suma+

revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

65

Noviembre 2010

suma+

revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

Edita
FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS (FESPM)
Web
Antonio Alamillo Sánchez
www.revistasuma.es

Diseño de la portada: *O. Monzó*
Fotografía de la portada:
Marisa Fernández Villanueva
Maquetación
T. Queralt y O. Monzó
Revista Suma
Apartado 498
E-46900-Torrent (España)
Fax: *+(34) 912 911 879*
Tirada: *6700 ejemplares*
Depósito legal: *Gr 752-1988*
ISSN: *1130-488X*

65 ***Noviembre 2010***

Editorial **3-4**

artículos

Una visión estructural del trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas
Marta Molina **7-15**

El concepto de probabilidad en la publicidad
Gabriel Ruiz Garzón **17-21**

Cálculo de la dimensión fractal del contorno de una ciudad como trabajo de investigación en secundaria
J. Comas Roqueta, M.J. Herrera Ponz **23-32**

***SIDI SIFR*. Proyecto de animación a la lectura y educación en valores desde el área de matemáticas**
R. Baños, M.I. García, A. Gómez, L. Sáez, M. Vivo **33-41**

La utilización de nuevos recursos digitales en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas
Jordi Jubany i Vila **43-46**

poliedro

Juegos: Cuadraturas de cruces, letras y estrellas
Grupo Alquerque de Sevilla **49-52**

El clip: Axiomas de estar por casa: la matemática de la mesa perfecta
Claudi Alsina **53-55**

MatemásTIC: Estudio y práctica del álgebra matricial con una aplicación TIC didáctica y sencilla
Mariano Real Pérez **57-67**

Arte con ojos Matemáticos: *Los Embajadores*, dos cuadros en una misma tabla
Francisco Martín Casalderrey 69-74

Adherencias: Educativas
Miquel Albertí 75-78

Biblioteca: Mi biblioteca particular.
Escaparate 1: Ficciones matemáticas
Escaparate 2: Relatos matemáticos
Escaparate 3: Incompletitud ¿para todos?
Daniel Sierra (Coord.), Claudi Alsina i Catalá 79-86

Historias: Historias de al-Khwārizmī (4ª entrega). El proyecto algebraico
Luis Puig 87-94

Hace: Kummer: los números ideales camino del teorema de Fermat
Santiago Gutiérrez 95-98

Musymáticas: Matemáticas para afinar instrumentos musicales
Vicente Liern Carrión 99-104

Cinemateca: De todo un poco
José María Sorando Muzás 105-110

El hilo de Ariadna: La rueda de la fortuna
Xaro Nomdedeu Moreno 111-118

actividades de la FESPM

XXI Olimpiada Matemática Nacional
Illes Balears, 24 al 28 de junio de 2010 119-124

Autoevaluación del profesor e indicadores de calidad en la enseñanza de las matemáticas. Seminario Federal
Castro Urdiales, abril de 2010 125-130

Las calculadoras como recursos TIC. Seminario Federal
Málaga, junio de 2010 131-136

Conferencia Klein-España: Matemáticas para la educación del siglo XXI
Castro Urdiales, junio de 2010 137-140

Normas de Publicación 141
Relación de Sociedades federadas 143
Boletín de suscripción 144

SUMA es una revista de didáctica de las matemáticas de periodicidad cuatrimestral, cuyo objetivo es tratar sobre aquellos aspectos relacionados con su enseñanza y aprendizaje, destinada al profesorado que trabaja en educación infantil, primaria, secundaria y universitaria.

La revista SUMA se edita en Torrent (Valencia) - ESPAÑA

suma+ 65
Noviembre 2010

Referencias de *Suma*

La falta de conocimientos actualizados, complementarios y didácticos, son puntos débiles en la formación de los profesores de matemáticas que inciden en la calidad educativa. Agrava la situación el hecho de que la mayoría de los conocimientos matemáticos aprendidos durante del periodo de formación inicial son olvidados por los estudiantes al cabo del tiempo, si es que fueron realmente adquiridos, y que estos conocimientos nunca han incluido una mínima formación didáctica en la mayoría de los planes de estudio de los títulos de matemáticas.

En los años 80 había muchos profesores de todos los niveles educativos conscientes de esta carencia. Algunos de ellos comenzaron a enrolarse en movimientos asociativos dispuestos a comunicar, compartir, estudiar, investigar o innovar para suplir sus carencias formativas y contribuir a la mejora de la enseñanza de las matemáticas.

*Son varias las iniciativas que surgieron para canalizar estos movimientos y sus aportaciones. Entre ellas destaca la constitución de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (*FESPM*, 1987-1989), que inmediatamente ponía en marcha su revista oficial* Suma *(1988).*

Sus más de veinte años de existencia han consolidado esta revista y le han dado una proyección y difusión nacional e internacional que puede acreditarse por el número de artículos publicados.

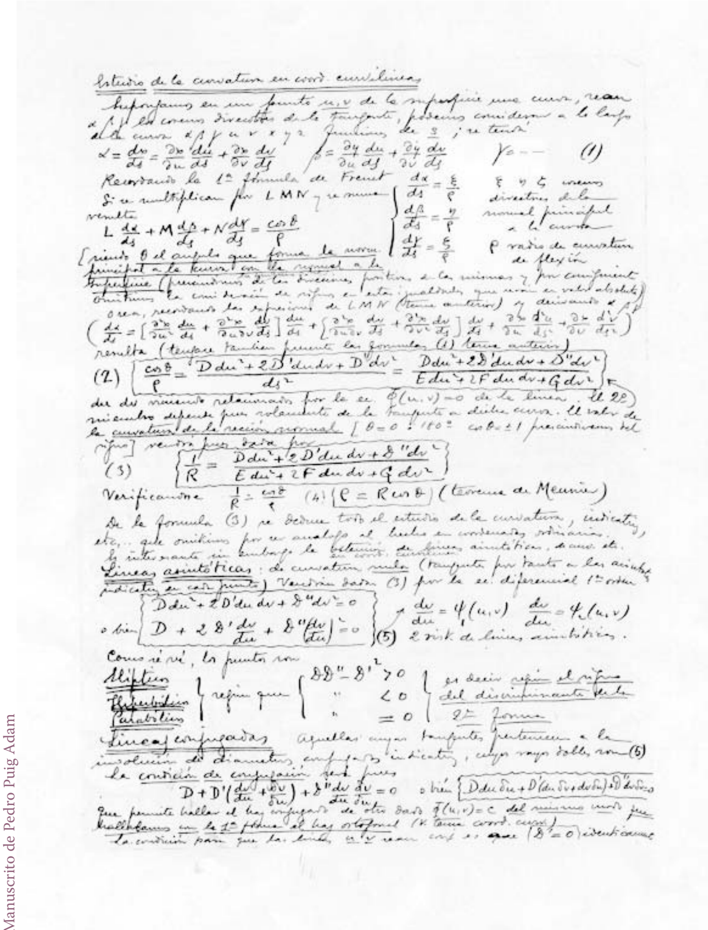
A pesar de esta multitud de artículos, la diversidad de enfoques, metodologías, temas y resultados, amenaza con crear una confusión acerca de las diferentes propuestas y enfoques que aparecen publicados en nuestra revista, cuyos efectos podrían ser desalentadores al oscurecer o incluso menoscabar la calidad de las mejores aportaciones.

En general, abundan los acercamientos a problemas muy particulares. Estudios que enfatizan un solo aspecto del fenómeno educativo sin tener en cuenta las otras componentes; o bien, acercamientos muy amplios con *resultados excesivamente generales, son ejemplos que muestran el estado fragmentado o disperso de los avances de nuestra comunidad de educadores en matemáticas y que sin embargo, muestran los focos de interés en los que nos apoyamos y que creemos que deben ser difundidos a través de este canal de comunicación que es* Suma*.*

Juntar las piezas, buscar líneas convergentes y sobre todo apoyarse en los trabajos precedentes, ya publicados en nuestra revista, es necesario e imprescindible para ir delimitando un todo que pueda mejorar la calidad e imagen corporativa de nuestras aportaciones, haciéndonos mas reconocibles y más presentes en las bases de datos nacionales e internacionales.

Esta es una empresa que requiere un gran esfuerzo de todos los interesados e involucrados. Para llevarla a cabo, la comunicación, discusión y divulgación amplia de las ideas y resultados que ofrece nuestra revista es y ha de ser cada vez más el elemento determinante. ■

suma+


Estudio de la curvatura en coord. curvilíneas

Manuscrito de Pedro Puig Adam

artículos

Una visión estructural del trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas *M. Molina*

El concepto de probabilidad en la publicidad *G. Ruíz*

Cálculo de la dimensión fractal del contorno de una ciudad como trabajo de investigación en secundaria *J. Comas y M.J. Herrera*

SIDI SIFR. Proyecto de animación a la lectura y educación en valores desde el área de matemáticas *R. Baños, M. I. García, A. Gómez, L. Sáez y M. Vivo*

La utilización de nuevos recursos digitales en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas *J. Jubany*

suma+ 65
Noviembre 2010, pp. 7-15

Una visión estructural del trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas

Se presenta una propuesta para promover que el trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas no quede reducido a la aplicación rutinaria de procedimientos. Se destaca la importancia de que la atención del estudiante se centre en la estructura de las expresiones y se proponen algunas actividades, para educación primaria y secundaria, que facilitan este enfoque. El objetivo es promover un trabajo más significativo y productivo con expresiones aritméticas y algebraicas y abordar algunas de las dificultades que los alumnos encuentran en el aprendizaje de la Aritmética, del Álgebra y en la transición entre ambas.

Palabras Clave: Expresiones algebraicas, expresiones aritméticas, estructura, innovación, tareas.

A structural view of working on arithmetic and algebraic expressions

Here I present a proposal to promote that working with arithmetic and algebraic expressions don´t get reduced to routinarily applying procedures. The importance of focusing students' attention on the structure of expressions is highlighted and some activities for elementary and secondary education that facilitate this approach are presented. The aim is to promote a more meaningful and productive work with arithmetic and algebraic expressions and to address some of the difficulties that students encounter in learning arithmetic, algebra and in the transition between both.

Key words: Algebraic expressions, arithmetic expressions, innovation, structure, tasks.

En el trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas, a menudo puede observarse cómo los alumnos se embarcan en difíciles cálculos antes de mirar la expresión con la que tiene que trabajar y prestar atención a sus particularidades, a su estructura. De este modo pierden la oportunidad de elegir el enfoque más eficaz para resolver la situación, como puede ser simplificar las operaciones a realizar antes de iniciarlas. Nos estamos refiriendo aquí en particular al cálculo de expresiones aritméticas, a la resolución de ecuaciones algebraicas y a la simplificación de expresiones algebraicas, si bien este hecho también se observa en matemáticas más avanzadas como el cálculo integral (Hejny, Jirotkova, y Kratochvilova, 2006). Pareciera, en muchos casos, que el conocimiento de los alumnos es únicamente mecánico.

Siguiendo esta idea consideremos las actividades y formas de resolución que se muestran en la Figura 1. Cada una de dichas actividades forma parte de la práctica matemática habitual en las aulas de matemáticas de educación primaria y secundaria. Así mismo, el tipo de resolución mostrada también suele ser observada en los trabajos de los alumnos. Lo que estas actividades tienen en común es que es posible un tipo de resolución más eficiente haciendo uso de las características particulares de las expresiones con las que se está trabajando. En la Figura 2 se presenta una resolución alternativa que describimos a continuación.

1) Resuelve la ecuación:

$$\frac{15(33x+9)}{3} = 15(28x - 14)$$

$$15(33x+9) = (15(28x-14))3$$
$$495x+135 = (420x-210)3$$
$$495x+135 = 1260x - 630$$
$$135+630 = 1260x-495x$$
$$765 = 765x$$
$$x = \frac{765}{765}$$
$$x = 1$$

Marta Molina
Dpto. Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada

2) Factoriza 125·48·43

$$\begin{array}{r} 125 \\ \times\ 48 \\ \hline 1000 \\ 500 \\ \hline 6000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6000 \\ \times\ 33 \\ \hline 18000 \\ 18000 \\ \hline 198000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 198000 & 2 \\ 99000 & 2 \\ 49500 & 2 \\ 24750 & 2 \\ 12375 & 5 \\ 2475 & 5 \\ 495 & 5 \\ 99 & 3 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Respuesta: $2^4 \cdot 5^3 \cdot 3^2 \cdot 11$

3) Calcula 324+215−214

$$\begin{array}{r} 324 \\ +\ 215 \\ \hline 539 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 539 \\ -\ 214 \\ \hline 325 \end{array}$$

Figura 1. Tres tareas y una posible forma de resolución.

En el caso de la primera actividad, al observar los términos que la componen, se aprecia la repetición del número 15 como factor en ambos miembros. También se observa que los dos números que aparecen en la expresión $33x+9$ son múltiplos de 3 y, puesto que esta expresión aparece dividida por 3, es de utilidad sacar 3 factor común para simplificar. Así la ecuación dada es equivalente a

$$\frac{3(11x+3)}{3} = 28x - 14$$

que a su vez es equivalente a $11x+3 = 28x-14$. En esta última expresión también se observan relaciones entre los términos, por ejemplo, 14 es un factor común del miembro derecho, pero en este caso esa relación no ayuda a simplificar (*hacer más simple*) la ecuación. Por tanto, para obtener la solución sólo queda agrupar las variables en un miembro, los términos independientes en otro, y "despejar equis" (ver Figura 2).

En la segunda actividad, se trata de factorizar la expresión, por tanto, descomponerla en sus factores primos. La expresión en cuestión es un producto, por lo que se puede proceder directamente a factorizar los factores que la componen: 125, 48 y 33. En el caso de 125 y 33 es probable que se conozca directamente su factorización 5^3 y $3{\cdot}11$, respectivamente, como se hace en la resolución de la Figura 2. Sólo queda, por tanto, factorizar 48 ($2^4{\cdot}3$), unir dichas factorizaciones y reagrupar los términos: $5^3{\cdot}3{\cdot}11{\cdot}2^4{\cdot}3 = 5^3{\cdot}3^2{\cdot}11{\cdot}2^4$.

En la última actividad, atendiendo a los términos que componen la expresión se observa que los dos últimos términos son consecutivos. Puesto que la expresión indica que han de restarse, es inmediato concluir que la expresión dada es equivalente a 324+1. De esto se deduce rápidamente, y sin mayores dificultades, su resultado.

1) Resuelve la ecuación:

$$\frac{15(33x+9)}{3} = 15(28x - 14)$$

$$\frac{\cancel{15}(33x+9)}{3} = \cancel{15}(28x-14)$$

$$\frac{33x+9}{3} = 28x-14$$

$$\frac{\cancel{3}(11x+3)}{\cancel{3}} = 28x-14$$

$$11x+3 = 28x-14$$

$$3+14 = 28x-11x$$

$$17 = 17x$$

$$\frac{\cancel{17}}{\cancel{17}} = x$$

$$1 = x$$

2) Factoriza 125·48·33

$$\begin{array}{ccccc} 125 & \cdot & 48 & \cdot & 33 \\ \| & & \| & & \| \\ 5^3 & & 2^4{\cdot}3 & & 3{\cdot}11 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$$125 \cdot 48 \cdot 33 = 5^3 \cdot 2^4 \cdot 3^2 \cdot 11$$

3) Calcula 324-215-214

$$324 + \underbrace{215 - 214}_{1} = 324 + 1 = 325$$

Figura 2. Una resolución alternativa a las tres tareas de la figura 1.

Tanto la resolución que se presenta en la Figura 2 como la presentada previamente en la Figura 1, para cada una de las tres actividades, son matemáticamente correctas y, probablemente, cualquier docente estaría satisfecho de obtener tanto una como otra forma de resolución por parte de un alumno. Comparamos aquí ambas estrategias para centrar la atención en el papel de la estructura de las expresiones aritméticas y algebraicas.

En los ejemplos mostrados en la Figura 1 se emplea un procedimiento estándar aprendido —en este caso para la resolución de ecuaciones, la factorización y el cálculo de operaciones aritméticas respectivamente—, sin atender a las características particulares de las expresiones con las que se estaba trabajando. En estos casos se dice que se ha seguido un *enfoque procedimental.*

En cambio, cuando se presta atención a las características particulares de las expresiones, es decir, a su estructura, y ésta se utiliza para abordar la resolución de la actividad propuesta, se dice que se ha utilizado un *enfoque estructural.* Así ocurre en las resoluciones alternativas propuestas en la Figura 2.

En el trabajo con expresiones numéricas o algebraicas, tanto a nivel de primaria como de secundaria, ambos enfoques son posibles. Es una elección docente cuál de estos enfoques se promueve en una determinada actividad matemática y, en general, en la práctica habitual del aula. En el enfoque procedimental lo que hace el alumno es activar en su mente algunos procedimientos aprendidos tras haber identificado el área a la que pertenece el problema. El enfoque estructural, en cambio, requiere un pensamiento más flexible; el alumno atiende a toda la expresión, la analiza para identificar su estructura y utiliza relaciones entre los elementos que la componen para construir la estrategia de resolución. En el primer caso el alumno adquiere práctica en la resolución de problemas de ese mismo tipo; con el segundo enfoque, en cambio, el alumno puede acceder a una mayor comprensión de la situación (Hejny et al., 2006, p. 290).

Idea de estructura en la aritmética y el álgebra

El término *enfoque estructura*l procede obviamente de la palabra estructura. En general, en matemáticas el término estructura se asigna a un sistema compuesto por un conjunto de objetos matemáticos, alguna operación u operaciones, así como ciertas propiedades y relaciones de y entre estos objetos y operaciones (Castro, Rico y Romero, 1997). Por ejemplo, la estructura del conjunto de los números naturales con la operación suma que es de semigrupo conmutativo, comprende los citados números, junto a la operación de suma y ciertas propiedades, entre ellas la conmutativa.

Este significado de estructura es el más frecuente en matemáticas pero, al considerar expresiones aritméticas y algebraicas, este vocablo también se utiliza para referir a los términos que componen la expresión, a los signos que los relacionan, al orden de los diferentes elementos y a las relaciones que existen entre ellos[1]. Así, percibir la estructura de la expresión 14+5=5+14 consiste en identificar dos partes (cada miembro) y un signo que las relaciona (el signo igual), que cada parte consta de dos números y un signo de suma que los conecta y que, además, los números que componen el miembro derecho de la igualdad son los mismos, pero en diferente orden, que los que componen el izquierdo. Esta idea de estructura se reduce a los elementos que componen la expresión, a la forma de la expresión. En particular, éste es el significado de dicho término que se está utilizando al decir que los pares de expresiones que se muestran en la Figura 3 tienen la misma estructura.

x^2+y^2	12+17=11+18
$(x+7)^2+(3x+1)^2$	51+73=50+74

Figura 3. Dos parejas de expresiones con igual estructura.

Este significado del término estructura es el que estamos destacando en este trabajo y es del que procede la expresión enfoque estructural.

El enfoque estructural

Ocurre, en ocasiones, que la percepción de la estructura de una expresión tiene lugar de forma espontánea. En el primer acercamiento a una expresión o expresiones o mientras que se trabaja en ellas, ciertas características o relaciones entre sus elementos "emergen", es decir, sin haber prestado una atención intencionada éstas vienen a la mente del sujeto y "se hacen visibles". Por ejemplo, en la expresión 5+5+5+5 puede saltar a la vista del lector que todos los términos de la suma son iguales, sin necesidad de haber realizado una búsqueda consciente de relaciones entre los elementos de dicha expresión. Ciertas características o relaciones "sobresalientes" de, o entre, expresiones matemáticas, al ser detectadas de forma espontánea, pueden favorecer un enfoque estructural en vez de un enfoque procedimental, al inducir al sujeto a considerar el modo en que las relaciones que detecta le pueden facilitar la obtención de la respuesta o aportar información de interés sobre la situación en estudio. En este sentido el diseño de las tareas que se proponen en el aula es clave para iniciar un trabajo que promueva una percepción estructural de las expresiones.

Con independencia de dichos casos, los alumnos suelen mostrar tendencia computacional en el trabajo aritmético y algebraico por lo que se hace necesario promover el hábito de pararse a observar y analizar las características particulares de la expresión o expresiones con las que se ha de trabajar, antes de iniciar ninguna manipulación. No obstante, esto no es suficiente para percibir la estructura de una expresión, sino que son, además, necesarias otras habilidades que mencionamos a continuación y que han sido agrupadas bajo el nombre de *sentido estructural* (Hoch y Dreyfus, 2006). Llevar acabo enfoques estructurales requiere de, y promueve, estas habilidades:

- Percibir las expresiones y sus partes ("subexpresiones") como entidades (como un todo), y no como procesos a realizar paso a paso. Por ejemplo, percibir la expresión *ab+ac+ae* como suma de tres términos requiere considerar *ab*, *ac* y *ae* como entidades en sí mismas. De forma similar concluir que (125+329)– (125+329) es cero sin realizar ningún cálculo o reconocer $2x+1$ como un factor común en la expresión $(2x+1)^2-3x(2x+1)$, necesita, entre otros aspectos, concebir 125+329 y $2x+1$, respectivamente, como una entidad.

- Reconocer relaciones entre subestructuras. Por ejemplo, percibir que los tres sumandos de la expresión *ab+ac+ae* tienen *a* como factor común o que la expresión (125+329)– (125+329) contiene dos subexpresiones que son iguales (125+329).

En la práctica tienen lugar enfoques que no son puramente procedimentales ni puramente estructurales. A veces durante la realización de cierto cálculo, se aprecia alguna característica particular de la expresión con la que se está trabajando y ésta se emplea para obtener la respuesta. Así lo ponen de manifiesto las siguientes explicaciones dadas por dos alumnos de tercero de educación primaria al pedirles que indiquen si las igualdades 51+51=50+52 y 7+15=8+15 son verdaderas o falsas:

- "Es que como cincuenta y uno más cincuenta y uno son ciento dos, pero cincuenta y uno, si le quitas [uno], cincuenta, le puedes sumar a cincuenta y uno del otro, uno más, y te da cincuenta y dos".

- "Falsa, porque no te sale lo mismo y aparte que siete es más pequeño" (Aparte calcula mediante el algoritmo estándar de la suma el valor numérico de ambos miembros).

Inicialmente los alumnos procedieron a realizar los cálculos de ambos miembros de la igualdad pero en algún momento de dicho proceso se percataron de la estructura particular de dichas igualdades y la emplearon para concluir su respuesta. De forma similar, pero en el trabajo con expresiones algebraicas, Hoch y Dreyfus (2004) han observado al proponer a los alumnos ciertas ecuaciones tales como

$$\left(\frac{(x-1)-4x}{4(x-1)}\right)-x=6+\left(\frac{(x-1)-4x}{4(x-1)}\right)$$

que dos terceras partes de los alumnos que emplearon enfoques estructurales (basados en la identificación de una misma expresión repetida en ambos miembros de la ecuación) realizaron previamente alguna manipulación de las expresiones antes de percibir su estructura.

Ocurre en la práctica que ambos enfoques se conjugan o se suceden, teniendo lugar el uso de pensamiento estructural en una etapa inicial, intermedia o final. Si bien ambos enfoques tienen cabida en la actividad matemática, destacamos la atención a la estructura como un elemento clave para promover un trabajo más significativo y productivo con expresiones aritméticas y algebraicas así como abordar algunas de las dificultades que los alumnos encuentran en el aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra facilitando la transición entre ambas.

A través de una visión estructural de la aritmética y el álgebra, el trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas puede no sólo contribuir a la fluidez en la aplicación de procedimientos estándar, que es en la actualidad un objetivo importante de la enseñanza escolar de las matemáticas, sino también al desarrollo de otros componentes de la competencia matemática como la comprensión de los conceptos, operaciones y relaciones matemáticas; pensar de forma lógica, reflexionar, explicar y justificar; y llegar a tener una inclinación habitual a ver las matemáticas con sentido (NRC, 2001).

Los alumnos desde los primeros años de su etapa escolar son capaces de apreciar y utilizar estructura en mayor medida de lo que a priori podría pensarse. A continuación describimos una experiencia realizada en un curso de tercero de Educación Primaria que corrobora este hecho. Esta experiencia también muestra que esta visión estructural contribuye a enriquecer el aprendizaje de la aritmética ya que ayuda a minimizar el cálculo de operaciones y a hacer que los alumnos piensen sobre las propiedades de las operaciones, la manipulación de expresiones numéricas y sobre cómo esta manipulación afecta a las expresiones. El objetivo al promover este enfoque estructural desde los primeros cursos de primaria es, por tanto, favorecer un aprendizaje significativo de la aritmética (al enfatizar su consideración como un sistema matemático organizado según ciertos principios), el desarrollo de fluidez en el cálculo y el desarrollo de una buena base para el estudio formal del álgebra (Carpenter, Franke y Levi, 2003; Molina, 2006).

Una experiencia en un aula de primaria

Como parte de mi tesis doctoral (Molina, 2006), realizamos una intervención en un aula de tercero de primaria de un colegio público de la provincia de Granada. Interesados en estudiar cómo los niños dan sentido a las igualdades numéricas y en promover su apreciación de la estructura de éstas, trabajamos con ellos durante seis sesiones de una hora en la resolución de igualdades abiertas y de igualdades cerradas verdaderas y falsas[2]. Queríamos promover una visión estructural de la aritmética.

Diseño de las igualdades

Propusimos a los alumnos igualdades abiertas (es decir, incompletas, con un recuadro a completar como en 8+4= $\square$+5) e igualdades cerradas (es decir, completas tal como 13+11=12+12) verdaderas y falsas, en actividades escritas individuales, discusiones grupales y entrevistas individuales. Las igualdades incluían números enteros positivos de hasta 3 dígitos y operaciones de suma y resta. Tuvimos en cuenta propiedades aritméticas en su diseño tales como la propiedad conmutativa de la suma (ej. 10+4=4+10), la relación complementaria que existe entre la suma y la resta (ej. 21−14+14=21; 100+94−94=100) y relaciones de composición y descomposición entre números (ej. 78−16=78−10−6; 7+7+9=14+9). De este modo no sólo era posible que los alumnos resolvieran las igualdades a partir del cálculo de los valores numéricos de ambos miembros, sino también haciendo uso de propiedades aritméticas y relaciones entre los términos que las componen.

En las igualdades abiertas la tarea de los alumnos era completarlas y explicar cómo las habían resuelto. En las igualdades verdaderas y falsas[3] debían de justificar si eran verdaderas o falsas, y en caso de ser falsas, proponer una forma de corregirlas. En las discusiones animamos a los alumnos a que explicaran cómo habían resuelto las igualdades, a que propusieran estrategias diferentes a las ya expresadas por sus compañeros en esa misma igualdad y a que intentaran resolverlas sin tener que hacer todos los cálculos/operaciones.

Sesiones de trabajo en el aula

Inicialmente la mayoría de los alumnos abordaron las igualdades de forma procedimental, calculando los valores numéricos de ambos miembros. Por ejemplo, Marcos dio como respuesta siete a la igualdad 8+4= $\square$+5 y explicó “Porque ocho más cuatro son doce y cinco más siete son doce”. De forma semejante en la igualdad 12 + 7 = 7 + $\square$ Belén explicó su respuesta 11 como sigue: “He sumado doce más siete, y el resultado éste te tiene que dar lo mismo que esto (señalando al miembro derecho de la igualdad)”.

En la primera y segunda sesión algunos alumnos mostraron la apreciación de relaciones entre los términos de algunas igualdades. Así, durante la discusión, de la igualdad 12 + 7 = 7 + $\square$, algunos alumnos expresaron: “Porque es el mismo número”, “Lo han puesto al revés” y “Han cambiado los números de orden”. Pero fue a partir de la tercera sesión cuando las intervenciones de los alumnos que señalaban la apreciación de la estructura de las igualdades fueron más numerosas. En la Tabla 1 se muestran algunas de las respuestas de los alumnos que lo ponen de manifiesto.

Igualdad	Explicación de algún alumno
72 = 56 − 14	“Que setenta y dos no es igual a cincuenta y seis menos catorce porque cincuenta y seis menos catorce es un número más chico que setenta y dos. [Ah! Esto va a ser un número más chico que setenta y dos. ¿Cómo lo sabes?] Porque cincuenta y seis es más chico que setenta y dos y si le restamos catorce, me da un número más chico que cincuenta y seis.”
122+35−35=122	“Verdadera, porque como si te pones vida y te la quitas y da lo mismo”. (Aparte calcula mediante el algoritmo de la suma 122 + 35 = 157)
11−6=10−5	“Porque... si once es mayor que diez y le quitas uno más que cinco, te sale igual”
231 + 48 = 231 + 40 + 8	Es verdadera, porque sale lo mismo. A cuarenta y ocho le pongo un ocho…, a cuarenta le pongo un ocho y me sale lo mismo.
75 + 23 = 23 + 75	“Verdadera porque son iguales y entonces dan lo mismo”
15 − 6 = 6 − 15	“Que es verdadera...Porque sólo lo que han hecho es cambiar el orden”

Tabla 1. Ejemplos de explicaciones de los alumnos que ponen de manifiesto el uso de estructura de las expresiones

En total, a lo largo de las seis sesiones, un tercio de las justificaciones de los alumnos estuvieron basadas en la apreciación de la estructura de las expresiones. Los alumnos hicieron referencia a diversos tipos de relaciones apreciadas en las sentencias, tales como que un mismo número estaba siendo sumado y restado, o que unos términos de la igualdad podían ser obtenidos a partir de otros sumando o restando alguna cantidad, y a cierta mismidad entre partes de las igualdades. A partir de dichas relaciones argumentaron la validez de las igualdades.

Algunas explicaciones, tales como la recogida en la Tabla 1 para la igualdad 75+23=23+75, fueron algo imprecisas al referir a cierta mismidad y no dejan claro hasta qué punto los alumnos habían reconocido la estructura de la expresión. Estas explicaciones requieren de la solicitud del docente de mayor elaboración por parte del alumno.

También fueron frecuentes los casos (un 50% de las veces) en los que los alumnos realizaron el cálculo de ambos miembros de la igualdad para concluir su respuesta. En alguna ocasiones (un 6 % de las veces) los alumnos requirieron hacer algunos cálculos en la expresión antes de apreciar cierta relación entre sus términos que les permitió cambiar de estrategia y emplear un enfoque estructural.

Todos salvo dos o tres alumnos utilizaron en algún momento un enfoque estructural. El enfoque utilizado por cada alumno para resolver las igualdades varió de una sesión a otra e incluso de una igualdad a otra dentro de la misma sesión de trabajo en el aula. Varios factores influyeron en la percepción de los alumnos de las igualdades y en el proceso de resolución seguido. Pudimos observar que las igualdades relacionadas con la propiedad del cero como elemento neutro de la suma y de la resta por la derecha o con la relación de un número y su opuesto fueron eficaces para interrumpir la tendencia procedimental de los alumnos. La repetición de términos en ambos o uno de los miembros también tuvieron un efecto destacado. Las igualdades basadas en la propiedad conmutativa fueron resueltas más frecuentemente mediante enfoques estructurales que realizando el cálculo de ambos miembros. En las igualdades basadas en la relación inversa de la suma y la resta o en relaciones de descomposición y composición de números, ambos enfoques fueron igualmente frecuentes.

Las igualdades que no incluían repetición de términos, tales como las basadas en la relación de compensación o en el tamaño relativo de los términos, fueron resueltas más frecuentemente a partir del cálculo del valor numérico de ambos miembros.

Observamos, también, que para algunos alumnos el encontrar números de gran magnitud en las igualdades les provocó resistencia a calcular y les indujo a buscar relaciones entre los términos de la igualdad. En cambio, en el caso de los alumnos con menor dominio del cálculo, los números de una sola cifra facilitaron su apreciación de relaciones. La forma de las igualdades también tuvo influencia para algunos alumnos siendo, en su caso, más frecuente el uso de enfoques estructurales cuando las igualdades contenían operaciones en ambos miembros.

Estas observaciones ponen de manifiesto la importancia de que las expresiones propuestas sean ricas en relaciones y variadas en estructura ya que el modo en que los alumnos las abordaron estuvo influenciado por las características de la igualdad: estructura, tamaño de los números y relaciones utilizadas en el diseño. Además la frecuencia con la que cada alumno utilizó un enfoque estructural estuvo influenciada por su conocimiento y experiencia aritmética previa. Esto determina, para cada alumno, la demanda cognitiva que supone las tareas propuestas, su forma de concebir los números y dar significado al signo igual, su mayor o menor tendencia al cálculo y su mayor o menor conocimiento (implícito o explícito) de las propiedades aritméticas.

También fue esencial crear un ambiente en el aula en el que las estrategias que hacían uso de la estructura de las expresiones eran valoradas. Para muchos alumnos escuchar este tipo de estrategias explicadas por algunos de sus compañeros, fue clave para que consideraran formas diferentes de resolver las igualdades. En ningún momento propusimos a los alumnos estrategias particulares a utilizar, sino que se intentó alterar el modo en que los alumnos atendían a las expresiones solicitando estrategias que no requirieran realizar todos los cálculos. Nuestra intención era inducir a los alumnos a “mirar” las igualdades de otra manera, a que atendieran a su estructura e intentaran usar las relaciones observadas para argumentar su respuesta sobre la veracidad o falsedad de la igualdad.

Sin duda alguna, seis sesiones no son suficientes para producir un cambio definitivo en la percepción de estructura por parte de los alumnos y en el desarrollo del sentido estructural. Se requiere de un trabajo continuado, preferiblemente en diferentes contextos. En el siguiente apartado se proponen algunos tipos de actividades a desarrollar en el aula con esta intención.

Sugerencias para promover un enfoque estructural en el aula de matemáticas.

A través del mismo método de trabajo seguido en la experiencia descrita en el apartado previo, esto es, discusiones con todo el grupo y actividades escritas sobre la veracidad y falsedad de expresiones o sobre diferentes modos de abordar expresiones, se pueden trabajar en el aula otros aspectos importantes sobre la estructura de las expresiones como el orden de las operaciones, el uso de paréntesis, el significado del signo igual o algunas de las dificultades concretas que los estudiantes suelen encontrar en la interpretación y manipulación de expresiones. Así por ejemplo las expresiones $5+6{\cdot}10$ versus $11{\cdot}10$ o sus análogas $5+6x=60$ versus $11x=60$ permiten tratar en el aula el orden de las operaciones. Con la misma intención pueden compararse las expresiones $17-3{\cdot}4$ versus $14{\cdot}4$ o sus análogas $17-3x=58$ versus $14x=58$. Otras expresiones tales como $926-167-167$ versus $926-(167+167)$ versus $926-167+167$ versus $926+167-167$, o sus análogas en simbolismo algebraico, hacen referencia al papel de los paréntesis en las expresiones. Comparar las expresiones $27-5+3$ versus $27-8$, o sus análogas algebraicas $x-5+3=31$ versus $x-8=31$, o indagar en las diferentes formas de operar/simplificar las expresiones 237+89−89+267−92+92 y $15x+7x-7x+9x-5x+5x$, permite tratar en el aula la vinculación de cada número con el símbolo que le precede que suele ser una fuente de dificultades tanto en el contexto aritmético como en el algebraico (Linchevski y Livneh, 1999).

Una característica a destacar de esta actividad es que se puede adaptar a todos los niveles educativos variando el tipo de expresiones que se consideran. A su vez, a través de la inclusión de variedad de expresiones y al enfatizar la búsqueda de variadas formas de abordar una misma expresión, se permite la participación de alumnos con diferentes habilidades.

Es importante destacar el especial papel que tiene aquí los números. Al utilizarse igualdades basadas en propiedades aritméticas, hay una generalidad que se percibe en cada grupo de igualdades: la propiedad conmutativa, la relación complementaria de la suma y la resta… Los números están actuando aquí "casi como variables"[4]. Sin el uso de símbolos, se dirige la atención de los alumnos a la estructura de las expresiones. Un aspecto importante a distinguir es qué varía y qué permanece constante. Si la atención de los alumnos está únicamente en el cálculo o en los detalles parecerá para ellos que todo varía de una expresión a otra y que no hay nada en común. La atención a la estructura es lo que permite identificar los elementos que permanecen constantes.

A continuación indicamos otras propuestas, extraídas de los textos Watson y Mason (2005) y Zaskis y Campbell (2006), en las que se hace uso de los ejemplos para promover la apreciación de estructura por alumnos de Educación Primaria o Secundaria.

1.-Proponer un ejemplo con ciertas restricciones.

Actividad 1. Propón una ecuación de segundo grado que sólo tenga una solución.

Según las restricciones que se impongan se condicionará qué aspectos de la estructura de las ecuaciones se pretende que se trabajen. Podemos limitar el número de soluciones, los coeficientes de las variables, o el tipo de representación gráfica de la función que define la ecuación… Todas estas restricciones obligan al alumno a centrar su atención en la estructura de la ecuación que debe construir.

2.-"Y otro, y otro"

Esta es una extensión de la actividad anterior. Una vez que los alumnos han construido algún ejemplo que cumpla las restricciones indicadas, que propongan otro, y otro más,…. De este modo, si el alumno ha obtenido el primer ejemplo por ensayo y error se le fuerza a atender a los elementos de la estructura relacionados con los requisitos impuestos.

3.-Hazlo más difícil

Esta es otra extensión de la actividad "Propón un ejemplo con restricciones". En este caso, tras haber propuesto uno o varios ejemplos que cumplan las restricciones dadas, se pide al alumno que proponga otro más difícil, y luego otro más difícil, y otro más aún… (el significado de difícil podemos dejarlo a interpretación del alumno o podemos precisarlo nosotros, por ejemplo, pidiendo que tenga números más grandes, o mayor número de operaciones, expresiones algebraicas más complejas, que no se vaya a parecer al que escriban sus compañeros...). La actividad se hace accesible a todos los alumnos porque cada uno puede partir de su ejemplo e ir complicándolo progresivamente a su gusto. Al pedirle que hagan su ejemplo cada vez más complejo se podrá observar las posibilidades que ponen en juego (e.g. tipos de números: naturales, racionales,…) a la hora de trabajar con las expresiones algebraicas/aritméticas en cuestión.

4.-Deshacer

Actividad 4a. Sabiendo que la expresión que ha resultado al simplificar es 3x + 1. ¿Cuál puede ser la expresión de partida?

Actividad 4b. Sabiendo que el resultado de una operación ha sido 32 ¿Cuál puede ser la expresión de partida?

En este caso, al contrario de lo que es habitual se le da al alumno el resultado ("la solución") de un proceso de cálculo o de simplificación y se pretende que proponga cual podía ser la expresión inicial. Esta actividad se puede enriquecer imponiendo unas características determinadas a la expresión de partida. Por ejemplo, un determinado número de términos, unas determinadas operaciones… Las dos actividades previas, "Y otro, y otro" y "Hazlo más difícil" también pueden presentarse como extensiones de este tipo de actividad.

5.-Añade restricciones secuencialmente

Actividad 5a. Escribe lo siguiente en el orden que se indica:

a) un número natural que contenga más de dos factores propios
b) un número que contenga más de dos factores propios, dos de ellos iguales entre si.
c) un número que contenga exactamente 4 factores propios, dos de ellos iguales entre si.

Ahora vuelve y revisa tus respuestas; cada uno de los ejemplos propuesto en cada apartado no debe cumplir la condición que se indica en el apartado que le sigue.

Actividad 5b. Escribe lo siguiente en el orden que se indica:
a) el producto de dos expresiones algebraicas, con una sola incógnita, a las que puedas aplicar la igualdad notable $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$,
b) el producto de dos expresiones algebraicas, con una sola incógnita, a las que puedas aplicar la igualdad notable $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, *tales que los coeficientes de la incógnita sean números pares,*
c) el producto de dos expresiones algebraicas, con una sola incógnita, a las que puedas aplicar la igualdad notable $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, *tales que los coeficientes de la incógnita sean números pares y los términos independiente sean fracciones impropias.*

Ahora vuelve y revisa tus respuestas; cada uno de los ejemplos propuesto en cada apartado no debe cumplir la condición que se indica en el apartado que le sigue.

Esta actividad es semejante a las anteriores pero, en este caso, el último requisito que impone volver hacia atrás, fuerza a reflexionar sobre el modo en que cada una de las restricciones influye en el tipo de expresiones que se pueden proponer como ejemplos.

6.-Caracteriza todos los objetos que satisfacen una serie de restricciones

Esta actividad busca la generalización de ciertas relaciones a partir de la consideración de varios casos particulares. La cuestión a plantear a los alumnos es ¿qué hay que hacer para construir más ejemplos que cumplan las mismas condiciones? ¿Qué método habéis usado? ¿Qué podemos decir que todos estos ejemplos cumplan/tengan en común?

Esta actividad es conveniente proponerla una vez los alumnos han generado bastantes ejemplos que cumplan unas restricciones dadas, puesto que se espera la verbalización de los elementos de la estructura de dichas expresiones que han estado utilizando.

Las tareas descritas basadas en el uso de ejemplos, poseen ciertas características que les hace significativas en la enseñanza. En primer lugar, resultan muy motivadoras para los alumnos. Durante su realización se puede animar a que sean creativos sugiriéndoles que intenten que sus ejemplos no coincidan con los de ningún otro compañero. Además, son accesibles a alumnos de todas las edades, al variarse los requisitos de los ejemplos que se requieren al alumno, así como a grupos de alumnos de diversas habilidades pues cada uno de ellos construirá sus propios ejemplos.

Aunque aquí se han presentado estas actividades por su potencial para promover el desarrollo de sentido estructural y la percepción de estructura por parte de los alumnos, el mismo esquema puede adaptarse a otros contenidos y dar lugar a actividades de geometría, estadística, medida o relacionadas con otros conceptos aritméticos o algebraicos. En uno u otro contexto, el acto de crear ejemplos ayuda a la construcción y/o extensión de significados; la reflexión en la variedad de ejemplos posibles afecta a la cognición de los alumnos; y los ejemplos producidos por ellos permiten al docente acceder a sus conocimientos y al modo en que dan sentido y perciben diversos conceptos o representaciones matemáticas (Watson y Mason, 2005). ■

NOTAS

[1] A esta estructura se le denomina también estructura sintáctica (Kirshner, 1989) o superficial (Kieran, 1991) de una expresión.

[2] Por definición las igualdades han de ser proposiciones verdaderas, no obstante en este trabajo somos menos restrictivos con el término para evitar la introducción de otro término y así facilitar la comprensión del documento.

[3] En trabajos previos hemos observado que las igualdades abiertas son útiles para revelar y desafiar la comprensión de los alumnos del signo igual, mientras que las igualdades cerradas verdaderas o falsas son de mayor utilidad cuando se quiere promover que los alumnos atiendan a la estructura de la igualdad pues ayudan a desafiar su tendencia al cálculo. Cuando los alumnos encuentran un recuadro que completar, muestran mayor tendencia a realizar los cálculos (Carpenter et al., 2003; Castro y Molina, 2007).

[4] Quasivariables en términos de Fujii y Stephens (2001).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic y algebra in elementary school.* Portsmouth: Heinemann.

Castro, E. y Molina, M (2007). Desarrollo de pensamiento relacional mediante trabajo con igualdades numéricas en aritmética básica. *Educación Matemática,* 19(2), 67-94.

Castro E., Rico, L. y Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias*, *15*(3), 361-371.

Fujii, T., y Stephens, M. (2001). Fostering an understanding of algebraic generalisation through numerical expressions: The role of quasi-variables. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (pp. 258-264). Melbourne: University of Melbourne.

Hejny, M., Jirotkova, D. y Kratochvilova J. (2006). Early conceptual thinking. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 289-296). Prague, Czech Republic: PME 30.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: the effect of brackets. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Bergen, (Vol. 3; pp. 49-56). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: an unexpected result. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, (Vol. 3; pp. 305-312). Praga: PME.

Kieran, C. (1991). A procedural–structural perspective on Algebra Research. En F. Furinghetti (Ed), *Proceedings of the Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 2; pp. 245-253). Assisi, Italy: PME Program Committee.

Kirsher, D. (1989). The visual syntax of algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(3), 274-287

Linchevski, L. y Livneh, D. (1999). Structural Sense: the relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics, 40*(2), 173-196.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de Primaria*. Tesis doctoral, Universidad de Granada. Disponible en http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/MolinaM06-2822.PDF

Pierce, R., y Stacey, K. (2001). A Framework for Algebraic Insight. In J. Bobis, B. Perry, M. Mitchelmore (Eds.), *Numeracy and Beyond. Proceedings of the 24th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia,* (Vol 2; pp. 418-425). Sydney: MERGA.

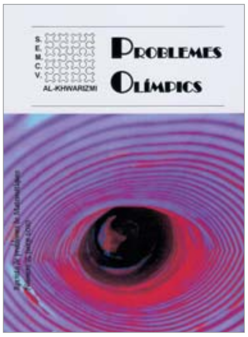
Watson, A**.** **y** Mason, J**.** (2005). *Mathematics as a constructive activity: learners generating examples. Studies in Mathematical Thinking and Learning*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Zaskis, R. y Campbell, S.R. (Eds.) (2006). *Number theory in mathematics education: perspectives and prospects.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

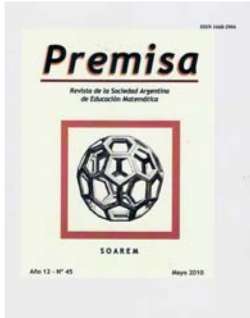
La autora agradece a la profesora Dra. Encarnación Castro sus comentarios a una versión previa de este trabajo presentada en las XIV JAEM (Girona, 2009). Este trabajo ha sido desarrollado dentro de un proyecto nacional de I+D+i, identificado con el código SEJ2006-09056, financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología y fondos FEDER.

Este artículo fue recibido en *Suma* en julio de 2009 y aceptado en septiembre de 2010

Publicaciones recibidas



Problemes olímpics
SEMCV Al Khwārizmī
N.º 55, juny 2010
Valencia
ISSN: 1578-1771



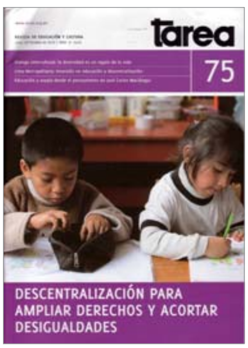
Premisa
Sociedad Argentina De Educación Matemática
Año 12 n.º 45 Mayo 2010
Buenos Aires
ISNN 1668-2904

XLa Tangente
Kangouru Italia
N.º 21, giugno 2010
Monza. Italia
ISSN: 1971-0445

Investigación y ciencia
Prensa Científica, S.A.
Septiembre 2010
Barcelona
ISSN: 0210136X

PNA. Revista de Investigación en Didáctica de las Matemáticas
Universidad de Granada
Vol. 5 n.º 1, septiemre 2010
ISSN 1886-1350

Grand N
Irem de Grenoble
N.º85, Avril 2010
Saint Martin d'Hères Cedex
ISSN: 0152-4682



Tarea
Tarea Asociación de Publicaciones Educativas
N.º 75, septiembre 2010
Lima
ISSN 0250-8819

La Gaceta de la RSME
RSME
Vol.13, n.º 3, 2010
Madrid
ISNN 1138-8927

suma+ 65
Noviembre 2010, pp. 17-21

El concepto de probabilidad en la publicidad

El objetivo de este artículo es mostrar los diferentes conceptos de probabilidad a través de anuncios y noticias insertadas en la prensa escrita. Analizaremos el concepto de probabilidad preferentemente mediante la publicidad insertada en los diarios.

Palabras Clave: Probabilidad clásica, probabilidad de Von Mises, probabilidad subjetiva, publicidad, prensa diaria.

The concept of probability in the publicity

The aim of this article is to show the different concepts of probability through the advertisements and news insert in papers. We shall analyze the probability concept preferably through the publicity inserts in the daily newspapers.

Key words: Classic probability, Von Mises probability, subjective probability, publicity, daily newspapers.

Introducción

Es de sobra conocido que vivimos en una sociedad capitalista. Necesitamos producir y consumir más y más para que se produzca riqueza. La publicidad nos enseña continuamente productos, nuevos o no, con el afán de motivarnos a comprar.

Por otra parte, vivimos en una sociedad donde el azar, la incertidumbre, ocupa un lugar importante en nuestras vidas. La probabilidad nos mide el grado de incertidumbre o creencia en un suceso aleatorio.

Por tanto, parece lógico que también en los anuncios de productos se encuentre la probabilidad. Efectivamente, a lo largo de estas líneas mostraremos cómo podemos seguir a través de anuncios y noticias de recortes de la prensa escrita, los distintos conceptos de probabilidad. Vamos a analizar los conceptos de probabilidad que se han desarrollado a lo largo de la historia preferentemente mediante la publicidad insertada en los diarios.

La incertidumbre se nos presenta llena de grados. Por ejemplo, intuitivamente no es igualmente verosímil conseguir una suma de 12 al lanzar dos dados que una suma de 8.

Luego, necesitaremos medir el grado de verosimilitud de cada acontecimiento incierto. A la medida de ese grado de verosimilitud la denominamos probabilidad. En la parte final de este trabajo, mostramos un anuncio de una empresa que gestiona fondos de inversión, donde se representa la incertidumbre por un caballo que es domado por una chica. Nosotros dominaremos la incertidumbre a través de la probabilidad y la acotaremos en una escala de 0 a 1.

Definición clásica de probabilidad o de Laplace

Queremos dar una medida de la ocurrencia de un suceso en un experimento aleatorio.

Laplace, en 1812, define la probabilidad de un suceso como cociente entre el número de casos favorables y el total de casos posibles, siempre que se cumplan dos hipótesis necesarias: todos los sucesos elementales han de ser igualmente favorables y el número total de casos favorables ha de ser finito.

Gabriel Ruiz Garzón
Departamento de Estadística e I.O. Universidad de Cádiz

El anuncio del Tesoro Público (figura 1), juega con la falta de conocimiento del personal, en general, del cálculo de probabilidades. La pregunta que hace el crupier en su camisa es fácil de responder: es 1/36, un caso favorable de 36 casos posibles. Pero la agencia contrapone el temor que provoca el desconocimiento de la probabilidad por la que se nos pregunta, con la seguridad de una inversión garantizada por el Estado.

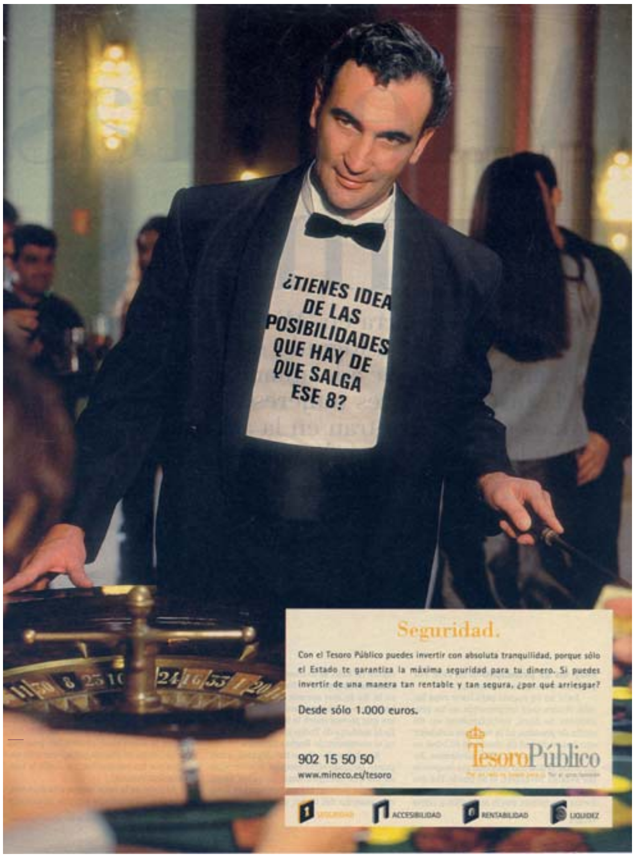


Figura 1

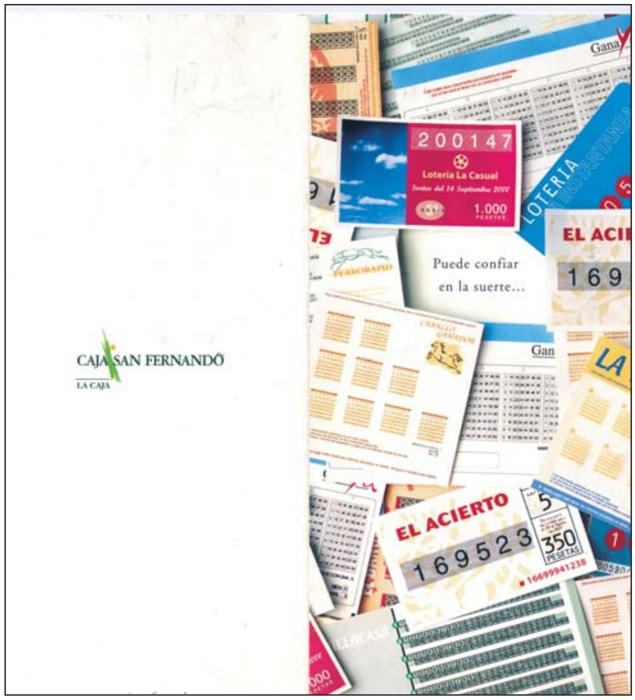


Figura 2

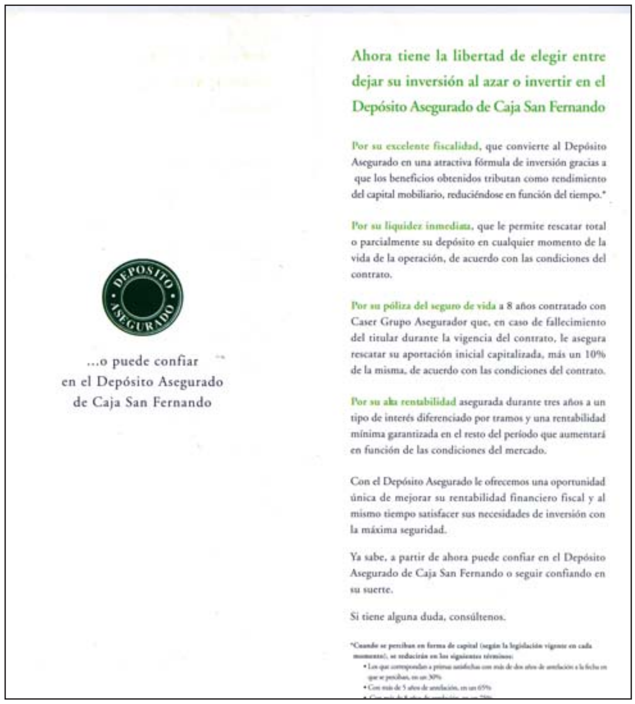


Figura 3

Otro recorte de un tríptico de la Caja San Fernando (figuras 2 y 3) vuelve a mostrar en el anverso distintos juegos de azar, y lo contrapone en el reverso con la seguridad de los depósitos ofrecidos por la caja de ahorros (por lo menos antes del crash bursátil actual).

La definición clásica presenta inconvenientes que hacen su aplicación muy limitada. Por ejemplo, un objeto del experimento aleatorio, un dado por ejemplo, debe ser ideal. Pero no existe ningún dado (o moneda, baraja, o ruleta, etc.) ideal, perfecto y simétrico, en cuanto a su forma y construcción. Bien saben de esto algunos clanes familiares, como el de los Pelayo, que basándose en la observación de dichas irregularidades apuestan grandes cantidades de dinero en esas casillas que, por defectos en su construcción, son más probables.

Definición frecuencialista o de Von Mises

Richard Von Mises, en 1919, descontento con la definición de Laplace de probabilidad, que exigía la equiprobablidad de casos posibles, da su definición basada en la frecuencia relativa de un gran número de pruebas.

Si repetimos el experimento N veces, llamamos frecuencia relativa del suceso A, que denotamos por *f*(A), al cociente entre el número de veces que éste se presenta y el total de pruebas. La frecuencia relativa no es más que una medida relativa y empírica de la ocurrencia de un suceso.

Es un hecho comprobado empíricamente que, la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse cuando el número de pruebas aumenta. La definición frecuencialista de probabilidad se basa en este hecho, y asigna como probabilidad al suceso A el número:

$$p(A)=\lim_{N\to\infty} f(A)=\lim_{N\to\infty}\frac{n(A)}{N}=\lim_{N\to\infty}\frac{fr.\ \ absoluta\ \ de\ \ A}{núm.\ \ total\ \ de\ \ pruebas}$$

Estas conclusiones llevan el nombre de Primera Ley de los Grandes Números: cuando el número de realizaciones de un experimento aleatorio crece mucho, la frecuencia relativa del suceso asociado se va acercando cada vez más y más hacia un cierto valor. Este valor se llama probabilidad del suceso. Luego, de la observación de las frecuencias, surge una abstracción: el concepto de probabilidad. La definición de Von Mises se puede aplicar a cualquier proceso repetitivo.

La figura 4, imagino que trata de tranquilizar a los usuarios del avión y en ese sentido cifra el riesgo de accidente de avión, a través de la teoría frecuencialista de probabilidad, en 3/2000000. Otra cosa muy diferente es que el recuerdo del accidente del vuelo 5022 de *Spanair*, el 20 agosto de 2008, en Barajas prevalezca a la razón.

La Ley de los Grandes Números fue formulada en la famosa monografía *Ars Conjectandi* (Arte de la Conjetura), de Jacques Bernoulli, aunque publicada después de su muerte en 1713 y editada por su sobrino Nicolás. De sus cuatro partes, la primera es una revisión del tratado de Huygens *De ratiociniis in alae ludo.* La segunda trata del cálculo combinatorio. En la tercera resuelve una serie de ejemplos relacionados con juegos de azar y es en la cuarta parte donde formula la Ley de los Grandes Números. Jacques distingue dos maneras de conseguir asignar probabilidades a los sucesos, bien a través de la equiprobabilidad de los sucesos, bien a través de la frecuencia relativa de los resultados del experimento. Estudió la aplicación de la probabilidad a problemas judiciales como los repartos de herencias o a la condena de una persona en base a la combinación de las probabilidades asignadas a diversas pruebas. Esta cuarta parte quedó inconclusa por la prematura muerte de Jacques. Su sobrino Nicolás comentaba en el prefacio que era “demasiado joven e inexperto para completarla”.

Figura 4

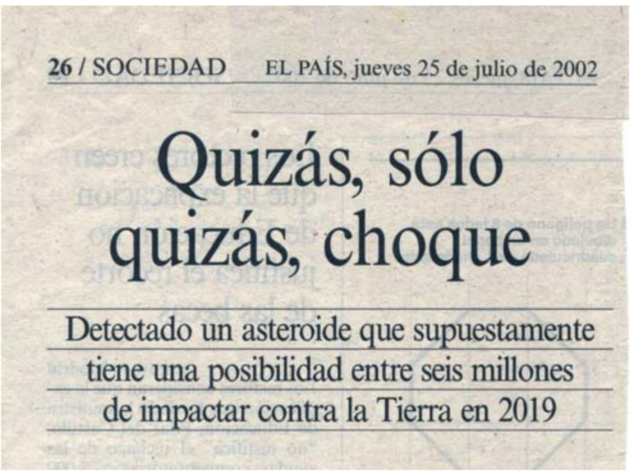
Otra de las preocupaciones de Nicolás Bernoulli era el exceso de niños frente al de niñas en los registros de las parroquias de Londres. Mientras este exceso lo atribuyó John Arbuthnot a una cierta intervención divina, Nicolás, utilizando la Ley de los Grandes Números de su tío Jacques, explicaba este exceso probando que la citada proporción de nacidos estaba más cerca de 18:17 que del 50:50 y se podía explicar lanzando un teórico dado de 35 caras donde 18 representaran nacimientos de hombres y 17 de mujeres.

Von Mises no sólo fue contrario a la teoría de la probabilidad de Laplace, sino también a la definición de probabilidad de Kolmogorov, basada en la teoría de la medida. En tal sentido escribió un capítulo de su libro *Probability, Statistics and Truth*, titulado *¿Una parte de la Teoría de Conjuntos?, ¡No!.*

Definición subjetiva de probabilidad

Este concepto se utiliza ante la imposibilidad de aplicar los anteriores. Es evidente la existencia de fenómenos que no se prestan a asignar a los sucesos la misma oportunidad de aparecer (como en el concepto clásico de probabilidad), o bien no es posible realizar el experimento un número elevado de veces (como exige la definición frecuencialista), por lo que nos vemos obligados a asignar probabilidades según un cierto criterio intuitivo, haciendo un juicio razonado, pero totalmente arbitrario y subjetivo del grado de incertidumbre de un determinado suceso. La probabilidad personal o subjetiva es la valoración que hace un individuo de las posibilidades de obtener un resultado, es decir, la probabilidad se podría definir como las condiciones en que un individuo estaría dispuesto a apostar por ese suceso.

El concepto subjetivo de probabilidad aparece en algunas "impactantes" noticias y recortes de prensa.


26 / SOCIEDAD EL PAÍS, jueves 25 de julio de 2002

Quizás, sólo quizás, choque

Detectado un asteroide que supuestamente tiene una posibilidad entre seis millones de impactar contra la Tierra en 2019

Figura 5

El primero trata de un asteroide, el NT7, que orbita alrededor de la Tierra cada 2,3 años, y el descubridor de ese cuerpo celeste cifra la probabilidad de que dicho objeto impacte con la Tierra es de 1/6000000. Aunque la noticia nos puede causar cierta zozobra (no hay más que recordar como desaparecieron los dinosaurios de la faz de la Tierra), el Director del Observatorio que lo ha descubierto comenta que: "me parece más fácil ganar el premio de la lotería".

Georges Leclerc, Conde de Buffon, para resolver la paradoja de S. Petersburgo despreciaba las probabilidades pequeñas, concretamente menores que 1/10000, ya que, según sus tablas de mortalidad, la probabilidad de que un hombre de 56 años muera en el transcurso de un día era de 1/10189 y si, para un hombre de esa edad, dicha probabilidad no le causa temor y le parece pequeña, con igual motivo nos tendría que parecer dichas probabilidades en el cálculo de la paradoja o en el recorte del asteroide, añadimos nosotros.

El siguiente recorte de prensa se corresponde con el de un anuncio de una compañía de seguros, concretamente Zurich, en la que se cifra en la cantidad de 1/1000000 la probabilidad de que un satélite artificial caiga a la Tierra y cause un accidente. El objetivo del anunciante es, imagino, hacernos creer que tal hecho nos puede pasar con mayor probabilidad que la ofrecida, y que por tanto debemos correr a la oficina más próxima a asegurarnos. Una vez más no debemos confundir la probabilidad asociada a tal hecho, con la espectacularidad de la imagen que nos ofrecen.

Figura 6

Epílogo

En fin, que no hay mejor antídoto contra los temores que un conocimiento, lo más exacto y exhaustivo que se pueda, del concepto y rango de variación de la probabilidad y la comparación de dichos valores con los de otros sucesos aleatorios de nuestra vida diaria.

Este artículo demuestra que la prensa diaria, en particular los anuncios insertados en la prensa escrita, pueden ser un buen recurso didáctico para nuestras clases y gracias a sus páginas podemos tratar temas como el de las diversas concepciones de probabilidad.

También fomenta el sentido crítico de nuestros alumnos tan acostumbrados a tragarse sin discusión cualquier noticia de prensa, de radio o televisión. El conocimiento por parte de nuestros alumnos de la probabilidad ("sentido común expresado con números", en palabras de Laplace), aporta luz y razón donde la publicidad pone exageración y temor.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

García Ramos, J. A., Ramos González, C. y Ruiz Garzón, G. (2006). *Estadística Administrativa* Cádiz: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.

Ruiz Garzón, G. (2007): *Protagonistas de la Estadística. Una Historia de la Estadística en Cómic*. Oviedo: Septem Ediciones.

Este artículo fue recibido en *Suma* en enero de 2008 y aceptado en julio de 2010

SANSANA Asociación para el desarrollo escolar en **Burkina Faso**

Qué hacemos

Construir una escuela con tres aulas para alumnos de 6 a 12 años y dos viviendas para profesores. Proveer **material escolar** y uniformes.
Alimentar a los alumnos mediante **un comedor**, **una huerta**, un campo de cultivo con dos bueyes y un molino. Se pretende que la escuela sea autónoma y sostenible.

Dónde

Burkina Faso, África, país que ocupa el lugar 177º de 182 en el índice de desarrollo humano de la ONU.

Quiénes somos

Un grupo de personas interesadas en la solidaridad y la cooperación unidas en la **Asociación Sansana para el desarrollo escolar en Burkina Faso.** Llevamos trabajando algo más de un año, las aulas ya estan construidas, pero faltan muchas cosas.

Qué pedimos

Colaboración. La Asociación no tiene gastos de gestión. El 100% de las cuotas de los socios van a parar al proyecto. **Hazte socio** o **ven a trabajar** con nosotros en el proyecto.

Cómo puedes participar

Visita **www.escuelasansana.org** o escríbenos a **escuelasansana@gmail.com .**

Profesores de matemáticas participantes en el proyecto.

Fernando **ALONSO**
Antonio **ARRIBAS**
Inmaculada **FUENTES**
Santiago **GUTIÉRREZ**
Vicente **RIVIÈRE**
Carmen **da VEIGA**

suma+ 65
Noviembre 2010, pp. 23-32

Cálculo de la dimensión fractal del contorno de una ciudad como trabajo de investigación en secundaria

Presentamos una actividad que relaciona los fractales, y más concretamente la dimensión fractal, con las ciudades. Se realiza una breve incursión en el concepto de fractal y dimensión fractal para pasar posteriormente a una ejemplificación y una propuesta de trabajo en el que mostramos un posible orden en los pasos a seguir para estimar la dimensión fractal del contorno de una ciudad. Mostramos los resultados obtenidos por alumnos de 4º de ESO en el cálculo de la dimensión fractal del contorno de las localidades a las que pertenecen los alumnos del centro con el objetivo de comparar la "rugosidad" de todas ellas.

Palabras Clave: Fractal, dimensión fractal, innovación didáctica, investigación, secundaria y bachillerato.

Calculation of fractal dimension of the outline of a city high school research paper

We present an activity that relates fractals, and more specifically the fractal dimension, with the cities. It offers a brief incursion into the concept of fractal and fractal dimension, and afterwards, it offers an example and a work proposal, indicating a possible order of the steps required to estimate the fractal dimension of the outline of a city. We show the results obtained by the students of 4º ESO on the calculation of the fractal dimension of the localities to which the students belong to, with the aim to compare the roughness of the contour of all of them.

Key words: Fractal, fractal dimension, educational innovation, research, secondary and high school.

En memoria de Benoît Mandelbrot

Introducción

Desde hace sólo unas décadas los fractales han aparecido y se han hecho hueco entre nosotros con multitud de aplicaciones.

Presentamos una actividad que relaciona los fractales, y más concretamente la dimensión fractal, con las ciudades. Es necesario unos ciertos conocimientos en el concepto de fractal y dimensión fractal para poder realizar la actividad, pero seguro que el esfuerzo merece la pena al comprobar que estamos "rodeados" por estos entes matemáticos que nos pueden ayudar a conocer nuestro entorno.

Para ello realizaremos una breve incursión en el concepto de fractal y dimensión fractal, pasando posteriormente a una propuesta de trabajo en el que mostramos un posible orden en los pasos a seguir para estimar la dimensión fractal del contorno de una ciudad. Para facilitar el trabajo mostramos una ejemplificación con la ciudad de La Unión (Murcia) como consecuencia de preparar una actividad para el Día escolar de las Matemáticas 2009[1] , que tuvo como tema "La ciudad y las Matemáticas", y de la elaboración de materiales para la VIII Semana Matemática[2]:

πk2 X los Fractales

que realizamos durante el curso 2009-2010 en el IES Sierra Minera de dicha localidad. Mostramos los resultados obtenidos por alumnos de 4º de ESO en el cálculo de la dimensión fractal de las localidades a las que pertenecen los chicos y chicas del centro con el objetivo de comparar la "rugosidad" del contorno de todas ellas.

Concepto de Fractal

Las formas que se encuentran en el mundo real carecen de la simplicidad de una línea, un cuadrado o un cubo: poseen una

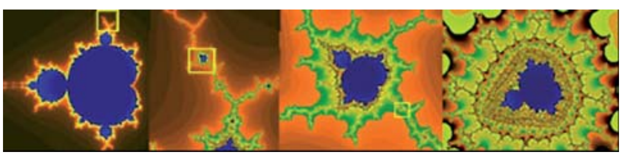
Joaquín Comas Roqueta
IES Sierra Minera. La Unión (Murcia)
María Jesús Herrera Ponz
IES Thiar. Pilar de la Horadada (Alicante)

riqueza de detalles, complejidad e irregularidad que no pueden describirse con la Geometría clásica, la Geometría de Euclides. Su descripción por medio de métodos tradicionales es insuficiente, lo que ha motivado la búsqueda de nuevas formas de analizar y describir objetos, ya sean reales o abstractos.

Como respuesta a esta búsqueda, Benoît Mandelbrot desarrolló una nueva geometría de la naturaleza que según sus palabras "permite describir muchas de las formas irregulares y fragmentadas que nos rodean, dando lugar a teorías coherentes, identificando una serie de formas que llamo fractales" (Mandelbrot, 1977). Esta nueva geometría intenta cuantificar la textura o rugosidad de los objetos, expresándola mediante valores numéricos.

Benoît Mandelbrot

Mandelbrot comenzó a aplicar esta nueva geometría en una serie de campos, y su camino ha sido seguido por numerosos investigadores que se han interesado en su trabajo, promoviendo la aplicación de la geometría fractal a situaciones concretas.



Inmersión en el fractal de Mandelbrot

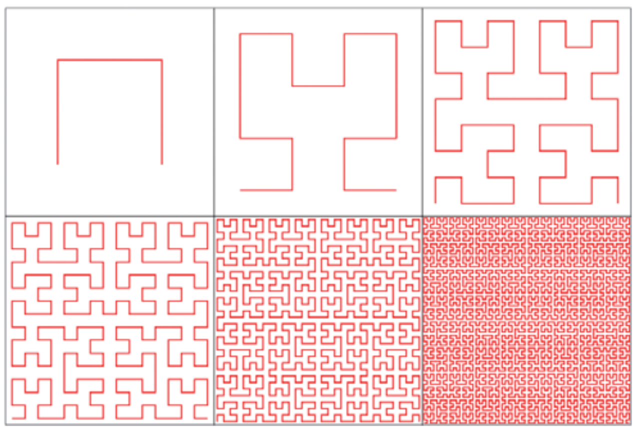
Sin entrar en una definición formal de lo que es un fractal, vamos a enumerar sus principales características:

- Un fractal tiene una estructura fina, es decir, podemos encontrar la estructura en escalas arbitrariamente pequeñas.
- Un fractal es demasiado irregular para ser descrito con la Geometría tradicional, tanto local como globalmente.
- Con frecuencia un fractal tiene una cierta forma de autosemejanza, quizás aproximada o estadística.
- En general, la "dimensión fractal" es mayor que su dimensión topológica.

El campo de aplicación de la geometría fractal es tan amplio que abarca desde la física, biología, medicina, geografía, mineralogía, química, hasta la generación de imágenes cinematográficas y compresión de imágenes, por citar sólo algunos ejemplos. A medida que los investigadores de las diferentes disciplinas conocen la geometría fractal, mayores son las aplicaciones de ésta.

Dimensión Fractal

La noción de "dimensión fractal" provee una forma de medir la "rugosidad" de una curva. Normalmente se consideran a las líneas como de dimensión 1. Sin embargo, una curva rugosa que recorra una superficie, en el extremo puede ser tan rugosa que efectivamente llene la superficie en la cual se encuentra, en cuyo caso tendría dimensión 2, como por ejemplo la curva de Hilbert.

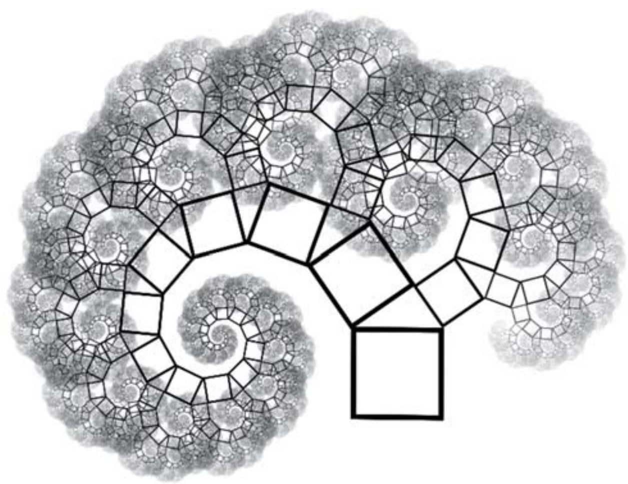


Curva de Hilbert

Se puede pensar por lo tanto en la rugosidad como en un incremento de la dimensión: una curva rugosa tiene dimensión entre 1 y 2, mientras que una superficie rugosa tiene dimensión entre 2 y 3. Desde este punto de vista, rectas y planos pueden pensarse como casos límite. En una curva, la dimensión fractal es un número que caracteriza la forma en la cual la longitud medida entre dos puntos dados crece mientras la escala decrece.

Un fractal determinista, en cualquier escala de observación, dará el mismo valor de dimensión fractal, o sea, es perfectamente autosemejante. Pero, el contorno de una ciudad no es un fractal determinista, con lo que la comprobación de autosemejanza no registrará valores de dimensión fractal idénticos, aunque podemos admitir, al encontrar valores similares, que la forma muestra propiedades análogas a la autosemejanza fractal. Esto es en parte debido a que la morfología de una ciudad es el resultado de una multitud de procesos físicos y sociales. Estos incluyen la tecnología de la construcción, patrones de tenencia de la tierra, el tamaño de los terrenos con construcciones, la demanda de espacios residenciales, la movilidad de la población, y la eficiencia y disponibilidad de la tecnología de los transportes.

Todos estos procesos se manifiestan a diferentes escalas, por ejemplo, las tecnologías de construcción se manifiestan a escalas relativamente pequeñas, y las de transporte a escalas mayores. Se puede concluir razonablemente que esos procesos se reflejen en el contorno de la ciudad, y por lo tanto en su irregularidad y dimensión fractal.



Ejemplo de fractal determinista: Árbol Pitagórico

Propuesta de trabajo

Con el objetivo de calcular la rugosidad del contorno de una ciudad (consideramos dicho contorno como un fractal aleatorio o estadístico) se pueden aplicar técnicas de geometría fractal, en particular estimaciones de la dimensión fractal del contorno de la ciudad.

Para la obtención de los contorno de la ciudad se emplea el análisis visual de imágenes por satélites (en nuestro caso hemos utilizado el programa gratuito Google Earth).

Una vez obtenida la imagen por satélite se digitaliza el contorno con un programa de dibujo y se debe pasar a imagen binaria en formato TIFF o BMP.

En este tipo de análisis, se encuentran problemas usuales de definición para determinar el límite entre la ciudad y su entorno, y para ello es necesario aplicar ciertas reglas de aproximación. Por lo general, se excluyen parcelas y otros terrenos de uso rural cerca del borde, pero grandes parcelas que forman parte de establecimientos industriales se incluyen solamente si existen desarrollos urbanos próximos.

Cada uno de los contornos obtenidos es una curva de la que se puede calcular computacionalmente una estimación de la dimensión fractal mediante el método de Conteo de Cajas[3] (Box Counting), utilizando para ello el programa Fractalyse desarrollado por el Research centre Théna (CNRS-Université de Franche-Comté) y que se puede descargar gratuitamente desde la página http://www.fractalyse.org/en-home.html. Podemos encontrar otros programas como ImageJ desarrollado por Wayne Rasband del National Institutes of Healtn.

Actividad paso a paso

1. Conocer los conceptos de fractal y de dimensión fractal. Para ello se pueden consultar el visionado del vídeo de la *colección Más por Menos*: "Fractales. La Geometría del Caos" e innumerables páginas web como las que hemos seleccionado:
   http://www.arrakis.es/~sysifus/
   http://coco.ccu.uniovi.es/geofractal/
   http://centros5.pntic.mec.es/sierrami/dematesna/demates23/opciones/investigacion/fractales/fractales.htm
   http://centros5.pntic.mec.es/sierrami/dematesna/demates56/opciones/investigaciones%20matematicas%200506/Fractales/index.htm

2. Establecer el objetivo del trabajo: estimar la dimensión fractal del contorno de la localidad con el propósito de poder tener información sobre su "rugosidad". Para ello puede ser conveniente revisar la ejemplificación que se presenta más adelante sobre la localidad de La Unión (Murcia).

3. Obtener una imagen por satélite de la localidad a la menor escala en que se pueda ver todo su contorno. Para ello se pueden utilizar los programas Google Maps o Google Earth.

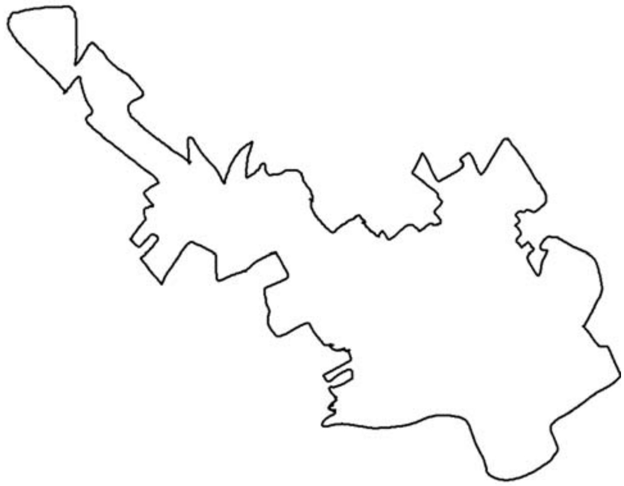
4. Utilizar un programa de dibujo (nosotros hemos utilizado el programa Paint Shop Pro 5) para seleccionar el contorno de la localidad, quedarnos únicamente con dicho contorno (mediante el uso de capas) y pasar la imagen a formato bmp con una profundidad de dos colores (así lo

requiere el programa informático que calcula la dimensión fractal).

5. Ejecutar el programa Fractalyse, cargar la imagen obtenida, y seleccionar "Analyse/Box" y dentro del menú emergente el tamaño de Caja como exponencial y el algoritmo tipo rejilla. Obtendremos entre otros datos la dimensión fractal (dim) buscada.

6. Reflexionar sobre la "rugosidad" de la localidad revisando todos los datos obtenidos y comparando la dimensión con la de otras localidades.

7. Completar el estudio trabajando con las coordenadas geográficas del lugar, condiciones orográficas e información de interés sobre la localidad.



Contorno de La Unión

En el paso 5, ejecutamos el programa Fractalyse y cargamos la imagen del contorno obtenida.

Ejemplificación: dimensión fractal de La Unión (Murcia)

Los pasos 1 y 2 son preparatorios y en nuestro caso lo hemos trabajado con los alumnos tanto en clase como en casa.

En el paso 3, utilizando el programa Google Earth obtenemos la siguiente imagen:

Vista de La Unión

En el paso 4, utilizando un programa de dibujo que permita trabajar con capas, podemos obtener una imagen al remarcar el contorno. Esto conlleva un cierto grado de subjetividad para establecer la curva que determina el contorno y conviene previamente establecer qué entendemos por contorno (si se incluye un polígono industrial, o una finca algo alejada…).

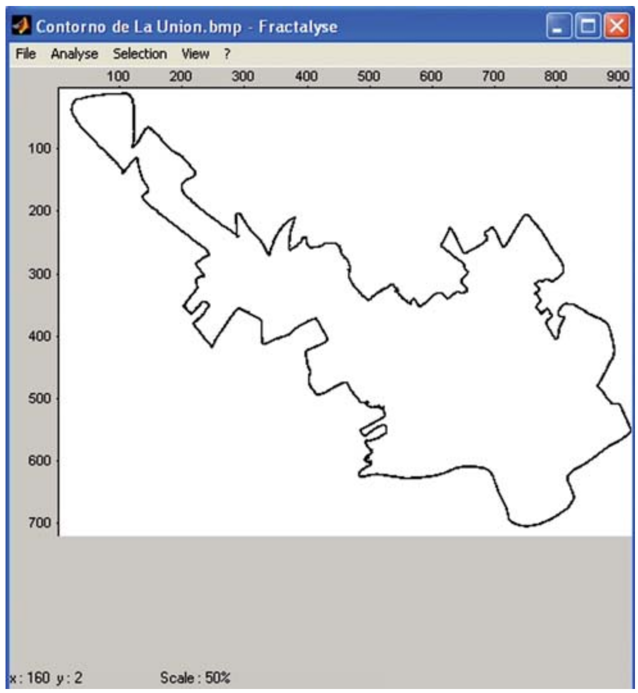
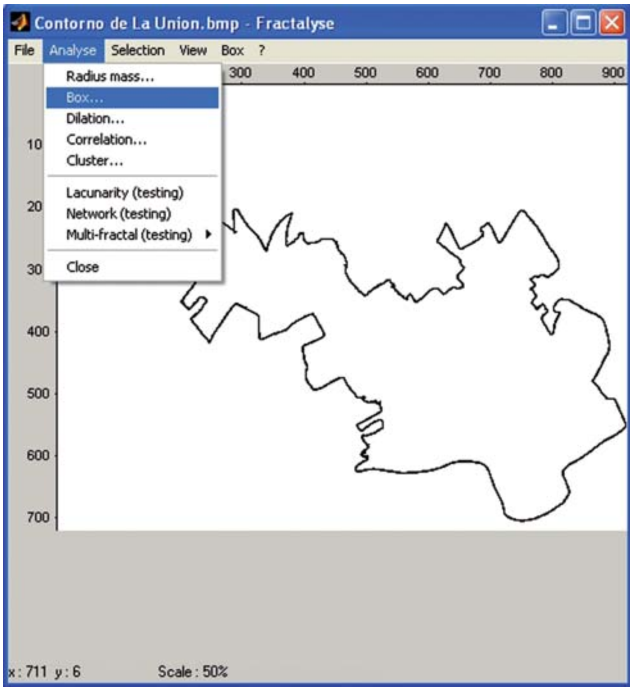


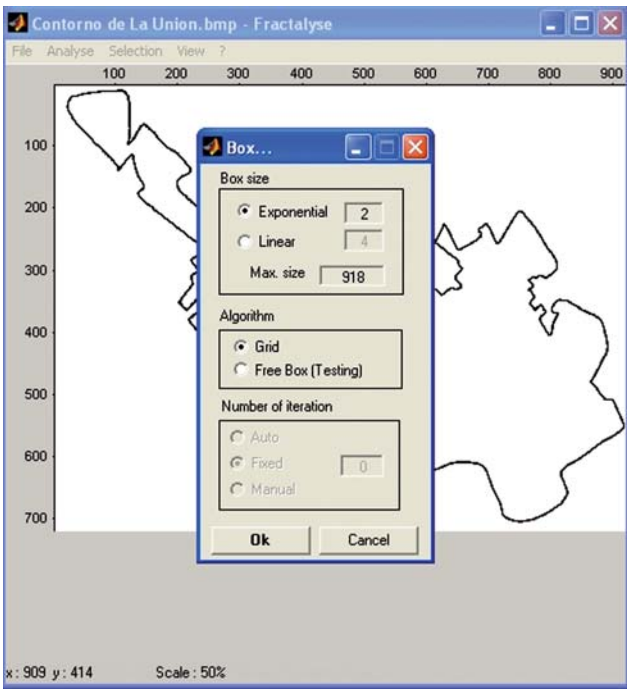
Imagen del contorno de La Unión cargada en el programa Fractalyse

Seleccionamos "Analyse/Box".



Selección del tipo de estimación

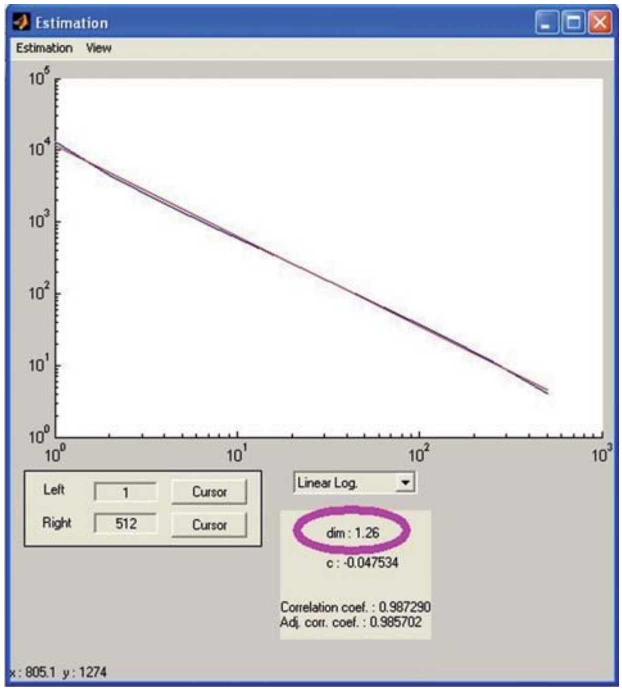
Dentro del menú emergente seleccionamos el tamaño de Caja como exponencial (Exponential) y el algoritmo tipo rejilla (Grid). Seleccionamos OK.



Selección de parámetros del tipo de estimación

Obtendremos entre otros datos la estimación de la dimensión fractal (dim) del contorno de La Unión que es 1,26.

En el paso 6 podemos concluir si comparamos con las dimensiones de otros localidades que La Unión tiene una un contorno algo rugoso, pero no en exceso.



Resultados obtenidos con la estimación

En el paso 7 vemos que la fotografía utilizada fue tomada por el satélite el 20 de julio de 2007 y la hemos "realizado" a 910 metros de altura. Las coordenadas geográficas de la localidad (tomando como punto de referencia la zona central de la localidad) son 37º 37' Norte y 0º 53' Oeste.

La Unión es un municipio de la Región de Murcia con unos 16.000 habitantes situado al sureste de la región, entre las playas del Mar Menor y el Mar Mediterráneo que goza de un paisaje único y distinto. Sus montañas pintadas de plomo y plata, mezcladas con pinceladas de hierro, manganeso, cinc, blenda o pirita, confieren al paisaje un estilo peculiar, marcado intensamente por la huella que la industria minera ha dejado a lo largo de siglos de actividad. Pertenece a la Comarca del Campo de Cartagena y al partido jurídico de Cartagena. El termino municipal está estructurado en dos pedanías además de la propia ciudad de La Unión, Roche y Portmán.

La economía de La Unión se basó durante mucho tiempo en la explotación de las minas de su sierra. Tras larga decadencia, nuevas iniciativas y procedimientos de explotación animaron la minería hacia los años 60. Agotadas o abandonadas por poco rentables las distintas explotaciones, La Unión se ha ido convirtiendo en una ciudad dormitorio de Cartagena. También tiene relativa importancia para La Unión el turismo, por su cercanía a las playas del Mar Menor. Asimismo, ha alcanzado celebridad internacional, a partir de su misma institución en 1960, el Festival del Cante de las Minas, donde cada año cobran nueva vida los cantes de la región (i.e., taranta, minera, cartagenera, murciana, etc.) junto a los demás subgéneros del flamenco *jondo*.

Alumno seleccionando el contorno de una localidad

Investigaciones realizadas por los alumnos

Como ya indicamos anteriormente, la experiencia que presentamos surgió ante la coincidencia de preparar una actividad para el Día escolar de las Matemáticas 2009 y de la elaboración de materiales para la VIII Semana Matemática:

πK2 X los Fractales

Llevábamos bastante tiempo queriendo realizar investigaciones con los alumnos que tuviesen como tema central los fractales y que fuesen en cierta medida novedosas. Estuvimos barajando varias posibilidades y después de invertir un buen número de horas en ver cuáles podíamos ofrecer a alumnos de 4º de ESO de la opción B de Matemáticas, vimos cuatro posibles temas que podían ser novedosos e interesantes para los alumnos.

> Un primer tema trataba de buscar fractales vistos desde el cielo en nuestro entorno, siguiendo el estupendo trabajo "Armonia fractal de Doñana y las marismas" sobre el parque natural de Doñana[4] .
>
> El segundo consistía en buscar fractales en el entorno.
>
> El tercer tema era el que presentamos y consistía en calcular la dimensión fractal del contorno de las localidades de los alumnos del centro.
>
> El cuarto tema seguía el mismo procedimiento que el segundo pero en este caso se quería calcular la dimensión fractal de la costa del entorno.


Alumnos exponiendo el trabajo a sus compañeros

Los alumnos a los que se les presentaron los trabajos de investigación conocían de cursos anteriores los fractales y un poco de sus principales propiedades. El trabajo tenía carácter voluntario (con el aliciente de poder conseguir hasta un punto extra en la nota) y se les presentó a principios del segundo trimestre del curso. Debían investigar por parejas sobre el tema que más les interesase, realizando el trabajo por escrito y una presentación multimedia que debían exponer al resto de sus compañeros. Se entregó un índice de referencia para cada trabajo[5] y a lo largo de tres sesiones durante la segunda evaluación se realizó una tutorización de los trabajos que iban realizando los alumnos fuera de clase (en algunas ocasiones los alumnos se quedaron a comer en el centro para poder utilizar los medios informáticos del centro). También aprovechamos los recreos para ir resolviendo dudas y utilizar los medios informáticos (especialmente la pizarra digital para realizar el contorno con la mayor precisión posible). Se trabajo en colaboración con el Departamento de Ciencias Sociales para que los alumnos pudieran completar el estudio trabajando con las coordenadas geográficas de los lugares, condiciones orográficas e informaciones de interés sobre las localidades, costas y el entorno.

Todos los alumnos de la clase realizaron trabajos de investigación y quizá el principal elemento motivador para trabajar era saber que eran investigaciones novedosas con las que podíamos adentrarnos por “sendas casi inexploradas”.

Durante el tercer trimestre los alumnos completaron los trabajos de investigación y los presentaron a sus compañeros.

Fueron dos los grupos que realizaron el trabajo de investigación sobre el cálculo de la dimensión fractal del contorno de las poblaciones. Se obtuvieron resultados similares (es prácticamente imposible obtener los mismos valores con los medios con los que hemos trabajado, principalmente ante la dificultad de determinar de forma unánime qué se entiende por contorno y por falta de resolución que ofrecen las fotografías en Google Maps y Google Earth).

A continuación se muestran las imágenes de cada localidad estudiadas con su contorno en azul y las dimensiones fractales obtenidas de menor a mayor:

Roche bajo: 1,221

Los Nietos: 1,237

Alumbres: 1,22

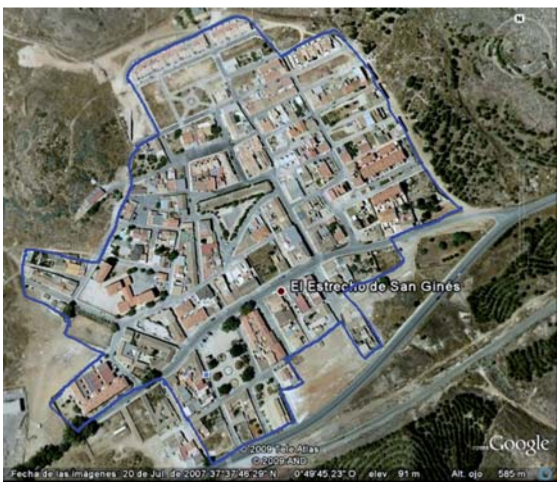
Llano del Beal: 1,244

Portman: 1,249

La Unión: 1,26

El Algar: 1,255

Roche alto: 1,273



Estrecho de San Ginés: 1,257

El Beal: 1,287

Cabe resaltar que para poder comparar la rugosidad debemos fijarnos en las centésimas y milésimas de los valores numéricos de las dimensiones fractales. Con los datos obtenidos podemos afirmar que el municipio con mayor dimensión fractal tiene es El Beal con 1,287, y el de menor dimensión fractal tiene es Alumbres con 1,22.

Todos los trabajos en formato pdf y las presentaciones se pueden ver en la página web *De Mates ... ¿Ná?* [6] , dentro de los Trabajos de Investigación del curso 2008-2009:

http://centros5.pntic.mec.es/sierrami/dematesna/demates89/opciones/investigaciones%20matematicas%200809/index.htm

Conclusiones

La estimación de la dimensión fractal del contorno de una ciudad puede ser una buena herramienta para sumergirnos en el apasionante mundo de los fractales y para descubrir alguna de sus múltiples aplicaciones.

La experiencia que hemos realizado desde el Departamento de Matemáticas con alumnos de 4º ESO así lo corrobora y esperamos que otros alumnos puedan probar su potencial para realizar investigaciones en Matemáticas.

Es importante tener en cuenta que el objetivo del cálculo de la dimensión fractal del contorno de una ciudad con alumnos de Secundaria quizá no esté tanto en el procedimiento del cálculo (algo en cierta forma mecánico) sino en la posibilidad de conocer el comportamiento y utilidad de los fractales mediante un trabajo de investigación, ayudando a reforzar la presencia de las matemáticas en nuestra sociedad. ■

NOTAS

[1] La actividad preparada con motivo del Día escolar de las Matemáticas sobre “La ciudad y las matemáticas” se puede visitar en la dirección http://www.fespm.es/CIUDAD/Actividades%20-%20JCR.pdf de la página web de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

[2] La Semana Matemática es una actividad-muestra en la que cada grupo de alumnos va pasando por una serie de aulas-taller con un orden previamente establecido, de forma que cada cierto tiempo van rotando los grupos por todas las aulas, sin coincidir dos grupos en una misma aula. Este evento se realiza durante varios días, agrupando a los alumnos por niveles educativos e invitando a participar a otros centros. Son los propios alumnos que han realizado los trabajos durante el curso los que presentan y controlan las diferentes aulas, adquiriendo una mayor responsabilidad y entrega a la hora de realizar esta actividad. Para obtener más información se puede visitar el artículo publicado en la revista Unión “Realización de una Semana Matemática” en la dirección:
http://www.fisem.org/paginas/union/info.php?id=322

[3] El método de conteo de cajas se basa en la propiedad fractal de autosemejanza. Consiste en cubrir la imagen con cajas de dimensión s y se seleccionan aquellas celdas que están ocupadas, hasta completar la imagen. Luego, se va cambiando s progresivamente por otras cajas más pequeñas, siguiendo una proporción (factor de escala) y nuevamente se seleccionan las cajas ocupadas. En cada paso se aplica la fórmula de Hausdorff-Besicovitch y si se desea se traza un gráfico de comportamiento escalar donde representamos: en el eje Y, el logaritmo de las celdas ocupadas en su totalidad (dividendo de la fórmula); en el eje X, el logaritmo de las celdas correspondientes al factor de escala (divisor de la fórmula). El cociente entre valores representa la pendiente de la línea resultante y proporciona el valor de la dimensión fractal.

[4] El trabajo es un paseo por las formas armónicas esculpidas por el barro, el tiempo y el agua en las marismas andaluzas, en el que se puede observar la presencia de la geometría fractal en la naturaleza. Se puede visitar el trabajo en la dirección http://www.armoniafractal.com/

[5] El índice orientativo entregado sobre el cálculo de la dimensión fractal del contorno de los municipios del entorno de La Unión era el siguiente:
- ¿Qué son los fractales? (Definición, Historia, tipos, dimensión fractal….)
- Objeto del estudio (qué se pretende, cómo se va a realizar, herramientas a utilizar…)
- Presentación de las dimensiones fractales calculadas (breve comentario sobre la situación geográfica de la localidad, un poco de su historia, cálculo de la dimensión…)
- Conclusiones.
- Bibliografía.

[6] Página web realizada por los alumnos de Matemáticas del I.E.S. Sierra Minera de La Unión (Murcia):
http://www.dematesna.es
Se realizó un artículo sobre la página en el número 50 de la revista Suma titulado “Una web por y para los alumnos de Matemáticas”.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Mandelbrot, B.B. (1977). *La Geometría Fractal de la Naturaleza*. Barcelona: Tusquets Editores.

Martín, M.A., Morán, M. y Reyes, M. (1995). *Iniciación al caos.* Colección Educación Matemática en Secundaria. Madrid: Editorial Síntesis.

Internet

Estudio comparado de la dimensión fractal aplicado al contorno de dos ciudades

http://www.geogra.uah.es/inicio/web_11_confibsig/PONENCIAS/2-057%20Peri-Antes-Serafini.pdf

Propuesta de medición de la dimensión fractal: la ciudad-materia y la cuadrícula urbana

http://www.architravedtc.com/CiudadMateria.htm

Página realizada por los alumnos de las asignaturas de Matemáticas del IES Sierra Minera (La Unión, Murcia), con investigaciones y curiosidades matemáticas.

http://www.dematesna.es

Investigación sobre Fractales

http://centros5.pntic.mec.es/sierrami/dematesna/demates23/opciones/investigacion/fractales/fractales.htm

Investigación sobre Fractales

http://centros5.pntic.mec.es/sierrami/dematesna/demates56/opciones/investigaciones%20matematicas%200506/Fractales/index.htm

Comentarios sobre el vídeo de la colección Más por Menos: “Fractales. La Geometría del Caos”

http://centros5.pntic.mec.es/sierrami/dematesna/demates89/opciones/sabias/video%20fractales/video%20fractales.htm

Área Fractal

http://www.arrakis.es/~sysifus/

Geometría Fractal

http://coco.ccu.uniovi.es/geofractal/

Información sobre La Unión

http://es.wikipedia.org/wiki/La_Uni%C3%B3n_(Murcia)

Google Earth

http://earth.google.com/

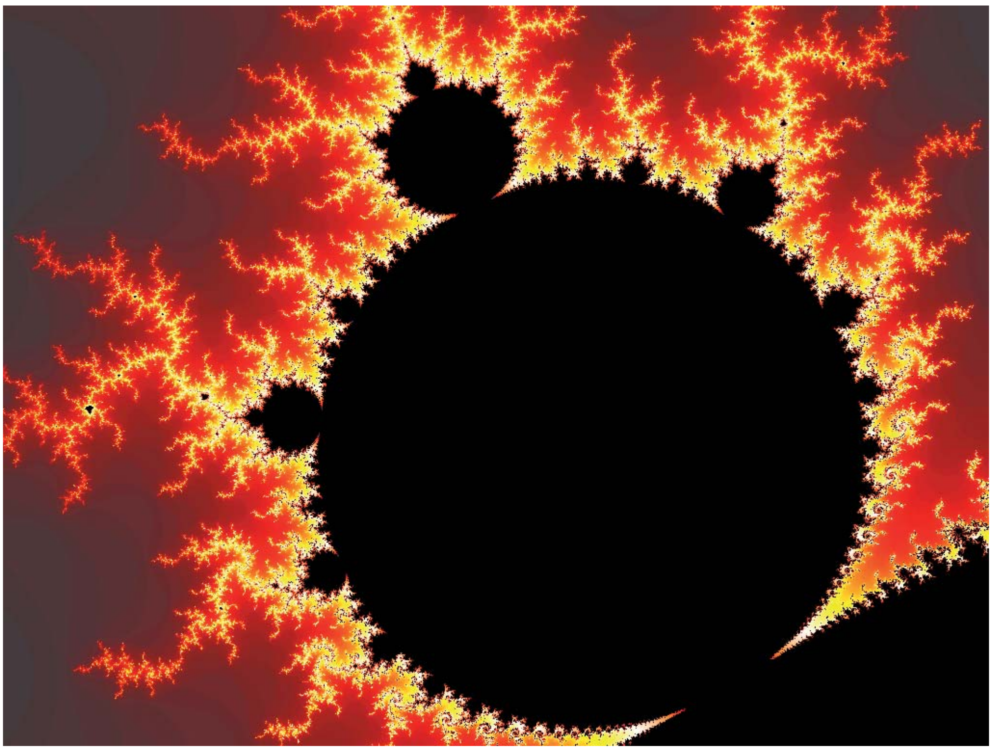
Fractalyse

http://www.fractalyse.org/

ImageJ

http://rsbweb.nih.gov/ij/

Este artículo fue recibido en *Suma* en noviembre de 2008 y aceptado en septiembre de 2010



suma+ 65
Noviembre 2010, pp. 33-41

SIDI SIFR. Proyecto de animación a la lectura y la educación en valores desde el área de matemáticas

En la sociedad actual la educación en valores y el fomento a la lectura, entre el alumnado de la enseñanza secundaria, tiene una singular importancia. Con este trabajo, desde el área de Matemáticas y de modo interdisciplinar, hemos querido contribuir al enriquecimiento de nuestro alumnado para analizar y valorar fenómenos sociales como la diversidad cultural, la igualdad entre los sexos o la convivencia pacífica, desarrollando simultáneamente contenidos específicos de las distintas disciplinas desde las cuales puede ser analizada la lectura de El señor del Cero.

Palabras Clave: Innovación didáctica, educación en valores, sistemas de numeración, resolución de problemas, historia de las matemáticas.

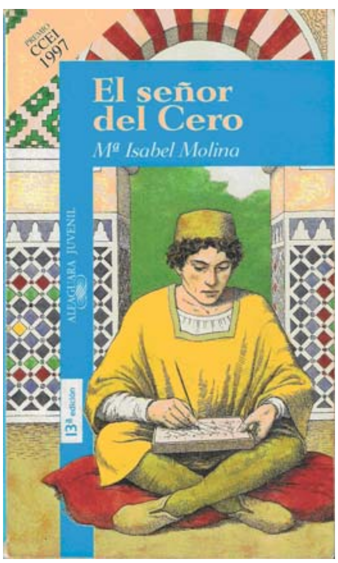
SID SIFR. Project to encourage reading and education in values from the area of mathematics

Nowadays, our society highlights the need of a system of moral values and the reading fostering among our Secondary School students. In this project, we started working on the Mathematics area, however in a interdisciplinary way which included the rest of subjects. Our main aim was the student increase in examining current topics such as cultural diversity, co-education and peacefully co-existence, developing simultaneously specific contents from the different disciplines through the analysis of the book The Master of Zero.

Key words: Educational innovation, values education, numeral systems, problem solving, history of maths.

Durante dos cursos académicos hemos desarrollado en nuestro centro, el IES "Mar Menor" de Santiago de la Ribera (Murcia), un *proyecto Interdisciplinar de animación a la lectura y educación en valores,* teniendo como referente el libro "El Señor del Cero", de Mª Isabel Molina.

El libro es un hermoso canto a la amistad, sin barreras de religión ni de ideologías, ambientado en la España del siglo X cuando el Califato de Córdoba irradiaba todo su esplendor cultural. Su protagonista (un joven mozárabe llamado José que posee una sorprendente facilidad para el cálculo) se ve obligado a abandonar su tierra ante el recelo que despierta su habilidad entre sus ignorantes vecinos.



Cuando en septiembre, planificando el nuevo curso escolar, nos planteamos cómo trataríamos desde nuestra disciplina el tema transversal elegido a nivel de Centro, la Educación en Valores, decidimos la lectura de este libro porque nos permitía, trabajando las matemáticas, tratar una gran variedad de valores tales como la no-discriminación cultural ni religiosa, la no-discriminación sexista, la amistad ... que aunque en el libro se sitúen en el siglo X son de plena actualidad en nuestra sociedad y por ende en nuestras aulas.

Pensamos que nuestro proyecto podría enriquecerse con la participación de otros departamentos didácticos dados los diversos matices que ofrecía la lectura. Analizada nuestra propuesta, en la Comisión de Coordinación Pedagógica, deciden implicarse los departamentos de Geografía e Historia, Orientación, Ciencias de la Naturaleza, Física y

Rosario Baños Zamora
María Isabel García Hernández
Antonio Gómez Carrillo
Lucía Sáez Pérez
Magdalena Vivo Molina
IES Mar Menor. Santiago de la Ribera (Murcia)

Química, Lengua, Inglés y Latín. También buscamos la colaboración de centros de Córdoba para abordar conjuntamente nuestro trabajo. Nos parecía muy interesante para su desarrollo contextualizarlo y poder intercambiar experiencias sobre él. Los IES Blas Infante y El Tablero se sumaron al proyecto aportando sus propias ideas y enriqueciendo nuestras propuestas.

Configurado este trabajo poliédrico vamos a describir en este artículo una de sus caras, la que corresponde a la disciplina de las Matemáticas.

Entre los objetivos que, a priori, nos marcamos trabajar en nuestras aulas, destacamos:

a) Fomentar la lectura entre toda la comunidad educativa, implicando a profesores, alumnos y padres, convencidos de que éste es un proyecto de centro en el que debemos participar todos.

b) Tratar contenidos específicos de matemáticas:

- La resolución de problemas, tan presentes en el libro desde el primer momento, interesándonos por cómo el alumno abordaría cada fase de dicho proceso:

  -lectura y comprensión del enunciado
  -búsqueda de estrategias de resolución
  -elección de la estrategia más apropiada
  -comprobación de la solución

- Conocer una buena parte de la historia de las Matemáticas (tan olvidada en nuestras aulas) indagando sobre el origen de las cifras, la evolución de los diferentes sistemas de numeración, los algoritmos e instrumentos de cálculo y la biografía de diversos personajes relevantes en el mundo de las matemáticas.

- Relacionar poesía y matemáticas, que, a menudo, van más unidas de lo que podamos pensar, inventando enunciados de problemas en forma de poesía, abordando así la formulación de un problema, por una parte y la sensibilidad literaria con que deben escribirlo, por otra.

- Resaltar el papel de la mujer en el desarrollo de la ciencia a lo largo de la Historia. En el libro, el personaje de Emma refleja muy bien el destino de la mujer de la época. Esta situación nos induce, en el contexto de nuestra área a investigar sobre la vida y obra de mujeres matemáticas a lo largo de la Historia.

- Sensibilizar al alumnado con problemas como la tolerancia y el respeto hacia personas de otro sexo, raza o religión; haciendo especial hincapié en las trabas que la religión ha ido poniendo a los grandes avances y cambios de la ciencia a lo largo de la Historia, creando sospechas y dudas sobre los descubrimientos de los grandes científicos (en el libro, se acusa de brujería al protagonista que efectúa los cálculos mucho más rápido que el resto de compañeros del monasterio).

- Utilizar las TIC, creando una página web para ir reflejando el desarrollo del proyecto desde las diferentes áreas y que a su vez nos permita trabajar conjuntamente con los dos institutos de Córdoba, implicados en el mismo.

El desarrollo de nuestro proyecto se vertebra en torno a cuatro ejes fundamentales:

- La propuesta realizada a los alumnos a través de la elaboración de una ficha de trabajo cuyo contenido garantizara el logro de los objetivos propuestos.

- Autoformación de los miembros del Departamento en algunos de los temas a tratar. También nosotros, los profesores, necesitamos investigar sobre algunos de los contenidos propuestos, sobre todo, los relacionados con el contexto histórico.

- Cooperación e intercambio de experiencias con los profesores y alumnos de los institutos de Córdoba.

- Planificación de actividades extraescolares: Concurso de enigmas y visita del calculista Alberto Coto.

Ficha de trabajo propuesta a los alumnos

Una de las cuestiones de la ficha consistía en resolver numéricamente (los de primer ciclo), y numérica y algebraicamente (los de segundo ciclo), algunos problemas que aparecían enunciados en la lectura, y que el protagonista daba la solución, pero no el procedimiento que le llevaba a la misma. Así, por ejemplo:

Un collar se rompió mientras jugaban
dos enamorados,
y una hilera de perlas se escapó.
La sexta parte al suelo cayó,
la quinta parte en la cama quedó,
y un tercio la joven recogió.
La décima parte el enamorado encontró
Y con seis perlas el cordón se quedó.
Vosotros, los que buscáis la sabiduría,
Decidme cuántas perlas tenía
El collar de los enamorados

El protagonista daba la solución: 30 perlas.

Los alumnos de primer ciclo lo resolvían numéricamente:

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{3+6+5+10}{30}=\frac{24}{30}=\frac{4}{5}$$

Como quedan 6 perlas, y son 1/5 del total. Éste debe ser 30.

Un ladrón, un cesto de naranjas,
del mercado robó,
y por entre los huertos escapó;
al saltar una valla, la mitad más media perdió;
perseguido por un perro, la mitad más media desparramó;
en su guarida, dos docenas guardó.
Vosotros, los que buscáis la sabiduría,
Decidnos:
¿cuántas naranjas robó el ladrón?

El protagonista daba la solución: 195 naranjas.

Los alumnos de segundo ciclo lo resolvían algebraicamente:

	Pierde	Le quedan
Valla	$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$	$\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$
Perro	$\frac{x}{4}-\frac{3}{4}$	$\frac{x}{4}+\frac{1}{4}$
Cuerda	$\frac{x}{8}+\frac{5}{8}$	$\frac{x}{8}-\frac{3}{8}$

Como:

$$\frac{x}{8}-\frac{3}{8}=24 \Rightarrow x=3+192=195$$

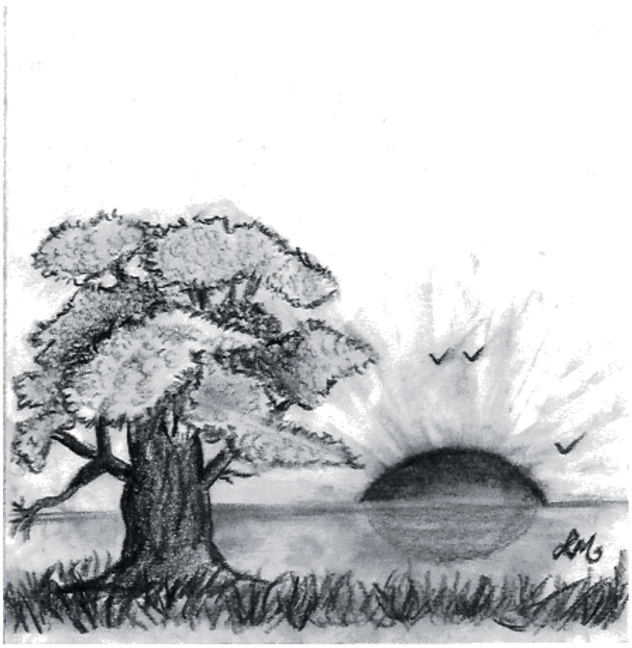
Otra cuestión, que les planteábamos en la ficha de trabajo, era inventar problemas en forma de poesía, como aparecían en la lectura.

Hubo muchas respuestas, entre ellas:

En un árbol lleno de pájaros,
Un día en el que el sol resplandecía,
Se encontraban María y Lucía
Llenas de alegría porque algo pretendían,
Agachóse Lucía para lanzar una piedra
¡Oh, pobres pájaros,
Rompióse así su armonía!

Salieron volando un tercio más uno, y volando volvieron veinte
Con el sol poniente.
Llegó el turno de María,
Lanzando una piedra con energía
Acostados volaron tres quintos más tres
Regresando uno otra vez.
Lucía volvió a lanzar
Y ahuyentados volaron hacia el mar.
La mitad menos ocho allí se quedaron a nadar
Pero siete decidieron regresar.
Al final del día,
Sólo veinte se oían,
¿Cuántos pájaros había al comenzar el día?

María Vahedi y Lucía Jiménez, 3º B. IES Mar Menor. Santiago de la Ribera.



Algunos buscaron adivinanzas sobre el "cero":

A la izquierda nadie me quiere.
A la derecha ¡quién me viere!
De un lado ni entro ni salgo
Del otro mucho valgo
¿Quién soy?
Sandra Navarro, 4º A. IES Blas Infante. Córdoba.

Todo el vocabulario matemático que aparecía a lo largo de la lectura debían señalarlo y explicarlo:

El cero, la cuarta parte, la quinta …
Quintales, Aritmética, numerales, cardinales, ábaco de arena, números árabes y romanos …

A lo largo de toda la lectura se hace alusión a las ventajas del sistema de numeración árabe frente al romano. Los alumnos lo buscaron y explicaron por qué:

…José intentaba que comprendieran el sencillo sistema de numeración que los árabes habían copiado de los matemáticos de la India y que permitía efectuar los cálculos mucho más deprisa…

Se pasó del sistema romano al árabe porque con el árabe es más fácil y rápido calcular.

Con sólo 10 signos se pueden escribir infinitos números diferentes. Con el romano hay más confusión, en múltiples ocasiones dependemos de un subrayado.

Investigaron otros sistemas de numeración.

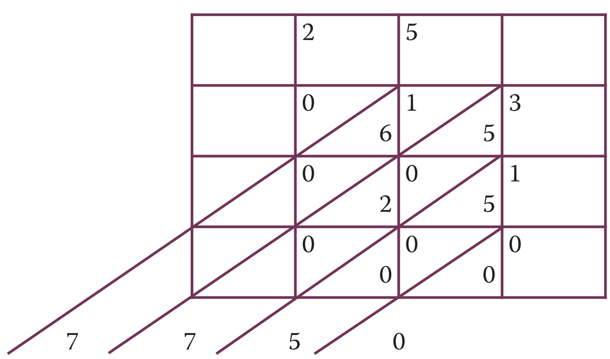
El sistema de numeración de los egipcios, de los babilonios, griegos, chinos, mayas e hindúes.

Estudiaron diferentes formas de multiplicar: la que utiliza el protagonista del libro y otras.

Multiplicación romana: 25 × 310

$\overline{C}$ Centenas de millar	$\overline{X}$ Decenas de millar	$\overline{I}$ Millares	C Centenas	X Decenas	I Unidades	
				II	V	25
			III	I		310
		VI I	II V	V		…20x300=6000 …20x10=200 …5x300=1500 …5x10=50
						Resultado: VII millares VII centenas V decenas 7750

Multiplicación árabe o por celosías (la que utiliza José, nuestro protagonista): 25 × 310

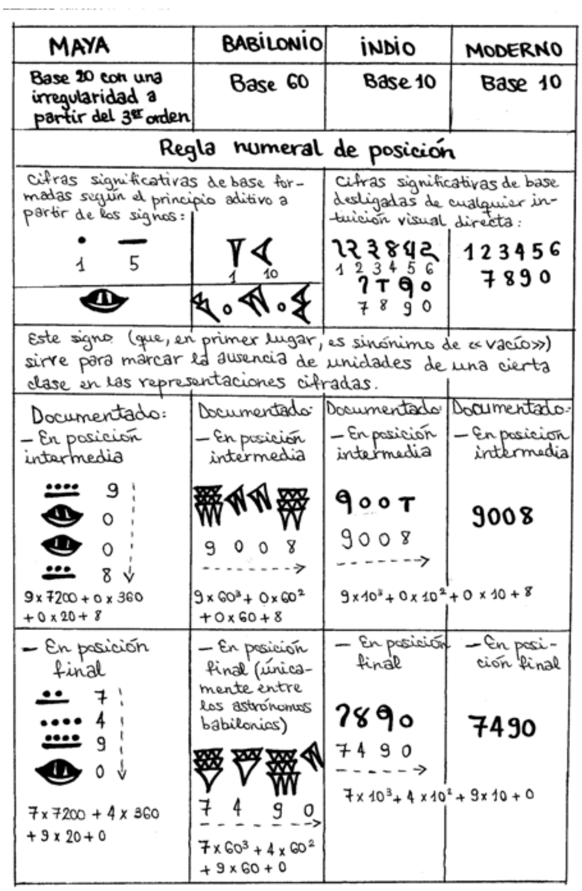


Multiplicación rusa (dobles y mitades): 25 × 310

Dobles	Mitades
25	310
50(*)	155–1=154
100(*)	77–1=76
200	38
400(*)	19–1=18
800(*)	9–1=8
1600	4
3200	2
6400(*)	1

50+100+400+800+640=7750
25 × 310 = 7750

Realizaron trabajos de investigación sobre Ábacos, al-Khwārizmī, Quadrivium, Mujeres Matemáticas a lo largo de la historia y Origen del cero.

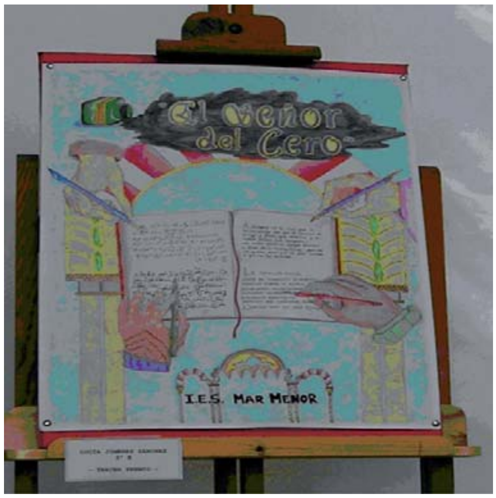


Aportaciones de los profesores del departamento a los trabajos de investigación propuestos

Nuestro trabajo se centra en profundizar sobre los temas de investigación propuestos a nuestros alumnos.

De todos los libros consultados, destacamos "Historia Universal de las Cifras" de Georges Ifrach, donde se narra, con un lenguaje sencillo, el origen y significado de los números en las diferentes culturas, su simbología, su relación con la filosofía, la religión... los sistemas de numeración, el avance del cálculo desde los ábacos de arena hasta la era del ordenador, en definitiva, una obra única para dar respuestas a preguntas como de dónde vienen las cifras... quién inventó el cero... y muchos otros interrogantes que alguna vez nos hemos formulado todos.

El material elaborado queda reflejado en una exposición que realizamos en el Salón de Actos del Centro.



Realizamos dos sesiones, en la primera se plantean actividades relacionadas con los sistemas de numeración y las bases, diferentes formas de multiplicar (árabe, turca, rusa,....) y a través de *acrósticos*, –una composición poética en la cual las letras iniciales, medias o finales de los versos forman, leídas verticalmente un vocablo o frase–, se trabajan las fracciones.

En la 2ª sesión trabajamos en grupo, organizando equipos de 6 alumnos como máximo. Cada equipo está subdividido en dos (2 o 3 de Murcia y 2 o 3 de Córdoba). Cada parte del equipo tiene una de las propuestas y se tienen que ir aportando datos o confrontando resultados. Nosotros les asignamos un punto por cada ejercicio que todo el grupo tenga bien resuelto.

Se les facilita las reglas del juego y la propuesta de trabajo:

> Formáis el equipo nº ... con los compañeros del instituto del IES El Tablero.
>
> Tenéis que intentar resolver vuestros ejercicios y ayudar a vuestro equipo a que resuelva los suyos. Se considerará que habéis superado un ejercicio cuando en los dos institutos el equipo haya resuelto su parte. Entonces vuestra profesora os dará un punto.
>
> Para no perder tiempo, cuando estéis esperando algún resultado de vuestro equipo, debéis ir trabajando en los ejercicios siguientes:

Cooperación e intercambio de experiencias con los profesores y alumnos de los institutos de Córdoba:

IES Blas Infante e IES El Tablero

En nuestro trabajo con los compañeros de Córdoba realizamos varias actividades con los alumnos a través del chat de la página web del Señor del Cero, trabajando asimismo objetivos comunes desde los proyectos de cada uno de los tres centros.

IES El Tablero

1. Completad el producto con los datos que faltan y dadle a vuestros compañeros de grupo el dato que os pidan.

4	2	3	7
	1 2		4 2
1 2		0 9	

Anotad el número n que vuestros compañeros de Murcia obtienen en su primer ejercicio:

IES Mar Menor

1. El producto del anterior y el posterior a un número n coincide con el factor que vuestros compañeros de grupo deben hallar. Pedídselo y cuando lo tengáis, resolver vuestro problema averiguando el número n.

Anotad el factor que vuestros compañeros de Córdoba os digan:

2. El doble de un número *n* más su quinta parte coincide con el factor que vuestros compañeros de grupo deben hallar. Pedídselo y cuando lo tengáis, resolver vuestro problema averiguando el número *n*.

Anotad el factor que vuestros compañeros de Murcia os digan:

2. Completad el producto con los datos que faltan y dadle a vuestros compañeros de grupo el dato que os pidan.

4	2	8
1 2		
	0 6	
		0 0

Anotad el número n que vuestros compañeros de Córdoba obtienen en su segundo ejercicio:

3. Expresad en base 10 el número que en base 2 se escribe 11111.

Decir el resultado a vuestros compañeros y si coincidís, es que lo tenéis bien.

3. Expresad en base 10 el número que en base 3 se escribe 1011.

Decir el resultado a vuestros compañeros y si coincidís, es que lo tenéis bien.

4. En el libro consta el año en el que, gracias a Fibonacci, se generalizaron los números árabes. Vosotros vais a averiguarlo de la siguiente manera:

Expresad en nuestro sistema de numeración el número DLXVII, dar el resultado a vuestros compañeros y sumarlo con el que os den ellos.

Número:

4. En el libro consta el año en el que, gracias a Fibonacci, se generalizaron los números árabes. Vosotros vais a averiguarlo de la siguiente manera:

Expresad en nuestro sistema de numeración el número DCXXXVI, dar el resultado a vuestros compañeros y sumarlo con el que os den ellos.

Número:

5. El sistema de numeración hindú, extendido por los árabes, nos permite disfrutar por ejemplo de curiosidades como lo que ocurre al multiplicar el número 142857 sucesivamente por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Organizaros para descubrir cuál es esa curiosidad.

5. El sistema de numeración hindú, extendido por los árabes, nos permite disfrutar por ejemplo de curiosidades como lo que ocurre al multiplicar el número 142857 sucesivamente por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Organizaros para descubrir cuál es esa curiosidad.

6. Se ve que los árabes eran aficionados a proponer problemas en verso. Por ejemplo, en el Libro de Bhakhara se plantea el siguiente:

La quinta parte de un enjambre de abejas se posó en la flor de Kadamba, la tercera parte en una flor de Silinda, el triple de la diferencia entre estos dos números, voló sobre una flor de Krutaja, y una abeja quedó sola en el aire atraída por el perfume de un jazmín y de un pandnus. Dime, bella niña, cuál es el número de abejas que formaban el enjambre.

Os pedimos que lo resolváis (las bellas niñas y los guapos chicos) y contrastéis resultados con vuestro grupo.

Resultado:

6. Se ve que los árabes eran aficionados a proponer problemas en verso. Por ejemplo, en el Libro de Bhakhara se plantea el siguiente:

La quinta parte de un enjambre de abejas se posó en la flor de Kadamba, la tercera parte en una flor de Silinda, el triple de la diferencia entre estos dos números, voló sobre una flor de Krutaja, y una abeja quedó sola en el aire atraída por el perfume de un jazmín y de un pandnus. Dime, bella niña, cuál es el número de abejas que formaban el enjambre.

Os pedimos que lo resolváis (las bellas niñas y los guapos chicos) y contrastéis resultados con vuestro grupo.

Resultado:

7. Ya sabéis que a José sus compañeros le llamaban Sidi Sifr (Señor del cero) por su facilidad para el cálculo. Tener un símbolo para el cero fue un gran paso en la historia de los números.

Entre todos, recopilar cuantas formas conozcáis de decir 0 en inglés.

7. Ya sabéis que a José sus compañeros le llamaban Sidi Sifr (Señor del cero) por su facilidad para el cálculo. Tener un símbolo para el cero fue un gran paso en la historia de los números.

Entre todos, recopilar cuantas formas conozcáis de decir 0 en inglés.

Planificación de actividades extraescolares: Concurso de enigmas y visita del calculista Alberto Coto

Dentro del marco de actividades programadas en el área de matemáticas diseñamos un concurso de enigmas. Quincenalmente, durante el segundo trimestre, formulábamos una pregunta, relacionada con la lectura.

Enigma nº2

El Papa matemático

Personaje que aparece en El Señor del Cero *muy interesado en aumentar sus conocimientos de matemáticas y astronomía; y atraído muy especialmente por los libros árabes* llenos de signos diabólicos *y por la forma de calcular de éstos. Tan interesado estaba en aprender a calcular al* estilo árabe*, que introdujo algunas modificaciones en el ábaco latino, sustituyendo las piedrecitas de éste por fichas de hueso con un número árabe grabado en ellas, para poder calcular más deprisa.*

Para acercar a nuestros alumnos a las artes del cálculo mental, a través de un personaje real que contase con las habilidades del protagonista de la novela, contamos con la visita del asturiano Alberto Coto García, la persona más rápida del Mundo haciendo cálculos mentales, como así lo certifica el Libro Guinness de los Records.

Corolario

Para los profesores del departamento, la concreción de nuestra propuesta se ha transformado en un proyecto de investigación matemática, propiciando interesantes reflexiones sobre diversos aspectos conceptuales y procedimentales de nuestra disciplina y de la Ciencia, en general.

El tratamiento histórico de los conceptos matemáticos tratados nos ha permitido apreciar las matemáticas como una ciencia más humana, sujeta a las circunstancias y vaivenes históricos y donde el alumnado ha podido observar actitudes inherentes a nuestra disciplina desde sus orígenes: curiosidad e interés por buscar y resolver problemas, constancia en el trabajo, actitud crítica... resaltando que la importancia de un concepto o de un algoritmo depende de su contexto histórico, está en función del estado de la ciencia en ese momento.

Estableciendo un paralelismo con la época en la que se ubica la lectura: la contienda entre abaquistas y calculistas que supuso una auténtica revolución en su momento se trasladaría a nuestro momento actual al cómo plantear la enseñanza de las Matemáticas con la generalización del uso de las nuevas tecnologías ¿qué sentido tiene la aplicación rutinaria de ciertos algoritmos?

Análogamente se vuelve a repetir, en pleno siglo XXI, como el avance de la ciencia se ve obstaculizado por la actitud de la iglesia, las trabas sociales para la incorporación de la mujer al mundo laboral...

El desarrollo del proyecto con propuestas de trabajo de carácter interdisciplinar, nos ha demostrado que no sólo enriquecen el resultado final sino también la convivencia entre alumnos y profesores.

Especialmente atractivo ha resultado para todos los contactos mantenidos a través de la página web del *Señor del Cero*, los chats y el correo electrónico con los profesores y alumnos de los institutos de Córdoba, Blas Infante y El Tablero. Para nosotros, ha sido nuestra primera experiencia de intercambio educativo y pensamos que es un recurso muy interesante para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Argüelles Rodríguez, J. (1989). *Historia de la matemática.* Madrid: Ediciones AKAL, S.A.

Gómez, E. P. (1996). Algunas seducciones entre poesía y matemáticas*. SUMA*, 22, pp. 91-95.

Ifrah, G. (1994). *Historia Universal de las cifras.* Madrid: Editorial Espasa Calpe.

Mataix, S. (1999). *Matemática es nombre de mujer.* Barcelona: Rubes Editorial, S.L.

Molina, Mª I. (1996). *El señor del Cero.* Madrid: Editorial Alfaguara.

Moreno Castillo, R. (2004). *Fibonacci: El primer matemático medieval.* Madrid: Editorial Nivola, libros y ediciones, S.L.

Muñoz Santonja, J. et al (1996): ¿Pueden las matemáticas rimar? *SUMA*, 22, pp. 97-102.

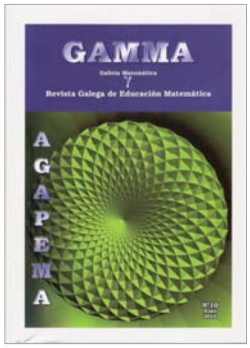
Sorando, J. Mª (1999). El señor del Cero*. SUMA*, 31, pp. 132-133.

Queremos aprovechar las últimas líneas de este artículo para agradecer públicamente a nuestras alumnas, Lucía Jiménez Sánchez y María Vahedi Pour, la dedicación que han prestado a este proyecto y el cariño y saber hacer que han demostrado en la realización de todos los dibujos del trabajo.

Este artículo fue recibido en *Suma* en diciembre de 2009 y aceptado en octubre de 2010

Publicaciones recibidas

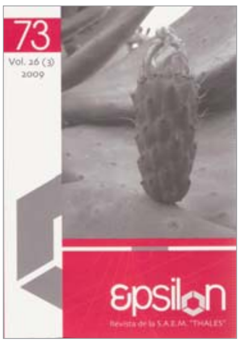
PROBLEMES OLÍMPICS
SEMCV Al Khwārizmī
N.º 56, Octubre 2010
Valencia
ISSN: 1578-1771



GAMMA
AGAPEMA
N.º10, Xuño 2010
Lugo
ISSN: 1578-2980

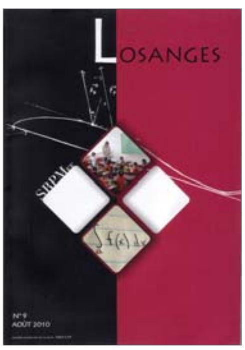
XLA TANGENTE
Kangouru Italia
N.º 22, agosto 2010
Monza. Italia
ISSN: 1971-0445

INVESTIGACIÓN Y CIENCIA
Prensa Científica, S.A.
Octubre 2010
Barcelona
ISSN: 0210136X

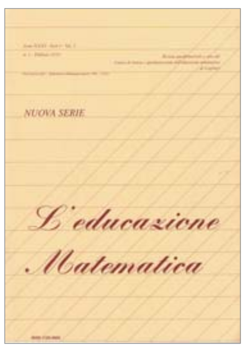


EPSILON
SAEM THALES
Vol. 26 (3), 2009
Sevilla
ISSN: 1131-9321

SIGMA
Gobierno Vasco
Departamento de Educación, Univ. e Investigación
N.º 35, Abril 2010
Vitoria
ISSN: 1131-7787



LOSANGES
SBPMef
N.º 9, Août 2010



L'EDUCAZIONE MATEMATICA
Centro di recerca e sperimentazione dell'educazione matematica di Cagliari
Anno XXXI Serie 1 Vol. 2 n. 1
Febbraio 2010
Cagliari
ISSN: 1120-4850

suma+ 65
Noviembre 2010, pp. 43-46

La utilización de nuevos recursos digitales en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas

El presente artículo pretende presentar un abanico cualitativo de nuevos recursos con una visión que permite la interdisciplinariedad y posibilita el trabajo competencial para que sea una satisfacción aprender. No se trata de hacer un compendio exhaustivo de todos los recursos existentes, sino de dar herramientas que nos ayuden a pensar y hacer pensar a partir de la experiencia, no sólo en la utilización de la parte mecánica. Debemos abrir nuevas vías en todas las etapas educativas que puedan generar un aprendizaje significativo útil para la vida en la diversidad de alumnado en sus diferentes necesidades educativas.

Palabras Clave: Innovación didáctica, enseñanza, matemáticas, tecnología, imagen.

The use of new digital resources in the process of teaching and learning of mathematics

This article aims to present a qualitative range of new resources and a vision that allows for interdisciplinary work and offers the competence to make it a pleasure to learn. This is not an exhaustive compendium of all existing resources, but to provide tools that help us think and think from the experience, not only in the use of the mechanical part as have many practices. We should open new avenues in all stages of education that can generate significant learning useful for life in the diversity of students at different educational needs.

Key words: Educational innovation, mathematics, teaching, technology, image.

Nuevos y viejos usos de las nuevas tecnologías

En la educación de los ciudadanos de este siglo, debemos aprovechar las herramientas tecnológicas y metodológicas que el presente nos ofrece. Las matemáticas y su didáctica no se pueden quedar al margen y tenemos que partir, siempre que podamos, del contexto real de los alumnos. Muchos recursos tecnológicos no son de origen matemático ni pensados desde su didáctica, pero son útiles para incorporarlos en las aulas y podemos aprovechar la motivación que su uso aporta al alumnado.

Estos nuevos recursos y nuevos usos ayudan a plantear un cambio en el modelo clásico que puede afectar factores tan importantes como la organización del espacio, el tiempo, el material, el rol de los alumnos y del profesorado. La clase magistral de transmisión de conocimientos puede ser alternada con una clase más activa de construcción de los conocimientos que se pueda hacer el aprendizaje por descubrimiento, la manipulación, la experimentación, la construcción, la discusión, generar hipótesis y el docente pueda acompañar la investigación, reflexión, y estructuración del pensamiento lógico. Y con la tecnología como aliada, no como enemiga.

Tratamiento de la imagen como fuente de información y como expresión

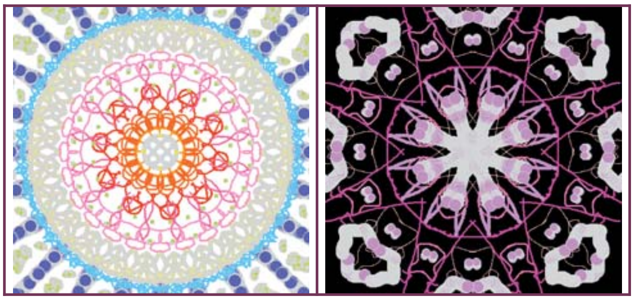
El uso del tratamiento de la imagen como fuente de información y como expresión es extensible a otras materias y áreas de conocimiento, aunque demasiadas veces se olvidan las matemáticas. Los alumnos ya pueden utilizar el ratón bastante autónomamente desde que entran en el sistema educativo y casi en la totalidad de los centros docentes se tienen ordenadores conectados a Internet donde podemos encontrar el software necesario para desarrollar las propuestas que se comentan a continuación.

El dibujo digital

Además del dibujo a mano alzada que se puede digitalizar, el dibujo digital se puede utilizar a partir de programas y aplicaciones específicas, que tienen muchas utilidades.

Jordi Jubany i Vila
Departament Educació. Generalitat de Catalunya

- Hacer dibujos: para trabajar la geometría podemos hacer dibujo de diferentes figuras, líneas, formas, longitudes, posiciones, puzzles, cuerpos, ángulos, transformaciones, mandalas, kolams ...
  – De simetrías:
  http://concurso.cnice.mec.es/cnice2005/96_ritmo_simetria/curso/archivos/menu.htm
  – De números, operaciones, álgebra, geometría, medición, análisis de datos:
  http://nlvm.usu.edu/en/nav/grade_g_4.html



- Ver dibujos: observar y reflexionar sobre dibujos hechos.
  – efectos visuales diversos
  http://www.xtec.cat/~ebraso
  – el concepto y ejemplos de fractales
  http://www.fractal-recursions.com/

La fotografía digital
La reducción del coste de las cámaras fotográficas y de vídeo digital, y la facilidad de uso en entornos digitales, hace que no tengamos excusa para no utilizarlas en la realidad cercana.

- Hacer fotografías: desde el inicio de la educación obligatoria también las pueden utilizar los alumnos para retratar la vida matemática, por ejemplo, fotografiar para ver medidas, relaciones entre objetos, simetrías...
  http://www.sectormatematica.cl/fotos.htm

- Ver fotografías: fotos para representar ideas matemáticas, interpretación, representación fotográfica de conceptos y relaciones matemáticas ej: baldosas, colmenas, proporciones, simetrías, metros cuadrados o perímetros con cordel. Y aprovechar toda la relación con el arte a través del estudio de obras de artistas como Joan Miró, Paul Klee, Pablo Picasso, David Smith, Antoni Tàpies, Eduardo Chillida...
  http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Exposiciones/artemate/perry/artemate.asp

Vídeo
La grabación, la edición más intuitiva del vídeo digital y la facilidad de colgar y obtener vídeos de internet nos hace ver nuevos usos sin caer en complicados mecanismos técnicos.

- Hacer vídeos: podemos expresar el proceso para realizar una operación matemática, hacer una reflexión sobre cómo hemos hecho un aprendizaje ...

- Ver vídeos: nos puede servir para acceder a vídeos pedagógicos, entrevistas a personalidades relevantes o programas televisivos sobre el tema. Podemos acceder desde youtube.com o teachertube.com

Diferentes usos de programas informáticos

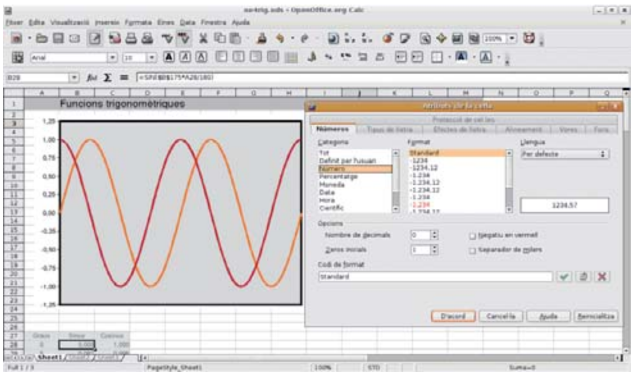
Software de oficina
Son los que tienen un uso más generalizado, pero vale la pena hablar, para dejar claro que pueden tener un buen uso. Son un claro ejemplo de programas que no estaban pensados para el uso educativo.

- Programas de edición de texto: en algunos casos como en programas de edición de texto, se han hecho adaptaciones al uso matemático, de la misma manera que se han hecho apdataciones al uso de texto normal. Permiten incluir parrillas, líneas, formularios, problemas ...
  http://www.xtec.es/dnee/satieee/0304/sessio4/adaptacions_word.htm

- Programas de presentación: nos permiten hacer presentaciones sobre contenidos y actividades matemáticas. Por ejemplo, el Powerpoint de Microsoft o el Impress de OpenOffice que es libre y gratuito http://es.openoffice.org/

- Programas de bases de datos: permiten, por ejemplo, generar el catálogo de libros de una biblioteca, el sistema de facturación de una empresa o el sistema de evaluación de un profesor. Versión educativa en:
  http://aplitic.edu365.cat/e13_colex/

- Programas de hojas de cálculo: permiten manipular datos numéricos y alfanuméricos dispuestos en forma de tablas. Normalmente es posible realizar cálculos complejos con fórmulas y funciones a partir de éstas dibujando gráficos de diferentes tipos que podemos utilizar para hacer comparaciones, evoluciones, variaciones ... Así la clasificación "se ve". Podemos utilizar el Calc de OpenOffice, Microsoft Excel, Gnumeric, KSpread, Lotus 1-2-3 ...



Programas educativos

Estos programas han sido pensados con finalidad educativa. Podemos encontrar aplicaciones hechas que nos sirvan aula o crear otras nuevas para crearlas nosotros.

- Programas de autor como JClic, LIM, HotPotatoes, Ardora, Cuaderno o NeoBook. Se les ha dado una gran variedad de temáticas como bloques lógicos, cálculo, fracciones, masa, capacidad, relojes, operaciones, geoplano, rompecabezas, numeración, medidas, estadística, probabilidad, memoria, múltiples, divisores, descomposición, ángulos, tablas de multiplicar, numeración romana ... Un buen ejemplo con el programa Flash:
  http://www.xtec.cat/centres/a8027365/concurs/concursple/activitatmates.htm
- Geogebra: software libre interactivo que combina geometría, álgebra y cálculo.
  http://www.geogebra.org/cms/
- Cabri: para entender la geometría espacial en clase
  http://www.cabri.com/
- Webquest: una propuesta didáctica basada en la búsqueda de información en internet y en la elaboración, mediante la interacción entre los alumnos y alumnas.
  http://webquest.xtec.cat/enlla/?cat=125
- Applets: pequeños programas instalados en una web.
  http://www.walter-fendt.de/m11s/
- Unidades Didácticas o lecciones:
  http://ares.cnice.mec.es/matematicasep
  http://www.xtec.cat/aulanet/ud/mates/index.htm
  http://descartes.cnice.mec.es
  Mini Unidades Didácticas
  http://www.edu365.cat/eso/muds/matematiques/index.htm
- Calculadora: por ejemplo la Wiris como herramienta de cálculo numérico, gráfico y simbólico en los campos de la aritmética, el álgebra y el análisis.
  http://www.wiris.com/demo/es
- Recopilaciones diversas:
  http://www.thatquiz.org/es/index.html
  http://resources.oswego.org/games
  http://www.xtec.cat/~mmontene/web/6hivern.htm
  http://www.sectormatematica.cl/educbasica.htm

Programas lúdicos

En general los programas lúdicos no nacen con finalidad educativa, pero pueden ser de gran utilidad porque incluyen muchas matemáticas y aspectos relacionados. Son atractivos, interactivos, graduales y fáciles de usar. El foco de atención se centra en la experiencia del jugador y a menudo permiten compartir, tener ayudas, guardar... Gestionan una gran cantidad de datos simultáneas, fomentan la generación y evaluación de hipótesis, la anticipación, la toma de decisiones propias y la resolución de problemas. El trabajo de las estrategias creativas resulta muy interesante.

Begoña Gros señala que los videojuegos representan los juegos fundamentales de la sociedad tecnológica actual. No son ajenos al tipo de conocimiento ni formas de aprendizaje. A través de estos juegos, los menores entran en el mundo digital en sus múltiples dimensiones. El profesorado puede aprovechar como material educativo para aprender un contenido curricular específico con un entorno de aprendizaje adecuado, planificado y organizado.

- Juegos clásicos de tablero y de cartas:
  http://www.ludoteka.com/juegos.html
- Juegos deportivos:
  http://www.miniclip.com/games/es/juegos-deportivos.php
- Juegos blancos interactivos en línea:
  http://roble.pntic.mec.es/arum0010
- Juegos de plataformas: resuelve los problemas de la pantalla con los elementos que tienes al alcance y su combinación. Muchos están presentes en videoconsolas.
- Otros juegos.

Otras posibilidades que nos ofrece internet

Para terminar de ver las grandes posibilidades que nos ofrece la red, todavía que fijarnos en otros aspectos. Es interesante que pensemos en nuevos usos y nuevas posibilidades en las aulas, porque muchas de las herramientas y aplicaciones tienen muchas potencialidades educativas que en un primer vistazo no lo parecen. Por ejemplo, el blog fue pensado para anotar los sucesos y lugares interesantes de la navegación por internet, en cambio, cuántos usos les damos hoy en día como diario de alumno, de grupos de trabajo y/o de profesores?

Proyectos telemáticos y colaborativos

Los programas telemáticos y colaborativos ofrecen muchas posibilidades interesantes para el aprendizaje de las matemáticas. El PAP, Programa de Aprendizaje Permanente, nos ofrece la eTwinning http://www.etwinning.net/en/pub/index.htm plataforma que engloba el mayor volumen de proyectos y afronta nuevas propuestas. También el consorcio de Ministerios de educación de la UE:

http://www.eun.org

Herramientas Web 2.0

Las herramientas 2.0 nos ofrecen muchas prestaciones interesantes de una manera bastante intuitiva e interactiva. Y presentan potencialidades muy interesantes en nuestras aulas, sobre todo en sus vertientes participativas y colaborativa. Entre todos, podemos compartir informaciones, gestionar y construir conocimiento.

- Marcadores sociales: permiten compartir entre diferentes usuarios nuestras páginas preferidas. Por ejemplo, en Delicious:
  http://delicious.com/search?p=matematicas&u=&chk=&context=recent&fr=del_icio_us&lc=0
- Blogs: diario interactivo personal. Por ejemplo, Matenomía: blog de las aplicaciones de las matemáticas en la vida cotidiana http://www.matenomia.com
- Revista digital: El rincón matemático:
  http://www.rinconmatematico.com
- Wiki: es un sitio web colaborativo, que puede ser editado desde el navegador por los usuarios. Los usuarios de una wiki pueden de esta forma crear, modificar, enlazar y borrar el contenido de una página web, de forma interactiva, fácil y rápida. http://wikimatematicas.wikispaces.com
- Redes sociales: permite el intercambio libre de información entre sus diferentes usuarios a través de foros, blogs, grupos... por ejemplo, http://mdii0809.ning.com

Otras Webs

Para terminar la recopilación nos quedan cosas interesantes difíciles de clasificar o que no nos podemos olvidar. Naturalmente, internet es un gran fuente de información, por eso tenemos directorios, buscadores metabuscadores que nos ayudan en nuestras investigaciones. Por cierto, el nombre de google viene del número googol, que es 10 elevado a 100, utilizado como sinónimo de número muy grande, es el nombre que en 1920 Milton Sirotta a los 9 años de edad le dijo a su tío, el matemático estadounidense Edward Kasner.

Internet nos ofrece documentación diversa, historia de las matemáticas, enigmas, chistes, relación con otras áreas del conocimiento y otras disciplinas ... unos ejemplos:

- Juegos de lógica http://www.juegosdelogica.com
- Fichas didácticas, enigmas ... http://www.matesymas.es
- Ocio, chistes, relación en cine y literatura:
  http://aulamatematica.com
- Estadísticas del mundo en tiempo real:
  http://www.worldometers.info
- Historia http://www.xtec.cat/~jjareno/calculus
- Diversidad http://www.toomates.net

Conclusión

Hoy en día tenemos muchos materiales tecnológicos necesarios en el centro educativo y quizás faltan más para desarrollar aquellas actividades que encontramos interesantes. Pero también los alumnos tienen herramientas en casa que les pueden ayudar a mejorar en sus aprendizajes. En el ámbito doméstico podemos encontrar ordenadores, consolas de videojuegos, móviles, MP4s, cámaras... Aunque alguien lo piense tampoco se puede evitar que los tengan, es mejor poder conocer y aprovechar los mismos orientando en su uso. Por ejemplo, hay juegos muy interesantes para móviles, ordenadores y videoconsolas como los que combinan entrenamiento mental, lógica y memoria de forma agradable. ¿Por qué no aprovechar este potencial? ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barba, D. Barba, C. y Calvo, C. (2008). Competències bàsiques en matemàtiques: una reflexió sobre el càlcul amb temps controlat. *Guix. Elements d'Acció Educativa, 344,* pp. 17-24.

Canals. M.A. (2001). *Vivir las matemáticas*. Barcelona: Rosa Sensat.

Gros, B. (2008). *Videojuegos y aprendizaje*. Barcelona: Editorial Graó.

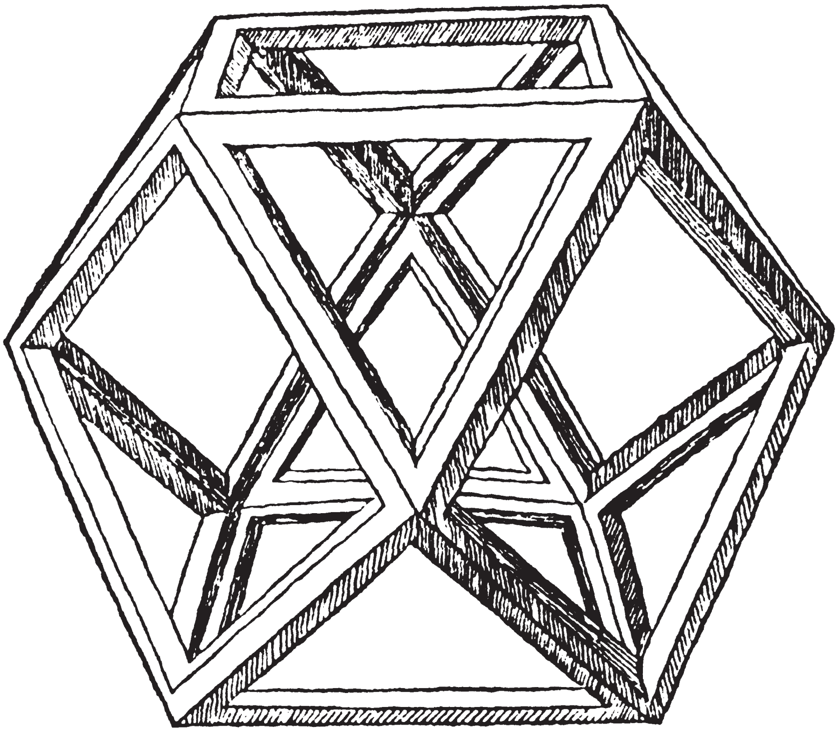
Jubany, J. (2007). Educación musical, visual y lengua: melodías, pinceladas y palabras con nuevos medios. *Cuadernos de pedagogía. Manual para la Educación Infantil. Editorial Wolters Kluwer Educación*, pp. 839-851.

Vilà, N. (2006). La tradición del texto y la novedad de la herramienta. La escritura de un cuento con el ordenador. *Cuadernos Digitales: Revista de Nuevas Tecnologías y Sociedad. 43.*

http://www.quadernsdigitals.net/index.php?accionMenu=hemeroteca.VisualizaArticuloIU.visualiza&articulo_id=9254

Este artículo fue recibido en *Suma* en abril de 2009 y aceptado en Sepiembre de 2010

suma+



Dibujo de Leonardo da Vinci para *La divina proporción* de Luca Pacioli

Juegos	*Grupo Alquerque de Sevilla*
El clip	*Claudi Alsina*
MatemásTIC	*Mariano Real Pérez*
Arte con ojos matemáticos	*Francisco Martín Casalderrey*
Adherencias	*Miquel Albertí*
Biblioteca	*Daniel Sierra*
Historias	*Luis Puig*
Hace	*Santiago Gutierrez*
Musymáticas	*Vicente Liern Carrión*
Cinemateca	*José María Sorando Muzás*
El hilo de Ariadna	*Xaro Nomdedeu Moreno*

poliedro

suma+ 65
Noviembre 2010, pp.49-52

Cuadraturas de cruces, letras y estrellas

En el principio…

Hay ocasiones en las que los proyectos que trabajamos en el taller no están pensados inicialmente por el profesor sino que provienen de situaciones que nos plantean los alumnos. El caso de los puzzles que vamos a proponer hoy es un claro ejemplo de esto.

Uno de los días en que tocaba taller se nos presentó un alumno con un puzzle formado por cuatro piezas iguales, como las que aparecen en la imagen siguiente.

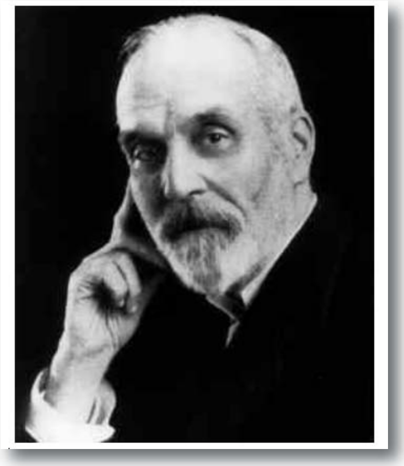
Imagen 1

Muy orgulloso, el alumno planteó que era posible hacer con todas las piezas tanto un cuadrado como una cruz. A la pregunta de qué tipo de cruz se obtenía, el alumno nos comentó que era una cruz rara, que no era normal porque tenía los cuatro brazos iguales como la Cruz Roja. Tras comentarle que eso se llamaba cruz griega y que estaba formada por cinco cuadrados iguales, el puzzle fue pasando de mano en mano para que lo manipulara el resto de los compañeros.

El puzzle ya nos era conocido pues aparecía en un libro de Dudeney y podía ser aprovechado cuando trabajáramos los polígonos en el bloque de Geometría, por lo que en su momento volvimos sobre él.

Henry Dudeney

Henry Ernest Dudeney (1857-1930), inglés, fue uno de los creadores de acertijos y pasatiempos matemáticos más importantes de finales del siglo XIX y principios del XX. Fue contemporáneo de otro gran inventor de problemas matemáticos, Sam Loyd, llegando durante algún tiempo a colaborar en publicaciones, hasta que esta relación se rompió cuando Dudeney acusó a Loyd de publicar con su nombre problemas que él había inventado.



Grupo Alquerque de Sevilla

Constituido por:
Juan Antonio Hans Martín. *CC Santa María de los Reyes.*
José Muñoz Santonja. *IES Macarena.*
Antonio Fernández-Aliseda Redondo. *IES Camas.*
juegos@revistasuma.es

Autodidacta y sin más formación que una instrucción básica, tenía un especial interés por las matemáticas y su historia, que las estudió en su tiempo libre. Dudeney aprendió a jugar ajedrez a una edad temprana y se convirtió en un experto creador de problemas de ajedrez.

Durante más de veinte años tuvo con gran éxito una sección de puzzles matemáticos en la revista mensual *The Strand Magazine*. En español están editados *Los acertijos de Canterbury, Diversiones matemáticas* –publicado en tres partes: *El acertijo del mandarín, Los gatos del hechicero* y *El misterio del muelle*– y *Acertijos, desafíos y tableros mágicos.*

Los puzzles de la cruz griega

Revisando el libro *El acertijo del mandarín*, que contiene una recopilación tomada del libro de Dudeney *Amusements is Mathematics*[1], encontramos todo un apartado dedicado a este juego con el título de “Puzzles de la cruz griega”. En él se nos explica la historia de este puzzle.

Desde hace más de 3000 años se conoce el llamado *Problema hindú*, y que, según cuenta Dudeney en el libro citado, forma parte del sello de la Universidad de Harvard, en el que se divide una cruz griega en cinco trozos que permiten así mismo construir un cuadrado, tal como vemos en la imagen 2.

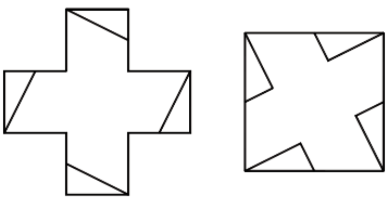


Imagen 2

Aproximadamente a mediados del siglo XIX comienza a plantearse el reto de conseguir dividir la cruz griega en cuatro trozos de forma que con ellos se pueda construir también un cuadrado. Una de las primeras disecciones que aparecieron la podemos ver en la imagen 3 y cumple que las cuatro piezas son iguales.

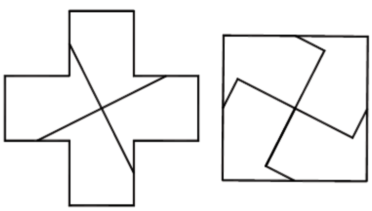


Imagen 3

Podemos comprobar que este puzzle coincide con el que nos presentó el alumno. Además de tener las cuatro piezas iguales tiene la peculiaridad de obtenerse el símbolo de la esvástica, un símbolo que, antes de ser desprestigiado por los nazis, era considerado desde muy antiguo como símbolo de la buena suerte y puede encontrarse en las pirámides de Egipto, en restos de la cultura Maya, en las ruinas de Troya o en restos antiguos de China o India, entre otros.

Dudeney nos explica en su libro que se puede dividir la cruz griega, para obtener un cuadrado a partir de sus piezas, de infinitas maneras y lo presenta de la siguiente forma.

Partimos de una cruz griega y en un acetato o film transparente, dibujamos cuatro cuadrados de forma que el lado ***cd*** del cuadrado tenga la misma longitud que la medida que va de ***a*** hasta ***b*** en la cruz.

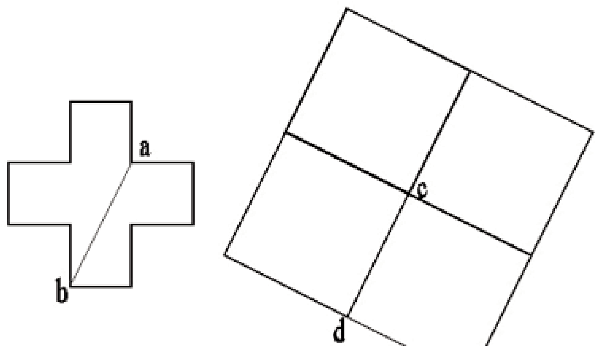


Imagen 4

Basta pasar el acetato por encima de la cruz manteniendo siempre la línea ***cd*** paralela a la línea ***ab*** para obtener una división cualquiera de la cruz que se puede cuadrar.

En concreto Dudeney plantea que si se coloca el punto ***c*** sobre el ***a*** se obtiene la disección de la imagen 5 que es la única en la que, si consideramos que la cruz griega está construida en papel o cartulina, puede dividirse en cuatro trozos con solo dos cortes de tijera.

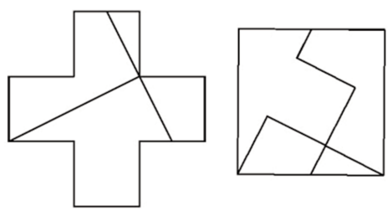


Imagen 5

Más expresamente, Dudeney indica que si las divisiones del corte se producen colocando el punto c dentro del cuadrado interior de la cruz griega, que aparece punteado en la imagen 6, siempre se puede obtener una disección de la cruz griega en cuatro trozos que componen a su vez un cuadrado. Él indica que incluso se podría conseguir una división en cuatro piezas colocando el punto c en el punto ***e*** de la imagen y señala que las uniones en ***a*** y ***f*** podrían ser tan finas como se quiera, pero en nuestra modesta opinión es imposible construir ese puzzle sin que al final tengamos seis piezas en lugar de cuatro.

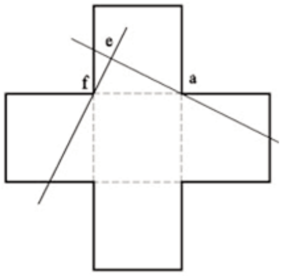


Imagen 6

Investigando con Dudeney en el aula

Después de hablar sobre Dudeney y explicar su procedimiento para obtener cuadraturas de una cruz griega planteamos la siguiente investigación.

¿Cuántas disecciones distintas se pueden encontrar, utilizando el procedimiento de Dudeney, que cumplan las siguientes restricciones:

- Las líneas de cortes únicamente pasen por los vértices o los puntos medios de los lados de la cruz griega.
- El puzzle resultante sólo tenga cuatro o cinco piezas?

Los alumnos en el taller se lanzaron a obtener disecciones aplicando las reglas dadas sin orden ni concierto. Esto, como les hemos explicado varias veces, hace imposible realizar un trabajo exhaustivo que nos permita encontrar todas las posibilidades. Por ello tuvimos que lanzar varias preguntas para reconducir el trabajo:

- ¿Cuáles son todas las posibles líneas de corte que pasan por los vértices o los puntos medios de los lados de la cruz?
- ¿De todas esas líneas, cuáles dan disecciones distintas?
- ¿Cómo se forma el cuadrado con cada una?

Teniendo en cuenta cómo debe ser el lado del cuadrado resultante que, como ya vimos en la imagen 4, comenzamos a trazar líneas como respuesta a la primera pregunta y nos apareció el entramado que podemos ver en la imagen 7. A partir de todas esas líneas teníamos que seleccionar las que respondían a la segunda pregunta.

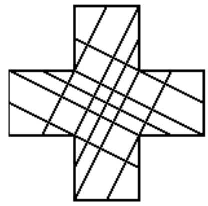
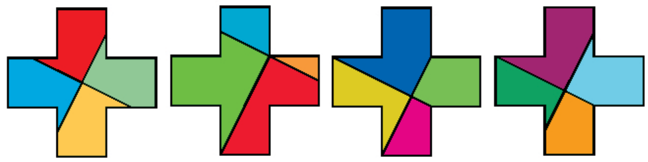
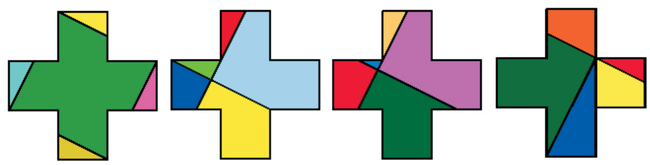


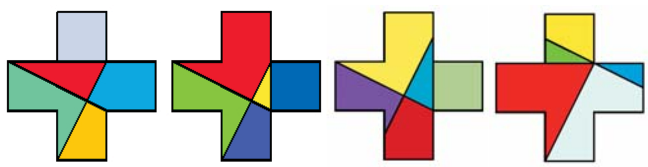
Imagen 7

Una vez estudiados los casos nos aparecieron cuatro disecciones distintas de cuatro piezas. En ellas estaban incluidas, como no podía ser de otro modo, las dos presentadas por Dudeney en su libro.


C1 C2 C3 C4

Como también quisimos trabajar con los puzzles formados por cinco piezas, en esta ocasión encontramos bastantes más casos.

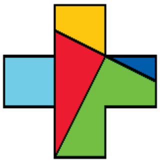

C5 C6 C7 C8


C9 C10 C11 C12

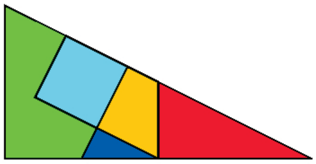
Para distinguir las distintas disecciones les hemos asignado un número. Algunas de ellas se obtienen cortando en dos partes una de las piezas de las disecciones de cuatro trozos. Podemos observar que a partir de la C2 se obtienen la C8 y C12, de la C3 salen la C9 y C10 y de la C4 resulta la C11.

Comentar también que si trabajáramos con la “finura” que comentaba Dudeney en su libro, las opciones C6 y C7 se podrían considerar formadas por sólo cuatro piezas.

De todas las disecciones que se construyeron, la C13, que aparece a continuación, que se obtiene a partir de la C2, es a la que más juego le hemos encontrado, pues como se puede ver en las imágenes siguientes, no sólo permite formar una cruz griega o un cuadrado sino también se pueden construir: un triángulo rectángulo, un romboide, un trapezoide, un trapecio isósceles y un pentágono.


C13


Cuadrado


Triángulo rectángulo


Romboide


Pentágono

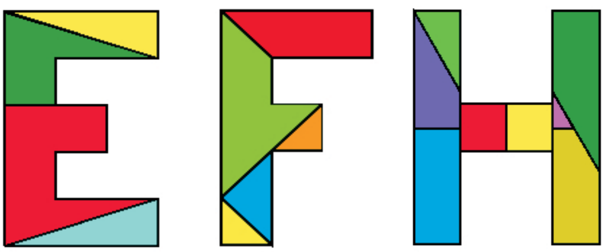

Trapecio isósceles

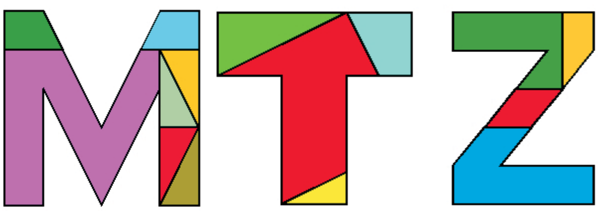

Trapezoide

Cuadrando letras

El trabajo de las cruces y la lectura de los escritos de Dudeney nos hicieron seguir ahondando en el tema de las cuadraturas. ¿Cualquier figura se puede dividir en partes para formar un cuadrado? En clase ya habíamos trabajado con algunos tangrams correspondientes a letras, por ejemplo el tangram F. Por ello alguien planteó la línea para ampliar la investigación: ¿qué letras del abecedario se puede diseccionar para formar un cuadrado?

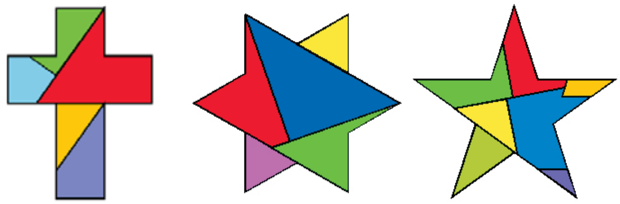
La búsqueda de respuestas a la anterior pregunta dio lugar a otro trabajo curioso. El proceso de trabajo fue similar al anterior y para no extendernos, las cuadraturas de las letras que hemos encontrado, por ahora, son: E, F, H, M, T y Z. A continuación aparecen algunas de las disecciones de dichas letras, aunque de algunas de ellas ha aparecido más de una solución.





Ya puestos a cuadrar...

Esta entrega de cuadraturas la queremos completar con estas tres llamativas disecciones: las cuadraturas de una cruz latina y de las estrellas de cinco y seis puntas.



Las cuadraturas de todos estos puzzles os los ponemos de deberes y entretenimiento y si alguno se resiste, o la construcción no nos ha salido todo lo bien que quisiéramos, las plantillas y soluciones de todos ellos se pueden encontrar en la web del Grupo Alquerque: http://www.grupoalquerque.es/

Si alguien cree que con los artículos que hemos dedicado a las cuadraturas a lo largo de la historia de esta sección está todo trabajado, puede visitar la página *Geometric Dissections* de Theobald Gavin en donde puede alucinar viendo lo que puede dar de si esta idea.
http://home.btconnect.com/GavinTheobald/Index.html

NOTAS

1 Existe una versión web de este libro en inglés que puede consultarse en la página http://www.gutenberg.org/files/16713/16713-h/16713-h.htm.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Dudeney, H. E. (1993). *El acertijo del Mandarín*. Madrid: Zugarto ediciones.

Hans, J. A., Muñoz, J., Fernández-Aliseda, A., Blanco, J. y Aldana, J. (2003). “Rompecabezas del Teorema de Pitágoras”, Suma, 43, pp. 119-122.

Hans, J. A., Muñoz, J., Fernández-Aliseda, A. (2005). “Cuadraturas de polígonos regulares”, Suma, 48, pp. 65-68.

Van Delft, P., Botermans, J. (1995). *Creative puzzles of the World*. New York: Key Curriculum Press.

JUEGOS ■

Este artículo fue solicitado por *Suma* en junio de 2010 y aceptado en septiembre de 2010 para su publicación.

suma+ 65
Noviembre 2010, pp. 53-55

Axiomas de estar por casa: la matemática de la mesa perfecta

Evidentemente usted puede comer andando mientras hinca el diente a un bocadillo de calamares, puede tomar un desayuno de pie en la cocina o comer una hamburguesa dentro del coche. El afán de comer lleva a los humanos a aceptar condiciones infrahumanas para cometer su ataque al cocido o al croissant. Habrá observado en muchas ocasiones personas devorando un sandwhich en un repleto vagón de metro o tomar un café sentándose en la cama. Incluso hay personas que hacen simulacros de comer en los aviones. El que suscribe pudo observar, hace años, un matrimonio con dos hijos comiendo en las butacas de un cine con fiambreras y tenedores un guiso de bacalao con tomate y bebiendo vino con gaseosa. Queda claro pues que los lugares de comer son muy variopintos.

Pero, en principio, un esmerado menú bien merece sentarse a una buena mesa en la que, junto al placer de comer todos los platos preparados y beber vinos audaces o alegres cavas espumosos, sea posible también dar al evento una dimensión social. Si bien esto de las mesas bien preparadas tiene su máxima expresión en reuniones protocolarias o en celebraciones familiares especiales (aniversarios, bodas, Noche Buena, Noche Vieja,..) también puede formar parte de rituales cotidianos para gente de bien, comidas en restaurantes adecuados, o comidas especiales que bien merecen un cierto glamour.

Este clip le invita a explorar las componentes matemáticas numéricas, geométricas o algorítmicas que se esconden detrás de una buena mesa.

Medidas óptimas de sillas i mesas

Esperemos que en casa no le ocurra lo que describe Lewis Carroll en *Alicia en el País de la Maravillas:*

> Aunque la mesa era grande, los tres se apretujaban en uno de los extremos.
>
> -¡No hay sitio! ¡No hay sitio! –exclamaron al ver llegar a Alicia.
>
> -¡Hay sitio de sobra!- dijo indignada Alicia y se sentó en un gran sillón, en un extremo de la mesa.

Claudi Alsina
Universitat Politècnica de Catalunya
elclip@revistasuma.es

De nada sirve preocuparse por una buena comida bien servida si el mobiliario que le ha de dar soporte no es el adecuado. No sirve cualquier mesa. Y tampoco sirve cualquier silla. De entrada la mesa debe tener una superficie perfectamente plana y es recomendable que tenga una altura de 75 centímetros. Las sillas (sin brazos) deben tener un asiento situado a una altura de 45 centímetros, con una amplitud de 45 cm y 50 cm de profundidad cuyo respaldo llegará al menos hasta los 80 cm de altura (modelo Acevillo-Steagman).

Pueden darse otros modelos como el de Akerblom (mesa a 66–68,5 cm; silla a 39–42 cm de altura de asiento y 42–46 cm de profundidad) pero en todos los casos debe respetarse alrededor de 25 cm entre la base del asiento y la mesa para colocar las piernas.

Enfrente de cada comensal debe presuponerse un rectángulo para poder comer con dignidad (tomar cubiertos, poner vasos y copas, tener platos, etc) de unos 65 cm de ancho por 35 cm de profundidad.

El siguiente factor a tener en cuenta son las distancias alrededor de cada comensal. Entre el borde de la mesa y la pared deben quedar al menos entre 65 y 70 cm para que la persona pueda acceder a la mesa o levantarse y salir. Pero deben preverse unos 95 cm si puede haber tránsito de personas por detrás o hasta 120 cm si hay servicio por detrás del comensal.

Por supuesto por debajo de la mesa se supone que la rodilla del sentado puede llegar hasta 35 cm por debajo, y en el suelo los pies pueden llega hasta los 40–45 cm**,** desde la proyección del borde.

Las medidas son pues un factor importante de comodidad y de funcionalidad en el momento de sentarse a la mesa.

Distribuciones de cubiertos y vajilla

Veamos un ritual geométrico, homenaje a la simetría. Una vez colocado el mantel de la mesa bien plano (sobre una manta fina que evite ruido de platos o cubra emergencias de derrames líquidos) el ritual de servir la mesa se pone en marcha. Se aplican aquí los axiomas pertinentes: las reglas canónicas para poner la mesa.

Reglas de platos, vasos y copas

Un plato (esencialmente decorativo) indicará el lugar de cada comensal, debiendo estar los platos colocados a igual distancia entre ellos. Un vaso de agua debe estar delante del plato y las copas precisas para vinos (blanco y tinto), cava, etc, a la derecha del vaso, ordenadas según su uso a lo largo del ágape. El famoso platillo para el pan que siempre preocupa a comensales salvajes que ante la simetría de la mesa no saben si deben usar el platito de la derecha o el de la izquierda se situará siempre a la izquierda del plato, arriba de los tenedores.

Reglas de los tenedores

Los tenedores se colocarán a la izquierda del plato (a 3 o 4 cm), debiendo estar mas alejados del plato los que primero tengan que usarse (carne, pescado,…). Los tenedores deben colocarse con las puntas hacia el centro de la mesa. Como máximo se colocaran 3 tenedores (si hay más se irán llevando).

Reglas de los cuchillos

Los cuchillos van a la derecha del plato (a 3 o 4 cm), debiendo estar mas alejados del plato los que primero tengan que usarse (carne, pescado…). Los cuchillos se colocan con la punta hacia el centro de la mesa y con el filo hacia el plato. Como máximo se colocaran 3 cuchillos (si hay más se irán llevando).

A la derecha de los cuchillos se colocan los otros artilugios que sean precisos (pinzas de marisco, pinchos…).

Reglas de las cucharas

La cuchara de sopa a la derecha precediendo a los cuchillos (podría estar arriba). Las cucharas se colocan con concavidad hacia arriba.

Reglas de los cubiertos de postre

Los cubiertos de postre deben venir en el momento del postre y ser colocados como sus antecesores. Si se colocan los cubiertos de postre al principio de servir la mesa se situarán paralelos en la zona superior del plato con las puntas del tenedor hacia la izquierda y el filo del cuchillo hacia la derecha.

Reglas funcionales

Una vez usado un instrumento de la cubertería debe ir a parar al plato correspondiente, nunca debe regresar a la mesa. Elementos para servir irán apareciendo luego.

Adornos centrales o bien distribuidos según los ejes de simetría de la mesa completaran la preparación de la misma.

Las servilletas se colocarán sobre el plato o a la izquierda de los tenedores. El plegado de servilletas aporta creatividad a la mesa: el origami textil merece ser explorado.

Para comensales zurdos deben intercambiarse los elementos de la izquierda con los de la derecha.

Los alimentos pueden venir emplatados desde la cocina (estilo americano), ser las raciones distribuidas por el cabeza de mesa o personas encargadas o ser preparadas delante de los comensales.

En la tradición europea se come con tenedor en la mano izquierda y cuchillo en la derecha, pero en el estilo americano los tenedores se intercambian de mano para comer una vez ha actuado el cuchillo y éste reposa en el borde del plato.

Como sentenció Keith Floyd:

> Cocinar es un arte y la paciencia una virtud…Compra cuidadosa, ingredientes frescos y una aproximación sin prisas es casi todo lo que necesita. Hay una cosa más: amor. Amor por la comida y amor para aquellos que usted invita a su mesa. Con la combinación de todas estas cosas puede ser un artista…

La idea de axiomatización queda pues graficamente explicada con este ritual tan simple y repetido de poner la mesa.

Para saber más

Maestre, I. (2005) *El arte de la buena mesa: protocolo y sugerencias decorativas (academia española de gastronomía)*, Leon: Editorial Everest, S.A.

Natsuko, S. (2004) *30 Days of Napkin Folding*, Japan.

VV.AA. (2007) *Plegado de servilletas*, Barcelona: Reditar Libros, S.L.

http://profeblog.es/blog/jfiguirado
http://www.platetagastronomico.com
http://www.protocolo.org/social/doblar_servilletas
http://www.historiacocina.com

EL CLIP

Este artículo fue solicitado por *Suma* en junio de 2010 y aceptado en septiembre de 2010 para su publicación.

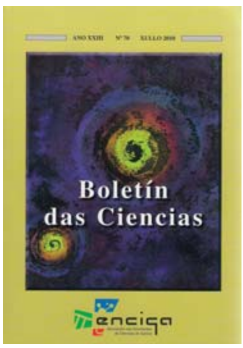
Publicaciones recibidas

APRENDIZAJE COOPERATIVO. UNA METODOLOGÍA CON FUTURO. PRINCIPIOS Y APLICACIONES
Paloma Gavilán y Ramón Alario
Editorial CCS
Madrid 2010
ISBN: 978-84-9842-446-1
260 páginas

ANÁLISIS DE SERIES TEMPORALES
Daniel Peña
Alianza Editorial
Madrid, 2010
ISBN: 978-84-206-6945-8
604 páginas

PENSAR I COMUNICAR MATEMÀTIQUES
Núria Planas (coord.)
Associació de Mestres Rosa Sensat
Barcelona, 2010
ISBN: 978-84-92748-30-3
182 páginas

5º CONGRESO DE AGAPEMA
Jorge Mejuto Couce e Luis Puig Mosquera (coord.)
AGAPEMA
Lugo, 2010
ISSN: 1578-2980



BOLETÍN DAS CIENCIAS
ENCIGA
N.º70, Xullo 2010
Santiago
ISSN: 0214-7807

JAKINGARRIAK
Mondragon Uniberstatea
N.º68, 2010eko ekaina
Eskoriatza
ISSN: 1697-6215

DIALÓGICA. REVISTA MULTIDISCIPLINARIA
ENCIGA
Vol. 5, nº 2 Diciembre 2008
Maracay. Estado Aragua (Venezuela)
ISSN: 1690-8961

INVESTIGACIÓN Y CIENCIA
Prensa Científica, S.A.
Noviembre 2010
Barcelona
ISSN: 0210136X

Suma+ 65
Noviembre 2010, pp. 57-67

Estudio y práctica del álgebra matricial con una aplicación TIC didáctica y sencilla

A lo largo de los distintos números de *Suma* nos planteamos en esta sección descubrir distintas aplicaciones informáticas que sean útiles para las matemáticas. Aunque por regla general nos hemos centrado en aplicaciones propias de sistemas operativos libres de forma que estén a disposición del docente y éste tenga la posibilidad de utilizarlas gratuitamente y modificarlas adaptándolas a sus necesidades, en alguna ocasión hemos tratado aplicaciones que, con estas mismas características encontramos disponible en la Red y que no son específicas del software libre. En este número nos proponemos abordar una de esas aplicaciones denominada "Álgebra Matricial".

La aplicación Álgebra Matricial se encuentra en el portal de recursos del ITE, anterior ISFTIC, antiguo CNICE ó PNTIC ya que fue una de las aplicaciones premiadas en el año 2000 dentro de los premios que se conceden a la creación de nuevas aplicaciones educativas TIC.

Los autores de la misma son Cristina Díaz Sordo y Luis Vaamonde Portas y, como ellos mismos indican, este programa está dirigido tanto a alumnos como a profesores de matemáticas.

El potencial de este software se localiza en tres puntos:

– Por una parte, que puede ser utilizado con cualquier sistema operativo. Solamente debemos disponer de un navegador en el que visualizar las webs creadas y en el que utilizando el motor de Java, se visualice la configuración en cada momento del applet utilizado.
– La aplicación es interactiva permitiendo la manipulación por parte del alumno o del profesor para visualizar ejercicios distintos que se generan aleatoriamente gracias a una sencilla interacción con la aplicación.
– Permite el estudio y la práctica de todo lo referente al álgebra de matrices y a la resolución de sistemas de acuaciones.

El software "Álgebra matricial" lo localizamos en la siguiente dirección de Internet:

http://www.isftic.mepsyd.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2000/algebra/index.html

Cuando accedemos a esta dirección observamos la ventana que aparece en la Imagen 1.

Mariano Real Pérez
CEP de Sevilla
matemastic@revistasuma.es

Imagen 1

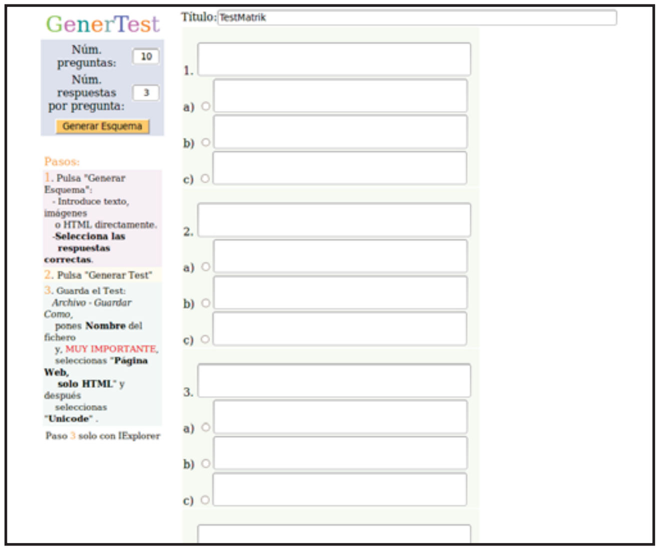


Imagen 2

Ya en esta ventana inicial nos informan de que este material surge a partir de los distintos niveles de uso que se observan y de la cantidad de prácticas que exige el aprender el tratamiento y álgebra de matrices.

En la imagen 1 ya observamos el potencial más relevante de la aplicación que es la generación aleatoria de matrices. En esta pantalla aparece un botón central llamado “Generar” de forma que cada vez que lo pulsamos observamos que a su izquierda aparece una matriz de orden 3×3 nueva.

También se nos informa sobre las distintas herramientas con las que cuenta la aplicación. Entre ellas se cita un test de autoevaluación, una calculadora matricial, un generador de prácticas, un generador de ejemplos y un generador de ejercicios.

A lo largo de los distintos puntos que componen el tema se van utilizando unos u otros dependiendo de la adaptabilidad de cada uno de ellos a los contenidos que se estén tratando en cada momento. Posteriormente vamos a hacer un recorrido por cada uno de los apartados que componen la aplicación y observaremos cuando aparecen unos u otros.

Desde la pantalla inicial podemos acceder a lo que los autores han denominado la calculadora matricial. Es una calculadora normal con alguna función añadida. Para acceder a ella solamente debemos pulsar sobre el icono que aparece en la zona inferior derecha de la imagen 1.

Desde esta pantalla inicial también podemos acceder a otra herramienta que nos puede resultar muy útil, no solamente para el tema de matrices, sino para cualquier otro tema que vayamos a enseñar. Esta otra herramienta es la que se llama “GenerTest” que nos permite diseñar test de selección múltiple interactivos sin necesidad de tener conocimientos de programación. Para acceder a ella debemos pulsar sobre la palabra “GenerTest” que aparece en la zona inferior de la imagen 1. Seguidamente observaremos que aparece una nueva pantalla en la que debemos seleccionar el número de preguntas de que va a constar el test y el número de respuestas que propondremos para cada pregunta. Al pulsar sobre “Generar” observamos que aparece una pantalla como la que observamos en la imagen 2.

Ahora ya podremos escribir cada una de las preguntas y las posibles respuestas. De entre esas respuestas deberemos marcar la que sea correcta en cada caso. En nuestro caso hemos generado un test que contiene 10 preguntas y 3 opciones para cada una de esas preguntas.

Entramos ahora en materia haciendo un recorrido por los distintos apartado que componen la aplicación.

1.- Definiciones: En este apartado se nos ofrecen las definiciones de algunos tipos de matrices, dando en cada caso un ejemplo de cada una de ellas. Estas definiciones las podemos observar en la imagen 3.

Al final de esta pantalla observamos un enlace a un test sobre lo explicado en esta página.

Este tipo de test va a aparecer en todos los campos de contenidos en los que está dividida la aplicación y van a poner a prueba los contenido teóricos que, sobre esa parte, haya adquirido el alumno o alumna. Este tipo de test ha sido generado con GenerTest y podemos completarlos con otros posibles test que generemos nosotros con esa herramienta.

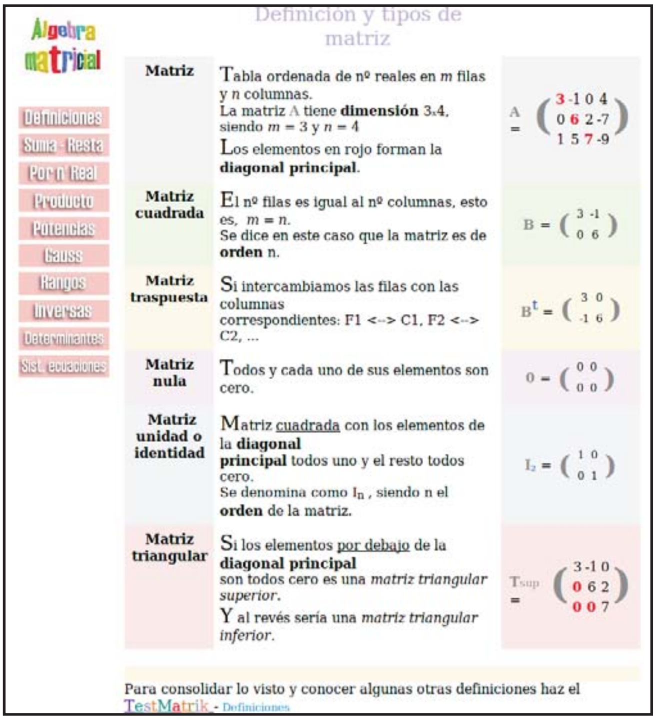


Imagen 3

2.- Suma de matrices: Bajo el título "Suma – Resta" accedemos a la zona de suma de matrices cuya pantalla contemplamos en la imagen 4.

En la pantalla se muestra un ejemplo de cómo debe realizarse una suma de matrices. Recordamos que la pretensión de esta aplicación es totalmente práctica y, aunque aparecen algunos contenidos teóricos, podemos observar que el profesorado ha debido o debe dejar claros todos los conceptos y propiedades teóricas. Así, en esta pantalla de suma y resta, se da por supuesto que el alumnado ya conoce que para poder sumar dos matrices, las dos deben tener el mismo orden.

En la zona media de la imagen 4 observamos una parte interactiva denominada EjerMatrik. En esta parte vamos a poder seleccionar la operación que deseamos realizar, suma o resta y, cada vez que pulsemos sobre el botón "Autogenerar" aparecerán dos matrices A y B que deberemos sumar o restar. Para ello, el alumnado deberá rellenar los cuadros correspondientes indicando la solución que propone. Una vez rellenos deberá pulsar sobre el botón "Comprobar" para que la aplicación compruebe si la operación se ha hecho bien. En una ventana emergente se le informará al alumno si lo ha hecho bien o, en caso de haberlo hecho mal, se le informará del primero de los fallos que se observa, Aunque haya más de un fallo, la aplicación solamente informará del primero. Una vez corregido le informará sobre el siguiente. En esta ventana nos puede parecer un poco pobre el tipo de ejercicios que propone ya que limita el orden de las matrices a 2×2.

Como sucedía en la ventana de definiciones, en la parte inferior de la imagen 4 observamos que aparece un enlace a TestMatrik en el que se propone un test de autoevaluación sobre lo aprendido en suma de matrices.

En la zona inferior de la imagen 4 aparece un enlace denominado CalcuMatrik. Al pulsar sobre este enlace accedemos a la ventana que observamos en la imagen 5.

En esta pantalla se le van a proponer distintos ejercicios a el alumnado relacionados con la suma y la resta de matrices, pudiendo posteriormente comprobar si la solución que han dado es la correcta o no.

El funcionamiento de esta pantalla es muy sencillo. Primero debemos elegir si deseamos sumar o restar matrices. Posteriormente indicaremos el número de filas y de columnas de las matrices A y B y seguidamente pulsaremos sobre el botón "Generar matrices". En este momento se generarán dos matrices A y B de forma aleatoria. Una vez que el/la alumno/a haya realizado la operación que se le propone, podrá comprobar si la solución a la que llega es la correcta. Para ello solamente debe pulsar sobre el botón "Haz cálculos" y le aparecerá la solución tal y como se aprecia en la parte de la derecha de la imagen 5 donde observamos que aparecen nuevamente

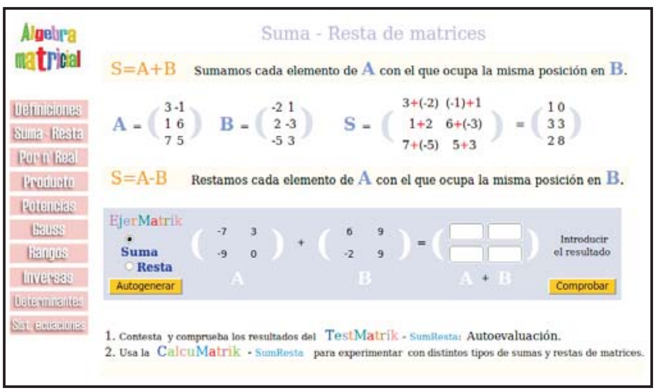


Imagen 4

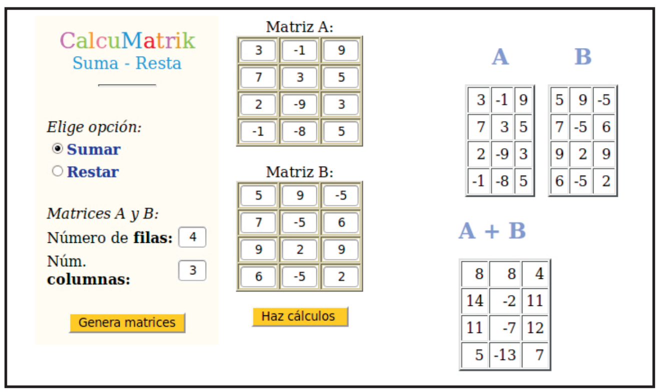


Imagen 5

las matrices A y B y la suma A+B. Así, el alumnado podrá comprobar si ha realizado la operación correctamente.

3.- Por número real: En esta zona de la aplicación se trata el producto de un número real por una matriz. Al acceder a la misma se nos muestra una pantalla parecida a la imagen 4. En esta pantalla nos indican como se realiza el producto de un número real por una matriz. Además, en la zona central aparece una parte interactiva. Si pulsamos el botón “Autogenerar” aparecerá un número aleatoriamente y una matriz de orden 2×3. En los huecos que aparecen a la derecha, el alumnado deberá indicar la solución de multiplicar el número por la matriz. Podemos generar tantos ejercicios interactivos como deseemos. Bueno, tantos como deseemos no, en realidad, si hacemos los cálculos, solamente podremos ver 893.871.739 ejercicios distintos.

En la zona inferior de esta página aparece un enlace llamado TestMatrik en el que se propone un test de autoevaluación sobre lo aprendido en relación al producto de un número por una matriz.

4.- Producto: Aquí accedemos a la parte en la que se trata el producto de matrices. Al entrar en esta zona aparece la pantalla que observamos en la imagen 6.

A estas alturas ya estamos familiarizados con lo que podemos encontrar en esta pantalla que observamos en la imagen 6. En la parte superior aparece recogida de forma teórica la forma en la que se hace el producto de dos matrices. Nuevamente, como habíamos indicado antes, el contenido teórico que aparece es breve. Por ejemplo, en esta parte se omite que para que dos matrices puedan multiplicarse, el número de columnas de la primera debe ser igual al número de filas de la segunda.

Debajo de esta zona y con fondo azulado aparece la parte de EjerMatrik en la que aparece indicada la operación del producto de dos matrices. En esta zona el alumno deberá escribir el resultado de la operación como práctica. El funcionamiento es semejante al que ya hemos mencionado en la pantalla de la suma, es decir, cada vez que pulsemos sobre el botón “Autogenerar” aparecerán dos matrices diferentes, pero de orden 2. Una vez que escribamos el resultado del producto, pulsando sobre el botón “Comprobar” podremos comprobar si el resultado que hemos propuesto es el correcto o no.

En la zona inferior aparece un enlace a TestMatrik que nos conduce a un test sobre el producto de matrices y cuando podemos realizar este producto. Justamente debajo aparece un enlace a CalcuMatrik que nos conduce a la pantalla que podemos observar en la imagen 7.

En esta pantalla ya observamos que nos indican que el número de columnas de la matriz A debe ser igual al número de filas de la matriz B. El funcionamiento es parecido a otras pantallas semejantes que ya hemos visto. En ésta debemos introducir el número de filas y columnas de la matriz A y el número de columnas de la matriz B. Además le indicamos si el tipo de números que deseamos utilizar, naturales o enteros. Una vez introducidos estos parámetros, pulsamos sobre el botón “Generar matrices” y nos genera aleatoriamente dos matrices A y B con los parámetros que le hemos indicado. Si deseamos conocer el resultado de ese producto solamente debemos pulsar sobre el botón “Producto A.B”. Entonces nos aparecerá el resultado tal y como podemos observar en la parte derecha de la imagen 7.

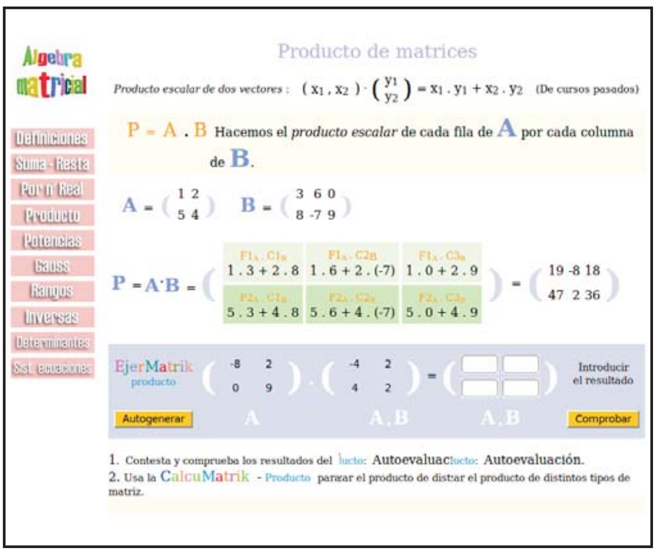


Imagen 6

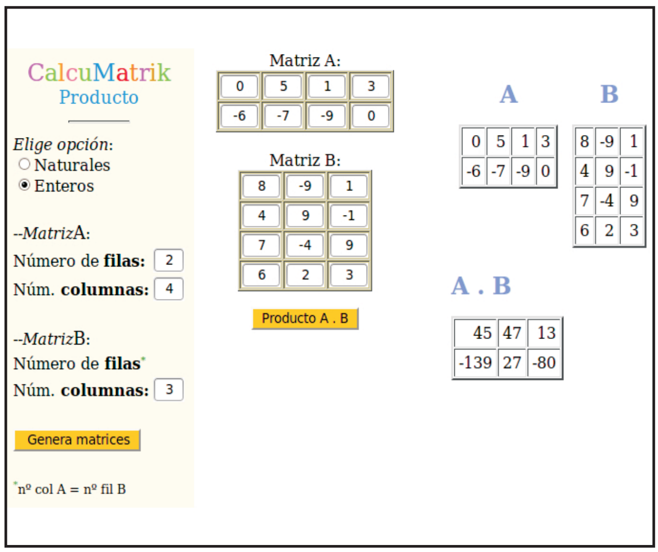


Imagen 7

5.- Potencias: En esta zona de la aplicación nos adentramos en la parte de la potencia de matrices. Al acceder nos encontramos con una pantalla parecida a la que observamos en la imagen 6.

Nuevamente, la parte superior de la pantalla que se abre nos ofrece una breve definición. Y como venimos indicando, el contenido de esta parte es muy básico. En este caso no se recoge, por ejemplo, que para calcular sucesivas potencias de una matriz, la matriz debe ser cuadrada. Justamente debajo de ella encontramos la zona de EjerMatrik en la que se nos ofrece la posibilidad de generar una matriz 2×2 de la que calcular sucesivas potencias. En el caso de las matrices que se generan deberemos calcular el cuadrado y el cubo de la matriz paso a paso, es decir, primero calculamos el cuadrado, pulsamos sobre el botón “Comprobar” correspondiente. Si la operación ha sido realizada correctamente se nos completará automáticamente la parte inferior en la que en un principio aparecen las matrices pero sus elementos son asteriscos. Posteriormente calculamos el cubo y pulsamos sobre el otro botón “Comprobar” para ver si hemos realizado la operación correctamente.

En la parte inferior de la pantalla aparecen dos enlaces. Uno a TestMatrik que nos conduce a un test sobre la potencia de matrices. En la mayoría de estos test se hace referencia a contenidos teóricos que no aparecen recogidos en la aplicación pero a los que se ha podido llegar de forma deductiva a través de la práctica. El otro enlace nos conduce a CalcuMatrik.

En la imagen 8 podemos observar esta pantalla nueva.

La forma de utilizar esta pantalla es bastante simple y semejante a la de otras que ya hemos tratado. En este caso debemos indicar el orden de la matriz de la que deseamos calcular su potencia y debemos indicar el exponente. El orden de la matriz, a lo sumo puede ser 4 y el exponente, a lo sumo puede ser 6. En nuestro caso, en la pantalla que aparece en la imagen 8 le hemos indicado que el orden de la matriz sea 4 y el exponente 6. Pulsamos sobre “Generar matriz” y nos genera la matriz A. Una vez que realicemos los cálculos de forma manual, podemos pulsar sobre el botón “A elevada a n” y nos aparecerá todo lo que observamos en la parte derecha de la imagen, es decir, todas las potencias sucesivas de la matriz A hasta llegar a la que le hemos indicado. Así podremos comprobar si hemos realizado los cálculos correctamente.

6.- Gauss: La aplicación recoge en esta parte el método de triangularización de Gauss. En la pantalla a la que accedemos y que podemos observar en la imagen 9, se nos ofrecen dos ejemplos de cómo aplicar este método de triangularización para matrices. En un contenido un poco más extenso de lo que hemos observado en pantallas anteriores nos indican los posibles cambios que podemos efectuar en las matrices para conseguir su triangularización. Indicaciones como intercambiar dos filas, sustituir una fila por si misma multiplicada por un número distinto de cero o sustituir una fila por sí misma multiplicada por un número distinto de cero y sumada o restada a otra fila también multiplicada por un número distinto de cero aparecen ejemplificadas en esta pantalla.

Al final de la pantalla que contemplamos en la imagen 9 observamos que aparecen tres enlaces. El primero de ellos es al clásico test que venimos observando en nuestro recorrido. En este caso, el test sobre el método de Gauss se compone de 6 preguntas.

El segundo de estos enlaces es a EjerMatrik, en este caso de nivel 1. En esta parte se proponen ejercicios guiados para aplicar el método de triangularización de Gauss. Son ejercicios parecidos a los que se observan en la imagen 10, con la diferencia de que las matrices que genera, el elemento a_{11} es 1.

El tercero de estos enlaces es a EjerMatrik, en este caso de nivel 2. En la imagen 10 podemos observar la pantalla que aparece.

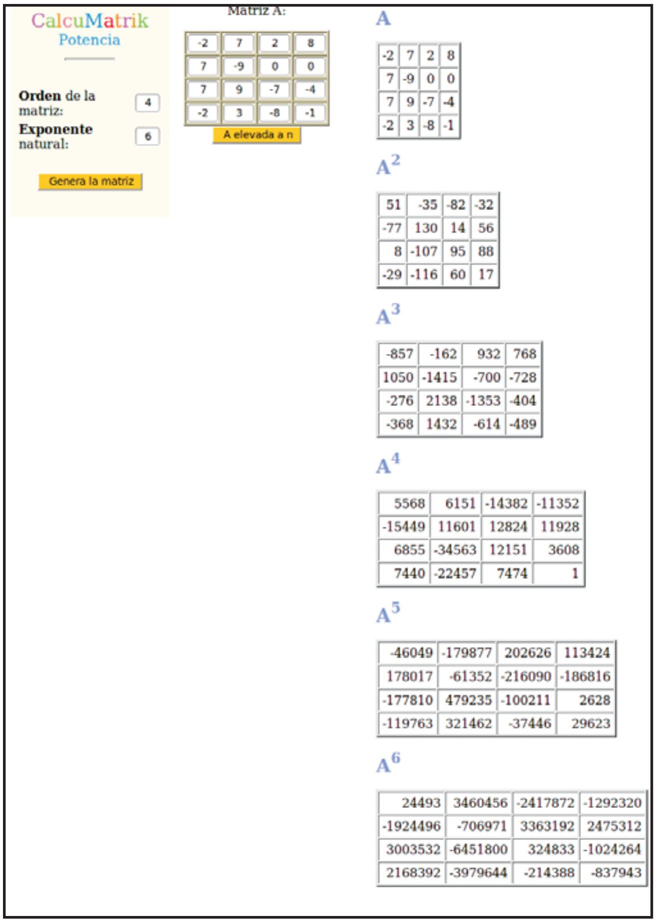


Imagen 8

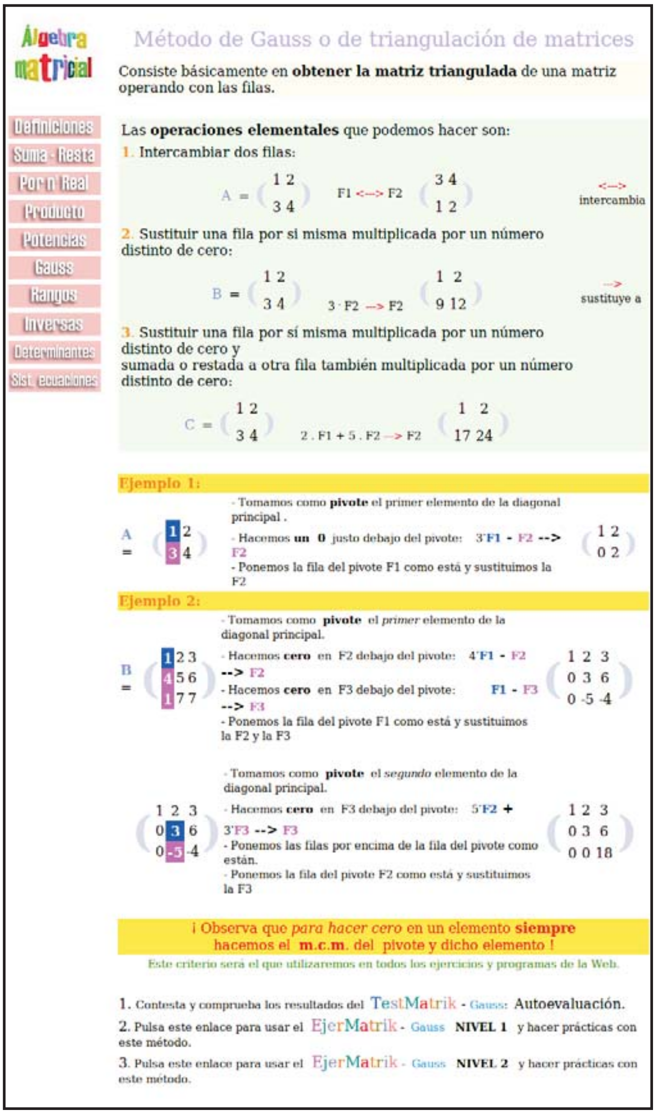


Imagen 9

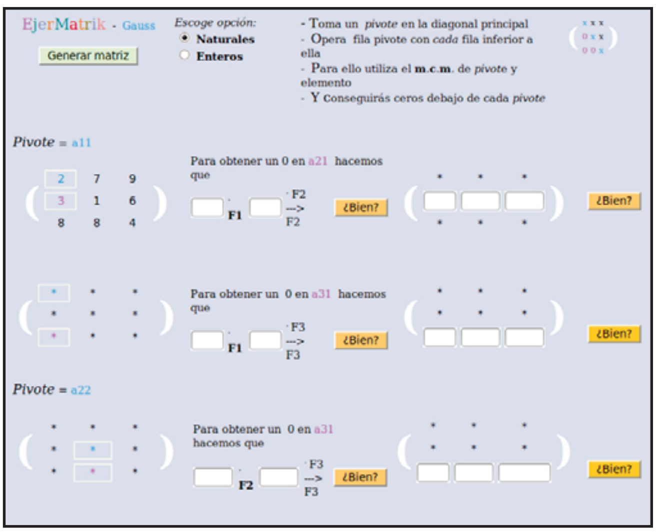


Imagen 10

En esta pantalla elegimos el tipo de números con los que deseamos que generar la matriz que queremos triangularizar. Una vez seleccionado el tipo de número, pulsamos sobre el botón “Generar matriz” y nos aparece la matriz a triangularizar. Observamos que el orden de esta matriz siempre es 3×3. Seguidamente vamos resolviendo el problema de forma guiada. En cada paso deberemos indicar la combinación lineal que vamos a realizar para conseguir el objetivo que nos proponen. Por ejemplo, el primero de los objetivos es hacer que el elemento a_{21} sea un cero. Una vez que escribamos el número por el que pretendemos multiplicar la fila F1 y la fila F2 para sustituir esta última por esa combinación lineal, debemos pulsar sobre el botón “¿Bien?” Para comprobar si esa combinación lineal sería la exactamente correcta, es decir, existen varias combinaciones lineales con las que conseguir que el elemento a_{21} sea cero, pero sólo una es la que nos proporcionará números más pequeños y enteros, que será la relacionada con el mínimo común múltiplo.

En el caso en el que la combinación lineal que hayamos propuesto sea la correcta, aparecerán en la siguiente matriz los elementos que aparecen iguales y podemos escribir en las casillas correspondientes los números que aparecerían en las casillas que se modifican.

De esta forma, paso a paso, vamos consiguiendo triangularizar la matriz utilizando el método de Gauss.

7.- Rangos: En esta parte de la aplicación se trata el rango de las matrices. Cuando accedemos a esta parte observamos la pantalla que aparece en la imagen 11.

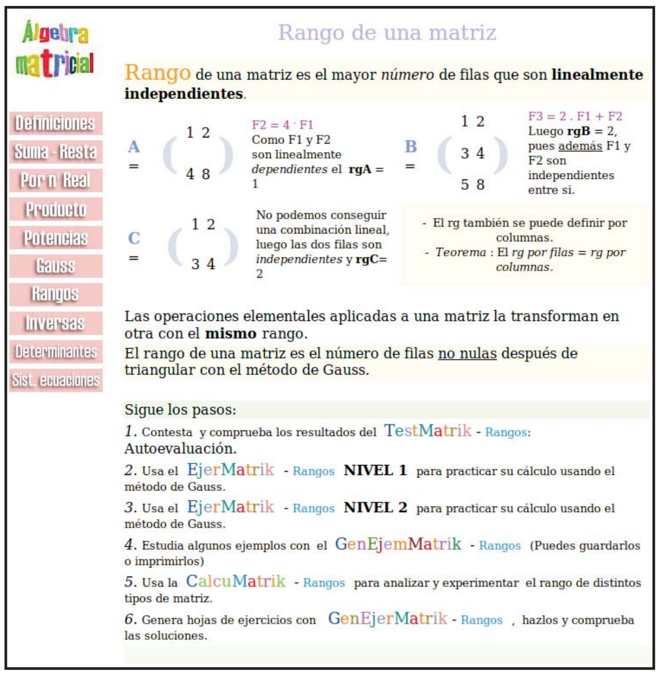


Imagen 11

Se puede apreciar, como sucedía en pantallas anteriores, que al principio de la misma aparece desarrollado parte del contenido teórico con algunos ejemplos. En cuanto a actividades, esta es una de las pantallas más completa que podemos encontrar.

La primera que aparece es una actividad test. Para acceder a ella solamente tenemos que pulsar sobre el enlace TestMatrik. Es un test con el mismo formato que los que hemos estado viendo en las páginas anteriores.

Debajo de este test encontramos dos enlaces a actividades guiadas con EjerMatrik. Una de ellas de nivel 1 y otras de nivel 2. Tanto en uno como en otro nos proponen el cálculo del rango de una matriz a través del método de triangularización de Gauss. Son dos pantalla similares a las que hemos podido contemplar en la imagen 10, en las que se va triangularizando la matriz paso a paso. Evidentemente, en esta pantalla también se nos ofrece la posibilidad de generar matrices distintas a las que calcularles el rango.

Otro de los enlaces que encontramos aparece en el punto 4 y se denomina GenEjemMatrik. Al pulsar accedemos a la pantalla que aparece en la zona superior de la imagen 12.

En esta ventana debemos indicar el número de filas y el de columnas de la matriz. Posteriormente seleccionamos el tipo de números que deseamos utilizar, naturales o enteros y, para finalizar, pulsamos sobre el botón “Generar matriz”. En ese momento aparecerá aleatoriamente una matriz A con las características que hayamos marcado. Tras realizar el ejercicio, podemos comprobar si el resultado que hayamos obtenido es el correcto pulsando sobre el botón “Rango de A”. Si hacemos esto se nos abrirá una nueva ventana en la que aparecerá el proceso seguido aplicando el método de Gauss para calcular el rango de la matriz A. Esta nueva pantalla la podemos ver en la parte inferior de la imagen 12.

Debajo de este enlace que hemos tratado aparece otro denominado CalcuMatrik que tiene un funcionamiento parecido al descrito anteriormente. Debemos indicar el número de filas, el de columnas y el tipo de números que vamos a utilizar. Ya hemos visto anteriormente el funcionamiento de pantallas como a la que accedemos pulsando sobre este enlace.

El último de los enlaces que completa la página de rangos es el denominado GenEjerMatrik. Aquí accedemos a una interesante pantalla de configuración que observamos en la parte superior de la imagen 13.

En esta pantalla vamos a configurar las opciones que deseamos de forma que nos genere una pantalla de ejercicios con los que practicar el cálculo del rango de una matriz. En esta pantalla vamos a indicarle los siguientes aspectos:

a) El número de ejercicios que deseamos que nos genere la aplicación.
b) El número de filas y de columnas que deseamos que tengan las matrices que genere. Podemos indicarle que todas tengan el mismo número de filas y columnas o que genere las matrices con un número de filas y columnas aleatorio cada una de ellas.

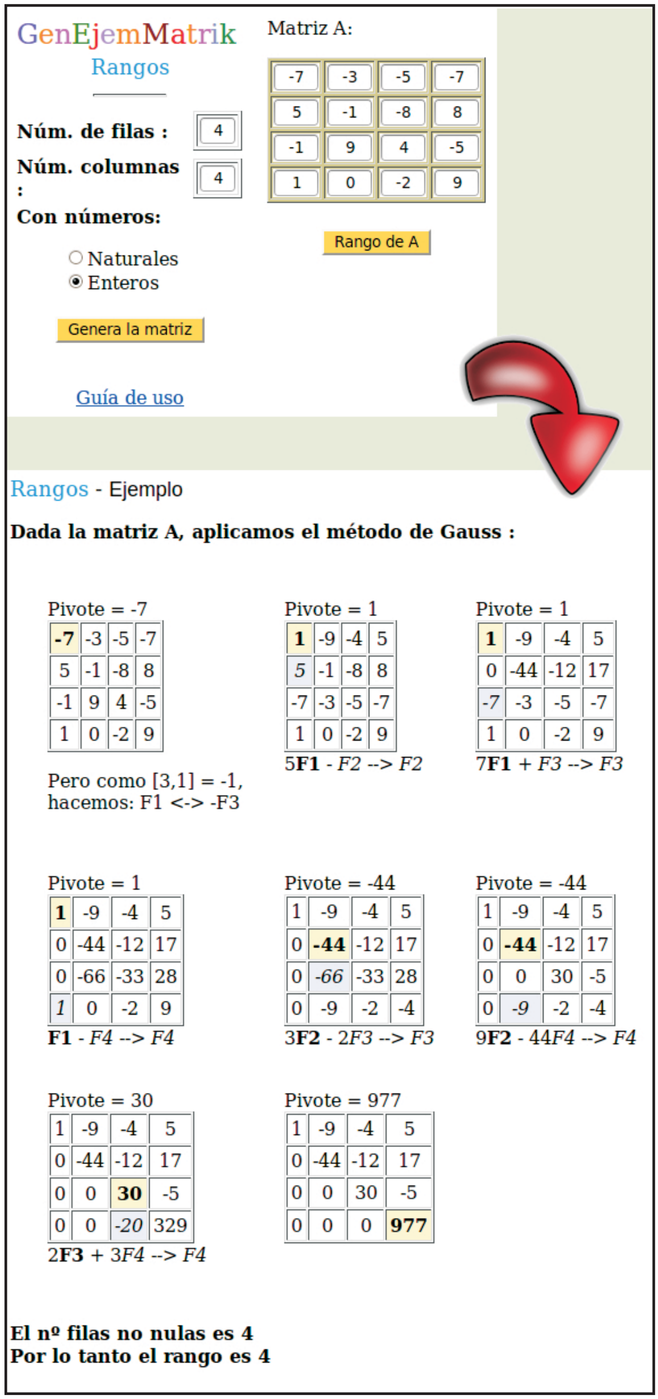


Imagen 12

c) Podemos indicarle si deseamos que aparezcan las soluciones de los ejercicios que proponga. Por defecto aparecen. Si deseamos que no sea así se lo debemos indicar.

d) Ya en el aspecto estético de los ejercicios seleccionaremos si queremos que las matrices aparezcan con bordes o sin ellos o si deseamos que aparezcan encuadradas o no.

e) Para finalizar, debemos seleccionar el tipo de números que deseamos que se utilice para generar las matrices indicadas. Podremos seleccionar entre números enteros o naturales.

Una vez que todo esté como pretendemos, solamente debemos pulsar sobre el botón "Generar ejercicios". Si hacemos esto nos aparecerá una relación de ejercicios como la que observamos en la parte inferior de la imagen 13, en la que observamos que ha generado 6 ejercicios.

8.- Inversas: En este apartado de la aplicación vamos a trabajar sobre el cálculo de la matriz inversa. Al acceder a esta parte de la aplicación observamos una pantalla como la que aparece en la imagen 14.

Al principio de esta parte, como viene siendo habitual, aparece de pasada una parte teórica sobre el aspecto que estamos tratando. En este caso sobre la matriz inversa. Posteriormente aparece un ejemplo resuelto y al final accedemos a la zona que más nos puede interesar. En esta zona encontramos una distribución parecida a la que hemos desarrollado en el punto del cálculo del rango de una matriz, por lo que os invitamos a que vayáis descubriendo algunos de los aspectos que tratan los ejercicios que proponen. A partir de aquí, las pantallas se van repitiendo en cada una de las temáticas que trata la aplicación, pero con los ejercicios dirigidos a esa temática.

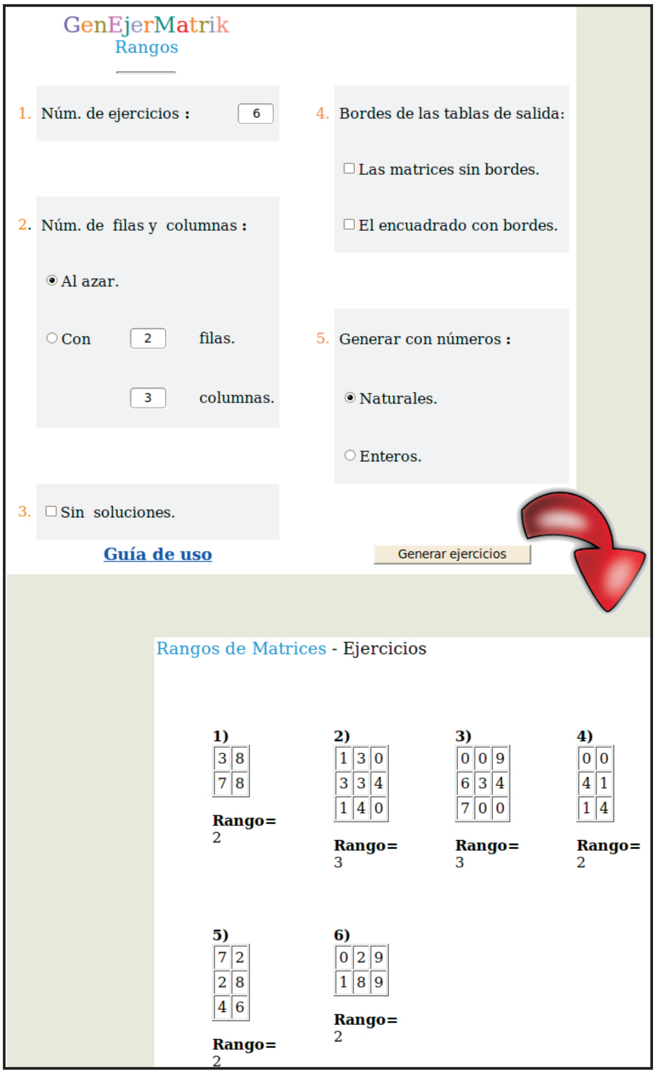


Imagen 13

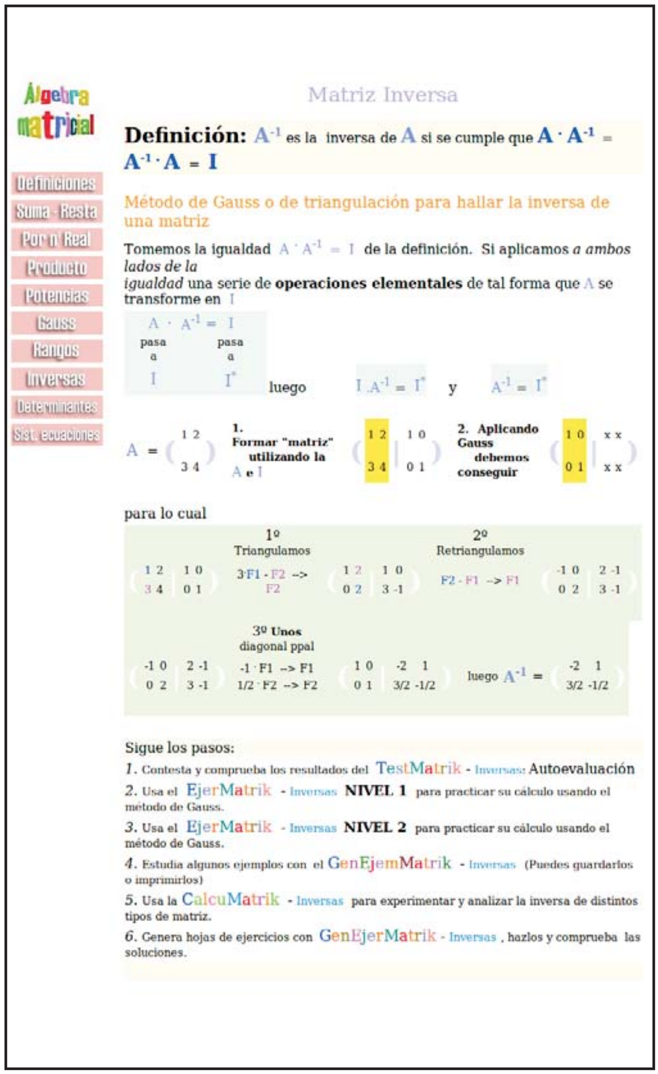


Imagen 14

9.- Determinantes: Al entrar en esta parte observamos la pantalla que aparece en la imagen 15.

Observamos que al principio de la pantalla se nos ofrece la forma de calcular el determinante de una matriz 2×2 y seguidamente aparecen varios ejemplos sobre el cálculo de determinantes.

La propuesta que realiza la aplicación es el cálculo del determinante de una matriz a partir de la triangularización de la misma.

Al final de la página aparecen 5 enlaces que vamos a citar. Son enlaces de los que ya hemos visto en páginas anteriores ejemplos.

El primero hace referencia a un test de 6 preguntas sobre determinantes. El segundo y el tercero son enlaces a la zona de EjerMatrik. Son ejercicios guiados para el alumnado sobre el cálculo de determinantes. El cuarto, "GenEjemMatrik" nos genera un ejercicio sobre determinantes a partir de unos parámetros introducidos previamente. El enlace CalcuMatrik nos ofrece un ejercicio creado aleatoriamente sobre el cálculo de determinantes. Una vez generado el ejercicio, podemos observar la resolución guiada del mismo. El último de los enlaces que observamos en la imagen 15 hace referencia a "GenEjerMatrik". Éste nos genera una página con tantos ejercicios sobre determinantes como le hayamos indicado en la configuración inicial. La pantalla es parecida a la que pudimos observar en la imagen 13.

10.- Sistemas de ecuaciones: La última de las herramientas que nos ofrece la aplicación está encaminada a la práctica sobre la resolución de sistema de ecuaciones. La pantalla a la que accedemos es muy parecida a la que hemos podido contemplar en la imagen 15, pero su contenido hace referencia a los sistemas de ecuaciones.

Al final de la pantalla aparecen 5 enlaces que vamos a citar como hemos hecho en el caso de la resolución de determinantes. Son enlaces de los que ya hemos visto en páginas anteriores ejemplos.

El primero hace referencia a "TestMatrik", un test de 6 preguntas sobre sistemas de ecuaciones, su resolución y su compatibilidad. El segundo y el tercero son enlaces a la zona de EjerMatrik. Son ejercicios guiados para el alumnado sobre la resolución de sistemas de ecuaciones. En la imagen 16 podemos observar la pantalla correspondiente a "EjerMatrik" de nivel 2.

El cuarto, "GenEjemMatrik" nos genera un ejercicio sobre determinantes a partir de unos parámetros introducidos previamente. El enlace CalcuMatrik nos ofrece un ejercicio creado aleatoriamente sobre el cálculo de determinantes. Una vez generado el ejercicio, podemos observar la resolución guiada del mismo. El último de los enlaces que observamos en la imagen 15 hace referencia a "GenEjerMatrik". Éste nos genera una

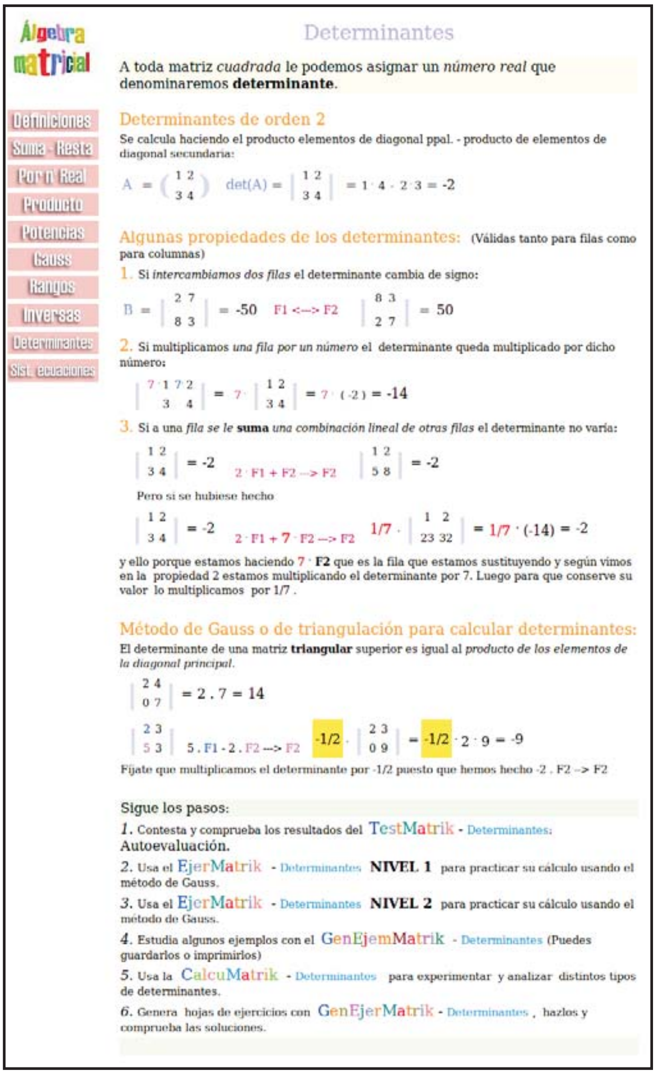


Imagen 15

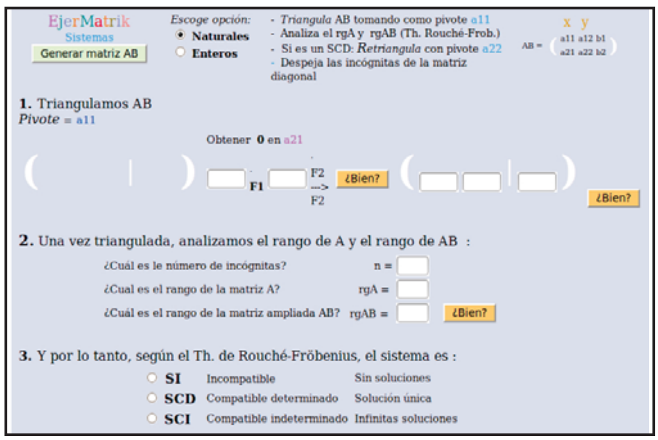


Imagen 16

página con tantos ejercicios sobre determinantes como le hayamos indicado en la configuración inicial. La pantalla es parecida a la que pudimos observar en la imagen 13.

11.- Guías de uso: La aplicación cuenta con dos guías que nos pueden resultar de ayuda. Una de ellas es la guía de utilización de la aplicación para el alumnado. Esta guía la encontramos en la siguiente dirección:

http://www.isftic.mepsyd.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2000/algebra/doc/guialumno.doc

En ella se muestran pantallas con las que se encontrará el alumnado y la composición de las mismas, además de la forma de utilizar e interactuar con cada una de ellas.

Una segunda guía, la del profesorado, la encontramos en la siguiente dirección:

http://www.isftic.mepsyd.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2000/algebra/doc/guiaprofesor.doc

En ella se hace un recorrido aproximativo por la aplicación y se indica la forma en la que de ha ido construyendo cada una de las pantallas con las que se encontrará el alumnado y la forma que se ha utilizado para elaborar cada uno de los test que aparecen en la aplicación.

Como hemos podido ver a lo largo de este recorrido, la aplicación "Álgebra matricial" es una herramienta que nos facilita la aplicación y la práctica de aquello que han estado estudiando los/as alumnos/as a lo largo del tema de matrices, ampliándolo a su aplicación en el estudio de sistemas de ecuaciones. Hemos comprobado también que en muchas ocasiones las características de las matrices que se utilizan o que nos proponen como ejercicio están limitadas en el número de filas y columnas y que los números que aparecen en dichas matrices son números enteros que oscilan entre -9 y 9. Pero evidentemente, a la hora del estudio matricial no se trata tanto complicar las operaciones que se deben hacer en un ejercicio, como de que los alumnos comprendan la utilidad de estos entes y sepan manejarlos, utilizar sus propiedades, etc. para resolución de ejercicios.

También hemos podido comprobar que la aplicación es muy sencilla de utilizar ya que en cada ventana se van repitiendo los mismos formatos y enlaces de forma que el alumnado y el profesorado no se encuentre perdido o le suponga una dificultad añadida su utilización. Evidentemente, se trata de un software específicamente diseñado para la práctica de ejercicios que estén relacionados con las matrices y que enuncia o propone la propia aplicación. Para ejercicios derivados de enunciados que estén relacionados con las matrices o provenientes de otros medios sería cuestión de utilizar otros medios ya que la aplicación no ha sido diseñada con ese fin, sino con el de facilitar la práctica de ejercicios relacionados con las matrices, sus operaciones y la aplicación a los sistemas de ecuaciones.

Si lo que se pretende es resolver problemas específicos sobre matrices, operaciones, determinantes, sistemas de ecuaciones... deberemos recurrir a una software más generalista como Wxmaxima que ya hemos tratado en números anteriores en este apartado de la revista *Suma*.

Existen además, una gran cantidad de webs que nos pueden resultar útiles a la hora de trabajar las matrices. Una de ellas, por ejemplo, la encontramos en la dirección:
www.marcelovalenzuela.com/matrices/producto-de-matrices.php

Al acceder a esta página nos aparece la pantalla que observamos en la imagen 17.

En esta dirección encontramos una web para realizar el producto de matrices. El funcionamiento de esta página es bastante sencillo. Lo primero que debemos hacer es introducir

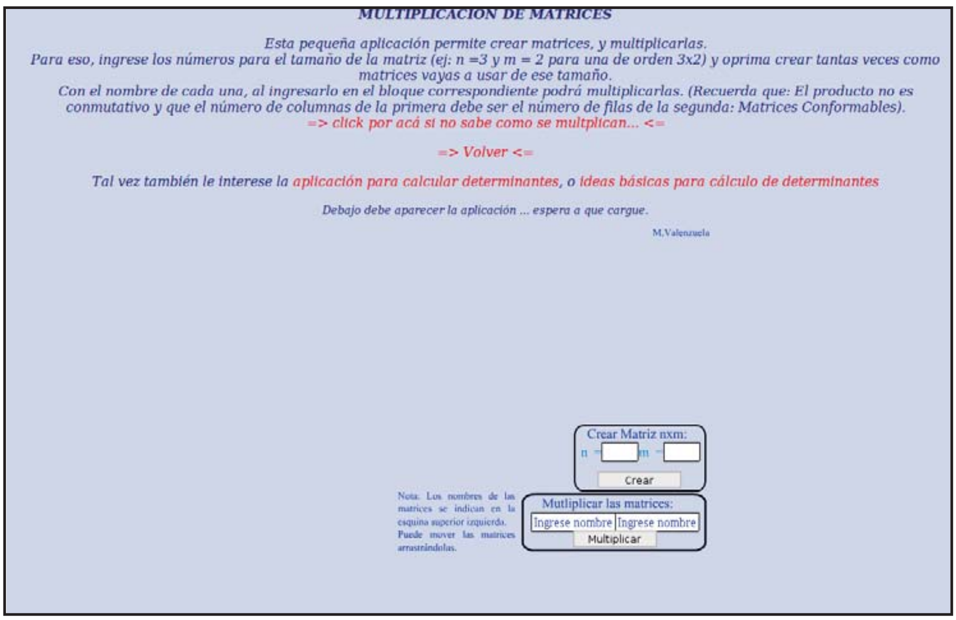


Imagen 17

las dos matrices que deseamos multiplicar. Para ello escribimos el orden de la matriz en el lugar correspondiente que aparece en la zona inferior de la web, donde leemos “Crear matriz *n*×*m*” le indicamos el valor de *n* y el valor de *m*. Una vez escritos estos valores pulsamos el botón “Crear”. En ese momento aparecerá la matriz con los huecos correspondientes que deberemos completar. En nuestro caso le vamos a dar una matriz de orden 7×8. Observamos que encima de la matriz aparece el nombre de la misma, en este caso “m781”. Este nombre lo utilizaremos posteriormente. Una vez introducida la primera matiz, introducimos la segunda. Para ello repetimos el mismo proceso que hemos seguido con la primera. Escribimos el orden (número de filas y número de columnas) y pulsamos el botón “crear”. En nuestro caso el orden de la segunda matriz va a ser 8×3. Introducimos los valores de la matriz observando que el nombre que le ha dado a ésta es “m832”. Podemos seguir introduciendo matrices, pero nosotros solamente vamos a introducir estas dos. La aplicación nos ofrece la posibilidad de arrastrar las matrices introducidas y colocarlas en otra parte de la pantalla.

Una vez introducidas las dos matrices, vamos a proceder a multiplicarlas. Para ello, observamos que en la parte inferior de la web aparecen dos ventanas en la que nos hemos escrito nada y que contienen el texto “Ingrese nombre”. En la primera de esas ventanas debemos introducir el nombre de la primera matriz que vamos a multiplicar, en nuestro caso “m781” y en la segunda ventana el nombre de la segunda, en nuestro caso “m832”. Seguidamente pulsamos sobre el botón “Multiplicar” y aparece una nueva matriz vacía, con las dimensiones que debe tener la matriz resultante del producto. Encima de la misma aparece su nombre, en nuestro caso “r73”. Debajo de ella aparece un botón llamado “Calcular”. Si pulsamos sobre este botón, nos aparece la matriz que resulta del producto. En la imagen 18 podemos observar como queda la

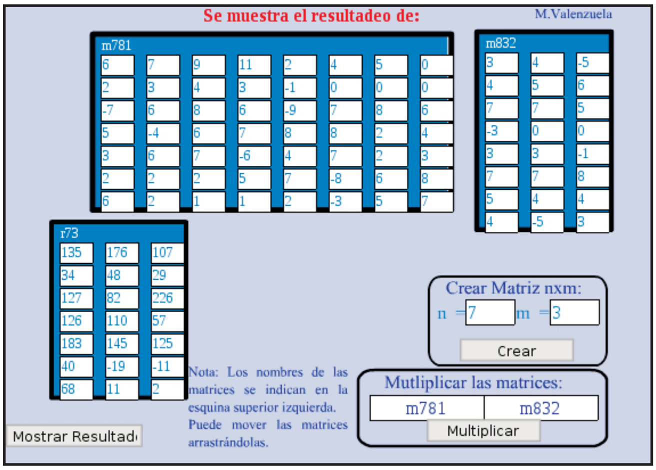


Imagen 18

pantalla al final con los datos que hemos introducido.
Esta página se la debemos al profesor Marcelo Valenzuela al igual que otra que tiene que nos proporciona el cálculo del determinante de una matriz y que podemos localizar en la dirección

http://www.marcelovalenzuela.com/det.php

y que nos permite calcular hasta el determinante de una matriz 6×6.

MATEMASTIC ■

Ficha educativo - técnica	
Nombre	Álgebra Matricial
Sistema	Es una aplicación multiplataforma, no dependiendo del sistema operativo y para la que basta con un navegador para poderla utilizar..
Descarga	La aplicación la localizamos en el portal de instituto superior del formación del profesorado y TIC. Concretamente en la dirección http://www.isftic.mepsyd.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2000/algebra/index.html
Licencia	Software gratuito
Contenido	Matrices, operaciones, determinantes y sistemas de ecuaciones.
Nivel	Multinivelar: 2º de Bachillerato y estudios superiores.
Metodología	Aplicación para utilizar con el alumnado para resolver ejercicios de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones.

Este artículo fue solicitado por *Suma* en junio de 2010 y fue aceptado en septiembre de 2010 para su publicación.

In Memoriam Cipriano Sánchez Pesquero

Se nos fue *Cipri*.

Son muchos profesores de toda España los que conocieron y gozaron de su amistad.

Estamos todos impresionados por la muerte de este gran maestro, profesor de Matemáticas y amigo. Se ha ido tan pronto que no nos lo podemos creer todavía. Son momentos de tristeza, y de recuerdos de un tiempo compartido.

Cipri era un Maestro vocacional y un enamorado de la enseñanza de las Matemáticas. Decía Cicerón: *Si quieres aprender, enseña*. Y eso es lo que Cipri han hecho durante muchos años: aprender enseñando matemáticas.

Y lo ha hecho con sencillez ¡durante cuarenta años!. Enseñando matemáticas llegaba a las mentes de sus alumnos, pero con sus maneras y su comportamiento llegaba al corazón de todos.

Cipri tenía varios premios a su trabajo educativo, premios a nivel local, premios a nivel regional y premios a nivel nacional. Entre ellos, él apreciaba especialmente los premios Joaquín Sama. Algunos de estos premios son conocidos por nosotros, sus amigos, pero seguro que tenía otros reconocimientos porque lo hacía con discreción, sin levantar la voz.

Cipri ha trabajado como han trabajado otros muchos maestros, muchas veces sin medios, casi siempre sin reconocimiento, pero siempre con entusiasmo, hasta el último día de clase.

Cipri, como compañero, fue siempre discreto, amigo de hacer favores, detallista con todo el mundo, y entusiasta con su trabajo.

Como muchos otros maestros trabajó, en pequeños colegios, y en otros más grandes, y finalmente en un Instituto, donde culminó su carrera docente. Siempre se entregó a sus alumnos, trascendiendo de la propia enseñanza, y llego a ser para ellos un verdadero orientador y educador. Y lo hizo para que, cuando sus alumnos salieran al mundo, tuvieran las mismas oportunidades educativas que los demás (tanto si estudiaron en un colegio pequeño, como si lo hubieran hecho en uno grande). Y para que cuando alguien les dijera:

¿Te animas a escribir en un periódico? pensaran: "Eso ya lo hice yo en mi escuela con don Cipriano". ¿Te animas a participar en un concurso de aviones?: "Eso ya lo hice yo con mi maestro don Cipriano".

Muchos de sus alumnos se encontrarán seguro, en situaciones que a él le llenarían de orgullo: ¿quién le iba a decir que uno de sus alumnos más revoltosos, ayudaría como voluntario a las víctimas de un tsunami? ¿o que otros hayan ido a recoger chapapote?, o que muchos continúan estudiando, gracias a su empeño. Muchos de ellos tendrán un trabajo gracias a la honradez y dedicación de su maestro.

Cipri enseñó no sólo con sus conocimientos, sino con su corazón, hizo suyo el mejor principio de la educación: predicar con el ejemplo, porque la enseñanza que deja huella no es la que se hace de cabeza a cabeza, sino de corazón a corazón.

Pero su labor no se limitaba a sus alumnos, se entregó de manera altruista al apoyo y al trabajo cooperativo con los compañeros, siendo cofundador de la Sociedad Extremeña de Educación Matemática *Ventura Reyes Prósper*, a la que dedicó 20 años de trabajo, y de la que actualmente era Secretario. Secretario también del Servicio de Publicaciones de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, pertenecía a la Junta de Gobierno de FESPM y era apreciado por todos por su sensatez, eficacia, amabilidad y exquisito trato.

Era un verdadero amigo de sus amigos, entre los que nos contamos, considerando la amistad como uno de los valores máximos de la vida humana.

Cipri… Has sido una buena persona, inolvidable, tu partida no la asimilamos, no la comprendemos, has dejado en todos nosotros una profunda huella.

…Solo nos consuela pensar, que a esa nube en la que ahora te encuentras, situada en el cielo de los "matemáticos buenos", te llegue nuestro cariño y nuestro recuerdo, mientras trazas polígonos regulares con vértices en las estrellas…

Ricardo Luengo y Luisma Casas

suma+ 65
Noviembre 2010, pp. 69-74

Los Embajadores, dos cuadros en una misma tabla

1533 es un año especial en la historia de Inglaterra. Reinaba Enrique VIII, que se acababa de casar con Ana Bolena, rompiendo así con la Iglesia Romana. El retratado en el cuadro, Jean de Dinteville, era a la sazón embajador de Francisco I ante la corte de los Tudor. En1533 le visitó su amigo, Georges de Selve, obispo de Lavaur, que había sido embajador de Francia en Venecia; de ahí que el cuadro sea conocido como Los Embajadores. *Juntos posaron para Hans Holbein El Joven, de pie, rodeados de un montón de objetos, que cubren el universo de sus intereses: La música, la astromía, la geometría, la aritmética; una mezcla de lujo, ciencia y cultura.*

Jean de Dinteville y Georges de Selve, Los Embajadores, Hans Holbein El Joven, 1533
The National Gallery, Londres

Francisco Martín Casalderrey
IES Juan de la Cierva (Madrid)
fmc@revistasuma.es

Los Embajadores es un cuadro de grandes dimensiones. Mide 209 cm × 207 cm, por lo que podemos pensar que los personajes están representados en escala 1:1 aproximadamente.

Esta tabla es famosa sobre todo por lo que algunos han llamdo el "hueso de sepia"; esa mancha blanquecina y aparentemente informe que flota delante del primer plano del cuadro y presenta un aspecto aproximadamente elíptico. Si orientamos nuestra mirada en la dirección del eje mayor de esa especie de elipse, es decir, si miramos desde abajo y desde la izquierda hacia arriba y hacia la derecha, y separamos la recta de nuestra mirada ligeramente del plano del cuadro, observaremos con claridad una calavera humana. Holbein la ha pintado con muchísimo detalle pero, mediante un anamorfismo, queda deformada, desdibujándola ante el ojo del que mira frontalmente el cuadro.

En la figura central de esta página, hemos aplicado al cuadro la trasformación inversa a la que aplicó el pintor a la calavera. Como resultado el contorno del cuadro se transforma en un cuadrilátero alargado y la calavera retoma su forma, como se aprecia en la parte inferior de la imagen.

Muchas cosas se han escrito sobre el significado de esta calavera, a la vez oculta y patente, pero no es ese nuestro objetivo. Además no es esta la única calavera que aparece en el cuadro: otra la podemos encontrar en el medallón que lleva en esa especie de chapela el personaje de nuestra izquierda, Jean de Dinteville. Lo mas probable es que la calavera fuera para él una especie de emblema personal.

Un cuadro para una escalera

Como casi todos los cuadros en los que se representa una anamorfosis es probable que este cuadro fuera concebido para ser colgado en algún lugar específico, que facilitase su doble contemplación. En el caso de *Los Embajadores* podemos suponer que fue pensado para ser colgado en el rellano de una escalera con dos tramos perpendiculares que confluyen en él. Así, quien subiese por el tramo inferior vería la calavera, mientras quien bajase del superior vería a los embajadores.

En la figura 3, en la página siguiente, se presentan tres vistas que reconstruyen esquemáticamente esa supuesta escalera. En la primera, de iquierda a derecha, se ve la disposición general del espacio de la escalera, con el cuadro colgado en una de las paredes del rellano. Las otras dos ofrecen las visiones subjetivas de quien baja hacia el rellano desde la planta superior y de quien sube hacia él.

Figura 2

Holbein se vale de una transformación matemática, el anamorfismo, para pintar dos cuadros en la misma tabla, dos imágenes en una sola.

Según el Diccionario de la Real Academia Española, una *anamorfosis* es una "pintura o dibujo que ofrece a la vista una imagen deforme y confusa, o regular y acabada, según desde donde se la mire".

Los Embajadores contiene dos anamorfosis. Para quien sube por nuestra escalera, la calavera está en perspectiva y lo anamórfico, lo oculto, son los personajes, que quedan desdibujados como meras manchas alargadas. Para quien baja por la escalera, es decir, para quien la mira frontalmente, sucede lo contrario. Las dos anamorfosis contenidas en el cuadro son, cada una vista desde el lugar oportuno, las que mostramos en la figura de la página anterior, la habitual que vemos reproducida en los libros, y la figura 2, de ésta página, en la que se ve nítidamente la calavera.

Objetos matemáticos en *Los Embajadores*

Muchas miradas matemáticas sobre este cuadro se detienen aquí, en el análisis de la anamorfosis de la calavera. Pero hay muchos más lugares en esta tabla en los que podemos fijar nuestros ojos de matemáticos.

Hay multitud de objetos que recuerdan el mundo matemático de la época. Vemos dos esferas –un globo estelar y otro terráqueo–, que sugieren el ámbito de la Astronomía. Hay, además, dos relojes de Sol, uno poliédrico, con una pequeña brújula para orientarlo, y otro cilíndrico. Hay también otros intrumentos geográficos y astronómicos. En la balda inferior del mueble, aparecen dos grupos de objetos: un compás y una escuadra –la Geometría– un laúd, un estuche de flautas y un libro de cánticos abierto –la Música– y otro libro semicerrado de Aritmética, del que hablaremos más adelante con más detalle.

Juntas, Aritmética, Geometría, Astronomía y Música, en las cuatro artes liberales del *quadrivium*; de alguna manera, las cuatro ramas de la matemática en la concepción medieval. El *trivium*, a su vez, estaba constituido por la Gramática, la Dialéctica, y la Retórica. Los restos arqueológicos de la división del *trivium* y el *quadrivium* han llegado hasta nuestros días en la falsa oposición entre letras y ciencias, que aún pervive en nuestro sistema educativo.

Figura 3. Tres vistas de la posible ubicación en el rellano de una escalera de *Los Embajadores*, de Hans Holbein, 1533

Una estancia con suelo cosmatesco

El último objeto matemático al que nos referiremos es el suelo. En el cuadro se ve en perspectiva y aún podríamos pensar que no está muy bien dibujado. De hecho, la esquina frontal de lo que parece ser un cuadrado –abajo, en el centro del cuadro– parece curvarse hacia los pies del espectador. Pero si nos fijamos atentamente, veremos que, lo que realmente ocurre es que los motivos que se repiten a lo largo de la cenefa no son iguales como cabría suponer. Las bandas que separan estos motivos, en lugar de ser todas perpendiculares a la dirección en la que se desarrolla la cenefa, convergen radialmente hacia el centro del dibujo, que es el centro a su vez del cuadrado. En la figura 4 hemos reproducido aproximadamente el dibujo del pavimento, para que se pueda apreciar mejor esta convergencia.

Figura 4. Recostrucción aproximada del pavimento en *Los Embajadores*,
de Hans Holbein, 1533, National Gallery, Londres.

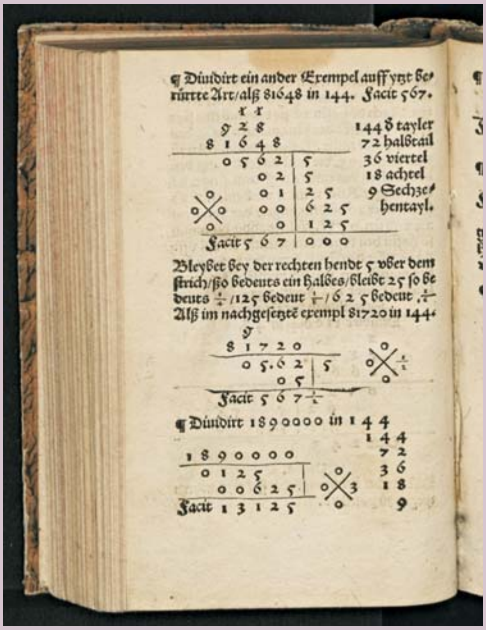
Un curioso algoritmo para la división

Detalle del libro de Apiano en el cuadro de *Los Embajadores*

En el cuadro de *Los Embajadores* aparecen representados varios libros. El que se encuentra en la balda inferior del mueble, a la izquierda del espectador, semiabierto, encuadernado en rojo, con una escuadra entre sus páginas para que no se cierre, es *Eyn newe unnd wohlgründte underweysung aller Kauffmanss Rechnung in dreyen büchern* (*Un libro nuevo y certero sobre el cálculo para comerciantes en tres libros*), de Petrus Apianus, publicado en Ingolstadt, en 1527.

Este libro es famoso por varias cosas. En su portada aparece el triángulo aritmético llamado de Pascal o de Tartaglia, casi un siglo antes del nacimiento de Pascal (1627-1662), aunque este hecho no nos debería parecer sorprendente, si hemos seguido la sección *Desde la Historia* que mantuvieron en esta revista Ángel Ramírez y Carlos Usón, en la que en alguna ocasión han abordado el tema del triángulo aritmético.

Hojeando con un poco de paciencia el libro no es difícil localizar la página que aparece visible en el cuadro de Hans Holbein el Joven. Se trata de la página 258 del libro, que reproducimos más abajo. Escrita en alemán medieval, la página contiene tres divisiones con sus correspondientes pruebas del 9. Analizaremos el curioso algoritmo empleado para hacer las tres divisiones que vemos en esta página. Para ello fijémonos en la primera de ellas: se trata de dividir el número 81648 entre 144. El resultado es 567.



El frontispicio y la página por la que aparece abierto el *Rechnung de Apiano* en *Los Embajadores*

El proceso de la división es el siguiente. Partimos del divisor, 144, y lo dividimos sucesivamente por dos mientras resulte entero el resultado. Tenemos así la secuencia:

144 el divisor
72 la mitad del divisor
36 un cuarto del divisor
18 un octavo del divisor
9 un dieciseisavo del divisor

Apiano asocia las fracciones del divisor con los números siguientes, en una especie de antecedente de la notación decimal:

½ con 05
¼ con 025
⅛ con 0125
1⁄16 con 00625

y procede del siguiente modo: toma la primera cifra, 8; al ser menor que 9 –el último número de la tabla anterior– toma dos cifras, 81. Este número se encuentra comprendido entre 72 y 144. Resta de él 72 y escribe la diferencia, que es 9, encima. Como 72 es la mitad del divisor, sitúa debajo de la raya horizontal, encolumnado bajo el 1 del dividendo, el número 05, correspondiente a la mitad del divisor, que es la cantidad sustraída. Toma ahora el 9 que escribió sobre el 81. Este número figura en nuestra tabla de fracciones del divisor y corresponde a 1⁄16. Escribe, por tanto, encolumnado con el mismo 1 de antes 00625. Probablemente, para ahorrar espacio, el 05 y el 00625 los escribe finalmente en la misma línea poniendo, por tanto, 05625. La línea vertical, situada a la derecha de la columna de las unidades, le sirve para señalar el comienzo de la parte fraccionaria y juega el mismo papel que nuestra coma decimal.

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
 & \cancel{9} & & & & & & \\
8 & 1 & 6 & 4 & 8 & & & \\ \hline
 & 0 & 5 & 6 & 2 & 5 & &
\end{array}$$

Tacha ahora el nueve, puesto que ya ha sido utilizado. Toma después las dos siguientes cifras del divisor, es decir 64, y le resta a este número 36, escribiendo encima la diferencia, que es 28. Como 36 corresponde a ¼ del divisor, escribe encolumnado con el 4 el número 025, que corresponde a ¼.

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
 & \cancel{9} & 2 & 8 & & & & \\
8 & 1 & 6 & 4 & 8 & & & \\ \hline
 & 0 & 5 & 6 & 2 & 5 & & \\
 & & & 0 & 2 & 5 & &
\end{array}$$

Toma ahora el 28. Sustrae de él 18, que es ⅛ del divisor. Escribe la diferencia, 1, encima del 2; debajo de la raya horizontal escribe el número 0125, correspondiente a ⅛. Tacha el 2 y el 8 que ya han sido usados.

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
 & & 1 & & & & & \\
 & \cancel{9} & \cancel{2} & \cancel{8} & & & & \\
8 & 1 & 6 & 4 & 8 & & & \\ \hline
 & 0 & 5 & 6 & 2 & 5 & & \\
 & & & 0 & 2 & 5 & & \\
 & & & 0 & 1 & 2 & 5 &
\end{array}$$

Procede ahora con el 1 de arriba. Como las cifras de la columna siguiente ya han sido utilizadas, lo interpreta como 10 y le sustrae 9. Escribe encima un 1 –al lado del otro 1– y tacha el anterior. Como 9 es 1⁄16 del divisor, escribe en la columna correspondiente el numero 00625.

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
 & & \cancel{1} & 1 & & & & \\
 & \cancel{9} & \cancel{2} & \cancel{8} & & & & \\
8 & 1 & 6 & 4 & 8 & & & \\ \hline
 & 0 & 5 & 6 & 2 & 5 & & \\
 & & & 0 & 2 & 5 & & \\
 & & & 0 & 1 & 2 & 5 & \\
 & & & 0 & 0 & 6 & 2 & 5
\end{array}$$

Por último, toma el 1 de la fila superior que con el 8 de las unidades del dividendo hacen 18, que equivale a un octavo del divisor. Tacha ese 1 y escribe bajo la raya horizontal 0125.

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
 & & \cancel{1} & \cancel{1} & & & & \\
 & \cancel{9} & \cancel{2} & \cancel{8} & & & & \\
8 & 1 & 6 & 4 & 8 & & & \\ \hline
 & 0 & 5 & 6 & 2 & 5 & & \\
 & & & 0 & 2 & 5 & & \\
 & & & 0 & 1 & 2 & 5 & \\
 & & & 0 & 0 & 6 & 2 & 5 \\
 & & & & 0 & 1 & 2 & 5
\end{array}$$

La división se ha terminado, porque se han acabado las cifras. Basta ahora sumar los números bajo la raya horizontal y obtenemos:

$$\begin{array}{cccccc|ccc}
 & & & \cancel{1} & \cancel{1} & & & & \\
 & & \cancel{9} & \cancel{2} & \cancel{8} & & & & \\
 & 8 & 1 & 6 & 4 & 8 & & & \\ \hline
 & & 0 & 5 & 6 & 2 & 5 & & \\
 & & & & 0 & 2 & 5 & & \\
 & & & & 0 & 1 & 2 & 5 & \\
 & & & & 0 & 0 & 6 & 2 & 5 \\
 & & & & & 0 & 1 & 2 & 5 \\ \hline
\textit{facit} & & & 5 & 6 & 7 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Es decir, el cociente de dividir 81648 entre 144 es 567.

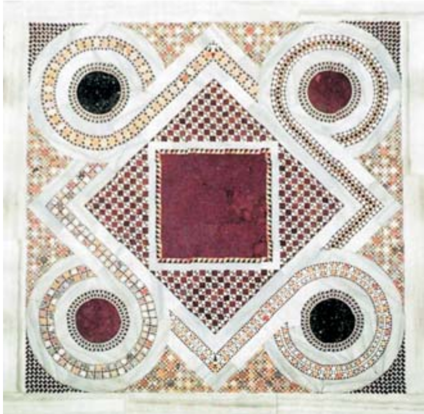


Figura 6. Pavimento Santa María in Cosmedin. Roma.

Figura 5. Pavimento de la Abadia de Westminster, muy parecido al de *Los Embajadores*.

Este tipo de suelos, relativamente habitual en iglesias y palacios en esa época, recibe el nombre de *cosmatesto*, derivado del apellido de una familia de artesanos medievales del mármol, que difundieron este estilo en Roma y sus alrededores, los Cosmati. Diseños muy parecidos al del cuadro de *Los Embajadores* podemos encontrarlos en la iglesia de Santa María in Cosmedin, en Roma, y en la Capilla Sixtina del Vaticano. Prueba de que este estilo había llegado también a la Inglaterra de los Tudor es de la Abadía de Westminster.

Por último, para terminar esta mirada breve al cuadro de Holbein, quiero incluir este extraño dibujo anamórfico, que cualquier lector podrá *ver* si se construye un espejo cónico de 3 cm de diámetro de la base y 3 cm de generatriz, que puede prepararse, por ejemplo, con una cartulina plateada brillante. Al colocar este espejo en en centro de la imagen podrá mirar el logotipo de *Suma* con ojos matemáticos.

ARTE CON OJOS MATEMÁTICOS ■

Figura 6. Anamofosis cónica del logotipo de *SUMA*, realizado con el programa *Anamorph Me!*, de Philip Kent, © 2001.

Este artículo fue solicitado por *Suma* en junio de 2010 y fue aceptado en octubrebre de 2010 para su publicación.

suma+ 65
Noviembre 2010, pp. 75-78

Educativas

Los alumnos de cuarto de la ESO ya sabían que la suma de los ángulos de un triángulo es un ángulo llano. También conocían que el teorema de Thales ligaba la semejanza de triángulos con la proporcionalidad de sus lados. Sólo quedaba ya relacionar unos con otros, los ángulos con los lados de un mismo triángulo. Así era como la trigonometría cerraba el círculo, definiéndose el *seno*, *coseno* y *tangente* de un ángulo en un triángulo rectángulo. Gracias al teorema de Thales las definiciones resultaron coherentes.

Durante varias sesiones resolvieron problemas de triángulos rectángulos. Algunos fueron puramente geométricos, es decir, geométricamente puros. Otros, en cambio, tuvieron un aire mucho más práctico y realista. Se hallaron los tres ángulos y los tres lados de un triángulo rectángulo dado, se calculó la altura de un ciprés visible a través de la ventana conociendo el ángulo de depresión visual de su cima y la distancia hasta su base, se determinó también la inclinación de la escalera del instituto midiendo la huella y la contrahuella de un único escalón.

Las actividades no acabaron ahí, pues había programada una visita al MMB (*Museu Marítim de Barcelona*). Allí se les mostró cómo los navegantes se orientaban en el mar gracias a las estrellas y se les explicaban los aspectos principales de un problema fundamental en la navegación como fue determinar la longitud. El ingenio matemático de Cristóbal Colón se puso de manifiesto con el descubrimiento de América y si este fue tal, fue porque el navegante llegó hasta el nuevo continente observando siempre la estrella polar bajo el mismo ángulo. Colón no descubrió América porque fue capaz de llegar hasta allí, sino porque supo cómo regresar.

Como colofón a la visita, los estudiantes realizaron una actividad práctica de Trigonometría. Primero, construyeron un cuadrante (Figura 1). Luego, usaban el instrumento para medir el ángulo de depresión visual de la estatua de Colón que hay a escasos metros del MMB y, finalmente, con esos datos y la fórmula de la tangente, calcularon la altura de la estatua.

Miquel Albertí Palmer
IES Vallés, Sabadell
adherencias@revistasuma.es

De vuelta a clase se les planteó un nuevo problema práctico para cuya resolución utilizarían el cuadrante construido en el MMB. El planteamiento fue posible porque un estudiante vivía en el edificio al otro extremo del patio del instituto y cuyas ventanas se veían desde el aula donde se hacía una de las sesiones de clase (Figura 2).

El problema era: *¿Qué distancia hay entre la fachada de nuestra aula y la del edificio al otro lado del patio?*

El ángulo de depresión visual (6º) fue medido en clase con el cuadrante construido en el MMB. La altura sobre el suelo desde la que se tomó esa medida era de unos 5 *m*. La altura del edificio en cuestión se calculó contando el número de ladrillos por piso de la fachada (accesible a pie), que fue de unos 24 *m*. Con estos datos se resolvió el problema:

$$\tan(6^\circ) = \frac{24-5}{x} \Rightarrow x = \frac{19}{\tan(6^\circ)} \approx 181m$$

Además de resolver la cuestión mediante Trigonometría fueron invitados a buscarla utilizando únicamente el teorema de Thales. El alumno que vivía en el edificio proporcionó el dato necesario para abordar la cuestión. Él mismo midió la anchura de la ventana de su casa: 80 cm. Pero no tuvieron éxito. Fue entonces cuando llevé a cabo una aplicación magistral del

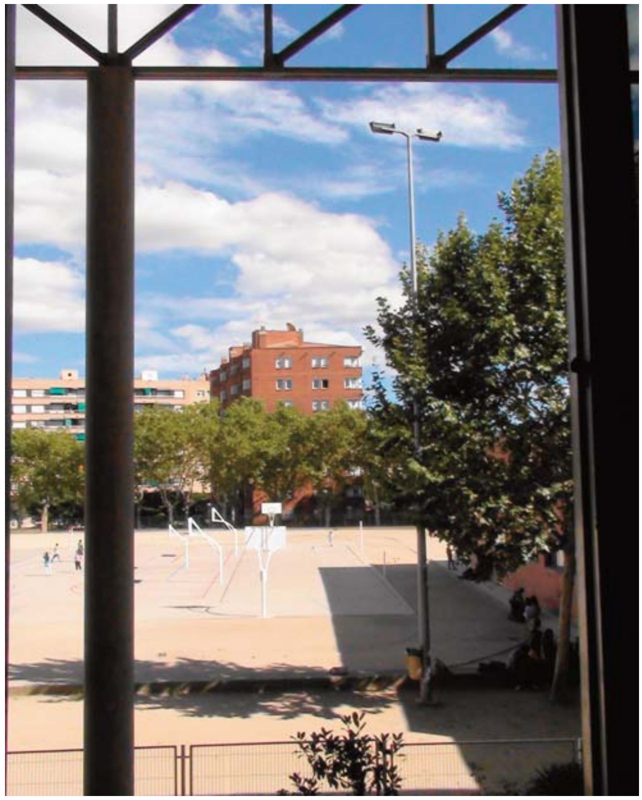


Figura 2: Patio del Institut Vallès de Sabadell.

Figura 1: Cuadrante construido en el MMB.

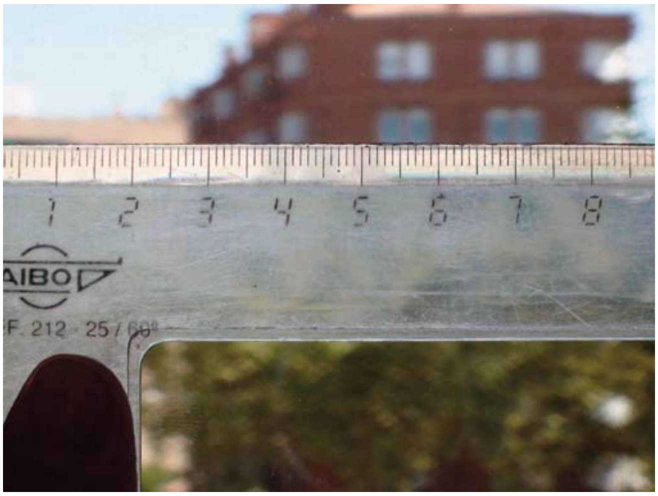


Figura 3: El ancho aparente de una ventana es de unos 3 *mm*.

teorema de Thales.

Había que construir dos triángulos semejantes relacionados con la posición de las fachadas. Me situé junto a la ventana y pedí una regla. La puse sobre el cristal y dirigí la mirada hacia una de las ventanas. Desde donde estaba mi ojo, a unos 35 *cm* del cristal, la regla indicaba que la anchura de la ventana era de unos 3 *mm* (Figura 3).

Entonces ya podía trazar en la pizarra del aula el par de triángulos semejantes (Figura 4):

El cálculo final era sencillo:

$$\frac{D+35}{35}=\frac{80}{0,3}\Rightarrow D=\frac{35{\cdot}80}{0,3}-35\approx 93m$$

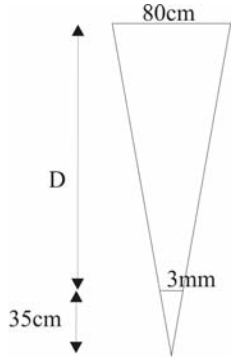


Figura 4: Triángulos semejantes entre la ventana del aula y la del edificio

Demasiada diferencia entre ambos resultados, ¿verdad? Por eso se les invitó a resolver el problema de cualquier otro modo que se les ocurriese.

Unos días más tarde, se presentaron algunas soluciones. Una de ellas se había obtenido contando los pasos del recorrido paralelo por la calle Valentí Almirall (Figura 5). Fueron 140 pasos de unos 80 *cm* cada uno, lo que daba como resultado otro valor distinto:

$$140{\cdot}0,80\ cm = 112\ m.$$

El autor confesó que su resultado le merecía más confianza que los calculados en clase. Otras soluciones habían utilizado herramientas TIC. En la web de *Google Maps* habían ampliado la visión cenital de la zona en cuestión hasta obtener una vista del patio del instituto. En el margen inferior izquierdo se mostraba la escala, en metros y en pies: 50 *m* = 2,15 *cm* (Figura 5).

En un caso se había trazado encima de la imagen un segmento con *WordDibujo* cuya longitud abarcaba la distancia buscada. Presionando el botón derecho del ratón sobre ese segmento se conocía su longitud: 5 *cm* (en amarillo en la Figura 5).

Figura 5: El patio del *Institut Vallès* según http://maps.google.es/maps/

Realizando la conversión con la escala incluida en la imagen de *Google Maps* se obtenía el resultado:

$$D = 5cm \cdot \frac{50m}{2{,}15cm} \approx 116m$$

¡Cuatro resultados distintos para la misma distancia!: 181 *m*, 93 *m*, 112 *m* y 116 *m*. Su clasificación según el procedimiento se relaciona con épocas determinadas de nuestro desarrollo cultural y tecnológico:

1. Trigonometría: uso del cuadrante construido en el MMB.
2. Proporcionalidad: aplicación magistral del teorema de Thales.
3. Medición indirecta: recuento de pasos de un recorrido paralelo.
4. Proporcionalidad TIC: *Google Maps* y *WordDibujo*.

No hay dudas de que la última resolución es la que merece más confianza. Y si es así, es porque sus datos son mucho más precisos que aquellos con los que se resolvieron las demás.

Cuando se calculó la altura de la estatua de Colón los estudiantes no tuvieron la impresión de que el resultado fuese tan impreciso, aún cuando los datos para los cálculos se habían tomado de la misma forma. Pero un error de 1º en una medida de unos 20º es mucho menos significativo que en una medida de 6º.

La cosa no acabó ahí, pues se les formuló una pregunta sobre el funcionamiento del cuadrante artesano construido en el MMB. Ninguno de los 60 alumnos que realizaron la experiencia de medir el ángulo de depresión visual de la estatua de Colón con el cuadrante cayó en la cuenta de que la medida del ángulo que daba el cuadrante no era directa. Sólo cuatro de ellos dieron respuestas aceptables a la pregunta:

¿Por qué el ángulo de depresión visual es el que marca la plomada del cuadrante?

Todo ello nos lleva a algunas reflexiones acerca de la competencia matemática y la trigonométrica.

Una persona competente en matemáticas debería ser capaz de argumentar por qué la plomada de un cuadrante como el de la figura 1 da una medida indirecta del ángulo de depresión visual.

El concepto de competencia no es independiente de la época y de la cultura. Depende de ambas en tanto depende del contexto del problema a resolver y de la tecnología disponible. La idea de competencia cambia a medida que se desarrolla una sociedad.

Desde la perspectiva matemática tradicional, ser competente en trigonometría significa poseer la capacidad de resolver el problema planteado según los métodos 1 y 2. En una educación por competencias significa resolverlo como en 3 y 4. La resolución 3 es, sin duda, la más universal y debe ser tenida por la más elemental de las competencias. La solución 4 muestra competencia contemporánea.

La tecnología contemporánea ha hecho accesibles distancias antaño inaccesibles. Para éstas fue creada la Trigonometría. Pero pretender resolver ciertos problemas mediante Trigonometría puede ser, en algunos casos, desacertado. Si lo que se desea es mostrar su utilidad y eficacia, hay que hacerlo en problemas en los que tenga más sentido que en el que se ha expuesto.

El concepto de competencia no es independiente de la época y de la cultura. Depende de ambas en tanto depende del contexto del problema a resolver y de la tecnología disponible.

Una vez más se pone de manifiesto que la resolución teórica de un problema práctico no suele ser la mejor solución práctica del problema. La eficacia de procedimientos teóricos magistrales puede llevar a errores excesivos cuando se aplican a situaciones reales y prácticas, sobre todo por la imposibilidad de obtener valores precisos de los datos necesarios.
I
Si Euclides, Thales y Arquímedes viviesen ahora utilizarían la tecnología actual dejando de lado algunas de sus propias técnicas. Gran parte del conocimiento matemático se desarrolló para resolver problemas inabordables con la tecnología del momento. Los problemas de hace dos mil años no son los de hoy.

Esto no significa que haya que desterrar antiguos procedimientos, sino utilizarlos y fomentar su uso en prácticas en las que verdaderamente resultan eficaces. Ése es el reto del educador que quiera desarrollar la competencia matemática de sus alumnos. Ahí reside lo hermoso de la educación, que no sólo deben aprender aquellos que se supone que deben hacerlo.

ADHERENCIAS ■

Este artículo fue solicitado por *Suma* en junio de 2010 y aceptado en octubre de 2010 para su publicación.

suma+ 65
Noviembre 2010, pp. 79-86

Mi presentación

Daniel Sierra Ruiz

Presentar a Alsina… complicado. Seguro que habrá quien piense que todo lo contrario; no hay cosa más sencilla que presentarle: con un simple resumen de su trayectoria se rellena fácilmente el espacio de la sección. Ante esto, lo primero es cómo seleccionar el material para que ese extracto no rebase los límites que tengo asignados. Creo que no iba a ser capaz, así que no voy a ir por ahí. Por otro lado, es evidente que hay pocas cosas que yo vaya a poder decir y que no se hayan dicho sobre Claudi.

Así que ante la seria posibilidad de no hacer justicia a los méritos del presentado, me he inclinado por acudir a apreciaciones mucho más personales, mucho más subjetivas, como, por otra parte, acostumbro a hacer.

Que una persona como Claudi Alsina siga acudiendo a las JAEM, habla mucho en su favor. Pues no sólo acude a los grandes momentos (conferencias plenarias, homenajes…) o a tomarse cafés con los amigos (que también), sino que se le puede ver incluso como oyente de algunas comunicaciones. Su presencia en una de estas actividades, prestigia al ponente, por supuesto, y a nuestras Jornadas, pero también da una idea de su calidad personal. Cuando algunos veteranos parecen estar *de vuelta de todo,* y no encuentran nada que les pueda motivar a acudir, Alsina da a entender, o eso me parece, que siempre se puede descubrir algo, que de cualquier persona se puede aprender. Creo, además, que es una muestra de respeto hacia los profesores que realizan su tarea a diario en las aulas de primaria o de secundaria.

Leí los primeros libros de divulgación del firmante de este número de *Mi biblioteca*, y acudí a alguna de sus charlas cuando todavía no había decidido intentar ser profesor de matemáticas. Cuando lo hice, me di cuenta de que el asunto no era nada fácil. Si no estás en el ambiente, como era mi caso, desconoces conceptos como *lista cerrada,* que dificulta, incluso, el entrar a trabajar como interino. Y no digamos ya obtener la plaza. Así que en aquel período tuve muchos momentos de frustración que me llevaban a pensar si merecía la pena el esfuerzo. ¿Y qué tiene que ver Claudi Alsina con todo esto? Pues que muchas veces sus charlas o conferencias suelen

Daniel Sierra Ruiz (coordinador de la sección)
IES Benjamín Jarnés, Fuentes de Ebro (Zaragoza)
biblioteca@revistasuma.es

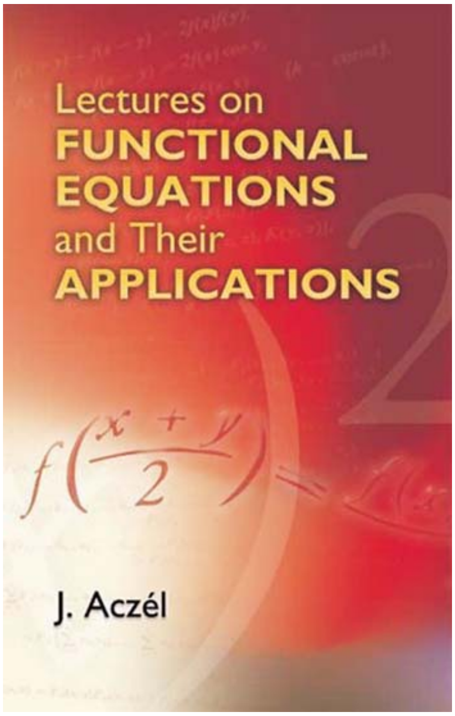
transmitir optimismo, alegría, y pasión por la enseñanza de las matemáticas. Sobre todo, cuando anima a los jóvenes intentando transmitirles su entusiasmo. Yo no era tan joven, pero sí novato en el oficio. Así que, en cierto modo, podría decir que me proporcionaba *vitaminas matemáticas* suficientes para no cejar en el esfuerzo de alcanzar el objetivo marcado.

Habitualmente acabo diciendo que poder presentar al firmante para mi «es un honor», «es una gran satisfacción», o similares, pero esta vez no lo voy a hacer, pues no doy con la palabra que exprese lo que siento al dar paso a la *biblioteca particular* de Claudi Alsina i Català.

Mi biblioteca particular

Claudi Alsina i Català

En el memorable artículo «Notas breves sobre el arte y modo de ordenar *libros*», el siempre sorprendente Georges Perec (Pensar/Clasificar, Gedisa, Barcelona, 1986) nos pone de manifiesto que es prácticamente imposible ordenar nuestros libros. De criterios habría muchos: tamaños, colores, géneros, idiomas, años de edición, precio de compra, apellido del primer autor, año de lectura, colores de las tapas…, pero cualquiera de estas alternativas provoca multitud de problemas. Consciente pues de esta dificultad, voy a permitirme el lujo de destacar algunas partes de mi biblioteca particular de matemáticas a partir de una clasificación subjetiva y emocional.



Libros que aún guardo sin saber por qué

En esta categoría están más de 500 libros cuya nula cotización en el mercado de viejo les augura un futuro en el reciclaje. Entre ellos están muchos libros y apuntes de mis estudios universitarios (1969-1974), libros de texto de matemática moderna, obras de Bourbaki, libros de Lang y Spivak, libros Schaum de problemas, libros mediocres de Cálculo Infinitesimal y Álgebra Lineal, etc.

Libros entrañables para mí

Son, en primer lugar, una colección de libros que van ligados a mi infancia (cuentos, aventuras…) o a mi formación preuniversitaria y cuyo estudio recuerdo con especial cariño: un *Haces de Luz* que contenía de todo, los libros de Rey Pastor-Puig Adam para bachillerato, el libro de Joan Casulleras del *PREU*…, y muchas publicaciones que tengo asociadas a momentos muy concretos de mi propia vida o a personas que me los explicaron o me los regalaron o me los dedicaron. Posiblemente no los voy a leer o estudiar de nuevo pero cuando los hojeo me traen recuerdos. Muchos eran de mi madre, otros son de mi juventud y bastantes los relaciona con el conocimiento personal del autor.

Libros imprescindibles en mis investigaciones

Son aquellos volúmenes que tengo junto a mi mesa de escribir en casa o en mi despacho universitario y que me han sido imprescindibles. Hay cuatro especialidades en los que he trabajado con toda su bibliografía: la teoría de ecuaciones funcionales fundada por János Aczél, la teoría de las desigualdades, la teoría de los espacios métricos probabilísticos de Berthold Schweizer y Abe Sklar y la teoría de lógica borrosa de Lotfi Zadeh (con las muchas contribuciones de Enric Trillas). Son libros y artículos que me formaron e inspiraron mis propios artículos y los trabajos de mis doctorandos y colaboradores.

Libros sobre Gaudí

Creo haber leído y trabajado todas las principales referencias sobre Antoni Gaudí, su obra y sus ideas. Me han servido para conocer muy a fondo el personaje y sus secretos geométricos sobre los cuales me ha gustado trabajar y hacer conferencias.

Muchas publicaciones que tengo asociadas a momentos muy concretos de mi propia vida o a personas que me los explicaron o me los regalaron o me los dedicaron.

Libros de educación matemática y divulgación

Muchas son las referencias que he estudiado y han influido en mis propias ideas educativas o en el apasionante reto de divulgar las matemáticas. Aclaro: no tengo libros de psicopedagogía y ningún libro en francés. Pero entre todos ellos destacaría los de Pedro Puig Adam, de Gattegno, de Polya, de Estalella, de Martin Gardner..., todos los de matemáticas y contexto como los de Sol Garfunkel, B. Bolt o Tom Romberg, Jan de Lange o Mogens Niss..., sin olvidar la colección completa de mi amigo Miguel de Guzmán, los que Luis Santaló me regaló y los de mis queridos colegas (viejos rockeros de la innovación educativa matemática en este país) de Antón Aubanell a Rafael Pérez Gómez, pasando por Eliseo Borrás, Joan Gómez, Fernando Corbalán y la colección completa de Síntesis.

La circunstancia de que mi esposa Carme Burgués también sea de este mundo didáctico ha propiciado que nuestras amplias bibliografías didácticas se uniesen (circunstancia que tiene alarmada a nuestra hija Victoria con vistas al futuro: porque a los de consulta hay que añadir los escritos por nosotros...).

Muchos son también «los otros libros» que nos acompañan en casa. Pero aquí nuestras colecciones son casi disjuntas. Al margen de algunas novelas y ensayos de interés común, Carme es apasionada de la Ciencia Ficción y el que suscribe prefiere libros curiosos y especialmente biografías y memorias.

Libros que me llevaría a una isla desierta

En la insólita circunstancia de tener que ir una temporada a una isla desierta (¿existen?) me llevaría, por motivos diversos, tres decenas de libros:

Aczél, J. (1962). *Lectures on Functional Equations and Their Applications.* New York: Academia Press.

Aubanell, A. (2006). *Recursos materials i activitats experimentals en l'educació matemàtica a secundària*. Barcelona: Dep. Educació, Generalitat de Catalunya.

Bonet, J. (2000). *L'últim Gaudí*. Barcelona: Pórtic.

Bergós, J. (1974). *Gaudí. El hombre y la obra.* Barcelona: UPC.

Bolt, B. (1991). *Mathematics meets technology.* Cambridge: University Press.

Castelnuovo, E. (1980). *La Geometria.* Barcelona: K3.

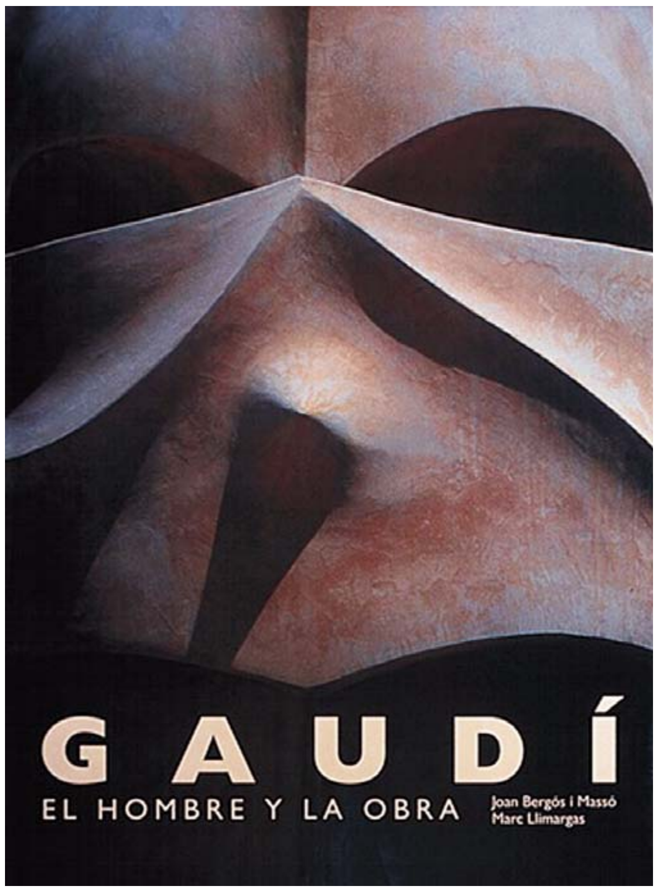
Courant, R., Robbins, H. (1979). *¿Qué es la Matemática?*, Barcelona: Editorial Aguilar.

Coxeter, H.S.M. (1971). *Fundamentos de Geometría*. México DF: Ed. Limusa.

Davis, Ph. J., Hersh, R. (1989). *El Sueño de Descartes*. Barcelona: Ed. Labor-MEC.

Estalella, J. (1920). *Ciencia Recreativa*. Barcelona: Gustavo Gili.

Eves, H. (1976). *An Introduction to the History of Mathematics.* New York: Holt, Rinehart and Winston.



Frederickson, G. (1997). *Dissections: Plane and Fancy*. New York: Cambridge Univ. Press.

Garfunkel, S. et al. (1998-2000). *Modelling Our World (Arise Project).* New York: Lexington, COMAP and W.H. Freeman.

Gattegno, C. et al. (1967). *El material en la enseñanza de las Matemáticas*. Madrid: Ed. Aguilar.

Giralt-Miracle, D. (Ed.) (2002). *Gaudí. La Búsqueda de la Forma*. Barcelona: Lunwerg.

Guzmán, M. de. (1991). *Para pensar mejor*. Barcelona: Labor.

Hardy, G.H., Pólya, G., Littlewood, J.E. (1959). *Inequalities.* Cambridge: Cambridge Univ. Press.

Kline, M. (1977). *Why the professor can't teach mathematics and the dilemma of university education*. New York: St. Martin's Press.

Marran, J.F. (1998). What You Never Learn in Methods Courses. *Education Week* (V. 17, N. 1,3, September 1977) and NCTM *News Bulletin* v. 35, n. 2, p. 5.

Martinell, C. (1969). *Conversaciones con Gaudí*. Barcelona: Punto Fijo.

Mason, J., Burton, E. y Stacey, K. (2000). *Pensar matemáticamente.* Madrid: Anagrama.

Moorre, D.S. (1995). *Statistics: Concepts and Controversies*. Third Edition. New York: W.H. Freeman.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Nelsen, R.B. (1993-2000). *Proofs Without Words, I, II*, Washington: Mathematical Association of America.

Pedoe, E. (1979). *La Geometría en el Arte.* Barcelona: Editorial Gustavo Gili.

Postman, N. (1995). *Fi de l'educació. Una redefinició del valor de l'escola*. Vic: Eumo Editorial.

Puig Adam, P. (1956). *Curso de Geometría Métrica vol 1,2.* Madrid: Biblioteca Matemática, S.L.

Romberg, T. y de Lange, J. (1997). *Mathematics in context*, Chicago: Encyclopedia Britannica, Ed. Corp.

Santaló, L. (1970). *Vectores y Tensores con sus Aplicaciones.* Buenos Aires: EUDEBA.

Senechal, M., Fleck, G. (Eds.) (1988). *Shaping Space, a Polyhedral Approach.* Boston: Birkhäuser.

Schweizer, B., Sklar, A. (1983). *Probabilistic Metric Spaces*. New York: North Holland.

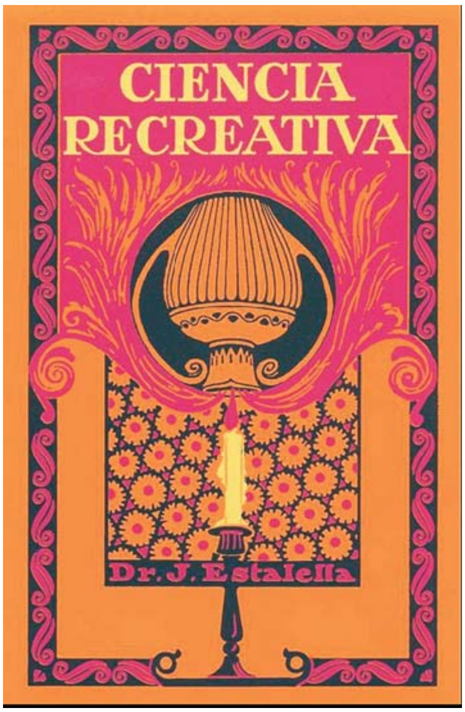
Steen, L.A. (Ed.) (COMAP). (1998). *Las Matemáticas en la Vida Cotidiana*. Madrid: Addison-Wesley, UAM.

Tanton, J. (2001). *Solve this. Math activities for students and clubs*. Washington: MAA.

Tufte, E.R. (1983). *The Visual Display of Quantitative Information*. Cheshire, Connecticut: Graphics Press.

Wagensberg, J. (2002). *Si la Naturaleza es la Respuesta ¿Cuál era la pregunta?* Barcelona: Tusquets Editors.

Wells, D. (1986) *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers*. Middlesex: Penguin Books.



Escaparate 1: Ficciones matemáticas

Ensoñaciones desde mi pupitre
Varios Autores
Anaya y RSME, Madrid, 2010
ISBN: 978-84-667-9353-7
132 páginas

Es preciso acercar la matemática al común de los mortales (ruego me permitan utilizar esta frase hecha) entre los que se halla la que suscribe este texto. Los números, las magnitudes, las figuras geométricas, sus áreas son como un mundo anexo e impenetrable a los profanos. Existe un muro entre un mundo y otro. Los que desconocemos todo sobre las proporciones, el teorema de Pitágoras, los números primos y nunca hemos oído hablar del número *e*, hemos adquirido paulatinamente una especie de complejo; aquello nos parece un idioma desconocido que ni entendemos, ni hablamos ni nos vemos capaces de comprender básicamente. Son algunas narraciones muy bien traídas, como estas recopilaciones de cuentos, las que pueden acercarnos tangencialmente a la matemática. Si no consiguen enseñarnos este lenguaje, cubriendo nuestras carencias, sí al menos estimularnos a aprender aquello que no comprendimos en su momento.

La forma de captar a los aficionados a la literatura, la historia o la filosofía es partiendo de nuestro conocimiento. ¿Cómo? Una vez construido un relato de una buena calidad literaria introducir términos matemáticos básicos: trabajar proporciones, explicar el teorema de Pitágoras y demostrarnos, en definitiva, como nada sería igual sin ellos… Se trata de despertar nuestra curiosidad y hacernos comprender que todo el universo esta basado en esta ciencia.

No sabría decir si estos cuentos pretenden hacernos comprender que al final todo se reduce a matemáticas o si con el pretexto de las mismas se estudia la psicología humana, a algunos científicos importantes, o la evolución histórica (la actuación de la inquisición frente a la ciencia, el papel de la mujer en la historia; la enemistad entre Alemania y Francia...).

Personalmente me ha encantado la relación que en algunas narraciones se establece entre geometría y psicología. Por ejemplo en la dinámica de grupos que se hace en uno de los relatos, en la que los alumnos (que tienen una figura de un determinado color en la frente) deben buscar con quien quieren relacionarse, sin poder establecer una comunicación verbal. O en otro de ellos que se establece una relación epistolar entre la parábola y el cuadrado, en el que cada uno trata de convencer al otro de que es más libre e independiente, comparando sus características y la fórmula matemática que sirve para hallarlos.

Con demostraciones matemáticas se vence a algún profesor de literatura, a los jugadores en una partida de naipes, a la inquisición, e incluso a la muerte logrando así conseguir la justicia. La ciencia como vencedora frente a la superstición (*Cuento de la muerte oscilante*), el egoísmo (*La venganza de mi abuela*) o la injusticia (*Agatha o Aquiles contra la tortuga: visto para sentencia*).

Carmen Sánchez
IES Benjamín Jarnés, Fuentes de Ebro (Zaragoza)

Se convierte a científicos importantes en personajes de ficción, dándolos a conocer al lector: su contexto, aportación a la ciencia y sus circunstancias personales según el momento: Sophie Germain (*La última carta de Monsieur Le Blanc*), Pitágoras (*El número maldito*) o Newton (*El viejo profesor*).

Destacar cómo los autores han sido capaces de montar ficciones viajando por los contenidos matemáticos: desde las fracciones al infinito pasando por el número π, la proporción áurea, o la sucesión de Fibonacci. Y no podía faltar la demostración práctica del teorema de Pitágoras, yendo más allá y aplicándolo a los círculos (*Cilindros infinitos y el teorema de Pitágoras* o *El número maldito*).

El buscar la esencia de las cosas en la matemática les ha conducido en una de las narraciones a reducir todas las obras culturales (poemas, sinfonías, esculturas o pinturas) a variaciones de elementos finitos empleados con repetición (palabras, sonidos y silencios, golpes de cincel, o pinceladas) (*Los límites de las obras culturales del hombre*).

En varios relatos se hace hincapié en como los números son la base de todas las proporciones del cosmos y de la naturaleza. Se desea encontrar un número oculto y esencial que encierre la verdad, búsqueda que conducirá a uno de los protagonistas a la locura. Los números no solo se apoderarán de su vida sino también de los sentidos, la realidad se le descodificará en fórmulas matemáticas (*El número de la muerte*).

Es interesante el mensaje de Newton de que es necesario enseñar lo que se descubre. Aquello que se convierte en un secreto puede ser utilizado para aprovecharse de las personas que no lo conocen. De este modo, desde esta narrativa juvenil se pretende acercar y dar a conocer las matemáticas a los que las desconocen, bien por jóvenes o por adultos que en su día no las aprendieron.

Escaparate 2: Relatos matemáticos

TODO POR DEMOSTRAR
Varios Autores
Anaya y RSME, Madrid, 2010
ISBN: 978-84-667-9354-4
244 páginas

Durante nuestra vida de estudiantes, las matemáticas fueron una herramienta muy útil para resolver problemas que presumiblemente íbamos a tener al curso siguiente. La complejidad de la herramienta iba creciendo porque, por supuesto, tendríamos que enfrentarnos a problemas más difíciles en el futuro. Problemas que sólo con la receta adecuada podríamos resolver. Así iban pasando los años, sin que realmente conociéramos nunca los problemas. Importaba el cómo, no el para qué.

Mediante atmósferas literarias diversas, los relatos matemáticos recopilados en *Todo por demostrar* se sitúan justamente en el polo opuesto. El libro recoge 11 relatos cortos que muestran desde acertijos matemáticos de lógica hasta cuestiones consuetudinarias resueltas desde un punto de vista matemático.

Inmaculada Zamorano
IES Benjamín Jarnés, Fuentes de Ebro (Zaragoza)

El libro es capaz de atraer al lector lego o poco experto hacia cuestiones matemáticas complejas, subrayando el problema, ilustrando ese *para qué* que habitualmente se nos escapa, e intentando que el cómo no nos resulte aburrido. El catálogo de Trendar B. Llesur abre el libro y nos atrapa rápidamente. Muestra a un joven bibliotecario apasionado por su trabajo que se va dejando empapar por la sabiduría de un maestro. Ambos están obsesionados por la paradoja de Bertrand Rusell de la teoría de conjuntos aplicada a catálogos de catálogos. Es una lectura amena, bien documentada, que mantiene el interés del lector hasta el final. En la misma línea, *El matemático que contaba cadáveres*, resulta impresionante y conmovedor. Gracias a la aplicación del teorema central del límite se estima la magnitud de crímenes cometidos en un campo de concentración nazi en la Segunda Guerra Mundial. El horror de la violencia abruma, y evidencia el interés que tienen los números en la formulación de un veredicto para el responsable del campo de concentración.

Algunos de los relatos consiguen un acertado maridaje de las matemáticas con pintorescas situaciones románticas (*Poesía del pensamiento*), de suspense (*Bib*), cuentos (*Evita y Nicanor con los mayas*), novelas de guerra (*Un precioso ejemplo… ensangrentado*), o situaciones ciertamente cómicas y además realistas (*Cuento matemático que habla de las votaciones y esos líos*) en las que el resultado difiere depende del método de valoración.

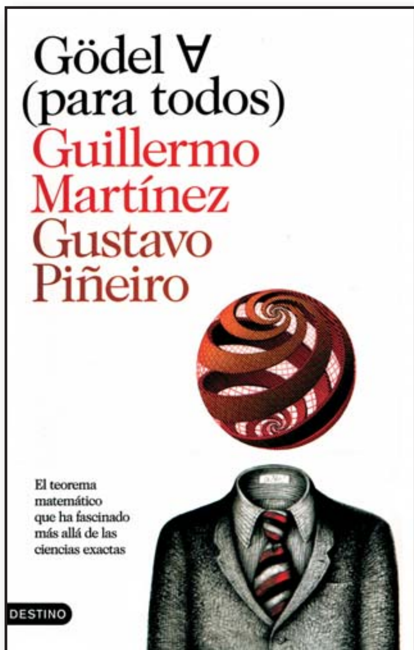
Como quería demostrar sube varios niveles literarios de universalidad e intemporalidad, consiguiendo mantener un alto rigor matemático que deriva en aspectos filosóficos. Un gran matemático en el año 2068 elabora una importante teoría, «Sobre isomorfismos de grafos y subgrafos, expuesta en una obra de 3.133 páginas, a publicar en un único volumen y bajo la supervisión de Los Seis mejores matemáticos del momento». La implementación de dicha teoría da como resultado una nave espacial que, en la primera puesta en servicio, se destruye. La investigación sobre el caso pone en tela de juicio el límite de la inteligencia humana y abre la vía del terrorismo abstracto.

El ejercicio intelectual e imaginativo del libro es sin duda difícil y es comprensible que no todos los relatos alcancen las mismas cotas de interés. (*El maestro constructor* o *Matemática a Nicómano*). Algunos relatos presentan una sintonía discutible entre el problema y el algoritmo de resolución, como es el caso de *El laberinto de Sierpinski*.

Un libro recomendable, en todo caso, que no nos dejará indiferentes. Sorprenderá a quienes fruncen el ceño ante las matemáticas, y resultará provocador para cualquier persona familiarizada con ellas. ■

Escaparate 3: Incompletitud ¿para todos?

GÖDEL ∀ (PARA TODOS)
Guillermo Martínez y Gustavo Piñeiro
Destino, Barcelona, 2010
ISBN: 978-84-233-4215-0
312 páginas



Como estamos delante de un libro de lógica, hagamos un poco de uso de la misma. ¿Cuál es la condición necesaria para que te guste este libro? Tener la suficiente curiosidad para conocer en profundidad el significado de los teoremas de Gödel. ¿Y la condición suficiente? No pertenecer al grupo de los que sólo esperan de los libros de divulgación unas ideas superficiales, sino estar entre aquéllos que quieren profundi-

Pedro Latorre
IES Pilar Lorengar, Zaragoza

zar al máximo en el tema tratado. Sin embargo, si sólo quieres introducirte en el significado de términos como inconsistencia, completitud o recursividad, entonces te van a sobrar bastantes páginas.

Este libro proviene de Argentina. No sé si a los autores les habrá animado en la siempre dura labor de creación el boom de las matemáticas y en particular de la literatura matemática de divulgación que vive este país, uno de cuyos mayores exponentes es Adrián Paenza. Esperamos vivir pronto en España un fenómeno parecido.

Los autores hacen una apuesta arriesgada, pues dejan bien claro que quieren un libro autocontenido, en el que las demostraciones de los teoremas de Incompletitud tienen un peso fundamental. El último capítulo es el más difícil todavía, pues se adentra en un mundo de matemáticas muy formales con el objetivo de conocer los denominados objetos y teorías que permiten ofrecer una visión más amplia y una generalización de los teoremas anteriores.

Veamos los contenidos del libro con un poco más de detalle. Los dos primeros capítulos conforman lo que uno espera de un libro convencional de divulgación, con una explicación clara, pero sin notación ni tecnicismos matemáticos sobre la aportación de Gödel a la lógica formal en su contexto histórico. También contamos en uno de los apéndices con una pequeña biografía de nuestro protagonista y en otro con una cronología de la lógica matemática desde Aristóteles pasando por Cantor, Russell o Hilbert.

El tercer capítulo se adentra en la notación de los lenguajes formales de la lógica, algo que habitualmente queda reservado a los libros de texto que se emplean en la educación formal. Una pregunta que me he planteado, y cuya respuesta no tengo clara, es la de qué conocimientos previos son necesarios para entender la exposición. En el caso de los lectores de *Suma*, creo que se trata más de la curiosidad necesaria para motivar el esfuerzo.

El capítulo cuatro pone ejemplos de personas relevantes en sus respectivos campos de saber que emplean a su antojo, sin la rigurosidad necesaria, los teoremas de Gödel. Un brillante amigo, pero con los pies en el suelo, ya me contaba casos de ciertos colegas que encumbrados en sus cimas de sabiduría, empiezan a emitir tonterías a diestro y siniestro. Tengo que confesar, que lamentablemente, mis parcos conocimientos hacen que las eruditas citas me resulten lejanas, apreciando tan sólo una pequeña parte de los desatinos cometidos.

En los capítulos del cinco al ocho se exponen unas cuidadas demostraciones elementales (en el sentido de no utilizar complejas herramientas matemáticas) de las versiones semántica y sintáctica del teorema de Incompletitud, pero rigurosas al mismo tiempo. La lectura del capítulo ocho, referido al concepto de algoritmo, resultará más llevadera si se ha trabajado con algún lenguaje de programación. Uno de los conceptos más importantes que desconocía antes de la lectura de este libro es el de concatenación, que se refiere a la posibilidad de codificar de forma única cada fórmula y pegar los códigos de las cadenas de fórmulas que componen los razonamientos conservando también la unicidad de la representación.

Como ya he mencionado, en el capítulo nueve se define una clase de objetos matemáticos en los cuales tiene sentido generalizar el teorema de Incompletitud. No me podía imaginar la inclusión en un libro para un público no especializado de unas matemáticas tan abstractas como las que aparecen en este último capítulo.

Creo que ha quedado claro que este no es un libro para quedarse en medias tintas, pero sin embargo una lectura no superficial aporta muchas ideas interesantes y desde luego una lectura reflexiva resulta todavía más enriquecedora. Una incógnita que me queda por resolver es hasta dónde puede alcanzar el autoaprendizaje propuesto, sin la presencia de la mano amiga de un buen profesor.

suma+ 65
Noviembre 2010, pp. 87-94

Historias de al-Khwārizmī (4ª entrega). El proyecto algebraico.

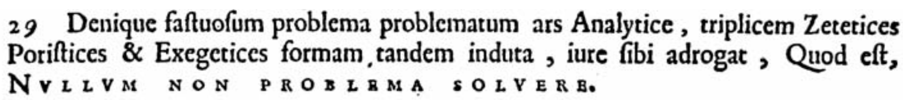
Problema problematum

El libro de François Viète (1540-1603) *Introducción al arte analítica* (*In artem analyticem Isagoge*)[1], que se considera por muchos historiadores como el que comienza el álgebra simbólica, termina enunciando cuál es la ambición del proyecto algebraico:

> 29. Denique fastuosum problema problematum ars Analytice, triplicem Zetetices, Poristices & Exegetices formam tandem induta, iure sibi adrogat, Quod est, NULLUM NON PROBLEMA SOLVERE.
>
> [29. Finalmente, el Arte Analítica, una vez ha sido presentada en su triple forma de Zetética, Porística y Exegética[2], se apropia a justo título del fastuoso problema de los problemas, que es: NO DEJAR NINGÚN PROBLEMA SIN RESOLVER] (Viète, 1591, p. 9r).

La declaración de Viète es pues explícita: de lo que se trata es de tener una manera de trabajar, un arte, que garantice que todos los problemas pueden ser resueltos. De la misma naturaleza es el propósito de Descartes expresado en su libro inacabado y publicado sólo póstumamente *Reglas para la dirección del espíritu* (*Regulæ ad directionem ingenii*)[3], cuyas reglas pueden reescribirse de manera que sean la descripción precisa y metódica de cómo resolver cualquier problema transformándolo en un sistema de ecuaciones[4].

El *Kitāb al-mukhtasar fī hisāb al-jabr wa'l-muqābala* (*Libro conciso de cálculo de restauración y oposición*), el libro de álgebra de al-Khwārizmī, es el primer libro que conocemos del que se puede decir que se plantea ese proyecto, que lo que pretende es que todos los problemas puedan ser resueltos.


29 Denique fastuosum problema problematum ars Analytice, triplicem Zetetices Poristices & Exegetices formam, tandem induta, iure sibi adrogat, Quod est, NVLLVM NON PROBLEMA SOLVERE.

Último párrafo del libro de Viète *In artem analyticem Isagoge*

Luis Puig
Universitat de València Estudi General

El proyecto algebraico

Como dice Viète, esa pretensión de resolver *problema problematum*, el problema de los problemas, es fastuosa, desmesurada. ¿Cómo se puede estar seguro de que todos los problemas pueden resolverse? ¿Con qué medios puede abordarse ese *problema problematum*? ¿Cómo lo hace en concreto el álgebra?

Los matemáticos griegos ya tuvieron esa pretensión y forjaron para ello el método de análisis y síntesis. Ahora bien, el método de análisis y síntesis es un método heurístico, es decir, sirve para descubrir, ése es el significado del verbo griego *heuriskō* del que se deriva la palabra "heurística". Concebido como un método de resolución, sirve para descubrir la solución de los problemas[5], pero como es un método heurístico lo que hace es transformar el problema original en otros problemas, sin que dé garantías de que esos otros problemas puedan ser resueltos[6]. El proyecto algebraico necesita transformar el método de análisis y síntesis y completarlo, si quiere tener éxito con el problema de los problemas.

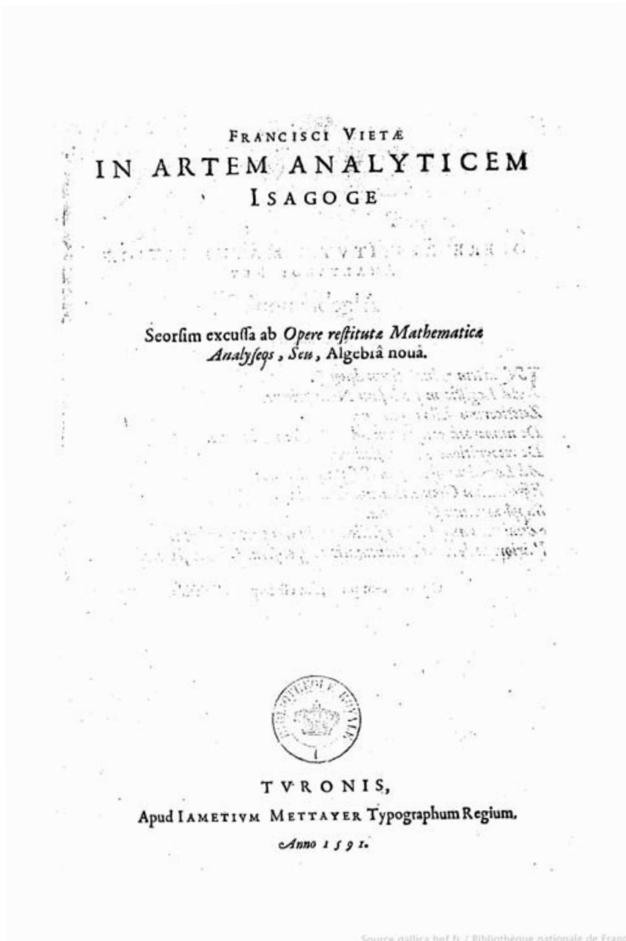
Una parte crucial de esa transformación del método de análisis y síntesis es superar la concepción griega de la necesidad de tratar con objetos que estén dados. Klein (1968) explica cuál es el escollo: la síntesis sólo puede realizarse en la concepción griega con magnitudes que han sido dadas[7]. Cuando el análisis se realiza en problemas que tratan con objetos geométricos, el carácter de "dado" puede tomarse como "*posibilidad* de haber sido dado" al trazar la figura de análisis que da la construcción por ya realizada y constituye el primer paso del análisis:

> Esta "posibilidad de haber sido dado" aparece en el análisis geométrico en el hecho de que la construcción que se considera como ya efectuada [...] no necesita el uso de magnitudes "dadas" como unívocamente determinadas, *sino sólo como que tienen el carácter de haber sido "dadas"* (Klein, 1968, p. 164).

Ahora bien, Klein se pregunta cómo puede transferirse esa situación al análisis en el terreno de la aritmética, y responde:

> Claramente de esta manera: que los números "dados" en un problema se consideren sólo en su carácter de haber sido dados, y no como precisamente esos números determinados (Klein, 1968, p. 164).

Es decir, que, cuando los problemas pertenecen al terreno de la aritmética, es necesario para efectuar el análisis que los números se consideren como dados, pero no determinados. Pero, se pregunta Klein ahora, "¿cómo puede ser que números *dados* y por tanto *determinados* desempeñen un papel *indeterminado*?" (Klein, 1968, p. 165). La manera de Viète de superar este escollo es abandonar el cálculo con números, lo que él llama *Logistica*[8] *numerosa*, y crear un cálculo con *especies* de números, lo que él llama *Logistica especiosa*, que es otro nombre para su nueva álgebra. Las especies de números no representan números concretos, sino formas distintas que los números pueden adoptar cuando se calcula con ellos, son, en ese sentido, indeterminados. Las incógnitas de los problemas aritméticos, que son números desconocidos, pero determinados, ya que están dados por las relaciones del enunciado del problema, pueden convertirse así en el objeto del cálculo: por el intermedio de considerarlas no como números, sino como especies de números, y por tanto su carácter de dado está tomado como posibilidad de haber sido dado.


FRANCISCI VIETÆ
IN ARTEM ANALYTICEM
ISAGOGE

Seorsim excussa ab *Opere restitutæ Mathematicæ Analyseos, Seu*, Algebrâ nouâ.

TVRONIS,
Apud IAMETIVM METTAYER Typographum Regium.
Anno 1591.

Portada del libro de Viète *In artem analyticem Isagoge*

Esta ruptura con el escollo de la concepción griega de con qué puede calcularse, le permitirá a Descartes, poco después de Viète, zanjar el asunto estableciendo que en el análisis hay que tratar de la misma manera lo conocido y lo desconocido, y decir que ahí reside el meollo del método:

> [...] totum huius loci artificium consistet in eo, quod ignota pro cognitis supponendo possimus facilem & directam quærendi viam nobis proponere, etiam in difficultatibus quantumcumque intricatis[9]. (Descartes, 1701, pp. 61-62)

El proyecto algebraico usa pues, para resolver el problema de los problemas, un cálculo con especies de números que permite tratar de la misma manera lo conocido y lo desconocido en el análisis de los problemas, y ese cálculo con especies se establece como un lenguaje, un sistema de signos, específico. En Viète, el sistema de signos está en el umbral de lo simbólico, casi se puede calcular con él en el terreno de la expresión sin recurrir al terreno del contenido, en Descartes ya es plenamente simbólico[10].

El uso de un cálculo con especies ya está presente en las *Aritméticas* de Diofanto[11], y en este libro de Diofanto, las especies de números se representan mediante abreviaturas de sus nombres. El sistema de signos es, por tanto, sincopado, en este sentido, y no permite el cálculo en el nivel de la expresión. El álgebra de al-Khwārizmī también está basada en un cálculo con especies, que veremos de inmediato.

Pero, aunque este desarrollo de un cálculo con especies sea un elemento crucial del proyecto algebraico, no basta para resolver el problema de los problemas. Para ello es necesario contar al menos con otras dos cosas. Por un lado, el cálculo con especies es un lenguaje, un sistema de signos, distinto del lenguaje natural en el que están expresados los problemas. Así que hace falta que el nuevo método establezca cómo traducir el enunciado de cualquier problema a una expresión en ese nuevo sistema de signos. Por otro lado, las expresiones que resultan de la traducción de los problemas son ecuaciones, de modo que hace falta saber resolver todas las ecuaciones.

Es decir que, una vez establecido el procedimiento de traducción de enunciados de problemas a ecuaciones en el método de análisis, el problema de los problemas queda reducido a tener un procedimiento de solución de todas las ecuaciones. Pero ese problema sigue siendo fastuoso, casi tan desmesurado como el problema de los problemas, ya que hay un sinnúmero de ecuaciones. Sin embargo, el lenguaje del álgebra tiene una estructura y una sintaxis que permite hacer con sus expresiones algo que no puede hacerse con el lenguaje vernáculo. La infinidad de ecuaciones distintas que pueden aparecer como traducción de los enunciados de problemas se pueden clasificar en conjuntos finitos de ecuaciones representados por formas canónicas. El problema de los problemas se reduce entonces a dos cosas: saber resolver todas las formas canónicas, y tener un cálculo que permita transformar cualquier ecuación en una de las formas canónicas.

Resumiendo todo lo dicho, el proyecto algebraico de resolución del problema de los problemas consiste en:

- La elaboración del concepto de especie de número.
- La elaboración de un sistema de signos específico para tratar el cálculo con especies.
- El establecimiento de un procedimiento de traducción del enunciado de un problema a una ecuación.
- La clasificación de las ecuaciones en formas canónicas, y el establecimiento de todas las formas canónicas.
- La elaboración de un cálculo que garantice transformar cualquier ecuación en una forma canónica.
- La resolución de todas las formas canónicas.

El proyecto algebraico de al-Khwārizmī

El propio orden con el que organiza al-Khwārizmī su *Kitāb al-mukhtasar fī hisāb al-jabr wa'l-muqābala* (*Libro conciso de cálculo de restauración y oposición*) es una indicación de que se está planteando resolver el problema de los problemas. En efecto, el libro podemos dividirlo en las siguientes partes[12]:

1. Introducción.
2. Las especies de números.
3. Las (seis) formas canónicas, simples y compuestas.
4. Los algoritmos de solución de las formas canónicas.
5. Las demostraciones de los algoritmos de solución de las formas canónicas compuestas.
6. Sobre la multiplicación [de expresiones con especies].
7. Sobre la adición y la substracción [de expresiones con especies y con radicales].
8. Sobre la división [de radicales].
9. Los seis problemas [ejemplos de las seis formas canónicas].
10. Varios problemas.
11. Transacciones mercantiles[13].
12. Medida[14] [de áreas y volúmenes].
13. Testamentos[15].
14. Devolución de dotes.

Al-Khwārizmī comienza efectivamente definiendo las especies de números con las que va a calcular. En la introducción, tras indicar que el libro lo escribe por encargo del califa al-Ma'mūn, dice que quiere exponer "lo que las gentes necesitan en sus herencias, legados, repartos, arbitrajes, comercios […] medida de tierras, perforación de canales, medición y otras cosas que dependen del cálculo" (Rashed, 2007, p. 94-95[16]). A continuación presenta las especies de números como las formas que adoptan los números que se necesitan en el cálculo:

> He encontrado que los números que se necesitan en el cálculo de *al-jabr* y *al-muqābala* son de tres especies, que son: raíces, tesoros y números simples no relacionados con raíz ni con tesoro. La raíz (*jidr*) es cualquier cosa que se multiplica por sí misma, como la unidad, o los números, que le son superiores, o las fracciones[17], que le son inferiores. El tesoro (*māl*) es todo lo que resulta de la raíz multiplicada por sí misma. El número simple (*ʿadad mufrad*) es todo lo que, entre los números, es expresable y que no se relaciona con raíz ni con tesoro (Rashed, 2007, p. 96-97; Hughes, 1986, p. 233[18]).

Traduzco las palabras que usa al-Khwārizmī para designar las tres especies de números, *jidr*, *māl*, y *ᶜadad mufrad*, de forma bastante literal, por 'raíz', 'tesoro'[19] y 'número simple'. Cabe identificar sin más las tres especies de números con los tres términos de la forma canónica de una ecuación de segundo grado, y decir entonces que la raíz es la incógnita, x, que *māl* es la segunda potencia de la incógnita, el cuadrado, x^2, y que "número simple" es el término independiente, pero esta identificación es anacrónica. Aunque traducir así las especies de números hace más legible el texto de al-Khwārizmī para un lector actual, es aras de la legibilidad se sacrifica la posibilidad de comprensión de cuáles eran los conceptos que al-Khwārizmī elaboraba y usaba; más aún, traducir así hace poco patente que se trata de especies de números.

Si examinamos las definiciones de al-Khwārizmī y el uso que hace de esos términos en el libro, podemos ver que la raíz no es la incógnita, al-Khwārizmī tiene otro nombre para la incógnita, *shay'*, cosa, que no aparece hasta el apartado "Sobre la multiplicación", que en nuestra división del libro en partes es la sexta. La cosa se identificará con la raíz, pero si hay que identificar esos dos términos es porque de entrada no son idénticos: "cosa" designa una cantidad desconocida, "raíz" es una especie de número.

Un número es de la especie *jidr*, "raíz", si en algún momento de los cálculos se multiplica por sí mismo: lo que hace que se califique a un número de "raíz" no tiene nada que ver con que sea o no sea una cantidad desconocida de un problema, "raíz" no designa a una incógnita como hace la x en el sistema de signos actual del álgebra. De hecho, cuando al-Khwārizmī está definiendo qué es una raíz, está hablando de números, que son por tanto, cantidades conocidas, dadas, no está hablando de cantidades desconocidas, de incógnitas, y lo que está definiendo es la forma que tiene un cierto tipo de números cuando se usan en cálculos aritméticos.

Correlativamente, un número es de la especie *māl*, "tesoro", si en algún momento de los cálculos se ha obtenido como resultado de que un número se ha multiplicado por sí mismo (número que será la raíz de ese tesoro). Finalmente, un número es de la especie *ᶜadad mufrad*, número simple, si en el curso de los cálculos no se ha multiplicado por sí mismo ni ha sido el resultado de la multiplicación de un número por sí mismo.

Si queremos que la traducción conserve en la medida de lo posible los conceptos de al-Khwārizmī, no podemos por tanto leer las especies de números como potencias de la incógnita. Además, en el caso de *māl*, su traducción por 'cuadrado' es inconveniente por más motivos. Høyrup (1991) da tres razones de peso para no hacerlo. En primer lugar, 'cuadrado' tiene un significado geométrico del que *māl* carece por completo, con lo que traducir *māl* por 'cuadrado' hace incomprensible el esfuerzo de al-Khwārizmī (en la parte del libro en que demuestra los algoritmos) para explicar que *māl* puede representarse mediante un cuadrado. La segunda potencia de la incógnita y la figura geométrica se nombran en castellano con la misma palabra 'cuadrado', pero en el árabe matemático, hay dos palabras distintas para dos conceptos de ámbitos distintos: *māl* es una especie de número y el cuadrado, figura geométrica, se dice *murabᶜ*. En segundo lugar, el significado de x^2 como cuadrado de la incógnita, propio del álgebra elemental actual, hace que para un lector actual carezca de sentido considerar el cuadrado como incógnita; por lo tanto, una consecuencia de traducir *māl* por 'cuadrado' es que entonces no se entiende por qué al-Khwārizmī, después de encontrar la raíz, calcula también el *māl*, cuando es éste la incógnita del problema. En tercer lugar, la identificación de *māl* con x^2 conlleva la identificación de la raíz con la raíz de la ecuación, cuando para al-Khwārizmī es la raíz del *māl*, la raíz del tesoro.

Esta inconveniencia de traducir *māl* por cuadrado no es de hecho una novedad. Ya Gerardo de Cremona, en el siglo XII, tradujo *māl* por *census*, y no por *quadratus*, y la traducción de Gerardo de Cremona hizo tal fortuna que la palabra *census*, que en latín significa "patrimonio", "riqueza", fue usada en libros de álgebra escritos en latín en la época medieval, y también más adelante cuando en el Renacimiento empezaron a aparecer libros de álgebra en lenguas vernáculas. En éstos, la palabra *census*, convertida en término técnico, cuyo significado en el lenguaje natural ya carecía de importancia, no se tradujo sino que se castellanizó (censo[20]), catalanizó (cens) o italianizó (censo)[21].

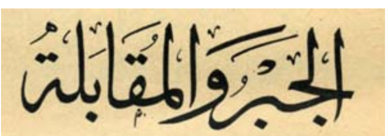
El libro de al-Khwārizmī presenta pues un primer rasgo de lo que he llamado el proyecto algebraico ya que comienza definiendo especies de números con las que va a calcular, así que no va a tener que calcular con números dados, sino que va a poder hacerlo con formas de números, que tienen carácter indeterminado. Pero en esto al-Khwārizmī no es distinto de Diofanto, que también comienza sus *Aritméticas* de forma parecida, e incluso con una lista más larga de especies de números[22]. Sin embargo, hay algo que los distingue y que no se encuentra en ningún libro conocido anterior al de al-Khwārizmī. Diofanto dice que muchos de los problemas aritméticos se pueden tratar con cálculos aritméticos con las especies y resuelve un gran número de problemas, desarrollando técnicas para ello. Al-Khwārizmī pretende resolverlos *todos*, y para ello comienza por establecer cuáles son todas las posibilidades de combinación de las especies de números. Ese gesto combinatorio sitúa el proyecto de al-Khwārizmī en el corazón de lo que hemos llamado el proyecto algebraico: la determinación de cuáles son todas las posibilidades es el paso fundamental para poder resolver el *problema problematum*, el problema de los problemas, resolver todos los problemas.

Al-Khwārizmī encuentra que todas las posibilidades son seis, tres simples (Rashed, 2007, pp. 96-97 Hughes, 1998, p. 233), y tres compuestas (Rashed, 2007, pp. 100-101 Hughes, 1998, p. 234), a saber:

tesoro igual a raíces
tesoro igual a número
raíces igual a número
tesoro y raíces igual a número
tesoro y número igual a raíces
raíces y número igual a tesoro

Esas seis posibilidades son otras tantas formas canónicas, a las que se tratará de que mediante el cálculo de *al-jabr* y *al-muqābala* se pueda reducir cualquier ecuación que resulte de traducir un problema a este lenguaje algebraico[23]. Al-Khwārizmī prosigue el libro, como hemos indicado al dividirlo en partes, enunciando una regla algorítmica para resolver cada una de las formas canónicas y demostrando los algoritmos. Con ello, todas las ecuaciones que se pueden transformar en las seis formas canónicas se pueden resolver, y éstas son todas las formas canónicas. Precisemos: *todas* dentro de un dominio acotado previamente, el de las tres especies de números de las que parte al-Khwārizmī. Al-Khwārizmī no resuelve pues el problema de los problemas, pero sí que presenta en un mundo de problemas manejable un modelo de cómo abordarlo. La continuación está implícita: basta con ampliar el conjunto de especies de números y aplicar de nuevo una combinatoria que garantice que se están considerando todas las formas canónicas para ese nuevo conjunto de formas canónicas.

Eso es exactamente lo que hace ᶜUmar al-Khayyām (1048-1131) unos dos siglos más tarde en su *Tratado de álgebra y al-muqābala* (Rashed y Vahebzadeh, 1999): habla de una lista de especies más larga, que se prolonga "tan lejos como se quiera", y de la que se sabe que están en proporción continua "la razón del número a las raíces es igual a la razón de las raíces a los tesoros y es igual a la razón de los tesoros a los cubos, y es igual a la razón de los cubos a los tesoro-tesoros, y esto tan lejos como se quiera" (Rashed y Vahebzadeh, 1999 pp. 120-123), y luego establece todas las formas canónicas hasta la especie siguiente a las consideradas por al-Khwārizmī, es decir, hasta el cubo.



al-jabr wa'l-muqābala

La lista de todas las posibilidades tiene veinticinco formas canónicas (Rashed y Vahebzadeh, 1999 pp. 124-129):

número igual a raíz
número igual a tesoro
número igual a cubo
raíces igual a tesoro
tesoros igual a cubo
raíces igual a cubo

tesoro y raíz igual a número
tesoro y número igual a raíz
raíz y número igual a tesoro
cubo y tesoro igual a raíz
cubo y raíz igual a tesoro
cubo igual a raíz y tesoro
cubo y raíz igual a número
cubo y número igual a raíz
número y raíz igual a cubo
cubo y tesoro igual a número
cubo y número igual a tesoro
número y tesoro igual a cubo

cubo y tesoro y raíz igual a número
cubo y tesoro y número igual a raíz
cubo y raíz y número igual a tesoro
cubo igual a raíz y tesoro y número
cubo y tesoro igual a raíz y número
cubo y raíz igual a tesoro y número
cubo y número igual a raíz y tesoro

El proyecto algebraico tropieza con un escollo: ᶜUmar al-Khayyām no encuentra algoritmos para todas las formas canónicas. Sin embargo, sí que es capaz de encontrar, cuando el algoritmo no está disponible, un procedimiento de construcción de la solución mediante intersecciones de cónicas. Admirable solución, pero que no satisface el proyecto algebraico. No es éste el lugar para exponer la continuación de la historia que conduce a la teoría de Galois y el álgebra moderna. Volvamos al libro de al-Khwārizmī.

Hasta esta altura de su libro, al-Khwārizmī no ha resuelto aún ningún problema concreto, pero ya ha puesto las bases del proyecto algebraico. Para resolver problemas concretos le falta poder traducir cualquier enunciado a una expresión del cálculo con especies y transformar las expresiones en una de las formas canónicas. Los capítulos siguientes del libro se dedican a ello, y en ellos aparece un nuevo término técnico, *shay'*, cosa, que en el occidente medieval cristiano acabará constituyendo otro nombre del álgebra cuando no se quiera usar su nombre bárbaro: el arte de la cosa. Trataremos de ello en la próxima entrega de estas historias.

HISTORIAS ■

NOTAS

[1] Viète publicó en 1591 a sus expensas (era un hombre de negocios en buena situación económica y se publicada él mismo sus escritos) este libro, que tiene el tamaño de un manifiesto: 9 folios. Esta edición original latina está disponible en Gallica, http://gallica.bnf.fr/, la biblioteca digital de la Biblioteca Nacional de Francia. Existe una traducción al francés hecha poco después de la muerte de Viète por Vaulézard, con largos comentarios de éste intercalados en la traducción, en un volumen titulado *La nouvelle algèbre de M. Viète*, que también contiene otro libro de Viète que continúa éste. De esa traducción francesa hay una edición facsímil reciente (Vaulézard, 1986). Hay una traducción inglesa de J. Winfree Smith incluida como apéndice de la edición inglesa del clásico estudio de Jakob Klein *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*, que está accesible en una reedición barata de la editorial Dover (Klein, 1968).

[2] Viète pretende en este libro "restaurar el análisis matemático" de los griegos, y así lo subtitula, como una parte de su "restauración del análisis matemático". Para ello parte del texto de Pappus en el que éste describe el método de análisis y síntesis, y lo transforma a su manera mediante el álgebra, que transforma a su vez en lo que él llama "logística especiosa" o cálculo con especies. La zetética, la porística y la exegética son los tres términos que Viète introduce para caracterizar las tres partes del nuevo análisis. Pappus distingue entre dos tipos distintos de análisis: el problemático (cuando se trata de resolver un problema) y el teorético (cuando se trata de demostrar un teorema). Viète toma la palabra *zētētikón* (que significa "investigación") de la descripción del análisis teorético y la palabra *poristikón* (que significa "obtención") de la descripción del análisis problemático, para las partes de su nuevo análisis en el que se plantea una ecuación (por la zetética), y se examina la verdad del teorema que expresa la ecuación (por la porística), y añade una tercera parte cuyo nombre, exegética, viene de una palabra griega que significa "mostrar", y que consiste en resolver la ecuación para obtener los valores concretos. La terminología de Viète es bastante idiosincrásica, lo que hizo que apenas hiciera escuela y que no se haya conservado en absoluto. Estos tres términos introducidos para las tres partes del nuevo análisis son una buena muestra de su uso idiosincrásico de la terminología, ya que el término usado para la parte del nuevo análisis en que se examina un teorema está tomada del análisis problemático, y el término usado para la parte del análisis en que el problema se traduce a una ecuación está tomado del análisis teorético.

[3] La edición canónica de las obras de Descartes es la de Charles Adam and Paul Tannery, *Œuvres de Descartes*, cuyo volumen X contiene el original latino de las *Reglas*, que no se publicó en vida de Descartes. La primera vez que las Reglas se imprimieron fue en una colección de textos no publicados que se editó en Holanda en 1701, con el título *Opuscula posthuma physica et mathematica* (Descartes, 1701).

[4] En la entrega anterior de estas historias (Puig y Navarro, 2010) ya citaba mi caracterización del método cartesiano en forma de una serie de pasos que describen la conducta del sujeto ideal y, por tanto, pueden considerarse como un modelo de competencia en la resolución (algebraica) de problemas. En Puig (2003) y Puig y Rojano (2004) expongo con un cierto grado de detalle cómo derivar ese modelo de competencia de lo que dice Descartes en las *Regulæ* y en la *Geometría*, reelaborando y modificando lo que ya presentó Pólya en el capítulo "The cartesian pattern" del volumen primero de su libro *Mathematical Discovery* (Pólya, 1962).

[5] En su exposición del método de análisis y síntesis, Pappus distingue entre el análisis problemático y el teorético, ya se trate de resolver problemas o demostrar teoremas. Siguiendo en esto a Polya, yo considero que problemas y teoremas son ambos problemas (unos "de encontrar" y los otros "de demostrar"), con lo que el método de análisis y síntesis es un método de resolución de problemas (Puig, 1996; Polya, 1945).

[6] Sobre esta característica de la heurística, ver Puig (1996, p. 46) y Polya (1965, p. 84).

[7] Euclides escribió un libro que se suele conocer con su nombre latino *Data*, pero que se titula en griego *Dedomena*, el participio pasado pasivo en plural del verbo "dar", y significa, por tanto, "que han sido dados". Pappus lo consideraba como uno de los libros que formaban parte del "Tesoro del Análisis". Sobre el significado de *dedomenon*, ver mi texto sobre otro libro, este medieval, que también trata de lo que sido dado: el *De Numeris Datis* de Jordanus de Nemore (Puig, 1994)

[8] En la tradición griega hay dos disciplinas distintas que tratan con números: la Aritmética y la Logística. La Aritmética estudia la naturaleza de los números y los clasifica, la Logística estudia los cálculos con números. En los *Elementos* de Euclides sólo hay aritmética, no hay nada de logística, de hecho, todas las proposiciones de los libros aritméticos de los *Elementos* acaban con la frase "como queríamos demostrar", es decir están tratadas como teoremas. Por el contrario, el libro de Diofanto que se conoce con el nombre de las *Aritméticas*, es, desde este punto de vista, un libro de logística, no de aritmética.

[9] Juan Manuel Navarro Cordón traduce de esta manera: "[…] el artificio entero de esta exposición consistirá en que, suponiendo lo desconocido como conocido, podamos preparar un camino de investigación fácil y directo, incluso en las dificultades más intrincadas que se quiera" (Descartes, 1984, p. 161).

[10] Ver en el apartado "Una historia de la simbolización" de Puig y Rojano (2004) cómo la creación del actual sistema de signos del álgebra combina elementos del sistema de signos de Viète y del de Chuquet-Bombelli, pero cómo a cada uno de ellos le falta una característica, que el otro posee: en el caso de Viète, las especies se representan mediante abreviaturas de sus nombres, en vez de mediante números, lo que no permite el cálculo en la expresión; en el caso de Chuquet-Bombelli, no hay ningún signo para representar las cantidades, sólo se representa de qué especie es una cantidad, lo que impide representar más de una cantidad con signos distintos.

[11] La edición canónica es la de Tannery (1893). Hay una traducción castellana reciente en Nívola (Diofanto de Alejandría, 2007).

[12] Las cinco primeras partes no aparecen como capítulos en el libro.

[13] Las traducciones latinas de Gerardo de Cremona (Hughes, 1986) y de Robert de Chester (Hughes, 1989) sólo llegan hasta aquí. La de Robert de Chester titula este capítulo de transacciones mercantiles "Regula de tribus", es decir, "Regla de tres"; de hecho, los problemas planteados están todos resueltos mediante una regla de tres.

[14] Moreno (Al-Jwarizmi, 2009) traduce este capítulo como "Capítulo de geometría". Rosen (1831) y Rashed (2007) traducen ambos por "medida". En el texto árabe la palabra que aparece es *masāhat*, que significa medición, área; la palabra árabe que se usa para geometría es *handasa*. Solomon Gandz traduce *masāhat* por "área" en el texto en que mantiene que este capítulo del libro de al-Khwārizmī es simplemente una versión del *Mishnat ha Middot*, la primera geometría escrita en hebreo alrededor del año 150, y lo demuestra traduciendo el texto de al-Khwārizmī como apéndice a su edición y traducción inglesa del texto hebreo del *Mishnat ha Middot*, y comparando ambos textos (Gandz, 1932). Por supuesto que Roshdi Rashed opina, por el contrario, que el *Mishnat ha Middot* es un texto mucho más tardío, que depende de fuentes árabes, y que al-Khwārizmī no lo usa (Rashed, 2007, p. 57).

[15] Este capítulo y el siguiente que tratan de problemas de repartos de herencias y devolución de dotes, siguiendo lo establecido por la ley islámica, ocupan la mitad del libro, y están desglosados en varios capítulos, que no detallo aquí.

[16] En la edición de Rashed, el texto árabe está en las páginas impares y su traducción francesa en las páginas pares; en las citas, indico ambas páginas.

[17] Las fracciones, cuando no se especifica más, son fracciones propias, por tanto, menores que la unidad. De hecho, en la matemática árabe se llamaban fracciones "expresables" las fracciones unitarias, que además eran "expresables" en el sentido de que la lengua árabe tiene palabras para expresar esas fracciones; las otras fracciones se llamaban "inexpresables" o "sordas", calificadas con la misma palabra que también se usaba para calificar los números que nosotros llamamos "irracionales": *asamm*.

[18] Como mi conocimiento de la lengua árabe es limitado, la versión castellana del texto de al-Khwārizmī la he compuesto utilizando el texto árabe de Rashed (2007), que está construido utilizando todos los manuscritos que actualmente se conocen como describo en Puig (2008b), su traducción francesa, y la traducción latina de Gerardo de Cremona editada por Hughes (1986), que se supone que es más cercana al texto original de al-Khwārizmī que cualquiera de los manuscritos árabes que se conservan. No utilizo la traducción castellana de Moreno, aparecida en Nívola en 2009, por dos motivos: porque está hecha a partir del único manuscrito árabe que se había editado y traducido antes del trabajo de Rashed (2007), pero, sobre todo, porque ha adoptado decisiones de traducción contrarias a las que yo arguyo que son necesarias para no ser anacrónicos, y poder entender los conceptos algebraicos de al-Khwārizmī.

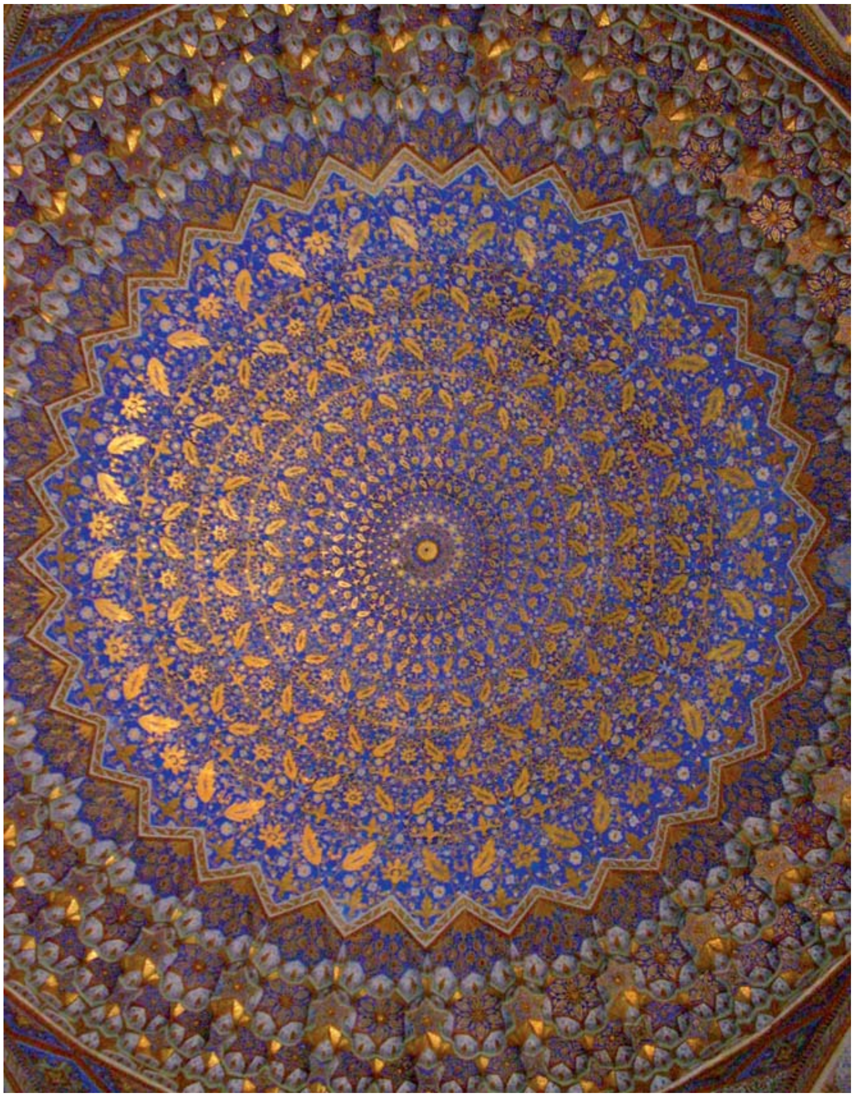
[19] Fuera del significado técnico en el álgebra, *māl* en árabe significa 'fortuna', 'patrimonio', 'cantidad de dinero', 'bien'.

[20] Así aparece en los tres primeros libros en que se trata el álgebra en castellano, escritos por Marc Aurel, Pedro Nunes y Pérez de Moya, y todos ellos publicados en el siglo XVI.

[21] Robert de Chester, que también tradujo en el siglo XII el libro de al-Khwārizmī, tradujo *māl* por *substantia*. Un caso más curioso es el de Mordecai Finzi, que tradujo al hebreo en el siglo XIV el álgebra de Abū Kāmil (Levey, 1966). Mordecai Finzi era probablemente un judío español o que trabajaba en España ya que usó una palabra castellana transliterada al hebreo, y no una palabra hebrea para traducir *māl*: "algo" (אלגו). Quienes se han preocupado de distinguir *māl* de "cuadrado" han usado en inglés "treasure", "fortune", "wealth", "possession"; en francés, "bien" (así lo hace, por ejemplo, Ahmed Djebbar en su libro de 2005 *L'algèbre arabe. Genèse d'un art*), "possession"; en alemán, "Vermögen"; palabras que todas ellas tienen el significado de "cantidad de dinero". Rashed, aunque menciona la especificidad del término *māl* como término del lenguaje del álgebra, lo traduce por "carré", pero lo distingue de la figura geométrica escribiendo *carré*, en cursiva, cuando traduce *māl*, y sin cursiva cuando traduce *murab*ᶜ. Rosen traduce *māl* por 'square', y lo que hace para distinguir *māl* de *murab*ᶜ es traducir esta última palabra por 'quadrate'.

[22] Es interesante señalar, de paso, que Diofanto habla de las especies de números dos veces, lo que Viète hará de forma explícita en su *In artem Analyticen Isagoge*. En la definición de las especies de números por la que comienza, éstos son números dados, que se clasifican en formas, en especies: "[…] todos los números están compuestos por una determinada cantidad de unidades, admitiendo claramente cualquier agregación hasta el infinito. De manera que, entre ellos, los hay que son cuadrados (*tetragōnōn*), resultantes de la multiplicación de un número denominado lado (*pleurà*) del cuadrado por sí mismo […]" (Diofanto, 2007, p. 18). Luego dice que "se sabe que cada uno de aquellos números recibe una designación más breve cuando es un elemento genérico del cálculo aritmético" (Diofanto, 2007, p. 18), e introduce las abreviaturas de los nombres de las especies. Diofanto le cambia el nombre a la especie que primero ha llamado "cuadrado", cuando se trata de elementos de la teoría aritmética: "Denominaré así *dynamis* al cuadrado (*tetragōnos*) y lo denotaré mediante una letra Δ con un superíndice Υ, es decir, Δ^{Υ} [las dos primeras letras griegas de la palabra *dynamis*]" (Diofanto, 2007, p. 19). La lista de especies de números de Diofanto continúa con el cubo, y las combinaciones de cuadrado y cubo, cuadrado-cuadrado, cuadrado-cubo y cubo-cubo, y se completa con "el número a secas, que no posee ninguna de estas propiedades y consta de una cantidad de unidades indeterminada [que] se llamará simplemente número (*arithmòs*)" y "aún queda otro signo para denotar una cantidad determinada y constante" [formado por las dos primeras letras de la palabra griega *monás*, que significa "unidad"] (Diofanto, 2007, p. 19). Diofanto también define las especies inversas de éstas por analogía con cómo se construyen en la lengua griega los nombres de las fracciones unitarias a partir de los nombres de los números: de *arithmòs*, *arithmostón*; de *dynamis*, *dynamostón*; etc.

[23] En Puig (1998, 2008a) he explicado cómo las operaciones del cálculo están concebidas para transformar cualquier ecuación a una de las formas canónicas.



Madrasa Ulugbek de Samarkanda (Uzbekistán). Foto: Marisa Fernández

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Al-Jwarizmi, M. b. M. (2009). *El libro del Álgebra*. Traducción, introducción y notas de Ricardo Moreno Castillo. Madrid: Nívola.

Descartes, R. (1701). *Opuscula posthuma physica et mathematica*. Amsterdam: Typographia P. & Blaev J.

Descartes, R. (1984). *Reglas para la dirección del espíritu*. Introducción, traducción y notas de Juan Manuel Navarro Cordón. Madrid: Alianza Editorial.

Descartes, R. (1996). *Regulæ ad Directionem Ingenii.* En *Œuvres de Descartes*. Tome X. Édition de Charles Adam et Paul Tannery. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin.

Diofanto de Alejandría (2007). *La Aritmética y el libro Sobre los números poligonales*. Versión en castellano, introducción, notas y apéndices de Manuel Benito Muñoz, Emilio Fernández Moral y Mercedes Sánchez Benito. Tomo I y Tomo II. Madrid: Nívola.

Djebbar, A. (2005). *L'algèbre arabe. Genèse d'un art*. Paris: Vuibert / Adapt.

Gandz, S. (Ed. trans.) (1932). The Mishnat ha Middot, the First Hebrew Geometry of about 150 C. E., and the Geometry of Muhammad ibn Musa al-Khowarizmi, the First Arabic Geometry <c. 820>, Representing the Arabic Version of the Mishnat ha Middot. *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*. Abteilung A: Quelle, 2. Band. Berlin: Julius Springer

Høyrup, J. (1991). 'Oxford' and 'Cremona': On the relations between two versions of al-Khwârizmî's Algebra. *Filosofi og videnskabsteori på Roskilde Universitetcenter*. 3. Række: Preprint og Reprints nr. 1.

Hughes, B. (1986). Gerard of Cremona's translation of al-Khwārizmī's al-jabr: A critical edition. *Mediaeval Studies 48*, 211-263.

Hughes, B. (1989). *Robert of Chester's translation of al-Khwārizmī's al-jabr: A new critical edition*. Boethius, Band XIV. Stuttgart, Germany: Franz Steiner Verlag.

Klein, J. (1968). *Greek Mathematical Thought and the Origins of Algebra*. Cambridge, MA: MIT Press. [Reprinted in New York: Dover, 1992.]

Levey, M. (ed.) (1966). *The Algebra of Abû Kâmil, in a Commentary by Mordecai Finzi.* Hebrew text and translation, and commentary. Madison, WI: The University of Wisconsin Press.

Polya, G., 1945, *How to Solve It.* (Princeton University Press: Princeton, NJ). [Traducción castellana de Julián Zugazagoitia, *Cómo plantear y resolver problemas.* (Trillas: México, 1965).]

Polya, G., 1962-1965, *Mathematical Discovery. 2 vols*. (John Wiley and Sons: New York).

Puig, L. (1994). El *De Numeris Datis* de Jordanus Nemorarius como sistema matemático de signos. *Mathesis,* 10, pp. 47-92.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas.* Granada: Comares.

Puig, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. El texto de al-Khwarizmi restaurado. En F. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 109-131). México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica.

Puig, L. (2003). Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico, y A. Vallecillos (Eds.) *Investigación en Educación Matemática. Actas del Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 97-108). Granada: Universidad de Granada.

Puig, L. (2008a). History of algebraic ideas and research on educational algebra. In M. Niss (Ed.) *Proceedings of the Tenth International Congress on Mathematical Education. CD-version*. Roskilde: IMFUFA, Department of Science, Systems and Models, Roskilde University.

Puig, L. (2008b). Historias de al-Khwārizmī (2ª entrega). Los Libros. *Suma*, 59, pp. 105-112.

Puig, L. y Navarro, T. (2010). Protoálgebra en Babilonia (2ª entrega). Métodos de solución. *Suma*, 64, pp. 97-104.

Puig, L., y Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. In K. Stacey, H. Chick, y M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 189-224). Boston / Dordrecht / New York / London: Kluwer Academic Publishers.

Rashed, R. (Ed.) (2007). *Al-Khwārizmī. Le commencement de l'algèbre.* Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

Rashed, R., y Vahebzadeh, B. (1999). *Al-Khayyâm mathématicien*. Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

Rosen, F. (1831). *The algebra of Mohammed Ben Musa.* London: Oriental Translation Fund.

Tannery, P. (Ed.) (1893). *Diophanti Alexandrini opera omnia cum graecis commentariis* (Reprinted 1974, Vols. 1-2). Stuttgart, Germany: B. G. Teubner.

Vaulézard, J.-L. (1986). *La nouvelle algèbre de M. Viète*. Paris: Fayard.

Vieta, F. (1591). *In artem Analyticem Isagoge*. Turonis: Iametium Mettayer Typographum Regium.

Este artículo fue solicitado por *Suma* en julio de 2010 y aceptado en octubre de 2010 para su publicación

65
Noviembre 2010, pp. 95-98

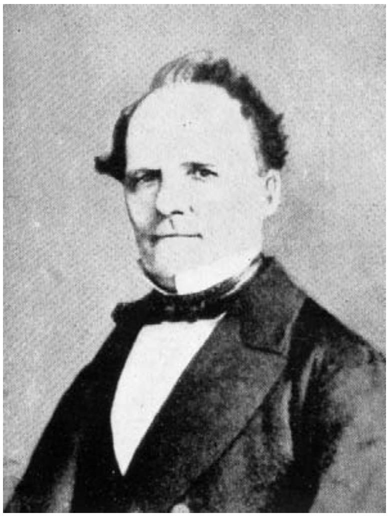
Kummer: los números ideales camino del teorema de Fermat

Hace doscientos años nacía en Sorau, un pueblecito alemán del principado de Brandenburgo, Ernst Eduard Kummer, que habría de jugar un papel importante en el desarrollo de la aritmética, necesario para la solución del gran teorema de Fermat.

Dominaban todavía Europa por aquel entonces los ejércitos napoleónicos, y ello no iba a ser ajeno a la vida de Ernst Eduard. El padre de Eduard ejercía como médico en Sorau, cuando se vio en la necesidad de atender a los enfermos del tifus que había dejado como secuela el gran ejército de Napoleón, en su retirada desde Rusia, y a su paso por Alemania. El hecho es que el propio médico adquirió la enfermedad y acabó muriendo de ella, cuando Eduard contaba solo tres años de edad.

La familia Kummer, la madre y sus dos hijos todavía muy pequeños, se vio sumida de pronto en una terrible pobreza. No obstante, los desvelos de la señora Kummer consiguieron que Eduard ingresara en el instituto local. Incluso, al acabar sus estudios secundarios, ya con 18 años, consiguió la madre enviarlo a la Universidad de Halle para seguir los estudios de teología. Debido a su falta de medios económicos, el joven Kummer no podía residir en la propia Universidad, y debía trasladarse todos los días a pie desde Sorau, mochila al hombro, cargado con sus libros.

Por una de esas casualidades que deciden a veces los destinos humanos, Kummer se encontró con un profesor de Matemáticas, H. Ferdinand Scherk, que era un gran entusiasta del Álgebra y de la teoría de números. Contagiado por el ardor matemático de este joven profesor, decidió Kummer abandonar los estudios teológicos por los de Matemáticas, ya que, recordando a Descartes, decía que “Los simples errores y los falsos conceptos no pueden intervenir en la Matemática.”



Santiago Gutiérrez
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*
hace@revistasuma.es

Realizó los estudios con brillantez, y ya en su tercer año de Universidad obtuvo un premio por la resolución de un problema propuesto a modo de concurso.

A los 21 años consiguió el título de doctor, y, no habiendo ninguna vacante universitaria de profesor, comenzó su carrera docente en su antiguo Instituto. El año siguiente se trasladó al Instituto de Liegnitz, donde enseñó Matemáticas durante diez años. Precisamente en este Instituto conoció e inició en el saber matemático a Kronecker, quien más tarde iba a colaborar en los trabajos de Kummer. Durante este tiempo realizó importantes descubrimientos de los que hizo partícipe a eminentes matemáticos de la época, como Jacobi entre otros. Estos, dándose cuenta de la genialidad de Kummer, consiguieron para él una plaza de profesor de Matemáticas en la Universidad de Breslau. Era el año 1842 y allí enseñó Kummer hasta el año 1855, en que la muerte de Gauss ocasionó múltiples desplazamientos por las universidades alemanas: Dirichlet, de Berlin a Göttingen, para suceder a Gauss; Kummer, de Liegnitz a Berlin; etc.

Kummer era un hombre sencillo, de buen humor y bonachón. Debido a su modestia, no alardeaba nunca de sus originales trabajos y menos aún se le ocurría presentarse a premio alguno de los que entonces empezaban a menudear. Seguramente es el único matemático que consiguió un premio al que no se había presentado. Así dice el informe de la Academia Francesa de Ciencias de 1857 en la resolución del concurso para el Gran Premio en Ciencia Matemática:

> El concurso fue abierto para el año 1853 y prorrogado para 1856. No habiendo encontrado la comisión una obra digna del premio entre los solicitantes, propone a la Academia premiar a M. Kummer por sus bellas investigaciones sobre los números complejos compuestos de raíces de la unidad y números enteros.

Si modesto era como matemático, bueno y solidario se mostró siempre como profesor. No olvidó nunca Kummer las penurias de sus primeros años y los sacrificios que tanto él como su madre habían tenido que soportar para que el niño Eduard pudiera salir adelante. De él se ha dicho con razón que no solo fue un padre para sus alumnos sino un hermano para los padres de estos. Sus desvelos ante las circunstancias personales adversas de sus alumnos quedan bien puestos de manifiesto en la siguiente anécdota. En cierta ocasión, efectivamente, se enteró de que un joven no había podido acudir a Berlín para conseguir su título de doctor en Matemáticas, debido a haber sido atacado de viruela. El joven por este motivo había tenido que volverse a su casa de Posen. Kummer buscó a un amigo suyo, le dio el dinero necesario para el viaje y lo envió a Posen a socorrer en lo posible al joven matemático.

El teorema de Fermat y los números algebraicos

Desde que Fermat enunciara su famosa conjetura y añadiera que estaba en posesión de una maravillosa prueba, los matemáticos no cesaron de afrontar la demostración. Pero ninguno de ellos, ni Euler ni Lagrange ni el mismo Gauss, se dio cuenta de las posibilidades que se abrían con la ampliación del campo de los números reales al de los números complejos.

> *Seguramente es el único matemático que consiguió un premio al que no se había presentado.*

Euler había demostrado la conjetura para n=3, Dirichlet y Legendre para n=5. Gauss lo había intentado para n=7, y como quiera que no lo había conseguido, disgustado por su fracaso, en una carta dirigida a Olbers, le decía:

> Confieso que, por supuesto, el teorema de Fermat, como una proposición aislada, tiene muy poca importancia para mí, ya que es fácil formular una buena cantidad de tales proposiciones que uno no puede demostrar.

Semejante actitud soberbia de Gauss contrasta con la sencilla y humilde del que fuera alumno suyo, Kummer. Este abordó el problema de la conjetura de Fermat desde un nuevo punto de vista. Partió de los números algebraicos, esto es, los números r que son solución de ecuaciones del tipo:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

donde las a_i son números racionales, con $a_n \neq 0$, de modo que las r no son solución de ninguna otra ecuación de grado menor que n. Son números algebraicos de grado n. Si $a_n = 1$ el número es un *entero algebraico.*

Así, $1+\sqrt{-5}$ es un número algebraico de grado 2, este caso entero algebraico, pues es solución de la ecuación $x^2-2x+6=0$. El número

$$\frac{1}{2}+\frac{1+\sqrt{-5}}{2}$$

es también un número algebraico de grado 2, pero no entero, pues es solución de la ecuación $2x^2-2x+3=0$ cuyo primer coeficiente es distinto de 1.

Asociado al número algebraico r de grado n, define Kummer el *campo numérico algebraico de grado n* como el conjunto de todos los números algebraicos que se pueden construir a partir de r, por adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones sucesivas (excepto la división por cero).

El problema central de la teoría de números algebraicos es investigar las leyes de divisibilidad de los enteros algebraicos en el campo numérico algebraico en el que están definidos. Kummer dio definiciones adecuadas de enteros, la divisibilidad entre enteros, enteros primos, etc.

Atacó entonces la conjetura de Fermat, haciendo uso de sus números algebraicos, descomponiendo el binomio x^p+y^p, con p primo, en factores de primer grado, como ya hicieran otros matemáticos:

$$x^p+y^p=(x+y)(x+ry)\ldots(x+r^{p-1}y)$$

El caso es que, con su teoría de los números ideales, Kummer logró demostrar la conjetura de Fermat para algunos números primos.

Creyó incluso haber demostrado la conjetura de Fermat. Y así se lo comunicó a Drichlet en 1843, señalando que para su demostración le fue necesario suponer que en el campo de los números algebraicos se mantiene la factorización única. Pero, Dirichlet le informó de que tal suposición solo es válida para ciertos primos p. Un sencillo ejemplo, permite verlo. En el campo de los enteros algebraicos de $a+b\sqrt{-5}$, se tiene:

$$6=2\cdot 3=(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$$

donde los cuatro factores son primos.

Otros eminentes matemáticos, como el caso de Cauchy, incurrieron en este mismo error, y abandonaron por ello la empresa. No ocurrió lo mismo con el joven Kummer, que siguió trabajando en el tema, por suerte para las matemáticas, como tendremos ocasión de ver.

Los números ideales

Para conseguir la factorización única creó Kummer la teoría de los números ideales. En realidad, al estilo de Gauss, Kummer trabajó con números concretos, y fue publicando sus trabajos en diversos artículos durante el año 1844.

¿Cómo lograr, por ejemplo, que la factorización de 6 sea única?

Partió Kummer del campo citado de los enteros algebraicos de $a+b\sqrt{-5}$, e introdujo los números:

$$a=\sqrt{2} \quad b_1=\frac{1+\sqrt{-5}}{\sqrt{2}} \quad b_2=\frac{1-\sqrt{-5}}{\sqrt{2}}$$

No se trata ya de enteros algebraicos, y a estos nuevos números los llamó *números ideales*. Aquí, la factorización de 6 ya es única, puesto que

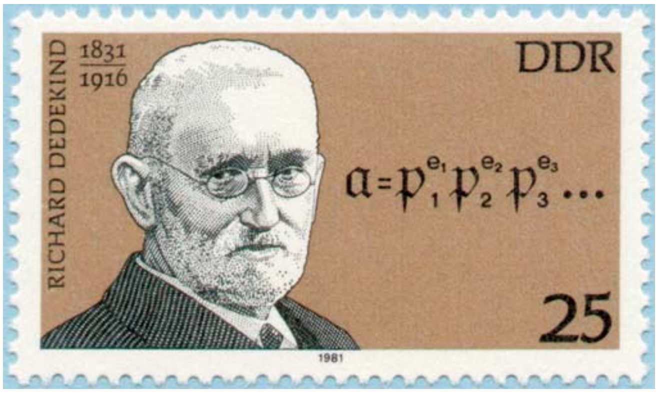
$$2=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} \qquad 3=\frac{1+\sqrt{-5}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1-\sqrt{-5}}{\sqrt{2}}$$

Es decir, 2 y 3 no son primos, y entonces:

$$6=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1+\sqrt{-5}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1-\sqrt{-5}}{\sqrt{2}}$$

De este modo, la expresión de 6 como producto de cuatro factores es única.

Los números ideales, en tanto que números ordinarios, permiten demostrar algunos de los resultados obtenidos en la aritmética ordinaria, incluso en campos que carecen de factorización única. Como se ha señalado anteriormente, Kummer trabajó con números concretos y en ninguno de sus ensayos definió los números ideales de forma general.



El caso es que, con su teoría de los números ideales, Kummer logró demostrar la conjetura de Fermat para algunos números primos. Concretamente, lo consiguió para los primos menores que cien, excepto para 37, 59 y 67, si bien lo demostró también para estos en un ensayo posterior (de 1857).

Era tal la valoración que el propio Kummer hacía de sus números ideales que escribió:

> Vemos, por tanto, que los factores primos ideales revelan la esencia de los números complejos, los hacen, por así decir, transparentes, y descubren su estructura cristalina interna.

De Kummer a Dedekind

Kummer no logró su propósito de demostrar la conjetura de Fermat, pero en sus intentos por conseguirlo abrió profundos caminos a las matemáticas que otros iban a saber recorrer con eficacia. Kummer no estaba solo en esta aventura. Su contemporáneo y colega, Kronecker, por ejemplo, abordó en 1845 la teoría de la divisibilidad en ciertos campos muy singulares.

Pero fue Dedekind el que más lejos supo llevar las profundas ideas de Kummer. Richard Dedekind, 21 años más joven que Kummer, llegó a tiempo todavía de recibir lecciones de Gauss. Abordó el problema de la factorización única de una forma nueva y original. Empezó por generalizar la teoría de los enteros complejos de Gauss y de los números algebraicos de Kummer y, a continuación, introdujo los conceptos de cuerpo y de anillo.

Para conseguir la factorización única, en lugar de números ideales, como Kummer, aunque inspirado en las ideas de este, considera clases de números algebraicos, a las que llama *ideales*, en honor a Kummer. Así, por ejemplo, entre los números enteros, en lugar de *5* toma la clase *5p*, donde *p* es cualquier entero. Establece la divisibilidad y las operaciones entre las clases. Y define la estructura de ideal de la siguiente manera:

> Un conjunto de enteros A de un cuerpo K es un ideal si para cualquier par de enteros, α y β, de A, se verifica que $a\alpha+b\beta$, donde a y b son de K, también pertenece a A. Aplica esta noción a los números algebraicos, de modo que un ideal A se dice generado por los enteros algebraicos $a_1, a_2,.., a_n$, del cuerpo K si A está constituido por elementos de la forma: $\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+...+\lambda_n a_n$ donde los λ_i pertenecen a K.

Sobre la importancia de la obra de estos tres grandes, Kummer, Kronecker y Dedekind, escribió E. T. Bell lo siguiente:

> …con su invención de la teoría moderna de los números algebraicos, ampliando el alcance de la Aritmética *ad infinitum*, y llevando las ecuaciones algebraicas dentro de los límites del número, hicieron por la Aritmética superior y la teoría de las ecuaciones algebraicas lo que Gauss, Lobachewsky, Bolyai y Riemann hicieron por la Geometría al emanciparla de la estrecha esclavitud de Euclides. Y, lo mismo que los inventores de la Geometría no euclideana revelaron vastos y hasta entonces insospechados horizontes a la Geometría y a la ciencia física, así también los creadores de la teoría de los números algebraicos arrojaron una luz completamente nueva que iluminó toda la Aritmética y aclaró la teoría de ecuaciones, de los sistemas de curvas y superficies algebraicas y la verdadera naturaleza del número mismo sobre la firme base de claros y simples postulados.

Otros muchos trabajos realizó Kummer en su larga vida, tanto en el terreno teórico como en las aplicaciones prácticas. Una de sus creaciones es la de la superficie de cuarto grado en la Geometría euclideana, inspirada en la obra de Hamilton sobre los sistema de rayos ópticos. Pero, también se dedicó a aplicar sus conocimientos a la Balística, así como a enseñar sus resultados a los oficiales del ejército alemán en la Escuela de Guerra de Berlín. Desde el Análisis y la Geometría a la Física, su obra ha sido abundante.

Pasó los últimos nueve años de su vida en completo aislamiento de sus compañeros y de todo lo que había constituido su tarea profesional, eso sí, rodeado por su mujer y los nueve hijos que le sobrevivieron. Murió víctima de una gripe a la edad de 83 años.

HACE ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Kline M. (1992): *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días.* Madrid: Alianza Universidad

Bell E. T. (2009): *Los grandes matemáticos*. Buenos Aires: Losada

Este artículo fue solicitado por *Suma* en junio de 2010 y aceptado en septiembre de 2010 para su publicación.

suma+ 65
Noviembre 2010, pp.99-104

Matemáticas para afinar instrumentos musicales

A pesar de toda la experiencia que pueda haber
adquirido en música por haber
estado vinculado a ella durante tanto tiempo,
debo confesar que mis ideas se
aclararon sólo con la ayuda de las matemáticas.

J. P. Rameau (1683 – 1764)

Cuando se habla de *afinación* se hace referencia a dos realidades diferentes en música. Una tiene que ver con la selección de las frecuencias que se consideran notas musicales, dando lugar a los sistemas de afinación, y la otra representa la acción de poner en tono justo los instrumentos musicales en relación con una nota fijada, a la que se llama diapasón. Evidentemente, para que un instrumento suene afinado hace falta que se tengan en cuenta las dos acepciones anteriores. Se debe conseguir que el instrumento sea capaz de producir notas afinadas entre sí, es decir que las distancias entre unas notas y otras se correspondan con las de algún sistema de afinación. Pero además, el intérprete, o el técnico, debe conseguir que las notas producidas se ajusten al diapasón, puesto que de otro modo no podrían sonar varios instrumentos a la vez. Para distinguir estos dos tipos de afinación, a la primera, que depende en mayor medida del constructor, le llamaremos *afinación estructural* y a la otra *afinación de ajuste*.

Para que la distinción entre los dos tipos de afinación sea más clara, nos centraremos en una guitarra. Hay una parte estructural encargada de que los trastes se coloquen de manera que, para una cuerda, al ir presionando sucesivamente los trastes de modo ascendente el sonido suba cada vez un semitono. La parte de ajuste es la que corresponde al intérprete, quien debe aumentar la tensión de la cuerda hasta que ésta produzca un sonido fijado por el sistema de afinación.

Hasta ahora, en varios trabajos aparecidos en *Musymáticas* sólo se han utilizado los sistemas de afinación y la afinación de ajuste, porque la forma con la que se templa cada instrumento depende mucho de las características particulares del mismo. Sin embargo, a pesar de que somos conscientes de que las reflexiones que presentaremos aquí son muy incompletas, creemos interesante estudiar el uso de las matemáticas en la afinación de dos instrumentos muy conocidos: la guitarra y el piano. Ambos afinan aproximadamente en el sistema temperado de 12 notas y las posiciones para ejecutar las notas vienen determinadas por posiciones fijas de los dedos en los trastes o en las teclas.

Los problemas de afinar con el sistema temperado

Desde un punto de vista matemático, plantear los objetivos de la afinación temperada resulta sencillo. Partimos de una nota, por ejemplo el Do con f_0 =261,62 Hz. Para obtener el resto de notas de la octava en el sistema temperado basta con multiplicar por f_0 las potencias que aparecen en la tabla siguiente[1]:

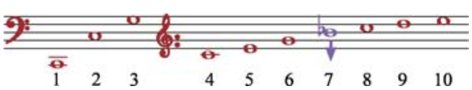
Vicente Liern Carrión
Universitat de València Estudi General
musymaticas@revistasuma.es

Do	Do#	Re	Mi^b	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	Si^b	Si
1	$2^{1/12}$	$2^{2/12}$	$2^{3/12}$	$2^{4/12}$	$2^{5/12}$	$2^{6/12}$	$2^{7/12}$	$2^{8/12}$	$2^{9/12}$	$2^{10/12}$	$2^{11/12}$

Una vez tenemos las frecuencias de las notas dentro de la octava $[f_0, 2f_0[$, si queremos subir n octavas multiplicaremos por 2^n y si lo que queremos es bajarlas, la operación será dividir entre 2^n.

Podría pensarse que, dado que la tecnología actual lo permite, conseguir instrumentos afinados de forma muy precisa consiste en tener en cuenta mediciones de frecuencias y productos por potencias de 2. Sin embargo, como veremos, la realidad no es tan sencilla.

En el mundo real los sonidos puros no existen, ni siquiera cuando se supone periodicidad en las ondas, como ocurre en el caso de las notas musicales. De hecho, en el siglo XIX, J. B. Fourier (1768 – 1830) demostró que cualquier función periódica continua se puede descomponer en funciones periódicas simples. Esto significa que si un instrumento ideal produce una nota, la onda sonora se puede descomponer en ondas simples con frecuencias $1f$, $2f$, $3f$..., denominadas *armónico primero (fundamental), segundo,* etc. La amplitud de cada uno de los armónicos es lo que configura el timbre del instrumento y hace que distingamos el Do de un piano del Do de una trompeta. Así, si tomamos como nota fundamental, o primer armónico, el Do_2 con una frecuencia f = 130,81 Hz, los primeros armónicos que se producen son los siguientes: Do_2, Do_3, Sol_3, Do_4, Mi_4, Sol_4, Sib_4, Do_5, Re_5, Mi_5, etc. Ahora bien, estas notas no se corresponden exactamente con las de ningún sistema de afinación (Goldáraz Gaínza, 2004; Liern, 2008).



Primeros armónicos del Do_2

Por ejemplo, la frecuencia del Mi_4 como quinto armónico del Do_3 es 5·130,81=654,05 Hz. Si calculamos la frecuencia del Mi_4 en el sistema temperado tenemos que multiplicar la frecuencia de Do_2 por $2^{4/12}$ y subirlo dos octavas, para lo cuál hay que multiplicar por 2^2, es decir que su frecuencia es $2^2 \cdot 2^{4/12} \cdot$ 130,81=654,241 Hz.

Como hemos explicado en otras ocasiones, podemos medir la diferencia de sensación sonora entre las notas de frecuencias f_1 y f_2 hercios de la forma siguiente (Liern, 2009):

$$d(f_1, f_2) = 1200 \cdot \left| \log_2 \left(\frac{f_1}{f_2} \right) \right| \text{ cents}$$

Entonces, la distancia en cents entre 654,05 y 659,241 es

$$d(659{,}241; 654{,}05) = 1200 \cdot \log_2 \left(\frac{659{,}241}{654{,}05} \right) = 13{,}68627 \text{ cents.}$$

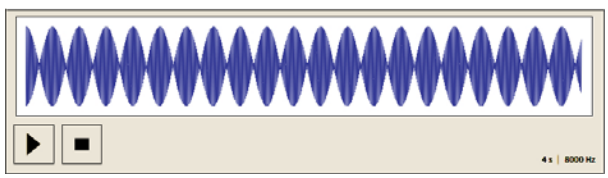
Un oído humano entrenado puede percibir diferencias superiores a 4 cents (Piles, 1982). Por lo tanto, en este caso, la diferencia en la afinación entre las dos versiones del Mi_4 sería perfectamente apreciable. Si un piano fuese perfecto y estuviese afinado en el sistema temperado, al tocar las teclas del Do_2 y Mi_4 a la vez, la frecuencia del Mi_4 temperado (659,241 Hz) se estaría mezclando con la del quinto armónico del Do_2 (654,05 Hz) y esto produciría interferencias en las ondas llamada *batimiento*.

> *En el mundo real los sonidos puros no existen, ni siquiera cuando se supone periodicidad en las ondas, como ocurre en el caso de las notas musicales.*

Cuando se superponen dos ondas con frecuencias muy parecidas se produce una nueva onda cuya frecuencia es aproximadamente el promedio de las dos, pero con una fluctuación periódica de su intensidad o trémolo. Esto es lo que se conoce como *batimiento lento*. Sin embargo, cuando la diferencia entre las frecuencias es mayor, y se encuentra dentro del registro audible[2], además de la onda con frecuencia promedio aparece un nuevo sonido, a este fenómeno se le llama *batimiento rápido*. Para escuchar el trémolo al que hacíamos referencia, podéis utilizar, por ejemplo, el programa Mathematica®. Si escribimos:

```
Play[Sin[654.05*2*Pi*t], {t, 0, 4}]
```

la salida del programa es un sonido puro de 654,05 Hz que dura 4 segundos.



Salida gráfica del programa Mathematica® al superponer el Mi_4 temperado y el que se obtiene como quinto armónico del Do_2.

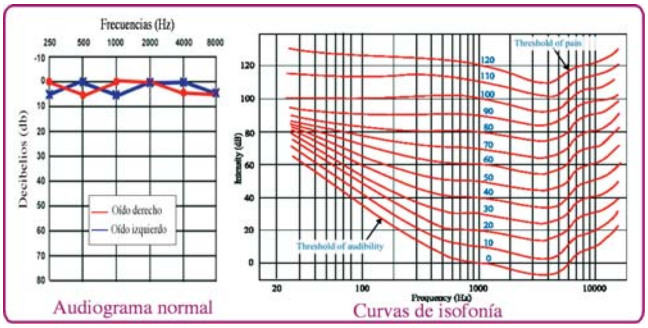
Si queremos que los dos sonidos anteriores se superpongan, escribiremos

```
Play[Sin[654.05*2*Pi*t]+Sin[659.241*2*Pi*t], {t, 0, 4}]
```

La salida de Mathematica® muestra el gráfico de una nueva onda en la que se puede escuchar como se produce el trémolo[3].

Este fenómeno, que en principio parecería que sólo proporcionaba dificultades, lo cierto es que se puede utilizar para afinar instrumentos. Volviendo al caso de la guitarra, al pulsar por ejemplo la sexta cuerda en el quinto traste debe sonar igual que la quinta cuerda al aire. Si hacemos sonar ambas cuerdas juntas y se produce un trémolo, es que no están bien afinadas y hay que modificar las tensiones hasta que este batimiento desaparezca.

Pero la superposición de ondas no es la única dificultad. Sabemos que el oído humano no percibe los sonidos de forma lineal, sino que la percepción depende, entre otras magnitudes, de la frecuencia de éste. De hecho, un sonido de muy poca intensidad puede provocar la misma sensación sonora que otro de mayor intensidad si las frecuencias de cada uno son diferentes (curvas de isofonía). Además, la percepción respecto de la altura tampoco es lineal, como podemos comprobar cuando se hace una audiometría.



Ejemplos de no linealidad en la percepción auditiva

Si a lo anterior le añadimos que la temperatura, el grado de humedad, la resonancia de la sala, etc. afectan mucho a los instrumentos, está claro que conseguir una afinación muy precisa no es tarea fácil. Veamos a continuación cómo se resuelven algunos de estos problemas con la guitarra y con el piano.

La afinación de la guitarra

Mucho antes de que J. S. Bach (1685 – 1750) diese a conocer definitivamente el sistema de afinación temperado con el Clave bien temperado, musicólogos e instrumentistas de los siglos XVI y XVII desarrollan métodos que permitían situar los trastes de instrumentos musicales de manera que sonasen con el sistema de afinación que ahora utilizamos.

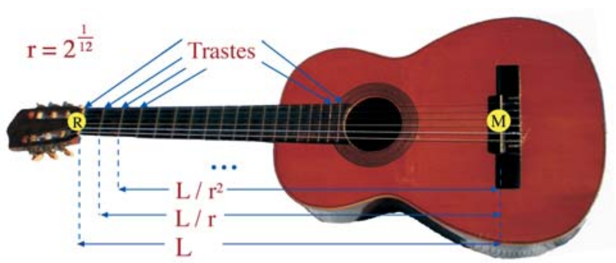
Desde el punto de vista técnico, el problema con el que contaban estos fabricantes de instrumentos era que sus técnicas eran artesanales y puramente empíricas, sin más base geométrica que las construcciones con regla y compás. Por esta razón, la propuesta de Vincenzo Galilei (1520 –1591) de considerar semitonos iguales dados por el número racional

$$\frac{18}{17} \cong 1{,}0588223529$$

fue una de las técnicas más utilizadas durante siglos. Sin embargo, tanto músicos como teóricos sabían que este método originaba pequeñas desafinaciones[4]. Consciente de esto, el filósofo, matemático y musicólogo Marin Mersenne (1588 –1648), propone aproximar el semitono por

$$\sqrt{\sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{2}}}} \cong 1{,}059732672$$

Desde luego, el nuevo valor para el semitono estaba mejor ajustado y, a pesar de la aparente complejidad de la propuesta, sólo aparecen raíces cuadradas y por tanto puede construirse con regla y compás. Sin embargo, lo cierto es que los errores de construcción se iban acumulando y resultó poco operativo. Fueron varios los procedimientos ideados en el siglo XVIII para conseguir operatividad y precisión. De hecho, I. Stewart (Fauvel *et al.*, 2003) recoge y compara varios de estos métodos y analiza un método geométrico ideado por Daniel Strähle (1700 – 1746) que resultó ser muy preciso.



Posición de los trastes de una guitarra

Actualmente, la tecnología permite que la posición de los trastes se haga directamente teniendo en cuenta las frecuencias del sistema temperado. Si nos fijamos en la colocación de los trastes de la figura, está claro que a medida que nos alejamos de R éstos tienen una separación menor. Las matemáticas y las técnicas actuales permiten colocar los trastes de forma sencilla: si las cuerdas miden L desde R hasta M (como en la figura), para fijar el lugar de los trastes basta con calcular

$$\frac{L}{2^{0/12}}, \frac{L}{2^{1/12}}, \frac{L}{2^{2/12}}, \ldots$$

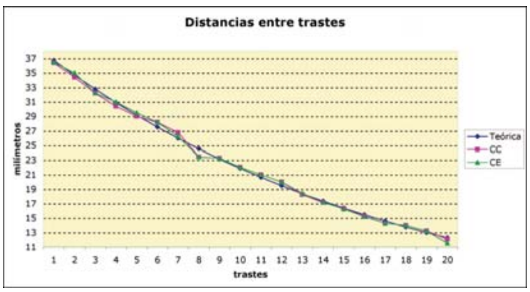
Lo que se hace es situar el traste 0 y a partir de ahí, para conseguir que la cuerda suene un semitono más alta cada vez, se divide sucesivamente entre $2^{1/12}$. Entonces, la distancia entre dos trastes consecutivos viene dada por

$$d(t_n, t_{n-1}) = \frac{L}{r^{n-1}} - \frac{L}{r^n} = L \cdot \frac{(r-1)}{r^n}, \quad n \geq 1$$

donde L es la longitud de la cuerda y $r = 2^{1/12}$.

Con lo dicho hasta aquí podría parecer que el problema de afinar una guitarra ya está resuelto, pero no es así.

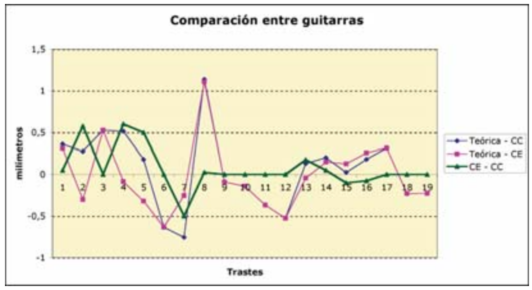
Para saber si los constructores actuales colocan los trastes de acuerdo con la progresión geométrica que hemos descrito antes, hemos medido los trastes de varias guitarras. Para simplificar los resultados aquí sólo reproduciremos lo obtenido para dos de ellas: una guitarra clásica de estudio (CE) fabricada por Instrumentos Musicales Gaspar y otra clásica de concierto (CC) elaborada por Amalio Burguet. La razón por la que hemos seleccionado sólo éstas es que se simplifican mucho los gráficos y en ambos casos las cuerdas miden 655 mm.



Comparación entre los trastes de dos guitarras y la colocación teórica

Si comparamos la distancia entre los trastes que propone la teoría y la de cada una de las guitarras, se comprueba que realmente son muy parecidas. Sin embargo, basta observar el gráfico anterior para comprobar que se producen desajustes en algunos trastes, por ejemplo el octavo. ¿Podemos atribuir estas diferencias a problemas de imprecisión en el proceso de fabricación? Para responder a esta pregunta hemos calculado las diferencias, en mm., entre la colocación de los trastes de cada guitarra y la guitarra teórica.

En el gráfico se ve claramente que las distancias son mucho menores cuando comparamos entre sí las guitarras reales que cuando las comparamos con las posiciones teóricas de los trastes. Este hecho, que ha ocurrido con las ocho guitarras analizadas, nos hacen pensar que se trata de una desviación hecha voluntariamente para conseguir disminuir los batidos y aumentar con ello la calidad acústica del instrumento.



Diferencias entre las distancias de los trastes de cada guitarra y la colocación teórica

La afinación del piano

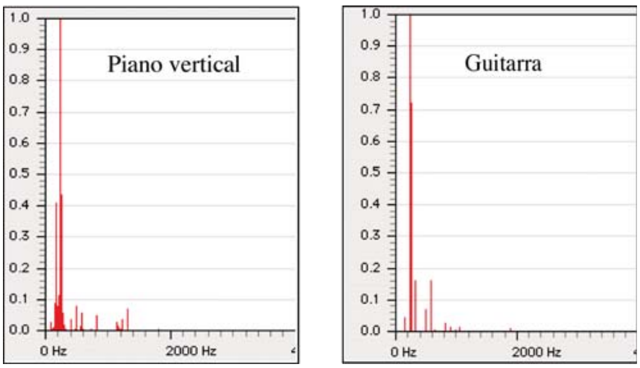
Así como en la guitarra resulta imposible fijar sus orígenes con precisión, no ocurre lo mismo con el piano. Su creación se atribuye a Bartolomeo Cristofori di Francesco (1655 – 1731) a principios del siglo XVIII. Aunque a partir de finales de este siglo el instrumento sufrió grandes cambios, tanto mecánicos como acústicos, la esencia del piano no ha variado. El sonido se genera a partir de cuerdas vibrantes, está compuesto por una caja de resonancia, a la que se ha agregado un teclado mediante el cual se percuten las cuerdas de acero con macillos forrados de fieltro produciendo el sonido.

La afinación de un instrumento no puede hacerse sólo utilizando tecnología y cálculo, es necesario recurrir al oído para que la calidad de la afinación sea óptima.

Sabemos que al comparar dos cuerdas, igualmente tensadas y con el mismo grosor, si una de ellas dos veces más larga que la otra, la cuerda más larga vibra con una octava más baja que la cuerda más corta. Sin embargo, si se empleara este principio para diseñar un piano sería imposible incluir las cuerdas de las notas graves en cualquier marco de tamaño razonable. Además, con ese gigantesco piano, las cuerdas más graves deberían hacer tal recorrido vibrando que se golpearían unas a otras. En lugar de ello, los fabricantes de pianos se aprovechan del hecho de que una cuerda gruesa vibra más lentamente que una delgada de idéntica longitud y tensión, por lo tanto, las cuerdas de un piano varían de longitud y grosor, siendo más largas y gruesas para las notas graves que para las agudas. Como medida estándar, las cuerdas de las notas agudas más altas suelen tener una décima parte del grosor de las cuerdas de las notas más graves.

Actualmente existen, básicamente, dos tipos de pianos: los de cola (que se pueden clasificar según las dimensiones de ésta) y los verticales o de pared. Independientemente del tipo, un piano estándar tiene 88 teclas que van desde el La_{-2} de 27,5 Hz hasta el Do_7 de 4186,01 Hz. Suele haber tres cuerdas de acero planas para cada nota o tecla en las cinco octavas superiores, lo que sería aproximadamente desde el Do_2 hasta el Do_7, dos cuerdas enrolladas para cada nota que va del Si_{-1} hasta el Si_2 y una cuerda enrollada o bordona para el rango de frecuencias restante.

La primera dificultad para afinar un piano surge porque al utilizar cuerdas más largas y gruesas que las de la guitarra y tener una caja de resonancia mucho mayor que ésta, los sonidos tienen más armónicos, tal y como se muestra en el gráfico de los armónicos de la figura. Y al aumentar el número de armónicos también aumenta el número de interferencias con otras notas.



Espectro de la nota más grave de la guitarra (el mi de la sexta cuerda) interpretada con una guitarra de estudio y un piano vertical Yamaha.

Para afinar un piano hay que ajustar las tensiones de las cuerdas para que los intervalos entre sus tonos sean adecuados y que a su vez se corresponda con una altura prefijada, por ejemplo el La de 440 Hz. Pero con este instrumento se hace muy patente que no es suficiente conseguir un conjunto fijo de alturas, sino que se requiere una evaluación de la interacción entre las notas, que es diferente para cada piano particular, de modo que en la práctica requiere alturas ligeramente diferentes a las empleadas en cualquier estándar teórico. Esto hace que los pianos, por lo general, se afinen en una versión modificada con el temperamento igual de 12 notas.

Por otro lado, como el sonido real de una cuerda de piano al vibrar no es sólo un tono simple, sino la superposición de varios armónicos, dos cuerdas que están cercanas a una proporción de un armónico, como una quinta justa, producirán batimientos en los tonos más altos. Una manera de afinar el piano es lograr que el número de batimientos sea adecuado, porque evitarlos completamente es imposible.

Curvas de Railsback que marcan la desviación óptima respecto del sistema temperado

O. L. Railsback diseñó una gráfica, conocida como *curva de Railsback*, que indica la desviación entre la afinación habitual de un piano y la escala de temperamento igual. Es decir, para cada nota producida en el piano, la curva señala la desviación óptima entre el tono de la nota y su tono en el temperamento igual expresada en cents. Realmente, el trabajo de Railsback iba más allá, porque expresó claramente cómo se llevaban los resultados del análisis de Fourier a la práctica. La serie armónica es perfecta cuando la función es periódica, pero en la naturaleza la periodicidad es aproximada, y en instrumentos de un gran registro, como es el caso del piano, la imprecisión se percibe perfectamente. Debido a que los defectos en la periodicidad, los armónicos del piano son más agudos de lo que deberían, por esta razón la curva de Railsback es una función creciente que tiene una pendiente menor en la parte central y más grande en los extremos.

Un método práctico de afinación del piano comienza con el ajuste de un conjunto de cuerdas en el registro medio del piano haciéndolo coincidir con las notas del sistema temperado. Una vez que estas cuerdas están ajustadas, el afinador puede continuar modificando los demás tonos comparando intervalos de octava con esa octava temperada. Esto es conveniente, porque la octava es el intervalo más fácil de afinar porque tiene la proporción más simple (2:1) y es el único intervalo en el que coinciden el sistema temperado y la serie armónica.

Yamaha Tuning Scope PT-100II empleado por los técnicos para la afinación de pianos

A partir de ahí se obtiene la afinación del resto de notas. Por ejemplo, con la ayuda de una afinador específico (como el que se muestra en la figura), una vez fijado el diapasón (por ejemplo La = 440 Hz), a partir de las dimensiones del piano se determina la curva de Railsback que vamos utilizar. Una vez determinada ésta, sabemos cuantos cents debe desviarse cada nota para que el número de batimientos sea adecuado.

Pero la afinación es algo más que Matemáticas

En la mayoría de los elementos de la música, considerar sólo los aspectos acústicos o matemáticos supondría despreciar una buena parte de su esencia, quizá la más importante. Es innegable que en el caso de la afinación ocurre lo mismo. No se puede despreciar la naturaleza artística de la música para la que la sensibilidad del músico resulta fundamental.

Como afirma Francisco Belenguer, el técnico en afinación que me asesoró en la elaboración de este trabajo, la afinación de un instrumento no puede hacerse sólo utilizando tecnología y cálculo, es necesario recurrir al oído para que la calidad de la afinación sea óptima. Pero, lo cierto es que gracias a las matemáticas y actualmente al apoyo de la electrónica, cada día se está consiguiendo que los instrumentos afinen con mayor precisión, e incluso que se recuperen formas de afinar de otras épocas que confieren a las interpretaciones una fidelidad respecto de la obra original como nunca se había dado.

Por otro lado, desde un punto de vista estrictamente práctico, gracias a la cuantificación del proceso de afinación, los técnicos pueden ahorrar muchos esfuerzos para conseguir resultados que antes habrían supuesto muchas horas de trabajo. Y al permitir modificaciones mucho más rápidas, cada vez hace más posible adaptar la afinación de los instrumentos a la sala y las condiciones de temperatura, humedad, etc. en las que va a tener lugar la audición.

Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento a D. Francisco Belenguer Rubio, técnico en afinación de la empresa CENTROMÚSICA S.A., por la ayuda prestada. Además, agradezco al Ministerio de Ciencia e Innovación por haber subvencionado parcialmente este trabajo a través del proyecto de investigación TIN2008-06872-C04-02.

MUSYMÁTICAS ■

NOTAS

1 Empleamos las notas Mi^b y Si^b (en lugar de sus equivalentes Re$^\#$ y La$^\#$), porque ésta es la manera habitual de hacerlo en los tratados de musicología. La razón es que hay sistemas de afinación en los que Mi^b=Re$^\#$ y Si^b=La$^\#$. Para estos sistemas tiene sentido marcar la diferencia, pero en el sistema que presentamos no existe distinción alguna.

2 El registro audible o campo auditivo de un oído normal se sitúa entre 20 y 16.000 Hz., aproximadamente.

3 Cuando se solapan ondas sencillas como éstas, basta utilizar igualdades trigonométricas para comprobar que el sonido resultante es

$$\mathrm{sen}(2\pi f_1 t)+\mathrm{sen}(2\pi f_2 t)=2\cos\left(2\pi\left(\frac{f_1-f_2}{2}\right)t\right)\mathrm{sen}\left(2\pi\left(\frac{f_1+f_2}{2}\right)t\right)$$

Si $|f_1-f_2|$ es menor de 20 Hz, no está en el registro audible y en este caso se trata de una onda de frecuencia la media de f_1 y f_2 modulada en su amplitud por otra de frecuencia la media de la diferencia entre ellas, y ésta última es la que produce el batimiento.

4 La longitud exacta para el semitono temperado es $\sqrt[12]{2}\approx 1{,}059463$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Fauvel, J., Flood, R., Wilson, R. (2003). *Music and Mathematics. From Pythagoras to Fractals*. Nueva York: Oxford University Press Inc.

Goldáraz Gaínza, J. J. (2004). *Afinación y temperamentos históricos*. Madrid: Alianza Editorial.

Liern, V. (2008). La Música y el número siete. Historia de una relación controvertida. *Suma*, 58, 85– 88.

Liern, V. (2009). Las matemáticas de los músicos, *Suma*, 60, 129–134.

Randel, D. (1999). *Diccionario Harvard de música*. Madrid: Alianza Editorial.

Piles Estellés, J. (1982). *Intervalos y gamas*. Valencia: Ed. Piles.

Internet

http://es.wikipedia.org/wiki/Acústica_del_piano
http://es.wikipedia.org/wiki/Afinación_del_piano
http://es.wikipedia.org/wiki/Batimiento

Este artículo fue solicitado por *Suma* en junio de 2010 y fue aceptado en septiembre de 2010 para su publicación.

suma+ 65
Noviembre 2010, pp. 105-110

De todo un poco

Este artículo recoge diversos hechos de los últimos meses donde confluyen Cine y Matemáticas en una crónica de "actualidad diferida".

Jaime Escalante

José María Sorando Muzás
IES Elaios, Zaragoza
decine@revistasuma.es

Murió Jaime Escalante

El 30 de marzo de 2010 falleció en Roseville (EE.UU.) a los 79 años Jaime Escalante, "el boliviano que enseñó a amar las Matemáticas" (titular de *La Razón* – La Paz). En su funeral recibió el emocionado y multitudinario homenaje de exalumnos, familias y autoridades de la comunidad hispana de California. El féretro fue colocado en un aula de la *Garfield High School* de Los Ángeles, escenario de su entrega a la docencia. En la pizarra podía leerse una de las frases con que este carismático profesor conseguía derribar las barreras psicológicas de los estudiantes: "No hay que hacer el Cálculo fácil, ya es fácil".

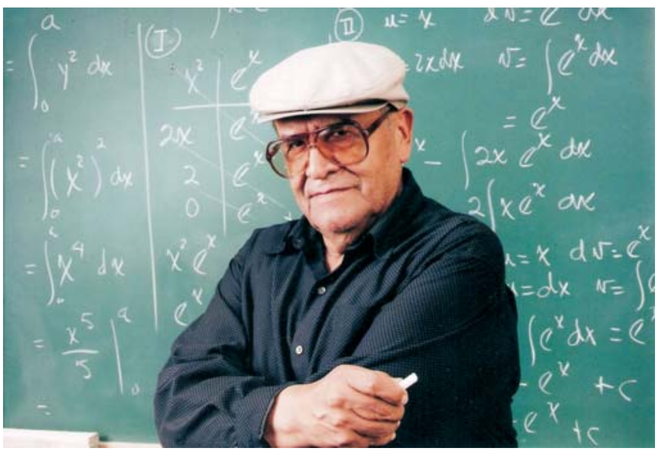
¿Cómo un profesor de secundaria pudo llegar a convertirse en un icono de la superación a través de la educación para las minorías? Su historia tuvo repercusión mundial gracias al libro *The Best Teacher in America* (Jay Matthews 1988), pero sobre todo a la película *Stand and Deliver* (Ramón Menéndez 1988), titulada en España como *Lecciones inolvidables*[1].

La película comienza con un recorrido de la cámara sobre el canalizado río Los Ángeles, bien conocido por los cinéfilos[2], que divide la ciudad en dos. El río actúa como metáfora visual de la exclusión: de un lado, el Down Town, la ciudad del éxito, el dominio de los WASP[3]; del otro, el barrio del Este donde habitan los emigrantes chicanos.

El personaje de Escalante está interpretado por James Edward Olmos, papel por el que obtuvo la nominación al Óscar. El actor acompañó al profesor en sus últimos días y fue el orador del oficio fúnebre, donde dijo: "Jaime sacrificó a su propia familia para darse a la familia de la sociedad entera". Hoy, un gran mural que cubre una fachada representa juntos al actor y al profesor para siempre identificados y reconocidos con orgullo por aquella barriada angelina, donde Escalante inculcó que "el día que alguien abandona la escuela está condenándose a si mismo a un futuro de pobreza".

Se condensan en un solo curso hechos acaecidos a lo largo de ocho años, pero por lo demás el guión es fiel a la realidad. Jaime, *Kimo* para sus estudiantes, había llegado para impartir clases de Informática pero no había ordenadores y se dedicó a las Matemáticas. Encontró un ambiente deprimido y victimista: un centro en riesgo de perder la homologación, con profesores poco cualificados y alumnos sin confianza en sus posibilidades, bajo la violencia de las pandillas. A los primeros les trasmitió un claro mensaje: "Hacen falta ganas". A los segundos, los estimuló con múltiples recursos, con técnicas poco ortodoxas que mantenían despierta su atención. Apeló a su autoestima como grupo ("Ustedes llevan las Matemáticas en la sangre. Los mayas usaban el cero cuando aún no era conocido en Europa"); pero, ante todo, a la posibilidad de cambiar un futuro que parecía estar ya escrito para ellos ("¿No desearías diseñar autos en vez de repararlos?").

Escalante les propuso en 1982 el objetivo de superar el Examen de Cálculo Superior que permitía el acceso universitario, algo nunca soñado en aquel barrio: "Hay personas que asumen que ustedes saben menos de lo que pueden hacer debido a su apellido y al color de su piel, pero las Matemáticas son el gran nivelador". 18 estudiantes aceptaron el reto y siguieron clases extras, incluso en vacaciones y sábados. En la película se les ve resolviendo integrales por partes. Todos consiguieron el objetivo, aunque debieron enfrentarse a las sospechas de haber hecho trampas por parte de un sistema que recelaba de ellos, repitiendo el examen. Pero la motivación infundida por Kimo les había despertado una voluntad inquebrantable: "Ustedes son los verdaderos soñadores. Mañana probarán que son los campeones".



En los cursos siguientes creció el número de alumnos que superaron las exigentes pruebas y la experiencia de Garfield se convirtió en un referente nacional. Dos indicadores dispares pero expresivos de esa repercusión: el profesor Escalante apareció en un episodio de *Los Simpson* y la Unión Astronómica Internacional dio en 1993 su nombre al asteroide 5095.

El presidente Obama envió sus condolencias al funeral con estas palabras: "Durante toda su carrera, Jaime abrió las puertas del éxito y la enseñanza superior a cada uno de sus estudiantes, y demostró que la procedencia de una persona no determina cuán lejos puede ir. Él representó a un sin número de valientes maestros en todo el país, cuyas grandes obras las conocen únicamente los jóvenes cuyas vidas cambiaron". Aunque la dura realidad diaria en las clases pueda parecernos alejada de esa trascendencia, es bueno por ello recordar que es posible, con testimonios como el de Jeannie Moreno, exalumna de Jaime Escalante, hoy con 41 años: "Desde siempre supe que sería abogada y no me interesaban las Matemáticas; pero era tan bueno que hacía que aprendiera hasta el que no tenía ganas. Me dio una confianza interior que me acompaña desde entonces. A veces estoy a punto de entrar a la corte y me parece escucharlo detrás de mí: *tú puedes, inténtalo*. Era su frase y me la sigo repitiendo siempre".

La película está descatalogada en España desde hace años y es inencontrable en comercios. Nunca se llegó a editar en DVD. Sin embargo, al calor del creciente interés por lo relativo al Cine y las Matemáticas, es citada con frecuencia. Es por ello una buena noticia saber que podemos verla online en el canal de videos Vimeo, en versión original subtitulada en México bajo el título *Con ganas de triunfar*. El mejor homenaje a este profesor será conocer su compromiso, a través del film. Enlace[4]: http://www.vimeo.com/7011035

Alicia sin Matemáticas

El 16 de abril llegó a los cines *Alicia en el País de las Maravillas* en la versión de Tim Burton, uno de los estrenos más esperados de la temporada. La película se basa en la obra homónima publicada en 1865 por el diácono anglicano y matemático Charles Lutwidge Dogson (1832 – 1892), bajo el seudónimo de Lewis Carroll, y en su continuación, *A través del espejo y lo que Alicia encontró al otro lado* (1871), mezclando pasajes y personajes de ambas.

Alicia es una de las obras no matemáticas más citadas en textos matemáticos, debido a su complejidad lógica, repleta de paradojas, enigmas, quebrantos de la norma de univocidad en la definición, inversiones de premisas o reducciones al absurdo implícitas, que le sitúan entre los precursores de la Literatura del Absurdo[5]. Así que el aparente cuento para entretener a unas niñas (las tres hermanas Charlotte, Alice y Edith Lidell) en un paseo estival en barca pronto ofrece niveles de lectura que son un reto para adultos. Por ese motivo, cabe decir que la primera versión cinematográfica en dibujos animados de Walt Disney (1951), edulcorada e infantil, pervertía el sentido de la obra. Esta nueva versión también proviene de la factoría Disney pero, siendo su artífice Tim Burton, su estilo es más delirante y rompedor.

La puesta en escena es de una brillantez envolvente, potenciada por la tecnología 3D. El espectador cae con Alicia por el pozo de la madriguera a un mundo fantástico y barroco, donde no tendrá un momento de respiro, del que sólo se podrá distanciar cuando se enciendan las luces de la sala. Pero la historia que ha presenciado carece de aquella inquietante subversión lógica de la obra de Carroll. Burton le ha añadido un sentido emancipador, donde el sueño de Alicia es la escapada de una muchacha predestinada a un matrimonio de conveniencia en la rígida sociedad victoriana; un sentido que explica y tranquiliza. Si en los 50 *Alicia* fue adaptada para los niños ahora lo ha sido para los padres.

Además, se ha sobredimensionado la presencia del poema *The Jabberwocky* (*El Galimatazo*, en la traducción de Jaime de Ojeda), brillante ejercicio literario donde a partir de palabras sin significado se logra una expresividad y un sentido, parodiando una balada medieval. El Galimatazo, un fiero dragón, pasa a ser el rival temible de la lucha final donde Alicia como heroína (con una estética entre Juana de Arco y San Jorge) sale victoriosa, dando ocasión a una espectacular batalla, bien ajena al relato de Carroll, al estilo de las exitosas sagas fantásticas como *El Señor de los Anillos.*

Esta Alicia es comprensible, fascinante y espectacular. Pero, ¿qué queda de su trasfondo lógico matemático?... bien poco. Guiados por la voluntad de localizar tales elementos, encontramos semejanzas (lo grande y lo pequeño), operaciones inversas (comidas aumentapastel y menguativa), una situación no conmutativa ("perdonar y olvidar" frente a "olvidar y perdonar"), simetrías y oposiciones (las reinas roja y blanca, las gemelas cotillas, los gemelos Tweedledee y Tweedledum –en la traducción española, Tararí y Tarará–). Pero los juegos lógicos y numéricos están ausentes. En particular, faltan los dos pasajes más citados por los matemáticos. Por una parte, el diálogo con el Gato de Chesire:

> –¿Me podrías indicar, por favor, hacia dónde tengo que ir desde aquí?
>
> –Eso depende de a dónde quieras llegar–, contestó el Gato.
>
> –A mi no me importa demasiado a dónde…– empezó a explicar Alicia.
>
> –En ese caso, da igual hacia dónde vayas…– interrumpió el Gato.
>
> –…siempre que llegue a alguna parte–, terminó Alicia a modo de explicación.
>
> –¡Oh! Siempre llegarás a alguna parte–, dijo el Gato. –Si caminas lo bastante.–

Este famoso diálogo ejemplifica la esencia del método hipotético deductivo, donde la elección de unos axiomas (la dirección) y la posterior aplicación de la Lógica (el caminar) garantizan la construcción de una teoría (llegar a alguna parte), aunque –ahí está el punto inquietante– se haga sin finalidad.

Y tampoco encontramos en el film las particulares cuentas de Alicia al sospechar que ha olvidado cuanto sabía:

> –Cuatro por cinco son doce, cuatro por seis son trece y cuatro por siete… ¡Ay Dios mío! ¡Así no llegaré nunca a veinte!–

Esos desconcertantes resultados son correctos en bases no decimales: $4 \times 5 = 12$, en base 18; $4 \times 6 = 13$, en base 21. Podría seguir así: $4 \times 7 = 14$, en base 24; $4 \times 8 = 15$, en base 27; $4 \times 9 = 16$, en base 30; $4 \times 10 = 17$, en base 33; $4 \times 11 = 18$, en base 36; $4 \times 12 = 19$, en base 39; y $4 \times 13 = 20$, en base 26. La exclamación de Alicia se explica porque en el contexto británico se aprendían las tablas hasta el 12.[6]

En definitiva, esta *Alicia* es un gran espectáculo, pero no matemático.

Despedida de Numbers

El pasado 12 de mayo, La Sexta emitió *Causa y efecto*, episodio final de la 6ª temporada de *Numbers* y a la vez, si la CBS no rectifica, despedida de la serie. Esta temporada ya fue reducida de 22 a 16 capítulos, de modo que parece ser un adiós definitivo.

Como es obligado en una producción de Hollywood, la historia termina en boda. Charlie Eppes y Amita Ramanujan se casan, oficiando la ceremonia su amigo el físico Larry Fleinhardt como “ministro de la Iglesia Universal de la Vida”. Los recién casados se trasladarán a Gran Bretaña. Han aceptado una oferta como profesores invitados en la Universidad de Cambridge. “Por fin voy a vivir en un país con Sanidad Pública”, dice Charlie.

La homilía de Larry, como cabía esperar, es una disertación sobre el Amor desde la Física. En plena boda, Don, el hermano policía, recibe una llamada que va a desatar un nuevo caso que resolver. Pese a la inminencia de su viaje, Charlie se aplica hasta el último momento en su lucha matemática contra el crimen. Rastrea en las redes sociales de Internet senderos que conectan a los sospechosos, citando la conocida *Teoría de los seis grados de separación*[7] y usando *filtros bayesianos de spam.* Culmina el caso antes de tomar el avión y conocer que también Don se va a casar.

“Todo cambia, todo sigue igual”, son las últimas palabras de esta serie singular. Aunque con ella algo ha cambiado. Frente a la aparición esporádica en la gran pantalla de matemáticos trastornados, con vidas personales poco envidiables (recordemos, entre otras, *La verdad oculta, Una mente maravillosa* o *Pi. Fé en el caos*), gracias a *Numbers*, ya hay en el imaginario colectivo un potente contrapeso. Tras seis temporadas en la pequeña pantalla, Charlie Eppes es el matemático más famoso de la ficción y éste sí ha ofrecido un modelo que admirar, uniendo el talento, el éxito y el compromiso ético. Confiamos que, como pasa con otras series, *Numbers* tenga redifusiones en el abanico de canales de la TDT.

Cortometrajes

En el cortometraje debutan y cogen oficio los directores noveles, pero también consiguen rodar los menos conocidos por el gran público. En este formato unos y otros pueden reducir las dificultades de financiación. Pero hace ya muchos años que no se proyectan cortos en las salas comerciales y su difusión estaba reducida a festivales y filmotecas. Internet les ha dado nueva vida. A diferencia de los largometrajes, cuyo acceso en la red se produce contra la voluntad de sus productores, es cada vez más frecuente que sean éstos quienes ofrezcan libremente los cortos en sus webs o en portales genéricos de videos.

Al estar menos constreñido por las razones comerciales, el corto es más proclive a la “obra de autor”. En los últimos meses dos cortometrajes españoles encierran sorpresas matemáticas y se anuncia un estreno.

Nature by numbers (3:44) del artista digital Cristóbal Vila (2010) se puede ver a través de la web del autor (http://www.etereaestudios.com/index.htm), donde se nos redirige a Youtube o Vimeo (mayor calidad de imagen). Entre ambos portales, supera ampliamente el millón de visitas que dan fe de su éxito internacional.

Con un acertadísimo fondo musical de Wim Mertens (*Often a Bird*) asistimos a una sucesión de esplendorosas imágenes realizadas por ordenador. Por tres veces se plasma el paso de conceptos matemáticos y trazados geométricos al diseño de seres vivos: la concha del Nautilus, los girasoles y las alas de una libélula. Dice el autor:

El arte y la arquitectura han hecho uso desde antiguo de muchas propiedades de la geometría y las matemáticas: basta observar la refinada aplicación de las proporciones que llevaban a cabo los arquitectos del Antiguo Egipto, Grecia y Roma o los artistas del Renacimiento, como Miguel Ángel, Da Vinci o Rafael. Pero lo que para mi resulta más sorprendente es que muchas de esas propiedades y desarrollos matemáticos pueden hallarse en la Naturaleza. Existen infinidad de casos, pero en esta animación he querido detenerme sólo en tres de ellos: la Serie y Espiral de Fibonacci/ La Proporción y el Ángulo Áureos/ Las Triangulaciones de Delaunay y Teselaciones de Voronoi.

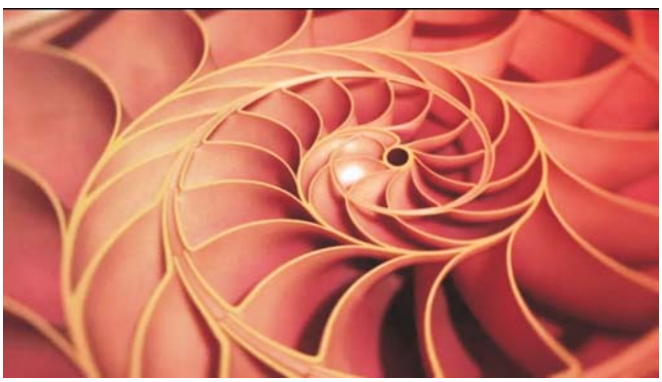
Puedo decir que mis alumnos de 1º ESO lo han visto con interés. Aproveché su brillantez visual para dar entrada a la Geometría y asentar la idea de que está presente en la Naturaleza, sin más profundización. Pero también en Bachillerato es aprovechable, en ese nivel analizando ya la base matemática de la obra, que además viene detallada por el autor en una sección de su web.

Otras obras de Cristóbal Vila de contenidos matemáticos, también recomendables y accesibles en la misma web: *Snakes* (2003), basado en el célebre grabado de serpientes de M.C. Escher (1969), que fue el último del artista, con alusión al modelo de Geometría Hiperbólica de Poincaré[8]; e *Isfahan* (2005), recreación de arte islámico basada en varios templos de la ciudad iraní de ese nombre, con un delicado trabajo de estrellas, simetrías y teselados.

Cambiar la gráfica (3:00) es obra de Carlos Fierro y Genoveva Navarro (2009), miembros de Producciones Colargol, que también ofrecen sus cortos en la red (http://www.produccionescolargol.com/bajate.htm). No es una película para el aula, sino para la sonrisa adulta.

En una pareja, la chica está obsesionada por la frecuencia de sus relaciones sexuales que estudia estadísticamente, haciendo previsiones de futuro mediante regresión lineal. Los resultados son desesperanzadores. Hay que cambiar la tendencia de la gráfica, concluye. Finalmente supera esa obsesión pero su mente numérica no va a parar ahí…

De la misma productora también podéis ver *Matemáticas* (2002), donde una pareja, de nuevo en la cama, conversa y yerra sobre el infinito (“Los números naturales son más infinitos que los números pares” llega a decir el protagonista), pese a lo cual fue premiado en un certamen universitario.



Y dos avances: en la sección de cortos del 43 Festival Internacional de Cine Fantástico Sitges 2010, del 7 al 17 de octubre, concursó un corto matemático titulado *Ritos de Amor y Matemáticas* (*Rites of Love and Math*. Francia y EE.UU. 2009) de 26 minutos, producido con apoyo de la Fondation Sciencies Mathématiques de París. Es obra de Reine Graves y Edward Frenkel, este último profesor de Matemáticas en la Universidad de Berkeley en California. Se trata de un homenaje al creador japonés Yukio Mishima, donde con un sentido existencial y filosófico confluyen el erotismo, las Matemáticas y la muerte. Además, para noviembre de 2010 está previsto el estreno de un cortometraje ambicioso de 39 minutos, duración que fuerza el concepto de "corto", rodado en Palencia: *Logaritmo neperiano* de Abbé Nozal.

Cine en el blog de aula

El blog de aula es una opción de uso educativo de Internet que está teniendo un seguimiento creciente, debido a las ventajas que ofrece. Fundamentalmente, permite extender la enseñanza y el aprendizaje más allá del espacio y el tiempo del aula y la clase. Pero hay más:

- Gracias a su estructura de diario, el profesor puede secuenciar y dosificar los recursos y las actividades siguiendo el día a día de la clase.
- Permite la participación de los alumnos, sea mediante comentarios a las entradas publicadas por el profesor o publicando entradas propias; en ambos casos, como medida de seguridad, es aconsejable que sea necesaria la aprobación del profesor-moderador, antes de cualquier publicación.
- Su alojamiento es gratuito en las plataformas de blogs más populares (Blogger, Wordpress, etc).
- La tarea informática es mínima, pues la estructura está prefijada y el formato puede ser elegido entre varios que se ofrecen, de modo que el trabajo del profesor se centra en lo que le es más propio: la pedagogía y la didáctica.
- Permite la publicación e inserción de textos, fotos, videos, presentaciones, formularios y applets, con el apoyo de servicios y redes como Google Docs, Youtube, webs Geogebra, etc.

En resumen, frente a las webs tradicionales, los blogs de aula ofrecen frescura, vivacidad, participación, economía, sencillez y flexibilidad. Pero, hay que decirlo todo, es al precio de que nuestro control no sea absoluto: no hay copia en nuestro ordenador, residen en un servicio externo al que subimos contenidos, en la confianza de su fiabilidad.

También en Matemáticas se han multiplicado los blogs de aula[9], con diversos estilos, sobre todo según los diferentes grados de participación de profesores y alumnos. En ellos ha encontrado un nuevo medio de desarrollo la propuesta de uso didáctico del Cine. Las escenas alojadas en los portales de videos más populares casi siempre pueden ser insertadas en los blogs (salvo que tengan esa opción deshabilitada). Bajo su ventana de visualización aparece la palabra "insertar" (o "embed") y un código. Basta copiarlo y pegarlo en el destino elegido del blog, en el modo de edición HTML. Podremos modificar a voluntad el tamaño en que será mostrado (parámetros "heigth" y "width"), cuidando de conservar la relación largo-ancho del origen.

De esa forma, los alumnos pueden volver a ver en su casa los videos trabajados en el aula. Pero también así se les puede ofrecer fuera de la clase lo que no fue posible dentro de ella. Para explicar esto mejor, debo hacerlo en primera persona. El pasado curso, en 1º ESO, tuve algunos alumnos que recibían con pitorreo el hecho de que el profesor utilizase metodologías y recursos poco tradicionales. Creían que "no iban para examen" y se podían "tomar a cachondeo". Desde el principio les transmití de palabra y con hechos que lo importante no tiene por qué ser aburrido y que algo sea divertido no significa que sea banal. Pero ese grado de conocimiento todavía estaba lejos de su alcance, de modo que llevar el cine a clase suponía un revuelo contraproducente. Sin embargo, una mayoría de alumnos lo deseaban, lo aceptaban con formalidad y lo agradecían. ¿Qué hacer? ¿Expulsar a aquellos alumnos o expulsar al cine de clase? Hice lo primero sólo cuando no quedó más remedio y dentro de las limitaciones normativas; evité lo segundo varias veces gracias al blog de aula. Cuando, según mi "olfato", era lo más aconsejable, algunas escenas fueron presentadas directamente en el blog, sin pasar por la clase. Al día siguiente las comentábamos en grupo, constatando que una gran mayoría de los alumnos las habían visto. Otro tanto sucedió cuando la corta duración o interés anecdótico de la escena y los inconvenientes de preparación del material de proyección estaban desequilibrados.

A modo de intento mejorable, ofrezco mi primer blog de aula, iniciado en febrero de 2010, donde accediendo en el listado lateral al tema "cine" se encuentran las escenas usadas en clase de 1º ESO tal y como se ha descrito:
http://mateselaios1.blogspot.com

CineMATeca ■

NOTAS

1 Ya hablábamos de esta película en Cinemateca: *Matemáticas e Historia* (SUMA 49, página 117. Junio 2005).

2 Ha sido escenario, por ejemplo, en: *La humanidad en peligro, El trueno azul, Terminator 2: el juicio final, Grease, Volcano, A quemarropa*, etc.

3 WASP: acrónimo inglés para "Blanco, Anglo-Sajón y Protestante" (White, Anglo-Saxon and Protestant).

4 Enlace alternativo para el caso de que el citado se rompiese:

http://catedu.es/matematicas_mundo/CINE/cine_Lecciones.htm

5 Según algunos autores, Carroll, contemporáneo de George Boole (1815 – 1864), pretendía hacer crítica de las nacientes tendencias logicista y formalista que en su opinión llevarían al divorcio entre las Matemáticas y el sentido común.

6 Siguiendo la propuesta de Jordi Quintana Albalat en *Las Matemáticas de Alicia y Gulliver*, lo grande y lo pequeño. Cuaderno del Día Escolar de las Matemáticas 2002. FESPM.

7 Hay una película titulada *Seis grados de separación* (Fred Schepisi. 1993). En una escena se enuncia la teoría según la cual siempre hay una cadena, de a lo sumo 6 personas, que relaciona a dos individuos cualesquiera sobre la Tierra; lo cual se basa en el crecimiento exponencial de la red de contactos. En 2009 Microsoft lo comprobó con los usuarios de Messenger rastreando sus conversaciones: cualquier par de ellos está interconectado por 6,6 eslabones de media. Pero en la película mencionada no hay atisbo matemático alguno y esa cita, pese a darle título, es completamente prescindible en el guión. Es otro caso de esnobismo científico guiado por el marketing.

8 Escher había conocido en un libro de Coxeter ese modelo, en el que es posible representar una superficie infinita dentro de un círculo finito. Descubrió en él posibilidades de aproximación al infinito que desarrolló en la serie de grabados *Límite circular I, II y III*.

9 Buenos ejemplos de blogs de aula de Matemáticas en Secundaria (curso 2009-2010):

Día a día con las Matemáticas: http://catedu.es/arablogs/blog.php?id_blog=434 - Ricardo Alonso – 4º ESO - IES Salvador Victoria. Monreal del Campo (Teruel).

Matemáticas a nuestro lado: http://evamate.blogspot.com - Eva María Perdiguero – 2º ESO – IES Ribera del Bullaque. Porzuna (Ciudad Real).

Blogs en Primaria (Matematicas y otras áreas):

El Rincón de Herodes: http://irati.pnte.cfnavarra.es/multiblog/jrodrig3 - Jesús Rodríguez – CEIP José Luis Arrese. Corella (Navarra). Obtuvo el Premio Especial Santillana 2010 de Experiencias Educativas.

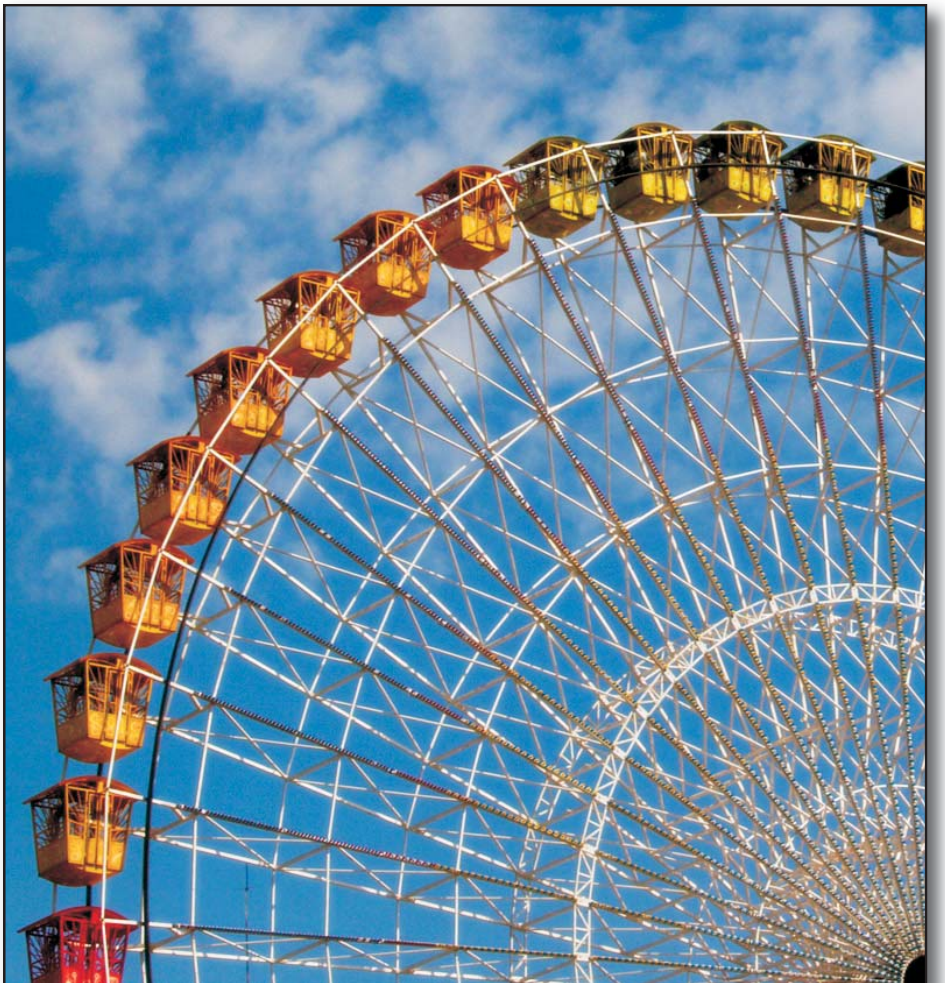
Chamario: http://mangeles7.blogspot.com - María Ángeles Esteban – CEIP Josefa Amar y Borbón. Zaragoza.

Este artículo fue solicitado por *Suma* en junio de 2010 y aceptado en septiembre de 2010 para su publicación.

suma+ 65
Noviembre 2010, pp.111-118

La rueda de la fortuna

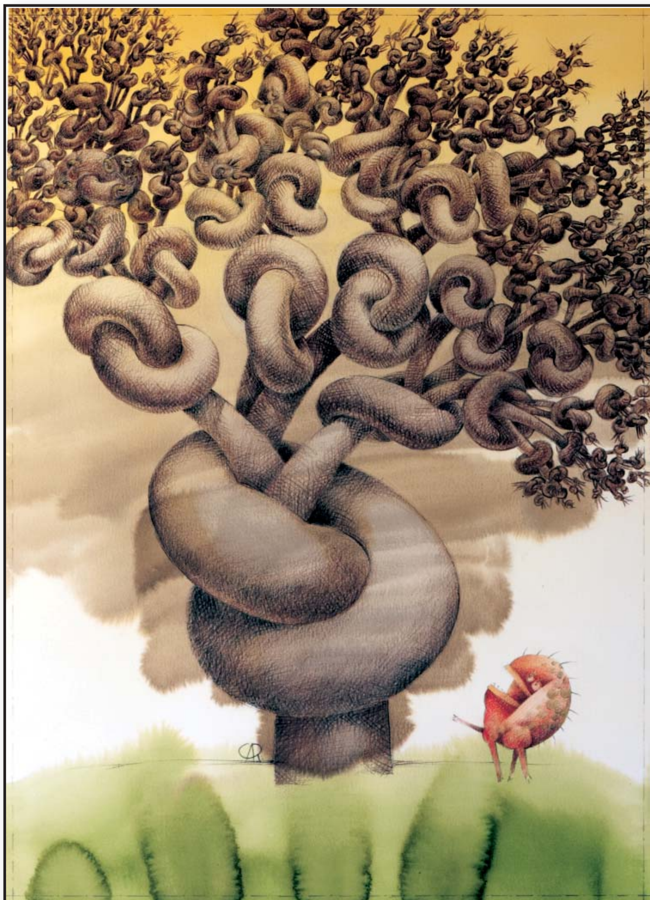
A Eliseo Borrás in memoriam



Supiste jugar tu partida, disfrutar como un niño, reir sin límite
Foto: Alejandro Ruiz

Hoy me he levantado triste, pero tu recuerdo me ha conducido a la orilla de la playa, donde dábamos vueltas en el kayak, cual noria horizontal, por delante del viejo faro. Y donde arribé a tierra, por la mañana, con tal suavidad inesperada que esa misma tarde, el exceso de confianza y el rompeolas, nos dieron un buen revolcón a mí y a la piragua. Hoy la mar estaba algo agitada, he jugado con las olas, he recordado los buenos ratos pasados buscando un algoritmo fractal para la espuma. He recordado a Alfonsina Storni. Amparo la está ilustrando. Hoy la llamaré.

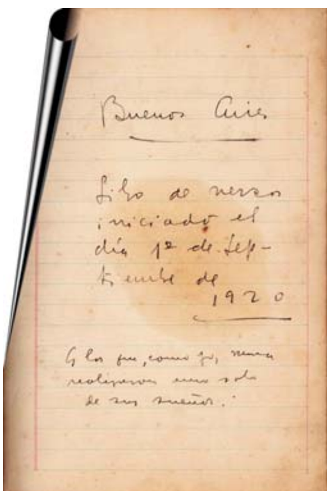
Xaro Nomdedeu Moreno
Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi"
ariadna@revistasuma.es



Un paseo por el infinito. Ilustración: Javier Carvajal

A ti te llamamos todos, somos ese desamparado piojo que te necesita para deshacer tanto nudo, tanto problema, cada vez más sofisticado, más especializado, tanto que en cada rama del infinito, se sabe casi todo de casi nada. ¡Qué bien lo has ilustrado, Javier!

Alfonsina no pudo satisfacer ni uno sólo de sus sueños



Alfonsina Storni

Tú los cumpliste casi todos y fuiste la llave de la fortuna para muchos de los nuestros.

Tiké, dios fortuna, llave en el Templo de Adriano en Éfeso.
Fotografía: Soldbaken

No queremos estar tristes, tú nos habrías amonestado jocosamente con un “no seáis carcas”, queremos jugar contigo de nuevo.

¡Oh Fortuna!,
de condición variable,
como la luna
dice al comienzo
el Carmina Burana
Nuestra fue la fortuna,
pues Eliseo nos dió:
¡sus estelas en la mar!
Qué gran suerte la nuestra
conocerle,
disfrutar de su amistad,
trabajar con él,
aprender siempre y
reir, reir, reir,
reir permanentemente
era inevitable.
Su luminosa sonrisa contagiaba,
su optimismo arrastraba,
su generosidad abrumaba.
Siempre será nuestro espejo
en el que buscar esa chispa,
ese instante mágico,
que nos hacía más humanos,
más felices.
Su maravillosa luz nos acompañará siempre

Sí le quedaron sueños por realizar: una jubilación larga y placentera junto a Patro, jugar con Carlota y Mar, que estaba en camino, disfrutar un poco más de sus hijos y ver recogidos, ordenados y publicados unos materiales que han sido olvidados antes de que dieran el generoso fruto que anunciaban.

Humildemente intentaremos remediar, en la medida de nuestras fuerzas y de la colaboración que encontremos, éste último sueño suyo, ya antiguo.

Luego, cada cual dirigió esa mirada a rincones diferentes de la realidad: la cotidiana, la social, la natural… Eliseo, uno de los centros de gravedad del Grupo Cero, siguió impertérrito poniendo todas las herramientas al servicio del juego, que es la realidad más próxima a niños y niñas, así como adolescentes de todo tipo. Juego simulador de otras realidades y facilitador de aprendizajes más abstractos, prácticamente imposibles sin aproximaciones más amables. Aquella revolución tuvo un lugar y un detonante, también todos los grupos convienen en ello.

Última fotografia de Eliseo con Carlota
Fotografía: Pilar Moreno

Basta leer el reciente monográfico de la revista UNO de GRAÓ, para comprender que Eliseo era un engranaje esencial de la rueda en la que gira todo intento de renovación pedagógica en el campo de las matemáticas en nuestro país.

Los grupos y sociedades de toda España mencionan al Grupo Cero de Valencia como el catalizador, si no el iniciador de aquella revolución dichosa que nos abrió los ojos a un hacer en la clase de matemáticas desde otra mirada.

El lugar *L' Escola d'Estiu* organizada por el colectivo Rosa Sensat

El detonante un artículo manifiesto, escrito en 1975, firmado por quienes componían el grupo entonces, destinado a inducir la reflexión sobre la necesidad de cambio en las aulas de matemáticas.

Dada la dificultad de encontrarlo transcribimos aquí algunos párrafos, por su importancia histórica y por su rabiosa actualidad.

- *Tanto los profesores como los estudiantes sufrimos la contradicción existente entre las matemáticas como centro de interés científico y las matemáticas como instrumento de selección social.*
- *No se trata de dar a conocer una colección de teoremas más o menos ingeniosos, ni de "enseñar a pensar" o "desarrollar la claridad del espíritu y el rigor del juicio", sino:*
  - *–Dar una información específica real y no ficticia sobre el mundo y la sociedad en la que el estudiante y el profesor viven.*
  - *–Elaborar un modelo matemático para entender esa realidad.*
  - *–Utilizar el modelo para actuar y buscar soluciones que los alumnos puedan colectivamente dar a conocer a su medio.*
- *El proyecto idealista típico es reducir las matemáticas a un texto riguroso, sus reglas a las de un lenguaje. El proyecto materialista es tratar de determinar lo que las matemáticas hacen conocer y cómo lo hacen conocer. (Raymond: "Le passage au materialisme").*
- *La enseñanza actual es, en las aulas tradicionales, una enseñanza de clase destinada a reproducir la división social.*
- *El papel receptivo que generalmente el profesor asigna al alumno, en dicho modelo de enseñanza, genera inevitablemente aburrimiento, "forma suprema de represión intelectual".*
- *La construcción científica de un fragmento dado de conocimiento matemático, no puede y no debe ser totalmente identificada con su construcción pedagógica.*
- *Hay un permanente peligro de hacer creer al estudiante que sólo las demostraciones plenamente rigurosas de las matemáticas son racionales; y que fuera de las matemáticas no hay racionalidad: que no hay opciones racionales en la gestión de una empresa, o en la adhesión a un partido político, o en la decisión de socializar la medicina, por ejemplo.*
- *Para nosotros es un hecho cotidiano, y para los rectores de la enseñanza una consigna, la gran presión existente para enseñar más matemáticas a los estudiantes, a una edad cada vez más temprana, debido al rápido crecimiento de las aplicaciones de las matemáticas.*
- *Los profesores de matemáticas somos, en general, en este país, aliados objetivos de la clase dominante*[1].

Como es natural, esta criba que suponen las matemáticas, afecta más a las clases desfavorecidas y es buen caldo de cultivo del anumerísmo que abona las creencias pseudocientíficas, tan en boga, tan mediáticas.

El documento expresaba no sólo la crítica al sistema educativo que intentaba una reforma pero andaba bastante despistado, sino también una rigurosa crítica a la autocomplacencia que en el profesorado había producido el período llamado "de la enseñanza de las Matemáticas Modernas", que no de la enseñanza moderna de las Matemáticas. Éste último era el objetivo que afloraba en el manifiesto.

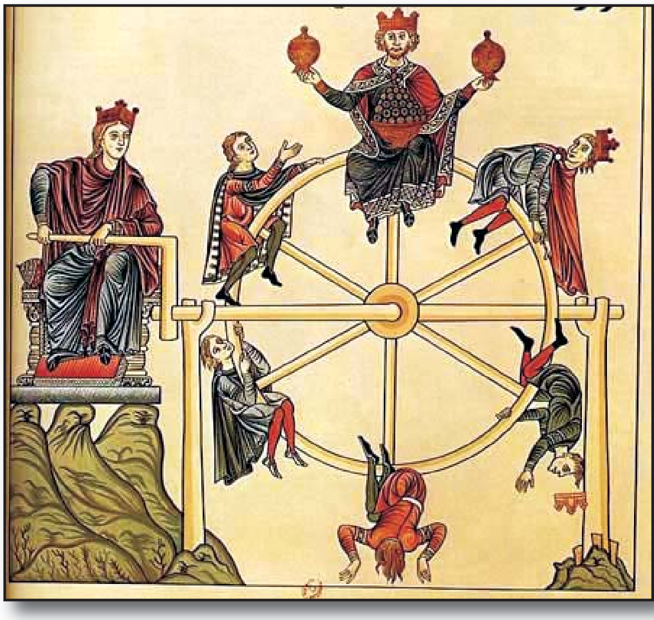
El proyecto que surgió de aquel deseo de cambio, ha quedado archivado sin alcanzar la fase de ejecución, los "fracasos" escolares detectados por "entes" internacionales descansan sobre esa ausencia, no sobre su realización, que todavía espera.

En el reciente monográfico de la revista UNO, escribe Eliseo su último artículo y manifiesta la pena que siente por ese proyecto silenciado, a la vez que utilizado como arma arrojadiza por quienes medran en las obscuras aguas del inmovilismo.

Él que, como un Sócrates redivivo, cual noria colosal, facilitaba el ascenso ligero, desde las aguas profundas de la ignorancia.

No importaba que se tratara de las aguas geométricas, o de las funcionales, muchas veces estadísticas. La suerte y los juegos de azar hicieron sus delicias y las nuestras. Su destreza fue excelente con las nuevas tecnologías, que utilizó bien temprano y de ellas anunció vicios y virtudes.

Fotografía: Herald de Lansberg



Ascenso, triunfo, decadencia, pérdida y vuelta a rodar.
Imaginamos tus carcajadas ante la trascendencia de la ilustración
y las cómicas posturas de sus personajes
Frederik Questier and Yanna Van Wesemael

Eliseo y su rueda de la vida

Eliseo Borrás Veses nació en Castellón, donde vivió su infancia y adolescencia. Estudió primaria y bachillerato en esta ciudad, hizo el curso selectivo de ciencias en Valencia y luego marchó a Madrid, a estudiar Física con Ramón Lapiedra, que luego ha sido Rector de la Universitat de Valencia. Acabada la licenciatura en Madrid, en 1963, ambos marcharon a Paris a ampliar sus estudios de Física Teórica. Allí se encontraron con Antonio Montes, actualmente profesor de Matemáticas en la Universidad Politécnica de Cataluña. La amistad con ellos ha durado toda la vida, y para ellos Eliseo ha sido siempre el punto de apoyo y pilar fundamental en sus vidas. Ambos coinciden en reconocer que Eliseo era un alumno brillante además de la persona más maravillosa que se puede imaginar.

En Le Hall Aux Vins, actual Jussieux, obtuvieron el Diploma d'Études Approfondies en Física Teórica Atómica y Nuclear que les habilitaba para realizar el doctorado.

En el 65 marcharon a Orsay, con becas del Gobierno de España y del Gobierno francés, éstas últimas facilitadas por el Instituto Francés, a través del señor Colin, agregado cultural de la Embajada de España en París, y, que puso a Eliseo en contacto con su director de tesis, el profesor Lurçat y con muchos otros físicos y matemáticos como Louis Michel, director del IHES de Bûres sur Yvette.

Eliseo comenzó sus trabajos de investigación sobre Mecánica Cuántica, en concreto sobre el *spin nuclear*, tema de su tesis doctoral. Indudablemente, aquella investigación marcó su pasión por la probabilidad, la modelización matemática y la geometría, que permanecieron y crecieron a lo largo de toda su trayectoria profesional. Fueron tiempos no sólo dedicados al estudio de la Física, sino también al forjado de su personalidad culta, bohemia, curiosa y creativa, y a la consolidación de relaciones de amistad inquebrantables. También fue el tiempo en que maduró su amor por Patro, que ahora no entiende la vida sin él.

Tras Orsay, obtuvo una propuesta de investigación en Marsella, a la que renunció. Luego volvió a España, hizo oposiciones a cátedras de matemáticas y obtuvo la plaza del Instituto de Sagunto, que dirigió durante varios años. Mayo del 68 no le pilló en París, pero su casa, en Valencia, por aquel tiempo, en palabras de Patro "parecía la ONU".

Luego vino el Benlliure y en el 75 el artículo manifiesto *¿Para qué las Matemáticas?* que destapó la caja de los truenos y dio cuenta del nacimiento del Grupo Cero y la revolución que supuso para tantos de nosotros. Los primeros libros de texto en el 77 y el 78, insuperados y producidos en un ambiente de febril actividad, apasionamiento, ganas de cambiar la faz de las aulas de matemáticas en nuestro país y sobre todo, con mucho esfuerzo, creatividad y gozo. Cada semana, se habían comprometido a llevar un problema diferente, genuino, atractivo, había ocasiones en que no salía. Y leían, leían, leían.

Entre otras lecturas, destacaba su interés por la epistemología de la ciencia. Ellos nos presentaron el "Pruebas y Refutaciones" de Imre Lakatos. Seguía su actividad. En el 79, Eliseo y sus compañeros del Grupo Cero, publicaron con el ICE los fascículos de Cónicas, Estadística y Análisis. En el 82 fueron llamados a colaborar en la Reforma de EEMM, pero no obtuvieron las condiciones para una "consulta a todo el profesorado", tal como su proyecto requería. En el 83, Eliseo aportó su colaboración a un libro que ha marcado a toda una generación: "Es posible". En el 84 participó en el Simposio "La Enseñanza de las Matemáticas a Debate", organizado por el Ministerio de Educación, con el fin de recoger información sobre lo que se estaba cociendo fuera y dentro de nuestro país. Entre el 85 y el 86 organizaron cursos de formadores de formadores. Aquellos alumnos vinieron a llamarse "fofitos" y sembraron el país con la simiente allí obtenida. Todos recuerdan a Eliseo como un bondadoso y gran maestro de maestros.

Desde los Centros de Profesores, el Grupo Cero, facilitó el acceso a materiales didácticos de primera fila. En el 87 publicaron el proyecto de 12 a 16 y pusieron en marcha los cursos de formación permanente del profesorado. Luego vinieron diversas dificultades y obstáculos. En los 90, publican la colección de libros de texto para primaria y secundaria.

Durante unos años, Eliseo impartió clases de Álgebra en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Valencia. Mientras tanto, se trasladó al Instituto Ferrer y Guardia, donde siguió disfrutando con las Matemáticas y con sus compañeros.

La jubilación no paralizó su actividad.

Fue miembro del *International Study Group for research on learning Probability and Statistics* y se doctoró por la Universitat Politècnica de Barcelona. Su tesis, dirigida por Claudi Alsina, lleva por título*: Algunos modelos de simulación aleatoria y su aplicación a la enseñanza del azar.*

Dio conferencias, trabajó en talleres. Como siempre, fue la llave en la creación de los materiales educativos en soporte informático titulados *Fotografía y Matemáticas*, escribió páginas bellísimas en *Ritmos* y creó hermosas exposiciones de Matemáticas e Imágenes.

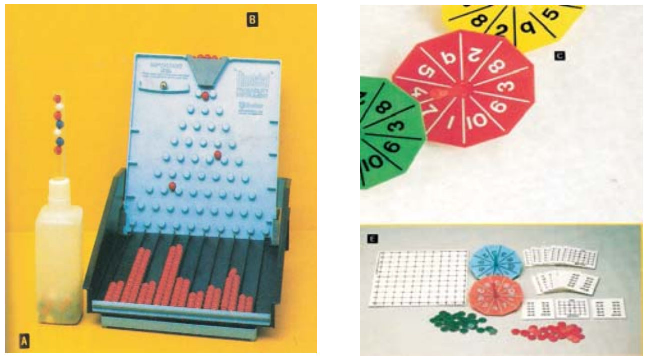
Su último trabajo, que no ha podido ver terminado, fue, precisamente, la exposición *Un paseo por el infinito*. Sólo dos días antes de su fallecimiento, todavía estaba pendiente de ella, de encargar a su inseparable amigo Javier Carvajal el cartel de presentación de dicha exposición.

Todos sus amigos y amigas coinciden en la apreciación de que Eliseo iluminaba sus vidas; que su curiosidad era limpia como la de un niño y, como un niño, todavía disfrutaba del asombro, de la sorpresa; que su inteligencia era prodigiosa y su sentido del humor imperturbable. Pero sobre todo, como dice Patro, era un hombre respetuoso y bueno en el sentido machadiano de la palabra.

Hemos tenido la suerte de disfrutar su larga juventud, pues 70 años eran pocos para tanto optimismo y vitalidad.

Eliseo y el azar

En palabras de Eliseo: "El azar, en interacción con una gran variedad de leyes, gobierna el mundo. Si solamente actuaran las leyes, la vida sería determinista, todo podría predecirse antes de que sucediera. Pero el azar introduce la sorpresa, hace que algunas veces suceda lo inesperado, modula el determinismo de las leyes y, por su causa, todos los sucesos, en mayor o menor grado, se tiñen de imprevisión. La aventura es posible, lo inesperado puede romper lo habitual…" Y nos llevó a vivir aventuras.



E.J. Arnold

Con ruletas equiprobables y no equiprobables, dados poliédricos, monedas trucadas, urnas y bolas, dardos y dianas, ábacos probabilísticos, calculadoras, ordenadores, concursos, sorteos… y con alumnas y alumnos… lo fundamental.

Problemas propuestos

Problemas o juegos, pues juego fue para Eliseo la resolución de problemas, con los que nos ha hecho cavilar y disfrutar en un terreno siempre cercano.

¿Difícil viajar?

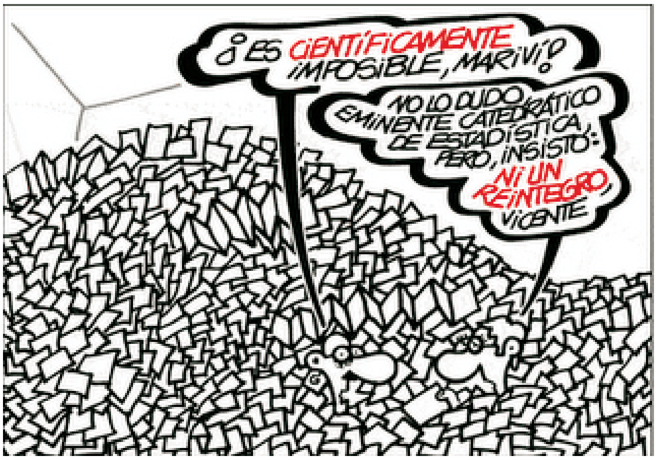
En cierto país andan escasos de divisas. El Ministerio de Turismo, para restringir los viajes al exterior, somete a una prueba de azar a quienes quieren viajar.

A cada candidato le ofrecen seis cuerdas iguales, de la misma longitud, que alguien tiene cogidas por la mitad, con la mano cerrada, dejando ver los extremos superiores e inferiores de las cuerdas.

El aspirante a viajero tiene que atar las cuerdas al azar, de dos en dos por arriba y también de dos en dos por abajo. Recibe permiso para salir del país solamente si después de haber hecho los seis nudos, al abrir la mano, las seis cuerdas quedan formando un solo anillo.

¿Crees que es muy difícil que una persona reciba autorización para viajar? ¿Qué porcentaje de personas podrán salir del país?"

También le gustaba acercarnos a la realidad, al conocimiento de algunos fenómenos físicos, a la importancia de construir y utilizar modelos, técnicas e instrumentos para simular.



Forges

Desintegración

> *La desintegración de los átomos de las sustancias radiactivas es un fenómeno estadístico: no se puede saber de antemano qué átomos se van a desintegrar en un instante determinado, aunque cuanto más tiempo transcurra mayor es la probabilidad de que se desintegren los átomos existentes. Además la cantidad que se desintegra en cada momento es proporcional a la materia que existe en ese momento.*
> *Este fenómeno puede simularse mediante el lanzamiento de dados, cada uno de los cuales representará un átomo.*
>
> *Toma 100 dados y simula su desintegración. (Un dado se desintegra cuando sale 6, por ejemplo)*
>
> *¿Cuánto tiempo tardará en reducirse a la mitad la cantidad inicial?*

Soluciones a los problemas del número anterior

Mari Carmen Martin, hija de matemática, hermana de matemático, discípula de Eliseo en los cursos de Formadores de Formadores, mantiene el espíritu docente que le venía de casta y que selló con su fuerte vinculación al Grupo Cero. Desde ese bagaje, hizo un intento de aportar su saber-hacer al proyecto ESTALMAT de la Comunidad Valenciana. Veamos cómo funcionó el primero de los problemas propuesto por ella:

a. *Al lanzar una moneda regular, ¿es igual de fácil obtener cara que obtener cruz?*

La respuesta unánime es afirmativa

> *Lanzamos una moneda regular 100 veces: ¿cuántas caras y cuántas cruces, más o menos, esperamos obtener?*

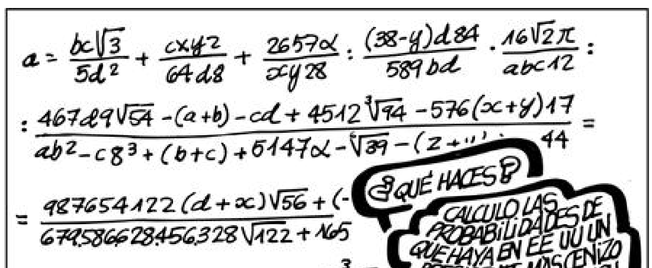
Pronto se observa lo tedioso del lanzamiento repetido un centenar de veces. Se buscan alternativas equivalentes más eficaces. Puesto que en el aula no hay ordenadores, se reparten tablas de números aleatorios. Quien lleva calculadora científica puede utilizarla.

Hecha la simulación del lanzamiento con las tablas, toda la clase se inclina por la probabilidad ½, aunque muchos no le encuentran mucha gracia, ya que la simetría de la moneda les daba suficiente seguridad en este resultado, antes de proceder a la simulación.

> *Si lanzamos dos monedas distintas de forma consecutiva 100 veces, ¿qué resultados podemos conseguir y cuántas veces esperamos que ocurra cada uno de ellos? Expresa también el resultado en porcentajes y en tantos por uno.*

	cara	cruz
cara	(c,c)	(c,+)
cruz	(+,c)	(+,+)

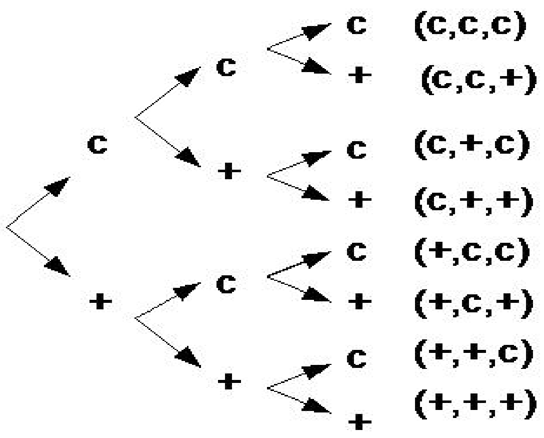
Se ponen a “lanzar” monedas por parejas, cada miembro de la pareja hace su elección en su tabla. 100 lanzamientos parecen suficientes para aventurar la conjetura 0,25 para caras, 0,25 para cruces y 0,50 para cara–cruz o cruz–cara.



Forges

¿Y si lanzamos tres monedas? ¿Existe alguna relación con el primer caso?

La simulación, ahora se hace por tríos, pero los sucesos posibles demuestran la eficacia del diagrama de árbol.



Si dos jugadores A y B juegan de modo que, al lanzar dos monedas, si salen los dos resultados iguales gana A y si salen distintos gana B, ¿Es equitativo el juego?

Este apartado no ofrece ninguna dificultad al alumnado de este grupo.

¿Y si la moneda estuviera trucada y hubiera más probabilidad de que saliera cara?

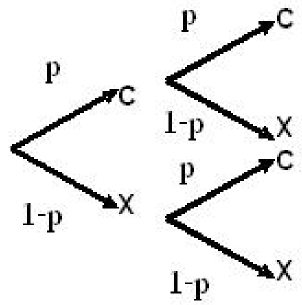
Cada alumno/a decide, tras un atasco, generado por "la falta de datos", asignar una probabilidad mayor de 0,5 al suceso "salir cara".

Algunos alumnos pasan directamente al diagrama de árbol, otros quieren simular pero no aciertan a utilizar la tabla adecuadamente, piden ayuda y siguen. Poco a poco, levantan las manos unos y otros, espero a que terminen todos. Todos dan como respuesta que entonces gana A.

La profesora pregunta entonces ¿Y si la probabilidad de salir cara fuese menor que la de salir cruz, qué pasaría? Antes de simular el juego conjeturan que ganará B. La simulación les contradice, llevamos los resultados a una gráfica, les resulta paradójico.

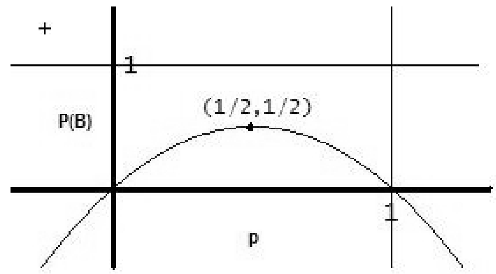
Se les pide que lo demuestren, que supongan que la probabilidad de cara es p y la de cruz $1-p$. Son alumnos y alumnas de 1º de ESO, dicen que no "han dado álgebra"

Hacemos el árbol:



De él se desprende que $P(A)= p^2+(1-p)^2$ y que $P(B)= 2p(1-p)$

Con la calculadora gráfica o con el ordenador obtenemos:



Luego $P(B) < 1/2$ siempre que p es distinto de 1/2, tanto si es mayor como si es menor.

Conclusiones:

1. Tal vez es más rico plantear el problema sin los diagramas de árbol en el enunciado.
2. La generalización formal tendrá que esperar a otro curso, pero, la conjetura puede establecerse a partir de la simulación y reforzarse con ayuda de un procesador matemático sencillo.

Este artículo ha sido elaborado por:

Vicente Calixte Juan, Juan Carlos Orero, Pilar Moreno y Xaro Nomdedeu Con la colaboración de todas las personas en él citadas y aún de otras que han preferido no ser nombradas.

EL HILO DE ARIADNA

NOTAS

1 Para quienes consideran obsoleto hablar de clases sociales en nuestro país, recomendamos la lectura del artículo de Vicenç Navarro *¿Existen Clases sociales?*, aparecido en el Diario Público del 05-03-2010 y que se puede leer íntegramente en http://www.vnavarro.org/?p=737

Este artículo fue solicitado por *Suma* en junio de 2010 y aceptado en septiembre de 2010 para su publicación.

suma+ 65
Noviembre 2010, pp. 119-124

XXI Olimpiada Matemática Nacional para alumnado de segundo de ESO Illes Balears, 24 al 28 de junio de 2010

Vienen las matemáticas
al igual que las olas
que mueren en la playa.
Puedes saber su altura,
su fuerza y su frecuencia
hasta tocar la arena
donde fijas los pies.
Incesantes y súbitos
como este movimiento
son los versos; no obstante,
intentas calcularlos
consciente de en qué grado
la labor es incierta.
Vas subiendo escaleras
de barandas polícromas
hasta donde el amor
(al igual que las olas)
no para de extinguirse.

Feliu Formosa
Traducción de Gabriel ST Sampol

Del 24 al 28 de junio de 2010 se ha celebrado en Mallorca la XXI Olimpiada Matemática Nacional para alumnos de 2º curso de ESO, convocada por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, FESPM, y organizada por la Sociedad Balear de Matemáticas SBM-XEIX. En esta ocasión han participado 60 alumnos acompañados de 23 profesores de las diferentes Sociedades de profesores junto con los invitados del País Vasco y Principado de Andorra además del equipo local organizador.

Pere Joan Jaume Vanrell
Profesor del equipo local organizador
Antònia Martorell Mir
Coordinadora del equipo organizador de la XXI Olimpiada Matemática Nacional

Matemáticas, crisis económica y valores

Explicaban nuestros compañeros de Canarias, hace ahora más o menos un año, las dificultades que habían tenido para encontrar una financiación necesaria y suficiente para llevar a buen puerto la XX Olimpiada Matemática Nacional. Bien, nosotros no hemos sido menos; no sólo cogimos el testigo de la ilusión, de la pasión por las matemáticas, también recogimos la espuma de una tristemente famosa superficie esférica (?): la burbuja inmobiliaria. La crisis continúa en 2010 y no ha sido nada fácil encontrar ayudas económicas para la realización de este evento con cierta dignidad; sin duda ésta ha sido la labor más dura y más ingrata de la organización de la OMNIB, Olimpiada Matemática Nacional Illes Balears.

Programa

Jueves 24 de junio

18:00. Recibimiento y asignación de habitaciones en el albergue Playa de Palma.
20:00. Recepción y bienvenida de la organización a los participantes y coordinadores.
20:30. Cena en el albergue.
21:30. Entrega de credenciales, material y presentación del programa.

Viernes 25 de junio

08:30. Desayuno en el albergue.
09:30. Inauguración oficial de la Olimpíada en la Universitat de les Illes Balears.
11:00. Realización de la prueba individual.
13:00. Conferencia divulgativa en la Facultat de Matemàtiques i Informàtica.
14:00. Almuerzo en la Universitat de les Illes Balears.
16:00. Visita al monasterio de la Reial Cartoixa de Valldemossa.
17:30. Conferencia sobre Chopin y las matemáticas y concierto de piano en el palacio del rei Sanç.
20:30. Cena y verbena en Sant Marçal (Marratxí).

Sábado 26 de junio

08:00. Desayuno en el albergue.
09:00. Inicio de la gincana (prueba por equipos) en el Parc de les Estacions (Palma).
10:00. Excursión en tren turístico Palma - Sóller.
11:00. Continuación de la gincana matemática por Sóller.
13:40. Traslado en tranvía al puerto de Sóller.
14:00. Realización de la última prueba y almuerzo.
16:00. Playa.
18:00. Regreso en tranvía a Sóller y en tren a Son Sardina.
20:30. Visita al OAM (Observatorio Astronómico de Mallorca) y cena.

Domingo 27 de junio

08:30. Desayuno en el albergue.
10:00. Visita en barca a la isla de Sa Dragonera.
11:30. Actividad sobre el meridiano de París que sirvió de base para definir la longitud del metro.
14:00. Picnic en Sant Elm y tiempo libre en la playa.
18:00. Actividad en el Castell de Bellver.
19:00. Recepción y cena de despedida en el Castell de Bellver.
21:30. Sesión de análisis de las soluciones de los problemas de la prueba individual.

Lunes 28 de junio

08:30. Desayuno en el albergue.
10:00. Actividad de matemáticas en la Catedral de Mallorca.
12:00. Recepción en el Parlament de les Illes Balears. Entrega de premios y clausura por parte de las autoridades locales.
13:30. Aperitivo de despedida.

A pesar de las dificultades, creemos haber cumplido nuestros objetivos mínimos, asegurándonos, de este modo, el aprobado. La nota tendrán que ponerla nuestros compañeros –alumnos y profesores– participantes de la XXI Olimpiada Matemática Nacional Illes Balears. Pero, según parece, quedaron encantados de nuestra hospitalidad, organización y colaboración del equipo local organizador.

Por otro lado, queremos destacar, una vez más, los lazos de unión, las relaciones de amistad que se establecen durante estos cinco días entre profesores y alumnos; trabajo en equipo, tolerancia, compañerismo, solidaridad... valores que tanto nos cuesta inculcar en el aula, fluyen espontáneamente y justifican por sí solos la necesidad de la organización de eventos de este tipo.

La Olimpiada

Primera jornada

Con la progresiva llegada y recepción de profesores y alumnos al albergue de la Platja de Palma iniciamos la olimpiada. Un sucesión de 60 jóvenes dispuestos a disfrutar durante cinco días: matemáticas, olas, música, compañeros, arte, gastronomía, juegos, sol…. Agitación, emoción, nervios; ¡por fin ha llegado el día, ya estamos en Mallorca!

Procedemos a la entrega de acreditaciones y materiales diversos, asignación de habitaciones y a la presentación del programa.

Segunda jornada

Después de la larga noche de San Juan y de un merecido desayuno nos dirigimos a la Universitat de les Illes Balears -UIB- donde nos reciben la Magnífica Rectora, el Director General d'Innovació i Formació del Professorat y el jefe del Departament de Matemàtiques i Informàtica. Nos dan la bienvenida y tiene lugar el acto oficial de inauguración. Nos acompañan también la Directora General de Política Lingüística, el Director General de Joventut , el jefe de estudios del Grau de Matemàtiques, el Director d'Educació i Joves de la Caixa de Balears Sa Nostra, y el presidente de la Fundació Tren de Sóller.

Seguidamente tiene lugar la prueba individual: una hora y media para resolver diez problemas e introducir las respuestas en el ordenador, más cinco problemas de lógica "problemas flash"; después, unas breves charlas sobre algunos de los campos de investigación del Departament de Matemàtiques y el almuerzo, gentileza de la UIB.

Por la tarde nos desplazamos a Valldemossa, donde visitamos la Cartoixa y el palau del rei Sanç. Asistimos a una conferencia-concierto, una interpretación matemática de los preludios Op. 28 de Chopin.

El día acaba en Marratxí: cena y fútbol (la selección inicia el camino hacia la final).

Alumnos participantes en la XXI Olimpiada Matemática Nacional

Tercera jornada

Sábado. Nos espera un día intenso. Es el día de la gincana matemática –y del transporte público–. Salimos en tren hacia Sóller según el horario previsto. Los 12 grupos tienen que realizar 6 pruebas; hay que medir, calcular, razonar, recortar, estimar, correr. Una vez finalizadas nos dirigimos en tranvía al Port de Sóller, dónde nos espera una última prueba y una comida junto al mar.

Por la tarde, tren y autobús para llegar al Observatori Astronòmic de Costitx, destacado por su programa de búsqueda y seguimiento de cometas y asteroides: cena –algunos degustan por primera vez la espiral más famosa de Mallorca, la ensaimada–, sesión en el planetario, una charla interactiva sobre asteroides y meteoritos, y observación de la superficie de la luna mediante los telescopios del observatorio. Nos acompaña la luna llena en otra noche mágica de verano.

Prueba por equipos

Cuarta jornada

De isla a isla. Excursión al parque natural de la isla de Sa Dragonera. Salimos en barca desde Sant Elm. Después de una calurosa caminata llegamos a nuestro destino: una línea de piedra clavada en el suelo nos indica que estamos atravesando el meridiano de París, fundamental en la posterior definición del metro. El sabio que hizo posible estas mediciones fue François Arago. Desde la vecina montaña de s'Esclop en el poniente de Mallorca, Arago realizó, en plena guerra de la Independencia, sus observaciones geodésicas para medir los ángulos que abrazaban las islas de Mallorca, Eivissa y Formentera en el que fue el último triángulo de una cadena que había partido de Dunkerque, había atravesado Francia, los Pirineos, Barcelona, había reseguido el levante español para cruzar, finalmente, el mar hasta las Islas Baleares.

Por la tarde visita al Castell de Bellver, uno de los pocos castillos de planta circular del mundo. Una figura, según uno de los alumnos, que maximiza la superficie del patio de armas para un perímetro de muro constante. En este lugar, François Arago tuvo que refugiarse acusado de espía, cuando participaba en la medición del meridiano de París.

Posteriormente, aprovechando el bello marco del castillo, el regidor de Mobilitat i Seguretat de l'Ajuntament de Palma, hace oficial la recepción de parte de la corporación municipal. Por la noche, de nuevo en el albergue, procedemos a la sesión de análisis de las soluciones de los problemas de la prueba individual.

Foto de grupo en el OAM

Prueba por equipos, tren de Sóller

Quinta jornada

La jornada final comienza con una mirada matemática a la Catedral de Mallorca: en primer lugar estudiamos los tipos de arcos que podemos encontrar en La Seu y su posterior construcción, primero con regla y compás y después en madera, para comprobar la estabilidad de unos y otros; el ganador siempre es el catenario. En segundo lugar visitamos la capilla del Santíssim, obra de Miguel Barceló, donde descubrimos la magia del artista de Felanitx y la de algunos números como el 153, que es el número de peces pescados por Jesús y sus discípulos en el mar de Tiberíades (Jn 21,1-11). Para terminar con la joya matemática de la Seu: el acontecimiento del doble rosetón, que se produce cada año en dos fechas simbólicas: el 2 de febrero y el 11 de noviembre, coincidiendo con las festividades de la Candelaria y de San Martín. Este *milagro geométrico* consiste en que, aproximadamente entre las 8.00 y las 8.30 de la mañana de estos dos días la luz del sol naciente al atravesar el rosetón más grande –el que preside la Capella de la Trinitat (11.5 metros de diámetro)– se proyecta en la pared de enfrente, de manera que durante unos segundos se refleja debajo del otro –el del Portal Mayor–, formando un doble rosetón. La Seu se encuentra orientada con respecto a la salida del Sol del solsticio de invierno, de manera que la luz al salir por el horizonte atraviesa simultáneamente los dos rosetones de la catedral –el de la fachada oriental y occidental–, iluminando los vitrales y mostrando al exterior un magnífico juego de colores. Este efecto se puede ver no sólo el día exacto del solsticio, sino en fechas anteriores y posteriores.

A las 12 del mediodía nos encaminamos hacia el Parlament de les Illes Balears donde tiene lugar el acto de clausura, presidido por la molt honorable Sra. Presidenta del Parlament de les Illes Balears, quien destaca el mérito de todos los participantes por haber llegado a la final. Seguidamente, la coordinadora de la SBM-XEIX agradece a todas y cada una de las administraciones y empresas que han hecho posible la realización de este proyecto y también a todo el equipo local organizador. A continuación los alumnos y profesores participantes resumen sus sensaciones y experiencias vividas durante estos cinco días.

Pasamos a la entrega de premios a todos los participantes: una calculadora gráfica gentileza de CASIO, un dispositivo de memoria USB con todos los documentos de la olimpiada y las fotografías, y un diploma acreditativo.

Cierra el acto el presidente de la SBM-XEIX animando a todos los presentes a seguir en este apasionante viaje del conocimiento y agradeciéndoles el placer que ha supuesto poderlos acompañar durante estos días. Para acabar un aperitivo, las fotos de rigor y las despedidas…

Premiados en la XXI Olimpiada Matemática Nacional

El premio principal lo recibieron todos los participantes, profesores y alumnos, y fue la oportunidad de participar en esta XXI Olimpiada Matemática Nacional.

Las menciones de honor por su clasificación en las pruebas fueron:

Concurso de Fotografía Matemática, mejor fotografía al grupo formado por:

- Adrián De Dios García de Extremadura
- Antonio Flórez Gutiérrez de Castilla y León
- Sara Luengo Sánchez de Castilla-La Mancha
- Adrián Navarro Hernández de la Comunidad de Madrid
- Luis Ignacio Navas Vela de Andalucía

Matemáticas en el castillo de Bellver

Meridiano de París, Sa Dragonera

Concurso de Fotografía Matemática, mejor conjunto de fotografías al grupo formado por:

- Alberto Cobos Rábano de Extremadura
- Gisela De Carvalho Pintor del Principat d'Andorra
- Antonio Muñoz Lopera de Andalucía
- Javier Pellejero Ortega de Castilla-La Mancha
- Víctor Sánchez Rodríguez de Canarias

Prueba por Equipos (Gincana Matemática) al grupo formado por:

- Ignacio Calvet Seral de Aragón
- Dzhumle Dzhemalova Mehmedova de Navarra
- Javier Rodríguez Domínguez de la Comunitat Valenciana
- Antonio Valdivia De La Torre de Andalucía
- Javier Vereda Gorgé de la Ciudad Autónoma de Melilla

Prueba Individual a los alumnos, ordenados alfabéticamente:

- Brennan Abanades Kenyon del Principado de Asturias
- Adrián García López de Andalucía
- Aleix Lascorz Guiu de Catalunya
- Luis Ignacio Navas Vela de Andalucía
- Sinuhé Perea Puente de Castilla y León
- Damià Torres Latorre de la Comunitat Valenciana

Nos vemos en Galicia en el 2011

Al finalizar el acto de entrega de premios entregamos el relevo a José Manuel Sánchez González de Galicia, que será el coordinador de la vigésimo segunda Olimpiada Matemática Nacional que tendrá lugar el próximo año en Vigo.

Se puede encontrar información de la XXI Olimpíada Matemática Nacional en las siguientes páginas:

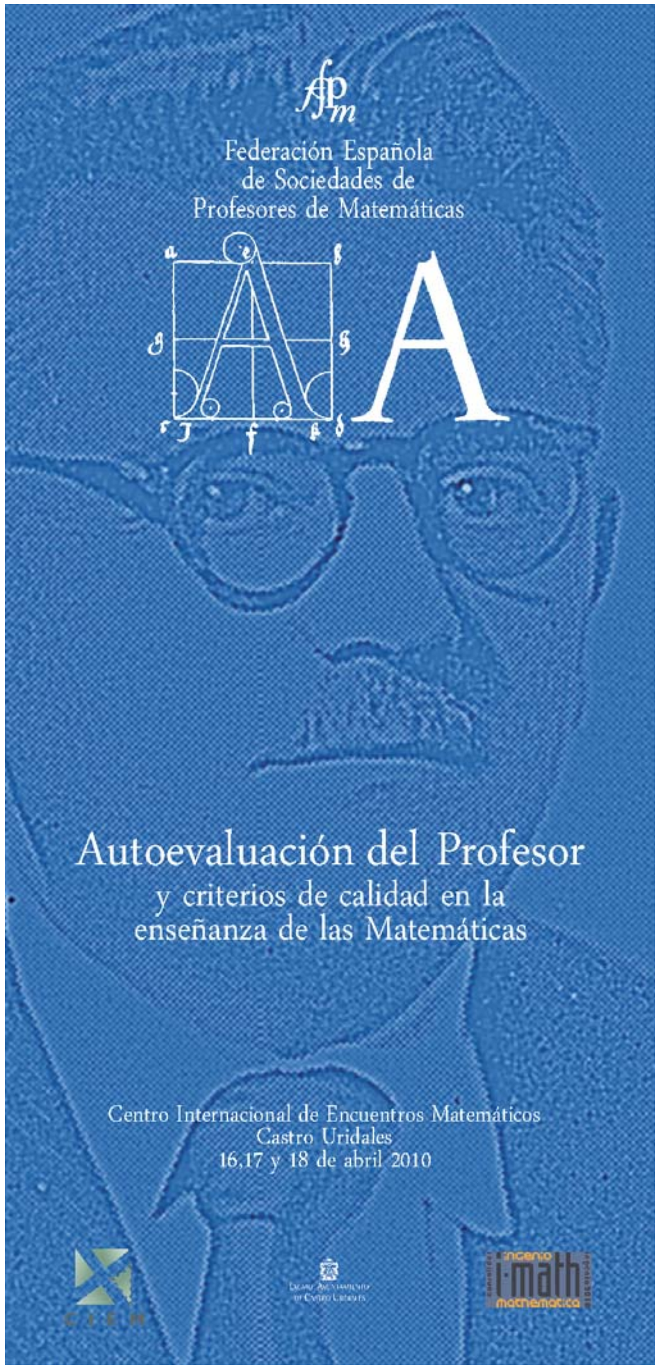
http://fespm.es/-Illes-Balears-2010-
http://www.xeix.org/-XXI-Olimpiada-Matematica-Nacional-

Alumnos y autoridades en el acto de clausura

suma+ 65
Noviembre 2010, pp. 125-130

Autoevaluación del profesor e indicadores de calidad en la enseñanza de las matemáticas. Seminario federal.

Castro Urdiales, abril, 2010



A la memoria de D. Pedro Puig Adam en el cincuenta aniversario de su muerte.

En estos últimos años la evaluación del sistema educativo se ha situado como un elemento fundamental y prioritario a la hora de estudiar y planificar la mejora de la calidad de la enseñanza. Las evaluaciones externas, los proyectos de calidad y mejora de los centros educativos, etc., están dando lugar a una cultura de la evaluación, donde todos los agentes que intervienen en el proceso educativo son objeto de evaluación, y en este sentido, la evaluación de los profesores es un aspecto más en la búsqueda de la mejora de la calidad.

La evaluación y autoevaluación resultan imprescindibles para gestionar la calidad de la enseñanza de las matemáticas. También permiten detectar necesidades de formación y fomentan una cultura de orientación al estudiante y de mejora continua del profesorado.

La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, como organización de referencia del profesorado de matemáticas en España, decidimos abordar la evaluación del profesorado de nuestra materia bajo la dimensión de la autoevaluación, mediante la organización de un seminario sobre este tema a nivel nacional, que se celebró los días 15 al 18 de abril en el CIEM en Castro Urdiales (Cantabria), con la participación de representantes de la mayoría de las sociedades federadas.

Una reflexión colectiva, a través de este seminario de trabajo, sobre la evaluación de nuestra tarea docente podría ayudarnos a avanzar en este campo, incluyendo:

– La definición de los objetivos de la evaluación y del modelo académico en el que se inscribe.
– La definición exacta de los aspectos que se evaluarán.
– La descripción de los instrumentos que se utilizarán para la obtención de información (encuestas, informes, estudios, entrevistas...), de los procedimientos que se seguirán y de los criterios que se emplearán.
– Un calendario para el proceso de la evaluación y para el plan de seguimiento de los resultados.
– El estudio de tendencias históricas de cada docente, comparación de resultados con otros profesores de matemáticas.

El objetivo final fue elaborar de manera consensuada un protocolo de autoevaluación del profesorado de matemáticas, que sirviera para, de alguna manera, poder medir la calidad media de su práctica, pero que a la vez le ayudara y le orientara sugiriendo los ámbitos de mejora de su propia actividad de docente, sus necesidades de formación, etc. En definitiva, que nos ayude a mejorar la calidad de la enseñanza desde la óptica de lo que puede hacer el propio profesor/a.

Durante el Seminario Federal tuvieron lugar dos intervenciones plenarias, a cargo de Jesús Mª Goñi sobre "Competencias profesionales de los docentes de Matemáticas. Estudio comparado y propuesta" y Miguel Recio sobre "La evaluación del profesorado e indicadores de calidad", cuyas valiosas aportaciones sirvieron para centrar el tema y contextualizarlo.

Los asistentes se organizaron en torno a cuatro grupos de trabajo:

1. Conocimientos del profesor. ¿Qué debe saber un buen profesor de matemáticas?
2. Recursos ¿Qué debe usar?
3. Metodologías. ¿Cómo debe enseñar?
4. Evaluación ¿Cómo debe evaluar?

Grupo 1: Conocimientos del profesor. ¿Qué debe saber un buen profesor de matemáticas?

En lo relativo al conocimiento del profesor la perspectiva es más teórica que al preguntar sobre la práctica. Disponer de conocimiento específico (profesional) es una cualidad imprescindible para el profesorado de matemáticas, pero puede no ser suficiente. Sería importante entonces atender también a cómo el profesor/a pone en juego ese conocimiento para realizar su tarea profesional.

El esquema propuesto para obtener el instrumento de autoevaluación consistió en (1) comenzar por determinar cuestiones que debe plantearse el profesor relativas a su conocimiento; (2), continuar examinando componentes del conocimiento del profesor y, finalmente (3), establecer formas de examinar el grado en que cada profesor dispone de conocimiento en cada una de las componentes acordadas, y de ponerlo en juego, al menos en la planificación de clase.

1. Preguntas.

- ¿Qué necesitan saber los profesores y qué destrezas requieren para enseñar con eficacia?
- ¿Cuáles son los problemas y tareas de la enseñanza de las matemáticas? ¿Qué hacen los profesores cuando enseñan matemáticas?
- ¿Qué conocimiento matemático, herramientas y sensibilidades se requieren para manejar estas tareas?
- ¿Cuál es la naturaleza del conocimiento profesional del profesor? ¿De dónde procede o qué fuentes tiene? ¿Cómo se organiza? ¿Cómo se genera en el profesor?
- ¿Cuál es el conocimiento de las matemáticas que tiene que tener el buen profesor? ¿Qué conocimiento de matemáticas tiene el profesor?
- ¿Qué debe saber sobre formas de aprender matemáticas el profesor? ¿Qué sabe al respecto?
- ¿Qué caracteriza la actuación eficaz y eficiente del profesor en el aula de matemáticas?
- ¿Cuáles deben ser los conocimientos, capacidades y actitudes de un profesor que actúa eficaz y eficientemente?
- ¿Qué Matemáticas debe saber el profesor de Matemáticas? • ¿Qué conocimiento específico para enseñarlas? ¿Cómo pone en juego este conocimiento en su actuación en clase?
- ¿Qué debe conocer el profesor sobre la forma de aprender, en general, y sobre la forma de aprender matemáticas en particular?

Como consecuencia, las preguntas anteriores llevan a considerar las siguientes dimensiones:

- Qué matemáticas debería saber y de qué tipo es ese conocimiento.
- Qué matemáticas sabe el profesor y cómo medirlo.
- Qué debe saber sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (conocimiento didáctico de las matemáticas).

• Qué sabe el profesor de conocimiento didáctico de las matemáticas y cómo medirlo.

2. Componentes del conocimiento del profesor

Las cuestiones anteriores nos muestran que los ámbitos de conocimiento son amplios y diversos, por lo que conviene definirlos. El documento de Ball et all. (2008) da una idea que puede resumirse en la figura 1:

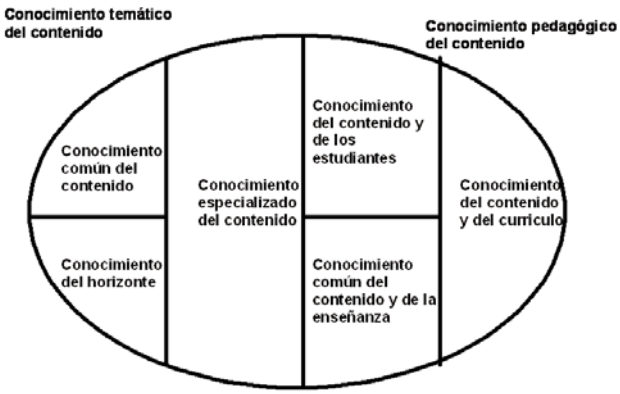


Figura 1: Dominios de Conocimiento matemático para la enseñanza

3. Cómo medir el conocimiento del profesor

Para evaluar qué conocimiento tiene el profesor podemos aludir a contenidos particulares, respecto a los cuales se puede hacer preguntas sobre cada uno de los tipos de conocimiento descritos en el apartado (2). Esta tarea es difícil de convertir en un juicio de valor, ya que el referente es el mismo profesor, el mismo examinador. Necesitamos pues otros instrumentos de valoración. Para ello podemos utilizar referentes externos, que nos llevan a dimensiones concretas que se deben medir:

1) Conocimiento de las matemáticas escolares con profundidad y amplitud: tener un concepto amplio del contenido, saber representarlo de diversas maneras, comprender aspectos clave de cada tópico y relacionarlo con otros.
2) Conocimiento de los estudiantes como seres pensantes: ser sensible a lo que piensan, sobre cómo dan sentido a los conceptos matemáticos y cómo y qué aprenden.
3) Conocimiento de los estudiantes como seres que aprenden: partiendo de qué es aprender y qué enseñanza produce aprendizaje.

Como conclusión del grupo resaltar que en las conferencias y documentos revisados, no se utiliza el conocimiento como una dimensión sobre la que evaluar al profesor.

Se destaca también que el conocimiento debería manifestarse en la práctica docente, por lo que evaluar el conocimiento llevaría a evaluar la competencia profesional del profesor y no solamente el conocimiento, por lo que el cuestionario final debe combinar ambos aspectos.
El instrumento permite al profesor caracterizarse, descubriendo fortalezas y debilidades en su conocimiento profesional. Se realiza una valoración de conocimiento profesional en general, relativo a situaciones o contenidos matemáticos concretos y en la planificación.

Grupo 2: Recursos ¿Qué debe usar?

Este grupo comenzó consensuando a qué se le iba a considerar recurso, teniendo en cuenta las diferentes respuestas a la pregunta ¿con qué enseño?

Se comentó el hecho de que, con mucha más frecuencia de la deseada, los recursos que el profesorado de matemáticas utiliza en sus clases siguen siendo muy limitados. En demasiadas ocasiones, se reducen a la pizarra, el libro de texto, la libreta del alumno y muy poco más. Los denodados esfuerzos de Puig Adam y otros destacados pioneros en la introducción de diferentes materiales manipulativos para la enseñanza de las matemáticas apenas han tenido repercusión en las clases. Muchos profesores y profesoras desconfiaron siempre de los métodos intuitivos y posiblemente eso les llevó a pensar que el uso de material concreto traicionaba la esencia de la Matemática. Nada más lejos de la realidad. Los expertos en didáctica de la matemática y la experiencia de los pocos que hicieron un uso habitual de estos materiales coinciden en destacar el valor educativo de los materiales. Viene muy bien recordar lo que decía Puig Adam hace más de 50 años:

> Para el niño lo concreto empieza siendo lo que percibe; sobre esas percepciones primeras actúa elaborando analogías de las que surgen conceptos más generales, más abstractos, llegando a veces a procesos de abstracción de rapidez insospechada. La percepción y la acción parecen constituir el binomio sobre el que se desarrolla el aprendizaje matemático".

En las clases de matemáticas debe haber tiempo para tocar, doblar, mover, plegar, construir, medir, dibujar, cortar, pegar, construir, estimar… y leer algo más que el libro de texto o lo que escribe el profesor en la pizarra. Hace ya decenas de años que la calculadora se ha convertido en instrumento de uso habitual en nuestra sociedad. A pesar de ello, es sorprendente la dificultad con la que ha ido penetrando en nuestras clases. Y eso que desde los años 90 ya está incorporada en el currículo. En la enseñanza secundaria al menos ha ocupado un hueco para sustituir a las tablas de logaritmos o las trigonométricas. Pero tristemente se ha quedado solo en eso: el uso didáctico de la calculadora queda en mera anécdota. Pero en Primaria prácticamente no ha entrado en las aulas. Y qué decir de las TIC. En la práctica docente de una gran parte del profesorado solamente están incorporadas en el nombre del área que imparten: matemáTICas. Ordenadores, pizarras digitales, software, recursos multimedia, aulas virtuales, blogs, webquest… son elementos que todavía tienen muy poca presencia en las aulas. En puertas de la Escuela 2.0, parece que todavía quedan muchos deberes por hacer. Estadísticas recientes parece que indican que el profesorado hace un uso muy alto de las herramientas informáticas en la preparación de sus clases, exámenes, etc, pero muy poco uso en sus clases.

Recursos manipulativos, documentales, calculadora y TIC han de ser herramientas imprescindibles del profesorado de Matemáticas. Viejas y nuevas tecnologías se complementan perfectamente y pueden convivir armoniosamente en nuestras clases.

El grupo tuvo que consensuar una clasificación sistemática de los recursos, para luego poder plantear las cuestiones que giran alrededor de los recursos que se utilizan en el aula. La reflexión se articula sobre la frecuencia de uso de los mismos y la valoración personal sobre la misma. Establecer en qué bloques de contenidos se usa los diferentes recursos y con qué finalidad, además del cómo se emplean, atendiendo al lugar, el tipo de agrupamiento o el tipo de interacción, se consideraron aspectos importantes a tener en cuenta. Otro factor muy relevante es la deliberación sobre cuál es la eficacia de los recursos usados y las razones por las que no se usan otros.

Grupo 3: Metodologías. ¿Cómo debe enseñar?

El proceso de enseñanza debe centrarse en la actividad creadora del alumnado, en su labor investigadora, en sus propios descubrimientos. El desarrollo de cada actividad debe estar inspirado en la idea de que es el alumno el que va construyendo, modificando y enriqueciendo sus conceptos y técnicas. En este sentido, es fundamental iniciar todo proceso de enseñanza/aprendizaje partiendo de los conocimientos previos que sobre el tema a estudiar ya poseen.

Las tareas a realizar se organizarán adaptándolas a la diversidad de capacidades del alumnado. La presentación de los contenidos conceptuales se hará asociándolos a actividades, resueltas por el profesor en algunos casos, en las que se introducen contenidos procedimentales que el alumno debe dominar y como propuestas de trabajo en otros.

El desarrollo de estas actividades debería basarse en aproximaciones inductivas del alumno, surgidas de su propio trabajo mediante la realización de tareas concretas. El proceso de enseñanza/aprendizaje se sustentará en el trabajo autónomo del alumnado con el apoyo y orientación del profesor.

Para que el aprendizaje sea efectivo, los nuevos conocimientos que se pretende que el alumno construya han de apoyarse en los que ya posee, tratando siempre de relacionarlos con su propia experiencia y de presentarlos preferentemente en un contexto de resolución de problemas.

Algunos conceptos deben ser abordados desde situaciones preferiblemente intuitivas y cercanas al alumnado para luego ser retomados desde nuevos puntos de vista que añadan elementos de complejidad. La consolidación de los contenidos considerados complejos, se realizará de forma gradual y cíclica, planteando situaciones que permitan abordarlos desde perspectivas más amplias o en conexión con nuevos contenidos.

El método deductivo no es el más apropiado en los primeros cursos de la ESO y para alumnos con dificultades de aprendizaje; por tanto se intentará que el alumno, mediante ensayos y verificación

de conjeturas, llegue a los conceptos también por inducción.

El desarrollo de cada unidad didáctica debe estar inspirado en la idea de que es el alumno el que va construyendo, modificando y enriqueciendo sus conceptos y técnicas. En este sentido, es fundamental iniciar todo proceso de enseñanza-aprendizaje partiendo de los conocimientos previos que sobre el tema a estudiar ya poseen los alumnos.

El profesor organizará las tareas a realizar por los alumnos adaptándolas a la diversidad de capacidades de los mismos. La presentación de los contenidos conceptuales se hará asociándolos a actividades, resueltas por el profesor en algunos casos, en las que se introducen contenidos procedimentales que el alumno debe dominar y como propuestas de trabajo en otros.

El desarrollo de estas actividades debe basarse en aproximaciones inductivas del alumno, surgidas de su propio trabajo mediante la realización de tareas concretas. En ningún caso, la conceptualización, formalización y simbolización deben preceder a la comprensión de conceptos y relaciones extraídas de la actividad real.

La selección de las actividades debe producirse, salvo en los casos en que la adquisición de una destreza de cálculo o de un procedimiento concreto así lo aconseje, evitando los ejercicios rutinarios de aplicación inmediata de fórmulas o algoritmos.

La reflexión sobre el cómo enseñar lleva a plantear cuestiones alrededor de la actuación y el rol del profesor en el aula. Es necesario profundizar en los tipos de actividades que proponemos al alumnado y las clases de tareas a los que los enfrentamos. Cuando planificamos nuestro trabajo en el aula, qué aspectos tenemos en cuenta a la hora de diseñar nuestra tarea. Meditar sobre el ajuste entre lo planificado y lo obtenido puede ser muy interesante.

Garantizar el éxito, proponiendo distintos niveles de profundización en las tareas, facilitando orientaciones claras sobre qué se espera de la tarea, cómo va a evaluarse, etc.

Grupo 4: Evaluación ¿Cómo debe evaluar?

Nadie pone en duda, hoy en día, que el fracaso o el éxito de todo sistema educativo depende en gran medida de la calidad del desempeño de sus docentes, aunque sería injusto atribuirle toda la responsabilidad.

Entre las muchas acciones que se pueden llevar a cabo para medir la calidad a la que se alude en el párrafo anterior, la evaluación del docente es una de las más importantes. Esta evaluación del profesorado no debe verse como una estrategia de vigilancia jerárquica que controla las actividades de los profesores, sino como una forma de fomentar y favorecer el perfeccionamiento del profesorado, como una manera de identificar las cualidades que conforman a un buen profesor. En este sentido, pensamos que para evaluar a los profesores, uno de los criterios que podemos usar no es el de poner la atención en lo que hace éste, sino mirar lo que acontece a los alumnos como consecuencia de lo que él hace.

Ha de ser el alumnado uno de los ejes fundamentales en llevar a cabo esta práctica, puesto que el proceso de enseñanza-aprendizaje es responsabilidad común entre profesores y estudiantes. El trabajo será, por tanto, diseñar un modelo de evaluación del profesorado donde la evaluación de los estudiantes sea un elemento importante, y que esta evaluación tenga en cuenta todos los cambios introducidos durante el proceso de aprendizaje de los estudiantes y no sólo la evaluación en el momento final. Pretendemos tener en cuenta todo el proceso de evaluación para diseñar la herramienta de autoevaluación.

Y en este proceso de evaluación, el rendimiento académico no es el único factor que debemos utilizar puesto que los resultados que obtiene el alumnado son efectos de múltiples factores.

Evaluar al profesorado es un tema complicado entre otras por las siguientes razones, las inquietudes que despierta un proceso de este tipo y los efectos secundarios que puede comportar.

Es importante tener en cuenta, que evaluamos para reflexionar sobre la manera de cómo desarrollamos nuestra práctica docente y en este sentido, si no estamos dispuestos a introducir cambios en nuestro quehacer diario, mejor no realizar la evaluación.

Pero, ¿qué entendemos por evaluación? Entendemos por evaluación la recogida sistemática de información para tomar decisiones, de acuerdo a unas normas o criterios previamente fijados. Esta definición la consideramos válida tanto para el alumnado como para el profesorado, y en este sentido el objetivo del trabajo del grupo ha sido elaborar un cuestionario que recoja la información necesaria para poder llevar a cabo una autoevaluación de la práctica docente del profesor a través de la evaluación que éste realiza a su alumnado.

La propia redacción del título nos conduce a dos posibles interpretaciones, que lejos de ser excluyentes, desde nuestro criterio, están relacionadas y deben complementarse. Estas interpretaciones se resumirían en, la evaluación del alumnado como uno de los criterios relevantes en la evaluación de la función docente y por otra parte, la evaluación externa por parte del alumnado al profesor. En este sentido consideramos que es importante tener en cuenta en esta segunda opción, la percepción que los estudiantes tengan de las acciones realizadas por el docente.

A la hora de elaborar esta parte del cuestionario de autoevaluación del profesor se han tenido en cuenta los siguientes aspectos:

- Actitud del profesor respecto a la evaluación de los alumnos.
- Acciones relacionadas con el proceso de evaluar.
- Instrumentos de evaluación y su uso.
- Atención a la diversidad en la evaluación.
- Comunicación y evaluación

Está claro que en cada uno de los grupos se podían haber escogido otros factores o haber escogido más, pero éstos son los que cada grupo ha considerado que englobaban la mayor parte de los elementos para la autoevaluación del profesorado de matemáticas.

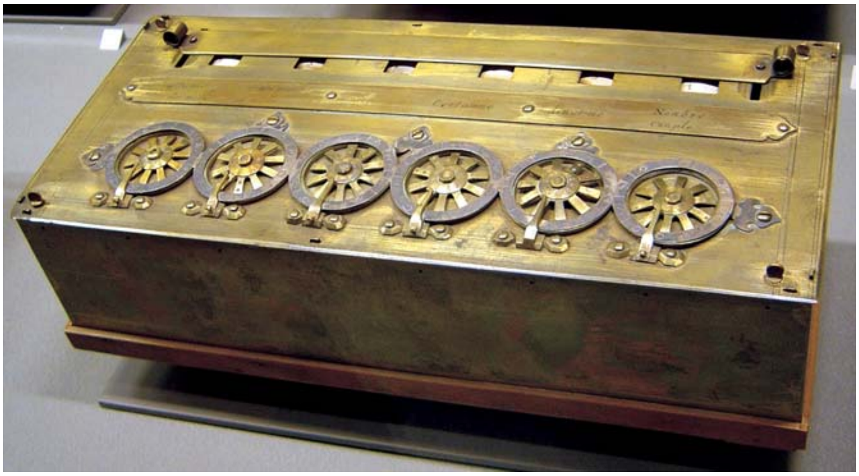
El cuestionario resultante de este Seminario Federal puede consultarse en la página web de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. ■

Fotografía: Pili Royo

suma+ 65
Noviembre 2010, pp. 131-136

Las calculadoras como recursos TIC. Seminario federal.

Málaga, junio, 2010



Durante los días 5 y 6 de junio se ha celebrado en Málaga el seminario sobre las calculadoras como recursos TIC, convocado por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES, contando con la colaboración de la Consejería de Economía, Innovación y Ciencia de la Junta de Andalucía y de la División Didáctica de CASIO – Flamagas.

Las sesiones de trabajo del seminario se han centrado en tres grupos de debate cuyas conclusiones han sido las siguientes.

Grupo 1. La calculadora como recurso para desarrollar las competencias básicas. Diseño curricular y calculadoras.

Como profesionales de la enseñanza nuestro principal objetivo es hacer que nuestros alumnos y alumnas ejerzan su ciudadanía de forma responsable, crítica y democrática. Las matemáticas impregnan todo el currículo, de forma que cualquier deficiencia o mejora en la formación matemática del individuo, afecta directamente a la totalidad del proceso de enseñanza-aprendizaje.

El uso de la tecnología en educación no tiene sentido si no es para favorecer la adquisición de competencias por parte de nuestro alumnado. En ese sentido la calculadora es una herramienta con gran valor educativo, su uso continuado a lo largo de la educación matemática de una persona permite centrar el foco de su formación en el tratamiento de los conceptos y en las distintas formas de abordarlos que existen. La coexistencia de la calculadora con otros materiales y herramientas es posible, deseable y enriquecedora.

La resolución de problemas y/o proyectos, eje vertebrador de la educación matemática, se ve favorecido por el uso de las calculadoras, ya que permiten redimensionar ciertas ramas de la matemática como la aritmética y/o el álgebra y dedicar recursos temporales y humanos a tratar otros contenidos que últimamente se encuentran un poco más marginados en nuestras aulas, o a realizar aproximaciones a los mismos desde otros puntos de vista.

Sobre el papel de las calculadoras y el currículo de matemáticas y su contribución a la adquisición de competencias, consideramos que el uso de las calculadoras facilita en nuestro alumnado el desarrollo de competencias básicas como pensar y razonar, argumentar, comunicar, modelar, plantear y resolver problemas, representar, utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones. Y ello independientemente del nivel educativo en el que se utilice. Al facilitar los cálculos, los estudiantes pueden disponer de más tiempo para la reflexión y el razonamiento.

La propia calculadora es generadora de una amplia gama de problemas numéricos que permiten descubrir propiedades aritméticas importantes, que de otro modo no se podrían intuir. Esta "intuición de lo numérico" es fundamental en los diversos estadios de la educación matemática, especialmente cuando se introducen nuevos campos numéricos en la resolución de problemas.

La calculadora favorece el cálculo mental, entendido como un concepto más amplio que la repetición memorística de unas tablas y algoritmos, ya que antes de usarla, el estudiante debe reflexionar sobre la operación a realizar para resolver el problema y, después de usarla, debe reflexionar sobre la coherencia entre el resultado que muestra la calculadora y sus expectativas. En este sentido, no es cierto que la calculadora sea rival del cálculo mental; más bien al contrario, lo consolida al provocar la reflexión sobre el resultado que se exhibe en la pantalla y permitir investigar procedimientos alternativos y elaborar estrategias propias de cálculo. En efecto, al variar los resultados de un cálculo, podemos plantearnos qué ocurriría con problemas análogos o con problemas donde los datos se duplicasen o se redujesen a la mitad, etc. También es una herramienta imprescindible para la búsqueda de patrones y regularidades numéricas.

Un aspecto a considerar es el hecho de que, a diferencia de otras tecnologías, el uso de calculadoras no impone barreras estructurales en el aula siendo totalmente compatible con el trabajo en equipo, ya que favorece el desarrollo de actividades en grupo, en las que hay que argumentar procesos de resolución, comunicar, representar, exponer y compartir resultados, favoreciendo así el desarrollo de la competencia social y ciudadana y la comunicación y expresión lingüística. Estas actividades pueden ser más dinámicas que con otras tecnologías permitiendo un contacto más directo y fluido entre el alumnado lo que, con las estrategias adecuadas, favorece las interrelaciones entre los estudiantes y el desarrollo de la competencia social y ciudadana.

Por ello creemos en el carácter educativo de las calculadoras, que enseñar su uso es bueno en sí mismo, por la matemática que llevan dentro y por favorecer la competencia tecnológica. Además, las calculadoras se pueden adaptar a distintos estilos de docencia y a los posibles cambios curriculares y esto es un valor en sí mismo de esta herramienta.

Algunos ejemplos de ejercicios propuestos en las PAU de países de nuestro entorno que han adoptado la calculadora como recurso educativo habitual, aparecen en el anexo I de este documento. Esto no quiere decir que sólo se proponga su uso a estos niveles, nada más lejos de la realidad, existen experiencias en nuestro país que sirven de muestra del uso de la calculadora desde los primeros años de la educación obligatoria (http://www.ceipaguamansa.com).

Sobre las calculadoras y los contenidos en los distintos niveles educativos, se establece que las calculadoras son imprescindibles para el conocimiento de los números y las propiedades numéricas (densidad en Q, equivalencia fracción – decimal – porcentaje, no existencia de siguiente de una fracción, en general en el conocimiento del mundo decimal). Sucesiones, iteración, recurrencia, aproximación, nueva manera de representar gráficamente las sucesiones (diagrama tela de araña), modelos de regresión (no necesariamente lineal), construcciones fractales, transformaciones y movimientos en el plano e incluso representaciones en el espacio (por ejemplo, superficies, que se pueden recorrer con el cursor mientras se visualizan las coordenadas de los puntos), se puede ver la diferencia entre coordenadas rectangulares y polares... Todos ellos son ejemplos de contenidos que tienen un tratamiento favorecido por la calculadora.

En la enseñanza tradicional, hay un exceso de álgebra, el énfasis está puesto en el aprendizaje de algoritmos y la clase se convierte en una larga letanía de prácticas algorítmicas. La calculadora ayuda a dedicar menos tiempo a reiteraciones de cálculo y permite centrar la enseñanza en los conceptos.

Por ejemplo, resulta excesivo el tiempo que se dedica a la práctica de operaciones con radicales (todavía hay profesores que enseñan el algoritmo de la raíz cuadrada, sin embargo este algoritmo no aporta nada sustancial al aprendizaje de las matemáticas). La calculadora permite ahorrar tiempo y facilita un mejor aprendizaje, especialmente los modelos que simplifican radicales.

Con las calculadoras podemos hacer más cotidiano el currículo, con situaciones más contextualizadas y realistas, en las que los datos son reales y no preparados para que los resultados sean números enteros.

Con una cultura basada en el uso cotidiano de calculadoras, nos ahorraríamos mucho tiempo en Aritmética en Primaria y en Álgebra en Secundaria, lo que permitiría tratar los contenidos de otra forma y también abordar nuevos contenidos de Geometría y Estadística que actualmente no se dan.

Algunos profesores se sienten desorientados si no enseñan álgebra, porque piensan que sin álgebra no hay "verdaderas matemáticas". En este sentido es importante reformar la formación inicial y permanente del profesorado para que el objeto central deje de ser el manejo técnico de la máquina y pase a ser la gestión una clase con calculadoras, no centrada en el cálculo sino en la resolución de problemas.

Otros profesores piensan que es necesario un entrenamiento duro para el álgebra, porque si no los alumnos cometen errores, como decir que el cuadrado de x es $2x$... Sin embargo, es un hecho que después de tantos años de práctica, los estudiantes siguen teniendo errores en cálculos algebraicos, paréntesis, signos, operaciones con radicales...

Para aprender álgebra no es necesario repetir los mismos ejercicios una y mil veces; lo importante no es la práctica reiterativa de técnicas algebraicas, sino la significatividad de la misma y la traducción del lenguaje cotidiano al algebraico y viceversa. El dominio en esta traducción es importante para la adquisición de la competencia en comunicación y expresión lingüística y para la propia competencia matemática. En matemáticas siempre está presente la competencia lingüística.

En definitiva, hay que buscar un equilibrio entre contenidos y tecnología, el uso cotidiano de calculadoras no necesariamente elimina contenidos, sino que pone en primer plano CÓMO se tratan los contenidos y está claro que con las calculadoras es diferente.

Algunos profesores consideran que el uso de calculadoras en las aulas tiene sus inconvenientes, especialmente el hecho de que los alumnos dispongan de una heterogeneidad de modelos, lo que complica el trabajo del profesor, el cual debe explicar a cada estudiante el funcionamiento de su máquina. Sin embargo, en el actual currículo de matemáticas se contempla que la enseñanza y el aprendizaje de herramientas tecnológicas forman parte de los contenidos, y por tanto, debe ser una tarea habitual en las aulas.

El uso cotidiano de calculadoras lleva de manera inevitable a la resolución de problemas. Por tanto, una clase con calculadoras tiene su foco de atención en la resolución de problemas, en la búsqueda de modelos. Para realizar estas tareas, el alumno debe usar su bagaje matemático antes y después de usar la calculadora. Es más difícil hacer pensar, porque tenemos una larga tradición de una enseñanza muy enfatizada en los ejercicios, pero no en los problemas. Ahora el papel se invierte, ya que la calculadora descarga de cálculo las tareas y hace aflorar nuevas preguntas, nuevos problemas, nuevas investigaciones. En una clase con calculadoras, lo esencial no es hacer cálculos, sino la resolución de problemas. Y para la resolución de problemas, la calculadora es una herramienta imprescindible, ya que favorece el aprendizaje por descubrimiento.

Como resumen, este grupo propone:

- El uso de la calculadora es compatible con otras tecnologías y recursos o materiales, así como con diversos estilos de docencia. Esta "adaptabilidad" de las calculadoras es un valor propio de las calculadoras, que no poseen otras tecnologías.
- Con el uso de calculadoras pueden tratarse en clase contenidos matemáticos nuevos, aunque lo importante no es qué contenidos, sino cómo se tratan los contenidos. El uso de calculadoras hace que los contenidos se traten de una forma diferente. En particular, la modelización y la simulación con calculadoras introducen una nueva forma de pensar en la clase de matemáticas, que no estaba presente en la clase tradicional.
- La calculadora favorece la adquisición de las competencias básicas, facilita el establecimiento de conexiones entre distintas partes de las matemáticas y entre las matemáticas y otras áreas del currículo, y cumple un papel especial en la modelización. Su uso no sólo debe circunscribirse al aula de matemáticas sino que se debe de extender a otras áreas de conocimiento.

Grupo 2. La calculadora en la *Escuela 2.0*

La calculadora es un recurso más en el aula de matemáticas que se viene utilizando desde hace tiempo en los centros docentes y con el que profesores y alumnos están familiarizados. Consideramos que es de fácil inserción en las actividades desarrolladas a partir del proyecto *Escuela 2.0*

Entre las numerosas ventajas de las calculadoras podemos señalar que facilita el aprendizaje cooperativo, la adquisición de las competencias básicas y procesos dinámicos de investigación tales como formular hipótesis, experimentar y contrastar resultados.

Creemos que es una herramienta básica para situar las matemáticas en un contexto más real y además permite al alumno familiarizarse con un instrumento de uso habitual en la vida cotidiana.

Las calculadoras de mano y las calculadoras incorporadas en los ordenadores pueden utilizarse de forma simultánea en el aula, y en algunas situaciones concretas como las pruebas de evaluación o cuando el alumno no pueda acceder al ordenador, las calculadoras de mano resultan más adecuadas.

Actualmente existen emuladores que facilitan la introducción del uso de las calculadoras gráficas y simbólicas en el aula. Estos emuladores hacen posible el acceso económico a este tipo de calculadoras y permiten utilizarla en cualquier nivel educativo.

El uso de estos emuladores conjuntamente con las Pizarras Digitales Interactivas permite que el alumno aprenda el manejo de este tipo de calculadoras de forma gradual de forma que el profesor pueda dedicarse a los contenidos matemáticos y el uso de la calculadora no sea un obstáculo para alcanzar estos conceptos.

Una de las ventajas de las calculadoras gráficas y simbólicas es que el alumno dispone de las diferentes aplicaciones que necesita en un solo instrumento, a diferencia de lo que ocurre con los ordenadores, donde cada actividad requiere un software específico. De este modo el alumno puede relacionar de forma rápida y directa diferentes campos de las matemáticas.

La amplia gama de recursos tecnológicos que el programa *Escuela 2.0* pone a disposición de los centros educativos confirma que las calculadoras, junto con los ordenadores, son instrumentos ideales para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

El programa *Escuela 2.0* generaliza el acceso del profesorado a la información y a materiales ya elaborados, lo que ayuda a generalizar las posibilidades didácticas de la calculadora. Asimismo, facilita espacios para el intercambio de experiencias y abre lugares de debate. Es aconsejable introducir la calculadora en el aula lo antes posible (Primaria o Primer Ciclo de Secundaria) como herramienta para resolver problemas, más que para evitar algoritmos repetitivos y simultanear el uso de calculadoras con otro tipo de materiales en la práctica diaria.

Es más fácil manejar la calculadora gráfica cuando el alumno está familiarizado con el uso en el ordenador de programas similares de estadística, geometría dinámica o cálculo simbólico, entre otros. El diseño de los planes de formación para el programa *Escuela 2.0* debería promover la formación del profesorado para introducir recursos de todo tipo en el aula de matemáticas como por ejemplo, software educativo, material manipulable y calculadoras, como contenidos clave de esta formación.

Creemos que es importante que los participantes en los planes de formación adapten o elaboren materiales propios para su uso inmediato en su aula, fomentando así que el uso de la calculadora continúe en el aula después de finalizar dicha formación.

Grupo 3. La calculadora en las Pruebas de Acceso a la Universidad. Propuestas para su uso

Antes de exponer las propuestas de este grupo, recordamos el REAL DECRETO 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas, en el bloque temático de Matemáticas I y II marca como objetivo nº 5:

> Emplear los recursos aportados por las tecnologías actuales para obtener y procesar información, facilitar la comprensión de fenómenos dinámicos, ahorrar tiempo en los cálculos y servir como herramienta en la resolución de problemas.

Y en el bloque temático de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias sociales I y II, encontramos:

> Hacer uso de variados recursos, incluidos los informáticos, en la búsqueda selectiva y el tratamiento de la información gráfica, estadística y algebraica en sus categorías financiera, humanística o de otra índole, interpretando con corrección y profundidad los resultados obtenidos de ese tratamiento.

Las distintas comunidades autónomas han concretado estos objetivos en sus currículos y recomiendan el uso de calculadoras y ordenadores para su consecución, así como en sus criterios de evaluación[1].

Por otra parte, las distintas comisiones encargadas en cada comunidad de elaborar las normas que rigen las pruebas de acceso a la universidad interpretan el real decreto y la normativa de su comunidad de manera dispar, lo que en muchos casos pone en aprieto al profesorado que imparte estas materias porque no sabe si seguir las recomendaciones de la Comisión Delegada o velar por el cumplimiento del objetivo del real decreto.

Nos referimos a la prohibición expresa del uso de determinados modelos de calculadoras, o a la permisividad de modelos demasiado básicos para la edad y conocimientos del alumno. Esta situación varía según las comunidades autónomas y pone en desventaja a los alumnos de las que no permiten modelos avanzados, frente a las que sí lo hacen.

Por todo lo anterior nuestras primeras conclusiones son las siguientes.

- Las autoridades educativas deben pedir a las comisiones delegadas de las pruebas de acceso que se adapten al currículo vigente, y por tanto que permitan el uso de las calculadoras gráficas y simbólicas en las pruebas de selectividad.

- Las comisiones delegadas deben expresar con claridad los criterios de evaluación y de corrección, incluyendo en ellos el uso de los recursos tecnológicos a que alude el Real Decreto, ya que si éstos no son evaluados las pruebas no se ajustan a los objetivos y criterios de evaluación del Bachillerato.

- Administración y Universidad, deben ponerse de acuerdo en el tipo de enseñanza que esperan que el profesorado impartamos, utilizando o no las tecnologías, y en particular las calculadoras adecuadas a los contenidos de bachillerato, que como expertos en la materia, creemos que deben ser las gráficas o simbólicas (las científicas básicas son para un nivel inferior), porque los mensajes que envían al profesorado son contrarios en muchos casos y crean incertidumbre y desasosiego.

- Para tomar las decisiones anteriores se debe antes analizar lo que ocurre en el resto de Europa, donde ya se permite el uso de cualquier tipo de calculadora. No tiene sentido hablar de un marco común europeo sin incluir las herramientas que otros países tienen aceptadas.

- Es deseable que todas las autonomías tomen criterios comunes, para que todo el alumnado tenga las mismas oportunidades ante una prueba que le permitirá, una vez superada, ingresar en cualquier universidad estatal.

Además, como conocedores y profesionales de la docencia de las matemáticas con calculadoras y ordenadores, con experiencia contrastada por su uso durante años en el aula creemos que nuestra opinión debe ser un referente y por eso añadimos:

1. Las matemáticas son un instrumento básico para otras materias del currículo (economía, física, geografía, tecnología, dibujo técnico…) y con ellas las herramientas tecnológicas (calculadoras, ordenadores…) que se utilizan para su estudio y para la resolución de problemas. Estas tecnologías deben ser enseñadas y evaluadas por sus especialistas, esto es, los docentes de matemáticas.
2. El uso de calculadoras es demandado tanto por el profesorado de matemáticas como por el de otras materias, por lo que su uso en las PAU debe generalizarse.
3. Las calculadoras, en sus distintas versiones, son un recurso TIC. Ofrecen las mismas prestaciones que algunos programas matemáticos pero con menos requerimientos técnicos, siendo más accesibles y manejables.
4. Desde la FESPM se ofrece colaboración a las distintas Universidades para analizar y debatir el uso de las TIC, y de las calculadoras en particular, en las PAU, con el objetivo de establecer normas que permitan su uso.
5. Lo que no se evalúa se devalúa, como está ocurriendo con las calculadoras y el software experto, que por un lado se promociona a través de cursos de formación y con la dotación de ordenadores y por otro se omite en las pruebas oficiales.
6. Las administraciones educativas deben velar para que todos los alumnos tengan los mismos recursos en el aula y en las pruebas objetivas. Los centros deben tener cierta dotación de calculadoras para alumnos que estén pasando por situaciones económicas desfavorables. Los emuladores de calculadoras constituyen una ayuda para este tipo de casos.
7. El sistema educativo debe funcionar como una cadena de aprendizaje, en la que las herramientas tecnológicas se integren de forma natural y escalonada adaptándose en cada momento a los contenidos y las competencias que el alumno vaya adquiriendo, continuar sin interrupciones hasta el final de sus estudios, (la formación profesional, la universidad …) y posteriormente en su vida laboral. Esta cadena no puede depender del profesor que el alumno tenga ni del centro en el que estudie, y tampoco de la comunidad autónoma donde resida.
8. Las PAU deben añadir a los problemas que se plantean en sus exámenes, preguntas que evalúen la comprensión de conceptos y propiedades matemáticas utilizando calculadoras o software como los que se espera que un preuniversitario sepa manejar, ya que esos alumnos en un futuro tendrán que adquirir competencias que le permitan integrase en el Espacio Europeo de Educación Superior.
9. Finalmente, en el espíritu del marco de convergencia europeo es conveniente que las distintas universidades españolas unifiquen criterios de diseño y evaluación de las pruebas de acceso que respondan a las demandas de la sociedad actual en todos los ámbitos, sin olvidar las TIC.

Anexo I

Ejemplo 1. (PAU Portugal, es obligatorio el uso de la calculadora gráfica)

Un campo de fútbol debe tener una bancada destinada a los socios, que tenga cabida para 4000 espectadores. Si por cada billete se piden 10 euros, se prevé que las entradas de esas localidades queden agotadas. Basándose en experiencias anteriores, se sabe que si el precio de cada billete aumenta un cierto porcentaje, x, sobre el valor base (10 euros), el número de espectadores baja la mitad de ese porcentaje. Por ejemplo, si el precio de los billetes aumenta un 10%, x=0,1, el número de espectadores sufre un descenso del 5%. Suponiendo cierto el modelo anterior y considerando siempre un aumento porcentual, x, sobre el precio base (10 euros), responde las siguientes cuestiones:

1. *Comprueba que, si x es el aumento porcentual del precio de cada billete para estas localidades, la rentabilidad por la venta de billetes R, está dada por:*

$$R(x) = -20000\, x^2 + 20000\, x + 40000 \text{, con } 0 \le x \le 2$$

Ten en cuenta que:

- *El precio de cada billete, p, en función del aumento porcentual, x, está dado por p(x)=10(1+x)*
- *El número de espectadores, n, en función del aumento porcentual, x, está dado por n(x)=4000 – 2000 x.*

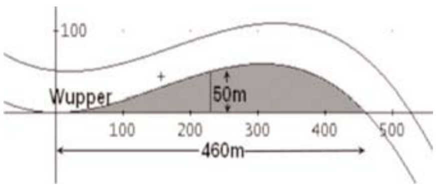
2. *Uno de los directivos del club sugiere que el precio de cada billete sea de 20 euros, para ser maximizadas las ganancias. Pero un segundo directivo se opone, diciendo que lo ideal es mantener el precio de cada billete en 10 euros. Utiliza la calculadora gráfica para averiguar cuál de los dos tiene razón, incluyendo en la respuesta los gráficos que hayas obtenido con la calculadora*

En este problema está involucrada la competencia lingüística, ya que hay que interpretar en contexto el enunciado y traducirlo usando términos matemáticos, relacionándolo con la expresión algebraica que se sugiere. También está implicada la competencia en modelización, puesto que se trata de ver cuál es el dominio de validez del modelo propuesto en el enunciado. También se incluye el uso del lenguaje simbólico, formal y técnico de las operaciones, al relacionar las expresiones algebraicas que representan el precio de cada billete, el número de espectadores y la rentabilidad.

La calculadora gráfica permite visualizar la gráfica de la rentabilidad, y observar el dominio de la función, a la vez que determinar la ganancia máxima, sin más que usando las flechas de cursor. De esta manera, el resolutor se libera de una carga de cálculos algebraicos que son innecesarios para resolver el apartado 2.

Ejemplo 2. (PAU Alemania, en algunos Lander está permitido o es obligatorio el uso de calculadora gráfica y/o CAS)

A. Con calculadora estadística y/o gráfica:

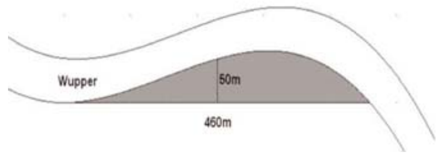


Se facilita a los estudiantes un plano donde se muestra el perfil del río Wupper, con un sistema de coordenadas ya dibujado y se sabe que el precio del terreno señalado en gris sobre el plano es de 12 € el metro cuadrado. Se pide:

a. Justifica que la función $f(x)= a{\cdot}x^2 \cdot(x-460)$ describe el perfil de la orilla del rio en el sistema de coordenadas elegido. Calcula la variable a (Solución: a=1/243340)

b. Calcula el precio de la parcela de terreno señalada.

B. Con calculadora simbólica algebráica (cas)



Se facilita a los estudiantes un plano donde se muestra el perfil del rio Wupper, *sin ningún sistema de coordenadas dibujado* y se sabe que el precio del terreno señalado en gris sobre el plano es de 12 € el metro cuadrado. Se pide:

> *Determina una función que describa la orilla del río en un sistema de coordenadas apropiado y calcula el precio de la parcela de terreno señalada.*

Tanto en el caso A como en el B, la actividad principal es la modelización. En el primero se trata de “traducir” los datos visuales a expresiones algebraicas razonables, de manera que se pueda explicitar el modelo que mejor se ajusta al perfil del río. Los ensayos se pueden hacer con la calculadora gráfica, con la que podemos conectar expresión algebraica y representación gráfica. Usando una estrategia de ensayo y error, es posible obtener la ecuación de la función (el valor de *a*) y, con la calculadora gráfica se puede obtener el área de la región pedida y calcular el precio del terreno. Por supuesto, también se podría obtener algebraicamente el valor del parámetro *a*. Sin embargo, la calculadora puede liberarnos de la manipulación algebraica para realizar una búsqueda más visual.

En cambio, en el caso B, estamos ante una investigación en la que hay que tomar decisiones. Y decisiones importantes. La primera es la elección de un buen sistema de referencia. Después, una vez elegido, hay que usar los datos del enunciado para ensayar un modelo que se ajuste bien al perfil del río. Es evidente que ahora la dificultad es mayor y, por ello, la calculadora simbólica CAS nos puede ser de gran ayuda para establecer conexiones entre expresiones algebraicas y gráficas y para comprobar la validez de los modelos que se van probando. Una vez obtenido el modelo, el cálculo del área y del precio del terreno se ve favorecido por el uso de la calculadora simbólica. ■

NOTAS

1 Mostramos como ejemplo la comunidad gallega que como objetivo nº 4 indica:

4. Emplear los actuales recursos tecnológicos para obtener y procesar información, facilitar la comprensión de conceptos y propiedades matemáticas, realizar cálculos y representaciones gráficas y servir como herramienta en la resolución de problemas.

Y en las recomendaciones iniciales expone

“Entre los medios que puede utilizar el profesorado en el transcurso del desarrollo de su trabajo merecen especial mención las calculadoras y los programas informáticos, entre los cuales cabe destacar los sistemas de álgebra computacional, los sistemas de geometría dinámica y las hojas de cálculo. Todos ellos deben utilizarse, además de para la realización de cálculos o la elaboración de gráficas, como una ayuda en el proceso de enseñanza de conceptos o propiedades.”

En el bloque de estadística de Matemáticas aplicadas a las Ciencias sociales podemos leer

“Se trata de valorar la capacidad de organizar la información estadística en tablas y gráficos y calcular los parámetros que resulten más relevantes con la ayuda de la calculadora o de la hoja de cálculo.”

Conferencia Klein-España: Matemáticas para la educación del siglo XXI[1]

International Mathematical Union

International Commission on Mathematical Instruction

El proyecto Klein

El Proyecto Klein[2] es una iniciativa conjunta de la Unión Matemática Internacional (IMU) y la Comisión Internacional para la Instrucción Matemática (ICMI) para desarrollar una versión actualizada (en la forma y en el fondo) del hito que supuso la publicación, en 1908, del libro[3] de F. Klein *Matemática Elemental desde un punto de vista superior.* El Proyecto trata de desarrollar, a lo largo de los próximos años, una serie de materiales de diversa naturaleza (libros, folletos, etc.; recursos de Internet: wikis, foros, portales; audiovisuales: CDs, DVDs, etc.) que ayuden a trasmitir la amplitud y vitalidad que la investigación matemática ha alcanzado a lo largo del siglo XX, conectándola con el currículo de la enseñanza secundaria. El acuerdo de IMU/ICMI contempla la edición de los distintos materiales en alemán, chino mandarín, español, francés e inglés, al menos.

Más información sobre el Proyecto Klein ha aparecido en el artículo titulado El Proyecto Klein. *La Gaceta de la RSME*, Vol. 12 (2009), Núm. 3, Págs. 445-448. (También en: Recio, T. (2009). El Proyecto Klein. *SUMA*, 62, pp. 124-126).

El Proyecto Klein está dirigido por una comisión que ha de diseñar (precisar formatos, estructuras, enfoques y contenidos, buscar los autores adecuados, etc.) y difundir, en los próximos años, dicho proyecto. Una comisión formada por ocho personas, cuatro propuestas por el comité ejecutivo ICMI, cuatro por el comité ejecutivo IMU, con un coordinador -el profesor William Barton, del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Auckland, Nueva Zelanda- consensuado por ambas partes.

Además del profesor Barton, actual presidente de ICMI, la Comisión Klein está formada en la actualidad por los profesores: Michéle Artigue, Universidad de Paris VII; Ferdinando Arzarello, Universidad de Turín; Graeme Cohen, Universidad Tecnológica, Sydney; William McCallum, Universidad de Arizona; Tomás Recio, Universidad de Cantabria; Christiane Rousseau, Universidad de Montreal; y Hans-Georg Weigand, Universidad de Wurzburg.

Tras unas primeras reuniones en París (junio 2009) y en Auckland (abril 2010), la comisión ha puesto en marcha, entre otras acciones, la organización de una serie de *Conferencias Klein* en diversos lugares del mundo, concitando a profesores de secundaria y universidad para recabar su opinión y sugerencias sobre el desarrollo del proyecto.

Rafael Crespo, *Universitat de València.* **Serapio García-Cuesta,** *IES Andrés de Vandelvira. Albacete.* **Manuel de León,** *ICMAT (CSIC-UAM-UC3M-UCM).* **Adolfo Quirós,** *Universidad Autónoma de Madrid.* **Tomás Recio,** *Universidad de Cantabria.* **Luis Rico** *Universidad de Granada.*

De izquierda a derecha; Tomás Recio, Graeme Cohen, Michéle Artigue, Christiane Rousseau y William Barton, cinco de los miembros de la *Comisión Klein.*

La Conferencia Klein-España

Este ha sido el objetivo de la que se ha celebrado los días 2 al 4 del mes de junio de 2010, en el Centro Internacional de Encuentros Matemáticos (CIEM) de Castro Urdiales[4]. El proyecto *i-Math* y el propio CIEM, han subvencionado, entre otros patrocinadores, dicha actividad.

La organización de esta Conferencia Klein-España ha estado a cargo de una comisión presidida por el profesor Recio y formada por los profesores: Rafael Crespo, de la Universidad de Valencia, presidente de la Conferencia de Decanos de Matemáticas (CDM); Serapio García-Cuesta, presidente de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM); Manuel de León, miembro del comité ejecutivo de la IMU; Luis Rico, de la Universidad de Granada, presidente de la Comisión de Educación del Comité Español de Matemáticas (CEMAT), representante de España ante ICMI; y Adolfo Quirós, de la Universidad Autónoma de Madrid, secretario del CEMAT.

La participación en la Conferencia Klein se ha canalizado a través de las distintas instituciones integradas en el Comité Español de Matemáticas (www.ce-mat.org): Conferencia de Decanos de Matemáticas, Sociedad Catalana de Matemáticas (SCM), Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), Sociedad Española de Matemática Aplicada (SEMA), Sociedad de Estadística e Investigación Operativa (SEIO), Real Sociedad Matemática Española (RSME) y Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Todas ellas, excepto la última, propusieron dos delegados, uno de los cuales actuó como ponente. La FESPM contó con ocho delegados, dos de los cuales actuaron como ponentes.

Además, asistieron a la Conferencia seis miembros de la Comisión Klein (esto es, la práctica totalidad de dicha Comisión, excepto los profesores Arzarello y McCallum) y todos los miembros de la comisión organizadora. Los cinco miembros extranjeros de la Comisión Klein presentaron ponencias. También fueron invitados, como ponentes propuestos por la organización, los profesores Miguel Ángel Herrero y Alberto Ibort, así como dos profesores de la Universidad de Cantabria, anfitriona del evento. Por último, cabe señalar la presencia, atendiendo amablemente a la invitación cursada por los organizadores, de D. Vicente Riviere, Subdirector General de Cooperación Territorial, del Ministerio de Educación.

Programa

Miércoles 2 de junio

- B. Barton: An Introduction to the Klein Project.
- L. Rico: Reflexiones desde la educación matemática en el centenario de la obra de Félix Klein.
- S. Naya: Relación entre la Estadística Escolar y la Estadística como Ciencia.

Jueves 3 de junio

- G. Cohen: Irrational and other crazy numbers.
- T. Ortega y L. Puig: ¿Qué formación matemática elemental con aproximación de orden superior debieran recibir necesariamente los profesores de matemáticas?
- R. Mallavibarrena: La Geometría de la Enseñanza Secundaria y Bachillerato: reflexiones y puntos de debate.
- M. A. Herrero: Matemáticas y Biología: lecciones para el futuro.
- S. García Cuesta: Autoevaluación y Criterios de calidad en la Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas.
- S. Amat: Matemática Aplicada: Una herramienta fundamental para la educación y la modelización matemática del siglo XXI.
- H-G. Weigand: Old Tools and New Tools in Mathematics Lessons

Viernes 4 de junio

- C. Rousseau: A course in Mathematics and Technology.
- N. Corral: El software libre en la enseñanza de la matemática.
- J. L. Álvarez: El currículo de matemáticas en la enseñanza no universitaria.
- O. Gasull: La divulgación matemática desde la Universidad.
- J. Duoandikoetxea: ¿Matemáticas superiores (del siglo XX) desde el punto de vista elemental (en el siglo XXI)?

Participantes en la Conferencia Klein-España en la entrada al *Centro Internacional de Encuentros Matemáticos* de Castro Urdiales.

- A. Ibort : Enseñando matemáticas y física: ¿una colaboración imposible?
- M. Artigue: Funciones y Análisis desde la perspectiva del proyecto Felix Klein.
- Conclusiones.

El detalle de la lista de asistentes y del programa desarrollado puede consultarse en la página web de la conferencia, www.ciem.unican.es/encuentros/klein/.

Conclusiones

Las siguientes consideraciones recogen, en alguna medida, diversas manifestaciones de los asistentes a la Conferencia, recopiladas en una sesión de la misma dedicada a este fin. Estas observaciones han sido posteriormente debatidas e interpretadas por la comisión organizadora hasta llegar a la siguiente formulación:

Los asistentes a la Conferencia Klein-España, tras las ponencias y debates que han tenido lugar durante la misma, desean

1. Constatar el interés de esta iniciativa, tanto en lo que se refiere al resultado final como al propio proceso de reflexión, que ha propiciado el encuentro de múltiples agentes educativos: investigadores de matemáticas, de didáctica de la matemática, profesores de matemáticas de secundaria y representantes ministeriales y de sociedades científicas. El proceso puesto en marcha ha mostrado el impacto del estudio y el debate en torno a la obra de Klein.

2. Destacar la creación/evolución de la Didáctica de la Matemática durante el siglo XX y reconocer, en todo caso, la contribución de sus investigaciones en esta reflexión.

3. Recuperar el libro de Klein: (http://dmle.cindoc.csic.es/libros.php), en su primera edición en español, propiciar su relectura e impulsar la preparación de nuevos documentos y otros trabajos de reflexión vinculados a la necesaria formación matemática del profesor de secundaria.

4. Preguntarse si la relación entre la matemática superior y la matemática elemental del siglo XX es la misma que la del siglo XIX. Incentivar la reflexión desde un punto de vista similar al que desarrolló Klein, pero adaptado al siglo XXI. ¿Qué conceptos centrales de la matemática superior desarrollada en el siglo XX desempeñan un papel similar al reivindicado por Klein para la noción de función?

5. Constatar que la mayoría de los problemas educativos descritos por Klein (doble ruptura: escolar-universitaria-escolar, dificultad para el cambio), así como los componentes básicos que él propone para el análisis de los con-

tenidos de la matemática escolar (aplicabilidad/fenomenología, representaciones, génesis histórica y formalización) permanecen.

6. Subrayar que:

- Los destinatarios del proyecto son todos los profesores y en especial, el profesorado de secundaria, cuya profesionalidad se ha puesto de manifiesto en la Conferencia, expresando su voluntad de mejora y de búsqueda de la calidad, aunque también se ha planteado la necesidad, en este esfuerzo, de tener en cuenta un contexto mucho mas amplio que el binomio profesor/alumno.

- El actual marco normativo español ofrece una oportunidad singular para beneficiarse del Proyecto Klein, por coincidir la puesta en marcha de una reforma educativa, basada en competencias y una reforma en la formación inicial del profesor de secundaria, basada en un Máster de carácter profesional.

- El uso y aprovechamiento de las nuevas tecnologías, que pueden enmarcar los resultados del Proyecto Klein, deben ser parte integrante de esa reforma. Reforma y Proyecto Klein también coinciden en su énfasis en la transversalidad intra-matemática, en la relación con otras disciplinas (por ejemplo, la Biología y la Física, presentes en sendas ponencias en la Conferencia, aunque el caso de la Física tal vez requiera un estudio singular, ligado a las tradiciones culturales) y en la relación con la tecnología y con el uso social de las matemáticas.

- Existen problemas específicos en la enseñanza de algunas ramas de las matemáticas, singularmente en el caso de la Geometría y la Probabilidad y Estadística. También el papel de la demostración en el desarrollo de las clases de matemáticas necesita una consideración propia.

7. Recomendar una mayor inclusión en el Máster de Formación del Profesorado de Matemáticas de temas que resalten las aplicaciones de las Matemáticas en la tecnología, a fin de contribuir a su conocimiento por el profesorado.

8. Contemplar en los planes de formación inicial y permanente para los profesores de matemáticas el dominio de plataformas específicas para el uso de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación, que contribuyan a la innovación y favorezcan el diseño de tareas y actividades escolares.

9. Realizar una llamada a la participación y difusión del Proyecto Klein, solicitando, a los miembros de las sociedades aquí representadas,

- el envío de artículos cortos *à la Klein*, en el sentido que se describe en la wiki del proyecto http://kleinproject.org. En la conferencia se han presentado ejemplos variados de posibles contribuciones en esta línea (charlas de Rousseau, Weigand, Cohen, Herrero, Amat, Corral, Naya, Artigue).

- la remisión de *cuestiones generatrices* que permitan recorridos matemáticos más amplios y abordados desde diversas perspectivas permitirá ampliar la participación de profesores e investigadores españoles en el proyecto.

10. Señalar a la Comisión Klein

- la necesidad de aclarar algunos aspectos del enfoque, para el desarrollo del Proyecto Klein, que la Comisión ha expuesto en esta Conferencia: por ejemplo, los relativos al desarrollo de muchos caminos matemáticos de corto recorrido, señalando, en su caso, orígenes comunes, enlazando algunos recorridos con otros, formando trayectorias más amplias, relacionando tales caminos con los capítulos del libro, etc.

- urgencia de proporcionar, pronto, ejemplos paradigmáticos, plantillas, guías de capítulos, protocolos para el envío de enlaces a materiales interesantes, etc. así como la de aclarar diversos asuntos relativos al carácter de publicación de los materiales enviados y sobre la propiedad intelectual de los mismos.

Contactos

Rafael Crespo (Rafael.Crespo@uv.es)
Serapio García-Cuesta (serapiogarcia@telefonica.net)
Manuel de León (mdeleon@icmat.es)
Adolfo Quirós (adolfo.quiros@uam.es)
Tomás Recio (tomas.recio@unican.es, web: www.recio.tk)
Luis Rico, (lrico@ugr.es, web: fqm193.ugr.es/)

NOTAS

[1] Este artículo ha aparecido también en La Gaceta de la RSME, Vol. 13, (2010), no. 3. pp. 449-454.

[2] http://kleinproject.org

[3] Una versión digital en castellano puede descargarse gratuitamente en http://dmle.cindoc.csic.es/libros.php

[4] http://www.ciem.unican.es/klein2010

Normas de publicación

1.- Para el envío de artículos o cualquier consulta sobre su contenido se utilizará el correo electrónico de la redacción de SUMA(articulos@revistasuma.es) o su dirección postal:

Revista SUMA, Apartado de Correos 498, 46900 Torrent.

2.- Si los trabajos, imágenes incluidas, ocupan más de 5Mb sólo se enviaran por correo postal en soporte magnético (CDRom, DVDRom o Pen drive).

3.- Los trabajos deben ser enviados como archivo en formato MS Word o rtf –tipo de letra Times New Roman y tamaño 12– adjunto a un mensaje de correo electrónico en el que deben figurar:

i. El título del trabajo, los nombres y apellidos de todos los autores, su lugar de trabajo y su dirección completa así como la sociedad federada a la que pertenecen (si se desea).

Y a efectos de comunicación:

ii. El correo electrónico, teléfono y dirección postal del autor de contacto.

4.- Se debe enviar una segunda versión del original en la que no aparezcan los nombres de los autores, ni información relativa a ellos o que pueda servir para identificarlos (e.g., institución a la que pertenecen, citas y referencias bibliográficas propias, agradecimientos, datos del proyecto en el que se enmarca el trabajo). En esta versión, reemplace las citas y referencias bibliográficas por "Autor, 2009" o "Autor et al., 2009". En las referencias bibliográficas propias se debe eliminar el título y el nombre de la revista o el título del libro donde se publica.

5.- Se admiten diversos tipos de trabajos: teóricos, informes de investigaciones, divulgación, innovación didáctica…

6.- Junto con el artículo se remitirá un resumen (máximo de 600 caracteres incluyendo espacios), una traducción del mismo y del título en inglés, cinco palabras clave jerarquizadas (en castellano e inglés).

Ejemplo: *Investigación didáctica, Álgebra, Modelización y dificultades, Enseñanza y aprendizaje, Secundaria y bachillerato.*

7.- El texto estará en una sola columna y tendrá una longitud máxima de 25000 caracteres sin incluir espacios pero incluyendo las tablas, las figuras y los anexos.

8.- Es imprescindible que los esquemas, dibujos, gráficas e imágenes sean guardados en formato **TIF, EPS** o **JPEG**, a una resolución de 300 ppp. y en color original. Éstos se adjuntarán en una carpeta aparte del documento del texto, ya que las imágenes incrustadas en el texto no son válidas para su posterior edición. Cada archivo debe estar claramente identificado y se debe indicar en el texto el lugar donde se ubica. De igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.

9.- Si alguna expresion no se puede escribir con los carácteres disponibles en la fuente Times New Roman, se incluirá, con un editor de equaciones, fuera del texto y si no fuera posible se incorporará como imagen.

10.-La bibliografía se dispondrá también al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, siguiendo las normas APA.

Ejemplos

Libros:

Apellido del autor, coma, inicial/es del nombre, punto, fecha entre paréntesis, punto, título en letra cursiva, punto, lugar de edición, dos puntos, editorial, punto.

Filloy, E., Rojano, T. & Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. New York: Springer.

Capítulos en libros

Cuando se cita un capítulo de un libro, el cual es una compilación (reading), se cita en primer lugar el autor del capítulo y el título del mismo, seguidamente el compilador (Comp.), editor (Ed.) o director (Dir.), coordinador (Coord.), título (las páginas entre paréntesis). Lugar de edición: y editorial, igual que en la referencia de cualquier libro.

Puig, L. (2006). La resolución de problemas en la historia de las matemáticas. En Aymerich, José V. y Macario, Sergio (Eds.) *Matemáticas para el siglo XXI* (pp. 39-57) Castellón: Publicacions de la Universitat Jaume I.

Artículos en revistas

Lo que va en letra cursiva, es el nombre de la revista. Se debe especificar el volumen de la revista y las páginas que ocupa el artículo separadas por un guión. Se especificará el volumen y el número de la revista, cuando cada número comienza por la página uno.

Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, *26*(3), pp. 327-342.

Para consultar más ejemplos de citas bibliográficas, visitar:
http://www.revistasuma.es

11.-Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ... supone un gran avance (Hernández, 1992). Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ... según Rico (1993).

12.-Si durante el texto se cita una referencia de más de tres autores se puede citar el primero seguido de la expresión et al. (y otros). Por ejemplo, "Bartolomé et al. (1982)", "Gelpi et al. (1987)". Pero en la bibliografía deben aparecer todos los autores.

13.-Todas las referencias bibliográficas deben corresponder a menciones hechas en el texto.

14.-Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo y se incluirán al final del texto.

15.-Después de haber recibido el trabajo se enviará un correo electrónico como acuse de recibo.

16.-Cada trabajo será remitido a dos asesores para ser referenciado. Estos no serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, de acuerdo con las normas, criterios y recomendaciones propios de la revista SUMA.

17.-Si los dos informes son positivos el artículo será publicado. Si los dos informes son negativos se rechazará su publicación. Si existe discrepancia entre los informes, se solicitará un tercer informe que decidirá su publicación o su rechazo.

18.-Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como –en caso afirmativo– la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido.

19.-No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo. ■

Propuesta de categorias para las palabras clave

Teoría Innovación didáctica Divulgación Investigación didáctica Experiencia de aula ...	Álgebra Análisis Aritmética Estadística Probabilidad Geometría Resolución de problemas. Topología ...	Números (Naturales Enteros, ...). Resolución de problemas de ..., Ecuaciones, Figuras en el plano, en el espacio Funciones Modelización Lógica Errores, dificultades ...	Libros de texto Historia Cognición Metacognición Razonamiento Demostración Legislación y reformas(LOGSE, LOU, LOE ...) Actitudes Destrezas Procesos Conceptos Enseñanza, aprendizaje, educación ...	Infantil Primaria Secundaria Bachillerato Universidad ...

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Comisión Ejecutiva

Presidente: **Serapio García Cuesta**
Secretario General: **Francisco Martín Casalderrey**
Vicepresidente: **Manuel Torralbo Rodríguez**
Tesorera: **Claudia Lázaro del Pozo**

Secretariados:
Prensa: **Biel Frontera Borrueco**
Revista SUMA: **Tomás Queralt Llopis/Onofre Monzó del Olmo**
Relaciones internacionales: **Sixto Romero Sánchez**
Publicaciones: **Ricardo Luengo González**
Actividades y formación del profesorado: **Juana Mª Navas Pleguezuelos**
Actividades con alumnos: **Jordi Comellas i Blanchart**

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidenta: Carme Aymerich Padilla
CEIP Rocafonda
C/Tàrrega, 41
08304 Mataró (Barcelona)

Sociedad Andaluza de Educación Matemática *Thales*
Presidente: Manuel Torralbo Rodríguez
Facultad Matemáticas. Apdo. de Correos 1160. 41080 Sevilla

Sociedad Aragonesa *Pedro Sánchez Ciruelo* de Profesores de Matemáticas
Presidenta: Ana Pola Gracia
ICE Universidad de Zaragoza. C/ Pedro Cerbuna, 12. 50009 Zaragoza

Sociedad Asturiana de Educación Matemática *Agustín de Pedrayes*
Presidente: Juan Antonio Trevejo Alonso
Apdo. de Correos 830. 33400 Avilés (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas *Isaac Newton*
Presidenta: Ana Alicia Pérez
Apdo. de Correos 329. 38200 La Laguna (Tenerife)

Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática *Miguel de Guzmán*
Presidente: Antonio Bermejo Fuertes
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Víllalar, s/n. 09006 Burgos

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García Cuesta
Avda. España, 14, 5ª planta. 02002 Albacete

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidente: Bienvenido Espinar Cepas
CPR Murcia II. Calle Reina Sofía n.º1. 30007 Murcia

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas *Tornamira*
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea *Tornamira*
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.
Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra. 31006 Pamplona

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Manuel Rodríguez Mayo
Apdo. de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Extremeña de Educación Matemática *Ventura Reyes Prósper*
Presidente: Ricardo Luengo González
Apdo. de Correos 590. 06080 Badajoz

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*
Presidente: Juan A. Martínez Calvete
C/ Limonero, 28. 28020 Madrid

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: María José Señas Pariente
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidente: Luis Serrano Romero
Facultad de Educación y Humanidades. Ctra. Alfonso XIII, s/n. 52005 Melilla

Sociedad *Puig Adam* de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Facultad de Educación. (Sec. Deptal. Álgebra). Despacho 3005.
C/ Rector Rollo Villanova, s/n. 28040 Madrid

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas *A prima*
Presidente: Elena Ramirez Ezquerro
CPR. Luis de Ulloa, 37. 26004 Logroño

Sociedade Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)
Presidente: Manuel Díaz Regueiro
C/ García Abad, 3, 1ºB. 27004 Lugo

Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana *Al-Khwarizmi*
Presidente: Onofre Monzó del Olmo
Departamento de Didáctica de la Matemática. Apdo. 22045. 46071 Valencia

Societat Balear de Matemàtiques *Xeix*
Presidente: Josep Lluís Pol i Llompart
C/ Martí Rubí 37/alts. 07141 Sa Cabaneta (Marratxí). Islas Baleares

Boletín de suscripción

Tarifas	Suscripción anual	Número suelto	Monografía
Particulares	25 €	10 €	15 €
Centros	40 €	15 €	15 €
Europa	50 €	20 €	15 €
Resto del mundo	60 €	22 €	15 €

Fotocopiar esta hoja y enviar:
por correo a: Revista SUMA. Apartado de correos 498
46900-Torrent (Valencia)
por Fax al: (+34) 912 911 879
por correo-e a: administracion@revistasuma.es

Deseo suscribirme a la revista SUMA:

Nombre y apellidos: NIF/CIF:

Dirección: Teléfono:

Población: CP:

Provincia: País:

Correo electrónico: Fax:

Importe (€)

☐ Suscripción a partir del año (3 números) ________

☐ N.os sueltos ____________________

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)

☐ Transferencia bancaria (CCC 2077-0347-11-1101452547)

Fecha y firma:

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista SUMA

☐ Giro postal dirigido a Revista SUMA

Nombre y apellidos:

Código Cuenta Cliente: Entidad: Oficina: DC: Cuenta:

Banco/Caja:

Agencia n.º: Dirección:

Población: Provincia:

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (fecha y firma):

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Σ

ISSN 1130-488X

SUMA. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.