



# MARTECH 2015. Matemáticas, Arte y Tecnología

PEDRO J. MIANA SANZ  
BEATRIZ RUBIO SERRANO  
LUIS RÁNDEZ GARCÍA  
MIGUEL A. MARCO BUZUNARIZ  
IVÁN BAILERA MARTÍN

El principal objetivo de esta reunión científica divulgativa fue tratar las profundas conexiones existentes entre Matemáticas, Arte y Tecnología desde diversos puntos de vista. En el primer día, viernes 20 de noviembre, bajo el título, *Mira, toca, escucha Matemáticas*, se propuso al público aproximarse a las Matemáticas desde la creación audiovisual, la arquitectura y la música. El segundo día se celebró el *II Día de Geogebra en Aragón*, y contó con conferencias invitadas, comunicaciones y talleres. Por último el domingo se celebró la *Jornada SageMath* en el que se presentaron diversos recursos de este

programa informático en la enseñanza, investigación y divulgación de las Matemáticas.

Estas jornadas fueron organizadas por el Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones (IUMA) de la Universidad de Zaragoza, por la Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas (SAPM) y por el Centro Etopía, Center of Art and Technology del Ayuntamiento de Zaragoza. Esta reunión ha sido financiada parcialmente por el proyecto 15021 MARTECH 2015 de la Universidad de Zaragoza.

115  
SUMA  
81



Juan Pradas y Cristóbal Vila en la Inauguración de MARTECH  
(Foto: Luis Rández)

## Viernes 20 de noviembre de 2015, *Mira, toca, escucha Matemáticas*

Juan Pradas de Jaime, Gestor de Proyectos de la Milla Digital y Director de Programación del Centro Etopía dio la bienvenida a los más de 130 inscritos en esta reunión divulgativa de las Matemáticas. Tras unas breves palabras de presentación de las jornadas a cargo del Profesor-Secretario del IUMA, Pedro J. Miana, el primer conferenciante, Cristóbal Vila, conocido animador 3D, tomó la palabra para iniciar su presentación titulada *Arte, matemáticas y naturaleza a través de la animación 3D*.

Las Matemáticas, y muy especialmente la Geometría, están detrás de varias de las animaciones 3D de Vila. Durante esta charla se describió en detalle el proceso creativo y constructivo de algunos de sus trabajos de animación. Y cómo, a lo largo de ese proceso, las Matemáticas y la Geometría juegan un papel importante como herramientas de trabajo y como elementos inspiradores. En particular se presentaron las siguientes creaciones.

- *Snakes*: basada en un grabado de Escher, donde se ponen de manifiesto varias ideas matemáticas como la simetría radial o el infinito.
- *Isfahan*: inspirada en la arquitectura persa y repleta de complejas teselaciones y ornamentaciones geométricas.
- *Nature by Numbers*: donde se ponen en relación elementos de la naturaleza con sus referentes matemáticos.
- *Inspirations*: donde se hace un recorrido por el estudio de trabajo imaginario de Escher, lleno de referencias matemáticas y artísticas.
- *Ars Qubica*: donde se pone de manifiesto la relación entre Geometría y Arte mediante un recorrido por diferentes obras pictóricas, decorativas y arquitectónicas.

La profesora Pilar Rueda de la Universidad de Valencia impartió la conferencia *La Lonja de la Seda y las matemáticas*. Es bien conocido que pese a que la belleza es una noción abstracta que se rige por criterios subjetivos, la proporción áurea se ha utilizado a lo largo de los siglos con la finalidad de crear elementos bellos y armoniosos. Concretamente en su presentación, evidenció el protagonismo que tiene la proporción áurea en la Lonja de Valencia. Ubicada en el corazón de la ciudad de Valencia, la Lonja de la Seda es una pieza maestra del Gótico civil europeo que fue declarada Patrimonio de la Humanidad en 1996. La charla se basó en un trabajo conjunto con Paula Donat.



El premiado compositor aragonés Carlos Sautué aplica la estructura fractal para componer originales piezas musicales. Esta técnica, iniciada por su maestro Francisco Guerrero, permite matematizar el espacio musical y abordar grandes estructuras de cálculo desde el lenguaje musical tradicional. Partiendo de la visualización de la geometría fractal, se transcribe posteriormente la composición al lenguaje musical. A lo largo de la presentación *Matemáticas y Música* se mostraron distintos ejemplos concretos, siempre dentro de un entorno gráfico y auxiliados con documentos de audio y vídeo y algún fragmento de *Laberinto de la noche*, obra para saxofones barítono, alto, tenor y soprano con conjunto instrumental y dispositivo electroacústico. Esta presentación se realizó en colaboración con Carlos Frías.

## Sábado 21 de noviembre de 2015, *II Día de Geogebra en Aragón*

El segundo día de *MArTech* fue dedicado enteramente al programa de geometría dinámica *GeoGebra*, en lo que fue la segunda edición del *Día*

de *GeoGebra* repitiendo el éxito de participación y organización de la primera. El objetivo de dicha jornada era familiarizar y ampliar los conocimientos de los asistentes, en su mayoría profesores de matemáticas de diferentes escalas educativas, sobre el uso en el aula del software *GeoGebra* como apoyo a la metodología tradicional de la enseñanza de diferentes conceptos matemáticos pertenecientes a diversas áreas como la geometría, el álgebra o el análisis. Dado el amplio abanico de posibilidades de *GeoGebra*, se optó por realizar charlas y talleres simultáneos con temáticas variadas para que cada uno pudiera elegir aquello que le resultase más atractivo, además de unas conferencias plenarias con un contenido más general.

*Arte, Matemáticas y GeoGebra* fue la ponencia que inauguró el día. José Antonio Mora, catedrático de Matemáticas en el IES San Blas de Alicante, fue el encargado de mostrar las matemáticas que aparecen en el arte ayudándose de *GeoGebra*. Hizo un estudio exhaustivo del cuadro *Las Meninas* de Velázquez, visualizando los espacios y las posiciones de los retratados en tres dimensiones. Además enseñó ejemplos prácticos que había realizado en clase con sus alumnos sobre el diseño de azulejos y mosaicos que posteriormente fueron pintados por los propios alumnos.

Debido a la variedad de contenidos sobre *GeoGebra*, se organizaron seis comunicaciones diferentes de media hora, dividiéndolas en dos grupos de tres, para que los asistentes pudiesen elegir cual atender. De 11:30 a 12:00 tuvieron lugar las siguientes tres presentaciones [2].

Luis Rández, Catedrático de Matemática Aplicada de la Universidad de Zaragoza, y Cristóbal Vila, ilustrador, nos hablaron en el auditorio de *GeoGebra* y *Ars Qubica*, un audiovisual de animación 3D que aúna matemáticas y arte. *Ars Qubica*, fue impulsado por el *Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones* y se llevó a cabo gracias a la financiación de la FECYT (FCT-14-8593), de diferentes instituciones y empresas y de una campaña de *micromecenazgo*. Los ponentes utilizaron *GeoGebra* para explicar diferentes composiciones geométricas presentes en el audiovisual: su hilo conductor es un cubo, que al ser cortado



Auditorio Principal II Día de Geogebra  
(Foto: José Maria Sorando)

por un plano da lugar a diversos polígonos (triángulo equilátero, cuadrado, pentágono no regular y hexágono), presentes en distintas obras artísticas.

El profesor del IES Salvador Victoria, Ricardo Alonso, presentó *Los libros de GeoGebra*. En la charla, el público pudo conocer un nutrido abanico de herramientas libres, útiles para confeccionar libros interactivos divididos en capítulos que posibilitan la incrustación de contenido multimedia como texto, imágenes, *applets* y videos. Asimismo, se expuso la forma de crear y editar dichos recursos mediante varios ejemplos.

La utilización de *GeoGebra* para realizar cálculo simbólico mediante la vista CAS (*Computer Algebra System*) fue explicada en la charla que dio Claudio Martínez, jefe del departamento en el IES Alhama. Desarrolló una práctica enfocada para primeros cursos de universidad que involucró la derivabilidad de funciones y funciones a trozos, la obtención de extremos absolutos y relativos, el polinomio de Taylor... También trató el problema de la resolución de ecuaciones utilizando los comandos adecuados para que *GeoGebra* nos proporcione todas las soluciones.

En el segundo bloque de charlas simultáneas se presentaron las tres siguientes comunicaciones.

Luis Rández junto a Rafael Rández, en *GeoGebra* y *JavaScript*, *ejemplos y aplicaciones*, mostraron el incremento de posibilidades que otorga implementar *scripts* en las últimas versiones de *Geo-*



*Gebra* y lo respaldaron con algunos ejemplos aplicados al cálculo numérico.

En la comunicación *Bicicleta de polígonos y otras ruedas curiosas*, Eduardo Fernández, explicó modelos hipotéticos de ruedas y carreteras no convencionales para que se adapten de manera ideal en el movimiento de una bicicleta. Además, para ejemplificar su explicación, el conferenciante expuso la construcción en *GeoGebra* de una bicicleta con ruedas poligonales.

Daniel Sierra nos mostró, en su comunicación *Utilizar GeoGebra en el aula sin saber (casi) GeoGebra*, casos prácticos de *GeoGebra* con diferentes enunciados de libros de texto de ESO. Como ejemplo, expuso una experiencia de aula en la que los alumnos de 1.º de ESO aprendieron el manejo del programa a la vez que trabajaban los conceptos propios del aula. Para la formación de los alumnos y profesorado se integraron los *applets* de *GeoGebra* en una herramienta de *e-learning* y también se utilizó un programa de captura de pantalla para que los alumnos pudieran acceder a las construcciones cuantas veces necesitaran. Para finalizar, Daniel Sierra expuso las ventajas e inconvenientes de realizar exámenes con el uso de *GeoGebra*.

La sesión matutina concluyó con la ponencia plenaria *La creatividad es la inteligencia divirtiéndose*, a cargo de José Luis Muñoz, profesor del IES Gran Capitán de Madrid. La charla, cuyo título hace referencia a una frase atribuida al físico Albert Einstein, trató de fomentar el interés de los profesores por desarrollar la creatividad de los

alumnos. Además hubo un espacio de interacción con el público presente, ya que el ponente lanzó una serie de cuestiones sobre la creatividad que pudieron ser contestadas a través de la plataforma *Kahoot*, compitiendo así unos con otros mediante un sistema de puntuación.

La tarde del sábado comenzó con la realización de cinco talleres simultáneos sobre *GeoGebra* en los que los asistentes pudieron hacer uso del programa con diferentes finalidades.

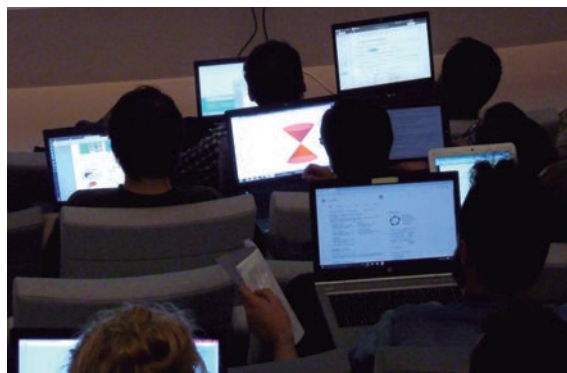
Antonio Oller impartió el taller *Arquitectura y GeoGebra, análisis de arcos*, que comenzó con el estudio de varias imágenes que contenían numerosos arcos (de herradura, escarzano, semiovoide, carpanel, conopial, morisco trespuntado y tudor) para posteriormente permitir a los asistentes descubrir, por sus propios medios, el procedimiento de construcción de diferentes arcos, como el rampante o el trilobulado.

Otro de los talleres recopiló actividades variadas en *GeoGebra*, desde el fractal de Fibonacci hasta las potencias de un número complejo, pasando por los mosaicos, la representación de ecuaciones y la visualización de expresiones algebraicas. Todos estos conceptos formaron parte del taller impartido por José Luis Muñoz que llevó el título de *Actividades creativas con GeoGebra*.

José Antonio Mora fue el encargado de impartir el taller *Construcción de mosaicos*, en el que presentó las herramientas de que dispone *GeoGebra* para realizar diferentes movimientos de isometría, como la traslación, las simetrías y las



Claudio Martínez durante su presentación  
(Foto: José María Sorando)



Vista parcial de los asistentes  
(Foto: José María Sorando)

rotaciones, que son útiles a la hora de realizar mosaicos y teselaciones del espacio utilizando polígonos para llenar por completo el plano sin solapamientos ni huecos.

Alberto Arnal y José M. Muñoz presentaron varios usos que se le puede dar en clase a *GeoGebra* en el taller *Actividades de GeoGebra en el aula de Primaria*. Desarrollaron el artículo, *Construyendo la idea de cuadrado: Un ejemplo de la integración de GeoGebra en el currículo de 1.º de primaria*, cuyo objetivo era diseñar una secuencia de actividades para la enseñanza y aprendizaje de los cuadriláteros en 1.º de Primaria y se realizó una selección entre las aplicaciones *GeoGebra* que algunas páginas web institucionales o de profesionales de reconocido prestigio ofertaban con acceso libre y gratuito.

En el taller *La tercera dimensión*, José Muñoz hizo una introducción en los elementos que no son tan conocidos del entorno 3D de *GeoGebra*. En la fase práctica del taller los asistentes realizaron actividades muy interesantes, como la generación de una hélice sobre un cilindro, la generación de las cónicas, un octaedro estrellado, un prisma de volumen máximo inscrito en una pirámide o un paraboloides hiperbólico.

Para finalizar el *II Día de GeoGebra en Aragón*, tuvo lugar la ponencia *Una visión artística con GeoGebra* por José Muñoz Santonja, en la que dio un amplio repaso por la arquitectura, la pintura y la escultura de los diferentes elementos matemáticos que intervienen en distintas obras. Así pudimos apreciar las matemáticas en la Torre del Oro de Sevilla, los cuadros geométricos de pintores como Piet Mondrian y Theo Van Doesburg, las creaciones geométricas del artista Max Bill y de los españoles Andreu Alfaro, Santiago Gimeno, Javier Carvajal Baños y Jesús Iranzo Sanz.

## Domingo 22 de noviembre de 2015, *SageMath*

La jornada del domingo fue dedicada a SageMath. Este es un software que pretende ser una alternativa libre y de código abierto a programas como Mathematica, Derive o Maple.



Taller realizado por José Antonio Mora  
(Foto: José María Sorando)

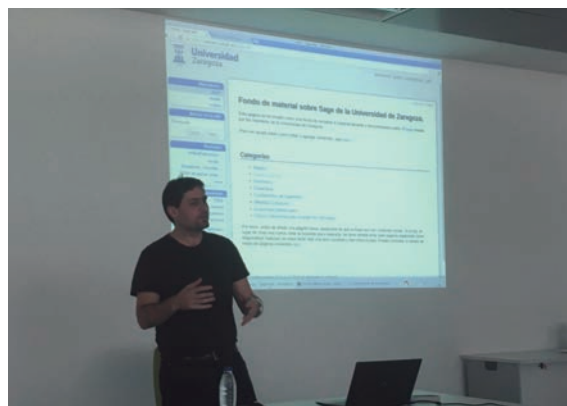
Su desarrollo se inició en 2005 por parte de William Stein, de la Universidad de Washington, y actualmente está mantenido por cientos de desarrolladores voluntarios de todo el mundo. Está orientado principalmente a la investigación y la enseñanza de nivel universitario, o bachillerato. Una de sus principales características es la de contar con un interfaz web, que permite su uso en red, instalándolo en un único ordenador y dejando que los alumnos accedan a él sin necesidad de instalar nada en sus ordenadores. Este enfoque permite, además, la edición colaborativa de las hojas de trabajo por varios usuarios.

La jornada consistió en cinco charlas impartidas por profesores de distintas universidades, principalmente sobre sus experiencias en el uso de SageMath en la enseñanza.

David Sevilla, de la Universidad de Extremadura, nos dio un repaso sobre los tres últimos años de uso de SageMath en el Campus Universitario de Mérida. Su uso se basa en dos servidores a los que los alumnos se pueden conectar a través de sus navegadores, y en los que pueden realizar tanto los ejercicios y prácticas en los que expresamente tienen que usar esta herramienta, como cálculos auxiliares para otras asignaturas. Además de describir el flujo de trabajo para enviar y compartir las hojas de trabajo, nos mostró ejemplos concretos de ejercicios y lecciones en los que la flexibilidad de SageMath resultaba ser especialmente útil.

Especialmente innovadora resultó ser la charla dada por Pablo Angulo, de la Universidad Autónoma de Madrid. En su charla, mostró un ejemplo de las posibilidades de Sagemath en cálculos combinatorios y sobre teoría de grafos. El *leitmotiv* de su presentación fueron los malabares, mostrando cómo modelizar los trucos de un malabarista como caminos en un grafo. Los vértices de este grafo son los posibles estados de las bolas, y las aristas corresponden a las posibles evoluciones de estas en cada unidad de tiempo, ya sea por el efecto de la gravedad o por la acción del malabarista al lanzarlas. Pudimos ver cómo representar estas situaciones en Sagemath, e incluso cómo usarlo para encontrar nuevos trucos, imponiendo restricciones si así lo deseamos. En concreto, nos mostró un truco que habían descubierto usando esta técnica que involucraba a dos personas: un malabarista y una persona *torpe* que se limitaba a recibir la bola que el malabarista le pasaba y devolverla inmediatamente.

Francisco de Arriba y Eusebio Corbacho, de la Universidad de Vigo, nos mostraron la solución técnica que habían desarrollado para resolver el problema del uso del software en un aula sin necesidad de instalarlo en los equipos de los alumnos. Su solución pasa por usar el portátil del profesor como servidor, usando una distribución Linux especialmente adaptada para este uso.



Miguel A. Marco durante su presentación  
(Foto: Beatriz Rubio)

La jornada terminó con la presentación que Miguel Marco, de la Universidad de Zaragoza, hizo de la plataforma que ha desarrollado para alojar un fondo documental sobre Sagemath. Este fondo está estructurado en forma de wiki, de forma que cualquiera puede colaborar aportando nueva documentación o mejorando la ya existente. Esta wiki está especialmente adaptada para el caso de Sagemath, ya que permite integrar celdas interactivas en las que se pueden ejemplos ver ejecutables por parte del usuario. Además, también incluye herramientas para importar y exportar hojas de trabajo, de manera que la documentación ahí existente puede ser usada directamente como hojas de trabajo en clase, y viceversa: las hojas de trabajo usadas en clase pueden integrarse en el fondo documental.

**PEDRO J. MIANA**

*Universidad de Zaragoza  
Instituto Universitario de investigación en Matemáticas y Aplicaciones,  
<pjmiana@unizar.es>*

**BEATRIZ RUBIO**

*Universidad de Zaragoza  
Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas  
<brubio@unizar.es>*

**LUIS RÁNDEZ**

*Universidad de Zaragoza  
Instituto Universitario de investigación en Matemáticas y Aplicaciones,  
<randez@unizar.es>*

**MIGUEL A. MARCO**

*Universidad de Zaragoza  
Instituto Universitario de investigación en Matemáticas y Aplicaciones,  
<mmarco@unizar.es>*

**IVÁN BAILERA**

*Universitat Autònoma de Barcelona  
<ivanbailera@gmail.com>*