

A vista de GeoGebra

1.ª parte

JOSÉ LUIS MUÑOZ CASADO

Un placer poco valorado hoy en día es la observación. En el anonimato que la sociedad produce, pasear, observar e intentar resolver la ecuación anónima que un objeto lleva implícita te hace sentir que compartes con alguien un secreto oculto y por unos instantes formas parte de un todo.

Observar con ojos matemáticos no es fácil al principio, vivimos envueltos en la cotidianidad visual dando por sentado las cosas sin apreciar la ciencia y sabiduría detrás de ellas. Por ejemplo, ¿por qué las alcantarillas son circulares?

Desde hace tiempo me gusta salir con los alumnos por la ciudad y mostrarles que la belleza de las matemáticas está en cualquier rincón, en un logotipo, en una baldosa o en una escultura.

Últimamente a los alumnos les llama la atención las diferencias entre ver una ciudad a pie de calle y ver una ciudad a vista de pájaro. A vista de calle es una actividad apasionante que ilustra a los alumnos en la apreciación de las matemáticas, sin embargo, a vista de pájaro la ciudad adquiere otra dimensión, surgen figuras geométricas y patrones que desde el suelo se pueden intuir pero que desde el aire muestran todo su esplendor.

Gracias a las herramientas TIC que hoy en día existen podemos realizar un viaje a vista de

GeoGebra para observar esa geometría oculta de las ciudades, las posibilidades 3D de GeoGebra también nos permitirán modelizar algunas de las estructuras que desde el suelo podemos observar.

Ortofotos

Muchas administraciones ya ponen a disposición del público en sus webs fotos aéreas de sus términos municipales. El objetivo de estas imágenes es tener una representación fiel del estado del municipio, sin embargo, todas las fotografías aéreas están sujetas a las limitaciones geométricas impuestas por la perspectiva, la orografía del terreno y las deformaciones introducidas por el objetivo de la cámara.

Una fotografía es una representación cónica de la realidad y por tanto la geometría escondida tras ella es la geometría proyectiva, una geometría que no conserva ni distancias ni ángulos. Esta geometría, como todos sabemos, comenzó a estudiarse de forma sistemática en el Renacimiento, Giotto (1267-1336), Fra Angelico (1390-1455), Masaccio (1401-1428), Filippo Brunelleschi (1377-1446), Piero della Francesca (1415-1492), Leon Battista Alberti (1404-1472), Leonardo da Vinci (1452-1519) y otros muchos más pintaron cuadros y elaboraron tratados que pusieron de manifiesto la distorsión producida por la perspectiva cónica (figura 1).

Algo parecido sucede al tomar una fotografía aérea, nuestro centro de proyección será el objetivo y la imagen obtenida aparecerá en el CCD o negativo (figura 2).

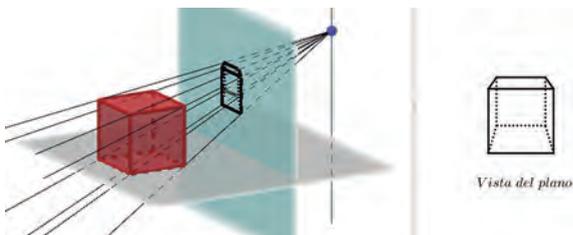


Figura 1. Perspectiva

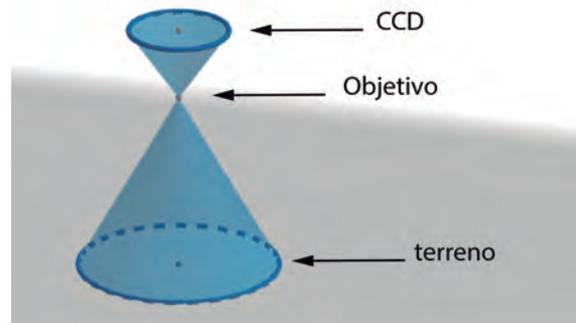


Figura 2. Modelo de cámara aérea

Todavía aparecen más factores que influyen en la toma de la fotografía como son la inclinación de la cámara, el objetivo usado y la velocidad a la que se mueve la cámara.

En las figuras 3, 4 y 5 se puede ver qué obtenemos si analizamos la inclinación de la cámara.

Según la inclinación del eje de la cámara con respecto al suelo, obtendremos una distorsión u otra (figuras 6, 7 y 8).

La pérdida de distancias y ángulos es muy significativa cuando se quiere usar dicha imagen para obtener información sobre parcelas, piscinas, edificaciones, etc. Por este motivo, muchos ayuntamientos han realizado las denominadas ortofotografías.

Una ortofotografía es una imagen aérea de una región corregida para obtener una proyección ortogonal de dicha zona y por tanto, sin las deformaciones propias de una proyección cónica. La importancia de esta técnica no es asunto baladí como se muestra en la existencia del *Plan Nacional de Ortofotografía (PNA)* y el *Sistema de información Geográfica de parcelas agrícolas (SIGPAC)*. Cada Comunidad Autónoma ofrece su propio servicio de ortofotografía muy enfocado al sector agrario. Las ortofotografías combinan perfectamente las imágenes aéreas de alta resolución con las propiedades geométricas del plano, por tanto, se pueden usar para calcular distancias y áreas.

Construcciones

A vista de pájaro muchos de los objetos tridimensionales a ras de suelo se convierten en sim-

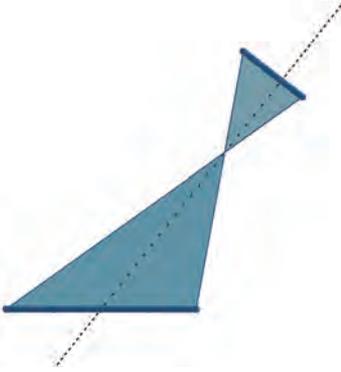


Figura 3. Eje muy oblicuo

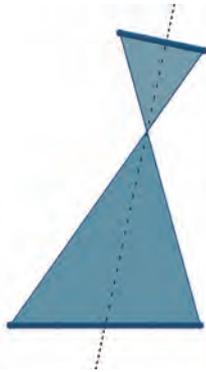


Figura 4. Eje oblicuo

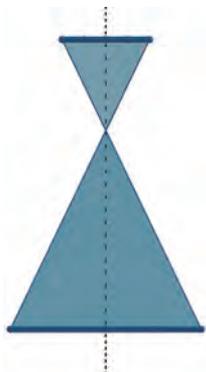


Figura 5. Eje perpendicular

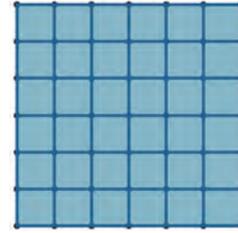


Figura 6. Imagen obtenida con eje perpendicular

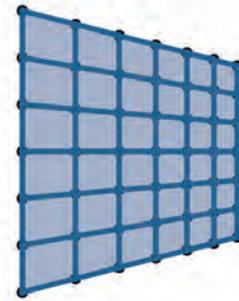


Figura 7. Imagen obtenida con eje inclinado 20°

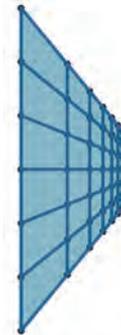


Figura 8. Imagen obtenida con eje inclinado 60°

ples objetos planos, perdiendo gran parte de su atractivo, sin embargo, no dejan de ser interesantes pues desde el aire se puede apreciar esos pequeños detalles que el diseñador tuvo en el momento de la creación. En este artículo mostraremos varios ejemplos.

Uno de los paseos que suelo realizar consiste en recorrer el Paseo de la Castellana y observar la geometría de los edificios (figuras 9 y 10).



Figura 9. Cuatro Torres Business Area
Foto: Eurostarshoteles

Observando con más detalle vemos que cada torre tiene su propia geometría que podemos estudiar con los alumnos.

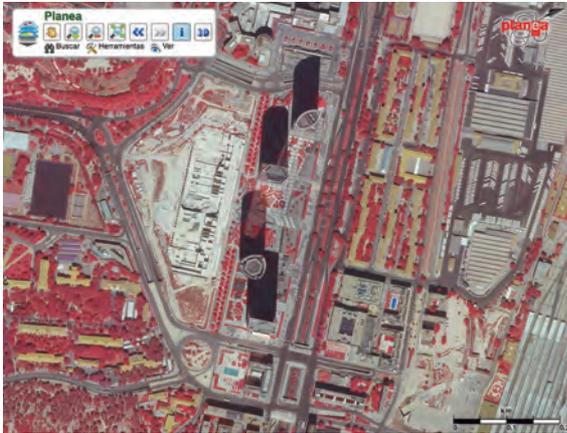


Figura 10. Ortofotografía con falso color (25 cm)
Fuente: Planea. Comunidad de Madrid



Figura 12. Cara norte

La Torre espacio

Situada en la denominada Cuatro Torres Business Area se encuentra la Torre Espacio. Tiene una altura de 224 metros y 57 plantas sobre el nivel del suelo. Su construcción comenzó en 2004 y finalizó en marzo de 2007 (figuras 11, 12 y 13).

Una simple vista a pie de calle nos muestra la grandiosidad de este edificio. Un análisis más detallado nos muestra sus peculiaridades, tiene una



Figura 13. Torre Espacio



Figura 11. Cara sur

base cuadrada que poco a poco se va transformando, el perfil del edificio parece describir una curva conforme el número de plantas asciende y termina en forma *semicircular*.

En este punto podemos recurrir a la ortofoto (figura 14) y observar que el edificio que comienza con cuatro caras formando un cuadrado en la planta baja termina con dos caras formadas por dos cuartos de circunferencia en la planta 57.

La primera vez que observas este edificio se acumulan las preguntas: ¿Habrà alguna relación entre la base y la azotea? ¿Cuál será la curva que parece describir el perfil de la fachada? ¿Cómo

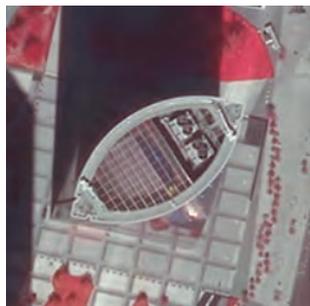


Figura 14. Ortofoto de Torre Espacio

conseguir curvar el edificio respetando las escaleras de incendio? Estas preguntas y otras muchas suelen ser el detonante para proponer el estudio de la geometría del edificio.

Matemáticamente podemos ver la torre como un prisma cuadrado de altura 235 metros. En este prisma tenemos dos restricciones que son la escaleras de incendio, dos prismas cuadrados contenidos dentro del edificio y situados en «vértices opuestos».

¿Cómo conseguir curvar el edificio respetando las escaleras de incendio?

Obviamente el diseño de la fachada depende de la altura. Una exploración *in situ* muestra que en las seis primeras plantas no se produce ninguna acción, es decir, son rectas. Es a partir de la planta número 7 cuando observamos que la fachada se va curvando. Esta forma de curvar la fachada es lo que caracteriza a la Torre Espacio y es matemáticamente una idea muy simple, constructivamente no tanto.

Se parte de un cuadrado base con sus dos escaleras de incendio. Debemos iniciar un arco que irá creciendo en cada planta hasta completar el cuarto de vuelta en la última planta (figuras 15, 16 y 17).

Podemos modelizar con los alumnos las diferentes plantas del edificio. Casi sin darnos cuenta, GeoGebra nos ofrece la posibilidad de pasarnos a 3D e intentar obtener un modelo tridimensional del edificio.

Torre PwC

Otro edificio situado en el complejo es la Torre PwC. De nuevo, ver el edificio *in situ* te deja la

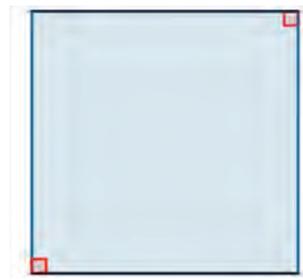


Figura 15. Planta 0

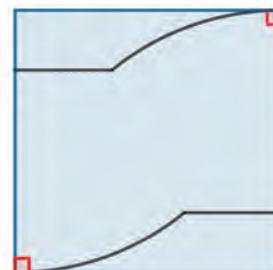


Figura 16. Planta 25

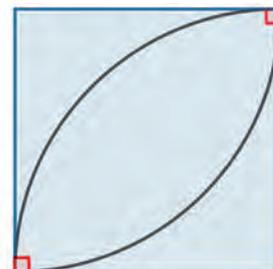


Figura 17. Planta 55



Figura 18. Torre Espacio. Modelo 3D

sensación de pequeñez. Tiene una altura de 236 metros y 52 plantas. Su construcción comenzó en 2004 y acabó el 12 de abril de 2008.

A pie de calle se puede observar su diseño curvo e intuir los arcos que generan la fachada. Sin embargo, es a vista de GeoGebra donde el

alumno observa la verdadera estructura del edificio (figura 19).

Sin entrar en los detalles del proyecto, podemos proponer a los alumnos su modelización con GeoGebra tanto en 2D usando la ortofoto, como en 3D (figuras 20, 21 y 22).



Figura 19. Torre PwC



Figura 20. Ortofoto Torre PwC

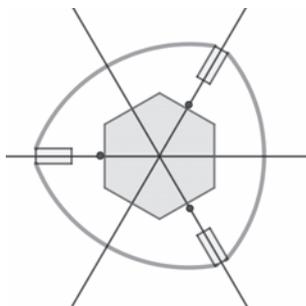


Figura 21. Modelización ortofoto

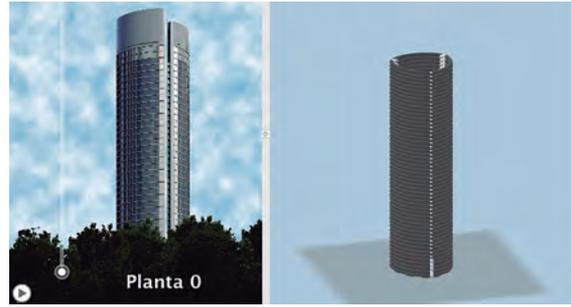


Figura 22. Torre PwC. Modelo 3D

Puente monumental de Arganzuela

No me gustaría terminar sin mencionar el elemento urbanístico que inspiró este artículo, Madrid Río, un parque surgido a raíz del soterramiento de la M-30, una autopista emblemática de Madrid.

Podemos verlo a pie de suelo (figuras 23-26) y a vista de GeoGebra (figuras 27-29).

Escapándome un poco del nivel de secundaria y bachillerato no he podido resistir la tentación de representar con GeoGebra 3D uno de los puentes más emblemáticos de Madrid Río, el puente monumental de Arganzuela (figuras 30 y 31).

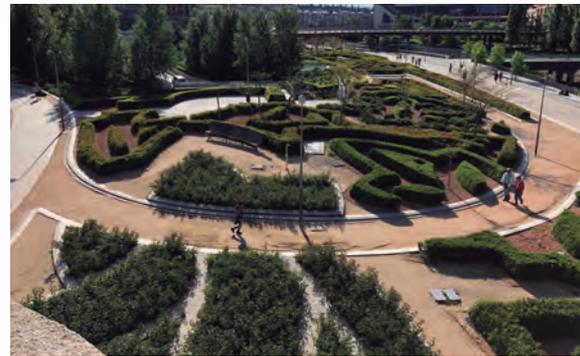


Figura 23



Figura 24

Diseñado por el arquitecto francés Dominique Perrault, su construcción comenzó en 2010 y finalizó en el año 2011. Con una longitud de 278 metros cruza el río Manzanares a la altura del Parque de la Arganzuela. Su ubicación estratégica lo convierte en un mirador desde el cual contemplar por un lado el Puente de Toledo y por otro el Puente de Praga.

La pasarela está formada por dos troncos de cono situados en ejes distintos. En el hueco central



Figura 25

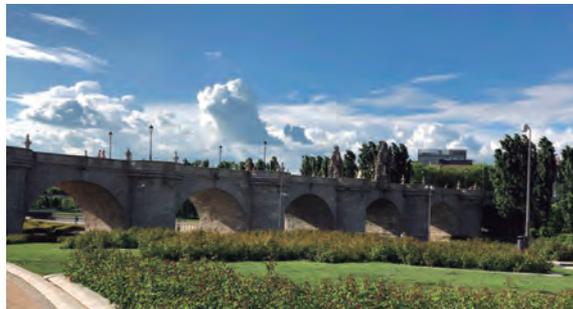


Figura 26



Figura 27

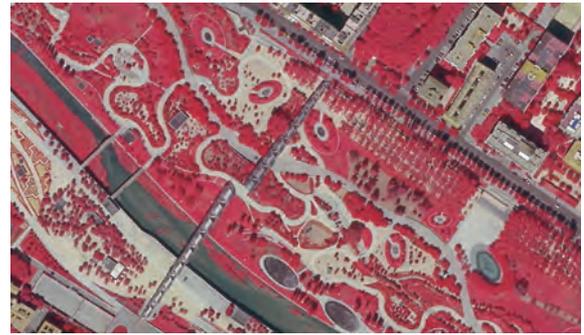


Figura 28

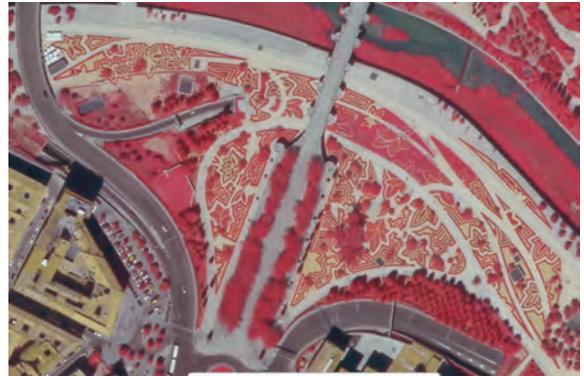


Figura 29



Figura 30



Figura 31

se diseñó un espacio común que permite conectar los conos. La característica principal de esta pasarela es su estructura helicoidal formada por dos espirales internas que se cruzan diagonalmente.

Desde un punto de vista matemático es interesante plantear su modelización. Veamos:

Guía de construcción

— En la barra de entrada escribiremos:

- $m=1$.
- $n=10$.

— En la vista gráfica 1 creamos varios deslizadores:

Nombre	Valor mín.	Valor máx.	Incremento	Descripción
radio	0	1	0.01	Controlará el tamaño de la circunferencia del cono
b	-5	5	0.1	Controlará longitud del cono
c	b	m	0.1	Controlará longitud del cono
vuelatas	-10	10	0.1	Controlará el número de vueltas de la superficie helicoidal.
grosor	0	5	0.1	Controlará la anchura de la superficie helicoidal

— En la barra de entrada escribimos

- $s=Superficie(n + radio \cdot u \cos(v), -m + u, radio \cdot u \sin(v), u, b, c, v, -2\pi, 2\pi)$
(Ecuación paramétrica de un cono cuyo vértice se encuentra en $(n,-m,0)$)
- $f=Superficie(s(t, vueltas \ t + k), t, b, c, k, 0, grosor)$
(Hélice sobre el cono s).
- $t=Superficie(-n + radio \cdot u \cos(v), m + u, radio \cdot u \sin(v), u, -c, -b, v, -2\pi, 2\pi)$
(Ecuación paramétrica de un cono cuyo vértice se encuentra en $(-n,m,0)$)
- $g=Superficie(t(t, vueltas \ t + k), t, -c, -b, k, 0, grosor)$
(Hélice sobre el cono t)

Opcionalmente también podemos parametrizar las curvas que aparecen en el puente en sentido contrario a la superficie helicoidal y las circunferencias de la construcción (figuras 32 y 33).

En estos tres ejemplos de construcciones hemos visto cómo las matemáticas saltan a la vista. La simetría, la perpendicularidad, el paralelismo, la proporción y otros tantos conceptos geométricos muestran una belleza armoniosa que muchas veces damos por obvia. Mirar con ojos matemáticos es disfrutar de forma especial, contemplar un objeto, una calle, una escultura, una baldosa y comprender que el lenguaje oculto que transmite es sublime, y en ese punto Geogebra es una herramienta perfecta, no solo nos



Figura 32. Detalle del extremo del puente

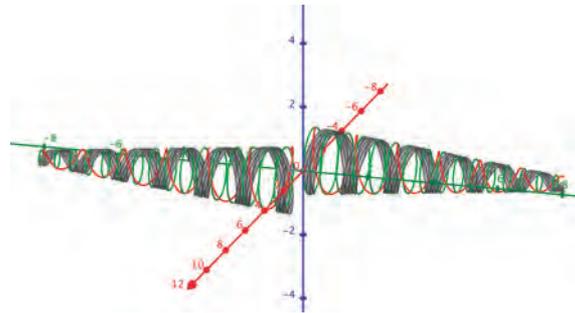


Figura 33. Modelo 3D del Puente Monumental de Arganzuela

permite leer una imagen sino manipular y explorar nuevos lenguajes.

Referencias bibliográficas

CANO, D., M. C. ESCRIBANO, J. C. GARRO, J. ROJO, J. TARRÉS y S. VICTORIA (2016), «Un trabajo con espirales», *Pensamiento Matemático*, vol. VI, n.º 2, 047-062.

GÓMEZ, M., *Proyecto y construcción de dos torres de 235 m de altura en Madrid. MC-2*, Estudio de ingeniería, Madrid.

MARTÍNEZ, J., y M. GÓMEZ (2008), «Torre Sacyr-Vallehermoso. La estructura del edificio», *Hormigón y Acero*, vol. 59, n.º 249, 123-150.

Información Territorial y Cartografía Regional. Planae., Dirección General de Urbanismo. Consejería de Medio Ambiente, Administración Local y Ordenación del Territorio, Madrid.

JOSÉ LUIS MUÑOZ CASADO
I.E.S Salvador Dalí
<creogebra@revistasuma.es