Española.

Gras, R., Peter, P., Briand, H. y Philippé, J. (1997). Implicative Statistical Analysis, In Hayashi, N. Ohsumi, N. Yajima, Y. Tanaka, H. Bock y Y. Baba (Eds.), Proceedings of the 5th Conference of the International Federation of Classification Societies, Vol. 2, pp 412-419, New York: Springer-Verlag.

Gregori, P., Orús, P., Pitarch. I. (2007). Reflexiones sobre el análisis a priori de los cuestionarios basado en técnicas del Análisis Estadístico Implicativo. En R. Gras, P. Orús, B. Pinaud y P. Gregori (Eds.), *Nouveaux Apports Théoriques à l´Analyse Statistique Implicative et Applications* (pp.51-69).Universitat Jaume I: Castellón.

Hewson, P.W., Hewson, M. (1987). Science teachers' conceptions of teaching: implications for teachers education. *International Journal of Science Education*, 9, 425-440.

Jiménez, R., Wamba, A.M. (2004). ¿Podemos construir un modelo de profesor que sirva de referencian para la formación del profesorado en didáctica de las ciencias experimentales? *Profesorado, revista de currículo y formación del profesorado, 8* (1), 19-35.

Llinares, S. (1994). La enseñanza de las matemáticas. Perspectivas, tareas y organización de la actividad. En L. Santaló y otros, *La enseñanza de las matemáticas en la educación intermedia* (pp.249-295). Rialp: Madrid.

Llinares, S. (coord.), Diez, A., Más, J., Mula, A., Navas, L., Penalva, y otros (2005). *Modelización matemática y competencia lectora en Educación Secundaria Obligatoria*. Editorial Compobell. Murcia.

Marín, A. (1997). Programación de unidades didácticas. En L. Rico (Coord.). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp.195-226). Barcelona: ICE Universitat de Barcelona - Horsori.

Monereo, C., Castelló, M, Clariana, M., Palma, M, Pérez, M.LL. (1999). *Estrategias de enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: Graó.

Parcerisa, A. (1996). *Materiales curriculares. Cómo elaborarlos, seleccionarlos y usarlos.* Barcelona: Graó.

Pitarch, I. (2002). *Estadística y análisis de datos en ESO*. DEA. Departamento de Matemáticas. Universitat Jaume I: Castellón.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J.L., Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los Números Naturales. *SUMA, 58*, 7-23.

Rico, L. (1997a). Consideraciones sobre el currículo de Matemáticas para Educación Secundaria. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp.15-38). Barcelona: ICE Universitat de Barcelona - Horsori.

Rico, L. (1997b). Los Organizadores del Currículo de Matemáticas. En L. Rico (Coord.). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp.39-59). Barcelona: ICE Universitat de Barcelona - Horsori.

Anexo

En este anexo se muestran ejemplos de ejercicios planteados en las diferentes pruebas.

1. Números

1) Opera, ***sin calculadora***, y simplifica en una única fracción:

a) $$\frac{(3-\frac{2}{3}+1)\cdot\left(4-\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{6-3}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{4}{5}\right)}$$

b) $$\frac{2^{-3}\cdot 2^{4}\cdot 2^{5}\cdot 2^{-2}}{2^{-5}\cdot 2^{3}}$$

2) Un vehículo tiene que cambiar el filtro de aceite cada 15.000 Km y las ruedas cada 40.000 Km. ¿Cuántos Km habrá recorrido para que ambos cambios coincidan? Razona tu respuesta.

2. Proporcionalidad

1) Tres hermanos poseen una empresa que proporcionó unos beneficios de 12.000 euros. Si los hermanos invirtieron 21.000 euros, 24.000 euros y 5.000 euros, respectivamente, ¿qué cantidad del beneficio corresponderá a cada hermano? Justifica tu respuesta.

2) Una máquina produce 3.000 tornillos en 9 días, funcionado cada día durante 8 horas. A la empresa llega un pedido de 2.000 tornillos, pero por problemas de reajuste sólo puede tener en funcionamiento la máquina 6 horas al día. ¿Cuántos días tendrá que tener en marcha la máquina para servir el pedido? Razona tu respuesta

3. Lenguaje algebraico y polinomios

1) Dados los polinomios $P = 4x^2 - 3x - 1$ y $Q = 2x^2 + 5x - 2$, obtén:

a) 3P - 2 Q b) P · Q Elige cinco de estas frases y exprésalas en lenguaje justificando tu respuesta:

2) El perímetro de un triángulo equilátero
- a) El triple de la edad que tenía el años pasado
- b) El área de un cuadrado
- c) La tercera parte de un número natural, más su cuadrado
- d) Tres números naturales consecutivos
- f) La mitad de un número menos el doble del anterior

4. Ecuaciones

1) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{x-3}{5}-\dfrac{2x-4}{6}=1-\dfrac{2x}{5}+\dfrac{x}{3}$ b) $8x^2 - 512 = 0$

2) Un teatro tiene cuatro veces más asientos de butaca que de graderío y la mitad de platea que de graderío. Si el aforo es de 1100 personas, ¿Cuántas entradas hay de cada clase? Justifica tu respuesta.

5. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

1) a) Resuelve $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x-3y=-10 \end{cases}$ b) Resuelve con un método distinto del anterior: $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{2}+\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{11}{6} \\ -\dfrac{2x}{5}+\dfrac{y-1}{10}=-\dfrac{6}{5} \end{cases}$

2) El perímetro de un rectángulo es de 64 cm. Sabiendo que su base tiene 6 cm. más que su altura. Plantea un sistema de ecuaciones y resuélvelo. Justifica tu respuesta.

6. Funciones y gráficas. Función afín

1)Un dispositivo de llenado y vaciado tiene un depósito de 200 litros que se llena en 30 minutos y se vacía en 15. En cada operación el depósito permanece lleno durante una hora. Dibuja una gráfica que represente la situación durante medio día. Detalla las características de la gráfica.

2) La cantidad que hay que pagar por el recibo del agua viene dado por la expresión: $y = 22 + 0.30\ x$, donde x es el número de metros cúbicos consumidos.

a) ¿Si se han consumido 43 metros cúbicos qué se pagará? ¿Y por 60 metros cúbicos?
b) Representa la función.
c) Determina el número de metros cúbicos consumidos si se ha pagado un total de 142 euros. ¿Qué opinas de esta situación?

7. Figuras en el plano y en el espacio

1) Una pirámide de base cuadrada, tiene todas sus aristas de longitud 18 cm. Obtén el área y el volumen de la pirámide. Justifica tu respuesta.

2) Un reloj de arena tiene el diámetro de la base de 12 cm. y su altura total es de 30 cm. ¿qué volumen tiene el reloj de arena?

SUMA+ 62
Noviembre 2009, pp. 35-48

Proporcionalidad aritmética: buscando alternativas a la enseñanza tradicional

Sobre cada uno de los contenidos de la proporcionalidad aritmética, se establecen relaciones entre la enseñanza que proponen los libros de texto y los errores cometidos por un numeroso y destacado grupo de alumnos españoles de Educación Secundaria al resolver el mismo problema. Con la finalidad de superar las dificultades de comprensión de los alumnos provocadas por la práctica docente, ofrecemos alternativas a la enseñanza actual basadas en la construcción de los conceptos implicados en la proporcionalidad aritmética a partir del mundo de las magnitudes mensurables.

On each one of the contents of the arithmetical proportionality, relations are established between the education that propose text books and the errors committed by a numerous and outstanding group of Spanish students of Secondary Education all to solve the same problem. With the purpose of surpassing the difficulties of understanding of the students caused by the educational practice, we offer alternatives to current education based on the construction of the concepts implied in the arithmetical proportionality from the world of the mensurable magnitudes.

Introducción

La proporcionalidad aritmética es uno de los temas más relevantes para la formación de los ciudadanos, porque pone en juego los aprendizajes aritméticos escolares (medida, fracciones, operaciones elementales, etc.), y porque resuelve muchos de los problemas de los adultos (beneficios del capital, trueques o cambios de moneda, mezclas o aleaciones, descuentos comerciales, trabajos conjuntos, llenado y vaciado de recipientes, etc.).

Sin embargo, muchas investigaciones han puesto de manifiesto que adolescentes y adultos tienen grandes dificultades en resolver problemas que exigen del razonamiento proporcional (Behr, 1987; Hart, 1981, Vergnaud, 1983). Estas dificultades se deben, en buena medida, al bajo grado de comprensión de los estudiantes de los conceptos implicados en este tópico matemático (Heller, et al., 1989), y a la falta de destreza para aplicar correctamente las técnicas más frecuentes de la regla de tres (Cramer y Post, 1993).

En el caso de España, estudios nacionales e internacionales de evaluación han puesto de manifiesto el bajo rendimiento de los escolares en matemáticas (López y Moreno, 1997; INCE, 2002; INECSE, 2004). Los resultados de estos estudios también afectan a la proporcionalidad aritmética: sólo el 10% de los alumnos de 8º curso (14 años) responde correctamente a la tarea de completar una tabla de cantidades proporcionales (López y Moreno, 1997).

La trascendencia de la proporcionalidad aritmética y el bajo grado de competencia que alcanzan los alumnos ha despertado gran interés entre los investigadores y profesores; de este modo, se ha producido una abundante literatura científica que aborda diferentes aspectos del proceso instructivo y de la comprensión de los estudiantes (Davis, Hunting y Pearn, 1993; Neuman, 1993; Streefland, 1993; Bigelow, Davis y Hunting, 1989; Kieren, 1980; Singer y Resnick, 1992; Fernández, 2001; Margarit et al, 2001; Heller et al., 1989; Tourniaire y Pulos, 1995; Gómez, 2002; Bosch, 1994).

También es de nuestro interés participar en el análisis de este fenómeno didáctico y lo hacemos desde una perspectiva que no hemos encontrado en los trabajos revisados: la influencia de la práctica docente en los errores cometidos por los alumnos. Nuestro propósito es, por tanto, reflexionar sobre los conceptos y procedimientos presentes en la enseñanza tradicional de la proporcionalidad aritmética, y buscar alternativas sobre la que sustentar una nueva propuesta didáctica que incremente la comprensión de los alumnos.

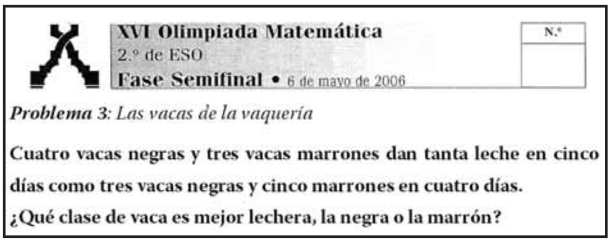
José Mª Gairín Sallán
Rafael Escolano Vizcarra
Facultad de Educación de la Universidad de Zaragoza

Y con este propósito pretendemos confrontar la práctica docente habitual sobre la proporcionalidad aritmética que se deduce del análisis de libros de textos escolares vigentes en el sistema educativo español, con el estudio de las respuestas dadas por un grupo numeroso y cualificado de alumnos de 2º curso de Secundaria (14-15 años) cuando resuelven un problema de proporcionalidad cuyas características describimos en el apartado seguidamente.

Resolución de la tarea propuesta

En la fase semifinal de la XVI Olimpiada Matemática de Aragón (España), celebrada en mayo de 2006, participaron 454 estudiantes de 2º curso de Enseñanza Secundaria Obligatoria (14-15 años). Estos estudiantes pertenecen a toda la Comunidad Aragonesa, y son los propios centros escolares los encargados de inscribirlos en las Olimpiadas; por lo que se pueden catalogar a los participantes como alumnos con buenos resultados en la asignatura de matemáticas.

De los 6 problemas propuestos en esta fase de la Olimpiada, nos ocuparemos exclusivamente del problema número 3, puesto que es el único en el que se utilizan aspectos conceptuales y procedimentales del tema de proporcionalidad aritmética. Este problema número tres se presenta a los alumnos de la siguiente forma


XVI Olimpiada Matemática
2.º de ESO
Fase Semifinal • 6 de mayo de 2006
N.º

Problema 3: *Las vacas de la vaquería*

Cuatro vacas negras y tres vacas marrones dan tanta leche en cinco días como tres vacas negras y cinco marrones en cuatro días.
¿Qué clase de vaca es mejor lechera, la negra o la marrón?

Figura 1

Tipología de las soluciones

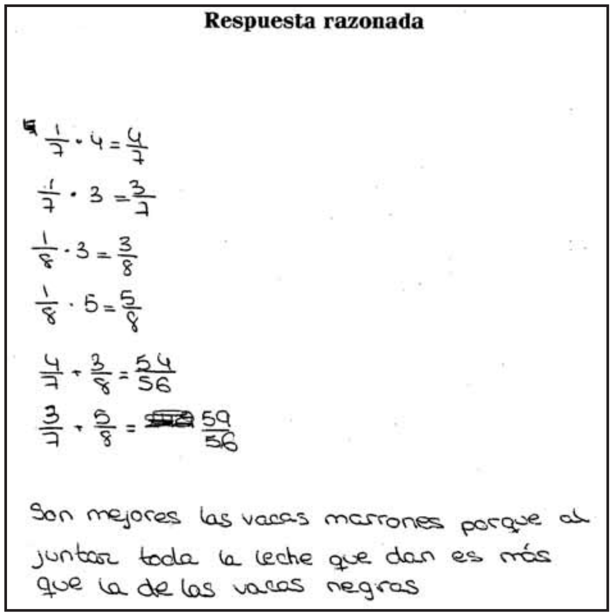
Hubo 38 alumnos que dejaron sus respuestas en blanco (el 8,3% de los participantes). Pensamos que la mayor parte de estos alumnos no contestan porque están un poco desmotivados, puesto que las puntuaciones que esperan lograr en los otros ejercicios no les permitirán pasar a la siguiente fase de la Olimpiada.

Por tanto, trabajaremos con 416 respuestas de los participantes, y que podemos agrupar en tres grandes bloques de acuerdo con los conocimientos matemáticos utilizados por los estudiantes: de tipo aritmético, de tipo algebraico y de tipo proporcional.

a) Respuestas que utilizan operaciones aritméticas

El 7,7 % del total de respuestas utilizan exclusivamente operaciones con números racionales y ninguna de ellas presenta una solución correcta.

Es de destacar que en este tipo de respuestas los alumnos recurren a operaciones entre números considerados como entes abstractos, no como expresión de las distintas cantidades de magnitud que figuran en el enunciado. Este modo de actuación de los alumnos les impide controlar la validez de las operaciones que realizan, validez que vendrá determinada por el significado que asignen al resultado de operar cantidades de magnitud. De lo contrario, los alumnos dan respuestas que contienen resultados numéricos correctamente obtenidos, pero que expresan cantidades carentes de sentido. El siguiente ejemplo resulta ilustrativo de las respuestas de los alumnos que utilizan relaciones numéricas descontextualizadas del mundo de las magnitudes mensurables.


Respuesta razonada

$\frac{1}{7}\cdot 4=\frac{4}{7}$

$\frac{1}{7}\cdot 3=\frac{3}{7}$

$\frac{1}{8}\cdot 3=\frac{3}{8}$

$\frac{1}{8}\cdot 5=\frac{5}{8}$

$\frac{4}{7}+\frac{3}{8}=\frac{54}{56}$

$\frac{3}{7}+\frac{5}{8}=\frac{59}{56}$

Son mejores las vacas marrones porque al juntar toda la leche que dan es más que la de las vacas negras

Figura 2

b) Respuestas que utilizan relaciones algebraicas

Hay que advertir que los alumnos participantes en esta Olimpiada tienen una corta experiencia en el trabajo algebraico, porque en este 2º curso de Educación Secundaria Obligatoria los alumnos todavía se encuentran en los inicios del aprendizaje del álgebra escolar.

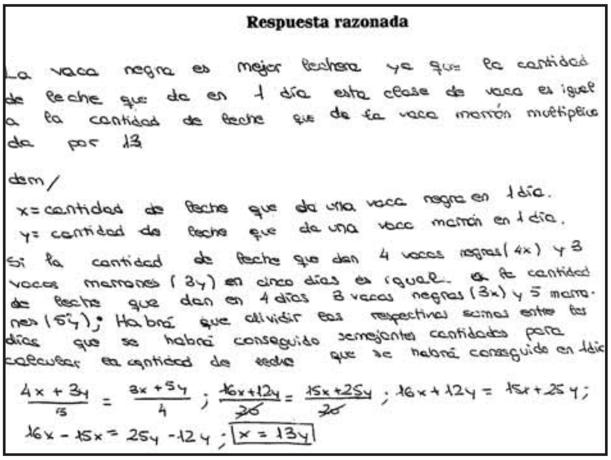
A pesar de ello, el 24,5% del total de respuestas utilizan el lenguaje algebraico; de las que el 28% son correctas.

Las respuestas incorrectas están provocadas por tres motivos principales:

– Definición errónea del valor de las incógnitas: utilizar incógnitas para indicar el número de vacas de cada color, a pesar de que se pregunta por la producción de leche de cada tipo de vaca.

– Interpretación errónea de la solución: encontrar unos valores numéricos para cada una de las incógnitas, aunque el problema pregunte por el resultado de una comparación.

– Errores provocados al establecer relaciones algebraicas inadecuadas: trasladar el enunciado del problema al lenguaje algebraico sin que las relaciones establecidas se correspondan con las que indica el enunciado, como puede constatarse en la siguiente respuesta en la que el alumno opta por una división en vez de una multiplicación:


Respuesta razonada

La vaca negra es mejor lechera ya que la cantidad de leche que da en 1 día esta clase de vaca es igual a la cantidad de leche que de la vaca marrón multiplicada por 13

dem/

x= cantidad de leche que da una vaca negra en 1 día.
y= cantidad de leche que da una vaca marrón en 1 día.

Si la cantidad de leche que dan 4 vacas negras (4x) y 3 vacas marrones (3y) en cinco días es igual a la cantidad de leche que dan en 4 días 3 vacas negras (3x) y 5 marrones (5y); Habrá que dividir las respectivas sumas entre los días que se habrá conseguido semejantes cantidades para calcular la cantidad de leche que se habrá conseguido en 1 día

$\frac{4x+3y}{5} = \frac{3x+5y}{4}$; $\frac{16x+12y}{20} = \frac{15x+25y}{20}$; $16x+12y = 15x+25y$;
$16x-15x = 25y-12y$; $\boxed{x=13y}$

Figura 3

c) Respuestas que utilizan el razonamiento proporcional

Éste es el ámbito matemático que los alumnos consideran más adecuado para dar respuesta al problema planteado, pues son el 67,8% del total de respuestas los que utilizan las ideas matemáticas de este tipo; o de otro modo, 2 de cada 3 de los alumnos que dan alguna respuesta lo hacen utilizando sus conocimientos sobre proporcionalidad aritmética.

Sin embargo, tan sólo el 8,3% de estas respuestas son correctas; es más, algunas de las soluciones que figuran en estas respuestas utilizan métodos de trabajo alejados de los que son habituales en el aula, como el que figura en esta respuesta:

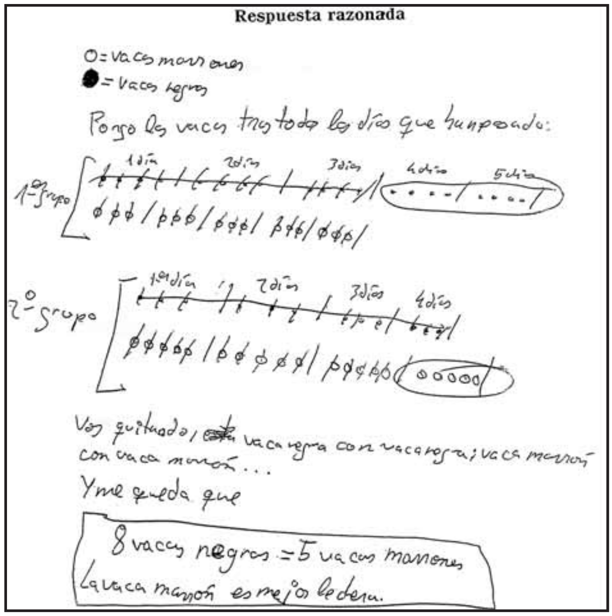


Figura 4

Atendiendo a la clasificación de Cramer, Post y Currier (1993), este problema pertenece a la categoría de comparación de razones. Aunque si tenemos en cuenta la práctica docente habitual, es un problema que no responde al esquema tradicional de encontrar una cantidad desconocida a partir de otras cantidades conocidas.

En la resolución del problema hay que establecer un férreo control de los conceptos implicados en situaciones de proporcionalidad aritmética y buscar argumentos que justifiquen la correcta manipulación de los datos numéricos, tal y como sintetizamos seguidamente:

– La consideración de proporcionalidad exige que la producción de leche de cada una de las vacas negras (y de cada una de las vacas marrones) sea igual cada día y que permanezca constante a lo largo de los días.

– Hay que considerar como variables la cantidad de leche que produce una vaca negra en un día, PN; la cantidad de leche que produce cada día una vaca marrón, PM; y la cantidad total de leche producida por cada grupo de vacas en el tiempo señalado, PT.

– El siguiente esquema sintetiza el enunciado del problema en la que se utilizan ideas de proporcionalidad distintas de la regla de tres:

$$4\ PN \rightarrow 3\ PM \rightarrow 5 \text{ días} \rightarrow PT$$

$$3\ PN \rightarrow 5\ PM \rightarrow 4 \text{ días} \rightarrow PT$$

–Para alcanzar la solución en el esquema anterior debe igualarse el número de días. Hay que modificar el esquema anterior teniendo en cuenta que las magnitudes implicadas son directamente proporcionales; que la producción de cada grupo de vacas se mantiene durante un número entero de periodos de días iguales a los del enunciado, con lo que el esquema anterior se transforma en el siguiente:

4 PN → 3 PM → 20 días → 4 PT

3 PN → 5 PM → 20 días → 5 PT

–Para conseguir igualar las producciones totales de leche se puede suponer que hay varios grupos de vacas que cumplen las condiciones del enunciado y que la producción de leche se ha contabilizado al cabo de 20 días; de este modo se obtiene el siguiente esquema:

20 PN →15 PM → 20 días → 20 PT

12 PN →20 PM → 20 días → 20 PT

–En este último esquema se observa que la igualdad de las dos situaciones se alcanza si en la fila inferior se añaden 8 PN y se eliminan 5 PM; es decir que la producción de 8 vacas negras sea igual a la producción de 5 vacas marrones. Por tanto, las vacas marrones son mejores productoras de leche.

–También se puede llegar a la situación final estudiando las condiciones que permiten igualar la producción en una unidad de tiempo (1 día):

Considerando las mismas variables (PN, PM y PT), para que la producción PT se consiga en 1 día es necesario que:

- Las vacas del primer establo se han de quintuplicar, siendo su producción 20 PN + 15 PM
- Las vacas del segundo establo se han de cuadruplicar, siendo su producción 12 PN + 20 PM

Como puede observarse, esta tarea encierra una gran riqueza conceptual, lo que favorece los propósitos de este trabajo por cuanto permite observar cómo los alumnos gestionan los contenidos aprendidos. En los siguientes párrafos haremos estas indagaciones usando algunas de sus respuestas.

Análisis de los errores de los alumnos

En este apartado queremos analizar con mayor profundidad el tipo de errores cometidos por los alumnos que utilizan el razonamiento proporcional. Con esta finalidad, y partiendo de los contenidos tradicionales, organizamos el trabajo en tres apartados:

–*Consideraciones sobre la enseñanza*. El análisis de los libros de texto vigentes en el sistema educativo español y con amplia presencia en el mismo, nos permite caracterizar la enseñanza que reciben los alumnos.

–*Consideraciones sobre el aprendizaje*. El análisis cualitativo de las respuestas dadas por un numeroso y cualificado grupo de escolares aragoneses cuando resuelven un problema que exige poner en juego aspectos conceptuales de la proporcionalidad aritmética, nos permite relacionar los errores cometidos por los alumnos con la enseñanza recibida.

–*En busca de alternativas*. De las consideraciones anteriores surgen ideas para construir una propuesta didáctica alternativa encaminada a mejorar la comprensión de los alumnos.

Magnitudes proporcionales

a) Consideraciones sobre la enseñanza

Existen libros de texto que comienzan el tema de proporcionalidad aritmética presentando directamente la idea de razón; en otros libros este comienzo se hace a través de una reseña histórica; otros textos hacen comentarios sobre la utilidad del nuevo conocimiento y, finalmente, hay otros textos que presentan de forma ostensiva la relación entre cantidades de dos magnitudes:

> En un concurso en el que participan 16 personas, solo se darán tres premios; por tanto, la relación entre los premios y los concursantes es 3 a 16 (Álvarez, M. D. et al., 2003a; p.128).

A la vista de las distintas propuestas de los libros de texto podemos resaltar que no hay una preocupación explícita por situar la práctica docente en el amplio campo de su fenomenología; es decir, la enseñanza *no se ocupa de delimitar y precisar las condiciones exigibles a dos cantidades de magnitud para poder establecer relaciones de proporcionalidad entre ellas*.

b) Consideraciones sobre el aprendizaje

La siguiente respuesta ilustra sobre los errores cometidos por los estudiantes al construir modelos matemáticos adecuados a la fenomenología de la proporcionalidad aritmética:

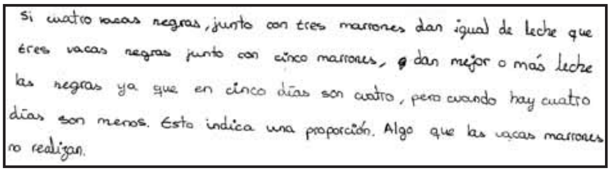

Si cuatro vacas negras, junto con tres marrones dan igual de leche que
tres vacas negras junto con cinco marrones, dan mejor o más leche
las negras ya que en cinco días son cuatro, pero cuando hay cuatro
días son menos. Esto indica una proporción. Algo que las vacas marrones
no realizan.

Figura 5

Como puede observarse, el alumno entiende que la proporcionalidad es aplicable tan sólo a una parte del problema, a las vacas negras. Para este alumno la existencia de proporcionalidad viene determinada porque la diferencia entre el número de vacas negras de las dos situaciones es igual a la diferencia del número de días; mientras que esta diferencia no se mantiene en el caso de las vacas marrones.

Esta respuesta pone de manifiesto la falta de comprensión del alumno sobre las condiciones exigibles a las magnitudes para que, entre ellas, exista una relación de proporcionalidad aritmética. Posiblemente el alumno hubiese alcanzado un mayor grado de comprensión si la enseñanza pusiese más énfasis en analizar las magnitudes que intervienen y las condiciones exigibles a tales magnitudes para que entre ellas exista una relación de proporcionalidad.

c) En busca de alternativas

En el mundo de la matemática abstracta la proporcionalidad se enuncia a través de las funciones de proporcionalidad. Son las relaciones numéricas establecidas entre las variables dependiente e independiente las que delimitan el campo de problemas en los que resultan pertinentes las ideas de proporcionalidad.

En el mundo físico la proporcionalidad aritmética está asociada a las relaciones entre cantidades de magnitud, por lo que resulta necesario establecer criterios que permitan a los estudiantes ubicar correctamente las situaciones que pertenecen al campo de la proporcionalidad.

Dos cantidades de magnitud se situarán en el campo de la proporcionalidad si el contexto en el que se ubican lo permite: la relación entre chicos y chicas hay que establecerla en un aula, en una ciudad o en un país; la relación entre el peso del pienso y el número de vacas hay que establecerlo en un tiempo y en un lugar; etc.

Las expresiones numéricas se podrán relacionar siempre que expresen cantidades de magnitudes mensurables: entre el número de una casa y el número de personas que viven en ella no hay relación de proporcionalidad, porque el número de una casa es un código que no indica una cantidad de magnitud.

Las relaciones de proporcionalidad se establecen entre cantidades sumables; en caso contrario esta relación no existe: la cantidad de agua de un recipiente y la temperatura a la que se encuentra no son proporcionales, pues la temperatura que alcanza la suma de dos cantidades de agua no es igual a la suma de las temperaturas de cada una de dichas cantidades.

Las cantidades tendrán una relación de proporcionalidad, en el contexto en que se sitúan, si dicha relación permanece al variar una de las cantidades. Así, el espacio que recorre un móvil y el tiempo que tarda en hacerlo son cantidades proporcionales siempre y cuando la velocidad del móvil sea constante; es decir, que en cada unidad de tiempo recorra la misma cantidad de espacio. Mientras que entre la estatura de una persona y los años que tiene dicha persona no existe proporcionalidad aritmética, porque no es constante el crecimiento de la persona en cada unidad de tiempo.

A modo de síntesis diremos que dos magnitudes mensurables y sumables serán proporcionales si entre cantidades de dichas magnitudes existe una relación funcional, en el sentido matemático. Este sentido matemático lo trasladaremos al mundo de las magnitudes mensurables con el nombre de *condición de regularidad* entre las cantidades implicadas, entendiendo como tal que: *permanece constante la relación entre una unidad de una de las magnitudes y la cantidad correspondiente de la otra magnitud*.

Desde estas consideraciones, y situados en la actividad docente, surgen preguntas como las siguientes: ¿no sería conveniente comenzar la instrucción analizando la posibilidad de relacionar proporcionalmente dos cantidades de magnitud?, ¿es necesario analizar previamente las condiciones para aplicar ideas de proporcionalidad a dos cantidades?, ¿hay que trabajar la idea de que la proporcionalidad está asociada a una condición de regularidad poniendo de manifiesto, ante cada situación, cuál es tal condición de regularidad, cuál es la cantidad que mantiene su valor en el contexto que sustenta la proporcionalidad?, ¿es de utilidad que los alumnos analicen y propongan ejemplos en los que se pueden o no se pueden aplicar ideas de proporcionalidad aritmética?

Razón entre cantidades de magnitud

a) Consideraciones sobre la enseñanza

En los libros de texto la razón se presenta con el significado de cociente, de división entre cantidades de magnitud, y se expresa con una fracción; aunque bajo esa idea general se encuentran conceptos muy diferenciados sobre la razón aritmética:

> *La razón de dos números es su cociente* (Lamadrid, C., 1994; p. 85)

> *Es el cociente de las medidas de dos cantidades de una misma magnitud* (Rico, L. et al, 1977; p.191)
> *Es el cociente entre cantidades de dos magnitudes* (Becerra. M. V. et al, 1997; p. 89)
> *Una razón es el cociente de dos números o de dos cantidades comparables* (García, P. et al, 1996; p. 80)

Bien es cierto que la razón tiene un sentido único y bien delimitado en el mundo de las Matemáticas; sin embargo, en el ámbito educativo esta dispersión de definiciones hace suponer que los autores tienen visiones distintas de dicho concepto. En efecto, en el primer caso la razón se presenta como una idea abstracta sin relación con el mundo de las magnitudes; en el segundo caso la razón tiene sentido de comparación multiplicativa entre cantidades de una misma magnitud; la tercera de las definiciones sugiere la razón como una cantidad de una nueva magnitud definida a partir de las dos magnitudes que se dividen; mientras que la última definición incorpora el término comparables que, suponemos, se refiere a magnitudes directamente proporcionales.

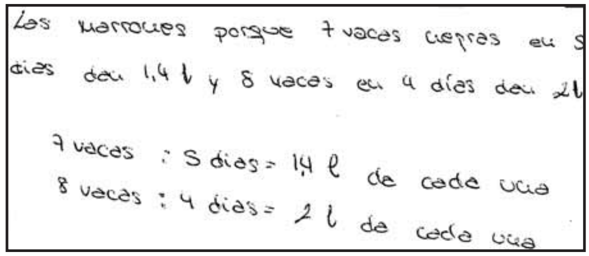
También detectamos cierta discrepancia entre los autores sobre la consideración de las razones como números racionales. Para algunos autores "cada par de valores que se corresponde en dos magnitudes directamente proporcionales puede escribirse en forma de fracción (…) A cada una de estas fracciones se le llama razón" (Garulo,1988; p. 78); mientras que para otros "no debes confundir fracción con razón. En una fracción el numerador y el denominador son números enteros. En una razón sus términos pueden ser números enteros o decimales. Toda fracción es una razón, pero no al revés " (Becerra. M. V. et al, 1997; p. 89).

Y, por último, queremos destacar el hecho de que en los textos escolares consultados se constata una cierta preocupación por precisar el término magnitud, con especial referencia a las magnitudes mensurables. Y, sin embargo, al introducir el concepto de razón, aunque se explicitan las magnitudes que se relacionan, no suele mencionarse la magnitud que resulta de la relación establecida entre ellas.

Desde estas consideraciones podemos decir que la enseñanza presenta la razón como un número no medida, como un ente abstracto desconectado de las magnitudes; es decir, la enseñanza *se ocupa solamente de los aspectos numéricos y desatiende la delimitación de la magnitud resultante y de sus unidades de medida.*

b) Consideraciones sobre el aprendizaje

La siguiente respuesta puede ser ilustrativa de la idea que algunos alumnos se han forjado sobre la razón en el contexto del problema que analizamos:


Los marrones porque 7 vacas negras en 5 días dan 1,4 l y 8 vacas en 4 días dan 2 l

7 vacas : 5 días = 1,4 l de cada una
8 vacas : 4 días = 2 l de cada una

Figura 6

Como puede observarse, en esta respuesta se construyen razones a partir de cantidades de dos magnitudes distintas; además, tales razones se interpretan en el sentido de cociente de cantidades. Pero la magnitud que aparece como resultado, litros de cada vaca, es incoherente con las magnitudes consideradas en la razón. Tal resultado tendría sentido si el término vaca lo utiliza el alumno para expresar la cantidad de leche, expresada el litros, que producen 7 vacas en 8 días. Es más, implicar la idea de razón exige tener en cuenta la condición de regularidad: una vaca de una determinado color produce la misma cantidad de leche que las otras vacas de ese color, y la misma cantidad de leche cada día.

Este tipo de respuestas ponen de manifiesto un conocimiento parcialmente erróneo sobre el término razón puesto que en ellas los alumnos admiten, de manera acertada, que la razón entre cantidades de dos magnitudes expresa una nueva cantidad de magnitud; formulan, de manera correcta, la expresión numérica de la cantidad resultante a partir de las expresiones numéricas de las cantidades que se comparan, pero muestran una total desconexión entre las magnitudes que se comparan y la magnitud resultante de tal comparación.

Por consiguiente, podemos señalar que el descontrol de las magnitudes es una causa importante de los errores que cometen los estudiantes al utilizar las razones numéricas. Y también podemos señalar que su origen hay que situarlo en una práctica docente que no presta la debida atención a la naturaleza de las magnitudes implicadas y a sus correspondientes unidades de medida.

c) En busca de alternativas

En el ámbito escolar la razón aritmética se define como la división entre dos cantidades de magnitud o entre dos números. Esta definición coincide con la utilizada por las matemáticas en las funciones de proporcionalidad directa y, por tanto, goza de todas las garantías de corrección y de validez. Pero en el mundo de la enseñanza de la matemática, y sobre todo en las etapas de educación obligatoria, los conceptos no pueden presentarse con su expresión formal; antes bien, hay que presentarlos desde su modelización en el mundo de los objetos físicos. Cabe cuestionarse, por tanto, si el concepto de razón que se presenta a los escolares les permite aprehenderlo de manera cognitivamente efectiva.

Desde la fenomenología histórica observamos que la idea de razón utilizada por los matemáticos de la antigua Grecia no se corresponde con la idea de división de las longitudes de dos segmentos, antes bien, se refiere al resultado de la medida por conmensuración de un segmento respecto de otro segmento. Tampoco los árabes utilizaban la razón como cociente en situaciones de trueque, sino que tenía el sentido de una medida: la cantidad de uno de los tipos de objeto que se cambiaba por cada uno de los objetos de otro tipo; es decir, que si el trueque consiste en cambiar 2 lanzas por 5 collares, la razón 2/5 expresaba la cantidad de lanzas que se cambiaba por 1 collar, no se interpretaba como la división de 2 lanzas entre 5 collares.

Cuando la razón viene expresada con la notación fraccionaria, suele interpretarse como una descripción (si 3/5 es la razón entre zumo de naranja y agua se interpreta que hay 3 litros de zumo por cada 5 litros de agua); mientras la notación decimal de la razón se suele interpretar como una medida (el valor 0,6 se interpreta como litros de zumo por 1 litro de agua).

El hecho de que en la práctica docente se presente la razón como un cociente, pensamos que responde a causas tan variadas como las siguientes: la escasa o nula atención que se presta a la medida de cantidades de magnitud (se priorizan los cálculos y transformaciones en el sistema métrico decimal en detrimento de los aspectos conceptuales); la creencia de que la medida de cantidades no enteras queda englobada en el significado de la fracción como relación parte-todo (creencia que, en nuestra opinión, es errónea); la preocupación por facilitar a los aprendices la construcción mental de una matemática compleja; y la presunción de que los alumnos tienen ideas sólidas sobre la fracción como cociente.

Entendemos, por tanto, que la idea de razón debe ubicarse en el contexto de la medida y no en el de las relaciones multiplicativas entre cantidades:

> La razón aritmética entre una cantidad a de la magnitud M y una cantidad b de la magnitud N, indica que a/b unidades de la magnitud M se corresponden con 1 unidad de la magnitud N.

Entre dos cantidades de magnitud se definen dos razones distintas, cada una de las cuales tiene sentido y es perfectamente válida; sin embargo, una de ellas es la que resulta más familiar, más natural o más comprensible. Por ejemplo, si 8 libros cuestan 25 euros se definen dos razones:

- 25/8 euros es el precio de 1 libro (si se cumple la condición de regularidad de que todos los libros tienen el mismo precio).
- 8/25 de libro se compra con 1 euro (si se cumple la condición de regularidad de que cuestan lo mismo las partes de libro del mismo tamaño).

Para incrementar la comprensión de los alumnos es necesario que definan las dos razones presentes en el contexto del problema, indicando la que les resulta más familiar y asumiendo que las dos razones definidas son igualmente válidas.

Constante de proporcionalidad

a) Consideraciones sobre la enseñanza

Los libros de texto tienden a presentar la constante de proporcionalidad mediante ejemplos: "en una tabla de valores directamente proporcionales, el cociente de dos valores correspondientes es constante. Al valor de ese cociente se le llama constante de proporcionalidad" (Cólera, J. et al, 2000a; p. 82).

Y con la introducción del concepto prácticamente se termina la presencia de la constante de proporcionalidad en la secuencia de enseñanza, pues no se vuelve a hacer referencia a ella ni para introducir nuevos conceptos, ni para justificar alguna de las técnicas que se enseñan; de este modo, la enseñanza desplaza a un lugar muy secundario un concepto esencial para el trabajo en el campo de las magnitudes mensurables.

Como resultado de esta práctica educativa queda marginada una idea fundamental: cualquier manipulación entre razones aritméticas solamente tiene validez si es consistente con los valores que tienen las constantes de proporcionalidad implicadas. En consecuencia, y a modo de diagnóstico, podemos señalar que la enseñanza *provoca un bajo grado de comprensión por no incidir ni en el significado de la constante de proporcionalidad, ni el importante papel que juega dentro del razonamiento proporcional*.

b) Consideraciones sobre el aprendizaje

Reproducimos la respuesta de un estudiante que resulta ilustrativa del modo en que se manipulan cantidades de magnitudes sin tener en cuenta cómo afecta a la constante de proporcionalidad.

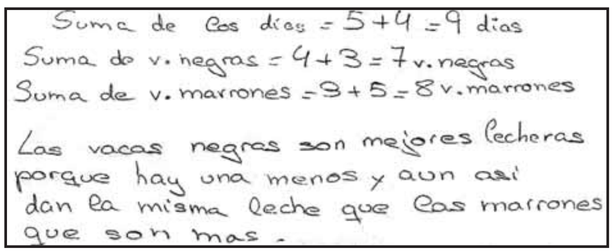

Suma de los días = 5+4 = 9 días
Suma do v. negras = 4+3 = 7 v. negras
Suma de v. marrones = 3+5 = 8 v. marrones
Las vacas negras son mejores lecheras porque hay una menos y aun así dan la misma leche que las marrones que son mas.

Figura 7

Ciertamente éste alumno piensa que la respuesta es la adecuada porque admite que pueden sumarse cantidades de las magnitudes que figuran en los datos del problema; pero lo que no sabe es que al sumar esas cantidades ha utilizado una constante de proporcionalidad que resulta inadecuada para resolver el problema.

En efecto, en este problema hay que establecer una comparación entre dos situaciones en las que intervienen cantidades diferentes de las mismas magnitudes. Pero el alumno no es consciente de que esas dos situaciones se podrán comparar siempre y cuando se presuponga una condición de regularidad en la producción de leche: *que cada día cada una de las vacas negras produzca la misma cantidad de leche, y que cada día cada una de las vacas marrones produzca la misma cantidad de leche*.

Este alumno tampoco es consciente de la incorrección que comete al realizar la suma de estas cantidades[1], ni de la constante de proporcionalidad que utiliza para resolver el problema: cada grupo de vacas de cada color produce, cada día, la misma cantidad de leche. Evidentemente esta constante de proporcionalidad dista mucho de ser la que permite resolver el problema.

Parece claro que el alumno no tiene control sobre la constante de proporcionalidad, ni tampoco del papel que juega ésta en las tareas que implican al razonamiento proporcional. En buena medida esta falta de conocimiento hay que achacarla a una práctica docente que no concede la debida importancia a definir y controlar las constantes de proporcionalidad que intervienen en la resolución de los problemas.

c) En busca de alternativas

En el ámbito de la matemática formal, el hecho característico y diferenciador de las funciones de proporcionalidad es la existencia de un valor constante que relaciona, de forma multiplicativa, las variables. Ese valor constante, denominado constante de proporcionalidad, está presente tanto en las funciones de proporcionalidad directa, $y=\mathrm{K}x$, como en las funciones de proporcionalidad inversa, $y=\mathrm{K}/x$.

En el ámbito de las magnitudes mensurables tal constante de proporcionalidad hay que interpretarla como un número medida, como una cantidad de magnitud, dependiendo del contexto:

– En contextos de proporcionalidad directa la constante de proporcionalidad cuantifica la condición de regularidad a partir de las cantidades implicadas.
  - Por ejemplo, en la situación: con 8 pasos se avanzan 4 metros.
  - La condición de regularidad indica que *en cada paso se avanza la misma longitud.*
  - La constante de proporcionalidad es 4/8 metros/paso, e indica que *en cada paso se avanza 4/8=0,5 metros.*

– En contextos de proporcionalidad inversa la constante de proporcionalidad es una cantidad de magnitud constante, que no se puede modificar, y es independiente de la condición de regularidad.
  - Por ejemplo, en la situación: 8 obreros en 4 días pintan una pared.
  - La condición de regularidad indica que *en cada uno de los obreros pinta, cada día, la misma superficie de pared.*
  - La constante de proporcionalidad es *la superficie de la pared.*

Pensamos que la enseñanza debe conceder la debida importancia al control de la constante de proporcionalidad. En cada situación problemática debe manifestar explícitamente el valor de esta constante, atendiendo a las dos situaciones diferenciadas:

– En situaciones de proporcionalidad directa, la constante de proporcionalidad expresa la relación entre una unidad de una de las magnitudes y la correspondiente cantidad de la otra magnitud. Por ejemplo, en el contexto: *la superficie del patio de recreo es de 8.000 metros cuadrados y juegan 120 niños*, tendremos que si la condición de regularidad es que en cada metro cuadrado haya el mismo número de niños, la constante de proporcionalidad es 120/8.000 niños por metro cuadrado.

– En problemas de proporcionalidad inversa aparecen dos contextos claramente diferenciados que permiten cuantificar la constante de proporcionalidad:

  - Si la condición de regularidad está cuantificada, la constante de proporcionalidad se puede obtener de forma explícita.

    Por ejemplo, en el contexto: *con esta cantidad de dinero puedo comprar 12 libros de 6 euros cada uno*, conocemos que la condición de regularidad es: todos los libros tienen el mismo precio y ese mismo precio es de 6 euros. Por tanto, podemos conocer la constante de proporcionalidad: el dinero que llevo es $12 \times 6 = 72$ euros

  - Si la condición de regularidad no está cuantificada, la constante de proporcionalidad se puede expresar utilizando una denominación específica de dicha condición de regularidad.

    Por ejemplo, si enunciamos la situación *5 vacas en 18 días se comen todo el pienso de la granja*, la condición de regularidad es que cada vaca coma cada día la misma cantidad de pienso; o dicho de otro modo: que cada vaca coma cada día una ración, *r*, de pienso. En estas condiciones, la constante de proporcionalidad, el pienso que hay en la granja, viene dada por el producto $5 \times 18 \times r = 90r$, entendiendo que r es la cantidad de pienso que come una vaca en un día.

Proporción entre razones aritméticas

a) Consideraciones sobre la enseñanza

Los libros de texto hacen una formulación única de la proporción como *la igualdad de dos razones*. Esta definición se realiza desde la consideración de las razones como entes numéricos abstractos, consideración que permite establecer la existencia de proporciones mediante el producto cruzado de los valores numéricos de las dos fracciones:

> En una proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios. (García, P. et al, 1996; p. 81)

Y también desde el terreno numérico se justifican algunas propiedades o la existencia de varias posibles proporciones a partir de situaciones problemáticas contextualizadas en el ámbito de las magnitudes mensurables (García, P. et al, 1996; p. 83).

En suma, en los textos analizados no se detecta una preocupación por delimitar los aspectos cualitativos de las razones que se igualan: *el concepto de proporción se refiere a la igualdad de fracciones numéricas y no a la igualdad de las cantidades de magnitud a que se refieren.*

b) Consideraciones sobre el aprendizaje

El siguiente ejemplo ilustra sobre aquellas respuestas que encuentran la solución del problema a partir de la igualdad entre dos razones:

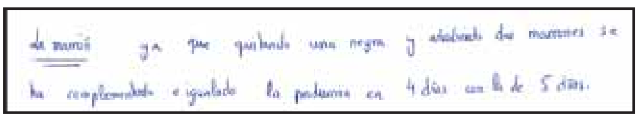


Figura 8

En este tipo de respuestas se utilizan argumentos ciertos aunque inapropiados. En efecto, se puede observar que el alumno utiliza dos comparaciones aditivas sobre el número de vacas de cada color; después realiza otra comparación aditiva sobre el número de días; finalmente, y a partir de los resultados de dichas comparaciones, formula una nueva comparación de tipo aditivo. Como consecuencia de este proceso, el estudiante establece como correcta la proporción:

Producción de 1 vaca negra en 5 días = Producción de 2 vacas marrones en 4 días.

Vemos, por tanto, que la concatenación de comparaciones de tipo aditivo producen resultados aparentemente válidos porque se han obtenido a partir de argumentos aparentemente sólidos. Lo que controla el alumno en todo este proceso son las relaciones aditivas, pero lo que no controla es la proporción que utiliza, pues formulada de forma correcta sería:

Producción de 1 vaca negra en 4 días + Producción de 4 vacas negras y 3 vacas marrones en 1 día = Producción de 2 vacas marrones en 4 días

Sirva este ejemplo para poner de manifiesto que los alumnos tienen dificultades para gestionar el concepto de proporción debido, en buena medida, a la falta de control sobre las cantidades de magnitud. Es más, con este bajo grado de comprensión, los alumnos suelen necesitar algún contraejemplo para admitir que las comparaciones aditivas que utilizan son tan ciertas como inadecuadas para resolver el problema [2].

Observamos, por tanto, que la forma en que los libros de texto introducen el concepto de proporción es causa de errores en los alumnos debido a que la enseñanza ofrece una perspectiva incompleta del concepto de proporción, pues se despreocupa de asociar la proporción a la igualdad entre cantidades de magnitud.

c) En busca de alternativas.

Las ideas sobre la proporción tienen una sólida justificación en el ámbito de la matemática formal, ámbito en el que se trabaja con ideas abstractas.

En el ámbito de la enseñanza esas ideas hay que presentarlas y justificarlas en el mundo de las magnitudes mensurables. Y en este mundo los conceptos y relaciones adquieren una perspectiva diferenciada de los entes matemáticos abstractos:

- La igualdad de fracciones tiene sentido siempre y cuando se garantice que dichas fracciones se refieren a la misma cantidad de magnitud; es decir, la idea de proporción debe conectarse con la idea de equivalencia de fracciones.

- En los libros de texto se presenta una relación importada desde el mundo de las ideas abstractas:
  $4/5 = 8/10 \Leftrightarrow 4 \cdot 10 = 5 \cdot 8 \Leftrightarrow 40 = 40$ (Álvarez, M. D. et al., 2003a; p. 157)

  Pero esta relación es de muy difícil justificación en el mundo de las magnitudes mensurables, debido a la dificultad de concretar la magnitud resultante de los productos cruzados. Así, por ejemplo, si contemplamos una razón entre el número de libros comprados y su precio en euros, habría que justificar la igualdad de dos cantidades, $4 \cdot 10$ y $5 \cdot 8$, de una extraña magnitud: libros $\times$ euros.

Es cierto que la secuencia de enseñanza de los libros de texto necesita presentar los productos cruzados para, posteriormente, presentar la técnica de la regla de tres. Lo que cabe cuestionarse si el fin justifica los medios, si hay que enmascarar u ocultar la enseñanza comprensiva de los conceptos en aras de una coherencia en la presentación de las destrezas; es decir, si hay que mantener la enseñanza de los productos cruzados o, si por el contrario, hay que buscar otros procedimientos de cálculo que eviten la utilización del método tradicional de la regla de tres.

Magnitudes directa e inversamente proporcionales

a) Consideraciones sobre la enseñanza

La enseñanza que proponen los libros de texto respecto a la distinción entre las magnitudes proporcionales tiende a sintetizarse en frases estandarizadas. Así, para la proporcionalidad directa: "al aumentar una magnitud la otra también aumenta, y si disminuye una, la otra también lo hace" (Becerra. M. V. et al, 1997; p. 91); y para la proporcionalidad inversa: "cuando una aumenta, la otra disminuye" (Becerra. M. V. et al, 1997; p. 92). Aunque otros autores, que tratan de evitar el uso de estrategias aditivas por parte de sus alumno, insisten en la necesidad de verificar las relaciones multiplicativas entre cantidades de las magnitudes cuyas características se quieren determinar: "dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al aumentar una (doble, triple, ...), la otra aumenta de igual manera (doble, triple, ...). Al disminuir una (mitad, tercio, …), la otra disminuye de la misma forma (mitad, tercio, ..)" (Cólera, J. et al., 2000a; p. 126).

Este importante concepto de magnitudes proporcionales, tal y como se enseña en los textos revisados, nos parece confuso y parcial; de aquí que resulte de difícil gestión por los aspectos conceptuales que el alumno debe poner en juego: ¿por qué puede asegurarse que 6 vacas comerán 50 kilos de forraje, si se sabe que 3 vacas comen 25 kilos de forraje?, ¿qué exigencias conlleva la proporcionalidad de magnitudes?, ¿qué diferencias conceptuales hay entre magnitudes directa o inversamente proporcionales?

La tipología de las magnitudes tiene un valor relativo, puesto que dependiendo del contexto en el que se sitúen unas mismas magnitudes pueden ser directa o inversamente proporcionales. Además, la tipología de las magnitudes viene determinada por relaciones globales entre todas las magnitudes que intervienen, tanto las que aparecen de forma explícita como las que lo hacen de forma implícita. Pero estas consideraciones están ocultas en la formulación escolar de la tipología de las magnitudes, porque la enseñanza *se preocupa más de simplificar la formulación del concepto de magnitudes directa o inversamente proporcional que de explicitar las auténticas dimensiones del concepto.*

b) Consideraciones sobre el aprendizaje

El siguiente ejemplo ilustra sobre aquellas respuestas que encuentran la solución del problema recurriendo a una deficiente clasificación de las magnitudes:

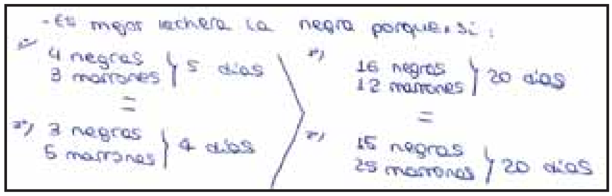


Figura 9

En este caso se aplica el razonamiento proporcional de manera inadecuada, pues la variación multiplicativa de las cantidades solamente es cierta para magnitudes directamente proporcionales. Sin embargo, ante la necesidad de igualar una de las cantidades para relacionar las otras dos, el alumno aplica un aumento multiplicativo a cantidades de magnitudes inversamente proporcionales. Pero esta actuación es incorrecta porque no se ha tenido en cuenta que la cantidad de leche producida es esencial para determinar las relaciones de proporcionalidad entre el número de vacas y el de días que tardan en producir esa cantidad de leche.

Si en lugar de actuar sobre los aspectos cuantitativos de las cantidades el alumno hubiese actuado sobre los cualitativos, posiblemente hubiese evitado dar una respuesta errónea. En efecto, aumentar 4 veces el número de vacas de cada color se puede justificar indicando que hay 4 grupos de vacas con la misma composición e igual producción; sin embargo, no hay justificación al hecho de que el número de días se haya hecho 4 veces mayor: no hay relación entre las variaciones de los datos implicados en esta respuesta.

Desde estas consideraciones se puede indicar que la práctica de enseñanza ofrece una formulación débil del concepto de magnitudes proporcionales, lo que provoca un importante número de errores.

c) En busca de alternativas

Cabe cuestionarse la formulación habitual de la proporcionalidad entre magnitudes. En vez de buscar relaciones multiplicativas, que en muchos casos son difíciles de establecer, hay que planificar una instrucción que incida en la búsqueda y caracterización de las magnitudes, explícitas e implícitas, que figuran en el enunciado, así como en las relaciones que se pueden establecer entre dichas magnitudes.

- Magnitudes directamente proporcionales son aquellas que, en el contexto del problema, permiten definir una razón. Esa razón expresa la medida de la cantidad de una de las magnitudes que se corresponde con 1 unidad de la otra magnitud.

– Magnitudes inversamente proporcionales son aquellas cantidades que no definen una razón, pero que sí permiten definir una constante de proporcionalidad.

La consideración de la tipología de las magnitudes es esencial para evitar que los alumnos acepten como situaciones proporcionales aquellas que no lo son, tanto en el ámbito matemático (la amplitud de ángulos y el de las razones trigonométricas correspondientes, las relaciones exponenciales o logarítmicas, la probabilidad...), como en el ámbito de las magnitudes mensurables.

Regla de tres

a) Consideraciones sobre la enseñanza

La tendencia general de los libros de texto es la de presentar la técnica de la regla de tres mediante un ejemplo y, seguidamente, detallar la técnica con carácter general. Y todos los textos consultados siguen un mismo esquema: primero se aborda la regla de tres simple y directa, después la regla de tres simple e inversa y, finalmente, la regla de tres compuesta.

Es de destacar que la formulación de la técnica no es uniforme. Así, para algunos autores se actúa de forma vertical, *se forman dos razones dividiendo, en cada una, los valores pertenecientes a una misma magnitud* (Cólera, J. et al., 2000b; p. 83); mientras que para otros autores las razones se forman en horizontal, se forman a partir de las dos magnitudes que intervienen en cada una de las situaciones que se relacionan.

Además, todos los libros de texto analizados presentan una vía alternativa a la tradicional técnica de la regla de tres, que suelen denominar "método de reducción a la unidad" y que consiste en relacionar una de las cantidades con una unidad de la otra cantidad a través de la división. Aunque no se sigue esta pauta en todos los casos, pues hemos encontrado que el que se considera método alternativo consiste en relacionar una de las cantidades con una unidad de la otra cantidad ¡utilizando el método tradicional de la regla de tres! (Álvarez, M.D. et al., 2003b; p. 160).

La presentación de la regla de tres inversa conlleva un cambio en la proporción que se explica de forma confusa: "recuerda que el producto de dos valores correspondientes es constante y observa que, para construir la proporción, hemos de invertir la razón de los valores de una de las magnitudes "(Cólera, J. et al., 2000b; p. 85). Con estas "justificaciones" al alumno no le queda más alternativas que aprender y aplicar la técnica, o cuestionar toda la enseñanza recibida, puesto que se establece una proporción entre dos razones que expresan cantidades de magnitudes distintas.

La enseñanza, una vez introducidas las técnicas, se interesa por mostrar al alumno la variedad y utilidad de dichas técnicas en situaciones del mundo físico: repartos proporcionales, porcentajes, escalas, interés simple, etc. Podemos, por tanto, señalar que *la enseñanza de la regla de tres se limita a la descripción de las técnicas, sin justificar los aspectos conceptuales.*

b) Consideraciones sobre el aprendizaje

Reproducimos la respuesta de un alumno que pone en juego sus conocimientos sobre la técnica de la regla de tres simple:

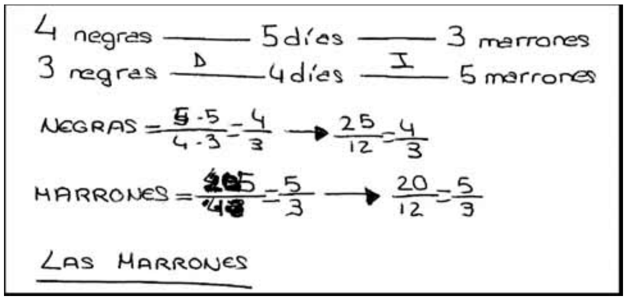


Figura 10

Como puede observarse, en esta respuesta el alumno muestra un buen conocimiento parcial de la técnica de la regla de tres: colocar en columnas las cantidades de cada una de las magnitudes, determinar si las magnitudes que se relacionan son directa o inversamente proporcionales y, por último, establecer las relaciones numéricas correspondientes. Sin embargo, la ausencia de una incógnita, de un valor desconocido, ha supuesto una incorrecta igualdad numérica: iguala la fracción que relaciona las dos cantidades de vacas negras con la fracción que resulta de considerar inversa la relación entre vacas marrones y número de días. Después el alumno establece dos igualdades, totalmente inconsistentes y, finalmente, compara entre sí los dos miembros de dichas igualdades.

A lo largo del proceso de resolución este alumno pone de manifiesto una débil comprensión de las razones que justifican la técnica de la regla que se ha empleado. En efecto, en esta respuesta el alumno determina valores numéricos para las magnitudes que el enunciado exige -vacas negras y vacas marrones-, y hace una comparación numérica entre estos valores porque es incapaz de controlar el sentido que tienen tales números. De este modo, el alumno da una respuesta que no corresponde al enunciado: se pregunta por la productividad de cada tipo de vaca y se responde sobre la relación entre el número de ellas que hay en cada uno de los dos grupos de vacas.

Podemos afirmar, por tanto, que en la enseñanza recibida puede ser la causante de algunos de los errores que cometen los alumnos al utilizar la regla de tres porque *la enseñanza solamente se ocupa del correcto manejo de las técnicas sin justificar las ideas matemáticas que sustentan dicha técnica y, en consecuencia, los alumnos no disponen del conocimiento conceptual suficiente para valorar la pertinencia y validez de las manipulaciones que realizan.*

c) En busca de alternativas

La proporcionalidad aritmética culmina con la presentación de la técnica de la regla de tres, técnica que resuelve el cálculo de la cantidad desconocida: "dícese regla de tres porque en ella ocurren 3 números continuos o discontinuos proporcionales, y toda práctica no es otra cosa sino hallar otro cuarto número ignoto que se haya en tal proporción con el tercero como el segundo con el primero" (Pérez de Moya, 1562).

La técnica de la regla de tres es conocida desde hace muchos siglos pues ya figura en el llamado manuscrito Bakhshali (ciudad del norte de la India en la que se encontró), y sobre el que hay cierto consenso en situarlo en el siglo I. Esta regla llega a Occidente a través de los árabes, siendo Al Biruni quien, en el siglo X, dedica una obra completa sobre la regla de tres en la India. Posteriormente, en las aritméticas del Renacimiento italiano se introducen modificaciones en la técnica tradicional para separar los números con líneas horizontales o verticales. A partir del siglo XIX se incorporó una incógnita para indicar la cantidad desconocida y se utilizó la proporción entre dos razones expresadas con la notación fraccionaria.

En los textos escolares actuales no existe una técnica dominante para la regla de tres, sino que conviven las de utilizar la constante de proporcionalidad, la de los productos cruzados y la de reducción a la unidad.

La cuestión a plantearse es si se puede potenciar el conocimiento conceptual que sustenta las técnicas de cálculo utilizadas. Proponemos una alternativa sustentada en las ideas de razón y de constante de proporcionalidad.

La resolución de problemas de proporcionalidad aritmética en los que hay que encontrar una cantidad desconocida exigen métodos distintos dependiendo de la tipología de las magnitudes. En los siguientes ejemplos se detallan tales métodos en los que se sustituye el tradicional método de la regla de tres por un control de las magnitudes y un correcto manejo de la estructura multiplicativa de los números racionales positivos.

a) Magnitudes directamente proporcionales

Enunciado: *En una receta se mezclan 3 vasos de aceite por cada 17 cucharadas de azúcar. Si se dispone de 5 vasos de aceite, ¿con cuántas cucharadas de azúcar hay que mezclarlos?*

Proceso de resolución:

- Definir, si existe, la condición de regularidad: *en las dos situaciones la mezcla debe tener el mismo sabor; es decir, que las cantidades de aceite y azúcar mantienen la misma relación.*

- Determinar, si existe, la constante de proporcionalidad: *1 vaso de aceite se mezcla con 17/3 cucharadas de azúcar; o bien, 1 cucharada de azúcar se mezcla con 3/17 vasos de aceite.*

- Establecer la tipología de las magnitudes: *son directamente proporcionales porque existe una razón entre ellas, y porque no hay una cantidad de magnitud que permanezca invariante en las dos situaciones.*

- Elegir la razón que facilite la resolución del problema: *utilizaremos la razón 17/3 porque indica la cantidad de azúcar por 1 vaso de aceite y se conoce que hay 5 vasos de aceite.*

- Calcular la cantidad desconocida: *para 5 vasos de aceite se necesitan 17/3 · 5 = 85/3 cucharadas de azúcar.*

b) Magnitudes inversamente proporcionales

Enunciado: *Para llenar un depósito de agua 3 grifos tardan 17 horas. Si se abren 5 grifos, ¿cuánto tiempo tardarán en llenar ese depósito?*

Proceso de resolución:

- Definir, si existe, la condición de regularidad: *cada uno de los grifos vierte el mismo caudal; es decir, cada grifo vierte la misma cantidad de agua en cada hora.*

- Determinar, si existe, la constante de proporcionalidad: *la capacidad del depósito no varía; es igual para las dos situaciones que figuran en el enunciado.*

- Establecer la tipología de las magnitudes: *el número de grifos y el tiempo son inversamente proporcionales porque la capacidad del depósito no varía.*

- Calcular la cantidad desconocida utilizando el valor para la unidad[3]

  Un solo grifo tardará 17×3=51 horas
  Al abrir 5 grifos tardarán 51/5 horas

La enseñanza tradicional de la *regla de tres compuesta* exige crear situaciones problemáticas para justificar la necesidad de aplicar esta técnica. Sin embargo, cuanto más compleja es la técnica más difícil es para los alumnos controlar el sentido de las manipulaciones implicadas. Sin embargo, la técnica se puede simplificar. Así, en el contexto:

10 máquinas trabajan durante 15 días 8 horas diarias para cavar una zanja de 250 metros de largo, 2 metros de ancho y 12 metros de profundidad.

Una reconversión de las unidades permite transformar el problema en uno de regla de tres simple. En efecto, de los datos disponibles se concluye que:

> Horas trabajadas: $10 \times 15 \times 8 = 1200$ horas de máquina.
> Trabajo realizado: se cavan $250 \times 2 \times 12 = 6000$ metros cúbicos de tierra.
> Nuevo enunciado: *Para cavar 6000 metros cúbicos de tierra hacen falta 1200 horas de trabajo de máquina*

A modo de conclusión

Esperamos y deseamos que las consideraciones y reflexiones de este trabajo sirvan para cuestionar la enseñanza tradicional de la proporcionalidad aritmética. Nuestra intención es mostrar que es viable una práctica docente alternativa, sustentada en un control de los aspectos conceptuales, de las magnitudes que intervienen, del significado de la multiplicación y de la división de números racionales, y apoyada en las siguientes actuaciones:

– Determinar la existencia de proporcionalidad aritmética haciendo explícita la condición de regularidad entre las magnitudes.

– Dar significado a la razón como medida de la cantidad de una magnitud que se relaciona con una unidad de otra magnitud.

– Determinar la constante de proporcionalidad analizando el papel que juegan todas las magnitudes que intervienen en el problema.

– Controlar que la modificación de las cantidades de magnitud no modifique la proporción entre dichas cantidades.

– Clasificar la tipología de las magnitudes atendiendo la existencia de una razón entre ellas y el valor de la constante de proporcionalidad

– Calcular la cantidad desconocida a partir de la razón en los problemas de proporcionalidad directa.

– Utilizar la relación de una cantidad de una de las magnitudes con la unidad de la otra magnitud, o el valor de la constante de proporcionalidad, en los problemas de proporcionalidad inversa.

Confiamos en que estas sugerencias ayuden a mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad aritmética en el ámbito escolar, en aras a incrementar las competencias aritméticas de los ciudadanos. ■

NOTAS

[1] Las razones que utiliza el alumno provienen, aunque no sea consciente, de dar por correcta la suma de fracciones sumando numeradores y denominadores $4/5 + 3/4 = 7/9$; $3/5 + 5/4 = 8/9$.

[2] Si en el enunciado se sustituye el dato *5 vacas marrones* por *6 vacas marrones*, el argumento del alumno da como respuesta las vacas marrones; sin embargo la respuesta correcta es las vacas negras. Y si en el enunciado se sustituye el dato *4 días* por *2 días*, el alumno responderá que las vacas marrones, aunque en realidad el problema no tenga solución.

[3] Utilizando conocimientos algebraicos la cantidad desconocida se obtiene del siguiente modo:

- Asignar un valor a la condición de regularidad: *por ser desconocida, llamamos c a la condición de regularidad o cantidad de agua (medida en litros, por ejemplo), que vierte 1 grifo en 1 hora.*
- Calcular, en las dos situaciones, la constante de proporcionalidad:

Situación 1: **51·c**, pues 3 grifos vierten 3·c litros en 1 hora, y 51·c litros en 17 horas

Situación 2: **(5·T)·c**, siendo T el tiempo (en horas) que necesitan los 5 grifos para llenar el depósito

- Igualar los valores de la constante de proporcionalidad en las dos situaciones

$$51\cdot c = (5\cdot T)\cdot c, \text{ de donde } \mathbf{T = 51/5 \text{ horas}}$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Álvarez, M. D., y al. (2003a). *Matemáticas 1º ESO. Serie práctica*. Madrid: Santillana.

Álvarez, M. D., et al. (2003b). *Matemáticas 2º ESO. Serie práctica*. Madrid: Santillana.

Becerra, M. V., et al. (1997). *Matemáticas 2º E.S.O*. Madrid: McGraw-Hill

Behr, M. J. (1987). Ratio and proportion. A synthesis of eight conference papers. In Gergson, U.C.; Herscovics, N y Kierat, C (eds), *Psychology and mathematics education, Vol II*. Proceedings of the Eleventh International Conference, Montreal, Canadá.

Bigelow, J.C.; Davis, G.E. y Hunting, R.P. (1989). Some remarks on the homology and dynamics of rational number learning. *Paper presented at the Research Presession Annual Meeting of the National Teachers of Mathematics*. Orlando, Florida.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*. Tesis doctoral. Universitat Autónoma de Barcelona.

Cólera, J., et al. (2000a). *Matemáticas Secundaria. 1º ESO. Serie Aula Abierta*. Madrid: Anaya.

Cólera, J., et al. (2000b). *Matemáticas Secundaria. 2º ESO. Serie Aula Abierta*. Madrid: Anaya.

Cramer, K. y Post, T. (1993). Proportional reasoning. *The Mathematics Teacher*. 86, pp. 404-407.

Cramer, K., Post, T. y Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications. In Owens, D. T. (ed), *Research Ideas for the Classroom, Middle Grades Mathematics*. New York: MacMillan Publishing Company, pp. 159-178.

Davis, G., Hunting, R.P. y Pearn, C. (1993). Iterates and relations: Elliot and Shannon's fractions schemes. In Hirabayashi, I; Nohda, N.; Shigematsu, K. y Lin, F (eds), *Proceedings of the Seventeenth Conference Of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. III*. The University of Tsukuba, Tsukuba City, pp. 154-161.

Fernández, A. y Puig, L. (2002). Análisis fenomenológico de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, vol. 5, nº 2, pp. 397-416.

García, P., et al. (1996). *Matemáticas curso 1º ESO*. Santillana Secundaria. Madrid: Santillana.

Gárrulo, C. (1988). *Matemáticas 7 E.G.B*. Barcelona: Edebé.

Gómez, B. (2002). El análisis de un cuestionario: el perrito. *Actas VI Seminario de Investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico*. Santiago de Compostela.

Hart, K. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. London: Murray

Heller, P. M., Ahlgren, A., Post. T., Behr, M. y Lesh, R. (1989). Proportional reasoning: the effect of two constext variables, rate type, and problem setting. *Journal of Research in Sciencie Teaching*, Vol, 26, nº 3, pp. 202-220.

INCE (2002). *Evaluación de la Educación Primaria 1999. Fallos y dificultades de los alumnos en la prueba de Matemáticas*. Instituto Nacional de Calidad y Evaluación. Madrid: Secretaría General Técnica del Ministerio de Educación y Ciencia.

INECSE (2004). *Evaluación PISA 2003. Resumen de los primeros resultados en España*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia

Kieren, T.E. (1980). The rational number construct: its elements and mechanims. In Kieren, T. E. (ed), *Recent Research on Number Learning*. Columbia: Eric/Smeac, pp. 125-150.

Lamadrid, C. (1994). *Azimut. Matemáticas 7º E.G.B.* Madrid: Grupo Anaya.

López, J. A. y Moreno, Mª L. (1997). *Resultados de Matemáticas. Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias (TIMSS*). Madrid: Instituto Nacional de Calidad y Evaluación, MEC. Madrid.

Margarit, J., Figueras, O. y Gómez, B. (2001). Ratio comparison: performance on ratio in similarity tasks. *Proceedings of the 25 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol I*. Utrech, Holanda.

Neuman, D. (1993). Early conceptions og fractions: A phenomenographic approach. In Hirabayashi, I; Nohda, N.; Shigematsu, K. y Lin, F (eds), *Proceedings of the Seventeenth Conference Of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. III*. The University of Tsukuba, Tsukuba City, pp. 170-177.

Pérez de Moya, J. (1562). *Aritmética práctica y speculativa*. Salamanca: Biblioteca Castro. Reedición en 1998. Madrid: Ediciones de la Fundación José Antonio de Castro.

Rico, L., et al., (1977). *Matemáticas 7. E.G.B.* Madrid: Anaya

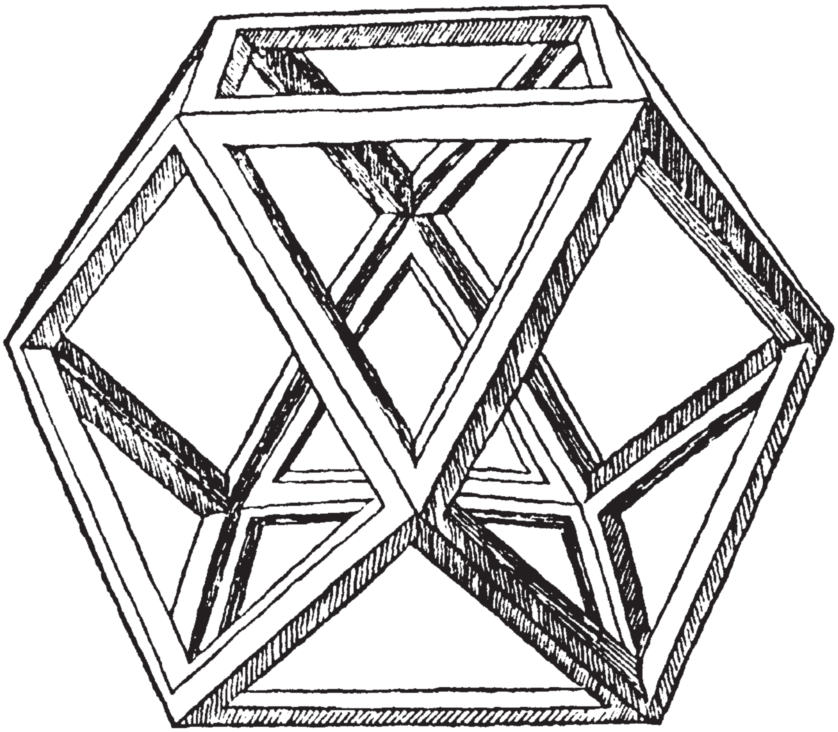
Singer, J.A. y Resnick, L.B. (1992). Representation of proportional relationships: Are children par-part or part-whole reasoners? *Educational Studies in Mathematics,* vol 23, pp. 231-246.

Streefland, L. (1993). Fractions: A realist approach. In Carpenter, T.P.; Fennema, E. y Romberg, T.A. (eds), *Rational Numbers: An integration of research*. Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 289-325.

Tourniaire, F. y Pulos, S. (1995). Proporcional reasoning: a review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, vol 16, pp. 181-204

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structures. In Lesh, R. y Landau, M. (ed), *Acquisition of Mathematical Concepts and Proceses*. New York: Academic Press, pp.127-174.

suma+



Dibujo de Leonardo da Vinci para *La divina proporción* de Luca Pacioli

poliedro

suma+ 62
Noviembre 2009, pp.51-54

Múltiplos y divisores

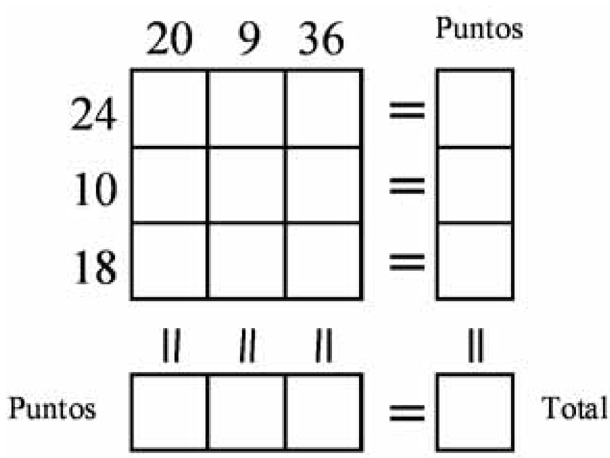
No hace mucho que comentábamos en esta sección que siempre que preparamos una nueva entrega nos gusta incluir al menos uno de los artículos sobre juegos de conocimiento, puesto que suelen ser los de más directa implicación en el desarrollo normal de nuestra materia en las aulas. Hasta ahora hemos tocado varias partes de la asignatura, pero nunca habíamos repetido un tema y creemos que este puede ser un buen momento. Pueden pensar que es debido a la edad, al deterioro mental imparable o al cansancio después de 10 años de sección, pero la verdad es que lo hacemos porque es un tema que nos gusta y que nos suele funcionar bastante bien con nuestros alumnos.

El tema que inauguró esta sección, en los estertores del siglo pasado, fue un juego de tablero donde se trabajaban los conceptos de múltiplo y divisor de un número: *el salto del factor*. Pensamos que no está de más el recuperar ese tema que da mucho de sí. Por eso en esta entrega vamos a continuar con ese concepto con una serie de juegos que pueden trabajarse en Primaria y Secundaria.

Colocando el divisor

En este juego cada alumno juega individualmente y se enfrenta al resto de la clase.

Cada alumno copia el tablero siguiente que es sobre el que se juega.



El profesor dispone de un dado cúbico normal y lo lanza nueve veces. A medida que va diciendo los resultados, los alumnos deben escribirlos en una de las nueve casillas libres centrales. El número que se coloca no puede cambiarse y en cada casilla sólo puede figurar un número. El proceso se continúa hasta completar los nueve cuadros.

Grupo Alquerque de Sevilla

Constituido por:
Juan Antonio Hans Martín. *CC Santa María de los Reyes.*
José Muñoz Santonja. *IES Macarena.*
Antonio Fernández-Aliseda Redondo. *IES Camas.*
juegos@revistasuma.es

Una vez relleno el tablero, se anotan a la derecha, tantos puntos como divisores del número que aparece a la izquierda hay en cada fila. Se trabaja igual por columnas, anotando un punto por cada uno de los números que hayamos escrito en la columna que sea divisor del número que aparece en la parte superior de la columna.

Por último se suman las seis casillas de puntos para obtener la puntuación total. Quien tenga la máxima puntuación gana.

Como la dinámica de este juego es muy rápida, pues se tardan pocos minutos en realizarlo, solemos repetirlo varias veces, y para no perder tiempo en copiar reiteradamente el tablero hacemos que los alumnos lo dibujen con bolígrafo y las partidas las señalen con lápiz, por lo que para jugar de nuevo basta borrar la partida anterior. Seguimos el siguiente proceso.

1. La primera partida la realizamos sin haber explicado como se anotarán los puntos. Por lo que en su resultado sólo influye el azar.
2. Repetimos la partida cuando ya conocen la forma de puntuar. De todos modos aún depende mucho del azar pues, aunque los primeros números se pueden elegir donde se quiera, al final está forzado el situar los números en los huecos que quedan.
3. En tercer lugar lanzamos los dados las nueve veces y posteriormente es cuando se colocan sobre el tablero, por lo que en este caso ya intervienen más los conocimientos y la inteligencia de quien coloca los valores.
4. En todos los casos solemos sacar un alumno a la pizarra a colocar su distribución y siempre estudiamos si se podría haber conseguido mayor puntuación variando de lugar algún número. Por eso solemos hacer una cuarta partida en la que se les da los números 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6 y 6. Una vez colocados se plantea si es posible conseguir la máxima puntuación, 18 puntos, con esos valores. Nuestra experiencia es que siempre hay quien deduce que no es posible y explica los motivos.
5. Por último, con el pretexto de ayudar a los que siempre sacan menos puntuación que los demás, les volvemos a plantear que coloquen los números del apartado anterior pero ahora para ver quién consigue menos puntuación.

Este proceso, como ya hemos dicho, lleva poco tiempo, la mayor parte del mismo en los debates que se pueden generar en cada caso. Uno de los más interesantes es el elaborar una estrategia para optimizar la colocación en las celdas.

Si partimos de que la máxima puntuación se consigue cuando todos los números colocados son divisores simultáneos de los que ocupan la cabecera de su respectiva columna y fila, llegamos a que las celdas han de estar ocupadas por divisores comunes de los números exteriores; y por tanto por los divisores de su máximo común divisor que estén entre 1 y 6 (porque se obtienen lanzando un dado). Por ello la tabla de optimización de la puntuación debe estar conformada de la siguiente forma:

Divisores ≤ 6		1, 2, 4, 5	1, 3	1, 2, 3, 4, 6
		20	9	36
1, 2, 3, 4, 6	24	m.c.d.=4	m.c.d.=3	m.c.d.=12
1, 2, 5	10	m.c.d.=10	m.c.d.=1	m.c.d.=2
1, 2, 3, 6	18	m.c.d.=2	m.c.d.=9	m.c.d.=18

Divisores ≤ 6		1, 2, 4, 5	1, 3	1, 2, 3, 4, 6
	Divisores comunes ≤ 6	20	9	36
1, 2, 3, 4, 6	24	1, 2, 4	1, 3	1, 2, 3, 4, 6
1, 2, 5	10	1, 2, 5	1	1, 2
1, 2, 3, 6	18	1, 2	1, 3	1, 2, 3, 6

La estrategia óptima consiste en colocar el valor que salga al lanzar el dado en la casilla en que aparezca que tenga menos números (porque la probabilidad de ser ocupada es menor). Por ejemplo, el primer 1 que salga debe colocarse en la casilla de la segunda fila y segunda columna (casilla (2,2)); el primer 2 lo podemos poner, indiferentemente en la casilla (2,3) o en la (3,1); el primer 5 ha de ir forzosamente a la casilla (2,1).

¿Y si vuelve a salir otro 5? Como ya no hay casilla en la que podamos sumar los dos puntos, deberíamos ponerlo en una en la que al menos aseguremos uno, y eso ocurre en la primera columna, por lo que deberíamos colocarlo en la tercera fila que tiene menos números (dos) que la primera (que tiene tres).

Se pueden introducir en este juego otras variantes como cambiar los números que aparecen en el tablero para trabajar con otros múltiplos distintos o plantear tableros con otras dimensiones, aunque no es conveniente aumentar mucho el número de filas y columnas; un tablero de 4 × 4 ya pierde la efectividad de la rapidez y puede desconectar a algunos alumnos.

Búsqueda de divisores

El siguiente juego lo tomamos de un artículo de Fátima Esteves y João Cámara, editado en el número 22 (2º trimestre de 1992) de la revista Educação e Matemática, editada por la Asociación de Profesores de Matemáticas de Portugal.

Es un juego para dos jugadores que disponen cada uno de un marcador de un color diferente y de una tabla para anotar sus puntos. En lugar del marcador se pueden utilizar un tablero común y fichas de dos colores distintos para ir tapando los números.

Se juega sobre el siguiente tablero.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45

El modo de jugar es el siguiente:

1. El jugador A tacha un número sobre el tablero y lo anota en su tabla de puntuación.
2. El jugador B tacha todos los divisores del número tachado por el compañero que estén sobre el tablero y va anotando esos números en su tabla de puntuación. Una vez terminado tacha cualquier otro número no tachado del tablero y lo anota en su tabla.
3. Se invierte el turno; ahora el otro jugador (el A en este caso) repite el paso 2.
4. Se van alternando los turnos hasta que no quede ningún número sin tachar sobre el tablero.
5. Si un jugador olvida tachar un divisor y su contrincante se da cuenta, el contrario puede tacharlo y anotarlo en su cuenta aunque no sea su turno.
6. Gana el jugador que sume más puntos en su tabla de puntuación.

Como estrategia para este juego está el conocimiento de los números primos, que suelen ser los primeros que se agotan para impedir que el contrario anote muchos valores en su tabla.

Juego de los números primos

Veamos ahora un juego tomado del Grupo Cero de Valencia, de sus libros de Matemáticas para la ESO editados por M.E.C. y Narcea.

Es un juego para dos jugadores donde usaremos un dado cúbico, fichas de distinto color para cada jugador y un tablero como el siguiente también para cada jugador.

3	2	2	5	3	7	11
5	7	3	3	13	5	2
11	2	2	2	5	2	3
5	5	3	7	2	3	13
2	7	2	11	5	3	2
7	2	17	5	3	7	3
5	11	3	5	2	19	7

Reglas del juego:

1. Un jugador, en su turno, lanza dos veces el dado y compone un número de dos cifras en el orden en que han salido los números, por ejemplo el 36. Coloca una ficha sobre un divisor de ese número, por ejemplo el 2, en su propio tablero. Se queda con el cociente de la división 36:2 = 18 y vuelve a repetir el proceso con el 18. Por ejemplo coloca una ficha sobre un 3 y se queda con el valor 18:3 = 6. Continua hasta que no encuentre más divisores y en ese caso pasa el turno al otro jugador.
2. Si el número inicial que construye es primo, no está sobre el tablero y el jugador lo descubre tirará de nuevo, pero si no lo hace pasa el turno al otro jugador. Si el jugador dice que el número es primo, pero no lo es, el otro jugador puede poner en su tablero las fichas de los divisores que descubra y a continuación coger el turno.
3. Gana quien primero llene una fila y una columna.

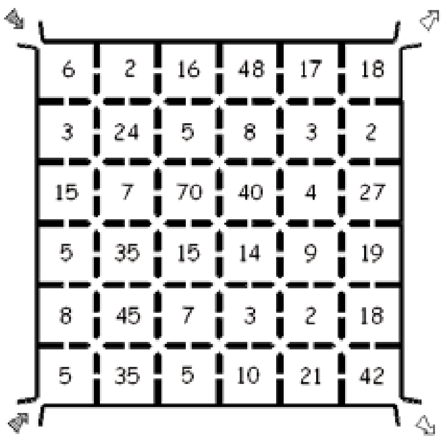
Es posible modificar algunas restricciones del juego. Por ejemplo, si se pueden formar los números de dos cifras en el orden que se quiera sólo quedan sobre el tablero números primos como el 11 o el 13, ya que los restantes primos pueden cambiarse las cifras y obtener un número compuesto. Entonces si el jugador compone un número primo (distinto del 11 y 13) directamente pierde el turno.

También es posible recortar alguna fila y columna para que el juego sea más dinámico. Nosotros pensamos que es mejor que se juegue más de una vez antes de que el juego se eternice y no dé, a la mayoría, tiempo de terminarlo en una clase. Aunque no suele ser el caso de este juego, si vemos que hay parejas que tardan mucho en acabar, puede ponerse como restricción que gana el primero en rellenar una fila o una columna completa. Hay que tener en cuenta que el azar siempre puede influir negativamente en una buena estrategia.

Está también la posibilidad de que cada jugador juegue con un tablero diferente, para que de esa manera no utilicen los resultados del contrario y tengan que buscar una estrategia distinta.

Laberinto de múltiplos y divisores

En este caso presentamos un laberinto en el que hay que moverse de una casilla a otra en cualquier dirección, pero siempre con la condición de que se pase a una casilla donde haya un múltiplo o divisor de la casilla anterior.



Es posible encontrar caminos que entren por alguno de los extremos de la izquierda y salgan por alguno de la derecha, por lo que pueden hacerse cuatro recorridos distintos por lo menos.
Hay caminos que tienen distinto recorrido, por ejemplo para entrar por el 5 y salir por el 42 podemos encontrar, entre otros, los caminos distintos siguientes:

5 – 35 – 5 – 10 – 2 – 42
5 – 35 – 7 – 14 – 2 – 42
5 – 45 – 15 – 3 – 21 – 42
5 – 45 – 15 – 3 – 9 – 18 – 2 – 42

Por ello podemos plantear encontrar el camino más largo o el más corto para llegar de una entrada a una salida. Por ejemplo el camino anterior puede hacerse pasando por 25 casillas, ¿será el más largo?, pero para eso están nuestros lectores y sus alumnos, para investigar.

El camino en el tablero

Para terminar vamos a darnos un gusto personal. Ya que tenemos una sección fija (mientras dure) nos podemos permitir el lujo de citar a los amigos y hoy lo vamos a hacer con una persona que es miembro honorario del Grupo Alquerque y que a pesar de su lejanía en otro continente sigue estando siempre a nuestro lado.

En la línea del juego anterior vamos a terminar con otro laberinto de nuestra querida amiga Ana García Azcarate, tomado de su libro *Pasatiempos y juegos en clase de matemáticas. Números y álgebra*.

En el siguiente tablero debemos entrar por la esquina superior izquierda y salir por la inferior derecha. Podemos pasar de una casilla a otra contigua en horizontal, vertical o diagonal con la única condición de que el número anterior y el posterior deben tener algún divisor común, lógicamente distinto de 1.

150	39	182	61	176	2	44	6	93	17
45	81	14	73	11	277	224	12	217	16
5	112	9	504	252	99	7	35	924	693
25	147	41	533	26	9	135	162	733	115
162	168	24	443	113	14	125	625	5	**150**

En el libro de nuestra colega y amiga viene una indicación como ayuda por si al principio hay alguien que se bloquea con la dificultad. Dice textualmente:

> Empieza marcando con un punto de color rojo todas las casillas con números múltiplos de 2. A continuación, con un punto de otro color, marca las casillas de los múltiplos de 3 y después las de los múltiplos de 5. ¡¡Puedes ya escoger un camino!!

Dado que hay varios caminos que pueden recorrer el tablero volvemos a plantear el buscar el que pasa por menos casillas o por más. También se puede imponer que el camino pase por una casilla determinada, por ejemplo por el número 99 o plantear el camino tal que al sumar las casillas por donde se pasa se obtiene el número mayor. Etc.

Y por esta ocasión: ¡Esto es todo amigos!

JUEGOS ■

suma+ 62
Noviembre 2009, pp. 55-56

El noble arte de coleccionar cajas

No es mi deseo en este clip crearles un problema familiar de terribles consecuencias, pero lo que voy a proponerles es una aventura de gran calado: que empiecen (si aun no lo han hecho) a coleccionar cajas. Intentaré exponer diversas razones que justifican, con creces, la oportunidad de coleccionar de forma digna estos entrañables objetos que son las cajas de nuestra vida.

Razón 1ª: Usted ya tiene en casa una colección dispersa de cajas.

En efecto, diversas son las cajas que desperdigadas en su hogar están a la espera de constituir el inicio de una gran colección ordenada. La mejor forma de reciclarlas es que usted se las quede. Empiece a buscar en estanterías y armarios, en trasteros y muebles. Allí aguardan turno de selección cajas de zapatos con tapa, cajas de cereales, cajas metálicas de galletas con colecciones de viejas fotografías, cajas con todo tipo de medicamentos en su interior, cajas con música, cajas con lapiceros de colores, cajas de bombones (cuya hermosura les salvó del reciclaje una vez acabado el chocolate), cajas con cartas de amor secretas,… Estas cajas bien agrupadas son ya un magnífico punto de partida para su incipiente colección

Razón 2ª: Coleccionar cajas es, esencialmente, gratis

Aunque siempre pueden hacerse locuras y adquirir una joya o un televisor para poder quedarse con la caja, lo normal es que progresivamente usted vaya seleccionando todas las cajas más interesantes que irán apareciendo en su vida. Salvo la comida fresca, casi todo viene en cajitas. Supermercados, farmacias, repartidores de pizza, tiendas de regalos,… serán sus proveedores habituales. La colección puede crecer cada semana con docenas de ejemplares.

Obviamente usted deberá ser estricto/a con la selección, despreciar las repetidas y sólo en algún caso guardar algunas para el intercambio con otros coleccionistas. A su buen entender y hacer queda el siempre apasionante tema de clasificar y ordenar la colección (por épocas, por tamaños, por volumen, por origen, por contenidos,…).

Razón 3ª: Cada caja tiene una historia

Las cajas son, en muchos casos, objetos intermediarios entre un producto interior oculto y nuestra visión exterior de los

Claudi Alsina
Universitat Politècnica de Catalunya
elclip@revistasuma.es

mismos. En ellas se localizan fotos, dibujos y colores que seducirán nuestra mirada, informaciones numéricas muy interesantes sobre el contenido, fechas de fabricación y caducidad, códigos de barras comerciales para ser leidos ópticamente, diversos logos de marca e iconos de uso (fragilidad, verticalidad, no planchar,…). Las propias cajas de un mismo producto evolucionan con el tiempo, pero en todos los casos hay siempre una gran cantidad de información (¡sospeche si ésta no existe!).

Razón 4ª: Las cajas cumplen funciones diversas

Evidentemente las cajas tienen funciones obvias como guardar bien el producto que contienen (que se conserve, que no roben parte del mismo,…) o facilitar el transporte. También cumplen con el apilamiento y almacenaje y ayudan a informar al consumidor y a los procesos de venta. Algunas ofrecen además virtudes extras de dosificación (fíjese en el plegado de los pañuelos de Kleenex® siempre dispuestos a consolar su llanto o resolver los resultados de su resfriado). Pero también encontrará cajas suntuosas, de medidas pensadas para dar impresiones falsas (las de juguetes por ejemplo). Hay *cajas óptimas* y cajas de despilfarro (¡cuantifíquelo!).

Razón 5ª: Las cajas tienen secretos geométricos

¿Cómo se construyó la caja? ¿Cuántas pestañas tiene? ¿tiene fondos o laterales dobles? ¿es automontable como las de pizzas o precisa de colas y grapas? Los desarrollos planos de las cajas nos muestran que en el arte del *packaging* hay posibilidades muy diversas. Nuestros modelos matemáticos ingenuos donde cajas poliédricas “solo tienen caras” se tambalean ante la complejidad del diseño real (¿ha observado las cajas desmontadas donde finalmente se colocan los pasteles para su traslado?).

Las *formas* de las cajas son un tema central de gran interés. Si bien los prismas ganan la partida, también poliedros regulares, pirámides, antiprismas, cuerpos redondos, etc. están en el mercado… y curiosas formas que precisan descripciones geométricas especializadas.

¿Qué proporciones tienen las cajas? ¿Cómo son sus secciones? ¿Cuándo sus medidas son óptimas? ¿Cómo se relaciona superficie exterior con su capacidad?... nuestras miradas matemáticas pueden hacer aflorar interesantes cuestiones.

Como además las cajas las fabrican, visitar sus lugares de producción puede ser interesante. Piense en las cajas comerciales cortadas-impresas-montadas… pero también en sofisticados casos como las cajas para instrumentos musicales.

Creo que lo dicho es suficiente para animarles a iniciar la colección… y usarla en su clase de matemáticas. Todos pueden contribuir y hay mucho a aprender.

eee

En mi casa ya tenemos una colección muy exuberante de cajas y aunque diversos familiares y amigos se asombran de nuestro “tesoro”, nosotros reclamamos el interés por seguir guardando y compartiendo formas geométricas interesantes. Las “fusiones de cajas” no alterarán nuestros nobles propósitos.

Para saber más

Hine, Th. (1995). *The total Package*. Nueva York: Little Brown and Company.

Pathak, H. (1998): *Structural Package Designs*. Singapur: The Pepin Press.

Vidales, M.D. (1995): *El mundo del envase.* Barcelona: Editorial Gustavo Gili.

Wang Li Xia (Ed.) (2006): *Cajas, Packs listos para usar* (con CD-Rom). Barcelona: Index Book, S.L.,

EL CLIP

suma+ 62
Noviembre 2009, pp. 57-62

El cálculo simbólico de forma gráfica

Son muchos los recursos informáticos que podemos encontrar en la red para poder utilizar en el aula de matemáticas, bien para un tema determinado o bien para un contenido matemático específico. Esos recursos podemos localizarlos de forma individual, como elementos integrantes de alguna web, o bien podemos localizar webs que ofrecen un conjunto de recursos que son útiles para las matemáticas en general.

Entre las webs que ofrecen recursos para poder ser utilizados en el aula de matemáticas localizamos la web *El paraíso de las matemáticas* cuya dirección URL es

http://www.matematicas.net

En la imagen 1 podemos observar el portal de *El paraíso de las matemáticas*.

Este portal, que surge a partir del 1998 a partir de una idea de los profesores José Manuel Astorga y Carlos Gombau, aglutina a un gran número de colaboradores y encargados de mantenerla que desarrollan cada una de las áreas que compone la página y la dotan de contenido gracias al material que proporcionan los distintos colaboradores.

Según se indica en el propio portal, en el mismo puedes encontrar más de 2.700Mb de contenido con más de 4.000 descargas y más de 1.000 enlaces de interés para las matemáticas.

Como podemos comprobar en la imagen 1, la web aparece dividida en tres columnas, recogiéndose en la zona central, al acceder a la web, lugares destacados de las distintas partes que se localizan en las zonas laterales. En el lateral izquierdo se locali-

Imagen 1: Portal de *El paraiso de las matemáticas*

Mariano Real Pérez
CEP de Sevilla
matemastic@revistasuma.es

za un menú que, bajo el título *¿quiénes somos?* explican cómo surgió la idea de este portal, así como la evolución que ha tenido el mismo y los integrantes del grupo que lo mantienen.

También destaca una zona denominada *área on line* en la que se encuentran enlaces tan sugerentes como *Historia* que nos conduce una sección sobre la historia de las matemáticas, *Diccionario* en el que van incluyendo poco a poco distintos términos matemáticos, teoremas, matemáticos, terminología, etc. ordenados según el alfabeto que aparece en la zona derecha de la pantalla. Este recurso se complementa con la zona de *Etimología* en la que se recogen términos utilizados en matemáticas. También aparece en este menú una zona dedicada a la *Papiroflexia* y otra dedicada a *Juegos*. Debemos destacar en este menú la zona dedicada a *Linux* en la que se trata este sistema operativo libre, pudiéndose observar las distintas distribuciones, manuales sobre su instalación, programas bajo Linux para las matemáticas, etc.

El portal también cuenta con un *área de recursos* en la que destaca el enlace *Consultas.* A través de este enlace podemos ponernos en contacto con el grupo que mantiene la página. Este contacto está colocado para que el visitante que tenga alguna duda sobre matemáticas pueda consultarle al grupo la misma para que la solucionen.

El paraíso de las matemáticas cuanta también con un *área de descargas* en la que el navegante se encuentra con enlaces como *Asignaturas* en el que puedes descargarse apuntes, exámenes y ejercicios de distintas asignaturas universitarias y preuniversitarias. Existen enlaces a programas, cursos,...

Por último, destacamos en la web la zona de *programoteca* en la que se recogen una serie de programas para matemáticas, clasificados por sistema operativo. Concretamente, en la imagen 2 podemos observar la zona de la programoteca dedicada a Linux.

En esta sección se recogen 35 aplicaciones informáticas para Linux clasificadas por secciones en calculadoras, cálculo numérico, cálculo simbólico, editores de ecuaciones, estadística, exámenes, geometría, representación gráfica, grafos y visores.

Cálculo simbólico II: de Maxima a Wxmaxima

En el anterior número de SUMA estuvimos analizando la aplicación Maxima para el cálculo simbólico. Una aplicación informática de software libre para que comprobemos que existen versiones para distintos sistemas operativos, tanto libres como propietarios. Según observamos en ese número, Maxima funcionaba a base de comandos y los usuarios necesitarían conocer múltiples órdenes o comandos y su aplica-

Imagen 2: Programoteca de Linux

ción para poder utilizar este software. Sin embargo, también indicamos que se había desarrollado un entorno gráfico para Maxima, denominado Wxmaxima. En la imagen 3 podemos observar la aplicación Wxmaxima.

Con la aplicación Wxmaxima contamos con un entorno gráfico con el que efectuar cálculos simbólicos sin necesidad de conocer el conjunto de comandos de Maxima y contando con todo el potencial de esta aplicación.

Según podemos observar en la imagen 3, la aplicación Wxmaxima presenta una ventana dividida en cinco partes de forma vertical. Estas partes son las siguientes:

1.–Menú superior. En este menú se encuentran todas las acciones que podemos realizar con Wxmaxima. Recordemos que cada una de estas acciones corresponden a comandos de Maxima y, dependiendo de la expresión algebraica a la que se lo deseemos aplicar. No todas las opciones del menú se corresponden con comandos de Maxima, ya que algunas de las opciones del menú se corresponden con acciones propias de Wxmaxima como veremos más adelante. Otras opciones que aumentan el potencial de la aplicación sumado al de Maxima.

En la imagen 4 podemos observar un despliegue completo del anterior menú.

Imagen 3: aplicación Wxmaxima

2.–Botonera superior. Debajo del menú superior encontramos una botonera con distintas acciones generales que podemos efectuar sobre el propio software, no sobre las expresiones que estemos utilizando. Las distintas opciones que nos ofrece son:

– Abrir archivos previamente creados con Wxmaxima, lo que nos permite continuar con sesiones previamente generadas.
– Guardar sesiones que se creen con Wxmaxima. Esto permite que los alumnos puedan realizar sus ejercicios poco a poco utilizando la aplicación.
– Imprimir la sesión que tengamos abierta en ese momento.
– Configurar algunas opciones de Wxmaxima. En la imagen 5 observamos la ventana de configuración.
En la configuración podemos destacar la opción de panel de botones, en la que seleccionando “completo” observamos que aparece una botonera inferior más amplia como la que vemos en la imagen 5, aumentando la que aparecía en la imagen 4.
– Otras opciones como copiar, pegar, insertar texto, interrumpir cálculo... completan esta botonera superior.

3.–En la zona central, tercera zona de la pantalla, se encuentra el área de trabajo. Las acciones que vayamos realizando con Wxmaxima se irán traduciendo en comandos de Maxima en esta zona. Se siguen conservando las mismas propiedades que en Maxima, es decir, podemos seguir

Imagen 4: menú superior de Wxmaxima

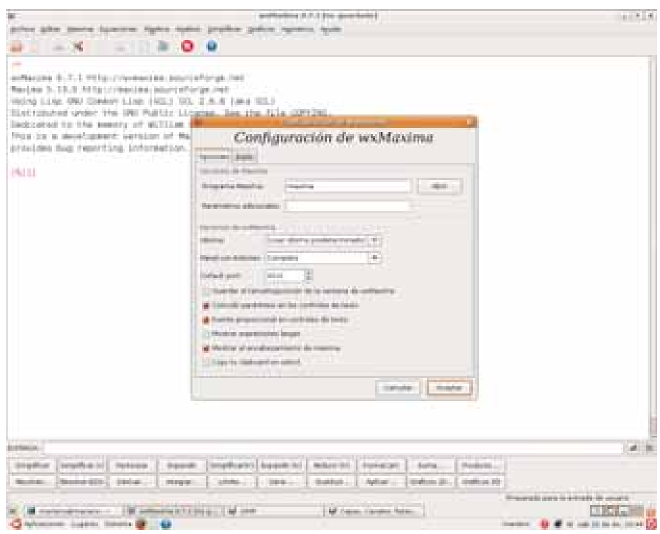


Imagen 5: ventana de configuración de Wxmaxima

escribiendo, si lo deseamos, los comandos directamente, el punto (%ik) nos indica la entrada de la expresión número k, mientras que (%oj) nos indica el resultado o salida j. En esta zona central se irán desarrollando todos los cálculos que le vayamos indicando a Wxmaxima.

4.–La cuarta zona que encontramos en la pantalla de Wxmaxima es la ventana de comandos. En esta ventana introduciremos los distintos comandos o las distintas expresiones que vayan a ser objeto de nuestro estudio. Esta ventana hereda de Maxima la posibilidad de recuperar una expresión o un comando escrito anteriormente sin más que pulsar la flecha superior en el teclado del ordenador.

5.–La quinta y última zona de la pantalla nos presenta una botonera que, a diferencia de la superior, ésta nos ofrece acciones directas sobre las expresiones que hayamos introducido previamente.

Ahora vamos a realizar un pequeño recorrido por la aplicación. Para ello vamos a comenzar con generalidades que debemos conocer:

a. De forma general ya hemos indicado el significado de (%ik) y de (%oj).

b. La botonera inferior, en la mayoría de las acciones, va a utilizar el comando correspondiente sobre la última expresión que se observe en la pantalla. Para aclarar este punto, en la imagen 6 observamos las siguientes acciones que hemos realizado:

b.1. Hemos escrito en la línea de comando la potencia octava de (*u*+*v*) y hemos pulsado Enter. No hemos necesitado escribir el punto y coma (;) que era necesario escribir en Maxima.

b.2. Hemos pulsado el botón “Expandir” de la botonera inferior. Esta acción se ha traducido en el comando

expand(%);

por lo que observamos que la expresión inmediatamente anterior se identifica con el símbolo %.

b.3. Hemos pulsado el botón “Derivar”. Con esta acción nos ha aparecido la ventanita que observamos en la imagen 6. En esta ventanita hemos indicado que la expresión que deseamos derivar es % y que la variable respecto a la que deseamos derivar es *v*. Con esta acción hemos obtenido la salida (%o3) que observamos en la imagen 6.

c. No todo el potencial de Maxima se desarrolla desde Wxmaxima, aunque sí para los niveles que estamos contemplando aquí.

d. Wxmaxima nos permite guardar y abrir sesiones previamente realizadas de forma sencilla.

Una vez que hemos contemplado estas generalidades, vamos a analizar con un poco más de profundidad el menú superior de la aplicación, un menú que recoge todas las opciones que se ofrecen tanto en la botonera superior como en la inferior.

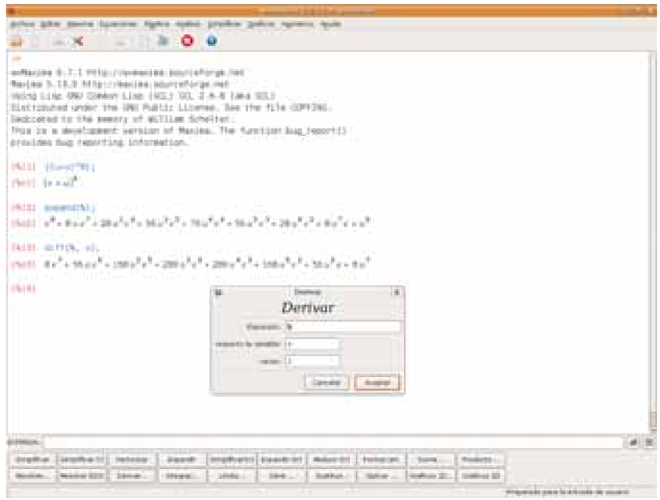


Imagen 6: acciones con la botonera inferior de *WxMaxima*

Comenzamos con la opción *Archivo.* En este menú se recogen acciones generales de Wxmaxima, como la de abrir archivo y guardar archivo que ya hemos tratado anteriormente. Pero además se recogen otras acciones muy potentes como:

– Batch file: Para utilizar esta opción, debemos tener previamente creado, con un editor de textos simple como gedit por ejemplo, un archivo denominado “archivo.mac” que contenga varios comandos de Maxima que deseemos efectuar de una sola vez. Por ejemplo, si creamos con gedit un archivo cuyo contenido sea el siguiente:

```
t:expand((r+v)^5);
diff(t,v);
factor(%o2);
cos(%pi);
integrate(r/(1+m^3),m);
linsolve([3*x+4*y=7, 2*x+b*y=13], [x,y]);
expand((x-3)*(x+2)*(x-4));
solve(%o7=0,x);
equ1: x^2+3*x+y^2=4;
equ2: 3*x-2*x*y=3;
solve([equ1,equ2]);
```

Obtenemos como resultado el que contemplamos en la imagen 7, en la que observamos que se han ejecutado todos los comandos anteriores.

Según observamos en la imagen 7, algunos de los comandos no se han ejecutado, concretamente el que resuelve el sistema de ecuaciones no lineales. Eso es debido a que todos los comandos que hemos incluido en el archivo .mac que teníamos guardado no caben en una única pantalla. Para que sigan ejecutándose los comandos siguientes solamente debemos pulsar la tecla Enter.

– Exportar a Html. Con esta opción podemos generar una página web en la que se recoja la sesión que hemos reali-

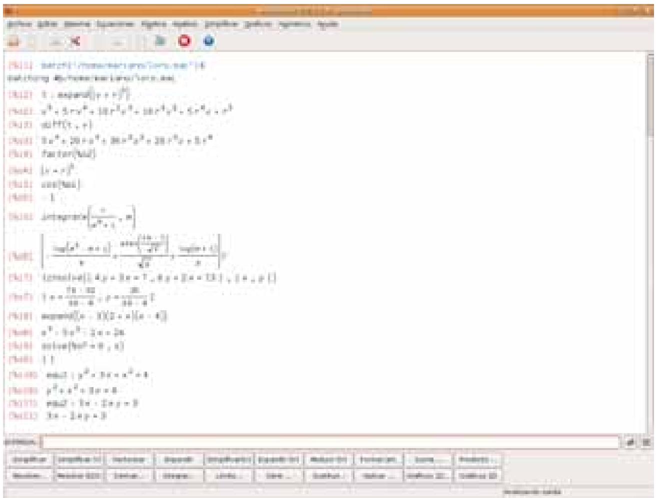


Imagen 7: ejecución de un archivo con varios comandos

zado con Wxmaxima. Debemos tener en cuenta que la sesión completa se guardará como una imagen en formato png, de tal forma que junto al archivo html que generemos, aparecerá una carpeta llamada "img" que contendrá la imagen indicada. Así, la web generada lo que nos mostrará es la imagen que se encuentra en esa carpeta.

En el menú *Editar* vamos a destacar la opción *Limpiar pantalla*. Esta opción hace desaparecer los cálculos que se están contemplando en ese momento, pero sigue adelante con la sesión de Wxmaxima con la que estemos trabajando. Si lo realizamos, observamos que la entrada (%ik) que aparece es la siguiente a la última utilizada.

Del siguiente menú, Maxima, destacamos la opción de reiniciar la aplicación en la que desaparecen todos los valores anteriores, por lo que las variables que hayamos definido dejan de tener el valor que les habíamos asignado anteriormente.

Continuamos adelante con las siguientes opciones que se nos ofrece en el menú superior. Estas opciones ya se refieren a actuaciones sobre expresiones algebraicas. Como ya hemos indicado, sería una ardua tarea realizar un recorrido completo por Wxmaxima, por lo que vamos a exponer algunos ejemplos de utilización de las opciones que aparecen en los siguientes menús.

Ejemplo 1: Para el primero de ellos nos vamos a utilizar la opción *Resolver sistema algebraico* del menú *Ecuaciones*. En este caso vamos a resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} &z^2+3xy+2x^2=22\\ &5xy=2\\ &2z+3x=6 \end{aligned}$$

Para ello, al pulsar sobre *Resolver sistema algebraico* aparece una ventanita en la que nos pregunta sobre el número de ecuaciones que tiene el sistema. Le indicamos 3 como puedes observar en la imagen 8.

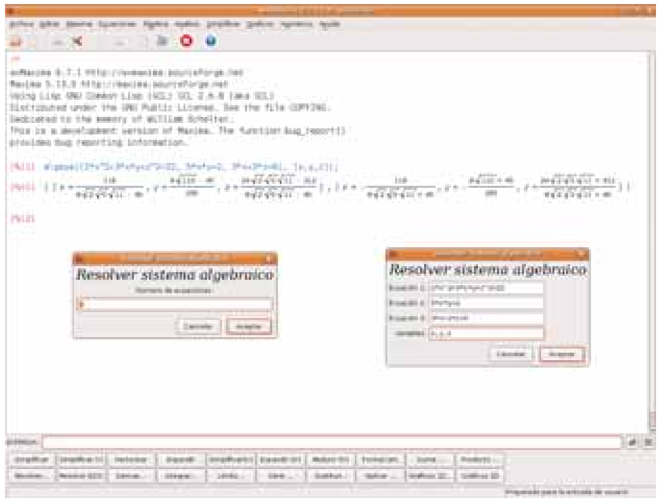


Imagen 8: resolución de un sistema algebraico con WxMaxima

Tras indicarle el número de ecuaciones, nos vuelve a aparecer otra ventanita en la que nos pide que le indiquemos las ecuaciones y las variables que debe calcular para resolver el sistema. En nuestro caso le escribiremos cada una de las ecuaciones del sistema de la siguiente forma:

2*x^2+3*x*y+z^2=22
5*x*y=2
3*x+2*z=6

Y le indicaremos que las variables son *x*, *y*, *z*. En la imagen 8 podemos observar el resultado que obtenemos. También podemos ver las dos soluciones que tiene el sistema planteado.

Ejemplo 2: Ahora nos planteamos calcular la integral definida entre menos infinito y 10 de la función siguiente:

$$-\frac{2z}{\left(z^2+1\right)^2}$$

Para calcular esta integral utilizaremos la opción *integral* del menú *Análisis*. Previamente habremos escrito la función de la que deseamos calcular la integral definida. Al pulsar sobre esta opción aparece una pequeña ventanita que observamos en la imagen 9 en la que se nos pide la expresión que deseamos integrar, la variable respecto a la que deseamos integrar y el intervalo. Para indicar que el intervalo inferior es menos infinito, debemos pulsar sobre el botón "especial" que aparece al lado de ese dato, apareciendo así una pequeña ventana, como la que contemplamos en la imagen 9 en la que podremos seleccionar distintas opciones. Entre ellas localizamos el menos infinito. Posteriormente, para el intervalo superior escribiremos 10. La secuencia completa la podemos observar en la imagen 9 en la que ya aparece realizada la integral.

Observamos en la salida (%o2) que la solución de la integral que nos planteamos es 1/10.

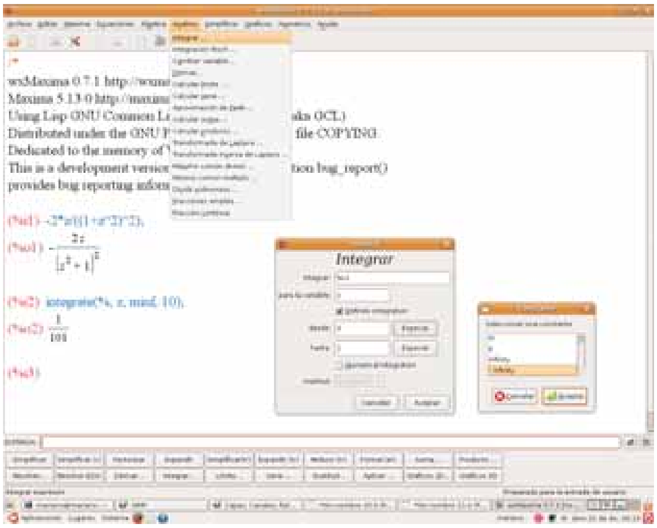


Imagen 9: cálculo de una integral con WxMaxima

Ejemplo 3: Para finalizar con estos ejemplos vamos a realizar una representación gráfica en tres dimensiones de una función. En este caso nos planteamos representar gráficamente la función:

$$\frac{z^4+5u}{z^2+u^2+1}$$

Para realizar esta gráfica, una vez que hemos escrito la expresión algebraica en Wxmaxima, seleccionamos la opción integral del menú *Análisis*, apareciendo la pequeña ventana que observamos en la imagen 10. En esta ventana debemos indicar que las variables de la función son z y u. Posteriormente debemos indicar el intervalo para la variable z y después el intervalo para la variable u.

Seguimos ahora indicándole el formato que va a tener la red de representación, en nuestro caso le hemos indicado 60×60 y el tipo de representación gráfica. Nosotros hemos seleccionado la representación gráfica en línea, es decir, sobre el mismo marco del texto. Con ello obtenemos el resultado que observamos en la imagen 10.

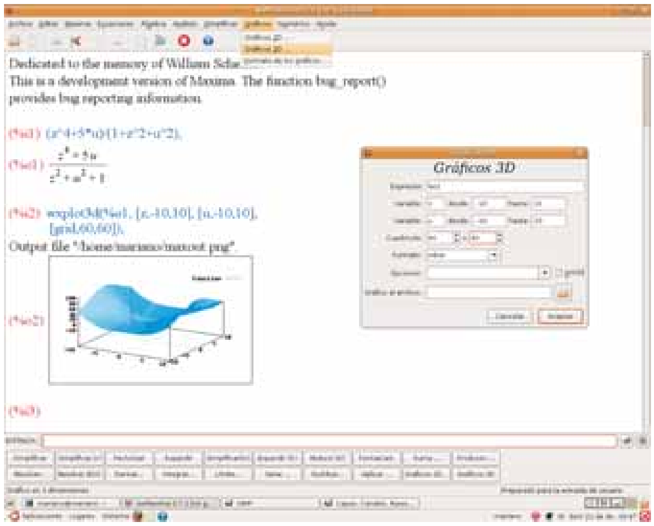


Imagen 10: Representación gráfica en 3D con Wxmaxima

Debemos indicar que de entre los formatos que se nos ofrecen para la representación gráfica, el más aconsejable es el denominado *Gnuplot*, pero para poder utilizar este tipo, debemos haber instalado previamente la aplicación para representaciones gráficas *Gnuplot* que podemos localizar en el repositorio de la distribución Linux que estemos utilizando.

Con estos ejemplos hemos realizado un pequeño recorrido por la aplicación Wxmaxima. Solamente ha sido la punta del enorme iceberg que supone el gran potencial que se esconde detrás de este software.

Con el fin de sacarle el mayor partido en el aula posible, en el siguiente número completaremos este recorrido por este programa utilizándolo de forma práctica con ejercicios para los que aconsejamos su uso.

MATEMASTIC ■

Ficha educativo - técnica	
Nombre	WxMaxima
Sistema	Aunque es una aplicación propia de Linux y para cada distribución cuenta con el archivo de instalación en su repositorio, también encontramos las versiones correspondientes para Windows y para Mac. Necesitamos haber instalado previamente Maxima, excepto en las versiones más recientes.
Descarga	Repositorio de la distribución de Linux correspondiente o http://maxima.sourceforge.net
Licencia	GPL
Contenido	Cálculo simbólico.
Nivel	Multinivelar: 4º ESO, Bachillerato y Universidad.
Metodología	Aplicación para utilizar a partir de 4º de ESO. Los alumnos utilizarán individualmente la aplicación como herramienta de ayuda para la resolución de problemas y tareas matemáticas

SUMA 62
Noviembre 2009, pp. 63-68

Piero della Francesca y el engaño de los ojos. II La luz

En la entrega anterior de Arte con ojos Matemáticos, *correspondiente a* SUMA 61, *abordamos la dimensión espacial de la* Sacra Conversazione *de Piero della Framcesca, más conocida como la* Pala de Brera, *por ser la Pinacoteca de Brera, en Milán, su emplazamiento actual. En esta segunda parte, además de añadir algunos comentarios más sobre el espacio representado en esta pintura, centraremos nuestro estudio en la luz. Esa luz pálida que inunda el espacio, penetrando desde el lado izquierdo con respecto al espectador y que matiza los colores y las sombras, dotando de volumen a los objetos y a las personas representadas y que incluso, como veremos, sirve para rubrayar la presencia de lo que queda oculto al espectador aunque forme parte de la escena.*

Pala di Brera o Sacra Conversazione, Piero della Francesca, ca. 1472, Pinacoteca di Brera, Milán

Francisco Martín Casalderrey
IES Juan de la Cierva (Madrid)
fmc@revistasuma.es

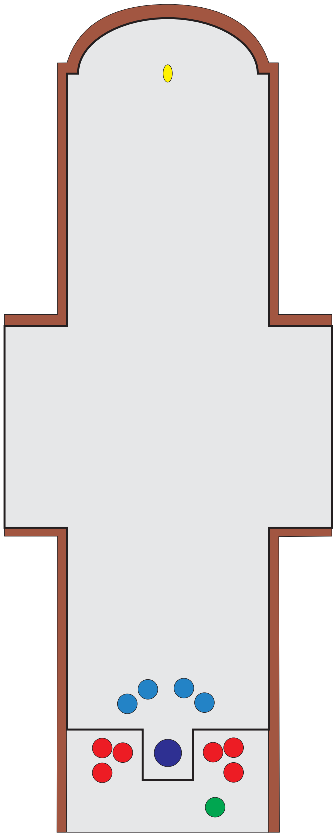


Figura 1. Reconstrucción de la planta
en rojos ubicación aproximada de los santos,
en azul oscuro la Virgen y en azul claro los ángeles;
el Duque de Urbino en verde
y el huevo aparece en amarillo

Figura 2. Detalle de la *Pala di Brera*, de Piero della Francesca.
En la armadura de Federico de Montefletro, Duque de Urbino,
Podemos apreciar la reflexión anamórfica de la
parte de la nave que se extiende haca los pies de la capilla,
fuera de nuestro alcance visual

Interrumpíamos el artículo anterior precisamente con la planta que ahora reproducimos como figura 1. Observándola, descubrimos uno de los engaños a los que Piero somete a nuestros ojos: el huevo, que a simple vista parece pender sobre la cabeza de la Virgen, en realidad se encuentra a mucha distancia, unos 26 brazos florentinos, que equivalen a unos 15 metros, ya que, como vimos, un brazo florentino son 58,36 cm.

Nuestro dibujo, obviamente, no incluye aquellas partes sobre las que el cuadro no nos da información. Por ejemplo, no podemos calcular la longitud de la nave transversal, ya que solo podemos apreciar en la pintura el arranque de las bóvedas y, de ellas, sólo la anchura correspondiente a un casetón.

Tampoco tenemos información sobre la longitud total de la nave principal, ya que queda a nuestra espalda como espectadores. El límite de lo visible define un plano vertical, perpendicular a dicha nave, que es precisamente el plano del dibujo.

De todas formas, esta ausencia de información no es absoluta y, observados ciertos detalles, podemos encontrar mucha más información que permanece oculta y que, a simple vista, pasa desapercibida.

Cuando miramos el cuadro por primera vez, tendemos a situar a los personajes en él representados en el crucero y a pensar, que la luz que los ilumina procede de la parte izquierda de la nave transversal. Sin embargo, cuando analizamos la situación real, con la reconstrucción de la planta de la iglesia y la situación de los personajes en ella, vemos que esto es imposible.

Deben existir, por tanto, al menos dos entradas distintas de luz. Una, la de la luz que ilumina el ábside y la concha y procede, efectivamente, del lado izquierdo de la nave transversal. La otra, la de la luz que ilumina a los personajes, no puede provenir del extremo derecho de la nave transversal, ya que el crucero queda a la espalda de los mismos. Debe, por tanto, ser distinta, y provenir de algún punto fuera del alcance de nuestra vista, a nuestra espalda como espectadores, del lado de acá con respecto al plano dibujo. Probablemente de una ventana en el lateral izquierdo de la nave principal.

Figuras 3 y 4. Detalle de la hombrera de la armadura del duque Montefeltro.
En él podemos distinguir el reflejo de dos ventanas:
una situada en lateral izquierdo de la nave principal, muy iluminada;
la otra, en el lateral derecho, en penumbra;
entre ambas se extiende la nave, a la espalda del espectador, en la oscuridad.

En efecto, si observamos la hombrera de la armadura del Duque, podemos ver con claridad esa ventana, o mejor su reflexión anamórfica. Como la hombrera tiene una forma casi cilíndrica de eje vertical, esa ventana, de forma rectangular y coronada por un semicírculo, debe encontrase efectivamente en el muro derecho de la nave principal y efectivamente puede ser la fuente de la luz que ilumina a los personajes.

Además, si observamos con atención, en la parte del gorjal que cubre la espalda, podemos distinguir otra ventana, ésta en penumbra, que correspondería la que se encuentra en el muro opuesto de la nave, enfrentada a la anterior. Aparece mucho más oscura ya que se encuentra del lado contrario al del Sol, evidentemente ha de encontrarse a la derecha de la nave. Entre los reflejos de ambas ventanas, se ve una zona oscura más difícil de distinguir, que en nuestra opinión correspondería a los pies de la iglesia, probablemente con el portal de acceso, a la espalda del espectador.

La luz, la ubicación, la época y la hora

Que la luz provenga del lado izquierdo plantea un problema. Muchos críticos, analizando esta luz mágica que ilumina toda la escena y que proviene del exterior a través de dos ventanas distintas, como hemos visto, opinan que es una luz inventada, imaginada, puesto que si la iglesia se encontrase bien orientada, es decir, con el ábside apuntando hacia el Oriente, el sur quedaría a la derecha del espectador y, por tanto, afirman: nunca podría entrar desde la izquierda de la escena.

Comprobaremos que ambas afirmaciones son discutibles. No sabemos si Piero se basó en una iglesia existente para concebir el cuadro pero podemos suponer que se inspiró al menos en las luces de Urbino y que, por tanto, aunque sólo sea en su imaginación, la situó en sus proximidades. A estas alturas, y dadas las dimensiones escasas del edificio representado, más que iglesia deberíamos llamarlo capilla.

Nuestra capilla la podemos considerar, por tanto, ubicada en la ciudad del duque Montefeltro. El palacio ducal, centro de la ciudad, se encuentra a 43º 43’ 26” Norte y 12º 38’ 13” Este. Los 43º43’ de latitud Norte corresponden a los lugares más septentrionales de la Península Ibérica (Estaca de Bares tiene una latitud aproximadamente igual).

En una iglesia bien orientada construida en estas latitudes, efectivamente, la luz entra desde el lado derecho, de manera tal que, a mediodia, cuando se celebra la misa mayor, el Sol entra por el brazo derecho del crucero e ilumina el altar en el momento de la consagración. No obstante, los 23º 30’ de la inclinación de la eclíptica con respecto al plano del Ecuador terrestre hacen que en invierno el Sol salga ligeramente al Sureste y se ponga ligeramente al Suroeste. En verano las cosas suceden al revés;

Figura 5. Detalle del ábside

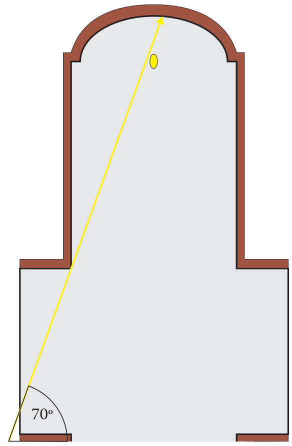


Figura 6. Ángulo de la luz para poder iluminar el huevo

el Sol sale ligeramente al Noreste y se pone ligeramente al Noroeste. Si observamos la luz que se proyecta sobre el ábside (Figura 5) vemos que ilumina el huevo y proyecta el arco del brazo izquierdo del crucero sobre la concha. Los casetones de este arco aparecen muy iluminados por la luz que atraviesa el arco, casi perpendicular a ellos.

En la figura 6 podemos apreciar que para que la luz del Sol pueda incidir en el huevo e iluminarlo, este ángulo debería ser de unos 70º con respecto a la dirección Norte-Sur.

Pues bien, si hacemos un estudio de las puestas de Sol en la latitud de Urbino, encontramos un corto periodo del año en el que el ultimo rayo del Sol forma un ángulo menor o igual a 70º. Este periodo del año es breve, un intervalo de poco más de una semana, centrado en el solsticio de verano, es decir del 17 al 25 de junio. Por tanto, durante ese corto periodo de días, el Sol podría entrar en una iglesia bien orientada con un ángulo como el necesario para iluminar el huevo y reflejar la sombra del arco sobre la concha. Además, esto ocurre dunante sólo unos minutos antes de la puesta de Sol, cada uno los días señalados.

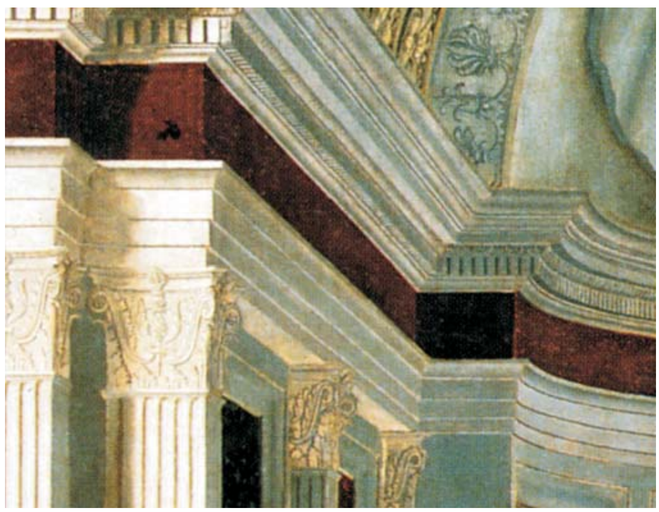
Esta afirmación la podemos corroborar por varios caminos. Por un lado si observamos de nuevo la figura 5, y en ella la proyección del arco sobre la concha. El máximo de la curva de la sombra reflejada, se encuentra aproximadamente en borde derecho de la concha. Si medimos cuánto ha bajado ese punto con respecto al arco, vemos que es una cantidad muy pequeña, poco más de la cuarta parte del radio del arco es decir poco más de un brazo florentino. Sin entrar en cálculos trigonométricos detallados, podemos afirmar que es una luz sensiblemente horizontal, como correspondería a una luz del atardecer, poco tiempo antes de que se ponga el Sol.

Por tanto, podemos afirmar con poco margen de error, que si partimos de la hipótesis de que el cuadro de Piero fuere ambientado en Urbino, en una iglesia real o imaginada suficientemente bien orientada, la escena representada *sucede* en la última semana de junio, alrededor de las 7 horas de la tarde, poco antes del atardecer.

Otra conclusión colateral, que podemos afirmar es que para que esto sea posible la longitud de los dos brazos de la supuesta nave transversal ha de ser bastante escasa; a lo sumo 2 brazos florentinos y medio, como en la figura. Alternativamente, tendría que haber una ventana en el muro Oeste del lado izquierdo de esa nave (aproximadamente en el vértice del ángulo señalado en la figura 6).

Por último, esa misteriosa luz pálida que llena la escena nos permite apreciar la existencia de un altar de color claro o cubierto con un paño claro, situado en el ábside, oculto por los personajes que pueblan la escena. La luz reflejada por ese altar la vemos iluminando la parte inferior de la moldura en el lado izquierdo del presbiterio.

Figura 7. Detalle de la luz reflejada sobre la moldura del lado izquierdo del presbiterio.



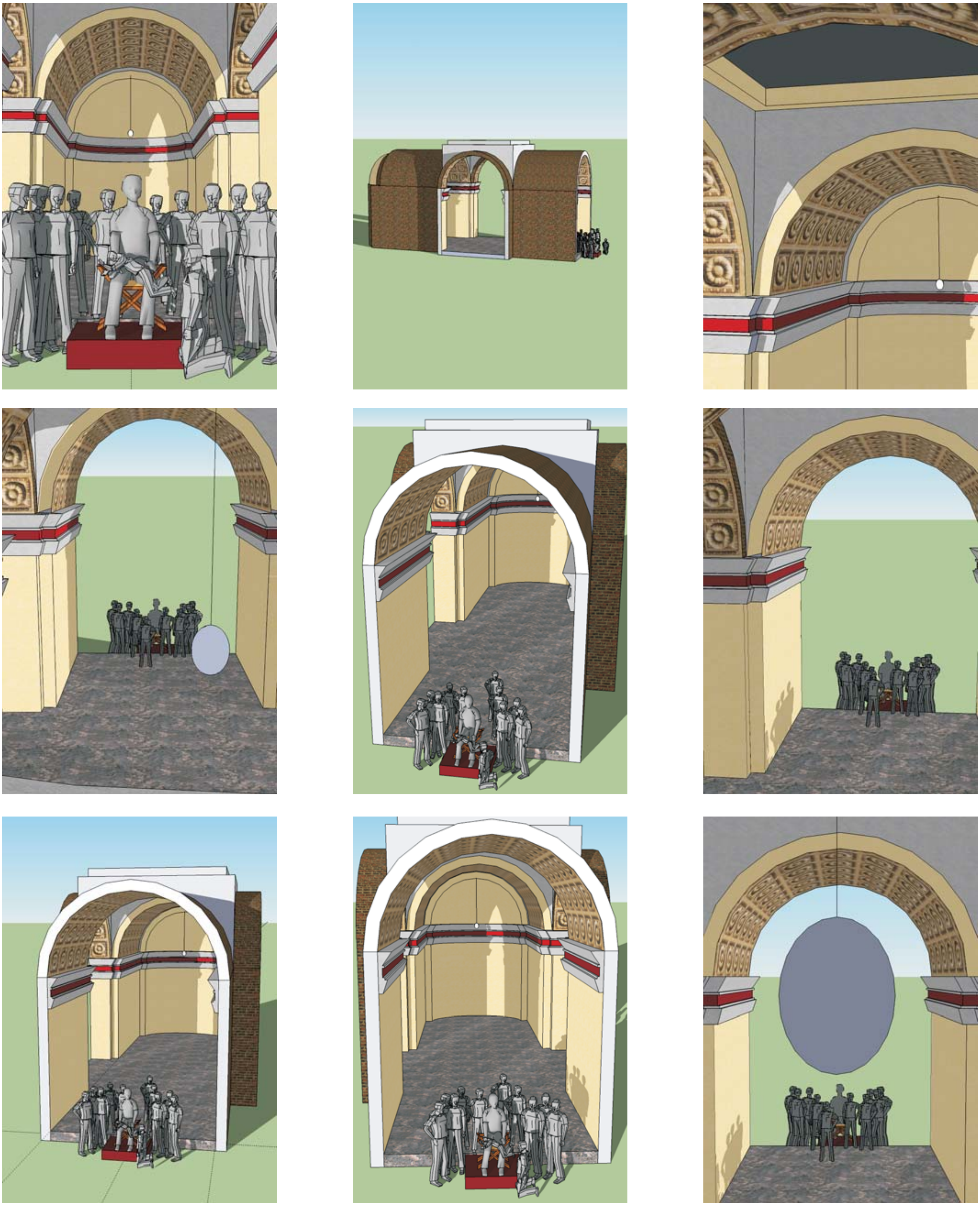


Figura 2. Distintas vistas de la maqueta 3D de la *Pala de Brera*, cambiando el punto de vista.

La Pala en tres dimensiones

Para acabar, estos dos artículos en que nos hemos dedicado a ver con ojos matemáticos la *Pala de Brera*, y a modo de compilación de toda la información que hemos ido descubriendo, hemos hecho una reproducción aproximada en 3D de la escena representada. Hemos utilizado únicamente la información deducible del cuadro, sin licencias artísticas a la hora de describir lo que no se ve o lo que no puede ser calculado.

Nos hemos servido para ello del programa, *Google SketchUp* 7.0, que se puede descargar de forma gratuita de la dirección *http://sketchup.google.com/download/*. Las medidas de la maqueta son las que hemos calculado a lo largo de este artículo; también lo son, las medidas de los personajes. La ubicación se ha determinado en las coordenadas geográficas de Urbino. Las luces y las sombras que se aprecia en las distintas imágenes de la página anterior corresponden, de acuerdo con lo expuesto, a la luz de Urbino, el 21 de junio, a las 7:15 de la tarde, hora solar.

No hemos prolongado la nave más allá del plano del dibujo, por lo que no hemos representado las ventanas de las que se habla en este artículo. No obstante, la luz que ilumina a los personajes en nuestra maqueta, proviene sustancialmente del mismo lugar y desde luego con el mismo ángulo.

Presentamos nueve *vistas* de la misma maqueta 3D y con la misma luz.

Empezando de arriba a abajo y de izquierda a derecha, podemos ver, en primer lugar, una vista muy parecida al cuadro de Piero. El huevo aparece suspendido sobre la cabeza de la Virgen y la vista, como el cuadro, ofrece una simetría central.

La segunda vista muestra desde una cierta distancia el aspecto global de la maqueta.

La tercera muestra las bóvedas desde un punto de vista situado a la altura de la cornisa, desde uno de los vértices del cuadro definido por el cruce de las naves.

La cuarta nos ofrece un picado desde detrás del huevo orientado hacia los personajes, que aparecen de espalda.

La quinta, al igual que la séptima, es un picado frontal, que sirve para apreciar la distancia que efectivamente separa la posición del huevo de la cabeza de la Virgen.

En la octava, el punto de vista se ha alzado con respecto a la primera, de manera que el aplanamiento se mitigue y podamos apreciar más facilmente la profundidad de la nave.

Por último, en la novena hemos querido ofrecer la perspectiva contraria a la mostrada en el cuadro original. Manteniendo la simetría central, el punto de vista se ha situado sobre el punto central de la cornisa que recorre el ábside. El huevo, en primer plano, suspendido sobre la cabeza de la Virgen, parece ahora enorme y queda aparentemente enmarcado por la bóveda bajo la que se encuentran los personajes.

Invitación a seguir mirando

Hemos tratado de analizar algunos aspectos de esta esplendida obra de Piero della Francesca. Sin duda nuestras reflexiones, aun desde el punto de vista matemático, son sólo algunos de los muchos acercamientos posibles. Haciéndolas nos hemos sentido cómplices de este matemático y pintor que no descuidó ninguno de los detalles al concebir el espacio, los objetos, los personajes, la luz que lo ilumina todo...

Los engaños que el pintor dispone como trampas visuales ante el espectador, se transforman en guiños cómplices para los ojos de quien atravesando la tabla va más allá y los descubre. El Piero matemático se vuelve cercano cuando aprendemos su lenguaje, descubrimos sus claves y apreciamos su Arte con ojos matemáticos.

ARTE CON OJOS MATEMÁTICOS ■

suma+ 62
Noviembre 2009, pp. 69-73

Verticales

Descalzo en la playa la arena ardiente te quema los pies. Corres hacia el agua buscando el frescor de la arena húmeda. Llega una ola. Su frío te lame los empeines ascendiendo por tus pantorrillas hasta detenerse en un punto indeterminado por debajo de las rodillas. Un breve lapso de quietud y el agua se retira arrastrando parte de la playa a tu alrededor. Te zambulles sobrevolando islas de algas.

Cuando vuelves a tierra goteas sin cesar. En el trayecto hasta tu toalla un sinfín de granitos de arena se te adhieren embadurnando los pies y los tobillos. Arena que no es tú, pero de la que ninguna distancia te separa. Cúmulos de puntos adherentes que determinan ahora los confines de tu cuerpo.

Intentas quitártelos con las manos, pero no logras sino trasladarlos de los pies a los dedos. El remedio es ir a la ducha para librarte de ellos con el mismo elemento con el que se te pegaron. Al regresar a casa verás que algunos continúan adheridos a tu piel. Quizás alguno lleve ahí mucho tiempo y pertenezca a otra playa. Otros ya han pasado a formar parte de ti. Imposible distinguirlos porque ya son tú, porque eres tú y tus adherencias.

La adherencia completa al ser. Alrededor de un punto adherente siempre hay puntos del ser. Evidentemente, los puntos del ser le son adherentes, pero puede haber puntos adherentes al ser que no le pertenezcan. Así se adhieren el 0 a la sucesión {1, 1/2, 1/3, ..., 1/n} y la circunferencia al espacio que encierra, el círculo pelado y abierto.

Asumiendo sus adherencias el ser se cierra. La sucesión de racionales 3, 3,1, 3,14, 3,141… tiene por límite un punto adherente llamado π. Un irracional que saca a la luz el carácter incompleto de los racionales. El río {1, 1/2, 1/3, ..., 1/n} desemboca en **Q**; el río {3, 3,1, 3,14, 3,141, ...}, no. **R** es un mar necesario, el continuo donde pueden desembocan todos los ríos racionales.

Adherencias son también los puntos de conocimiento que inspiran tus pensamientos al salir de casa, de la escuela, de tu país, de tu cultura y que te completan como persona, siempre y cuando las asumas como propias.

Miquel Albertí Palmer
IES Vallés, Sabadell
adherencias@revistasuma.es

El hotel *Catalonia Plaza* (plaza de España, Barcelona)
[Todas las fotos de éste artículo son de MAP]

Llegó a Barcelona con la típica lista de lugares por visitar elaborada consultando guías de viaje y páginas de Internet. Mientras esperaba el metro en el andén de *Plaça de Catalunya* se sentía exultante de comenzar su periplo cultural.

Un rato más tarde volvía a la superficie en la plaza de España. Allí le sorprendió ver una plaza de toros entera puesta de puntillas. Una pirueta muy española, se dijo, y una virguería ingeniera. La rodeó tomando una foto cada veinte pasos. De vuelta en casa las engancharía una tras otra con el *Photoshop* para crear un póster espectacular. La primera plaza de toros rectilínea de la historia.

Pasó entre las torres venecianas que abrían el amplio paseo hacia las fuentes de agua, luz y sonido. Ahora estaban apagadas. Tendría que haber pensado en ello. Para presenciar el espectáculo tendría que volver al anochecer. A media ascensión por las escalinatas que conducían a *Montjuic* se dio la vuelta par contemplar la vista. Hizo más fotos. Después visitó lo que esperaba, el pabellón Mies van de Rohe y el castillo. Pero en lugar de descender por la cara Oeste hacia el puerto decidió volver sobre sus pasos. Había captado algo que deseaba precisar.

Durante el regreso estuvo muy atento a todo. Quería averiguar porqué sentía la necesidad de volver por donde había venido. Y se dio cuenta justo cuando volvió a pasar entre las dos torres. Ahí estaba la impresionante fachada del hotel *Catalonia Plaza*. La contempló fascinado. Le parecía sosa de tan geométrica, aunque le decía algo que no acababa de comprender.

Todas las ventanas eran cuadradas y estaban distribuidas de la misma manera. Incluso el interior de cada ventana estaba partido del mismo modo que la fachada, en cuadrados y rectángulos. Esa división del cuadrado le recordaba algo, pero no sabía qué. Hizo más fotografías, conectó la cámara a su pequeño ordenador y las transfirió.

Mientras realizaba esas operaciones recordó por fin dónde y cuándo había visto antes ese dibujo. Fue en un libro cuando estudiaba en el instituto. Quizá también en una pizarra. Sin embargo, no lograba recordar porqué era importante la figura. De lo que estaba seguro era que había que poner nombres a las cosas. Bueno, nombres no, letras. Abrió el programa correspondiente, escogió una de las fotografías y llenó de letras una de las ventanas. La perspectiva de la foto rompía el paralelismo de los marcos verticales, pero no le importó. Seguro que lo eran. Mientras asignaba letras a las piezas pensó que lo que hacía era de lo más simple, pues otorgaba la misma letra a las piezas que le parecían iguales.

Cada ventana estaba dividida en dos cuadrados y dos rectángulos. Al cuadrado grande lo llamó A. Al pequeño, a. Cada rectángulo sería b. Entre todos formaban la ventana V:

Detalle de la fachada del hotel *Catalonia Plaza*

$$V=A+a+2b$$

Pero eso no le dijo mucho. Entonces, en lugar de poner letras a los espacios, se las puso a los marcos. Le sorprendió necesitar menos letras, pues sólo había dos longitudes distintas. Con x e y tendría suficiente.

Una vez completada la nueva asignación, reflexionó unos instantes. El marco de la ventana entera medía $x+y$. Así que el espacio al que antes había llamado V era ahora $(x+y)^2$. Las cristaleras cuadradas que antes llamó a y A pasaban a ser x^2 (la pequeña) e y^2 (la mayor). Y el rectángulo b se convertía en $x·y$. Por tanto:

$$(x+y)^2=x^2+y^2+2·x·y$$

Días después, ya de vuelta en casa, no podría quitarse la fórmula de la cabeza. Lejos de gustarle, la tomaba por un mal recuerdo. Una de esas pesadillas que todo viajero transforma en deleite a su regreso, pero que en su caso no sabía cómo asimilar. ¿Cómo iba a hablar a nadie de ella? Se imaginaba la reacción de sus amigos al relatarles su deducción. Pensarían que estaba loco. Irse a Barcelona para deducir fórmulas, algo propio de pirados. De nada le servirían excusas como haber paseado por las *Rambles* o haber asistido a un concierto en el *Palau de la Música*. No, mejor no decir nada de la fórmula.

La fórmula se le había adherido como una lapa. Quizá haciendo desaparecer las pruebas del suceso, archivos y fotografías, eliminaría también el recuerdo. Pero sería inútil. Su recuerdo no desaparecería porque el problema no era la fórmula en sí, sino su deducción. Y lo que odiaba era el hecho de haber sido capaz de llevarla a cabo. Él no era matemático ni quería serlo. Y aquel proceso, si no lo convertía en matemático, lo acercaba a esa condición. Una segunda piel que se le antojaba muy incómoda.

De adolescente las matemáticas le parecían el *MSdos* de la vida. Enciendes el ordenador y se abre una ventana de vida: luz, color, sonido, movimiento, alegría. Lo abres en *MSdos* y aparecen caracteres y fórmulas en blanco sobre un fondo negro. Tal cual asomarse al interior de una tumba. Había contemplado la fachada del hotel con luz, color, sonido y movimiento a su alrededor. Su deducción había aniquilado todo eso. Era estática, sorda, en blanco y negro, casi a oscuras y casi muda. Hacía falta determinación para enfrentarse a eso y él la había tenido. ¿No había en el fondo de su conciencia un rescoldo de placentero orgullo fruto de su competencia matemática?

Le desagradaba haber aislado un fragmento de realidad de su contexto para analizarlo en base a aspectos de lo más objetivos. Se sentía como si hubiese traspasado una frontera. El reverso de una moneda a la que nunca había querido mirar. Aunque, bien pensado, eso no le había impedido disfrutar de la realidad completa de la situación. Recordaba bien la luz, el color y los sonidos de la ciudad. Luego ese nuevo carácter matemático no le coartaba otras capacidades. Tal vez mirar el reverso de la moneda no significaba perder de vista el anverso, sino darse cuenta de su tridimensionalidad del disco. Tenía un nuevo rasgo que añadir a su personalidad que empezaba a tomarse con gusto. Sólo temía que creciese demasiado y acabase por asfixiarle otras cualidades. En lugar de borrar los archivos, los reunió en una carpeta que guardó como *Una fachada que habla matemáticas*.

El título era bonito, pero mentira. La fachada era muda. Fue él quien la hizo hablar. ¿Cuántas personas pasarán cada día por ahí sin hacerle decir ni pío? La clave estaba en asignar signos iguales a cosas iguales para luego interpretarlos en base a una relación o lenguaje operativo. Entonces ocurría el prodigio. En su caso, la base de su interpretación fue operativa. Una interpretación que los matemáticos consideran natural, pero que para él no tenía nada de corriente, al menos hasta ese momento.

Tal vez fuese cierto todo eso del constructivismo, la cognición situada y que quien enseña debe desempeñar un papel de guía y no de transmisor. Pero hacía falta activar una sinapsis que muchos, o bien no desean llevar a cabo, o bien no pueden realizar. ¿Cómo habría podido él, un simple viajero, haber demostrado la fórmula sin ese clic? Tal vez su clic fuese consecuencia de los guías educativos que tuvo durante su adolescencia. Sólo que le resultaba difícil justificar un desfase de tantos años entre el input y el output.

El viaje por la península continuó sin grandes sobresaltos aparte de dos acontecimientos más, uno vivido en Morella (Castellón) y el otro en Galera (Granada).

Siete veces cinco en una papelera de Morella (Castellón)

Al llegar a Morella desde el norte le impresionó su castillo y le decepcionó su calle principal porticada. Esperaba encontrarla con vida. Y así fue. Pero era una vida falsa, como la de todas las villas turísticas. Abundaban los restaurantes con carteles llamativos y las tiendas de souvenirs donde se vendían objetos de labranza convertidos en recuerdos. Eso prolongaba unos años más su existencia, pero no servían para hacerse una idea de lo que fue Morella cuando los burros hacían restallar los adoquines de calles ahora impolutas. La Morella de ahora aparentaba la de antaño.

Al acercarse a una papelera vio que tenía pintados unos trazos familiares. Eran grupos de cuatro barras verticales atravesadas por otra. Alguien había contado hasta 35.

Al acercarse a una papelera para depositar el envoltorio de un helado, vio que tenía pintados unos trazos familiares. Eran grupos de cuatro barras verticales atravesadas por otra. Se repetían hasta siete veces. Alguien había contado hasta 35.

Durante su paseo reflexionó sobre aquellas marcas. Era posible que reflejasen un recuento, pero, ¿y si fuese sólo un ritmo? Él podía dibujar en un papel una serie de cuadraditos sin pensar, en ningún momento, que estaba contando múltiplos de cuatro. Actuando así no calculaba. Tan sólo repetía una y otra vez la misma acción. En eso consistía llevar un ritmo. Del mismo modo que uno marca con el pie, inconscientemente, los tiempos fuertes de una pieza musical sin llevar la cuenta del número de compases transcurridos.

El único modo de averiguar si quien realizó aquellos trazos había contado o ritmado era preguntándoselo directamente. Y eso era imposible. Sin dicha interpelación todo eran conjeturas por resolver. Cualquier interpretación de cálculo sería una proyección matemática, una imposición del observador sobre lo observado. Un ritmo sin cuenta.

Días después se encontraba en Galera. Antes de llegar creía que había dos Galeras, la subterránea y la de la superficie. Pero encontró una tercera formaba por las casas cuevas abandonadas. Muchas habían perdido sus puertas. En otras, una cortina rasgada medio podrida establecía una tenue frontera entre interior y exterior. En algunas había enseres cotidianos, viejos y estropeados, tirados por el suelo. Un espacio que compartían con vestigios de juergas contemporáneas.

En el dintel de la entrada a una casa cueva había una inscripción formada por quince cifras y tres rayas cuya disposición conocía. Se acordó de la fachada del *Catalonia Plaza* y de la papelera de Morella. ¡Qué país tan curioso era España! Ya

Casa cueva en Galera (Granada)

empezaban a ser demasiadas las cosas matemáticas que tendría que callarse. ¿Qué había de los toros, el flamenco, la tortilla de patatas y la paella?, le preguntarían.

Abrió el ordenador para cerrar el tema sobre las cifras de Galera. Sin duda el número inferior, 1.800, correspondía al resultado de multiplicar los dos superiores, 150 por 12. La distribución se correspondía con el algoritmo de la multiplicación que había aprendido en la escuela.

Y era eso lo que distinguía su viaje y le distinguía a él de quien era antes de realizarlo. Fue uno, regresaba otro.

Pero entonces se le ocurrió imaginarse extraterrestre, aunque sin antenas ni pigmentación verdosa. Inmediatamente las cifras dejaron de ser cifras y se convirtieron en meros signos. Como extraterrestre sólo veía formas carentes de significado. La multiplicación se había esfumado. Para elaborar su nueva interpretación disponía de pocos referentes. Únicamente de la disposición de los signos y la frecuencia de sus repeticiones. Seis ceros, cuatro unos, dos cincos, un dos, un tres y un ocho. Poco le llevó descartar cualquier conclusión sobre el pensamiento del autor. Considerar aquello un cálculo rupestre era una conclusión cultural propia y no una realidad universal.

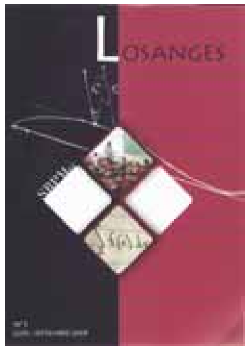
Multiplicación a la entrada de una casa cueva abandonada (Galera)

Cuando dejó España se sentía perplejo. A otros se les pegaban el gusto por el flamenco y las cenas tardías. A él también, pero además de esto, se le había pegado mucho más. Y era eso lo que distinguía su viaje y le distinguía a él de quien era antes de realizarlo. Matthiessen tenía razón. Fue uno, regresaba otro.

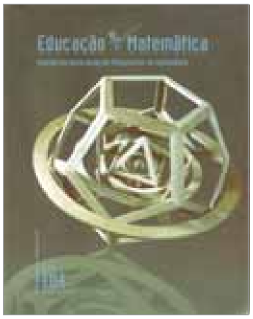
ADHERENCIAS

Publicaciones recibidas

Petit X
Irem de Grenoble
N.º80, 2009
Saint Martin d'Hères Cedex-Francia
ISSN: 0759-9188

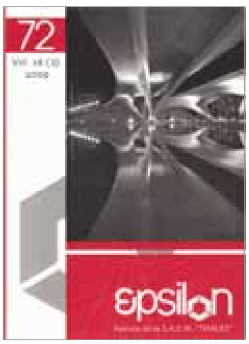


Losanges
SBPMeF
N.º5, Juin-Septembre 2009
Soumagne. Bélgica

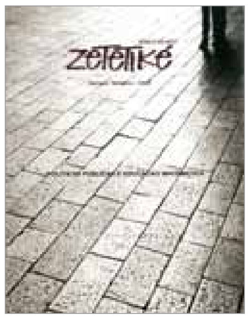


Educação e Matemática
Revista da Associação de Professores de Matemática
N.º 104, Setembro-Outubro 2009
Lisboa. Portugal
ISSN: 0871-7222

Investigación y ciencia
Prensa Científica, S.A.
Noviembre 2009
Barcelona
ISSN: 0210136X

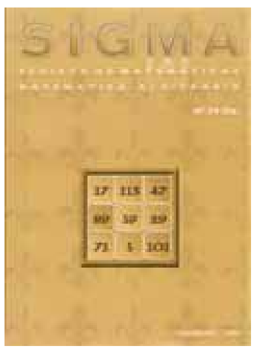


Epsilon
SAEM THALES
Vol. 26 (2), 2009
Sevilla
ISSN: 1131-9321



Zetetiké
CEMPEM–FE/UNICAMP
Vol. 17, 2009
Campinas. Brasil
ISSN: 0104-4877

La Gaceta de la RSME
RSME
Vol.12, n.º 3, 2009
Madrid
ISNN 1138-8927



Sigma
Gobierno Vasco
Departamento de Educación, Univ. e Investigación
N.º 34, septiembre 2009
Vitoria
ISSN: 1131-7787

suma+ 62
Noviembre 2009, pp. 75-86

Biblioteca

Mi presentación

Daniel Sierra Ruiz

Las secretarías de la FESPM se suelen ocupar tras una época en la que se establece una estrategia de *acoso y derribo* contra la persona considerada idónea; este *ataque* suele realizarse desde varios frentes, incluyendo amistades del susodicho, de tal forma que éste casi no se puede negar. Así que cuando alguien lo hace de forma voluntaria, pero de verdad, casi se celebra con fuegos artificiales (como los de las JAEM de Girona, estaría bien). Sixto Romero, firmante de *Mi biblioteca particular* de este número, es una de esas *rara avis,* que, por si fuera poco, va y se presenta a la reelección. En mi opinión, que además sea una persona del ámbito universitario le da un valor añadido, máxime si tenemos en cuenta que ha llegado a ocupar cargos de importancia en su universidad. Por otra parte, ser el vocal de Relaciones Internacionales de la FESPM demuestra que el titular no sólo está comprometido con la didáctica de la matemática, sino que es una persona con conciencia solidaria.

Al igual que me ha ocurrido con otros firmantes, no es mucho lo que yo pueda contar sobre la trayectoria de Sixto que no sea conocido. Es otra de esas personas que son casi referencia inexcusable en este círculo. Quien haya seguido esta etapa de *Mi biblioteca,* y conozca hace tiempo al firmante, habrá deducido que le he *convocado* como antiguo director de *Suma,* en mi afán por recorrer la historia de la revista a través de algunas de las personas que más tiempo le han dedicado. Sixto asumió la dirección después de Rafael Pérez, es decir en otoño de 1991, y la dejó en noviembre de 1995, cuando pasó a Emilio Palacián y Julio Sancho. Revisitando aquellos números —del 9 al 19—, sigue asombrando la frescura de los primeros tiempos, aunque ya se atisbaba que un nuevo salto estaba pendiente, pero a punto de realizarse. Al fin y al cabo, se trataba de afianzar el trabajo realizado hasta entonces, de cimentar lo que luego se convertiría en una revista de calidad ya no sólo de contenidos sino a nivel editorial.

Hasta ahora me considero afortunado, pues no he obtenido negativas cuando he pedido a alguien que realice esta colaboración. Y eso que no es poco el trabajo que se presenta cuando te tienes que enfrentar a un artículo de estas características. Sixto no ha sido una excepción y, desde el primer momento, mostró su buena disposición. Sin embargo, como

Daniel Sierra Ruiz (coordinador de la sección)
IES Benjamín Jarnés, Fuentes de Ebro (Zaragoza)
biblioteca@revistasuma.es

acostumbro a contar algún chascarrillo (no sé si es apropiada la palabra, pues me acabo de enterar de que además de anécdota ligera, también es picante, y no es el caso...), esta vez no va a ser menos. Yo no conocía personalmente a Sixto, y cuando le contaba a alguien que sí que lo conocía bien, que iba a escribir la sección, indefectiblemente aparecía una leve sonrisa. Finalmente, me decidí a preguntar por esa sonrisa... La respuesta era una enumeración de sus virtudes, acabando con un aviso: no entregará el texto en plazo. Para borrar su inmerecida fama (que además no sé de donde proviene) he de decir que entregó con escrupulosa puntualidad su original. Además, como se puede comprobar no son unas palabras escritas en una tarde con prisas para cumplir un compromiso: me atrevería a decir que es el trabajo más exhaustivo que se ha realizado en esta sección, consiguiendo, además, darle una nueva óptica a la misma, lo cual, teniendo en cuenta cuantas se han escrito ya, no es nada fácil. Así que es para mí una gran satisfacción que Sixto Romero Sánchez nos hable de *su biblioteca particular.*

Mi biblioteca particular

Sixto Romero Sánchez

Acepté, con mucho gusto, la petición de colaborar en esta sección cuando Daniel Sierra me invitó a contestar un conjunto de preguntas que me envió por correo electrónico. Emulando a algunos compañeros que me han precedido en números anteriores de *Suma*, voy a intentar responder a las preguntas planteadas pero, en mi caso, lo haré en un orden cronológico desde que empecé a estudiar.

Con verdadero temor a defraudar a los lectores pero sobre todo a mí mismo, soy consciente de que es un reto importante poner sobre el *tapete* y descubrir los libros que han formado y siguen formando parte de mi vida: 1) los que utilicé en mi etapa colegial-colegio e instituto; 2) los utilizado en la formación universitaria; 3) aquellos que han conformado y conforman mi vida profesional; y 4) los que utilizo como acto litúrgico de lectura, casi a diario, y que me permite rellenar las pocas horas de ocio de que disponemos los que nos dedicamos a la enseñanza de las Matemáticas. ¡Va por ustedes!

Volver la vista atrás y rescatar los títulos de los primeros libros que me han marcado es harto difícil, pero sí recuerdo que antes de entrar en el instituto, corrían tiempos duros el año 1963 (¡en aquel plan de estudios nos matriculamos con 9-10 años!), mi padre tenía el objetivo, como el de la mayoría de los padres de la época, de intentar darnos estudios universitarios. Consiguió comprar un libro que me acompañó en años sucesivos; se trataba del libro *Aritmética Razonada. Nociones de Álgebra*, del prof. D. José Dalmau Carles, denominado el *Libro del Alumno.*

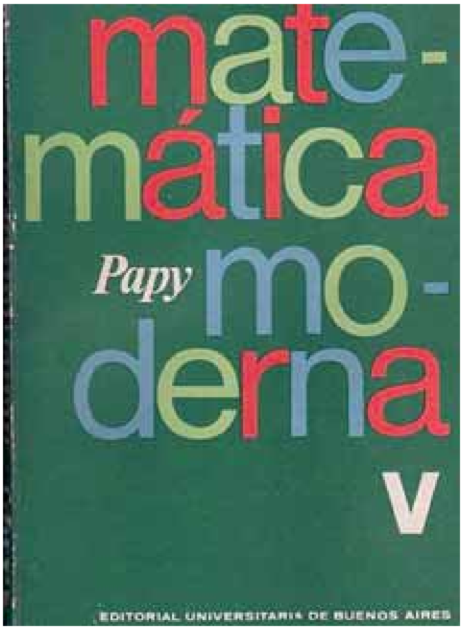
Dalmau Carles Pla, S.A., fue una editorial española, hoy en día inactiva aunque no oficialmente desaparecida, fundada en Gerona en 1904 por Josep Dalmáu Carles, estuvo principalmente especializada en la publicación de libros escolares y métodos pedagógicos, aunque también publicó biografías, libros de historia, enciclopedias y muchas otras clases de libros. Además de su labor pedagógica, Dalmau Carles Pla fue pionera en España en el dominio de los juegos de tablero y de rol.

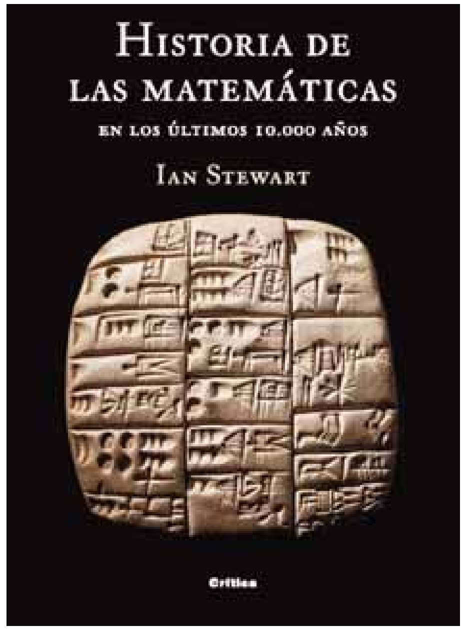
También merece destacar en mi biblioteca otro libro del mismo autor, *Soluciones Analíticas.* Este libro denominado el Libro del Maestro, se trata de un libro de soluciones analíticas que contiene ejercicios y problemas resueltos.

Estos dos libros me sirvieron en cursos superiores ya que conseguí una buena base para afrontar con éxito las matemáticas que nos iban a impartir en el bachillerato.

A partir de este momento, y con la entrada en el instituto vinieron la colección de los libros correspondientes a las diferentes editoriales (¡muchos de ellos, por la situación crítica que pasábamos muchas familias eran libros prestados con rotación; en algunos casos *In æternum*!)

Sería demasiado prolijo enumerar los textos de esta época que fui incorporando a mi biblioteca, ya que como he citado anteriormente, están todos los que me sirvieron para superar la etapa escolar de bachillerato.





Tengo que reconocer que hasta que no llegué a estar en segundo de carrera no sentí la necesidad de organizar toda la información que estaba acumulando. Antes de enumerar algunos de los libros que utilicé en la Universidad me gustaría completar la información con un libro que empecé a estudiar en el Curso Preuniversitario y que me marcó: *Matemática Moderna*. Tomo V, de Georges Papy.

Se trata de una obra destinada tanto a profesores como alumnos pero que en mi caso, y gracias a mi maestro el profesor D. Antonio Orpez que me lo recomendó, me sirvió en los primeros cursos de Universidad. Es un texto donde los temas abordados se pueden enumerar así: combinatoria, la aritmética de los enteros racionales, factorizaciones primas de los números naturales, anillos conmutativos y cuerpos, propiedades aritméticas de los grupos y cuerpo de Galois. En los momentos actuales sería impensable abordar esta temática. Recuerdo que era un texto complicado pero los esquemas multicolores y los ejemplos que planteaba G. Pappy, relacionados con la vida cotidiana, representaban medios didácticos de gran valor y compatible con el rigor matemático.

En la etapa universitaria, donde comienzo a formarme, poco a poco se van incorporando textos de las diferentes asignaturas. Algunos profesores recomendaban textos en inglés y como podíamos agudizábamos el ingenio para conseguir determinados recursos y hacernos con las correspondientes fotocopias. No voy a enumerar los textos que me hicieron sufrir y mucho, fundamentalmente, por el problema del idioma y porque se me daba mucho mejor la Geometría y Análisis que el Álgebra y la Topología. Con éstos, entre otros, tengo que reconocer que iba aumentando la estantería de la casa de mis padres, y también que aprendí de lo lindo. Entre ellos están:

a) General Topology (1ª Ed.1955) de John Kelley;
b) Introduction to conmutative Algebra (1969) de M.F. Atiyah, I.G. Macdonald;
c) Álgebra (1971) de S. Lang, un libro pensado como texto básico para un curso de Álgebra de un año. Es un libro denso que incluye más material del que realmente se imparte en clase;
d) Espacios vectoriales topológicos (1974) de H.H.Schaefer;
e) Lecciones de Álgebra Moderna (1965) de P. Bubreil, M.L. Dubreil-Jacotin. Es un texto donde se recoge, en palabras de los autores, una reflexión interesante: «…si el estudio del Álgebra atrae cada vez a los estudiantes es, ciertamente, porque ya no se suelen hacer Matemáticas sin Álgebra; y también porque esta disciplina tiene su propio interés y su atractivo particular…»;
f) Por último Álgebra (1971) de R. Godement.

Es en junio de 1975 cuando termino la carrera, y me planteo dar clase. A partir de este momento es cuando puedo afirmar que estudié y aprendí muchas matemáticas. Mi primer trabajo es en la Escuela Universitaria Politécnica de la Rábida, un complejo estudiantil con tres niveles de enseñanza bajo una misma dirección, el Instituo Politécnico de la Rábida: Formación Profesional, Bachillerato, y Universidad. A comienzos de curso me asignan las clases de Álgebra, Cálculo y Ecuaciones Diferenciales. Recién incorporado (me permito afirmar que a casi todos/as nos ha pasado) inconscientemente someto a los alumnos a un castigo inmerecido, a los que desde la distancia les pido disculpas por el martirio de soportar unas enseñanzas de Cálculo Diferencial, utilizando textos como *Análisis Matemático* de T. Apóstol, que como sabemos desarrolla el análisis matemático partiendo de las nociones de número y la recta real hasta llegar a las derivadas en una y varias variables y a las integrales, tanto de Riemann como de Lebesgue, pasando por las nociones de serie, sucesión o límites. También trae una introducción al cálculo complejo.

Conforme a lo que es habitual en libros contemporáneos, se basa en nociones de topología (explicadas en el segundo tema del libro) para realizar las demostraciones de los diferentes teoremas. Las ventajas de este hecho residen en la simplicidad de estas demostraciones usando las herramientas topológicas, el problema reside en que tal vez el estudiante no presente la soltura suficiente como para seguirlas de un modo claro hecho que puedo constatar como aclaro a continuación.

Poco tiempo me duró el placer y el gusto de tantas demostraciones cuándo una comisión de alumnos y alumnas me interpelaron para exponerme que no se enteraban absolutamente de nada.

Poco tiempo me duró el placer y el gusto de tantas demostraciones cuándo una comisión de alumnos y alumnas me interpelaron para exponerme que no se enteraban absolutamente de nada. Fue suficiente para darme cuenta de que estaba en una Escuela de Ingeniería y que, sin perder el rigor, debía utilizar otra bibliografía. De esta manera, conseguí adaptarme a la situación haciendo una matemática aplicada a la realidad de la ingeniería: *electricidad, electrónica, mecánica, química, forestal, agrícola y minera.* Quiero destacar el magnífico libro *Análisis Matemático* en 3 volúmenes del gran maestro Julio Rey Pastor con Pedro Pi Calleja y Cesar Trejo. Conseguí esta joya, obra fundamental que no envejece nunca, que me sirvió en la formación de los ingenieros de mi Escuela. Es así como de esta manera mi biblioteca particular se vio ampliada hasta la actualidad con sucesivas incorporaciones de textos más aplicados. Las estanterías iban en aumento de forma ostensible incorporando textos de álgebra, análisis en una o varias variables, análisis numérico…, solo señalar aquellos textos que han sido y son más asequibles a nuestros estudiantes.

1) Spiegel, M. R., Transformada de Laplace. McGraw-Hill, serie Schaum, 1970.
2) Spiegel, M. R., Análisis de Fourier. McGraw-Hill, serie Schaum, 1980.
3) Spiegel, M. R., Cálculo superior. McGraw-Hill, serie Schaum, 1976.
4) Zill, D. G., Ecuaciones diferenciales con aplicaciones. 1988.
5) Piskunov, N., Cálculo diferencial e integral. 1977.
6) Kaplan, W., Matemáticas avanzadas para estudiantes de ingeniería. 1986.
7) Kreysig, E., Matemáticas avanzadas para la ingeniería. 1986.
8) Burgos, J., Cálculo infinitesimal. Teoría y problemas. 1984.
10) Edwards, C. H., Penney, D. E., Ecuaciones diferenciales elementales y problemas con valores en la frontera. 1993
11) Strang, G., Álgebra Lineal y sus aplicaciones. Massachusset Institute of Technology. 1976.

Desde años atrás a los cursos 1975 al 1978 no había una previsión de futuro en las oposiciones en la Universidad, en cuanto a Escuelas Universitarias se refería, y decidí como alternativa presentarme a las oposiciones de instituto en el año 1978 consiguiendo la plaza, con tal suerte de que el destino era precisamente en la sección de bachillerato del Instituto Politécnico de la Rábida. Esto ha sido definitivo en mi carrera profesional, dar clase en bachillerato supuso para mi un cambio rotundo en la forma de enfocar las clases: fue entonces cuando conocí a Luis Balbuena y empezamos a trabajar conjuntamente participando en los denominados Movimientos de Renovación Pedagógica. Esto aumentó en mi la inquietud hacia la didáctica de las matemáticas, compatibilizándola con la docencia e investigación en la Universidad, provocando ese cambio hacia la utilización de nuevos manuales, nuevos recursos donde la *Medotología Didáctica* se vislumbraba como uno de los temas centrales en mis trabajos. En este sentido, cayó en mis manos un libro interesante, *Metodología Didáctica* de Renzo Titote un libro de 1970 donde se funde orgánicamente teoría e historia nutriendo la teoría con la historia e iluminando la historia con la teoría y que he utilizado en muchas ocasiones.

La creación de la Sociedad Thales a la que pertenezco también ha significado mucho en mi interés por la didáctica de las matemáticas. La deficiencia arrastrada en técnicas de metodología didáctica desde los años de facultad se vio compensada con la incorporación a estos movimientos activos de profesores, en todo el país, y todos los niveles de enseñanza.

Una de las primeras actividades que me tocó organizar en nombre de la SAEM Thales en el año 1982, fue un curso de tres días con Emma Castelnuovo en la antigua Escuela de Magisterio de Huelva. Ni que decir tiene que se produjo *overbooking* en la matriculación al curso *Recursos didácticos en*

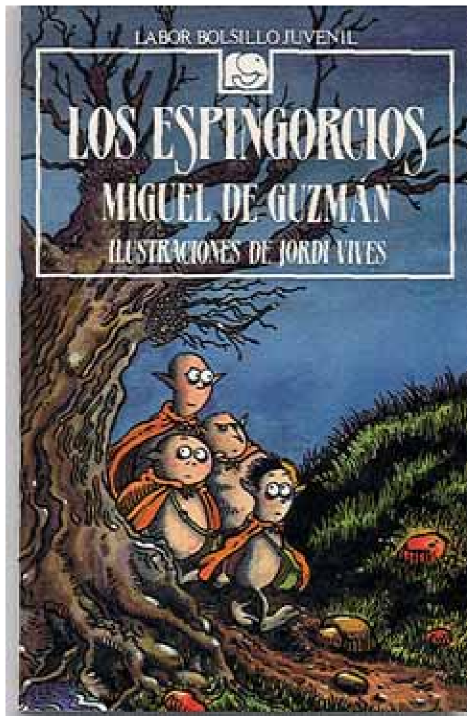
Matemáticas. Desde este momento Emma Castelnuovo se convirtió en un referente para el profesorado de primaria y secundaria. De lectura obligada, y tengo la suerte de contar con algunos de ellos, son sus textos: *I Numeri (1952), La Didáctica de la Matemática (1963), La Geometría (1981), Matematica Nella Realtá (1976), Matematica: Numeri e Figuri (1989) y Documenti di un'esposizione di matematica (1976*).

Como Delegado de la Thales en Huelva me tocó también organizar, en el año 1987, las III Jornadas Thales de Educación Matemática, invitando para la ocasión a Luis A. Santaló, Cristine Keitel. Guy Brousseau, Lucía Grugnetti, Simone Trompler y Claudi Alsina. A partir de este momento siendo consciente de que trabajamos en una *empresa,* aunque docente, en el área de educación matemática, hay que ser consciente de que existe una comunidad internacional que viene trabajando en Educación Matemática desde hace mucho tiempo, y que existe una gran cantidad de literatura sobre el tema y, que tenemos la necesidad de conocerla, después la obligación de dar a conocer nuestra propias investigaciones. Las publicaciones de estos investigadores me ayudaron a entender más el problema de porqué en la universidad española "…no estaban bien considerados los profesores que dedican mucho esfuerzo por hacer una Matemática más atractiva…"; afortunadamente esta idea está prácticamente desaparecida.

Quiero destacar, en primer lugar, la personalidad de nuestro premio Príncipe de Asturias, Luis A. Santaló. La obra de Santaló ha ido creciendo en importancia con el paso del tiempo. Libros, artículos y enciclopedias del conocimiento matemático registran su nombre y sus resultados. Por otro lado, sus numerosos trabajos relacionados con la educación matemática son muestras palpables de su interés por el desarrollo científico de su patria adoptiva y su vocación de servicio. Su paso por Huelva fue una bendición, y como le sucedió a mi gran amigo Rafael Pérez, me hice un santaloadicto. Fuimos en el año 1991, Gonzalo Sánchez Vázquez y yo a visitarlo a su casa de Buenos Aires, con motivo del CIBEM de Santiago de Chile, y nos enteramos que había sufrido una hemorragia. ¡Quien diría que Gonzalo iba a fallecer mucho antes que Luis Antonio! Cortés y atento, sobremanera, me regaló una colección magnífica de libros de secundaria. Naturalmente los guardo como oro en paño.

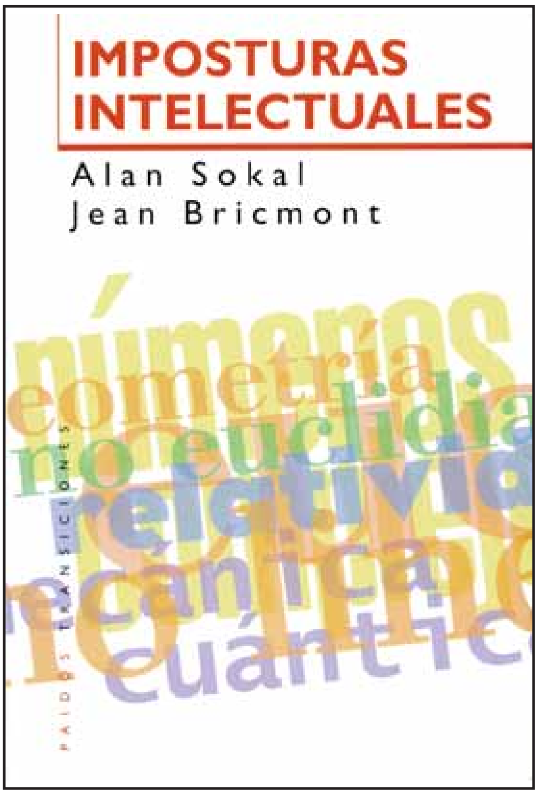
Recomendaría a propios y extraños las publicaciones de Luis A. Santaló: son una verdadera delicia. Entre ellas: *La educación matemática, hoy* (1975), *Matemática en la Educación* (1986), *La matemática en el tercer milenio* (1987), *Matemática para no matemáticos* (1990), *Hacia una didáctica humanista de la Matemática* (1994), *La Probabilidad en la Enseñanza Secundaria. Simulación de Juegos* (1989) y *Matemáticas para profesores* (1997).

Tampoco puedo olvidar los trabajos de nuestro querido Miguel De Guzmán. Respondiendo a la pregunta de qué libros destacaría para recomendar a matemáticos y no matemáticos es importante y notorio destacar la obra completa de Miguel. Estaba muy preocupado por la educación matemática; ha sido quizás la característica principal del trabajo de toda su vida. No sólo en el ambiente universitario, sino también en otros niveles educativos, muy especialmente en la educación secundaria. Escribió con otros colaboradores libros de texto para Bachillerato que fueron verdaderas innovaciones; estimuló y orientó la tarea de muchos profesores a través de conferencias y seminarios en muchas ciudades españolas, estando dispuesto a viajar en cualquier momento que no tuviera una ocupación ineludible. Y no prestó únicamente su atención a la educación matemática de escolares y universitarios, sino también a la de un público más general. Ocupan una parte importante en mis estanterías. Citarlos todos serían demasiados pero entre otros señalaré: *Mirar y ver*, (1977), *Sobre la educación matemática* (1983), *El papel de la Matemática en el proceso educativo inicial* (1984), *Cuentos con cuentas* (1985), *Para pensar mejor* (1991), *Aventuras matemáticas: una ventana hacia el caos y otros episodios* (1995), *Los matemáticos no son gente seria* (1996) publicado con Claudi Alsina, *El rincón de la pizarra* (1996).



Por otro lado, la presencia de Guy Brousseau en Huelva significó mucho para los profesores andaluces. Su vida está totalmente inmersa en la historia de la evolución de la enseñanza de las matemáticas en los últimos cincuenta años. Es uno de los importantes representantes de la investigación en educación matemática en la actualidad. Sus trabajos están relacionados con la formación de maestros en el marco de los IREM considerando las diferentes dimensiones de su influencia. Entre sus principales nociones desarrolladas en el campo de la didáctica es el concepto de contrato didáctico, central en el análisis del funcionamiento del sistema educativo. También su influencia en España la tuvo en nuestra querida compañera, ya fallecida, Julia Centeno por el trabajo, *Números decimales: ¿por qué?, ¿para qué?* (1988) de la editorial Síntesis y prologada por G. Brousseau.

También debo destacar algunos de los textos extranjeros, sobre Educación Matemática y que los he aplicado, con la lógica dificultad del lenguaje, en la medida de las posibilidades en el quehacer diario cito a:
International Handbook of Mathematics Education de A. J. Bishop, K. Clements; Cristine Keitel, J. Kilpatrick, C. Laborde; *Second International Handbook of Mathematics Education* de A. J. Bishop; K. Clements, J. Kilpatrick, F. K. S. Leung; *Innovation in Maths Education by Modelling and Applications (Mathematics and Its Applications*) de J. De Lange, I. Huntley, C. Keitel.



Las décadas de los ochenta y noventa fueron muy fructíferas para nuestro país. Esta nueva imbricación por parte de las sociedades federadas en la FESPM, en aras de elevar el rol de la Educación Matemática en España, significó una mayor preocupación por parte del profesorado que buscaba nuevas ideas en nuevos modelos y recursos para el aula que redundaran en un nuevo comportamiento del profesorado, como es mi caso: *buscar nuevas lecturas.* Aparte de las revistas correspondientes a nuestras sociedades federadas quiero destacar algunos libros que me ayudaron, y que por supuesto están también en mi biblioteca: *Las Matemáticas sí cuentan: informe Cockcroft* (1985), elaborado por la Comisión de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas en las escuelas primarias y secundarias de Inglaterra y Gales; *Principios y Estandares para la Educación Matemática* (2004) de The National Council de Teacher of Matematics, y traducido por la SAEM Thales.

Estas nuevas *obligaciones* me llevaron a buscar publicaciones, de compañeros de nuestro país y de otros países que venían trabajando desde hacía años en educación matemática. Probablemente deje a muchos en el olvido. Destacar los materiales manipulativos y publicaciones en matemáticas que surgen de los juegos, el uso de las TIC´s, las olimpiadas, matemáticas en la calle, pintura, geoplanos, geoespacios, papiroflexia, teselas, mosaicos etc., elaborados por los Grupos Almosta, Maria Antonia Canals, Grupo Azarquiel, Grupo Cero, los trabajos de la citada Emma Castelnuovo, Grupo Alquerque, Pablo Flores, Claudi Alsina, Miguel de Guzman, Luis Balbuena, Mariano Real, Francisco Casalderrey, Antonio Pérez, Mari Luz Callejo, Xaro Nomdedeu, Juan Emilio García, Vicente Meavilla, …

También los libros de historia de las Matemáticas son un importante recurso para recomendar a los no matemáticos para que tengan una visión general de las Matemáticas. Cada vez se impone con mayor fuerza la idea de que la historia de las matemáticas, a pesar de que es aún asignatura pendiente en muchos planes de estudio de las diferentes facultades de matemáticas españolas, debe ser parte integral de la formación de todo matemático. Los libros sobre historia de las Matemáticas forman también un buen subconjunto del conjunto total de libros de mi biblioteca particular:

1. Los *Elementos de Euclides* es la obra matemática por excelencia, una compilación y sistematización de los conocimientos matemáticos de la Antigüedad y un clásico entre los clásicos. La colección está formada por trece libros, los seis primeros dedicados a la geometría plana elemental, los tres siguientes a la teoría de los números, el décimo a los inconmensurables y los tres últimos a la geometría de los cuerpos sólidos. Solo dispongo, del tomo I en papel impreso pero se pueden conseguir los tres tomos en la Editorial Gredos. También hay una página en Internet, muy intere-

sante traducida a nueve idiomas:
http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm

2. *Las matemáticas en sus personajes*. La colección de libros Nivola es una buena e interesante herramienta didáctica para el aula y un buen aliciente para los no matemáticos.

3. El libro clásico *Historia de la Matemática* (1986) de Carl Boyer. Existe una versión más actualizada de 2001.

4. *Historia de las Matemáticas* (2008) de Ian Stewart. Nos ofrece en este libro una historia total de las matemáticas desde los primeros sistemas numéricos de la antigua Babilonia hasta los grandes problemas matemáticos aún no resueltos. Es una verdadera crónica de la historia de la matemática para no iniciados.

5. Reseñable son también los tomos escritos por Julio Rey Pastor y José Babini, *Historia de las Matemáticas* (1986).

Entre las lecturas ajenas a las Matemáticas o no tanto separadas de ellas se va consolidando en una amplia producción literaria. Como se afirma en la editorial del número 54 de *Suma:* «En los último años son frecuentes los libros con trama o argumentos más o menos matemático o en relación con las Matemáticas…». También buena parte de mis estantes están ocupados por libros que son una verdadera delicia, entre otros:

a) *El teorema del Loro* (2000) de Denis Guedj donde el autor pone de manifiesto la simbiosis de humor y razón pura que nos sirve en una entretenida lección de matemáticas;

b) *Un matemático lee el periódico* (1995) de John Allen Paulos. En él se refleja una extraña pero divertida comunión entre las letras y los números;

c) *El hombre que calculaba* (ed. 2007) de Malba Taban. Bajo la forma de de un cuento al estilo las mil y una noches el autor nos propone una serie de juegos y ejercicios para afinar el ingenio matemático sin perder el sentido de la maravilla, en una narración llena de poesía.

Más cercano al momento actual, en el año 2000 me invitaron a dar una conferencia en la Universidad de Coimbra (Portugal). El tema que elegí fue *Matematización de la cultura: Límites y asedios a la realidad.* En su preparación, meses antes, llegó a mis manos un artículo de Alain Sokal titulado *Transgressing the Boundaries: Towards a Transformative Hermeneutics of Quantum Gravity*, y publicado en la revista americana *Social Text* en 1996, cuya traducción al español viene a ser así: *Transgredir las fronteras: hacia una hermenéutica transformadora de la gravedad cuántica*. Un artículo disparatado donde parodia el tipo de trabajo habitual en medios postmodernos. La broma fue revelada más tarde, y se armó un cierto escándalo, sobre todo porque las citas que se utilizaban para justificar sus extravagantes afirmaciones eran todas ellas ciertas, y procedentes de nombres de lo más prestigioso de la filosofía francesa actual. El material reunido para la parodia era mucho mayor que el usado en el artículo, y Sokal lo distribuyó entre sus colegas; sin embargo, cuando lectores no científicos leían dicho material, algunas veces preguntaban por qué era absurdo lo que decían los filósofos franceses. Todo esto viene al intento de responder a la pregunta de que si he encontrado algún libro ajeno a las Matemáticas en el que las matemáticas juegan un papel importante.

Precisamente viene al hilo ya que en el libro *Imposturas intelectuales* (1999) de Alan Sokal y Jean Bricmont de la editorial Paidós, los autores muestran que hay famosos intelectuales como Lacan, Kristeva, Irigaray, Baudrillard y Deleuze que han hecho reiteradamente un empleo abusivo de diversos conceptos y términos científicos, bien utilizando ideas científicas sacadas por completo de contexto, sin justificar en lo más mínimo ese procedimiento, bien lanzando al rostro de sus lectores no científicos montones de términos propios de la jerga científica, sin preocuparse para nada de si resultan pertinentes, ni siquiera de si tienen sentido. Recomiendo su lectura y para aclarar lo que afirmo, una muestra.

> *La deficiencia arrastrada en técnicas de metodología didáctica desde los años de facultad se vio compensada con la incorporación a estos movimientos activos de profesores.*

Jacques Lacan fue uno de los psicoanalistas más famosos y más influyentes de nuestro siglo. Cada año se dedican decenas de libros y artículos al análisis de su obra. Lacan ha revolucionado la teoría y la práctica psicoanalistas; en opinión de sus detractores, es un charlatán y sus escritos son pura palabrería. No voy a entrar en el debate pero se lee en el citado libro utsupra que la predicción de Lacan por las Matemáticas no es, ni mucho menos, marginal en su obra. Sus escritos estaban, en los años cincuenta repletos de grafos, fórmulas y algoritmos.

Entre las referencias matemáticas, he elegido una extraída de las notas de un seminario de 1959*:* «Se me permite utilizar una de esas fórmulas que se me ocurren cuando escribo mis notas, *la vida humana se podría definir como un cálculo en el que cero sería irracional.* Esta fórmula nos es más que una imagen, una metáfora matemática. *Cuando digo irracional,* no me refiero a cualquier estado emocional insondable, sino precisamente a lo que se denomina *un número imaginario.* La raiz cuadrada de menos uno no se corresponde con nada que no esté sometido a nuestra intuición, con nada real —en el sentido matemático del término— y no obstante, se debe conservar con toda su función» (Lacan, 1977). En esta cita, Lacan confunde los números irracionales con los números imaginarios, aunque pretende ser preciso. Se pone de manifiesto que amplios sectores pertenecientes al mundo de las humanidades y de las ciencias sociales han adoptado la filosofía del postmodernismo, una filosofía que se caracteriza por el rechazo más o menos explícito de la tradición racionalista de la Ilustración, por elaboraciones teóricas desconectadas de cualquier prueba empírica, y por un relativismo cognitivo y cultural que considera que la ciencia no es nada más que una narración, un mito o una construcción social.

Cada vez se impone con mayor fuerza la idea de que la historia de las matemáticas, a pesar de que es aún asignatura pendiente en muchos planes de estudio de las diferentes facultades de matemáticas españolas, debe ser parte integral de la formación de todo matemático.

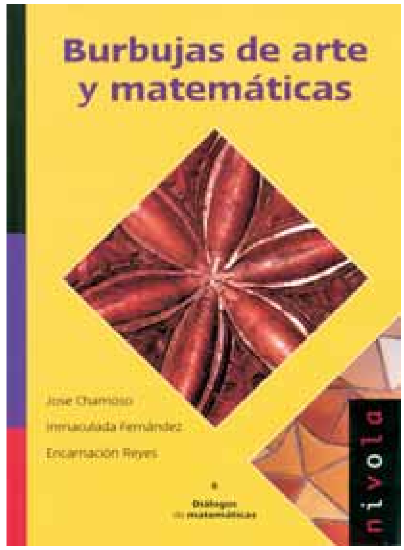
A partir de la lectura de este libro, puedo decir que me he vuelto enormemente curioso y crítico cuando leo un libro. No sé exactamente cuántos libros tengo en mi casa pero sí afirmo que el anaquelazo correspondiente a libros no matemáticos casi los duplica. Temas relacionados con la geografía, la literatura, la pintura, la historia —sobre todo temas relacionados con la segunda guerra mundial— la poesía y la pintura son ocupantes permanentes de la biblioteca.

Varios comentarios quiero hacer al respecto. Hace unos meses leí *El Corazón del Tártaro* (2002) de Rosa Montero. En la línea argumental anterior, encuentro en la página 26 de la editorial Planeta Agostini, un pasaje que no tiene desperdicio. Dice la autora en bocas de la protagonista de su obra:«…En los episodios de fiebre muy elevada, sobre todo en las terribles calenturas de los niños, los enfermos pueden padecer *delirios geométricos*. La negrura de sus cerebros se puebla de *imágenes tridimensionales* con las *formas elementales euclidianas, asfixiantes poliedros* en lenta *rotación, arrogantes danzas de triángulos*. Es como si el ataque febril consiguiera desnudar el dibujo básico de lo que somos, reducirnos a esa estructura original que compartimos con el resto del universo. Despojados de todo, somos *geometría*».¡Lo mejor será que no nos contagiemos con la gripe A!

Por último, comentar que no soy un lector de un solo libro a la vez. Siempre tengo en jaque dos o tres. En la actualidad, desde hace años he decidido leer los clásicos. Estoy con: a) *Papá Goriot* de Honoré de Balzac. Es un bellísimo libro donde se exponen la escenas de la vida parisina y que se puede incluir en el modelo costumbrista donde se utiliza el retorno de los personajes como recurso innovador; b) *El miedo de la ciencia* de Robin Duncar. Lo que me está gustando del libro es que R. Duncar indaga sobre la justificación que puede tener ese frecuente miedo a la ciencia y rompe con amena seriedad una lanza a favor de un dominio de conocimiento cuya finalidad es solucionar los problemas que el mundo físico presenta al ser humano; c) *Niebla* de Miguel de Unamuno. Se trata de una de las novelas más célebres de Unamuno correspondiente al existencialismo. Es una tragicomedia publicada en 1914 y cuyo argumento central es el estudio de la ligazón entre realidad y ficción, el escritor y sus personajes, y sobre todo en el carácter nebuloso de la propia. Es una novela que, a mi juicio, resulta de abordar temas que manifiestan el anticipo de un estilo y sensibilidad que sería típicos en el siglo pasado.

Para finalizar, quiero indicar que suelo, en los trabajos que realizo, incluir citas que tienen que ver con las Matemáticas y otras ciencias. La poesía también es una de mis grandes aficiones. He estudiado la simbología matemática en algunos poetas pero, sin lugar a dudas, lo más complicado en lo que estoy empeñado, desde hace cuatro años, es estudiarla en Juan Ramón Jiménez. Su obra *Espacio y Tiempo* me tiene muy enredado pero merece la pena dedicarle todo el tiempo del mundo. Por ello, quiero acabar con una cita de K. Weiertrass: «Un Matemático que no es también algo de poeta, nunca será un matemático completo».

Escaparate 1:
Burbujas de arte y matemáticas



Burbujas de arte y matemáticas
José Chamoso, Inmaculada Fernández y Encarnación Reyes
Nivola, Madrid, 2009
ISBN: 978-84-92493-05-0
256 páginas

En este nuevo *Diálogo de matemáticas* de la editorial Nívola, los dos personajes Jose y Bill nos invitan a seguir sus conversaciones a lo largo de un atractivo itinerario que nos lleva a la plaza Mayor de Salamanca, al palacio de Santa Cruz de Valladolid, las catedrales de Palencia, Burgos y Zamora, el alcázar de Segovia, León, Soria y Ávila. A través de estos singulares enclaves de Castilla y León, Jose y Bill, cuya obsesión por el descubrimiento matemático inunda su diálogo, nos invitan a contemplar y entender de la presencia de bellísimas realidades geométricas: arcos, curvas, proporciones, simetrías, estrellas, teselados, cruces, superficies, fractales, etc.

Reconocida es la solvencia didáctica de los tres autores y su dedicación a temas de geometría en arte y arquitectura. Esto les ha permitido, aparte del diálogo Jose-Bill, incluir una estupenda colección de fotografías (¡a color!), con gráficos asociados explicativos y muchos detalles matemáticos claros y precisos. Es destacable también que a lo largo de la ruta por Castilla y León el libro incluye siempre referencias e imágenes de edificios y monumentos nacionales e internacionales, de Gaudí a Nouvel, de Calatrava a Foster, lo que da a los temas considerados una especial notoriedad universal.

El libro aborda muchos temas que serán accesibles a cualquier lector interesado en las relaciones de matemáticas, arte y arquitectura pero creo que la publicación tiene especial interés formativo para alumnos de secundaria.

Utilizado como guía puede dar pie al profesorado de matemáticas de Castilla y León a proponer trabajos y visitas..., y animar al profesorado de otras comunidades a hacer (con la buena compañía de este libro) la ruta propuesta. También, como valor indirecto, el propio libro puede servir de pauta para realizar rutas semejantes en otros lugares y poder preparar trabajos sobre este imprescindible descubrimiento de la geometría como soporte de la expresividad artística.

Hoy en día se habla a menudo de la necesidad de promover el turismo cultural, de dar un valor añadido al ocio. Posiblemente este tipo de guías matemático-artísticas merecerían una mayor difusión y apoyo por parte de las instituciones interesadas en dar este salto cualitativo en las rutas turísticas. A muchos lectores de Suma el libro les gustará y les podrá ser útil. Hay arte y hay matemáticas.

En la última página podrán descubrir que las burbujas son de agua mineral con gas. Una pena porque el final de esta ruta merecería cava.

Claudi Alsina
Universitat Politècnica de Catalunya (Barcelona)

Escaparate 2:
Educación matemática y buenas prácticas

Educación matemática y buenas prácticas
Infantil, Primaria, Secunadria y Educación superior
Núria Planas y Àngel Alsina (Coords.)
Graó, Barcelona, 2009
ISBN: 978-84-7827-695-0
272 páginas

Al cabo de un año de la publicación de *Matemática inclusiva: propuestas para una educación matemática accesible*, acaba de aparecer un nuevo libro a cargo de Núria Planas y Àngel Alsina, aunque esta vez surge de la coordinación de más de veinte autores con experiencia profesional en distintos niveles que van desde la etapa infantil hasta la educación superior. Los cuatro capítulos principales se organizan en torno a experiencias docentes llevadas a cabo en aulas de infantil, primaria y secundaria y en cursos de formación inicial y permanente del profesorado de matemáticas, aunque no interesa tanto destacar cuándo se plantean las propuestas sino para qué, cómo y con quién. Las buenas prácticas van precedidas de una presentación que sitúa los principios de una educación matemática accesible respecto a principios más específicos de cada etapa. Para entender la filosofía del libro, es importante notar que en todos los capítulos, las experiencias prácticas ocupan más espacio que las reflexiones teóricas sobre ellas.

Cuando Núria y Àngel se pusieron en contacto conmigo y me convencieron para colaborar como autora en el capítulo de prácticas de educación secundaria, tuve muchas dudas sobre la conveniencia de relatar algunas de las experiencias en mis aulas, sobre todo porque hasta ese momento no había tenido por costumbre dar a conocer tan públicamente mis modos de enfocar la enseñanza de las matemáticas. Éste fue, sin embargo, uno de los argumentos que usaron para que acabara aceptando. Se quería conseguir que profesores anónimos, junto con algunos de mayor proyección en los últimos años y otros de gran reputación a nivel internacional, explicaran la importancia de su labor diaria y, en mi caso, ubicaran esta labor en un contexto de formación reflexiva y permanente. Viendo el producto final en su totalidad, creo que hice bien. Ha sido estimulante leer los otros textos, porque están escritos de forma intencionadamente abierta para que se pueda interactuar con ellos y reflexionar sobre cómo completarlos.

A raíz de mi participación en este libro, he profundizado algo más en torno a lo que significa una buena práctica en educación matemática. Dicen Núria y Àngel que no basta con saber matemáticas —aunque es necesario saberlas—, ni basta con superponer sobre el “saber sabio” unas cuantas reglas pedagógicas y didácticas que indiquen maneras genéricas de actuar en el aula cuando el conocimiento a construir es de tipo matemático. También es necesario un proceso cíclico y colaborativo de análisis y rediseño de las intervenciones en el aula, para que se vayan logrando cada vez más los objetivos de aprendizaje planificados. Para el análisis y la reflexión en

Nuria Iranzo
IES Can Planas, Barberà del Vallès (Barcelona)

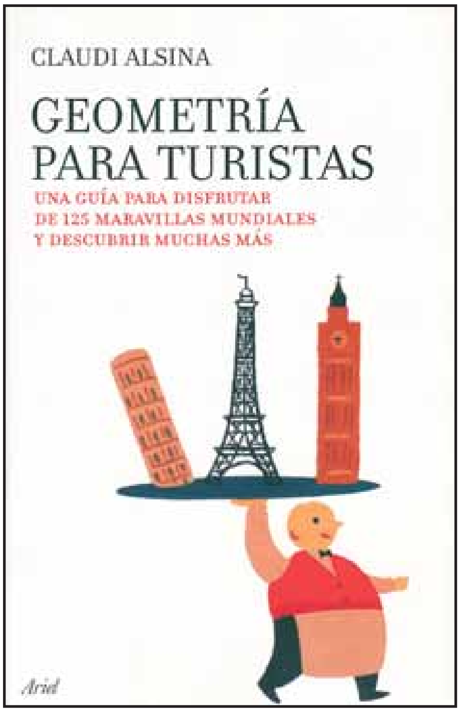
torno a la práctica, se mencionan y ejemplifican varios criterios a tener en cuenta: la producción conjunta de actividades de aula por medio de la colaboración entre profesorado y alumnado, la construcción de puentes entre lenguaje escolar y lenguaje cotidiano, la creación de significado en entornos de conversación dialógica, el planteamiento de situaciones que estimulen el pensamiento complejo, o bien la contextualización de la enseñanza en base a experiencias del alumnado. En general, todas las condiciones que se tratan están claramente enmarcadas en las teorías socioculturales del aprendizaje humano, que destacan la construcción de conocimiento como una actividad conjunta.

La adopción de las teorías socioculturales como marco permite defender una educación matemática con una identidad común para todas las etapas escolares, más allá de las representaciones que puedan hacerse del logro matemático a lo largo de cada una de ellas. Me gusta especialmente que se muestre la educación matemática como un proceso cíclico de relación con el conocimiento por medio de las fases de contextualización, descontextualización y recontextualización, donde el aprendiz está a su vez involucrado en las fases de cognición, metacognición y revisión de la cognición. Se explica que este doble proceso cíclico debe reproducirse en todas las etapas y en cada secuencia didáctica de enseñanza y aprendizaje que se considere completa, de modo que el conocimiento matemático se construya primero en un contexto particular que tenga sentido para el alumnado y del que después pueda hacerse un proceso de distanciamiento para, más tarde, aplicar este conocimiento en una situación distinta de la inicial. Este primer ciclo, que en mi opinión ayuda a la transferencia del aprendizaje, admite ser pensado en cualquier edad y etapa escolar.

A medida que se avanza en la lectura, se entiende que no haya una lista efectiva de características para las buenas prácticas; en realidad es un libro para reflexionar sobre algunos de los rasgos que definen estas prácticas y los distintos tipos de andamiajes que los profesores podemos proporcionar a nuestros alumnos. Es bueno ver al profesor de matemáticas como alguien capaz de ofrecer situaciones contextualizadas en los entornos del alumnado, haciendo descubrir al mismo tiempo propiedades y estructuras matemáticas y procurando nuevas situaciones matemáticas en las que el alumnado pueda reconocer y aplicar los contenidos trabajados. Así también se consigue ver al alumno como alguien capaz de disfrutar y dar sentido a las matemáticas por medio de su implicación en contextos de aplicación y reflexión en torno a ellas.

Escaparate 3: Geometría para turistas

Geometría para turistas
Una guía para disfrutar de 125 maravillas mundiales y descubrir muchas más
Claudi Alsina
Ariel, Barcelona, 2009
ISBN: 978-84-344-8806-9
287 páginas



Cuando en algún momento de las décadas venideras se haga la historia de la divulgación matemática en nuestro país, el nombre de Claudi Alsina será, sin duda, uno de los que aparecerá en un lugar destacado. Porque a sus facetas ya conocidas de profesor, investigador, conferenciante y autor de libros de divulgación para el ámbito de los profesores, añade desde hace algún tiempo el de divulgador para el gran público, para el amplio auditorio de los ciudadanos cuya relación con las matemáticas no es ni profesional ni próxima.

Publica con una frecuencia pasmosa: tres libros en poco más de un año, desde *Vitaminas matemáticas*, de febrero de 2008, pasando por *El club de la hipotenusa*, de septiembre del mismo año, hasta llegar al actual, de marzo de 2009. Algo más destacable todavía dada la calidad y la sustancia (la gran información y extensión) de sus libros, que viene publicando en una editorial generalista como es Ariel, lo que le hace candidato a una mayor audiencia. Lo que realmente consigue porque en el caso de la Geometría para turistas yo ya lo he visto ubicado en una gran superficie dedicada a libros y discos en la sección de guías de viajes (además de en la de matemáticas).

Lo cierto es que en el libro de Alsina se encuentra mucha matemática, pero también abundante información para viajeros curiosos que quieren ampliar su campo de mira añadiendo datos pormenorizados sobre muchos de los edificios y obras públicas antiguas y modernas, que tanto llaman la atención en el deambular por el mundo, así como monumentos y objetos de mobiliario doméstico o urbano.

En una primera parte («Consejos matemáticos básicos») se refiere a una serie de conocimientos necesarios para el viajero, en los que las matemáticas juegan un papel destacado, entre las que están: calendarios y festividades, horas oficiales y jet-lag, temperatura y climatología, tamaño de las maletas o cambio de divisas. Y también las necesidades matemáticas para poder moverse por el mundo, como «el kit matemático del turista», «mapas, GPS y Google-Earth» o las medidas locales.

La segunda parte la constituye la guía propiamente dicha, y está ordenado por zonas geográficas, como las otras guías de viaje: España; Europa; América del Norte; América Central y del Sur; Oriente Medio y Africa y, por fin, Oriente Lejano, India y Oceanía... Y permite descubrir detalles desconocidos incluso de la propia ciudad, como, en mi caso, el autor de la enorme y geométrica nueva estación ferroviaria de Zaragoza: Carlos Ferrater.

Las cosas que más van a interesar a cada lector, dependen, como siempre, de sus viajes previos o programados, así como de sus gustos. Pero no cabe duda que todos ellos (e incluso los amantes del viaje sin desplazarse, de sillón y libro o televisión) encontrarán informaciones que no conocían, reflexiones novedosas sobre aspectos geométricos y pueden desarrollar un enorme deseo de viajar a muchos de los sitios que se nos proponen.

El gremio de profesores de matemáticas (lector mayoritario de estas líneas) disfrutará con este libro. Pero puede ser también un buen regalo para conocidos y familiares viajeros, a los que servirá para añadir nuevas emociones y perspectivas a sus viajes pasados y futuros, para que contemplen las matemáticas (en particular la geometría) con otros ojos... y, de paso, que vean que los matemáticos somos gente interesada en la técnica, el arte y la cultura. Al menos algunos, como Claudi Alsina.

Fernando Corbalan
CPEPA Emilio Navarro, Utebo (Zaragoza)

suma+ 62
Noviembre 2009, pp. 87-100

Hipatia ante Artemisia

Florencia, 1944

El 14 de agosto de 1944 Anna Banti está en Florencia ante su casa destruida. "Non piangere", no llorar, o "Basta de lágrimas", como traduce al castellano Carmen Romero para conservar el ritmo y la fuerza de la esdrújula; así comienza la novela *Artemisia*, que Anna Banti escribió entre 1944 y 1947. Antes, esa noche de agosto de 1944, las tropas nazis, derrotadas, se retiran de Florencia dejando tierra quemada tras su huida, detonan las minas colocadas a lo largo del río Arno, caen sus puentes y las casas que lo bordean, y arde el manuscrito de una novela que Anna Banti había escrito sobre Artemisia. De la destrucción de ese manuscrito y de su voluntad de no verter más lágrimas resulta la novela *Artemisia*, publicada en 1947, en la que Anna Banti y la novela reducida a cenizas por el fuego nazi se entrelazan con la vida de Artemisia Gentileschi. "Bajo los cascotes de mi casa" –narra Anna Banti en primera persona– "he perdido a Artemisia, mi compañera de hace tres siglos, que respiraba tranquila, acostada por mí en cien páginas de escrito" (Banti, 2008, p. 50). Susan Sontag, en el ensayo "Un destino doble", que acompaña la edición en Alfabia de la novela, lo subraya "la presencia de Banti en la narración está en el centro –es el corazón– de la novela" (Sontag, 2008, p. 15).

¿Qué sabemos de Anna Banti? "Anna Banti" –nos informa la solapa de esa edición en Alfabia de la novela– "es el pseudónimo de Lucia Lopresti (Florencia, 1895- Ronchi di Massa, 1985), escritora italiana que fundó junto a su marido, el célebre crítico de arte Roberto Longhi, la revista *Paragone*" –y la solapa reitera el arquetipo: es la mujer de un hombre famoso.

Roma, Florencia, Nápoles, s. XVII

Artemisia Gentileschi también está ligada a un hombre famoso: su padre es el pintor Orazio Gentileschi, del círculo de Caravaggio. Y en el estudio de su padre, en el que ella se inicia en la pintura, ocurre un hecho que marcará su vida y su pintura: en 1611, Agostino Tassi, amigo de su padre y pintor caravaggista como él, la viola. Se sabe desde hace unos cuarenta años que Artemisia nació en 1593 en Roma, pero Anna Banti la hace más joven, catorce años, cuando es violada, al igual que lo hizo su padre cuando un año después de los hechos denunció a Tassi por violación.

Luis Puig
Universitat de València Estudi General
historias@revistasuma.es

El proceso por violación es el único episodio de la vida de Artemisia que está documentado, ya que se conservan las actas[1]. Según Pérez Carreño (1993), la denuncia no se hizo de inmediato por la promesa de matrimonio hecha por Tassi, y así lo dijo Artemisia en el juicio. Sólo ante el incumplimiento de esa promesa presentó la denuncia el padre de Artemisia, acusando de paso a un tal Cosimo Corliari de cómplice de la violación y de haberle robado un cuadro. Pérez Carreño señala que

> en buena medida el proceso tuvo que ver más con la propiedad de Orazio que con la honra de su hija, y más con la honra que con la violencia ejercida contra ella. No es la violación misma, sino una falsa promesa de matrimonio que la siguió, lo que en buena parte del proceso se discute [...] La propiedad de su padre había sido mancillada y el culpable debía aceptar ahora esa propiedad convirtiéndola en su esposa" (Pérez Carreño, 1993, p. 40).

Figura 1. Artemisia Gentileschi, *Susana y los viejos.*

Tassi se defendió acusando a Artemisia de ser promiscua, negando así que fuera mancillada por él, al no ser virgen. Finalmente Tassi fue condenado a un año de prisión y al exilio, pero el juicio fue denigrante para Artemisia, obligada a defenderse, y torturada para establecer que decía la verdad, según la práctica judicial de la época.

Después del juicio, Artemisia –narra Anna Banti– está "ávida de justificación, de revancha, de mando" (Banti, 2008, p. 101), y, aunque se casa con un tal Pietro Antonio de Vincenzo Stiattessi, pronto lo abandona para vivir sola. Anna Banti le hace decir a Artemisia "Dije, voy por mi cuenta; entonces me parecía que después de la vergüenza tenía al menos el derecho de ser libre como un hombre" (Banti, 2008, p. 70).

Figura 2. Artemisia Gentileschi, *Judith decapitando a Holofernes.*

Artemisia ha pintado ya, antes de su violación, el episodio bíblico, narrado en el libro de Daniel, de Susana acosada por dos viejos que usan su posición de autoridad para amenazarla con acusaciones falsas si no se somete a sus deseos sexuales (figura 1). Artemisia tenía diecisiete años y quizá ya conocía el asco, el desasosiego que refleja en el gesto de la Susana bíblica[2], pero después del juicio es ira lo que refleja en el cuadro que pinta entre 1612 y 1613 y hoy se puede ver en el Museo de Capodimonte de Nápoles, el primero de los que dedicó a la decapitación de Holofernes por Judith (figura 2) –ira y el trabajo físico, lo que cuesta cortar la cabeza de un hombre. Volverá tres veces sobre Judith y Holofernes, una en 1620, en que representa de nuevo la escena de la decapitación, cuadro que se conserva en la Galería de los Uffici en Florencia, y dos en que representa el momento siguiente en que Judith y su sirvienta se llevan la cabeza ya cortada (una también en 1612-1613, hoy en el Palacio Pitti de Florencia, y otra en 1625, hoy en el Instituto de las Artes de Detroit). Y Anna Banti imagina su risa despiadada, "Lo he pintado yo, es como si hubiese matado a un prepotente" (Banti, 2008, p. 120), ante esos cuadros que a Roberto Longhi, su marido, le habían hecho exclamar: "¿Y esto ha sido capaz de pintarlo una mujer? ¡Líbrenos el cielo!"[3].

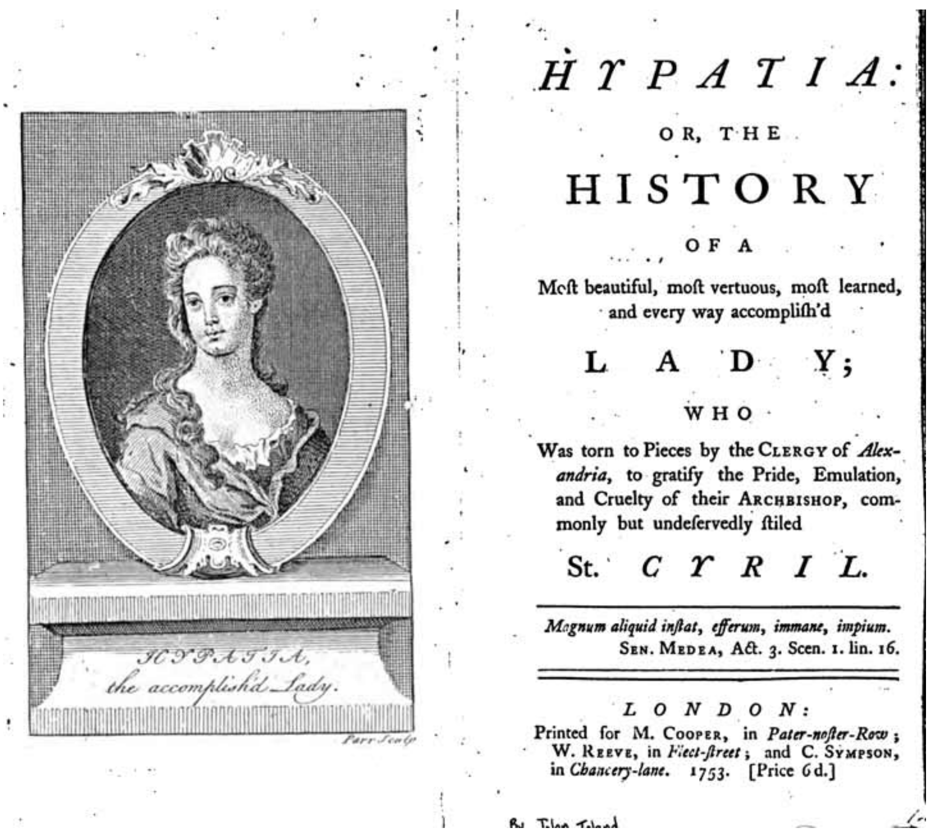
Artemisia vive por su cuenta, ha cortado cabezas de hombre, pero nunca se desprende de la necesidad de ser reconocida por su padre. Así lo afirma Susan Sontag: "Aunque heroica en el sentido que contraviene las normas de su sexo (y hace a un lado las necesidades femeninas que la debilitarían) a fin de convertirse en una artista, Artemisia es un tipo femenino conocido. Su vida y carácter están organizados por su temor y subordinación a un padre impenetrable e imperioso. No hay madre en la vida de Artemisia" (Sontag, 2008, p. 21).

Tampoco hay madre en la vida de Hipatia de Alejandría.

Alejandría, s. IV-V

Hipatia de Alejandría aparece siempre ligada a su padre, Teón[4] de Alejandría, el matemático. Así, la voz Ὑπατία[5] de la enciclopedia del siglo X conocida como *Suda Lexicon*[6], comienza diciendo: “La hija de Teón el geómetra, el filósofo alejandrino, también filósofa y conocida por muchos”.

E Hipatia aparece también ligada siempre a un hecho violento, que marcará no su vida y su obra, como en el caso de Artemisia, sino la narración de su vida y su obra: su muerte, desnudada, cortada con trozos de cerámica[7], despedazada y quemada, por una turbamulta. Alejandría en el siglo V estaba sacudida por confrontaciones de todo tipo. La religión cristiana es la religión oficial del Imperio Romano desde el año 313, en que así lo hizo establecer el emperador Constantino I el Grande; ya ha pasado el corto mandato de Juliano el Apóstata como emperador (361 a 363), quien intentó revivir sin mucho éxito los cultos paganos. En Alejandría ha habido conflictos de base religiosa fundamentalmente entre cristianos y judíos, entre los propios cristianos y entre cristianos y paganos. Desde el nombramiento como obispo de Alejandría de Cirilo, quien sería después San Cirilo de Alejandría, existe un enfrentamiento entre el poder eclesiástico y el poder civil, ambos cristianos, entre Cirilo y Orestes, prefecto del Imperio en Alejandría. Hipatia es una persona influyente en Alejandría, por sus buenas relaciones con los cristianos del entorno del gobierno del Imperio, y con el propio Orestes, y sus enseñanzas tienen fama y cuentan con discípulos devotos, paganos y cristianos, entre los que se encuentra Sinesio de Cirene, que será nombrado obispo de Ptolemais (en la actual Libia). Corre el rumor por la ciudad de que Hipatia es responsable del enfrentamiento de Orestes con Cirilo, que es su mala influencia la que hace que el representante del emperador se oponga al obispo. El rumor se alimenta, quizá por el propio Cirilo, con la especie de que Hipatia practica ritos teúrgicos, que es una bruja. Su muerte está narrada en las fuentes que se conservan de varias maneras. El *Suda* dice que “según algunos fue culpa de Cirilo, pero según otros, resultó de la inveterada insolencia y rebeldía de los alejandrinos. Ya que ellos hicieron lo mismo a muchos otros de sus propios obispos”, y cita el caso de dos obispos de Alejandría, impuestos por el poder imperial, que también fueron asesinados en disturbios multitudinarios, arrastrados por las calles, despedazados y quemados. El *Suda* añade un motivo más para la animadversión de Cirilo con Hipatia: la envidia. Cuenta el Suda que, en una ocasión, Cirilo, al pasar frente a la casa de Hipatia, o el lugar donde enseñaba, vio que había una gran multitud entrando, saliendo y plantada frente a la casa, y preguntó a qué se debía. Le contestaron que Hipatia estaba hablando y que toda esa gente venía a escucharla. “Cuando supo esto” –dice el *Suda*– “su alma se amargó con envidia, e inmediatamente urdió su muerte, la



HYPATIA:

OR, THE

HISTORY

OF A

Most beautiful, most vertuous, most learned, and every way accomplish'd

LADY;

WHO

Was torn to Pieces by the CLERGY of *Alexandria*, to gratify the Pride, Emulation, and Cruelty of their ARCHBISHOP, commonly but undeservedly stiled

St. CYRIL.

Magnum aliquid instat, efferum, immane, impium.
SEN. MEDEA, Act. 3. Scen. 1. lin. 16.

LONDON:
Printed for M. COOPER, in *Pater-noster-Row*; W. REEVE, in *Fleet-street*; and C. SYMPSON, in *Chancery-lane*. 1753. [Price 6d.]

Figura 3. Portada del libro de John Toland sobre Hipatia más profana de las muertes". Ya haya sido Cirilo instigador sólo de la campaña contra Hipatia o de su propia muerte, lo cierto es que la muerte de Hipatia eclipsa su vida y su obra, y se convierte en símbolo del fin del paganismo helénico, eliminado violentamente por el cristianismo, y del fin de una época ilustrada. Hipatia, por su muerte violenta, entra en el territorio de la leyenda.

Europa, s. XVIII. La leyenda de Hipatia de Alejandría

En la larga galería de mujeres pintadas por Artemisia Gentileschi –Susana acosada, Judith decapitando a Holofernes, Salomé con la cabeza del Bautista, Yael matando a Sísara con un clavo, Minerva guerrera, Venus dormida, Dánae sedienta, Lucrecia violada, Cleopatra suicida, Magdalena en éxtasis, ella misma autoafirmada en *Autorretrato como alegoría de la pintura*–, no está Hipatia de Alejandría. El interés por Hipatia en Europa llega un siglo después, en el XVIII.

El primer capítulo del libro de Dzielska sobre Hipatia[8] se titula "La leyenda literaria de Hipatia" y en él Dzielska afirma que su leyenda "que disfrutó de amplia popularidad durante siglos [...] todavía persiste en la actualidad. Si se pregunta quién era Hipatia, la respuesta más probable será: "Una filósofa pagana, joven y hermosa, que en el año 415 fue despedazada por monjes (o, de manera más general, por cristianos) en Alejandría". A lo que añade que esa leyenda se basa fundamentalmente en escritos que "presentan a Hipatia como víctima inocente del naciente fanatismo cristiano y su asesinato como señal de la desaparición, junto con los dioses griegos, de la libertad de investigación", y que utilizan esa imagen "en sus polémicas religiosas y filosóficas" (Dzielska, 2004, p. 15).

De este estilo es el libro escrito por John Toland, en 1720, con un título que ya enuncia todo lo que va a contar: *Hipatia, o la historia de una dama de gran belleza, virtud y sabiduría, competente en todo, que fue descuartizada por el clero de Alejandría para satisfacer el orgullo, la envidia y la crueldad del arzobispo, a quien se conoce de manera universal, aunque inmerecida como San Cirilo* (figura 3). Voltaire también utiliza la figura de Hipatia para atacar a la iglesia católica en varios de sus escritos. En uno de ellos, el *Diccionario filosófico*, publicado por primera vez en 1764, su ironía, su crítica ácida a la iglesia, se mezcla al burlarse de Cirilo con expresiones machistas, con lo que muestra que le importa poco Hipatia, que la está usando para combatir a la iglesia:

> Je me contente de remarquer que saint Cyrille était homme, et homme de parti; qu'il a pu se laisser trop emporter à son zèle; que quand on met les belles dames toutes nues, ce n'est pas pour les masacrer; que saint Cyrille a sans doute demandé pardon à Dieu de cette action abominable, et que je prie le père des miséricordes d'avoir pitié de son âme[9].

Edward Gibbon en su monumental *Historia de la decadencia y caída del Imperio Romano*, publicada entre 1776 y 1789, también "declara a Cirilo responsable de todos los conflictos que estallan en la Alejandría del comienzos del siglo V, sin olvidar el asesinato de Hipatia" (Dzielska, 2004, p. 17), y utiliza la imagen de una Hipatia representante de la razón y la cultura como apoyo de su tesis según la cual la consolidación del cristianismo es la causa principal de la caída del Imperio Romano.

La Hipatia legendaria es también una figura cultivada por románticos como Leconte de Lisle o Gérard de Nerval, en el siglo XIX, y, a falta de imagen suya por Artemisia, sí que la hay del pintor prerrafaelita inglés Charles William Mitchell (figura 4), que la representa joven en el momento de su muerte, de acuerdo con la leyenda, cuando lo más probable es que tuviera entre 50, como establece Deakin (1994), y 60 años, como lo hace Dzielska (2004).

Figura 4. Charles William Mitchell, *Hypatia*

Las fuentes primarias de la vida y obra de Hipatia

La leyenda de Hipatia está propiciada por su muerte violenta, pero además describir una Hipatia no legendaria no es tarea fácil. No se conserva ningún escrito que se pueda afirmar que es de la mano de Hipatia, y las fuentes primarias sobre su vida o que den noticia de su obra son muy escasas. En Deakin (1995, 2007) se ofrece una descripción minuciosa de cuáles son, que resumo a continuación. Las fuentes son ocho:

1. Una voz en la enciclopedia *Suda Lexicon*.
2. Un pasaje de la *Historia Eclesiástica* de Sócrates Escolástico.
3. Un fragmento de la *Crónica* de Juan, obispo copto de Nikin.
4. Las cartas de Sinesio de Cirene, en particular las que tienen a Hipatia como destinataria.
5. Una inscripción al comienzo del libro III del comentario de Teón a la *Syntaxis* o *Almagesto* de Ptolomeo.
6. Una breve referencia en una historia de la iglesia de Filostorgios.
7. Una breve referencia en una crónica de Malalas.
8. Una referencia en la *Cronografía* de Teófanes.

1. El *Suda Lexicon* es una enciclopedia del siglo X, que ya he citado antes, y descrito brevemente en la nota 6. Como digo en ella, parte de la voz "Hipatia" proviene de la *Vida de Isidoro* de Dasmacio, texto que no se conserva, pero del que sí que se conserva un resumen hecho por Focio, patriarca de Constantinopla del siglo IX, que está recogido en la *Patrología Griega*[10], una recopilación en 165 tomos de escritos de griegos que son importantes para la historia de la iglesia cristiana.

2. Sócrates Escolástico es un historiador cristiano de la iglesia del siglo V. Su *Historia eclesiástica*[11] sí que se conserva ("lo que no es extraño", como señala Deakin, "porque los cristianos ganaron") y está recogida en la *Patrología Griega*.

3. Juan de Nikin era copto, y los coptos derivan de los monofisitas, secta cristiana que se hizo con la diócesis de Cirilo tras su muerte y que se proclamaron sus seguidores. El texto se conserva en una traducción al etíope, hecha a partir de una traducción al árabe del original, que probablemente estaba escrito en griego. La versión de la muerte de Hipatia que aparece en este texto es favorable a Cirilo y subraya la maldad de Hipatia.

4. Las cartas de Sinesio de Cirene[12] dirigidas a Hipatia son seis y un fragmento, más el ensayo conocido por su título latino *De Dono Astrolabii*, en el que habla de Hipatia, diciendo que construyó un astrolabio con su ayuda.

5. La inscripción al comienzo del libro III del comentario de Teón a la *Syntaxis* o *Almagesto* de Ptolomeo es una breve frase en la que Teón parece decir que el comentario de ese libro no lo ha hecho él sino que lo ha hecho su hija Hipatia. Sobre este asunto hay controversia entre los historiadores, ya que no todos piensan que la frase deba interpretarse como que el comentario sea exclusivamente de Hipatia, sino que hay quien piensa que lo que indica es que el comentario de ese libro lo escribieron padre e hija en colaboración, y sólo el orgullo paterno le hace a Teón decir que es obra exclusiva de su hija. Veremos después los argumentos de Knorr a favor de que sea de Hipatia.

6. Filostorgios era de una secta arriana y contemporáneo de Hipatia. Por ser arriano, sus obras están perdidas. Lo que se conserva es un resumen en dos frases hecho por Fotio.

7. La referencia en la crónica de Malalas, del siglo VI, no es valiosa, al parecer de Deakin, porque está constatada la falta de rigor de sus obras.

8. La referencia en la Cronografía de Teófanes (s. VIII-IX) no sólo es breve, sino que da una fecha distinta e improbable para la muerte de Hipatia (406).

El conjunto de todo esto son sólo unas pocas páginas: la voz "Hipatia" del Suda, que es particularmente larga, tiene unas setecientas palabras, las cartas de Sinesio son en general breves, algunas de apenas tres párrafos. Las tres últimas fuentes carecen de interés, las otras describen someramente la vida de Hipatia, en ocasiones sólo el episodio de su muerte. Si queremos saber algo más que acontecimientos de su vida, sólo podemos recurrir a unas pocas frases en el *Suda* y en las cartas de Sinesio, y a la indicación de Teón al comienzo del comentario al libro III de la *Syntaxis* de Ptolomeo.

En las cartas de Sinesio, pese a que él fue su discípulo ferviente en Alejandría y su seguidor a partir del momento en que dejó de asistir a sus clases para ser obispo en Ptolemais, no menciona ninguna obra de Hipatia, y apenas dice nada sobre el contenido de su enseñanza. Sinesio se dirige a ella como "la filósofa", y expresa su admiración por ella como guía espiritual y como mentora, como atestigua que, en una de las cartas, someta a su consideración dos libros que ha escrito, que sólo hará públicos con su aprobación:

> Si no te parece que sean dignos de oídos griegos, si, como Aristóteles, aprecias la verdad más que la amistad, una oscuridad cerrada y profunda los ensombrecerá, y la humanidad nunca los oirá mencionar[13].

La única referencia explícita a obras de Hipatia que se conserva está contenida en el *Suda*, y sólo menciona obras matemáticas. Nada sabemos de que escribiera obra alguna de filosofía, pese a que las fuentes hablan de que su enseñanza era básicamente filosófica.

Las matemáticas de Hipatia

El pasaje del *Suda* en que se mencionan las obras de Hipatia tiene pocas palabras y ha sido objeto de varias lecturas distintas. El texto es "escribió un comentario a Diofanto, el Canon astronómico y un comentario a las Cónicas de Apolonio". La lectura más aceptada es la que hizo Paul Tannery en 1880, para quien, aunque al referirse a ese "Canon astronómico", no se reitera la palabra "comentario", basta con suponer que falta una palabra que Tannery añade, para que eso no signifique que se esté diciendo que Hipatia escribiera un libro de ese título, sino que ahí se estaría haciendo referencia también a un comentario sobre una obra astronómica, que podría ser el comentario que Teón dice que hizo su hija al libro III de la *Syntaxis* de Ptolomeo, o, en todo caso, a las tablas de Ptolomeo (Tannery, 1880). Lo único que las fuentes nos dicen que haya escrito Hipatia es, por tanto, lo siguiente:

1. Un comentario a las *Cónicas* de Apolonio.
2. Un comentario a un *Canon astronómico* (o un *Canon astronómico).*
3. Un comentario a algún libro de Diofanto.

No se conserva ningún manuscrito que corresponda a ninguno de estos textos, lo que ha dado pie a especulaciones sin fundamento sobre su contenido, pero también a algunas hipótesis que vale la pena examinar. Eso es lo que voy a hacer a continuación.

1. Sobre el comentario a las *Cónicas* de Apolonio, poco hay que decir: no se conserva ni rastro de él.

Lo que queda de las *Cónicas* de Apolonio no es el conjunto de todos los libros que lo componían, sino sólo una parte de ellos en griego y un libro del que sólo existe una traducción en árabe. En la edición crítica más reciente, hecha por Michael Fried y Sabetai Unguru, que es de 2001, ya que nada se sigue sabiendo del comentario de Hipatia, se limitan a comentar que

> Hipatia (370?-415 A. D.), la hija de Teón de Alejandría, escribió supuestamente un comentario de las Cónicas, pero no hay manera de saber cuánta parte del texto de Apolonio cubría realmente su comentario. [...] Es probable, sin embargo, que ya en tiempos de Hipatia no se leyeran las Cónicas completas (Fried y Unguru, 2001, p. 5).

No sólo no sabemos nada pues del contenido de este comentario de Hipatia, sino que ni siquiera sabemos si comentó todos los libros que componían el texto original de Apolonio, o sólo los que se conservan. Fried y Unguru son de la opinión de que no los comentaría todos, pese a que afirman que Pappus aún comentó más que los que se conservan actualmente.

2. Sobre el comentario a un *Canon astronómico* (o un *Canon astronómico).*

Si no seguimos la lección de Tannery y pensamos que Hipatia escribió un Canon astronómico, nada podemos decir de ese libro, porque no se conserva el menor rastro de él. Otra cosa es si la seguimos y pensamos que lo que Hipatia escribió es un comentario a un Canon astronómico, y que ese comentario es en realidad el que Teón atribuye a su hija, es decir, el comentario al libro III de la *Syntaxis* de Ptolomeo. Ya he indicado antes que hay historiadores que no aceptan que ese comentario lo escribiera Hipatia sola, entre los que sí mantienen que ese comentario es de Hipatia, quien argumenta con más detalle esa atribución a Hipatia es Wilbur Knorr, en su libro relativamente reciente *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry* (Knorr, 1989).

El argumento de Knorr está basado en un estudio del estilo con que está escrito el conjunto del comentario de Teón a la *Syntaxis* de Ptolomeo. Knorr concluye que Hipatia debió de trabajar para sus clases a partir de un comentario escrito por su padre, y que "fue responsable de una forma revisada del Libro III de Teón, pero que los cambios textuales no afectaron a todas sus secciones", por lo que busca "secciones del libro III que sean diferentes en algún sentido del resto del comentario" (Knorr, 1989, p. 757).

La diferencia de estilo que encuentra es lo suficientemente grande para afirmar que el comentario al libro III está escrito por una mano distinta de la de Teón. Knorr describe la diferencia en estos términos: el estilo "asignado a Hipatia –con su formato cuidadosamente modelado y sus verbos en aoristo– tiene el tono de un informe, basado en notas cuidadosas, de un cálculo ya completado"; por su parte, "la explicación de Teón suena extemporánea, con su asistemática diversidad en la elección de vocablos y sus verbos en futuro, que sugieren un cálculo en el proceso de realizarse" (Knorr, 1989, p. 763). Esa diferencia de estilo, le permite a Knorr atribuir el comentario al libro III a Hipatia, pero también afirmar que Teón puede permitirse el lujo de tener ese estilo en el que se muestran las cosas haciéndose y se deja a los alumnos que completen las lagunas, corrijan los errores y vean cómo se despliega ante ellos el pensamiento del maestro mientras resuelve los problemas. Hipatia no puede permitirse ese lujo "ya que la pericia académica de una mujer sería especialmente vulnerable, sería absolutamente apropiado para alguien en la posición de Hipatia explotar el poder retórico del lenguaje preciso, para así asegurar su autoridad" (Knorr, 1989, p. 763).

Además de encontrar este argumento de estilo para atribuir el comentario a Hipatia y mostrarnos qué caracteriza el estilo de Hipatia, Knorr también examina la atribución a Hipatia, hecha por otros historiadores, de un procedimiento para realizar divisiones entre números expresados en el sistema de numeración sexagesimal. Efectivamente, el comentario al libro III contiene un procedimiento para hacer tales divisiones, en el que la división se efectúa consultando una tabla de múltiplos del divisor que se construye en primer lugar, viendo entre qué dos múltiplos se encuentra el dividendo, restando el menor de ellos del dividendo, y reiterando la búsqueda en la tabla con el resto obtenido.

El procedimiento permite continuar la división indefinidamente. Knorr, sin embargo, sólo atribuye a Hipatia el haber incluido el procedimiento en su comentario al libro de Ptolomeo, que no está en el libro original de éste, pero no la autoría del procedimiento, ya que éste se encuentra también en el comentario que Pappus escribió al mismo texto de Ptolomeo un siglo antes, que Teón utilizó en la preparación de su comentario, y es de hecho una técnica babilónica ya existente en el segundo milenio antes de nuestra era (Knorr, 1989, p. 763). En cualquier caso, Hipatia destaca aquí de nuevo por su preocupación por la realización precisa y detallada de cálculos.

Knorr presenta un ejemplo de una división hecha con este procedimiento, tomado del libro IV, capítulo 1, por tanto, del comentario de Teón. Aunque no podemos observar ahí las características del estilo de Hipatia, sí que podemos ver el estilo general del procedimiento.

En el ejemplo se trata de dividir “9 miríadas 6840 partes” por “7412 10 44 51 40 días”. En primer lugar, ambos números se reducen “a la forma sexagesimal”. El primero, que es 96840, resulta 26 54 ($26{\cdot}60^2 + 54{\cdot}60^1$), y el segundo 2 3 32 10 44 51 40 ($2{\cdot}60^2 + 3{\cdot}60^1 + 32{\cdot}60^0 + 10{\cdot}60^{-1} + 44{\cdot}60^{-2} + 51{\cdot}60^{-3} + 40{\cdot}60^{-4}$).

Una vez convertidos al sistema sexagesimal, se construye una tabla con los múltiplos de 2 3 32 10 44 51 40, de 1 a 60, sumando reiteradamente el número en cuestión.

Luego se busca en la tabla el múltiplo inmediatamente menor que el dividendo 26 54, que es 20 35 21 47 28 36 40, que corresponde en la tabla al 10, y se restan. (Obsérvese que los números están escritos en sexagesimal flotante, es decir, no hay una indicación explícita de la posición, que debe determinarse por el contexto. Téngase en cuenta además que Knorr escribe los números con las cifras árabes, mientras que el texto original está escrito con las cifras del sistema alfabético griego.)

El resultado de esa resta es 6 18 38 12 31 23 20. Se busca de nuevo en la tabla el múltiplo inmediatamente anterior a este número, que es 6 10 36 32 14 35 0, que corresponde al 3. De modo que el cociente es 13 (Knorr, 1989, p. 783).

3. Sobre el comentario a Diofanto.

Esta mención a un “comentario a Diofanto” en el *Suda* ha sido interpretada desde el siglo XIX como que Hipatia habría hecho un comentario a las *Aritméticas* de Diofanto[14]. Al comienzo del libro I de las *Aritméticas*, Diofanto dice que “su elaboración se realizará en trece libros” (Ver Eecke, 1959, p. 9). Sin embargo, hasta el año 1971, sólo se conocían seis de esos trece libros, los seis libros que reaparecieron en el occidente cristiano en el siglo XV, cuando Johann Müller, conocido como Regiomontanus, comunicó su hallazgo en 1464, y empezaron a conocerse y estudiarse gracias a las traducciones al latín de Xylander en 1575, y, sobre todo, la de Bachet de Méziriac en 1621. La edición canónica de esos seis libros es, sin embargo, la que hizo Paul Tannery en 1893. Tannery hizo la hipótesis de que el motivo por el cual sólo se conservaban seis de los trece libros de las *Aritméticas* era porque todos los manuscritos que se conservaban procedían del comentario Hipatia y que Hipatia sólo habría comentado esos seis libros. La hipótesis de Tannery hizo fortuna y se ha repetido en historias de las matemáticas y en historias de Hipatia, pese a que para mantenerla tuvo que añadir una segunda hipótesis que explicara por qué el texto de los libros que se conservan no tiene ninguno de los rasgos propios de un comentario. La segunda hipótesis *ad hoc* para salvar la primera era que alguien se habría preocupado de eliminar todos los comentarios en algún momento entre la época de Hipatia y la época de los manuscritos más antiguos que se conservan, que son del siglo XIII. En su edición, Tannery incluye un árbol genealógico de los manuscritos que él examinó, haciéndolos derivar todos del hipotético comentario de Hipatia (ver figura 5).

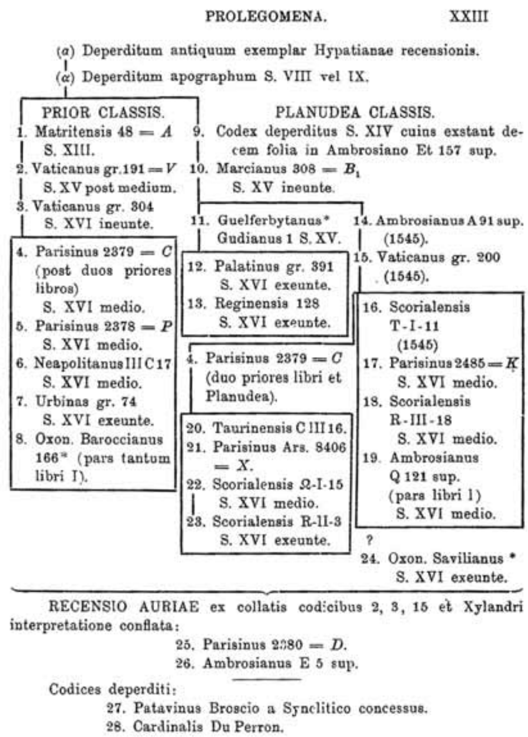

PROLEGOMENA. XXIII
(a) Deperditum antiquum exemplar Hypatianae recensionis.
(α) Deperditum apographum S. VIII vel IX.
PRIOR CLASSIS.
1. Matritensis 48 = A S. XIII.
2. Vaticanus gr. 191 = V S. XV post medium.
3. Vaticanus gr. 304 S. XVI ineunte.
4. Parisinus 2379 = C (post duos priores libros) S. XVI medio.
5. Parisinus 2378 = P S. XVI medio.
6. Neapolitanus III C 17 S. XVI medio.
7. Urbinas gr. 74 S. XVI exeunte.
8. Oxon. Baroccianus 166* (pars tantum libri I).
PLANUDEA CLASSIS.
9. Codex deperditus S. XIV cuius exstant decem folia in Ambrosiano Et 157 sup.
10. Marcianus 308 = B_1 S. XV ineunte.
11. Guelferbytanus* Gudianus 1 S. XV.
12. Palatinus gr. 391 S. XVI exeunte.
13. Reginensis 128 S. XVI exeunte.
4. Parisinus 2379 = C (duo priores libri et Planudea).
20. Taurinensis C III 16.
21. Parisinus Ars. 8406 = X.
22. Scorialensis Ω-I-15 S. XVI medio.
23. Scorialensis R-II-3 S. XVI exeunte.
14. Ambrosianus A 91 sup. (1545).
15. Vaticanus gr. 200 (1545).
16. Scorialensis T-I-11 (1545)
17. Parisinus 2485 = K S. XVI medio.
18. Scorialensis R-III-18 S. XVI medio.
19. Ambrosianus Q 121 sup. (pars libri I) S. XVI medio.
?
24. Oxon. Savilianus * S. XVI exeunte.
RECENSIO AURIAE ex collatis codicibus 2, 3, 15 et Xylandri interpretatione conflata:
25. Parisinus 2380 = D.
26. Ambrosianus E 5 sup.
Codices deperditi:
27. Patavinus Broscio a Synclitico concessus.
28. Cardinalis Du Perron.

Figura 5. Árbol genealógico de los manuscritos de las Aritméticas de Diofanto según Paul Tannery

Desafortunadamente, esa atractiva e ingeniosa hipótesis de Tannery dejó de tener sentido cuando en 1971 se descubrieron cuatro de los libros perdidos de las *Aritméticas*, en una traducción al árabe del siglo IX, de Qustā ibn Lūqā, que obligó a volver a considerar la historia de los manuscritos de las *Aritméticas* de Diofanto. Esos cuatro libros en árabe encontrados hace algo más de treinta años parece que van a continuación de los tres primeros que se conservan en griego, y han sido editados desde su descubrimiento dos veces, por dos historiadores con opiniones dispares y que se han enfrentado en una agria polémica, con cruces de acusaciones mutuas de ignorar o robar el trabajo del otro, y de errores e inconsistencias[15]. Se trata de la edición con traducción al inglés de Jacques Sesiano en Springer (Sesiano, 1982), y la edición con traducción al francés de Roshdi Rashed en *Les Belles Lettres* (Rashed, 1984).

Jacques Sesiano afirma que la hipótesis de Tannery sobre que el comentario de Hipatia estuviera hecho exclusivamente sobre los seis libros que se conservan en griego, si ya era endeble en el momento en que la enunció, ahora no sólo es insostenible, sino que hay que sustituirla por la hipótesis de que los que proceden del comentario de Hipatia son precisamente los libros que se acaban de encontrar en árabe[16], y no los que se conservan en griego.

Sesiano se apoya para esta afirmación en que el manuscrito de los libros en árabe, a diferencia de lo que sucede con los manuscritos de los libros en griego, sí que tiene partes que pueden atribuirse a un comentario. Para fundamentar su afirmación, Sesiano compara el estilo general de presentación de los problemas en los libros en griego, con el estilo que tienen en los libros en árabe y concluye que son diferentes, y que la diferencia fundamental consiste en que, en los libros en griego, la resolución del problema termina cuando acaba el análisis y el valor de la incógnita del problema está determinado (ya que Diofanto concluye el análisis siempre con una igualdad entre expresiones que sólo contienen una especie de números, o, dicho en términos modernos, con una igualdad entre monomios).

En los libros en árabe, la resolución no termina ahí sino que continúa con la comprobación de que el valor obtenido para la incógnita verifica las condiciones del problema (lo que Sesiano llama “síntesis”). En los libros en griego, esa comprobación no está nunca y la resolución concluye con expresiones del estilo de “se cumple lo propuesto”. En los libros en árabe, esa comprobación está siempre presente, seguida de un comentario final. Según Sesiano las verificaciones provendrían del comentario de Hipatia, y el comentario de un escoliasta posterior.

Para apoyar aún más su afirmación Sesiano no sólo compara el estilo general de los cuatro libros en árabe con los libros en griego, que, como no coinciden, no permite una comparación textual problema a problema, sino que hace la hipótesis de que los fragmentos de Diofanto citados por al-Karajī en su álgebra también proceden del comentario de Hipatia.

Como al-Karajī está citando tanto libros que se conservan en griego (los tres primeros) como uno de los que se conservan en árabe (el primero de los que se conservan en árabe, que sería el libro IV), esto le permite comparar el texto citado por al-Karajī de problemas correspondientes a los tres primeros libros con el texto que se conserva en griego problema a problema y comprobar que efectivamente aparecen ahí añadidas las comprobaciones. Eso le conduce a establecer que el comentario de Hipatia se extendió al menos a los siete primeros libros de las *Atirméticas* y consistió en añadir las comprobaciones y poco más.

Un ejemplo de esto podemos verlo en el problema 14 del libro II de Diofanto, tal y como lo recoge al-Karajī[17] (ver Rashed, 1984, pp. XXXV-XL), cuyo enunciado pide

> Dividir un número dado en dos números, y encontrar para éstos un cuadrado que, aumentado de cada una de las partes, resulte un cuadrado.

Como es habitual, Diofanto continúa tomando un número concreto, en este caso, veinte, y resuelve el problema para ese número. El texto griego termina el análisis, determina los dos números en que se divide veinte, “El uno será 68 décimos y el otro 132 décimos”, y concluye con la expresión “y verifican lo propuesto”. El texto árabe continúa así:

> Ya que hemos puesto una de las partes veinte, cuatro dirhams más cuatro cosas, será seis dirhams más cuatro quintos de dirham; la segunda parte es trece dirhams más un quinto de dirham. El tesoro, que es el cuadrado obtenido del producto de siete décimos por sí mismo, es cuarenta y nueve partes de cien partes de la unidad. Eso es lo que, si lo añades a cada una de las partes de veinte, dará una suma cuadrada (Rashed, 1984, p. XL).

Es decir, en el texto en árabe se comprueba que lo obtenido en el análisis verifica las condiciones del enunciado (al menos en parte, pero hay que tener en cuenta que esto es el resumen de al-Karajī de lo que Sesiano supone que es el comentario de Hipatia, no el comentario de Hipatia completo). Si aceptamos la hipótesis de Sesiano, tenemos aquí un ejemplo del trabajo matemático de Hipatia, y este ejemplo es de índole similar a lo que Knorr ha mostrado que pertenece a Hipatia en el comentario a Ptolomeo.

Sesiano indica que Hipatia además de añadir estas comprobaciones (que él llama “síntesis”), también hizo algunos añadidos en el análisis, que consisten en hacer más explícitos los pasos del análisis y lo que se usa en ellos, indicando, por ejemplo, que en un paso se están usando identidades del estilo de “$a^2/a = a$ (p. e., en IV, 20), $a^3/a = a^2$ (p. e., en IV, 21)” o teoremas del estilo de "si $a^2 = b^2$, entonces $a = b$ (p. e., en IV, 9), si $a^3 = b^3$, entonces $a = b$ (p. e., en IV, 18), si $a^4 = b^4$, entonces $a = b$ (p. e., en IV, 17), o si a/b es un cuadrado, entonces $(a/b \cdot b^2 =)\ a{\cdot}b$ es un cuadrado (en IV, 21)" (Sesiano, 1982, p. 69). Otros añadidos en el análisis son, según Sesiano, volver a enunciar el problema con los números concretos o referencias a otros de los libros de las *Aritméticas*.

En Deakin (1994) aún se puede encontrar la indicación de otros añadidos procedentes del comentario de Hipatia, que Deakin califica de "ejercicios para estudiantes". Estos ejercicios están interpolados al comienzo del libro II, y "el primero pregunta por la solución del par de ecuaciones simultáneas

$$x - y = a,\ x^2 - y^2 = (x - y) + b,$$

con a y b conocidas, El siguiente es una generalización menor. Pide la solución del par de ecuaciones simultáneas

$$x - y = a,\ x^2 - y^2 = m(x - y) + b,$$

donde a, m y b son conocidas" (Deakin, 1994, pp. 239-240).

Con estos datos delante, las valoraciones de Sesiano y Deakin de lo que se puede atribuir a Hipatia son similares: "Desde un punto de vista puramente matemático el valor de tal reescritura es mínimo" (Sesiano, 1982, p. 70); "sus contribuciones al conocimiento matemático mismo fueron ligeras o inexistentes" (Deakin, 1994, p. 240).

Sesiano es aún más contundente que Deakin porque aún entra en más detalles, señalando que Hipatia "deja de explicar los pasos más difíciles de algunas resoluciones (problemas IV, 44b o V, 1-3), y ninguno de los resultados de problemas intermediarios, dados directamente por Diofanto y obtenibles con métodos enseñados en el libro II, se calcula efectivamente" (Sesiano, 1982, p. 70). Más aún, Sesiano (1982, pp. 63-64) muestra que en algunas ocasiones los cálculos de Hipatia no son correctos (problemas IV, 27 y VIII, 4). El comentario de Hipatia formaría parte, según Sesiano, de una tradición que se inicia en el siglo IV "que diluye el material de los tratados clásicos para los estudiantes" e Hipatia "no estaría haciendo poco más que diluir un razonamiento ya existente, y calcular valores que pueden obtenerse mediante cálculos elementales" (Sesiano, 1982, p. 70), con lo que estaría presentando el texto de Diofanto "masticado" para que los alumnos no tuvieran problemas con los cálculos, en vez de embarcarlos en su reinvención a la manera socrática.

Esta afirmación de Sesiano no sólo menosprecia el trabajo de los profesores y autores de libros de texto, negándoles contribución alguna al trabajo matemático, sino que puede calificarse de anacrónica. El trabajo de los matemáticos de la antigüedad tardía (Pappus, Proclo, Teón, Hipatia) puede calificarse con menosprecio como débil reflejo de un esplendor perdido, comentario trivial que no aporta nada al desarrollo de las matemáticas, o puede estudiarse en su especificidad, como hace Netz (1998).

La opinión de Netz es que los comentarios a cuya tradición hace referencia Sesiano, a los que Netz (1998) llama "textos deuteronómicos", generan una nueva práctica matemática que acaba afectando a la manera en que se conciben y se practican las matemáticas. Los matemáticos de épocas anteriores resuelven problemas y demuestran teoremas, los de esta época reflexionan a la vez sobre la forma en que se resuelven teoremas y se demuestran teoremas, y establecen las reglas de la práctica de escritura de textos matemáticos. La opinión de Netz se aplica claramente a libros como la *Synagōgē* de Pappus, donde expone el arte del análisis o el Comentario de Proclo al libro primero de los *Elementos* de Euclides, donde Proclo establece las partes de la demostración de un teorema. Para incluir lo que tenemos de Hipatia dentro de los textos deuteronómicos es preciso considerar también la transformación que el trabajo de preparación de un texto matemático para la enseñanza produce en la propia práctica matemática, como lo hace Belhosta, para quien "la puesta en común del saber matemático [...] constituye un aspecto esencial de la actividad matemática, parte integral de la actividad de invención" (Belhosta, 1998, p. 289).

Pero esta discusión sobre la valoración que hace Sesiano del comentario de Hipatia dejaría de tener sentido si en la polémica entre Sesiano y Rashed nos colocáramos en el bando de Rashed. En efecto, para Rashed la atribución de los libros en árabe al comentario de Hipatia es un disparate sin fundamento, uno más de los cometidos por Sesiano en su edición. Según Rashed, nada hay en los libros en árabe que pueda atribuirse a la mano de Hipatia, y los comentarios serían del propio traductor Qustā ibn Lūqā (Rashed, 1984, p. LXII).

André Allard también es de la opinión de que no hay nada de Hipatia en los manuscritos que se conservan de las *Aritméticas* de Diofanto en griego, que él ha vuelto a examinar a raíz de la aparición del manuscrito en árabe, añadiendo nuevos manuscritos que Paul Tannery no tuvo o no estudió. Allard (1981 y 1982-1983) demuestra minuciosamente que "se puede dar de la historia de la tradición manuscrita griega de la obra de Diofanto las Aritméticas una visión sensiblemente muy diferente de la de Paul Tannery" porque Tannery utiliza sin confesarlo la edición de Bachet de Méziriac y sacrifica deliberadamente "toda la tradición que deriva de un manuscrito autógrafo de Máximo Planudes" (Allard, 1982-1983, p. 58). Allard ni menciona a Hipatia en su voluminoso trabajo en el que examina el intento de edición de Joseph Auria a finales del siglo XVI o principios del XVII, y treinta y un manuscritos griegos que organiza en un árbol, diferente del de Tannery y del que Hipatia ha desaparecido (figura 6).

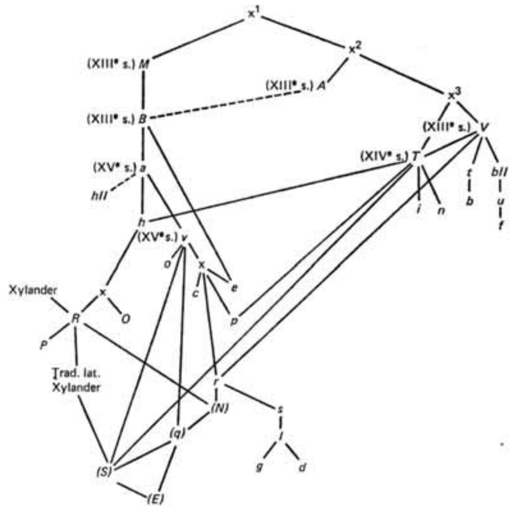


Figura 6. Árbol genealógico de los manuscritos de las Aritméticas de Diofanto según André Allard

Hipatia, maestra de vida

Lo poco que sabemos de las matemáticas de Hipatia es que hace y añade cálculos minuciosos y precisos, y aclara pasos de razonamientos. Sesiano minusvalora su trabajo. Rashed sencillamente niega que esté presente en lo que tenemos de Diofanto. Knorr explica que lo haga por la necesidad de estar en guardia ante los ataques que pueden venirle por el hecho de ser mujer. Pero aún cabe interpretar la presencia de esos cálculos precisos y minuciosos de otra manera. El centro de la enseñanza de Hipatia es la filosofía, entendida como forma de vida, como disciplina para obtener la serenidad, el dominio de sí, la *sofrosine*. Hipatia no enseña en el Museo, como su padre Teón, una institución que de forma anacrónica podemos llamar "de ciencias", sino en una escuela de filosofía neoplatónica. Las matemáticas no son más que un medio para ese fin espiritual y su práctica es también una práctica de sí. En ese contexto, la realización precisa de cálculos minuciosos es también una disciplina para la *sofrosine*, la finalidad del cálculo no es obtener el resultado, sino el dominio de sí.

La enseñanza de Hipatia es la de una filósofa neoplatónica, y así la presenta Dzielska, para quien la pregunta clave es si sigue a Porfirio o a Jámblico (Dzielska, 2004, p. 75). Hay quien cree más bien que es una cínica, y lo fundamenta en que Sócrates Escolástico habla de su *parresía*, su decir la verdad, "casi se oye al perro cínico ladrando" (Rist, 1995, p. 221). En todo caso, su enseñanza es para sus alumnos no la de una profesora de matemáticas, sino la de una maestra de vida. Sinesio de Cinere, en la última carta que le escribe, poco antes de su muerte en 413, la llama "madre, hermana, maestra, y además benefactora, y cualquier otra cosa que se honre por nombre o hecho".

Matemáticas antes y después de Hipatia

Hipatia no está sola ni es el fin de las matemáticas en la antigüedad, como nos la presenta su leyenda, e incluso biografías recientes que quieren no ser hagiografías. Con respecto a lo segundo, Berggren lo dice con claridad en su recensión de la biografía reciente escrita por Deakin:

> Hipatia no fue, pese a la descripción de Deakin de ella como "virtualmente la última académica" el fin de la línea de matemáticos griegos. La tradición a la que ella pertenecía, la de estudiar y enseñar las obras clásicas y producir materiales de enseñanza sobre ellas, continuó bien entrados los tiempos de Bizancio. Y los siglos que siguieron a Hipatia vieron matemáticos tales como Proclo, Eutocio de Ascalon, Antemio de Tralles e Isidoro de Mileto –ninguno de los cuales desmerece en comparación con Hipatia. Ella sirvió no como el final de una tradición antigua sino como el enlace con lo que estaba llegando, una cadena cada vez más fragil (Berggren, 2009, p. 94).

Con respecto a lo primero, Netz ha hecho un catálogo minucioso de matemáticos de la antigüedad griega del que dice

> He relacionado 144 individuos de los que se puede hacer la hipótesis de que pueden haber sido matemáticos. No se trata de autores de los que tenemos fragmentos, sino de un grupo mucho más amplio, que incluye cualquiera de quien tengamos la prueba más endeble –incluyendo autores anónimos. Este número, 144, es el mínimo para nuestra discusión (Netz, 1999, p. 282).

Entre esos 144 matemáticos, Netz cita a dos mujeres: Hipatia y Pandrosion (Netz, 1999, p. 281). Dos de ciento cuarenta y cuatro no es mucho, pero, en todo caso, Hipatia no está sola ni es la primera: Pandrosion vivió antes que ella.

De Pandrosion sabemos aún menos que de Hipatia, sólo que Pappus le dedica el libro III de su *Synagōgē*, que empieza así:

> Aquellos que propugnan una terminología más precisa en las cuestiones estudiadas en geometría, oh excelentísima Pandrosion, usan el término *problema* en el sentido de una indagación en la que se plantea (*probálletai*) hacer o construir algo, y el término *teorema* en el sentido de una indagación en la que se investigan (*theōreítai*) las consecuencias y las implicaciones necesarias de ciertas hipótesis; pero, entre los antiguos, algunos las describían todas como problemas, y algunos, todas como teoremas[18].

Rideout, en su reciente tesis sobre Pappus, advierte que "está aceptado que Pandrosion fue una mujer, pero en traducciones y transcripciones anteriores su nombre o fue masculinizado o eliminado" (Rideaout, 2008, p. 93), y observa que Pappus no se limita a dirigirse a ella, sino que la critica "por no inculcar el valor del análisis en sus estudiantes" (Rideaout, 2008, p. 90), de lo que deduce que Pandrosion tenía que estar enseñando matemáticas contemporáneamente a Pappus, es decir, a comienzos del siglo IV.

Hollywood, s. XX; Telecinco, s. XXI. “Cuando la leyenda se convierte en un hecho, publica la leyenda”

En 1962, John Ford filma uno de sus grandes clásicos, *El hombre que mató a Liberty Valance*. La película narra en flashback la historia de Ransom Stoddard, interpretado por James Stewart, abogado instalado en un pueblo del Lejano Oeste, donde pretende defender la ley y el orden sin usar las armas, pero que llega a senador, empujado por la fama que le da el acabar siendo “el hombre que mató a Liberty Valance”, un conocido forajido. James Stewart vuelve al pueblo del oeste donde mató a Liberty Valance acompañado de unos periodistas, que quieren hacer un reportaje sobre su visita a ese pueblo, intrigados por que vaya al funeral de un desconocido, un tal Tom Doniphon, interpretado por John Wayne.

James Stewart les cuenta que en realidad no fue él quien, al enfrentarse en contra de sus principios en un duelo con Liverty Valance, lo mató; que erró el disparo. Quien mató a Liberty Valance fue John Wayne, que pensaba que James Stewart no sabía valerse por sí mismo en el Oeste, y que allí no había más ley que la que uno pudiera mantener con su pistola. Por eso (y por la chica, pero ésa es otra historia que no viene al caso), se ocultó durante el duelo y disparó a Liberty Valance a la vez que James Stewart, previendo que éste no tendría buena puntería. La leyenda de ser el hombre que mató a Liberty Valance impulsó la carrera política de James Stewart, llevándolo a ser congresista, gobernador del estado y senador.

Cuando James Stewart termina de contar la historia, el editor del periódico rompe sus notas: “You’re not going to use the story, Mr. Scott?”, “¿No va a usar lo que le he contado, Sr. Scott?” –le pregunta James Stewart. “No, sir. This is the West, sir. When the legend becomes fact, print the legend”, “No, señor. Esto es el Oeste, señor. Cuando la leyenda se convierte en un hecho, publica la leyenda.”

Artemisia Gentileschi, *Autorretrato como alegoría de la pintura.*

Sabemos muy poco de Hipatia, menos aún de Hipatia como matemática. Lo que sí sabemos es que por todo el mundo grupos de mujeres usan su nombre al fundar editoriales o revistas, al constituir grupos de trabajo o asociaciones, o simplemente lo adoptan como nombre de usuario en su dirección electrónica o en redes sociales[19]. Hechos, apenas tenemos, pero la leyenda de Hipatia de Alejandría es un hecho.

¡Lástima que Artemisia, que en sus retratos de mujeres legendarias dijo la verdad de las mujeres, no pintara a Hipatia![20]

HISTORIAS ■

NOTAS

1 Existe una edición de las actas publicada recientemente, que no he podido consultar: Menzio, E. (Ed.), (2004). *Artemisia Gentileschi. Lettere precedute da Atti di un processo di stupro.* Milán: Abscondida.

2 Que también fue procesada, y, en su caso, condenada a muerte y sólo salvada en el último minuto por Daniel.

3 La exclamación proviene del texto de 1916 de Roberto Longhi "Gentileschi, padre e figlia", que no he podido consultar. La cito del prólogo de Carmen Romero a su traducción de la novela de Anna Banti (Romero, 2008, p. 39).

4 Uso la castellanización de su nombre, y no la transliteración de su nombre griego Θέων.

5 Éste es su nombre griego. He elegido, en vez de la transliteración Hypatía, la castellanización Hipatia, porque ésta es de uso extendido.

6 Existe una edición on line del *Suda Lexicon* en griego, con traducción al inglés. El texto griego de esta edición on line es el establecido por Ada Adler en su edición de 1935 en cinco volúmenes con el título *Suidae Lexicon*, en el que la voz "Hipatia" está en las páginas 644-646 del volumen cuarto (cf. Deakin, 1995, p. 2). Yo cito de la edición on line, la versión española es mía. La voz "Hipatia" de esa enciclopedia parece que no es original, sino que está hecha a partir de dos textos anteriores: uno de una enciclopedia anterior del siglo VI, y otro, de *La vida de Isidoro* escrita por el filósofo neoplatónico Damascio, nacido en Damasco en 458. De ambos libros sólo se conservan fragmentos y noticias en otros textos posteriores (cf. Deakin, 1995, pp. 2-3).

7 La referencia a que fue acuchillada con trozos de cerámica parece tener un carácter simbólico. Esos "trozos de cerámica" son los fragmentos curvos de piezas de cerámica con los que los atenienses votaban a quién querían desterrar de Atenas. En griego se llamaban ὄστρακον, óstrakon, y de ahí deriva la palabra española "ostracismo". El asesinato de Hipatia es también una condena al ostracismo, una expulsión de la ciudad.

8 Biografías de Hipatia hay muchas. Ésta de Dzielska, junto con la de Deakin (2007), es la más rigurosa de las que conozco. Dzielska apenas menciona la obra matemática de Hipatia, cosa que sí trata el libro de Deakin.

9 "Me contento con señalar que San Cirilo era un hombre, y un hombre de partido; que pudo dejarse llevar en exceso por su celo; que, cuando se desnuda a las mujeres hermosas, no es para masacrarlas; que San Cirilo pidió perdón a Dios por ese acto abominable, y que yo ruego al padre misericordioso que tenga piedad de su alma". Cito de la edición de 1829 del Dictionnaire philosophique. La frase está en la página 264 del tomo V.

10 Editada en el siglo XIX por J. D. Migne, está disponible on-line en http://www.ellopos.net/elpenor/greek-texts/fathers/migne-patrologia-graeca.asp

11 La historia eclesiástica de Sócrates Escolástico está disponible on-line. El párrafo dedicado a Hipatia, que se titula "Hipatia, la mujer filósofa", está en http://www.newadvent.org/fathers/26017.htm.

12 Las cartas, así como otros escritos de Sinesio de Cirene están publicados en la colección Clásicos de Gredos, con introducción, traducción y notas de F. A. García Romero. La edición canónica de Sinesio de Cirene es la de A. Fitzgerald, hecha en 1926, cuya traducción al inglés está disponible on-line en http://www.livius.org/su-sz/synesius/synesius_letters.html. Ésa traducción inglesa es la que yo he consultado. También se pueden encontrar en http://www.geocities.com/hckarlso/synesius.html.

13 Carta 154 de la numeración de la edición on-line. La versión española de la traducción inglesa de Fitzgerald es mía.

14 Anteriormente, Bachet de Méziriac, en su edición de 1621 de las *Aritméticas* de Diofanto, hizo una interpretación muy distinta: leyó el fragmento del *Suda* donde se mencionan las obras de Hipatia sin separación entre el nombre de Diofanto y la mención del *Canon astronómico*, lo que le llevó a decir que Hipatia había escrito un comentario sobre un supuesto *Canon astronómico* de Diofanto, y a identificar a Diofanto con un astrónomo del tiempo de Nerón, con lo que habría vivido en el siglo I de nuestra era (Ver Eecke, 1959, p. IX). Bachet hizo estas afirmaciones en la "Epístola al lector" con que comienza su edición del texto griego de Diofanto y su traducción al latín, y en ella excluye explícitamente que Hipatia escribiera comentario alguno sobre las Aritméticas (Bacheto Meziriaco, 1621, pp. iii-iiii). Ninguna de estas afirmaciones de Bachet de Méziriac se mantienen hoy en día.

15 Rashed da noticia de la existencia de una traducción al ruso de su edición, hecha por Bachmanova, Rozenfeld y Slavoutine (Rashed, 1984, p. LXII).

16 Según Rashed (1984, p. LXII) ésa es también la opinión de Bachmanova, Rozenfeld y Slavoutine en su introducción a su traducción al ruso.

17 Tomo este ejemplo de Rashed, 1984, pp. XXXV-XL.

18 Cito mi versión esàñola de este texto de Pappus que incluí en el capítulo 2 de mi libro *Elementos de resolución de problemas*, en el que discuto el concepto de problema (Puig, 1996, p. 28), corrigiendo dos errores que cometí entonces: en su nombre, que yo escribí "Pandosio" y, lo que es más grave para el asunto que ahora estoy tratando, en el adjetivo, que escribí en masculino "excelentísimo", siguiendo una tradición que había convertido a Pandrosion en un hombre.

19 También hay un buen número de cantantes que han adoptado el nombre de Hipatia, en particular, hay un grupo granadino de hip hop que se llama Hipatia, aunque en este caso parece que la única razón para ello, no se trata de un grupo de mujeres, es que Hipatia comienza por "hip".

20 En su lugar, ay, tenemos ahora *Ágora*, la película de Amenábar producida por Telecinco, motivo por el cual he escrito esta entrega de *Historias*.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Allard, A. (1981). La tentative d'édition des Arithmétiques de Diophante d'Alexandrie par Joseph Auria. *Revue d'Histoire des Textes XI*, pp. 99-122.

Allard, A. (1982-1983). La tradition du texte grec des Arithmétiques de Diophante d'Alexandrie, *Revue d'Histoire des Textes XII-XIII*, pp. 57-137.

Bacheto Meziriaco, C. G. (1621). *Diophanti Alexandrini Arithmeticorum Libri sex, et De Numeris Multangulis Liber unus*. Lutetiæ Parisiorum: Hioronymi Drovart.

Banti, A. (2008). *Artemisia*. Traducción española de Carmen Romero. Barcelona: Alfabia.

Belhoste, B. (1998). Pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques. *Revue d'histoire des mathématiques 4*(2), pp. 289–304.

Berggren, J. L. (2009). The Life and Death of Hypatia. *Metascience 18*(1), pp. 93-97.

Deakin, M. A. B. (1994). Hypatia and Her Mathematics. *The American Mathematical Monthly 101*(3), pp. 234-243.

Deakin, M. A. B. (1995). The Primary Sources for the Life and Work of Hypatia of Alexandria. *Monash University History of Mathematics Paper 63*. Versión electrónica descargada en mayo 2009 de http://www.physics.utah.edu/~jui/3375/Class Materials Files/y2007m08d22/hypatia-primary-sources.html.

Deakin, M. A. B. (2007). *Hypatia of Alexandria: Mathematician and Martyr*. Amherst, NY: Prometheus Books.

Dzielska, M. (2004). *Hipatia de Alejandría*. Traducción española de José Luis López Muñoz. Madrid: Siruela.

Fried, M. & Unguru, S. (2001). *Apollonius of Perga's* Conica*. Text, context, subtext*. Leiden, Boston, Köln: Brill.

Knorr, R. (1989). *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry*. Boston: Birkhäuser.

Netz, R. (1998). Deuteronomic Texts: Late Antiquity And The History Of Mathematics *Revue d'histoire des mathématiques 4*(2), pp. 261–288.

Netz, R. (1999). *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics: a Study in Cognitive History*. Cambridge: Cambridge University Press.

Pérez Carreño, F. (1993). *Artemisia Gentileschi*. Colección *El arte y sus creadores*, vol. 13. Madrid: Historia 16.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.

Rashed, R. (Ed.). (1984). *Diophante. Tome III. Les Arithmétiques. Livre IV,* et *Tome IV, Livres V, VI et VII.* Texte de la traduction arabe de Qustâ ibn Lûqâ établi et traduit par Roshdi Rashed. Paris: Les Belles Lettres.

Rideout, B. (2008). *Pappus Reborn. Pappus Of Alexandria And The Changing Face Of Analysis And Synthesis In Late Antiquity*. Thesis of Master of Arts in History and Philosophy of Science. University of Canterbury.

Rist, J. M. (1965). Hypatia. *Phoenix 19*(3), pp. 214-225.

Romero, C. (2008). "Prólogo". En A. Banti, *Artemisia* (pp. 33-43). Barcelona: Alfabia.

Sesiano, J. (1982). *Books IV to VII of Diophantus' Arithmetica in the Arabic Translation attibuted to Qustâ ibn Lûqâ*. New York, Heidelberg, Berlin: Springer Verlag.

Sontag, S. (2008). Un destino doble. Sobre *Artemisia* de Anna Banti. En A. Banti, *Artemisia* (pp. 9-31). Barcelona: Alfabia.

Tannery, P. (1880). L'article de *Suidas* sur Hypatie. *Annales de la faculté des lettres de Bordeaux 2*, pp. 197-200.

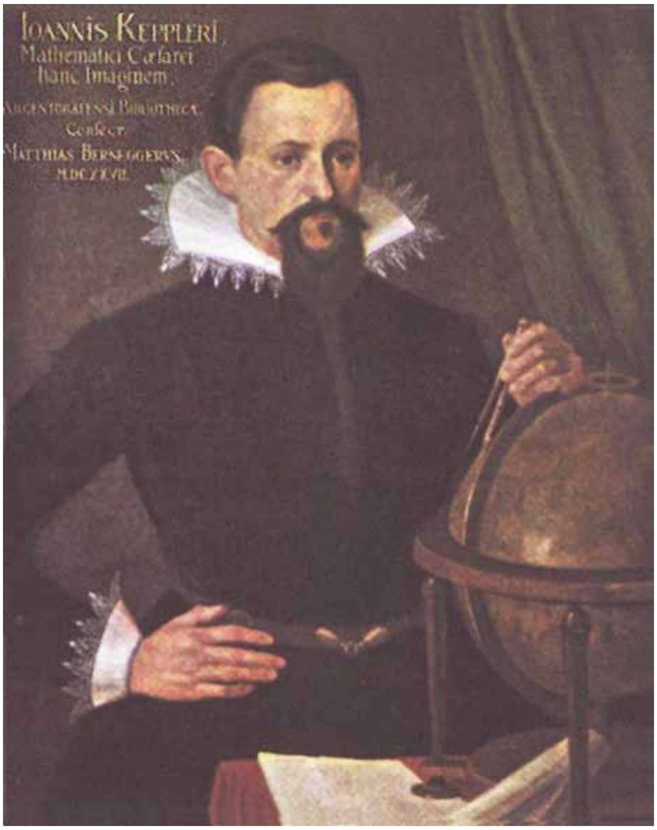
Tannery, P. (Ed.) (1893). *Diophanti Alexandrini Opera Omnia cum graecis commentariis*. Edidit et latine interpretatus est Paulus Tannery. 2 vols. Stuttgart: B. G. Teubner. [Reimpresión 1974.]

Ver Eecke, P. (Ed.) (1959). *Diophante d'Alexandrie, Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones.* Paris: Albert Blanchard.

Voltaire (1829). *Dictionnaire philosophique. Tome V*. Paris: Chez Legrien fils, libraire.

suma+ 62
Noviembre 2009, pp. 101-106

Kepler: el más grande de todos los astrónomos



Hace cuatrocientos años ocurrieron dos acontecimientos notables para el progreso de nuestra comprensión del Universo: la publicación de la *Astronomía Nova* por parte de Kepler, con sus leyes sobre las órbitas de los planetas, y la construcción por parte de Galileo de su primer Telescopio. Precisamente, en conmemoración de semejantes sucesos, se ha declarado este 2009 como el año de la Astronomía, y no son pocos los países que lo han reflejado en la emisión de singulares sellos de correos.

Es notable el hecho de que Kepler haya obtenido sus resultados sin poseer la ayuda de un instrumento de observación tan potente como el telescopio, ya que el uso de este aparato por Galileo es posterior a los estudios reflejados en la *Astronomía Nova*. No poseía Kepler más instrumento que la observación a simple vista… y su inteligencia. Pero, ¿cómo pudo llegar a encontrar sus famosas leyes con semejante pobreza de medios?

Kepler da los primeros pasos

Johannes Kepler nació el 27 de diciembre de 1571 en la pequeña ciudad de Weil der Stadt, ciudad libre si bien se hallaba bajo la influencia del ducado de Württemberg. Según consta en el relato que él mismo escribiría a los 26 años, fue sietemesino, y esto le proporcionó de origen una salud un tanto enfermiza. En 1574, su padre se alistó en el ejército del duque de Alba para someter a los rebeldes de los Países Bajos, y al poco tiempo fue seguido por su mujer, con lo que la familia Kepler se quedó al amparo de unos abuelos que se ocupaban más bien poco de los nietos.

En 1576, vuelven los padres, y se trasladan a la cercana ciudad de Leonberg, perteneciente al ducado de Württemberg. Para el pequeño Johannes esto supuso una importante novedad, ya que aquí pudo ir a la escuela y comenzar su educación.

Santiago Gutiérrez
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*
hace@revistasuma.es

Durante la primera etapa escolar sufría de frecuentes fiebres, y sus padres, al constatar su delicada salud y su nula disposición para las labores del campo, deciden dedicarlo a la carrera eclesiástica, destino frecuente en aquella época para los jóvenes de valía intelectual. Así que a la edad de 13 años, aprobado el examen de grado, ingresa en el seminario de Alberg, donde realizará los estudios de la segunda etapa escolar, con un currículo a tenor del *trivium* y el *quadrivium* propios de la época, todo ello en latín, lengua oficial de la enseñanza y con la que se comunicaban los estudiantes.

En 1588 aprueba el examen que le permite acceder a la Universidad de Tubinga, uno de los centros de estudios superiores más prestigiosos del mundo protestante. Pero, su ingreso en la Universidad no se realizará hasta el año siguiente, debido a la falta de plazas disponibles de becarios como era su caso. Por entonces su padre, alistado en los ejércitos de Nápoles, desaparece definitivamente de su vida.

En Tubinga, encuentra notables profesores que van a tener una gran influencia en su formación. Destaca sobre todos Michael Maestlin, su profesor de Astronomía, quien de modo privado, fuera del ámbito escolar, le da a conocer la teoría copernicana. Esto provocó en el joven Kepler un enorme impacto, según él mismo nos relataría en el prefacio de su primera obra, *El secreto del universo*:

> Ya en Tubinga, cuando seguía atentamente las enseñanzas del famoso maestro Michael Maestlin, percibí hasta que punto estaban mal dispuestas en muchos aspectos las nociones acerca de la estructura del mundo mantenidas hasta entonces. Me encontraba muy impresionado por Copérnico, a quien mi maestro citaba muy a menudo, hasta el punto que no sólo defendía sus puntos de vista en las disputas, sino que también hice una cuidadosa *disputatio* acerca de las tesis del movimiento de las estrellas fijas como resultado de la rotación de la Tierra.

El nuevo rumbo

Se encontraba Kepler en el tercer año de sus estudios, último para cumplir su gran deseo de convertirse en clérigo, y dedicarse a la difusión de las ideas luteranas por el sur de Alemania, cuando una circunstancia fortuita alteró totalmente sus planes. En el año 1594, la Universidad de Tubinga, donde cursaba Kepler sus estudios, recibió la petición de un profesor para cubrir la plaza que había quedado vacante en el seminario protestante de Graz. Debía enseñar Matemáticas y Astronomía, además de desempeñar el cargo de Matemático Provincial, que le obligaba a elaborar los almanaques y realizar los pronósticos astrológicos anuales. La Universidad decide enviar a Kepler considerando que es la persona más idónea para ocupar el puesto.

> *No poseía Kepler más instrumento que la observación a simple vista... y su inteligencia*

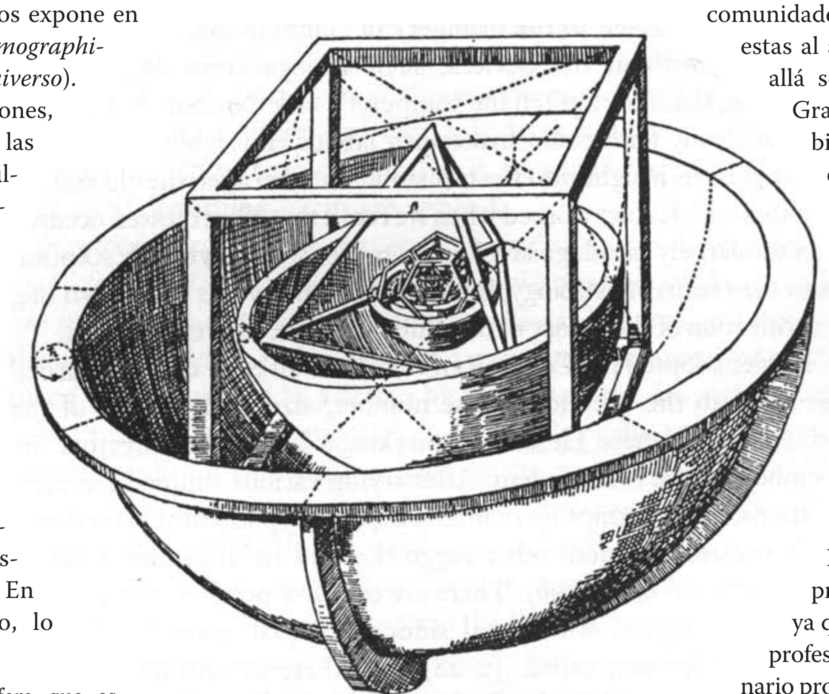
No volvió Kepler a Tubinga a terminar sus estudios de Teología. Atrás quedaba su carrera como clérigo. Y a partir de su estancia en Graz, sin perder su profundo espíritu religioso, surge un nuevo Kepler, ocupado ahora apasionadamente en las Matemáticas y la Astronomía. Así se lo comunica a Maestlin, con quien no cesa de cartearse para pedirle opinión sobre los trabajos astronómicos que va desarrollando:

> ...yo deseaba llegar a ser un teólogo, y por mucho tiempo estuve desasosegado. Ahora, sin embargo, me doy cuenta de cómo con mi esfuerzo Dios puede ser celebrado a través de la Astronomía.

Sus primeras preguntas: ¿Por qué son seis los planetas, y están a las distancias que están, y se mueven como lo hacen? Durante un tiempo, estuvo trabajando con los datos proporcionados por Copérnico, buscando relaciones entre las diferencias, los cocientes, las distancias, los tiempos…Pero, sin conseguir encontrar ninguna constante o ninguna relación, tan solo, como él mismo nos dice, memorizar los datos de Copérnico sobre distancias y tamaños.

Sus primeras preguntas: ¿Por qué son seis los planetas, y están a las distancias que están, y se mueven como lo hacen?

Su método de trabajo a ningún científico podría extrañarle en la actualidad, consistía en intuir, imaginar, especular, elaborar una hipótesis, y contrastarla con los datos de la realidad. De este modo obtiene sus primeros resultados, y los expone en su libro *Mysterium cosmographicum* (*El secreto del Universo*). Entre otras consideraciones, trata en este libro sobre las razones por las que resultan adecuadas las hipótesis de Copérnico, si bien lo corrige en algunos datos, además de pronunciarse radicalmente a favor de la idea de que el Sol ocupa el centro geométrico del Universo, cosa que no hacía Copérnico, que lo consideraba ligeramente desplazado del centro. En cuanto a su contenido, lo explica así:



> La Tierra es una esfera que es medida de todo. Circunscríbele un dodecaedro. La esfera que lo circunscriba será Marte. Circunscribe a Marte con un tetraedro, la esfera que comprenda a éste será Júpiter. Circuns-cribe a Júpiter con un cubo. La esfera que comprenda a éste será Saturno. Ahora inscribe en la Tierra un icosaedro. La esfera inscrita en éste será Venus. Inscribe en Venus un octaedro. La esfera inscrita en él será Mercurio. Tienes la razón del número de los planetas.

Kepler da un paso más respecto a todos los estudios astronómicos anteriores. Se pregunta no solo por la posición, las distancias, los caminos recorridos y los tiempos, sino también por cual es la causa del movimiento de los planetas. ¿Por qué se mueven? Se introduce así la Física en la Astronomía. Sobre la distinta velocidad con que se mueven los planetas, tanto menor cuanto mayor es su alejamiento del Sol y por tanto mayor es su órbita, piensa que debe haber algo así como un *anima motrix* en el Sol que va disminuyendo en influencia y fuerza según el planeta se va alejando de él.

En 1597, Kepler, ya con cierto prestigio en Graz, debido a sus éxitos en los pronósticos que realiza como Matemático Provincial, se casa con Barbara Müller, hija de un hacendado comerciante, que a pesar de contar con solo 23 años era ya doblemente viuda y madre de Regina una niña de 7 años. En 1598, nace de este matrimonio un hijo, que torna la alegría del nacimiento por la tristeza de su temprana muerte, a los dos meses de venir al mundo.

Por esas fechas toma el poder en Estiria el archiduque Fernando, de la familia de Habsburgo, dispuesto a imponer el catolicismo en toda Austria. Las luchas que se producen por la resistencia de las comunidades protestantes, obligan a estas al abandono de la ciudad, y allá se va Kepler, dejando en Graz a la familia y todos sus bienes. Pero, para Kepler este exilio dura poco tiempo, ya que su buen hacer como Matemático Provincial y su anterior amistad con el canciller de Baviera, Herwart von Hohenburg, le permiten regresar a su domicilio de Graz y reunirse con su familia.

No obstante, se queda prácticamente sin trabajo, ya que con el exilio se han ido profesores y alumnos del seminario protestante donde él impartía sus clases, y el cargo de Matemá-tico Provincial le lleva muy poco tiempo, y sólo en determinados momentos del año. De modo que se dedica por entero a sus estudios astronómicos.

El encuentro con Tycho Brahe

En la primavera de 1597, había recibido Kepler los primeros ejemplares de *El secreto del Universo*, y había distribuido algunos de ellos a diversos científicos, con el objeto de que valoraran su obra y le remitieran los oportunos comentarios. Entre esos científicos se encontraban dos de particular relieve: Galileo y Tycho Brahe. Galileo le había contestado inmediatamente agradeciéndole el envío, pero que había leído sólo el prefacio. En cuanto a Tycho, al hallarse viajando por Dinamarca y Alemania, no pudo recibir y leer el libro, en su residencia habitual de Praga, hasta un año después. Galileo no contestaría a un nuevo requerimiento de Kepler. Por su parte, los comentarios de Tycho incluían una crítica bastante sensata en el sentido de que utilizaba excesivamente sus presupuestos geométricos para obtener conclusiones y que debía tener más en cuenta los datos, aunque no los copernicanos, cuya inexactitud el propio Tycho conocía por propia experiencia.

Su método de trabajo ... consistía en intuir, imaginar, especular, elaborar una hipótesis, y contrastarla con los datos de la realidad

El caso es que, sin trabajo con el que justificar su sueldo, Kepler decide visitar a Tycho, con quien se carteaba a menudo y que tanto y tan bien le hablaba de la calidad de los datos que obtenía en sus observaciones.

Una vez en Praga, recibe una invitación de Tycho para que se traslade a su residencia de de Benatky y se sume a su trabajo. Tycho era una persona muy distinta a Kepler, procedía de una distinguida familia, y había sido nombrado Matemático Imperial por Rodolfo II, con un salario de 3.000 guldens. Gozaba pues de una posición económica más que desahogada, por lo que podía darse el lujo de disponer de varios ayudantes y servidores, con los que mantenía un trato distante un tanto despótico. Era altivo y orgulloso. Kepler, al contrario era una persona humilde, de trato cercano, preocupado por su trabajo, con un salario de 200 guldens, y tuvo una vida llena de penalidades, tanto económicas como familiares.

Kepler participaba del trabajo de Tycho, colaborando con sus ayudantes Tanagel y Longomontano, y creía que la obtención de los datos que necesitaba, sobre excentricidades y distancias, sería cosa de poco tiempo. Pero, Tycho no proporcionaba sus datos así como así, lo hacía lentamente, muy poco a poco. No obstante, Kepler continuaba en Benatky, con el único objetivo de conseguir esos datos que tanto necesitaba para desvelar la armonía universal, idea directriz de todo su esfuerzo. El mismo nos lo dice:

> Tycho posee las mejores observaciones y consecuentemente en ellas se encuentra el material para la elaboración de una nueva estructura; también tiene ayudantes y todo lo que uno pudiera desear. Solo carece del arquitecto que emplee todo eso de acuerdo con un plan.

Por su parte a Tycho le venía muy bien Kepler, un teórico con una gran y profunda imaginación, capaz de deducir, a partir de los datos, cual pudiera ser la estructura del sistema planetario. Ante la magnitud del trabajo, y dado que ambos se necesitan, Kepler inicia con Tycho unas negociaciones de colaboración, que tras muchas vicisitudes acaban felizmente. Intenta entonces que en Graz se le conceda el traslado a Praga, durante dos años, manteniéndole el sueldo, para trabajar como ayudante del Matemático Imperial. Pero en Graz se encuentra con un recrudecimiento de la intolerancia religiosa que le obliga a renunciar a su cargo y marcharse de la ciudad.

Vuelve a Praga, y Tycho le presenta al emperador, no sin aprovechar la ocasión para ofrecerle a Rodolfo II las tablas con las observaciones que entre los dos están realizando. Serán las llamadas *Tablas Rudolfinas*, en las que se recogían las posiciones y los cálculos más exactos para el servicio de los astrónomos de todo el mundo.

Ocurre que el destino juega una mala pasada, pero esta vez en favor de Kepler. En octubre de 1602 muere Tycho, no sin antes, en el lecho de muerte, confiar a Kepler todo el conjunto de sus observaciones y encargarle de finalizar las *Tablas Rudolfinas*.

A los dos días de la muerte de Tycho, Kepler es nombrado Matemático Imperial por Rodolfo II, con lo que su vida va a dar un cambio radical, tanto en lo económico como sobre todo en el reconocimiento social y científico.

Se inicia un periodo especialmente fructífero para Kepler. Dedicado intensamente a su trabajo escribe una decena de obras, entre ellas la *Dióptrica*, producto de la correspondencia que mantiene con Galileo, y la *Astronomía nova*, cuya conmemoración nos ocupa.

La vida familiar se ve también favorecida por la fortuna. Tiene tres hijos y se casa su hijastra Regina.

El problema de Marte

Además de las obligaciones del cargo, en cuanto a las relaciones sociales y la atención a los científicos que venían a consultarle, Kepler debía de seguir trabajando en su tarea de completar las *Tablas*, según el encargo de Tycho. Para ello era necesario resolver el problema de la órbita de Marte. Se trataba de determinar el plano de la órbita de modo que contuviera al sol real, y no al sol medio que hubo de definir Copérnico, dado que el sol real, según él, se hallaba desplazado del centro del círculo de las órbitas planetarias.

En 1602, recién llegado a Praga, liberado de las presiones de Tycho sobre la dirección de sus investigaciones, se pone de nuevo manos a la obra, y calcula que el plano de la órbita de Marte se inclina 1º58’ sobre la eclíptica. A partir de aquí encamina sus esfuerzos a determinar la órbita utilizando las observaciones de Tycho y dado que conocía el periodo de Marte. Se podía así determinar el círculo al que se ajustaban los datos y establecer la excentricidad, todo ello a través de largos cálculos, un tanto pesados.

Pero, utilizar movimientos circulares y con velocidad uniforme le conducía a errores. Pensó entonces que debía rehacer los cálculos de Tycho, realizados sobre el esquema tolemaico del Sol girando alrededor de la Tierra. Se trataba de volver a determinar la órbita de la Tierra y a partir de ella la de Marte.

Sus trabajos le llevan a resultados que difieren sensiblemente de los de Tycho. La Tierra en su órbita mostraba excentricidad lo mismo que cualquier otro planeta, lo cual confirmaba una vez más la teoría de Copérnico. Así que la aparente variación de velocidad que observaba comenzaba a tener visos de realidad. Vuelve a sus consideraciones dinámicas. La vaporosa idea del *anima motrix* se convertía en una auténtica fuerza que emanaba del Sol y originaba el movimiento de los planetas, decreciendo de modo inversamente proporcional a la distancia a que se hallaban estos del Sol.

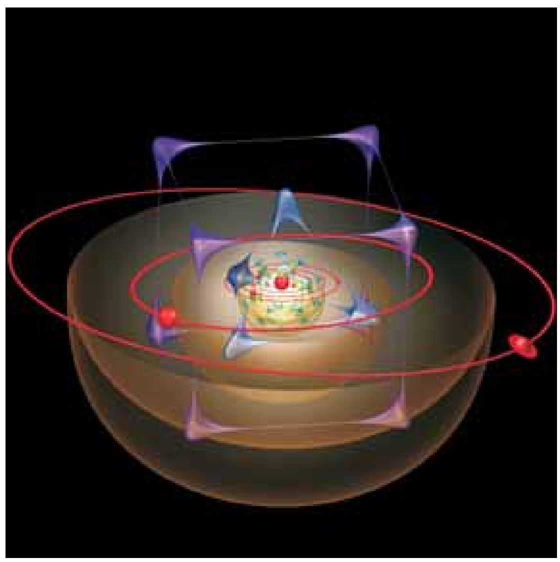
Para confirmar su teoría necesita encontrar una regla que le permita calcular el tiempo empleado por el planeta en recorrer el espacio ocupado entre dos posiciones. Parte de una hipótesis: los tiempos empleados en recorrer pequeños arcos (infinitesimales, diríamos hoy) son proporcionales a su distancia al Sol. Lo aplica al caso de la Tierra y obtiene resultados satisfactorios.

Animado por el éxito, extiende su idea a arcos grandes, considerando que el conjunto de distancias al Sol de todos los puntos constituyen el área subtendida por el arco y los radios vectores extremos, y formulando su conclusión de que la razón entre el tiempo transcurrido en recorrer un pequeño arco y su distancia al Sol es igual a la razón entre el tiempo transcurrido en recorrer un arco cualquiera y el área subtendida por el arco. Y de ahí pasa a establecer que esta razón es constante cualquiera que sea el arco recorrido por el planeta, o bien, que en tiempos iguales el planeta barre áreas iguales. Es decir, si son T_1 y T_2 los tiempos que tarda el planeta en recorrer dos arcos cualesquiera, y A_1 y A_2 las respectivas áreas contenidas entre los radios vectores de los extremos, se verifica:

$$\frac{T_1}{A_1}=\frac{T_2}{A_2}$$

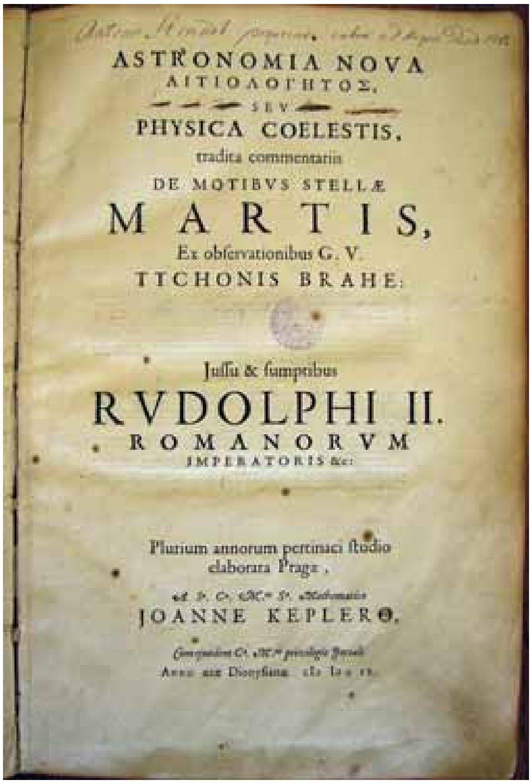
Intenta aplicar esta conclusión a Marte, y obtiene el fatídico error de que le persigue de antiguo. Retoma entonces valores especialmente precisos de Tycho y calcula de nuevo la órbita. Determina con ellos una trayectoria que encaja en un círculo pero que se achata en los 90º y los 270º. Aplica entonces el método, ya utilizado con Mercurio, de considerar un pequeño epiciclo, y obtiene una curva ovoidal. Dice:

> …si la figura fuera una elipse, entonces lo que sabemos gracias a Arquímedes y a Apolonio nos sería suficiente.



Todavía se le resistía el acuerdo entre esta hipótesis de la elipse y su ley de las áreas. La cuestión podía resolverse si pudiera encontrar la forma de calcular el tamaño de la *lúnula* encerrada entre el círculo y la elipse. Después de muchos trabajos consigue su propósito de ver que la elipse encontrada se ajusta perfectamente a los datos y a la ley de las áreas.

Así consigue Kepler demostrar que los planetas se mueven describiendo elipses uno de cuyos focos es el Sol, de tal modo que los tiempos empleados en recorrer sus arcos son proporcionales a las áreas barridas por sus radios vectores. Estos resultados constituyen las conocidas como dos primeras leyes de Kepler.



Estos resultados, le permitirán terminar las *Tablas Rudolfinas* y cumplir con el encargo de Tycho. Todo ello lo publica Kepler el año 1609 en su *Astronomía Nova,* aunque al parecer tenía acabado el original desde 1605. Incluye además, en la introducción de esta obra, sus consideraciones dinámicas acerca del origen de los movimientos planetarios, auténtico precedente de las teorías newtonianas, como puede verse por ejemplo en párrafos como este:

> Si dos piedras fueran colocadas en cualquier parte del universo, cerca una de otra y lejos de la esfera de influencia de un tercer cuerpo, entonces, las dos piedras, como cuerpos magnéticos, se unirían en un punto intermedio, aproximándose cada una de ellas una distancia proporcional a la otra.

El mérito de Kepler es grande. Pues, si bien las teorías heliocéntricas estaban en boca de los científicos de la época desde hacía más de medio siglo, la teoría de las órbitas elípticas, en lugar de las circulares copernicanas, y la introducción de la fuerza solar como causa de los movimientos planetarios, eran obra exclusiva de Kepler.

Para realizar semejante hazaña se apoyó, desde luego, en los datos observados por Tycho, pero quedaba casi todo por hacer. Hacía falta el tesón, la intuición, la imaginación y la asombrosa capacidad matemática de un genio como el de Kepler para llegar hasta el final.

El final de la vida de Kepler no es menos desgraciado en el terreno familiar de lo que fue su vida. En 1611 mueren su segundo hijo y su mujer Barbara. El año siguiente y a la muerte de su protector, Rodolfo II, parte para Linz, donde se casa de nuevo con Susanne Reuttinger. Con ella tiene 7 hijos, de los cuales 5 mueren a poco de nacer. En 1618 muere su segunda hija de Barbara. Finalmente, en 1630, muere el propio Kepler en Ratisbona, con 58 años, a donde se había desplazado dos años antes.

HACE

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

García Hourcade, J.L. (2000): *La rebelión de los astrónomos. Copérnico y Kepler*. Madrid: Nivola.

suma+ 62
Noviembre 2009, pp.107-113

Las matemáticas y la música popular

Las canciones y las danzas del folclore son indudablemente el alma de la música, su origen. La música de concierto que escuchamos procede directamente de ellas.

Leonard Bernstein, (1918 - 1990), compositor, pianista y director de orquesta.

En muchas ocasiones, cuando se dice que las Matemáticas proporcionan un lenguaje muy apropiado para la Música, o que la Informática ha ampliado los horizontes de los músicos, parece que nos estamos refiriendo necesariamente a lo que se ha dado en llamar *música culta* o *de concierto*. Sin embargo, esto no tiene ningún fundamento, y de hecho las Matemáticas pueden ser de gran ayuda en la música folclórica. Los métodos numéricos resultan imprescindibles para la adaptación de instrumentos musicales a la música antigua, permiten reconstruir parte de la historia y de las melodías de la música o hacen posible diseñar un árbol genealógico que conecta varios estilos.

Pero la ayuda también se produce en el sentido inverso, porque la música popular proporciona documentos muy valiosos para la investigación en Música y Matemáticas. Analizar las propiedades acústicas de una orquesta o agrupación musical completa, en la que participan instrumentos de varias familias, no es tarea fácil. Por esta razón, la música popular, que suele interpretarse con agrupaciones sencillas, permite aislar patrones rítmicos o analizar la altura de las notas de una forma más eficiente que en otro tipo de manifestaciones musicales. Una vez diseñadas las técnicas para este tipo de música, se pueden aplicar a agrupaciones más complejas. Además, cuando los documentos sonoros con los que se trabaja proceden de grabaciones hechas en estudio, muchas veces, el sonido original ha sido manipulado y en este caso los sonidos a estudiar están alterados y resulta difícil extraer conclusiones. Estas manipulaciones son menos habituales en el folclore que en otros estilos musicales.

Una muestra del interés que despierta la aplicación de métodos numéricos a la música folclórica, es la aparición de artículos que conectan ambas áreas de investigación en revistas y libros como *Computing in Musicology*, *Mathematics and Computation in Music*, o la *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, por citar algunos, a los que, sin duda, hay que añadir todos los recursos que proporciona internet sobre esta materia. Sin embargo, no es nuestra intención presentar aquí una enumeración exhaustiva de todos los temas que aparecen en estos trabajos, sino que nos contentaremos con abordar algunos aspectos que están relacionados con el ritmo y con la afinación de la música popular. Además, nuestra reflexión la haremos sobre una pequeña parte del folclore español, aunque los métodos que expondremos son igualmente válidos para otros ejemplos.

Vicente Liern Carrión
Universitat de València Estudi General
musymaticas@revistasuma.es

La música folclórica analizada en la Universidad de Yale

En la sección de Musymáticas no podemos pasar por alto que el pasado mes de junio se celebró la *Second International Conference of the Society for Mathematics and Computation in Music*[1], MCM-2009, en la Universidad de Yale (EEUU). En torno a la Música se reunieron matemáticos, informáticos y músicos, para tratar, entre otros temas, los aspectos cuantitativos de la evolución de las obras musicales.

El marco no podía más adecuado para estudiar la relación música-matemáticas-tradición. A los medios tecnológicos de la Universidad de Yale, se añadía la posibilidad de visitar la biblioteca *Beinecke* de libros raros y manuscritos (una de las más importantes del mundo), en donde se podían consultar las obras originales de Zarlino, V. Galilei y Kepler, entre otros.

Entre los muchos ejemplos de la música tradicional que se analizaron en el congreso MCM-2009, el profesor G. T. Toussaint, de la Universidad McGill de Canadá, en el seminario *Medida de la complejidad del ritmo musical: modelos matemáticos y psicológicos*[2], abordó el análisis de los ritmos tradicionales desde el punto de vista computacional e hizo especial hincapié en las distintas variantes del flamenco. En realidad, una parte de este seminario se enmarca dentro de la temática investigada en el proyecto COFLA[3], al que pertenece G. T. Toussaint, y que está integrado por un grupo multidisciplinar de profesionales de la música, informáticos, historiadores del flamenco y matemáticos, con el objetivo común de analizar matemáticamente el flamenco y su evolución.

Las matemáticas y los ritmos musicales del flamenco

De todas las propiedades de la Música, en esta parte sólo nos detendremos en el ritmo o *compás*, por tanto necesitamos precisar lo que entendemos por ritmo musical. Podemos aceptar que el ritmo es la frecuencia de repetición, a intervalos regulares o irregulares de sonidos fuertes y débiles, largos y breves, altos y bajos, en una composición o, dicho de manera más formal,

> *El ritmo se define como la organización en el tiempo de pulsos y acentos que perciben los oyentes como una estructura. Esta sucesión temporal se ordena en nuestra mente, percibiendo de este modo una forma.*

La música que nos ocupa en esta sección, el flamenco, presenta la particularidad de que el ritmo es muy marcado y se ejecuta con palmas que al acentuarse marcan el patrón rítmico. Se suelen utilizar compases ternarios[4] de 12/8 (en cada compás caben 12 corcheas). En principio, se tocan 12 palmas por compás y, para marcar el ritmo, hay algunas que suenan más fuerte que las otras. Con esto, una buena representación del ritmo de un compás puede darse con un vector de 12 componentes formado por ceros y unos. Los unos representan las palmas acentuadas y los ceros las demás. Así, un “1” en la posición *i*-ésima significa que la *i*-ésima palma es acentuada. En Díaz-Báñez *et al.* (2005) se representan los patrones rítmicos ternarios del flamenco de la forma siguiente:

1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	Fandango
0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	Soleá
0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	Bulería
1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	Seguiriya
1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	Guajira

Una vez transcritos los ritmos al lenguaje matemático, nuestro interés es poder calcular la similitud rítmica entre ellos, o lo que es igual, calcular la distancia entre dos ritmos. Entre

Conferencia plenaria celebrada en la Beinecke Rare Boock and Manuscript Library de la Universidad de Yale

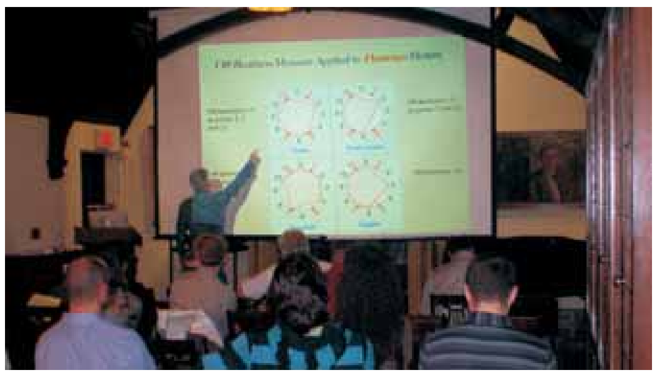
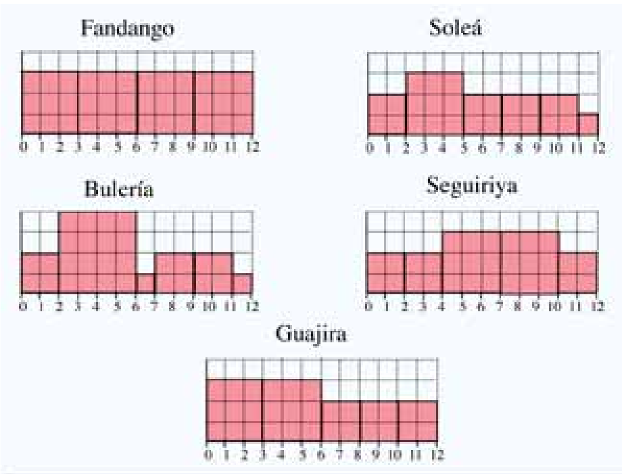


Imagen del seminario en el que el profesor G. T. Toussaint analizó los ritmos del flamenco todas las posibles distancias que se han utilizado, aquí mostraremos dos que han proporcionado buenos resultados: la distancia cronotónica y la distancia de permutación dirigida.

La distancia cronotónica

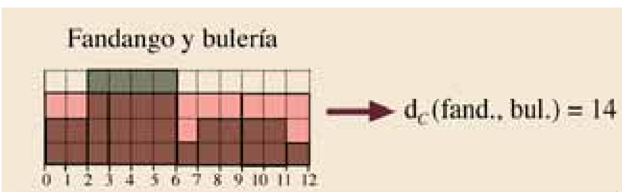
En 1983, K. Gustafson propone expresar los intervalos mediante cuadrados en los que el lado representa su longitud temporal. Con este método, en un solo gráfico se tiene información de la duración del intervalo y de cuándo se producen los ataques. Así, por ejemplo, para el patrón rítmico de la soleá, X=(0,0,1,0,0,1,0,1,0,1,0,1), se tienen los siguientes intervalos: [0,0], [1,0,0], [1,0], [1,0], [1,0], [1], que se representarán, respectivamente, mediante un cuadrado 2×2, un cuadrado 3×3, tres cuadrados 2×2 y un cuadrado 1×1.

A continuación mostramos la representación cronotónica de las diferentes variantes (*palos*) del flamenco:



Distancia cronotónica de los patrones rímicos del flamenco

De entre las muchas formas de calcular la distancia entre dos ritmos expresados en representación cronotónica, una de las más sencillas es medir la diferencia entre las áreas de ambos ritmos. En el gráfico siguiente se ve que para calcular la distancia cronotónica entre el fandango y la bulería basta con contar los cuadrados unitarios en los que no coinciden ambos ritmos. Así, la distancia entre el fandango y la bulería es 14.

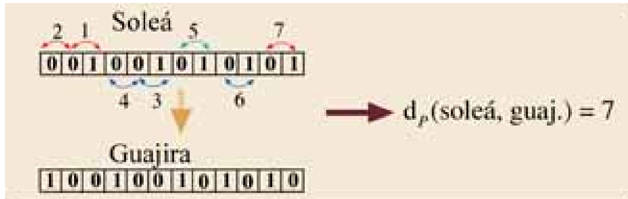


Distancia cronotónica entre el fandango y la bulería

La distancia de permutación dirigida

En primer lugar daremos una definición que sólo es aplicable cuando el número de acentos de dos patrones rítmicos es el mismo:

La distancia de permutación entre dos patrones X, Y se define como el mínimo número de permutaciones que se necesitan para convertir X en Y.



Distancia de permutación entre la soleá y la guajira

En ocasiones, para entender la escultura o la arquitectura es necesario analizar los cuerpos geométricos que se esconden en la obra. En música ocurre algo similar, para comprender una composición es necesario reconocer los patrones musicales que contiene.

Supongamos que los vectores $X= (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $Y= (y_1, y_2, ..., y_n)$ contienen p unos cada uno y el resto son ceros. Una manera eficiente de calcular la distancia de permutación entre X e Y es construir los vectores U, V que contienen las posiciones de los unos de X y de Y. Por ejemplo, si el primer uno de X está en la posición 3, la primera componente de U será un 3, y así sucesivamente. En este caso, la distancia de permutación se calcula según la expresión[5]

$$d_P(X,Y) = \sum_{j=1}^{p} \left| u_j - v_j \right|.$$

Comprobemos cómo funciona el método con la soleá y la guajira. En este caso, los vectores *X, Y, U* y *V* son los siguientes:

$X=(0,0,1,0,0,1,0,1,0,1,0,1) \Rightarrow U= (3, 6, 8, 10, 12)$,
$Y=(1,0,0,1,0,0,1,0,1,0,1,0) \Rightarrow V= (1, 4, 7, 9, 11)$.

Entonces, la distancia de permutación entre X e Y se calcula como

$$d_P(X,Y) = \ |3-1|+|6-4|+|8-7|+|10-9|+|12-11|\ = 7$$

que, como era de esperar, coincide con la que habíamos obtenido en el recuadro anterior.

Sin embargo, cuando los ritmos a comparar no tienen el mismo número de acentos, necesitamos generalizar el concepto de distancia de permutación al de *distancia de permutación dirigida* entre dos patrones X, Y, $d_{PD}(X, Y)$, que se define de la forma siguiente:

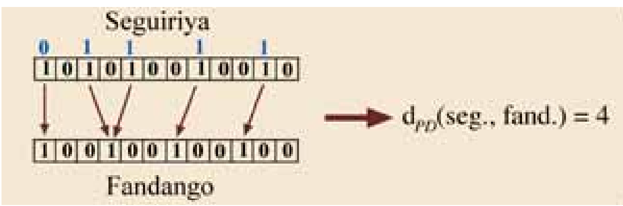
a. Si el número de acentos de X e Y es el mismo,

$$d_{PD}(X, Y) = d_P(X, Y).$$

b. Si el número de acentos de X es mayor que el de Y, la distancia de permutación dirigida es el mínimo número de permutaciones necesarias para convertir X en Y bajo las condiciones siguientes:

1. Cada "1" de X tiene que moverse a una posición "1" de Y.
2. Todas las posiciones " 1" de Y tienen que recibir al menos un "1" de X.
3. Ningún "1" puede viajar a través de la frontera entre la posición cero y la n-ésima.

Por ejemplo, la distancia de permutación dirigida entre la seguiriya (5 acentos por compás) y el fandango (4 acentos por compás) se calcula como se expresa en el recuadro siguiente:



A diferencia de lo que ocurre con la distancia de permutación, no se dispone en la actualidad de un algoritmo eficiente para calcular la distancia de permutación dirigida entre dos patrones.

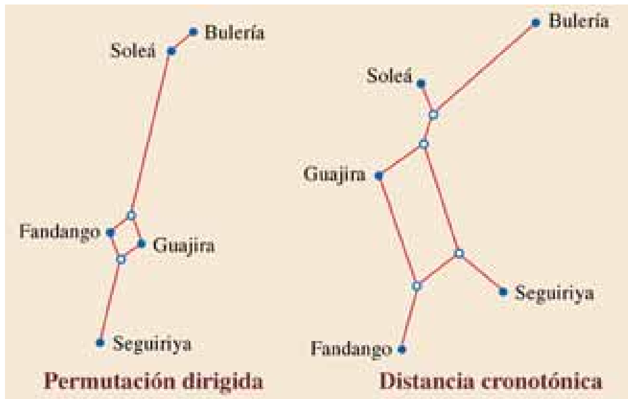
Un árbol filogenético para los palos del flamenco

El objetivo principal por el que se calculan las distancias anteriores es estudiar las posibles relaciones genealógicas entre los distintos patrones rítmicos. Para ello, en Díaz-Báñez *et al.* (2005) se utiliza una técnica denominada *SplitsTree* que consiste en dibujar un grafo plano en forma de red en el que la distancia entre dos nodos (dos patrones) refleja la distancia entre los ritmos.

En la tabla siguiente se recogen las distancias entre los diferentes estilos ternarios del flamenco utilizando la distancia cronotónica (en negro) y la distancia de permutación dirigida (en azul).

	Soleá		Bulería		Seguiriya		Guajira		Fandango	
Soleá	0	0	6	1	8	11	4	7	10	7
Bulería	6	1	0	0	12	12	8	8	14	8
Seguiriya	8	11	12	12	0	0	8	4	6	4
Guajira	4	7	8	8	8	4	0	0	6	2
Fandango	10	7	14	8	6	4	6	2	0	0
SUMA	28	26	40	29	34	31	26	21	36	21

A partir de esta tabla se construye el grafo que representa las distancias entre cada estilo.



Árboles filogenéticos de los estilos ternarios del flamenco usando la distancia de permutación dirigida y la distancia cronotónica.

El grafo de la distancia cronotónica sugiere la agrupación en tres grupos. El central está formado por el fandango y la seguiriya, otro por la soleá y la bulería y el tercero por la guajira. El ritmo de bulería es el más alejado de todos (la suma de distancias es 40) y el más similar a todos es el de guajira (con una suma de 26). Sin embargo, los agrupamientos que aparecen con la permutación dirigida proporciona un primer grupo con la soleá y la bulería, otro central formado por el fandango y la guajira y el tercero por la seguiriya. En este caso, los ritmos más similares a todos son la guajira y el fandango (ambos con una suma de distancia de 21). Teniendo en cuenta que la guajira es un estilo más reciente, podría decirse que el fandango es el ritmo más primitivo, y esto estaría de acuerdo con que es el ritmo más extendido, dando lugar a modalidades evolucionadas como las malagueñas, las granaínas, las tarantas, etc. y con la idea de que "el fandango es la fuente de todos los patrones flamencos".

La afinación de los intérpretes de la música popular

Para hablar acerca de la afinación vamos a cambiar el estilo de la música popular. En este caso analizaremos un tipo de canciones populares denominado *cançò d'estil* que se extiende por gran número de comarcas de la Comunidad Valenciana, con centro en la comarca de l'Horta (a la que pertenece la ciudad de Valencia). Se trata de un tipo de música mucho menos difundido que el flamenco, en el que participan instrumentos de viento (normalmente clarinete, trompeta y trombón), de cuerda pulsada (guitarras y *guitarró*), cantantes y un versador (que va improvisando las letras). La canción la inician los instrumentos de cuerda y después se incorporan los instrumentos de viento e interpretan una melodía. En un momento dado, flexible, irrumpe el cantante que se queda sólo con el apoyo de la cuerda y el viento sólo participa para hacer algunas notas denominadas *cortes* y el final de la canción.

La razón por la que se ha elegido este tipo de músicas es, además de mostrar que el uso de las Matemáticas no es específico de ningún tipo de música, porque contamos con material sonoro recogido desde 1915 en el que no ha habido ningún tipo de manipulación ni intervención que añada o reelabore elementos sobre las interpretaciones originales (véase Torrent, 1997).

En la música popular, en la que los modos de cantar se trasmitían de forma oral a base de la experiencia, el sistema de afinación temperado no se impuso de forma sencilla.

Cuando se quiere transcribir este tipo de música tradicional se cuenta con varios inconvenientes:

a. En cuanto a los tiempos, mientras los instrumentos se sirven de pulsaciones cíclicas que coinciden con el concepto de compás (tempo físico o metronómico), las voces llevan un tempo mucho menos rígido, no tan periódico, deforme y normalmente dilatado (tempo psíquico o melódico). Resulta imposible medir estas dos categorías con el mismo sistema de medición.

b. Respecto a la afinación, cohabitan dos sistemas diferentes: los instrumentos se rigen, aproximadamente, por las normas del sistema temperado de doce notas y las voces humanas pueden hacerlo por otras.

Con estas dificultades, no resulta sencillo transcribir la música en un pentagrama. Por esta razón en ocasiones se prescinde de las figuras de notas ordinarias, no se precisa la duración, se elimina el compás y las líneas divisorias. Así aparecen notas largas (representadas por un cuadrado), notas cortas (círculos) y melismas[6] (representados por círculos pequeños). Además, cuando la afinación es alta o baja se indica con flechas sobre las notas. Veamos un ejemplo:

Transcripción de un fragmento de música tradicional, estilo de l'Ú, interpretado por el Xiquet de Paterna en 1929.

De entre todos los cantantes, nos centraremos en Vicent Peris Pastor (1904-1939), *el Xiquet de Paterna*, porque en estos días, el cuatro de noviembre, se cumplirán setenta años de su fusilamiento pero, por supuesto, lo que vamos a analizar sería igualmente válido para otros cantantes.

Si nos fijamos en el pentagrama, vemos que cada vez que aparece un *la*, está marcado con una flecha que indica que la nota está baja. Se trata de una nota intermedia entre el *la* y *la*^{b}. En principio, podría tratarse de una desafinación del cantante, pero cuando esta característica se repite en todas sus interpretaciones y las de otros cantantes, ¿no resulta sorprendente esta repetición de un intervalo equivocado?

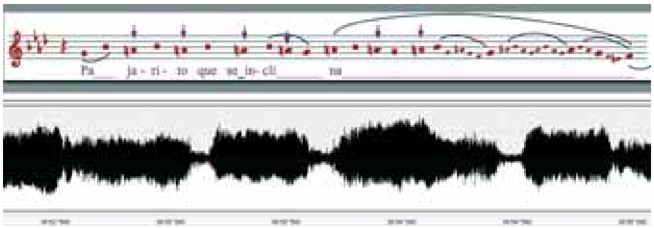
Como decíamos en el último número de la revista SUMA, en el siglo XIX la hegemonía del temperamento igual de doce notas, frente al resto de formas de afinar, ya no tenía vuelta atrás. Sin embargo, en la música popular, en la que los modos de cantar se trasmitían de forma oral a base de la experiencia, el sistema de afinación temperado no se impuso de forma sencilla.

Para poder entender lo que ocurre con ese *la* insistentemente desafinado, al que representaremos como "la", mediremos[7] la frecuencia de la nota y calcularemos la distancia entre esta frecuencia y la nota afinada.

La distancia entre las notas de frecuencias f_1 y f_2 hercios se calcula como

$$d(f_1, f_2) = 1200 \cdot \left| \log_2 \left(\frac{f_1}{f_2} \right) \right| \text{ cents.}$$

En realidad, lo que queremos comprobar es que esta "desafinación", que concedía al intérprete un rasgo característico, podría tratarse de un modo de afinar mucho más antiguo que el que manejamos en la actualidad: la Justa Entonación.



Análisis de las frecuencias de un fragmento musical con el programa Amadeus II®

Si calculamos la distancia entre el "la", de 427,66 Hz., y el *la* temperado, se tiene

$$d(\text{"la"}, la) = 1200 \cdot \log_2\left(\frac{427{,}66}{440}\right) = 49{,}24 \text{ cents}$$

Si repetimos la operación con el *la*^{b} temperado, el resultado es muy similar.

$$d(\text{"la"}, la^b_{Temperado}) = 1200 \cdot \log_2\left(\frac{427{,}66}{415{,}305}\right) = 50{,}75 \text{ cents}$$

Se tiene por tanto que el "la" está prácticamente a mitad de camino entre el *la* y el *la*^{b}. Sin embargo, si comparamos la misma nota con el la bemol de la Justa Entonación de Zarlino, sólo está 21 cents más alto.

$$d(\text{"la"}, la^b_{Zarlino}) = 1200 \cdot \log_2\left(\frac{427{,}66}{422{,}4}\right) = 21{,}42 \text{ cents}$$

Teniendo en cuenta que algunos autores fijan en 12 cents la percepción del oído humano (Haluka, 2005), en realidad estaríamos ante un *la bemol* de la justa entonación, pero no de la afinación temperada.

Para poder comprobar las diferencias entre las notas fijadas como afinadas por el temperamento de 12 notas y la Justa Entonación, a continuación damos una tabla que contiene las frecuencias de las notas en ambos sistemas (fijando el *la* a 440 Hz):

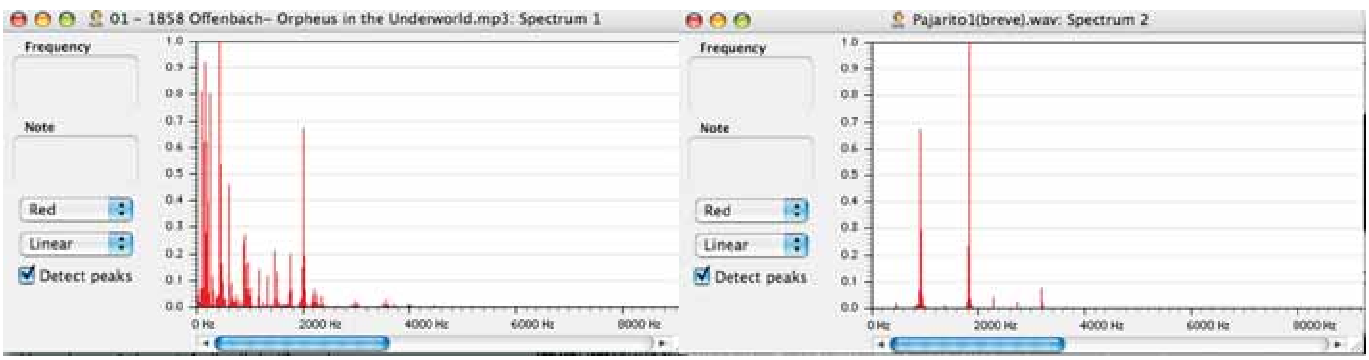
	J. Entonación (Zarlino)	Temperamento 12 notas		J. Entonación (Zarlino)	Temperamento 12 notas
Do	264	261,626	fa$^\#$	366,667	369,994
do$^\#$	275	277,183	sol^b	380,16	
re^b	285,12		**Sol**	396	391,995
Re	297	293,665	sol$^\#$	412,5	415,305
re$^\#$	309,375	311,127	la^b	422,4	
mi^b	316,8		**La**	440	440
Mi	330	329,623	la$^\#$	458,3	466,164
Fa	352	349,228	si^b	475,2	
			Si	495	493,883

Está claro que se trata de dos sistemas de afinación muy diferentes. Mientras que el temperado no distingue entre sostenidos y bemoles, la Justa Entonación sí lo hace. Además, las diferencias entre las frecuencias fijadas por ambos sistemas son claramente perceptibles por el oído humano, aunque éste tenga poco entrenamiento musical.

En definitiva, poder conocer el modo de afinación al que mejor se adapta una pieza musical proporciona mucha información cronológica de la fuente de la que procede el estilo y, además, permite ver el retraso con el que los intérpretes se adaptan a las nuevas corrientes consideradas cultas.

La música popular como banco de pruebas

En la mayoría de los temas de investigación, la única forma de llegar a resultados válidos es simplificar el problema lo máximo posible para, un vez resueltos los casos simples, poder generalizar las técnicas. En Música ocurre lo mismo, para poder analizar las propiedades acústicas de agrupaciones y obras complejas, es necesario empezar con ejemplos sencillos. Sirva como ejemplo el análisis de frecuencias que aparece en el gráfico de la parte inferior.



Análisis del espectro de frecuencias de un instante de Orfeo de los infiernos de Offenbach (a la izquierda), y de música popular valenciana (a la derecha) con el programa Amadeus II®

Si queremos estudiar los sistemas de afinación que aparecen en una interpretación, cuando se analiza la orquesta sinfónica, el número de barras de frecuencias es muy elevado, mientras que cuando se hace la misma operación con algunas músicas tradicionales el análisis se simplifica sensiblemente. La necesidad de este análisis, que podría parecer un objetivo académico alejado de la práctica cotidiana es, sin embargo, uno de los problemas con los que se encuentran algunos musicólogos. Como se afirma en Bernal (1999), “uno de los principales problemas que se presentan en la praxis de la música antigua para tecla es el de la elección del temperamento adecuado [...] Acertar con el temperamento adecuado será importante para expresar mejor el espíritu de la música de un momento dado.”

Sería injusto no admitir que en la música de concierto, al disponer de una partitura se facilita cualquier análisis. Pero aún así, si en lo que estamos interesados es en la música real y no la teórica (la de la partitura), cualquier estudio se complica. Piénsese, por ejemplo, que con la misma partitura dos directores o dos orquestas distintas producen músicas claramente diferentes.

Por último, no debemos dejar de mencionar que uno de los actuales temas de investigación entre los estudiosos de la Música y la Computación es encontrar patrones musicales para reconstruirlos, para poder establecer la relación con la preferencia de un oyente dado o para diseñar relaciones entre diferentes estilos. Sin duda, la labor realizada por el proyecto COFLA con el ritmo del flamenco resulta muy interesante en sí misma, pero además proporciona técnicas muy útiles para la recuperación de información musical de otro tipo de músicas, en los que tener que trabajar con piezas enteras hace que la cantidad de datos con los que se cuenta dificulten mucho la labor.

MUSYMÁTICAS ■

NOTAS

1 Para más información sobre el congreso podéis visitar la página http://www.mcm2009.info/.

2 El título original del seminario fue “Measuring the Complexity of Musical Rhythm: Mathematical and Psychological Models”.

3 En el proyecto COFLA participan investigadores de varias universidades españolas y extranjeras. De entre sus publicaciones, aquí sólo mostramos parte de los resultados presentados en J. M. Díaz Báñez et al, 2005, pero podéis encontrar más información en, por ejemplo:http://innovacion.ideal.es/matematicas-para-estudiar-cante-flamenco.html

4 Hay estilos dentro del flamenco que utilizan ritmos binarios (2/4 ó 4/4), como son el tango flamenco, la rumba, etc., pero se han excluido del estudio porque todos ellos presentan el mismo patrón rítmico (1, **2, 3, 4**), donde hemos marcado con negrita las palmas acentuadas.

5 En realidad la distancia de permutación entre *X* e *Y* coincide con la distancia de Hamming entre *U* y *V*.

6 Un melisma es un grupo de notas de adorno que se interpretan sobre una misma vocal.

7 La frecuencia se ha medido con el programa informático Amadeus II®, pero puede medirse con cualquier otro programa (muchos de ellos se pueden descargar gratuitamente de Internet) o con un afinador cromático.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bernal, M. (1999): El temperamento de Nasarre: estudio matemático. *Revista de Musicología*, 22, pp. 157-174.

Del Corral A., León, T., Liern, V. (2009): Compatibility of the Different Tuning Systems in an Orchestra. *Mathematics and Computation in Music*, 38, pp. 93-103 .

Díaz Báñez, J. M, Farigu, G., Gómez, F., Rappaport, D., Toussait, G. T. (2004): El compás del flamenco: A phylogenetic analysis. *Proceedings of BRIDGES: Mathematical Connections in Art, Music and Science*, Southwestern College, Wineld, pp. 61-70.

Díaz Báñez, J. M, Farigu, G., Gómez, F., Rappaport, D., Toussaint, G. T. (2005): Similaridad y evolución en la rítmica del flamenco: una incursión en la matemática computacional. *La Gaceta de la RSME*, 8, pp. 490–509.

Haluska, J. (2005): *The Mathematical Theory of Tone Systems.* Bratislava: Marcel Dekker, Inc.

Liern, V. (2001): *Afinacions, partitures i fòrmules matemàtiques*, Prada de Conflent: Universitat Catalana d’Estiu.

Torrent, V. (1997): *Antologia del cant valencià d’estil (1915–1996).* Valencia: La Máscara – Generalitat valenciana.

Internet

http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Cultura/Musika/Afinacion/

http://innovacion.ideal.es/matematicas-para-estudiar-cante-flamenco.html

http://www.mcm2009.info/

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Comisión Ejecutiva

Presidente: **Serapio García Cuesta**
Secretario General: **Francisco Martín Casalderrey**
Vicepresidente: **Manuel Torralbo Rodríguez**
Tesorera: **Claudia Lázaro del Pozo**

Secretariados:
Prensa: **María Peñas Troyano**
Revista SUMA: **Tomás Queralt Llopis/Onofre Monzó del Olmo**
Relaciones internacionales: **Sixto Romero Sánchez**
Publicaciones: **Ricardo Luengo González**
Actividades y formación del profesorado: **Juana Mª Navas Pleguezuelos**
Actividades con alumnos: **Jordi Comellas i Blanchart**

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidenta: Carme Aymerich Padilla
CEIP Rocafonda
C/Tàrrega, 41
08304 Mataró (Barcelona)

Sociedad Andaluza de Educación Matemática *Thales*
Presidente: Manuel Torralbo Rodríguez
Facultad Matemáticas. Apdo. de Correos 1160. 41080 Sevilla

Sociedad Aragonesa *Pedro Sánchez Ciruelo* de Profesores de Matemáticas
Presidenta: Ana Pola Gracia
ICE Universidad de Zaragoza. C/ Pedro Cerbuna, 12. 50009 Zaragoza

Sociedad Asturiana de Educación Matemática *Agustín de Pedrayes*
Presidente: Juan Antonio Trevejo Alonso
Apdo. de Correos 830. 33400 Avilés (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas *Isaac Newton*
Presidenta: Ana Alicia Pérez
Apdo. de Correos 329. 38200 La Laguna (Tenerife)

Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática *Miguel de Guzmán*
Presidente: Antonio Arroyo
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Víllalar, s/n. 09006 Burgos

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García Cuesta
Avda. España, 14, 5ª planta. 02002 Albacete

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidente: Bienvenido Espinar Cepas
CPR Murcia II. Calle Reina Sofía n.º1. 30007 Murcia

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas *Tornamira*
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea *Tornamira*
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.
Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra. 31006 Pamplona

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Manuel Rodríguez Mayo
Apdo. de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Extremeña de Educación Matemática *Ventura Reyes Prósper*
Presidente: Ricardo Luengo González
Apdo. de Correos 590. 06080 Badajoz

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*
Presidente: Juan A. Martínez Calvete
C/ Limonero, 28. 28020 Madrid

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: María José Señas Pariente
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidente: Luis Serrano Romero
Facultad de Educación y Humanidades. Ctra. Alfonso XIII, s/n. 52005 Melilla

Sociedad *Puig Adam* de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Facultad de Educación. (Sec. Deptal. Álgebra). Despacho 3005.
C/ Rector Rollo Villanova, s/n. 28040 Madrid

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas *A prima*
Presidente: Elena Ramirez Ezquerro
CPR. Avda. de la Paz, 9. 26004 Logroño

Sociedade Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)
Presidente: Manuel Díaz Regueiro
C/ García Abad, 3, 1ºB. 27004 Lugo

Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana *Al-Khwarizmi*
Presidente: Onofre Monzó del Olmo
Departamento de Didáctica de la Matemática. Apdo. 22045. 46071 Valencia

Societat Balear de Matemàtiques *Xeix*
Presidente: Josep Lluís Pol i Llompart
C/ Martí Rubí 37/alts. 07141 Sa Cabaneta (Marratxí). Islas Baleares

suma+ 62
Noviembre 2009, pp. 115-123

Hipatia y Galois

Si dos matemáticos son famosos más allá de su obra científica, por sus muertes trágicas, ésos son Hipatia de Alejandría (s. IV – V d.C.)[1], víctima del fanatismo religioso, y Évariste Galois (1811 – 1832), traslación del arquetipo romántico a las ciencias. Ambos parecían proclives a la recreación cinematográfica y han coincidido en el tiempo los rodajes de sendas películas sobre ellos: *Ágora* (Alejandro Amenábar. 2008) y *3:19 Nada es casualidad* (Dany Saadia. 2008).

Antecedentes

La Historia de las Matemáticas y sus protagonistas han sido llevados a la pantalla escasas veces. En décadas pasadas hubo algunas películas biográficas dedicadas a Galileo Galilei, Sofía Kovalevskaya, Omar Khayyam, el propio Galois (cortometraje), Abu Rajkhan Al-Biruni, Luigi Cacciopoli y Nicolai E. Zhukovsky. Se citan sólo a efectos de inventario, pues no están comercializadas en España y resultan casi inencontrables. [2]

En el cine más reciente y accesible a nosotros se han recreado una biografía y dos acontecimientos históricos, aunque en todos los casos hay críticas que hacer a su fidelidad con los hechos. La biografía es la de John Forbes Nash (1928) en *Una mente maravillosa* (Ron Howard. 2001), que contiene numerosas inexactitudes e invenciones. También se dice que el personaje del matemático con problemas mentales de *La verdad oculta* (*Proof*. John Madden. 2005) está inspirado en el propio J.F. Nash, pero no puede hablarse de que sea su biografía.

Los dos acontecimientos históricos a que hacía referencia son: la conferencia de Andrew Wiles (1953) en la Universidad de Cambridge el 23-06-1993, en la que expuso su primera demostración del Teorema de Fermat, en una breve escena de *Los Crímenes de Oxford* (Alex de la Iglesia. 2007); y el desencriptado del código de transmisiones nazis durante la II Guerra Mundial por un equipo de matemáticos, a lo largo de la película *Enigma* (Michael Apted. 2001). Pero curiosamente en ambos casos se oculta la identidad de los protagonistas reales. En el primero, como ya explicábamos en Suma 59, por cautelas legales los nombres de Wiles y Fermat son sustituidos de forma absurda por los de Wilkins y Bormat. En *Enigma*, en aras a novelar un romance convencional, el personaje Tom Jerico sustituye a Alan Turing (1912 – 1954).

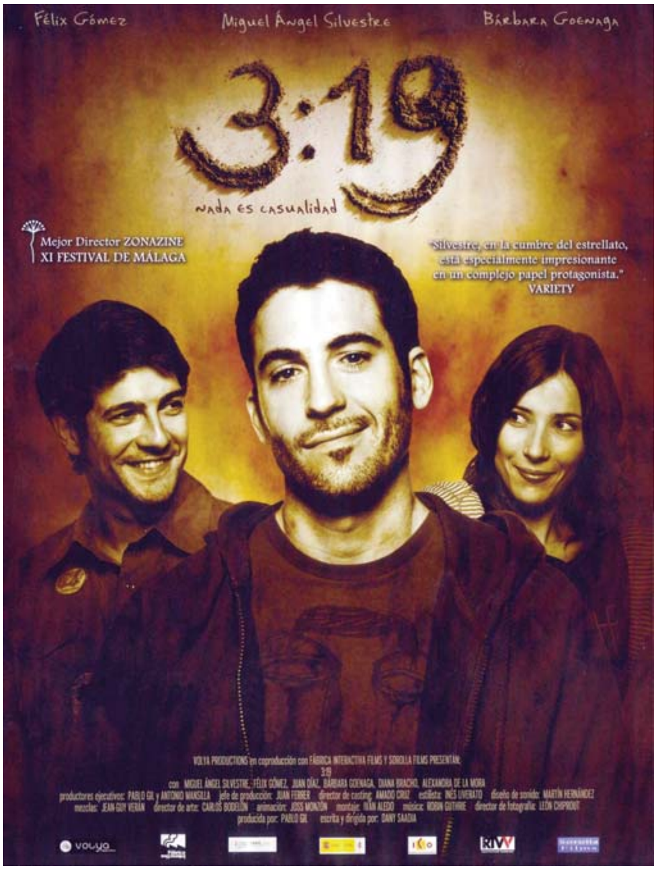
No ha sido ésa la única ni la primera vez que en el Cine se ha privado a Alan Turing del reconocimiento a su obra. En *Blade Runner* (Ridley Scott. 1982), obra cumbre del género de ciencia ficción, Rick Deckart (Harrison Ford) es un agente espe-

José María Sorando Muzás
IES Elaios, Zaragoza
decine@revistasuma.es

cial a la caza de los replicantes. Éstos son robots de un nuevo tipo, físicamente idénticos al hombre, superiores en fuerza y agilidad, y al menos iguales en inteligencia. Se han rebelado y deben ser eliminados. Su detección se hace mediante un test que busca provocar las respuestas emocionales de los sospechosos. Se trata en realidad de una versión del conocido *Test de Turing*. La prueba original ideada por Turing debe someter a un humano y a una máquina a las preguntas de un juez situado en otra habitación. Éste intentará discernir, por las respuestas de uno y de otro, quién es quién. En el caso de no poder distinguirlos, se podrá decir que la máquina es "inteligente". En *Blade Runner*, es el interlocutor humano quien debe decidir la condición de su oponente, pero no se habla del *Test de Turing*, como sería justo hacer, sino del *Test de empatía de Voigt-Kampff* [3] y [4]. Por hechos más graves, la memoria de Turing ha sido reivindicada de forma oficial en Gran Bretaña hace escasos meses [5].

Con estos antecedentes cercanos, tan salpicados de objeciones, recibíamos *3:19 Nada es casualidad* y *Ágora* expectantes aunque con cierta prevención.

3:19 Nada es casualidad



3:19 NADA ES CASUALIDAD
Director*:* **Dany Saadia**
Actores*: Miguel Ángel Silvestre (Ilan), Félix Gómez (Eric), Bárbara Goenaga (Lisa), Juan Díaz (Andy), Diana Bracho (Lucía), Salomé Jiménez (Alexandra), Alexandra De La Mora (Luciana), José Galotto (Dr. Villalobos) y Luis Mottola (Dr.* Lieterman)
Guión*: Dany Saadia*
Concepto y diseño de Animaciones: *Jose Luis Monzón.*
Animación: *Paul Wollenzien/ Rune Entertainment.*
Producción: *Volya Productions (España) y Fábrica Interactiva (México). España y México 2008.*
Distribución: *Sorolla Films.*
Estreno en España: 20-06-2008. Ha obtenido varios premios en el Festival de Málaga y en la Mostra de Valencia.
URL: http://319lapelicula.com.

Argumento.– En ésta su ópera prima, Saadia trata, según sus propias palabras, acerca de *todo lo que tiene que suceder para que dos personas se conozcan en un mismo espacio y tiempo*[6]. Narra dos historias paralelas: la de Galois y la de Ilan, un estudiante actual, ambientada en Valencia. Ambos personajes coinciden en la certeza y la aceptación de una muerte próxima, en plena juventud. *Necesito todo mi valor para morir con 20 años*, decía Galois; *Necesito todo mi valor para morir con 26 años*, dice Ilan. Curiosamente, la primera, que es real, se cuenta con voz en *off* y mediante una animación cuyos dibujos tienen un estilo sugestivo y diferente a lo habitual, de estética poco realista (figuras planas, grandes ojos y colores apagados); mientras que la segunda, que es ficción, se desarrolla con actores reales.

Las historias continúan tras las muertes. En ambas, las personas más allegadas cumplen las últimas voluntades. Para Galois, la publicidad de su Teoría de Grupos; para Ilan, la continuación de un juego entre amigos, cuyo premio es la aproximación póstuma a Lisa, una bella desconocida. El relato sobre Galois se enlaza con otro sobre el polémico biólogo Paul Kammerer (1881- 1926), estudioso de las casualidades y autor del libro *La ley de la serialidad* (1919). Al concluir Lisa la lectura de su tesis disertando sobre Kammerer descubrimos que es ella quien ha estado narrando la vida y muerte de Galois. Tras largas cadenas de casualidades, las dos historias "paralelas" se han encontrado en un punto.

Comentario.– Por si el título no fuera bastante explícito, unos créditos iniciales de gran brillantez nos muestran el Universo como un gran mecanismo de relojería[7]. La propuesta posterior es clara: la concatenación de hechos poco probables sólo se explica por la existencia de un propósito global. Kammerer llama a ese propósito *la fuerza universal de la casualidad,* fuerza que rige el *caleidoscopio cósmico.* Sobre la misma idea, se cita varias veces a Milan Kundera (1929) y *La insoportable levedad del ser* (1984)*: Sólo la casualidad puede aparecer ante nosotros como un mensaje. Sólo la casualidad nos habla.*

Centraremos nuestra atención en la parte del film relativa a Galois. De él se glosa el despertar de su pasión por las Matemáticas y el suicidio de su padre. También, las visitas infructuosas a los grandes matemáticos franceses de la época, que no prestaron atención a sus trabajos; así como sus reiterados suspensos en el examen de ingreso a la prestigiosa École Polytechnique de Paris. Luego, sus peripecias revolucionarias, cárcel incluida, y el lance de honor que le condujo al fatal duelo a pistola. Después, la carta póstuma donde exponía apresuradamente las ideas fundamentales de la Teoría de Grupos y, tras años de olvido y avatares, su tardío reconocimiento.

Al comenzar el siglo XIX seguía abierto un problema clásico: hallar la solución para la ecuación general de 5º grado, a partir de sus coeficientes y mediante operaciones racionales y extracción de raíces. Era un problema de solución pendiente desde que Tartaglia (1500 – 1557) y Cardano (1501 – 1576) dieran el método algebraico para hallar la solución de la ecuación de tercer grado y Bombelli (1526 – 1572) la de cuarto grado. Quien lo resolviera lograría fama imperecedera. Pero tras tantos años de esfuerzos había cobrado cuerpo la conjetura de que esa resolvente era imposible de hallar.

Niels Henrik Abel (1802 – 1829), a los 19 años pretendía haber encontrado la solución, pero vio un error en su demostración. Esto le llevó a dar un giro radical en el planteamiento del problema. En lugar de preguntarse: *¿cuál es la resolvente de la ecuación algebraica de 5º grado?,* se preguntó: *¿qué condiciones han de cumplir las raíces de una ecuación para que ésta tenga solución?,* logrando un resultado capital: *para* $n \geq 5$ *no se pueden cumplir tales condiciones.* Así, la ecuación de 5º grado es imposible de resolver algebraicamente. Al invertir el problema, demostró por qué no se puede resolver.

Abel, tras demostrar por qué hay algunas ecuaciones algebraicas sin solución, dejó planteado un nuevo problema: ¿en qué casos se pueden resolver? Galois estudió las propiedades de las permutaciones de las raíces de una ecuación, asociándole el "grupo de permutaciones", concepto que resultó ser de importancia decisiva pues a través de él puede saberse si una ecuación es o no resoluble. Dejó así zanjada la que hasta entonces era la cuestión principal del Álgebra, sin que eso supusiera el fin de esta rama de las Matemáticas, ya que la profundidad de aquellas ideas iba a reorientar su desarrollo futuro.

La Teoría de Galois fue desarrollada por Arthur Cayley (1821 – 1895), quien comprendió que el concepto de grupo es independiente de los objetos a los que se aplique. Su estudio ya no se limita al grupo de permutaciones de las raíces de una ecuación, sino al grupo como estructura abstracta. El Álgebra dejó de ser el estudio de la resolución de ecuaciones para convertirse en el estudio de las estructuras algebraicas, como los grupos, y de las producidas al combinar dos o más de esas estructuras. Curiosamente, la Teoría de Galois sirvió para cerrar definitivamente los Tres Problemas Clásicos (duplicación del cubo, trisección del ángulo y cuadratura del círculo), demostrando que carecen de solución, y al mismo tiempo abrió las puertas de la moderna Álgebra Abstracta.

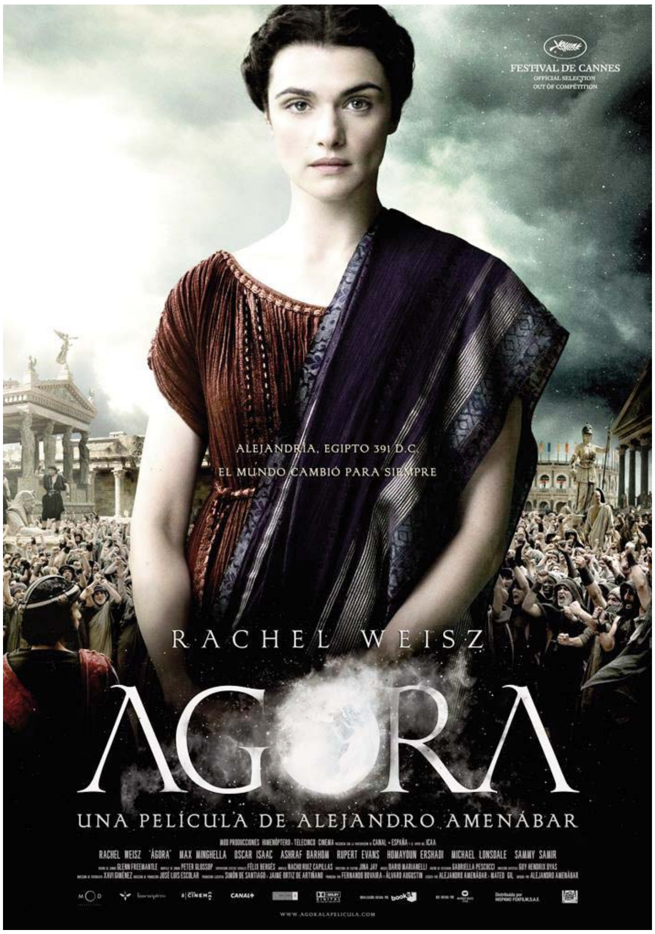
No era de esperar que se explicase todo lo anterior en la película, pero sí al menos que se citase qué problema intentaba resolver Galois o qué trascendencia tuvieron sus ideas; algo que no se hace ni de pasada. Se citan las palabras de Liouville*: En los papeles de Galois he encontrado una solución tan exacta como profunda.* Pero, una solución ¿a qué problema?

A esas omisiones se deben añadir algunos deslices matemáticos, como que en el estudio y defensa de la Teoría de Grupos se vea a Galois escribiendo integrales, ecuaciones trigonométricas y cálculos de ángulos en la circunferencia. Lo cual extraña un poco siendo que el director se licenció en Matemáticas por The State University of New York en Stony Brook.

Éstas son algunas frases de Saadia, quien cuenta con un blog en el que responde a las intervenciones de los espectadores (www.danysaadia.com):

> La vida de Galois, la conocía desde que tenía 18 ó 19 años cuando estudiaba en el liceo, se me hizo una vida tan trágica que me llamó mucho la atención. Recuerdo haber copiado de la enciclopedia la vida de este matemático y el escrito se quedó guardado en el baúl de los recuerdos. Cuando viene la oportunidad de hacer la película dije: "este es el momento para contar la historia de Évariste Galois, voy a ver si puedo meterlo" y efectivamente, sí cupo bien su vida dentro de la historia de la película; uno de los tratamientos del guión constaba de trescientas páginas pues incluía las historias de más matemáticos que al final quedaron fuera. Si investigas, muchos matemáticos tienen vidas súper plenas. Évariste Galois tiene una historia similar a la del noruego Niels Henrik Abel. Los dos vivieron en la primera mitad del siglo XIX, cada uno encontró que las ecuaciones quínticas no se pueden resolver algebraicamente, nunca se conocieron y los dos murieron jóvenes: Abel a los 26 años de una tuberculosis y Galois, asesinado a los 20.
>
> El cine es una descripción y la matemática es una interpretación de la realidad, cuando juntas las dos estás creando visualmente una interpretación de la realidad para poder describirla.

Ágora



Ágora

Director: **Alejandro Amenábar**

Actores: *Rachel Weisz (Hypatia), Max Minguella (Davo), Ashraf Barhom (Amonio), Michael Lonsdale (Teón), Rupert Evans (Sinesio), Oscar Isaac (Orestes), Sammy Samir (Cirilo), Richard Durden (Olimpio), Oshri Cohen (Medoro), Omar Mostaza (Isidoro) y Homayoun Ershadi (Aspasio).*

Guión: *Alejandro Amenábar y Mateo Gil.*

Producción: *Telecinco, Mod Producciones, Himenóptero y Canal +. España 2008.*

Distribución: *Hispano Foxfilm.*

Estreno en España: *09-10-2009.*

URL: http://www.agoralapelicula.com/ [8]

Argumento.– Entre los siglos IV y V, en Alejandría, capital de la provincia romana de Egipto, se produce el ascenso imparable y a veces violento del Cristianismo, que llega a excluir a las demás religiones. Hipatia, filósofa, matemática y astrónoma vive de forma directa esas turbulencias sin cesar por ello de impartir sus enseñanzas a alumnos de todos los credos y de toda condición; tampoco en su empeño por comprender el secreto mecanismo de las estrellas.

Dos alumnos profesan una especial admiración por su maestra, una atracción personal: Davo y Orestes. Davo, esclavo de Hipatia, verá en el Cristianismo la redención a su esclavitud y abandonará la ciencia. Orestes llegará a ser prefecto (gobernador) y seguirá siendo discípulo de Hipatia. Pero el fanatismo dominante cortará con crueldad ese vestigio de sabiduría y tolerancia.

Aún en los momentos de mayor tensión y peligro, Hipatia seguirá preguntándose los *por qués* del Cosmos que observamos y alcanzará, de mano de la Geometría, una postrera recompensa al obtener la respuesta.

Comentario.– Amenábar acostumbra a asumir riesgos. No se acomoda en ningún género. Cada una de sus películas ha sido una incursión exitosa en nuevos terrenos: el thriller con *Tesis* (1995), la ciencia ficción con *Abre los ojos* (1997), el misterio con *Los otros* (2001) y el drama con *Mar adentro* (Óscar a la mejor película de habla no inglesa en 2004). Ahora ha dado el salto a la superproducción histórica. Y ha declarado: "Me gustaría hacer una película sobre la Relatividad". Es capaz.

Ágora es la película más cara del cine español, con vocación internacional: rodada en Malta y en inglés (*el latín del s. XXI* en palabras de Amenábar). El diseño de producción, la música, la fotografía, el montaje… todo roza la perfección técnica. Pero el director no usa esos grandes medios buscando el colosalismo, ese cine histórico que tantas veces hemos visto, espectacular aunque vacío. Los pone al servicio de una idea tan necesaria en el tiempo de Hipatia como en el actual: la defensa de la razón y la duda frente a quienes creen detentar verdades absolutas y están dispuestos a imponerlas a los demás por la fuerza. Dice la protagonista a Sinesio: *Tú no cuestionas lo que crees, no puedes. Yo sí, yo debo.* Es el enfrentamiento entre la racionalidad científica y la irracionalidad de los "iluminados", la fuerza de la razón frente a la razón de la fuerza. Según Amenábar:

> Ágora es, en muchos sentidos, una historia del pasado sobre lo que está pasando ahora, un espejo para que el público mire y observe desde la distancia del tiempo y del espacio, y descubra, sorprendentemente, que el mundo no ha cambiado tanto y se sigue lapidando a la gente.
>
> Las mujeres han mejorado sus condiciones aunque hay sitios donde las tratan como en el siglo IV.

Del impacto que ha tenido el solo anuncio de esta película habla el hecho de que, desde que fuera presentada en el festival de Cannes en mayo 2008 hasta su estreno en octubre de 2009, en España se han publicado al menos 8 novelas y ensayos sobre Hipatia, además de docenas de artículos en prensa. Y es que su figura ejerce especial seducción desde varios puntos de vista:

- Como precursora de las mujeres científicas[9].
- Como heroína que se mantuvo firme frente al fundamentalismo.
- Como símbolo del esplendor clásico y la cultura helenística, postergada después por muchos siglos.

Por eso no es de extrañar que haya sido utilizada en apoyo de cada causa, a veces adornando la historia con datos no documentados. Y tampoco lo es que los herederos intelectuales (es un decir) del patriarca Cirilo que habitan en la España del siglo XXI se hayan apresurado a denigrar la película, incluso semanas antes de su estreno.

Vida y muerte

En una semblanza biográfica sucinta de Hipatia hay que destacar que su padre, el filósofo y matemático Teón, quiso educarla desde pequeña como un "ser humano perfecto", adiestrándola en el ejercicio físico e intelectual; algo inusual en una época, que en este aspecto había de durar tantos siglos, en que las mujeres estaban relegadas al cuidado del hogar. Según su biógrafo Sócrates Escolástico (s. IV–V):

> la belleza, inteligencia y talento de esta gran mujer fueron legendarios, superó a su padre en todos los campos del saber, especialmente en la observación de los astros.

Se formó como científica en el Museo, institución para la investigación y la enseñanza dirigida por Teón que albergaba la Academia y la Biblioteca del Serapeo, sucesora de la Gran Biblioteca de Alejandría devastada a finales del s. III. Hipatia formó parte del Museo hasta su muerte, llegando incluso a dirigirlo alrededor del año 400. Se mantuvo célibe para conservar su libertad y dedicarse íntegramente al estudio. Dice el mismo cronista:

> Heredera de la escuela neoplatónica de Plotino, explicaba todas las ciencias filosóficas a quien lo deseara. Con este motivo, quien deseaba pensar filosóficamente iba desde cualquier lugar hasta donde ella se encontraba... pero además de saber filosofía era también una incansable trabajadora de las ciencias matemáticas

Su saber también llegaba al ámbito práctico: en una carta de su discípulo Sinesio, obispo de Cirene, éste le pedía consejos para la construcción de un densímetro y un astrolabio.
Aunque se han perdido sus escritos, se le atribuyen frases como ésta:

> Defiende tu derecho a pensar, porque incluso pensar de forma errónea es mejor que no pensar

Los cristianos habían pasado de perseguidos a perseguidores. En el año 380, Teodosio el Grande había proclamado al Catolicismo como única religión oficial del Imperio Romano, mediante el Edicto de Tesalónica. En 391, año en que se sitúa la acción de la película, dictó un decreto de prohibición del paganismo en Egipto, instigado por el patriarca de Alejandría Teófilo.

Teófilo identificaba la sabiduría del Museo y su biblioteca con el paganismo y se propuso erradicarla. En 391 promovió una revuelta en la que fue arrasada la Biblioteca del Serapeo, en cuyo solar erigió una iglesia dedicada a San Juan Bautista. Amenábar nos muestra literalmente, con la imagen invertida de los pergaminos por el aire, cómo se dio al mundo un giro de 180º. Se registraron enfrentamientos sangrientos. Algunos académicos abrazaron el Cristianismo por conveniencia. Hipatia continuó impartiendo sus enseñanzas y vistiendo la túnica de los filósofos.

En 412, a la muerte de Teófilo, le sucedió en la sede alejandrina su sobrino Cirilo (después San Cirilo, Padre de la Iglesia), quien pronto mostró una intransigencia superior a la de su predecesor, expulsando a judíos y novacianos (cristianos "herejes"). Se sabe que tenía una guardia personal de 500 monjes, los parabolanos.

Cirilo mantuvo una lucha política con el prefecto Orestes por detentar el poder en Alejandría. Orestes también era cristiano, pero de talante moderado: asistía a las clases de Hipatia y esa influencia la condenó, pues Cirilo la veía como un obstáculo para sus pretensiones. En 415 ó 416, sus exaltados seguidores asesinaron a Hipatia. De su muerte brutal escribe el citado Sócrates Escolástico, historiador griego de la iglesia cristiana:

> Algunos de ellos [los cristianos], cuyo cabecilla era un lector llamado Pedro, corrieron a toda prisa empujados por un ardor salvaje y fanático, la asaltaron cuando ella volvía a casa, la sacaron de su carro y la llevaron a la iglesia llamada de Cesarión, donde la desnudaron completamente y la mataron con escombros de cerámica[10]. Después de descuartizar su cuerpo, llevaron sus trozos al Cinarión, y allí los quemaron. Este asunto constituyó un gran oprobio, no sólo para [el patriarca] Cirilo sino para el conjunto de la Iglesia Alejandrina

Hay quienes descalifican *Ágora* por su intención ideológica y supuestamente manipuladora, dicen, de los hechos. Insisten para ello en presentar la muerte de Hipatia como un episodio más de la pugna entre Cirilo y Orestes, queriendo quitarle la carga simbólica que ha alcanzado con el paso de los siglos. Pero esa pugna no era una enemistad personal y anecdótica, sino plasmación del permanente intento del poder religioso por controlar al poder civil. Los administradores de la verdad única y revelada no consintieron que el gobernador tuviera oídos para el pensamiento libre ¡de una mujer![11]. Lo cual, lejos de invalidar el mensaje de *Ágora*, contribuye a reafirmar su pertinencia.

Los hechos narrados en la película transcurren, según cronologías, con Hipatia en el intervalo de edad (21, 45) ó (36, 61). Rachel Weisz rodó la película con 38 años. Así que la crítica puntillista sobre falta de correspondencia entre dichas edades, sólo es admisible en el sentido de que tal vez Hipatia no envejece lo suficiente en la película. Parece un asunto menor.

Sin concesiones que le distraigan de las ideas principales que quiere expresar, Amenábar se aleja del sexo y de la violencia. Lo primero era más fácil, sabiendo que Hipatia fue virgen por decisión propia. Lo segundo era más complicado en una historia turbulenta. Cuando llegan los hechos sangrientos, la cámara sobrevuela la acción, sin recrearse en detalles, sobre las hordas violentas que, a cámara rápida, recuerdan un activo hormiguero.

La matemática

Pero centrémonos en la faceta matemática de Hipatia[12]. Se le atribuyen cuatro obras, hoy desaparecidas, todas ellas entorno a los trabajos de anteriores matemáticos alejandrinos: unos comentarios a la *Arithmetica* de Diofanto (s. III) en 13 libros, un tratado de divulgación de *Las Cónicas* de Apolonio de Perga (s. III a.C.) en 8 libros, un comentario al libro III del *Almagesto* de Claudio Tolomeo (s. II) y un *Canon Astronómico*. Además, junto a su padre escribió un tratado sobre la obra de Euclides (s. III a.C.).

Según la *Suda*, enciclopedia bizantina del s. X, en el comentario a la obra de Diofanto mostraba que la aritmética es más que cálculo e incluía nuevos problemas y soluciones que fueron incorporadas a los manuscritos originales. Otra aportación suya fue demostrar la generalidad e indeterminación del problema de las ecuaciones diofánticas por sustitución de valores numéricos desconocidos que no están relacionados y que no son múltiplos, potencias, raíces cuadradas o fracciones de los originales.

El texto de Hipatia sobre *Las Cónicas* de Apolonio era una vulgarización del mismo con fines didácticos. Con su muerte, las secciones cónicas cayeron en el olvido hasta el siglo XVII en que fueron retomadas por Desargues (1595 – 1662) y Pascal (1623 – 1662).

Teón había titulado una de sus obras: *Comentario de Teón de Alejandría al tercer libro del Sistema Matemático de Tolomeo. Edición controlada por la filósofa Hipatia, mi hija*. Parece ser que, como resultado de su crítica matemática a la obra de Tolomeo, Hipatia mantuvo la tesis del heliocentrismo frente al geocentrismo tolemaico. Volvió a calcular las tablas de valores para los movimientos de los astros que había descrito Tolomeo y fruto de ello escribió el *Canon Astronómico*.

Hipatia fue heredera y continuadora de una gran tradición matemática. Según Carl G. Boyer:

> No ha habido nunca otra ciudad que haya sido el centro de la actividad matemática durante un período tan largo como lo fue Alejandría desde los días de Euclides (hacia el 300 a.C.) hasta la muerte de Hipatia (hacia el 415)[13].

Para algunos historiadores este hecho trágico marca el final de una época, el final de la Matemática antigua; pero no así de la tradición helénica, que en otros ámbitos aún se extiende hasta el s. VI.

¿Qué hay de todo esto en *Ágora*?... mucho, para lo que antes nos había ofrecido el Cine. Amenábar rinde un espléndido tributo a la ciencia antigua, que como docentes podemos aprovechar.

Para la clase

Éstas son las escenas, hasta 13, con algún contenido de ciencia, donde la Geometría aparece en relación con la Física y la Astronomía y la Lógica se aplica a cuestiones morales. Por orden de aparición:

– En clase, pegunta Hipatia: *¿Por qué no caen las estrellas del cielo? Porque están en un círculo. ¿Por qué si el círculo es la línea más perfecta, aquí en la Tierra el movimiento de caída es recto? ¿Qué prodigio se esconde bajo el suelo?* Los alumnos dan respuestas y la maestra concluye: *El centro sujeta todas las cosas y las atrae.*

– Padre e hija están cotejando sus datos y dice Hipatia a Teón: *¿Cómo llegas a 16 partiendo de 227? Son 14.* Cabe suponer que están hablando de alguna observación estelar.

– Hipatia pregunta a su esclavo Davo, que acaba de hacer ante Teón profesión de su cristianismo: *¿Eres cristiano?* Davo se ve en un dilema lógico y moral. Evita dar la respuesta directa, aunque la deja clara, con este enunciado-acertijo: *Si digo que sí te estaría mintiendo. Si dijera que no, habría mentido a mi amo.* Hipatia le responde: *En tal caso, será mejor que calles.*

– Davo presenta ante sus compañeros de clase una maqueta del sistema solar según Tolomeo, con los círculos epiciclos y los deferentes[14]. Orestes comenta: *Los dioses deberían haberme consultado. ¿Por qué dos círculos? ¿No sería mejor uno?* Este comentario parafrasea al que hiciera Alfonso X El Sabio (1221 – 1284) al modelo tolemaico: *Si el Señor Todopoderoso me hubiera consultado antes de embarcarse en la Creación, le habría recomendado algo más simple*. Más tarde, dirá Orestes: *Tolomeo no es perfecto, pero funciona.*

– Por dos veces, Hipatia cita el Axioma I de los *Elementos* de Euclides: *Si dos cosas son iguales a una tercera, las tres son iguales entre sí.* Lo hace para persuadir a sus alumnos sobre la convivencia y la tolerancia, desde la Lógica*: Muchas veces os he enseñado que sois iguales a mí, luego lo sois entre vosotros. Somos hermanos. Pase lo que pase, no debéis enfrentaros.*

– El monje Amonio, líder de los parabolanos, deslumbra a la multitud con un supuesto milagro: camina sobre las brasas sin quemarse, protegido –dice- por su dios. Amenábar no da la explicación con palabras, pero la da con imágenes al mostrar en un primer plano los pies de Amonio pisando con rapidez y decisión los rescoldos. La explicación es bien conocida hace tiempo: por una parte, la madera es muy mal conductor; por otra, al pisar con fuerza se expulsa el oxígeno bajo la planta de los pies, evitando la combustión durante los instantes en que la piel toca a las brasas. Si por indecisión o miedo se descoordinan los movimientos, o no se pisa con energía, entonces se produce la quemadura. Cada año, en la noche de San Juan, el "milagro" se repite en las Fiestas de San Pedro Manrique (Soria).

– De nuevo en clase, Hipatia recuerda: *Y éstas son las secciones del cono: el círculo, la parábola, la hipérbola y la elipse.* Es interrumpida por el anuncio de los graves hechos que se avecinan.

– En la noche estrellada, rodeada de discípulos y filósofos, Hipatia alza la vista y dice: *Tolomeo describe un mecanismo celeste caprichoso. Los cielos tiene que ser simples. ¿Y si hubiera una explicación más sencilla para las errantes?* Se refiere al movimiento aparentemente errático de algunos planetas que, observado desde la Tierra presenta extraños retrocesos. Por ello, los antiguos egipcios llamaban a Marte *el que viaja hacia atrás*. El modelo de Tolomeo había surgido para explicar ese fenómeno. Un filósofo recuerda que Aristarco de Samos (310 a.C. – 230 a.C.) había propuesto otro modelo, donde la Tierra giraba entorno al Sol, pero se había perdido en la anterior destrucción de la Gran Biblioteca. Hipatia concluye: *¿Veis? Debemos proteger esta biblioteca a cualquier precio.* Dijo Carl Sagan (1934 – 1996): *Si no se hubiera perdido la Biblioteca de Alejandría, hoy tendríamos bases en Marte.*

– Navegando en un barco, el esclavo Sinesio subido al palo mayor sostiene un saco. Hipatia a Orestes: *Cuando arroje el saco, la nave avanza. ¿Dónde caerá el saco?.* El esclavo lo arroja e Hipatia clama: *¡La prueba definitiva! El saco se comporta como si el barco estuviera quieto. ¡La Tierra, igual con el Sol!.*

– Hipatia traza un gran círculo sobre la arena: *¿Por qué las errantes varían tan inesperadamente? ¿Por qué el Sol cambia su tamaño? Si aceptamos que la Tierra traza un círculo alrededor del Sol, no cambiaría de tamaño, estaría siempre a la misma distancia".*

– En el gabinete de Hipatia vemos un *Cono de Apolonio*, bello modelo en madera. Lo desmonta y van apareciendo las cuatro secciones cónicas.

– Orestes: *Mira a tu alrededor: muerte, odio, dolor. Si los astros se mueven en círculos, ¿por qué no comparten esa* *perfección con nosotros?* Hipatia reacciona: *No nos movemos en círculo. ¿Y si otra curva se oculta en los cielos? La pereza del círculo nos ha impedido ver más allá. Tengo que reconsiderarlo todo.*

– De nuevo sobre la arena, Hipatia razona con Sinesio sobre la variación de la distancia al Sol y, al mismo tiempo, la permanencia de una constante que liga a la Tierra en rededor suyo. Mira el *Cono de Apolonio* e intuye las órbitas elípticas. Fijando una cuerda a dos antorchas hincadas en la arena, hace el clásico trazado de la elipse como lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos focos es constante. Gozosa por el descubrimiento dice*: ¡No es un círculo, es una elipse! El círculo es una elipse muy especial, cuyos focos se han confundido en uno solo.* La escena concluye con cámara cenital sobre Hipatia y la gran elipse. También la elipse será su última visión, cuando alce la vista antes de ser asesinada.

El descubrimiento por Hipatia de las órbitas elípticas, once siglos antes de Kepler, no está documentado. No se sabe, pero era posible. Conocía las posiciones de los planetas, la tesis heliocéntrica y las propiedades de las cónicas. Puede parecer un atrevimiento, pero se plasma con objeto de recrear y ensalzar el pensamiento científico en una escena memorable.

Siguiendo con la propuesta didáctica de artículos anteriores, pensamos que con esas escenas se pueden componer unos pasajes muy útiles y atractivos para el aula. Podemos utilizarlos en el tema de Cónicas, con un sentido interdisciplinar que alcanza a la Astronomía, a la Física y a la Historia.

Una superproducción estrenada en 470 salas de toda España concede protagonismo principal a la pasión por el conocimiento, al razonamiento astronómico y geométrico, a la honestidad científica y al fulgor del descubrimiento. Es algo del todo inusual entre tanta trivialidad mediática, algo digno de ser celebrado.

Terminamos señalando otra coincidencia entre las dos películas reseñadas. Ambas utilizan repetidamente el zoom en picado que comienza en el espacio exterior y, tras penetrar en la atmósfera terrestre, aterriza en el lugar y momento de la acción. Este recuso visual y narrativo se usa para poner la historia “en su sitio”, relativizándola en la inmensidad cósmica. Recuerda al famoso video didáctico *Potencias de diez* (Charles y Ray Eames para IBM. 1977) y su uso en el cine comercial cuenta con varios precedentes[15].

CineMATeca

NOTAS

1 Los historiadores no se ponen de acuerdo sobre las fechas de su nacimiento, 355 ó 370; ni tampoco de su muerte, 415 ó 416.

2 Se pueden consultar más detalles sobre dichas películas en: *Las Matemáticas en el Cine* de Alfonso Jesús Población Sáez. Proyecto Sur – RSME. Granada. 2006.

3 En esto, el guión respeta a la novela en que se basa: *¿Sueñan los androides con ovejas mecánicas?* (Do Androids Dream of Electric Sheep? 1968) de Philip K. Dick (1928 – 1982), publicado en España por Edhasa (2000). El test de detección de androides es analizado desde el punto de vista de la probabilidad en el artículo *Blade Runner, el ‘factor humano’ y la fórmula de Bayes* de Rosario Delgado de la Torre. Revista MAT^2 (MAterials MAtemátics) Volumen 2006, trabajo nº 7 (www.mat.uab.cat/matmat)

4 Precisamente en la otra cima del cine de ciencia-ficción, *2001 Una odisea del espacio* (Stanley Kubrick. 1968), uno de los protagonistas es el ordenador inteligente HAL 9000, del que dice en la novela de referencia su autor, Arthur C. Clarke (1917 - 2008): *Pasaría con facilidad el Test de Turing*. En la película se dice algo equivalente: *Al hablar con el computador, uno tiene la sensación de que es capaz de sentir emociones*.

5 Se ha intentado hacer justicia póstuma a este genio que, mereciendo ser considerado un héroe por su contribución capital a la victoria de los Aliados, fue sin embargo represaliado en la postguerra por su condición homosexual, algo que precipitó su muerte. Una campaña de envío de firmas consiguió en pocas semanas reunir más de 30.000 y que el Primer Ministro Gordon Brown pidiera disculpas en su web oficial por el “trato inhumano” que recibió Turing de las autoridades de la época. *En nombre del gobierno británico, y de aquellos que viven libremente gracias al trabajo de Alan, estoy orgulloso de decir: lo sentimos, te merecías algo mucho mejor* dijo Brown en su comunicado de 10-09-09.

6 Sobre esto mismo, se dice en *21 gramos* (Alejandro González Iñárritu, 2003), otra película reciente de director también mejicano (coincidencia sobre coincidencia): *Tienen que ocurrir tantas cosas para que dos personas se conozcan… En el fondo, eso son las Matemáticas*.

7 Enlaces en Youtube.-
Títulos de crédito: http://www.youtube.com/watch?v=NrUDzxFKPBI
Trailer: http://www.youtube.com/watch?v=aryVflv41X4

8 Enlaces en Youtube.-
Trailer: http://www.youtube.com/watch?v=dYgwR7QCBZc
Escena en la escuela: http://www.youtube.com/watch?v=lrHAL063OBU

9 Aunque Hipatia no es la primera matemática de quien se tiene noticia. En el s. VI a.C. Téano formó parte de la Escuela Pitagórica.

10 Con conchas de ostras, según otros. Nos hacemos eco de la traducción publicada por Ángel Requena Fraile en *El irresistible hechizo de Hipatia de Alejandría*. Suma nº 47, pp. 112 a 114.

11 Escribía San Pablo: *La mujer que escuche la enseñanza, quieta y con docilidad. A la mujer no le consiento enseñar ni arrogarse autoridad sobre el varón, sino que ha de estarse tranquila en su casa* (1ª epístola a Timoteo 2,12). *Y si quieren aprender alguna cosa, pregunten en casa a sus maridos; porque deshonesta cosa es hablar una mujer en la congregación*. (1ª epístola a los Corintios 14,34). Palabras que en *Ágora* lee Cirilo para comprometer a Orestes.

12 Ver el documentado artículo sobre Hipatia publicado en el portal Divulgamat (www.divulgamat.net) por María Molero Aparicio y Adela Salvador Alcalde.

13 *Historia de la Matemática*. Carl G. Boyer. Alianza Editorial. Madrid 1986.

14 Es significativa la evolución de este personaje. Tras alistarse en los parabolanos, en la devastación de la Biblioteca encuentra y destruye su propia maqueta. Cuando sus compañeros de armas discuten si el Universo es una gran arca o si la Tierra es plana, le piden su opinión y responde: *Sólo Dios sabe esas cosas*.

15 Dos ejemplos en clave de humor: en una de las entradillas de *Los Simpsons* el viaje empieza y termina en Homer y familia ante la T.V; y también, el final de *Hombres de negro* (*Men in black*. Barry Sonnenfeld. 1997) donde el recorrido es al revés y nuestro universo resulta ser una más entre las canicas con las que juega un alienígena.
Enlaces en Youtube.-
Potencias de diez: http://www.youtube.com/watch?v=Kpjyfo_7Klg
Men in black: http://www.youtube.com/watch?v=1QPll-TKaEE

El Proyecto Klein

International
Mathematical
Union

International
Commission on
Mathematical
Instruction

Instituciones promotoras

La Unión Matemática Internacional (IMU, ver http://www.mathunion.org/) es una organización internacional científica, no gubernamental y sin ánimo de lucro, creada hace 90 años y encuadrada en la ICSU (International Council for Science). La mayoría de los países[1] tienen un representante ante la IMU. Por ejemplo, España esta representada en IMU a través del Comité Español de Matemáticas (CEMAT, ver http://www.ce-mat.org/).

La Unión Matemática Internacional, entre otras actividades de pública notoriedad, organiza cada cuatro años el Congreso Internacional de Matemáticos (el último, en Madrid 2006) y otorga, durante el mismo, las Medallas Fields, equivalentes a los Premios Nobel en matemáticas (nótese que no existe Nobel en la categoría de matemáticas).

La Comisión Internacional para la Enseñanza de las Matemáticas (ICMI, ver http://www.mathunion.org/icmi) es el órgano de IMU encargado de los temas relacionados con la enseñanza de las matemáticas en los distintos niveles educativos. Su primer presidente y fundador fue el eminente matemático alemán Felix Klein[2] (1849-1925). ICMI organiza cada cuatro años un congreso internacional de educación matemática (ICME), como el celebrado en Sevilla en 1996. En España, por ejemplo, la representación ante ICMI se estructura a través de una subcomisión del CEMAT, (ver http://www.ce-mat.org/educ/educ.htm) siguiendo el modelo IMU/ICMI.

La obra de Klein

Hace cien años, en 1908, el catedrático de la Universidad de Göttingen, prof. Félix Klein, publicaba una obra magistral, titulada *Matemática elemental desde un punto de vista superior,* con la declarada intención de contribuir a la mejora de la enseñanza de las matemáticas en Alemania, mostrando la repercusión, en la consideración de los objetos matemáticos de la enseñanza no universitaria, de los avances de esta disciplina a lo largo del siglo XIX.

La obra de Klein marcó, en muchos sentidos, un hito. Se pueden mencionar las múltiples traducciones (la más antigua en castellano que conocemos, la emprendida por el precursor del CSIC en 1927, que se encuentra en vías de digitalización en este momento) y ediciones de la misma –dos recientes: en castellano, la de la editorial Nivola[3], en el año 2006, o la de la popular editorial Dover, en 2004, en inglés. Pero, sobre todo,

Tomás Recio
Universidad de Cantabria

constituye una de esas raras ocasiones en las que un investigador de primera fila escribe una obra específicamente dirigida a facilitar a los profesores de secundaria una visión estimulante y viva sobre el contenido del currículo.

Félix Klein trataba de remedar, en su obra, la falta de conexión –"…desde principios del siglo XIX…"— entre la enseñanza de las matemáticas no universitarias y los resultados de la investigación. Pero han pasado otros cien años desde 1908 y a lo largo del siglo XX las matemáticas han soportado una crisis de fundamentos, se han abierto, con el advenimiento de los computadores, a nuevos ámbitos de actividad, han logrado resolver problemas centenarios… Distintas ramas de las matemáticas, como la Estadística y la Investigación Operativa, han surgido (y otras han desaparecido en la práctica) en este periodo, así como nuevos e inimaginables –hace cien años— ámbitos de aplicación…

El Proyecto Klein

El *Proyecto Klein* es una iniciativa conjunta de IMU/ICMI para desarrollar una versión actualizada (en la forma y en el fondo) del hito que supuso la publicación, en 1908, del libro de F. Klein *Matemática Elemental desde un punto de vista superior*.

Se trata de producir, a lo largo de cuatro años, una serie de materiales de diversa naturaleza (libros; recursos de Internet: wikis, foros, portales; audiovisuales, etc.), para profesores de secundaria, que ayuden a trasmitir la amplitud y vitalidad que la investigación matemática ha alcanzado a lo largo del siglo XX, conectándola con el currículo de la enseñanza secundaria. Se persigue, en definitiva, acercar al currículo escolar los múltiples —y en muchos casos, insospechados— ámbitos de presencia de las matemáticas en la sociedad actual, alcanzados gracias a la investigación desarrollada durante los últimos cien años y que, por tanto, no pudieron ser reflejados en la obra original de Klein. El acuerdo de IMU/ICMI contempla la edición de los distintos materiales en alemán, chino mandarían, español, francés e inglés, al menos.

El carácter universal (destinado a todos los profesores de secundaria del mundo) y enciclopédico (abarcando todas las ramas de la matemática) del objetivo marcado para el proyecto Klein exigirá recabar múltiples colaboraciones y patrocinios y, también, lograr la implicación de investigadores y docentes de diversas especialidades y niveles educativos. Entre otras acciones está prevista la organización de una serie de "Conferencias Klein" para facilitar la difusión del proyecto y la participación en el mismo de distintos colectivos.

La Comisión Klein

Tras la aprobación del proyecto por los comités ejecutivos de ICMI e IMU en marzo y abril de 2008[4], respectivamente, se ha procedido a constituir la comisión que ha de diseñar y llevar a término, en los próximos cuatro años, dicho proyecto, formada por ocho personas, cuatro propuestas por el comité ejecutivo ICMI, cuatro por el comité ejecutivo IMU, con un coordinador —W. Barton, del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Auckland, Nueva Zelanda— consensuado por ambas partes.

La Comisión Klein está constituida en la actualidad por los profesores

- Michèle Artigue, Universidad de Paris VII, Francia.
- Ferdinando Arzarello, University de Turín, Italia.
- Graeme Cohen, Universidad Tecnológica, Sydney, Australia.
- William McCallum, Universidad de Arizona, USA.
- Tomás Recio, Universidad de Cantabria, España.
- Christiane Rousseau, Universidad de Montreal, Canadá.
- Hans-Georg Weigand, Universidad de Wurzburg, Alemania

Se estima que la comisión mantendrá un par de reuniones anuales, y que organizará dos o tres conferencias para recabar ideas y/o difundir la marcha de sus trabajos. Además la comisión distribuirá sus miembros en algunas subcomisiones creadas para atender diversos aspectos concretos (creación de una serie de DVD's, desarrollo de una wiki, etc.) del trabajo. Dichas subcomisiones deberán, también, establecer un calendario de reuniones.

Llamada a la participación. Primer comunicado de la Comisión Klein.

La primera reunión de esta comisión, recientemente convocada, ha tenido lugar a finales del pasado mes de mayo, en Paris. En la misma se aprobó la difusión de un texto común, difundiendo el proyecto y convocando a la participación en el mismo, que traducimos en los siguientes términos:

El proyecto Klein

En el año 2008, IMU e ICMI aprobaron la puesta en marcha de un proyecto para revisar la obra de Felix Klein "Matemática Elemental desde un punto de vista superior". Se trata de la elaboración de un libro, dirigido a profesores de enseñanza secundaria, que fuese capaz de trasmitir la amplitud y vitalidad que la investigación matemática ha alcanzado a lo largo del siglo XX, conectándola con el currículo de la enseñanza secundaria.

El equipo internacional que ha de diseñar este proyecto, la llamada Comisión Klein, se ha reunido recientemente por primera vez. La Comisión aprobó la realización de un libro de cerca de 300 páginas, con el objetivo de inspirar a los profesores de secundaria en la tarea de acercar a sus estudiantes a un panorama más completo sobre el creciente y complejo papel de las matemáticas en el mundo de hoy. Ese libro estaría acompañado por diversos recursos audiovisuales y web. La duración estimada del proyecto es de cuatro años.

El libro no pretende ser enciclopédico ni la última palabra en cada campo, pero con independencia de la estructura que finalmente se adopte en cada uno de sus capítulos, el texto tratará de enfatizar las conexiones entre las diversas ramas de las matemáticas y ciertos temas genéricos (como el impacto de los ordenadores). No habrá un capítulo dedicado específicamente a la didáctica de las matemáticas, pero su presencia se hará notar implícitamente en muchas ocasiones.

La Comisión Klein quiere recabar la participación activa de todos aquellos que trabajan alrededor de las matemáticas, ya sean investigadores o docentes, en este proyecto que acaba de comenzar. Además de estar abierta a la recepción de comentarios por escrito, la Comisión planea organizar diversas "Conferencias Klein" en diversos lugares del mundo, donde espera recabar sugerencias y percibir la reacción de los asistentes a las mismas sobre los materiales, en fase de desarrollo y consulta, que presente. La redacción final del libro correrá a cargo de autores invitados, de probada capacidad narrativa y divulgadora.

Por ello invitamos a cualquiera que desee seguir informado sobre el desarrollo del proyecto y recibir los distintos borradores que se vayan generando, a enviar un correo electrónico a la dirección (provisional) (b.barton@auckland.ac.nz). Un portal web sobre el proyecto se encuentra en vías de construcción.

En este contexto, la Comisión quiere invitar ahora a enviar comentarios sobre la siguiente elección de títulos para los capítulos del libro:

- Introducción

- Capítulos temáticos
  - Aritmética
  - Lógica
  - Algebra y Estructuras
  - Geometría
  - Funciones y Análisis
  - Matemática Discreta y Algorítmica
  - Matemáticas de la Computación
  - Probablidad y Estadística

- Capítulos misceláneos
  - Intradisciplinariedad (esto es, conexiones internas)
  - Las matemáticas como disciplina viva en la ciencia y la sociedad
  - ¿Cómo trabajan los matemáticos?

NOTAS

1 Ver la relación de países miembros de IMU en http://www.mathunion.org/members/countries/list/sorted-by-names/

2 Una breve reseña histórica aparece en http://www.gap-system.org/%7Ehistory/Biographies/Klein.html

3 F. Klein: *Matemática elemental desde un punto de vista superior*. Traducción al español de Jesús Fernández. Nivola, Madrid. (2006).

4 http://mathstore.gla.ac.uk/headocs/doc.php?doc=84Barton_B.pdf

suma+ 62
Noviembre 2009, pp.127-134

La corona de Tanit

Diosa alada,
Tus brazos horizontales
Límite separador
Arriba el supramundo
El inframundo debajo
Ego, yo y superyó
Tierra, horizonte y cielo.
El cielo, creciente la Luna sobre el lucero,
Llora lágrimas de primavera
Para el triángulo fértil de la madre tierra

Tanit, diosa púnica e ibera, es considerada la heredera de las Venus neolíticas y diosas de oriente. Está representada en el firmamento por la constelación de Virgo y su estrella Spica (espiga) símbolo de prosperidad en el mundo agrícola primitivo.

En el pensamiento mágico primitivo surge la necesidad de controlar esas fuerzas enigmáticas e incuestionables, la de la fertilidad-fecundidad-maternidad y las que producen la lluvia, el rayo, el viento, las enfermedades y la muerte. No es extraño pues, que acaben todas juntas en el cielo.

Tanit es la diosa de la fertilidad, de la prosperidad y abundancia, de la fecundidad, de la maternidad, es protectora de los niños, diosa celeste cuya preñez está representada por el creciente lunar y cuyos partos dan a luz, cada día, a la estrella matutina Venus y cada primavera a la nueva vida.

Esta divinidad y sus homólogas nacen del asombro que produce en la humanidad la reproducción de la vida: "…aquellos hombres que constataban la enigmática e incuestionable capacidad de generar vida de las mujeres, las hembras de todos los animales, las plantas y la tierra[1]".

Con la patriarcalización, los ciclos de la vida y de la muerte, con sus asociados, el placer y el dolor, pasan a ser regidos por Dioniso, esposo de Ariadna.

Xaro Nomdedeu Moreno
Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi"
ariadna@revistasuma.es

Venus de Scheklingen (Alemania -40.000 años)

Hator, representada con orejas y cuernos de vaca, entre los cuales mostraba un disco solar

Dioniso y Ariadna (Grecia, periodo helenístico)

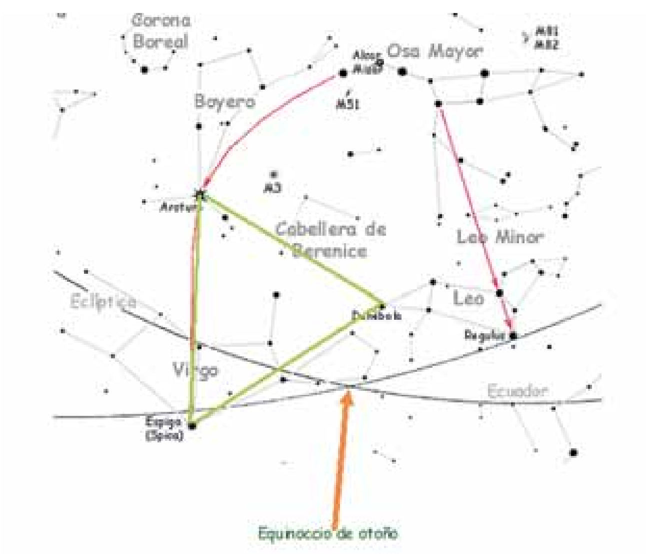
En el gráfico a pie de página, a la izquierda, la flecha roja señala el equinoccio de otoño, intersección del ecuador celeste con la eclíptica, punto imaginario situado entre Spica y Régulus, respectivas estrellas alfa de Virgo y Leo, constelaciones típicas del cielo de primavera.

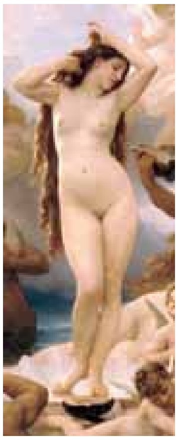
Si en otoño hubiera un eclipse total de Sol visible en nuestras latitudes, podríamos ver esta región del cielo como fondo de la escena del eclipse, fondo que queda oculto por el brillo solar durante las horas diurnas de cualquier día corriente. Sin embargo, por la noche vemos un fondo estrellado que se encuentra en posiciones diametralmente opuestas a las anteriores.

Nada más ponerse el Sol, podemos ver un gran triángulo formado por las estrellas: Vega, Deneb y Altair, el triángulo rectángulo típico de las noches estivales. A lo largo de la noche se enseñorean del cielo las constelaciones más representativas del otoño: Pegaso, Andrómeda, Perseo, Casiopea, Cefeo y Ceto.

Hoy, Tanit-Virgo rige precisamente el cielo de primavera: Spica, junto a Denébola y Arturo forma parte de un triángulo equilátero bien visible en las noches de esa estación, aunque resulta más cómodo de observar durante las primeras horas de la noche en la estación veraniega, en las que podemos ver simultáneamente el triángulo del verano hacia el N-E y el de primavera hacia el S-O, las estrellas circumpolares hacia el Norte y las del zodíaco hacia el Sur.

En el grabado inferior se distinguen: arriba, en el cielo, los tres astros que podemos ver juntos en el cielo diurno (el Sol, la Luna y Venus); abajo la diosa Tanit, regente de los ciclos de la vida y de la muerte.





Venus, versión romana de la Afrodita griega

Baco y Ceres (Roma)

Ceres y las espigas

Virgo

Su nombre, empieza por la T/Tau, de [TA(U)-RUS]. Letra griega que recuerda al de la diosa vaca, tótem primitivo vinculado a los ritos mágicos de la fertilidad.

Tanit es, por tanto, la Madre Tierra. Madre de los árboles que renacen cada primavera tras su muerte invernal, renacimiento infinito que se representa con el símbolo de una serpiente que se muerde la cola, animal cuyo cambio de piel y letargo invernal, la vinculan al eterno renacimiento.

Los ciclos de vida y muerte han provocado siempre preguntas, problemas, a los que se han dado, en un principio, respuestas mágicas, luego religiosas, más tarde metafísicas. Hoy la ciencia, dispone de un método que, poco a poco, encuentra respuestas que pasan así del ámbito metafísico al suyo propio. Las matemáticas son el contexto simbólico en el que tiene lugar este proceso.

Problemas propuestos

En este número no propondremos problemas, ya que la extensión de las soluciones a los propuestos anteriormente, nos obliga a publicarlos en dos números, éste y el siguiente.

Sin embargo, sí que vamos a exponer algunos comentarios a los problemas del número anterior. José María Barja, Rector de la Universidad de La Coruña y Catedrático de Álgebra de dicha Universidad, experto en aritmética modular, envió una nota a la dirección de esta sección, donde puntualizaba algunos detalles de la resolución aportada por Daniel Gozalbo, Catedrático de Matemáticas del IES *Sos Baynat* de Castellón y creador y propulsor del Planetario de Castellón en su etapa como alcalde de dicha ciudad.

Tras un interesante intercambio de correos, la solución al problema del calendario, propuesta en el número anterior, ha quedado enriquecida del siguiente modo.

Un calendario está determinado por dos datos: el día de la semana en que comienza el año y si éste es, o no, bisiesto. Por lo tanto, sólo hay 14 calendarios distintos. Si no hubiera bisiestos, habría sólo 7 calendarios distintos, frente a una multitud de almanaques, ya que éstos difieren entre sí, no sólo por el tipo de año y el día de la semana en que comienza el año, sino también por las diversas efemérides astronómicas que constatan en sus páginas, además de otras informaciones interesantes para determinado tipo de público.

La combinación del ciclo semanal y el ciclo de bisiestos produce un ciclo de $7 \times 4 = 28$ años, tras los cuales vuelve a repetirse la misma secuencia de calendarios.

El calendario de cada año común que sigue a un bisiesto que empieza en lunes, se repite siguiendo un ciclo de 6 – 11 – 11 años como puede observarse en la tabla siguiente:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
1	3	4	5	6	1	2	3	4	6	7	1	2	4	5	6	7	2	3	4	5	7	1	2	3	5	6	7

La segunda fila indica si el año es bisiesto o no, y la tercera fila indica el número del dia de la semana del 1 de enero.

Pero conviene advertir que, si existe alguna alteración en la secuencia de bisiestos, automáticamente se alterará la cadencia de los calendarios. Y ello sucede en los años centenarios que no sean múltiplos de 400, ya que éstos no son bisiestos.

No hay alteración en aquellos que por ser divisibles por 400, sí son bisiestos, así fue el caso del año 2000 o como lo será el 2400.

1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
1	3	4	5	6	1	2	3	4	6	7	1	2	4	5	6	7	2	3	4	5	7	1	2	3	5	6	7
2000																											

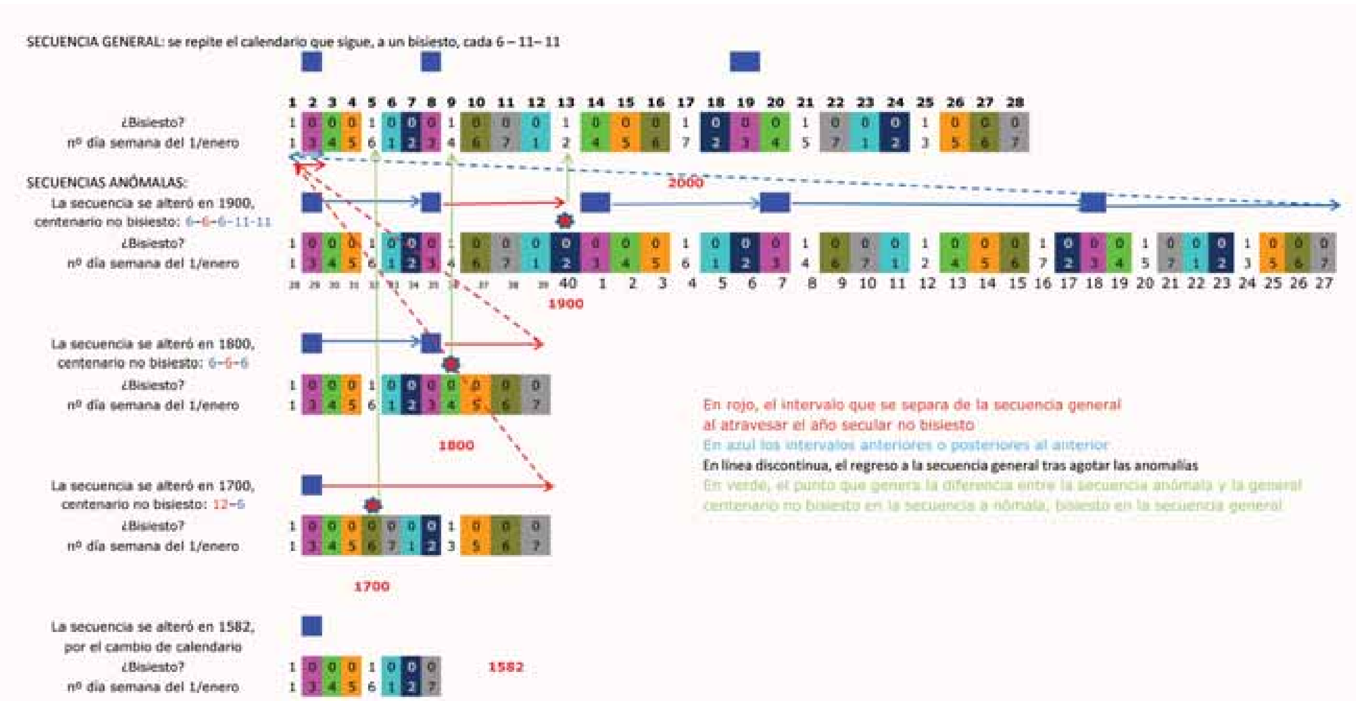
En la tabla que se muestra a continuación podemos observar cómo, la presencia de un año secular no bisiesto, altera el orden general 6, 11, 11, en los años que siguen a ese año no bisiesto anormal, hasta que se retoma de nuevo el ciclo y se vuelve a alterar tras el siguiente año centenario que no es múltiplo de 400.

Una celebración vinculada a los cambios de estos ciclos es la del Año Santo Compostelano, que se celebra cuando la fiesta del Apóstol Santiago (25 de julio) coincide en domingo. Por la incidencia de los años bisiestos la frecuencia de los Años Santos Compostelanos sigue la secuencia: 6, 5, 6, 11. Presuntamente, en el año 1122 el papa Calixto II establece el primer año jubilar, pero hay algunos historiadores que ponen en duda este dato, pues el privilegio sería incluso anterior al Año Santo Romano. El actual obispo compostelano la retrasa al año 1179, fecha de la Bula "Regis aeterni", en la cual el papa Alejandro III confiere carácter perpetuo a esta celebración, cuya primera vez sería en 1182.

El último año Santo fue el 2004 y el próximo será el 2010, "el 119 en la historia de los Años Santos Compostelanos", dice el obispo de Santiago. Transcurrirán 11 años hasta el 2021, luego 6 hasta el 2027, de éste cinco hasta 2032, luego 6 hasta 2038 y vuelta a empezar.

Utilizando las tablas de repetición de calendarios es muy fácil encontrar esa secuencia, una vez que constatamos que un ASC comienza en viernes, si es año común, y en jueves si es bisiesto, caso en el que se denomina año de gozo y jubileo. Eso ocurrió en 2004 y sucederá en 2032, 2060 y 2088; pero no ocurre así 28 años después, en 2116 que ni siquiera es ASC. La regla gregoriana produce la alteración, al pasar por 2100 no bisiesto y ASC, porque el calendario de 2088 solo se repite 40 años después, en el año de gozo y jubileo 2128.

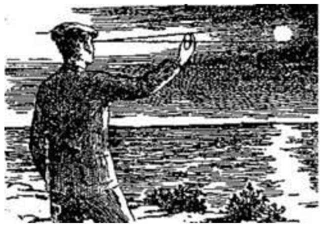
Otra de las consecuencias de la reforma gregoriana, que suprimió diez días en octubre de 1582, fue el hecho de que el ASC que siguió a 1574, en lugar de 1585, resultó ser 1593: una inusual separación de 19 años que no se volverá a producir con el calendario actual.

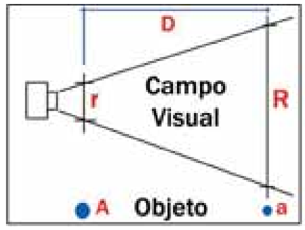


Soluciones a los problemas del número anterior

1. De qué tamaño os parece la Luna llena? ¿Es mayor o menor que el Sol? ¿Es de igual tamaño a lo largo del día?

¿Es del tamaño de una manzana, una naranja, una sandía, una calabaza, un plato, el dedo pulgar, una bolita de papel de aluminio?





Problema resuelto en un grupo de alumnos y alumnas del programa de adaptación curricular del IES *Francesc Tàrrega* de Vil·la Real, en la clase del profesor Vicent Agustí.

El profesor comienza la clase dibujando en silencio una "luna" en la pizarra. A continuación formula las preguntas del primer párrafo del enunciado. Tras la perplejidad de la mayoría ante la primera tanda de preguntas, les plantea la segunda. Les parece que la luna es mayor que cualquiera de los objetos propuestos. El profesor elige la bolita de papel de aluminio y pide, una a una, a todas las personas del grupo que vaya al fondo de la clase y, con la bolita sujeta entre el índice y el pulgar y el brazo extendido, guiñando un ojo, que caminen hasta que la bolita se ajuste a la "luna" que el profesor ha dibujado previamente en la pizarra.

Las caras de perplejidad son ahora caras de sorpresa. Daniel, que nos mira desde la fotografía escéptico, ahora comienza a interactuar y aporta nuevos elementos. Cuando tiene ajustada la bolita de aluminio con la luna del encerado, encoge el brazo y observa que así, la bolita ¡es mayor que la luna! Esta observación desencadena el interés del grupo por darle una explicación al asunto y surge de modo natural el concepto de distancia angular.

Luego se les plantean de nuevo las preguntas del primer párrafo. Algunos dicen haber observado la Luna de distintos tamaños en distintos momentos, aunque no pueden caracterizar esos momentos; otros, que no han comprendido la pregunta, enriquecen la clase con sus respuestas, pues introducen la cuestión de la cara oculta de la Luna.

Para recoger y aclarar ésta última cuestión, salen dos alumnos, uno se queda de pié y el otro recibe la instrucción de darle vueltas al primero mirándole siempre de cara. El profesor formula la pregunta ¿cuántas vueltas ha dado Juan sobre sí mismo, mientras le daba una vuelta completa a Víctor? Se produce una división en la clase, unos dicen que ninguna, otros dicen que una. Para acercar posiciones, el profesor pide a Juan que repita su evolución, pero mucho más cerca de Víctor, por último, le pide a Víctor que se retire y a Juan que repita su evolución situándose exactamente en la posición de Víctor. Les propone un juego para que provoquen a sus amistades en los ratos de ocio: ¿cuántas vueltas da sobre sí misma una moneda que rueda sobre otra fija, hasta darle una vuelta completa? Muchos aventuran respuestas, pero el profesor pide volver a la tarea pendiente.

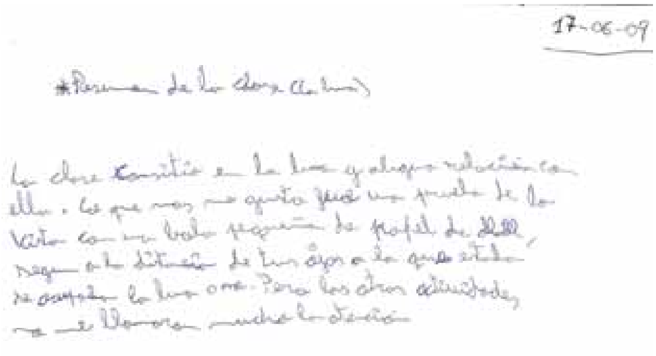
Se les reparte la imagen de la izquierda de las dos siguientes y se les pide que respondan a la pregunta: ¿Atrapará el grandullón al enano?

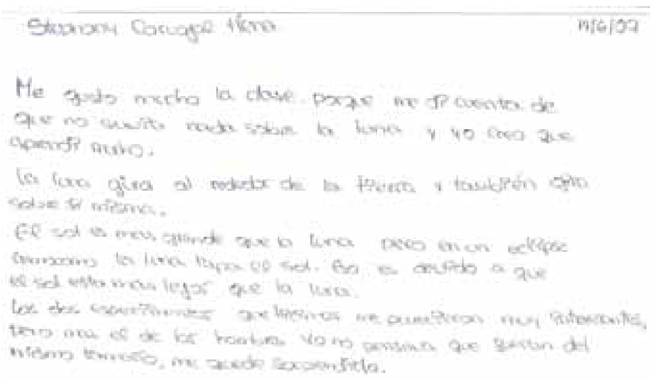
Todo el mundo contesta que sí, por algo es más grande y tiene las piernas más largas.

A continuación se les da la imagen de la derecha y se les pide que la recorten y la superpongan al grandullón y al enano. Nuevas expresiones de sorpresa ¡nada es lo que parece en esta sesión!

El profesor pide que, ésta noche, observen la Luna llena cuando salga y luego cuando esté en su posición más alta en el cielo. Y que recuerden al enano y al grandullón para comentar todo ello en una clase posterior.

En la siguiente clase, el profesor recoge los resúmenes realizados por sus alumn@s:


17-06-09

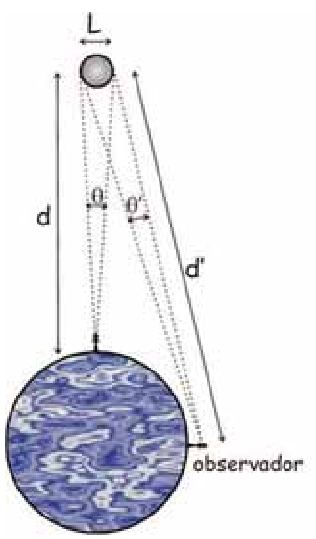

Me gustó mucho la clase porque me di cuenta de que no sabía nada sobre la luna y yo creo que aprendí mucho.

La luna gira al rededor de la Tierra y también gira sobre sí misma.

El sol es mas grande que la luna pero en un eclipse vemos la luna tapa el sol. Eso es debido a que el sol esta mas lejos que la luna.

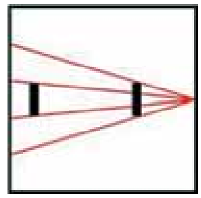
Es el momento de exponer las dos formas habituales de explicar este paradójico fenómeno visual:

Si está más lejos debiéramos verla menor

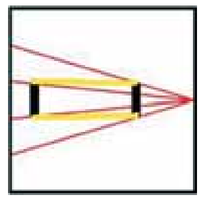


Pero éste es el efecto visual.

Al quedar enmarcada por las líneas que la perspectiva de los objetos lejanos nos ofrecen, éstas inducen a nuestro cerebro a interpretar el tamaño, que, aún siendo menor, se nos presenta como mucho mayor.



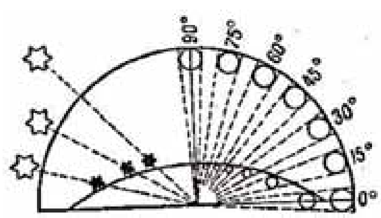
¿Cuál de los segmentos negros es mayor? ¿Seguro?



Es el mismo efecto que el del grandullón y el enano.

Otra explicación habitual está relacionada con el aplastamiento aparente de la bóveda celeste, que plantea, a su vez la famosa pregunta de quién fue antes, si el huevo o la gallina, pues esta cuestión todavía no ha sido clarificada. ¿Es el tamaño aparente de la Luna consecuencia del aplastamiento de la bóveda celeste o ésta parece aplastada como consecuencia de los cambios aparentes en los tamaños y distancias de los astros?

> La ciencia no ha encontrado la respuesta, aunque busca la solución desde hace 2.000 años. La ilusión está relacionada con que el cielo se representa no como la semiesfera (desde el punto de vista geométrico), sino como un segmento del globo, la altura del cual es de 2 a 3 veces menor que el radio de su base. Esto es debido a que, con la postura habitual de la cabeza y de los ojos, las distancias sobre la horizontal y cercanas las valoramos como más significativas que las verticales: En sentido horizontal observamos el objeto con “mirada recta”, y en cualquier otro sentido, con los ojos subidos o bajados. Si observamos la Luna estando tumbados de espaldas, entonces, al contrario, parecerá más grande cuando está en cenit que bajo el horizonte. Entre los psicólogos y los fisiólogos no se ha encontrado todavía la explicación a por qué el tamaño visual de los objetos depende de la orientación nuestros ojos.
>
> *Yakov Perelman. Geometría recreativa*



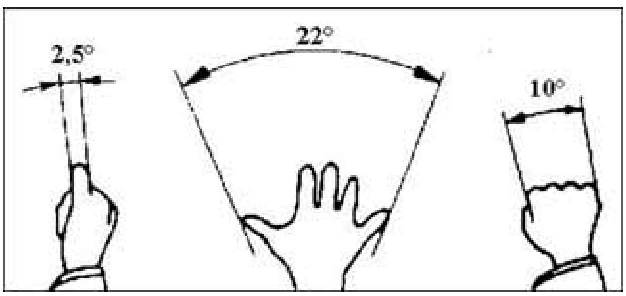
2.- Son las estrellas de una constelación puntos luminosos de una figura plana?

Isabel García Barceló

1. Juegos para comprender qué son las constelaciones y para qué sirven.

Juego 1: La profesora dibuja un "cielo estrellado" en la pizarra, luego indica que se organicen por parejas, uno de los miembros de la pareja le da instrucciones al otro para facilitarle la localización una estrella que ha seleccionado mentalmente, el otro, siguiendo las instrucciones, debe localizarla.

Juego 2: La profesora enmarca un grupo de "estrellas" con la silueta de un ave. Sigue el juego por parejas. Uno de los dos componentes poner nombre mentalmente a las "constelaciones" y decide unidades de medida.



En el cielo nocturno, Cassiopea se cubre con el puño y el brazo extendido, luego su amplitud angular es de 10º, aproximadamente. La Luna y el Sol tienen 0,5º de diámetro.

2. La profesora propone una lluvia de ideas sobre la visión nocturna de las estrellas, en torno a tres conceptos: objetos celestes en movimiento, tipos de movimientos de la Tierra y visibilidad y movimiento de las estrellas.

Las respuestas se agruparon en tres tipos:
- Tierra (T) y Estrellas E
- T
- T y algunas E

Movimientos de la Tierra:
- Rotación y Traslación (T)
- R

Visibilidad de las estrellas
- Se ven todas toda la noche
- Todas desaparecen en algún momento de la noche
- Algunas no desaparecen en toda la noche

La profesora propone una imagen que consigue el acuerdo unánime de la clase: imaginar un paraguas tachonado de puntos-estrella, como en la pizarra, que gira sobre su mango, en posición inclinada, de modo que el tablero de una mesa, oculta cada vez unas pocas estrellas por un lado y deja ver otras pocas por el otro lado. Algunas se ven todo el tiempo y la que ocupa el extremo del mango, no se mueve nunca.

El paraguas funciona como un planetario casero.

La profesora recuerda las visitas al planetario y pregunta qué analogías y diferencias encuentran entre la cúpula del planetario y la bóveda celeste.

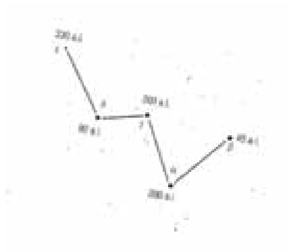
En general, el alumnado opina que las constelaciones son agrupaciones de estrellas que forman dibujos en el cielo y que están situadas en la bóveda celeste a la misma distancia de nosotros.

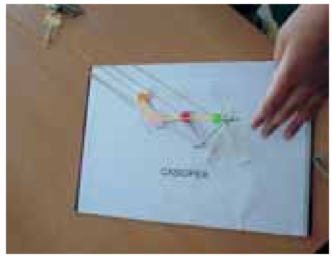
La profesora propone la construcción de una maqueta para Cassiopea, dándoles las siguientes instrucciones:

- Pega una fotocopia del dibujo de Cassiopea en un trozo de cartón y con un punzón, haz un agujero en cada estrella marcada.
- Desliza el extremo de un hilo en cada uno de ellos y pega el extremo por la parte de atrás del cartón.
- Introduce una GOMINOLA en cada hilo.
- Ata todos los extremos de los hilos alrededor de una anilla, a 60 cm del cartón.
- Mira por el orificio de la anilla manteniendo tensos los hilos.

A esa distancia las bolitas se ven en el dibujo situadas en las posiciones de las estrellas, cualquiera que sea la posición a lo largo del hilo.

Por último, la profesora propone que ubiquen las gominolas a distancias proporcionales a las reales: 330 años luz, 200 años luz, 45 años luz, 90 años luz.





Una vez realizado este ejercicio, pide que miren a su Cassiopea desde puntos de vista diferentes al de la anilla. Se sorprenden al comprobar que Cassiopea tiene formas distintas de la famosa W. Así ocurre en la fotografía, donde las gominolas vistas por el objetivo de la cámara configuran una L, remarcada con un trazo naranja sobre la foto.

La siguiente es la visión de cómo evolucionó la clase, realizada por un alumno del aula.

Guillem Ferreres Cabanes

Práctica: Visualización en 3D de una constelación

En primer lugar, como introducción, dibujaron unos puntos en la pizarra.
El objetivo era buscar uno de esos puntos y explicar al compañero donde estaba.
Esta fue la introducción a las constelaciones, ya que teníamos que buscar la manera de orientar a nuestro compañero y la forma más fácil era imaginarse que esos puntos formaban alguna figura matemática, como hacían los antiguos con las constelaciones.

Después hicimos un pequeño debate sobre cómo estaban las estrellas distribuidas en el cielo: si estaban en un plano esférico, si colgaban de un plano o si estaban en movimiento constante.
La conclusión a la que se llegó fue la que las estrellas se movían y otras que no, respecto a nosotros, como la estrella polar.
Para terminar, hicimos una representación de Casiopea en 3D. Cogimos una representación plana de la constelación y hicimos unos agujeros en los lugares donde se encontraban las estrellas y pasamos unos hilos por cada uno. Después, poníamos una golosina por cada hilo y atábamos estos a un aro de 2 cm de diámetro, dejando los hilos a la misma largaria. Así, colocando las golosinas en diferentes puntos de los hilos se veía, por el aro, la misma figura. Eso significa que da igual a qué distancia se encuentre una estrella siempre que se encuentre en el mismo sector visual, ya que si se mira desde un lado la figura es muy distinta.

Esta experiencia les permite comprender que, casi siempre que se observa una constelación desde lugares del espacio distintos al de nuestro planeta Tierra, presenta configuraciones diferentes a las que observamos nosotros, debido a que las constelaciones no son agrupaciones reales de estrellas sino aparentes. Como dice Guillem, si miramos de lado, la figura es muy distinta.

EL HILO DE ARIADNA ■

NOTAS

1 Manuel Martínez Casanova en *De formas numinizadas a deidades femeninas*

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

PERICOT, L. (1979): *Cerámica ibérica*. Ediciones Polígrafa, S.A.

MBarcelonaoreno Luquero, R. (2008): *Experimentos para todas las edades*. Madrid: Ed. Rialp.

Internet

Perelman, Y. *Geometría recreativa*, en http://es.geocities.com/geometriarecreativa/

Convocatoria de la I Edición de los cursos a distancia de la FESPM

La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, en su afán de promover actividades que considera de interés para la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas e intentando ofrecer un servicio más al profesorado de matemáticas, convoca la I Edición de Cursos de Formación a Distancia, para el curso 2009-2010.

Los cursos convocados en esta primera edición son:

Materiales y Recursos en el aula de matemáticas:

Se trabajará y discutirá sobre el papel educativo de recursos y materiales didácticos que el profesor de Matemáticas puede emplear en su enseñanza, orientando el diseño de actividades de enseñanza usando materiales y recursos.

Matemáticas a través de software libre:

Existen numerosos programas de utilidad para el profesorado de matemáticas a los que pueden acceder a través de software libre, por lo que es necesario dar a conocer su existencia para favorecer su utilización en el aula y su aprovechamiento como recursos didácticos.

Historia de las matemáticas:

Se pretende hacer patente la forma peculiar en que aparecen las ideas en matemáticas, enmarcándolas temporal y espacialmente, junto con sus motivaciones precedentes y sus aplicaciones posteriores. Además de incluir los conocimientos adquiridos sobre la historia de las matemáticas en el uso de nuevas metodologías para enseñar matemáticas.

Para más información visitar la página de la FESPM:

http://www.fespm.es/

Información general

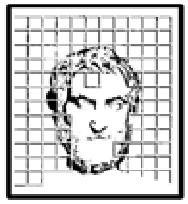
El periodo de inscripción comenzará el 20 de enero y finalizará el 5 de febrero de 2010.

Desarrollo de los cursos: *Desde Febrero a Mayo de 2010.*

Número de plazas*: Todos los cursos se convocan con un número máximo de 100 plazas.*

Número de horas: *Cada uno de los cursos tendrá una duración de 60 horas. Se solicitará la homologación de los cursos.*

Convocatoria de actividades de la SAEM THALES



La Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES informa de la convocatoria de las siguientes actividades.

XII EDICIÓN DE LOS CURSOS THALES-CICA a través de Internet 2010

Herramientas informáticas de apoyo a la docencia:

- Elaboración de contenidos Web interactivos para la enseñanza.
- Curso de diseño Web accesible con XHTML y CSS.
- Diseño y desarrollo de bases de datos.

Herramientas informáticas para matemáticas:

- Cálculo simbólico y gráfico con MAPLE 13.

Especialización en áreas de la matemática o de su enseñanza:

- Laboratorio de estadística y probabilidad con actividades y recursos multilingües.
- Jugando con las matemáticas. Actividades y recursos bilingües.
- Planificación por competencias y desarrollo de tareas en Secundaria.
- Geometría sintética.
- Historia de las matemáticas.

LA CALCULADORA CLASSPAD COMO RECURSO DIDÁCTICO EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Objetivos:

- Ofrecer la información necesaria para manejar la calculadora ClassPad.
- Dar a conocer las posibilidades didácticas que la calculadora ofrece para trabajar distintos aspectos de las matemáticas.
- Facilitar propuestas didácticas para su utilización en el aula.
- Promover la incorporación de la calculadora como recurso didáctico.

Contenidos:

- Operaciones básicas con la calculadora ClassPad.
- Funciones y variables.
- Polinomios, fracciones algebraicas.
- Aplicaciones al cálculo.
- Estudio y representación de funciones.
- Resolución de ecuaciones.
- Cálculo matricial.
- Tablas y gráficos.
- Estadística unidimensional.
- Estadística bidimensional.
- Geometría con la ClassPad.
- E-actividades.
- Diseño de E-actividades.

CONVOCATORIA DE UNIDADES DIDÁCTICAS MATEMÁTICAS CON CALCULADORA GRÁFICA 4ª edición GRAFICAL-2010

La Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES y la División Didáctica CASIO, contando con la colaboración de la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía, realiza la cuarta convocatoria del concurso sobre unidades didácticas que utilicen la calculadora gráfica como recurso didáctico.

Contenido de la convocatoria:
Los trabajos presentados desarrollarán unidades didácticas correspondientes al área de matemáticas para su inclusión en el currículo de esta área en los niveles educativos de Secundaria o de Bachillerato.

Presentación de las unidades:
Las unidades didácticas se remitirán o presentarán en el Centro de Documentación de la SAEM THALES. Departamento de Matemáticas. Universidad de Cádiz. C.A.S.E.M. Campus del Río San Pedro. 11510 - Puerto Real (Cádiz). Los trabajos presentados a este concurso se podrán remitir al Centro de Documentación THALES por correo electrónico a la dirección:

thales.matematicas@uca.es.

Plazo de presentación:
El plazo de presentación finaliza el 31 de marzo de 2010.

Premios y publicación:
Se establecen los siguientes premios para las unidades presentadas: un primer premio, un segundo premio y dos terceros premios. Todas las unidades seleccionadas serán publicadas por la SAEM THALES en colaboración con la División Didáctica CASIO.

Más información sobre contenidos y procedimientos de inscripción de todas las actividades en la página Web:
http://thales.cica.es

Normas de publicación

1.- Para el envío de artículos o cualquier consulta sobre su contenido se utilizará el correo electrónico de la redacción de SUMA(articulos@revistasuma.es) o su dirección postal:

Revista SUMA, Apartado de Correos 498, 46900 Torrent.

2.- Si los trabajos, imágenes incluidas, ocupan más de 5Mb sólo se enviaran por correo postal en soporte magnético (CDRom, DVDRom o Pen drive).

3.- Los trabajos deben ser enviados como archivo en formato MS Word o rtf –tipo de letra Times New Roman y tamaño 12– adjunto a un mensaje de correo electrónico en el que deben figurar:

i. El título del trabajo, los nombres y apellidos de todos los autores, su lugar de trabajo y su dirección completa así como la sociedad federada a la que pertenecen (si se desea).

Y a efectos de comunicación:

ii. El correo electrónico, teléfono y dirección postal del autor de contacto.

4.- Se debe enviar una segunda versión del original en la que no aparezcan los nombres de los autores, ni información relativa a ellos o que pueda servir para identificarlos (e.g., institución a la que pertenecen, citas y referencias bibliográficas propias, agradecimientos, datos del proyecto en el que se enmarca el trabajo). En esta versión, reemplace las citas y referencias bibliográficas por “Autor, 2009” o “Autor et al., 2009”. En las referencias bibliográficas propias se debe eliminar el título y el nombre de la revista o el título del libro donde se publica.

5.- Se admiten diversos tipos de trabajos: teóricos, informes de investigaciones, divulgación, innovación didáctica…

6.- Junto con el artículo se remitirá un resumen (máximo de 600 caracteres incluyendo espacios), una traducción del mismo en inglés, cinco palabras clave jerarquizadas (en castellano e inglés).

Ejemplo: *Investigación didáctica, Álgebra, Modelización y dificultades, Enseñanza y aprendizaje, Secundaria y bachillerato.*

7.- El texto estará en una sola columna y tendrá una longitud máxima de 25.000 caracteres sin incluir espacios pero incluyendo las tablas, las figuras y los anexos.

8.- Es imprescindible que los esquemas, dibujos, gráficas e imágenes sean guardados en formato **TIF, EPS** o **JPEG**, a una resolución de 300 ppp. y en color original. Éstos se adjuntarán en una carpeta aparte del documento del texto, ya que las imágenes incrustadas en el texto no son válidas para su posterior edición. Cada archivo debe estar claramente identificado y se debe indicar en el texto el lugar donde se ubica. De igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.

9.- Si alguna expresión no se puede escribir con los carácteres disponibles en la fuente Times New Roman, se incluirá, con un editor de ecuaciones, fuera del texto y si no fuera posible se incorporará como imagen.

10.-La bibliografía se dispondrá también al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, siguiendo las normas APA.

Ejemplos

Libros:

Apellido del autor, coma, inicial/es del nombre, punto, fecha entre paréntesis, punto, título en letra cursiva, punto, lugar de edición, dos puntos, editorial, punto.

Filloy, E., Rojano, T. & Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. New York: Springer.

Capítulos en libros

Cuando se cita un capítulo de un libro, el cual es una compilación (reading), se cita en primer lugar el autor del capítulo y el título del mismo, seguidamente el compilador (Comp.), editor (Ed.) o director (Dir.), coordinador (Coord.), título (las páginas entre paréntesis). Lugar de edición: y editorial, igual que en la referencia de cualquier libro.

Puig, L. (2006). La resolución de problemas en la historia de las matemáticas. En Aymerich, José V. y Macario, Sergio (Eds.) *Matemáticas para el siglo XXI* (pp. 39-57) Castellón: Publicacions de la Universitat Jaume I.

Artículos en revistas

Lo que va en letra cursiva, es el nombre de la revista. Se debe especificar el volumen de la revista y las páginas que ocupa el artículo separadas por un guión. Se especificará el volumen y el número de la revista, cuando cada número comienza por la página uno.

Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, *26*(3), pp. 327-342.

Para consultar más ejemplos de citas bibliográficas, visitar:
http://www.revistasuma.es

11.-Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ... supone un gran avance (Hernández, 1992). Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ... según Rico (1993).

12.-Si durante el texto se cita una referencia de más de tres autores se puede citar el primero seguido de la expresión et al. (y otros). Por ejemplo, "Bartolomé et al. (1982)", "Gelpi et al. (1987)". Pero en la bibliografía deben aparecer todos los autores.

13.-Todas las referencias bibliográficas deben corresponder a menciones hechas en el texto.

14.-Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo y se incluirán al final del texto.

15.-Después de haber recibido el trabajo se enviará un correo electrónico como acuse de recibo.

16.-Cada trabajo será remitido a dos asesores para ser referenciado. Estos no serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, de acuerdo con las normas, criterios y recomendaciones propios de la revista SUMA.

17.-Si los dos informes son positivos el artículo será publicado. Si los dos informes son negativos se rechazará su publicación. Si existe discrepancia entre los informes, se solicitará un tercer informe que decidirá su publicación o su rechazo.

18.-Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como –en caso afirmativo– la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido.

19.-No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo. ■

Propuesta de categorias para las palabras clave

Teoría Innovación didáctica Divulgación Investigación didáctica Experiencia de aula ...	Álgebra Análisis Aritmética Estadística Probabilidad Geometría Resolución de problemas. Topología ...	Números (Naturales Enteros, ...). Resolución de problemas de ..., Ecuaciones, Figuras en el plano, en el espacio Funciones Modelización Lógica Errores, dificultades ...	Libros de texto Historia Cognición Metacognición Razonamiento Demostración Legislación y reformas(LOGSE, LOU, LOE ...) Actitudes Destrezas Procesos Conceptos Enseñanza, aprendizaje, educación ...	Infantil Primaria Secundaria Bachillerato Universidad ...

suma+ 62
Noviembre 2009, pp. 139-143

XX Olimpiada Matemática Nacional para alumnado de segundo de ESO Tenerife, 24 al 28 de junio de 2009

Cuando hace unos cinco años propusimos Canarias como sede de la XX Olimpiada Matemática Nacional lo menos que pudimos imaginar es que el año 2009 nos íbamos a ver afectados por una gran crisis que haría más difícil, si cabe, conseguir financiación para su organización. Fuimos tocando de puerta en puerta, algunas de las cuales se nos cerraron y otras nos fueron abiertas sólo a medias, pero con tesón e insistencia se consiguió lo que se pretendía, que la XX Olimpiada fuese una realidad.

Tuvo lugar en Tenerife del 24 al 28 de junio de 2009, convocada por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, FESPM, y organizada por la Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas. Participaron un total de 60 alumnos acompañados de 21 profesores de todas las Sociedades federadas y del País Vasco y Andorra como invitados.

Es ésta la segunda vez que esta Olimpiada se celebra en Canarias. La Sociedad Isaac Newton formó parte del grupo de cinco Sociedades que la diseñaron, ha participado en ella desde la primera edición en Navarra y fue la organizadora de la segunda edición en el año 1991. En esa ocasión se recorrieron tres islas, Tenerife, Gran Canaria y Lanzarote.

Arnulfo Santos Hernández
Coordinador del equipo organizador de la XX Olimpiada Matemática Nacional

Programma

Miércoles 24 de junio

19.00 Recepción de los participantes en la Residencia Pedro García Cabrera de La Laguna.
20.00 Cena en la residencia.
21.00 Bienvenida de la organización a los participantes y coordinadores. Entrega de credenciales, material y presentación del programa.

Jueves 25 de junio

8.00 Desayuno en la Residencia.
9.15 Inauguración oficial de la Olimpiada en el Aula Magna de la Facultad de Matemáticas.
11.00 Desayuno saludable con Puleva.
12.00 Prueba individual en la Facultad de Matemáticas.
14.00 Almuerzo en la Residencia.
16.00 Visita al Museo de la Ciencia y el Cosmos. Matemagia.
20.00 Cena en la Residencia.

Viernes 26 de junio

8.00 Desayuno en la Residencia.
8.45 Salida hacia el Parque Nacional del Teide.
10.00 Visita al Observatorio del Teide.
12.30 Visita al Centro de visitantes del Parque Nacional del Teide. Prueba por equipos.
14.30 Almuerzo.
16.00 Visita a Las Cañadas.
17.30 Regreso a La Laguna y recorrido por la ciudad.
20.00 Cena en la Residencia.

Sábado 27 de junio

9.00 Desayuno en la Residencia.
9.30 Salida hacia el Puerto de la Cruz.
10.00 Visita al Loro Parque.
14.30 Almuerzo.
17.00 Baño en el Lago Martiánez.
19.00 Regreso a La Laguna.
20.00 Cena en la Residencia.

Domingo 28 de junio

9.00 Desayuno en la Residencia.
10.00 Discusión y análisis de los problemas propuestos.
11.30 Recepción en el Ayuntamiento de La Laguna.
13.00 Actividades matemáticas en la Plaza del Cristo. Komando matemático.
14.30 Almuerzo institucional de despedida.
17.00 Acto de entrega de premios. Clausura de la XX Olimpiada Matemática Nacional en el salón de actos del IES La Laboral.
20.00 Cena en la Residencia.

Lunes 29 de junio

9.00 Desayuno en la Residencia.
10.00 Regreso a casa

Descripción de los cinco días de Olimpiada

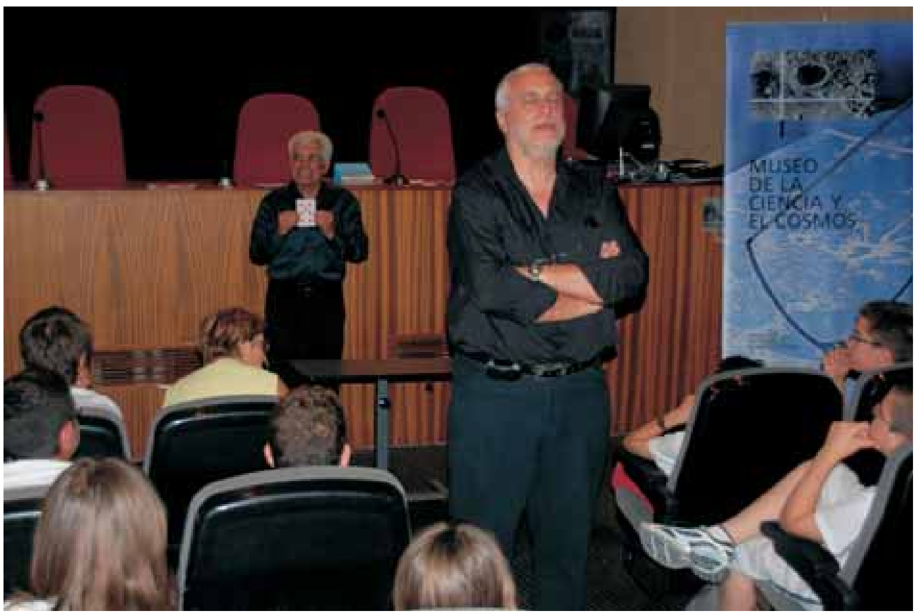
A lo largo de la tarde-noche del miércoles 24 fueron llegando los distintos participantes, que fueron recibidos en el aeropuerto de Los Rodeos por profesores de la organización y acompañados al IES La Laboral donde se encuentra la *Residencia Escolar Pedro García Cabrera*, lugar de alojamiento. Por la noche hubo una recepción de bienvenida a los participantes, se les entregó material diverso y se les explicó las líneas generales del programa previsto. También se les explicó las bases del Concurso de Fotografía y Matemáticas que se desarrollaría a lo largo de los días de la Olimpiada.

Siguiendo el programa previsto, el jueves 25 después de desayunar nos desplazamos a pie a la Facultad de Matemáticas de la Universidad de La Laguna y a las 9.15 horas tuvo lugar en el Aula Magna de esa Facultad el acto oficial de inauguración de la XX Olimpiada Matemática Nacional. Fue presidido por el Rector de la Universidad y contó, además, con la presencia de la Decana de la Facultad de Matemáticas, el Alcalde de San Cristóbal de La Laguna, el Director General de Universidades, la Consejera de Juventud, Educación e Igualdad del Cabildo Insular de Tenerife, la Presidenta de la Sociedad Isaac Newton y el coordinador de la Olimpiada. Terminado se sirvió un *desayuno saludable* gentileza de la empresa Puleva y a las 12 h. tuvo lugar la prueba individual.

Por la tarde visitamos el Museo de la Ciencia y el Cosmos y disfrutamos de sus variadas instalaciones, incluyendo el Planetario. Dentro de las actividades en el museo, Manolo y Rupérez deleitaron a los participantes y profesores acompañantes con una interesante sesión de Matemagia.

El viernes 25 muy temprano salimos en *guagua* hacia el

Parque Nacional Izaña. A las diez hicimos una parada en el Observatorio de Izaña donde el personal del centro nos explicó como funcionan los distintos telescopios allí existentes. A continuación nos dirigimos al Centro de Visitantes del Parque donde los participantes realizaron la prueba por equipos. Después de almorzar visitamos la zona de Las Cañadas, disfrutando de un paisaje inigualable, merendamos y emprendimos el viaje de regreso a La Laguna.



El sábado 26 estuvo dedicado a actividades lúdico-educativas. Por la mañana visitamos el Loro Parque, un parque de atracciones en el que, además de poder contemplar una magnífica colección de aves de todo tipo y otros animales, como peces, leones, pingüinos, cocodrilos, etc., disfrutamos de los espectáculos con orcas, delfines, leones marinos, y loros. Por la tarde nos refrescamos en las piscinas del Lago Martiánez, disfrutando allí de un ambiente acogedor.

El domingo 27 vuelta a las actividades matemáticas. Se comenzó a las 10 con la presentación en Flash de los problemas propuestos en la prueba individual, complementada con las opiniones de los alumnos acerca de las posibles soluciones. Terminada esta actividad, nos encaminamos al Ayuntamiento de La Laguna donde hubo una recepción y desde allí seguimos hasta la Plaza del Cristo donde disfrutamos manipulando con los materiales del Komando Matemático. Al mediodía nos acercamos al Parque de la Vega donde el Ayuntamiento de La Laguna nos obsequió con una paella a modo de almuerzo de despedida.

Por la tarde, a partir de las cinco, tuvo lugar el acto de entrega de premios y la clausura de la Olimpiada en el salón de actos del IES La Laboral. Asistieron como invitados la Consejera de Juventud, Educación e Igualdad del Cabildo Insular de Tenerife y el Concejal de Educación del Ayuntamiento de La Laguna. Abrió el acto el Coordinador de la Olimpiada con palabras de felicitación a los alumnos participantes, a sus profesores y a sus familias y de agradecimiento a los organismos, empresas y personas que contribuyeron de una u otra manera a que la Olimpiada se desarrollara con éxito. A continuación nos dirigieron unas palabras los representantes del Cabildo y del Ayuntamiento, las alumnas Celia Balda, Mª José de Miguel y Natalia Velasco en representación de los alumnos que participaron en la Olimpiada y el profesor Salvador Renieblas en representación de los profesores coordinadores.

Seguidamente se procedió a la entrega de diplomas de participación a alumnos y profesores. Juan Cuenca expuso una selección de las mejoras fotografías presentadas al concurso de Fotografía Matemática e hizo entrega del premio al equipo seleccionado, Luis Balbuena y José Antonio Rupérez hicieron entrega de los premios de la prueba por equipos y finalmente la mesa hizo entrega de los correspondientes a la prueba individual.

Los premiados

El premio principal lo recibieron todos los participantes, profesores y alumnos, y fue la oportunidad de participar en esta xx Olimpiada Matemática Nacional. Además, también se entregaron los siguientes diplomas:

Concurso de Fotografía y Matemáticas

Mención de honor como mejor clasificado al equipo Sirio formado por:

Joan Danús Jaume, de Baleares
Andrea Doncel Cardoso, de Andorra
Ibai Genua Gamio, del País Vasco
David González Concepción, de Canarias
Fernando Lamas Hermoso, de Melilla
Francisco Luque Sánchez, de Andalucía
Marta Segado Sánchez, de Murcia

Prueba por equipos

Mención de honor por la calidad de la presentación al equipo *Las Pléyades* formado por

Leire Elcano Sarasibar, de Navarra
Matt Hoogsteder i Riera, de Cataluña
Daniel Martín Martín, de Extremadura
José Antonio Moral Parras, de Andalucía
Francisco J. Ocariz Gallego, de Murcia
María Padilla Bautista, de Canarias

Menciones de honor por la calidad de las respuestas al equipo *Sirio*, cuyos componentes figuran más arriba, y al equipo *Betel Geuse* formado por

Foto de grupo de todos los participantes

Laura Barreiro Fernández, de Galicia
Saturio Carbonell Urtubia, de La Rioja
Pablo Casado Barrajón, de Madrid
Andrés J. Fernández Herrero, de Cantabria
Antonio Hidalgo Torné, de Andalucía
Antonio Jiménez Gálvez, de Canarias
Eva Rodríguez Duarte, de Castilla la Mancha

Prueba individual

Menciones de honor a la presentación a
Antonio Jiménez Gálvez, de Canarias
Joseph María Serra Moncunill, de Cataluña

Menciones de honor a la creatividad a
Darío de la Fuente García, de Asturias
Pablo Morala Migueles, de Castilla y León
José Puerta Anoedo, de Galicia

Mejores clasificados en la prueba individual
Saturio Carbonell Urtubia, de La Rioja
Antonio Ceres Sánchez, de Andalucía
Pablo Lorenzo Vaquero, de Castilla y León
José Antonio Moral Parras, de Andalucía

Final del acto

Para terminar, Arnulfo Santos como coordinador de la XX Olimpiada pasó el testigo a Antonia Martorell Mir, coordinadora de la XXI Olimpiada Matemática Nacional, que tendrá lugar en Baleares en junio de 2009, y cerró el acto Ana Alicia Pérez como Presidenta de la Sociedad Isaac Newton. ■

Boletín de suscripción

Tarifas	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	25 €	10 €
Centros	40 €	15 €
Europa	50 €	20 €
Resto del mundo	60 €	22 €

Fotocopiar esta hoja y enviar:
por correo a: Revista SUMA. Apartado de correos 498
46900-Torrent (Valencia)
por Fax al: (+34) 912 911 879
por correo-e a: administracion@revistasuma.es

Deseo suscribirme a la revista SUMA:

Nombre y apellidos: ______________________ NIF/CIF: ________

Dirección: ______________________ Teléfono: ________

Población: ______________________ CP: ________

Provincia: ______________________ País: ________

Correo electrónico: ______________________ Fax: ________

	Importe (€)
☐ Suscripción a partir del año (3 números) ________	
☐ N.os sueltos ________	
Total	

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)
☐ Transferencia bancaria (CCC 2077-0347-11-1101452547)
☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista SUMA
☐ Giro postal dirigido a Revista SUMA

Fecha y firma:

Nombre y apellidos: ______________________

Código Cuenta Cliente: Entidad: ____ Oficina: ____ DC: __ Cuenta: __________

Banco/Caja: ______________________

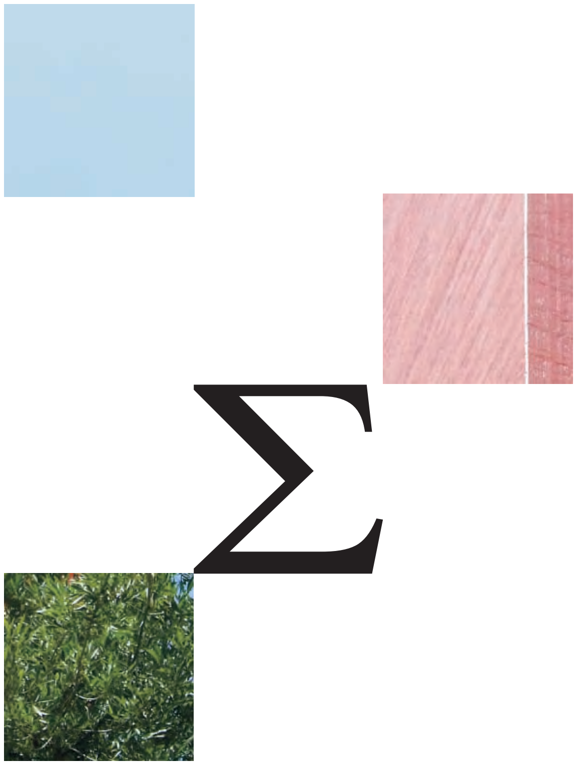
Agencia n.º: ____________ Dirección: ____________

Población: ____________ Provincia: ____________

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (fecha y firma):

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas



ISSN 1130-488X

SUMA. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.