suma+ 60
Febrero 2009, pp.123-129

Las matemáticas de los músicos

La música crea orden en el caos; el ritmo impone unanimidad en la divergencia, la melodía impone continuidad en lo discontinuo, y la armonía impone compatibilidad en lo incongruente.

Yehudi Menuhin (1916 – 1999), violinista y director de orquesta

A estas alturas, insistir en la estrecha relación entre MÚSICA Y MATEMÁTICAS parece innecesario. Sin embargo, una cuestión es explorar el territorio común de estas disciplinas y otra bien distinta es el uso que los músicos hacen de las matemáticas porque, como ocurre en otros campos en los que éstas se aplican, los modelos y soluciones que proporcionan las matemáticas muchas veces son vistas como una aproximación a la práctica cotidiana. Por ejemplo, los primeros elementos con los que trabaja la música, las notas musicales, se definen para cada sistema de afinación con unas frecuencias muy precisas, pero el músico sabe que una pequeña alteración de estos valores no es grave. De hecho, en ocasiones sólo se llega al consenso de toda la agrupación si parte de los músicos alteran la afinación teórica. Por otro lado, hemos presentado la partitura como una fórmula matemática, entonces, ¿por qué dos orquestas o dos directores distintos hacen versiones tan diferentes de la misma obra? ¿Quiere decir esto que el músico debe restringir el uso de las matemáticas a los aspectos teóricos?

En esta sección intentaremos mostrar, de forma breve, que en realidad lo que ocurre es que los músicos manejan procesos matemáticos más complejos que los que normalmente se presentan en los trabajos de MÚSICA Y MATEMÁTICAS y, en la mayoría de los casos, deben incluir en los propios conceptos un grado de incertidumbre capaz de reflejar la imprecisión, los criterios personales e incluso el estado de ánimo del intérprete.

Para expresar esta idea, conviene que tengamos en cuenta la diferencia entre **azar** e **incertidumbre**. Aunque son dos palabras ligadas de forma más o menos directa con la probabilidad y en el leguaje ordinario muchas veces se confunden, el significado no es el mismo. Cuando se ponen en una urna 7 bolas rojas y 3 blancas, la probabilidad de sacar una bola roja es 7/10 mientras que la de sacar una blanca es de 3/10. Dicho de otro modo, en una extracción aleatoria se puede medir la suerte de sacar una bola blanca o una roja. Supongamos ahora que desconocemos la proporción de bolas de cada color y que sólo podemos realizar una extracción. En estas circunstancias ya no podemos medir la suerte. El fenómeno ya no se debe al azar, sino a la incertidumbre. Aquí trataremos la incertidumbre a la que no se le puede aplicar la probabilidad, porque precisamente ésta es la que aparece en la música, y en muchas manifestaciones de la vida real en las que participan las decisiones de personas.

Vicente Liern Carrión
Universitat de València Estudi General
musymaticas@revistasuma.es

Sin entrar en cuestiones psicológicas (como estado emocional de cada uno de los intérpretes) ni en las características arquitectónicas o ambientales de las salas de audición, la propia partitura contiene diversas fuentes de incertidumbre que debemos tener en cuenta:

a. La altura de las notas: cada familia de instrumentos afina, de forma natural, en sistemas de afinación distintos. Por ejemplo, un La^b no designa una única realidad físico-acústica.

b. La grafía del pentagrama: en la música contemporánea el compositor tiende a expresar, mediante gráficos o notación no estándar, algunos efectos que no tenían cabida en la música clásica y que dan mayor grado de libertad al intérprete.

c. El tempo: a pesar de la tendencia actual a sustituir las designaciones tradicionales de tempos por indicaciones más precisas, que expresan pulsaciones por minuto, la imprecisión es inevitable, máxime cuando a estos se añaden términos que modifican la velocidad del movimiento de forma gradual (accelerando, ritardando, etc.).

d. Los matices: los términos que indican la intensidad del sonido (de menor a mayor, pianissimo, piano, mezzopiano, mezzoforte, forte, fortissimo) son imprecisos, sobre todo si se usan términos que aumentan o disminuyen gradualmente la intensidad del sonido (crescendo, decrescendo, diminuendo).

Fragmento de Solus, composición para trompeta hecha en 1975 por Stanley Friedman (1941 –)

A pesar de esto, lo cierto es que los soportes informáticos y la tecnología basada en modelos matemáticos responden de manera muy precisa a las necesidades de los músicos. A continuación veremos cómo una de las herramientas fundamentales de la Inteligencia Artificial, la lógica borrosa (*Fuzzy Logic*), es una de las claves que permite tratar con este tipo de incertidumbre.

Introducción a la lógica borrosa

A mediados de los años 60 Lotfi A. Zadeh (Azerbaiyán, 1921, actualmente profesor emérito de la Universidad de California en Berkeley) introduce[1] la Teoría de Conjuntos Borrosos, cuyo objetivo era proporcionar las bases del razonamiento aproximado utilizando premisas imprecisas como instrumento para formular el conocimiento. La idea principal contenida en un Conjunto Borroso (*Fuzzy Set*), que se encuadra dentro de la Lógica Multivaluada, es que el pensamiento humano utiliza 'etiquetas lingüísticas' que permiten que los objetos puedan pertenecer a una clase y a otra de forma suave y flexible. En la práctica, se habla de que alguien es *alto* o *bajo* sin que por ello el interlocutor deje de tener la información necesaria.

Para entender a qué nos referimos cuando hablamos de lógica borrosa, analicemos el siguiente ejemplo de B. Kosko:

> Sostened una manzana en la mano. [...] Dadle un mordisco; masticad este trozo y tragáoslo.[...] El objeto que tenéis en la mano ¿es todavía la manzana? ¿Sí o no? Pegadle otro mordisco. El nuevo objeto ¿es todavía una manzana? [...] La manzana pasa de serlo a no serlo, y a ser nada. Pero ¿cuándo ha pasado la línea que separa el ser manzana de no serlo? Cuando tenéis media manzana en la mano, tenéis tanto una manzana como no la tenéis. La media manzana es una manzana borrosa, gris entre el blanco y el negro. La borrosidad es grisura.

Aunque de forma implícita, la cuestión que se plantea en el ejemplo es que disponer de mayor información no quiere decir contar con más hechos. Con más información se describen mejor los hechos, pero no se tienen imágenes más claras sobre ellos. La incertidumbre, la borrosidad, se mantiene en los propios hechos.

En un conjunto clásico (booleano) se asigna el valor 0 ó 1 a

Lotfi A. Zadeh nombrado Doctor Honoris Causa por la Universidad Politécnica de Madrid, enero de 2007 cada elemento para indicar la pertenencia o no a dicho conjunto. Esta función, denominada función característica del conjunto, puede generalizarse de forma que los valores asignados a los elementos del conjunto caigan en un rango particular, y con ello indiquen el *grado de pertenencia* de los elementos al conjunto en cuestión. Esta función se llama *función de pertenencia* y el conjunto definido por ella se llama *conjunto borroso*.

La función de pertenencia μ_A por la que un conjunto A se define, se expresa formalmente como

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \in [0,1]$$

Un grado de pertenencia nulo se interpreta como no pertenencia, el 1 como pertenencia en el sentido booleano y los números intermedios reflejan una pertenencia incierta, que será interpretada de diversos modos según cada aplicación. Así, la manzana entera del ejemplo tendrá un grado de verdad 1 para la afirmación "ser una manzana", mientras que la manzana de la que nos hemos comido parte puede tener grado de verdad 0,4, 0,3, etc. La potencia de esta teoría se debe a que a través de la pertenencia a un conjunto se puede describir gran número de situaciones. Para distinguirlos de los conjuntos clásicos, los conjuntos borrosos suelen expresarse mediante una tilde, es decir $\tilde{A}$ es un conjunto borroso y A es un conjunto booleano.

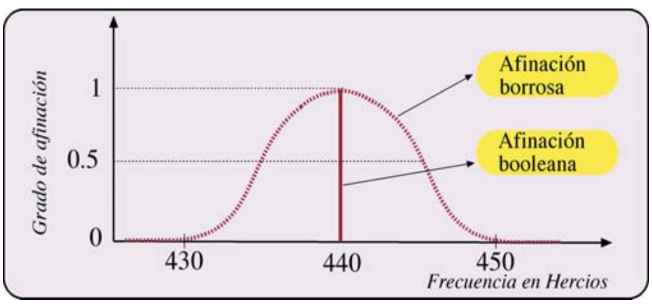
En el contexto que nos preocupa, si fijamos como nota patrón el La de 440 Hz., una nota de 442 Hz., desde el punto de vista de la lógica booleana, estaría desafinada. Sin embargo, para cualquier músico (o cualquier persona que la escuche) esta nota no tiene el mismo "grado de desafinación" que otra de 450Hz. Es decir, que el salto de afinado a desafinado el músico lo interpreta como un conjunto borroso en el que se pasa de una situación a otra de forma gradual. Lo importante es fijar cuán flexibles somos con ambos conceptos.

Pero antes de establecer los límites de flexibilidad, necesitamos introducir una idea más de lógica borrosa: los números borrosos. Si con la lógica borrosa todo es cuestión de grado, podría parecer que los números escapan de la "dejadez" de la borrosidad. Sin embargo, en realidad no es así. Pensemos en el número 0. El número cero pertenece al 100 por 100 al conjunto cero y no hay otro número que pertenezca a él. Pero, ¿qué pasa con los números cercanos al cero o que prácticamente son cero? En el mundo real, es razonable suponer que 0,001 es "casi 0" mientras que 35 no lo es. Bien, pues esto nos lleva a la idea de número borroso, que no es más que un caso particular de conjunto borroso al que le exigimos ciertas condiciones sobre la función de pertenencia.

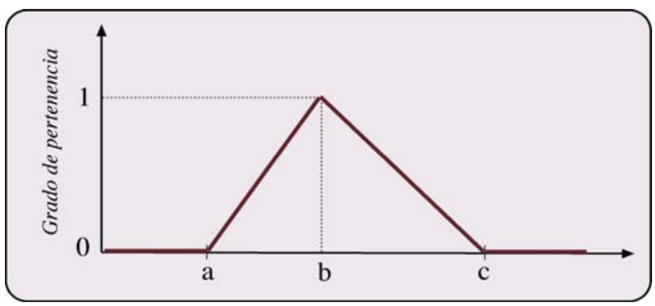
Un número borroso es un conjunto borroso cuya función de pertenencia es continua a trozos, convexa y existe algún valor para el que se alcanza el grado de pertenencia 1.

Los números borrosos que utilizaremos aquí son los más sencillos: los números borrosos triangulares. En ellos, la función de pertenencia tiene forma de triángulo, por tanto quedan perfectamente determinados por tres números reales que marcan dónde se encuentran los vértices, $\tilde{A} = (a,b,c)$.

Cualquiera que sea la magnitud que está representada, el valor *a* marca el nivel por debajo del cuál no estamos dispuestos a aceptar que pertenezca al concepto que tratamos, el valor *b* representa el valor cuya pertenencia es máxima y el valor *c* marca el máximo valor que aceptamos como perteneciente al concepto. Desde el punto de vista operativo, estos números son muy intuitivos y se pueden operar con facilidad.



Funciones de pertenencia y característica para la afinación clásica y borrosa



Función de pertenencia de un número borroso triangular

Aritmética de los números borrosos triangulares

Dados los números borrosos triangulares:

$$\tilde{A}=(a_1,b_1,c_1)\ ,\ \tilde{B}=(a_2,b_2,c_2)$$

y cualquier número real k, podemos operar de la forma siguiente:

$$\tilde{A}+\tilde{B}=(a_1,b_1,c_1)+(a_2,b_2,c_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2)$$

$$\tilde{A}-\tilde{B}=(a_1,b_1,c_1)-(a_2,b_2,c_2)=(a_1-c_2,b_1-b_2,c_1-a_2)$$

$$k\cdot\tilde{A}=\left(\min\{k\cdot a_1,k\cdot c_1\},k\cdot b_2,\max\{k\cdot a_1,k\cdot c_1\}\right)$$

Los números borrosos triangulares, además presentan la ventaja de que al sumarlos, restarlos o multiplicarlos por un escalar, proporcionan un nuevo número borroso triangular, mientras que cuando efectuamos estas operaciones con números borrosos arbitrarios no conocemos, *a priori*, la forma del conjunto borroso resultante.

Entender las notas como conjuntos borrosos supone replantear muchos conceptos tradicionales de la Música que, normalmente, se generalizan de forma intuitiva

Las notas como conjuntos borrosos

Para el oído humano, la relación entre la magnitud de un estímulo físico y la percepción no es lineal. Se ha comprobado que en la zona central del campo de audibilidad, la sensación de altura es proporcional al logaritmo de la energía que produce la excitación (Ley de Weber-Fechner), por tanto podemos medir la diferencia de sensación acústica de la forma siguiente:

La distancia entre las notas de frecuencias f_1 y f_2 Hercios se calcula como

$$d(f_1,f_2)=1200\cdot\left|\log_2\left(\frac{f_1}{f_2}\right)\right| \text{ cents}$$

Los afinadores cromáticos electrónicos que utilizan los músicos, lo que hacen es medir la distancia de una nota respecto de la afinación perfecta. Estos afinadores, basados en las 12 notas del sistema temperado igual de 12 notas, dividen la octava en doce partes iguales. Cada una de estas partes tiene una amplitud de 100 cents. Si representásemos esta situación en un segmento, la nota afinada, F, ocuparía el punto medio y los extremos f_1, f_2 se obtendrían aumentando y disminuyendo 50 cents a la nota central, respectivamente.

Como los cents son unidades logarítmicas que hemos introducido a partir de la distancia anterior, para calcular f_1 hay que aumentar 50 cents a F, es decir,

$$1200\cdot\log_2\left(\frac{f_1}{F}\right)=50\Rightarrow f_1=F\cdot 2^{\frac{50}{1200}}=F\cdot 2^{\frac{1}{24}}$$

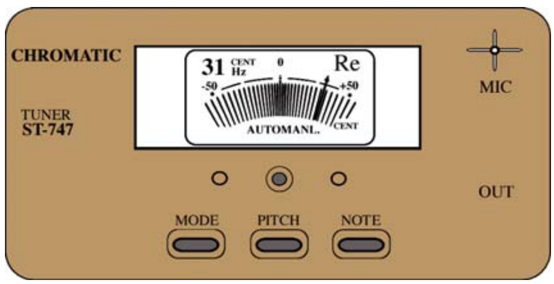
De forma similar, f_2 se obtiene disminuyendo 50 cents a F, es decir,

$$f_2=F\cdot 2^{\frac{-1}{24}}$$

Veamos en un ejemplo, cómo la desviación respecto de la nota central nos permite construir la función de pertenencia.

Ejemplo 1: Si se ha fijado como nota patrón el La_4=440 Hz, cuando el afinador detecta una nota n, cuya frecuencia es 299 Hz, la respuesta que proporciona el afinador es la siguiente:

Nota: Re (D), *Desviación*: 31,1702 cents



Respuesta de un afinador cromático al detectar un sonido de 299 Hz.

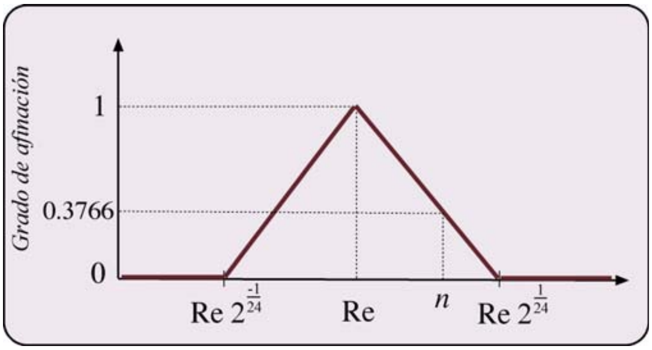
Para llegar a este resultado, el afinador localiza la nota afinada más próxima a n (en este caso el Re) y calcula la distancia entre n y el Re que resulta 31,1702 cents. Pero esta información se puede utilizar para responder a otra pregunta: ¿Cuál es el grado de verdad de la afirmación "299 Hz. es un Re"? Si la verdad absoluta tiene un grado 1, basta con calcular cuánto se desvía (en proporción) de este 1 para que tengamos la respuesta, es decir,

$$1-\frac{\text{Desviación}}{50}=1-\frac{31{,}1702}{50}=0{,}3766$$

Entonces, lo que hemos hecho es describir el Re como un número borroso triangular,

$$\tilde{Re}=\left(Re\cdot 2^{-1/24},\ Re,\ Re\cdot 2^{1/24}\right)$$

y analizar el valor que corresponde a *n* con la función de pertenencia de este número.



Función de pertenencia del Re y grado de afinación de 299 Hz.

Para generalizar esta idea y que sirva para todas las octavas, reducimos el estudio, como en los otros trabajos aparecidos en *Musymáticas*, a la octava [1, 2]. Vimos que para cualquier sistema de afinación, las notas se podían expresar como

$$2^{\beta},\ \beta\in[0,1]$$

Teniendo en cuenta la forma de medir distancias, el exponente del 2 nos da directamente la medida de la sensación que proporciona la nota.

Una nota musical borrosa se puede describir con un número borroso triangular

$$2^{\beta} = (2^{\beta-\delta}, 2^{\beta}, 2^{\beta+\delta})$$

donde 2^{β} *es la nota afinada (en el sentido clásico) y 1200δ es la imprecisión (en cents) que estamos dispuestos a asumir.*

Comparación de notas borrosas

Entender las notas como conjuntos borrosos supone replantear muchos conceptos tradicionales de la Música que, normalmente, se generalizan de forma intuitiva. Por ejemplo, por la forma en que han sido construidas las notas borrosas, podemos aceptar que una nota está afinada si lo está la frecuencia central del triángulo. Pero es evidente que en la Música, lo realmente importante es la relación de unas notas con otras.

Desde el punto de vista clásico, para comparar dos notas no hay más que medir la distancia (intervalo) entre ellas. En 1948, casi veinte años antes de que Zadeh introdujera los conjuntos borrosos, el musicólogo ruso N. A. Garbuzov (1880-1955) revolucionó el estudio de los intervalos musicales sugiriendo[2] el concepto de *zonas*[3] , en lugar de intervalos, en el contexto de la percepción. Se trató de un trabajo de laboratorio en el que a partir de miles de pruebas estableció bandas para los intervalos melódicos (las notas suenan una después de otra) y armónicos (las notas suenan al mismo tiempo).

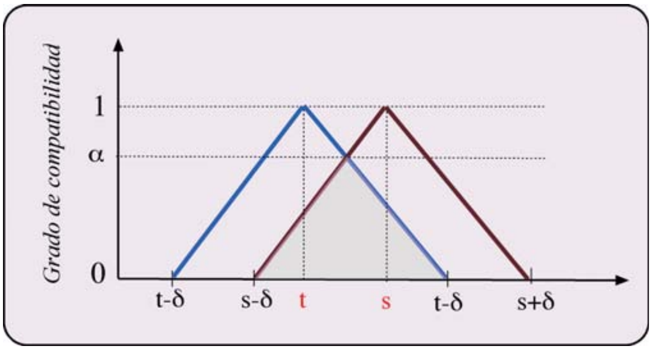
Intervalo	*Melódico*	*Armónico*
Unísono	(-12, 12)	(-30, 30)
Segunda menor	(48, 124)	(66, 130)
Segunda mayor	(160, 230)	(166, 230)
Tercera menor	(272, 330)	(266, 330)
Tercera mayor	(372, 430)	(372, 430)
Cuarta	(472, 530)	(466, 524)
Tritono	(566, 630)	(566, 630)
Quinta	(672, 730)	(672, 730)
Sexta menor	(766, 830)	(766, 830)
Sexta mayor	(866, 930)	(866, 924)
Séptima menor	(966, 1024)	(966, 1024)
Séptima mayor	(1066, 1136)	(1066, 1136)

Esto significa que, en la práctica, dos notas que distan entre −12 y 12 cents podemos suponer que son la misma nota (unísono) o si distan entre 372 y 430 cents, entre ambas hay un intervalo de tercera mayor. En un lenguaje actual, la teoría de Garbuzov podría simplificarse mucho diciendo que los intervalos se han convertido en conjuntos borrosos. Pero, ¿cómo podemos comparar dos notas sin tener que recurrir a miles de experimentos?

Si queremos comparar las notas

$$2^{\tilde{s}} = (2^{s-\delta}, 2^{s}, 2^{s+\delta}) \ \text{ y } \ 2^{\tilde{t}} = (2^{t-\delta}, 2^{t}, 2^{t+\delta})$$

no hay más que pensar que serán más parecidas cuanto más parecidos sean sus triángulos; o dicho de otro modo: cuando haya mucha intersección entre los triángulos que representan las notas serán muy parecidas, y si la intersección es pequeña o vacía no lo son. Para hacer operativa esta idea, es más sencillo si nos quedamos sólo con los exponentes del 2 de cada nota (la parte que mide la sensación).



Grado de compatibilidad de dos notas borrosas

En general, el grado de compatibilidad entre dos números borrosos $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ se calcula como la posibilidad de que estos números sean iguales,

$$\mathrm{Pos}(\tilde{A}=\tilde{B})=\sup_x \min\left\{m_{\tilde{A}}(x), m_{\tilde{B}}(x)\right\}.$$

Sin embargo, como los números que representan a las notas son triangulares, el grado de compatibilidad de dos notas se puede obtener calculando el punto más alto de la intersección de los triángulos. De hecho, por un cálculo directo se comprueba (véase Liern, 2005) que este grado de compatibilidad es

$$Compat(2^{\tilde{s}},2^{\tilde{t}})=1-\frac{|s-t|}{2d}$$

Aún así, a los músicos les resulta más cómodo calcular la compatibilidad a partir de las frecuencias de las notas directamente.

La compatibilidad entre dos notas borrosas cuya frecuencias centrales son f_1 y f_2 Hz. se calcula como

$$\mathrm{Compat}(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2)=1-\frac{d(f_1,f_2)}{2\times \text{tolerancia en cents}}$$

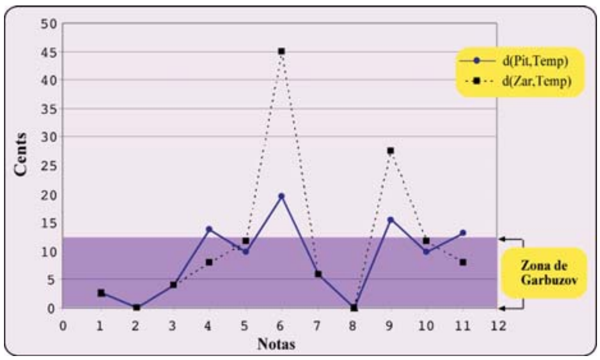
Ejemplo 2: Analicemos las compatibilidad de las notas, afinadas en los sistemas de Pitágoras, Zarlino (Justa Entonación) y Temperado, de un fragmento de Béla Bartók (1881 – 1945).

Fragmento de Música para cuerdas, percusión y celesta de Béla Bartók (1881 – 1945)

Las frecuencias de las notas del pentagrama en cada uno de los sistemas son las siguientes:

Nota	*Pitagórico*	*Justa Entonación*	*Temperado*
Mi	330	330	329,628
Mi#	352,397	343,75	349,228
Fa#	371,25	366,667	369,994
Fa##	396,447	381,944	391,995
Sol#	417,656	412,5	415,305
La	440	440	440
La#	469,863	458,333	466,164
Si	495	495	493,883

Si tomamos como patrón las notas afinadas en el sistema temperado de 12 notas, basta con observar las distancias entre cada una de las notas con su homóloga en el sistema temperado, para comprender que algunas son muy poco compatibles.



Distancia de las notas del pentagrama de Béla Bartók afinadas en los sistemas de Pitágoras y de Zarlino respecto de las mismas notas en el sistema temperado

En la tabla siguiente mostramos los resultados obtenidos al aplicar la fórmula anterior para calcular la compatibilidad de las notas del pentagrama.

Nota	*d(p, t)*	*d(z, t)*	*Compat(p, t)*	*Compat(z, t)*
Mi	2,6251	2,6251	0,8841	0,8841
La	0	0	1	1
Si	3,9216	3,9216	0,8268	0,8268
La#	13,6868	7,8184	0,3955	0,6547
Sol#	9,7769	11,7284	0,5682	0,482
Fa##	19,5491	44,9689	0,1366	0
Fa#	5,8646	5,8646	0,741	0,741
La	0	0	1	1
Mi#	15,641	27,371	0,3092	0
Sol#	9,7769	11,7284	0,5682	0,482
La#	13,6868	7,8185	0,3955	0,6547

Si para aceptar que dos notas sean compatibles (pueden sonar juntas) exigimos un mínimo de compatibilidad del 50% (α = 0,5), podemos comprobar que muchas de las notas de este fragmento no podrían ser interpretadas simultáneamente por instrumentos que afinan en estos tres sistemas de afinación, porque el grado de compatibilidad es bajo.

Un futuro alentador para los músicos

Actualmente, tanto la lógica borrosa como otras herramientas de la Inteligencia Artificial y de las Matemáticas, brindan oportunidades muy interesantes a los artistas en general y a los músicos en particular. Aquí sólo hemos presentado una pequeña muestra de cómo se abordan en nuestros días algunos de los problemas que los músicos tienen que resolver en su práctica cotidiana, pero, evidentemente, existen muchos investigadores que trabajan en estos aspectos.

Conjugar el uso de conceptos rígidos, que surgieron hace varios siglos, junto con tecnologías que cada día avanzan más rápido, hace que el músico, y por supuesto el matemático, deba dar respuesta a inconvenientes que surgen de esta combinación. Por ejemplo, la utilización tan extendida de afinadores electrónicos surgidos hace varias décadas, debería complementarse con el uso de programas informáticos, muchos de ellos de libre disposición en Internet (como Audacity®, por citar alguno), que permiten que el músico sepa hasta qué punto lo que está ejecutando es compatible con otros instrumentos. Esto, no sólo permitiría elegir otras posiciones, modificar la presión en la emisión, etc. para aumentar la consonancia del conjunto, sino que contribuiría a aumentar la calidad y la belleza de la Música que, al fin y al cabo, es de lo que se trata.

"[...] Mientras esta escritura
pretende poner orden en el caos,
yo desciendo del orden al caos para ver
si así logro entender mejor
la estructura de lo humano o mis cárceles [...]"

Fragmento de *Una excusa para amar*, poema de Lógica Borrosa (2002). Chantal Maillard

MUSYMÁTICAS ■

NOTAS

[1] En realidad, el origen podría fijarse en 1922 cuando Lukasiewicz cuestionaba la Lógica Clásica booleana (valores cierto y falso) y proponía una lógica de valores ciertos en el intervalo unidad como generalización de su lógica trivaluada. En los años 30 fueron propuestas lógicas multivaluadas para un número cualquiera de valores ciertos (igual o mayor que 2), identificados mediante números racionales en el intervalo [0, 1]. Posteriormente, en 1937, Max Black (1909 - 1989), publicó el artículo "Vagueness: An exercise in Logical Analysis" y en los años 1942 y 1950, Karl Menger (1902 - 1985), publicó en "Statistical Metrics" dos artículos sobre relaciones borrosas de indistinguibilidad.

[2] N. A. Garbuzov, en 1948, publicó el artículo *The zonal nature of the human aural perception* en el que hacía un estudio de la percepción de los intervalos musicales. A pesar de que se trata de uno de los primeros intentos por valorar de forma numérica este concepto, el trabajo pasó inadvertido por estar publicado en ruso en la Academia de Ciencias de Moscú y en una época en la que muchas investigaciones hechas en la URSS no se conocían el mundo occidental. Debió transcurrir más de un cuarto de siglo hasta que, de la mano de Ján Haluska, los trabajos de Garbuzov empezaron a considerarse elementos clave dentro de la psicoacústica.

[3] Estas zonas se conocen en la actualidad como las zonas de Garbuzov.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GOLDÁRAZ GAÍNZA, J. J. (2004): *Afinación y temperamentos históricos*, Alianza Editorial, Madrid.

HALUSKA, J. (2000): "Equal Temperament and Pythagorean Tuning: a geometrical interpretation in the plane", *Fuzzy Sets and Systems*, 114, pp. 261-269.

HALUSKA, J. (2005): *The Mathematical Theory of Tone Systems*, Marcel Dekker, Inc., Bratislava.

KOSKO, B. (1993): *Pensamiento borroso*, Grijalbo-Mondadori, Barcelona.

LIERN, V. (2005): "Fuzzy tuning systems: the mathematics of musicians", *Fuzzy Sets and Systems* 150, pp. 35-52.

Internet

BENSON, D. (2007): *Mathematics and Music*,
http://www.maths.abdn.ac.uk/~bensondj/html/maths-music.html

http://www.hasseborup.com/ahistoryofintonationfinal1.pdf

http://www.inf-cr.uclm.es/bisc/Fuzzy_sets_zadeh.pdf