

El cálculo simbólico de forma gráfica

Con muchos los recursos informáticos que podemos encontrar en la red para poder utilizar en el aula de matemáticas, bien para un tema determinado o bien para un contenido matemático específico. Esos recursos podemos localizarlos de forma individual, como elementos integrantes de alguna web, o bien podemos localizar webs que ofrecen un conjunto de recursos que son útiles para las matemáticas en general.

Entre las webs que ofrecen recursos para poder ser utilizados en el aula de matemáticas localizamos la web *El paraíso de las matemáticas* cuya dirección URL es

<http://www.matematicas.net>

En la imagen 1 podemos observar el portal de *El paraíso de las matemáticas*.

Este portal, que surge a partir del 1998 a partir de una idea de los profesores José Manuel Astorga y Carlos Gombau, aglutina a un gran número de colaboradores y encargados de mantenerla que desarrollan cada una de las áreas que compone la página y la dotan de contenido gracias al material que proporcionan los distintos colaboradores.

Según se indica en el propio portal, en el mismo puedes encontrar más de 2.700Mb de contenido con más de 4.000 descargas y más de 1.000 enlaces de interés para las matemáticas.

Como podemos comprobar en la imagen 1, la web aparece dividida en tres columnas, recogiéndose en la zona central, al acceder a la web, lugares destacados de las distintas partes que se localizan en las zonas laterales. En el lateral izquierdo se locali-



Imagen 1: Portal de *El paraíso de las matemáticas*

Mariano Real Pérez
 CEP de Sevilla
matemastic@revistasuma.es

za un menú que, bajo el título *¿quiénes somos?* explican cómo surgió la idea de este portal, así como la evolución que ha tenido el mismo y los integrantes del grupo que lo mantienen.

También destaca una zona denominada *área on line* en la que se encuentran enlaces tan sugerentes como *Historia* que nos conduce una sección sobre la historia de las matemáticas, *Diccionario* en el que van incluyendo poco a poco distintos términos matemáticos, teoremas, matemáticos, terminología, etc. ordenados según el alfabeto que aparece en la zona derecha de la pantalla. Este recurso se complementa con la zona de *Etimología* en la que se recogen términos utilizados en matemáticas. También aparece en este menú una zona dedicada a la *Papiroflexia* y otra dedicada a *Juegos*. Debemos destacar en este menú la zona dedicada a *Linux* en la que se trata este sistema operativo libre, pudiéndose observar las distintas distribuciones, manuales sobre su instalación, programas bajo Linux para las matemáticas, etc.

El portal también cuenta con un *área de recursos* en la que destaca el enlace *Consultas*. A través de este enlace podemos ponernos en contacto con el grupo que mantiene la página. Este contacto está colocado para que el visitante que tenga alguna duda sobre matemáticas pueda consultarle al grupo la misma para que la solucionen.

El paraíso de las matemáticas cuenta también con un *área de descargas* en la que el navegante se encuentra con enlaces como *Asignaturas* en el que puedes descargarse apuntes, exámenes y ejercicios de distintas asignaturas universitarias y preuniversitarias. Existen enlaces a programas, cursos,...

Por último, destacamos en la web la zona de *programoteca* en la que se recogen una serie de programas para matemáticas, clasificados por sistema operativo. Concretamente, en la imagen 2 podemos observar la zona de la programoteca dedicada a Linux.

En esta sección se recogen 35 aplicaciones informáticas para Linux clasificadas por secciones en calculadoras, cálculo numérico, cálculo simbólico, editores de ecuaciones, estadística, exámenes, geometría, representación gráfica, grafos y visores.

Cálculo simbólico II: de Maxima a Wxmaxima

En el anterior número de SUMA estuvimos analizando la aplicación Maxima para el cálculo simbólico. Una aplicación informática de software libre para que comprobemos que existen versiones para distintos sistemas operativos, tanto libres como propietarios. Según observamos en ese número, Maxima funcionaba a base de comandos y los usuarios necesitarían conocer múltiples órdenes o comandos y su aplica-



Imagen 2: Programoteca de Linux

ción para poder utilizar este software. Sin embargo, también indicamos que se había desarrollado un entorno gráfico para Maxima, denominado Wxmaxima. En la imagen 3 podemos observar la aplicación Wxmaxima.

Con la aplicación Wxmaxima contamos con un entorno gráfico con el que efectuar cálculos simbólicos sin necesidad de conocer el conjunto de comandos de Maxima y contando con todo el potencial de esta aplicación.

Según podemos observar en la imagen 3, la aplicación Wxmaxima presenta una ventana dividida en cinco partes de forma vertical. Estas partes son las siguientes:

- 1.-Menú superior. En este menú se encuentran todas las acciones que podemos realizar con Wxmaxima. Recordemos que cada una de estas acciones corresponden a comandos de Maxima y, dependiendo de la expresión algebraica a la que se lo deseemos aplicar. No todas las opciones del menú se corresponden con comandos de Maxima, ya que algunas de las opciones del menú se corresponden con acciones propias de Wxmaxima como veremos más adelante. Otras opciones que aumentan el potencial de la aplicación sumado al de Maxima.

En la imagen 4 podemos observar un despliegue completo del anterior menú.



Imagen 3: aplicación Wxmaxima

2.–Botonera superior. Debajo del menú superior encontramos una botonera con distintas acciones generales que podemos efectuar sobre el propio software, no sobre las expresiones que estemos utilizando. Las distintas opciones que nos ofrece son:

- Abrir archivos previamente creados con Wxmaxima, lo que nos permite continuar con sesiones previamente generadas.
- Guardar sesiones que se creen con Wxmaxima. Esto permite que los alumnos puedan realizar sus ejercicios poco a poco utilizando la aplicación.
- Imprimir la sesión que tengamos abierta en ese momento.
- Configurar algunas opciones de Wxmaxima. En la imagen 5 observamos la ventana de configuración. En la configuración podemos destacar la opción de panel de botones, en la que seleccionando “completo” observamos que aparece una botonera inferior más amplia como la que vemos en la imagen 5, aumentando la que aparecía en la imagen 4.
- Otras opciones como copiar, pegar, insertar texto, interrumpir cálculo... completan esta botonera superior.

3.–En la zona central, tercera zona de la pantalla, se encuentra el área de trabajo. Las acciones que vayamos realizando con Wxmaxima se irán traduciendo en comandos de Maxima en esta zona. Se siguen conservando las mismas propiedades que en Maxima, es decir, podemos seguir

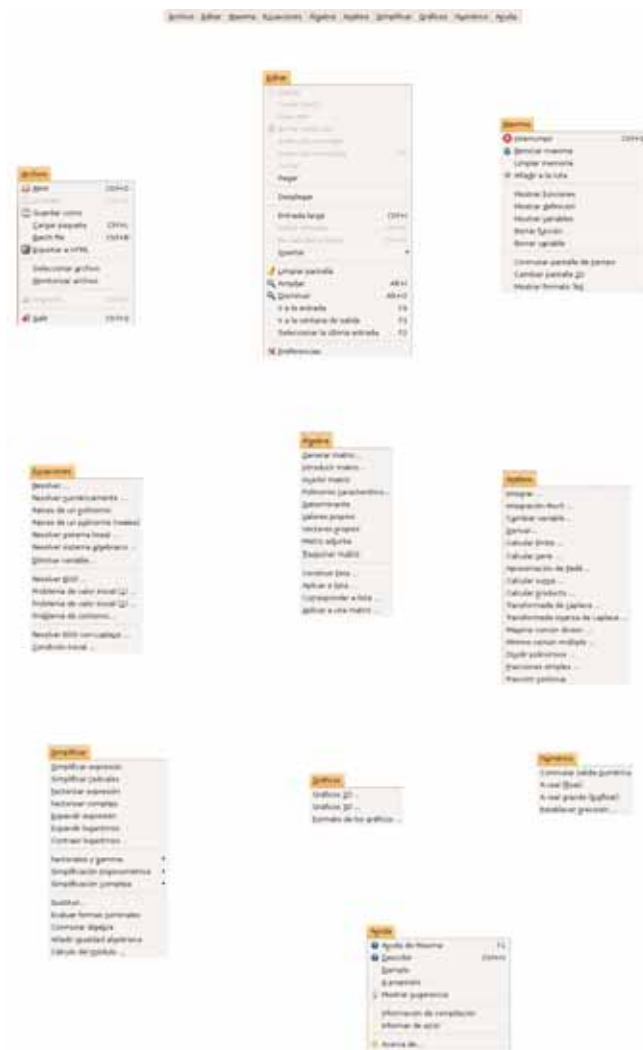


Imagen 4: menú superior de Wxmaxima

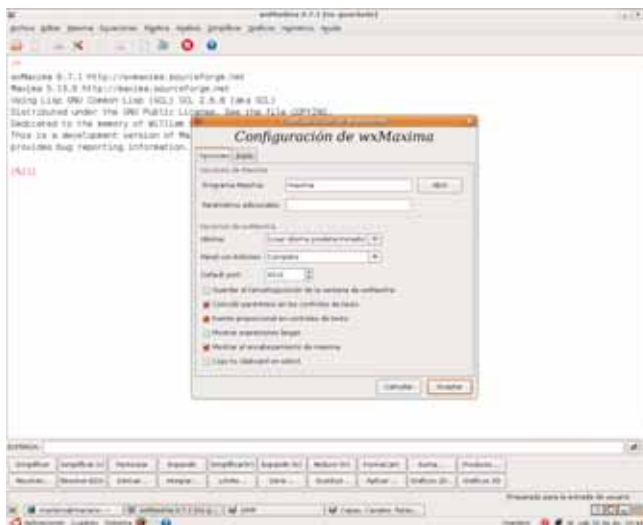


Imagen 5: ventana de configuración de Wxmaxima

escribiendo, si lo deseamos, los comandos directamente, el punto (%ik) nos indica la entrada de la expresión número k, mientras que (%oj) nos indica el resultado o salida j. En esta zona central se irán desarrollando todos los cálculos que le vayamos indicando a Wxmaxima.

4.–La cuarta zona que encontramos en la pantalla de Wxmaxima es la ventana de comandos. En esta ventana introduciremos los distintos comandos o las distintas expresiones que vayan a ser objeto de nuestro estudio. Esta ventana hereda de Maxima la posibilidad de recuperar una expresión o un comando escrito anteriormente sin más que pulsar la flecha superior en el teclado del ordenador.

5.–La quinta y última zona de la pantalla nos presenta una botonera que, a diferencia de la superior, ésta nos ofrece acciones directas sobre las expresiones que hayamos introducido previamente.

Ahora vamos a realizar un pequeño recorrido por la aplicación. Para ello vamos a comenzar con generalidades que debemos conocer:

- a. De forma general ya hemos indicado el significado de (%ik) y de (%oj).
- b. La botonera inferior, en la mayoría de las acciones, va a utilizar el comando correspondiente sobre la última expresión que se observe en la pantalla. Para aclarar este punto, en la imagen 6 observamos las siguientes acciones que hemos realizado:
 - b.1. Hemos escrito en la línea de comando la potencia octava de $(u+v)$ y hemos pulsado Enter. No hemos necesitado escribir el punto y coma (;) que era necesario escribir en Maxima.
 - b.2. Hemos pulsado el botón “Expandir” de la botonera inferior. Esta acción se ha traducido en el comando `expand(%)`; por lo que observamos que la expresión inmediatamente anterior se identifica con el símbolo %.
 - b.3. Hemos pulsado el botón “Derivar”. Con esta acción nos ha aparecido la ventanita que observamos en la imagen 6. En esta ventanita hemos indicado que la expresión que deseamos derivar es % y que la variable respecto a la que deseamos derivar es v . Con esta acción hemos obtenido la salida (%o3) que observamos en la imagen 6.
- c. No todo el potencial de Maxima se desarrolla desde Wxmaxima, aunque sí para los niveles que estamos contemplando aquí.
- d. Wxmaxima nos permite guardar y abrir sesiones previamente realizadas de forma sencilla.

Una vez que hemos contemplado estas generalidades, vamos a analizar con un poco más de profundidad el menú superior de la aplicación, un menú que recoge todas las opciones que se ofrecen tanto en la botonera superior como en la inferior.

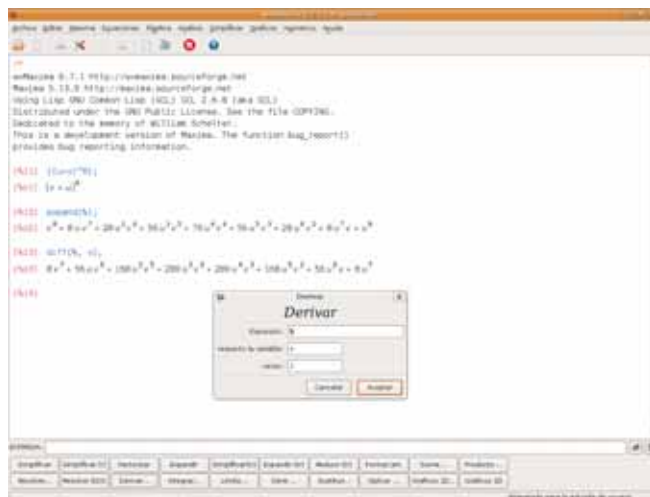


Imagen 6: acciones con la botonera inferior de Wxmaxima

Comenzamos con la opción *Archivo*. En este menú se recogen acciones generales de Wxmaxima, como la de abrir archivo y guardar archivo que ya hemos tratado anteriormente. Pero además se recogen otras acciones muy potentes como:

- Batch file: Para utilizar esta opción, debemos tener previamente creado, con un editor de textos simple como gedit por ejemplo, un archivo denominado “archivo.mac” que contenga varios comandos de Maxima que deseemos efectuar de una sola vez. Por ejemplo, si creamos con gedit un archivo cuyo contenido sea el siguiente:


```
t:expand((r+v)^5);
diff(t,v);
factor(%o2);
cos(%pi);
integrate(r/(1+m^3),m);
linsolve([3*x+4*y=7, 2*x+b*y=13], [x,y]);
expand((x-3)*(x+2)*(x-4));
solve(%o7=0,x);
equ1: x^2+3*x+y^2=4;
equ2: 3*x-2*x*y=3;
solve([equ1,equ2]);
```

Obtenemos como resultado el que contemplamos en la imagen 7, en la que observamos que se han ejecutado todos los comandos anteriores.

Según observamos en la imagen 7, algunos de los comandos no se han ejecutado, concretamente el que resuelve el sistema de ecuaciones no lineales. Eso es debido a que todos los comandos que hemos incluido en el archivo .mac que teníamos guardado no caben en una única pantalla. Para que sigan ejecutándose los comandos siguientes solamente debemos pulsar la tecla Enter.

- Exportar a Html. Con esta opción podemos generar una página web en la que se recoja la sesión que hemos reali-

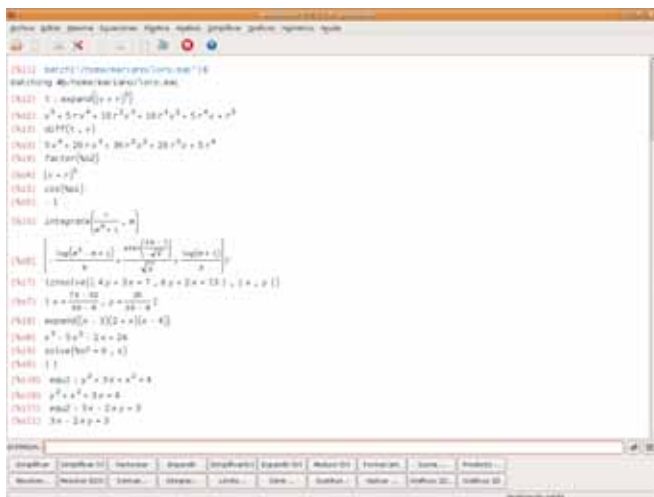


Imagen 7: ejecución de un archivo con varios comandos

zado con Wxmaxima. Debemos tener en cuenta que la sesión completa se guardará como una imagen en formato png, de tal forma que junto al archivo html que generemos, aparecerá una carpeta llamada “img” que contendrá la imagen indicada. Así, la web generada lo que nos mostrará es la imagen que se encuentra en esa carpeta.

En el menú *Editar* vamos a destacar la opción *Limpiar pantalla*. Esta opción hace desaparecer los cálculos que se están contemplando en ese momento, pero sigue adelante con la sesión de Wxmaxima con la que estemos trabajando. Si lo realizamos, observamos que la entrada (%ik) que aparece es la siguiente a la última utilizada.

Del siguiente menú, Maxima, destacamos la opción de reiniciar la aplicación en la que desaparecen todos los valores anteriores, por lo que las variables que hayamos definido dejan de tener el valor que les habíamos asignado anteriormente.

Continuamos adelante con las siguientes opciones que se nos ofrece en el menú superior. Estas opciones ya se refieren a actuaciones sobre expresiones algebraicas. Como ya hemos indicado, sería una ardua tarea realizar un recorrido completo por Wxmaxima, por lo que vamos a exponer algunos ejemplos de utilización de las opciones que aparecen en los siguientes menús.

Ejemplo 1: Para el primero de ellos nos vamos a utilizar la opción *Resolver sistema algebraico* del menú *Ecuaciones*. En este caso vamos a resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} z^2 + 3xy + 2x^2 &= 22 \\ 5xy &= 2 \\ 2z + 3x &= 6 \end{aligned}$$

Para ello, al pulsar sobre *Resolver sistema algebraico* aparece

una ventanita en la que nos pregunta sobre el número de ecuaciones que tiene el sistema. Le indicamos 3 como puedes observar en la imagen 8.

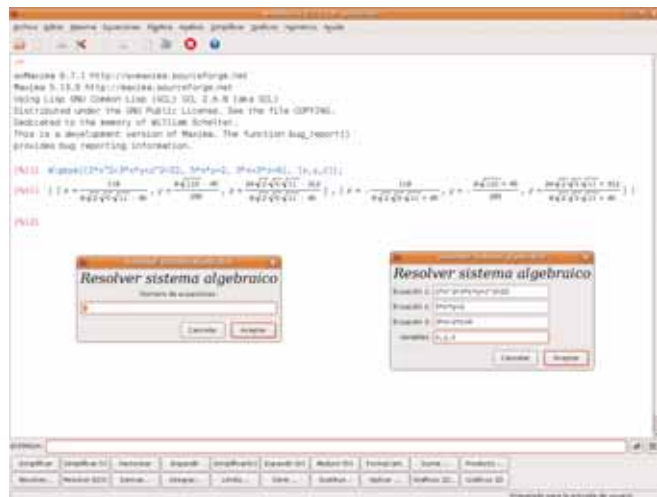


Imagen 8: resolución de un sistema algebraico con Wxmaxima

Tras indicarle el número de ecuaciones, nos vuelve a aparecer otra ventanita en la que nos pide que le indiquemos las ecuaciones y las variables que debe calcular para resolver el sistema. En nuestro caso le escribiremos cada una de las ecuaciones del sistema de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 2*x^2+3*x*y+z^2&=22 \\ 5*x*y&=2 \\ 3*x+2*z&=6 \end{aligned}$$

Y le indicaremos que las variables son x, y, z . En la imagen 8 podemos observar el resultado que obtenemos. También podemos ver las dos soluciones que tiene el sistema planteado.

Ejemplo 2: Ahora nos planteamos calcular la integral definida entre menos infinito y 10 de la función siguiente:

$$\frac{2z}{(z^2 + 1)^2}$$

Para calcular esta integral utilizaremos la opción *integral* del menú *Análisis*. Previamente habremos escrito la función de la que deseamos calcular la integral definida. Al pulsar sobre esta opción aparece una pequeña ventanita que observamos en la imagen 9 en la que se nos pide la expresión que deseamos integrar, la variable respecto a la que deseamos integrar y el intervalo. Para indicar que el intervalo inferior es menos infinito, debemos pulsar sobre el botón “especial” que aparece al lado de ese dato, apareciendo así una pequeña ventana, como la que contemplamos en la imagen 9 en la que podremos seleccionar distintas opciones. Entre ellas localizamos el menos infinito. Posteriormente, para el intervalo superior escribiremos 10. La secuencia completa la podemos observar en la imagen 9 en la que ya aparece realizada la integral.

Observamos en la salida (%o2) que la solución de la integral que nos planteamos es $1/10$.

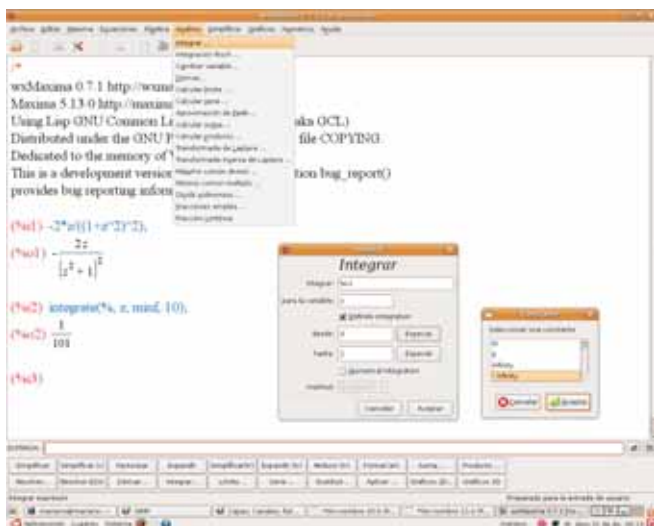


Imagen 9: cálculo de una integral con WxMaxima

Ejemplo 3: Para finalizar con estos ejemplos vamos a realizar una representación gráfica en tres dimensiones de una función. En este caso nos planteamos representar gráficamente la función:

$$\frac{z^4 + 5u}{z^2 + u^2 + 1}$$

Para realizar esta gráfica, una vez que hemos escrito la expresión algebraica en Wxmaxima, seleccionamos la opción integral del menú *Análisis*, apareciendo la pequeña ventana que observamos en la imagen 10. En esta ventana debemos indicar que las variables de la función son z y u . Posteriormente debemos indicar el intervalo para la variable z y después el intervalo para la variable u .

Seguimos ahora indicándole el formato que va a tener la red de representación, en nuestro caso le hemos indicado 60×60 y el tipo de representación gráfica. Nosotros hemos seleccio-

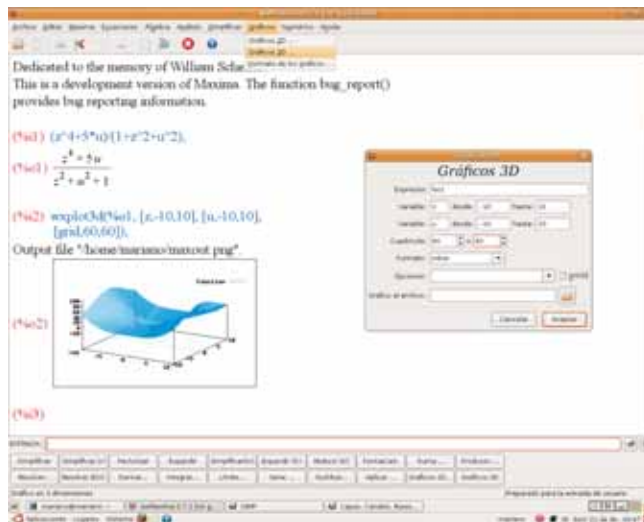


Imagen 10: Representación gráfica en 3D con Wxmaxima

nado la representación gráfica en línea, es decir, sobre el mismo marco del texto. Con ello obtenemos el resultado que observamos en la imagen 10.

Debemos indicar que de entre los formatos que se nos ofrecen para la representación gráfica, el más aconsejable es el denominado *Gnuplot*, pero para poder utilizar este tipo, debemos haber instalado previamente la aplicación para representaciones gráficas *Gnuplot* que podemos localizar en el repositorio de la distribución Linux que estemos utilizando.

Con estos ejemplos hemos realizado un pequeño recorrido por la aplicación Wxmaxima. Solamente ha sido la punta del enorme iceberg que supone el gran potencial que se esconde detrás de este software.

Con el fin de sacarle el mayor partido en el aula posible, en el siguiente número completaremos este recorrido por este programa utilizándolo de forma práctica con ejercicios para los que aconsejamos su uso.

MATEMASTIC ■

FICHA EDUCATIVO - TÉCNICA	
Nombre	WxMaxima
Sistema	Aunque es una aplicación propia de Linux y para cada distribución cuenta con el archivo de instalación en su repositorio, también encontramos las versiones correspondientes para Windows y para Mac. Necesitamos haber instalado previamente Maxima, excepto en las versiones más recientes.
Descarga	Repositorio de la distribución de Linux correspondiente o http://maxima.sourceforge.net
Licencia	GPL
Contenido	Cálculo simbólico.
Nivel	Multinivelar: 4º ESO, Bachillerato y Universidad.
Metodología	Aplicación para utilizar a partir de 4º de ESO. Los alumnos utilizarán individualmente la aplicación como herramienta de ayuda para la resolución de problemas y tareas matemáticas