

## En el entorno del teorema Kou-Ku (III)

**N**os habíamos quedado en Thabit ibn Qurra (? 836, 901). Dice Gheverghese Joseph (1991) que nació en el norte de Mesopotamia, que perteneció a “una secta religiosa de descendientes de babilonios adoradores de las estrellas” y que, quizás por sus disputas con su comunidad, se trasladó a Bagdad, donde entró en un círculo de traductores y estudiosos. Dominaba el árabe, el griego y el siríaco y tradujo a Euclides, Apolonio y Ptolomeo y fundó su propia escuela de traductores que continuaron su hijo y dos de sus nietos. Podemos enmarcar su trabajo en una corriente geométrica de fuerte sabor griego paralela a otra aritmética, que estaría bien representada por al-Khwarizmi, y que terminaron fusionándose.

Nos entretenemos en estos datos, a pesar de que pueden ser fácilmente consultados, porque late en ellos un atractivo dinamismo vital. No es que el texto de Gheverghese transmita precisamente emociones –tampoco la traducción le beneficia lo más mínimo– pero en los párrafos sobre Thabit nos resulta menos frío. O quizás sea nuestra lectura. ¡Da lo mismo! La Historia como colección de datos o de frías teorías interpretativas es necesaria, sin duda, pero si además logra transmitir el latido de una época, tanto mejor. Siempre nos ha impactado la aventura intelectual del Bagdad de los siglos IX al XI. La pasión colectiva por traducir0... y comentar, en el sentido creativo de esta palabra.

También Thabit elaboró su propio puzzle para probar el teorema Kou–Ku, muy parecido a una versión hindú, pero lo que nos interesa ahora es su generalización del teorema, igualmente fácil de consultar en los textos. Le dedicaremos tiempo porque los manuales de divulgación de historia de las matemáticas no lo hacen. Sólo la citan. Pero es tan bonita que merece la pena visualizarla plásticamente.

Para ello, recordemos la idea de la demostración de Euclides (Figura 1): los cuadrados 1 y 2 son iguales, respectivamente, a los rectángulos 1' y 2'. Dibujemos ahora un triángulo obtusángulo (Figura 2). Dice Thabit que si desplazamos el punto  $H$  de la Figura 1 hacia los puntos  $B'$  y  $C'$ , de manera que los ángulos en  $A$ ,  $C'$  y  $B'$  (es decir:  $\widehat{CAB}$ ,  $\widehat{CC'A}$  y  $\widehat{BB'A}$ ) sean iguales, entonces el cuadrado 1 y el cuadrado 2 tienen también la misma superficie, respectivamente, que los rectángulos 1' y 2'. Por

tanto,  $b^2+c^2 = a(CC'+BB')$ . Ello es debido, claro, a que los triángulos  $ABC$ ,  $ACC'$  y  $ABB'$  son semejantes.

El rectángulo intermedio a 1' y 2' es la superficie en que el cuadrado del lado mayor supera a la suma de los otros dos. Volviendo a la generalización de Euclides –lo que hoy llamamos Teorema del coseno– ese rectángulo debe medir  $|2bc \cos A|$ . En la Figura 12 del anterior artículo (SUMA n° 45) ya vimos que las áreas 3' y 3'' (Figura 3) son ambas iguales a  $|bc \cos A|$ , pero que  $3' + 3'' = 3$  no parece tan claro de probar directamente sin recurrir a establecer la igualdad mediante la combinación del teorema del coseno y el de ibn Qurra –tal y como acabamos de hacer– porque uno de los lados de 3 tiene de longitud  $a$ .

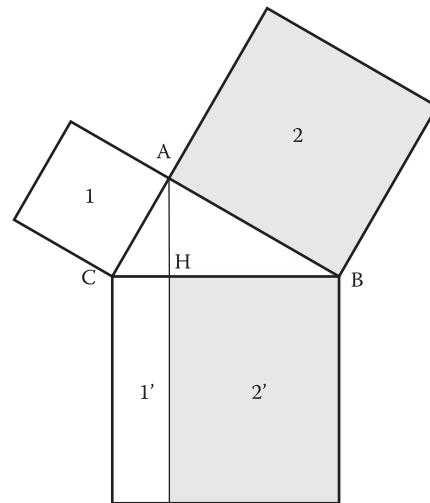


Figura 1

Angel Ramírez Martínez  
Carlos Usón Villalba  
historia.suma@fesp.org

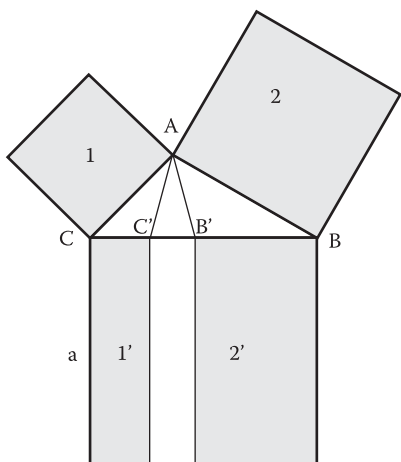


Figura 2

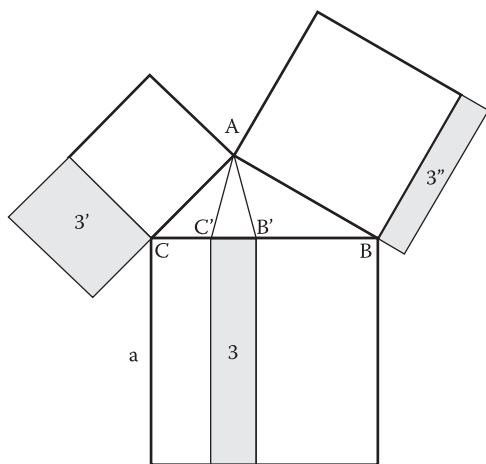


Figura 3

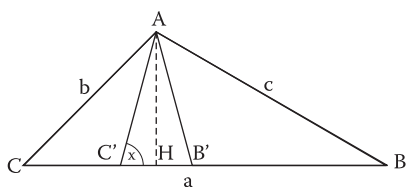


Figura 4

Efectivamente,  $\text{área } 3 = a(B'C')$ . Pero como  $CCA$  y  $CAB$  (Figura 4) son semejantes,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{C'A} \Rightarrow C'A = \frac{bc}{a}$$

Además,

$$C'H = (C'A)\cos x = (C'A)\cos C' = (C'A)\cos A$$

De manera que

$$\text{área } 3 = a(B'C') = a2(C'A)\cos A = a2\frac{bc}{a}\cos A = 2bc\cos A$$

Si el triángulo es acutángulo la figura es más complicada de representar. Ahora los puntos  $B'$  y  $C'$  quedan, respecto de sus homólogos  $B$  y  $C$ , al otro lado del punto  $H$  y los rectángulos  $1'$  y  $2'$  se superponen (Figura 5). El teorema queda también así:  $b^2 + c^2 = a(BB' + CC')$  y la parte superpuesta es la superficie en la que los cuadrados de los lados pequeños superan al del grande.

En definitiva, una generalización muy propia de un traductor creativo de Euclides. Pero los enfoques parecen tan distintos que nos inclinamos a pensar que ni Euclides imaginó la generalización de ibn Qurra ni seguramente éste relacionó la suya con la de él.

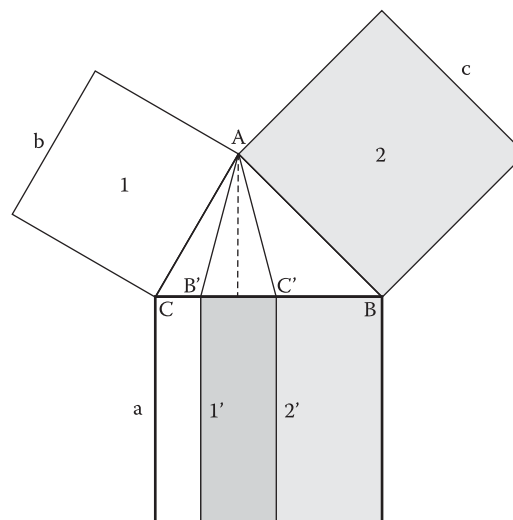


Figura 5

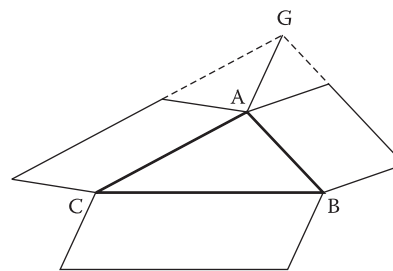


Figura 6

### Los paralelogramos de Pappus: ¿una generalización de Pitágoras?

I

Seis siglos antes, en la decadente Alejandría que pronto vería el asesinato de Hipatia, Pappus –otro *comentarista*– incluyó, en el libro IV de su *Colección matemática*, una extensión menos evidente pero muy sutil del teorema.

Supongamos un triángulo cualquiera  $ABC$  y construyamos sobre sus lados  $AB$  y  $AC$  dos paralelogramos cualesquiera.

Llamaremos  $G$  al punto en el que se cortan las prolongaciones de sus lados exteriores (Figura 6). Construimos ahora sobre el tercer lado otro paralelogramo de forma que uno de sus lados sea el segmento  $GA$ . Entonces, el área de este último paralelogramo es igual a la suma de los otros dos.

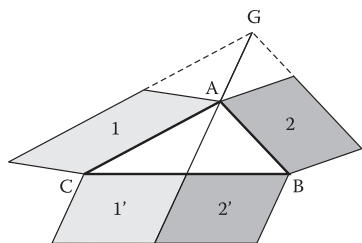


Figura 7

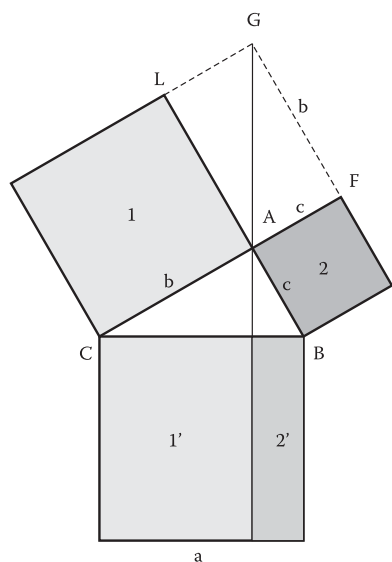


Figura 8

Boyer (1985) afirma que esta generalización es *elemental*, dice que quizás la idea original fue de Herón, aporta un dibujo –distinto de los de las figuras 6 y 7; ¿sería el de Pappus?– y no le dedica el más mínimo comentario. Bueno... Ciertamente damos por supuesto que Boyer sea mejor matemático que nosotros, pero no vemos tan elemental que se vuelva a producir, como así ocurre (Boyer no lo dice), la igualdad entre las áreas de 1 y 2 con las de 1' y 2' (Figura 7). Sabíamos de la igualdad entre las áreas de figuras semejantes construidas sobre los lados de un triángulo rectángulo, pero aquí los paralelogramos no tienen por qué ser semejantes entre sí y el triángulo puede ser cualquiera. Como no hay riesgo de que nos lea Boyer y nos acuse de *elementales*, confesamos nuestra sorpresa –y, por tanto, nuestro entusiasmo– ante la generalización de Pappus. Por cierto: ¿tan claro es que se trata de una generalización del teorema Kou-ku? Desde luego se sigue jugando con la idea de la demostración de Euclides, pero sentimos que hay unos cuantos cabos por atar. Volvamos al principio, al enunciado inicial (Figura 8). Aquí las cosas están claras:  $GA =$

$a$ . Así que el rectángulo  $AFGL$  parece ser la clave de todo esto. En la figura 7 se ha convertido en un trapecoide y la diagonal no lo divide en dos partes iguales. Al intentar localizar superficies equivalentes a ellas se nos ocurre prolongar los lados del paralelogramo grande iguales a  $GA$  por  $B$  y  $C$  (Figura 9). Y, ciertamente, los paralelogramos  $AGLC$  y  $AGFB$  son iguales, respectivamente, a  $ALMC$  y  $AFKB$  (1 y 2 en la Figura 7).

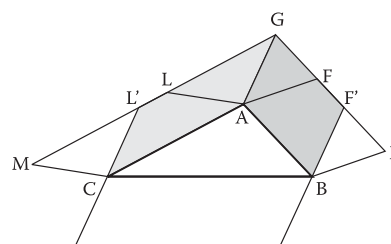


Figura 9

La Figura 9 coincide con el dibujo de Boyer: ahora sí lo entendemos.  $AGLC$  y el rectángulo 1' tienen la misma área porque comparten una pareja base-altura, como vemos en la Figura 10 ( $CL, h$ ;  $C'C, h$ ). ¿Así que todo se limitaba a inclinar el eje  $GA$  de la Figura 8? ¿Cuadra ya todo? Repitamos de nuevo lo que ya sabemos.

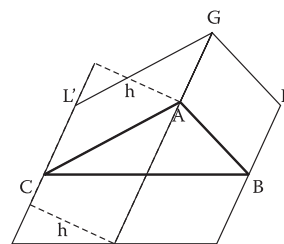


Figura 10

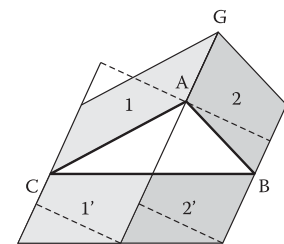


Figura 11

Parece que dado un triángulo cualquiera y construidos dos paralelogramos cualesquiera sobre dos de sus lados, la suma de sus áreas es igual a la de un tercero construido sobre el tercer lado, con la condición de que el otro lado de este paralelogramo sea  $GA$ . Y esto es así porque todos los paralelogramos sobre  $CA$ , que tengan por vértice  $G$ , tienen la misma superficie que  $CAGL'$  porque comparten una misma pareja base-altura. Y lo mismo para el lado  $AB$  (Figura 11). Desde esta perspectiva el teorema Kou-ku sólo sería un caso particular del de Pappus y en ese sentido este último sería generalización del anterior.

Pero, ¿hay que matizar el enunciado? Ni Boyer lo hace ni lo hemos hecho nosotros. Ensayamos con CABRI –¡qué barbaridad!, ¿cómo se las apañaría Pappus sin este programa?– para ver si funcionan los *monstruos*. Desde luego, el paralelogramo suma no tiene por qué estar construido sobre el lado grande del triángulo. Eso no nos crea problemas para elaborar la construcción anterior (Figuras 12 y 13). ¿Los tendremos si cambiamos la posición del punto  $G$ ?

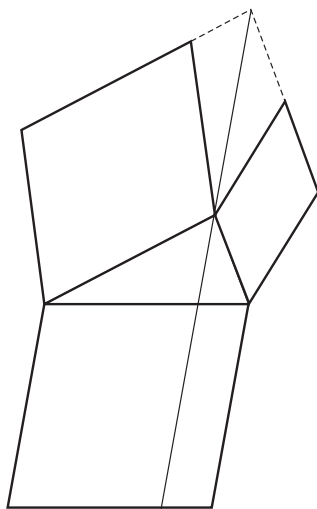


Figura 12

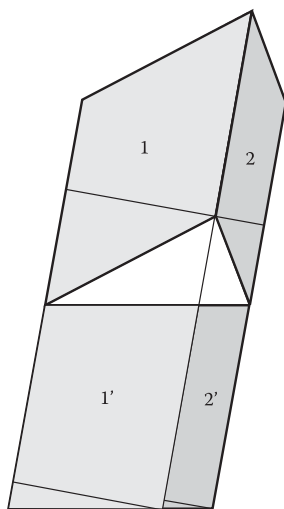


Figura 13

Ninguna dificultad si coinciden los puntos  $G$  y  $F$  (Figura 14): el paralelogramo del lado  $AC$  es justamente el paralelogramo 2 de las figuras anteriores. Si elegimos los paralelogramos como en la Figura 15, el segmento  $GA$  ya no es intermedio a  $LA$  y  $FA$  como en la figura 9 pero sigue siendo posible la construcción de las Figuras 11 y 13, con dos paralelogramos 1 y 2 equivalentes a los iniciales, tal y como muestra la Figura 16.

Igualmente es válido el teorema si el punto  $G$  está en un lado de uno de los paralelogramos (Figura 17). No hay por tanto restricciones para la frase *construyamos sobre sus lados  $AB$  y  $AC$  dos paralelogramos cualesquiera*.

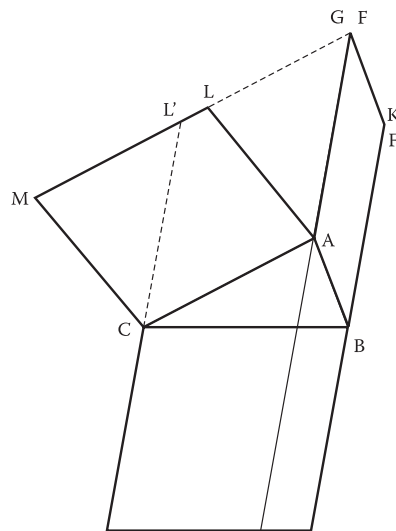


Figura 14

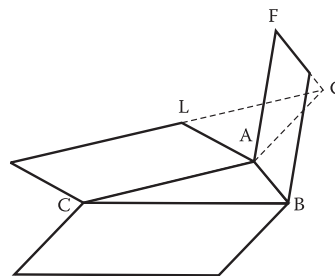


Figura 15

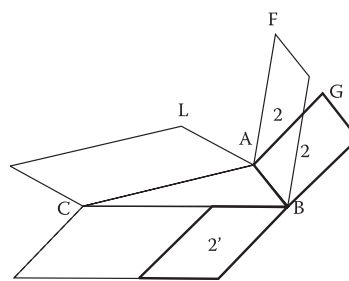


Figura 16

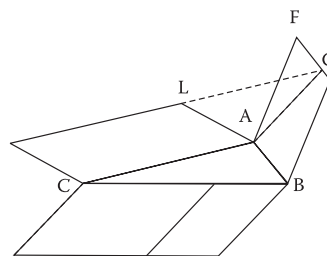


Figura 17

En definitiva, estamos trabajando con tres pares de rectas paralelas (Figura 18) entre las que vamos inscribiendo paralelogramos, uno de cuyos lados debe coincidir con el lado correspondiente del triángulo central definido por las paralelas, con la salvedad de que la anchura del tercer par de paralelas y la inclinación de su paralelogramo vienen determinadas por las opciones que hemos elegido en los dos primeros pares. Una vez dadas las dos primeras bandas de paralelas, existen infinitas parejas de paralelogramos, uno en cada una de ellas, cuyas áreas suman las del paralelogramo 3. CABRI permite una agradable comprobación experimental: al mover los puntos  $L$  y  $F$  a lo largo de las rectas  $s$  y  $r$  (Figura 19), el *marcador* de la derecha permanece inamovible.

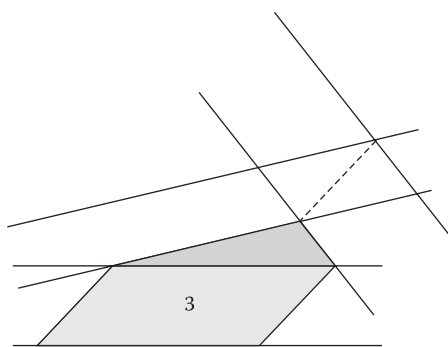


Figura 18

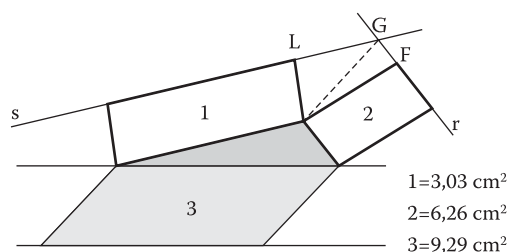


Figura 19

## II

¡Qué lejos queda Pitágoras de todo esto! ¡La extensión del campo de trabajo ha sido muy fuerte! En Pitágoras el paralelogramo (cuadrado) suma se construye obligatoriamente sobre el lado grande, y en las generalizaciones de Euclides y de ibn Qurra se mantiene el papel de ese lado... En cualquier caso, hay algunas variables que no hemos tocado, así que volvamos de nuevo a Pitágoras y juguemos con sus condiciones enfocándolas desde el punto de vista de Pappus. Para empezar, si el triángulo es rectángulo y construimos sobre sus lados paralelogramos, la Figura 9 adquiere un aspecto bien trivial (Figura 20) que nos acerca de nuevo a la demostración de Polya (ver el artículo anterior; SUMA 45), y podría sugerir nuevas líneas de avance. Por ejemplo: ¿por qué tienen que ser

necesariamente paralelogramos? Si fueran triángulos el teorema de Pappus se mantiene sin introducir casi variantes puesto que un triángulo es la mitad de un paralelogramo. Podemos pensar en otras figuras geométricas, incluso plantearnos las condiciones para una solución general. Por otro lado, si elegimos un triángulo que no sea rectángulo y construimos cuadrados sobre sus dos primeros lados, y sobre el tercero un cuadrado y el correspondiente paralelogramo de Pappus, aparece una nueva visualización del teorema del coseno: el rectángulo 3 debe ser la superficie a restar al cuadrado sobre el lado mayor para que quede un área igual a los otros dos cuadrados (Figura 21).

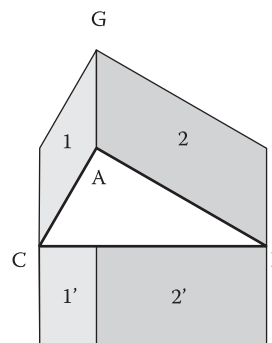


Figura 20

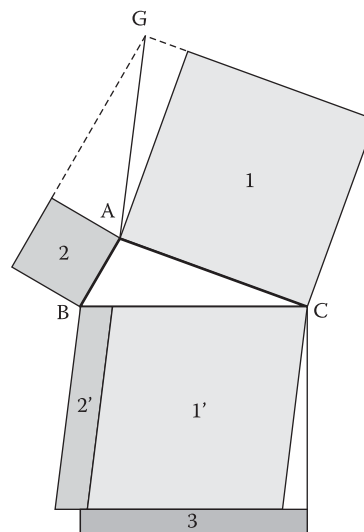


Figura 21

Prescindimos esta vez de dar satisfacción al fundamentalismo experimentalista que hemos adoptado, y –para no cansar– evitamos buscar más certeza que la que proporcionan la utilización conjunta de las generalizaciones de Pappus y Euclides. La obsesión por meter la mano en la llaga de los resultados de matemáticas no es tanto, en nuestro caso, una necesidad vital –puestos a desperdiciar energías tenemos otros focos de mayor interés– como una reivindicación desde la didáctica, desde la práctica diaria en el aula. Los adultos –incluidos los

profesores y profesoras— entendemos un teorema, al leerlo, sólo hacia el exterior. Nuestra máscara tiene ese rasgo. En nuestro fuero interno sabemos que un control creativo del resultado requiere más esfuerzo y tiempo por nuestra parte. ¿Hemos demostrado en algún momento el teorema de Pappus? Quizás... Desde luego, lo que sí hemos hecho es quedarnos con él. Y eso ha llevado tiempo y no contentarnos ni con la primera frase leída en un libro ni con el primer razonamiento aparentemente válido. Si esto nos ocurre a nosotros, ¿por qué suponer que los adolescentes serán capaces de controlar ingentes listados de contenidos expuestos a la velocidad que marca una programación hecha por adultos?

### La generalización de Monge

El teorema kou-ku se generaliza a tres dimensiones de una forma natural ( $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ ) que no viene nunca recogida en los libros como una igualdad entre áreas. Ciertamente es trivial, pero nos ha hecho ilusión ensayar un dibujo (Figuras 22a y 22b): aplicando dos veces el teorema, *área 1 + área 2 = área 3* y *área 3 + área 4 = área 5*.

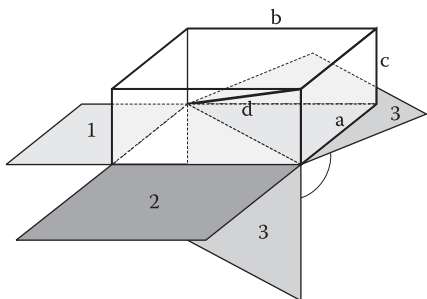


Figura 22a

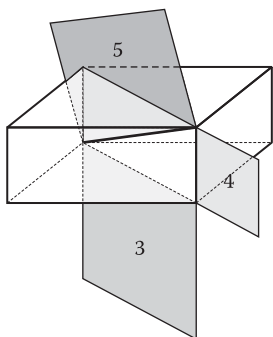


Figura 22b

Sin embargo, la generalización de Gaspard Monge (1746–1818) con la que terminamos esta recopilación es mucho más inesperada, brillante y, nos parece, poco conocida.

Supongamos un vértice de un paralelepípedo y seccionemos el sólido de manera que la sección sea triangular (Figura 23).

Llamemos  $A$  al área de esta sección y  $A_{xy}$ ,  $A_{xz}$  y  $A_{yz}$  a las de los tres triángulos rectángulos de los tres planos que forman el triédrico. Entonces, sorprendentemente,

$$A^2 = (A_{xy})^2 + (A_{xz})^2 + (A_{yz})^2.$$

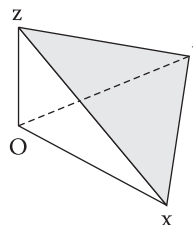


Figura 23

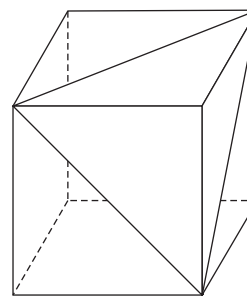


Figura 24

Decimos *sorprendentemente* por muchos motivos. Estamos tan acostumbrados a interpretar Pitágoras como una relación entre áreas —es decir: una igualdad entre magnitudes de segundo grado— que incluso desde un punto de vista aritmético la igualdad de Monge produce cierto desconcierto. Su aspecto formal y la imagen del triédrico sí remiten a Pitágoras, pero al considerar sus términos desaparece esa sensación de normalidad. Una comprobación en el ejemplo más sencillo —sección equilátera en el vértice de un cubo (Figura 24)— muestra que la igualdad funciona:

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2}\right)^2 = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Pero, ¿a qué intuición agarrarse? No estamos hablando de demostrar la igualdad de Monge. Nuestra pregunta es la de siempre: ¿cómo pudo intuir Monge este resultado? ¿Lo obtuvo sólo tras un proceso de cálculo? Lo que molesta es ¿cómo interpretar un área al cuadrado? Se puede hacer como en la Figura 25,  $(3^2)^2 = 3 \cdot 3^3$ , pero cómo aplicar esto al caso del triédrico?

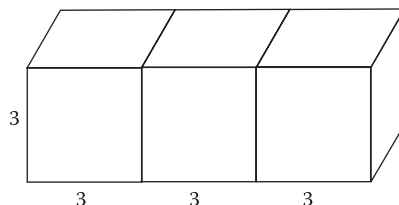


Figura 25

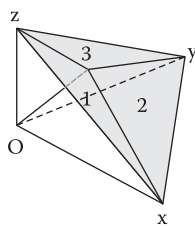


Figura 26

Los intentos de pasar el problema al plano tampoco nos aportan más luz. Una opción es proyectar las caras del triedro sobre la sección (Figura 26). Entonces  $A = 1+2+3$  y se supone que al calcular estas tres áreas en función de las proyectadas aparecerán los cuadrados. Más sencilla es la demostración que desarrolla Antonio Hernández (2002) en su biografía de Monge, de donde hemos tomado el resultado. Proyecta al revés –la sección sobre las caras triangulares del triedro– y utiliza en el cálculo final la generalización habitual de Pitágoras en tres dimensiones. En ese proceso final, abandonados a la guía ciega del cálculo, perdemos la *fisicidad* geométrica del comienzo.

Otra posibilidad consiste en desplegar el recortable de la pirámide formada por el triedro y la sección, para pasar a un enunciado de geometría plana (Figura 27), y de nuevo hay que recurrir al cálculo.

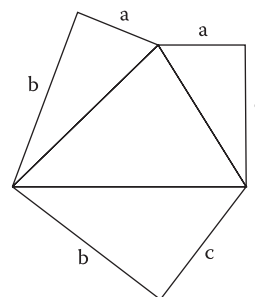


Figura 27

No conseguimos esta vez cumplir con nuestra fijación experimental. Bien: nos queda la duda de si será posible hacerlo. Así son las cosas. Los problemas sólo tienen solución inmediata en las aulas de las enseñanzas regladas. La igualdad de Monge, además de su belleza, mantiene para nosotros una cierta carga enigmática. ■

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

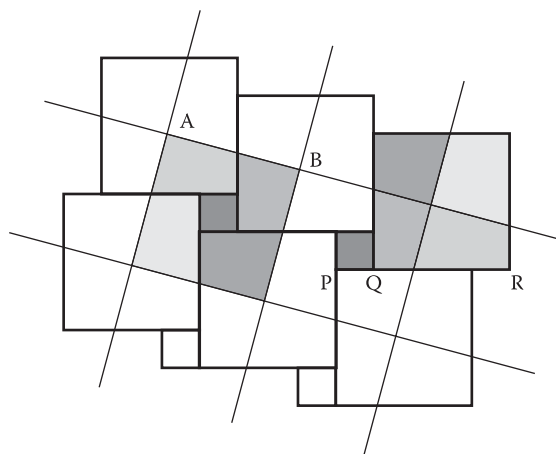
- BOYER, Carl B. (1985): *Historia de la matemática*, Alianza, Madrid.
- GHEVERGHESE JOSEPH, G. (1996): *La cresta del pavo real*. Pirámide, Madrid.
- HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ, Antonio (2002): *Monge. Libertad, igualdad, fraternidad y geometría*, Nivola, Madrid.

## NOTAS

- Mientras nosotros buscábamos datos sobre Henry Perigal, los colegas del grupo Alquerque ya le habían atribuido el puzzle con el que comenzamos esta serie de artículos (SUMA n.º 43). Queda claro, por tanto, que leemos SUMA con retraso.
- En ese mismo número 43, Miquel Albertí, en un excelente artículo, hace una bonita demostración del teorema de Pitágoras a partir de una situación geométrica muy poco habitual: dos circunferencias concéntricas.

## NOTAS SOBRE LOS ARTÍCULOS ANTERIORES

Los duendes de las imprentas eliminaron la Figura 13 en el artículo anterior (SUMA n.º 45). Es ésta:



$$AB^2 = PQ^2 + QR^2$$