



Crónica del encuentro: *Enseñar matemáticas con GeoGebra: retos, roles, resultados*

JOSÉ MARÍA MUÑOZ ESCOLANO

Del 11 al 13 de diciembre de 2015 se celebró el seminario *Enseñar matemáticas con GeoGebra; retos, roles y resultados* en el Centro Internacional de Encuentros Matemáticos (CIEM) en Castro Urdiales. Fue organizado por la FESPM y el Instituto GeoGebra de Cantabria (IGC), personificados en Agustín Carrillo de Albornoz y Tomás Recio, respectivamente.

Los seminarios organizados por la FESPM y el IGC en Castro Urdiales gozan ya de una cierta tradición. Los encuentros celebrados en el CIEM en años anteriores (bajo el sugestivo título de *Los secretos de GeoGebra*) pretendían profundizar en el dominio tecnológico de GeoGebra (GG, en adelante), de manera que sus participantes adquirieran una mayor competencia en el empleo del programa a nivel de usuario avanzado, así como que actualizaran sus conocimientos con las nuevas utilidades y apariencias que iba incorporando GG en sus nuevas versiones (CAS, 3D, GGTube,...).

Con el propósito de difundir el uso de GG en el más amplio colectivo de profesores e impulsar el uso efectivo de este recurso tecnológico y metodológico en el aula, este año la organización ha priorizado los aspectos didácticos a los técnicos y se ha centrado en explorar las potencialidades didácticas de GG y su efecto en la enseñanza y en el aprendizaje de los alumnos. De

esta manera, durante este encuentro se han tratado de analizar los beneficios y dificultades que aparecen al implementar actividades GG en el aula y de indagar qué formas de uso son las más adecuadas para brindar buenas y provechosas oportunidades de aprendizaje a los alumnos. En palabras de Antonio Pérez Sanz (FESPM), debatir «la construcción por parte de la comunidad de docentes e investigadores de herramientas metodológicas para la integración de GG en las aulas de primaria y secundaria». Para ello, en el encuentro tuvieron cabida tanto conferencias que presentaron algunas contribuciones realizadas por la investigación didáctica a la práctica docente con GG como la presentación de experiencias docentes relacionadas con este programa en aulas de Infantil, Primaria, Secundaria y Universidad realizadas por profesores con una larga trayectoria en el uso de este recurso.

En los tres días del encuentro, se impartieron en total 16 ponencias distribuidas en 5 sesiones. La asistencia estuvo limitada a un total de 44 participantes de modo que fue invitado un miembro de cada una de las sociedades que forman la FESPM, además de los ponentes, los replicantes a las ponencias y los encargados de elaborar las conclusiones finales. La naturaleza de los objetivos

del seminario, que reunían aspectos de la práctica docente y de la investigación en Educación Matemática, sirvió para establecer comunicación entre colectivos diversos y de distintos niveles educativos. Además, la presencia de profesores procedentes de Institutos de GeoGebra de otros países, como Portugal y Uruguay, también supuso una buena oportunidad para compartir experiencias y conocer otras realidades. Los debates y réplicas a cada ponencia fueron muy animados y se creó un clima muy agradable de trabajo sobre un tema que es de interés tanto para los investigadores en didáctica como para los docentes que están preocupados en la mejora de los aprendizajes de sus alumnos en el día a día en sus aulas.

Las sesiones I y III se dedicaron a los aspectos de investigación didáctica. En la sesión I, se desarrollaron aspectos fundamentales sobre la introducción de la geometría dinámica en el aula de matemáticas. Ángel Gutiérrez (Universidad de Valencia) y Josep María Fortuny (Universidad Autónoma de Barcelona), dos profesores con amplia trayectoria investigadora sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría mediante software de geometría dinámica, fueron los encargados de abrir el encuentro. En la ponencia de Gutiérrez se exploraron las relaciones entre los distintos tipos de *arrastré* de puntos realizados por un estudiante frente a una determinada tarea con GG (constatables mediante observación por parte del docente); los diferentes motivos que tiene el alumno cuando los hace, y el tipo de actividad de resolución de problemas que está realizando. Además, se presentaron los resultados de una reciente investigación sobre los procesos de visualización en la geometría espacial mediante la vista de GG en 3D con alumnos de 2.º de ESO con altas capacidades donde se pueden identificar algunos conflictos en el aprendizaje y cómo después de realizar una secuencia de actividades con GG3D llegaban a superarlos. Estos conflictos estaban generados por la aparición de códigos de representación (generales y específicos del programa) que surgen al representar elementos de un entorno espacial en una pantalla plana. Gutiérrez también apuntó los beneficios de las acciones de arrastre, zoom y rotación en la vista de 3D.

Por otro lado, Fortuny presentó los resultados de tres tesis doctorales recientemente dirigidas por él y centradas en la mediación tecnológica como fenómeno que influye en el aprendizaje de la geometría escolar (N. Iranzo, L. Morera y M. Ferrer). En ellas, se han identificado distintos momentos de aprendizaje que surgen cuando los estudiantes emplean GG como herramienta para resolver problemas y argumentan la solución encontrada en contextos de discusiones de clase. Así, el docente puede generar esas oportunidades de aprendizaje a través del planteamiento de tareas de resolución de problemas con GG en parejas, la gestión de la discusión en gran grupo y la posterior redacción y revisión por parte de los estudiantes de la solución. Para esto, Fortuny señala que es fundamental que el docente prepare esa discusión grupal mediante la realización de un árbol o un grafo donde estén recogidos los pasos y las posibles soluciones que podrían dar los estudiantes al problema y que le permita dirigir u *orquestar* dicha discusión. Ambos investigadores señalaron la Teoría de la Instrumentación como un adecuado marco teórico para la investigación didáctica en estos aspectos.

La sesión III también estuvo dedicada a la investigación. Natalia Ruiz (Universidad Autónoma de Madrid) y Aitzol Lasa (Universidad Pública de Navarra) mostraron algunas de las conclusiones de sus recientes tesis doctorales. Los resultados de la investigación de Ruiz avalan la inclusión de GG en la formación de maestros. La implementación de una secuencia de enseñanza sobre contenidos geométricos para maestros en formación integrando GG como recurso produjo que incrementase significativamente la competencia geométrica y didáctica de estos maestros frente a la competencia adquirida por otro grupo de control en el que se empleó únicamente el lápiz y el papel. Lasa estudia la idoneidad didáctica de GG frente al lápiz y al papel en la resolución de sistemas de ecuaciones en Secundaria. Sus conclusiones indican que el uso de GG en un primer momento exploratorio favorece la comprensión de la tarea y la aplicación eficaz de la técnica; mientras que la resolución con lápiz y papel en un momento posterior favorece la consolidación de la técnica y los procesos de instrumentalización. Por tanto, esto permite extraer

implicaciones didácticas para el diseño de secuencias en donde se puedan emplear ambos materiales de manera complementaria.

En las sesiones II y IV se presentaron muchas y muy variadas experiencias de aula en las que se emplea GG para la enseñanza de las matemáticas. Puesto que se programaron buen número de conferencias de esta índole, la mayoría tuvieron que realizarse en paralelo, por lo que, por motivos de brevedad expositiva y de imposibilidad física para poder asistir a todas ellas, solo haremos una breve reseña de algunas de ellas. Como ya apuntábamos, cabe destacar que abarcaron todos los niveles educativos (Infantil, Primaria, ESO, Bachillerato, Universidad e incluso, la formación continua de profesorado). Así, respecto a los primeros niveles, Isabel Sorigué y Bernat Ancochea (Asociación Catalana de GeoGebra) mostraron como, en Educación Infantil y Primaria, el empleo integrado de GG con otros materiales manipulativos (estructurados o pertenecientes al entorno inmediato de los niños) ayuda a la superación de los estereo-

tipos en la identificación y reproducción de formas y cuerpos en geometría.

No obstante, como era previsible, la mayor parte de las conferencias estuvieron dirigidas al nivel de Educación Secundaria. José Luis Muñoz (SMPM) presentó una actividad de investigación matemática con GG que lleva a cabo con sus estudiantes de ESO y que permite *hacer matemáticas en clase de matemáticas*. A partir de dos circunferencias, una de ellas con centro en un punto de la otra, y el uso de cuatro deslizadores: dos deslizadores que controlan el tamaño de los radios de las dos circunferencias y otros dos deslizadores que controlan la velocidad de desplazamiento de esos puntos por las circunferencias, los alumnos eran capaces de enfrentarse a un problema abierto, experimentar, plantear otros problemas, establecer conjeturas y validarlas de manera autónoma e incluso, mediante algunas indicaciones por parte del profesor, pasar del plano al espacio y establecer un modelo matemático del movimiento de la Tierra y la Luna alrededor el Sol en unas pocas sesiones de clase.



Los asistentes al encuentro a las puertas del CIEM

Sergio Darías (Sociedad Canaria *Isaac Newton*) mostró como la edición de videos por parte de sus estudiantes, en donde ellos mismos deben explicar cómo realizar una determinada construcción para elaborar un logo comercial o una figura fractal, es una excelente *excusa* para que los alumnos *hablen* sobre geometría y argumenten sobre las propiedades geométricas que emplean para sus construcciones e incluso lleguen a realizar proyectos interdisciplinarios que involucren al resto del centro.

La potencialidad de GG como recurso que favorece los procesos de argumentación por parte de los estudiantes fue uno de los aspectos en que también incidieron Fernando Zacarías y Esperanza Gesteira (AGAPEMA) en su intervención. Los protagonistas de esta conferencia fueron sus estudiantes de ESO puesto que se mostró cómo los alumnos habían preparado (e impartido) una charla para el Día de GeoGebra de Galicia sobre la forma en que ellos estudiaban matemáticas con GG durante todo el curso escolar. Alrededor de lo ocurrido antes y durante esa charla, así como en el posterior coloquio entre estudiantes y docentes gallegos, surgieron interesantes cuestiones sobre la enseñanza con GG, sus potencialidades y debilidades que fueron analizadas por los conferenciantes en Castro Urdiales.

Finalmente, la versatilidad de GG como material didáctico también quedó reflejada en las experiencias realizadas en la Universidad, todas ellas desde diferentes títulos universitarios: Claudio Martínez (Sociedad Navarra «Tornamira») mostró una secuencia para la enseñanza del Cálculo Elemental en los Grados de Ingeniería, mientras Enrique de la Torre (AGAPEMA) expuso una experiencia realizada con estudiantes del Grado de Magisterio en Educación Primaria que se iniciaban con el uso de GG analizando los errores y las dificultades encontrados. Por otro lado, José Manuel Dos Santos (IG Portugal), entre otros resultados, presentó algunas actividades con GG3D para trabajar funciones complejas en el Grado de Matemáticas mostrando

que puede ser una herramienta útil para la investigación en Matemáticas.

Por último, Fabián Vitabar (IG Uruguay y Universidad J. Kepler de Linz), expuso lo que, a su juicio, suponen las cinco etapas por las que pasa un profesor cuando se acerca por primera vez a GG: aprender su manejo, apreciar su potencial didáctico, planificar su uso en el aula, adoptarlo como una herramienta habitual y optimizar el beneficio en su empleo. Además abordó la problemática de la formación continua del profesorado de Secundaria en GG en Uruguay, que es similar a la española en muchos aspectos. Así, los docentes encuentran obstáculos de tipo económico, de ausencia de respaldo por parte de la administración y de algunos de los equipos directivos y de escasez de tiempo para la preparación de actividades.

En la última sesión, se redactaron y aprobaron las conclusiones del encuentro. José Luís Álvarez (SAEM *Agustín de Pedrayes*) y Rafael Losada (IGC) fueron los encargados de redactar las conclusiones de la parte correspondiente a las experiencias docentes, mientras que José Manuel Diego-Mantecón (Universidad de Cantabria) redactó las conclusiones sobre los marcos teóricos y sobre las investigaciones en curso. Finalmente, Antonio Pérez (FESPM) realizó la síntesis de ambos documentos y elaboró unas conclusiones definitivas. A modo de conclusiones generales, Pérez señala que, superado el debate de si GG mejora el aprendizaje de las matemáticas, en estos momentos la cuestión clave reside en encontrar maneras «de rentabilizar al máximo en el proceso de aprendizaje el uso de GG en las aulas por parte de los profesores y por parte de los alumnos». En este sentido, Pérez anima a tratar de conseguir «rellenar la brecha entre el marco teórico y la reflexión desde la acción del uso de GeoGebra en las aulas» acortando la distancia entre investigación didáctica y práctica en el aula y «cambiar los verbos del aprendizaje de las matemáticas» donde las acciones de comprobar, descubrir, conjeturar y validar estén mucho más presentes en el aula de matemáticas.

JOSÉ MARÍA MUÑOZ ESCOLANO

Universidad de Zaragoza

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas

<jmescola@unizar.es>