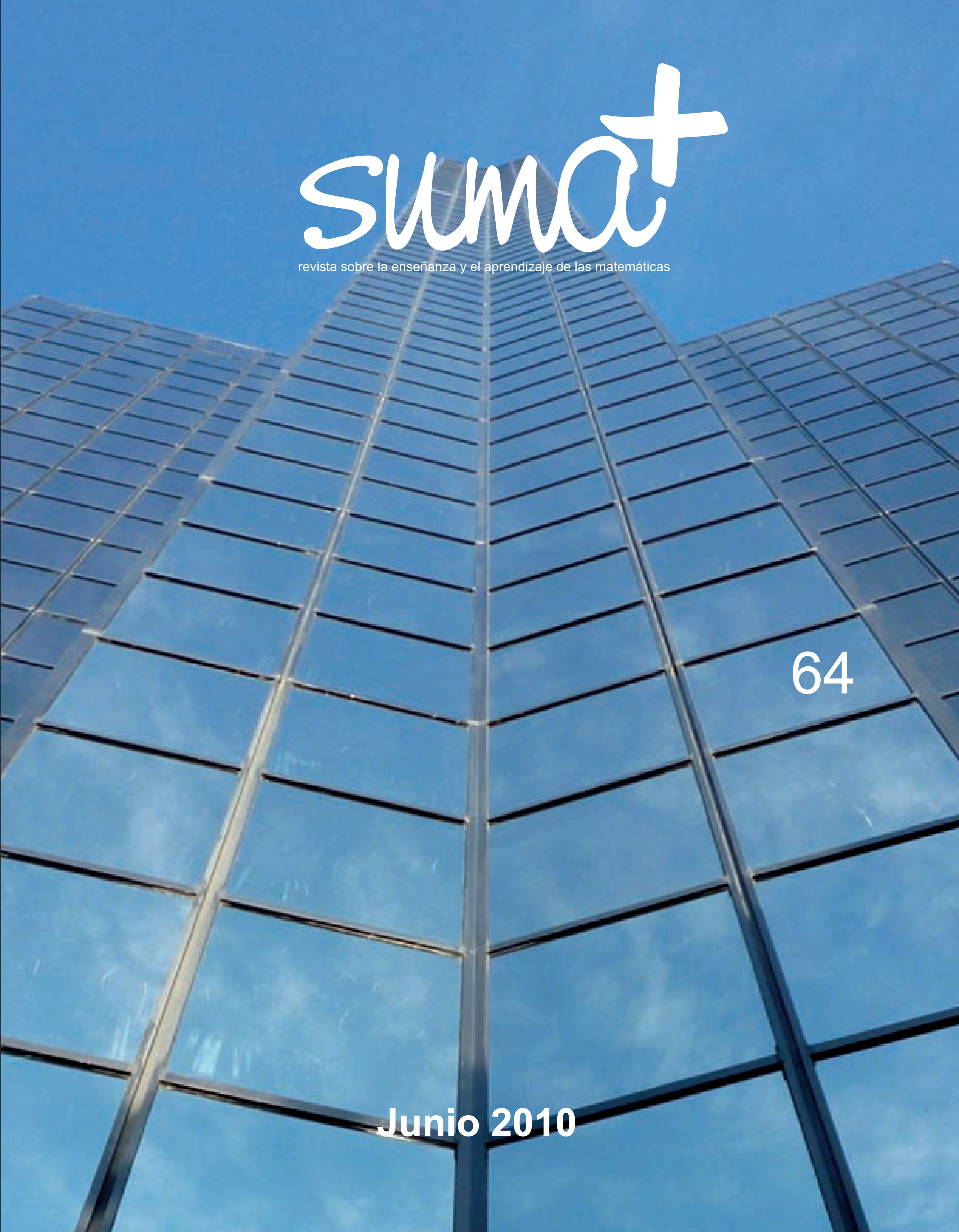


suma+

revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

64

Junio 2010

Índice

suma+

revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

Edita
FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS (FESPM)
Web
Antonio Alamillo Sánchez
www.revistasuma.es

Diseño de la portada: *O. Monzó*
Fotografía de la portada:
***Borsa Paral·lela** O. Monzó*
Maquetación
T. Queralt y O. Monzó
Revista Suma
Apartado 498
E-46900-Torrent (España)
Fax:*+(34) 912 911 879*
Tirada: *6700 ejemplares*
Depósito legal: *Gr 752-1988*
ISSN: *1130-488X*

64 *Junio 2010*

actividades de la FESPM

SUMA es una revista de didáctica de las matemáticas de periodicidad cuatrimestral, cuyo objetivo es tratar sobre aquellos aspectos relacionados con su enseñanza y aprendizaje, destinada al profesorado que trabaja en educación infantil, primaria, secundaria y universitaria.

La revista SUMA se edita en Torrent (Valencia) - ESPAÑA

suma+

no se identifica necesariamente con las opiniones vertidas en las colaboraciones firmadas.

suma+ 64
Junio 2010

Dinamismo en la Federación

En la actualidad la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) es una institución consolidada en España. Sus bases son las diferentes sociedades de profesores de matemáticas de nuestro país, que siguen trabajando en sus respectivas áreas territoriales para llevar adelante aquellas actividades que mejoren la Educación Matemática, y que van incrementando el número de socios y multiplicando sus iniciativas.

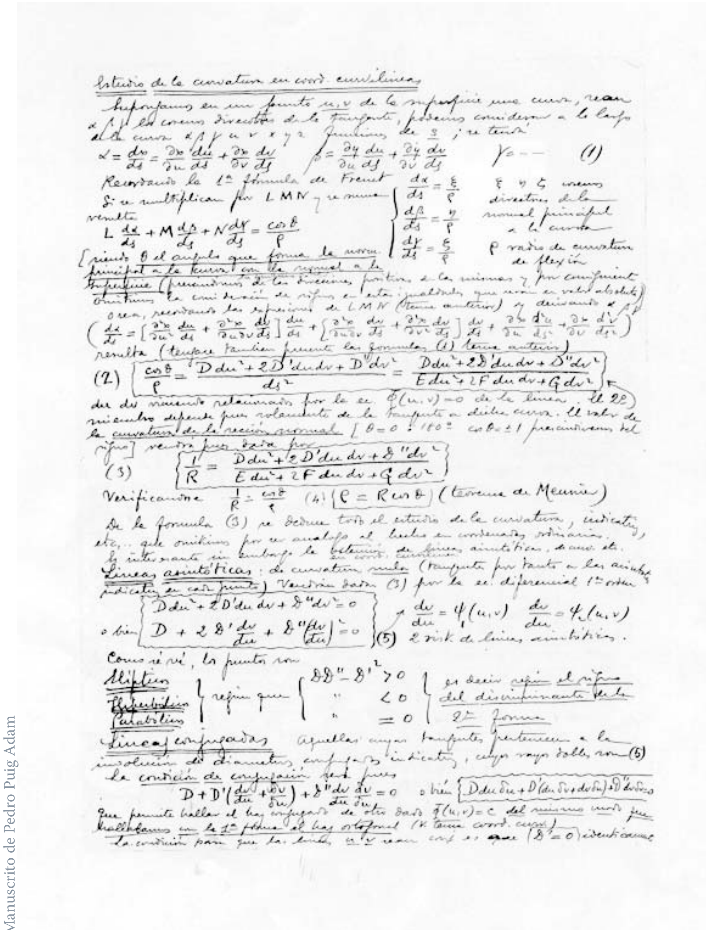
Además de estas iniciativas particulares, toda la Federación lleva adelante una serie de propuestas que se desarrollan a nivel nacional, e implican a todos los miembros de la comunidad educativa. La Olimpiada Matemática Nacional, para alumnos de secundaria obligatoria, que se celebra cada año y que en el presente se realizará en tierras mallorquinas. El Día Escolar de las Matemáticas, con el que anualmente la Federación propone dedicar el 12 de mayo a realizar en los centros educativos actividades de dinamización y divulgación matemática, para conmemorar el nacimiento de Pere Puig Adam. Las JAEM, encuentro que celebramos cada dos años y que se ha convertido en el principal congreso de Educación Matemática de nuestro país. Ya estamos pendientes del próximo a celebrar en Gijón, del 3 al 6 de julio de 2011.

También debemos señalar como actividades importantes de la Federación los Seminarios, en los que un grupo reducido y en delegación de cada sociedad federada, trabajan alrededor de un tema de interés para lanzar a la Sociedad, autoridades políticas y comunidad educativa cual es la posición de la Federación con respecto a dicho tema. Este año 2010 hemos celebrado dos Seminarios, el que giró alrededor de la autoevaluación y calidad en la enseñanza de las matemáticas, y el destinado a trabajar el uso de las calculadoras como recurso TIC.

La novedad de este año ha sido la convocatoria de los cursos en línea que se han ofrecido a la comunidad educativa. La Federación también está *involucrada en la escuela Miguel de Guzmán, que organiza y planifica en coordinación con la Real sociedad Matemática Española (RSME). Y no perdamos de vista la ventana abierta al exterior que supone nuestra página web, que ha sido actualizada y mejorada en su formato. Aprovechamos la referencia para agradecer a María Peñas la dedicación a este menester, y damos la bienvenida a Biel Frontera como nuevo responsable.*

Todas estas actividades nos llenan de satisfacción y nos permiten afirmar que podemos ser optimistas de cara al futuro de nuestra Federación. Y no podemos acabar sin felicitar a la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, que fue galardonada con el premio Medalla de Andalucia 2010 otorgado por el gobierno andaluz. Pensamos que se trata de un reconocimiento altamente merecido, y queremos desde aquí felicitar a todos los socios de la Thales (y felicitarnos todos) pues supone un estímulo de mejora y un ejemplo para todos. ■

suma+


Estudio de la curvatura en coord. curvilíneas

Manuscrito de Pedro Puig Adam

artículos

suma+ 64
Junio 2010, pp. 7-14

Velázquez y el número áureo

Desde hace tiempo se menciona, casi tímidamente, la posibilidad de que Velázquez haya utilizado el número áureo. Este trabajo intenta considerar esa posibilidad desde nuevas perspectivas a través del estudio de varias tramas, formas geométricas y otros argumentos así como un análisis de las propiedades matemático-simbólicas que podían interesar al pintor para incorporarlas en sus cuadros. Se realiza una interpretación original de Inocencio X *y de* Las Meninas *a partir del análisis de las coincidencias encontradas con las tramas que involucran a ese número.*

Palabras Clave: Número áureo, formato pintura, símbología, retículas, geometría.

Velázquez and the golden ratio

Several texts have mentioned in the past years, although in a very subtle way, that the golden ratio might have been used by Velazquez in his works. The intention of this article is studying that possibility from new perspectives, such as the analysis of several compositions and geometric shapes, as well as the analysis of the mathematical-symbolic properties which the painter might have considered interesting enough to be used in his paintings. An new interpretation of the paintings Inocencio X and Las Meninas *is presented here from the analysis of the coincidences found for the compositions involving the gold ratio.*

Key words: Golden ratio, painting format, symbology, reticles, geometry.

Proporciones y número áureo en la pintura

La elección de unos u otros valores numéricos para el tamaño y forma de los cuadros ha sido normalmente una decisión determinante en su resultado final. Además de los criterios técnicos empleados para escoger un formato determinado y el uso de ciertas reglas geométricas, en esas decisiones también pueden influir los significados de esas formas y proporciones. Desde las primeras civilizaciones ha sido frecuente atribuirle a los números connotaciones místicas, como la de la *Escuela Pitagórica*, que con su interpretación religiosa de los números contribuyó al conocimiento de muchas de sus propiedades. A algunos se les han dado atributos relacionados con Dios y el orden cósmico y otros por el contrario eran aciagos[1]. Luca Pacioli, conecta las propiedades universales del número áureo con las de Dios en *De divina proportione*, obra ilustrada por Leonardo da Vinci.

Pintores del siglo XIX y XX usaron conscientemente el número áureo como símbolo de una perfección ligada al movimiento, pero si ya se hizo también en siglos pretéritos es algo muy probable pero difícil de confirmar. No cabe esperar que todo autor que lo haya usado lo mencionara ya que es frecuente no hacer públicas algunas de las técnicas empleadas por otra vía que no sea su propia obra[2]. Las investigaciones que señalen esas u otras claves, e.g. Bouleau (1996), pueden ser objeto de debate durante mucho tiempo.

Alpatov (1935) afirmó que Velázquez usó de forma consciente el número áureo en *Las Meninas*. Desde entonces otros estudios, muy escasos en número, lo han afirmado[3], siendo un tema de interés en Historia del Arte pero también para quien quiera conocer el uso que se le han dado a las Matemáticas en las obras artísicas. Queremos mostrar algunos indicios nuevos de su posible utilización por el pintor sevillano y de que pudo haberlo utilizado como recurso ligado a una interpretación alegórica de sus propiedades matemáticas. Este trabajo continúa el que hemos publicado recientemente con Carlos del Valle (2009) sobre este tema.

Propiedades del número áureo

Los lectores y lectoras saben que el número áureo tiene muchas carácterísticas que lo hacen un número singular.

Luis Carlos Cachafeiro Chamosa
Universidade de Santiago de Compostela

Revisemos aquellas que más se relacionan con nuestro objetivo.

1. El número áureo, φ, se define como la proporción que divide a un segmento en dos partes tales que la mayor es a la menor como el total es a la mayor.
2. De la definición se deduce que se conserva para la suma y diferencia. Así:

$$\varphi=\frac{\varphi}{1}=\frac{\varphi+1}{\varphi}=\frac{(\varphi+1)+\varphi}{\varphi+1}=..=\frac{1}{\varphi-1}=\frac{\varphi-1}{1-(\varphi-1)}=...$$

   por lo que $\varphi^2-\varphi-1=0$ y denotando $\varphi'=1/\varphi$, se verifica $\varphi-1=\varphi'$.
3. Es el cociente entre la diagonal y el lado del pentágono regular. Trazando las diagonales de éste, se obtiene el pentáculo[4]. La división y subdivisión de la diagonal son áureas. Si AB=1 (ver figura 1), AF=φ'=GC, FG =φ'^2, AG=1, AC=φ.
4. En el pentáculo hay dos tipos de triángulos: isósceles de 72º, 72º y 36º, llamado *triángulo sublime*, e isósceles obtusángulo de 36º, 36º y 108º que tiene los lados en proporción 1: φ^2 y los ángulos en la 1:3.
5. Un rectángulo áureo es aquel que tiene los lados en proporción áurea. A partir de uno se generan otros por adición o substracción de cuadrados.

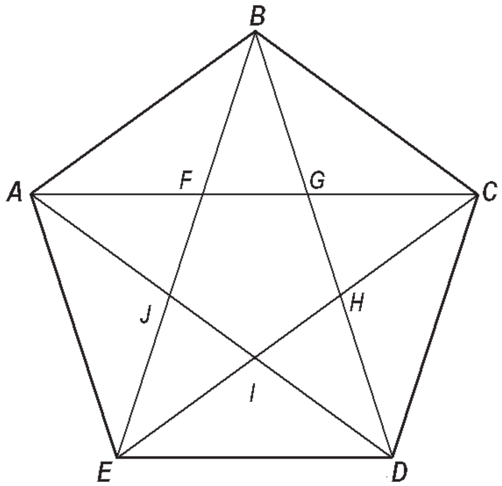


Figura 1. Pentáculo.

El número áureo tiene conexiones con diversas partes de las Matemáticas, como nos muestran diversos artículos publicados en *Suma*, pero también de otras partes de las ciencias y artes, como la biología o la arquitectura. Estos eran algunos de los temas que le interesaban a Velázquez, que vivió en un momento de desarrollo científico[5] en el que se conformaron nuevas formas de pensar por parte de los artistas y científicos. El reciente trabajo de Martín Casalderrey (2009), que observa conexiones entre la concepción del espacio de Velázquez y Descartes nos lo ilustra de forma muy significativa. Estudiando la estructura de los cuadros de Velázquez hemos encontrado indicios de que utilizó ciertas formas relacionadas con el número áureo. Las características de este trabajo nos obligan a limitar la muestra a unos pocos ejemplos.

Divisiones áureas de la horizontal y de la vertical

La triple división de un segmento unitario en $1/\varphi^2$, $1/\varphi^3$, $1/\varphi^2$ y que llamaremos *doble división áurea*[6], realizado para la altura y la anchura de un cuadro, produce una trama simétrica con nueve pequeños rectángulos, más atractiva que la basada en la división 1/3,1/3,1/3 que resulta monótona y rígida. Si aquella trama reticular coincide con divisiones notables del cuadro puede pensarse en el azar o que se haya trazado previamente una trama creada a partir de la razón áurea o incluso, como sugiere Neveux (1995), de la división de 3/8, 2/8 y 3/8 próxima a la áurea aunque ésta tiene poco interés interpretativo y ni siquiera sea más sencilla de construir (ver figura 9). Si se subdividen de igual forma los segmentos resultantes, *doble subdivisión áurea*, se obtiene una trama en la que las líneas conservan la proporción áurea (propiedad 2) teniendo mayor libertad para distribuir los objetos y que puede usarse en varios cuadros sin aparente repetición.

Mostramos dos ejemplos de cuadros donde se encuentra el solapamiento de la trama, especialmente la de la doble división áurea, con la estructura del cuadro a partir de algunos objetos que se encuentran en él, como personajes, caras, líneas, bordes, etc. Se usará la notación *Ha* (con *a=0;* φ'^2*;* φ'*;1*) para las divisiones áureas de la base y *Hab (*con *b=*φ'^2*;* φ'*)* para las correspondientes divisiones de *Ha*. Las verticales que pasan por esos mismos puntos, conservarán ese mismo nombre. Para la división de la vertical y sus perpendiculares por esos puntos substitúyase *H* por *V*.

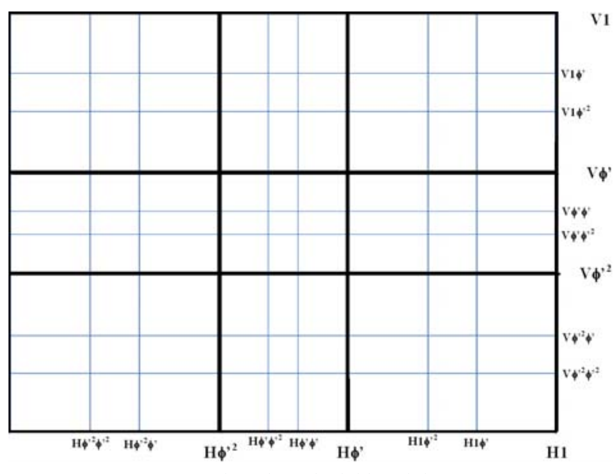


Figura 2. Trama basada en la doble subdivisión áurea.

El Papa Inocencio X

Realizado en su segundo viaje a Italia, con este cuadro consolidó su prestigio en los ambientes artísticos de Roma. Se observa que el soporte de los brazos se encuentra en $V\varphi'^2$ y la sortija en $H\varphi'^2$. La parte frontal de la cara se encuentra enmarcada por $H\varphi'^2$ y $H\varphi'\varphi'^2$. Dos de los bordes dorados del sillón se limitan por líneas de esta trama.

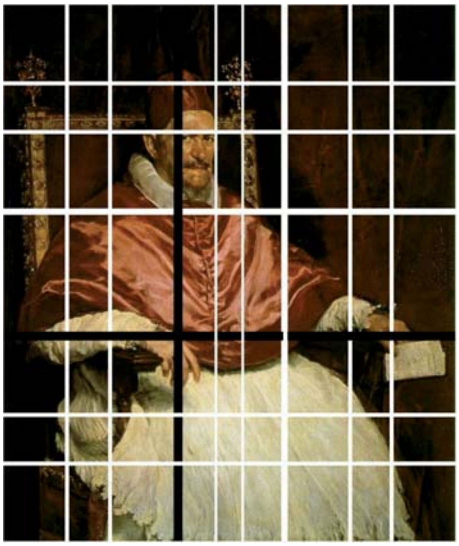


Figura 3. Subdivisiones áureas de El Papa Inocencio X (Galeria Doria-Pamphilij. Roma)

Baltasar Carlos

La posición del brazo derecho nos recuerda la del izquierdo de Inocencio X, ahora en $V\varphi'$. Los pies perfectamente delimitados por divisiones y subdivisiones áureas. La cara también está encuadrada entre $H\varphi'$ y $H\varphi'\varphi'^2$.

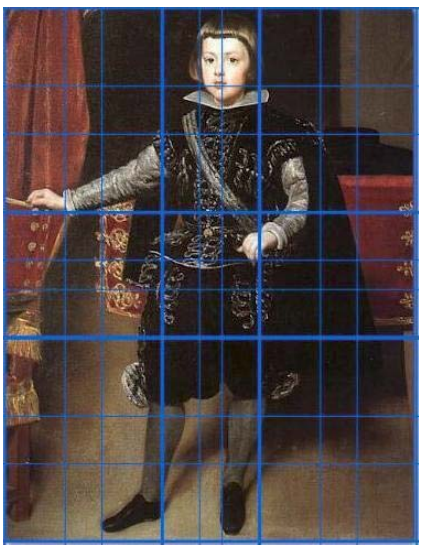


Figura 4. Trama ortogonal superpuesta al cuadro de Baltasar Carlos (Kunsthistorisches Museum. Viena).

Esta coincidencia de los pies con la doble división y subdivisión áureas se repite en muchos otros retratos como los de Pablo de Valladolid, de Felipe IV o del Conde Duque. La forma de colocar los pies es fundamental para el equilibrio de la persona representada. Con frecuencia vemos colocados los pies en posiciones determinadas, formando un ángulo entre ellos próximo a los 90º y limitados por subdivisiones áureas.

Retícula oblicua a partir de los ángulos de 36º y 72º

La trama ortogonal basada en la doble división áurea debería acompañarse de algún tipo de estructura oblicua para evitar que el cuadro resulte excesivamente rectangular, claramente en contra del gusto del Barroco. Para romper esa ortogonalidad puede usarse una retícula oblicua. La isométrica adolece del defecto señalado para la división en 1/3, 1/3, 1/3.

Sobre cada vértice A, B, C, D del cuadro trazamos las líneas que forman ángulos de 36º y 72º con la horizontal, completándolos con sus complementarios de 18º y 54º. Estos segmentos en varios cuadros de Velázquez parecen convertirse en líneas estructurales. Hemos identificado los segmentos por el vértice seguido de su inclinación.

El Papa Inocencio X

Las líneas A36, A72, B36, C36, C72, D36 y D72 separan las manos, el gorro, el mentón y la cara. D36 separa los ojos, A36 y B36 se juntan en el borde de la muceta con el sobrepelliz. Ampliando a los ángulos de 18º y 54º, vemos que C18 y D72 se cortan en el vértice superior izquierdo de la butaca.

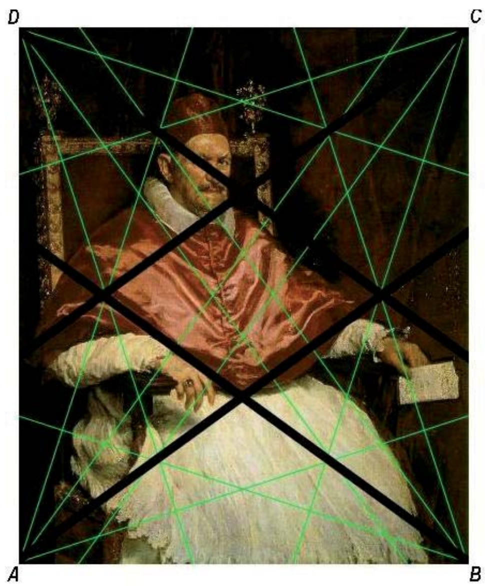


Figura 5. Retícula oblicua superpuesta con el cuadro de Inocencio X.

Para evitar en el lector que la trama completa dificulte la observacion de las coincidencias entre las líneas y segmentos de los cuadros, sólo mostramos a continuación la trama de 36º y 72º.

Felipe IV

Las líneas A72 y D72 hacen de límite de la mano, A72 y B72 de la cara del rey. C72 lo hará del borde izquierdo del zapato. El objeto situado encima de la mesa se limita por A54 y D36.

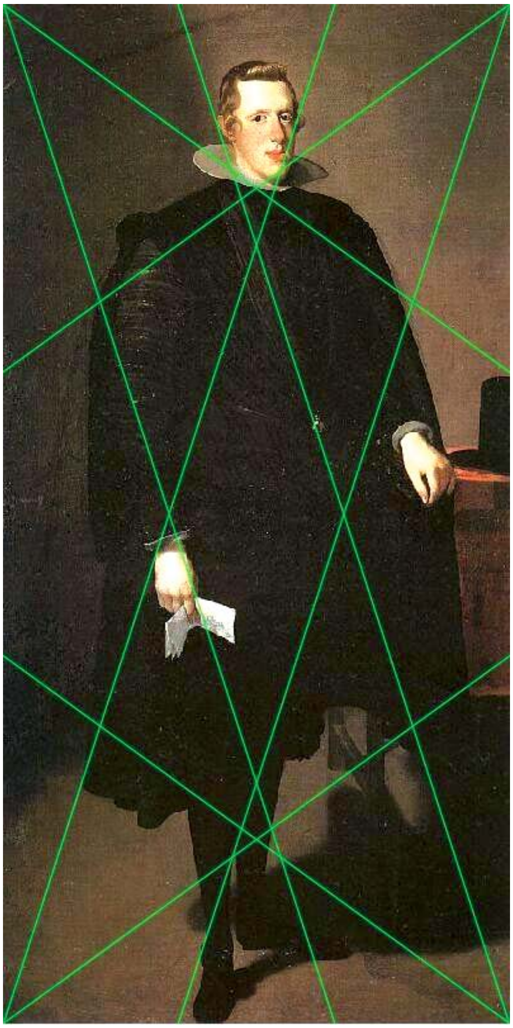


Figura 6. La retícula oblicua superpuesta al retrato de Felipe IV (Museo Nacional del Prado. Madrid)

El bufón Calabacillas

B72 hace de eje de simetría de la cara y C72 para el brazo y mano izquierdos. D36 separa la cabeza, del resto del cuerpo, mientras que C36 y D72 dividen o separan la mano y pie derechos.

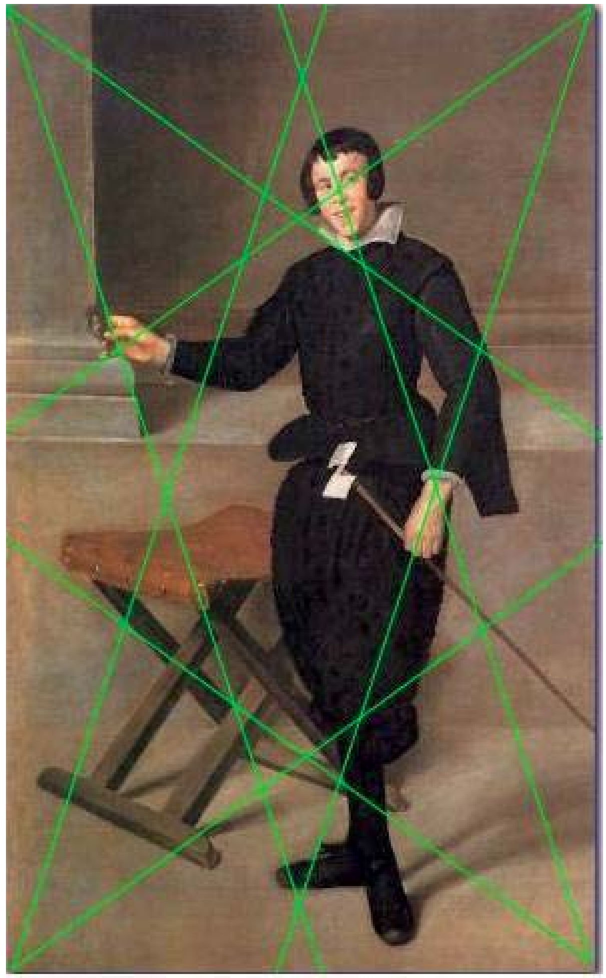


Figura 7. La retícula oblicua superpuesta al retrato del bufón Calabacillas (The Cleveland Art Museum).

Intersección de retículas. Formatos

Si Velázquez empleara una retícula ortogonal y otra oblicua basadas en el número áureo, tendría que tomar decisiones previas sobre las medidas del cuadro para que el encaje de una y la otra trama fuera armónico. ¿Existirá alguna propiedad que involucre a las dos tramas y que aparezca en un número razonable de cuadros de Velázquez? Seijas (1997) encontró en los cuadros de Velázquez del Museo del Prado algunos formatos[7] áureos (φ, $\sqrt{\varphi}$) y otros como $2/\sqrt{3}$.

Trazando las dos tramas en el cuadro del Papa se observa que A72 prácticamente se corta con Hv'^2 en V1 (señalado con un punto blanco en la figura 8). ¿Estarán las medidas de este cuadro diseñadas previamente para que concurran en un punto $H\varphi'^2$, A72 y V1 y lo hagan en otro punto A36, H1 y $V\varphi'$?

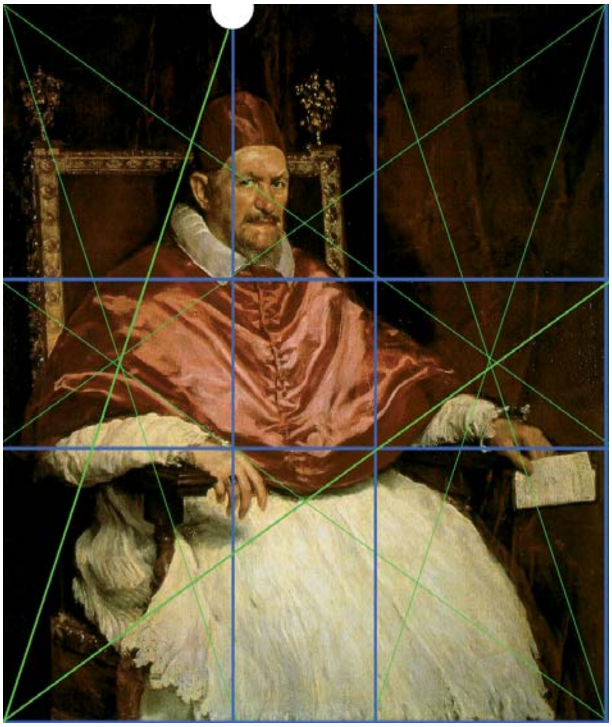


Figura 8. Superposición de tramas ortogonal y oblicua sobre el retrato del papa Inocencio X.

De las propiedades 2, 3 y 4 se deduce que las tres líneas concurren si el formato es $\sqrt{3-\varphi} = 1{,}1756...$ aunque para su construcción geométrica es más cómodo usar su equivalente $\sqrt{1+\varphi'^2}$. El formato del retrato es 7/6 = 1,166... La diferencia supone que los cortes de esas líneas distan entre sí 1,07 cm en ese cuadro y el ángulo difiere de 72º tan sólo 0,13º. Encontramos bastantes cuadros con un formato semejante que no idéntico. Si quisiera que las líneas se juntaran exactamente en un punto debería dar a todos idéntico formato sin variación entre ellos lo que resulta poco razonable. Hacerlos coincidir con valores como 7/6 o $2/\sqrt{3}$ permite una ocultación de la propia repetición.

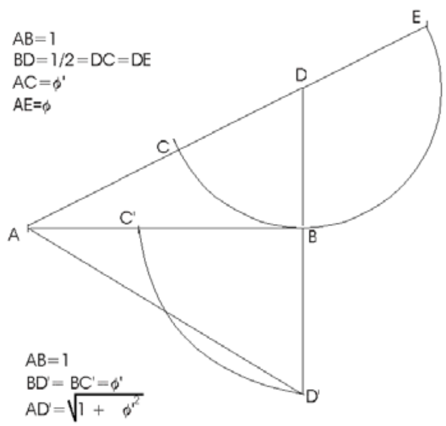


Figura 9. Obtención de φ , φ' y de $\sqrt{1+\varphi'^2}$ a partir de triángulos rectángulos.

Este formato $\sqrt{3-\varphi}$ resulta visualmente atrayente con dos puntos destacados en los que se cortan las líneas de la retícula oblicua de 36º y 72º. Veamos en que cuadros pudo haber usado este modelo considerando un formato entre 1,15 y 1,20 que corresponde a inclinaciones entre 71,5º y 72,5º (de la línea que une el punto A y el corte del borde superior, V1, con Hφ'²).

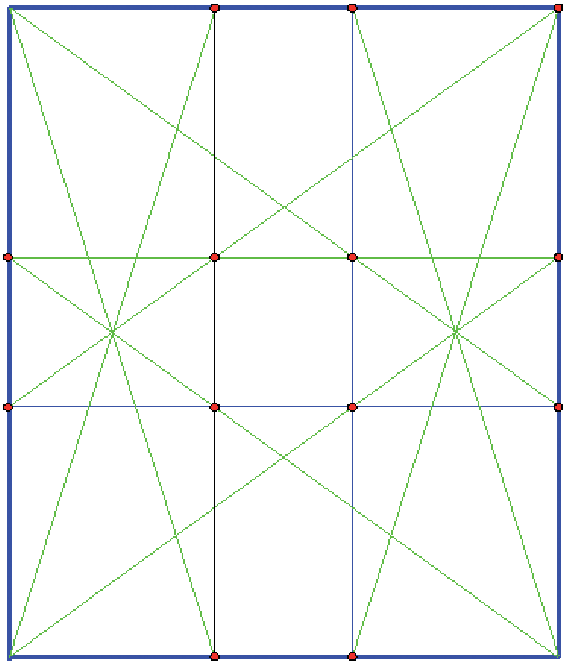


Figura 10. Superposición de tramas ortogonal y oblicua en el formato $\sqrt{1+\varphi'^2}$.

Cuadro	Formato exacto[8]	Cociente	Cuadro	Formato exacto	Cociente
Vieja friendo huevos	$\sqrt[4]{2}$	1,19	La comida	7/6	1,17
Villa Médici		1,16	Villa Médici fachada gruta		1,16
La tentación de Santo Tomás	6/5	1,20	Juan Mateos	6/5	1,20
Baltasar Carlos a caballo		1,20	La rendición de Breda		1,20
Retrato de hombre		1,17	Autorretrato		1,20
Un caballero de la orden de Santiago		1,20	Juan de Pareja		1,16
Inocencio X	7/6	1,17	Infanta Margarita		1,19

Tabla 1. Cuadros de formatos entre 1,15 y 1,20

Varios de esos cuadros se encuentran entre los más elaborados de Velázquez y en la mayoría se ven líneas que se superponen con las tramas ortogonal y oblicua. En su última época pintó casi exclusivamente con este formato, lo que parece ha pasado desapercibido entre los estudios sobre su pintura.

Rectángulos áureos

Suponiendo que Velázquez utilizó el número áureo en varias formas, cabía esperar que el rectángulo áureo fuera uno de sus formatos preferidos y que aparecieran otros rectángulos de este tipo en el interior de bastantes cuadros. Seijas Seoane atribuye un cuadro de Velázquez del Museo del Prado al formato áureo, si bien se trata de una copia. Encontramos algunos rectángulos áureos destacados en el interior de algunos cuadros aunque su número es relativamente escaso. Esto no resulta contradictorio con nuestra suposición ya que podría haber escogido usar diversas técnicas basadas en ese número sin hacerlo excesivamente explícito. Entre los que hemos encontrado algunos casos resultan sugestivos por dar origen a interesantes interpretaciones.

En el cuadro del Papa Inocencio X el papel que sostiene tiene esa misma forma al igual que la cara junto con el birrete papal.

Figura 11. Rectangulos áureos sobre partes determinantes del cuadro Inocencio X.

Significado simbólico del número áureo y posibles usos en su pintura

Aunque se hayan tardado siglos en saberlo, Velázquez fue un pintor barroco que incorporaba numerosos elementos conceptuales que tomaba de la mitología, de la historia y la religión fundamentalmente. Mencionamos atrás a Luca Pacioli quien utilizó sus estudios del número áureo para relacionarlo con conceptos como la perfección, el poder, el equilibrio harmónico, el conocimiento, Dios y la eternidad. En la biblioteca de Velázquez había libros que mencionan el número áureo[9] y estaba interesado en la temática científica y en la interpretación de los objetos representados, por lo que puede suponerse que conociera esas interpretaciones. Como señala Aterido (2007) respecto de esa bibliografía:

> Muy numerosa es la parte científica que revela una atención especial por temas diversos, pero con importante aplicación en su trabajo.

Un símbolo que combina el equilibrio y el cambio, el poder expresado por su universalidad, lo que se conserva indefinidamente, es atrayente para un pintor preocupado por la representación conceptual de sus cuadros[10].

Vamos a realizar una interpretación propia de lo que pudo expresar Velázquez en su cuadro *El Papa Inocencio* X.

El número áureo, símbolo asociado al equilibrio, a la conservación sin ser monótona, al propio Dios, ¿no es una forma apropiada de representar el orden establecido, el papado y la Iglesia? La Iglesia tiene que mirar al futuro, representado generalmente en la pintura por la zona externa al cuadro en su parte derecha. El brazo izquierdo del papa está dirigido a esa parte sostenido, sólidamente, por el brazo de la butaca en la posición $V\varphi'^2$. El pintor estaría recordando la solidez y atemporalidad de la Iglesia.

En su mano derecha lleva un símbolo del papado: el anillo que, como señal de subordinación, deben besar los creyentes a los que recibe. Es un símbolo del poder terrenal, demostrado tanto por la riqueza de la Iglesia como por su influencia. La mano que lleva el anillo se encuentra hacia abajo, lo que puede expresar el propio decaimiento del papa pero también lo poco que representa un individuo por poderes terrenales que haya tenido. Observando la posición del anillo vemos que se encuentra en $H\varphi'^2$ que es una posición asociada al poder y singularidad dadas por el número áureo. Ese poder representado por el anillo, es terrenal pero sigue siendo poder y es de carácter único.

Figura 12. Interpretación clásica del tiempo y de los valores personales en un cuadro.

Tradicionalmente se ha interpretado que en una división vertical en tres rectángulos, el tercio superior representa a lo más sublime, como la inteligencia, mientras que los valores de la parte inferior son terrenales (pudiendo llegar a lo despreciable). Esto concuerda con la posición del anillo situado en el tercio inferior áureo y sobre todo mirando hacia abajo.

En el centro de la doble división áurea de la horizontal se encuentra la cara del papa, enmarcada en un rectángulo áureo. Aquí la perfección no es, evidentemente, física, sino del intelecto asociado a la institución (cabeza+birrete).

La solicitud que lleva el papa Inocencio en su mano izquierda también se encuentra en la parte inferior áurea. Esta solicitud es también un rectángulo áureo donde Velázquez firma el cuadro[11]. Si el papel tiene medidas perfectas, puede querer representar la justicia de esa solicitud que realiza el pintor aunque lo haya colocado en una posición humilde que parece se le puede caer al papa. ¿Ha jugado aquí Velázquez con lo grande y lo pequeño y su propio ensalzamiento a base de hacerse pasar por humilde?

El número áureo en Las Meninas

Es una obra impresionante y compleja. Señala Portús (2005):

> En cuanto a *Las Meninas*, no es casualidad que una obra tan enrevesada desde el punto de vista de su contenido y su estructura incluya varias referencias histórico-artísticas y entre sus múltiples significados haya algunos relacionados con la teoría artística.

En esta obra, aplicando los criterios antes mencionados, encontramos formas áureas algunas coincidentes y otras diferentes de las que mencionan entre otros Seijas (1997), Del Campo (1989) y Rafael Pérez (2008). En la figura puede observarse que la abertura por la que entra la luz al fondo del cuadro es un rectángulo áureo. Se encuentra parcialmente oculto por José Nieto, personaje cuyo papel en el cuadro es notablemente diferente del de los demás y que ha intrigado a los investigadores, preguntándose por ejemplo si entra o sale del cuadro. Parece una persona que está fisgoneando donde no lo han llamado. Pese a encontrarse a contraluz lo muestra con suficiente detalle, como si quisiera que fuera reconocido a pesar de la distancia.

La luz, que se encuentra asociada tradicionalmente a la razón y a lo verdadero, aquí es muy intensa y doblemente perfecta por pasar por un rectángulo áureo. Un comentario clásico respecto de este cuadro señala la sensación de autenticidad que crea en el espectador, como si fuera concebido para ser visto no como un cuadro usual sino como un cuadro que hace sentir la sensación de realidad auténtica. ¿Usó Velázquez el símbolo de la luz, la verdad, que pasa por un rectángulo áureo como forma de decir que era su obra perfecta y real?

Esa luz en ese momento está obstaculizada por José Nieto, que reduce notablemente la iluminación de la sala (oculta el 55% del rectángulo), lo que pudo obligar a Velázquez a realizar una parada en su trabajo[12]. La "razón" se encuentra parcialmente bloqueada por un visitante inoportuno que podría estar representando, a través de José Nieto, al colectivo de nobles y cortesanos a los que Velázquez consideraba prescindibles e inútiles que los tenía en baja consideración y que intentaron obstaculizar su relación con el rey[13]. El hecho de que José Nieto fuera el aposentador de la reina, equivalente al cargo de Velázquez, le daba posibilidades de incluírlo en el cuadro sin alterar el sofisticado equilibrio de poderes del Alcázar y que en parte se reproducen en el cuadro.

Sobre el significado de esta obra se han expuesto muchas concepciones. Se considera que en ella no ha dejado nada al azar y que trata temas como la lealtad, la nobleza de la pintura y el propio autor, el futuro de la monarquía, aunque a José Nieto no se le da un papel especial en el cuadro. La conjetura expuesta sería coherente con la creencia, extendida entre muchos estudiosos de Velázquez, de que entre Nieto y Velázquez no había buenas relaciones, justificando así, que apareciera en su obra maestra, hecho que ha intrigado tradicionalmente a los investigadores. Sea esta correcta u otra, se observa que el papel de Nieto es fundamental para una interpretación de *Las Meninas*. Y los estudios de esta obra en el siglo XX demuestran que Velázquez nos ha dejado pistas que dificultan su interpretación, empleando para ello la óptica, la perspectiva, la geometría junto con un conocimiento profundo de la forma de pensar de su tiempo, quedando aún hoy como un singular objeto de estudio y admiración.

Al hallar en sus cuadros formas áureas en destacadas posiciones y objetos y que inducen en algunos casos a dotar de significado a esos objetos, se refuerzan notablemente los argumentos de que Velázquez usó conscientemente el número áureo. Y resulta coherente con su conocido interés por aportar en sus obras recursos simbólicos que le permitieran expresar sus ideas en temas como la pintura, el poder y la realidad mostradas en los cuadros.

Figura 13. Fragmento de Las Meninas (Museo Nacional del Prado), al que se insertó un rectángulo áureo que resulta coincidente con la abertura del fondo.

Mi agradecimiento a Carlos del Valle que me propuso el estudio y me aportó información y bibliografía.

NOTAS

[1] Y pobre del que naciera en un número de éstos.

[2] En parte como forma de reivindicar la generalidad y posibilidades expresivas de la pintura, tema de debate en tiempo de Velázquez. Otras razones pueden ser de discrección o secretismo. Los bocetos pueden ser una fuente de información, aunque de Velázquez no se ha encontrado prácticamente ninguno.

[3] El trabajo publicado más amplio en ese sentido es el de Del Campo (1978). En la tesis de Seijas (1997) se muestra que el formato de algunos cuadros de Velázquez coincide con formas áureas.

[4] Fue tomado como símbolo del conocimiento y empleado en sociedades secretas y místicas. Trazando diagonales en el nuevo pentágono y repitiendo el proceso, se crea una secuencia de estrellas y pentágonos.

[5] "Su contacto con científicos es terreno en el que profundizar, aunque ya en su etapa sevillana hay indicios de su conocimiento de las teorías de Galileo". Portús (2007).

[6] Obtenido por división áurea del segmento y la subdivisión áurea del mayor segmento resultante.

[7] El formato es el cociente entre el lado mayor y el menor.

[8] Consideramos exacto un formato que difiera menos de 0,0025, criterio también usado en el trabajo de Seijas.

[9] Entre los libros de su biblioteca se encuentran muchos textos de geometría, de arquitectura y de ciencias naturales. Así, tenía seis libros de los Elementos de Euclides, donde se define la proporción áurea como extremo y media razón.

[10] El carácter singular de ese número y sus propiedades matemáticas dan origen a esa universalidad ya que lo identifican de forma única.

[11] El nombre de Velázquez aparece en ese papel. Se considera que podía tratarse de una petición del pintor al papa o la propia credencial para ser recibido.

[12] Del Campo sostiene que a través de una serie de espejos le llegaba la luz que atravesaba la puerta hasta el cuadro que pintaba en ese momento.

[13] Por ejemplo intentando evitar que fuera nombrado caballero de la Orden de Santiago.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alpatov, M. (1935). Las Meninas de Velázquez. *Revista de Occidente,* Tomo XLVIII nº CXLII, pp.35-68.

Aterido, Á.(2007). La cultura de Velázquez : lectura, saber y red social. En *Fábulas de Velázquez*. Zaragoza: Museo Nacional de El Prado.

Bouleau, C. (1996). *Tramas. La geometría secreta de los pintores*, Madrid: Akal.

Cachafeiro, L.C. y del Valle, C.(2009). El número áureo en la obra de Velázquez. *Boletín del Museo e Instituto Camón Aznar*, nº104, pp. 7-45.

Del Campo, A (1989): *La magia de las Meninas, Una Iconología Velazqueña*, (4ª edición). Madrid: Ediciones y Publicaciones, S.A.

Esteban, J.F. (1998): *Tratado de iconografía.* Madrid: Istmo.

Martín Casalderrey, F.(2009). Velazquez y el retrato del espacio. *SUMA* nº 60, pp. 73-78.

Neveux, M. (1995). Radiographie d'un mythe*.* En *Le nombre d'or*. París: Éditions du Seuil.

Pacioli, L. (1987). *La divina proporción*. Madrid: Akal, .

Pérez, R. (2008). Matemáticas para compartir la belleza, *Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* Nº 16, pp7-27.

Portús J. (2007). Velázquez, pintor de historia. Competencia, superación y conciencia creativa. En *Fábulas de Velázquez* Madrid: Museo Nacional de El Prado.

Portús J. (2005). Las Hilanderas como fábula artística, *Archivo Español del Arte*, nº 41, pp 70-83, Madrid.

Seijas, J. M.(1997). *Los Formatos de la Pintura Española del siglo XVII conservada en el Museo del Prado*. Tesis doctoral. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Este artículo fue recibido en SUMA en enero de 2009 y aceptado en marzo de 2010

suma+ 64
Junio 2010, pp. 15-24

Las matemáticas no me han servido para nada... pero dicen que las matemáticas son imprescindibles...

La justificación de la presencia de la matemática en la educación secundaria puede darse a partir de perspectivas internas o externas a ella. El artículo pone de manifiesto que en las clases de matemáticas se da un cierto desequilibrio hacia los argumentos internos, lo que dificulta el acercamiento a las matemáticas de buena parte del alumnado y puede obstaculizar la adquisición de la competencia básica en la materia. En el artículo se apuesta por equilibrar la balanza acentuando una visión social y práctica de las matemáticas a partir de la introducción en el aula de contextos y situaciones donde sean necesarias.

Palabras Clave: Innovación didáctica, resolución de problemas, modelización, actitudes, secundaria.

Mathematics were useless for me... but people say they are essential...

Internal and external explanations can justify the presence of mathematics in secondary education. The article shows that there is a certain imbalance towards the internal arguments when teachers try to justify mathematics in the curricula. This situation drives out many students and can prevent the acquisition of basical competences in this subject. In the article we propose to balance towards the social and practical vision of the mathematics and to introduce concepts through contexts and situations where mathematics are needed.

Key words: Educational innovation, problem solving, modelling, attitudes, secondary education.

> La democracia es una broma si los ciudadanos son analfabetos en matemáticas. La política no son palabras, son números y, al final sólo se puede juzgar por los números. El ciudadano que no entiende los presupuestos públicos es pasto de la verborrea de los políticos.
>
> (Mogens Niss, 2005)

¿Qué papel juegan las matemáticas en la vida de las personas?¿Por qué mucha gente cree que las matemáticas que estudiaron en la escuela no le sirvieron para nada? ¿Por qué, a pesar de ello, todo el mundo admite que se deben estudiar y nadie cuestiona su inclusión en el currículo escolar? ¿Por qué las incluyen los currículos de todos los países? ¿Qué tienen las matemáticas que se aman o se intentan olvidar sin situaciones intermedias?

Cómo se ven las matemáticas después de la escuela

Leemos el diario, escuchamos las noticias de la televisión, vamos por la calle e intuimos matemáticas por todas partes, pero nuestra percepción no es universal porque formamos parte de esta pequeña franja de población que las entiende, las ama, las vive y vive de ellas (como enseñantes de matemáticas). Tenemos una visión sesgada de la realidad que puede dificultar nuestra práctica docente porque llegamos a olvidar que actuamos desde nuestra percepción matemática del mundo, de modo que tal vez no somos capaces de ponernos en la piel de nuestro alumnado.

En un curso de formación, dirigido a profesorado del PQPI [1], se invita a las personas asistentes a recordar una o dos situaciones de la vida real en las que hayan utilizado las matemáticas y en las que el hecho de saber algo de ellas les haya ayudado a resolver o a comprender mejor la situación que descri-

Marta Berini López-Lara
IES Joanot Martorell. Esplugues de Llobregat
Daniel Bosch Blanch
IES les Corts. Barcelona
Martí Casadevall Pou
IES Arquitecte Manuel Raspall. Cardedeu
Iolanda Guevara Casanova
IES Badalona VII. Badalona
Damià Sabaté Giménez
ICE (Institut de Ciències de l'Educació) de la UPC

ben. Con esta actividad se pretendía sensibilizarlos con la idea de que las matemáticas están por todas partes, que no se puede vivir sin ellas, (en el sentido que nos dice Mogens Niss) y a la vez se intentaba que la actividad diese lugar a pensar en situaciones de la vida real con las que poder introducir la mayoría de los contenidos de un currículo básico de matemáticas.

Las respuestas fueron múltiples y mostraban situaciones diversas: comprobación del cambio al ir a comprar, reformas en una casa, rebajas, previsión de gastos mensuales, entender una multa[2], hipotecas y créditos, recetas de cocina, cambios de moneda extranjera, precio de la vivienda en relación a los m^2, cálculo del IVA, estimación del tiempo de un recorrido, reparto de gastos después de una cena en grupo, presupuestos, compra de materiales para bricolaje, composición de un champú, cálculo de personas para realizar un trabajo, reparto de herencias, compra del modelo de aire acondicionado más adecuado al espacio a refrigerar…

Para cada situación se desglosan las matemáticas que se utilizan y se ve como en algunos casos confluye más de un tema: por ejemplo, medida, geometría, proporciones y estadística en el ámbito de la compra, alquiler o reforma de la vivienda y las hipotecas o créditos que pueda comportar. Es evidente que van apareciendo buena parte de los temas del currículo de los primeros cursos de la ESO de manera contextualizada. Las matemáticas que se usan adquieren sentido porque sirven para resolver la situación: las operaciones con los números no son un mero ejercicio de cálculo sino que dan la respuesta a la cantidad que, en las condiciones descritas, se está buscando; las proporciones se utilizan para ampliar una receta de cocina en caso de que haya más o menos comensales; los porcentajes que aparecen calculan un descuento, un IVA; el cálculo de áreas se relaciona con el precio de las viviendas; etc… y así cada objeto matemático que surge tiene su razón de ser, nada sobra ni es inútil. Las matemáticas que aparecieron en esta experiencia recubrían la mayor parte del currículo de los dos primeros cursos de la ESO.

Si en la vida real se utilizan las matemáticas, ¿por qué muchas personas tienen la percepción de que las matemáticas escolares son inútiles? ¿Dónde y cuándo se aprenden las que se utilizan en la vida real? ¿Es que en la escuela todo se remite a aprender a contar, a calcular y a resolver ecuaciones sin saber muy bien cuándo utilizarlo, sólo como mero divertimento, como gimnasia mental o en el peor de los casos, como una gymkhana de obstáculos que se debe superar para obtener el aprobado? ¿Se tratan habitualmente en el aula de matemáticas situaciones como la de la figura 1, donde las matemáticas son indispensables para dar respuesta a una necesidad en un contexto real, o más bien se proponen problemas como los de la figura 2 que corresponden a la tradición académica?

Cocinar para 20 personas

A menudo las recetas de cocina están pensadas para un número determinado de personas y debemos hacer una transposición para las personas que queremos cocinar. Si se trata de una comida salada haremos una aproximación, incluso con según qué postres también actuaremos así, ahora bien si se trata de un pastel hace falta que seamos muy cuidadosos con las proporciones porque de lo contrario nos exponemos que el pastel no suba adecuadamente cuando lo ponemos al horno o quede excesivamente denso.

A partir de las dos recetas siguientes, calculad para cada caso los ingredientes, si queréis cocinar para 20 personas. En pastelería se cuenta un mínimo de 100g por persona.

Arroz negro

Elaboración:	Ingredientes par a seis personas:
Picáis las cebollas y echadlas en una cazuela de barro con aceite: dejadlas al fuego al rojo vivo hasta que se sofrían. Entonces añadís dos dientes de ajo picados, el pimiento a dados pequeños y los chipirones, mezcladlo bien. Peláis los tomates, sacando las semillas, picadlos bien y añadidlos a la cazuela. Veréis como los chipirones van desprendiendo su tinta, cosa que hará volver el arroz de un color negruzco. Añadiréis el arroz y lo mezcláis bien. Ponéis el agua al fuego, aparte y añadidla cuando esté hirviendo. Dejáis, durante unos veinte minutos, que hierva todo a fuego suave. Picáis en el al mortero los dos dientes de ajo que os quedan con algo de aceite y añadidlo a la cazuela unos minutos antes de retirarla del fuego. Saladlo y servidlo.	Chipirones 600g Arroz 500 g Cebollas 2 Tomates maduros 4 Sal Pimientos 3 Aceite 2 dl Ajo 4 dientes Agua 1250 c

Pastel de zanahoria y coco

Elaboración:	Ingredientes:
En un bol batiréis los huevos hasta punto de nieve y a continuación iréis añadiendo sin dejar de batir el azúcar, el coco, la zanahoria, la harina y el bicarbonato. Untáis un molde con aceite de oliva, vertéis la mezcla del bol y ponedlo al horno a 200º unos 30 minutos.	200 g de coco rallado 200 g de zanahoria rallada 150 g de azúcar integral 2 huevos grandes (75 g /unidad) 100 g de harina integral 1 cucharilla de bicarbonato en polvo

Figura 1: Recetas de cocina


7

2916 cm² de superficie

27.—¿Qué longitud tendrá el lado del cuadro que ha terminado el pintor?

Solución

$\sqrt{2916}$ | 54

Resultado
Tendrá de lado 54 cms.

28.—El mismo pintor quiere pintar un tapiz cuadrado que tenga la misma superficie que otro que tiene 18.225 centímetros cuadrados de superficie. ¿Cuánto tendrá de lado el tapiz cuadrado?

Solución

$\sqrt{18225}$ | 135

Resultado
Tendrá 135 cms. de lado

29.—CALCULO MENTAL.—Averiguar el lado de un tapiz cuadrado de 9 metros de superficie.

RESULTADO. . . . 3. . . . metros.

Fig. 2: ¿Qué problemas se resuelven en clase de matemáticas?
Problemas Salvatella. Javier Kühnel. Libro del maestro. Año 1959

Figura 3: Los usos de la calculadora

Si las matemáticas escolares se restringen al entrenamiento en cálculo, primero con números y más adelante con expresiones algebraicas sin saber cuándo, cómo y para qué utilizarlas, estaríamos dando la razón al profesor de literatura de la UAB, Francisco Rico, cuando afirmaba en una entrevista al diario *El País*:

> Uno de los mayores problemas de España es el insuficiente conocimiento escrito y hablado de las lenguas extranjeras. Entre otras cosas porque se enseñan mal. Del bachillerato habría que salir hablando perfectamente al menos una de ellas. La culpa es de los planes de estudios, que convierten estas asignaturas en marías. Las básicas deberían ser la lengua española y la lengua extranjera. Y la literatura, que es lo que enseña a conocer el mundo. Las asignaturas técnicas, las matemáticas, no hacen ninguna falta: cualquier calculadora u ordenador te lo da todo hecho. (Rico, 1996)

El currículo que nosotros defendemos contiene una parte dedicada al cálculo, pero éste no aparece como un fin último (de él se encargará la calculadora cuando no sea suficiente el cálculo mental), sino como una herramienta para comprender e informar sobre un mundo real repleto de datos numéricos. La educación matemática, que no puede clasificarse como de ciencias o de letras, debe capacitar a toda la población para comprender el significado de lo que hacemos o escribimos cuando utilizamos números, y de la coherencia del resultado obtenido cuando lo referimos a una situación o a un problema concreto (lo que no hace la calculadora).

Volviendo a los asistentes al curso e intentando reflexionar sobre la lista construida por todo el grupo sobre las matemáticas que les han sido útiles, les proponemos que construyan una nueva lista de situaciones que reúnan una doble condición: ser útiles a su alumnado a corto y a más largo plazo, fuera del ámbito escolar, pero que además sean suficientes para dar pie a introducir todos los contenidos que deben tratar en sus clases. La reacción mayoritaria entre el profesorado asistente pone el dedo en la llaga. Nos dicen: "Ah, ¿pero esto es posible? Nos quedaremos con las más básicas, pero las matemáticas auténticas quedaran fuera, ¿verdad?".

Es como si unas matemáticas que se comprendan y sean útiles no fueran auténticas, como si fueran de segunda clase. Las de verdad tienen que ser difíciles y abstrusas, no contaminadas con la vida real y sólo accesibles a unos pocos para su comprensión y disfrute.

¿Por qué se nos ha hecho creer desde la infancia que había una relación directa entre la inteligencia de las personas y su éxito en la asignatura de matemáticas? ¿Por qué no se ha avanzado un poco más en la vertiente social y cultural de las matemáticas, la que preconizan Alan J. Bishop (1999), Cristine Keitel (2004), Mogens Niss (2002) y tantos otros?

El nuevo currículo de secundaria, que se imparte en Catalunya desde el curso 2007-2008, ya habla de las matemáticas como instrumento de análisis de la realidad; si se camina con esta perspectiva y se hace vivir al alumnado esas situaciones que dan razón de ser a las matemáticas como instrumento de análisis de la realidad, algo se habrá avanzado:

> Las matemáticas son un instrumento de conocimiento y análisis de la realidad, y al mismo tiempo constituyen un conjunto de saberes de un gran valor cultural, cuyo conocimiento ha de ayudar a todas las personas a razonar, de manera crítica, sobre las diferentes realidades y problemáticas del mundo actual. Por este motivo la educación matemática en las etapas obligatorias debe contribuir a formar ciudadanos y ciudadanas que conozcan el mundo en que viven y que sean capaces de fundamentar sus criterios y sus decisiones, así como adaptarse a los cambios, en los diferentes ámbitos de su vida. Asimismo, las matemáticas posibilitan la creación de modelos simplificados del mundo real que permiten una interpretación acotada de éste y a la vez generan problemas adecuados al momento educativo del alumnado facilitando su espíritu crítico y despertando su creatividad. (Decret 143/2007, DOGC[3] núm. 4915)

Cómo ve las matemáticas el profesorado de matemáticas

¿Cómo defenderíamos la inclusión de las matemáticas en el currículo escolar? ¿Qué visión de las matemáticas debería prevalecer en la educación matemática? ¿Cómo enmarcaríamos las matemáticas escolares? ¿A qué deberían dar respuesta?

Algunas personas sostienen que las matemáticas son un arte. Godfrey H. Hardy, por ejemplo, nos dice: "Un matemático, lo mismo que un pintor o un poeta, es un constructor de configuraciones. Si sus configuraciones gozan de mayor perdurabilidad que las construidas por los demás hombres es a causa de que su material básico son las ideas."; y también: "La belleza es la primera piedra de toque; en el mundo no hay un lugar permanente para las matemáticas desagradables desde el punto de vista estético." (Hardy, 1981)[4]

Fig. 4: Exposición "Arte fractal: Belleza y matemáticas"
Congreso Internacional de Matemáticos, Madrid (2006).
http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Exposiciones/ArteMate/FractalesICM/Fractal01.asp

Ante un objeto de arte, en el museo, en el concierto, podemos reaccionar de diferentes maneras; si tenemos estudios sobre historia del arte, sobre música, tendremos más recursos para entender y apreciar la obra. A pesar de ello ante una obra de arte siempre se apela a la sensibilidad personal, ¿nos ha emocionado? Desde esta perspectiva, la educación matemática consistiría en acercar las obras de arte matemáticas al alumnado y dar las claves para que todo el mundo pueda comprenderlas y disfrutarlas. Y es cierto que un buen profesor o profesora puede contribuir de manera determinante a este objetivo, como un buen profesor de música será decisivo para que su alumnado pueda llegar a emocionarse escuchando una sonata o un concierto. Pero ¿lo conseguirá con todos? Y además, ¿tendrá la mayoría del profesorado suficiente talento, entusiasmo y recursos para lograrlo? Muchas veces se culpabiliza al profesorado presuponiendo que el problema de la educación matemática se encuentra en la manera de enseñarlas. Pero ¿no será que el problema está en qué matemáticas se enseñan? Continuando con el símil musical en relación a las distintas sensibilidades y capacidades del alumnado, ¿es que podríamos basar una educación musical para todo el mundo en un tipo de música que sólo entusiasmara a una pequeña parte de este alumnado? ¿De qué se trata, de educar en un tipo de música, la auténtica, o de educar musicalmente?, ¿de educar pensando en quien tenga una especial predisposición o talento musical, o en la mayoría que no lo tiene? ¿Puede alguien citar a una persona a quien le disgusten todos los tipos de música? Como la música, las matemáticas están en todas partes, sólo sería necesario que cada cual, durante su etapa escolar, encontrase "sus" matemáticas.

Bajo esta visión, que busca la justificación de la educación matemática dentro de las matemáticas, hay quien además hace hincapié en que son la ciencia del razonamiento, porque ayudan a pensar y a razonar y que, una vez se ha aprendido a pensar y a razonar utilizando las matemáticas, el método es transferible a cualquier situación de la vida que lo requiera porque estructuran la mente, y es por ello que tienen un fuerte valor metodológico. Así, su enseñanza se sustenta en el hecho de que ayudan a organizar el pensamiento por su alto valor lógico y deductivo.

En este sentido, el currículo catalán, cuando organiza las ocho competencias básicas en cuatro grandes ámbitos, el comunicativo, el metodológico, el personal y el específico, sitúa la competencia matemática en el grupo de los metodológicos, junto al tratamiento de la información y la competencia de aprender a aprender. Y esto se hace a pesar de que la competencia matemática incluya una vertiente comunicativa y otra muy destacada de resolución de problemas y situaciones en contextos reales, que estarían más próximas, la primera al grupo de las competencias comunicativas y la segunda al grupo específico centrado en convivir y habitar el mundo. Desde esta visón, aprender matemáticas implica aprender a pensar y a razonar, requiere un esfuerzo y comporta una dificultad, y es un reto personal que se debe trabajar y potenciar en la escuela. Los juegos, los divertimentos matemáticos, los concursos, etc. son un buen estímulo para desarrollar el razonamiento matemático, pero la realidad nos muestra que no todo nuestro alumnado transita por este camino.

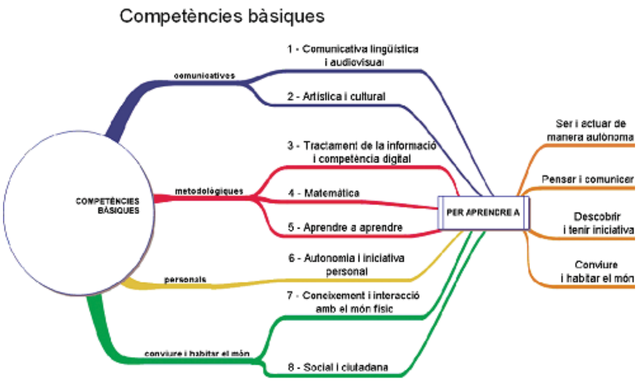


Figura 5: Competencias en el Diario Oficial de la Generalitat de Catalunya

Siguiendo la línea de los valores intrínsecos de la matemática, existe una tercera visión que defiende su enseñanza para contribuir a la formación propedéutica del alumnado, para ayudarle a superar listones académicos. Las matemáticas no sólo están en los currículos de la educación secundaria obligatoria sino que también se incluyen, con mayor o menor profundidad, en estudios de niveles superiores de carácter científico. Algunas veces, más como materias de control de acceso y superación de etapas, que como herramienta al servicio del desarrollo profesional de esos estudios específicos. Pero en cualquier caso, desde este punto de vista, la inclusión de las matemáticas en el currículo obligatorio quedaría justificada para preparar estos estudios posteriores. ¿Cuántas veces no hemos oído o hemos formulado nosotros mismos aquella respuesta comodín de "ya verás más adelante para qué sirve, ahora es cuestión de estudiarlo"?

Más allá de buscar una respuesta que justifique la inclusión de las matemáticas en el currículo obligatorio desde un punto de vista intrínseco, por su belleza como arte, su contribución a la organización de la mente o su necesidad para los estudios posteriores, pensamos que sería importante mirar hacia la naturaleza extrínseca, sus relaciones con otras ciencias y con el medio social y cultural.

Alan J. Bishop, en su libro *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural* (1999) argumenta que así como la comunicación es la actividad básica para el desarrollo del lenguaje humano, existen unas actividades o necesidades humanas que se han dado y se dan en todas las culturas y que estarían en la base del origen y el desarrollo de las matemáticas y darían razón de ser a la inclusión de las matemáticas en el currículo obligatorio. Estas actividades son: contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar, y sobre ellas se debería basar una educación matemática para toda la población.

También Christine Keitel, recaba el punto de vista social:

> Hoy en día las matemáticas se utilizan mundialmente en todos los ámbitos de la sociedad y casi no hay ningún proceso de toma de decisiones políticas en el que las matemáticas no se utilicen como un argumento racional o como base objetiva para reemplazar las decisiones políticas y las relaciones de poder. (Keitel, 2004).

En este sentido, desarrolla una explicación social de las matemáticas y las relaciona con el poder político cuando argumenta que (está hablando del proceso de comunicación entre clase política y ciudadanía) "la regulación y el control democrático de los estudios, de los desarrollos y procesos de aplicación de las matemáticas presentes y futuras, y de la enseñanza de las matemáticas, necesitan una competencia y un conocimiento específico por parte de la clase política, para que la capacite en el momento de tomar decisiones, y un nuevo conocimiento por parte de la ciudadanía para poder ejercer la evaluación y el control democrático que le corresponde." (Keitel, 2004).

Para completar esta visión del papel de las matemáticas en la sociedad podemos recoger algunos de los argumentos de Mogens Niss (2002) cuando analiza la vinculación de esta ciencia al funcionamiento y al desarrollo de la sociedad desde tres ámbitos.

El primero, por su papel en la ciencia y la tecnología. Con esta idea sintoniza el hecho que, a nivel de la OCDE, la competencia matemática, reconocida dentro de las ocho competencias clave o generales para el conocimiento no es única, como la sitúa el decreto del MEC o el de la Generalitat de Catalunya, sino que forma parte de una competencia más general, la competencia en matemática, ciencia y tecnología, que es la tercera de la lista después de la comunicación en lengua materna y de la comunicación en lenguas extranjeras.

Competencias para una sociedad del conocimiento	
UE/PISA: Competencias clave para el aprendizaje permanente	**BOE: Competencias básicas**
1. Comunicación en lengua materna 2. Comunicación en lenguas extranjeras 3. Matemática y Ciencia y Tecnología 4. Digital 5. Aprender a aprender 6. Sociales y cívicas 7. Sentido de la iniciativa y espíritu de empresa 8. Conciencia y expresión cultural	1. Comunicación lingüística 2. Matemática 3. Conocimiento y interacción mundo físico 4. Tratamiento de la información y competencia digital 5. Social y ciudadana 6. Cultural y artística 7. Aprender a aprender 8. Autonomía y iniciativa personal

Figura 6: Las competencias según PISA y según el BOE (2006)

En segundo lugar, argumenta que las matemáticas también participan directamente en una serie de áreas profesionales especializadas. Se puede mencionar la predicción y toma de decisiones en la economía; el cálculo de las tarifas de las empresas aseguradoras; la predicción y previsión de fenómenos de la naturaleza; el funcionamiento y regulación de sistemas industriales; los usos de la criptografía para preservar la información privada transmitida por internet; etc.

En tercer lugar, las matemáticas son un elemento esencial pero, irónicamente, a menudo ignorado y poco reconocido en una gran variedad de prácticas no especializadas de la vida cotidiana de la sociedad: la representación de números, los negocios elementales y las transacciones económicas; los calendarios; las coordenadas geográficas; la medida del tiempo; los dibujos; las formas de los objetos; los códigos en general y en particular los códigos de barras. Todo esto invade innumerables aspectos de la vida moderna. La capacidad de dominar sin problemas estos elementos para la vida privada y social, la posesión de una competencia básica en matemáticas, es una necesidad de la misma manera que lo es el alfabetismo.

Fiura 7 : El código de barras del libro *Enculturación matemática* (1999).

En general, la escuela parece dedicar poca atención a la adquisición de "sentido numérico" y de "sentido de la medida"; se consideran "triviales" y, por ende, poco dignos de atención por parte de amplios sectores del profesorado de matemáticas. Sin embargo, la carencia de estos "sentidos" puede equipararse al analfabetismo en matemáticas que imposibilita el aprendizaje comprensivo de contenidos más complejos y, lo que es peor, deja indefensas a las personas ante cualquier disparate:

> El anumerismo y la seudociencia suelen ir de la mano, debido en gran parte a lo fácil que es invocar la certidumbre matemática para obligar al anumérico a asentir estúpidamente ante cualquier información. (Paulos, 1990)

La perspectiva intrínseca de la actividad matemática

En el apartado anterior se exponían diferentes visiones del papel de las matemáticas, se apuntaba que cada una de ellas conducía a una manera de entender la educación matemática y se entreveían las justificaciones que estas posturas podían argumentar para justificar la inclusión de esta materia en el currículo escolar obligatorio. En realidad, y para ser exactos, cabe pensar que estas concepciones sobre esta ciencia y su enseñanza no son excluyentes y seguramente el lector o lectora se puede sentir identificado con más de un argumento.

Paul Lockhart, entroncando con la posición de Godfrey H. Hardy que se ha citado anteriormente, escribe en el 2002 (en español, 2008) *El lamento de un matemático* (2002) donde defiende la postura de las matemáticas como arte. El artículo fue un auténtico bombazo en el mundo de la educación matemática, en Estados Unidos primero y después en todo el mundo. Su autor, nunca lo publicó. Sin embargo, a los pocos meses de ser gestado corría como la pólvora entre los círculos de profesores de matemáticas más sensibilizados por los contenidos de esta materia en la enseñanza primaria y secundaria. Paul Lockhart había dejado la enseñanza universitaria y, desde el año 2000, es profesor de matemáticas en la Saint Ann's School en Brooklyn, Nueva York, donde da clases a alumnos de secundaria y, según sus palabras, subvirtiendo el orden establecido. Paul Lockhart (2008) comenta en su artículo: "Lo primero que hay que entender es que las matemáticas son un arte. La diferencia entre las matemáticas y el resto de las artes, como la música y la pintura, es que nuestra cultura no la reconoce como tal."

A lo largo de todo el artículo Lockhart hace una crítica radical y profunda de los contenidos de matemáticas que se enseñan en la educación primaria y secundaria y de la forma de enseñarlos. A pesar de sus seis años de existencia, no ha perdido actualidad, y menos aún en nuestro país sometido cada pocos años a cambios curriculares. Lockhart se atreve a decir alto y claro que las matemáticas que estamos enseñando no son las que necesita la ciudadanía del siglo XXI y que urge un cambio radical, no sólo en la forma de enseñar matemáticas, sino también en las matemáticas que se enseñan.

Después de leer el artículo coincidimos en la descripción de la situación de la educación matemática que presenta, pero como dice Simplicio, uno de los dos personajes que utiliza para construir su discurso, le diríamos a Salviati, el otro personaje que actúa en el diálogo y que expresa la opinión del autor: "Vale, estoy profundamente deprimido. ¿Y ahora qué?". No encontramos un horizonte claro para cambiar la situación yendo por este camino. Coincidimos en que el estudiante debe ser en todo momento el objeto de la educación y que esto sólo es posible si está participando permanentemente en el proceso de construcción, pero cómo hacerlo es lo que no nos queda claro. Por otro lado, Lockhart soslaya la necesidad de que el alumnado salga del sistema escolar sabiendo aplicar conocimientos matemáticos básicos a situaciones prácticas. Tengamos en cuenta lo que Hardy opinaba de las matemáticas aplicadas: "Una parte realmente ínfima de las matemáticas tiene utilidad práctica, y puede decirse que, comparativamente con otras de sus ramas, esta pequeña parte goza de una notable tosquedad." (Hardy, 1981). Estas matemáticas pretendidamente "toscas" podrían resultar muy poco "artísticas" y su lugar en la escuela quedaría en entredicho.

Figura 8: Matemáticas, ¿ciencia o religión?

Siguiendo el análisis de las consecuencias que tienen para la educación las diversas concepciones de las matemáticas, le llega el turno a la concepción metodológica, que tiene puntos en común con la que preconiza Lockhart: es la matemática que enseña a pensar, a razonar, a estructurar las ideas, la que organiza la mente. Pero ¿con qué contenidos trabajamos? ¿Qué es lo que se quiere estructurar? ¿Quién quiere estructurar y organizar, el profesorado o el alumnado? No nos queda muy claro cómo se puede atrapar a la mayoría del alumnado con esta concepción. ¿En qué consisten las clases de matemáticas para estos alumnos y estas alumnas? ¿Le argumentamos a nuestro alumnado que lo que está haciendo es muy interesente porque les enseña a pensar?

Por último, la concepción que considera que hay que aprender matemáticas para prepararse de cara a estudios posteriores, nos parece que no es un fin en sí mismo, que puede ser una necesidad, pero que trabajar poniendo el énfasis en esta finalidad no va a ayudar mucho a modificar la idea de que las matemáticas no han servido para nada. Tal vez a unos pocos les habrán servido para continuar estudiando por la vía científica, pero estamos otra vez lejos de las matemáticas para todos.

Apoyándonos en las características intrínsecas de las matemáticas, la belleza y la competencia metodológica, no parece que podamos extender la educación matemática para todo el mundo; tal vez el problema consista en querer justificar las matemáticas desde dentro, y convendría dar un giro hacia los aspectos extrínsecos. Desde hace miles de años se hacen y se enseñan matemáticas; quizás debamos buscar razones externas a las matemáticas y también prestar atención a lo que nos pueda revelar su historia.

La perspectiva extrínseca de la actividad matemática

¿Hacia dónde nos encaminamos? ¿Qué puntos de vista tendríamos que potenciar si queremos educar para que más personas dejen de pensar que las matemáticas que estudiaron no les sirvieron para nada?

Pero no sólo deberíamos responder a estas cuestiones, sino también a alguna otra como, ¿qué matemáticas hay que enseñar para evitar hacer de ellas un uso bienintencionado pero con poco sentido? Seguramente muchos de nosotros hemos recibido un fantástico “Power Point” o leído algún artículo en que se plantea la discrepancia con la idea de que para paliar la crisis económica el estado invierta recursos en ayudar a los bancos. En él se argumenta que si los millones de euros de fondos invertidos se distribuyesen entre los millones de habitantes del planeta, tocaría a más de cien millones de euros por persona, cuándo en realidad se debería sacar la “coletilla” millones y quedarnos con 100 € a secas. ¿No es esto una prueba de la falta total del sentido numérico por parte de los cientos de usuarios de internet que se han ido pasando la noticia? ¿Por qué esta grave distorsión numérica de la realidad ha sido poco contestada y nadie, que sepamos, se ha rasgado las vestiduras públicamente como seguramente hubiese ocurrido si un error de tal magnitud hubiese aparecido, por ejemplo, en relación a una cita literaria o una obra pictórica?

En esta misma línea también encontramos personajes famosos, políticos, deportistas, etc. que dicen no saber nada de matemáticas y quedarse tan anchos. Seguramente todas aquellas personas que ven las matemáticas como un objeto de selección y que da un cierto pedigrí se frotarán las manos, pero, ¡qué lejos estaremos otra vez de las matemáticas para todos!

Figura 9: ¿Resolución de problemas de la vida real?

¿Qué nos enseña la historia? ¿Qué otra materia se está dando sin mención a su historia, a su filosofía, a su desarrollo temático, a criterios estéticos y a su estado actual? ¿Qué otra asignatura evita constantemente sus fuentes principales? Las matemáticas se han visto a menudo como una disciplina desconectada de las influencias sociales y culturales. La historia puede ilustrar sobre la superficialidad de esta concepción. Los números negativos, por ejemplo, ¿cuándo fueron aceptados por la comunidad matemática? Se resolvían ecuaciones y cuando las soluciones eran negativas simplemente se decía que no existía solución. Paralelamente, los tratados mercantiles alemanes aceptaban el número negativo para indicar situación de débito. En este caso, se impuso antes la práctica y el contexto que la estructura, se aceptaron antes los números negativos en las aritméticas mercantiles que en los tratados de álgebra de la época.

En la *Aritmética mercantil* (1489) del alemán Johann Widman aparecen impresos por primera vez los símbolos actuales, la adición (+) y la substracción (–), junto a una explicación de su uso: los comerciantes debían utilizar el "+" para indicar un exceso en medida y el "–" para denotar una deficiencia. Estos símbolos alcanzaron gran popularidad rápidamente entre los comerciantes. Sin embargo, muchos matemáticos todavía no aceptaban las soluciones negativas de las ecuaciones y éstas no entraron por la puerta grande hasta que Girolamo Cardano (1501-1576) las admitió como necesarias en su obra *Ars Magna*, donde las utiliza, junto a las raíces de números negativos, para resolver ecuaciones de segundo y tercer grado. (Katz, V.J., 2004)


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

Habes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neq; solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarẽtur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Figura 10: Portada del libro Ars Magna (1545)

En general la historia de las matemáticas nos nutre de numerosos ejemplos en los que durante un tiempo conviven, con cierto antagonismo, la utilización de las matemáticas con su desarrollo más abstracto. En unos casos va por delante la utilización y se llega después a las definiciones y a la estructura;

en otros, se desarrollan los conceptos matemáticos por ellos mismos, sin buscar aplicación alguna con la vida real. Esta dicotomía entre matemática pura o aplicada, es la que encontramos también cuando hemos analizado las diferentes concepciones de la matemática: como arte, como ciencia que desarrolla el razonamiento, como materia propedéutica que prepara para estudios posteriores; son las visiones más cercanas a la matemática que se mira a sí misma, mientras que la matemática como instrumento de otras ciencias, como herramienta al servicio de áreas específicas concretas y especializadas, o que forma parte de la realidad cotidiana, serían las visiones más cercanas al punto de vista social y aplicativo.

La visión de las matemáticas como desarrollo y enriquecimiento personal, en realidad no está totalmente desligada de las matemáticas vinculadas al desarrollo social y cultural, no se trata de enfrentar las dos perspectivas. En este sentido, se puede pensar que la educación matemática del siglo XXI debería compaginar las dos vertientes, la pura y la aplicada porque a lo largo de toda la historia han ido emparejadas y una no tiene sentido sin la otra. Pero la realidad no refleja este equilibrio porque nuestras clases se han apoyado, fundamentalmente hasta ahora, en la belleza de las matemáticas, en enseñar a pensar, y en preparar para estudios posteriores, con el resultado de que unos pocos entraron muy bien pero la mayoría se quedó fuera. Seguramente se debería decantar un poco más la balanza hacia el punto de vista social y aplicativo, que es el que mejor puede acabar con la afirmación planteada desde el inicio: las matemáticas no me han servido para nada.

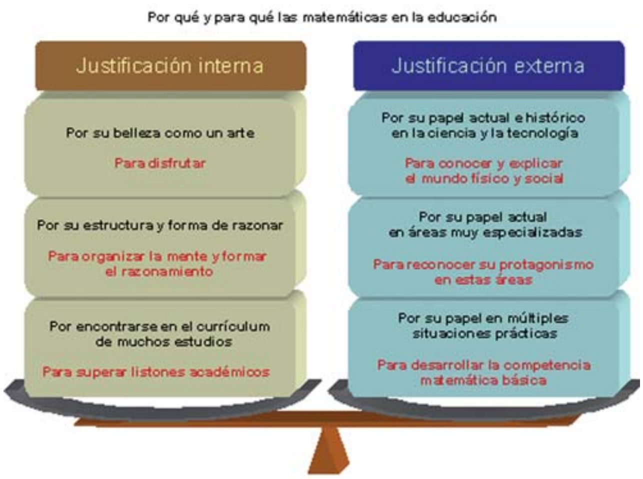


Figura 11: El equilibrio entre las dos justificaciones

La utilización de contextos en las clases de matemáticas

Si bien hasta ahora se han analizado diferentes concepciones de las matemáticas y sus consecuencias para la educación, parece necesario dar un paso más y concretar algunas cuestiones.

El panorama descrito no es original, se han ido incorporando defensores de unos y otros matices, pero entonces ¿qué está pasando? ¿Por qué continúa siendo de máxima actualidad el título de este artículo? ¿Hacia dónde se debería dirigir la educación matemática? ¿Nosotros mismos, profesores y profesoras de matemáticas con bastantes años de experiencia, qué estamos haciendo en nuestras clases para romper una lanza a favor de que el alumnado no se sienta alejado de las matemáticas e incapaz de usarlas?

Se ha hablado en los últimos años de la utilización de contextos en la clase de matemáticas para hacer sentir a nuestro alumnado que las matemáticas están vivas y están ahí, por todas partes, y como dice Fernando Corbalán: "No nos acostumbramos a observar la realidad con ojos matemáticos y acabamos por no ver ninguno de estos aspectos, y a suponer por tanto que no existen." (Corbalán, 1995)

Para cada tema o contenido matemático que se trate durante el curso escolar se pueden introducir elementos que postulen de manera clara el punto de vista social y práctico de las matemáticas. Contextos en los que los objetos matemáticos que se están estudiando cobren sentido, situaciones que relacionen los contenidos que se han introducido o se van a introducir con el mundo real. Se pueden construir unidades didácticas a partir de situaciones o contextos que generan problemas, que en esencia no son matemáticos, pero que necesitan de las matemáticas para su resolución. Así, no sólo se pone de manifiesto la utilización de contenidos matemáticos estudiados, sino que se da pie a introducir otros nuevos, cuando los ya conocidos no permiten resolver los problemas planteados.

Figura 12: Alumnos y alumnas midiendo la sombra de un gnomon en distintos momentos del día. IES Arquitecte Raspall. Cardedeu.

El hecho es que la gente aprende mejor cuando el producto se obtiene del proceso, por tanto parece claro que si las matemáticas se presentan como una necesidad para resolver una situación siempre le quedará a nuestro alumnado la idea de que las matemáticas sirven para dar respuestas a preguntas y en definitiva para resolver problemas. Especialmente si somos capaces de hacer vivir a nuestro alumnado la situación planteada.

El convencimiento de que la utilización de contextos en clase de matemáticas podía ser un elemento clave para conseguir unas matemáticas para todos y con las que el alumnado, al acabar la enseñanza obligatoria, hubiese conectado mínimamente con esta disciplina y le viese un sentido más allá de la escuela, fue la razón que nos hizo poner en marcha un curso de formación del profesorado que lleva por título: *El trabajo contextualizado en matemáticas desde la perspectiva de los nuevos currículos.*(Damià Sabaté y otros, 2009)

Enlazando con la cita que encabezaba este artículo, si pretendemos que nuestros alumnos y alumnas puedan llegar a ser ciudadanos y ciudadanas del mundo con criterios propios que les permitan conocer el entorno social y político en el que viven y afrontar los retos que les planteará el futuro inmediato, consideramos que el trabajo contextualizado de las matemáticas es hoy más necesario que nunca. En efecto, por un lado, la crisis económica, el cambio climático, el aumento del consumo energetico, la disponibilidad de alimentos y de agua para todos, el derecho a la vivienda, etc. son problemas de gran vigencia que deberan abordarse desde los datos cuantitativos y el conocimiento científico; por otro lado, el enorme aumento de la información indiscriminada hace indispensable que las personas tengan la capacidad suficiente para interpretarla. El ámbito escolar no puede quedar al margen de la actualidad y debemos trabajar para equilibrar la balanza acentuando una visión social y práctica de las matemáticas a partir de la introducción en el aula de contextos y situaciones donde sean necesarias. ■

NOTAS

[1] Programa de cualificación profesional inicial, dirigido a alumnado mayor de 16 años que no ha aprobado la ESO. El profesorado de este programa imparte diversas asignaturas, entre ellas matemáticas, tiene estudios universitarios pero en general su formación matemática acabó en el bachillerato o en la escolaridad obligatoria.

[2] Qué porcentaje de la misma se paga según se abone antes o después del plazo prescrito.

[3] DOGC: Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya

[4] El año corresponde a la reedición consultada. Godfrey H. Hardy (1877-1947) escribió *La apología de un matemático* en 1940.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bishop, A.J. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Temas de Educación, Paidós.

Corbalán, F. (1995). *La matemática aplicada a la vida cotidiana.* Barcelona: Editorial Graó.

Decret 143/2007, DOGC núm. 4915 En *Documents curriculars del Departament d'Educació*

http://phobos.xtec.cat/edubib/intranet/file.php?file=docs/ESO/matematiques_eso.pdf

Departament d'Educació, Generalitat de Catalunya (2009): Matemàtiques en el món laboral i per a la vida quotidiana en Projecte de Decret pel qual es regulen els programes de qualificació professional inicial, 39-42.

http://www20.gencat.cat/portal/site/Educacio/menuitem.c0166987b293604ae244968bb0c0e1a0/?vgnextoid=9c1bf9dc8563f110VgnVCM1000008d0c1e0aRCRD&vgnextchannel=9c1bf9dc8563f110VgnVCM1000008d0c1e0aRCRD&vgnextfmt=default

Documents del Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu: Marc conceptual per a l'avaluació PISA 2006. Capítol 3. La competència matemàtica.

http://www20.gencat.cat/docs/Educacio/Documents/ARXIUS/marc2%20capitol%203.pdf

Hardy, G. H. (1981). *Autojustificación de un matemático.* Barcelona: Ariel.

Katz, V.J; Michalowicz, K. D. (2004). *Historical Modules for teaching and Learning of Mathematics*. Washington: The Mathematical Association of America.

Keitel, C. (2004). ¿Para qué necesitan nuestros estudiantes las matemáticas? En Giménez, Joaquim; Santos, Leonor y Da Ponte, Joao Pedro (Coords.) *La actividad matemática en el aula. Homenaje a Pablo Abrantes* (pp. 12-24). Barcelona: Editorial Graó.

Lockhart, P (2008). El lamento de un matemático. *LA GACETA* de la RSME, volumen 11, nº 4, pp. 739-766.

http://www.dmsec-upf.cat/telemat0809/lament.pdf

Niss, M. (2002). *Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: The Danish KOM Project,* Denmark.
http://www7.nationalacademies.org/mseb/Mathematical_Competencies_and_the_Learning_of_Mathematics.pdf

Niss, M. (2005). Al final, la política de verdad son números. *La Vanguardia*, 20.5.05. Entrevista de Luís Amiguet - 20/05/2005. La Contra.
http://divulgamat2.ehu.es/index2.php?option=com_content&do_pdf=1&id=4919

Paulos, J.A. (1990). *El hombre anumérico*. Barcelona: Tusquets Editores.

Rico, F (1996). La poesía es hoy la reserva lingüística de la literatura occidental. *El País Barcelona* - 25/06/1996- Entrevista de Pau Vidal. http://www.elpais.com/

Sabaté, D.; Berini, M; Bosch, D; Casadevall, M; Guevara, I (2009). Matemáticas a partir de contextos. *Actas de las XIV JAEM*, FESPM, Girona.

En internet:

Exposición Arte Fractal: belleza y matemáticas (2006). Congreso Internacional de Matemáticos, Madrid. Colaboración de la Fundación española para la Ciencia y la Tecnología, FECyT.

http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Exposiciones/ArteMate/FractalesICM/index.asp

Este artículo fue recibido en SUMA en septiembre de 2009 y aceptado en mayo de 2010

64
Junio 2010, pp. 25-34

Cabalgando con las matemáticas

En este artículo se sugiere la posibilidad de introducir el tema de Combinatoria en las Matemáticas de Secundaria o Bachillerato mediante la utilización del Juego del Salto del Caballo. Se dan algunas notas sobre su evolución histórica, a efectos de que puedan servirle al profesor como apoyo para conseguir una mayor motivación del alumno a la hora de afrontar sus clases de Matemáticas; también se muestran las reglas de este juego, señalando las ventajas que puede ofrecer su uso en las clases de Matemáticas de Secundaria, fundamentalmente a la hora de introducir la Combinatoria.

Palabras Clave: Salto del caballo, ajedrez, grafos, camino hamiltoniano, Vandermonde.

Riding with mathematics

In this article we suggest the possibility of introducing the Combinatorics or other related topics of Mathematics in High Level by using the so-called knight's tour on the chess board. We show the rules of this play and of the other ones related and emphasize the advantages of using them to get a bigger motivation of students in the class. A historical evolution of this play is also shown.

Key words: Knight's tour, chess, graphs, hamiltonian path, Vandermonde.

> Si doce mil ajedrecistas estuvieran ocupados constantemente en la búsqueda de las mejores jugadas en todas las posiciones imaginables, y en cada una de ellas invirtieran una décima de segundo, necesitarían más de un trillón de siglos para analizarlas
>
> (Max Euwe, campeón del mundo de ajedrez 1935-1937)

Introducción

No deja de ser preocupante, por más que exista total constancia de ello, la total despreocupación, falta de interés y de motivación por parte de los alumnos de Secundaria o Bachillerato a la hora de atender a las explicaciones del profesor de cualquier disciplina de estos niveles, si bien este asunto parece que se agudiza aún más cuando esa disciplina son las Matemáticas.

Cuántas veces hemos oído quejarse amargamente a los profesores de Matemáticas de la escasa atención con la que los alumnos se disponen a escuchar sus explicaciones, sea cual sea el tema que en ese momento les esté impartiendo y sea cual sea la época del año en la que esto sucede. Obviamente, siempre se producen excepciones, pero éstas, por poco significativas, no sirven ni para atenuar levemente la constatación del hecho descrito.

Los profesores entonces no tienen más remedio que echar mano de todos sus recursos pedagógicos y de todas las “tretas metodológicas” que conocen, a fin de conseguir atraer la atención de esos alumnos y de intentar crear un clima en la clase lo suficientemente atractivo para que el alumno, al menos, se disponga a escucharlo cuando éste empiece su disertación.

Es aquí entonces donde aparece uno de los objetivos de este artículo. Concretamente, el de proporcionarle al profesor de Matemáticas una información habitualmente no muy conocida, por no ser usual, que le permita llevar a los alumnos a su terreno y despertar en ellos la curiosidad e inquietud por conocer cómo las Matemáticas pueden ser muy útiles para resolver problemas o juegos, aparentemente separados de

Juan Núñez Valdés
Serafín Ruiz Cabello
Departamento de Geometría y Topología. Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla

ella, de una forma que en ningún momento ellos mismos hubiesen podido llegar a intuir. Si además estos juegos permiten la introducción de determinados temas del currículo de Matemáticas de Secundaria o Bachillerato, como pueda ser la Combinatoria en el caso que nos ocupa, entonces, qué más se puede pedir.

El juego denominado habitualmente como *Juego del Salto del Caballo del Ajedrez,* cuyo nombre alude a su protagonista, un caballo de ajedrez, consiste en hacer pasar esta pieza por cada uno de los 64 escaques de un tablero de ajedrez mediante movimientos válidos (en ajedrez, el recorrido del caballo, en forma de L, es ciertamente extraño: consta de un movimiento horizontal o vertical de dos casillas y de un movimiento horizontal o vertical de un cuadro en la dirección perpendicular) de forma que no ocupe dos veces la misma posición. De ahí su nombre. Cuando de la última casilla podamos pasar a la primera diremos que se trata de un recorrido cerrado.

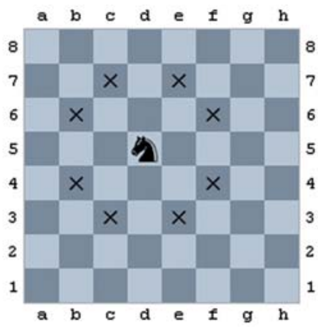


Figura 1: Movimiento de un caballo de ajedrez

Nos gustaría aclarar que nosotros hemos seleccionado este juego porque consideramos que, sin dejar de ser de una dificultad considerable, es muy sencillo de jugar, y por tanto constituye un atrayente desafío para cualquier persona, sin importar sus conocimientos de matemáticas o ajedrez. Esto lo hace especialmente indicado para alumnos de educación secundaria. Al mismo tiempo, el problema permite al alumno acercarse a la forma de razonamiento matemática empleada no sólo para resolver el problema, sino para plantear dicha resolución de múltiples formas, variando la forma de afrontarlo e incluso variando las condiciones iniciales del problema, como puede ser modificando las dimensiones del tablero.

Como veremos a lo largo de este artículo, este juego puede ser modelado mediante la teoría matemática de grafos. Desde el punto de vista de esta teoría, este juego tendrá solución si se consigue un ciclo hamiltoniano en un determinado grafo, que va a tener como vértices las casillas del tablero y por aristas el movimiento que hace el caballo (ver la siguiente sección). Este nuevo enfoque puede ser también aprovechado por el profesor para la introducción en sus clases de algunos otros temas del currículo de Matemáticas, no solamente de la Combinatoria.

Este juego fue propuesto en forma de problema, alrededor del año 1700, por el matemático inglés Brook Taylor (Edmonton, 1685 - Londres, 1731) quien se preguntaba qué recorrido de un caballo debía existir en un tablero habitual de ajedrez $8{\times}8$. Muchos matemáticos, como Abraham de Moivre, Pierre de Montmort, Leonard Euler o Alexandre-Théophile Vandermonde, entre otros, expresaron un especial interés por este problema. Euler y Vandermonde dieron un tratamiento sistemático al problema y ofrecieron soluciones que serán analizadas más adelante.

La belleza y la sencillez de este problema han favorecido su transmisión a través de las generaciones, y hoy aún supone un reto difícilmente superable para cualquier persona que conozca los fundamentos del ajedrez.

Preliminares

Se recuerdan a continuación en esta sección aquellos conceptos más básicos y elementales de la Teoría de Grafos a los que nos referiremos en este artículo. Para una visión más completa y detallada de los conceptos propios esta teoría, el lector puede consultar (Gross and Yellen, 2004), por ejemplo.

Un *grafo* es un par $G = (V, A)$, donde V es un conjunto numerable (no vacío) y A es un conjunto de pares no ordenados de elementos de V (eventualmente vacío). Los elementos de V se denominan *vértices (o puntos o nodos)* y los de A se denominan *aristas (o líneas).*

Por lo general, se considera que en un grafo no pueden existir aristas repetidas o múltiples (en cuyo caso se hablaría mejor de multigrafos) ni lazos: aristas que unan un vértice consigo mismo (en cuyo caso se hablaría de seudografos).

Dos vértices de un grafo se dicen *adyacentes* si ambos definen una arista en el grafo. Una arista se dice que es *incidente* con cada uno de sus vértices extremos. Y *dos aristas* que comparten un extremo se dicen *incidentes.*

Se denomina *grado* (anteriormente *valencia)* de un vértice de un grafo o bien al número de aristas del grafo que son incidentes con él o bien al número de vértices del grafo que son adyacentes con él (por convenio, un vértice no se considera adyacente consigo mismo).

Sea $G = (V, A)$ un grafo. Un *camino* en G es una sucesión finita de vértices y aristas alternados, cuyo primer elemento es un vértice, tal que dos elementos consecutivos de la misma sean siempre incidentes. Un *recorrido* en G es un camino en el cual todas las aristas que lo forman son distintas. Un *arco* en G es un recorrido en el que todos los vértices que lo forman son distintos y un *ciclo* en G es un camino cerrado en G que es un arco salvo el hecho de que el primer y el último vértice coinciden.

Un camino en un grafo se dice *euleriano (resp. hamiltoniano)* si en él entran todas las aristas (resp. vértices) y además una sola vez cada una de ellas/os. Los caminos eulerianos pueden ser abiertos o cerrados. Todo grafo que posea un camino euleriano (resp. hamiltoniano) se denomina *grafo euleriano (resp. hamiltoniano)*.

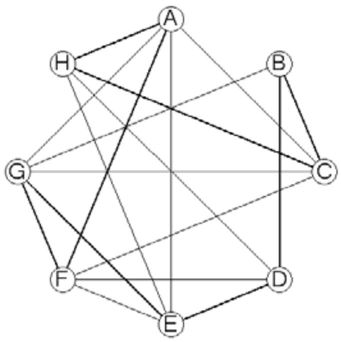


Figura 2: Grafo con un camino hamiltoniano

El Juego del Salto del Caballo y su relación con la teoría de grafos

El Juego del Salto del Caballo repercutió notablemente en el desarrollo de la Teoría de Grafos, la cual empezó a gestarse con la solución dada por Leonhard Euler al Problema de los Puentes de Konigsberg, en 1735 (para mayor información sobre este problema, puede consultarse (Alfonso et al., 2004). Efectivamente, nuestro problema constituye un caso especial de un problema general sobre grafos: la cuestión de cuándo es posible, en un grafo dado, encontrar un camino que pase a través de cada vértice sólo una vez (recuérdese que un camino con esta propiedad es denominado camino hamiltoniano, y el grafo correspondiente, grafo hamiltoniano). En el caso particular del juego del caballo, el grafo correspondiente posee sesenta y cuatro vértices, y dos vértices están unidos por una arista cuando el caballo puede legalmente moverse de uno a otro.

Históricamente, el problema de los ciclos hamiltonianos se remonta al siglo XVIII, cuando Thomas Kirkman (1806 – 1895) propuso averiguar qué grafos admitían un ciclo pasando por todos los vértices. Dos años después, de la mano de Hamilton, el problema trascendió más allá de lo imaginario, lo que le proporcionó un hueco en la historia de los grafos.

Al tener el grafo resultante del recorrido del caballo un ciclo hamiltoniano, el número de casillas ha de ser par. Para ver esto, dividamos el tablero en dos conjuntos: V1, formado por los cuadros blancos, y V2, por los negros. Cada arista es incidente con un vértice de V1 y V2, es decir, de una casilla blanca sólo podemos ir a una casilla negra respetando el movimiento del caballo, y al contrario. Por esta razón la longitud del ciclo hamiltoniano ha de ser par. Luego para que haya solución del problema el número de casillas ha de ser par.

Es importante distinguir este concepto de grafo hamiltoniano del de grafo euleriano, en el cuál existe un camino, llamado camino euleriano, que pasa por cada una de las aristas del grafo una y sólo una vez. La diferencia entre ambos caminos puede ser comparada con la distinción entre un explorador y un pasajero; el explorador examina todas las rutas posibles, mientras que el pasajero simplemente quiere visitar cada lugar de interés una sola vez.

La denominación *hamiltoniano* procede del matemático irlandés Sir William Rowan Hamilton (1805–1865), que descubrió la existencia de álgebras no conmutativas a partir de un estudio que puede ser interpretado en términos de caminos en el grafo de un dodecaedro regular. Fue el creador del conocido *juego icosaédrico*, que consiste, entre otras posibilidades, en encontrar un camino que recorra las aristas de un dodecaedro regular pasando una sola vez por cada vértice (ver siguiente figura). Para mayor información sobre este juego, el lector puede consultar (Aranda et al., 2007).

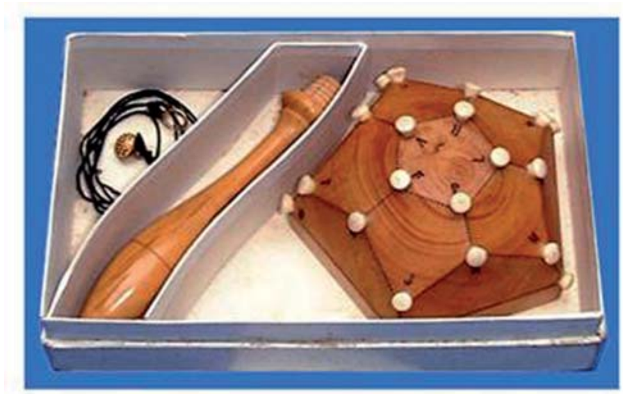


Figura3: Imagen del juego icosaédrico

Relacionados con los anteriores, los problemas consistentes en dibujar una figura sin levantar el lápiz del papel y sin describir dos veces una misma arista fueron estudiados por diversos matemáticos, como el francés Louis Poinsot (1777–1859) o el alemán Johann Benedict Listing (1808–1852), durante el siglo XIX. En un artículo de este último autor, en 1847, encontramos un análisis de las posibilidades de estos juegos y se determina que el número mínimo de trazos para dibujar una figura dada coincide con *p/2*, donde *p* es el número de vértices con valencia impar. Así, por ejemplo, para dibujar los cuatro lados y las diagonales de un cuadrado son necesarios por lo menos dos trazos.

Otro ejemplo más complicado puede ser el de recorrer, sin levantar el lápiz del papel, todos los vértices de los escaques de un tablero de ajedrez, que requiere no menos de catorce trazos, ya que hay veintiocho vértices con valencia impar. Louis Poinsot (1777–1859) estudió también el problema que, en formulación moderna, consiste en investigar la existencia de un camino euleriano en un grafo completo de n vértices, K_n. Llegó a la conclusión de que esto es imposible para n par mayor que dos, pues en esos casos había más de dos vértices con valencia impar, y dio un método de construcción cuando n es impar.

Existe también una interesante interpretación del resultado anterior en términos del *juego de dominó:* Si eliminamos los dobles (0–0, 1–1 … 6–6) las restantes veintiún fichas corresponden a las aristas de K_7, y un camino euleriano representa una secuencia de las veintiún fichas con todas las uniones acordes con el juego. Como los dobles pueden ser intercalados en lugares adecuados se deduce que es posible encadenar todas las fichas de dominó en una sola secuencia.

Soluciones dadas por diferentes matemáticos al Juego del Salto del Caballo

Mostramos a continuación las soluciones con las que diferentes matemáticos respondieron al desafío planteado por Taylor referente a la resolución del Juego del Salto del Caballo:

Solución de Vandermonde

Una de las primeras soluciones que fue enviada a Taylor tras su propuesta de resolución del Juego del Salto del Caballo fue la del matemático Alexandre-Théophile Vandermonde. Vandermonde (París, 1735–París, 1796) fue un matemático francés cuyos trabajos versaron principalmente sobre los determinantes y sobre la teoría de los grupos de sustitución. Indicó que toda ecuación de la forma $x^p - 1 = 0$, con p primo, es resoluble por radicales. También se ocupó de temas de mecánica y metalurgia.

Figura 4: A. T. Vandermonde

En lo que a Teoría de Grafos se refiere, podemos destacar que Vandermonde empleó la resolución del problema como un modo de ilustrar sus ideas acerca de lo que por entonces se conocía como *Geometría de la Posición o Analisis Situs*, antecedente directo de la rama de las Matemáticas actualmente llamada *Topología.* En uno de sus artículos, publicado por la Academia Real de las Ciencias de París en 1771 (Vandermonde, 1771), Vandermonde explica el procedimiento empleado para hallar la solución al problema. Es relevante también este texto porque contiene la formulación de alguna de las inquietudes que dieron pie a la investigación en la Teoría de Grafos. Los siguientes párrafos están extraídos de dicho artículo y contienen las ideas más importantes:

> Cualquiera que sea la complicación de un sistema de líneas en el espacio, uno puede siempre obtener una expresión para el cálculo de su dimensión, pero esta expresión será de poca utilidad en la práctica. Al artesano que tensa una red o hace un nudo no le concernirán cuestiones de medida, sino de posición. Lo que él ve es la manera en la que los hilos están entrelazados. Será útil, por tanto, disponer de un sistema de cálculo más adecuado a la forma de actuar del trabajador, una notación que representaría su forma de pensar, y que podría ser usada para la reproducción de objetos similares.
>
> Mi objetivo aquí es simplemente demostrar la posibilidad de una notación así, y mostrar su uso en cuestiones referentes a sistemas de líneas. Para ilustrar mis ideas consideraré un conocido problema que pertenece a esta categoría, el de la peregrinación del caballo en ajedrez, resuelto por Euler en 1759. El método de aquel gran geómetra presupone que tenemos un tablero de ajedrez a mano. Yo he reducido el problema a simple aritmética, usando números que no representan cantidades en absoluto, sino regiones del espacio.
>
> Considero el espacio dividido en arbitrarios elementos finitos, distinguidos por su orden. Esto es, el plano estará dividido por líneas paralelas en una serie de bandas, y luego dividido de nuevo por otro conjunto de paralelas que cortan a las del primer conjunto. Distingo las diferentes bandas por la designación primero, segundo, tercero, cuarto, etc., en ambas divisiones. Puedo así describir un punto dado, perteneciente a alguno de los paralelogramos formado por las divisiones, escribiendo dos números, uno encima del otro, donde un número es le orden de la primera división y el otro el de la segunda. Así, por ejemplo, 3/4 pertenece al paralelogramo que es común a la cuarta banda en la primera división y a la tercera en la segunda división.
>
> El problema de cómo un caballo puede visitar todas las casillas de un tablero de ajedrez, sin pasar dos veces por la misma, se reduce a la determinación de una cierta ruta. O igualmente, si uno supone que una aguja está fija en el centro de cada cuadro, el problema se reduce a la determinación de un camino tomado por un hilo que pasa una vez a través de cada aguja siguiendo una regla cuya formulación buscamos.

Si *b/a* denota un escaque en el tablero, entonces *a* y *b* pueden ser cualquiera de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ,8. Dadas dos posiciones sucesivas de una pieza, *b/a* y *b'/a'*, el movimiento de esa pieza representa una condición en *a*, *a'*, *b* y *b'*. Por ejemplo, un caballo puede ir desde *b/a* a *b*+1/*a*+1, a *b*+1/*a*+2, a *b*-1/*a*+2, etc.

El problema de la peregrinación del caballo se convierte en el de ordenar los 64 términos 1/1, 1/2, 1/3, ..., 2/1, 2/2, 2/3, 3/1, 3/2, …, 8/8 en cierta forma tal que la siguiente regla rija para cada dos términos adyacentes: la diferencia entre los números de arriba es 1 y la diferencia entre los de abajo es 2, o la diferencia entre los números de arriba es 2 y la diferencia entre los números de abajo es 1.

Para simplificar la solución uno puede buscar una ruta simétrica para el caballo. Procederé desde este punto de vista.

El camino del caballo será simétrico si, cuando intercambiamos los números 8 y 1, 7 y 2, 6 y 3, 5 y 4, y viceversa, así en los números de arriba como en los de abajo, o en ambos a la vez, no hay cambios en la ruta.

Por tanto, se requiere encontrar dieciséis movimientos consecutivos, o dieciséis términos de la secuencia tales que si se intercambia 8 y 1, 7 y 2, 6 y 3, 5 y 4, y viceversa, en la secuencia inferior, uno no consigue ningún término que esté en las dieciséis originales, y lo mismo es cierto si uno hace los cambios en la secuencia superior o en ambas a la vez. Después de hacer estas transformaciones, uno tiene cuatro secuencias que cubren los 64 cuadros sin repetición y que forman una figura simétrica; para resolver el problema dado sólo queda unir las cuatro secuencias para formar una sola, de tal forma que la regla rija en las uniones.

Para obtener los 16 términos deseados, empiezo escribiendo los sesenta y cuatro términos:

1/1, 1/2, 1/3, ..., 2/1, 2/2, 2/3, 3/1, 3/2, …, 8/8

en cualquier orden. Después tomo uno de forma aleatoria, por ejemplo 5/5, y escribo debajo las cuatro transformaciones 4/5, 5/4 y 4/4. Ya que éstas no serán de interés en el futuro las elimino de las sesenta y cuatro. De las sesenta restantes tomo una que esté relacionada con 5/5 por un movimiento de caballo, por ejemplo 4/3. Escribo debajo las tres correspondientes transformaciones 5/3, 4/6, 5/6 y las elimino de las sesenta, quedando cincuenta y seis, con las que repetiré el mismo proceso. Así obtengo, por ejemplo, las cuatro secuencias simétricas:

5/4, 4/3, 2/4, 1/2, 3/1, 2/3, 1/1, 3/2, 1/3, 2/1, 4/2, 3/4, 1/5, 2/7, 4/8, 3/6

4/5, 5/3, 7/4, 8/2, 6/1, 7/3, 8/1, 6/2, 8/3, 7/1, 5/2, 6/4, 8/5, 7/7, 5/8, 6/6

5/4, 4/6, 2/5, 1/7, 3/8, 2/6, 1/8, 3/7, 1/6, 2/8, 4/7, 3/5, 1/4, 2/2, 4/1, 3/3

4/4, 5/6, 7/5, 8/7, 6/8, 7/6, 8/8, 6/7, 8/6, 7/8, 5/7, 6/5, 8/4, 7/2, 5/1, 6/3

De las cuatro secuencias obtenidas, la primera puede unirse a la cuarta, y consecuentemente, la segunda a la tercera. Después de esta yuxtaposición tenemos dos secuencias simétricas y cerradas:

5/4, 4/3, 2/4, 1/2, 3/1, 2/3, 1/1, 3/2, 1/3, 2/1, 4/2, 3/4, 1/5, 2/7, 4/8, 3/6, 4/4, 5/6, 7/5, 8/7, 6/8, 7/6, 8/8, 6/7, 8/6, 7/8, 5/7, 6/5, 8/4, 7/2, 5/1, 6/3.

4/5, 5/3, 7/4, 8/2, 6/1, 7/3, 8/1, 6/2, 8/3, 7/1, 5/2, 6/4, 8/5, 7/7, 5/8, 6/6, 5/4, 4/6, 2/5, 1/7, 3/8, 2/6, 1/8, 3/7, 1/6, 2/8, 4/7, 3/5, 1/4, 2/2, 4/1, 3/3.

Para unirlas es necesario destruir un poco la simetría; pero si, por ejemplo, intercalamos la segunda secuencia entre lo términos 2/4 y 1/2 de la primera, entonces la secuencia entera permanece cerrada, y puede empezar, por tanto, desde cualquier casilla que uno quiera. La figura muestra la ruta determinada por esta secuencia.

10	7	12	61	16	57	52	55
13	62	9	6	51	54	17	58
8	11	64	15	60	19	56	53
63	14	5	20	1	50	59	18
34	43	2	49	4	21	30	47
37	40	35	44	31	48	27	24
42	33	38	3	22	25	46	29
39	36	41	32	45	28	23	26

Este artículo de Vandermonde exige pocos comentarios, puesto que en él queda reflejado perfectamente el método seguido para obtener la solución. Además, la estrategia descrita permite obtener una ruta cerrada, de forma que sea indiferente el escaque desde el cuál comienza el caballo en su recorrido. Y nótese que esta condición no se exigía en un primer momento en el enunciado del juego.

Solución de Euler

Otra de las soluciones al Problema del Salto del Caballo que fueron apareciendo, quizás de las más ingeniosas, fue la del matemático suizo Leonhard Euler (Basilea, 1707 – San Petesburgo, 1783). Pueden verse algunos datos biográficos de Euler en el artículo (Alfonso et al., 2004) escrito por uno de los autores de éste, en colaboración con otras compañeras. Euler ofrece una solución que no oculta la genialidad de su autor, puesto que permite construir un *cuadrado mágico* de dimensiones *8×8* (recuérdese que un cuadrado mágico es la disposición de una serie de números enteros en un cuadrado o matriz de forma tal que la suma de los números por columnas, filas y diagonales principales sea la misma, la constante mágica. Usualmente los números empleados para rellenar las casillas son consecutivos, de 1 a n^2, siendo n el número de columnas y filas del cuadrado mágico.

Figura5: Leonhard Euler

La solución dada por Euler es además muy importante porque él trató el caso general, es decir, no se limitó sólo al estudio de este problema tal como fue planteado, sino que obtuvo la solución del *Problema del Salto del Caballo* siguiendo un camino cerrado en un tablero de dimensiones arbitrarias $n \times n$, llegando a la conclusión de que es necesario que n sea un número par. Esto puede verse fácilmente, ya que el caballo siempre parte de una casilla de distinto color a la que llega; de esta forma, el recorrido será del tipo *BNBNBNB…N* ó *NBNBNBN…B*. Vemos, por tanto, que es necesario que haya el mismo número de casillas blancas que negras si se quiere que la ruta sea cerrada, de forma que el número total de cuadros ha de ser par. Esto lleva inmediatamente a la imposibilidad de que n sea impar, pues si no n^2 también lo sería.

Para encontrar, según Euler, la ruta seguida por el caballo en su itinerario en el tablero habitual *8×8*, basta solamente numerar las casillas en el orden en que son ocupadas por el caballo en su peregrinación. El resultado son los 64 números *1, 2, 3… 64* distribuidos en el tablero de la siguiente forma:

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

Como se comprueba fácilmente la suma de los números en filas y columnas da siempre como resultado 260, constituyendo entonces el tablero un cuadrado mágico de orden 8. Teniendo en cuenta que se dispone de 64 casillas y que en cada movimiento hay de dos a ocho posiciones posibles para mover el caballo, podemos hacernos una idea del gran número de posibilidades que hay si además se impone que todas las filas y todas columnas sumen 260. En esto consistió la genialidad de Euler.

Otras soluciones

Otra solución vino de manos del matemático Maurice Kraitchik (Rusia, 1892 – Bélgica, 1957), que estudió el recorrido del caballo suponiendo que uno de los lados del tablero tiene siete casillas.

Los matemáticos ingleses W. Rouse Ball (1850–1925) y Henry Dudeney (1857–1930) también presentaron sus aportaciones al problema, pero ya en su forma habitual de un tablero *8×8.*

Se muestran a continuación dos soluciones más del problema, indicadas en los siguientes tableros:

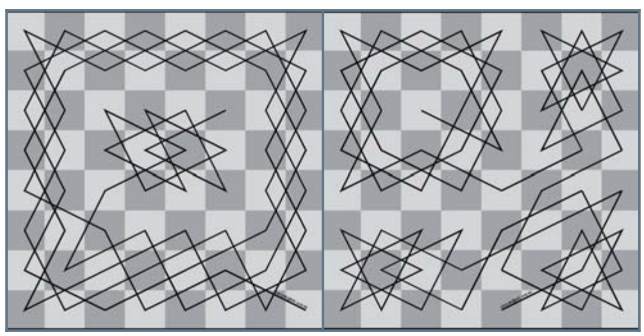


Figura 6

Finalmente, si el lector quiere experimentar por sí mismo y no dispone de un tablero de ajedrez a la mano, puede practicar el juego en http://www.borderschess.org/KnightTour.htm .

Otros problemas relacionados con el Problema del Salto del Caballo

Mostramos a continuación algunos otros problemas que guardan una cierta relación con el del *Salto del Caballo*. Pueden consultarse más problemas de este tipo, así como practicar on-line con un tablero virtual, en las direcciones

http://www.velucchi.it/mathchess/knight.htm
http://www.velucchi.it/mathchess/knight.htm
http://www.borderschess.org/KnightTour.htm

El salto del caballo infinito

Nos planteamos en primer lugar resolver el *Problema del Salto del Caballo* en un tablero de dimensiones infinitas. En principio, supondremos que dicho tablero es infinito hacia arriba y hacia la derecha; es decir, que la esquina inferior izquierda es un extremo de dicho tablero, expandiéndose éste desde ahí. Una manera de intentar resolver este problema, planteada por José Fernández-Prida, es empezar numerando los cuadros de un tablero infinito de ajedrez de la siguiente forma:
http://www.albaiges.com/matematicas/saltocaballoinfinito.htm

10				
6	11			
3	7	12		
1	4	8	13	
0	2	5	9	14

Figura 7

Es decir, correlativamente según las diagonales, como se hace cuando quieren ordenarse los números fraccionarios. Seguidamente, partiendo de la casilla 0, un caballo va saltando hacia las demás según las reglas habituales, eligiendo siempre la casilla de número mas bajo que no haya sido previamente ocupada. Éste es el aspecto del tablero tras 39 saltos:

36	46	57	69	80	92	103	115
28 **37**	37 **18**	47	58	70	81	93	104
21 **20**	29 **15**	38 **38**	48	59	71	82	94
15 **17**	22 **36**	30 **19**	39	49	68	72	83
10 **14**	16 **21**	23 **16**	31 **36**	40	50	61	73
3 **9**	11 **4**	17 **13**	24 **22**	32 **29**	41 **34**	51	62
3 **6**	7 **1**	12 **8**	18 **31**	25 **12**	33 **25**	42 **28**	52
1 **3**	4 **10**	8 **5**	13 **26**	19 **23**	26 **30**	34 **33**	43
0 **0**	2 **7**	5 **2**	9 **11**	14 **32**	20 **27**	27 **24**	35

Figura 8

Se plantean de inmediato dos preguntas:
- ¿Habrá siempre una casilla disponible para el caballo?
- ¿Acabará cada casilla del tablero siendo ocupada alguna vez?

Todos los aficionados al ajedrez saben que una de las soluciones más sencillas consiste en procurar saltar siempre hacia una casilla desde donde el repertorio disponible sea mínimo. Aún con esta guía, resolver el problema suele exigir varios tanteos, pues es frecuente llegar a algún callejón sin salida. Se intuye que otro tanto acabará sucediendo con ese ajedrez infinito, ya que en cada salto el caballo acaba metiéndose en escaques que pueden ser una trampa.

Efectivamente, con cualquier programa de computación simbólica no excesivamente complicado, por ejemplo, con el Basic, puede resolverse el problema. En la figura siguiente mostramos los pasos finales del caballo, que termina su recorrido tras 2401 saltos.

1833 1374 (48,3)	2008 1427 (49,3)	2003 1481 (50,3)	2132 1536 (51,3)	2309 1592 (52,3)	2138 1649 (53,3)	1707 (54,3)
1830 1374(48,2)	1707 1427 (49,2)	1832 1481 (50,2)	1827 1536 (51,2)	2006 1592 (52,2)	2135 1650 (53,2)	
1825 1273 (48,1)	1828 1324 (49,1)	2007 1376 (50,1)	2004 1429 (51,1)	2133 1482 (52,1)	2400 1538 (53,1)	2137 1594 (54,1)
1706 1224 (48,0)	1831 1274 (49,0)	1826 1325 (40,0)	2401 1377 (51,0)	2136 1430 (52,0)	2005 1484 (53,0)	2134 1539 (54,0)

Figura 9

Como era de esperar, el final forzado se produce también con tableros infinitos por los cuatro cuadrantes y otros sistemas de numeración de las casillas, como por ejemplo el de la siguiente figura:

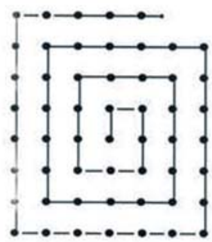


Figura 10

Resulta curiosa la ruta asimétrica del caballo para este sistema, que termina en el movimiento 2015:

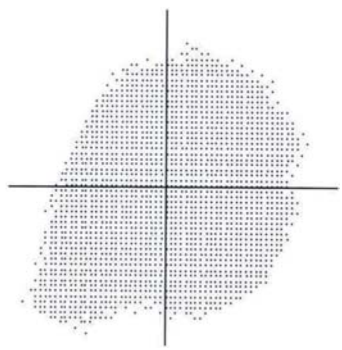


Figura 11

El Problema del Salto del Caballo en otros tableros

Louis Pósa (matemático húngaro nacido en la década de los 40 del siglo pasado) demostró, siendo adolescente, que no hay recorrido cerrado en tableros $4\times n$, siendo n cualquier número natural. Su idea consiste en ver que el grafo no contiene ciclos hamiltonianos dividiendo el tablero en cuadros exteriores, que son los cuadros de la parte superior y la parte inferior; y cuadros exteriores, que son los restantes.

En esta situación el caballo debe llegar desde un cuadrado interior a un cuadrado exterior. Por lo tanto cada cuadrado exterior va a ir precedido de un cuadro interior y seguido de uno o varios cuadros interiores. Como existe igual número de cuadros interiores que exteriores, los cuadros interiores y exteriores han de ir alternándose al recorrer el ciclo. Sea v(i), con i impar, los vértices que corresponden a las casillas exteriores y v(i), con i par, los vértices que corresponden a las casillas interiores. Al observar los movimientos del caballo vemos que los v(i), donde i es impar, corresponden a las casillas blancas y los v(i) con i par corresponden a las casillas negras. Por lo tanto el ciclo no puede ser hamiltoniano. Téngase en cuenta que dicha demostración es válida por simetría si en vez de tomar tableros $4\times n$ tomamos tableros $n\times 4$.

Allen J. Schwenk, actualmente en la Universidad de Michigan Oeste en Kalamazoo, observó que se había trabajado sobre tableros concretos, olvidándose de la verdadera intuición matemática; la cuál lleva a preguntarse para qué tableros $m\times n$ (rectangulares, es decir, con m distinto de n, ya que el caso de los cuadrados es el habitual) es posible el recorrido del caballo. Fue en 1993 cuando este matemático demostró para qué tableros de $m\times n$ es posible el recorrido del caballo. Veamos un esbozo de su razonamiento:

Para los casos en que m y n sean ambos impares, ya hemos visto que no hay recorrido, por ser el número de casillas impar.

Si $m = 1$, el caballo no tiene casillas para saltar. Si $m = 2$, el caballo no tiene casillas para dar la vuelta al tablero, sea quien sea n. Para $m = 4$ ó $n = 4$, Louis Pósa demostró que el recorrido no era posible.

Se puede comprobar que para los tableros 3×6 y 6×8 tampoco es posible el recorrido.

Nos faltaría comprobar que el recorrido sí es posible para el resto de tableros. Para ello, se basa en que todo recorrido sobre un tablero $m\times n$ puede ampliarse a un recorrido sobre un tablero $m\times(n+4)$. Además, por simetría también puede ampliarse a un tablero $(m+4)\times n$. Por esta razón, si tenemos un tablero 5 x 8 donde es posible el recorrido del caballo, también será posible para los tableros de tamaños 9×8, 5×12, 9×12, 13×8, 13×12, y así sucesivamente. Con esto queda garantizada la existencia de recorridos.

Si encontrásemos un número de tableros de diferentes dimensiones, los cuáles nos asegurasen la existencia de los demás, el problema del recorrido del caballo quedaría demostrado. Con todos los tableros de tamaños 5×6, 5×6, 6×6, 7×6, 7×8, 8×6, 8×8, 10×3 y 12×3 es posible generar todos los tableros que nos faltaban. En las siguientes figuras se muestra el recorrido del caballo en estos nueve tableros: ■

32	27	30	1	12	17	22	3
29	38	33	18	23	2	11	16
26	31	28	35	8	13	4	21
37	34	39	24	19	6	15	10
40	25	36	7	14	9	20	5

5×8

1	16	31	36	3	18
30	35	2	17	22	37
15	48	21	32	19	4
34	29	44	9	38	23
47	14	33	20	5	10
28	43	8	45	24	39
13	46	41	26	11	6
42	27	12	7	40	25

8×6

1	46	29	18	37	48	9	20
28	17	2	47	30	19	38	49
45	56	33	36	5	8	21	10
16	27	6	3	34	31	50	39
55	44	35	32	7	4	11	22
26	15	42	53	24	13	40	51
43	54	25	14	41	52	23	12

7×8

1	10	5	20	25	16
4	21	2	17	6	19
11	30	9	24	15	26
22	3	28	13	18	7
29	12	23	8	27	14

5×6

1	26	29
28	7	2
25	30	27
6	3	8
19	24	5
4	9	20
21	18	23
10	15	12
13	22	17
16	11	14

3×10

1	32	35
34	19	2
31	36	33
18	3	20
21	30	17
16	27	4
5	22	29
28	15	26
25	6	23
12	9	14
7	24	11
10	13	8

3×12

1	14	7	28	35	22
8	27	2	23	6	29
15	42	13	34	21	36
26	9	24	3	30	5
41	16	33	12	37	20
10	25	18	39	4	31
17	40	11	32	19	38

7×6

34	37	26	29	32	43	48	45
25	30	33	36	27	46	51	42
38	35	28	31	40	49	44	47
7	24	39	18	1	52	41	50
14	19	8	23	12	55	64	53
9	6	13	2	17	58	61	56
20	15	4	11	22	63	54	59
5	10	21	16	3	60	57	62

8×8

1	8	31	16	3	10
30	23	2	9	32	17
7	36	15	24	11	4
22	29	6	33	18	25
35	14	27	20	5	12
28	21	34	13	26	19

6×6

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alfonso, M., Bueno, S., Diánez, M.R., De Elías, M. C. y Núñez, J. (2004). Siete puentes, un camino: Konigsberg, *Suma* nº 20, 69-78.

Aranda, B., De Elías, M. C. y Núñez, J. (2007). Un divertido juego inventado por un matemático infeliz, *Números* nº 66. (Revista Electrónica sin paginación).

Gross, J. J. & Yellen, J. (Eds.) (2004). *Handbook of the Graph Theory.* Boca Raton. Florida: CRC Press.

Vandermonde, A. (1771), *Remarques sûr des problèmes de situation. Académie des Sciences.*

Este artículo fue recibido en SUMA en Abril de 2009 y aceptado en abril de 2010

suma+ 64
Junio 2010, pp. 35-44

Argumentación matemática: prácticas escritas e interpretaciones

La práctica de argumentación matemática es parte esencial de la formación de los estudiantes en las distintas etapas escolares y, por tanto, también debe ser tenida en cuenta en la formación de los futuros maestros. En este escrito mostramos datos sobre algunas de las carencias en el conocimiento práctico y teórico de la argumentación matemática en un pequeño grupo de estudiantes de Titulaciones de Magisterio. Estos datos nos llevan a reflexionar sobre las implicaciones que las dificultades de los maestros tienen en el aprendizaje de sus alumnos.

Palabras Clave: Argumentación, explicación, formación del profesorado, prácticas escritas, diferencias de interpretación

Mathematical Reasoning: written and practical interpretations

The practice of mathematical argumentation is a key component in the students' development during their different school periods. Hence, it needs to be considered in the future teachers' academic development. In this text we draw on data concerning the lack of practical and theoretical knowledge on the notion of mathematical argumentation in a small group of students from a primary teacher education grade. This data leads to further reflection on some of the implications that the teachers' difficulties may have on their students' learning.

Key words: Argumentation, explanation, Ttacher education, written practices, differences of interpretation

Introducción

Los actuales currículos en nuestro contexto señalan como un objetivo de la educación formar ciudadanos críticos y reflexivos, comprometidos y capaces de razonar. Para ello, es esencial el trabajo de prácticas argumentativas, donde se aprenda a reconocer argumentos válidos y a desarrollar razonamientos analíticos que permitan la adquisición progresiva de habilidades en este sentido. Muchos alumnos, sin embargo, tienen importantes dificultades en el desarrollo de argumentaciones matemáticas durante sus procesos de aprendizaje en la escuela. Aunque hay diversas causas que contribuyen a explicar estas dificultades, algunas de ellas se ven reforzadas por las dificultades de argumentación que a su vez experimentan algunos maestros de matemáticas. Por este motivo, entre otros, es relevante explorar las prácticas e interpretaciones en torno a la argumentación matemática de los maestros en formación inicial.

En el marco del Grupo de Investigación "Educación y Competencia Matemática"–SGR 365– y del Proyecto 'Estudio del desarrollo de competencias discursivas en el aula de matemáticas',–EDU2009/07113– hemos desarrollado un estudio exploratorio (De Gamboa, 2009) sobre las prácticas escritas e interpretaciones en torno a la argumentación matemática de un grupo de futuros maestros de Educación Primaria en el segundo curso de su formación universitaria. Se trata de un estudio que debe contextualizarse en el marco más amplio de la aproximación al conocimiento matemático de los futuros maestros. Los dos objetivos principales han sido: 1) identificar prácticas de argumentación en la resolución escrita de actividades matemáticas; y 2) explorar la diversidad de interpretaciones sobre la noción de argumentación matemática. Uno de los aspectos más novedosos de nuestro trabajo es que no incidimos en los tipos de argumentación y explicación o incluso demostración, sobre los que hay bastante literatura en nuestra área (ver, por ejemplo, Gutiérrez, 2005, o León y Calderón, 2001), sino que damos un paso hacia atrás para obtener una visión más general, que incluya la identificación de las prácticas, la propuesta de preguntas y las interpretaciones acerca de la argumentación matemática.

Genaro De Gamboa
Núria Planas
Mequè Edo
Departamento de Didáctica de la Matemática y las Ciencias Experimentales, Universitat Autònoma de Barcelona

La noción de argumentación matemática

Aunque la noción de argumentación matemática debe interpretarse en el contexto de las matemáticas, se fundamenta en la noción más amplia de argumentación. Sardà (2003, p. 123) habla de la argumentación como:

> Actividad social, intelectual y verbal que sirve para justificar o refutar una opinión, y que consiste en hacer declaraciones teniendo en cuenta al receptor y la finalidad con la cual se emiten. Para argumentar hace falta elegir entre diferentes opciones o explicaciones y razonar los criterios que permiten evaluar como más adecuada la opción elegida.

La argumentación es un discurso dirigido a un receptor con el fin de justificar una opinión partiendo de hechos o datos y razonando los criterios sobre los que se decide la adecuación de la opción elegida.

La argumentación aparece ligada, por tanto, a los conceptos de justificación y explicación, tal como ya señalan Perelman y Olbrech-Tyteca (1994). Tomando a Jorba (1998, p. 48), se tiene que:

> Justificar es producir razones o argumentos, establecer relaciones entre ellos y examinar su aceptabilidad con la finalidad de modificar el valor epistémico de una tesis en relación al corpus de conocimientos en que se incluyen los contenidos objeto de la tesis.

Esto hace que, en el desarrollo de una argumentación que va dirigida a la justificación, no baste con producir argumentos, sino que sea necesario someterlos a un examen de aceptabilidad. Duval (1999) utiliza los criterios de pertinencia y fuerza para decidir sobre la aceptabilidad de un argumento. La pertinencia del argumento es la relación entre los contenidos de la afirmación y del argumento que la justifica, teniendo que ocurrir que los contenidos semánticos se sobrepongan. La fuerza del argumento depende de: a) la resistencia que presente a contra-argumentos, es decir, que no tenga réplica; y b) el valor epistémico positivo, es decir, que sea evidente, necesario y auténtico.

Además de la estrecha relación con la noción de justificación, la argumentación tiene mucho que ver con la explicación. Según el Diccionario de la Real Academia Española (RAE, 2001, p. 1021) "explicar es declarar o exponer cualquier materia, doctrina o texto difícil con palabras muy claras para hacerlos más perceptibles". Ribas (2003, p. 151) habla de exponer como sinónimo de explicar diciendo que:

> Exponer es organizar la información a partir de unas relaciones lógicas entre las unidades que la constituyen, de manera que aparece como un razonamiento que conduce de una premisa a una conclusión.

Aunque no se mencione explícitamente la argumentación, en esta definición se considera el paso razonado de una premisa a una conclusión, que es una unidad mínima de argumentación. Por lo tanto, puede entenderse que el esquema básico de la explicación es también el germen de la argumentación, siendo las características de las razones que fundamentan el paso de premisa a conclusión las que determinan la argumentación.

Siguiendo a Duval (1999), argumentación y explicación comparten el esquema básico de paso de una premisa a una conclusión, pero se diferencian en las razones que validan este paso, siendo en la argumentación donde las razones comunican su fuerza a las afirmaciones, convirtiéndolas en argumentos y haciendo de la proposición final una conclusión, mientras que en la explicación las razones tienen una función descriptiva al presentar el sistema de relaciones en las que el dato a explicar se produce. Por ejemplo, tomando como premisa la existencia de distintas clasificaciones de triángulos basadas en sus tipos de lados y en sus tipos de ángulos, en una explicación afirmamos que los triángulos equiláteros son distintos a los triángulos rectángulos, ya que un triángulo equilátero es un triángulo cuyos tres lados tienen la misma medida, mientras que un triángulo rectángulo es aquel que tiene uno de sus tres ángulos recto, es decir que mide 90º. En una argumentación, en cambio, decimos que los triángulos equiláteros son distintos a los triángulos rectángulos ya que no puede haber un triángulo que sea equilátero y rectángulo a la vez, dado que en un triángulo rectángulo se cumple el Teorema de Pitágoras, que relaciona sus tres lados a, b y c según la ecuación $a^2=b^2+c^2$ (siendo a el lado opuesto al ángulo recto o hipotenusa) y es imposible que esta ecuación se cumpla si $a = b = c$, salvo en el caso trivial $a = b = c = 0$.

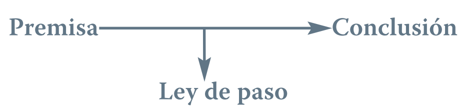


Figura 1. Esquema argumentativo mínimo de Plantin (1998)

Desde una perspectiva más formal para la caracterización de la argumentación, resulta útil el esquema argumentativo mínimo de Plantin (1998), que consiste en el paso de una premisa a una conclusión esgrimiendo al menos una razón que lo valide (ver Figura 1). Una vez establecida esta unidad mínima, debemos contar con un marco más general que contemple otras casuísticas en el discurso argumentativo. Para ello, es útil el esquema de Toulmin (2007), que adaptamos en la Figura 2. En este esquema, las premisas son los hechos que se invocan para justificar y validar la afirmación y la tesis; la conclusión es la tesis que se establece; la ley de paso son las razones que se proponen para justificar las conexiones entre datos y conclusión; la garantía es el conocimiento básico que asegura la justificación; los calificadores modales son la fuerza que la justificación confiere a la argumentación, aportando un comentario implícito de la justificación; y la refutación son las circunstancias en que las justificaciones no son ciertas.

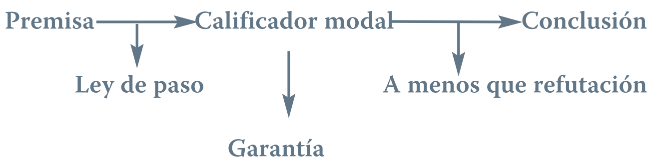


Figura 2. Adaptación del esquema argumentativo de Toulmin (2007)

Entendemos como argumentación a todo discurso que se pueda analizar en términos de la Figura 2, siendo el esquema mínimo argumentativo el presentado en la Figura 1. En el caso de la argumentación en matemáticas, disponemos de una red bien establecida de definiciones, lemas, proposiciones y teoremas que permiten avanzar en los razonamientos mediante la regla de implicación, en la que el paso de premisa a conclusión se hace mediante un término medio que relaciona y justifica las proposiciones, haciéndose necesario un uso correcto del conocimiento matemático como término medio. En resumen, definimos la argumentación matemática como aquel tipo de argumentación que se desarrolla dentro de la actividad matemática y en la que la ley de paso se apoya en elementos del conocimiento matemático, requiriéndose la capacidad de comprender o de producir una relación de justificación entre proposiciones que sea de naturaleza deductiva y no sólo semántica.

Desde una perspectiva más amplia, Homero (2007, p. 71) define la práctica argumentativa en matemáticas como:

> El conjunto de acciones y razonamientos que un individuo pone en juego para justificar o explicar un resultado o para validar una conjetura nacida durante el proceso de resolución de un problema.

Así, las prácticas argumentativas no siempre van acompañadas de argumentación, sino que éstas son las prácticas que se analizan para establecer la presencia o ausencia de argumentaciones. Esto hace que una práctica argumentativa, por tanto, pueda estar básicamente constituida por explicaciones, justificaciones u otros tipos de razonamiento que no cumplan las condiciones para ser argumentaciones, de acuerdo con la definición presentada en el párrafo anterior. Para Godino y Recio (2001), los argumentos, las explicaciones y los demás tipos de razonamiento pueden entenderse como objetos emergentes de sistemas de prácticas argumentativas

> Aceptadas en el seno de una comunidad, o por una persona, ante situaciones de validación y decisión, esto es, situaciones que requieren justificar o validar el carácter de verdadero de un enunciado, su consistencia o la eficacia de una acción (Godino y Recio, op. cit., p. 406).

Desarrollo del estudio

De acuerdo con nuestro primer objetivo, hemos iniciado el estudio del reconocimiento y uso de la argumentación en la resolución escrita de actividades matemáticas, junto con el estudio de la demanda de argumentaciones a partir de cuestiones construidas por los futuros maestros. De acuerdo con nuestro segundo objetivo, también hemos iniciado el estudio de las interpretaciones que los futuros maestros hacen de la noción de argumentación matemática. Para ello, hemos trabajado con un grupo reducido de diez estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación de nuestra Universidad, que se correspondía con todos los estudiantes matriculados en la materia optativa “Matemáticas II”. Esta materia está planteada de modo que el eje de resolución de problemas sirva para introducir y consolidar contenidos de matemáticas. Se ha trabajado con una muestra pequeña porque no se trata de establecer generalizaciones sino de entender mejor parte del conocimiento matemático de los futuros maestros. En síntesis, se ha buscado información acerca de: i) la presencia y el reconocimiento de argumentaciones en la resolución escrita de actividades; ii) la presencia de argumentaciones en la construcción de cuestiones complementarias; y iii) la interpretación teórica de la noción de argumentación matemática.

El instrumento para recoger los datos ha sido un cuestionario individual organizado en dos partes (ver Figura 3), que se presentó a los estudiantes en una misma sesión de clase de 60 minutos en marzo de 2009. Apenas se dieron explicaciones excepto para clarificar que los resultados no serían objeto de evaluación dentro de la materia e informar brevemente sobre el procedimiento a seguir durante la sesión. La recogida de datos fue de carácter anónimo y no se pidió ninguna información personal ni académica. La primera parte que se proporcionó está compuesta de dos actividades en torno a contenidos geométricos básicos que se espera que los estudiantes resuelvan sin mayor dificultad y que debe informar sobre el primer objetivo. A medida que cada estudiante fue finalizando, se repartió la segunda parte del cuestionario con preguntas acerca de las resoluciones realizadas y la comprensión de la práctica de argumentación matemática, orientadas a la consecución de nuestros dos objetivos. Los datos de nuestra investigación son, por tanto, las representaciones escritas de las respuestas individuales de los futuros maestros a las dos partes del cuestionario. No hay construcción de razonamientos por medio de réplicas sucesivas, como ocurre con la argumentación en situación de interacción, sino que estamos ante el tipo “argumentación para uno mismo” tal como lo describen Perelman y Olbrech-Tyteca (1994), o bien “monólogo argumentativo” en términos de Plantin (1998).

Las actividades matemáticas del cuestionario se diseñaron a partir de la lectura de actividades similares ideadas por Badillo y Edo (2007), y teniendo en cuenta las recomendaciones del profesor responsable del aula universitaria. En cuanto a contenidos y procesos requeridos, las dos actividades tienen un carácter marcadamente distinto con el fin de obtener respuestas variadas y ver cuáles de ellas se interpretan como argumentaciones. Intencionadamente no se pidió argumentar en la primera parte del cuestionario, sino justificar y explicar, ya que se pensó que esto podría ayudar a que las respuestas de los estudiantes proporcionaran más datos sobre qué entienden por argumentación y cómo relacionan esta práctica con la justificación y la explicación, tal como se sugiere en Gresalfi, Martin, Hand y Greeno (2008). Aún así, somos conscientes de que el propio formato de cuestionario con la secuencia cerrada de preguntas-respuestas puede haber contribuido a que los estudiantes centren la atención en la elaboración de respuestas y no tanto en la descripción detallada de los procesos de razonamiento desarrollados. Diversos estudios (ver, por ejemplo, León y Calderón, 2001) señalan que en situaciones de escritura abunda más la representación matemática escueta que la narración discursiva extensa.

Primera parte del cuestionario

ACTIVIDAD 1 (A1)

a. El punto de intersección de las alturas de un triángulo se conoce como ortocentro. ¿El ortocentro siempre se encuentra en el interior del triangulo? Justifica tu respuesta.
b. Explica qué pasará con las alturas de los diferentes triángulos según sus tipos de ángulos.

ACTIVIDAD 2 (A2)

Pon en cada recuadro si es posible, o no, construir un triángulo que cumpla las condiciones de fila y columna. En caso de ser posible, dibújalo.

Tipos	Acutángulo	Rectángulo	Obtusángulo
Equilátero			
Isósceles			
Escaleno			

Segunda parte del cuestionario

Continuación de A1

Q1. ¿Has tenido que argumentar durante la resolución de esta actividad? ¿Cuándo?
Q2. Añade una pregunta a la Actividad 1 que requiera argumentación y respóndela.

Continuación de A2

Q3. ¿Has tenido que argumentar durante la resolución de esta actividad? ¿Cuándo?

Figura 3. Esquema resumido del cuestionario

El análisis de los datos ha sido cualitativo. Se ha organizado en torno a la lectura repetida de las respuestas de los estudiantes a los cuestionarios de acuerdo con los principios metodológicos de la Teoría Fundamentada (Glaser y Strauss, 1967), y se ha complementado con la triangulación de perspectivas de los autores. Ha habido un primer análisis de cada cuestionario, con la lectura vertical de todas las respuestas y, a continuación, un segundo análisis de cada pregunta, con la lectura horizontal del conjunto de diez respuestas a cada una de las preguntas. En este artículo, mencionamos resultados obtenidos con el segundo análisis, que en cierta medida toma en consideración aspectos del análisis previo pormenorizado para cada estudiante. Hemos decidido presentar los datos para los cuales se ha obtenido mayor información, ya sea porque ha habido una triangulación relativamente fácil del análisis o porque se ha confirmado un mismo perfil de respuesta en más de un estudiante.

Algunos resultados

Dividimos esta sección en dos apartados, uno para cada objetivo del estudio. Para los datos referidos a la consecución del primer objetivo, el análisis principal consiste en la aplicación de dos enfoques interpretativos. En la lectura vertical de los datos, se ha aplicado un *enfoque formal* en el análisis de los textos de los estudiantes, en base al esquema argumentativo de Toulmin y con atención al esquema mínimo de Plantin. Dejamos para otro artículo estos resultados y ahora presentamos la información obtenida tras aplicar el que hemos denominado como *enfoque funcional*. Desde este enfoque, en el desarrollo de la lectura horizontal de los datos, se analizan las razones que respaldan el paso de la premisa a la conclusión según la función explicativa o argumentativa que cumplan las razones en dicho paso. Hablamos de explicación cuando la razón tiene una función descriptiva o de argumentación cuando la razón valida el paso de premisa a conclusión.

En la Tabla 1 introducimos los marcadores principales "Argumenta" y "Explica", junto a otros que se han ido construyendo progresivamente al revisar diversas veces y en grupo las respuestas escritas de los estudiantes. Por ejemplo, en las preguntas Q1 y Q3, en las que se pide identificar la práctica de argumentar en el proceso de resolución desarrollado por el propio estudiante, se usan los marcadores "Identifica" y "No identifica". Un estudiante "Identifica" la práctica de argumentar si cuando dice que (no) ha argumentado, en su respuesta a A1 o A2, (no) ha realizado efectivamente una argumentación. Por el contrario, "No identifica" si reconoce una práctica de argumentación que no ha realizado o bien no reconoce una que sí que ha realizado. En las preguntas Q2 y Q4, se analizan las preguntas propuestas por los alumnos en base a un examen de posibles respuestas. Una pregunta "Requiere" argumentación si la misma pregunta y sobre todo la manera en la que está formulada invitan al razonamiento argumentativo o se considera oportuno argumentar para responderla. En cambio, una pregunta "No requiere" argumentación si se puede contestar de forma directa o mediante afirmaciones, enumeraciones, casos particulares… es decir, sin que haya un razonamiento.

Para los datos referidos a la consecución del segundo objetivo, el análisis principal consiste en realizar una revisión general del conjunto de respuestas para cada cuestión y, después de familiarizarnos con los temas introducidos por los estudiantes, plantear categorías emergentes que se vayan desarrollando progresivamente con el fin de agrupar las distintas respuestas. No buscamos categorías en el sentido clásico del término puesto que no queremos garantizar que los contenidos de unas y otras se excluyan. En la cuestión Q5, se agrupan las respuestas de forma no excluyente de acuerdo con las siguientes funciones de la argumentación en matemáticas: 1) soporte para entender –ayudar a tomar conciencia de aspectos de la actividad matemática; 2) soporte para consolidar –ayudar a recordar y reconstruir conocimientos matemáticos; 3) soporte para manejar –ayudar a avanzar en las fases de resolución de una actividad matemática; 4) soporte para validar –ayudar a determinar la validez de procesos matemáticos; y 5) soporte para generar hipótesis –ayudar a establecer hipótesis. Paralelamente, tras leer varias veces las respuestas a la cuestión Q6, se agrupan los datos en base a tres aproximaciones, de nuevo no excluyentes: 1) explicar; 2) demostrar; y 3) contrastar razonamientos. Las agrupaciones de las respuestas a las cuestiones Q5 y Q6 se establecen a posteriori y a partir de los datos de nuestro estudio exploratorio, de modo que no pretenden ofrecer una variedad exhaustiva de formas de interpretar la noción de argumentación matemática. Aún así, se espera que orienten sobre la diversidad de interpretaciones ya existente en una muestra pequeña de diez estudiantes pertenecientes a un mismo grupo clase.

La diversidad de prácticas en torno a la argumentación matemática

Tal como muestra la Tabla 1 (donde sólo hemos sintetizado los datos relativos a cinco casos por motivos de espacio), en la respuesta a los dos primeros apartados de A1, casi todos los estudiantes realizan la práctica satisfactoriamente: nueve de ellos argumentan en el primer apartado y ocho explican en el segundo; aquí, de los dos estudiantes restantes, uno repite la conclusión de la argumentación hecha en el primer apartado y otro se limita a plantear una hipótesis acerca del comportamiento del ortocentro según cada tipo de triángulo. Al estudiar las respuestas a Q2 y Q4, el porcentaje de resultados satisfactorios se reduce considerablemente, sobre todo cuando se pide a los estudiantes que propongan preguntas que requieran argumentación. Entendemos que los buenos resultados en las preguntas de A1 tienen mucho que ver con el carácter gráfico que subyace a la resolución de la actividad, que de algún modo parece facilitar tanto la elaboración de explicaciones como de argumentaciones, tal como se ha discutido en otros trabajos (Cobo y Fortuny, 2007).

En las preguntas Q1 y Q3 del cuestionario, cuando se pide a los diez estudiantes que identifiquen la práctica de argumentación empiezan a aparecer las dificultades más llamativas en relación a dos aspectos. Por un lado, la mitad de los estudiantes hace un reconocimiento confuso de la propia práctica al identificar explicaciones como argumentaciones y, en general, al usar de forma indistinta ambas nociones. No todos los estudiantes que manifiestan la confusión entre argumentación y explicación, lo hacen dando a la explicación el valor de argumentación, ya que en un caso el proceso es inverso, considerándose como explicación una argumentación. Por otro lado, en la Actividad 2, cuatro de los estudiantes afirman que han argumentado al realizar dibujos para ver si eran posibles las construcciones geométricas que se les proponían; no tienen en cuenta, sin embargo, la particularidad asociada a cada dibujo. Nos parece relevante que cuatro estudiantes consideren que argumentan al dibujar. En relación a estos datos, apreciamos de nuevo una cierta confusión ya que la mera prueba de situaciones mediante dibujos no constituye por si sola una forma de argumentación.

En las respuestas a las preguntas Q2 y Q4, observamos también una dificultad importante de los futuros maestros al plantear preguntas que requieran argumentación. Sólo un estudiante del grupo propone preguntas que requieran argumentación y las responde argumentando. De las preguntas que se proponen en la cuestión Q2 sólo en tres de los textos se requiere argumentación para responderse, mientras que en la cuestión Q4 son cinco textos. Más de la mitad de las preguntas propuestas no requieren argumentación, sino que en realidad piden el desarrollo de enumeraciones, la particularización de situaciones, explicaciones, preguntas directas o la exposición de opiniones. En seis casos, al responder a alguna pregunta propuesta por ellos mismos, los estudiantes sí que argumentan, pero no lo hacen en la respuesta a otras preguntas. Es también llamativo que argumenten al responder a preguntas propuestas por ellos que no requieren argumentación. Esto podría hacer pensar que al realizar una de las preguntas tenían pensada de antemano una respuesta argumentada y no contemplaron la posibilidad de otros tipos de respuesta. No obstante, no tenemos datos que validen esta interpretación.

Antes de presentar los datos de la Tabla 1, nos detenemos a comentar más detalladamente cómo se ha procedido a establecer los marcadores “Argumenta”, “Explica” y otras variantes en base al análisis de los textos escritos de cada estudiante. Para el caso del Estudiante 1, por ejemplo, en su respuesta al primer apartado de la Actividad 1, parte de la premisa dada en el enunciado, es decir, la existencia del ortocentro, y afirma que el ortocentro no siempre se encuentra en el interior del triángulo, utilizando como ley de paso el contraejemplo del triángulo obtusángulo, en el cual el ortocentro se encuentra fuera del mismo, como comprueba de manera gráfica. A esta respuesta asignamos el marcador “Argumenta” ya que la ley de paso utilizada garantiza que el ortocentro no siempre se encuentra en el interior del triángulo. El Estudiante 4, en cambio, parte de la misma premisa para afirmar también que el ortocentro no siempre se encuentra en el interior del triángulo, sin embargo la razón que utiliza para validarlo, más allá de no ser pertinente, consiste en describir la posición de las alturas de un triángulo respecto de sus lados. Para esta respuesta utilizamos el marcador "Explica" ya que las razones utilizadas tienen una función meramente descriptiva y no garantizan la validez de la conclusión. En el proceso de asignación de marcadores, conviene recordar que no buscamos estudiar si los enunciados construidos por los estudiantes son matemáticamente correctos, sino el uso que se hace de ellos.

Organizamos las respuestas a Q1 y Q3 según los marcadores "Identifica", "Confunde explicar y argumentar" y "No identifica". Utilizamos "Identifica" si la respuesta del alumno coincide con nuestro análisis previo de las respuestas a A1 y A2, tal como ya hemos comentado; utilizamos "Confunde explicar y argumentar" si afirma que ha argumentado en un enunciado en el que en realidad ha explicado o viceversa, según nuestras definiciones de argumentar y explicar; utilizamos "No identifica" en el resto de casos. Por ejemplo, en el Estudiante 5 marcamos su respuesta a Q1 con "Identifica" ya que el alumno afirma que argumentó al responder al primer apartado de A1 y, paralelamente, como resultado de nuestro análisis marcamos su respuesta a dicho apartado como "Argumenta". El Estudiante 1, sin embargo, afirma que argumenta en el primer y segundo apartado de A1, pero su respuesta al segundo apartado se corresponde con "Explica", por lo que asignamos el marcador "Confunde explicar y argumentar".

Utilizamos también marcadores para las respuestas a Q2 y Q4. Asignamos el marcador "Requiere" si consideramos que la pregunta que propone el alumno requiere argumentación y "No requiere" en caso contrario. Por ejemplo, en el Estudiante 1 marcamos su respuesta a Q2 con "Requiere" ya que la pregunta añade una demanda literal de razonar la respuesta, sin embargo marcamos su respuesta a Q4 con "No requiere" ya que pide explícitamente una explicación. Puede estar ocurriendo que este estudiante piense que su expresión "*Explica por qué*" debe interpretarse como una demanda de argumentación, sobre todo si tenemos en cuenta que en la respuesta a Q1 ha confundido argumentar y explicar. Con el resto de estudiantes seguimos procedimientos análogos en la asignación de marcadores.

<table>
<tr><th>Q1. ¿Has tenido que argumentar durante la resolución de A1? ¿Cuándo?</th><th>Q2. Añade una pregunta a A1 que requiera argumentación y respóndela.</th><th>Q3. ¿Has tenido que argumentar durante la resolución de A2? ¿Cuándo?</th><th>Q4. Añade una pregunta a A2 que requiera argumentación y respóndela.</th></tr>
<tr><td colspan="4">Estudiante 1
A1. a) El ortocentro de un triángulo no siempre se encuentra en el interior de éste, ya que en los triángulos que tienen un ángulo obtuso este punto queda fuera. [Argumenta]
A1. b) Cuanto más agudo sea el ángulo, más altura tiene el triángulo; si el ángulo es más obtuso, la altura es más pequeña. [Explica]</td></tr>
<tr><td>En la primera cuestión para justificarla. En la segunda cuestión también argumento mi creencia. [Confunde explicar y argumentar]</td><td>"¿Es posible, a partir de los ángulos de un triángulo determinar el ortocentro? Razona tu respuesta." [Requiere].
Si el triángulo tiene un ángulo obtuso el ortocentro estará fuera. [Argumenta]</td><td>Sí, el hecho de hacer el dibujo es una manera de argumentar o demostrar lo que se ha respondido. [No identifica]</td><td>"¿Qué triángulo tiene menos posibilidades? Explica por qué" [No requiere]
El equilátero tiene menos debido a que sus lados miden igual y por eso sus ángulos siempre son agudos. [Argumenta]</td></tr>
<tr><td colspan="4">Estudiante 2
A1. a) No, porque cuando hay un ángulo obtuso la altura desde los ángulos agudos pasa por el exterior del triángulo. [Argumenta]
A1. b) Si es un triángulo rectángulo, el ortocentro siempre coincidirá con el vértice del ángulo recto. Si todos los ángulos son agudos, el ortocentro se encontrará siempre en el interior del triángulo. Si hay algún ángulo obtuso, el ortocentro siempre estará en el exterior del triángulo. [Explica]</td></tr>
<tr><td>Sí, en la primera pregunta cuando se dice justificar. [Confunde explicar y argumentar]</td><td>"¿Por qué cuando hay un ángulo obtuso el ortocentro está en el exterior?" [Requiere]
Porque si hay un ángulo obtuso quiere decir que hay dos agudos, y por estos la altura siempre pasa por fuera al formar el ángulo recto. [Argumenta]</td><td>No. [Identifica]</td><td>"¿Por qué no se puede formar un triángulo equilátero que sea obtusángulo?" [Requiere]
Si es equilátero todos sus lados miden igual y sus ángulos también. Como la suma de los ángulos es 180º, los de un equilátero miden 60º. Por eso no puede ser obtusángulo (>90º). [Argumenta]</td></tr>
</table>

Estudiante 3 A1. a) No siempre se encuentra en el interior ya que la altura es la perpendicular del vértice respecto al lado opuesto y, en este caso, muchas veces algunas alturas se encuentran fuera. [**Argumenta**] A1. b) Las alturas pueden estar dentro o fuera según si hay un ángulo obtuso, recto o agudo. También dependerá de qué lado se tome como base. [**Explica**]			
Sí, en las tres preguntas, ya que para explicar las deducciones he tenido que argumentar por qué es así. [**Confunde explicar y argumentar**]	"¿Se pueden construir triángulos con la misma altura?" [**No requiere**] Sí, porque se fija un lado como base, se traza una línea paralela a la base a una distancia que sea la altura y esta recta son posibles puntos de altura. O sea que hay infinitos triángulos con la misma altura. [**Argumenta**]	Sí, haciendo los dibujos de los triángulos para demostrar que pueden existir. [**No identifica**]	"¿Por qué no se pueden construir triángulos equiláteros rectángulos y obtusángulos?" [**Requiere**] Porque un equilátero tiene los lados iguales. En el rectángulo y el obtusángulo hay un tercer lado que no es igual sino mayor ya que une los otros dos. [**Argumenta**]
Estudiante 4 A1. a) No siempre se encuentra en el interior del triángulo ya que sabemos que la altura va de un vértice al lado opuesto pero formando un ángulo de 90º con la base que se encuentra. [**Explica**] A1. b) Según el tipo de triángulo, ocurre que las alturas se encuentran en un punto interior o en un punto lateral. Si es en un punto lateral, también puede ser que las alturas coincidan con los lados o que no sean ningún lado, como se ve en el ejercicio a. [**Explica**]			
Sí, siempre que he querido demostrar mi punto de vista para convencer a la persona que lee. [**Confunde explicar y argumentar**]	"¿Hay algún triángulo con alturas que no se crucen?" [**No requiere**] No, ya que sabemos que todas las alturas van de un vértice al lado opuesto y, por tanto, siempre se tienen que encontrar en un punto, sea en el centro o en un lado del triángulo. [**Argumenta**]	No he tenido que argumentar ya que simplemente me pedían que pusiera si era posible o no, pero no me pedían que pusiera por qué pensaba una cosa u otra. [**Identifica**]	"¿Qué condiciones tienen que seguir los triángulos para ser equiláteros, isósceles y escalenos? ¿Y escalenos, acutángulos y rectángulos?"[**No requiere**] Un equilátero tiene todos los lados iguales y los ángulos: no puede ser obtusángulo, rectángulo ni acutángulo. El isósceles tiene dos lados iguales: puede ser acutángulo, rectángulo y escaleno. El escaleno tiene todos los lados diferentes: no puede ser acutángulo, rectángulo y escaleno. [**Explica**]
Estudiante 5 A1. a) No siempre se encuentra en el interior del triángulo, haciendo la comprobación con un triángulo que no sea equilátero se puede ver. El resultado lo he obtenido por inducción, así que no se justificarlo matemáticamente. [**Argumenta**] A1. b) Las alturas de los triángulos varían en función de los ángulos, cuanto más próximo a 90º es un ángulo más alto puede ser el triángulo. [**Explica**]			
Sí, en la primera pregunta referente al ortocentro. [**Identifica**]	"¿Por qué dependen de los lados las alturas de cualquier triángulo?" [**Requiere**] Porque los lados no forman parte de la base, son los que puedan dar altura al triángulos su los alargamos. El lado que forma parte de la base puede dar más altura al triángulo si lo reducimos. [**Explica**]	Sí, lo he argumentado todo por medio del dibujo de los resultados obtenidos. [**Identifica**]	"¿Por qué no existe un triángulo que sea equilátero y obtusángulo?" [**Requiere**] Para obtener un equilátero todos los lados tienen que ser iguales y los respectivos ángulos también. Un obtusángulo tendría que tener todos los ángulos obtusos para que fuera equilátero y esto es imposible porque no sumarían 180º. [**Demuestra**]

Tabla 1. Respuestas de cinco estudiantes a las preguntas Q1, Q2, Q3 y Q4

La diversidad de interpretaciones en torno a la argumentación matemática

Las interpretaciones de los estudiantes en torno a la argumentación matemática son muy variadas tal como muestra la Tabla 2, donde hemos resumido las respuestas de los diez estudiantes. Las cuestiones Q5 y Q6 arrojan información complementaria. A pesar de que los estudiantes mezclan en qué consiste la argumentación matemática y para qué sirve, existen ciertos rasgos mayoritarios en el conjunto de las respuestas, relacionándose la argumentación en matemáticas con la explicación, con la demostración y como soporte para entender conceptos o procedimientos matemáticos.

En cuanto a la relevancia de la argumentación en matemáticas, ocho de los diez estudiantes considera que la argumentación es importante porque ayuda a entender problemas, razonamientos o demostraciones y, por tanto, es un soporte de tipo instrumental que sirve para que se siga adecuadamente la actividad matemática. Se mencionan otras características tales como que la argumentación ayuda a manejar objetos matemáticos, a consolidar conocimientos, a validar resultados o a generar hipótesis, a partir de las cuales construimos marcadores. Por otra parte, algunos estudiantes sugieren diferencias entre la argumentación matemática y la argumentación en general. Afirman que en la primera interviene el rigor matemático y, de ahí, la relacionan con la prueba o demostración. Aunque esta diferenciación no está mal encaminada, se nota de nuevo una cierta confusión de conceptos.

En la cuestión Q6, las caracterizaciones de la argumentación matemática vuelven a ser variadas aunque hay algunos rasgos comunes. Las respuestas presentan la confusión entre la argumentación matemática y su utilidad en la práctica matemática más amplia. En general, los estudiantes caracterizan la argumentación matemática en torno a la explicación y la demostración. Relacionan la argumentación matemática con la explicación de razonamientos, problemas o teorías al tiempo que con la demostración de teorías, conclusiones y procedimientos de resolución de problemas. Se establecen relaciones de distintos tipos, a veces partiendo de la finalidad de la argumentación, a veces de su función de apoyo y otras de la naturaleza misma de esta actividad.

Análogamente a los resultados relativos al primer objetivo, pasamos a comentar el proceso con el que se establecen los marcadores utilizados para el análisis de las respuestas a las cuestiones Q5 y Q6. Para la cuestión Q5, como ya hemos avanzado, se utilizan 1os marcadores “Soporte para entender”, “Soporte para consolidar”, “Soporte para manejar”, “Soporte para validar” y “Soporte para generar hipótesis”. Por ejemplo, en el caso del Estudiante 2, asignamos los marcadores “Soporte para entender”, “Soporte para validar” y “Soporte para consolidar conocimiento” en su respuesta:

> La argumentación es la forma de explicar el razonamiento matemático ya que permite ver si éste es correcto o no. El hecho de argumentar también ayuda a consolidar los conocimientos matemáticos.

El último marcador se desprende de la respuesta literal del estudiante. El marcador “Soporte para validar” se asigna porque el estudiante se refiere a la función de discernir entre razonamientos correctos e incorrectos. El marcador “Soporte para entender” se asigna porque el estudiante habla de argumentar como “forma de explicar el razonamiento matemático”, que es una forma de ayudar a entender este razonamiento, según nuestra definición de explicar.

Para el análisis de la cuestión Q6, se utilizan los marcadores “Explicar”, “Demostrar” y “Contrastar razonamientos”, según los alumnos expresen en sus respuestas aspectos relativos a estas tres prácticas, respectivamente. Por ejemplo, en el caso del Estudiante 1 asignamos los marcadores “Explicar” y “Demostrar” a su respuesta “Consiste en mostrar el procedimiento que se ha seguido y demostrar la conclusión a la que se ha llegado”. De la respuesta literal del estudiante se desprende el marcador “Demostrar”, mientras que “Explicar” se aplica tras interpretar que “mostrar un procedimiento” es exponerlo de forma clara y, por tanto, explicarlo.

Q5. ¿Por qué es importante la argumentación en el desarrollo del pensamiento matemático?	**Q6.** ¿En qué consiste la argumentación matemática?
Estudiante 1	
La argumentación es lo que hace tomar conciencia de los procesos que se han utilizado para resolver un problema. [**Soporte para entender**]	Consiste en mostrar el procedimiento que se ha seguido y demostrar la conclusión a la que se ha llegado. [**Explicar**], [**Demostrar**]
Estudiante 2	
La argumentación es la forma de explicar el razonamiento matemático ya que permite ver si éste es correcto o no. El hecho de argumentar también ayuda a consolidar los conocimientos matemáticos. [**Soporte para entender**], [**Soporte para validar**], [**Soporte para consolidar conocimiento**]	Es explicar el procedimiento y las causas del razonamiento que se ha seguido. [**Explicar**]

Estudiante 3	
Porque ayuda a pensar en cómo funcionan, se estructuran las cosas, y a poder resolver más fácilmente los problemas. [**Soporte para manejar**][**Soporte para entender**]	La argumentación matemática consiste en la demostración de problemas y teorías. Sirve para ayudar a explicar y resolver problemas planteados y facilitar su resolución.[**Demostrar**]
Estudiante 4	
Si tienes unas operaciones matemáticas delante pero nadie ha argumentado qué significan, por muchas matemáticas que sepas te costará entenderlo; en cambio, si tienes una argumentación, aunque no entiendas las matemáticas, podrías saber la resolución. [**Soporte para entender**]	Como ya he dicho antes, sirve para que cualquier persona pueda comprender el procedimiento que se ha llevado a cabo para resolver un problema o cuestión matemática. [**Explicar**]
Estudiante 5	
Sin argumentación la gente puede desconfiar del descubrimiento alguien ha realizado. Además, si en su momento se te da una argumentación del resultado obtenido, en un futuro tendrás más posibilidades de acordarte.[**Soporte para entender**], [**Soporte para consolidar conocimientos**]	Se basa en argumentar por medio de la ayuda de demostraciones todos los pasos seguidos en el desarrollo de un cálculo matemático. [**Demostrar**]
Estudiante 6	
Porque es lo que nos permite seguir un proceso lógico para resolver un problema según la información que se tenga. [**Soporte para manejar**]	Es demostrar siguiendo un proceso lógico que determinada cosa es cierta o falsa. [**Demostrar**]
Estudiante 7	
Porque sin una argumentación no se puede apreciar cómo se llega al resultado. [**Soporte para entender**]	La explicación mediante palabras, dibujos o expresiones de problemas abstractos. [**Explicar**]
Estudiante 8	
Da una explicación del razonamiento y ayuda a desarrollar temas con más facilidad y quizás de formas más accesibles. [**Soporte para entender**]	Creo que consiste en dar una explicación a un razonamiento o pensamiento a partir de las matemáticas y de todas sus posibles deducciones. [**Explicar**]
Estudiante 9	
Ayuda a ver los problemas con una visión diferente y a generar posibles hipótesis. [**Soporte para generar hipótesis**]	La argumentación matemática consiste en contrastar posibles razonamientos del problema, mirar cuál es la solución correcta (razonamiento) y cuál tiene que rechazarse.[**Contrastar razonamientos**]
Estudiante 10	
Porque es necesario demostrar lo que se ha hecho por medio de pasos, cuestiones…[**Soporte para entender**]	La argumentación matemática podríamos decir que consiste en demostrar una solución y rechazar otra. Todo esto, claro, dando demostraciones de paso, demostraciones matemáticas, demostraciones científicas. [**Demostrar**]

Tabla 2. Respuestas de los diez estudiantes a las preguntas Q5 y Q6

Conclusiones y reflexiones finales

El estudio exploratorio que hemos realizado responde a nuestro interés por la formación de los futuros maestros de matemáticas. Empezábamos este escrito precisamente justificando la necesidad de formar al futuro maestro en cuestiones de conocimiento del contenido matemático. El análisis de las respuestas de diez estudiantes a un cuestionario sobre la argumentación matemática ha permitido identificar carencias importantes en contenidos conceptuales y procedimientos básicos. Consideramos esto muy relevante ya que los estudiantes de la muestra serán maestros dentro de poco tiempo o como mínimo recibirán en breve un título que los habilitará para dar clases en la escuela primaria.

En la sección anterior hemos presentado algunos de los resultados preliminares que justifican la necesidad de continuar indagando sobre el conocimiento de la argumentación matemática para así entender mejor algunas de las problemáticas más acuciantes de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Nuestros datos muestran dificultades prácticas y de interpretación en torno a la argumentación matemática. En general y de modo resumido, hemos encontrado las siguientes carencias:

1. Confusión práctica entre distintos tipos de razonamiento, concretamente entre argumentación y explicación.
2. Dificultad para plantear preguntas que requieran argumentación.
3. Confusión teórica entre distintos tipos de razonamiento, concretamente entre explicación, argumentación y demostración.

Al empezar la actividad profesional, el maestro debe contar ya con las suficientes herramientas conceptuales y prácticas sobre la argumentación matemática, para poder trabajarlas con los alumnos, decidiendo cuándo se argumenta, explica, demuestra, enumera, conjetura, etc. El futuro maestro, además, debe aprender a plantear preguntas que requieran argumentaciones u otro tipo de discurso razonado en actividades escritas o por medio de conversaciones en el aula que orienten los procesos de razonamiento. Para ello, es necesario aprender a distinguir los principales tipos de razonamiento con los que se trabaja en matemáticas: explicaciones, argumentaciones, proposiciones, hipótesis y demostraciones, entre otros. Identificar razonamientos bien estructurados y aprender a plantear preguntas que faciliten la argumentación son capacidades de gran relevancia, por su importancia epistemológica dentro del desarrollo del pensamiento matemático y por la complejidad que supone su adquisición.

Somos conscientes de que conviene continuar con nuestra investigación para poder conocer con mayor detalle las carencias de los futuros maestros sobre la interpretación y el uso de la argumentación matemática, de modo que podamos introducir marcadores más finos en el análisis de los textos de los estudiantes y diseñar actividades que permitan obtener más información, ya sea diferente o complementaria a la recogida en esta primera investigación. En concreto, los trabajos sobre el conocimiento matemático de los futuros maestros deberían completarse con estudios empíricos en aulas de matemáticas de distintos niveles. En la actualidad y como reacción al exceso de aprendizajes mecánicos, son frecuentes las prácticas argumentativas en muchas aulas de matemáticas. Sin embargo, son necesarios estudios que analicen en profundidad el uso que maestros y alumnos están haciendo de estas prácticas, para garantizar que se estén tratando de una forma amplia que incluya el desarrollo de distintos tipos de razonamiento, junto con la comprensión de su papel dentro de la actividad matemática. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Badillo, E. y Edo, M. (2007). Taller de arte y geometría en el ciclo superior de primaria II: triángulos (2ª parte), en C. Tomás y M. Casas (coords.), *Educación Primaria: orientaciones, recursos, desarrollo curricular y experiencias* (1-25). Barcelona: Praxis.

Cobo, P. y Fortuny, J. M. (2007). AgentGeom: un sistema tutorial para el desarrollo de competencias argumentativas de los alumnos a través de la resolución de problemas. *Matematicalia,* 3(3), http://www. matematicalia.net.

De Gamboa, G. (2009). *Prácticas e interpretaciones en torno a la argumentación matemática de futuros maestros de educación primaria*. Trabajo de Maestría. Bellaterra: Universidad Autónoma de Barcelona, .

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Glaser, B. G. y Strauss, A. L. (1967). *The discovery of grounded theory: strategies for qualitative research*. Londres: Weidenfeld & Nicolson

Godino, J. D. y Recio, Á. M. (2001). Significados institucionales de la demostración: implicaciones para la educación matemática, *Enseñanza de las Ciencias,* 19(3), 405-414.

Gresalfi, M., Martin, T., Hand, V. y Greeno, J. (2008). Constructing competence: an analysis of student participation in the activity systems of mathematics classrooms, *Educational Studies in Mathematics,* 70(1), 49-70.

Gutiérrez, A. (2005). "Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica, en A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (coords.), *Investigación en Educación Matemática* (27-44). Córdoba: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Homero, A. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. *Educación Matemática,* 19(1), 63-98.

Jorba, J. (1998). La comunicació i les habilitats cognitivo-lingüístiques", en J. Jorba, I. Gómez y À. Prat (coords.), *Parlar i escriure per aprendre: ús de la llengua en situació d'ensenyament-aprenentatge de les àrees curriculars* (37-58),. Bellaterra: ICE-UAB.

León, O. L. y Calderón, D. I. (2001). Validación y argumentación de lo matemático en el aula. *RELIME-Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 4(1), 5-21.

Perelman, C. yOlbrech-Tyteca, L. (1994). *Tratado de la argumentación.* Madrid: Gredos.

Plantin, C. (1998). *La argumentación*. Barcelona: Ariel.

RAE (2001). *Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española*. Madrid: Espasa Calpe.

Ribas, N. (2003). Exposar: relacionar les idees entre si, en N. Sanmartí (coord.), *Aprendre Ciències tot aprenent a escriure ciència* (149-168). Barcelona: Edicions 62, .

Sardà, A. (2003). Argumentar: proposar i validar models, en N. Sanmartí (coord.), *Aprendre Ciències tot aprenent a escriure ciència* (121-148). Barcelona Edicions 62.

Toulmin, S. (2007). *Los usos de la argumentación*. Madrid: Península.

Este artículo fue recibido en SUMA en octubre de 2009 y aceptado en mayo de 2010

suma+ 64
Junio 2010, pp. 45-51

Una nueva visión del trabajo en grupo: WebQuest

Entre las capacidades que nuestros alumnos deben desarrollar, se encuentran la búsqueda y uso de la información. Para este propósito, presentamos una actividad muy útil y aplicable en distintos campos de la investigación, como es la WebQuest. Mostraremos un ejemplo de WebQuest sobre Mujeres en la Historia de las Matemáticas, donde los alumnos podrán adquirir entre otras competencias el trabajo en grupo, búsqueda, selección y buen uso de la información recopilada, así como la exposición oral.

Palabras Clave: WebQuest, trabajo en grupo, evaluación, competencias, innovación docente.

A new vision of the collaborative work: WebQuest

Our students must achieve the capacity of searching and using information. For this target, we present a very useful and applicable activity in different fields of research, as the WebQuest. We show an example of WebQuest about Women in the History of Mathematics, where students could acquire skills as teamwork, searching, selection and the proper use of the gathered information, as well as the oral presentation.

Key words: WebQuest, collaborative work, evaluation, competences, teaching innovation.

Introducción

La inclusión de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (en adelante TIC) en todos y cada uno de los niveles del sistema educativo español radica en dos causas principales.

En primer lugar su importancia en nuestra vida diaria, tanto profesional como social, pues están plenamente implementadas en la mayoría de los centros de trabajo. Por ello, el alumnado debe recibir una formación adecuada como usuario (especialmente en su ámbito de conocimiento) en el manejo de los ordenadores, del software más destacado en su área y de cualquier otro recurso informático básico, como Internet. Con ello se persigue asegurar su futuro tanto profesional como personal en una sociedad cada vez más tecnológica e informatizada.

En segundo lugar, especialmente en el ámbito de la Educación Universitaria, la estructura y filosofía del Espacio Europeo de Educación Superior (Ministerio de Educación, Cultura y Deportes, 2003) expone y presenta la necesidad de que el alumnado no debe ser formado sólo en los contenidos curriculares básicos sino que debe recibir una formación integral en la que sea capaz de *aprender a aprender*. Esto se tendrá en cuenta cuando se realicen los futuros planes de estudios universitarios, que debieran implantarse a partir del curso 2009-2010.

Esta relevancia de las TIC no se reduce al nivel universitario, sino que se ha considerado la necesidad de educar y formar en ellas desde las Enseñanzas Primaria y Secundaria con el fin de evitar la aparición de un nuevo analfabetismo funcional relativo al manejo de equipos y software informáticos. En este sentido, y sin querer extendernos en exceso en este punto que se aleja de los objetivos del presente artículo, dejamos constancia de los Decretos 231/2007 y 208/2002 de la Comunidad Autónoma de Andalucía[1] que regulan el currículo de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y Bachillerato, respectivamente. En ellos, además, se establece la necesidad de

Mónica Domínguez Serrano
Ana M. Martín Caraballo
Concepción Paralera Morales
Eulalia Romero Palacios
Ángel F. Tenorio Villalón
Universidad Pablo de Olavide. Sevilla

la presencia de las TIC en todas y cada una de las áreas del currículo. Ante este panorama, la Junta de Andalucía ha optado por incorporarlas en el aula, dotando a los centros de los medios informáticos necesarios.

En el caso de la ESO, uno de los objetivos es la "formación para la utilización de las tecnologías de la información y la comunicación, estimulando su uso en los procesos de enseñanza y aprendizaje de todas las materias y en el trabajo del alumnado". Pero además se establece que una de las competencias a alcanzar por el alumnado tras su paso por este nivel educativo corresponde a la *competencia digital* y *el tratamiento de la información*, entendidos como "la habilidad para buscar, obtener, procesar y comunicar la información y transformarla en conocimiento, incluyendo la utilización de las TIC como un elemento esencial para informarse y comunicarse". (véase Decreto 231/2007)

En cuanto al nivel de Bachillerato, uno de sus objetivos de etapa es "conocer y valorar el desarrollo científico y tecnológico, sus aplicaciones e incidencia en el medio físico, natural y social, y utilizar las tecnologías de la información y la comunicación en los procesos de enseñanza-aprendizaje". (Véase Decreto 208/2002)

En el ámbito de las Universidades, esta filosofía no está tan asentada y no todas ellas han llevado el uso del software informático a la práctica diaria del docente en sus clases, pero en muchas universidades el uso de software informático ha pasado de ser prácticamente residual a ser una parte importante de su docencia, habilitando las denominadas Aulas Virtuales, plataformas que permiten la distribución de material docente y la comunicación casi instantánea entre profesorado y alumnado. No obstante, existen titulaciones e incluso universidades que siguen obviando la enorme importancia de una docencia con un alto componente formativo en las herramientas informáticas y las TIC.

Entre las muchas habilidades y competencias que pueden desarrollarse mediante el uso de las TIC se encuentran: la búsqueda y la selección de información, el análisis crítico y la resolución de problemas, el trabajo en equipo, los idiomas, la capacidad de autoaprendizaje y de adaptación al cambio o la iniciativa y la perseverancia (véanse Mendaña y González, 2004; Huertas y Tenorio, 2006).

No obstante, la utilización de las TIC en el sentido descrito no es la única posibilidad que nos ofrece, puesto que se constituye como una herramienta de gran utilidad en la labor docente, como trataremos de describir a continuación. Internet es fuente inagotable de información valiosa y validada, además de directa y rápida. Esto proporciona una gran cantidad de material de calidad que puede emplearse para la elaboración de Unidades Didácticas y sesiones en el aula, pero también permite realizar actividades de un elevado contenido formativo que sea motivador para el alumnado fuera del centro educativo. Este es el caso de las WebQuest, tema central de este artículo, o las WebQuestions (Domínguez, Huertas y Martín, 2007).

WebQuest: origen y descripción

El uso de las herramientas tecnológicas más recientes (entre ellos, Internet) ha conllevado un cambio metodológico en las aulas de los países desarrollados en los últimos años. Fue a mediados de la década de los noventa cuando Bernie Dodge (1995, 1998) y Tom March (1998)[2], ambos profesores de la Universidad de San Diego (California), idearon y pusieron en práctica un modelo de actividad basado en la *búsqueda en Internet*. Con dicho modelo pretendían crear una herramienta que permitiese al alumnado trabajar en el aula haciendo uso de Internet, de tal modo que este no perdiese su tiempo buscando información en las innumerables páginas web existentes, sino que centrara su búsqueda en unos pocos enlaces que el profesorado considerase apropiados. Los creadores de este modelo lo denominaron *WebQuest*.

Así pues, actualmente entendemos por WebQuest cualquier actividad de investigación basada en el uso de la información disponible en Internet, estando dicha actividad tanto estructurada como guiada. En una WebQuest se le proporciona al alumnado una tarea a realizar bien definida, así como aquellos recursos y consignas que le serán necesario para su correcta conclusión (Dodge, 1995; Barba, 2002). En consecuencia, las WebQuest constituyen una estrategia didáctica en la que son los propios alumnos y alumnas quienes construyen su propio conocimiento, siempre bajo la guía y dirección del docente.

Con esta herramienta el alumnado planifica y realiza tareas de investigación con Internet como principal fuente de información, de manera que su tiempo de trabajo se destina al manejo y transformación de la información, con lo que se favorece el desarrollo de los procesos intelectuales basados en el análisis, síntesis y evaluación de la información (Adell, 2004).

Son numerosas las WebQuest de todo tipo, temática y nivel que pueden encontrarse en Internet. Si las clasificamos por su temporalización (véanse Pérez, 2007 y Bracho et al., 2004), se pueden distinguir WebQuest *a corto plazo* –aquellas que pueden concluirse entre una y tres sesiones de 50 minutos– y *a largo plazo* –que requieren de más de cuatro sesiones–. Estas últimas conllevan tareas más extensas y de mayor profundidad, y suelen concluir con una presentación obligatoria por parte del alumnado de sus conclusiones. Actualmente, se están usando versiones simplificadas, denominadas MiniQuest, que sólo constan de tres breves etapas (Escenario, Tarea y Producto) que pueden completarse en una única sesión.

El número de las WebQuest en castellano es muy reducido siendo escasas las que se dedican al ámbito universitario (Huertas y Tenorio, 2006) y aún menor en número las de contenido matemático. Sin embargo, en los últimos años, son varias las Comunidades Autónomas, como Andalucía, Aragón o Cataluña[3], que están recopilando bibliotecas con las WebQuest existentes.

Utilizar una WebQuest en el aula conlleva que el docente realice una completa planificación y secuenciación de la actividad que realizarán sus alumnos y alumnas. Ya que el docente ha de ayudar, guiar y dirigir la búsqueda de información que lleva a cabo el alumnado. A este respecto, el docente indicará en la actividad un número de sitios web de calidad que permitan la correcta búsqueda de información adecuada al fin de la actividad. Dentro de esta planificación, el docente también puede establecer un *escenario de juego* para la actividad, que requiera el reparto de roles entre los miembros componentes de cada grupo de alumnos y alumnas.

Son varios los métodos de trabajo que pueden plantearse a la hora de completar las actividades de una WebQuest, lo que nos permitirá estimular la colaboración y discusión entre los alumnos y alumnas, fomentando el aprendizaje cooperativo. En consecuencia, puede afirmarse que "las WebQuest fortalecen las habilidades en el uso inteligente de la información que se encuentra en Internet" (Fainholc, 2004), siendo uno de sus objetivos el que "los alumnos usen de manera apropiada sus recursos y su tiempo, enfocando su labor más a la aplicación de la información que a su búsqueda" (Fainholc, 2004).

El trabajo con WebQuest requiere, como hemos comentado anteriormente, un proceso preparatorio previo. Dodge (2004) expone cuales son las diferentes alternativas que podemos encontrar al buscar una WebQuest: a) encontrar una que trate aquellos tópicos que queremos trabajar; b) hallar una que trate sobre tópicos relacionados o parecidos, que podría ser modificada y adaptada[4] y c) no encontrar nada útil, por lo que sería necesario crear una WebQuest propia.

A continuación expondremos la estructura general de una WebQuest, éstas suelen dividirse en seis etapas (Pérez, 2007 y Adell, 2004):

1. **Introducción:** información básica sobre la actividad que debe servir de orientación y motivación para el alumnado.

2. **Tarea:** descripción formal de la actividad que el alumnado tendrá que realizar. En esta etapa se indicará cuál será el resultado que debe entregarse al docente cuando finalice la actividad. Es la etapa de mayor importancia, ya que el alumnado solo podrá ser evaluado en función de lo exigido en esta etapa. Debe estar redactada de manera clara y concisa, puesto que no debe haber ninguna duda acerca de cuál es el objetivo final de la actividad y cómo han de presentarse las conclusiones. Bernie Dodge (2002) establece una descripción sobre la tipología que podemos encontrar en una WebQuest.

3. **Proceso:** pasos (breves y claros) que el alumnado debe seguir para concluir exitosamente la tarea encomendada en la etapa anterior.

4. **Recursos:** listado de páginas web, seleccionadas por el docente, en las que el alumnado podrá buscar la información que necesitará para completar la tarea encomendada.

5. **Evaluación:** criterios con los que se evaluará el trabajo realizado por el alumnado en la WebQuest. Debe tenerse en cuenta que estos criterios deben ser claros, justos y consistentes, siendo de gran comodidad para el docente el preparar una plantilla de evaluación.

6. **Conclusión:** resumen de la actividad para que el alumnado reflexione sobre el proceso de elaboración de conocimiento que se ha llevado a cabo con la WebQuest. Esta etapa puede incluir una retroalimentación para que el alumnado indique cómo podría mejorarse la actividad.

En ocasiones aparece una séptima etapa denominada **Créditos** o **Créditos y Referencias,** en la que aparece toda la información técnica de la WebQuest, además de todas las fuentes utilizadas en la misma (imágenes, música, textos), con los correspondientes vínculos a estas.

A la hora de preparar una WebQuest, esta debería satisfacer las siguientes cinco reglas básicas con el fin de que la consideremos bien diseñada. Dichas reglas son las siguientes (Dodge, 2001):

1. **Buscar buenos sitios web:** el docente ha de restringir la búsqueda que tendrán que realizar el alumnado durante la realización de su tarea. Si solo han de usar un motor de búsqueda, son miles de páginas las que pueden encontrar, muchas de ellas de escasa relevancia y rigor. Es por esta razón que el docente está obligado a facilitar un listado con un número suficiente de páginas web cuya calidad sea válida y contrastada y que le permita al alumnado realizar correctamente su tarea.

2. **Organizar tanto alumnado como grupos de clase:** cada ordenador debe estar siendo usado correctamente en cada instante, de tal modo que todos y cada uno de los alumnos y alumnas estén realizando una actividad significativa en cada instante con respecto a la tarea encomendada en la WebQuest.

3. **Retar al alumnado para que piense:** el alumnado no debe limitarse a realizar simples resúmenes de textos existentes en Internet como trabajo a entregar. Debe procurarse que el alumnado desarrolle sus habilidades de resolución de problemas, razonamiento y comunicación. Para ello, el docente preparará tareas que conlleven tanto una asimilación de la información encontrada en Internet como su posterior procesamiento y comunicación de la información, adecuando dicha información a las preguntas realizadas por el docente.

4. **Usar los medios:** una WebQuest tiene necesariamente que hacer uso de los medios a disposición del alumnado en su centro de estudios, como pueden ser los diversos paquetes de software informático o las bases de datos existentes en la biblioteca del centro.

5. **Refuerzo para el éxito:** como una WebQuest suele ser una actividad atípica y que rompe la rutina habitual de clase, este tipo de actividades permite incidir en aspectos claves en la formación por competencias de nuestro alumnado, permitiendo fomentar su trabajo autónomo. De este modo, los docentes deben formarles para que reciban, procesen y comuniquen cuanta información hallen en Internet, adecuándola a la tarea asignada y fortaleciendo dichas habilidades.

Ejemplo de WebQuest: Mujeres en la Historia de las Matemáticas

A continuación presentamos un ejemplo práctico de WebQuest con el fin de concretar lo descrito anteriormente de manera teórica.

Figura 1

Introducción

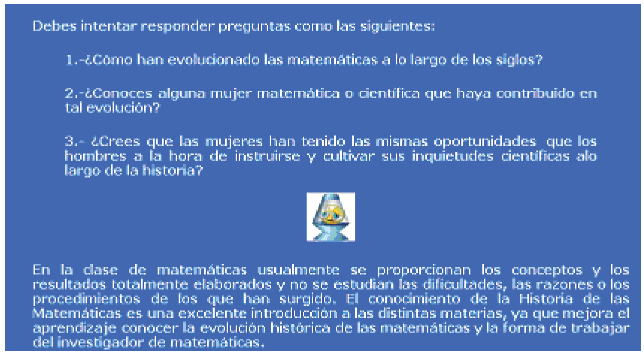


Figura 2

Cuando se pregunta por personas que influyeron en el desarrollo de las Matemáticas, habitualmente se dan nombres de hombres. Sin embargo, han sido muchas las mujeres que han intervenido en el devenir de las Matemáticas en el transcurso de la Historia. Por ello, el Instituto Andaluz de la Mujer se ha mostrado interesado en informar a los alumnos y las alumnas andaluces acerca de algunas mujeres que han sido importantes en el conocimiento o desarrollo de las Matemáticas. Con esta intención, os han elegido a vosotros para que obtengáis información sobre estas mujeres a las que tanto les debe las Matemáticas.

A continuación, se os indicará la tarea que tendréis que realizar con este motivo.

Tarea

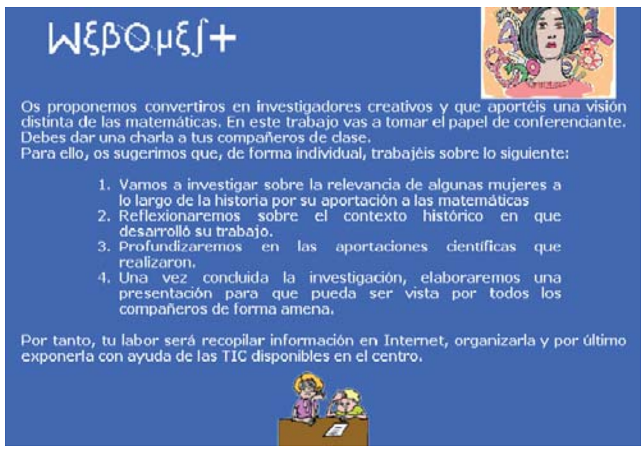


Figura 3

La forma de llevarlo a cabo va a ser mediante un trabajo que incluya, al menos, los siguientes apartados:

Título:	Para cada mujer matemática.
Introducción:	De quién se va a hablar. Localización temporal y espacial. Mención del contexto histórico.
Desarrollo:	Vida y obra. Sus aportaciones científicas. Si puedes incluye alguna demostración sencilla.
Referencias:	Bibliográficas y recursos web que hayas utilizado.

Para todo ello, los alumnos y las alumnas se podrán servir de dibujos, imágenes, fórmulas y textos que hayan encontrado en los enlaces que se proponen en el apartado "recursos" y de libros y revistas que encuentren en la biblioteca del centro, municipal o de su propiedad.

La forma de exponer el trabajo será en una presentación en Power Point© o Impress© de no más de 15 minutos.

Finalmente se colgarán en la clase, por orden cronológico, un folio resumen con fotografías de las mujeres matemáticas presentadas.

Proceso

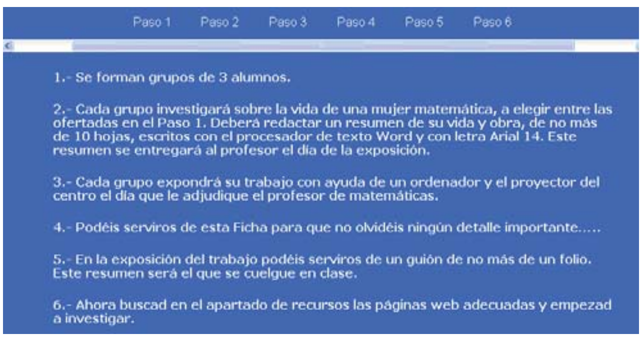


Figura 4

El primer paso para realizar la tarea consistirá en elegir un nombre de una mujer matemática entre los que se aportan en la siguiente lista, sobre la que investigaremos su vida, la actividad que desarrolló, la época en que vivió, si hizo importantes aportaciones a las Matemáticas, si fueron publicadas, etc.

- Teano
- Hipatia
- Maria Gaëtana Agnesi
- Sophie Germain
- Emmy Amalie Noether
- Sonia Kovalévskaia
- Madame de Châtelet
- Mary Somerville
- Augusta Ada Byron
- Grace Murray Hopper

En el Paso 2, una vez que los alumnos han seleccionado la mujer matemática a la que vamos a conocer mejor, necesitamos que busquen los datos básicos de la matemática seleccionada. A los alumnos se les proporcionó un pequeño guión con unas cuestiones que le podían facilitar la tarea.

En el Paso 3, nos interesa conocer en qué contexto histórico vivió y desarrolló su actividad la mujer que hayan elegido ya que el contexto histórico en que vive una persona condiciona enormemente los acontecimientos en su vida personal y profesional.

Para trabajar este punto pueden resultar de utilidad las siguientes preguntas, a las que los alumnos y las alumnas deberán de dar respuesta, entre otras que consideren interesantes:

- ¿En qué años vivió la mujer matemática que has elegido?
- ¿Cuáles son los principales acontecimientos de ese siglo (o esos siglos) a nivel internacional?
- ¿Qué circunstancias históricas se vivían en el país de origen de la autora? ¿Y (si es distinto) en el país en que desarrollaba su actividad? En este punto sería interesante destacar el sistema político existente, la situación en que se encontraban las mujeres (legislación sobre género), etc.
- ¿Cómo es el contexto científico? ¿Existe algún otro/a autor/a que haya desarrollado algún descubrimiento relevante?

Destacar algún hecho histórico o científico relevante del momento (si existe).

Paso 4

Vamos a conocer algo más de la vida de la matemática que hayan elegido. Para ello, el alumno o la alumna intentará responder a las siguientes preguntas:

- Destaca los dos aspectos de su vida profesional que más te hayan impresionado.
- ¿Cómo crees que influyó su condición de mujer en su vida profesional? Indica al menos dos aspectos positivos y dos aspectos negativos.
- ¿Crees que su vida profesional influyó en su vida personal? ¿Positiva o negativamente?
- Enumera alguna de sus obras más relevantes.
- ¿Crees que fue justamente reconocida su labor científica? Enumera los hechos que justifiquen tu respuesta.
- ¿Crees que fue una persona feliz? Justifica tu respuesta.
- ¿Te sientes identificado o identificada con algún aspecto de su vida?
- ¿Crees que su infancia determinó el desarrollo de su vida?
- ¿Crees que fue reconocida en su ambiente más cercano (familia, amigos, compañeros de trabajo...)?
- ¿La pondrías como ejemplo a seguir por los investigadores y las investigadoras? Justifica tu respuesta.

Paso 5

Vamos a conocer algo más de la obra de la matemática que hayan elegido. Para ello, el alumno o la alumna intentará responder a las siguientes preguntas:

- Enumera sus principales aportaciones al conocimiento matemático.
- ¿Crees que tuvo influencia sobre los matemáticos y matemáticas coetáneos?
- ¿Y en los posteriores?
- ¿Cómo influyó su obra en su vida personal?
- ¿Reconocieron sus aportaciones en vida?

Paso 6

En esta actividad se pretende que todos y todas aprendamos algo sobre todas y cada una de las mujeres matemáticas, no únicamente sobre aquella autora sobre la que hemos trabajado. Por este motivo, es fundamental que compartamos nuestro trabajo con el resto de compañeros y compañeras.

Para que la lectura y aprendizaje sea más ameno, se propone a los/as alumnos/as que hagan una presentación en Power Point© o Impress© en la que podéis incluir imágenes, enlaces, etc. Deben pensar que sus compañeros y compañeras únicamente verán esta parte del trabajo, por lo que tendrán que incluir aquellas cuestiones que consideren más relevantes, destacar aquello sobre lo que deben reflexionar, etc.

En cada uno de los pasos se les deja a su disposición una relación de páginas web que les servirán de recursos para su tarea, como las que se muestran a continuación:

http://www.rsme.es/comis/mujmat/publicaciones.htm#articulos
http://www.rsme.es/comis/mujmat/enlaces.htm#bio
http://www.xtec.es/~fgonzal2/mujeres_mat.html
http://profeblog.es/pedro/category/mujeres-cientificas/mujeres-matematicas/
http://www.minedu.gob.pe/dinesst/udcrees/material_docentes/amatematica/encanto_mujeresmate.doc
http://centros5.pntic.mec.es/ies.ortega.y.rubio/Mathis/Mujeres/mujer.htm
http://personal.redestb.es/javfuetub/Biografias/Mujmat.htm
http://cuhwww.upr.clu.edu/mate/museo/mujeres/

Se proponen una serie de actividades relacionadas con las mujeres matemáticas que se presentarán en las exposiciones. Cada grupo resolverá en su trabajo la cuestión que le corresponda.

Al final de las exposiciones se planteará una prueba escrita con cuestiones tipo test de la información expuesta en todos los trabajos.

Recursos

Figura5

Evaluación

Este trabajo se evaluará según los siguientes criterios:

	NOTA
Extensión y recursos	
Calidad de investigación	
Calidad de exposición	
Examen test	
MEDIA	

La nota del trabajo será una media aritmética entre las notas de investigación, exposición, recursos y la prueba teórica. Esta nota formará parte de la evaluación final del trimestre.

Conclusiones

En este trabajo exponemos la relevancia de la WebQuest, herramienta docente que en los últimos años se está abriendo un hueco en la tarea educativa y que está consolidando el uso diario de las TIC en las aulas.

Además de realizar un compendio de los diferentes trabajos sobre WebQuest recogemos, en líneas generales, los conocimientos previos necesarios para enfrentarse a la elaboración de una WebQuest.

Por último, presentamos una WebQuest propia e innovadora ya que persigue la implicación del alumnado universitario, campo en el que aún es incipiente el uso de esta herramienta, en las matemáticas, asignatura que puede ser difícil de conciliar con tareas amenas y entretenidas.

NOTAS

[1] La Comunidad Autónoma de Andalucía tiene transferidas las competencias en Educación, por lo que los anteriores decretos son de ámbito regional. No obstante, las restantes Comunidades Autónomas con dichas competencias, al igual que las que dependen aún del Gobierno Central, también presentan currículos orientados a la obtención de diversas competencias, incluyendo la del manejo y uso de las TIC.

[2] La incorporación de Tom March al Departamento de Inglés de la Universidad de San Diego supuso un impulso fundamental a la herramienta puesto que se le planteó el reto de impartir su docencia en un laboratorio con ordenadores. Su éxito no se quedó en la creación de las WebQuest, sino que les llevó a ser contratados por *Pacific Bell Education* en 1995, donde desarrollaron herramientas en línea, recursos y estrategias que ayudasen a profesores, bibliotecarios y alumnos en el mejor uso posible de Internet y las videoconferencias. Recientemente, la publicación digital *e-School News* ha reconocido a Dodge como uno de los 30 innovadores más importantes en tecnología educativa de Estados Unidos. Actualmente está desarrollando un nuevo enfoque para la capacitación de maestros mediante el Learning Through Cyber-Apprenticeship Project (Proyecto de Aprendizaje a Través del Ciberespacio).

[3] La Comunidad Catalana de WebQuest y el Instituto de Ciencias de la Educacióon de la Universidad Autónoma de Barcelona, contando con la colaboración del Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunyna organizaron las primeras jornadas sobre la aplicación de las WebQuest en la práctica docente en marzo de 2006 en Barcelona.

[4] Esto requeriría pedir permiso al autor de la WebQuest para realizar los cambios que hayamos pensado con el fin de adecuarla a nuestros objetivos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adell, J. (2004). Internet en el aula: las WebQuest. *Edutec (Revista Electrónica de Tecnología Educativa*, 17.
http:/www.uib.es/depart/gte/edutec-e/revelec17/adell_16a.html.

Barba, C. (2002): La investigación en Internet con las WebQuest. *Comunicación y Pedagogía*, 185 pp. 62-66. Reeditado en Barba, C. (2004). La investigación en Internet con las WebQuest. *Quaderns Digitals. Monográfico: WebQuest*. Centre d'Estudis Vall de Segó, Valencia
http://www.quadernsdigitals.net/index.php?accionMenu=hemeroteca.VisualizaArticuloIU.visualiza\&articulo_id=7365.

Barba, C. y Capella, S. (2003): WebQuest. Una investigación guiada con recursos Internet. Comunicación presentada en el III Congreso Internacional Virtual de Educación CIVE 2003, Universidad de las Islas Baleares, 1-11 de abril de 2003. http://www.xtec.es/~cbarba1/Articles/CIVEbarbacapella.pdf [Consulta: abr. 2007].

Bracho, R., Luque, C. y España, F. (2004): *Introducción al Manejo de GuadaLinex-edu: las webquests*. Córdoba: Centro de Profesorado Luisa Revuelta.
http:/www.cepcordoba.org/curso_guadalinex/

Decreto 231/2007, de 31 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía nº 156, de 8 de agosto de 2007.

Decreto 208/2002, de 23 de julio, por el que se modifica el Decreto 126/1994, de 7 de junio, por el que se establecen las enseñanzas correspondientes al Bachillerato en Andalucía. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía nº 97, de 20 de agosto de 2002.

Dodge, B. (1995). WebQuest: A technique for Internet-based learning. *Distance Educator* 1:2, pp. 10-13.

Dodge, B. (1998). *The WebQuest Page*.
http://webquets.sdsu.edu.

Dodge, B. (2001). FOCUS: Five Rules for Writing a Great WebQuest. *Learning and Leading with Technology* 28:8, pp.6-9, 58 http://webquest.sdsu.edu/documents/focus.pdf [Consulta: jun 2007]. Traducción en castellano disponible en Dodge, B. (2002). Cinco Reglas para Escribir una Fabulosa WebQuest", *Eduteka* 13/04/2002
http://www.eduteka.org/profeinvitad.php3?ProfInvID=0010

Dodge, B. (2002): *WebQuest Taskonomy: A Taxonomy of Task*. San Diego: Departamento de Tecnología Educativa de la Universidad de San Diego.

http://webquest.sdsu.edu/taskonomy.html [Consulta: mar. 2007]. Traducción en castellano disponible en Dodge, B. (2004): Tareonomía del Webquest. *Quaderns Digitals. Monográfico: WebQuest*. Centre d'Estudis Vall de Segó. Valencia
http://www.quadernsdigitals.net/index.php?accionMenu=hemeroteca.VisualizaArticuloIU.visualiza\&articulo_id=7366.

Dodge, B. (2004): "Adapting and enhancing existing Webquest". San Diego: de Tecnología Educativa de la Universidad de San Diego, http://webquest.sdsu.edu/adapting/index.html.

Domínguez, M., Huertas, J.M. y Martín, A.M. (2007): La evaluación.com Webquestions, *Recta,* Actas 15, Issue 1, pp. 616.

Fainholc, B. (2004). *Lectura crítica en Internet*. Rosario :Editorial Homo Sapiens.

Huertas, J. M. Y Tenorio, A. F. (2006): WebQuest, Matemáticas y Educación de Gnero, *Unión* 6, pp. 81-94.

March, T. (1998): "The WebQuest Design Process
http://tommarch.com/writings/wq_design.php.

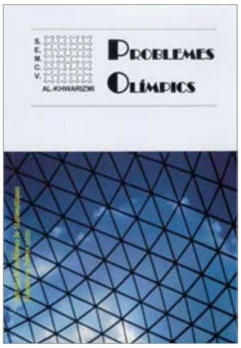
Mendaña, C. y González, B. (2004): El papel de las WebQuest como herramienta para el aprendizaje del alumno en la nueva sociedad del conocimiento. Comunicación presentada en el III Simposio Virtual de Computación en a Educación, Sociedad Mexicana de Computación en la Educación
http://www.somece.org.mx/virtual2004/ponencias/contenidos/CuervoCristina.htm.

Ministerio De Educación, Cultura y Deportes (2003). *La integración del Sistema Universitario Español en el Espacio Europeo de Educación Superior*. Documento-Marco, de 10 de febrero.
http://www.eees.es/pdf/Documento-Marco_10_Febrero.pdf.

Pérez, I. (1997-2007): *Qué son WebQuests*
http://www.isabelperez.com/webquest

Este artículo fue recibido en SUMA en julio de 2008 y aceptado en marzo de 2010

Publicaciones recibidas



PROBLEMES OLÍMPICS
SEMCV Al Khwārizmī
N.º 53, Febrer 2010
Valencia
ISSN: 1578-1771

PREMISA
Sociedad Argentina De Educación Matemática
Año 12 n.º 44 Febrero 2010
Buenos Aires
ISNN 1668-2904

XLA TANGENTE
Kangouru Italia
N.º 20, aprile 2010
Monza. Italia
ISSN: 1971-0445

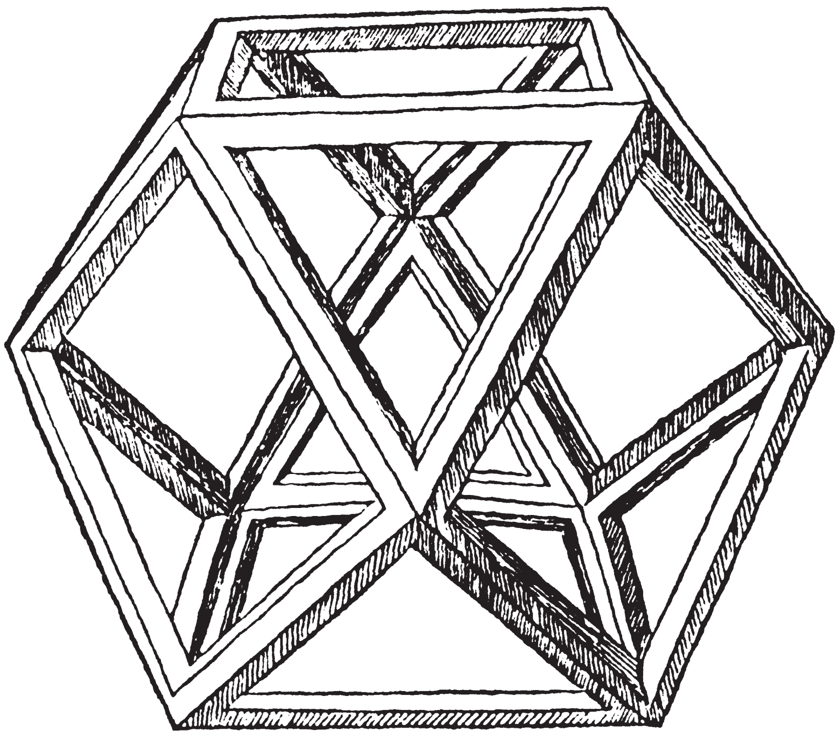
INVESTIGACIÓN Y CIENCIA
Prensa Científica, S.A.
Mayo 2010
Barcelona
ISSN: 0210136X

PNA. REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS
Universidad de Granada
Vol. 4 n.º 3, marzo 2010
ISSN 1886-1350

PETIT X
IREM de Grenoble
N.º 82, 2010
Saint Martin d'Hères
ISSN 0759-9188

TAREA
Tarea Asociación de Publicaciones Educativas
N.º 73, Diciembre 2010
Lima
ISSN 0250-8819

LA GACETA DE LA RSME
RSME
Vol.13, n.º 1, 2010
Madrid
ISNN 1138-8927



Dibujo de Leonardo da Vinci para *La divina proporción* de Luca Pacioli

poliedro

suma+ 64
Junio 2010, pp.55-59

Poliábolos

Dentro de la selección de juegos geométricos, uno de los más conocidos son los poliminós, puzzle creado por el profesor Solomon W. Golomb en sus años de estudiante y que popularizó con la publicación en 1965 de un libro con ese mismo nombre. A partir de la pieza del dominó, y como generalización, llamó poliminó a las piezas formadas uniendo varios cuadrados por un lado común. Estas piezas permiten un gran estudio de propiedades geométricas: áreas, perímetros, descomposición de figuras, simetrías, giros, etc. Incluso nos podemos encontrar sudokus basados en las piezas de los poliminós (ver Fernández-Aliseda y otros; 2004).

Solomon W. Golomb

No vamos a insistir en este material pues pensamos que es bastante conocido por nuestros lectores; por eso vamos a hablar de otros elementos de la misma familia.

El propio Golomb planteó, ya en 1954, la posibilidad de realizar un puzzle basado en las piezas que se podían conseguir uniendo triángulos equiláteros por un lado común. Años más tarde el matemático escocés T. H. O'Beirne bautizó a estas piezas con el nombre de *poliamantes* partiendo de una idea cercana a la creación de los poliminós, y sacando el nombre de la generalización de la figura del diamante típico de la baraja de cartas francesa formado por la unión de dos triángulos equiláteros. Respecto a estas piezas no vamos a comentar nada pues ya les dedicamos uno de los primeros artículos de esta sección (ver Grupo Alquerque; 2001).

Aunque en los casos anteriores se trabaja con polígonos regulares, no cuesta mucho pensar en ampliar este proceso a polígonos que no lo sean. Así, en el año 1961, el propio O'Beirne hace el primer análisis de la combinación de triángulos rectángulos isósceles. Estas piezas fueron bautizadas por S. J. Collins

Grupo Alquerque de Sevilla
Constituido por:
Juan Antonio Hans Martín. *CC Santa María de los Reyes.*
José Muñoz Santonja. *IES Macarena.*
Antonio Fernández-Aliseda Redondo. *IES Camas.*
juegos@revistasuma.es

con el nombre de *poliábolos*, extrayendo el nombre del juego del diábolo, muy común entre las niñas hace años y que actualmente ha sido recuperado por los malabaristas. La pieza del juego del diábolo estaría formada por dos triángulos rectángulos isósceles, pero curiosamente unidos de una forma que no se considera correcta en los poliábolos. Con ese nombre aparece en el libro de Martin Gardner que figura en la bibliografía.

Con las piezas de los poliábolos se puede hacer un estudio parecido al que realizamos con los hexamantes o como el que se realiza con los pentominós, pero en este caso tenemos varias dificultades añadidas. En primer lugar no todos los lados de la pieza base, el triángulo rectángulo isósceles, son iguales, por ello la variedad de piezas que se pueden formar al unir dos o más piezas se va a disparar respecto de los otros puzzles. Además, una de las medidas de los lados es irracional, lo que va a complicar el estudiar el perímetro de las piezas.

Siempre que trabajamos puzzles de este tipo lo hacemos a tres niveles diferentes: primero el diseño de las piezas, siguiendo un proceso secuencial en donde pasamos de un nivel de dificultad al siguiente probando todas las posibilidades. En segundo lugar hacemos un estudio geométrico de las piezas obtenidas para terminar, en tercer lugar, con la construcción de figuras.

Piezas que forman el puzzle

En primer lugar haremos como en nuestras clases, en las que los alumnos estudian la formación de las piezas partiendo de un nivel para pasar al siguiente. El número de piezas distintas que podemos encontrar son:

Nº de triángulos	Nombre	Cantidad
2	Diábolo	3
3	Triábolo	4
4	Tetrábolo	14
5	Pentábolo	30
6	Hexábolo	104

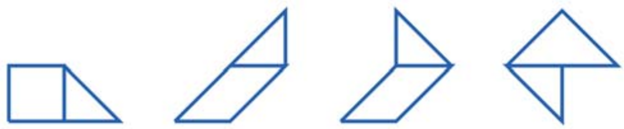
Como es de suponer nosotros solemos parar en los tetrábolos, pues a partir de ahí aparecen demasiadas piezas para poder manejarlas con comodidad, aunque veremos más adelante cómo dar un paso más.

Debemos insistir, cuando se comienza el estudio, que los lados por los que se unen las figuras deben de ser iguales, es decir, no se puede unir un cateto del triángulo con la hipotenusa. Aún con esa condición van a salir muchas piezas que serán polígonos, tanto cóncavos como convexos.

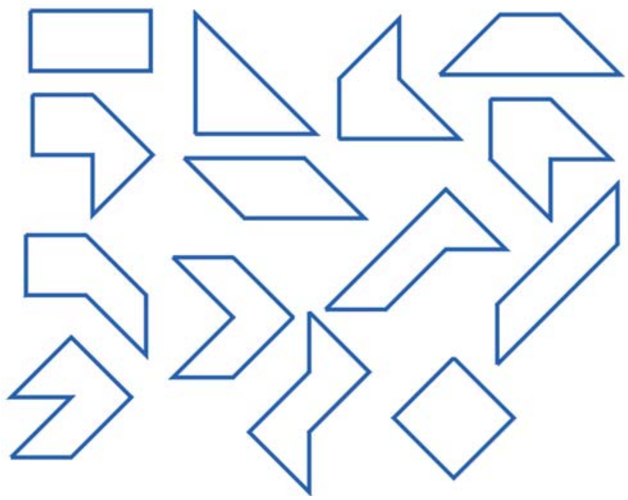
La primera sorpresa que nos encontramos al estudiar los diábolos es que nos surgen las tres piezas intermedias del Tangram Chino.

Como estamos trabajando en el espacio hay que dejar claro que para nosotros serán iguales las dos piezas que se pueden obtener una de otra por giro, traslación o simetría. De esa manera las piezas siguientes son la misma.

Siguiendo la ley de formación, ampliando en las tres piezas de los diábolos un nuevo triángulo en todas las formas posibles, y descartando las piezas que aparecen repetidas, llegamos a los cuatro triábolos.



Por último, para llegar a los 14 tetrábolos partimos de las piezas anteriores. Generalizando a partir del trapecio rectángulo, es posible obtener las primeras ocho piezas. Y completando con las que aparecen distintas al usar el resto de triábolos obtenemos las figuras siguientes:



Una buena actividad, para seguir con el proceso secuencial y acostumbrar a nuestros alumnos a ser sistemáticos en su trabajo, consiste en seleccionar uno cualquiera de los tetrábolos y conseguir todos los pentábolos que se pueden obtener a partir de él añadiéndole un nuevo triángulo en todas las posiciones posibles. Aunque hay piezas como el rectángulo que dan lugar a pocos pentábolos diferentes (el cuadrado sólo una), hay otras que dan mucho juego.

Estudio geométrico de las piezas

1. Estudio de giros y simetrías. Sería una primera aproximación a las piezas, estudiar si tienen ejes de simetría (en el caso de los tetrábolos la mitad de ellas), y cuántos, y estudiar si poseen algún ángulo de giro que las deje invariantes. Este último requerimiento se da en muy pocas piezas.

2. Ángulos. Como la pieza clave posee ángulos de 45° y 90° quiere decir que todos los ángulos interiores serán múltiplos de 45° y podemos encontrar todas las medidas desde 45° hasta 315°.

3. Perímetros. Al trabajar con perímetros tenemos dos valores básicos. Si consideramos que el cateto del triángulo base vale 1, la hipotenusa tiene el valor de $\sqrt{2}$, por lo que el perímetro de las figuras que se construyan siempre serán de la forma $a + b\cdot\sqrt{2}$, aunque en alguno de lo casos a ó b pueden ser cero. Aunque es posible salvar la dificultad de trabajar con los radicales si tenemos dibujados las piezas en una trama cuadrada y llamamos al cateto del triángulo l y a la hipotenusa h, de esa forma para calcular los perímetros basta contar cuantos de cada tipo tiene en su perímetro y todos serán de la forma $a\cdot l+b\cdot h$, siendo a y b dos números naturales. Como sabemos que h es de mayor longitud que l podemos fácilmente ver que todos no tienen el mismo perímetro y agruparlos y ordenarlos según esa medida. En la lista siguiente tenemos las piezas agrupadas según su perímetro.

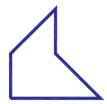
Perímetro= $4\cdot\sqrt{2}$  Perímetro= 6 

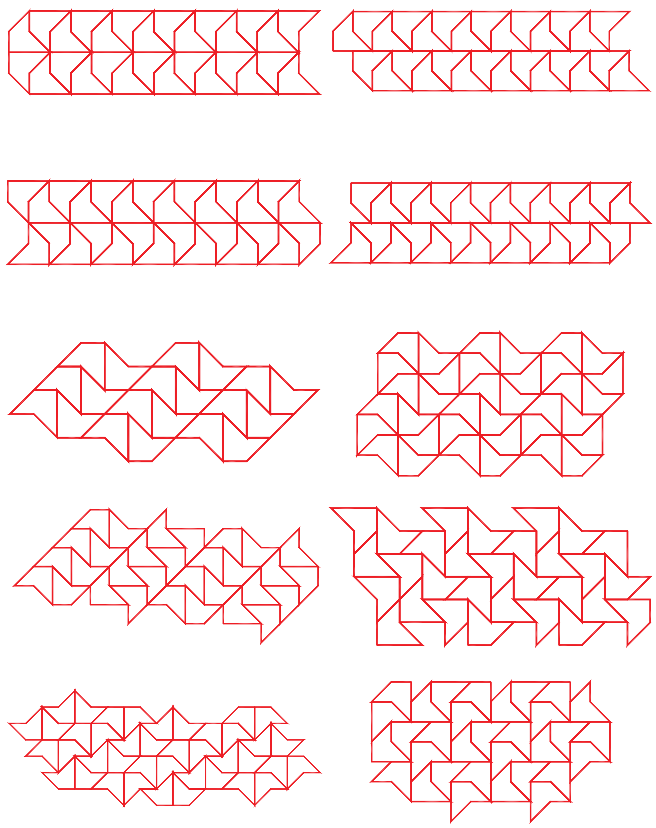
Perímetro= $4+2\cdot\sqrt{2}$ 

Perímetro= $2+4\cdot\sqrt{2}$ 

4. Relación entre poliábolos. Un trabajo atractivo para nuestro alumnado suele ser el relacionar unas piezas con otras de nivel inferior. En concreto ver si es posible obtener todos los tetrábolos uniendo dos diábolos. Por supuesto hay que dejar la posibilidad de que se repita la pieza que se utiliza, en caso contrario más de la mitad de las piezas no se pueden dividir. Otra posibilidad es estudiar todos los pentábolos que se pueden obtener al unir un diábolo con un triábolo.

5. Mosaicos. Otro aspecto interesante es estudiar cuáles de los tetrábolos sirven para teselar el plano. Aquí lo curioso no es sólo que todos los tetrábolos cubran el plano sino que algunas piezas que pueden parecer complicadas den lugar a varias teselaciones distintas. A continuación vemos una serie de mosaicos que recubren el plano utilizando un pentágono irregular como el que se muestra más abajo. Animamos a nuestros lectores a encontrar alguna variación, que seguramente la habrá.



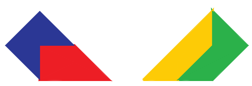


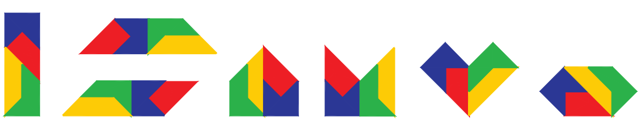
Construcción de figuras

1. Escalas. El primer avance que se puede hacer a la hora de hacer figuras es reproducir las mismas piezas de los poliábolos a distintas escalas. Por ejemplo conseguir, uniendo cuatro tetrábolos distintos, una pieza de un tetrábolo de doble longitud. Hay una pieza para la que creemos que no existe solución: el romboide que tiene mayor perímetro. Si algún lector se anima podemos hacerlo famoso a través de esta sección. También es posible construir una copia en escala 3.

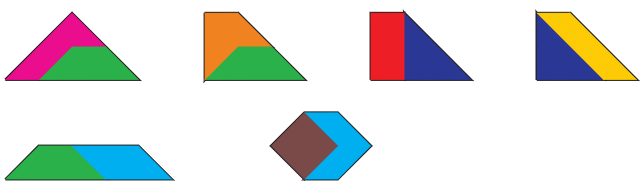
2. Polígonos. El siguiente paso sería la construcción de polígonos. Intentamos siempre pedir polígonos convexos y/o que tengan algún tipo de simetría. Siempre insistimos a nuestros alumnos que aprovechen una imagen que hayan encontrado para, con pequeñas variaciones, intentar encontrar otra distinta.

   Por ejemplo, si trabajamos con los triábolos, podemos construir un par de trapecios rectángulos a partir de los cuales se obtienen varios polígonos fácilmente, algunos de los cuales pueden verse en la imagen siguiente.



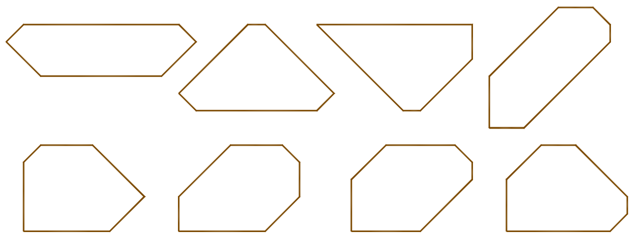


   Otra posibilidad es trabajar con los tetrábolos, pero no con todos. Por ejemplo estudiar los polígonos convexos que podemos construir con dos tetrábolos. No es posible construir paralelogramos pero si triángulos, trapecios y otros polígonos. Veamos algunos ejemplos.



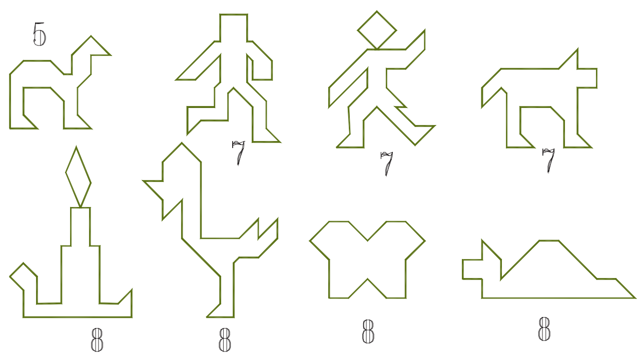
   Como se puede ver en las figuras anteriores, es posible obtener el mismo trapecio de tres formas distintas. Esa es otra forma de trabajar. Construir una figura, por ejemplo con tres tetrábolos e intentar repetir la misma figura con otras tres piezas.

   Un buen estudio es investigar todos los polígonos convexos que se pueden construir con 2, 3, 4... hasta las 14 piezas. Según los estudios hechos con ordenador, sólo existen 8 polígonos convexos que son los que aparecen a continuación.



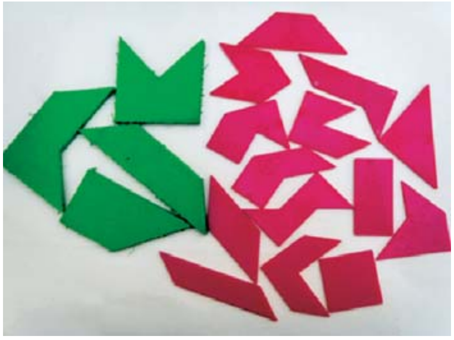
   Aunque de la primera imagen solo hay 236 soluciones distintas, de la última hay un total de 5.365 contabilizadas. Una solución y la cantidad de soluciones que hay se pueden consultar en la página:
   http://www.vicher.cz/puzzle/polyform/tan/tan.htm del profesor Miroslav Vicher.

3. Figuras no geométricas. Una última posibilidad es construir figuras que no sean polígonos, aunque es muy complicado conseguir algo medianamente reconocible, especialmente con todas las piezas. A continuación añadimos algunas, tomadas del material del profesor Picciotto del que más adelante hablaremos, indicando el número de piezas que se necesitan para construirlas.



Para trabajar en el laboratorio

El conseguir los tetrábolos es complicado ya que es difícil encontrarlos comercializados. Nosotros los hemos conseguido en alguna tienda de las Islas Canarias, aunque el material suele ser importado de países anglosajones, en la siguiente fotografía aparecen en rojo un ejemplar de ese material. Aquí no conocemos actualmente ningún fabricante que los construya. Por ello lo mejor es construirlos nosotros mismos en papel, cartón, acetato o en goma espuma, ya que todo ello se puede cortar fácilmente con un cutter. En la fotografía podemos ver también en verde unos triábolos construidos en goma espuma.

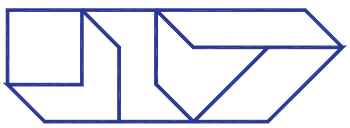


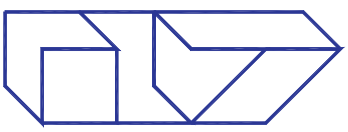
Y desde luego es muy útil trabajar con tramas, ya que a veces es más fácil ver por dónde irán las piezas al contar los triángulos que nos quedan por rellenar y con qué formas podemos jugar para encajarlas en los huecos.

Para profundizar

El trabajo más completo que conocemos sobre los poliábolos es el titulado "Puzzles de tetrisos e outras aventuras no mundo dos poliisos" de Paulus Gerdes, un profesor mozambiqueño con quien hemos tenido el placer de coincidir en algunas jornadas de matemáticas en Portugal. En este libro, el autor hace un estudio exhaustivo sobre las piezas y qué figuras se pueden construir con varios o todos los tetrábolos. También plantea figuras con dos juegos completos de tetrábolos, incluso se adentra en el mundo de los pentábolos.

Realiza un estudio de las partes de una figura que tienen simetrías y que permiten dar una disposición distinta para la solución modificando sólo esas partes. Podemos ver un ejemplo en las imágenes siguientes. También hace un estudio sobre las teselaciones posibles del plano.





El profesor Gerdes cuenta en su libro cómo creó estas figuras, que él llamó poliisos utilizando el comienzo de isósceles, a partir de trabajar con los poliminós y los poliamantes y cómo, una vez terminada la primera versión de su estudio, descubrió que esas piezas llevaban más de cuarenta años ya descubiertas. Esto es algo que nos suele pasar mucho a los que trabajamos con juegos, que después de investigar un tema a veces nos encontramos que otras personas han trabajado en la misma línea sin nosotros saberlo (¿verdad G.?).

El libro del profesor Gerdes se puede adquirir en versión papel o en versión más barata en pdf en la dirección http://stores.lulu.com/pgerdes, junto con otros muchos libros del autor, varios de ellos sobre puzzles.

Si se quiere buscar más información aconsejamos consultar la página de Henri Picciotto, un profesor de la Urban School y de la Universidad de San Francisco. En ella tiene un apartado para este puzzle que él llama Supertangrams y en donde pueden encontrarse en pdf cuatro cuadernillos de actividades que se pueden descargar gratis. La dirección es:
www.picciotto.org/mathed/puzzles/supertangrams/index.html
De esos cuadernillos hemos tomado prestadas las figuras no geométricas que hemos incluido en el artículo. En su página, el profesor Picciotto, tiene muchas otras entradas interesantes sobre diversos puzzles y actividades para matemáticas.

En otras páginas, los poliábolos reciben el nombre de *polytans* como citamos en el artículo en la página de Vicher del que aconsejamos visitar su muy completa página de puzzles en http://www.vicher.cz/puzzle/index.html.

En la página:
http://mitglied.lycos.de/polyforms/polytans/start.html podemos encontrar figuras hechas con poliábolos. En concreto podemos encontrar rectángulos de distintas dimensiones y todos los tetrábolos construidos a escala 3.

Si nos atrevemos a continuar más allá de los tetrábolos, en la página siguiente tenemos figuras realizadas con poliábolos superiores:
www.geocities.com/alclarke0/PolyPages/Polyaboloes.htm

Existen multitud de páginas más con referencias a estos puzzles para quien quiera profundizar, pero tampoco queremos alargar el texto, por suerte tenemos google.

JUEGOS ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

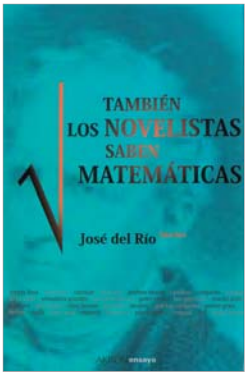
Fernández-Aliseda, A.; Hans, J. A. y Muñoz, J. (2004): Geometría entretenida, *Epsilon,* 60, pp. 471-478.

Gardner, M. (1984): *Festival mágico-matemático*. Madrid: Alianza Editorial.

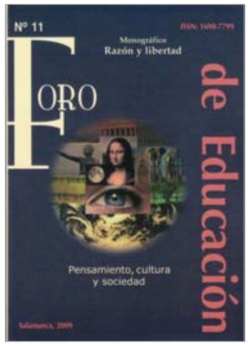
Grupo Alquerque (2001): Hexamantes, *Suma*, 38, pp. 103-105.

Este artículo fue solicitado por SUMA en enero de 2010 y aceptado en marzo de 2010 para su publicación.

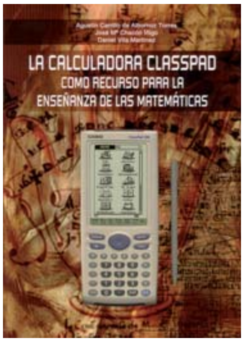
Publicaciones recibidas



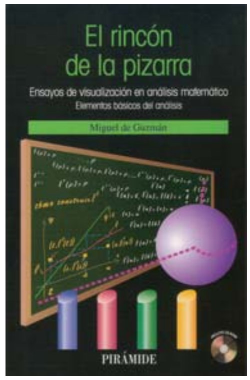
TAMBIÉN LOS NOVELISTAS SABEN MATEMÁTICAS
José del Río
Editorial Akrón
Astorga, 2010
ISBN: 978-84-92814-17-6
256 páginas



FORO DE EDUCACIÓN
Nº. 11 2009
Salamanca
ISSN: 1698-7799



LA CALCULADORA CLASSPAD
Agustin Carrillo Albornoz
División didáctica de Casio
Flamagas - SAEM "Thales"
Sevilla, 2010
ISBN: 9978-84-937577-0-0
296 páginas



EL RINCÓN DE LA PIZARRA
Miguel de Guzmán
Ediciones Pirámida
Madrid, 2010
ISBN: 978-84-368-2353-0
316 páginas

SUMA+ 64
Junio 2010, pp. 61-62

Aparcamiento, boda, felicidad... o qué hacer cuando las fórmulas atacan

En los últimos tiempos observo con curiosidad y grandes dosis de escepticismo una creciente presencia en los medios de comunicación (vía internet) de fórmulas supuestamente maravillosas para resolver los problemas más diversos de la vida cotidiana. El web de informativos de telecinco (www.informativostelecinco.com) es de los más activos en este campo. En general, siempre aparece una noticia que se respalda en:

> Estudios desarrollados por unos investigadores de la University of... aseguran haber encontrado una fórmula para...

Y a continuación o aparece una formulita trivial o bien una complicada expresión que deja perplejos a los lectores. Veamos algunos ejemplos.

La fórmula para aparcar bien

El 11 de diciembre de 2009 se da la noticia de que el científico británico Simon Blackburn ha logrado, según recoge *The Daily Telegraph*, una ecuación para ayudar a millones de conductores: la ecuación del estacionamiento perfecto. ¡Aleluya! La milagrosa ecuación resulta ser:

$$\sqrt{\left(r^2-l^2\right)+\left(l+k\right)^2-\left(\sqrt{r^2-l^2}-w\right)^2}-l-k$$

r: radio de giro del coche.
l: distancia entre el centro de la rueda delantera y la correspondiente rueda trasera.
k: la distancia desde el centro de la rueda delantera al frente del coche.
w: la anchura del coche aparcado delante del suyo.

La fórmula da la mínima longitud extra que la zona de aparcamiento necesita tener, sobre la longitud de su coche.

Una aplicación elemental de cálculos geométricos donde intervienen medidas ligadas al coche (r, l, k) y la anchura w del coche detrás del cual aparcar. Se trata de garantizar un giro oportuno que realmente permita tan audaz acción…si ello es posible. Hasta aquí un ejercicio de geometría. Lo que ya resulta difícil de aceptar racionalmente es el comentario posterior a la ecuación:

> Sin embargo el conductor medio aún tendrá que enfrentarse a la galería de raíces cuadradas, paréntesis y símbolos que pueblan la fórmula y que pueden hacer confusa la tarea de aparcar.

A lo mejor la fórmula fue pensada para un proceso automático con sensores, pero la pretensión de que el propio conductor saque la calculadora, baje para hacer las mediciones oportunas y proceda o desista a aparcar, parece algo excesivo. Las fórmulas de problemas reales no son necesariamente prácticas.

La fórmula del rostro perfecto

Pocos días después, el 19 de diciembre de 2009, y con el coche ya bien aparcado, un estudio de la Universidad de Toronto determina matemáticamente el rostro perfecto. Posiblemente fue un ejercicio de estadística de votaciones sobre belleza de distintos rostros. Pero la fórmula que se facilita es contundente: la distancia entre la boca y los ojos debía ser un tercio del largo de la cara (el periodista quiere facilitar entender esto "del tercio" y añade "más o menos un 36%"). Entre las pupilas la distancia debe ser menos de la mitad, más concretamente un 46%, de la anchura de la cara de oreja a oreja. Siendo el estu-

Claudi Alsina
Universitat Politècnica de Catalunya
elclip@revistasuma.es

dio de Toronto no es de extrañar que el rostro más bello fuese el de la cantante canadiense Shania Twain.

El número de oro cabalga de nuevo, los bocetos de Leonardo da Vinci han pasado al *Photoshop*, los estudios de Ghyka se actualizan, la teoría clásica de la proporción reaparece. Nada nuevo bajo el sol.

La fórmula para fijar boda

Recientemente me llamaron de *COMRadio* pues tenían una urgencia matemática que deseaban aclarar por antena aquella misma mañana. Se había publicado que ya se disponía de una fórmula matemática para determinar el momento óptimo de casarse. Al menos la cuestión parecía más interesante que la que siempre me formulan en la misma radio (y en otras) el día del sorteo de lotería de Navidad (¿podría salir el mismo número que el año pasado?, ¿es mejor comprar décimos en Doña Manolita o en Sort?, ¿los matemáticos juegan con ventaja?,…).

Resulta que la fórmula de la boda, hallada como siempre por un investigador inglés (A. Dooley), posiblemente estadístico y desesperado por tener alguna novedad mediática, era la siguiente: si usted tiene una edad E y estÁ en condiciones (no es el caso de muchos de nosotros) de fijar una edad máxima para casarse C, aplique entonces la fórmula:

$$E + (C - E) \times 0{,}386.$$

Por supuesto el locutor que me entrevista confiesa inmediatamente su formación de letras y arremete con vehemencia contra la frialdad de los números para atacar los problemas del amor. Hago notar que no deja de ser extraño que unos investigadores ingleses universitarios se dediquen a este tema y ofrezcan como fórmula universal este cálculo. El resultado de aplicar la formulita tampoco es descabellada y pertenece al concepto estadístico de parada óptima: si usted tiene 20 años y piensa que antes de los 40 estaría bien formar familia, la fórmula le recomienda la posibilidad de casarse hacia los 27. Es decir, no se precipite, invierta una tercera parte del intervalo en la búsqueda de una buena amistad. Por supuesto la conexión acaba con la muestra de mi escepticismo sobre la aplicabilidad de estos cálculos y con una encendida defensa de los sentimientos anuméricos, por parte del locutor.

La fórmula del índice de masa corporal

Justo cuando ya todo el mundo había logrado aprenderse aquello de que lo conveniente en peso es que el número de kilogramos será equivalente al número de centímetros en que la altura supera al metro (“si mide 1,70 metros pese unos 70 quilos”), surgió la gran familia de médicos y especialistas en peso y aconsejó que se usara como indicador *el índice de masa corporal*: IMC = Peso en kilogramos/(altura en metros)^2. El nuevo índice debía estar entre 20 y 25, siendo aconsejable no superar el 25 (zona de obesidad) ni quedarse debajo del 20. Los especialistas esconden el hecho de que toda persona que cumpla con la vieja regla de peso y centímetros seguro que tiene bien el índice.

Pero lo remarcable de la historia es que al involucrar el IMC en el denominador un cuadrado, la difusión de la formulita en los medios de comunicación pasó a sufrir todo tipo de desconsideraciones. En algunos periódicos no aparecía el cuadrado, en otros aparecía el 2 del cuadrado multiplicado a la altura y diversas revistas ni tan solo se atrevieron a dar una fórmula “tan compleja” y facilitaron tablas de doble entrada (peso/altura) donde moviendo los dos dedos se podría hallar el IMC correspondiente.

Recientemente, en *La Vanguardia* del 23 (no el 28) de diciembre de 2009, se dedicaron dos páginas a salud y obesidad apareciendo, como no, el dichoso índice de masa corporal y dándose la fórmula:

talla × talla / peso = IMC

Recordando que lo normal es un IMC entre 18,5 y 24,9, se invita al lector a hacer sus cálculos. ¡Increíble! Nadie llega a normal. Para no entrar en la “enorme complejidad” del cuadrado como exponente, los redactores optaron por el “talla × talla”, pero escribieron la fórmula invertida: al ir aumentando de peso iría disminuyendo el índice.

La fórmula de la felicidad

Pero no hay nada peor en cálculos que tener “fórmulas” incalculables. En la revista *Carrer* de febrero de 2009 el ingeniero Leonardo Acho ofrece, con gran generosidad por su parte, la fórmula de la felicidad

$$VP = S \times 10^{A}/D$$

donde VP es la vida plena, S la salud, D el dinero… y A el amor y amistad. Como metáfora funciona, como ecuación es un desastre. Las substituciones de D aún son posibles, ¿pero cómo poner números a S y a A?

****

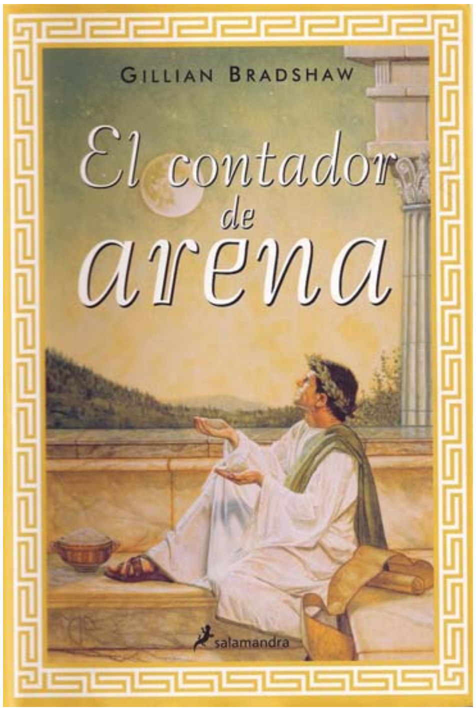
Me temo que todas estas fórmulas poco servirán para resolver los temas que las motivaron. Pero al menos a todos nosotros nos pueden aportar un material valioso pedagógicamente para discutir procesos de modelización matemática en clase. Estén atentos.

EL CLIP ■

Este artículo fue solicitado por SUMA en enero de 2010 y aceptado en marzo de 2010 para su publicación.

suma+ 64
Junio 2010, pp. 63-70

Arquímedes de Siracusa. *La deslumbrante sabiduria y la cautivadora humanidad de un genio*



EL CONTADOR DE ARENA
Guilliam Bradshaw
Publicaciones y Ediciones Salamandra, S.A.
Primera Edición: mayo de 2006
ISBN: 84-9838-032-4

La obra que nos va a ocupar en este número no es una más de las innumerables formas que podemos encontrar para acercarnos a Arquímedes, uno de los genios matemáticos más importantes de la historia. Intentaremos mostrar, a lo largo del artículo, la veracidad de nuestra afirmación.

En un primer acercamiento, podemos leer en la contraportada:

> Adelantado a su tiempo y conocido universalmente por el célebre principio que lleva su nombre, el griego Arquímedes fue un pionero del actual método científico, además de notable matemático y pensador. Discípulo de Euclides e hijo del astrónomo Fidias, su azarosa vida resulta tan apasionante como formidable el poder de su intelecto. En esta rigurosa novela histórica, Gilliam Bradshaw –autora de grandes éxitos como *Teodora, emperatriz de Bizancio*, *El faro de Alejandría*, *Púrpura imperial* y *El heredero de Cleopatra*– presenta al lector un Arquímedes de carne y hueso, un ser humano excepcional que, inmerso en la convulsa época que le tocó vivir, tuvo que enfrentarse a múltiples dilemas.
>
> Deslumbrado por las maravillas de Alejandría tras una estancia de tres años y decidido a radicarse allí para siempre, el joven Arquímedes se ve obligado a volver a Siracusa, su ciudad natal, para ocuparse de su padre enfermo. El contraste no puede ser mayor: de la deslumbrante cuna del saber ha pasado a una ciudad entregada a los frenéticos

Constantino de la Fuente Martínez
IES Cardenal López de Mendoza, Burgos
literatura@revistasuma.es

> preparativos para una cruenta guerra contra la poderosa Roma. Convertido por las circunstancias y el destino en el principal artífice de los ingenios bélicos con que se intentará repeler la agresión del coloso romano, Arquímedes atrae la atención del tirano Hierón, quien intenta retenerlo a toda costa en su corte. Y pese a que el mayor deseo del genial griego es volver a Alejandría para perfeccionar sus conocimientos y reunirse con Marco, el leal esclavo que le ha acompañado desde siempre, un inesperado motivo lo empuja a permanecer en Siracusa, un motivo que ni siquiera su pasión por el saber y la ciencia podrá obviar y que, a la postre, lo obligará a recorrer un sendero salpicado de gloria, amor, guerra y traición.

En cuanto a la autora, Gilliam Bradshaw, en la solapa interior de la portada podemos leer:

> Es una de las escritoras de narrativa histórica más importantes de Gran Bretaña. Licenciada en Literatura e Historia Clásica en la Universidad de Cambridge, sus obras destacan por el riguroso trabajo de documentación e investigación que realiza antes de escribirlas. De sus diez novelas publicadas en inglés hasta la fecha, Salamandra ha editado la trilogía sobre Bizancio compuesta por *Teodora, emperatriz de Bizancio*, *El faro de Alejandría* –que obtuvo un extraordinario éxito de ventas en nuestro país- y *Púrpura oriental*, *El heredero de Cleopatra* y ahora *El contador de arena*. Ganadora del Premio Alex 2001, Gilliam Bradshaw reside actualmente en Inglaterra.

Sus novelas las podemos encuadrar en el género de novela histórica, algunas de ellas sobre personajes reales y/o con un gran componente científico. Suelen situarse tanto en la Antigüedad Clásica (Egipto y Grecia) como en períodos posteriores como el Imperio Bizantino o la Gran Bretaña romana. Por otra parte, sus novelas, que han sido publicadas, además de en inglés, en checo, danés, francés, alemán y español, han sido aclamadas por la crítica debido a su gran verosimilitud y al rigor en la incorporación de elementos científicos.

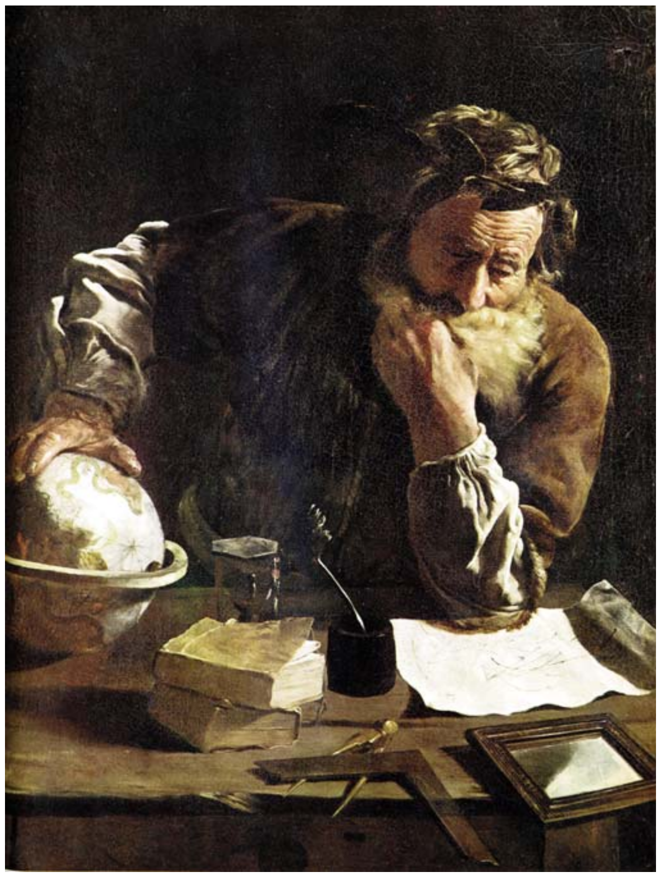
Para finalizar esta presentación, nada mejor que el comienzo de la obra que nos ocupa, que recrea el momento en que una de las innumerables preguntas que Arquímedes se hacía a sí mismo, da lugar a la idea motriz que más tarde se plasmaría en su obra *El Arenario:*

> La caja estaba llena de arena, una arena fina, cristalina, casi blanca, que había sido humedecida primero y aplanada después hasta obtener una superficie uniforme y lisa como la de un pergamino de la mejor calidad. Pero la luz del sol, que caía oblicuamente con el atardecer, centelleaba aquí y allá sobre los granos, capturando facetas demasiado pequeñas como para que el ojo pudiera distinguirlas, facetas innumerables que generaban puntos diferenciados de luminosidad, y el joven que las observaba se encontró de repente preguntándose si sería capaz de calcular el número de granos.

Comentario personal

Como dice su propia autora, en la nota histórica final, "la novela se sitúa en el año 264 a.C., durante la Primera Guerra Púnica, y no en 212 a.C., durante la Segunda, cuando se produjo el célebre sitio de Siracusa." Si aceptamos el año 287 a.C. como el año de nacimiento de Arquímedes, nos encontramos con que la novela se desarrolla durante la juventud del genio siracusano, justo en los momentos en que toma algunas de las decisiones más importantes de su vida, que marcarían su futuro como persona y como científico. Históricamente, también se recrea el choque de culturas entre las dos formas de entender el mundo: la helena y la romana.

La escritora nos presenta a un Arquímedes que es considerado un genio en Alejandría y, cuando menos, un personaje excéntrico y singular en su patria, Siracusa. Esta compleja dualidad da como resultado, en esta obra, a un personaje de carne y hueso, con múltiples matices y facetas de su personalidad. En primer lugar los que se descubren en su etapa de juventud, caracterizada por: su limpieza moral y la práctica constante de unos valores de respeto, tolerancia y empatía, muy recomendables para estudiantes de nuestros niveles, los



Archimedes de Domenico Fetti, 1620

posibles lectores de la obra; su interés y curiosidad por saber, conocer y no quedarse en la apariencia externa de las cosas; la aparición del amor, personificado en Delia, la hermana de Hierón, el tirano de Siracusa; las dificultades para poder dedicarse a lo que realmente le gusta, frente a los condicionantes de la realidad, por no gozar de una situación económica acomodada que le permitiera poder *vivir de las rentas.* En segundo lugar los que se descubren a través de las relaciones cotidianas con su familia, especialmente con su padre, enfermo y a punto de morir, con su esclavo Marco, un personaje muy interesante de la obra, y con la familia de Hierón. En tercer lugar su relación con el conocimiento científico y muy especialmente con las matemáticas: su gusto por las ideas abstractas, la teoría y los fundamentos de las cosas; su facilidad para profundizar en lo que para otros era de una dificultad insuperable; su visión matemática del mundo, a través de su capacidad para hacerse preguntas, plantearse problemas aparentemente inexistentes o sin un interés práctico, casi siempre ocultos en la maraña de la realidad, y su genialidad para resolverlos creando nuevos conocimientos y métodos de una potencia, originalidad y belleza inimaginables hasta entonces; sus reflexiones sobre la dificultad de la enseñanza y el aprendizaje de los conocimientos científicos.

La escritora nos presenta a un Arquímedes que es considerado un genio en Alejandría y, cuando menos, un personaje excéntrico y singular en su patria, Siracusa.

Es de agradecer a la autora que no se haya cobijado en algunos tópicos tradicionales que suelen acompañar a los matemáticos en algunas obras de la literatura contemporánea y que, de forma general y según nuestro criterio, las invalidan para su uso en el aula (reconocemos también que han sido escritas con otro tipo de objetivos, ninguno de ellos de carácter didáctico). Mencionaremos, a título de ejemplo, uno en el que el personaje principal es un matemático y profesor de matemáticas, una persona atormentada, desgraciada, llena de traumas y/o enfermedades mentales y, lo más dramático, que no tiene ninguna capacidad para salir de esa situación, ni por él mismo ni con la ayuda de otros. Esto le va llevando a que cada vez esté más hundido y la obra tenga un final triste y demoledor. Nos estamos refiriendo a *La soledad de los números primos*, aunque también podríamos nombrar otros. Son obras que pueden ser muy interesantes para nosotros por su temática existencial, pero que la visión que transmiten de la vida y de las matemáticas no es la más adecuada si queremos generar *buenas vibraciones* en nuestro alumnado. Lo que nos debe animar a los profesores y profesoras de matemáticas, con la lectura de una obra literaria por los estudiantes, es que lleguen a tener una visión más positiva, real y atractiva de nuestra ciencia y, a la vez, que se sientan identificados y atraídos con algunos aspectos de la personalidad de los personajes, de forma que logren generar en su interior expectativas prometedoras para su futuro personal. ¡El existencialismo no es algo inherente a las matemáticas!

Por otra parte, en *El contador de arena,* los temas matemáticos se van desgranando sin ocupar ni demasiado espacio ni demasiado tiempo, de esta forma la lectura se hace amena para cualquier persona y no corre el riesgo de generar rechazo en determinados tipos de lectores. De una manera muy natural, va surgiendo la temática científica como resultado de la reflexión e introspección personal de Arquímedes, o de la interacción con el mundo que le rodea. Así podemos revivir bastantes episodios en los que se alude a escritos y cuestiones que ocuparon la mente de Arquímedes en algún momento de su vida: su obra *Arenario*, que está muy relacionada con el título de la obra; dos de los problemas clásicos, el problema Délico, o de la duplicación del cubo, y el de la cuadratura del círculo; el problema del cilindro y la esfera inscrita en él; las aproximaciones del número π; los puzles geométricos, aunque sin hacer referencia al que se le atribuye a él, el *Stomachion*; personajes como Euclides, Aristarco, Eratóstenes, etc.; las cónicas y en particular la parábola; la dualidad entre matemáticas puras y aplicadas; la Geometría como la reina de las matemáticas; la Aritmética, etc. Todos estos temas, junto con otros que nosotros podemos conocer y que no se presentan en la novela, pueden ser las ideas motrices para generar investigaciones matemáticas para proponer a nuestros alumnos y alumnas.

Pero quizás el principal valor de esta novela sea su capacidad para transmitir valores positivos a nuestros estudiantes sobre el conocimiento matemático, la matemática pura o su utilidad para resolver problemas de la realidad, el conocimiento y la ciencia en general, la generación de expectativas ilusionantes para el futuro de las personas, el papel de las matemáticas en la comprensión del mundo, la necesidad de controlar los procesos de resolución de dificultades, problemas y situaciones nuevas o desconocidas; la constancia y la perseverancia como recursos indispensables para avanzar en el conocimiento, etc. En una sociedad como la actual, en la que se valora el éxito rápido y facilón, el dinero como unidad de medida del valor de las personas, el yo en primer lugar y en segundo y en el enésimo lugar, los fundamentalismos de todo tipo y la intransigencia e intolerancia con los valores del otro, la lectura de esta novela se asemeja a la llegada de la brisa de aire fresco con la apertura de una ventana, una brisa que contribuye a volatilizar la contaminación del ambiente cotidiano, excesivamente cerrado y cargado, en el que nos movemos habitualmente nosotros y los estudiantes que pueblan las aulas.

En fin, esta obra puede crear ilusiones, motivar y generar expectativas positivas en nuestros alumnos y alumnas; cualidades nada despreciables en el mundo en que nos ha tocado vivir. Además, aunque no sea una obra maestra, desarrolla un argumento muy entretenido y con gancho, consigue ser muy creíble y real, tiene acción y ritmo, unos personajes muy bien construidos y, en definitiva, es una historia bien contada y una magnífica opción para leer, disfrutar y, después, trabajar un poco las matemáticas.

Una propuesta de trabajo en el aula

Nuestra sección Literatura y Matemáticas, que viene apareciendo desde el número 51 de *Suma*, en febrero de 2006, va a plantearse un cambio en lo referido a las propuestas que venimos planteando para el aula. Hasta ahora elegíamos unos cuantos temas matemáticos que se podían trabajar a partir de la lectura de la novela y proponíamos un pequeño guión de preguntas sobre cada uno; esto hacía que, en algunas ocasiones, la extensión de la sección sobrepasara los límites asignados. A partir del presente número de la revista, vamos a enumerar los temas matemáticos que se pueden trabajar en cada libro y nos vamos a centrar en uno o dos de ellos, planteando sendos guiones de trabajo más exhaustivos y profundos.

Se trata de proponer a los alumnos y alumnas un tema de *investigación* en profundidad, de manera que el guión sea una puerta por la que entrar en esa idea o campo de conocimientos, dejándoles a ellos autonomía para elegir otros caminos y líneas de trabajo que les hayan sido inspiradas por el guión propuesto por nosotros.

Esto significa un cambio profundo, aunque no lo parezca, en nuestros objetivos. Porque, reflexionemos un instante: ¿qué pretendemos conseguir con ello? ¿Cuáles son los fines que perseguimos? Hemos seleccionado los que nos parecen más importantes y prioritarios:

■ Acercar a los estudiantes a los conocimientos matemáticos con un enfoque metodológico diferente al habitual, priorizando:

– El planteamiento y resolución de problemas, profundizando en su estructura.
– El uso y la construcción de distintos modelos generales en los que resituar lo conocido.
– La búsqueda de relaciones y conexiones entre: a) el mundo real y el mundo matemático, b) entre diferentes contextos dentro del mundo de las matemáticas.
– El carácter experimental y heurístico de las matemáticas.
– El paso, en nuestro alumnado, del pensamiento matemático elemental o de bajo nivel hacia el pensamiento matemático avanzado, o en palabras de Miguel de Guzmán de novatos a expertos.

■ Mostrar al alumnado el verdadero rostro de las matemáticas, para que asuman, en muchos momentos, el papel de matemático investigador y desechen creencias erróneas sobre:

– La naturaleza del conocimiento matemático, su origen, alumbramiento y estructura.
– Las actitudes características del quehacer matemático: el papel de la intuición; el cuestionamiento continuo; la reflexión; la perseverancia; el esfuerzo intelectual, etc.
– Los principales procesos mentales que se ponen en práctica en el trabajo matemático: la particularización; la generalización; el uso de analogías; la búsqueda de regularidades, patrones y leyes generales; la construcción de modelos; la elaboración de conjeturas y demostraciones; la construcción de teorías.

■ Mejorar, en lo posible, dos de los puntos débiles de la actual educación matemática:

– La falta de preparación para el pensamiento creativo. Para ello pondremos en contacto, a *n*uestros estudiantes, con el descubrimiento y *la invención en matemáticas*, incrementando el gusto por ella y, utilizando palabras de Polya, *regando sus gérmenes inventivos.*
– La falta de práctica en la redacción científica, en el proceso de comunicación de las ideas. Para ello redactarán documentos matemáticos, con estilo análogo al de los libros de matemáticas, no como un trabajo escolar a modo de resumen de resultados (sin apenas explicaciones, que el profesor entiende y acepta).

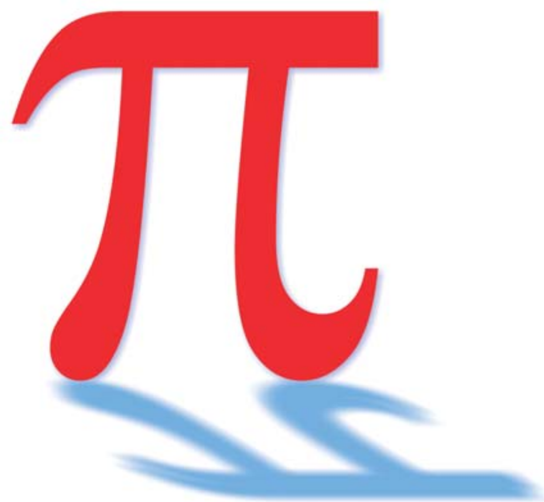
Volviendo a la obra que nos ocupa, los temas que hemos elegido para plantear las *investigaciones* son los siguientes:

1. *Arenario* proviene de *arena…* Se trata de profundizar en la obra homónima de Arquímedes, analizando su proceso de creación de grandes números; números mayores que el número de granos de arena que cabían en el *universo* de aquellos tiempos.
2. Alejandría proviene de… Origen y desarrollo de la ciudad como centro del conocimiento a lo largo de los siglos. Matemáticos más importantes ligados a ella. Profundización en las aportaciones de uno de ellos.
3. Cartago y Siracusa, aliadas… Origen de la ciudad de Cartago: problema de la princesa Dido. Resolución de problemas de optimización.
4. Geometría con un rompecabezas… Estudio del tangram y del puzle atribuido a Arquímedes: el *Stomachion.*
5. Una recreación de *los tres problemas clásicos.* Visión general de los tres problemas y profundización en el cuadratura de figuras con los métodos griegos originales.
6. Las matemáticas puras, la teoría, la práctica, la enseñanza… Una reflexión metamatemática dirigida a nuestros estudiantes, para que ellos mismos reflexionen y se pronuncien sobre estos temas.
7. *Los Elementos* de Euclides no son unos hijos traviesos. Se trata de profundizar en la obra cumbre de Euclides, analizando algunas de su proposiciones y teoremas más conocidos.
8. Las cónicas. Un estudio sobre las diferentes formas con las que podemos generar y obtener las cónicas, así como sus principales propiedades, profundizando más en la parábola.
9. El número: tan conocido y tan desconocido a la vez. Esta investigación es la que vamos a presentar más adelante.
10. ¿Es la Geometría la reina de las Matemáticas? Otra reflexión sobre el papel de la Geometría, la Aritmética y otras partes de las matemáticas.
11. Arquímedes jugando seriamente con el cilindro y la esfera. El proceso de descubrimiento de la razón entre el volumen del cilindro y el de la esfera circunscrita, resultado debido a Arquímedes, simultaneado con una reflexión sobre el proceso de resolución de problemas en matemáticas.
12. Dos problemas famosos de Arquímedes: la corona de Hieron y los bueyes de Trinacia. Aunque no aparecen mencionados en *El contador de arena*, se plantean para profundizar en la resolución de problemas.
13. El palimpsesto de Arquímedes: un tesoro reencontrado en el siglo XX. Este tema, del que vamos a plantear un monográfico en esta sección da para mucho y con mucho interés.

Presentamos, a modo de ejemplo, la *investigación* nº 9 sobre el número π.

Investigación 9. El número π: tan conocido y tan desconocido a la vez.

> La relación entre la circunferencia y el diámetro estaba definida por el mismo número: tres y una fracción. Pero el valor de esa fracción era imposible de calcular. Menor que un séptimo. Cuando se intentaba precisarla más, se escapaba, infinitamente extensible, infinitamente variable. Como el alma. Como al alma, la razón no podía abarcarla. (Pág. 198).



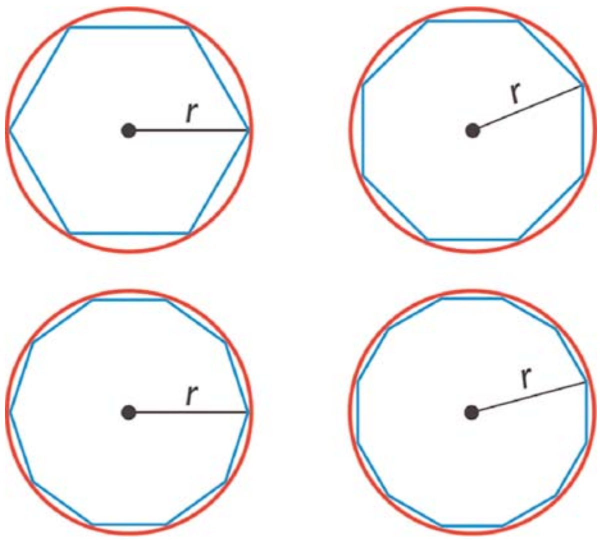
Como fácilmente habrás adivinado, Arquímedes nos está hablando del famoso número π. A él vamos a dedicar las siguientes líneas, en un intento de acercarnos a su intangible valor y conocerlo mejor.

9.1. Toma al menos diez objetos adecuados, de la vida cotidiana, y divide la longitud de su circunferencia entre su diámetro. Haz la media aritmética de los resultados obtenidos y evalúa la aproximación obtenida de π. ¿Cuántos decimales exactos tiene?

9.2. Comprueba que el cociente entre la longitud de cualquier circunferencia y su diámetro es igual al número π.

> *Ese pensamiento lo reconfortó. Inscribió una cuadrado en el círculo, luego un octógono y comenzó a calcular.* (Pág. 198).

Si tenemos una circunferencia e inscribimos en ella polígonos regulares, cada vez con mayor número de lados, podríamos obtener, como Arquímedes, aproximaciones del número π.



9.3. Explica cómo lo podríamos hacer para el caso del octógono. Ten en cuenta que conocemos el radio de la circunferencia r y el ángulo central $\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$ correspondiente al lado del octógono inscrito.
Con estos datos calcula el lado del polígono y demuestra después que su perímetro es $16\cdot r\cdot sen(\pi/8)$. Divide ese valor entre el diámetro.
¿Qué aproximación de π obtendríamos?

Cuando oyó la voz de su madre, se quitó el compás de la boca y dijo:

–Es más de diez setentavos y menos de un séptimo. (Pág. 198).

Como podemos ver, en la última frase de Arquímedes hay un error, ¿de traducción? Seguro que lo que realmente dijo es esto otro: “Es más de diez partido por setenta y uno y menos de un séptimo”. Por tanto, el número π es mayor que 3+10/71 y menor que 3+1/7.

Si hacemos el mismo proceso que para el octógono, pero con un polígono de n lados, podemos obtener que el perímetro del polígono regular inscrito vale $2\cdot r\cdot n\cdot sen(\pi/n)$, y el cociente del perímetro entre el diámetro es:

$$n\cdot sen\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

9.4. Demuestra razonadamente los dos resultados anteriores.

9.5. ¿Qué tipo de polígono regular debes inscribir en la circunferencia para obtener ese resultado; es decir: $\pi > 3+\frac{10}{71}$?

¿Cuántos lados debe tener?

Los polígonos *inscritos* en la circunferencia nos dan aproximaciones de π inferiores a su verdadero valor. Si queremos acercarnos a él con aproximaciones mayores que su verdadero valor, ¿qué tipo de polígonos regulares debemos utilizar?

9.6. Pon en práctica, con este tipo de polígonos, un método análogo al utilizado con los polígonos inscritos y demuestra que el perímetro de ellos vale $2\cdot r\cdot n\cdot tg(\pi/n)$.

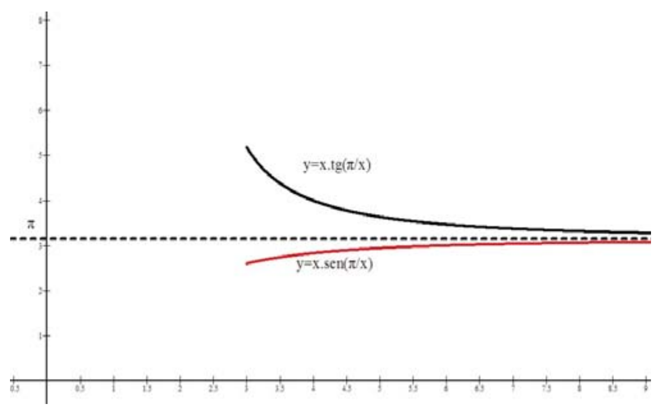
Averigua cuántos lados tiene el polígono para obtener que

$$\pi < 3+\frac{1}{7}\,.$$

Nos vamos a fijar ahora en las funciones $y = x\cdot sen\left(\pi/x\right)$, e $y = x\cdot tg\left(\pi/x\right)$.

Cuando x es un número natural mayor o igual que 3, al dar esos valores en las funciones anteriores, obtenemos la correspondiente aproximación del número π.

9.7 Haz la representación gráfica de las dos funciones anteriores, con un programa informático adecuado y comprueba, como en la gráfica siguiente, que tienen una asíntota horizontal cuando x tiende a infinito. ¿Qué recta es? ¿Sabrías demostrarlo utilizando límites?



Aunque en la cita de la novela, Arquímedes inicia el proceso con un cuadrado y un octógono, históricamente sabemos que él comenzó con un hexágono y más tarde con polígonos que tenían un número de lados múltiplo de 6, llegando hasta un polígono de 96 lados.

9.8. Investiga cómo lo hizo Arquímedes. Si quieres, puedes consultar la dirección de internet:
http://itech.fgcu.edu/faculty/clindsey/mhf4404/archimedes/archimedes...

Ahí puedes ver cómo llevó a cabo la aproximación el genio siracusano. Estudia las demostraciones y recoge aquí los principales pasos, procedimientos, ideas y resultados.

La gente suele decir que es tres y un séptimo, pero no lo es. No es un número racional. Si pudiese dibujar más lados del polígono, podría aproximarme más, pero nadie puede calcularlo de forma absoluta. Sigue y sigue eternamente. (Pág. 199).

9.9. ¿Qué es un número racional? ¿Cuántos hay?

9.10. Demuestra que si sumas o multiplicas dos números racionales, el resultado también es un número racional.

9.11. Demuestra que entre dos números racionales siempre hay infinitos números racionales.

9.12. Si π no es racional, ¿qué tipo de número es? ¿Qué características tienen esos números? Da ejemplos de otros números del mismo tipo.

Aunque nos pueda parecer mentira, la demostración rigurosa de que π no es racional se debe a Lambert en 1768.

9.13. En 1862 Lindeman demostró otro resultado sobre el número π, que se resume en la afirmación: π es un número trascendente. ¿Qué significa esto? ¿Qué es un número trascendente?

9.14. Actualmente se conocen muchas cifras decimales de π. Recopila la información necesaria y piensa sobre esta cuestión que te proponemos: ¿Cuánto espacio (hojas de papel) se necesitarían, aproximadamente, para escribir todas las cifras decimales que se conocen de π?

Las raíces cuadradas, pero no las de la fotografía, pueden ser una buena forma de obtener números no racionales. De entre todos ellos, nos vamos a fijar en uno que ya conoces desde hace tiempo: $\sqrt{2}$.

9.15. Demuestra que $\sqrt{2}$ no es un número racional. Para ello puedes utilizar el método denominado reducción al absurdo. Explica y justifica cada uno de los pasos de la demostración.

9.16. ¿Cómo podemos representar gráficamente el número $\sqrt{2}$? Hazlo explicando los pasos que das.

9.17. ¿Qué significa que los números irracionales representan distancias inconmensurables, es decir, que no se pueden medir?

9.18. Demuestra, por un procedimiento similar al de $\sqrt{2}$, que $\sqrt{3}$ no es un número racional.

-¿Y por qué es tan importante?

Arquímedes miró el círculo, sin verlo.

—Hay cosas que siguen eternamente —susurró—. Si alguna parte de nosotros no fuera eterna como ellas, ¿seríamos capaces de comprenderlo?

Y con esas palabras, Arata entendió el motivo de sus cálculos y, extrañamente, encontró consuelo en ellos. (Pág. 199).

Este diálogo entre Arquímedes y su madre, a propósito de π, deja al descubierto algunas de las ideas del genio siracusano a propósito de los límites del conocimiento.

9.19. ¿Te parece correcto el razonamiento de Arquímedes? ¿Qué parte de nosotros puede ser eterna?

9.20. Si damos por hecho que todo nuestro ser es finito, ¿no podríamos entender procesos infinitos?

LITERATURA Y MATEMÁTICAS ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arquímedes, (1969): Arenario. En Newman, J. R. El Mundo de las Matemáticas. Sigma. Vol. 4, pp. 4-17. Barcelona: Edic. Grijalbo.

Dzielska, Mª, (2004): *Hipatia de Alejandría*. Madrid: Siruela.

Euclides, (1999): *Elementos. Los seis libros primeros de la Geometría de Euclides*. Traducción al castellano de Rodrigo Zamorano, 1576. Salamanca: Universidad de Salamanca.

Netz, R. y Noel, W., (2007): *El Código de Arquímedes*. Madrid: Temas de Hoy, S.A.

Internet

Para estudiar el proceso llevado a cabo por Arquímedes para aproximarse al valor de π se pueden consultar varias páginas de internet, entre ellas la siguiente:

http://itech.fgcu.edu/faculty/clindsey/mhf4404/archimedes/archimedes...

Sobre el Stomachion se pueden consultar las páginas web:

www.maa.org/editorial/mathgames/mathgames_11_17_03.html
www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Stomachion/intro.html

El palimpsesto tiene su propia página en internet, con mucha información relativa al documento:
www.archimedespalimpsest.org/

Este artículo fue solicitado por SUMA en enero de 2010 y fue aceptado en abril de 2010 para su publicación.

suma+ 64
Junio 2010, pp. 71-80

Tratamiento de la información y competencia digital en el área de matemáticas

Lleva tanto tiempo con el mismo coche que apenas le queda espacio en la parte derecha de la luna delantera para seguir colocando los testigos con que le obsequiaban cada vez que pasaba la ITV sin entorpecer la visibilidad. Jaime y Laura comenzaron ya hace seis meses a deambular de un concesionario de coches a otro con el fin de localizar un digno sustituto de su maltrecha chatarra.

Hoy Jaime se dirige al pueblo vecino como debutante en el Consejo Escolar del centro en el que su hijo pequeño ha comenzado la Educación Secundaria. Ahora que tiene tiempo, ha decidido implicarse más en la educación del benjamín, Ramón, e informarse de primera mano sobre las actividades que su hijo realiza en el centro, que considera más encaminadas al ocio y la pérdida de tiempo que a la educación y el aprendizaje. Razones no le faltan. Las dos hijas mayores se encuentran ya en la Universidad. A una de ellas le quedan solamente dos asignaturas para acabar su licenciatura en Filología y la otra comienza este año su primer curso de carrera. Ellas estudiaron en el mismo centro en que ahora comienza su hermano pequeño, pero eran otros tiempos. A Ramón le han entregado un ordenador portátil en su primer día de clase y su padre tiene una amplia formación sobre estas máquinas. No en vano pasó gran cantidad de horas delante de uno (Lamstrak o algo así se llamaba) a la misma edad que Ramón, disparando a seres mutantes de otra galaxia que querían invadir la Tierra. Las charlas en las que su suegro lo ilustra sobre lo que aprenden en las clases de informática a las que asiste ahora que está jubilado y lo que se puede descubrir en un chat, también suponen otro punto de vista desde el que observar el aparatito que le han entregado al niño.

Su padre no se explica qué clase de formación le están dando a su hijo en el centro educativo, por lo que no se lo pensó dos veces cuando se enteró de que buscaban candidatos para representar a los padres y las madres en el Consejo Escolar y, entre la multitud de voluntarios que suele haber para estos puestos, lo eligieron a él y a dos madres.

Por fin llega al instituto pensando que llegaba tarde, pero contra todo pronóstico, el único que esperaba era el director, que le informó de que ante la imposibilidad de algunos de los asistentes de llegar a la hora inicialmente marcada, había dejado un mensaje en la plataforma educativa "Aristóteles" indicando que la reunión se aplazaba cuarenta minutos. La cara de Jaime era un poema ya que la última vez que había escuchado hablar de Aristóteles fue en tercero de BUP. De todas formas, añadió el Director, también he colocado una noticia en la web del centro, por lo que pensé que todos estaríais informados.

No se preocupe, dijo Jaime. He salido con prisas y no me ha dado tiempo de mirarlo.

Media hora después llegan las dos madres también debutantes, que habían leído el mensaje en la plataforma y no querían llegar tarde. Las dos habían decidido por el camino que fuera Jaime el que tomara nota de lo que se hablara en el Consejo Escolar y presentara los acuerdos en la próxima reunión de la asociación de madres y padres, cosa a lo que éste accedió.

Mariano Real Pérez
CEP de Sevilla
matemastic@revistasuma.es

En la conversación que se produjo mientras esperaban al resto de los miembros del Consejo Escolar, Jaime contó que él y su mujer estaban intentando comprarse un coche nuevo. Una de las madres le dijo que hacía tres meses ella se había comprado uno y que había tardado más de dos semanas en decidirse entre todas las ofertas, precios, prestaciones y miles de cosas que de cada modelo aparecían en las páginas web. Él la miraba sorprendido: llevaba seis meses de concesionario en concesionario y no disponía de elementos suficientes para tomar una decisión. Entre otras cosas porque algunos modelos aún no los había podido ver. La otra madre participó indicando lo valioso que eran los espacios de Internet en los que los propios usuarios de vehículos colocaban información sobre las recomendaciones y los problemas que habían tenido, aunque había que saber seleccionar la información que verdaderamente podía interesar.

Poco a poco fueron llegando todos y el Consejo Escolar comenzó a la hora prevista. Tras las primeras presentaciones, el primero en hablar fue el Jefe de Estudios, que expuso los resultados estadísticos con los que se había finalizado el curso anterior y que iban a servir de base para la comparativa de este curso. Porcentajes, gráficos y cantidades numéricas desfilaban por la pantalla en una completa presentación al ritmo que el presentador marcaba a golpe de tecla sobre... ¡un ordenador como el que le habían dado a su hijo! (pensó Jaime).

Al terminar su exposición, el jefe de estudios indicó a los presentes que había colocado la presentación en el formato original en la web del centro para que pudieran descargársela o añadir notas que sirvieran de aclaración a otro posible auditorio. Las madres miraron a Jaime con un mensaje implícito. Conectándose a Internet mostró a los presentes que en la misma web también se encontraban las programaciones y distinto material que podría serles de utilidad. Jaime observó un recuadro parpadeante en cuyo interior se podía leer "Aristóteles", además de otro con letras de colores llamado "Google". Perdido en este mundo que acababa de descubrir no se atrevió a preguntar el motivo por el que le habían entregado aquél "juguetito" a su hijo y lo que pretendían enseñar en el aula...

Podríamos seguir adelante con el anterior texto y observar el normal funcionamiento de la sociedad que se encuentra alrededor de Jaime y lo perdido que puede llegar a encontrarse.

Situaciones como la anteriormente narrada pero cuyo desarrollo transcurre en otros contextos cotidianos, pueden darnos una idea de la importancia que tiene lo que pretendemos conseguir con la educación obligatoria y el papel que tiene en este objetivo el desarrollo de la competencia "tratamiento de la información y competencia digital".

En este número de *Suma* y, específicamente en esta sección, hemos considerado conveniente dar unas pequeñas pinceladas sobre esta competencia básica. Su definición, qué se pretende con ella, cómo podemos desarrollarla desde el aula de matemáticas, la necesidad que tenemos de desarrollarla en el alumnado...

En general, con la educación obligatoria pretendemos preparar al alumnado de forma que pueda integrarse en la sociedad como personas que, no solamente conocen las reglas que la rigen, sino que además forman parte de ella de manera activa. En esta sociedad actual, es claro que no es el conocimiento, sino la búsqueda del conocimiento, remodelación del mismo y transmisión al resto de miembros de la remodelación o transformación conseguida las acciones que cada vez están adquiriendo mayor relevancia.

Obtener información, procesarla y comunicarla son acciones que se realizan en múltiples ámbitos en los que se pueda encontrar un individuo en la sociedad, por lo que si la educación pretende preparar al alumnado para integrarse de forma activa en la sociedad en la que vive, debería prepararlo para realizar este tipo de actividades. Un aspecto fundamental en este sentido es la formación del alumnado para la utilización de las TIC.

Para realizar un acercamiento a esta competencia vamos a partir de las líneas trazadas desde Europa en las que se recoge que la competencia digital entraña el uso seguro y crítico de las tecnologías de la sociedad de la información para el trabajo, el ocio y la comunicación. Se sustenta en las competencias básicas en materia de Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC): el uso de ordenadores para obtener, evaluar, almacenar, producir, presentar e intercambiar información, y comunicarse y participar en redes de colaboración a través de Internet.

La competencia digital exige una buena comprensión y amplios *conocimientos* sobre la naturaleza, la función y las oportunidades de las Tecnologías de la Sociedad de la Información en situaciones cotidianas de la vida privada, social y profesional. Esto conlleva el conocimiento de las principales aplicaciones informáticas, como los sistemas de tratamiento de textos, hojas de cálculo, bases de datos, almacenamiento y gestión de la información, y la comprensión de las oportunidades y los riesgos potenciales que ofrecen Internet y la comunicación por medios electrónicos (correo electrónico o herramientas de red) para la vida profesional, el ocio, la puesta en común de información y las redes de colaboración, el aprendizaje y la investigación. Asimismo, las personas deben comprender las posibilidades que las Tecnologías de la Sociedad de la Información ofrecen como herramienta de apoyo a la creatividad y la innovación, y estar al corriente de las cuestiones relacionadas con la validez y la fiabilidad de la información disponible y de los principios legales y éticos por los que debe regirse el uso interactivo de las Tecnologías de la Sociedad de la Información.

Las *capacidades* necesarias incluyen: la capacidad de buscar, obtener y tratar información, así como de utilizarla de manera crítica y sistemática, evaluando su pertinencia y diferenciando entre información real y virtual, pero reconociendo al mismo tiempo los vínculos. Las personas deben ser capaces de utilizar herramientas para producir, presentar y comprender información compleja y tener la habilidad necesaria para acceder a servicios basados en Internet, buscarlos y utilizarlos, pero también deben saber cómo utilizar las Tecnologías de la Sociedad de la Información en apoyo del pensamiento crítico, la creatividad y la innovación.

La utilización de las Tecnologías de la Sociedad de la Información requiere una *actitud* crítica y reflexiva con respecto a la información disponible y un uso responsable de los medios interactivos; esta competencia se sustenta también en el interés por participar en comunidades y redes con fines culturales, sociales o profesionales.

Teniendo como marco de referencia el anterior planteamiento indicado por Europa, en el sistema educativo español se recoge la competencia “Tratamiento de la información y competencia digital” que viene definida por las siguientes características.

Esta competencia consiste en disponer de habilidades para buscar, obtener, procesar y comunicar información, y para transformarla en conocimiento. Incorpora diferentes habilidades, que van desde el acceso a la información hasta su transmisión en distintos soportes una vez tratada, incluyendo la utilización de las tecnologías de la información y la comunicación como elemento esencial para informarse, aprender y comunicarse.

La competencia digital entraña el uso seguro y crítico de las tecnologías de la sociedad de la información para el trabajo, el ocio y la comunicación.

Está asociada con la búsqueda, selección, registro y tratamiento o análisis de la información, utilizando técnicas y estrategias diversas para acceder a ella según la fuente a la que se acuda y el soporte que se utilice (oral, impreso, audiovisual, digital o multimedia). Requiere el dominio de lenguajes específicos básicos (textual, numérico, icónico, visual, gráfico y sonoro) y de sus pautas de decodificación y transferencia, así como aplicar en distintas situaciones y contextos el conocimiento de los diferentes tipos de información, sus fuentes, sus posibilidades y su localización, así como los lenguajes y soportes más frecuentes en los que ésta suele expresarse. Disponer de información no produce de forma automática conocimiento. Transformar la información en conocimiento exige de destrezas de razonamiento para organizarla, relacionarla, analizarla, sintetizarla y hacer inferencias y deducciones de distinto nivel de complejidad; en definitiva, comprenderla e integrarla en los esquemas previos de conocimiento. Significa, asimismo, comunicar la información y los conocimientos adquiridos empleando recursos expresivos que incorporen, no sólo diferentes lenguajes y técnicas específicas, sino también las posibilidades que ofrecen las tecnologías de la información y la comunicación.

Ser competente en la utilización de las tecnologías de la información y la comunicación como instrumento de trabajo intelectual incluye utilizarlas en su doble función de transmisoras y generadoras de información y conocimiento. Se utilizarán en su función generadora al emplearlas, por ejemplo, como herramienta en el uso de modelos de procesos matemáticos, físicos, sociales, económicos o artísticos. Asimismo, esta competencia permite procesar y gestionar adecuadamente información abundante y compleja, resolver problemas reales, tomar decisiones, trabajar en entornos colaborativos ampliando los entornos de comunicación para participar en comunidades de aprendizaje formales e informales, y generar producciones responsables y creativas.

La competencia digital incluye utilizar las tecnologías de la información y la comunicación extrayendo su máximo rendimiento a partir de la comprensión de la naturaleza y modo de operar de los sistemas tecnológicos, y del efecto que esos cambios tienen en el mundo personal y sociolaboral. Asimismo supone manejar estrategias para identificar y resolver los problemas habituales de software y hardware que vayan surgiendo. Igualmente permite aprovechar la información que proporcionan y analizarla de forma crítica mediante el trabajo personal autónomo y el trabajo colaborativo, tanto en su vertiente sincrónica como diacrónica, conociendo y relacionándose con entornos físicos y sociales cada vez más amplios. Además de utilizarlas como herramienta para organizar la información, procesarla y orientarla para conseguir objetivos y fines de aprendizaje, trabajo y ocio previamente establecidos.

En definitiva, la competencia digital comporta hacer uso habitual de los recursos tecnológicos disponibles para resolver problemas reales de modo eficiente. Al mismo tiempo, posibilita evaluar y seleccionar nuevas fuentes de información e innovaciones tecnológicas a medida que van apareciendo, en función de su utilidad para acometer tareas u objetivos específicos. En síntesis, el tratamiento de la información y la competencia digital implican ser una persona autónoma, eficaz, responsable, crítica y reflexiva al seleccionar, tratar y utilizar la información y sus fuentes, así como las distintas herramientas tecnológicas; también tener una actitud critica y reflexiva en la valoración de la información disponible, contrastándola cuando es necesario, y respetar las normas de conducta acordadas socialmente para regular el uso de la información y sus fuentes en los distintos soportes.

Observamos en esta competencia varias partes claramente diferenciadas pero que se complementan. Estas partes nos van a servir para dimensionar la competencia digital de forma que nos podamos aproximar a ella de una forma clara y para poder formular tareas que la desarrollen.

En general, debemos intentar desarrollar en el alumnado la competencia digital desde todas las dimensiones que vamos a exponer y que son:

Acceder: Conocer y saber cómo obtener y/o recuperar la información.

Gestionar: Organizar la información en categorías y sistemas de clasificación.

Integrar: Interpretar, sintetizar, comparar y contrastar información utilizando formas similares o diferentes de representación.

Evaluar: Hacer juicios razonados acerca de la calidad, la pertinencia, la utilidad y la eficiencia de la información.

Construir: Generar nuevos conocimientos e información mediante la adaptación, la aplicación, el diseño, la invención, la representación o la edición de la información.

Comunicar: Difundir y compartir información y conocimientos con diferentes personas y/o grupos.

¿Cómo vamos a desarrollar la competencia digital en el alumnado? A través de las tareas, al igual que el resto de competencias básicas. Por tanto, ¿de qué debemos preocuparnos los docentes? De la formulación de tareas para el desarrollo de las competencias básicas y, en el asunto que nos ocupa, del desarrollo de la competencia "tratamiento de la información y competencia digital".

Antes de proseguir, debemos dejar claro que, aunque en estos momentos nos estamos ocupando de dar unas pinceladas sobre el desarrollo de la competencia digital en el aula de matemáticas, en la formulación que se realicen de tareas en el aula debemos procurar desarrollar con cada una de ellas el mayor número posible de competencias. Más aún, en la formulación que se realicen de tareas en el aula debemos procurar desarrollar con cada una de ellas el mayor número posible de las dimensiones que componen cada una de las subcompetencias, teniendo como objetivo desarrollar en el alumnado las competencias básicas en todas sus dimensiones.

Una vez aclarado este tema, las distintas dimensiones de la competencia digital nos van a servir para hacer más palpable dicha competencia, facilitándonos la formulación de tareas de forma que desarrollemos dicha competencia, además de la evaluación de ese desarrollo.

Así, a modo de ejemplo, podríamos incluir una serie de acciones que el alumno debería haber adquirido tras su paso por el educación obligatoria. Entre ellas podríamos destacar:

Conocimientos instrumentales y usos básicos de las TIC

1. Conocer las operaciones básicas de uso del ordenador.
2. Organizar, gestionar y localizar archivos en distintos soportes informáticos y tecnológicos.

Uso de las TIC para la búsqueda, organización y tratamiento de la información

3. Buscar, seleccionar y tratar información contenida en documentos de distintos formatos para la realización de tareas individuales y colectivas.
4. Utilizar buscadores y marcadores sociales para almacenar, organizar y tratar documentación sobre informaciones solicitadas.
5. Evaluar y recabar información de distintas fuentes utilizando agregadores RSS y páginas de inicio analizando la claridad y fiabilidad de las mismas.

Creación, transformación y presentación de información

6. Utilizar herramientas ofimáticas, de producción de imagen y/o sonido; para la creación y difusión de documentos en distintos lenguajes, formatos y/o soportes.
7. Crear y editar elementos multimedia como medio de información y comunicación de experiencias.

Utilización del ordenador como medio de comunicación personal e intergrupal

8. Compartir ideas e informaciones utilizando aplicaciones de comunicación y redes sociales como fuente de trabajo personal y ocio.
9. Gestionar y publicar contenidos en la red colaborando en la creación y edición de documentos.
10. Utilizar los repositorios sociales como fuente de información o para compartir documentos.
11. Cumplir la normas de convivencia en el ciberespacio: Ciudadanía digital, netiqueta, derechos de autor y creative commons.
12. Seguridad informática y personal (protección de datos e imagen digital).
13. Autonomía y espíritu de empresa, creatividad e innovación (portfolio y entornos virtuales de aprendizaje)

Con todo lo anterior ya hemos realizado un acercamiento a la competencia "tratamiento de la información y competencia digital" que nos da una idea sobre la forma y metodología con la que podemos desarrollar esta competencia básica a partir de tareas, que es fundamentalmente el mecanismo que vamos a utilizar para desarrollar las distintas competencias básicas. Tanto es así que cuando propongamos una tarea deberemos tener en cuenta los siguientes elementos:

– Objetivos de la etapa, que provoquen la coordinación de la evolución de los aprendizajes.
– Objetivos específicos que persigue.
– Competencias a cuyo desarrollo contribuye.
– Contexto en el que se propone.
– Metodología y organización del aula.
– Recursos que se utilizan y que adquieren gran relevancia.
– Criterios de evaluación de la tarea, necesarios para observar el grado de consecución de los objetivos propuestos.
– Contenidos previos necesarios para el desarrollo de la tarea.
– Contenidos que va a tratar.
– Temporalización y secuenciación.
– Entorno escolar, que implique la colaboración con otros departamentos para buscar contextos, encontrar conexiones, reconocer contenidos comunes...

Poniendo especial interés en:

– Competencias a cuyo desarrollo contribuye.
– Contexto en el que se propone.
– Metodología y organización del aula.
– Recursos que se utilizan y que adquieren gran relevancia.

Para el desarrollo de la competencia “tratamiento de la información y competencia digital”, al igual que para el resto de competencia básicas, partimos de la definición que aparece en los anexos a los decretos por los que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Primaria y los correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria y que se apoyan en las recogidas en la recomendación del Parlamento Europeo y del Consejo sobre las Competencia Clave para el aprendizaje permanente. Pero esas definiciones no contienen elementos didácticos que nos faciliten o nos indiquen la forma de desarrollarla. Es decir, no aparecen objetivos, contenidos ni criterios de evaluación que nos permitan el desarrollo de las competencias y concretamente la que nos ocupa en estos momentos. Pero debemos tener en cuenta lo que se indica en los mencionados Decretos sobre las competencias básicas:

> Las competencias básicas, que se incorporan por primera vez a las enseñanzas mínimas, permiten identificar aquellos aprendizajes que se consideran imprescindibles desde un planteamiento integrador y orientado a la aplicación de los saberes adquiridos.

Es decir, las competencias básicas juegan un papel integrador, por lo que sus elementos deben ser incorporados desde cada una de las áreas. Por tanto, los objetivos, contenidos y criterios de evaluación (elementos didácticos) de cada competencia deben ser incorporados desde cada una de las áreas.

En nuestro caso, la contribución del área de matemáticas a la adquisición de la competencia “tratamiento de la información y competencia digital” podría quedar recogida, a modo de ejemplo para la Educación Secundaria Obligatoria, de la siguiente forma.

La incorporación de herramientas tecnológicas como recurso didáctico para el aprendizaje y para la resolución de problemas, contribuye a mejorar el tratamiento de la información y competencia digital de los estudiantes, del mismo modo que la utilización de los lenguajes gráfico y estadístico ayuda a interpretar mejor la realidad expresada por los medios de comunicación. No menos importante resulta la interacción entre los distintos tipos de lenguaje: natural, numérico, gráfico, geométrico y algebraico como forma de ligar el tratamiento de la información con la experiencia de los alumnos.

Objetivos

– Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.

– Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos (calculadoras, ordenadores, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.

Contenidos

1º ESO

Bloque 1: Contenidos comunes.
Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas.

Bloque 4: Geometría.
Empleo de herramientas informáticas para construir, simular e investigar relaciones entre elementos geométricos.

Bloque 5: Funciones y gráficas.
Interpretación y lectura de gráficas relacionadas con los fenómenos naturales y el mundo de la información.

Bloque 6: Estadística y probabilidad.
Diferentes formas de recogida de información. Organización en tablas de datos recogidos en una experiencia. Frecuencias absolutas y relativas.

2º ESO

Bloque 1: Contenidos comunes.
Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas.

Bloque 5: Funciones y gráficas.
Interpretación y lectura de gráficas relacionadas con los fenómenos naturales y el mundo de la información. Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas.

Bloque 6: Estadística y probabilidad.
Utilización de la hoja de cálculo para organizar los datos, realizar los cálculos y generar los gráficos más adecuados.

3º ESO

Bloque 1: Contenidos comunes.
Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas.

Bloque 5: Funciones y gráficas.
Uso de las tecnologías de la información para el análisis y reconocimiento de propiedades de funciones.

Bloque 6: Estadística y probabilidad.
Utilización de la calculadora y la hoja de cálculo para organizar los datos y realizar cálculos.

4º ESO Opción A

Bloque 1: Contenidos comunes.
Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas.

Bloque 5: Funciones y gráficas.
Estudio y utilización de otros modelos funcionales no lineales: exponencial y cuadrática. Utilización de las tecnologías de la información para su análisis.

Bloque 6: Estadística y probabilidad.
Variable discreta. Elaboración e interpretación de tablas de frecuencias y de gráficos estadísticos: gráficos de barras, de sectores, diagramas de caja y polígonos de frecuencias. Uso de la hoja de cálculo.

Variable continua: intervalos y marcas de clase. Elaboración e interpretación de histogramas. Uso de la hoja de cálculo.

4º ESO Opción B

Bloque 1: Contenidos comunes.
Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas.

Bloque 5: Funciones y gráficas.
Uso de las tecnologías de la información en la representación, simulación y análisis gráfico. Interpretación, lectura y representación de gráficas en la resolución de problemas relacionados con los fenómenos naturales y el mundo de la información.

Bloque 6: Estadísticas y probabilidad.
Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación. Detección de errores.

Criterios de Evaluación:

1º ESO

– Organizar e interpretar informaciones diversas mediante tablas y gráficas, e identificar relaciones de dependencia en situaciones cotidianas.
– Hacer predicciones sobre la posibilidad de que un suceso ocurra a partir de información previamente obtenida de forma empírica.

2º ESO

– Intercambiar información entre tablas de valores y gráficas y obtener información práctica de gráficas cartesianas sencillas referidas a fenómenos naturales, a la vida cotidiana y al mundo de la información.
– Formular las preguntas adecuadas para conocer las características de una población y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas, utilizando los métodos estadísticos apropiados y las herramientas informáticas adecuadas.

3º ESO

– Obtener información práctica a partir de una gráfica referida a fenómenos naturales, a la vida cotidiana o en el contexto de otras áreas de conocimiento.
– Elaborar e interpretar tablas y gráficos estadísticos (diagramas de barras o de sectores, histogramas, etc.), así como los parámetros estadísticos más usuales (media, moda, mediana y desviación típica), correspondientes a distribuciones sencillas y utilizar, si es necesario, una calculadora científica.

4º ESO Opción A

– Analizar tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales para obtener información sobre ellas.

4ª ESO Opción B

– Utilizar los distintos tipos de números y operaciones, junto con sus propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria y otras materias del ámbito académico.

De esta forma, para el área de matemáticas hemos procurado mostrar unas pequeñas pinceladas sobre el desarrollo de la competencia "Tratamiento de la información y competencia digital". Por una parte se ha realizado un desglose de la competencia de forma que nos facilite la formulación de tareas teniendo en cuenta las distintas dimensiones de la misma y los aspectos sobre los que deberíamos incidir. Por otra parte, a modo de ejemplo, hemos recogido la forma didáctica que tendría esta competencia en el área de matemáticas, es decir, los elementos didácticos del área de matemáticas que contribuirían a la misma. A lo largo de las cuatro imágenes anteriores que acompañan al texto hemos incluido también un repaso visual de la forma y elementos con los que podemos desarrollar esta competencia en el aula de matemáticas. A todo lo anterior debemos añadir lo que hemos indicado al comienzo, que el objetivo final es formar al alumnado para que se integren de forma activa-productiva en la sociedad.

Además de los objetivos, contenidos y criterios de evaluación con los que, a modo de ejemplo hemos completado la competencia desde el área de matemáticas para la etapa de Educación Secundaria y que, de la misma forma podríamos haber realizado para Educación Primaria, debemos insistir en que el desarrollo de las competencias se alcanza a través de la formulación de tareas. Así, en cada uno de los bloques de matemáticas siempre podemos encontrar tareas cuya adecuada formulación contribuya al desarrollo de la competencia TIC, si no en todas sus dimensiones, sí en algunas de ellas.

> *La competencia digital comporta hacer uso habitual de los recursos tecnológicos disponibles para resolver problemas reales de modo eficiente.*

Centrándonos en la competencia digital, podemos decir que esta competencia es la combinación de conocimientos, habilidades y capacidades, en conjunción con valores y actitudes, para alcanzar objetivos con eficacia y eficiencia en contextos y con herramientas digitales. Esta competencia se expresa en el dominio estratégico de cinco grandes capacidades asociadas respectivamente a las diferentes dimensiones de la competencia digital. Acreditar un dominio en los cinco ámbitos que se proponen a continuación significa ser un competente digital, dominio al que deben aspirar todos los alumnos y promover todos los docentes. Esta competencia contempla cinco dimensiones.

1. La dimensión del aprendizaje que abarca la transformación de la información en conocimiento y su adquisición.
2. La dimensión informacional que abarca la obtención, la evaluación y el tratamiento de la información en entornos digitales.
3. La dimensión comunicativa que abarca la comunicación interpersonal y la social.
4. La dimensión de la cultura digital que abarca las prácticas sociales y culturales de la sociedad del conocimiento y la ciudadanía digital.
5. La dimensión tecnológica que abarca la alfabetización tecnológica y el conocimiento y dominio de los entornos digitales.

Estás dimensiones pueden concretarse en cinco capacidades asociadas, relativas a medios y entornos digitales:

1. Aprender y generar conocimientos, productos o procesos.
2. Obtener, evaluar y organizar información en formatos digitales.
3. Comunicarse, relacionarse y colaborar en entornos digitales.
4. Actuar de forma responsable, segura y cívica.
5. Utilizar y gestionar dispositivos y entornos de trabajo digitales.

Cada una de las capacidades anteriores las podemos concretar, de forma que podamos contribuir desde el área de matemáticas de una forma clara al desarrollo de cada una de ellas en el alumnado. Esta concreción la marcamos seguidamente:

1. Aprender y generar conocimientos, productos o procesos.

1a. Representar y crear conocimiento en diferentes lenguajes específicos (textual, numérico, icónico, visual, gráfico y sonoro).
1b. Producir conocimientos y publicar información utilizando herramientas de edición digital, localmente o en la red.
1c. Llevar a cabo proyectos, resolver problemas y tomar decisiones en entornos digitales.
1d. Trabajar con eficacia con contenidos digitales y en entornos virtuales de enseñanza-aprendizaje.
1e. Hacer uso de las TIC como instrumento del pensamiento reflexivo y crítico, la creatividad y la innovación.

2. Obtener, evaluar y organizar información en formatos digitales.

2a. Usar sistemas informáticos y navegar por Internet para acceder a información, recursos y servicios.
2b. Utilizar diferentes fuentes y motores de búsqueda según el tipo y el formato de la información: texto, imagen, datos numéricos, mapa, audiovisual y audio.
2c. Guardar, archivar y recuperar la información en formato digital en dispositivos locales y en Internet.
2d. Conocer y utilizar herramientas y recursos para la buena gestión del conocimiento en ámbitos digitales.
2e. Evaluar la calidad, la pertinencia y la utilidad de la información, los recursos y los servicios disponibles.

3. Comunicarse, relacionarse y colaborar en entornos digitales.

3a. Comunicarse mediante dispositivos digitales y software específico.
3b. Velar por la calidad y el contenido de la comunicación atendiendo a las necesidades propias y de los demás.
3c. Emplear herramientas de elaboración colectiva de conocimiento en tareas y proyectos educativos.
3d. Participar activamente en entornos virtuales de aprendizaje, redes sociales y espacios colaborativos.
3e. Colaborar y contribuir al aprendizaje mutuo con herramientas digitales.

4. Actuar de forma responsable, segura y cívica (Ciudadanía digital)

4a. Conocer y reflexionar críticamente sobre las nuevas prácticas sociales culturales y económicas de la sociedad del conocimiento.
4b. Conocer y practicar las normas básicas de seguridad y autoprotección en el uso de la Internet.
4c. Gestionar la identidad digital y el grado de privacidad y de seguridad de los datos personales y de la información en lnternet.
4d. Iniciarse en el conocimiento de la legislación y los movimientos sociales sobre los derechos y deberes del ciudadano digital (propiedad intelectual, licencias Creative Commons, software libre, LSSI, ciberactivismo, relación con los poderes públicos, ciberbulling, nettiqueta, etc.).

5. Utilizar y gestionar dispositivos y entornos de trabajo digitales.

5a. Comprender y utilizar con eficacia los dispositivos y sistemas informáticos propios de las TIC.
5b. Utilizar las funciones de navegación en dispositivos informáticos locales y en Internet.
5c. Determinar y configurar el software y el entorno de trabajo.
5d. Instalar, actualizar y desinstalar software o dispositivos informáticos.

Para finalizar, en esta sección, a lo largo de los distintos números de *Suma*, venimos recogiendo distintas web relacionadas de alguna forma con el tema que estemos tratando. En este caso, la web que os recomendamos es: http://compematex.260mb.com. En la siguiente imagen observamos la mencionada web.

En esta página localizamos múltiples recursos y documentación de utilidad para obtener información sobre las competencias básicas, su desarrollo, evaluación, etc.

Enlaces, vídeos, actividades, información, etc. completan los recursos que podemos encontrar en la web. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anau, L. & Zabala, A. (2007). *11 ideas clave. Cómo aprender y enseñar competencias*. Barcelona: Editorial Graó.

Coll, C. (2007). *Las competencias básicas en educación*. Madrid: Alianza.

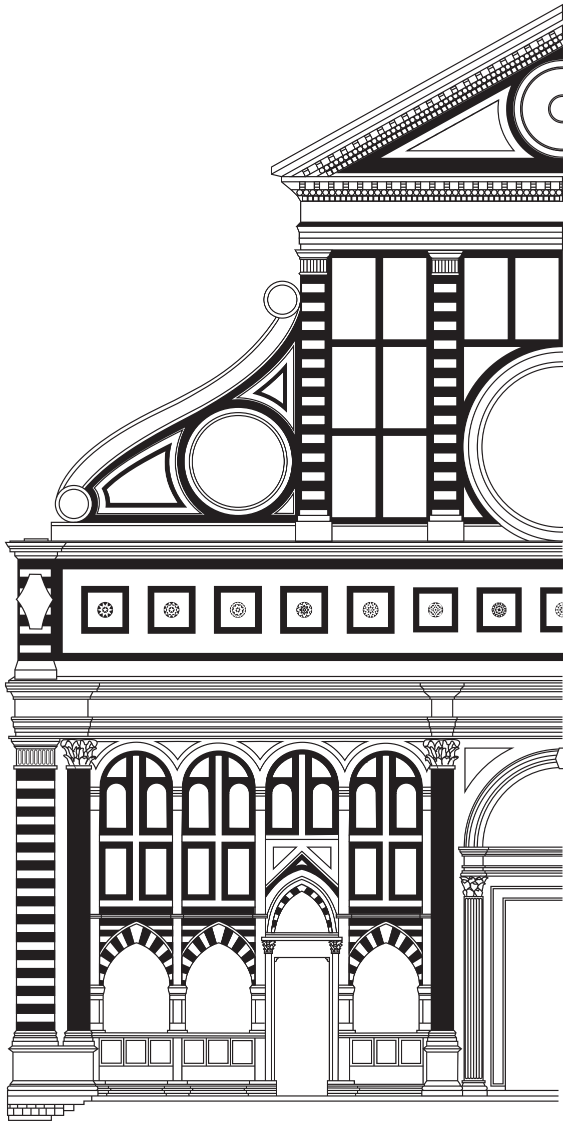
Vivancos, J. (2008). *Tratamiento de la información y competencia digital*. Barcelona: Alianza.

Este artículo fue solicitado por SUMA en enero de 2010 y fue aceptado en abril de 2010 para su publicación.

suma+ 64
Junio 2010, pp. 81-84

Santa María Novella
Armonía bicolor

Si en Suma 63 *hablábamos del fresco de Masaccio en el interior de esta iglesia florentina, en este número hablaremos de la fachada. Fue iniciada en 1350, pero sólo se hizo parte de la mitad inferior. En 1439, durante el Concilio de Florencia, que tuvo lugar en esta iglesia, se consideró la necesidad de terminarla. Unos años más tarde, un importante comerciante, Giovanni Ruccelai, encargó el proyecto a Leon Battista Alberti, que ya había trabajado para él en diversas obras. El autor de* De re aedificatoria *y primer tratadista de perspectiva, proyectó la mitad superior, con una mezcla en las dosis adecuadas de modularidad, proporción, equilibrio, ritmo armonía y belleza.*



Santa María Novella, León Battista Alberti, Florencia (Dibujo: AMA)

Francisco Martín Casalderrey
IES Juan de la Cierva (Madrid)
fmc@revistasuma.es

Modularidad, proporción, ritmo, equilibrio, belleza... Alberti resumía todas estas cualidades de la obra de arte en arquitectura usando el término latino *concinnitas*. Paul Erdős (1913-1996) hablaba de *El libro,* en el que estaban escritas todas las demostraciones perfectas de los teoremas matemáticos. Pues bien las demostraciones de *El libro* comparten esa *concinnitas* con los bellos edificios; son construcciones proporcionadas, rítmicas, equilibradas, bellas...

Mirando la fachada de Santa María Novella, en Florencia, con una mirada matemática, se puede captar facilmente, el significado de *concinnitas,* y más si en la cabeza tenemos alguna de las demostraciones que, personalmente, consideremos que forman parte de *El libro.*

La primera piedra del actual edificio de Santa María Novella fue puesta el día de San Lucas de 1246, para sustituir una iglesita más antigua y pequeña, que les había sido concedida para su uso a los franciscanos, cuando llegaron a Florencia. Las obras de construcción se extendieron hasta mitad del siglo siguiente y no fue consagrada hasta 1420 por el papa Martín V, que residía en esta ciudad.

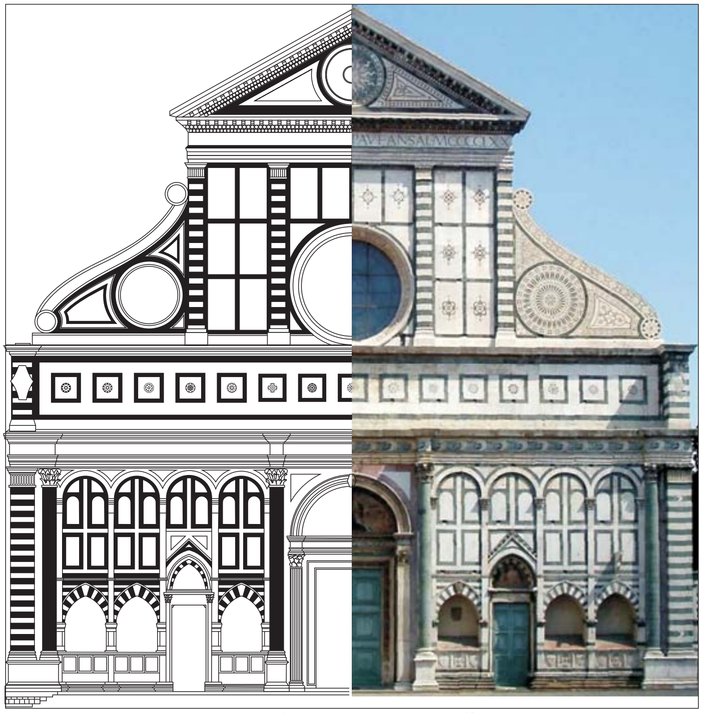


Figura 1. Fachada de *Santa María Novella*, Florencia.

La fachada

La fachada fue iniciada en 1350 y en una primera fase se hicieron los seis arcos tumbales inferiores, las dos puertas laterales de estilo gótico y los arquillos ciegos de medio punto, que imitan los del Batisterio de San Juan, frente a la Catedral, en mármoles blancos y verdes. Las obras se detuvieron a la altura de la cornisa central, sin llegar a ejecutar ésta ni el portal central.

Giovanni Ruccelai, importante comerciante, encargó a su arquitecto y amigo Leon Battista Alberti el proyecto para terminarla. Alberti proyectó cubrirla totalmente con mármoles verdes y blancos, pero cambiando sustancialmente el estilo inferior, buscando, no obstante dar armonía y proporción al conjunto. La parte inferior quedó casi intacta en su aspecto medieval, intercalando el portal central, que se inspira en el del Panteón Romano, y que supone, con sus columnas laterales adosadas, una innovación total, ya plenamente renacentista. Proyectó además la parte superior, separada del resto por un ancho friso que la divide en dos mitades, del que nos ocuparemos luego. La ubicación del óculo le llevó a situar a su alrededor, descentrando en sentido vertical, un nuevo elemento cuadrado, subdividido en tres zonas por cuatro pilastras, la central de doble anchura que las laterales. La división reticular de este espacio, rellenándolo de rectángulos iguales, le sirve para fijar uno de los módulos de medida, que dan unidad a todo el proyecto, ligando lo ya realizado en la parte inferior con los nuevos elementos que se incorporan a través de un juego matemático de múltiplos y divisores.

El conjunto se enmarca en un cuadrado, que está a su vez subdividido en cuatro por el eje de simetría y el borde superior del friso. El cuerpo del ático sobre el friso, se inscribe en un cuadrado que es la cuarta parte del total. Para completar el conjunto, y salvar la distinta altura de la nave central con respecto a las laterales, dispone dos volutas triangulares, de contornos redondeados, que enmarcan a su vez dos discos. El ático se corona con un frontón, que inscribe un círculo, con un sol radiante: el sol victorioso que aparece en el escudo de este barrio florentino. El óculo central, con su marco, tiene un diámetro doble del de los tres discos, el superior y los dos laterales. El módulo predominante en la composición, como por otra parte se aprecia a simple vista, es el cuadrado. Pero también se pueden intuir algunas proporciones áureas, aunque estas últimas de manera menos precisa, y otras proporciones, como por ejemplo la de dos es a tres, entre la anchura y la altura del portal central (ver figura 3).

La proporción, y no necesariamente la mitificada proporción áurea, cumple una doble función: la de modularizar el diseño, facilitando su concepción y realización, y la puramente estética, buscando la armonía de las partes en el todo.

El resultado es patente, un conjunto equilibrado, rítmico, armónico en su concepción bicolor.

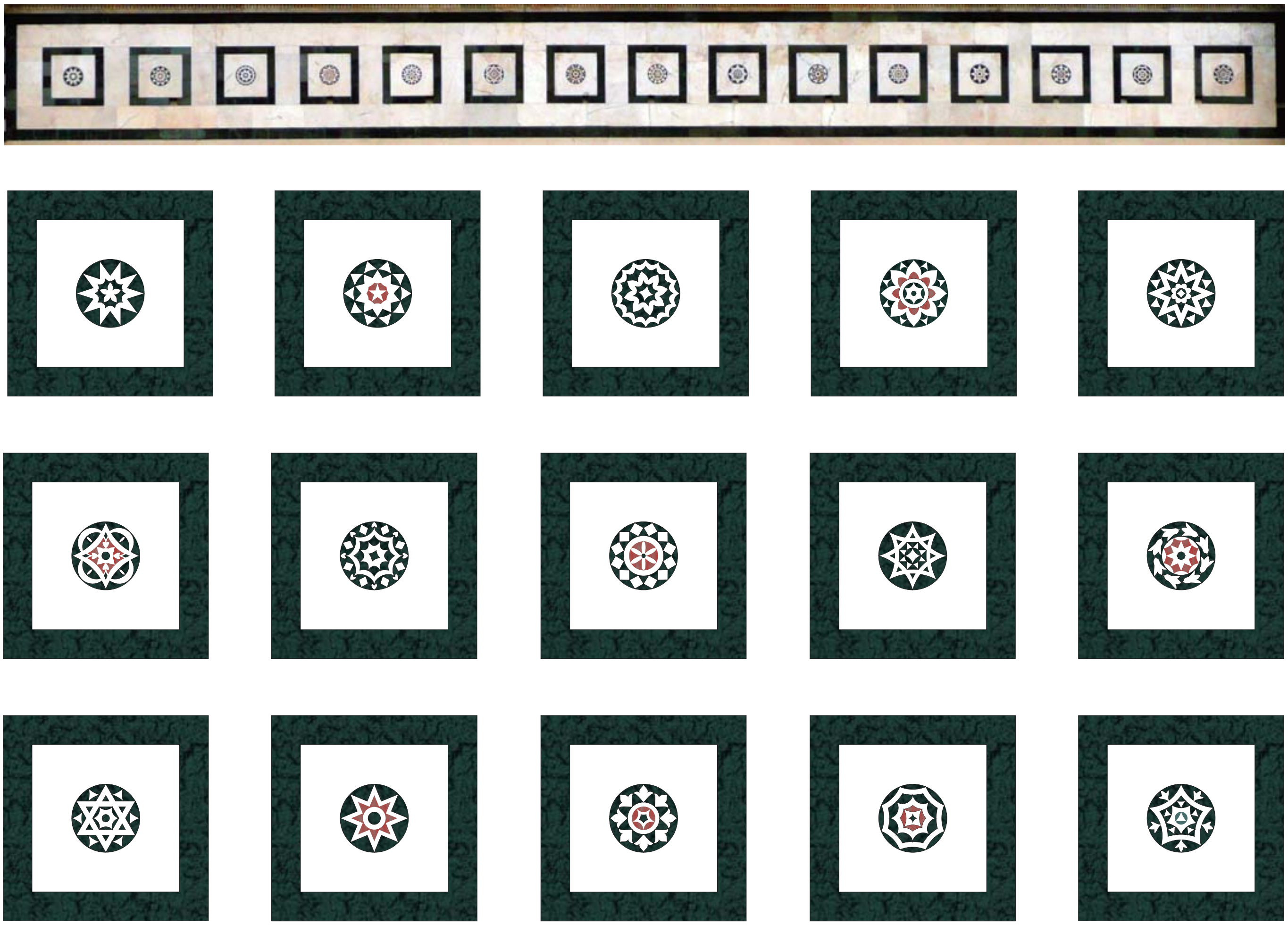


Figura 2. Los quince rosetones que decoran el friso que divide la fachada de Santa María Novella en dos partes.
La fotografía indica la posición de cada uno, que hemos numerado de izquierda a derecha. Dibujos: FMC, Foto: AMA

El friso central

Pero fijemos nuestra atención en el friso central. Se distinguen en él quince cuadrados de mármol verde. Cada uno de ellos enmarca un rosetón. En la mirada de conjunto pasan casi desapercibidos pero, fotografiados con un teleobjetivo, podemos reconstruirlos y apreciar su diseño. Se han usado mármoles de tres colores: verde, blanco y rosado.

El diseño de cada uno, desde un punto de vista matemático, es un grupo de simetría de los llamados de Leonardo. Es decir, en los que no hay ni traslaciones ni deslizamientos y tienen siempre un punto fijo. Los hay de dos tipos, los grupos cíclicos, generados por un sólo giro cuya amplitud es divisor entero de 360º, como por ejemplo C_3, generado por un giro g de 120º. Sus elementos son

$C_3=\{Id, g, g^2\}$, donde *Id* representa la identidad

El segundo tipo son los grupos diédricos, generados por un giro y una simetría cuyo eje pasa por el centro de giro. Se representan como D_n. Por ejemplo, D_4 está generado por un giro *g*, de 90º, y por una simetría *s*. Sus elementos son:

$$D_4 = \{Id, g, g^2, g^3, s, s \circ g, s \circ g^2, s \circ g^3\}$$

El grupo D_1 está generado sólo por una única simetría.

Estudiaremos caso a caso el grupo que corresponde a cada rosetón del friso. Para ello, (ver figura 2) los numeraremos de acuerdo con el lugar que ocupan en el friso, de izquierda a derecha.

El primero y el segundo corresponden a un D_5 que está generado por un giro de 72º y una simetría vertical. El tercero en su anillo más externo, sería un D_{16}, en la zona media un D_8,

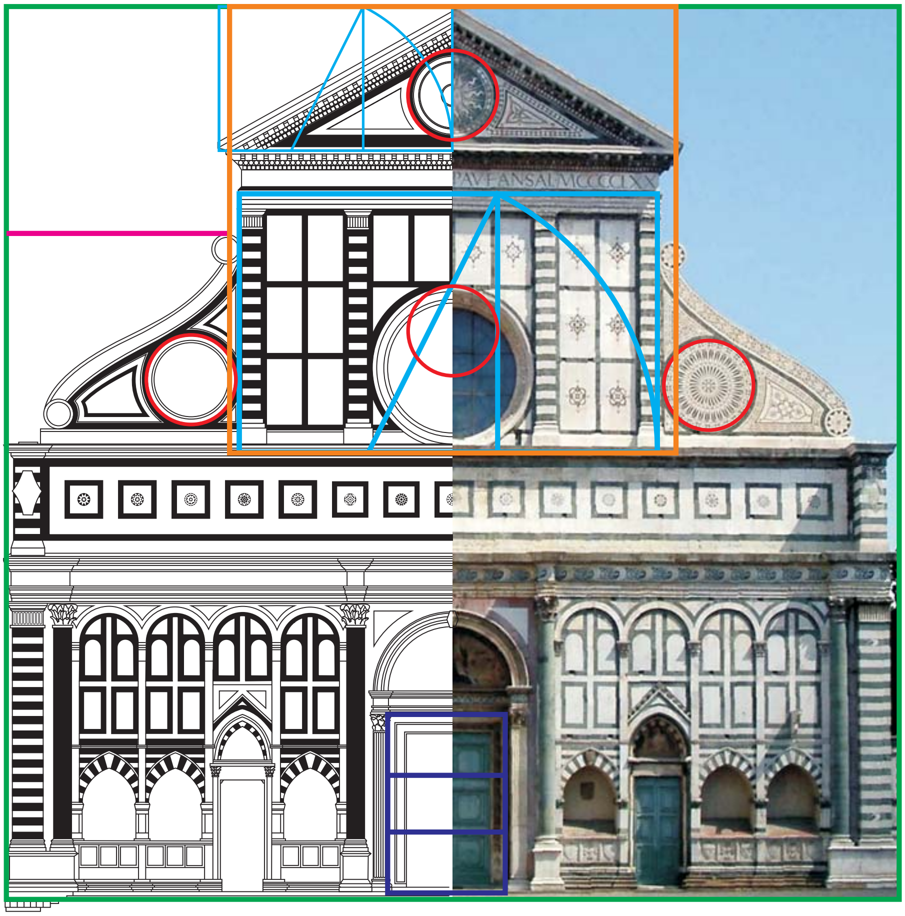


Figura 3. Algunas proporciones en la fachada de *Santa María Novella*, Florencia.

pero como en el interior hay un cuadrilátero, en conjunto es un D_4. Llama la atención también que el eje de simetría se encuentra girado con respecto a la vertical 11,5º (los otros, por tanto, están a 56,5º, 101,5º y a 146,5º).

El cuarto rosetón sería un D_8, pero como en el interior del anillo central hay una estrella exagonal, se convierte en un D_2. El quinto vuelve a ser un D_4, al igual que el sexto y el séptimo.

El octavo, que ocupa el lugar central es un claro D_6, como señala la estrella central de seis puntas. El noveno, vuelve a ser un D_4. El décimo es uno de los más interesantes; la simetría de los elementos centrales, que lo convertirían en un D_8, queda rota por los tulipanes que lo orlan, por lo que no tiene ejes de simetría y es realmente un C_8.

El décimo primero se identifica claramente como D_6, y el siguiente un D_8. El décimo tercero, sin considerar el anillo central, sería un D_8, pero, si nos fijamos, dentro de ese anillo hay una estrella de cinco puntas; como 5 y 8 son primos entre sí, el rosetón en su conjunto, sólo tiene una simetría vertical. Es por tanto un D_1.

El décimo cuarto es de nuevo un D_4, que es el grupo más frecuente en los quince rosetones. Por último, el décimo quinto juega con estructuras pentagonales, pero en el centro tiene un triángulo por lo que nuevamente se trasforma en un D_1, con una única simetría, además de la identidad.

En resumen, excepto el décimo rosetón que es del grupo cíclico C_8, todos los demás son grupos diédricos y se pueden agrupar así: dos rosetones son D_1, uno es D_2, seis son D_4, dos son D_5, otros dos D_6 y uno solo D_8.

Florencia es una ciudad llena de Arte y llena de matemáticas, que retomaremos en alguna otra ocasión en estas páginas. Es además una de las ciudades más visitadas por los *turistas matemáticos*. Si el lector vuelve a la ciudad del Arno, además de pasear por el Ponte Vecchio o de subir al Piazzale Michelangelo para poder divisar toda la ciudad en su conjunto, le sugiero que se acerque a la recoleta plaza de Santa María Novella y relajadamente, contemple esta estupenda fachada con ojos matemáticos.

ARTE CON OJOS MATEMÁTICOS ■

Este artículo fue solicitado por *Suma* en enero de 2010 y aceptado en mayo de 2010 para su publicación.

suma+ 64
Junio 2010, pp. 85-88

Dulces

Desde hace mucho los aeropuertos son los lugares comunes de todo viajero. Lugares de cuyo aspecto es prácticamente imposible deducir su localización. El tiempo que uno pasa en ellos transcurre entre caminatas, paseos y, sobre todo, consumiciones de todo tipo: bebida, comida, prensa, conexiones a Internet, moda, videojuegos, llamadas telefónicas. Muchos tenemos la impresión de que los aviones saltan verticalmente sobre ellos porque tras algunos altibajos y sacudidas, siempre vuelves a encontrarte en el mismo sitio. ¿En qué se distinguen dos aeropuertos? Sólo en el diseño exterior. En todos hay las mismas tiendas, los mismos bares, los mismos mostradores de facturación, los mismos controles policiales... Entre el embarque y el desembarque nada ha cambiado. Has volado para estar en el mismo sitio. Los aeropuertos son un limbo para transeúntes cuyas cápsulas móviles, llamadas aviones, poseen la propiedad de cambiar el espacio exterior que los rodea. Llegas, te subes a la cápsula, pasan unas horas, y, al salir del *finger*, estás en otro país.

Precisamente es en las cápsulas donde uno halla rescoldos de diferencias. Me hallaba bien atado a mi asiento de turista a casi 10.000 metros de altitud cuando una azafata deslizó una bandeja sobre mi mesilla desplegada. Contenía pocas cosas: una taza con café aguado, un sobrecito de azúcar y una servilleta de papel pulcra y bien doblada. Nada que no hubiese visto ya cientos de veces. Mientras me armaba de coraje para saborear de nuevo ese café que sabe a hace veinte años reparé en unos signos escritos en el sobre de azúcar. Se trataba de una curiosidad matemática (figura 1). Un regalo por encima de las nubes.

Figura 1: ¿Sabías que ...?

La cuestión escrita en el papel era una ampliación de la regla para multiplicar un número de dos cifras por 11. Todo el mundo sabe que para multiplicar un número de dos cifras AB por 11 basta con intercalar la suma de las cifras A y B entre ambas. Así, para multiplicar 25 por 11 basta con sumar 2+5=7 e insertar ese 7 entre el 2 y el 5. El resultado es 275.

Miquel Albertí Palmer
IES Vallés, Sabadell
adherencias@revistasuma.es

Efectuando la multiplicación del modo tradicional se aprecia el motivo de su eficacia. Para multiplicar por 11 hay que escribir el número dos veces. La primera corresponde a la unidad de la cifra 1 del once. La segunda, correspondiente a la decena 1 del once, se anota un espacio a la izquierda y debajo de la anterior. El primer 25 se queda igual, pues son 5 unidades y 2 decenas. Sin embargo, el segundo 25 es en realidad 250. En lugar de escribir el 0, lo que se hace es desplazar ese 25 un espacio hacia la izquierda del otro. Al final, todo se resume en sumar decenas:

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 11 \\ \hline 25 \\ 250 \\ \hline 275 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} 25 \\ \times\ 11 \\ \hline 25 \\ 25 \\ \hline 275 \end{array}$$

Si la suma de los dos dígitos supera la decena, se añade una unidad a la cifra de la izquierda, la correspondiente a las centenas:

$$79{\cdot}11 \Rightarrow 7+9=16 \Rightarrow [7+1][6][9]=869$$

Lo mismo ocurre cuando el número que multiplica a 11 tiene más cifras:

$$\begin{array}{cccccc} & & a & b & c & d \\ \times & & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & & a & b & c & d \\ & a & b & c & d & \\ a & b & c & d & & \\ \hline \end{array}$$
$$a(a+b)(a+b+c)(b+c+d)(c+d)d$$

Si se multiplica 111 por 111, la multiplicación se convierte en una suma de filas de unos cuyas columnas contienen 1, 2, 3, 2 y 1 cifras. El resultado es un número capicúa, 12.321:

$$\begin{array}{r} 1\,1\,1 \\ \times\ 1\,1\,1 \\ \hline 1\,1\,1 \\ 1\,1\,1 \\ 1\,1\,1 \\ \hline 1\,2\,3\,2\,1 \end{array}$$

El sobrecito del avión extendía esa situación hasta completar la serie con las nueve cifras. Se trata de sumar filas con un 1, dos 1, tres 1, …, ocho 1, nueve 1, ocho 1, siete 1, … dos 1 y un 1. El resultado es 12.345.678.987.654.321, el número capicúa con todas las cifras salvo el cero:

$$\begin{array}{l} 111.111.111 \\ \times111.111.111 \\ \hline 111111111 \\ 111111111 \\ 111111111 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 111111111 \\ \hline 12345678987654321 \end{array}$$

Sólo falta la cifra 0. El cero podría completar tres números capicúas:

$$X=0123456789876543210$$
$$Y=1234567890987654321$$
$$Z=012345678909876543210$$

> *...reparé en unos signos escritos en el sobre de azúcar. Se trataba de una curiosidad matemática. Un regalo por encima de las nubes.*

Es fácil arreglar tres matrices o tres series de filas y columnas con unos y ceros cuyas columnas sumen X, Y y Z, respectivamente, pero esto no significa que se correspondan con productos de dos números cuyos resultados sean X, Y , Z. Esto depende de su factorización.

X se obtiene multiplicando por 10 uno de los factores de la multiplicación precedente y añadiendo un irrelevante 0 a la izquierda del resultado del producto:

$$X=1.111.111.110\times 111.111.111$$

Lo mismo puede decirse de Z dando por hecho que ya disponemos de Y.

Sin embargo, no es posible arreglar un producto de dos números hechos exclusivamente con unos y ceros cuyo producto dé como resultado *Y*. La solución al problema pasa inevitablemente por la factorización de *Y*. Una tarea imposible de ejecutar a mano, pero que el software reduce a un instante:

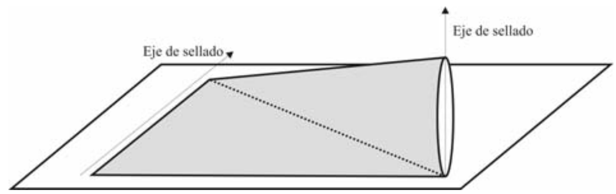
$$Y=3^2{\cdot}7{\cdot}19{\cdot}928163{\cdot}1111211111$$

Así que *Y=1.111.011.111×1.111.211.111* y ya disponemos de otra curiosidad numérica para endulzar nuestro café italiano:

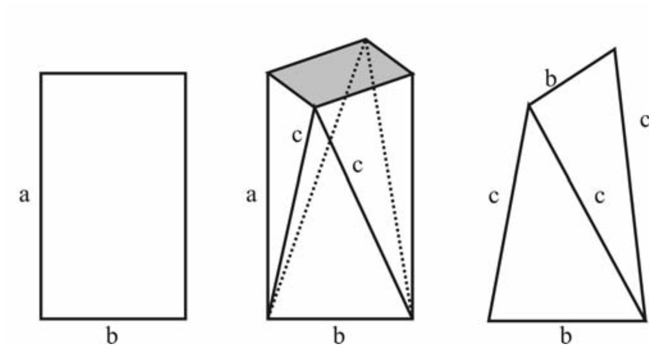
¿Lo sapevi che
1.111.011.111×1.111.211.111=1.234.567.890.987.654.321?

A la hora del recreo muchos profesores salimos del centro para tomarnos un café. Se forman diferentes grupos que se dirigen a los distintos establecimientos que hay en las cercanías de mi centro de trabajo, el *Institut Vallès* de Sabadell. En general, cada grupo tiene la costumbre de dirigirse siempre al mismo establecimiento, pero fue precisamente un día en que cambié de grupo y, como consecuencia de lugar, que mi café vino acompañado de un sobrecito de azúcar cuya forma me resultó insólita. Ése día fui al bar *La Bruixa* con el grupo de profesores de Lengua y Literatura. El sobre de azúcar no era plano, sino tetraédrico (fig. 2). El cambio es productivo, pensé. Meses después me topé con idéntica maravilla en otro bar muy lejos de Sabadell.

Los sobrecitos corrientes se cierran sellando los extremos de un tubito de papel según ejes situados en un mismo plano. Las líneas de cierre son paralelas. El sobrecito tridimensional no se había construido así. Los extremos del tubito de papel se habían pegado según ejes perpendiculares correspondientes a planos también ortogonales. El resultado era un tetraedro irregular. Un poliedro tan simple como raro de ver en libertad:

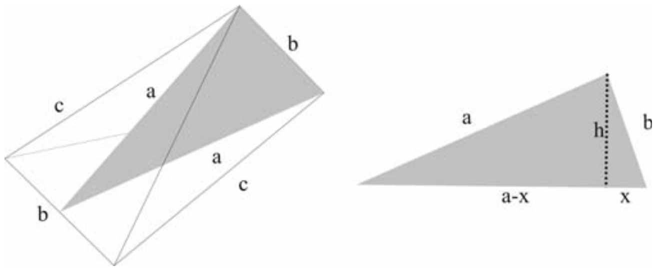


Puesto que el origen del sobre era también un rectángulo de papel enrollado, enfatizando las aristas del proceso de construcción se aprecia mejor su esencia tetraédrica:



Puede calcularse el volumen del tetraedro irregular que es ese envoltorio mediante el teorema de Pitágoras. Primero hallamos su altura:

Figura 2: Dulces tetraedros



$$\begin{cases} h^2 = b^2 - x^2 \\ h^2 = a^2 - (a-x)^2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{b^2}{2a} \Rightarrow h = \frac{b}{2a}\sqrt{4a^2 - b^2}$$

Una vez conocida la altura, el volumen es el de una pirámide cuya base es un triángulo isósceles:

$$V = \frac{1}{3}\cdot A\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\frac{ab}{2}\cdot\frac{b}{2a}\sqrt{4a^2-b^2} = \frac{b^2}{12}\sqrt{4a^2-b^2} =$$
$$= \frac{b^2}{12}\sqrt{(2a+b)(2a-b)}$$

Si el rectángulo de partida es cuadrado ($a=b$), la expresión del volumen es mucho más sencilla:

$$V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

Sin embargo, que el sobre plano sea cuadrado no significa que el tetraedro obtenido vaya a ser regular. Lo será si las aristas b y c del poliedro resultante son iguales:

$$\left.\begin{array}{l} c = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2} \\ b = c \end{array}\right\} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

De dicha proporción entre a y b se deduce que el tetraedro regular solamente se obtiene a partir de un rectángulo de lados inconmensurables. Mientras a/b sea un número racional, el tetraedro no será regular. Este teorema y adherencia inspira otras preguntas. Por ejemplo: ¿qué volumen tiene el tetraedro que puede formarse doblando la boca del sobre de un CD?

Los extremos del tubito de papel se habían pegado según ejes perpendiculares correspondientes a planos también ortogonales. El resultado era un tetraedro irregular.

No sé si esas adherencias harían más dulces las Matemáticas de mis alumnos, pero desde luego endulzan mi tarea como profesor. Y eso, tomando el adjetivo dulce como sinónimo de bueno y agradable pese a que yo prefiero lo salado. La realidad matemática de nuestro entorno es tan rica como sorprendente. Por un euro que valía entonces un café, ¡el teorema me salió por una ganga!

ADHERENCIAS ■

Este artículo fue solicitado por SUMA en febrero de 2010 y aceptado en abril de 2010 para su publicación.

suma+ 64
Junio 2010, pp. 89-98

Mi presentación

Daniel Sierra Ruiz

Cuando conocí a Francisco Martín Casalderrey en 2003, ya me advirtieron que quería que empezaran a llamarle por su nombre y no *Franchi*, que es como se le conocía… y como se le conoce todavía hoy en toda la Federación. Estábamos en Canarias y era el momento en que, junto a Inmaculada Fuentes, asumía la dirección de Suma.

Después de ocho años en Zaragoza, la revista cambiaba de manos. Para entonces, Julio Sancho y Emilio Palacián habían cumplido los objetivos que se habían planteado… pero era necesario dar más pasos hacia adelante; parecía conveniente que un nuevo equipo tomara las riendas. Desde luego, el plantel prometía.

Se podría decir que el firmante de *Mi biblioteca* de este número, era la cabeza visible de ese grupo; sin duda, una persona de prestigio y cuya brillantez era y es algo reconocido por todos, pero si hay otro aspecto de su personalidad que le caracteriza, ese es su inquietud. Sus compañeros de carrera recuerdan que ya en sus tiempos de estudiante era así. Parece ser que siempre estaba metido en mil asuntos o haciendo distintas cosas a la vez. Este carácter provocó ciertos comentarios al respecto de si cuatro años no sería mucho tiempo para que Francisco estuviera enfrascado en algo. No se dudaba de su capacidad, obviamente, ya que era patente que le sobraba para la tarea encomendada; lo que estaba en cuestión era si el reto sería suficientemente importante como para ocuparle todo ese tiempo.

El equipo de Madrid empezó con el número de noviembre de 2003 y finalizó cuatro años después con la publicación del 56. Doce números que dieron para comprobar que el actual Secretario General de la FESPM iba a dejar su sello personal en los continuos cambios e inclusión de novedades. La más llamativa fue la de empezar a imprimir *Suma* a color; pero no fue la única. Por ejemplo, el diseño y la maquetación del interior fueron cambiando, evolucionando, a veces de manera apenas imperceptible pero otras de una forma evidente. Y no hay que olvidarse de otros aspectos referentes a contenidos ni del inicio de la colección de monografías.

Daniel Sierra Ruiz (coordinador de la sección)
IES Benjamín Jarnés, Fuentes de Ebro (Zaragoza)
biblioteca@revistasuma.es

Siempre que se introducen novedades en un producto del estilo de nuestra revista, se corren riesgos y quien los lleva a cabo asume que puede tener críticas. Lejos de lo que pueda parecer, quizás el mayor crítico que tiene Francisco es él mismo. No le duelen prendas al reconocer que alguna maquetación no quedó tan bien como hubiera deseado… lo que le iba sirviendo como retroalimentación en esa evolución continua que he mencionado. No hay duda de que el paso al color en la revista era un paso que había que dar, y que él fue lo suficientemente valiente para asumir el reto; que algún diseño le quedara, según sus propias palabras, algo recargado, no supone más que una pequeña curva en el camino hacia la excelencia de la revista que todos queremos.

Todos estos aspectos de la personalidad de Francisco también los podemos ver reflejados en su faceta como actual Secretario General de la FESPM. Su forma de actuar nos ha dotado de un mayor dinamismo y, aunque esté recibiendo alguna crítica más o menos velada, él sigue con paso firme en la convicción de que está trabajando por la mayor operatividad y el progreso de la Federación.

Para acabar me gustaría agradecerle que haya encontrado un hueco para participar en *Mi biblioteca*. Conociendo las obligaciones de su cargo, que tiene otra sección en *Suma y* que en la época en la que ha tenido que escribir este artículo anda enfrascado en los últimos detalles de un libro, imagino que su tiempo «libre» tendrá poco de ello. Por lo tanto, no puedo por menos que manifestar mi admiración al decir que Francisco Martín Casalderrey nos ofrece *su biblioteca particular.*

Mi biblioteca particular

Francisco Martín Casalderrey

Si tuvieras que empezar tu biblioteca matemática ahora, ¿con qué libro o libros de los de tus primeros años como matemático comenzarías?

Un clásico que por fortuna ha sido recientemente reeditado y que debe formar parte de la biblioteca matemática de cualquier profesor es: *Matemática Elemental desde un punto de vista superior*, de Félix Klein, que en dos volúmenes, el primero dedicado a la Aritmética, Algebra y Análisis y el segundo a la Geometría, apareció en 1908 y se publicó en español, por el CSIC y la RSME en 1927-1931.

Decíamos que por fortuna ha sido recientemente publicado de nuevo en español por Nivola: *F. Klein: Matemática elemental desde un punto de vista superior,* traducción de Jesús Fernández, Nivola, Madrid (2006).

En el 2008, se cumplieron, por tanto, cien años desde su publicación. Con ocasión de ese centenario la Unión Matemática Internacional (IMU) y la Comisión Internacional para la Enseñanza de las Matemáticas (ICMI) han promovido conjuntamente el llamado *Proyecto Klein*, para desarrollar y difundir a nivel mundial diversos materiales (libros, folletos, *wikis*, DVD, programas de televisión, etc.) dirigidos al profesorado de enseñanza secundaria, en los que se muestre la repercusión, en la matemática elemental, de los avances de esta disciplina a lo largo del siglo XX. A cargo del proyecto se encuentra la Comisión Klein, formada por Michèle Artigue de la Universidad de Paris VII (Francia), Ferdinando Arzarello de la Universidad de Turín (Italia), Graeme Cohen de la Universidad Tecnológica de Sydney (Australia), William McCallum de la Universidad de Arizona (USA), Tomás Recio de la Universidad de Cantabria (España), Christiane Rousseau de la Universidad de Montreal (Canadá) y Hans-Georg Weigand de la Universidad de Wurzburg (Alemania).

Cabe esperar que, entre otros productos, podamos disponer de una versión actualizada de *Matemática elemental desde un punto de vista superior* que, continuando el espíritu de Klein, actualice la obra original, incorporando los conocimientos matemáticos del siglo XX. Según parece estará disponible en unos dos o tres años, y se traducirá a diversas lenguas.

Esa nueva reescritura será sin duda de obligada lectura para quien pretenda dedicarse al noble oficio de enseñar la matemática.

¿Qué libro o libros de didáctica de las matemáticas consideras destacables por lo que en su momento y en el desarrollo posterior de la disciplina supusieron?

Citaré dos que, sin duda, son también bastante clásicos. Uno de ellos se puede aún localizar en las librerías especializadas o buscándolo en internet. Se trata de *Didáctica de la matemática moderna*, de Emma Castenuovo, publicado por Trillas en México en 1970. En *Suma* 41 apareció una recensión mía sobre este libro. El otro, también un clásico, es *La matemática y su enseñanza actual*, de Pedro Puig Adam, publicado por el Ministerio de Educación en 1960. Este último está agotadísimo y alguien debería pensar en reeditarlo. Ambos libros, aunque fueron publicados hace muchos años, mantienen plena vigencia y actualidad. También de este último apareció una recensión en *Suma* 34 escrita por mí. Me remito a ambas recensiones para quién no conociendo esos libros quiera tener una cierta visión de su contenido.

Algunas veces he criticado a nuestros colegas españoles investigadores en didáctica de las matemáticas en distintas universidades. Su trabajo en mi opinión resulta excesivamente teorizante y tiene poca repercusión en el ámbito de nuestras clases.

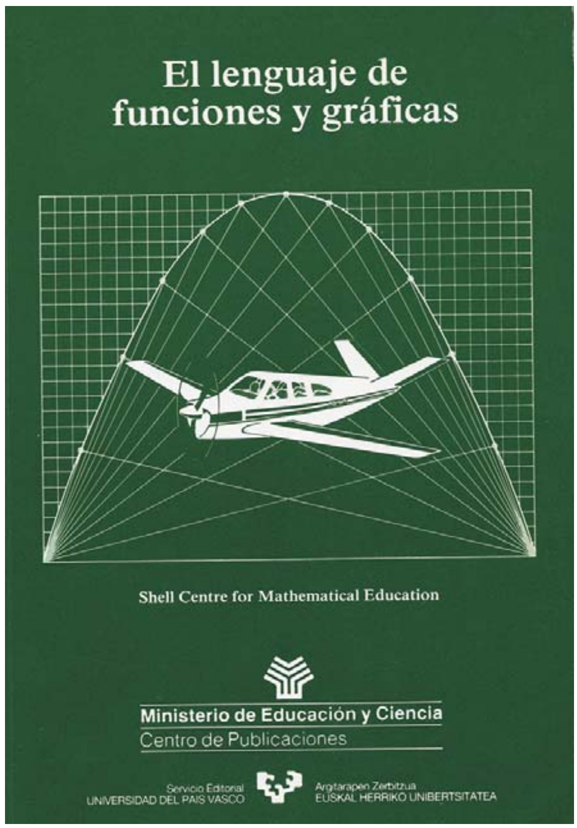
En último lugar quiero también citar *El lenguaje de funciones y gráficas*, publicado por el MEC en 1985, que dio a conocer en España al Shell Center for Mathematical Education. Todavía hoy, hojeando sus páginas, veinticinco años más tarde, descubro en él muchas cosas nuevas e interesantísimas para la clase que daré mañana mismo.

Este libro es fruto de lo que hoy podríamos llamar I+D+I. Algunas veces he criticado a nuestros colegas españoles investigadores en didáctica de las matemáticas en distintas universidades. Su trabajo en mi opinión resulta excesivamente teorizante y tiene poca repercusión en el ámbito de nuestras clases. Da la impresión de que muchos de ellos piensan, en el más rancio estilo de una generación de matemáticos ya extinta, que su misión es encontrar teoremas proposiciones y corolarios… sobre la educación matemática y que serán otros los encargados de aplicarlos, si es que son aplicables. De la terna I+D+I, se centran sólo en la primera I y olvidan la D de desarrollo y la segunda I de innovación. Desde aquí humildemente les insto a fabricar materiales de la calidad de los del Shell Centre, que nos faciliten la tarea de innovar a los profesores de a pie.

Evidentemente, además, hay muchos otros, entre los que habría que señalar por ejemplo los libros de texto del Grupo Cero o ese título que es un grito: *Es posible*, también del Grupo Cero, y que ya han citado otras personas en esta sección. O los libros del grupo Azarquiel, que abordaban de manera sistemática las ideas importantes para la enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria, señalando los hitos del camino por el que deambular en la construcción personal de nuestra propia práctica.

Y también ese *Mathematics as an educational task*, de Hans Freudenthal, que tantas horas dedicamos mi amigo Florencio Villarroya y yo mismo, entre otros, en un intento de traducirlo y que sigue siendo uno de los libros importantes para los profesores de matemáticas y que debería ser traducido y editado en español urgentemente.

Por último citaré dos más. Uno de ellos porque nos sirvió a muchos para poder afirmar con argumentos de autoridad lo que otros se negaban a recocer previamente, por mucho que se viniera diciendo desde hacía tiempo. Me refiero al *Informe Cockcroft: Las Matemáticas sí cuentan*, publicado por el Ministerio de Educación en 1985, que también ha sido ampliamente comentado en varias ocasiones en las páginas de *Suma*.



¿Qué libro de visión general de las matemáticas recomendarías a un no matemático interesado en leer algo sobre el tema?

Esta es una pregunta difícil de responder. En los últimos años se ha hecho mucha y muy buena divulgación de las matemáticas. Citaré, sin pretender ser exhaustivo, el trabajo de editoriales como Nivola o Proyecto Sur. Últimamente incluso las grandes multinacionales de la edición de coleccionables han visto que el ámbito matemático podía ser un buen campo de negocio para ellas y no es, por tanto extraño, encontrarnos en el kiosco, al lado de El País o de ABC, con títulos como *La Secta de los números. El teorema de Pitágoras*, de Claudi Alsina. Hemos de deducir, por tanto, que las lecturas sobre matemáticas interesan a un sector creciente de la población. O eso es lo que cabe pensar si adoptamos una posición optimista. La otra posibilidad, que quizás sea más exacta, es, que como afirma la frase coloquial, en España hay gente para todo. También en el ámbito del subgénero que podríamos llamar *Literatura matemática* –novelas, cuentos y narraciones de tema matemático– en los últimos años han llegado a las librerías infinidad de novedades, algunas muy recomendables.

No obstante, una obra de carácter general que responda a las preguntas básicas que un no matemático se pueda hacer sobre qué son las matemáticas y el valor que en la actualidad tienen en nuestra sociedad es difícil de encontrar.

Quizás, y porque lo he recomendado muchas veces a mis alumnos y, aunque va dirigido a adolescentes, puede ser leído también por adultos, recomendaría con esta finalidad el libro de Carlos Andradas *Póngame un kilo de matemáticas*, publicado por SM, en la colección el Barco de Vapor, en 2003. La clave para todos aquellos que empezaron muy jóvenes a odiar las matemáticas, puede que sea volver a sentirse como niños y ver que es posible disfrutar aprendiendo matemáticas. Con este libro lo pueden conseguir.

Aparte de los mencionados, ¿destacarías algún otro libro por su belleza, originalidad, repercusión…?

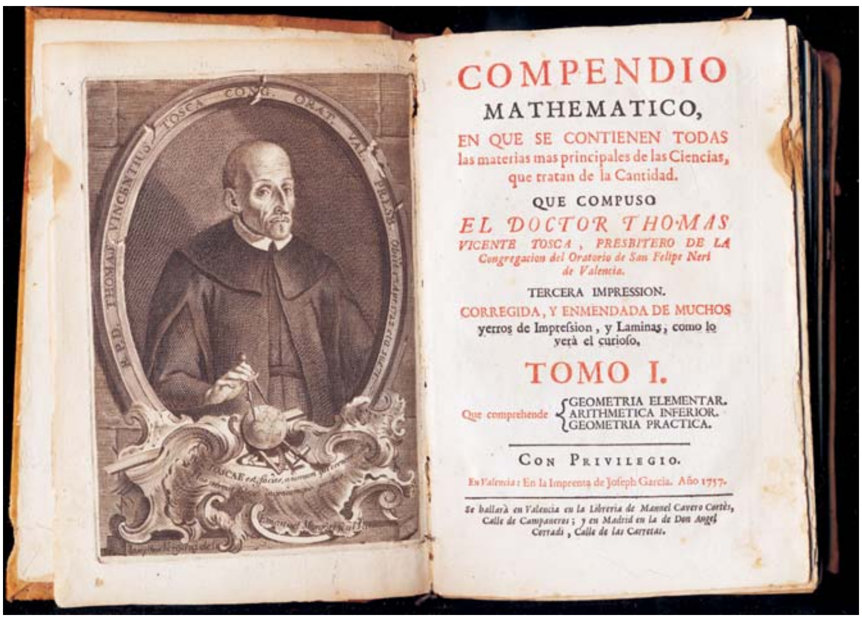
Si he de referirme a los libros que me han influido, no puedo olvidarme de algunos que heredé de mi padre y que éste, también profesor de matemáticas en un instituto, heredó a su vez de un ascendiente llamado Bartolomé Martín, que fue profesor de matemáticas en la universidad de Zaragoza a principios del siglo XIX.

La biblioteca de Bartolomé Martín contenía libros muy diversos: muchos de historia, otros de filosofía o de derecho; varios eran gramáticas latinas y había alguna retórica. Además, claro está, había una importante colección de libros de matemáticas de los siglos XVII y XVIII, algunos bellísimos.

Empecé a revisarlos cuando estaba acabando la carrera y de su estudio surgieron dos aficiones, la historia de la ciencia y la historia de su enseñanza.

Señalaré dos de ellos: *El compendio matemático* de Tomás Vicente Tosca, que apareció en nueve tomos entre 1707 y 1715 y del que se hicieron muchas reediciones e incluso fue traducida a varios idiomas. La edición que poseo es de 1757 y contiene un precioso grabado del padre Tosca.

El segundo es el *Curso Matemático* de Pedro Giannini.



Pedro Giannini fue primero profesor del Colegio Militar de Artillería de Segovia y después Comisario de Guerra de los Reales Ejércitos. Llegó a España procedente de Nápoles con el séquito de Carlos III al hacerse cargo éste del trono de las Españas. El *Curso matemático* es una obra en cinco tomos que comienza con la aritmética y termina con mecánica racional. Por ejemplo, en el tomo II, se puede ver la resolución de la ecuación cúbica, mediante la fórmula de Tartaglia y en el tomo III se aborda, con abundante detalle, el cálculo de derivadas y primitivas y la resolución de ecuaciones diferenciales. Esta obra supuso en su momento una verdadera revolución en la formación de los oficiales de artillería.

De ambos libros aprendí ideas y ejemplos que luego he usado en mis clases.

Creo que esa es la misión que nos corresponde hacer: romper mitos, hacer que nuestros alumnos no confundan creencias con saberes, supersticiones y verdades (si es que éstas existen)

¿Puedes aportar alguna cita de tus lecturas que tenga que ver con las matemáticas que hayas incorporado a tus referencias?

Aunque no la he incorporado a mis referencias y aunque evidentemente no lo suscribiría en su totalidad, me gusta por su vehemencia el siguiente párrafo de la introducción del libro de Tomás Vicente Tosca del que hablaba antes:

> Con ella [la matemática] se descubren los mas retirados secretos de la naturaleza. Ella es la que averigua las fuerzas del ímpetu, las condiciones del movimiento, las causas, los efectos, y diferencias de los sones; la naturaleza admirable de la luz, las leyes de su propagación: levanta con hermosura los edificios; hace casi inexpugnables las Ciudades; ordena con admiración los exercitos; y entre las confusas, è inconstantes olas del mar, abre caminos, y sendas a los que navegan. Se remonta últimamente la Mathematica hasta el Cielo, para averiguar la grandeza de los Astros, y el concierto, y harmonia de sus movimientos; y con varias invenciones de Telescopios, ha hecho corriente el comercio de la tierra con el Cielo, tan deseado por los siglos antiguos. No será pues malogrado el tiempo, que se consumiere en su estudio; ni sera vano el sudor, que se empleàre en tierra tan fertil, que le retorna en tan multiplicados frutos.

En tus lecturas ajenas a las matemáticas (literatura, arte,...), ¿has encontrado algún libro recomendable en el que las matemáticas (como resultados o como inspiración) jueguen un papel interesante?

No citaré expresamente aquí ningún libro, pero he dedicado mucho tiempo en los últimos años a leer sobre arte. En cualquier libro, si usamos nuestra mirada matemática, podemos encontrar materia prima sobre la que pensar matemáticamente. De alguna forma es a lo que me dedico siempre que leo, siempre que miro y veo.

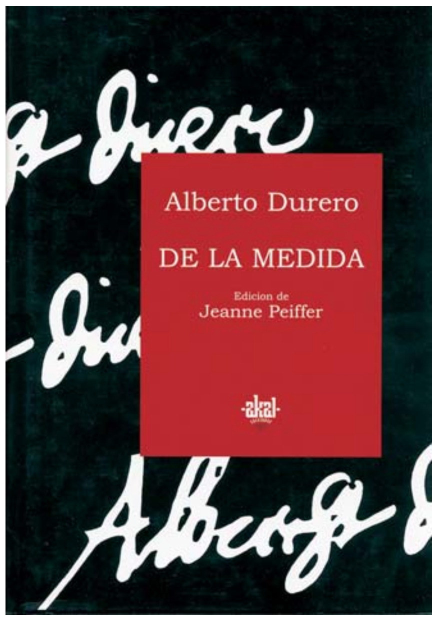
Para compensar el hecho de que no sugiera ningún libro concreto en este apartado, y para ver que esta mirada matemática puede darnos ideas en cualquier lectura, citaré una frase que subrayé en mi primera lectura de las *Memorias de Adriano*, de Marguerite Yourcenar:

> Otras veces, en cambio, dividía todo al infinito: cada pensamiento, cada hecho, era objeto de una segmentación, de un partición en múltiples pensamientos o hechos más pequeños, de manejo más fácil. Las resoluciones difíciles se desmigajaban así en un polvillo de decisiones minúsculas, tomadas una a una, determinándose consecutivamente, y por ello tan inevitables como fáciles.

Me parece una estrategia perfecta para la resolución de problemas.

¿Qué libro te resulta más interesante entre los últimos que has leído sobre matemáticas?

Últimamente he leído *De la Medida* de Alberto Durero, cuyo título original es *Underweysung der messung* (Instrucciones para la medida) que fue publicado en el 2000 por Akal. La edición está a cargo de Jeanne Peiffer y la traducción al español



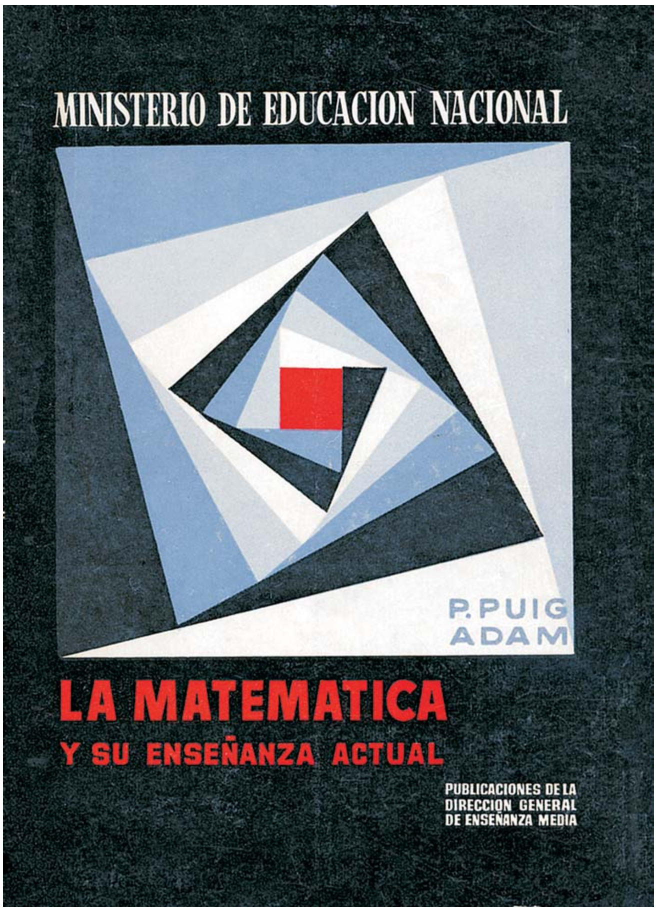
es de Jesús Espino. Había tenido acceso unos años antes a la edición francesa, a cargo también de Peiffer, que incluye un estupendo estudio previo que también aparece en la edición española. Muchos de los lectores de *Suma* saben de mi afición por el arte y su relación con las matemáticas.

Las ideas y las creaciones importantes de la humanidad han avanzado siempre en paralelo, aunque ciencia y creación artística en muchos casos se hayan dado la espalda. En los momentos en los que los creadores del arte se han vuelto hacia la ciencia para aprender de ella y los científicos han buscado en el arte el reflejo metafórico de su búsqueda, en los momentos en los que el Arte y la Ciencia se han mirado a la cara, la producción en ambos campos ha sido especialmente fructífera.

Uno de esos momentos fue, sin duda, el Renacimiento. En esa época hubo un especial contacto entre matemática y arte. Y entre los matemáticos-artistas o artistas-matemáticos de esa época podemos señalar a León Battista Alberti, a Piero della Francesca, a Paolo Ucello y sin duda a Alberto Durero.

El *De la Medida* de Durero permite ir a las fuentes originales del saber matemático de esa época, de la mano de uno de sus protagonistas, que a la vez es un gran artista. Y como siempre que acudimos a textos históricos, además de aprender directamente de la fuente primaria, lo que se sabía en un cierto momento, se sacan aprendizajes colaterales, didácticos, que van formando un poso húmedo y arcilloso con el que podemos modelar nuestras propias enseñanzas en clase con nuestros alumnos.

> *La clave para todos aquellos que empezaron muy jóvenes a odiar las matemáticas, puede que sea volver a sentirse como niños y ver que es posible disfrutar aprendiendo matemáticas.*



Coméntanos algún libro no matemático que hayas leído últimamente y que te gustara especialmente.

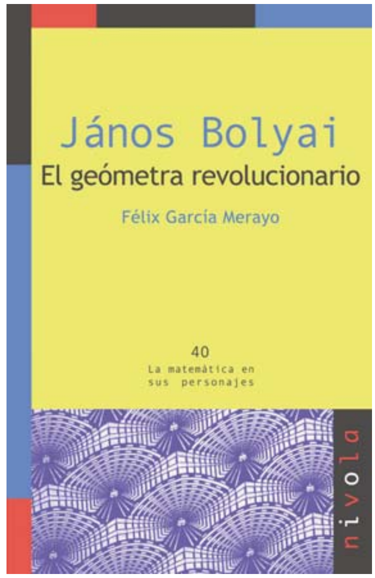
Uno de los últimos libros que he leído es *Caín* de Saramago, Alfaguara 2010. En el fondo considero que es un libro muy matemático y es quizás por eso por lo que lo han considerado sacrílego unos cuantos exaltados o irreverente otros. Realmente Saramago *demuestra* que la «literalidad de la Biblia es lo que es: un horror». Y por eso puede decir: «Dios aceptó el sacrificio de Abel y rechazó, con la crueldad que sólo Dios puede tener, el sacrificio de Caín. ¿Qué diablo de Dios es éste que para enaltecer a Abel desprecia a Caín?».

Creo firmemente que las matemáticas en las aulas deben servir para desasosegar las mentes de los que aprenden. Creo que esa es la misión que nos corresponde hacer: romper mitos, hacer que nuestros alumnos no confundan creencias con saberes, supersticiones y verdades (si es que éstas existen). Este es probablemente uno de los mejores caminos hacia la felicidad, aprender a convivir con la incertidumbre.

Por eso, José Saramago, que es un autor que dice escribir para escribir, que no busca ni agradar ni desagradar, sino crear desasosiego, es, sin duda, un autor muy recomendable para cualquiera que se dedique a esta profesión que compartimos. ■

Escaparate 1: El geómetra revolucionario

JÁNOS BOLYAI
EL GEÓMETRA REVOLUCIONARIO
Félix García Merayo
Nivola, Madrid, 2009
ISBN: 978-84-92493-35-7
128 páginas



Uno puede interpretar la geometría como un juego. En todo juego existen unas reglas. ¿Cuáles son las reglas del «juego geométrico»? Podemos decir que las reglas de éste juego están dadas por los postulados y axiomas, es decir por las suposiciones más básicas y los procedimientos y acciones permitidas.

En el baloncesto, por ejemplo, juegan dos equipos de cinco jugadores cada uno. El objetivo de cada equipo es introducir el balón dentro de la canasta del adversario e impedir que el adversario se apodere del balón o enceste. El balón puede ser pasado, lanzado, palmeado, rodado o botado en cualquier dirección dentro de las restricciones de las reglas. Si se transgrede alguna regla el árbitro regula la posesión del balón. Pues lo mismo sucede en la geometría. La geometría común que conocemos se llama *euclidiana*. Posee reglas muy precisas. Y lo cierto es que las hemos conocido y estudiado durante muchos años de nuestra vida.

Se puede pensar qué pasaría si se cambia algunas de las reglas del baloncesto. Por ejemplo, que los jugadores pudieran correr con el balón en las manos o patear el balón con el pie, el nuevo juego tendría algo de parecido con el baloncesto pero ya no sería el mismo. Más se parecería al balonmano o al fútbol.

Ahora ¿qué pasaría si se cambia algunas de esas reglas de la geometría? Es este el asunto que se trata en este libro. Porque, precisamente, podríamos decir que las geometrías no euclidianas representan un cambio de algunas de esas reglas. El nuevo juego resulta diferente pero también contiene cosas similares.

En este libro vamos a conocer algunas de las geometrías que se generaron al cambiar algunos de los postulados clásicos de Euclides. Este no fue un proceso sencillo y fácil porque la geometría euclidiana ha estado asociada a lo que se ha creído es el espacio que nos rodea. Y cambiar una geometría así rompía y todavía rompe muchos de los esquemas mentales e ideas que poseemos.

Su historia es la historia de una de las más grandes revoluciones del pensamiento humano. Uno de sus protagonistas fue János Bolyai de ahí el nombre del libro *El geómetra revolucionario*. Debería recordarse como se recuerda la Revolución Francesa o el descubrimiento de América, y sin embargo la realidad es que pocas personas saben que existió esta revolución.

A este matemático revolucionario va dedicado el número 40 de la colección «La Matemática en sus personajes» de la editorial Nivola aparecido recientemente. Como ya es habitual en los libros de esta colección, su autor Félix García Merayo, no sólo nos presenta algunos de los trabajos y aportaciones del matemático, sino que nos sitúa históricamente la evolución de la geometría.

El libro consta de 116 páginas y está estructurado en cinco capítulos.

Rosa Montañés
IES Benjamín Jarnés, Fuentes de Ebro (Zaragoza)

El primer capítulo «La invención de la geometría» comienza con la Grecia antigua recordándonos a personajes que tuvieron un papel importante en el desarrollo tanto de la matemática como de la propia civilización europea. Nos presenta a Euclides como uno de los grandes matemáticos de la Antigüedad junto con Arquímedes y Apolonio pero no es objetivo de este libro hablar de él más allá de lo relacionado con la geometría y su obra *Elementos*. Bien es sabido que a través de toda su historia, y en todas las civilizaciones, la arquitectura y también las demás artes plásticas, se han desarrollado gracias a los conocimientos geométricos de la época.

En el segundo capítulo el autor pasa a profundizar en la biografía de los Bolyai basada en la investigación realizada por Ferenc Schmidt junto con el profesor de historia de las matemáticas de Burdeos, Hoüel, sobre la vida y obras de padre (Farkas Bolyai) e hijo (János Bolyai). La comunidad científica cercana a los Bolyai nunca se mostró demasiado interesada por el trabajo de János pero gracias a Schmidt se recuperaron los manuscritos que dejó y posteriormente fueron clasificados, recopilados y publicados por diversos matemáticos.

En el tercer capítulo «La evolución de la geometría no euclídea», a principios del siglo XIX, los matemáticos Gauss, Lobachevski y János Bolyai, por separado, demostraron la posibilidad de construir una geometría coherente reemplazando la geometría basada en la paralela única de Euclides por otra, donde era posible trazar un número infinito de paralelas a una recta por un punto exterior a ella. Esta geometría no euclídea se conoce como *geometría hiperbólica*.

En el cuarto capítulo «El Appendix y otros trabajos de Bolyai», se profundiza en su única publicación que quedó reducida a un apéndice de la obra magna de su padre llamada *Tentamen*, también se analizan algunas de sus investigaciones que se recogen en el estudio de sus manuscritos.

Por último, el libro se cierra con un capítulo «Los modelos de la geometría hiperbólica» donde se presentan algunos de los diferentes modelos para entender mejor la geometría hiperbólica como el modelo de Beltrami, Klein o Poincaré. ■

Escaparate 2:
En busca de la forma del universo

La conjetura de Poincaré
En busca de la forma del universo
DONALD O'SHEA
Tusquets, Barcelona, 2008
ISBN: 978-84-8383-093-2
322 páginas

Hagan caso a Martin Gardner, este es un libro maravilloso para el público en general, esto implica que con toda seguridad tiene serlo para las curiosas mentes de los lectores de *Suma*. Se nos presenta una magnífica panorámica de la historia de las matemáticas, enfocada en el desarrollo de la topología, desde su creación como rama de las matemáticas hasta el momento actual, en el que se ha convertido en una herramienta fundamental para la física, y en particular para entender la forma de nuestro universo.

Pedro Latorre
IES Tiempos Modernos (Zaragoza)

Sin lugar a dudas los capítulos que más me han gustado son aquellos en los que se introduce intuitivamente la topología y la sugerente analogía entre cómo averiguar la forma de la superficie de la tierra trazando mapas bidimensionales y cómo descubrir la forma del universo también a través de mapas, en este caso tridimensionales. Para aquellos que se queden con ganas de más topología desde un punto de vista informal pero riguroso, sin recurrir al a veces duro aparato matemático, les sugiero *The Shape of Universe* de J. Weeks, una de las muchas recomendaciones del autor.

Donald O'Shea es catedrático de matemáticas en Massachussets, especialista en topología. Se trata de su primer libro de divulgación, dirigido a cualquier persona que tenga curiosidad por descubrir el mundo que nos rodea, en este caso sería más apropiado decir el universo en el que estamos inmersos. Evidentemente, si se tienen unos mínimos conocimientos de topología es más sencillo leer el libro, que en cualquiera caso nos exige un esfuerzo para entender las ideas expuestas, pero en mi opinión vale la pena leer y releer en pequeñas dosis y no quedarse en una lectura superficial.

La conjetura de Poincaré afirma que una variedad tridimensional cerrada y simplemente conexa es homeomorfa a una triesfera. La lectura de este libro permite, sin tener que buscar en otros manuales y partiendo de cero, desentrañar el galimatías anterior, lleno de tecnicismos que sin embargo ocultan ideas simples y bellas, y tener muy claro el significado de la conjetura. Espero que se animen a tirar del hilo de alguna de las muchas y muy interesantes referencias que tenemos a nuestra disposición para seguir explorando el universo topológico.

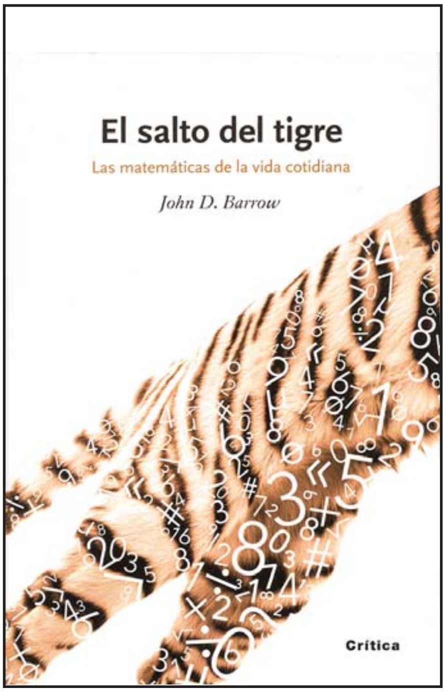
Un punto fuerte del libro es el tratamiento claro, crítico y detallado de la parte de la historia de las matemáticas que ha permitido formular la conjetura. Desde los *Elementos* de Euclides, hasta las discusiones sobre la necesidad o no del quinto postulado, llegando a Lobachetsky y Bolyai sufriendo la alargada sombra del gran Gauss. Si tenemos unos conocimientos previos de historia de las matemáticas podemos asentir o disentir de las múltiples y bien razonadas opiniones expresadas en el texto.

En el último tramo del libro disfrutamos de la aclaración de los conceptos de espacio y geometría con los que Riemann dejaba zanjada la controversia sobre las geometrías no euclídeas y llegamos a Poincaré y sus trabajos topológicos. Las matemáticas del siglo XX se nos muestran, como también las anteriores, perfectamente contextualizadas en los planos personal y sociopolítico, atisbando los obstáculos que han tenido que superar muchos matemáticos para poder realizar su trabajo: «la vida de la mente nunca se detiene, por atronadores que sean los cañones».

El penúltimo capítulo de este libro se ha escrito muy recientemente: 7 de Abril de 2003, Grigori Perelman, el excéntrico matemático ruso, expone en unas charlas en el MIT su demostración de la Conjetura y posteriormente en agosto de 2006 renuncia a la medalla Fields que le iba a ser entregada como reconocimiento de su proeza en el ICMI de Madrid. Podemos ver que están muy equivocados aquellos que piensan que las matemáticas es una ciencia muerta, que se terminó de construir en el siglo XX.

Desde mi punto de vista como docente, me ha quedado claro la conveniencia, casi necesidad, de trabajar los conceptos básicos de topología en la enseñanza obligatoria, lo que permitiría a muchos alumnos desarrollar una intuición topológica, a la vez que se estudia la últimamente un poco arrinconada geometría. El 30 de Marzo de 2010, el Instituto Clay reconoció que Perelman había demostrado la conjetura de Poincaré. Un hito así no ocurre todos los días. Hay que darse prisa, sólo quedan por resolver seis problemas del Milenio. ■

Escaparate 3:
Las matemáticas de la vida cotidiana



El salto del tigre
Las matemáticas de la vida cotidiana
JOHN D. BARROW
Crítica, Barcelona, 2009
ISBN: 978-84-9892-016-1
332 páginas

En una sociedad desarrollada como la que vivimos hay una gran cantidad de problemas, grandes y pequeños, que tenemos resueltos sin habernos dado cuenta ni siquiera de su existencia: nos levantamos, tocamos una tecla y hay luz, giramos una llave y tenemos agua, abrimos una puerta y nos aparecen todo tipo de alimentos... Sólo han pasado unos minutos y sin ningún esfuerzo hemos cubierto unas necesidades que buena parte de la humanidad se afana durante horas por cubrir y con frecuencia no lo consigue a su satisfacción. En buena parte de esas soluciones intervienen las matemáticas de una forma más o menos decisiva, sin que la mayoría de las veces lo sepamos, incluso los conocedores del tema (como somos —o deberíamos ser— todos los profesores de matemáticas): hay mucho camino por recorrer para hacer visibles las matemáticas.

Una buena ayuda es el libro que comentamos, cuyo título original responde mucho mejor a su contenido: algo como 100 cosas esenciales que usted no sabía que desconocía (*100 Essential Things You Didn't Know You Didn't Know*). Que, repito, incluso a los conocedores del tema de la divulgación matemática nos sorprenden. Bien es verdad que entre los 100 encontraremos temas un tanto tópicos, como los del número de personas que tiene que haber para que la probabilidad de que haya coincidencia de cumpleaños sea del 50%, pero incluso en estos encuentra el autor (un reconocido divulgador con abundante bibliografía, traducida en su mayoría en Crítica) nuevas vueltas de tuerca sorprendentes.

En todas las situaciones por supuesto que las matemáticas tienen un papel que jugar, porque como dice Barrow en su prólogo "las matemáticas nos dicen cosas sobre el mundo que no se pueden aprender de ningún otro modo", que puede servirnos como una buena razón para contestar a nuestros alumnos a su frecuente pregunta de: ¿por qué tenemos que estudiar matemáticas —o estos temas en particular—? Que se puede redondear con otra frase que se recoge en el libro, ésta de Von Neumann, sobre la dificultad de las mismas: "Si la gente no cree que las matemáticas son sencillas, es solo porque no se da cuenta de lo complicada que es la vida".

Podría poner una serie de ejemplos del libro que a mí me han chocado, pero no sería significativo. Solo me gustaría reseñar, en estos tiempos en que coger un avión es una prueba de masoquismo, que también desde las matemáticas se ha estudiado la forma más rápida de llenar un avión, algo no obvio y que ha dado lugar incluso a un algoritmo patentado (los tiempos están cambiando y las matemáticas gratuitas de toda la vida están pasando a la historia). Razón por la que seguramente en los vuelos *low-cost* ya no hay número de asiento y se apela al sálvese quien pueda.

Terminar recomendando la lectura de este libro de la que seguro que sacaremos material aprovechable para nuestras clases, y además (puesto que al inicio de cada capítulo hay una) frases brillantes que nos permitirán quedar bien y cultos en sociedad. Acabo con una de ellas, ésta de Bertrand Russell: "muchas personas prefieren morir a tener que pensar; y de hecho, la mayoría lo hacen". ■

Fernando Corbalán
CPEPA Emilio Navarro, Utebo (Zaragoza)

suma+ 64
Junio 2010, pp. 99-106

Protoálgebra en Babilonia (2ª entrega): métodos de resolución

En la primera entrega de esta serie, quedó planteado el problema de darle sentido a la solución que aparece en la tablilla babilónica TMS XIII, que está analizada en Høyrup (2002, pp. 207-208). A eso vamos a dedicar esta segunda entrega.

Recordemos que la solución viene expresada en la tablilla como una serie de operaciones, sin más indicaciones, por lo que nuestro problema consiste en averiguar qué calculan esas operaciones, qué sentido tiene hacer esos cálculos para resolver el problema y, a ser posible, hacer hipótesis sobre cómo se ha llegado a descubrir que esos cálculos permiten resolver el problema.

Recordemos que la solución es la siguiente, y recordemos también que, como no nos interesa abordar las dificultades derivadas del sistema metrológico babilónico, las unidades están substituidas por litros y gramos, que son más familiares para nosotros. Mantenemos, sin embargo, los números escritos en el sistema sexagesimal[1]:

> Tú coloca 4 litros de aceite y coloca el beneficio 40 gramos
>
> Inverso de 40, 1´30´´, ves.
>
> 1´30´´ por 4 multiplica, 6´, ves.
>
> 6´ por 12`50, el aceite, multiplica, 1`17, ves.
>
> ½ de 4 rompe, 2, ves
>
> 2 cuadra, 4, ves
>
> 4 a 1`17 añade, 1`21, ves.
>
> ¿Cuál es el lado igual? 9 es el lado igual.
>
> 9 el equivalente coloca.
>
> ½ de 4, que has separado, rompe, 2, ves.
>
> 2 al primer 9 añade, 11, ves.

Luis Puig
Universitat de València Estudi General
Maria Teresa Navarro Moncho
IES Veles e Vents. Torrent
historias@revistasuma.es

Del segundo quítalo, 7, ves.

11 litros cada gramo has comprado, 7 litros cada gramo has vendido.

¿Plata equivalente a qué? ¿Qué a 11 litros [por gramo] puedo poner que 12`50 de aceite me dé?

1´10 coloco 1´10 gramos de plata.

¿Por 7 litros cada gramo de plata que vendes de aceite, los 40 gramos de plata a qué equivalen?

40 por 7 multiplica. 4`40, ves, 4`40 de aceite.

El enunciado del problema que está resuelto así, eliminando las unidades babilónicas y dejando los números expresados en el sistema sexagesimal, es el siguiente:

12`50 litros de aceite he comprado.

De la compra de 1 gramo de plata, 4 litros, de cada (gramo), de aceite he separado.

40 gramos de plata como beneficio he visto.

¿Con qué equivalencia he comprado y con qué equivalencia qué he vendido?

En la anterior entrega de esta serie vimos también que este problema puede analizarse reduciéndolo a la siguiente lista de cantidades y de relaciones entre ellas:

cantidad comprada y vendida: m (l),
tasa de compra: t_c (l/gr)

tasa de venta: t_v (l/gr)

importe de la compra: i_c (gr)

importe de la venta: i_v (gr)

beneficio total expresado en plata (protodinero): b_{td} (gr)

beneficio unitario expresado en mercancía por unidad de plata: b_{um} (l/gr).

$$i_c = \frac{m}{t_c} \text{ o } i_c \times t_c = m$$

$$i_v = \frac{m}{t_v} \text{ o } i_v \times t_v = m$$

$$b_{td} = i_v - i_c \text{ o } i_v = b_{td} + i_c$$

$$b_{um} = t_c - t_v \text{ o } t_c = b_{um} + t_v$$

Y que esta red de cantidades y relaciones podemos representarla mediante el grafo[2] de la figura 1.

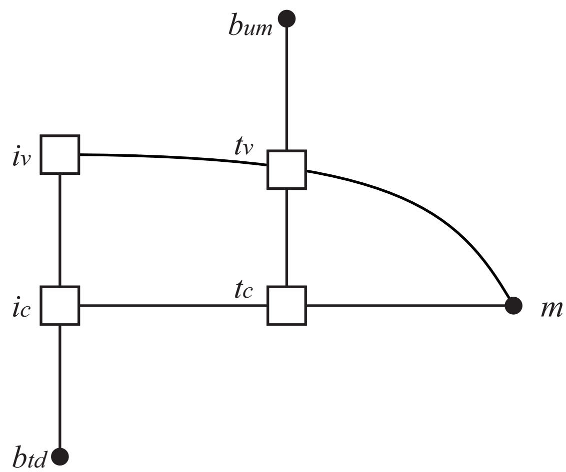


Figura 1

Estudiamos también que, como los importes de la compra y la venta están relacionados con las tasas de compra y venta por una proporcionalidad inversa

$$i_c \times t_c = i_v \times t_v = m,$$

no es posible dar sentido a las relaciones de proporcionalidad entre importes, tasas y beneficios

$$b_{td} : b_{um} :: i_c : t_v :: i_v : t_c,$$

en el contexto de compra y venta de mercancías que narra el enunciado del problema.

Lo que nosotros podemos hacer: el Método Cartesiano en acción

Antes de abordar el darle sentido a la solución babilónica, vamos a resolver el problema por métodos algebraicos actuales para usar nuestra solución como referencia de comparación. La resolución algebraica de un problema de enunciado verbal aritmético-algebraico está guiada por lo que acostumbramos llamar el método cartesiano, y un usuario competente de ese método recorre los pasos siguientes (que expresamos tal y como aparecen en Filloy, Puig y Rojano, 2008):

1. Una lectura analítica del enunciado del problema que lo reduce a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades.
2. Elección de una cantidad que se va a representar con una letra (o de unas cuantas cantidades que se van a representar con letras distintas).

3. Representación de otras cantidades mediante expresiones algebraicas que describen la relación (aritmética) que esas cantidades tienen con otras que ya han sido previamente representadas por una letra o una expresión algebraica.
4. Establecimiento de una ecuación (o tantas como letras distintas se haya decidido introducir en el segundo paso), igualando dos expresiones, de las que se han escrito en el tercer paso, que representen la misma cantidad.
5. Transformación de la ecuación en una forma canónica.
6. Aplicación de la fórmula o algoritmo de solución a la ecuación en forma canónica.
7. Interpretación del resultado de la ecuación en términos del problema.

La lectura analítica (paso 1) ya la hemos presentado en el apartado anterior, y nos ha dejado el enunciado del problema convertido en la red de cantidades y relaciones entre ellas que está representado en la figura 1. Con ello el texto del enunciado del problema, escrito en lenguaje vernáculo, ha quedado preparado para su traducción al lenguaje del álgebra simbólica. Traduzcámoslo pues (y traduzcamos también la cantidad de aceite comprada, 12`50 litros, del sistema de numeración babilónico al nuestro: 12 × 60 + 50 = 770 litros).

Decidimos (paso 2) designar la tasa de venta, t_v, con la letra x (figura 2).

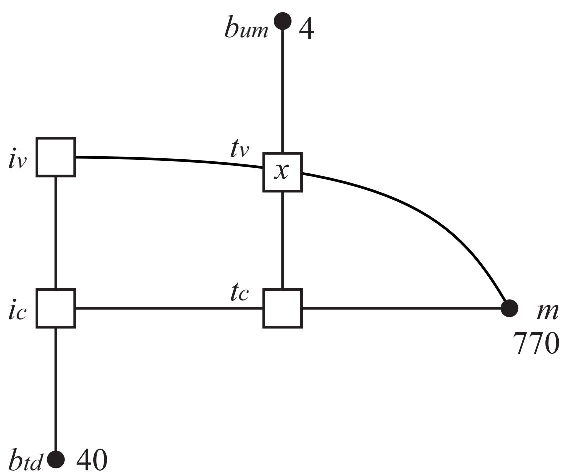


Figura 2

Escribimos expresiones algebraicas para las otras cantidades usando las relaciones (paso 3):

– usando la relación $t_c = b_{um} + t_v$ (en rojo en la figura 3) escribo t_c, la tasa de compra, $x + 4$;
– usando la relación $i_c \times t_c = m$ (en azul en la figura 3) escribo i_c, el importe de la compra:

$$\frac{770}{x+4};$$

– usando la relación $i_v \times t_v = m$ (en verde en la figura 3) escribo i_v, el importe de la venta:

$$\frac{770}{x};$$

– usando la relación $i_v = b_{td} + i_c$ (en amarillo en la figura 3) escribo b_{td}, el beneficio total expresado en plata:

$$\frac{770}{x}-\frac{770}{x+4}.$$

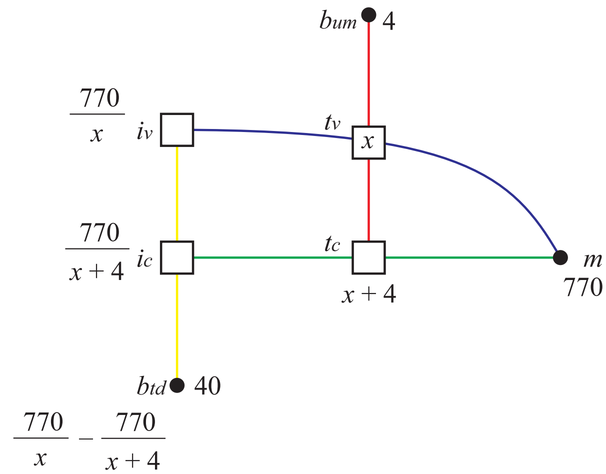


Figura 3

Como tenemos dos expresiones para b_{td}, el beneficio total expresado en plata, en este caso una expresión algebraica compuesta y un número, podemos escribir una ecuación (paso 4, figura 4):

$$\frac{770}{x}-\frac{770}{x+4}=40.$$

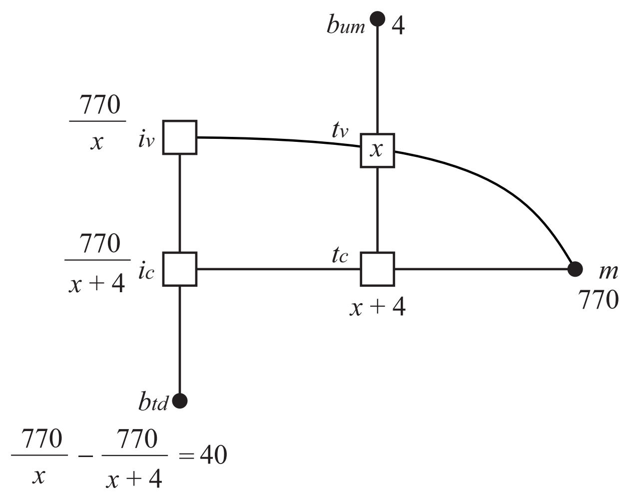


Figura 4

Una vez obtenida la ecuación la transformamos en una ecuación que esté en forma canónica (paso 5). Para ello, nos olvidamos del significado de las cantidades y de las relaciones con las que la hemos construido, y aplicamos transformaciones algebraicas que sólo tienen sentido en el mundo de significados de las relaciones aritmético algebraicas:

$770(x+4)-770x=40x(x+4)$
$770x+770\cdot4-770x=40x^2+4\cdot40x$
$770\cdot4=40x^2+4\cdot40x$
$77=x^2+4x$
$x^2+4x-77=0$

En efecto, la expresión que hemos obtenido carece de sentido en el mundo de las transacciones comerciales, la tasa de venta multiplicada por sí misma no significa nada. Pero nuestras acciones tienen sentido porque sabemos que tenemos un procedimiento para resolver una ecuación escrita en forma canónica, y que las transformaciones algebraicas, que hemos realizado transforman la ecuación que habíamos obtenido como traducción del enunciado, en ecuaciones equivalentes.

De hecho, tenemos dos procedimientos de solución disponibles: la fórmula de la ecuación de segundo grado y el procedimiento de completar cuadrados (paso 6).

Si aplicamos la fórmula, obtenemos dos valores para la x:

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4(-77)}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{16+308}}{2}=$$
$$=\frac{-4\pm\sqrt{324}}{2}=\frac{-4\pm18}{2}$$

$x = 7$ o $x = -11$

Si completamos cuadrados, obtenemos (los mismos) dos valores:

$x^2+4x+4-4-77=0$
$x^2+4x+4=81$
$(x+2)^2=81$
$x+2=\pm9$
$x = 7$ o $x = -11$

Una vez resuelta la ecuación, volvemos al enunciado del problema para interpretar el resultado (paso 7), lo que nos lleva a rechazar el valor −11, ya que no tiene sentido que la tasa de venta sea una cantidad negativa. La tasa de venta es, por tanto, 7 l/gr. Como la tasa de compra es igual a la tasa de venta más el beneficio por unidad, b_{um}, que vale 4 l/gr, la tasa de compra será 11 l/gr. La compra se ha hecho pues a 11 litros por cada gramo de plata, y la venta se ha hecho a 7 litros por cada gramo de plata.

Lo que hace el matemático babilónico

El matemático babilónico comienza operando con dos datos, b_{um} y b_{td}:

> Tú coloca 4 litros de aceite y coloca el beneficio 4 gramos.
>
> Inverso de 40, 1´30´´, ves
>
> 1´30´´ por 4 multiplica, 6´, ves.

Parece que se pretende encontrar el valor de:

$$\frac{b_{um}}{b_{td}}=\frac{4}{40}.$$

La división en la matemática babilónica es una operación difícil, por lo que se hace buscando el inverso del divisor en una tabla de inversos, y multiplicando por él, para dividir 4 entre 40 pues, primero se calcula el inverso de 40 y luego se multiplica por 4.

Si pasamos del sistema sexagesimal al sistema decimal, podemos entender mejor las operaciones realizadas:

$$1'\,30''=\frac{1}{60}+\frac{30}{3600}=\frac{1}{60}+\frac{1}{120}=\frac{3}{120}=\frac{1}{40}$$

(Inverso de 40)

$$6'=\frac{6}{60}=\frac{1}{10}$$

$$1'30''\times4=\frac{1}{40}\times4=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}=6'$$

A continuación, el matemático babilónico multiplica el valor que ha obtenido por el otro dato del problema, la cantidad de aceite comprada y vendida, m.

> 6´ por 12`50, el aceite, multiplica, 1`17, ves.

Estas dos operaciones podemos ver que se derivan de la relación:

$$\frac{b_{td}}{b_{um}}=\frac{m}{t_v t_c}$$

que obtuvimos formalmente en el análisis del problema que hicimos en la primera entrega . En efecto, despejando $t_v t_c$, se obtiene:

$$t_v t_c=\frac{b_{um}}{b_{td}}\times m=6'\times12`50=1`17$$

Y expresando las cantidades en el sistema decimal, tenemos:

$$t_v t_c=\frac{b_{um}}{b_{td}}\times m=\frac{4}{40}\times770=77$$

Ya que, 12` 50 = 12 × 60 + 50 = 770 y 1`17 = 1 × 60 + 17= 77.

Éstas son efectivamente las operaciones que ha hecho el matemático babilónico, pero no parece razonable hacer la hipótesis de que las ha derivado de la relación indicada, ya que el matemático babilónico carece del lenguaje simbólico que nos ha permitido a nosotros derivar formalmente esa relación. Por otro lado, no cabe una derivación que no sea formal, es decir, hecha en un lenguaje más abstracto que el lenguaje vernáculo, ya que, por ejemplo, la cantidad $t_v t_c$ carece de sentido en la historia que narra el problema. Nosotros derivamos formalmente mediante transformaciones algebraicas esa relación a partir de las relaciones de proporcionalidad inversa que existen entre importes, tasas y beneficios, y de ellas obtuvimos además las relaciones de proporcionalidad:

$$b_{td} : b_{um} :: i_c : t_v :: i_v : t_c.$$

La derivación “formal” de esas relaciones que hace el matemático babilónico usa un lenguaje distinto del nuestro: las relaciones de proporcionalidad inversa $i_c \times t_c = m$ e $i_v \times t_v = m$ se pueden representar como dos rectángulos que tienen la misma área (figura 5).

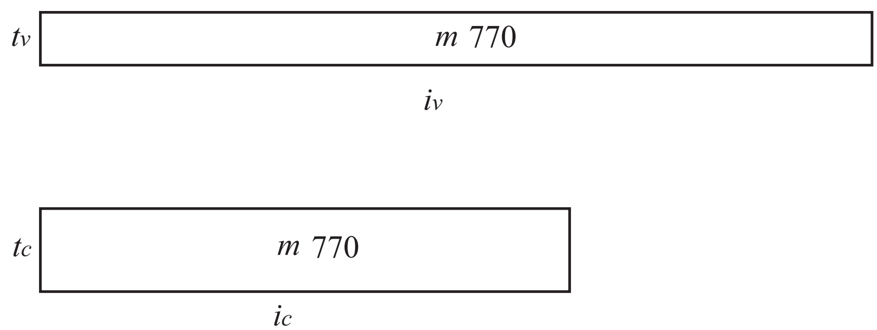


Figura 5

Si superponemos los dos rectángulos (figura 6) de manera que en sus lados se representen las relaciones $i_v = b_{td} + i_c$ y $t_c = b_{um} + t_v$, los rectángulos coloreados en rojo tienen la misma área, ya que ambos se han obtenido de los anteriores quitándoles el rectángulo de lados i_c y t_v, y por tanto $b_{td} \times t_v = b_{um} \times i_c$, o, expresado como una proporción, $b_{um} : b_{td} :: t_v : i_c$. Al tener esos rectángulos la misma área, los dos rectángulos superpuestos forman la figura que en la matemática griega se conoce con el nombre de gnomon[3], y el gnomon se puede completar rellenando la esquina para formar un rectángulo más grande (figura 7), en la que los rectángulos en torno a la diagonal son semejantes y semejantes al rectángulo grande, y los otros dos rectángulos tienen la misma área y se conocen con el nombre de paraplerómata. Al completar así la figura del gnomon, se ve también que t_c e i_v están también en la misma razón, de modo que $b_{um} : b_{td} :: t_v : i_c :: t_c : i_v$.

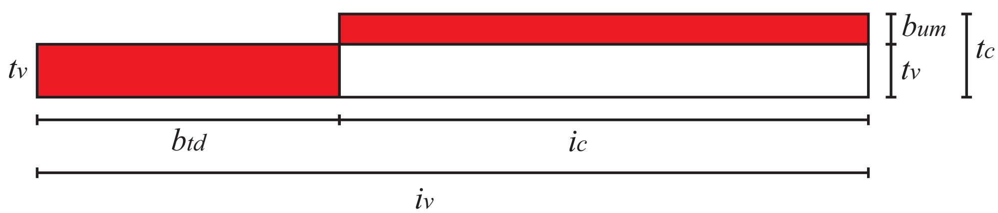


Figura 6

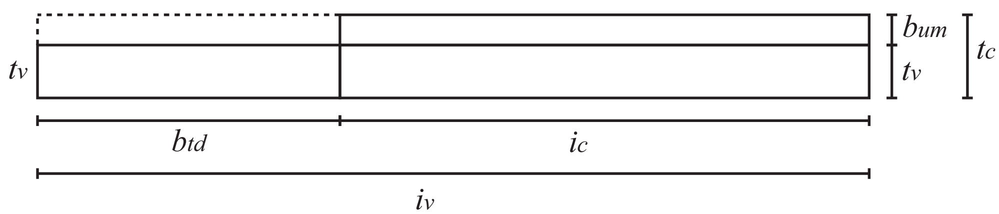


Figura 7

Esto nos da cuenta de cómo pueden darse sentido a las relaciones de proporcionalidad inversa y directa sin disponer del lenguaje del álgebra simbólica: mediante la representación en un lenguaje de lados y áreas de rectángulos. Una vez se tienen presentes esas relaciones, que, cuando no tienen sentido en la historia del problema, lo encuentran en las configuraciones geométricas, es posible desprenderse de los significados de la transacción mercantil y realizar operaciones en el lenguaje (más abstracto) de las configuraciones geométricas, buscando una configuración geométrica que ya se sepa cómo resolver. Esto es lo que podemos ver que hace el matemático babilónico, si representamos ahora las operaciones que ha hecho como la transformación de un rectángulo de lados t_v e i_v, y área, por tanto, *m*, conocida, en otro rectángulo de lados t_v y t_c, mediante un cambio de escala en una de sus dimensiones. El cambio de escala se puede hacer gracias a las relaciones de proporcionalidad que acabamos de considerar, y lo que se calcula es el área del nuevo rectángulo. El producto de t_v por t_c carece de sentido en la historia del problema, pero lo tiene en el sistema de signos al que se ha traducido el enunciado del problema: es el área de un rectángulo (figura 8).

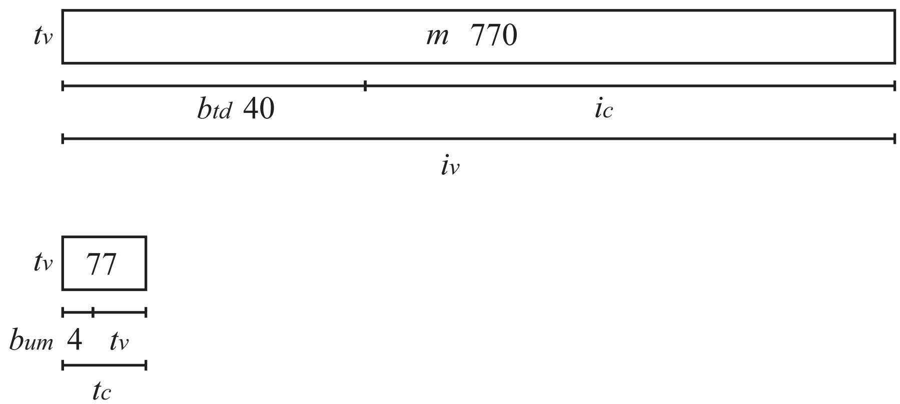


Figura 8

Además, la nueva configuración es canónica, en el sentido de que es una configuración para la que se tiene un algoritmo de solución: se trata de encontrar el largo y el ancho de un rectángulo del que se conoce su área y la diferencia entre el largo y el ancho. El matemático babilónico sabe que esa configuración se resuelve con el “método akadio”, que no es sino el precursor del procedimiento de completar cuadrados que hemos hecho nosotros en el sistema de signos del álgebra y que el matemático babilónico realiza cortando, desplazando y pegando rectángulos, así:

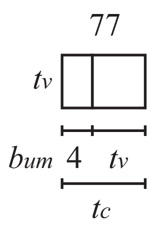


Figura 9

½ de 4 rompe, 2, ves

Se divide el rectángulo pequeño en dos rectángulos iguales

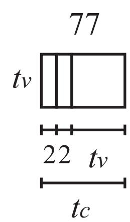


Figura 10

y se desplaza uno para formar un gnomon, tal como aparece en la figura 11.

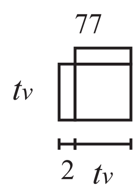


Figura 11

2 cuadra, 4, ves.

4 a 1`17 añade, 1`21, ves.

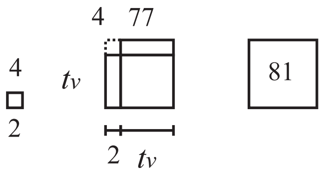


Figura 12

Se ha calculado pues lo que hace falta para completar el cuadrado. En el sistema decimal 1`21=60+21=81, luego 4+1`17 se convierte en 4 +47=81.

Si realizamos estas operaciones en las figuras, obtenemos un cuadrado de lado 2 + t_v y cuya área es 81, lo que equivale a resolver la ecuación $(x+2)^2 = 81$, equivalente a la anterior.

¿Cuál es el lado? 9 es el lado igual.

½ de 4, que has separado, rompe, 2, ves.

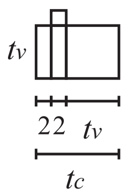


Figura 13

2 al primero añade, 11, ves. (t_c = 11)

Del segundo quítalo, 7, ves. (t_v = 7)

Luego la base del rectángulo es 11 y la altura 7.

11 litros cada gramo has comprado, 7 litros cada gramo has vendido.

En nuestra resolución del problema, terminamos aquí, pero el matemático babilónico aún continúa:

¿Plata equivalente a qué? ¿Qué a 11 litros [por gramo] puedo poner que 12`50 de aceite me dé?

Volviendo al planteamiento del problema y utilizando la relación $i_c \times t_c = m$ = 770 = 12`50, el matemático babilónico calcula el importe de la compra:

$$i_c = \frac{770}{t_c} = \frac{770}{11} = 70\text{gr.}$$

1`10 coloco 1`10 gramos de plata

En decimal, 1`10 = 1 × 60 + 10 = 70, lo que podemos representar en la figura 14.

¿Por 7 litros cada gramo de plata que vendes de aceite, los 40 gramos de plata a qué equivalen?

El beneficio, en la relación $b_{um} = t_c - t_v$ es 11 – 7 = 4 l/gr y expresa el beneficio por unidad de plata.

Con cualquiera de los productos iguales $b_{td} \times t_v = i_c \times b_{um}$ se puede obtener el beneficio expresado de otro modo. Lo que el matemático babilónico hace es

40 por 7 multiplica, 4`40, ves, 4`40 de aceite.

Es decir, 40 × 7 = $b_{td} \times t_v$ litros, que expresa el beneficio total en litros de aceite. El resultado que da está expresado en el sistema sexagesimal, su equivalente en decimal es:

4`40 = 4 × 60 + 40 = 240 + 40 = 280

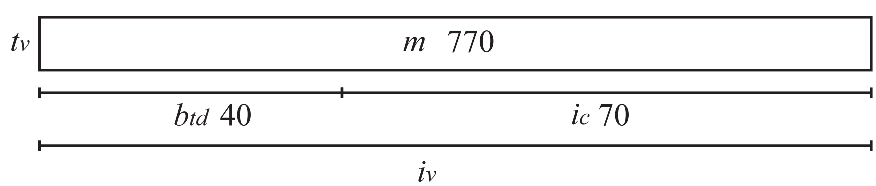


Figura 14

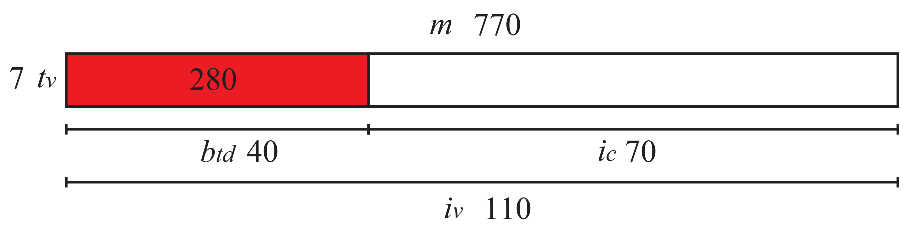


Figura 15

Y dicha ganancia en mercancía de 280 litros de aceite también se puede representar en el rectángulo en el área coloreada (Figura 15).

Parece pues que el matemático babilónico tienen también presentes en esta situación la cantidad “beneficio total expresado en mercancía”, que nosotros no hemos utilizado en nuestra solución, ni hemos pensado en calcular. Cabe pensar, a la vista de la representación en el rectángulo, que también esté presente la cantidad que se representaría en el resto del rectángulo, es decir, la que podríamos llamar cantidad de mercancía con la que se recupera la inversión (designémosla por m_r), de modo que también estarían consideradas las relaciones que se ven en el rectángulo $m_r = t_v \times i_c$ y $m = m_r + b_{tm}$.

Protoálgebra en Babilonia

La resolución nuestra, hecha según establece la competencia en el método cartesiano, y la resolución del matemático babilónico no son iguales; sin embargo, comparten algunos rasgos que caracterizan lo que hemos acabado llamando resolución algebraica de problemas.

Los cálculos que se hacen carecen de sentido en el contexto de la historia que narra el enunciado del problema en determinados momentos del proceso. Y esto se debe a que el problema se ha traducido a un sistema de signos (más abstracto) en el que se puede operar sin recurrir a fundar las operaciones en los significados de la historia que narra el problema. Esas operaciones, no obstante, no son sin sentido: adquieren su sentido en ese sistema de signos más abstracto. En nuestro caso en el mundo del álgebra, en el que los significados de las transformaciones algebraicas están fundados en los teoremas que establecen que esas transformaciones dejan las ecuaciones equivalentes. En el caso babilónico, en los significados asociados a las relaciones entre las áreas de las figuras que se cortan, desplazan y pegan, o se estiran o encogen según un factor de escala.

Además, esos cálculos se hacen con un sentido: transformar la ecuación (o la configuración) obtenida al traducir el enunciado al sistema de signos abstracto, a una forma canónica, ya que las formas canónicas ya se sabe cómo resolverlas mediante un procedimiento fijado por una fórmula o un algoritmo.

En ese sentido, podemos dar sentido al título que le hemos puesto a esta serie: lo que hace el matemático babilónico lo vemos desde nuestra álgebra simbólica como protoálgebra.

HISTORIAS ■

NOTAS

[1] Høyrup representa los números en el sistema sexagesimal indicando mediante el signo ` la posición 60, `` la posición 60^2, etc. y mediante el signo ´ la posición 60^{-1}, ´´ la posición 60^{-2}, etc., de modo que, por ejemplo 70'5 lo escribe 1` 10 30´.

[2] En Filloy, Rojano and Puig (2008) o en Filloy, Puig y Rojano (2008) se describe el uso de esos grafos para la representación de la red de relaciones entre cantidades, que se obtienen al analizar el texto del problema con el fin de traducirlo al sistema de signos del álgebra.

[3] El gnomon está definido en los *Elementos* de Euclides, libro II, definición segunda.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Filloy, E., Rojano, T., & Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. New York: Springer.

Filloy, E., Puig, L., & Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, *26*(3), pp. 327-342.

Høyrup, J. (2002). *Lengths, Widths, Surfaces. A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin*. New York: Springer.

Este artículo fue solicitado por SUMA en diciembre de 2009 y aceptado en mayo de 2010 para su publicación.

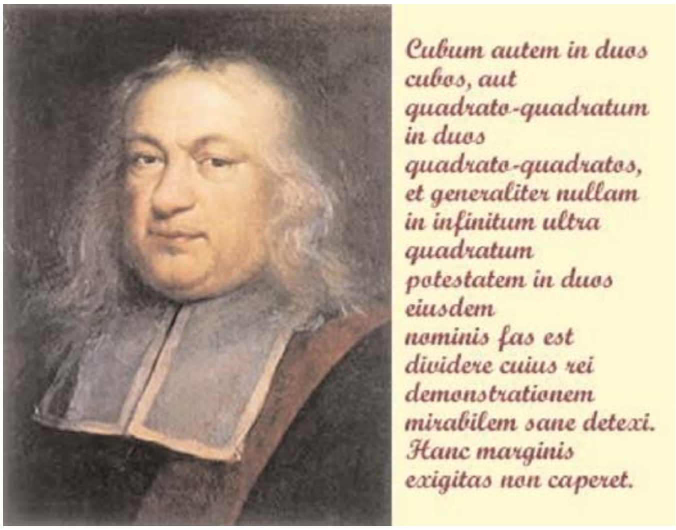
suma+ 64
Junio 2010, pp. 107-112

Pierre Fermat: la pasión por los números

Hace trescientos cincuenta años que Pierre Fermat dio a conocer a los colegas su *Teoría de números*, y decimos que dio a conocer, no que publicó, porque Fermat no publicó nada. Fue su hijo Samuel quien varios años después de la muerte del padre publicó sus principales escritos.

Pero, ¿quién era Pierre Fermat y cuál fue su aportación a las matemáticas? Dos importantes problemas hay planteados en torno a Fermat, el primero es el siguiente: ¿Se trata del verdadero fundador de la geometría analítica, o comparte la gloria con Descartes, como se suele considerar? El segundo problema se refiere al llamado último teorema de Fermat: ¿Poseía, como él asegura, una demostración maravillosa del teorema, o se trataba tan solo de lanzar el anzuelo a los otros matemáticos, a modo de reto, según era su costumbre?

Fermat vivió tiempos difíciles para Francia. Se hallaba el país recién salido de las "guerras de religión" entre católicos y protestantes, que habían culminado en la famosa noche de San Bartolomé de 1572 con la matanza de protestantes. Reinaba entonces Enrique IV, el pacificador del conflicto, que con el Edicto de Nantes concedía la libertad de culto a los protestantes, a la vez que establecía la separación de las comunidades católica y protestante en una serie de plazas de soberanía. Pero, asesinado Enrique IV en 1610, le sucedía Luis XIII, con el ministro Richelieu como favorito, cuya actuación, de nuevo en contra de los protestantes, daba lugar a la conocida Guerra de los Treinta Años. A la muerte del rey en 1643, le sucedía Luis XIV, el monarca absoluto, quien, con Mazarino de primer ministro, convertía a Francia en el árbitro y cabeza intelectual de Europa.



Fue el siglo XVII uno de los más grandes de la historia de la ciencia, y de la Matemática en particular: con Galileo y su telescopio (1609), Descartes y su *Discurso del método* (1637), Pascal y su *Ensayo sobre las cónicas* (1640), Kepler y su *Astronomía Nova* (1609), etc., por no hablar de Napier, Cavalieri, Desargues, Wallis, o, un poco posteriores, de Fermat, Huygens, L´Hôpital, Newton, Leibniz, etc.

Santiago Gutiérrez
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*
hace@revistasuma.es

En estas circunstancias políticas, sociales y culturales, transcurre la vida de Pierre Fermat, que había nacido en la localidad francesa de Beaumont-de-Lomagne, en 1601. No se sabe casi nada de los primeros años de su infancia y juventud, pero sin duda su padre, Dominique, un acomodado comerciante en pieles, hubo de ocuparse de que recibiera una sólida instrucción, quizá en el monasterio franciscano de Beaumont, ya que Pierre poseía excelentes conocimientos de lenguas clásicas, y dominaba los principales idiomas europeos de la época. Era un gran amante de la Literatura, llegando a escribir poemas en francés y español.

Estudió Leyes en la Universidad de Toulouse. Poco antes de 1630, se trasladó a Burdeos, donde, en 1629, dieron comienzo sus investigaciones matemáticas. Fue entonces cuando escribió su trabajo sobre máximos y mínimos. De allí pasó a Orleáns, en cuya Universidad se graduó en Leyes en 1631. Ese mismo año, obtuvo un puesto de magistrado en el Parlament de Toulouse, que era la Corte Suprema de Justicia. En Toulouse, también en 1631, contrajo matrimonio con Louise de Long, prima de su madre, de cuyo matrimonio tuvo tres hijos y dos hijas. En 1648 fue designado Consejero real, y en 1652 alcanzó el máximo nivel en la Corte Suprema.

…obtuvo un puesto de magistrado en el Parlament de Toulouse, que era la Corte Suprema de Justicia. Fue, pues, como matemático tan solo un aficionado.

Llevó una vida tranquila, dedicada a realizar escrupulosamente su tarea profesional, así como a cultivar su afición por la Literatura y las Matemáticas. Fue, pues, como matemático tan solo un “aficionado”, y nada menos que eso, pues dado lo ocupado que estaba con el ejercicio de su brillante carrera profesional, lo asombroso es que aún le quedara tiempo para entretenerse con su afición a las Matemáticas. Realmente, a comienzos del siglo XVII, casi todos los matemáticos eran aficionados, si bien no tan geniales como Fermat. De ahí que el matemático español Miguel de Guzmán llegara a calificarlo como el “príncipe de los matemáticos aficionados”.

Su objetivo no era publicar sino comunicarse con los científicos de la época. Para ello se valía directamente del correo o bien del fraile minimita Marin Mersenne, que se carteaba con muchos matemáticos de la época, y se convertía con eso en una especie de central de información matemática. Efectivamente, en cuanto Mersenne tenía noticia de alguna novedad inmediatamente la comunicaba a todo su círculo de matemáticos. Así, el siglo XVII fue importante en el desarrollo de la Matemática, no sólo por la cantidad de talentos de primera fila que lo llenaron, sino también y singularmente por la rapidez con que circulaba la información.

La geometría analítica

Pierre de Fermat era un hombre amable, nada orgulloso, de carácter constante, que contribuyó grandemente a la evolución de las Matemáticas en muy diversos campos. En todos ellos, sus trabajos han supuesto alguna innovación. En geometría analítica, los trabajos de Fermat surgen a partir de la obra de Apolonio sobre los lugares geométricos. Era frecuente, entonces, que los matemáticos trabajaran en la reconstrucción de las obras de los griegos cuando sólo se tenían noticias sobre ellas. En este caso, utilizando las referencias que daba Pappus en su *Colección matemática*, Fermat se dedicó a reconstruir el libro de los *Lugares planos* de Apolonio. Es así cómo descubrió, antes de 1636, el importantísimo principio fundamental de la geometría analítica:

> Siempre que en una ecuación final aparezcan dos cantidades incógnitas, tenemos un lugar geométrico, al describir el extremo de una de ellas una línea, recta o curva.

Aunque no publicó en su día semejante resultado y sólo se limitó a difundirlo en forma manuscrita, parece ser que su idea es anterior a la publicación de la *Geometría* de Descartes, en que este sienta las bases de la geometría analítica. Es muy posible incluso que Fermat hubiera llegado ya a la geometría analítica en 1629, pues por esta época, como dice Boyer, datan dos importantes descubrimientos, que están estrechamente relacionados con sus trabajos sobre los lugares geométricos. De uno de ellos, el que trata sobre el cálculo de los máximos y mínimos de una función, se habla más adelante.

En este sentido, se puede considerar a Fermat como el fundador de la geometría analítica. Se considera sin embargo que debe compartir este honor con Descartes, ya que éste llegó a conclusiones parecidas, desde una mayor amplitud de pensamiento, si bien ambos abordan el problema con enfoques diferentes. Lo cierto es que la geometría analítica tal y como hoy la conocemos se parece bastante más a la de Fermat (por cierto, es el primero que se vale de dos ejes perpendiculares), que a la de Descartes. A grandes rasgos, puede decirse que mientras Descartes parte de un lugar geométrico para obtener su ecuación, Fermat parte de una ecuación para obtener las propiedades de la curva que representa.

Hay que añadir que ambos matemáticos bebieron en fuentes más antiguas, sobre todo en Vieta, y que el sistema de representación de puntos mediante un par de coordenadas es, desde luego, muy anterior a ellos.

El método de máximos y mínimos

Uno de los primeros problemas que investigó Fermat en el año 1629 es el relativo al cálculo de máximos y mínimos. Su escrito, titulado *Methodus ad disquirendan maximan et minimam* (Método par hallar máximos y mínimos), se publicó, como se ha dicho, después de su fallecimiento, formando parte de su *Varia opera matemática,* en 1679. En él, aplica un ingenioso método para hallar los puntos en los que una función se encuentra en lo alto de una "cumbre" o en el fondo de un "valle". Para ello, considera el valor de la función en dos puntos próximos, $f(A)$ y $f(A+E)$, donde A representa a la variable. Si A y A+E son próximos a un máximo o a un mínimo $f(A)$ y $f(A+E)$ son adiguales (aproximadamente iguales). Hace entonces $f(A) = f(A+E)$, o sea, $f(A+E) - f(A) = 0$, divide esta ecuación por E, sustituye E por cero, resuelve la ecuación resultante en A, y las soluciones son los valores de A correspondientes a un máximo o a un mínimo.

Hay, en este método, una evidente intuición del proceso que hoy conocemos como "paso al límite", porque en realidad equivale a calcular:

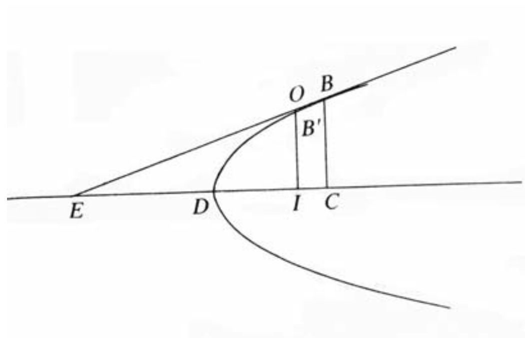
$$\lim_{E\to 0}\frac{f(A+E)-f(A)}{E}$$

Fermat hace un discurso muy típico de la época, como es el de primar la eficacia del resultado sobre el rigor del método. Más tarde, ya en el siglo XIX, esta forma de proceder tan poco rigurosa motivaría al mismísimo Abel a formular el plan de trabajo de su vida, según le comunicaba por carta a su maestro Christopher Hansteen:

> Quiero consagrarme con todas mis fuerzas a aportar un poco más de claridad a la prodigiosa oscuridad en que se encuentra hoy incontestablemente el análisis. Carece de plan y de sistema hasta tal punto que resulta verdaderamente maravilloso que pueda ser estudiado por tanta gente cuando nunca ha sido tratado rigurosamente.(…) En todas partes encuentra uno esa manera desafortunada de concluir lo general partiendo de lo particular, y es extremadamente peculiar que tal procedimiento, a pesar de todo, haya llevado a tan pocas de las así llamadas paradojas.

La diferenciación y la integración

El método de máximos y mínimos lo aplicó Fermat para determinar la tangente a la curva de ecuación $y^2=px$ en un punto B de la misma, tal como se indica en la figura.



Para todos los puntos de la parábola el cociente y^2/x es constante, mientras que para cualquier punto $O(x_t, y_t)$ de la tangente, el cociente entre el cuadrado de la ordenada y la abscisa, y_t^2/x_t es variable, y mayor que y^2/x, ya que, observando la figura, se tiene:

$$\frac{\overline{BC}^2}{\overline{DC}}=\frac{\overline{B'I}^2}{\overline{DI}}<\frac{\overline{OI}^2}{\overline{DI}}$$

es decir, $\dfrac{y^2}{x}<\dfrac{y_t^2}{x_t}$.

A medida que O se aproxima a B, más próximos serán los valores de ambos cocientes. Se trata entonces, según su método de máximos y mínimos, de encontrar el mínimo de y_t^2/x_t. Para ello, Fermat adiguala y^2/x y y_t^2/x_t. Llamando, para abreviar, CE = a, CD = b, CI = c, el proceso final se puede esquematizar así:

$$\frac{\overline{BC}^2}{\overline{DC}}=\frac{\overline{B'I}^2}{\overline{DI}}\Rightarrow\frac{\overline{EC}^2}{\overline{DC}}=\frac{\overline{EI}^2}{\overline{DI}}$$

por ser $\overline{BC}$ y $\overline{B'I}$ proporcionales a $\overline{EC}$ y $\overline{EI}$ respectivamente. Sustituyendo queda:

$$\frac{a^2}{b}=\frac{(a-c)^2}{b-c}\Rightarrow$$

haciendo al final $c = 0$ y despejando se obtiene: $a = 2b$. De este modo, se calcula la subtangente, y se determina así la tangente.

En cuanto a la integración, parece haberse inspirado Fermat en el *Tratado de los indivisibles* de Cavalieri, de 1635, al calcular el área encerrada por una curva de ecuación $y=x^m$. Cavalieri, como se sabe, no aclara qué entiende exactamente por indivisible. Considera, eso sí, que una superficie está constituida por rectas paralelas equidistantes, así como que un sólido está constituido por planos paralelos equidistantes. Llegó Cavalieri a la conclusión de que el área encerrada por la curva entre los valores $x = 0$ y $x = a$, viene dada por la fórmula:

$$\frac{a^{m+1}}{m+1}$$

pero sólo lo demostró para los exponentes $m = 1$ y $m = 9$.

Lo que hizo Fermat fue desarrollar un método que permite demostrar el resultado de Cavalieri para cualquier valor del exponente m, tanto entero como fraccionario.

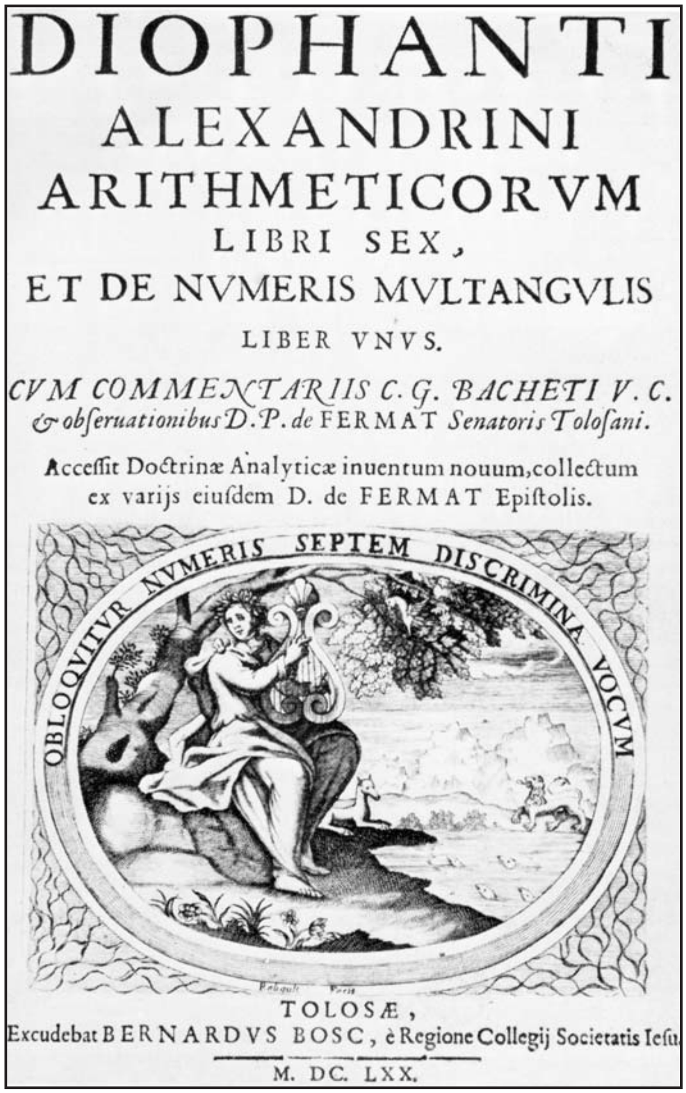
Para demostrar la mayoría de sus proposiciones, Fermat había ideado un método que denominaba de descenso infinito.

La teoría de números

Además de la geometría analítica y de los procedimientos infinitesimales para la determinación de tangentes o el cálculo de áreas, se interesó Fermat por las cuestiones del azar. De tal modo, en este último caso, que se le considera, junto con Pascal, como uno de los fundadores del cálculo de probabilidades.

Sin embargo, donde realmente brilló el genio de Fermat con luz propia es en la teoría de números, de la cual, se puede afirmar, es el fundador. Durante el siglo XVII, circulaba, como ya se ha dicho, una amplia y rápida correspondencia sobre los temas objeto de investigación de los matemáticos, de forma que no se tardaba en saber lo que hacía cada uno. Esto, propiciaba la participación de todos los interesados, aunque sólo fuera con pequeñas ideas o simplemente con críticas u objeciones que estimulaban la superación de los trabajos iniciales. Pero, ocurría así con todos los temas excepto con los referentes a los números. Debido a las traducciones existentes de los griegos, los matemáticos se inspiraban en sus ideas, especialmente en las de Arquímedes y Eudoxo, pero no pasaba lo mismo con las de Diofanto. Curiosamente, este matemático se apartaba de la corriente dominante en el mundo griego, esto es, de trabajar con el álgebra geométrica, para desarrollar, en cambio, el álgebra pura con la ayuda de símbolos. Parece ser que los temas propios de la matemática pura, sin aparentes posibles aplicaciones, no interesaban a los matemáticos de entonces.

Fermat, pues, contrariamente a sus colegas, se interesó por un libro titulado *Aritmética* de Diofanto, en la traducción de 1621 hecha por Bachet. Las cuestiones tratadas por Diofanto fascinaron a Fermat, como es el caso de los números perfectos y amigos, los números figurados, las ternas pitagóricas, la


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.

TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

divisibilidad… y, sobre todo, los números primos. Nadie era capaz de seguirle en sus investigaciones sobre estos temas. Así lo expresa Pascal en una carta:

> Buscad en otra parte quien os siga en vuestras invenciones numéricas; os confieso que me superan con mucho; no soy capaz más que de admirarlas.

A medida que iba leyendo el libro de Diofanto, se le iban amontonando las ideas y anotaba sus observaciones en los márgenes del libro, pero no siempre añadía las oportunas demostraciones. Hay que recurrir a la correspondencia para encontrar sus ideas tratadas con cierta extensión.

Para demostrar la mayoría de sus proposiciones, Fermat había ideado un método que denominaba de “descenso infinito”. Es una especie de inducción a la inversa. Si se quiere demostrar un proposición entre números enteros se supone la contraria, y se demuestra que si esta es cierta para algunos enteros también lo es para otros enteros inferiores a los anteriores. Pero este proceso, aplicado sucesivamente en sentido descendente, lleva a unos últimos enteros, dado que el conjunto de los enteros no es infinito en este sentido, y no podría aplicarse la propiedad a otros enteros inferiores, en contradicción con lo supuesto inicialmente.

Un ejemplo típico de aplicación del método de descenso infinito es la demostración de la irracionalidad de un número, por ejemplo, de $\sqrt{2}$:

Sea $\sqrt{2}=\frac{a_1}{b_1}$, donde a_1 y b_1 son dos enteros positivos tales que

$a_1 > b_1$, y $1<\frac{a_1}{b_1}<2$.

De la igualdad $\sqrt{2}+1=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$, sustituyendo una $\sqrt{2}$ por $\frac{a_1}{b_1}$

se deduce: $\sqrt{2}=\frac{2b_1-a_1}{a_1-b_1}$, donde ambos términos de la fracción,

$a_2=2b_1-a_1$ y $b_2=a_1-b_1$ son enteros positivos menores respectivamente que a_1 y b_1, como puede deducirse de las desigualdades $1<\frac{a_1}{b_1}<2$.

Se tiene entonces: $\sqrt{2}=\frac{a_2}{b_2}$.

Aplicando de nuevo y sucesivamente el mismo razonamiento a este resultado se llegaría a un último par de enteros sin posibilidad de un posterior descenso, por ser finita la serie de enteros en el sentido descendente. En contradicción con la hipótesis de partida.

Los trabajos de Fermat sobre teoría de números datan de 1639, año en que resuelve el siguiente problema:

> Sea la igualdad $x^2+2(a+b)x=a^2+b^2$, donde a y b son racionales. Demostrar que si x es una raíz, entonces es una diferencia de dos números inconmensurables.

Entre 1638 y 1644, se desarrolla el periodo más fecundo del talento de Fermat en teoría de números. Es en estos años cuando da a conocer las siguientes proposiciones:

1. Ningún triángulo rectángulo tiene por área un cuadrado.
2. Las ecuaciones $x^4+y^4=z^4$ y $x^3+y^3=z^3$ son irresolubles en términos de números enteros.
3. Ningún número de la forma $8k-1$ es cuadrado o suma de dos o tres cuadrados.
4. Todo número es la suma de tres números triangulares o más, de cuatro números cuadrados, de cinco números pentagonales,etc.

La demostración de que todo número entero es suma de cuatro cuadrados, por el método de descenso infinito, le satisfizo tanto que en carta a Roberval escribía:

> Confieso abiertamente que en la teoría de los números no he encontrado nada que me haya satisfecho más que la demostración de este teorema y me agradaría que usted intentara encontrarla, incluso si fuera sólo para decirme que yo valoro mi descubrimiento más de lo que se merece.

En su correspondencia, Fermat proporciona otros resultados interesantes de su teoría de números, como por ejemplo:

5. 2^{n-1} es compuesto si n es compuesto; si n es primo es congruente con 1 módulo $2n$, y sus divisores primos son de la forma $2nk+1$.

6. a^{p-1} es congruente con 1 módulo p, si p es primo.

7. Cuando $n = p^2 + q^2$ con p y q primos entre si, n no tiene divisores de la forma $4k - 1$.

Fermat además de aportar numerosas propiedades relativas a los números enteros sistematizó por primera vez la teoría de números, constituyéndola en un cuerpo de doctrina. Como dice acertadamente Oystein Ore, profesor de la Universidad de Yale:

> Fermat representa un punto focal en la historia de la teoría de los números; en su trabajo, las ramas radiales de los periodos anteriores fueron unificadas y su contenido recreado de una manera sistemática y enriquecida.

Nadie más se ocupó de tal asunto hasta dos siglos más tarde en que Gauss le da un nuevo espaldarazo, constituyéndose en el segundo punto focal de la teoría, que diría Oystein.

Fermat hace un discurso muy típico de la época, como es el de primar la eficacia del resultado sobre el rigor del método.

Quizá la popularidad de Fermat, en la actualidad reciente, se haya debido más a algo que no ha demostrado que a sus múltiples demostraciones. Se trata de su famosa conjetura. Fermat demostró, por supuesto utilizando el método de descenso infinito, que la ecuación $x^4 + y^4 = z^4$ no tiene soluciones enteras. (La demostración para $n = 3$ no ha aparecido en ninguno de sus escritos). De aquí se deduce que tampoco las tendrá para valores del exponente múltiplos de 4. Pero, fue aún más lejos en su afán generalizador y enunció que la ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene solución entera para $n > 2$. Es el único resultado que no figura en su correspondencia, y sólo sabemos que lo escribió en el margen del libro II, problema 8, de la *Aritmética* de Diofanto, que habla de la división de un cuadrado en suma de otros dos. Fermat expresó de esta manera su conclusión:

> Es imposible dividir un cubo en suma de otros dos o un bicuadrado en otros dos bicuadrados, en general una potencia cualquiera superior a dos en dos potencias del mismo grado; he descubierto una demostración maravillosa pero este margen es demasiado estrecho para contenerla.

Ha sido imposible, al menos hasta ahora, saber si realmente Fermat tenía esa demostración maravillosa o no, pero tal demostración no apareció por ninguna parte. ¿La habría escrito Fermat por algún sitio ya desaparecido? Es posible que después de su trabajo con las potencias 3 y 4, mediante el descenso infinito, intuyera una generalización para la potencia n, que no llegara a desarrollar bien por falta de tiempo, o bien porque se diera cuenta de alguna dificultad no prevista en su idea inicial.

El hecho es que el problema planteado por lo que sólo era una conjetura más de las realizadas por el genio, entretuvo a los matemáticos desde el siglo XVIII, en que Euler logró el primer paso demostrando el teorema para $n = 3$ (aunque con ciertas lagunas en su razonamiento), pasando por Dirichlet y Legendre que lo demostraron para $n = 5$, hacia 1820, y otros numerosos matemáticos, hasta el año 1995 en que Andrew Wiles con la ayuda de su antiguo discípulo Richard Taylor, logró una demostración para cualquier n que resultó ser definitiva (ocupaba 200 páginas!, de un número de la revista *Annals of Mathematics*, dedicado enteramente al teorema). Pero, como suele ocurrir en la ciencia y en la técnica, no solo entretuvo a los matemáticos desde el siglo XVIII hasta finales del XX, sino que los esfuerzos por conseguir esa demostración han sugerido algunas de las máximas creaciones del pensamiento matemático y las técnicas desarrolladas con ese motivo han contribuido notablemente a la solución de otros problemas.

Finalmente, Fermat continuó sus trabajos en Toulouse hasta 1663, en que regresó a Castres, donde murió en 1665. Años después de su muerte, en 1679, su hijo Samuel, publicaría los principales escritos de su padre bajo el título de *Varia Opera Matemática*.

HACE

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

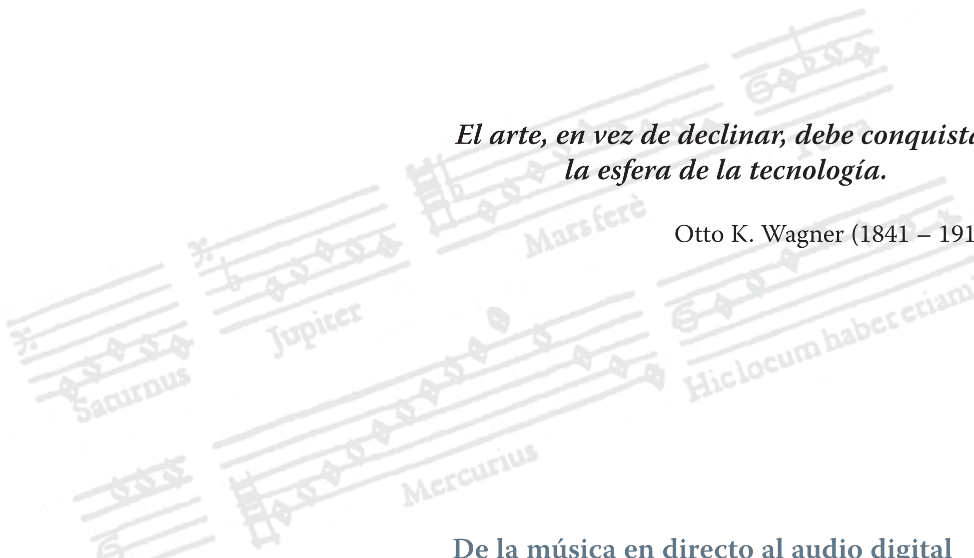
Torrecillas Jover, B. (1999): *Fermat. El mago de los números*. Madrid: Nivola

Collette, J-P. (1985): *Historia de las matemáticas II*. Madrid: Siglo XXI

Este artículo fue solicitado por SUMA en enero de 2010 y aceptado en marzo de 2010 para su publicación.

suma+ 64
Junio 2010, pp.113-118

Música e informática en las clases de matemáticas



El arte, en vez de declinar, debe conquistar la esfera de la tecnología.

Otto K. Wagner (1841 – 1918)

Ya hace dieciséis años que la revista *Suma* publicó el artículo *La música y sus materiales: una ayuda para las clases de matemáticas* (Liern, 1994). Desde entonces, los gustos musicales y los contenidos matemáticos de los diferentes planes de estudio han cambiado mucho, pero estos cambios resultan insignificantes si los comparamos con el tercer aspecto que trata el artículo: los materiales.

Es innegable que los estudiantes actuales conviven con la tecnología como nunca lo habían hecho anteriormente. De hecho, han incorporado a sus vidas el material electrónico con tal naturalidad, que a los que pertenecemos a otras generaciones sigue sorprendiéndonos (no sin cierta envidia) su destreza. Si la Música despierta un interés que podemos aprovechar para las clases de Matemáticas, los procesos tecnológicos que hay detrás de ella, pensamos que también pueden utilizarse en el mismo sentido.

La propuesta que hacemos en este trabajo es aprovechar los gustos y las habilidades de nuestros estudiantes para potenciar la comprensión de algunos conceptos que manejan en las clases de Matemáticas, intentando, en la medida de nuestras posibilidades, que dejen de percibir los contenidos de las clases como algo ajeno a sus vidas cotidianas.

De la música en directo al audio digital

El sonido se origina a partir del movimiento de los objetos, por ejemplo un diapasón que vibra al ser golpeado. El movimiento del diapasón genera cambios en la presión del aire que lo rodea. Esta presión, que varía con el tiempo, se propaga por el aire en todas las direcciones y cuando llega a otro objeto (por ejemplo, el tímpano) provoca que éste se mueva de la misma forma que lo hizo el diapasón, sólo que algo más tarde ya que la señal necesita un poco de tiempo para propagarse a través del aire. Así, podemos pensar en el sonido como en una presión que varía con el tiempo. Igual que sucede con las ondas que se producen cuando se tira una piedra en un estanque, las ondas de sonido van debilitándose en amplitud conforme van alejándose de su punto de origen.

José L. Godofredo Pérez
Conservatorio Superior de Música de Valencia "Joaquín Rodrigo"
Teresa León Mendoza
Vicente Liern Carrión
Universitat de València Estudi General
musymaticas@revistasuma.es

El sonido, como la luz o la energía, es una señal que tiene una variación continua; se trata, por tanto, de una señal analógica que se puede representar mediante una función matemática continua del tiempo, $f:[0,T]\to R^{+}$. Esta función se puede discretizar simplemente observándola en una sucesión finita de puntos, $\{f_k\}_{k=1}^{N}$, y está claro que cuantos más puntos elijamos, más se parecerán la función y la sucesión.

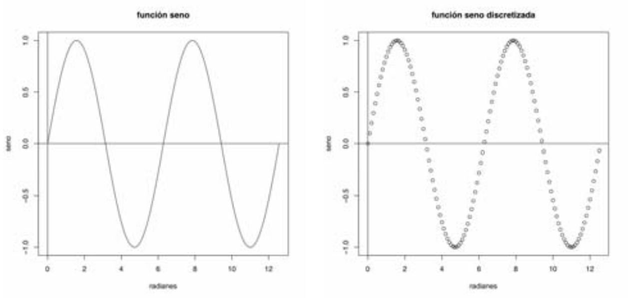


Gráfico de una discretización de la función seno

El audio digital es la representación de señales sonoras mediante un conjunto de datos binarios. Un sistema completo de audio digital comienza habitualmente con un transceptor (micrófono) que convierte la onda de presión que representa el sonido en una señal eléctrica analógica. Esta señal analógica atraviesa un sistema de procesado analógico de señal, en el que se puede realizar algunas transformaciones para que se asemeje mucho más a la señal audio original.

> *...podemos mostrar al estudiante que analizar la periodicidad de una función no sólo es útil para conocer una de sus cualidades (que permite, por ejemplo, dibujarla con más facilidad), sino que en esta propiedad radica la esencia de la música que escuchamos todos los días.*

Tras el procesado analógico, la señal se muestrea, se cuantifica y se codifica. El muestreo toma un número discreto de valores de la señal analógica por segundo (*tasa de muestreo*) y la cuantificación asigna valores analógicos discretos a esas muestras. La codificación asigna una secuencia de bits a cada valor analógico discreto.

La tasa de muestreo es el número de muestras por unidad de tiempo, generalmente se mide en Hercios o kHz (muestras o miles de muestras, respectivamente, por segundo). Por ejemplo, para tener la calidad de un CD comercial se realiza un muestreo a 44,1 kHz. La telefonía por Internet por lo general tiene velocidades de muestreo de alrededor de 8 kHz. A medida que aumenta la frecuencia de muestreo, mejora la calidad del sonido, sin embargo para el oído humano no tiene demasiado sentido emplear frecuencias de muestreo muy superiores a 40 kHz.

En cuanto a los valores muestreados de la función, éstos se almacenan en el ordenador como enteros, siendo habitual, hasta hace bien poco, adjudicar 16 bits a cada valor. Sin embargo, hoy en día, con la mejora de los equipos informáticos, ya se utilizan 64 bits para aparatos de gran calidad.

El sistema de audio digital suele terminar con el proceso inverso al descrito. A partir de la representación digital almacenada se obtienen el conjunto de muestras que representan. Estas muestras pasan por un proceso de conversión digital-analógica proporcionando una señal analógica que tras un procesado (filtrado, amplificación, ecualización, etc.) inciden sobre el transceptor de salida (altavoz) que convierte la señal eléctrica en una onda de presión que representa el sonido.

Esquema del sistema de audio digital

La tasa de muestreo y el número de bits por muestra son dos de los parámetros fundamentales a elegir cuando se quiere procesar digitalmente una determinada señal de audio. Para comprobar la influencia que tienen en la calidad del proceso la tasa de muestreo y el número de bits utilizado, podemos escuchar (en http://www.music.informatics.indiana.edu/courses/I547) el mismo fragmento del segundo movimiento del Concierto para oboe de Mozart con diferentes profundidades de bits y frecuencias de muestreo.

Veamos a continuación algunos ejemplos prácticos de los procesos que hemos descrito.

La sustitución eventual del intérprete: el sampleado

Hace poco más de dos décadas era impensable que un músico pudiera disponer en su casa de herramientas técnicas que le permitieran hacer uso de los instrumentos de la orquesta, de un grupo de pop o de cualquier sonido de la naturaleza que podamos imaginar. En la actualidad, el músico cuenta con herramientas informáticas sencillas y asequibles de las que, a continuación, daremos algunos ejemplos.

En la primera mitad del s. XX, K. Stockhausen (1928 – 2007) inició una corriente, dentro del ámbito de la vanguardia clásica, en la que las composiciones incluían elementos sonoros de instrumentos electrónicos y acústicos, al estilo se le denominó *Música electroacústica*. Sin embargo, hubo que esperar hasta la década de los setenta para que grupos como *Kraftwerk* ('central energética' en alemán) comenzaran a utilizar en sus composiciones los primeros *sintetizadores*, instrumentos de teclado en los que el sonido producido era generado a partir de componentes electrónicos. Desde entonces, la industria electrónica no ha parado de innovar en busca de mejores resultados, tanto en la reproducción del sonido como en su grabación. Aunque hoy en día los primeros sintetizadores han quedado obsoletos, siempre hay quien desea desempolvarlos y utilizarlos, por nostalgia quizá.

Algo más tarde que los sintetizadores surgieron los *samplers* (muestreadores). Su aparición a mediados de los ochenta, introdujo una nueva perspectiva en la fabricación de aparatos musicales electrónicos puesto que se abría un nuevo campo de aplicaciones y prestaciones.

Imagen de un sampler sin teclado

Los samplers son capaces de tomar muestras de cualquier fuente sonora, a través de un micrófono o bien, reproduciendo bibliotecas de samplers, realizadas en estudios de grabación en las mejores condiciones y que luego se comercializan, para que los usuarios puedan tener muestras de cualquier instrumento acústico o electrónico. Con esto, el compositor tiene la posibilidad de escuchar su creación con el timbre de los instrumentos que intervienen en su obra. Desaparece así el inconveniente de algunos compositores antiguos, que nunca oyeron su obra porque no hubo ninguna agrupación orquestal que tuviese interés por montar y estrenar su composición.

El sampler tiene la cualidad de grabar muestras de notas, por ejemplo, de un chelo y asignar dichas notas a la octava correspondiente en el teclado. Desde luego, a pesar de lo que pudiera parecer, la idea no consiste en grabar todas las notas que puede producir un chelo, sino que, se graban algunas y a partir de ellas se obtiene el resto. La razón por la que se hace así es que con ello se consigue reducir sustancialmente el uso de memoria.

Las notas contiguas a las que se han muestreado se obtienen de la muestra más cercana, aumentando o disminuyendo la frecuencia sonora de la muestra. Por ejemplo, grabando tres notas por octava (que pueden ser el Do, Fa, La) pueden obtenerse el resto de notas con buena calidad. El proceso, que se esquematiza en el gráfico, es el siguiente:

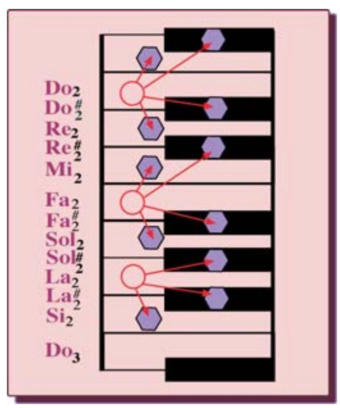
1. Se muestrea el Do_2 de la cuarta cuerda del chelo y se asigna a la tecla y octava correspondiente del teclado.

2. Las notas $Do^{\#}_2$ y Re_2 se consiguen a partir de la nota Do_2 muestreada, ya que el propio aparato aumenta la frecuencia (medio tono y un tono respectivamente) y se la asigna a las teclas $Do^{\#}_2$ y Re_2, sonando perfectamente afinadas.

3. A continuación obtenemos una muestra de la nota Fa_2 y la asignamos a su correspondiente octava y tecla.

4. Las notas $Fa^{\#}_2$ y Sol_2 se obtienen al aumentar medio tono y un tono el Fa. Si además disminuimos medio tono y un tono se obtienen, respectivamente, las notas $Re^{\#}_2$ y Mi_2. Posteriormente se asigna a cada nota una tecla.

5. Repetimos el proceso grabando el La_2 y generando las notas $La^{\#}_2$, Si_2 y $Sol^{\#}_2$.



Esquema del funcionamiento de un sampler. Las circunferencias representan las notas grabadas y los hexágonos las notas que se obtienen subiendo o bajando las anteriores

Los sonidos obtenidos al aumentar o disminuir una muestra, no tienen la misma calidad que la propia muestra, pero mientras que no se aumente o disminuya más de un tono, el sonido queda tímbricamente aceptable, además de perfectamente afinados. A partir del tono el sonido pierde calidad y se desvirtúa. De este modo, tomando tres o cuatro muestras por octava el resultado puede quedar bastante real. Lo ideal sería tener una muestra por cada nota de la octava, pero esto implicaría una cantidad de memoria elevada y haría que el aparato fuese lento y muy costoso.

Respecto a la *frecuencia de muestreo* y la *profundidad de bits* a la que hacíamos referencia en el apartado anterior, los sampleadores han pasado en pocos años de los 8 bits, y una frecuencia de 44.1 kHz a los 64 bits lineales y una frecuencia de muestreo de hasta 192 kHz. Con estas características, los sonidos que se obtienen son de una calidad suficiente como para que se utilicen habitualmente en la música pop tanto para realizar grabaciones en estudios como para ofrecer conciertos en directo.

El compositor tiene la posibilidad de escuchar su creación con el timbre de los instrumentos que intervienen en su obra.

Actualmente los samplers se comercializan con o sin teclado físico y tanto en hardware como en software. Estos últimos, al manejarse desde el ordenador, permiten escribir música y hacer que se *disparen* los sonidos a partir de un programa apropiado (Cubase, Protools, Logic...) que está en el mismo ordenador en el que se almacenan las muestras sonoras. Sin embargo, en conciertos en directo, sigue utilizándose un teclado maestro (que sustituye al programa de escritura musical) que conectado al ordenador, dispare las muestras sonoras.

A pesar de que creemos que con estos ejemplos se puede ver la gran utilidad de la tecnología en la música, no nos gustaría dar la impresión de que por interesantes que resulten los procesos informáticos y matemáticos, sólo podemos participar de ellos como espectadores. Lo cierto, es que en las clases de matemáticas podemos realizar prácticas sobre estos temas que pueden resultar atractivas y formativas para nuestros alumnos. A continuación veremos algunas de ellas.

Ruido frente a música

La distinción entre música y ruido, que se intenta explicar desde los primeros cursos de Música, no es clara y depende de la sociedad en que se analice. Puede suceder que algunas personas consideren como ruido lo que otras personas consideran como música e incluso pueden aparecer mezclados voluntariamente. Por ejemplo, el timbre de bicicleta aparece en la canción *Bicycle race* del grupo británico Queen.

¿Cuál es la diferencia esencial entre música y ruido? Para describirla, a continuación representamos las ondas que se producen al golpear una bola de béisbol y al reproducir un fragmento de *Guárdame las vacas*, en la versión de Luis de Narváez (aprox. 1500 -1550), interpretado con una vihuela.

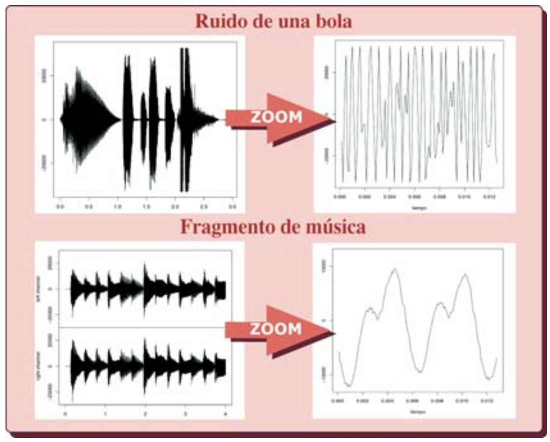
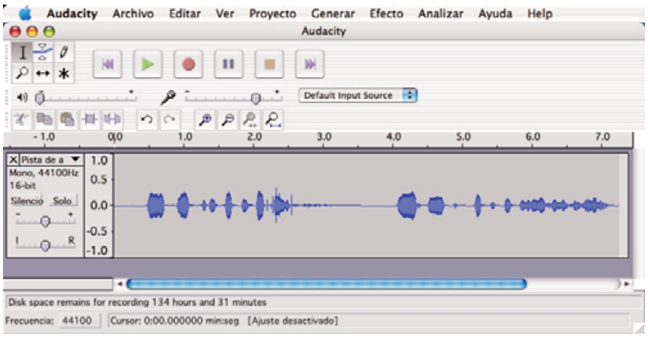


Gráfico de las ondas sonoras producidas por ruidos y música

La primera diferencia es que los ruidos están grabados en mono (sólo hay un canal por el que nos llega el sonido) mientras que la música lo está en estéreo (nos llega por dos canales, izquierdo y derecho), sin embargo eso no es lo que marca la diferencia más importante. Si ampliamos con más detalle un fragmento de las ondas que aparecen a la izquierda de la gráfica encontramos la característica fundamental que distingue ambas ondas: para la música la función es periódica, mientras que para el ruido no es así.

A partir de este ejemplo podemos mostrar al estudiante que analizar la periodicidad de una función no sólo es útil para conocer una de sus cualidades (que permite, por ejemplo, dibujarla con más facilidad), sino que en esta propiedad radica la esencia de la música que escuchamos todos los días.

En el aula podéis hacer prácticas con el programa Audacity® que funciona con Windows, Macintosh, Linux y se puede descargar de forma gratuita[1]. El programa es sencillo de manejar, está parcialmente en castellano y entre sus herramientas está la posibilidad de grabar sonidos o importarlos de un archivo, por ejemplo de un CD, analizar las frecuencias o realizar un zoom de las ondas sonoras.



Pantalla del programa Audacity®

Si somos capaces de que el alumno compruebe que las ondas que aparecen con este u otro programa no son más que un caso particular de las gráficas de funciones que explicamos en clase, estamos dando un paso más en la labor de convencerlo de que las Matemáticas están presentes en su vida cotidiana. Pero no es ésta la única utilidad del ejemplo. El hecho de que la música requiera que las funciones sean periódicas, nos va a permitir que seamos capaces de crear notas con algunos conceptos vistos en clase.

Construyendo notas musicales en clase de Matemáticas

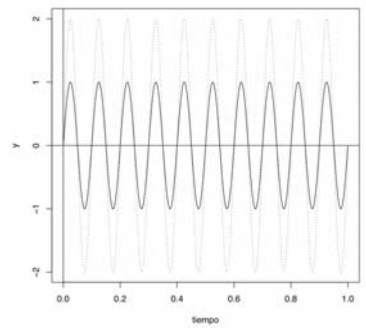
Jean Baptiste Fourier (1768-1830) demostró que toda función periódica se puede expresar como suma de funciones de amplitudes y fases iniciales conocidas. En concreto, un sonido musical está formado por la suma de varias funciones sinusoidales cuyas frecuencias son múltiplos enteros de una frecuencia fundamental. A estas ondas se les llama fundamental y armónicos. La frecuencia más baja es la fundamental y es la frecuencia a la que la onda completa vibra. Los armónicos vibran más deprisa que el tono fundamental y lo hacen con múltiplos enteros del fundamental para que la onda final tenga el mismo ciclo.

Los armónicos son los que dan lugar al timbre característico de una fuente de sonido y permiten diferenciar una fuente sonora de otra. Así por ejemplo, si un trombón y un piano interpretan un Re_3, a pesar de que la onda fundamental sea la misma (la que produce el Re_3), el resto de armónicos nos permiten distinguir entre el sonido del trombón y del piano.

Teniendo en cuenta esta idea, en el aula podemos construir notas musicales y, si disponemos de ordenadores y altavoces, podemos escuchar el resultado de nuestra construcción.

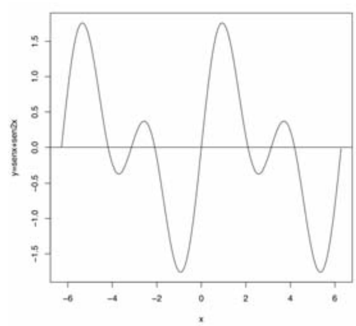
Como la función $sen(t)$ es una función periódica que completa su ciclo cada 2π radianes, si el tiempo t se mide en segundos, $sen(2\pi t)$ oscila una vez por segundo, $sin(2\pi 2t)$ oscila dos veces por segundo y $sen(2\pi ft)$ oscila f veces por segundo.

Si consideramos $sen(2\pi 440t)$ estaremos creando una nota pura de 440 Hz (el La con el que afinan las orquestas). Tanto desde el punto de vista matemático como el musical, resulta interesante que el alumno distinga entre $sen(2\cdot 2\pi 440t)$ y $2sen(2\pi 440t)$. En el primer caso estamos produciendo una nota que es una octava más alta que sen($2\pi 440t$), pero no hemos modificado su intensidad sonora, mientras que en el segundo caso la altura es la misma y sólo se modifica la amplitud de la onda, por tanto ahora sonará más fuerte.



Representación de las funciones $sen(2\pi ft)$ y $2sen(2\pi ft)$

Como sabemos, en general, un sonido musical no está producido por ondas puras, sino que está constituido por vibraciones periódicas no sinusoidales, por tanto resulta conveniente que construyamos funciones que se puedan descomponer como suma de varias funciones sinusoidales. Por ejemplo, podemos reducir la onda a dos sumandos $y=sen(x)+sen(2x)$. La onda producida es la que se muestra en el gráfico.



Representación de una función periódica no sinusoidal, $y=sen(x)+sen(2x)$

Si añadimos más sumandos y además los multiplicamos por diferentes valores, por ejemplo

$$y = 3sen(2\pi 440t) + 0.8sen(2\pi \times 2 \times 440t) + 3sen(2\pi \times 3 \times 440t)$$

estamos construyendo notas que cada vez se parecen más a las que producen los instrumentos musicales.

Para poder escuchar los sonidos que hemos creado debemos recurrir a programas informáticos que tengan esta opción. Por ejemplo, usando la función *sin( )* incluida en la librería tuneR del programa[2] R se pueden generar diferentes ondas sinusoidales. O si se prefiere, con el programa Mathematica® basta con escribir

Play[Sin[2*Pi*440*t], {t, 0, 2}]

para que suene una frecuencia de 440 Hz durante 2 segundos.

Podéis encontrar muchos más ejemplos en la página creada por el profesor C. Raphael de la Universidad de Indiana http://www.music.informatics.indiana.edu/courses/I547/.

Para acabar, nos gustaría hacer una última reflexión acerca de la polémica tecnología *versus* arte. No querríamos dejar la falsa impresión de que la Informática o las Matemáticas pueden sustituir al artista, en este caso el músico. Hay que pensar que la interpretación humana está tan llena de matices y rasgos expresivos, que para recogerlos sería necesario almacenar tal cantidad de información que excedería con mucho la memoria que podemos manejar. Por ejemplo, en la cuerda frotada están el *staccato*, el *legato*, el *pizzicato*, etc. y esto junto con las características propias de cada instrumento, de cada estado anímico o de cada sala... en definitiva, que el proyecto resultaría inviable. Sin embargo, debemos ver en la informática una aliada, tanto del músico como del profesor de Matemáticas, ya que con ella se pueden conseguir con menos dificultad resultados que hace poco tiempo resultaban impensables.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por los proyectos de investigación TIN2008-06872-C04-02 y TIN2009-14392-C02-01 del Ministerio de Ciencia e Innovación.

MUSYMÁTICAS ■

NOTAS

1 Audacity® puede descargarse por ejemplo en http://audacity-portable.softonic.com/descargar#pathbar.

2 El programa R puede bajarse de forma gratuita desde http://cran.r-project.org y funciona con Windows, Macintosh y Linux

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Benson, D. (2006). *Music: a Mathematical Offering*, Cambridge: Cambridge University Press.

Liern, V. (1994). La música y sus materiales: una ayuda para las clases de matemáticas. *Suma*, 14/15, pp. 60– 64.

Randel, D. (1999): *Diccionario Harvard de música*. Madrid: Alianza Editorial.

Raphael, C. (2010): *Class Notes for Music Information Processing: Audio*. Bloomington: Ed. Indiana University.

Internet

http://cran.r-project.org
http://en.wikipedia.org/wiki/Digital_Audio
http://www.wolfram.com/
http://www.music.informatics.indiana.edu/courses/I547/

Este artículo fue solicitado por SUMA en enero de 2010 y fue aceptado en mayo de 2010 para su publicación.

suma+ 64
Junio 2010, pp. 119-123

Metáforas matemáticas

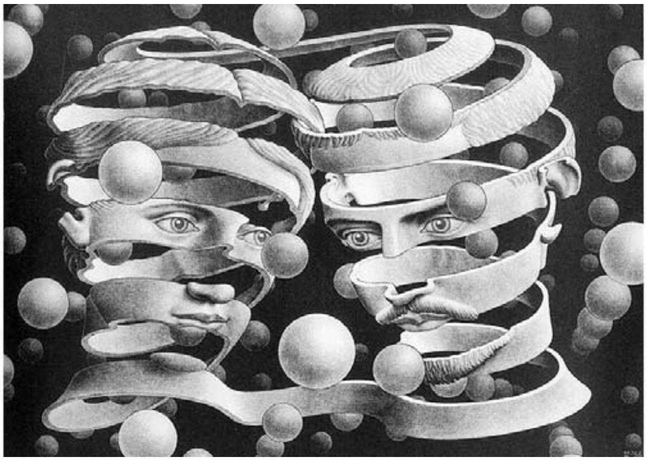
Las Matemáticas describen aspectos de la realidad mediante abstracciones: cantidades, figuras, relaciones… todas ellas sujetas a definiciones formales unívocas, sin lugar al doble sentido. Sin embargo, desde la creación artística, en algunos casos lo matemático alcanza un valor simbólico o metafórico, sirviendo a otros fines expresivos alejados de su objeto original de estudio.

En Literatura tenemos un ejemplo reciente: el título de la novela *La soledad de los números primos* (Paolo Giordano. Salamandra. Barcelona 2009). Al igual que dos números primos gemelos nunca son consecutivos, pues entre ellos siempre hay un número par, los protagonistas Mattia y Alice están así, solos y perdidos, próximos pero no lo bastante para superar esa insalvable separación. Aparte de ello, ninguna relación de la novela con las Matemáticas.

A veces el poeta usa imágenes matemáticas. Escribía Jesús Munárriz (1940): “Dos cuerpos paralelos en un lecho se encuentran en el infinito”. También, en el campo de los aforismos. Así, decía León Tolstoi (1828-1910): “Una persona es como una fracción cuyo numerador corresponde a lo que es, en tanto que el denominador es lo que cree ser. Cuanto mayor es el denominador, tanto más pequeño es el valor de la fracción”.

En Escultura se da el uso de formas geométricas con valor simbólico, como en el *Monumento a la Constitución Española* en Zaragoza (Florencio De Pedro. 1989): tres pirámides triangulares oblicuas, los tres poderes del estado, custodian una esfera, la Constitución de 1978. Estas formas geométricas plasman las ideas de perfección y armonía del sistema democrático y se alzan sobre una roca rugosa que simboliza las bases humanas que la hacen posible.

En Pintura hay ejemplos múltiples. Fijémonos en la litografía *Banda sin fin* (*Bond of union*. Maurits Cornelius Escher. 1956). El propio autor la explica así: “Dos espirales se unen para formar, a la izquierda, una cabeza femenina y, a la derecha, una masculina. Como banda sin fin que entrelaza las dos frentes, representa la unidad de lo dual. La impresión de corporeidad la refuerzan unas esferas que flotan enfrente, detrás y dentro de los huecos rostros[1]”.



José María Sorando Muzás
IES Elaios, Zaragoza
decine@revistasuma.es

El Cine explora y combina múltiples recursos expresivos: la interpretación, la iluminación, los decorados, el encuadre, la música, el montaje, por supuesto las voces y diálogos. Dentro de éstos también encontramos metáforas matemáticas que veremos en dos claves: amorosa y existencial. Y también a veces las hay en los propios títulos de las películas, como sucede en dos recientes, ambas orientales: *Aquiles y la tortuga* (Takeshi Kitano. 2008) y *La ecuación del amor y la muerte* (Cao Baoping. 2008). En la primera, un pintor, empeñado en sacar a flote su escondido talento, debe aceptar que hay cosas que están fuera de su alcance; al igual que, según Zenón, le ocurriría a Aquiles en su carrera con la tortuga. En la segunda, una taxista busca sin descanso por las calles de Pekín a su novio desaparecido; hay amor y muertes, pero ningún equilibrio con atisbos algebraicos. En el Cine las cosas no son lo que parecen, ni siquiera los títulos.

Metáforas del amor

De la inocencia al deseo

Quiéreme si te atreves (*Jeux d´enfants.* Yann Samuell. 2002) narra la singular historia de amor de Sophie y Julien, una pareja que desde la infancia hasta el final (que no se debe desvelar)

basa su complicidad en una serie de retos transgresores. Con la pregunta *¿Te atreves?* cada uno va sometiendo al otro a pruebas que saltan las convenciones sociales, incluso dañándose, manteniendo ese espíritu lúdico infantil pese al transcurso de los años. Su amor se expresa como un juego permanente en el que cada uno demuestra ser capaz de cualquier cosa por el otro, sin llegar a decirse *te quiero.*

Las Matemáticas son utilizadas en metáforas de diferentes estadios amorosos en dos escenas. En el primer encuentro, siendo niños, se plasma la inocencia a través de un "diálogo aritmético". Julien grita al vacío preguntando la tabla de multiplicar del 7, hasta que desde un edificio surgen las respuestas de Sophie. Éstas reconfortan a Julien y poco a poco los tonos de voz de ambos se suavizan y adquieren ternura.[2 y 3]

En otro momento, un Julien veinteañero pasa su brazo sobre el hombro de una compañera que está estudiando y se produce el siguiente diálogo:

> –¡Funciones vectoriales! ... v_1 por v_2 es igual al producto de sus dos módulos multiplicado por el coseno del ángulo que forman.
>
> –¡Hum! Te veo muy puesto en funciones vectoriales. Díme si me equivoco [mientras ella pasa su mano por el muslo de Julien y le mira la entrepierna]: tu vector está definido por un origen, pero sobre todo por una hinchazón orientada en un espacio vectorial.
>
> –Ciertos espacios vectoriales son más atractivos que otros...
>
> –¿Crees que podrías profundizar en la teoría conmigo?
>
> –Podría ser exponencial…
>
> –¿Sueles repasar tú solo? [Julien asiente] Puedes quedarte ciego o sordo… [2 y 3]

De las tablas de multiplicar al producto escalar de vectores; de la inocencia al deseo.

El amor como ecuación

En *Nada es perfecto* (*Nothing is perfect*), episodio 41 de la serie *Dr. en Alaska* (3º de la 4ª temporada), Chris Stevens, locutor de radio en el perdido poblado de Cicely, atropella y mata accidentalmente al perro de Amy Lochner, matemática que está investigando en la búsqueda de pautas entre los decimales del número π, con una ambición no sólo matemática, sino también metafísica. Varias veces vemos cómo la pantalla de su ordenador de llena de cifras. Chris se enamora enseguida de ella y se compromete a cuidar de sus otras mascotas, pero fatalmente se le muere un periquito. Cuando Amy lo descubre, se desarrolla entre ambos este diálogo:

> – ¿Me odias?
>
> – No
>
> – ¿Y por qué matas a mis animalitos?

– Es una buena pregunta para la que no tengo una respuesta fácil.

– ¿Esto va a continuar?

– No lo sé, Amy. No sé si esto es una pauta o es un simple azar. ¿Está el futuro grabado en una piedra o creamos nuestro propio destino? No lo sé. Sólo sé que no quiero perderte.

– Ni yo a ti tampoco. Pero esto es un problema. Estas mascotas son mías, no tuyas. En mí caen las pérdidas y no me gusta el papel de víctima. Porque si continuo siendo agredida...

– Terminarás por odiarme.

– Unas relaciones sanas son como una ecuación. Debe ser igual por ambas partes.

– Uno más uno son dos.

– Si queremos que esta relación funcione...

– Habrá que igualar la ecuación.

En la escena clave, para salvar su amor Chris va a igualar la ecuación sacrificando algo muy querido para él. No contaremos más a los lectores, pero sí advertimos a Chris que 1 + 1 = 2 no es una ecuación sino una identidad. Termina el episodio con su disquisición en el programa radiofónico acerca de si la vida se rige por el azar o por un modelo sistemático. En esta ocasión él ha optado por un modelo algebraico.[3]

El amor arriesgado

Tu nombre envenena mis sueños (Pilar Miró. 1996) adapta la novela de Joaquín Leguina. En ella Ángel Barciela es un policía, antes estudiante y después profesor de Matemáticas, que investiga un triple asesinato acaecido tras la Guerra Civil. En el curso de las pesquisas conoce a Julia Buendía, mujer independiente, atrevida para su tiempo, y quedan enamorados. En un baile Ángel explica a Julia qué es una cinta de Moebius y su sorprendente propiedad:

> ... si pasas el dedo por un solo lado de la cinta, al dar la vuelta entera te encuentras en el otro lado.

Viven con riesgo una historia apasionada en un tiempo convulso y peligroso. Al final, Ángel medita (voz en off):

> La solución del enigma que representaron aquellas tres muertes consistía en pasar al otro lado de la cerca, en descubrir el lado oculto y ver lo que hay detrás, aunque detrás de la valla se encuentre el vacío, como en Matemáticas. ¿Te acuerdas? Anduvimos juntos sobre una cinta de Moebius y pasamos al otro lado de la cinta, al vacío.[4]

Metáforas existenciales.

La felicidad en números

Volvemos a *Quiéreme si te atreves*, donde Julien expresa con ironía su aparente felicidad convencional mediante una serie numérica:

> Os resumo mi vida a los 35 años. Lo tenía todo: 1 mujer, 2 hijos, 3 colegas, 4 préstamos, 5 semanas de vacaciones, 6 años de antigüedad en la empresa, 7 veces mi peso en equipos de sonido, 8 coitos conyugales al trimestre, 9 veces el perímetro terrestre en envases de plástico, bandejas de polietileno y otros envoltorios de plástico no biodegradables y 10 años sin ver a mi padre. La felicidad, el lote completo del tirano que quise ser desde mi infancia. [2 y 3]

La anterior idea y su expresión no andan lejos de la siguiente escena que vamos a comentar.

La rutina en números

Más extraño que la ficción (*Stranger than fiction*. Marc Foster. 2006) narra la historia de un individuo atrapado en una vida rígidamente pautada, obsesionado por contarlo todo y con-

trolar el tiempo. Al comienzo son presentados así el personaje y su reloj por una voz en off:

> Ésta es la historia de un hombre llamado Harold Creeck y su reloj de pulsera. Harold Creeck era un hombre de números infinitos, de cálculos interminables y de sorprendentemente pocas palabras. Y su reloj era aún menos locuaz. Cada día laborable a lo largo de 12 años, Harold se cepillaba sus 32 dientes 76 veces, 38 de un lado para otro, 38 veces de arriba abajo. [...] Harold se ataba la corbata con un solo nudo estilo Windsor en vez de un nudo doble, ahorrándose así hasta 43 segundos. [...] corría a la velocidad de casi 57 pasos por manzana, recorriendo 6 manzanas para pillar el autobús de Kronecker de las 8:17 [...] repasaba 7,134 expedientes de impuestos como inspector de la Agencia Tributaria".
>
> [un compañero de trabajo le aborda en la oficina]
>
> - Harold, ¿89 por 1.417?
>
> - 126.113.
>
> - Me sale la cuenta.
>
> Sólo se permitía un descanso de 45,7 minutos alimenticios y otro de 4,3 de ingestión de cafeína. Todo cronometrado con precisión por su reloj. [...] Y finalmente, a las 11:13, cada noche Harold se acostaba solo. [2 y 3]

En este caso, una serie de números es usada eficazmente para transmitir la falta de horizontes del protagonista.

Del crecimiento personal

Smila, misterio en la nieve (*Smilla´s Sense of Snow*. Bille August. 1997) es un thriller protagonizado por una científica estudiosa de los glaciares y del hielo, quien se empeña en descubrir el misterio de la muerte de un niño esquimal vecino a quien apreciaba. Además es aficionada a las Matemáticas y confiesa lo siguiente a un amigo:

> Para mí, el sistema numérico es como la vida humana. Primero están los números naturales, los que son enteros y positivos. Son los números de un niño pequeño. Pero la conciencia humana se complica y el niño descubre el deseo. ¿Sabe cuál es la expresión matemática para el deseo? Los números negativos, la formalización de la sensación de que te falta algo. Entonces el niño descubre los espacios intermedios entre las piedras, entre las personas, entre los números y aparecen las fracciones. Eso es como una especie de locura porque nunca se llega al final, nunca se detienen allí. Hay números que ni siquiera podemos llegar a comprender. Las Matemáticas son un paisaje inmenso y abierto. Te diriges hacia el horizonte que siempre retrocede, como en Groenlandia. Y yo soy incapaz de vivir sin eso, no puedo estar encerrada.

Sugestiva metáfora de paralelismo entre la construcción de los conjuntos numéricos y el crecimiento de la conciencia. Lamentablemente se detiene sin entrar en los irracionales ni en los complejos, los números que a priori ofrecen más sugerencias vitales, aunque sólo sea por las resonancias polisémicas de sus propios nombres. Sin embargo sí se abordan éstos en el best-seller literario que dio lugar a la película, aunque con escaso rigor matemático.[4]

Del sentido de las cosas

Martino, el protagonista de *Después de medianoche* (*Dopo Mezzanotte*. Davide Ferraro, 2004) es vigilante nocturno del Museo del Cine de Turín, que está situado en la gran Mole Antonelliana. Sobre su fachada lucen en neón rojo los números de Fibonacci. Hasta allí llega Amanda, huyendo de la Policía. Le pregunta sobre la serie:

> – ¿Y esos números?
>
> – Es la serie de Fibonacci, matemático de Pisa del siglo XII. Es una serie cuya característica más notable es que cada tercer número es la suma de los dos precedentes. Mira: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21… y así hasta el infinito. Prueba a deshojar una margarita, a contar las escamas de una piña o las semillas de un girasol. El número de pétalos de una flor es casi siempre un número de Fibonacci. Dichos números sugieren que en el Universo hay una especie de orden matemático, lo que nos llevaría a suponer que probablemente el mundo tenga algún sentido, que no es poco.[2 y 3]

Si, dejando de lado el rigor matemático, pasamos por alto eso de “cada tercer número” y lo de “suponer probablemente”, lo notable de esta escena está en cómo a la breve explicación matemática se le quiere dar un alcance existencial.

Y viceversa

Hemos visto que las Matemáticas a veces son usadas en metáforas para expresar situaciones vitales. ¿Y a la inversa? ¿Se usan alguna vez hechos corrientes como metáforas de ideas o conceptos matemáticos? Es más raro, pero también se ha visto. En *Una mente maravillosa* (Ron Howard. 2001), el director recurre a situaciones cotidianas para plasmar ideas sobre la resolución de problemas matemáticos. Se comentaban en *Suma* 48: el “abordaje” de un grupo de chicos a otro de chicas, a propósito del Equilibrio de Nash en Teoría de Juegos; evitar un ruido molesto que impide la clase, como alusión a la existencia de varias soluciones a un problema; y la conquista amorosa a través del cortejo romántico, como metáfora de la necesidad de formalizar los pasos intermedios que llevan a la solución del problema sin pretender el éxito de forma directa.[5]

Los dos tipos de usos metafóricos que se han comentado son también interesantes por sus aportaciones a la divulgación matemática:

– Porque su lectura por el espectador requiere en unos casos y facilita en otros, un bagaje cultural matemático mínimo. En los primeros, al no confiar demasiado en ello, hemos visto que se suelen incluir explicaciones “alfabetizadoras”.

– Porque esa subversión de la univocidad de los conceptos matemáticos los dota pasajeramente de una insospechada calidez, con nuevas significaciones desde perspectivas vitales.

Ambos motivos hacen de éste un camino, por poco transitado, no despreciable. Terminamos con un ejemplo práctico, que lo es a la vez de ambos usos; en realidad un homomorfismo. Desde la antigüedad, las alianzas entre reinos primero y entre estados después, se rigen por la *Regla de los Signos para el Producto*:

Los amigos de mis amigos son mis amigos (+ × + = +).
Los amigos de mis enemigos son mis enemigos (+ × – = –).
Los enemigos de mis amigos son mis enemigos (– × + = –).
Y los enemigos de mis enemigos son mis amigos (– × – = +).

Las Matemáticas como metáfora de la vida y la vida como metáfora de las Matemáticas; son recursos para la comunicación que también podemos incorporar a nuestras clases.

CineMATeca ■

NOTAS

1 Escher M.C. (2008). *Estampas y dibujos*. p. 13. Colonia:Taschen.

2 Estas escenas las hemos localizado en el blog de *No sólo Mates*: http://nosolomates.es

3 Más información y enlaces para ver estas escenas en J.M. Sorando: Matemáticas en tu mundo, sección de Cine:
http://catedu.es/matematicas_mundo/CINE/cine.htm

4 Más información en Población A.J. (2006). *Las Matemáticas en el Cine.* Granada: Proyecto Sur–RSME.

5 Sorando, J.M.(2005). Entre el amor y el humor. *Suma,* 48, pp. 117–124.

Este artículo fue solicitado por SUMA en enero de 2010 y aceptado en marzo de 2010 para su publicación.

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Comisión Ejecutiva

Presidente: **Serapio García Cuesta**
Secretario General: **Francisco Martín Casalderrey**
Vicepresidente: **Manuel Torralbo Rodríguez**
Tesorera: **Claudia Lázaro del Pozo**

Secretariados:
Prensa: **Biel Frontera Borrueco**
Revista SUMA: **Tomás Queralt Llopis/Onofre Monzó del Olmo**
Relaciones internacionales: **Sixto Romero Sánchez**
Publicaciones: **Ricardo Luengo González**
Actividades y formación del profesorado: **Juana Mª Navas Pleguezuelos**
Actividades con alumnos: **Jordi Comellas i Blanchart**

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidenta: Carme Aymerich Padilla
CEIP Rocafonda
C/Tàrrega, 41
08304 Mataró (Barcelona)

Sociedad Andaluza de Educación Matemática *Thales*
Presidente: Manuel Torralbo Rodríguez
Facultad Matemáticas. Apdo. de Correos 1160. 41080 Sevilla

Sociedad Aragonesa *Pedro Sánchez Ciruelo* de Profesores de Matemáticas
Presidenta: Ana Pola Gracia
ICE Universidad de Zaragoza. C/ Pedro Cerbuna, 12. 50009 Zaragoza

Sociedad Asturiana de Educación Matemática *Agustín de Pedrayes*
Presidente: Juan Antonio Trevejo Alonso
Apdo. de Correos 830. 33400 Avilés (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas *Isaac Newton*
Presidenta: Ana Alicia Pérez
Apdo. de Correos 329. 38200 La Laguna (Tenerife)

Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática *Miguel de Guzmán*
Presidente: Antonio Bermejo Fuertes
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Víllalar, s/n. 09006 Burgos

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García Cuesta
Avda. España, 14, 5ª planta. 02002 Albacete

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidente: Bienvenido Espinar Cepas
CPR Murcia II. Calle Reina Sofía n.º1. 30007 Murcia

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas *Tornamira*
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea *Tornamira*
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.
Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra. 31006 Pamplona

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Manuel Rodríguez Mayo
Apdo. de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Extremeña de Educación Matemática *Ventura Reyes Prósper*
Presidente: Ricardo Luengo González
Apdo. de Correos 590. 06080 Badajoz

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*
Presidente: Juan A. Martínez Calvete
C/ Limonero, 28. 28020 Madrid

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: María José Señas Pariente
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidente: Luis Serrano Romero
Facultad de Educación y Humanidades. Ctra. Alfonso XIII, s/n. 52005 Melilla

Sociedad *Puig Adam* de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Facultad de Educación. (Sec. Deptal. Álgebra). Despacho 3005.
C/ Rector Rollo Villanova, s/n. 28040 Madrid

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas *A prima*
Presidente: Elena Ramirez Ezquerro
CPR. Luis de Ulloa, 37. 26004 Logroño

Sociedade Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)
Presidente: Manuel Díaz Regueiro
C/ García Abad, 3, 1ºB. 27004 Lugo

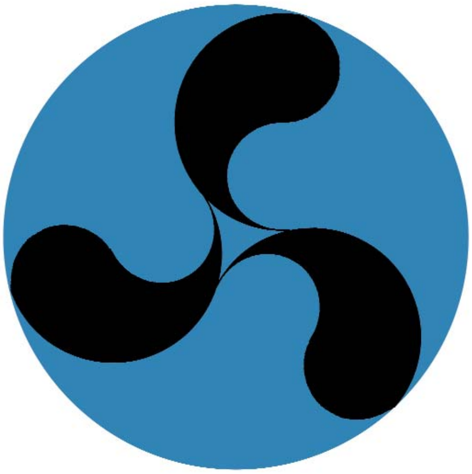
Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana *Al-Khwarizmi*
Presidente: Onofre Monzó del Olmo
Departamento de Didáctica de la Matemática. Apdo. 22045. 46071 Valencia

Societat Balear de Matemàtiques *Xeix*
Presidente: Josep Lluís Pol i Llompart
C/ Martí Rubí 37/alts. 07141 Sa Cabaneta (Marratxí). Islas Baleares

suma+ 64
Junio 2010, pp.125-130

La rueda solar

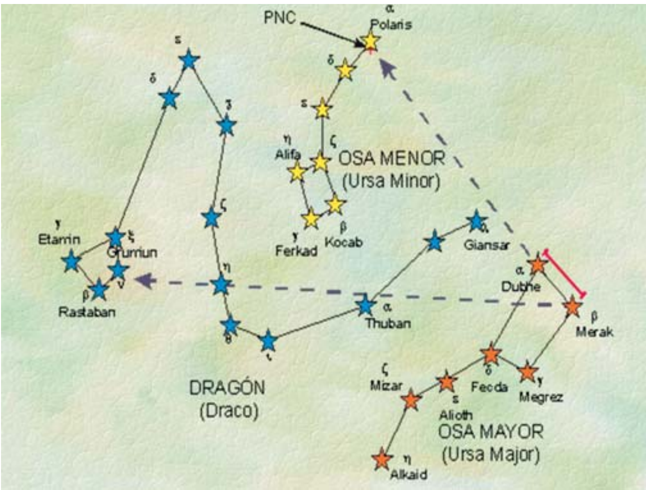
Triskel:
Símbolo cíclico,
Rueda solar,
Amuleto de Arian(Ro)ad:
Corona de plata,
A espaldas de Pendragón:
De las osas protector,
Matador del fiero Ladón:
Guardián de áureas manzanas,
Por las hadas cultivadas,
En el reino de Ávalon
Ro:



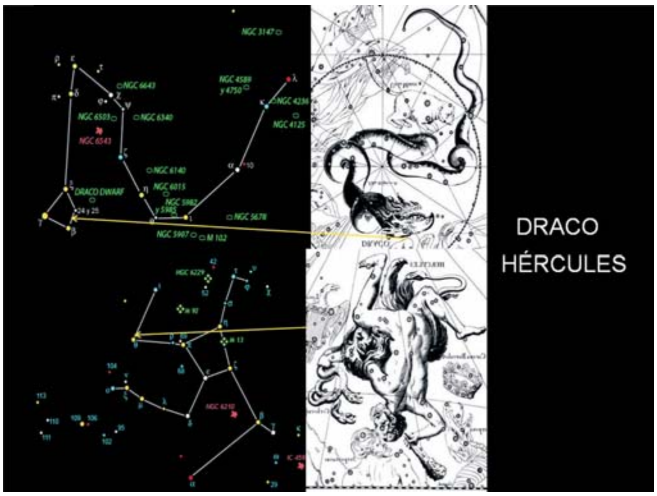
Seguir con la rueda de las coronas es una restricción que me impulsa a saltármela. En el número anterior hice un pequeño amago: a punto estuve de titular el artículo como “La rueda de los años”, me sometí a la condición y pasé a “La corona anual”. Ahora, tomando impulso en aquel salto que no di, salto a la rueda, una rueda que evoca a la corona porque es dorada y es cíclica y porque es la molécula básica de un anillo. Abro la restricción: coronas, ruedas, anillos, círculos, ciclos, grupos cíclicos:

	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Xaro Nomdedeu Moreno
Societat d’Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana “Al-Khwarizmi”
ariadna@revistasuma.es



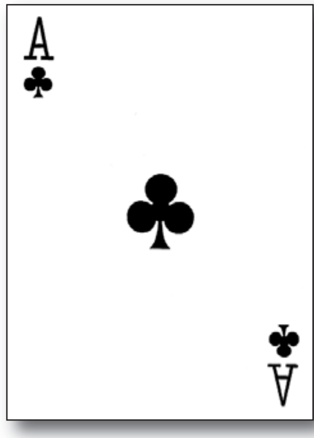
Un manzano, con tres manzanas de oro, siete hespérides y un dragón:



Héroes y dragones: la leyenda se repite cíclicamente. No aprendemos

El triskel tiene simetría cíclica de orden 3. Los giros que dejan invariante la forma del triskel forman un grupo isomorfo al de las clases residuales módulo 3, clases que son la base del código cesáreo, cifrado y descifrado en la aritmética modular, en un reloj analógico de tres horas.

El triskel es el símbolo de la suerte de la mitología céltica, nosotros tenemos otro símbolo de la suerte similar al triskel: el trébol, que es un grupo diédrico también de tercer orden:



Es por todas estas cosas que tanto el triskel como el trébol son símbolos de buena suerte, ¡falta nos hace! La suerte está relacionada con el azar así que los problemas propuestos en este número girarán en torno a la aritmética modular, los grupos de simetría y la probabilidad.

Problemas propuestos

Moneda

Problema propuesto por Mª Carmen Martin para ESTALMAT C.V.

a. Al lanzar una moneda regular ¿es igual de fácil obtener cara que obtener cruz?

Lanzamos una moneda regular 100 veces: ¿cuántas caras y cuántas cruces, más o menos, esperamos obtener?

Si lanzamos dos monedas distintas de forma consecutiva 100 veces, ¿qué resultados podemos conseguir y cuántas veces esperamos que ocurra cada uno de ellos? Expresa también el resultado en porcentajes y en tantos por uno.

¿Y si lanzamos tres monedas? ¿Existe alguna relación con el primer caso?

Si dos jugadores A y B juegan de modo que, al lanzar dos monedas, si salen los dos resultados iguales gana A y si salen distintos gana B, ¿es equitativo el juego?

¿Y si la moneda estuviera trucada y hubiera más probabilidad de que saliera cara?

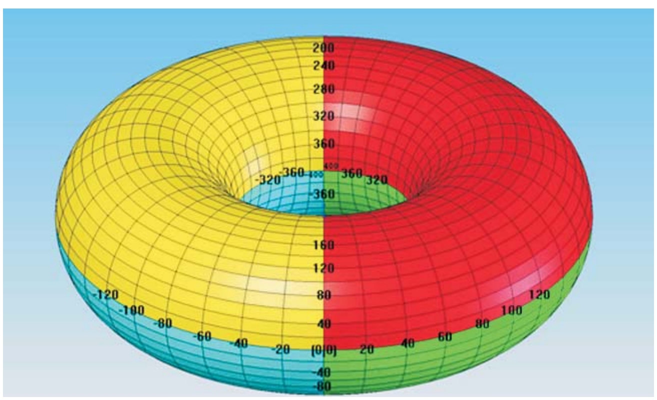
b. Dos jugadores apuestan a cara o cruz. El jugador que primero llega a cinco puntos gana la apuesta. El juego se interrumpe en un momento en que A tiene 4 puntos y B tiene 3. ¿Cómo deben repartir la cantidad apostada para ser justos?

Problema con historia

Construye cuatro triángulos aritméticos de 20 filas. En el primero colorea en rojo los números pares, en el segundo colorea en verde los múltiplos de 4, en el tercero colorea en amarillo los números congruentes con 3 módulo 6, y por último, en el cuarto elige tú el color y las condiciones.

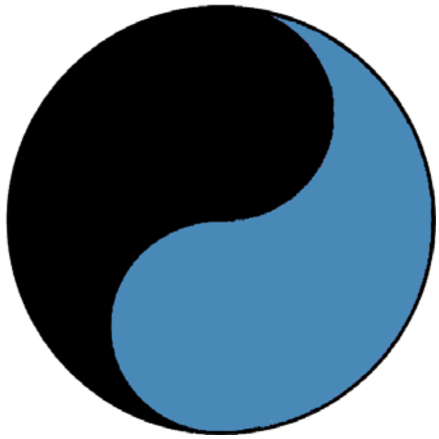
Flotador

Toma un flotador de forma tórica. Dibuja sobre él el círculo exterior máximo y un círculo trasversal, análogamente a la figura adjunta. Toma el toro como espacio bidimensional; considera los círculos dibujados como ejes cartesianos; pon marcas en estos círculos para que funcionen como relojes modulares de 5 horas; señala con pegatinas los puntos (0,4) y (4,3); dibuja la recta y=2x+3; ¿podrías dibujar todas las rectas paralelas a ella?



Ying-yang

El Ying-Yang, relacionado geométricamente con la rueda solar céltica, muestra dos mitades del círculo, congruentes y simétricas respecto al centro del círculo circunscrito ¿Serías capaz de cortar dos mitades de manzana de manera que quedaran simétricas especularmente y que además no fueran congruentes? (Puedes utilizar manzanas del Paraíso, del Jardín de las Hespérides o de la isla de Avalon, si tienes dificultades para encontrarlas, te bastará una manzana golden, que también es de oro.)



Soluciones a los problemas del número anterior

Pensando en Infantil

La pequeña Clara jugaba con sus relojes y cantaba los versos del venerable Wang Wei. Clara tenía una docena de relojes viejos que no tenían ninguna maquinaria. Había dibujado en ellos números, letras, figuritas o colores. Movía sus manecillas y las canciones y los poemas se podían escribir de mil maneras distintas. A veces las cantaba, a veces las pintaba, a veces las escribía.

> *Tomo el reloj de las vocales y, con su rostro iluminado, decía* "Con la a: Santada sala an la racandata aspasara …" *y seguía, así, hasta el final de la canción. Movía su reloj y la oías:* "... teñe el leed e entene en lergue quente...". *Movía nuevamente su reloj y continuaba, poniendo ahora cara de ogro,* "...On lo hondoro dol bosco..." *Movió finalmente su reloj para terminar diciendo:* "...lu lunu cluru vuunu u ulumunurmu" *Hasta que le dolían los labios apretados y, como a ella le gustaba decir:* "Tenía que parar para reírse sin parar."

Como las niñas y los niños de infantil juegan a entender lo oculto, así funciona el reloj de las vocales. Cambia cada vocal por la que elijas en tu reloj. Es fácil de codificar, sin embargo, se tarda más en decodificar.

Pensando en Primaria

> *Tomó una cinta del pelo la enrolló en un palito y escribió seria, letra a letra, la canción sobre la cinta. Satisfecha, desenrolló la cinta y la miró fijamente. Ponía:*
>
> SDARD SROUT NOOHR BEEBU AELAE AEEIP AEDOL CEOAO NLENR NURNS NCTET LYNAA NNDSA OLAAE MMTOL OASAL EORNL DEQDS ACVAI EALAN EUÑAN UGTA ULUIA LLIIN
>
> *Un tanto preocupada, la ató a la rama del almendro, para ver si el viento entendía el misterio."*

La *scitala* es un viejo sistema espartano de ocultar mensajes. Se enrolla una cinta alrededor de un bastón (la scitala), dejando que cada vuelta sea visible. Escribimos el mensaje a lo largo del bastón. Cuando desenrollamos la cinta quedan las letras desordenadas.

Para practicar en el aula, usamos pequeños listones de perfil cuadrado. Enrollamos una tira de papel a su alrededor que fijamos con chinchetas. Escribimos a lo largo de una cara del prisma. Cuando se termina el papel giramos el listón o continuamos escribiendo en la siguiente cara, letra a letra.

Existe un modo de simular el resultado con papel y lápiz. Basta con anotar el mensaje, letra a letra, en columnas. por ejemplo, cada letra en una columna de 5 casillas (cinco caras en nuestra scitala).

1ª	2ª	3ª	4ª	...
S	D	A	R	D
E	A	E	E	I
N	S	N	C	T
T	O	L	O	A
A	L	A	N	...

Para leer el mensaje cifrado hay que saber el número de líneas que usamos en nuestra Scitala, el periodo de nuestro reloj y leer posición a posición.

Pensando en Secundaria

> *Un tanto dubitativa recitó los números:*
>
> 19 4 13 20 0 3 0 19 15 11 0 4 13 11 0 18 4 2 15 13 3 8 20 0 4 19 16 4 19 21 18 0 20 0 14 15 4 11 11 0 21 3 25 4 13 20 15 13 15 21 13 11 0 18 6 15 2 0 13 20 15 4 13 11 0 7 15 13 3 21 18 0 3 4 11 1 15 19 17 21 4 13 0 3 8 4 11 15 19 0 1 4 11 0 11 21 13 0
>
> *Pareció tranquilizarse. Tomo otro de sus relojes e hizo girar una de sus manecillas. Leyó el número 3, "El número del emperador que nunca fue emperador" y escribió la canción así:*

V H P W D G D V R Ñ D H P Ñ D U H F R P G L W D H V S H V X U D W D Q R H Ñ Ñ D X G B H P W R P R X P Ñ D U J R F D P W R H P Ñ D K R P G X U D G H Ñ E R V T X H P D G L H Ñ R V D E H Ñ D Ñ X P D F Ñ D U D Y L H P H D L Ñ X O L P D U O H

> *Dobló el papelito y lo metió en el hueco del álamo.*

Introduzcamos los números. Una sencilla manera será cambiar letras por números.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	

Si no separas los números tendrás muchos problemas. También puedes cambiar el orden alfabético o usar un orden azaroso.

Usa un reloj para hacer cambios en las asignaciones. Coloca dos círculos concéntricos de distinto radio divididos en partes iguales (tantas partes como letras quieras usar). Unimos los dos círculos mediante un eje que permita hacer girar el pequeño dentro del grande. Colocamos el alfabeto en uno de ellos y los números en el otro. Bastará elegir una posición para cambiar los números asignados para cada letra.

Pensando en Secundaria

> *Miró al sol y finalmente colocó tres de sus relojes en POE, para que convertir los versos de la canción de Wang Wei en indescifrables:*

S Q J O H P H S A O I C Z E H S G E B H X I E T H T T
H Y H O X P C S T Z O P J H Ñ S Q J D Q E J Q A O V V
D G P B X E S Q A O L E B H K G E S S O Q D W G J I C
O H X S O E H E Q S O P Z Y C O G A O V P K M T B I
P W O K A M C O V B S

> *Los anotó en una cinta de papel. La dobló en forma de pentágono y la puso sobre una hoja grande y dejó que el agua de la atarjea se lo llevara lejos."*

Si colocamos el número 3 sobre la letra "A", tendremos el cifrado de César, el primer emperador romano que cambiaba cada letra del alfabeto por aquella que estaba tres posiciones por delante y cuando el alfabeto se terminaba volvía a la posición inicial.

Podemos usar un Rotador, ideado por el gran arquitecto renacentista Leon Battista Alberti, donde los círculos concéntricos tienen los alfabetos anotados.

Así, podemos sumar letras con letras.

Usando la aritmética modular, cualquier número entero tendrá asignada una letra. Tomemos un alfabeto de 27 letras. Diremos que el periodo del cifrado será 27. ¿Que letra le corresponde al número 100, por ejemplo?

El resto de la división entre 100 y 27.

$100 = 3 \cdot 27 + 19.$

El resto de dicha división es 19, por tanto, el número 100 será la letra "S".

El cifrado de César será "sumar" a cada letra del mensaje la letra "D".

Es el mismo razonamiento que empleamos al usar los relojes. Con periodos de 12 para las horas o de 60 para los minutos. Por eso la aritmética modular también se le llama la aritmética del reloj.

Pensando en Bachillerato

Cerró los ojos y silvó la canción: "El albergue entre bambúes".

Sentada sola en la recóndita espesura
taño el laúd y entono un largo canto.
En la hondura del bosque, nadie lo sabe,
la luna clara viene a iluminarme.

Contando con varios relojes podemos realizar el cifrado de Vigenere, que durante muchos siglos se llamó "el indescifrable".

Usamos distintas posiciones del reloj para cada letra del mensaje. Por ejemplo si usamos clave "POE", significa que las tres primeras letras del mensaje las cifraremos mediante la "suma" de "P", "O" y "E", donde P = 16, O = 15 y E = 4.

Para cifrar se usará la siguiente función:

$$C(x)=\begin{cases} x+16 \pmod{27} & \textit{si } x \textit{ está en posición } 1,4,7,\ldots \\ x+15 \pmod{27} & \textit{si } x \textit{ está en posición } 2,5,8,\ldots \\ x+4 \pmod{27} & \textit{si } x \textit{ está en posición } 3,6,9,\ldots \end{cases}$$

Para el mensaje "EL AZAR",

E = 4 → 4 + 16 = 20 → T
L = 11 → 11 + 15 = 26 → Z
A = 0 → 0 + 4 = 4 → E
Z = 26 → 26 + 16 = 42 → O
A = 0 → 0 + 15 = 15 → O
R = 18 → 18 + 4 = 22 → V

y quedará "TZEOOV".

Y para descifrar ¿qué función podríamos usar?

EL HILO DE ARIADNA

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aranda, P. Damián & De la Fuente, M. (2001). *Matemáticas Naturaleza y Arte*. Córdoba: Junta de Andalucía.

Caballero Gil, P. (2002). *Introducción a la Criptografía*. Madrid: RA-MA

Internet

http://www.juliagalan.com/ro.pdf

http://mitologiacelta.idoneos.com/index.php/316426#Arianrod

Este artículo fue solicitado por SUMA en enero de 2010 y aceptado en mayo de 2010 para su publicación.

suma+ 64
Junio 2010, pp. 131-136

Luis Balbuena Castellano, VI Premio *Gonzalo Sánchez Vázquez* a los valores humanos

Luis Balbuena es una institución dentro de nuestra Sociedad, pero también en la sociedad matemática en general, nacional e internacional, sobre todo en el ámbito iberoamericano. No en balde Luis fue fundador de la *Isaac Newton*, de la Federación Española y de la Iberoamericana, que deben su existencia, en gran medida, a su impulso y perseverancia, así como a su excelente papel de hombre bueno que logró, en los primeros momentos y ha logrado siempre que se han presentado dificultades, salvar los escollos para que todas estas instituciones sean hoy en día referentes de buen quehacer en la Educación Matemática. En las tres instituciones ha ocupado, en distintas ocasiones, y casi siempre en momentos especialmente difíciles, los cargos máximos de dirección. Fue, en todos estos cometidos, que ha repetido en otros momentos y en otras instituciones e instancias, la primera piedra del edificio, pero también la argamasa que ha sellado, con posterioridad, las posibles grietas que podían presentar tan grandes empresas.

Pero decir esto es decir muy poco de nuestro compañero Luis del que, quienes lo conocemos, solemos decir que nos honra y nos engrandece con su amistad. En efecto, Luis Balbuena Castellano ha dejado huella de buen quehacer profesional, pero sobre todo de grandeza humana por donde quiera que haya pasado. Profesionalmente, como docente, y en algún caso como cargo, dejó gran cantidad de amigos que conserva, de su etapa como Maestro, y posteriormente como Catedrático de Bachillerato, en dos escuelas y un instituto de Huelva, entre el profesorado y el alumnado de la Facultad de Matemáticas, de Medicina y Escuela de Aparejadores de La Laguna, y entre el profesorado y el alumnado de los dos institutos donde ha ocupado gran parte de su vida profesional en la Enseñanza Secundaria en Tenerife, ambos en el municipio de La Laguna: el *Antonio González*, de Tejina, y el *Viera y Clavijo*, de La Laguna. En todos estos lugares, la impronta de Luis, como un sello característico, ha quedado y nos ha impregnado a todos los que hemos tenido la gran ventaja de conocerle y poder trabajar a su lado. Luis ha sabido canalizar, como nadie, la función del buen profesor: en el trabajo edu-

Fidela Vázquez Manuel
Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas
Isaac Newton

cativo con el alumnado y en el trabajo cooperativo con sus compañeros y compañeras. El trabajo con el alumnado ha estado, en todo momento, impregnado de su bonhomía. A su lado, muchos alumnos y muchas alumnas han encontrado la motivación y el estímulo suficientes para, desde el respeto a la figura del profesor, del profesor Balbuena como los propios alumnos le llaman, "engancharlos" de tal forma que, voluntariamente, el placer del descubrimiento ha superado cualquier otra motivación, de forma que el tiempo extraescolar se ha superpuesto en sus alumnos en muchas ocasiones a lo meramente obligatorio. Si esto es meritorio, más lo es si consideramos que este logro lo ha conseguido Luis incluso con alumnos de especiales dificultades de escolarización. En su función facilitadora del trabajo cooperativo entre sus colegas, como maestro de maestros, el trabajo a su lado es siempre fácil. Luis sabe sacar como nadie lo mejor de cada uno. Luis es, sin querer destacar, el alma mater de cualquier reunión, repartiendo juego entre todos y logrando involucrar a todos en proyectos estimulantes, creativos y productivos. Su modestia natural le hace asignar a los demás los méritos que, como impulsor y generador de las ideas y las sinergias, le corresponderían mayoritariamente a él.

Su dedicación a la educación ha trascendido, además, el ámbito de la Educación Matemática. Primer Consejero de Educación del Gobierno de Canarias, tuvo el mérito de asumir y delimitar las transferencias en materia educativa de la Comunidad Canaria de forma ejemplar, siendo muchos sus méritos en este ámbito. El consejero Balbuena sigue siendo, para muchos de los docentes canarios, de los mejores, si no el mejor, de los rectores que han pasado por este departamento. De entre los numerosos logros de esta etapa, destacaríamos dos que dicen mucho y bien de su peculiar forma de hacer y de entender el servicio a los demás. De un lado, abordó una vieja deuda con la sociedad canaria. Deficitaria en puestos escolares, los niños y las niñas de nuestra comunidad contaban con puestos escolares inadecuados o compartidos (muchos centros ocupaban sus aulas en doble y hasta en triple turno). Luis cambió esta situación, y hubo un antes y un

después de su gestión al frente de la Consejería, a partir de la cual cada escolar canario contó con un puesto escolar propio, exclusivo y digno. Esta política de construcción y dotación de centros escolares sólo fue posible con una contención del gasto y una austeridad intachable, en la que el consejero y los miembros de su gabinete llegaron a aprovechar sus desplazamientos para ahorrar gastos de envío y el propio Luis, consejero, destinaba su presupuesto protocolario para resolver los problemas de los más humildes y vulnerables escolares que se encontraba en sus visitas por las escuelas de la comunidad. Y es ésta, la austeridad en el gasto público, el segundo gran legado que Luis dejó en su paso por la Consejería.

En la actualidad pertenece al consejo Escolar del Estado y elegido por sus compañeros para la Comisión Permanente, donde todo esto que hemos compartido los que hemos crecido a su lado lo pone a disposición del mejor fin de la Educación en nuestro país.

Durante un breve tiempo se dedicó a la política local como concejal de La Laguna, siendo ejemplar su trabajo vecinal y de recuperación y puesta en valor de las tradiciones, ganándose el respeto y la consideración de todos, afines o no ideológicamente a las siglas que representaba. Dentro del mismo ámbito cultural, no podemos olvidar que Luis fue el impulsor del magnífico coro de docentes *Carpe Diem* y miembro significado del mismo. El coro *Carpe Diem* condensa en su nombre aquello que tanto admiramos de Luis los que hemos trabajado a su lado: su sentido utilitario del tiempo, que hace que aproveche hasta el máximo cualquier momento, en una especie de aplicación y proyección propia y personalísima de la teoría de la relatividad. Además, es impulsor y alma mater de proyectos culturales, como la dotación de la biblioteca de su pueblo natal, Fontanales (Moya, Gran Canaria). Canario de la Gran Canaria, ha vivido durante gran parte de su vida y ha criado a sus hijos en La Laguna. Fiel cumplidor del adagio que dice que es de bien nacidos ser agradecidos, Luis impulsó una Asociación entre los muchos grancanarios residentes en La Laguna con el único objeto de agradecer a la ciudad que los había acogido el haberse convertido en su segunda tierra. El libro *La Laguna-Gran Canaria*, fruto del trabajo de esta Asociación impulsada por Luis, se encuentra en el fondo bibliográfico de su Ayuntamiento.

Pero esta semblanza estaría incompleta si no habláramos del Luis cercano, del Luis ejemplo de ciudadanía. Luis Balbuena es un señor y un hombre bueno, en el sentido machadiano de la palabra. Amigo de sus amigos, no olvida nunca para ellos la palabra amable y justa en el momento oportuno, confortando en los trances duros y compartiendo también las alegrías. Extremadamente familiar (siempre ayudó a sus tres hijos en sus estudios, como un padre solícito), Luis ejerce de ser humano tanto, que es capaz de compartir las flores de la pequeña finquita que cuida personalmente o los huevos de las gallinas que allí tiene con las personas que precisan de esa dádiva, conservando esa preciosa y casi perdida tradición de compartir y animar a las personas mayores o enfermas, a las que visita para confortarlas con su presencia. En un ámbito humano más amplio que el del círculo próximo, Luis es un benefactor. Fundador de FUNCASOR, la Fundación Canaria de Sordos, colaborador de la Asociación de Trisómicos, fundador de una iniciativa de ayuda a escolares iberoamericanos que comenzó llamándose *Ayúdale a cruzar el río* y ahora ha desembocado en la fundación *Carlos Beatriz y Salvador*, de la que es miembro del consejo rector, Luis es un ejemplo de persona sensible con los más vulnerables, no hurtando su ayuda jamás a aquellos que le necesitan.

Todo lo que se ha expuesto a grandes rasgos es sólo una parte de la personalidad de Luis Balbuena Castellano, que no sólo lo caracterizan como un hombre que ha cumplido las más elevadas cotas de servicios en el ámbito de la educación y de la educación matemática, sino que es un ejemplo de ser humano sensible, solidario, benefactor y con una dedicación extraordinaria de servicio.

No es de extrañar, pues, que muchas personas e instituciones hayamos pensado en él como candidato al Premio a los Valores Humanos *Gonzalo Sánchez Vázquez*, que concede bianualmente la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. ■

Confieso que he enseñado

Saludos a los miembros de la Mesa y a los presentes.

En primer lugar me parece de justicia empezar felicitando a los compañeros y compañeras de la FEEMCAT que han estado en la organización de estas JAEM. Deja bien a las claras la vitalidad de nuestro colectivo pues, como bien dijo Serapio en la inauguración, nos vamos superando en cada ocasión y eso que en estas JAEM hay algo que seguro que ha pesado como una losa en todo este tiempo y es la crisis brutal que lo envuelve casi todo. Por eso felicidades y agradecimiento. También dijo que las JAEM representan el evento más importante sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en nuestro país y lo es sin lugar a dudas y a todos los aspectos científicos que son de gran nivel como hemos podido constatar en las tres magnificas conferencias plenarias y demás actividades y exposiciones, a todos ellos digo, hemos de añadir los aspectos más relacionados con las personas que nos vemos aquí, algunos cada dos años y que permiten renovar y ampliar los lazos de amistad y aprecio. Debemos seguir en esta senda porque los efectos positivos están bien a la vista y en el sentimiento de todas y de todos los que estamos aquí.

Supongo que entenderán que una parte de mis palabras va a ser fundamentalmente de gratitud porque es mucho lo que significa para mí este premio que se me ha otorgado.

Les agradezco a todos que estén aquí acompañándome.

Me produce alegría que este premio se me entregue justamente en Cataluña, una tierra querida y admirada por todo lo que

significa para mí como voy a tratar de explicar. Primero y aunque no soy aficionado al fútbol en exceso, por las dos alegrías futboleras que nos han dado a los canarios: de una parte, ese Barcelona imparable y casi sobrehumano que ha logrado tantos éxitos esta temporada pasada y, de otra, porque el Tenerife, el Tete como le llamamos cariñosamente, logró su ascenso matemático a primera división cuando le ganó al Girona…

Pero bromas aparte, Cataluña tiene para mí varios referentes que me han iluminado como faros en la noche: Luis Antonio Santaló en cuya cuna nos encontramos y a quien tuve el privilegio no solo de conocer, primero en Canarias cuando fue invitado a las JAEM del 83 y después visitarle en Buenos Aires, sino sobre todo oír hablar de él a los argentinos con una gran veneración y respeto. Santaló, ya se dijo en la sesión de apertura, perteneció a aquella pléyade de ilustres que vivieron el triste episodio del exilio y que dejaron una huella imborrable en ese país que les recibió. Precisamente en las JAEM del 2003 en Canarias, hicimos un homenaje a estas figuras y al profesorado argentino que los acogió y que se plasmó en un libro en que participaron muchas personas de aquí y de allá.

Otro de mis referentes de esta tierra es Marta Mata. Una mujer brillante, comprometida con la educación y con la sociedad a quien tuve el inmenso honor de conocer cuando fue Presidenta del Consejo Escolar del Estado y pude apreciar sus cualidades especialmente humanas de tolerancia, de diálogo constructivo, de entendimiento entre las personas…

Y otra persona también de Girona que brilla como un faro inagotable es María Antonia Canals. Ya le dije cuando la abracé el primer día el orgullo y el honor que representa para mi ingresar en su club de premiados con el Gonzalo Sánchez Vázquez. Y como ella está aquí, le puedo decir gracias María Antonia por tu ejemplo, por ese maravilloso GAMAR que nos muestras en estos días y por lo mucho que hemos aprendido de ti.

Cuando mi presidenta Ana Alicia Pérez me comunicó allá por diciembre la intención de presentar mi candidatura al premio, me produjo una enorme zozobra e intenté disuadirla porque consideraba y sigo considerando que hay muchas y muchos colegas que son merecedores de este reconocimiento.

Es evidente que mi poder de disuasión es muy deficiente.

Por eso, mi agradecimiento a toda la Junta de Gobierno de la Isaac Newton y a cuantos colaboraron en el trabajo que ha supuesto llevar todo hasta el final, incluida la Junta de Gobierno de la Federación que es la que, en definitiva, concedió el premio. Gracias Serapio, gracias Francisco por aquel emocionado mail que me enviaste para comunicármelo.

Y en este capítulo de agradecimientos ¡qué puedo decirle a Lola de la Coba! Gracias, gracias, gracias no solo por lo que has hecho hoy sino por haberme acompañado en tantas aventuras educativas como las que hemos emprendido en todos estos años y que nos llevaron, unas a premios Giner de los Ríos, otras a publicaciones, otras a exposiciones. Gracias por tu amistad y por tu fidelidad.

Pero es que, además, este premio tiene aspectos que lo hacen muy especial para mí.

Primero el nombre que lleva: Gonzalo Sánchez Vázquez. Tuve la suerte y el privilegio de conocer y trabajar estrechamente con él. Gonzalo Sánchez Vázquez es un personaje mítico y estoy seguro de que desde ese cielo de los matemáticos buenos que creara para él la imaginación desbordante de Claudi Alsina, desde allí, estará mirando a este profesor de a pie, como a él gustaba llamar a los que trabajamos en el aula día a día, y guiñándome el ojo me estará diciendo ¡enhorabuena! ¡Cuánto me enorgullece haber recibido este premio sólo por eso!

Pero hay aun un importante valor añadido y es que considero de manera especial que sean mis propios compañeros y compañeras quienes me lo han dado. Tenemos un vínculo común que es la docencia y me resulta satisfactorio porque es como si en la asignatura del ejercicio de mi profesión me hubieran dado buena nota.

El DNI avanza para todos y a mí me colocó ya en esa edad en la que hay perspectiva para mirar para atrás. En las JAEM de Granada, el gran Luis Berenguer me pidió que hiciera una reflexión sobre mi vida como docente. La hice y fruto de ello fue una ponencia que titulé *Al menos lo intenté* que contiene un dodecálogo con el que traté de sintetizar ideas, convicciones, consejos… Muchos colegas me han destacado algunos detalles y pidiendo prestada la frase al poeta, *confieso que he enseñado*.

Confieso haber puesto en mi trabajo algo que considero fundamental en cualquier cosa que se haga: le puse ilusión y esto me ha hecho feliz como docente.

Confieso haber dedicado muchas horas a la causa, a organizarnos, a extender el trabajo cooperativo a ambos lados del Atlántico.

Permítanme dirigir unas palabras especiales a Etda Rodríguez, Presidenta de la Sociedad Uruguaya de Educación Matemática que se encuentra entre nosotros invitada por nuestra Federación y lo hago porque me gustaría que se llevara y trasmitiera la admiración y el respeto que me inspira el trabajo que desarrollan nuestros colegas en esos países. El afán que muestran por aprender y cómo, a pesar de las condiciones adversas en las que trabaja la mayoría con más de 40 horas semanales, encima sacan tiempo para formarse, para asistir a talleres, a cursos y más aun, para organizar congresos como los CIBEM en cuya creación tanto tuvo que ver Gonzalo. Diles que seguirán contando con nuestro apoyo y que seguiremos intercambiando iniciativas, ilusiones y conocimientos. Esta fue también una huella que Gonzalo dejó porque estuvo trabajando en aquellas tierras y a pesar del tiempo que ha transcurrido, hace pocas semanas, el profesor César Carranza de la Pontificia Universidad de Lima me recordaba ese paso de Gonzalo por América con frases admirativas.

No perdamos de vista tampoco y seamos conscientes de la enorme repercusión de nuestra tarea de educadores y del efecto que tiene sobre nuestros alumnos y alumnas la forma en la que desarrollemos nuestra labor. Trabajemos siempre con la ilusión del primer día y que, además, ellos lo noten. Esta es una forma de motivar y de conseguir la autoridad que tanto se reclama. No la autoridad del palo y tente tieso sino la que proporciona el respeto al profesor entregado a su profesión, ilusionado, creativo, comprensivo, ético, tolerante.

Detrás de cada alumna y detrás de cada alumno hay una persona, con su entorno particular, sus vivencias, sus sentimientos. A veces caemos en la tentación de culpar al alumnado de ciertos males que son consecuencia de fallos o errores del propio sistema o de la sociedad, en general. Y lo peor es que algunos lo llegan a generalizar cuando los alumnos y alumnas no son siempre culpables, por ejemplo, de su nula o deficien-

te formación matemática. En algunos casos son víctimas. Es una queja de larga tradición que debemos intentar superar con tolerancia y tratando de ayudarles a salir de esa situación. Es nuestra misión intentar atraerles hacia la matemática. En nuestro centro venimos ofreciendo al alumnado desde hace muchos años un conjunto de actividades que llamamos de dinamización matemática del centro que tienen ese objetivo y que nos han demostrado que dan resultado. Un buen porcentaje de nuestros estudiantes se enganchan a ellas y tienen así la posibilidad de acercarse a las matemáticas y al razonamiento matemático por otros caminos que no son estrictamente los que les ofrecemos en nuestras clases. Así, por ejemplo, el TOJUMAT, un torneo de juegos matemáticos que nos piden nada más empezar el curso, la semana de las matemáticas, los actos del Día Escolar de las Matemáticas, el concurso de fotografía y matemáticas, la participación desde las matemáticas en el día del Libro son algunas de esas ofertas.

Y hemos ido más allá ofreciendo a la sociedad en general y a los centros educativos en particular actividades como el *Komando Matemático* que lidera Manolo García Déniz, o la *Expo 2000* creada por Lola de la Coba o la exposición de *Relojes de sol de Canarias*, etc. que nos permiten llevar actividades matemáticas por todas las islas y a toda la sociedad.

Hay otra cuestión que me preocupa especialmente y creo que ahí la Federación tiene un papel importante que jugar y que me voy a atrever a lanzarles el órdago. Cada vez que nos someten a una reforma (y llevamos varias…) y nos anuncian la llegada de los nuevos programas de matemáticas nos encontramos al final con un nuevo lenguaje pedagógico, casi siempre interesante pero con prácticamente los mismos contenidos. Creo que en la mente de casi todos está una especie de ¡ya está bien! y pienso que la Federación debería liderar el tema y plantear un debate serio y en profundidad para crear una propuesta que los actualice, que acabe con gran parte de esos algoritmos porque las TIC ya no son el futuro, ya son el presente y al paso que van se convertirán en el pasado y nos vamos a quedar como quien ve pasar un tren que no para en la estación en la que estamos.

En fin, creo que debo ir terminando pero no quiero dejar de destacar algunos acontecimientos que, en gran parte, son los responsables de estar en este momento aquí: la creación de la Sociedad Canaria allá por 1977 en una mesa de mi casa con Manolo Linares, Ángel Isidoro y Antonio Martinón que nos ha permitido crear no ya una sociedad sino un club de amigos y amigas ligados por un mismo objetivo; aquel viaje que hice con Manolo Fernández al ICME IV de Berkeley que nos marcó un antes y un después; mis compañeros y compañeras de los Departamentos de Matemáticas de los institutos por los que pasé y de los que tanto aprendí: Diego de Guzmán en Huelva, Antonio González en Tejina y, especialmente el Viera y Clavijo en La Laguna porque fue donde más estuve compartiendo proyectos, ilusiones, premios, aprendizajes, tristezas y sobre todo, amistad; mi paso por la Junta de Gobierno de la Federación que me dio la oportunidad tanto de conocer a gente maravillosa como de ponerme en contacto con el mundo y la realidad Iberoamericana. Muchos más serían los que podría nombrar por su influencia no sólo ya en este mundo estrictamente profesional sino lo que pude aprender en mi paso por la política como Consejero de Educación, o como Concejal del Ayuntamiento de mi ciudad o como patrono en varias fundaciones o como miembro del Consejo Escolar del Estado, pero no debo alargarme más.

Y ya, finalmente, detrás y delante de todo está mi familia: mis padres, los grandes artífices, mis hermanos y hermanas tanto carnales como políticos, mi hija Ofelia, mis hijos Raúl y Víctor y cómo no, mi esposa Ofelia, mi acompañante incondicional, cuyo papel en esta historia es tal que aquí, delante de todos, además de confirmarte un amor tan intenso como el del primer día te digo que este premio es tan mío como tuyo.

A todos ustedes por estar ahí,

GRACIAS

15 JAEM

JORNADAS SOBRE EL APRENDIZAJE Y LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

GIJÓN 2011

Matemáticas, base de nuestra cultura

Gijón, del 3 al 6 de julio de 2011
www.15jaem.org

Primer anuncio

*La Sociedad Asturiana de Educación Matemática "Agustín de Pedrayes" (SADEM***),** ha aceptado el honor y la responsabilidad de organizar las 15 Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas del 2011 (15 JAEM). El congreso se va a celebrar en Gijón, ciudad que, con más de 2000 años de antigüedad a sus espaldas, es inquieta, dinámica, emprendedora y gran potenciadora de iniciativas culturales.

La sede del congreso será la *Laboral Ciudad de la Cultura*, espacio moderno y especialmente adaptado para la realización de eventos congresuales que, junto con las instalaciones del cercano Campus de la Universidad de Oviedo, nos propicia un entorno ideal para la realización de este gran encuentro.

Treinta años después de su primera edición en Barcelona, las JAEM van a continuar siendo un punto de encuentro para el debate, la reflexión y la formación sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, así como un espacio de intercambio y conocimiento mutuo de los profesionales de la Educación Matemática.

El lema de las 15 JAEM *Matemáticas, base de nuestra cultura*, pretende sencillamente recordar que lo que entendemos por cultura, esto es, el conjunto de modos de vida, costumbres, conocimientos, creencias y tradiciones de nuestra sociedad, se articuló y se articula en torno al conocimiento matemático. Las matemáticas constituyen el soporte que proporciona unidad y coherencia al resto de las disciplinas, y nuestra cultura es la que es debido precisamente a la aportación que proporcionan las matemáticas, algo que no por ser ya sabido vamos a dejar de reivindicarlo.

Nuestro encargo es continuar la trayectoria que comenzó, como ya hemos citado anteriormente, hace 30 años en Barcelona, y que con gran brillantez se cerró con un "Hasta Gijón", en las JAEM de Girona. Y nuestra intención es potenciar todo lo que de positivo tuvieron esas últimas Jornadas. Demos las gracias a nuestros predecesores, mas ¡qué difícil nos lo han puesto!.

Desde la SADEM, queremos animar al profesorado de matemáticas de cualquier nivel, a participar en el enriquecimiento mutuo que las 15 JAEM de Gijón nos van a propiciar.

Saludo del Presidente de la Sociedad Asturiana de Educación Matemática “Agustín de Pedrayes” (SADEM)

Vamos al Norte, vamos a Gijón.

Desde nuestra querida SADEM hemos acogido, entre abrumados y orgullosos, la responsabilidad de organizar las próximas JAEM. En este sentido, no somos otra cosa que continuadores de un largo camino, y por ello nuestras referencias más próximas las constituyen los éxitos de las ediciones precedentes, lo cual supone para nosotros un desafío y un estímulo.

Asistir a las JAEM es un paseo agradable, es un foco de emisión de ilusiones, de intereses que se comparten, de conocimiento compartido y centrado en nuestra profesión, que ayuda y enriquece, un soplo de ánimo para nuestra tarea diaria. Me atrevo a afirmar que, para los que hemos asistido a ediciones anteriores, constituyen una parte importante de nuestra íntima cultura profesional, incluso personal.

Como sede del Congreso hemos escogido Gijón, ciudad con un gran patrimonio histórico y monumental y con una enorme tradición en la promoción de actividades culturales y realización de congresos, y bajo este manto las 15 JAEM encontrarán un marco de acogida ideal, en el cual estamos convencidos de que os encontraréis, sencillamente, como en vuestra propia casa.

Además, tanto Gijón como nuestra Comunidad Autónoma os ofrecen una gran multiplicidad de posibilidades culturales y turísticas, que potencian las perspectivas vitales de nuestro encuentro.

Queda algo más de un año. Nuestra intención es transmitiros, desde ya, nuestro entusiasmo para que en el 2011 vengáis al Norte, vengáis al mar, vengáis a Gijón.

Juan Antonio Trevejo Aloso
Presidente de la SADEM “Agustín de Pedrayes”

SOCIEDAD ASTURIANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Estructura de las Jornadas

Las JAEM se organizan en tres grandes bloques de actividades:

Primer bloque de actividades:

- Cuatro **Conferencias plenarias** a cargo de personalidades de reconocido prestigio en el campo de la Educación Matemática, de dentro y fuera de nuestro país, invitadas por el Comité de programas de las Jornadas.

- Ponencias y comunicaciones, que versarán sobre los siguientes temas o núcleos temáticos:

  –Resolución de problemas.
  –Pensamiento matemático.
  –Formalización y demostración en matemáticas.
  –Matemáticas como medio de comunicación.
  –Modelización matemática.
  –Recursos para la construcción del conocimiento matemático.
  –Conexiones y contextos.

  Ponencias. Se trata de conferencias invitadas dentro de cada núcleo temático propuesto. Se desarrollarán un total de 14 ponencias a cargo de ponentes invitados por el comité de Programas en torno a los núcleos temáticos propuestos.

  Comunicaciones. Un número limitado de intervenciones breves, enmarcadas en alguno de los núcleos temáticos, donde el profesorado participante en las Jornadas expone y comparte experiencias de aula, ideas o puntos de vista sobre educación matemática, etc.

  Los interesados en presentar una comunicación deberán remitir previamente el texto completo de la misma al Comité de Programas el cuál decidirá sobre su aceptación o no. Se especificarán los detalles al respecto en la página web de las 15 JAEM.

Segundo bloque de actividades

- **Talleres prácticos** de actividades que han sido llevadas a cabo por el profesorado en sus clases. Se trata de sesiones de hora y media, cuyo objetivo principal es la manipulación interactiva de materiales, *software*, exposición de actividades concretas, etc.

- **Zoco matemático**. Se ofrece a todos aquellos asistentes que deseen disponer de un espacio físico en el cual puedan exponer y presentar materiales didácticos, recursos, programas informáticos, pósters, etc.

- **Clips de aula.** Vídeos de corta duración que recogen la realización in situ de las actividades de docentes y alumnado.

- **Encuentros entre iguales o comunidades,** consistentes en el encuentro físico de un grupo de docentes para la discusión e intercambio de impresiones y experiencias en torno a un tema relacionado con la educación matemática.

  Cada comunidad estará vinculada a un tema. Los temas de discusión se abrirán con anterioridad a la celebración de las JAEM organizándose en torno a foros de discusión por vía telemática. Sólo los asistentes que hayan participado en las comunidades virtuales podrán inscribirse en las sesiones de trabajo durante las JAEM.

  Los interesados en organizar y presentar un taller, montar un zoco matemático, mostrar comunicaciones en formato *póster* o participar en una comunidad virtual deberán consultar la página web de las 15 JAEM para conocer la forma en que deben hacerlo.

Tercer bloque de actividades

- **Exposiciones no comerciales** vinculadas a la educación matemática. Aunque se tienen previstas varias exposiciones, en estos momentos ya es visitable la exposición "MathsLAB, taller de matemáticas y creatividad" con carácter permanente y hasta la realización de las JAEM en "Laboral Centro de Arte y Creatividad" de Gijón.

- **Exposición y venta de materiales didácticos** por parte de la FESPM, de las diferentes Sociedades Federadas y de empresas colaboradoras.

Interior de la iglesia de la Laboral

- **Presentación de proyectos** relacionados con la educación matemática, de particulares, asociaciones, grupos de trabajo, fundaciones o entidades comerciales colaboradoras.

  Para la exposición y venta de materiales didácticos, y la presentación de proyectos, se dispondrá de espacios y tiempos que deberán ser solicitados según las indicaciones que aparecerán publicadas en la página web de las 15 JAEM.

- La entrega del **premio Gonzalo Sánchez Vázquez** convocado por la FESPM.

- Diferentes actividades culturales.

Fecha y lugar de celebración

Las 15 JAEM se celebrarán del domingo 3 de Julio al miércoles 6 de Julio de 2011, en la ciudad de Gijón. Está previsto que la mayoría de los actos tengan lugar en "Laboral Ciudad de la Cultura" de Gijón.

La plaza de la Laboral. Foto T. Queralt

La iglesia de la Laboral. Foto T.Queralt

El Teatro de la Laboral

Inscripciones

La inscripción a las 15 JAEM se hará a través de la página web de las Jornadas.

Alojamiento

Se publicará información sobre alojamientos en Gijón en la página web de las Jornadas.

Actas de las Jornadas

Tras la celebración de las Jornadas se publicarán las correspondientes actas que recogerán los textos de las conferencias plenarias, ponencias, comunicaciones, talleres y actividades del zoco matemático.

La publicación de los textos deberá ceñirse las normas de edición que se encontrarán detalladas en las página web de las 15 JAEM.

Puntos de información y correspondencia

Dirección postal:

15 JAEM. Gijón 2011
Centro del Profesorado y de Recursos de Gijón
Camino del Cortijo, nº 17
33212 Gijón

Correo electrónico:

info@15jaem.org

Página web del congreso:

http://www.15jaem.org

Fechas importantes

- 15 de marzo de 2011: fecha límite para la presentación de comunicaciones, talleres, actividades de zoco matemático, pósteres y proyectos.
- 15 de mayo de 2011: fecha límite para el primer período de inscripción.
- 15 de junio de 2011: fecha límite para la inscripción a las JAEM.

Normas de publicación

1.- Para el envío de artículos o cualquier consulta sobre su contenido se utilizará el correo electrónico de la redacción de SUMA(articulos@revistasuma.es) o su dirección postal:

Revista SUMA, Apartado de Correos 498, 46900 Torrent.

2.- Si los trabajos, imágenes incluidas, ocupan más de 5Mb sólo se enviaran por correo postal en soporte magnético (CDRom, DVDRom o Pen drive).

3.- Los trabajos deben ser enviados como archivo en formato MS Word o rtf –tipo de letra Times New Roman y tamaño 12– adjunto a un mensaje de correo electrónico en el que deben figurar:

i. El título del trabajo, los nombres y apellidos de todos los autores, su lugar de trabajo y su dirección completa así como la sociedad federada a la que pertenecen (si se desea).

Y a efectos de comunicación:

ii. El correo electrónico, teléfono y dirección postal del autor de contacto.

4.- Se debe enviar una segunda versión del original en la que no aparezcan los nombres de los autores, ni información relativa a ellos o que pueda servir para identificarlos (e.g., institución a la que pertenecen, citas y referencias bibliográficas propias, agradecimientos, datos del proyecto en el que se enmarca el trabajo). En esta versión, reemplace las citas y referencias bibliográficas por "Autor, 2009" o "Autor et al., 2009". En las referencias bibliográficas propias se debe eliminar el título y el nombre de la revista o el título del libro donde se publica.

5.- Se admiten diversos tipos de trabajos: teóricos, informes de investigaciones, divulgación, innovación didáctica…

6.- Junto con el artículo se remitirá un resumen (máximo de 600 caracteres incluyendo espacios), una traducción del mismo y del título en inglés, cinco palabras clave jerarquizadas (en castellano e inglés).

Ejemplo: *Investigación didáctica, Álgebra, Modelización y dificultades, Enseñanza y aprendizaje, Secundaria y bachillerato.*

7.- El texto estará en una sola columna y tendrá una longitud máxima de 25000 caracteres sin incluir espacios pero incluyendo las tablas, las figuras y los anexos.

8.- Es imprescindible que los esquemas, dibujos, gráficas e imágenes sean guardados en formato **TIF, EPS** o **JPEG**, a una resolución de 300 ppp. y en color original. Éstos se adjuntarán en una carpeta aparte del documento del texto, ya que las imágenes incrustadas en el texto no son válidas para su posterior edición. Cada archivo debe estar claramente identificado y se debe indicar en el texto el lugar donde se ubica. De igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.

9.- Si alguna expresion no se puede escribir con los carácteres disponibles en la fuente Times New Roman, se incluirá, con un editor de equaciones, fuera del texto y si no fuera posible se incorporará como imagen.

10.-La bibliografía se dispondrá también al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, siguiendo las normas APA.

Ejemplos

Libros:

Apellido del autor, coma, inicial/es del nombre, punto, fecha entre paréntesis, punto, título en letra cursiva, punto, lugar de edición, dos puntos, editorial, punto.

Filloy, E., Rojano, T. & Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. New York: Springer.

Capítulos en libros

Cuando se cita un capítulo de un libro, el cual es una compilación (reading), se cita en primer lugar el autor del capítulo y el título del mismo, seguidamente el compilador (Comp.), editor (Ed.) o director (Dir.), coordinador (Coord.), título (las páginas entre paréntesis). Lugar de edición: y editorial, igual que en la referencia de cualquier libro.

Puig, L. (2006). La resolución de problemas en la historia de las matemáticas. En Aymerich, José V. y Macario, Sergio (Eds.) *Matemáticas para el siglo XXI* (pp. 39-57) Castellón: Publicacions de la Universitat Jaume I.

Artículos en revistas

Lo que va en letra cursiva, es el nombre de la revista. Se debe especificar el volumen de la revista y las páginas que ocupa el artículo separadas por un guión. Se especificará el volumen y el número de la revista, cuando cada número comienza por la página uno.

Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, *26*(3), pp. 327-342.

Para consultar más ejemplos de citas bibliográficas, visitar:
http://www.revistasuma.es

11.-Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ... supone un gran avance (Hernández, 1992). Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ... según Rico (1993).

12.-Si durante el texto se cita una referencia de más de tres autores se puede citar el primero seguido de la expresión et al. (y otros). Por ejemplo, "Bartolomé et al. (1982)", "Gelpi et al. (1987)". Pero en la bibliografía deben aparecer todos los autores.

13.-Todas las referencias bibliográficas deben corresponder a menciones hechas en el texto.

14.-Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo y se incluirán al final del texto.

15.-Después de haber recibido el trabajo se enviará un correo electrónico como acuse de recibo.

16.-Cada trabajo será remitido a dos asesores para ser referenciado. Estos no serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, de acuerdo con las normas, criterios y recomendaciones propios de la revista SUMA.

17.-Si los dos informes son positivos el artículo será publicado. Si los dos informes son negativos se rechazará su publicación. Si existe discrepancia entre los informes, se solicitará un tercer informe que decidirá su publicación o su rechazo.

18.-Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como –en caso afirmativo– la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido.

19.-No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo. ■

Propuesta de categorias para las palabras clave

Teoría Innovación didáctica Divulgación Investigación didáctica Experiencia de aula ...	Álgebra Análisis Aritmética Estadística Probabilidad Geometría Resolución de problemas. Topología ...	Números (Naturales Enteros, ...). Resolución de problemas de ..., Ecuaciones, Figuras en el plano, en el espacio Funciones Modelización Lógica Errores, dificultades ...	Libros de texto Historia Cognición Metacognición Razonamiento Demostración Legislación y reformas(LOGSE, LOU, LOE ...) Actitudes Destrezas Procesos Conceptos Enseñanza, aprendizaje, educación ...	Infantil Primaria Secundaria Bachillerato Universidad ...

Convocatoria del VII Premio *Gonzalo Sánchez Vázquez*

La Junta de Gobierno de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas convoca el VII Premio Gonzalo Sánchez Vázquez, *en homenaje de quien fue su Presidente de Honor, de acuerdo con las siguientes bases:*

1. Se trata de premiar la labor docente y los valores humanos: la entrega desinteresada, el amor, el espíritu tolerante, la buena disposición, etc. hacia sus alumnos, compañeros, amigos y, en general, hacia la enseñanza de la Matemática. Es decir, el magisterio en sentido amplio.

2. La periodicidad del Premio será la misma que la de las Jornadas sobre el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM).

3. El Premio consistirá en el nombramiento de Socio de Honor de la FESPM y placa conmemorativa u objeto alegórico.

4. Podrán concurrir al Premio los profesores dedicados a la enseñanza de las Matemáticas en cualquier nivel educativo.

5. Las candidaturas podrán ser presentadas por una sociedad federada y se dirigirán al Presidente de la FESPM. Los promotores presentarán el currículo e informes que estimen pertinentes, entre ellos el informe de la junta directiva de la sociedad o del conjunto de socios proponentes.

6. El plazo de presentación de candidaturas finalizará el 31 de enero de 2011.

7. La concesión del Premio se hará por la Junta de Gobierno de la FESPM. Para ello, el candidato deberá obtener mayoría absoluta en la correspondiente votación. De no alcanzarse mayoría absoluta en primera votación, se procedería a una segunda; de no obtener mayoría absoluta se declarará desierto.

8. Para la concesión del Premio, la junta de Gobierno atenderá, entre otros, a los siguientes criterios:

   - Su labor docente (dedicación a la enseñanza de la Matemática).
   - Valores humanos (tolerancia, entrega a los demás, talante, espíritu de diálogo, respeto a los compañeros, alumnos, etc.). Constatados por sus avalistas.
   - Currículo con hechos, anécdotas, etc. referidos por los proponentes que pongan de manifiesto estos valores humanos del candidato.

9. Se publicará en SUMA el resultado de la concesión del Premio y una semblanza del premiado.

10. La entrega del Premio se llevará a cabo en el acto de apertura o clausura de las XV JAEM, que se celebrarán en Gijón en julio de 2011. ■

Boletín de suscripción

Tarifas	Suscripción anual	Número suelto	Monografía
Particulares	25 €	10 €	15 €
Centros	40 €	15 €	15 €
Europa	50 €	20 €	15 €
Resto del mundo	60 €	22 €	15 €

Fotocopiar esta hoja y enviar:

por correo a: Revista SUMA. Apartado de correos 498
46900-Torrent (Valencia)
por Fax al: (+34) 912 911 879
por correo-e a: administracion@revistasuma.es

Deseo suscribirme a la revista SUMA:

Nombre y apellidos: NIF/CIF:

Dirección: Teléfono:

Población: CP:

Provincia: País:

Correo electrónico: Fax:

Importe (€)

☐ Suscripción a partir del año (3 números) ________

☐ N.os sueltos ________

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)

☐ Transferencia bancaria (CCC 2077-0347-11-1101452547)

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista SUMA

☐ Giro postal dirigido a Revista SUMA

Fecha y firma:

Nombre y apellidos:

Código Cuenta Cliente: Entidad: Oficina: DC: Cuenta:

Banco/Caja:

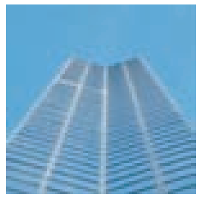
Agencia n.º: Dirección:

Población: Provincia:

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (fecha y firma):

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas



ISSN 1130-488X

SUMA. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.