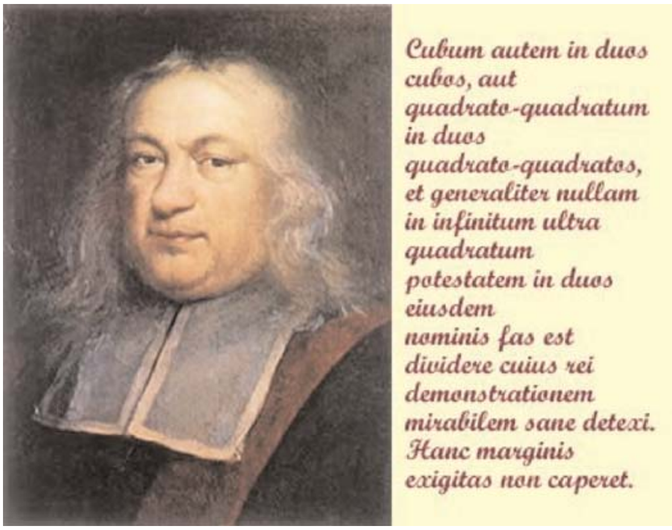
suma+ 64
Junio 2010, pp. 107-112

Pierre Fermat: la pasión por los números

Hace trescientos cincuenta años que Pierre Fermat dio a conocer a los colegas su *Teoría de números*, y decimos que dio a conocer, no que publicó, porque Fermat no publicó nada. Fue su hijo Samuel quien varios años después de la muerte del padre publicó sus principales escritos.

Pero, ¿quién era Pierre Fermat y cuál fue su aportación a las matemáticas? Dos importantes problemas hay planteados en torno a Fermat, el primero es el siguiente: ¿Se trata del verdadero fundador de la geometría analítica, o comparte la gloria con Descartes, como se suele considerar? El segundo problema se refiere al llamado último teorema de Fermat: ¿Poseía, como él asegura, una demostración maravillosa del teorema, o se trataba tan solo de lanzar el anzuelo a los otros matemáticos, a modo de reto, según era su costumbre?

Fermat vivió tiempos difíciles para Francia. Se hallaba el país recién salido de las "guerras de religión" entre católicos y protestantes, que habían culminado en la famosa noche de San Bartolomé de 1572 con la matanza de protestantes. Reinaba entonces Enrique IV, el pacificador del conflicto, que con el Edicto de Nantes concedía la libertad de culto a los protestantes, a la vez que establecía la separación de las comunidades católica y protestante en una serie de plazas de soberanía. Pero, asesinado Enrique IV en 1610, le sucedía Luis XIII, con el ministro Richelieu como favorito, cuya actuación, de nuevo en contra de los protestantes, daba lugar a la conocida Guerra de los Treinta Años. A la muerte del rey en 1643, le sucedía Luis XIV, el monarca absoluto, quien, con Mazarino de primer ministro, convertía a Francia en el árbitro y cabeza intelectual de Europa.



Fue el siglo XVII uno de los más grandes de la historia de la ciencia, y de la Matemática en particular: con Galileo y su telescopio (1609), Descartes y su *Discurso del método* (1637), Pascal y su *Ensayo sobre las cónicas* (1640), Kepler y su *Astronomía Nova* (1609), etc., por no hablar de Napier, Cavalieri, Desargues, Wallis, o, un poco posteriores, de Fermat, Huygens, L´Hôpital, Newton, Leibniz, etc.

Santiago Gutiérrez
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*
hace@revistasuma.es

En estas circunstancias políticas, sociales y culturales, transcurre la vida de Pierre Fermat, que había nacido en la localidad francesa de Beaumont-de-Lomagne, en 1601. No se sabe casi nada de los primeros años de su infancia y juventud, pero sin duda su padre, Dominique, un acomodado comerciante en pieles, hubo de ocuparse de que recibiera una sólida instrucción, quizá en el monasterio franciscano de Beaumont, ya que Pierre poseía excelentes conocimientos de lenguas clásicas, y dominaba los principales idiomas europeos de la época. Era un gran amante de la Literatura, llegando a escribir poemas en francés y español.

Estudió Leyes en la Universidad de Toulouse. Poco antes de 1630, se trasladó a Burdeos, donde, en 1629, dieron comienzo sus investigaciones matemáticas. Fue entonces cuando escribió su trabajo sobre máximos y mínimos. De allí pasó a Orleáns, en cuya Universidad se graduó en Leyes en 1631. Ese mismo año, obtuvo un puesto de magistrado en el Parlament de Toulouse, que era la Corte Suprema de Justicia. En Toulouse, también en 1631, contrajo matrimonio con Louise de Long, prima de su madre, de cuyo matrimonio tuvo tres hijos y dos hijas. En 1648 fue designado Consejero real, y en 1652 alcanzó el máximo nivel en la Corte Suprema.

...obtuvo un puesto de magistrado en el Parlament de Toulouse, que era la Corte Suprema de Justicia. Fue, pues, como matemático tan solo un aficionado.

Llevó una vida tranquila, dedicada a realizar escrupulosamente su tarea profesional, así como a cultivar su afición por la Literatura y las Matemáticas. Fue, pues, como matemático tan solo un “aficionado”, y nada menos que eso, pues dado lo ocupado que estaba con el ejercicio de su brillante carrera profesional, lo asombroso es que aún le quedara tiempo para entretenerse con su afición a las Matemáticas. Realmente, a comienzos del siglo XVII, casi todos los matemáticos eran aficionados, si bien no tan geniales como Fermat. De ahí que el matemático español Miguel de Guzmán llegara a calificarlo como el “príncipe de los matemáticos aficionados”.

Su objetivo no era publicar sino comunicarse con los científicos de la época. Para ello se valía directamente del correo o bien del fraile minimita Marin Mersenne, que se carteaba con muchos matemáticos de la época, y se convertía con eso en una especie de central de información matemática. Efectivamente, en cuanto Mersenne tenía noticia de alguna novedad inmediatamente la comunicaba a todo su círculo de matemáticos. Así, el siglo XVII fue importante en el desarrollo de la Matemática, no sólo por la cantidad de talentos de primera fila que lo llenaron, sino también y singularmente por la rapidez con que circulaba la información.

La geometría analítica

Pierre de Fermat era un hombre amable, nada orgulloso, de carácter constante, que contribuyó grandemente a la evolución de las Matemáticas en muy diversos campos. En todos ellos, sus trabajos han supuesto alguna innovación. En geometría analítica, los trabajos de Fermat surgen a partir de la obra de Apolonio sobre los lugares geométricos. Era frecuente, entonces, que los matemáticos trabajaran en la reconstrucción de las obras de los griegos cuando sólo se tenían noticias sobre ellas. En este caso, utilizando las referencias que daba Pappus en su *Colección matemática*, Fermat se dedicó a reconstruir el libro de los *Lugares planos* de Apolonio. Es así cómo descubrió, antes de 1636, el importantísimo principio fundamental de la geometría analítica:

> Siempre que en una ecuación final aparezcan dos cantidades incógnitas, tenemos un lugar geométrico, al describir el extremo de una de ellas una línea, recta o curva.

Aunque no publicó en su día semejante resultado y sólo se limitó a difundirlo en forma manuscrita, parece ser que su idea es anterior a la publicación de la *Geometría* de Descartes, en que este sienta las bases de la geometría analítica. Es muy posible incluso que Fermat hubiera llegado ya a la geometría analítica en 1629, pues por esta época, como dice Boyer, datan dos importantes descubrimientos, que están estrechamente relacionados con sus trabajos sobre los lugares geométricos. De uno de ellos, el que trata sobre el cálculo de los máximos y mínimos de una función, se habla más adelante.

En este sentido, se puede considerar a Fermat como el fundador de la geometría analítica. Se considera sin embargo que debe compartir este honor con Descartes, ya que éste llegó a conclusiones parecidas, desde una mayor amplitud de pensamiento, si bien ambos abordan el problema con enfoques diferentes. Lo cierto es que la geometría analítica tal y como hoy la conocemos se parece bastante más a la de Fermat (por cierto, es el primero que se vale de dos ejes perpendiculares), que a la de Descartes. A grandes rasgos, puede decirse que mientras Descartes parte de un lugar geométrico para obtener su ecuación, Fermat parte de una ecuación para obtener las propiedades de la curva que representa.

Hay que añadir que ambos matemáticos bebieron en fuentes más antiguas, sobre todo en Vieta, y que el sistema de representación de puntos mediante un par de coordenadas es, desde luego, muy anterior a ellos.

El método de máximos y mínimos

Uno de los primeros problemas que investigó Fermat en el año 1629 es el relativo al cálculo de máximos y mínimos. Su escrito, titulado *Methodus ad disquirendan maximan et minimam* (Método par hallar máximos y mínimos), se publicó, como se ha dicho, después de su fallecimiento, formando parte de su *Varia opera matemática,* en 1679. En él, aplica un ingenioso método para hallar los puntos en los que una función se encuentra en lo alto de una “cumbre” o en el fondo de un “valle”. Para ello, considera el valor de la función en dos puntos próximos, $f(A)$ y $f(A+E)$, donde A representa a la variable. Si A y A+E son próximos a un máximo o a un mínimo $f(A)$ y $f(A+E)$ son adiguales (aproximadamente iguales). Hace entonces $f(A) = f(A+E)$, o sea, $f(A+E) - f(A) = 0$, divide esta ecuación por E, sustituye E por cero, resuelve la ecuación resultante en A, y las soluciones son los valores de A correspondientes a un máximo o a un mínimo.

Hay, en este método, una evidente intuición del proceso que hoy conocemos como “paso al límite”, porque en realidad equivale a calcular:

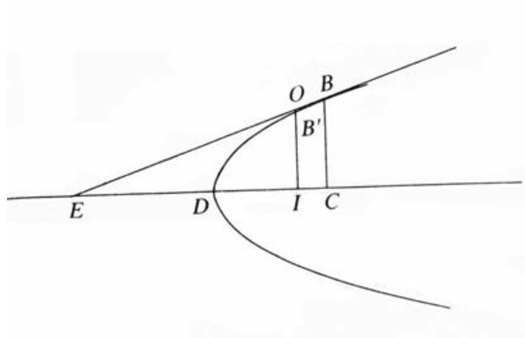
$$\lim_{E\to 0}\frac{f(A+E)-f(A)}{E}$$

Fermat hace un discurso muy típico de la época, como es el de primar la eficacia del resultado sobre el rigor del método. Más tarde, ya en el siglo XIX, esta forma de proceder tan poco rigurosa motivaría al mismísimo Abel a formular el plan de trabajo de su vida, según le comunicaba por carta a su maestro Christopher Hansteen:

> Quiero consagrarme con todas mis fuerzas a aportar un poco más de claridad a la prodigiosa oscuridad en que se encuentra hoy incontestablemente el análisis. Carece de plan y de sistema hasta tal punto que resulta verdaderamente maravilloso que pueda ser estudiado por tanta gente cuando nunca ha sido tratado rigurosamente.(…) En todas partes encuentra uno esa manera desafortunada de concluir lo general partiendo de lo particular, y es extremadamente peculiar que tal procedimiento, a pesar de todo, haya llevado a tan pocas de las así llamadas paradojas.

La diferenciación y la integración

El método de máximos y mínimos lo aplicó Fermat para determinar la tangente a la curva de ecuación $y^2=px$ en un punto B de la misma, tal como se indica en la figura.



Para todos los puntos de la parábola el cociente y^2/x es constante, mientras que para cualquier punto $O(x_t y_t)$ de la tangente, el cociente entre el cuadrado de la ordenada y la abscisa, y_t^2/x_t es variable, y mayor que y^2/x, ya que, observando la figura, se tiene:

$$\frac{\overline{BC}^2}{\overline{DC}}=\frac{\overline{B'I}^2}{\overline{DI}}<\frac{\overline{OI}^2}{\overline{DI}}$$

es decir, $\dfrac{y^2}{x}<\dfrac{y_t^2}{x_t}$.

A medida que O se aproxima a B, más próximos serán los valores de ambos cocientes. Se trata entonces, según su método de máximos y mínimos, de encontrar el mínimo de y_t^2/x_t. Para ello, Fermat adiguala y^2/x y y_t^2/x_t. Llamando, para abreviar, CE = a, CD = b, CI = c, el proceso final se puede esquematizar así:

$$\frac{\overline{BC}^2}{\overline{DC}}=\frac{\overline{B'I}^2}{\overline{DI}}\Rightarrow\frac{\overline{EC}^2}{\overline{DC}}=\frac{\overline{EI}^2}{\overline{DI}}$$

por ser $\overline{BC}$ y $\overline{B'I}$ proporcionales a $\overline{EC}$ y $\overline{EI}$ respectivamente. Sustituyendo queda:

$$\frac{a^2}{b}=\frac{(a-c)^2}{b-c}\Rightarrow$$

haciendo al final $c = 0$ y despejando se obtiene: $a = 2b$. De este modo, se calcula la subtangente, y se determina así la tangente.

En cuanto a la integración, parece haberse inspirado Fermat en el *Tratado de los indivisibles* de Cavalieri, de 1635, al calcular el área encerrada por una curva de ecuación $y = x^m$. Cavalieri, como se sabe, no aclara qué entiende exactamente por indivisible. Considera, eso sí, que una superficie está constituida por rectas paralelas equidistantes, así como que un sólido está constituido por planos paralelos equidistantes. Llegó Cavalieri a la conclusión de que el área encerrada por la curva entre los valores $x = 0$ y $x = a$, viene dada por la fórmula:

$$\frac{a^{m+1}}{m+1}$$

pero sólo lo demostró para los exponentes $m = 1$ y $m = 9$.

Lo que hizo Fermat fue desarrollar un método que permite demostrar el resultado de Cavalieri para cualquier valor del exponente m, tanto entero como fraccionario.

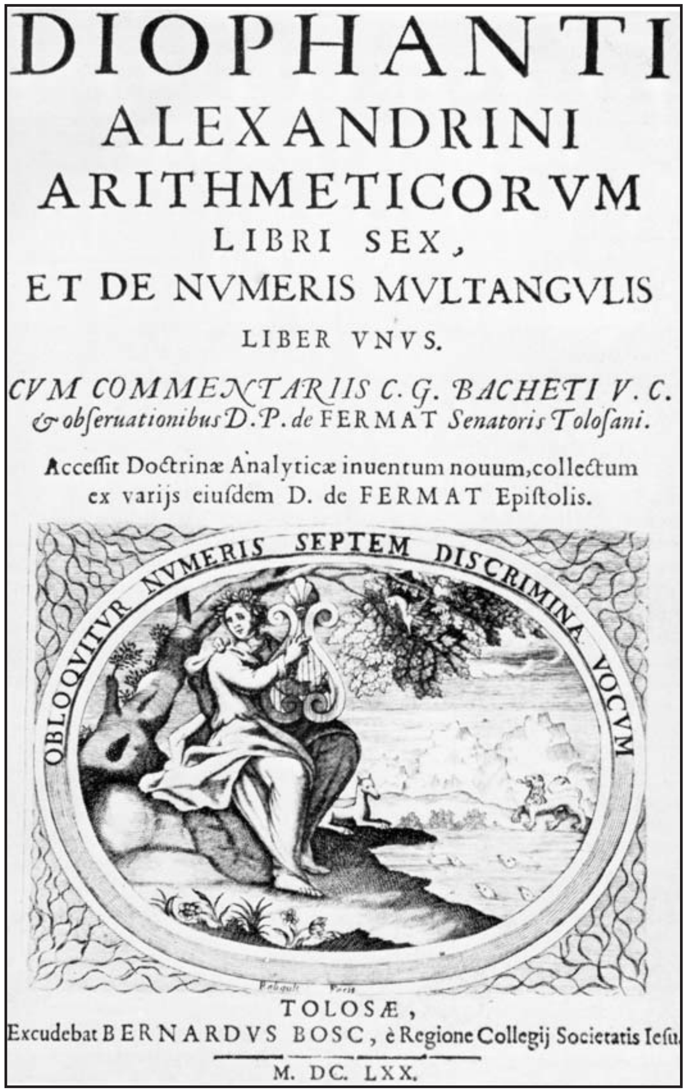
Para demostrar la mayoría de sus proposiciones, Fermat había ideado un método que denominaba de descenso infinito.

La teoría de números

Además de la geometría analítica y de los procedimientos infinitesimales para la determinación de tangentes o el cálculo de áreas, se interesó Fermat por las cuestiones del azar. De tal modo, en este último caso, que se le considera, junto con Pascal, como uno de los fundadores del cálculo de probabilidades.

Sin embargo, donde realmente brilló el genio de Fermat con luz propia es en la teoría de números, de la cual, se puede afirmar, es el fundador. Durante el siglo XVII, circulaba, como ya se ha dicho, una amplia y rápida correspondencia sobre los temas objeto de investigación de los matemáticos, de forma que no se tardaba en saber lo que hacía cada uno. Esto, propiciaba la participación de todos los interesados, aunque sólo fuera con pequeñas ideas o simplemente con críticas u objeciones que estimulaban la superación de los trabajos iniciales. Pero, ocurría así con todos los temas excepto con los referentes a los números. Debido a las traducciones existentes de los griegos, los matemáticos se inspiraban en sus ideas, especialmente en las de Arquímedes y Eudoxo, pero no pasaba lo mismo con las de Diofanto. Curiosamente, este matemático se apartaba de la corriente dominante en el mundo griego, esto es, de trabajar con el álgebra geométrica, para desarrollar, en cambio, el álgebra pura con la ayuda de símbolos. Parece ser que los temas propios de la matemática pura, sin aparentes posibles aplicaciones, no interesaban a los matemáticos de entonces.

Fermat, pues, contrariamente a sus colegas, se interesó por un libro titulado *Aritmética* de Diofanto, en la traducción de 1621 hecha por Bachet. Las cuestiones tratadas por Diofanto fascinaron a Fermat, como es el caso de los números perfectos y amigos, los números figurados, las ternas pitagóricas, la


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obseruationibus D. P. de FERMAT *Senatoris Tolosani.*
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.
OBLOQVITVR NVMERIS SEPTEM DISCRIMINA VOCVM
TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

divisibilidad… y, sobre todo, los números primos. Nadie era capaz de seguirle en sus investigaciones sobre estos temas. Así lo expresa Pascal en una carta:

> Buscad en otra parte quien os siga en vuestras invenciones numéricas; os confieso que me superan con mucho; no soy capaz más que de admirarlas.

A medida que iba leyendo el libro de Diofanto, se le iban amontonando las ideas y anotaba sus observaciones en los márgenes del libro, pero no siempre añadía las oportunas demostraciones. Hay que recurrir a la correspondencia para encontrar sus ideas tratadas con cierta extensión.

Para demostrar la mayoría de sus proposiciones, Fermat había ideado un método que denominaba de "descenso infinito". Es una especie de inducción a la inversa. Si se quiere demostrar un proposición entre números enteros se supone la contraria, y se demuestra que si esta es cierta para algunos enteros también lo es para otros enteros inferiores a los anteriores. Pero este proceso, aplicado sucesivamente en sentido descendente, lleva a unos últimos enteros, dado que el conjunto de los enteros no es infinito en este sentido, y no podría aplicarse la propiedad a otros enteros inferiores, en contradicción con lo supuesto inicialmente.

Un ejemplo típico de aplicación del método de descenso infinito es la demostración de la irracionalidad de un número, por ejemplo, de $\sqrt{2}$:

Sea $\sqrt{2}=\dfrac{a_1}{b_1}$, donde a_1 y b_1 son dos enteros positivos tales que

$a_1 > b_1$, y $1<\dfrac{a_1}{b_1}<2$.

De la igualdad $\sqrt{2}+1=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$, sustituyendo una $\sqrt{2}$ por $\dfrac{a_1}{b_1}$

se deduce: $\sqrt{2}=\dfrac{2b_1-a_1}{a_1-b_1}$, donde ambos términos de la fracción,

$a_2=2b_1-a_1$ y $b_2=a_1-b_1$ son enteros positivos menores respectivamente que a_1 y b_1, como puede deducirse de las desigualdades $1<\dfrac{a_1}{b_1}<2$.

Se tiene entonces: $\sqrt{2}=\dfrac{a_2}{b_2}$.

Aplicando de nuevo y sucesivamente el mismo razonamiento a este resultado se llegaría a un último par de enteros sin posibilidad de un posterior descenso, por ser finita la serie de enteros en el sentido descendente. En contradicción con la hipótesis de partida.

Los trabajos de Fermat sobre teoría de números datan de 1639, año en que resuelve el siguiente problema:

> Sea la igualdad $x^2+2(a+b)x=a^2+b^2$, donde a y b son racionales. Demostrar que si x es una raíz, entonces es una diferencia de dos números inconmensurables.

Entre 1638 y 1644, se desarrolla el periodo más fecundo del talento de Fermat en teoría de números. Es en estos años cuando da a conocer las siguientes proposiciones:

1. Ningún triángulo rectángulo tiene por área un cuadrado.
2. Las ecuaciones $x^4+y^4=z^4$ y $x^3+y^3=z^3$ son irresolubles en términos de números enteros.
3. Ningún número de la forma $8k-1$ es cuadrado o suma de dos o tres cuadrados.
4. Todo número es la suma de tres números triangulares o más, de cuatro números cuadrados, de cinco números pentagonales,etc.

La demostración de que todo número entero es suma de cuatro cuadrados, por el método de descenso infinito, le satisfizo tanto que en carta a Roberval escribía:

> Confieso abiertamente que en la teoría de los números no he encontrado nada que me haya satisfecho más que la demostración de este teorema y me agradaría que usted intentara encontrarla, incluso si fuera sólo para decirme que yo valoro mi descubrimiento más de lo que se merece.

En su correspondencia, Fermat proporciona otros resultados interesantes de su teoría de números, como por ejemplo:

5. 2^{n-1} es compuesto si n es compuesto; si n es primo es congruente con 1 módulo $2n$, y sus divisores primos son de la forma $2nk+1$.
6. a^{p-1} es congruente con 1 módulo p, si p es primo.

7. Cuando $n=p^2+q^2$ con p y q primos entre si, n no tiene divisores de la forma $4k-1$.

Fermat además de aportar numerosas propiedades relativas a los números enteros sistematizó por primera vez la teoría de números, constituyéndola en un cuerpo de doctrina. Como dice acertadamente Oystein Ore, profesor de la Universidad de Yale:

> Fermat representa un punto focal en la historia de la teoría de los números; en su trabajo, las ramas radiales de los periodos anteriores fueron unificadas y su contenido recreado de una manera sistemática y enriquecida.

Nadie más se ocupó de tal asunto hasta dos siglos más tarde en que Gauss le da un nuevo espaldarazo, constituyéndose en el segundo punto focal de la teoría, que diría Oystein.

Fermat hace un discurso muy típico de la época, como es el de primar la eficacia del resultado sobre el rigor del método.

Quizá la popularidad de Fermat, en la actualidad reciente, se haya debido más a algo que no ha demostrado que a sus múltiples demostraciones. Se trata de su famosa conjetura. Fermat demostró, por supuesto utilizando el método de descenso infinito, que la ecuación $x^4+y^4=z^4$ no tiene soluciones enteras. (La demostración para n = 3 no ha aparecido en ninguno de sus escritos). De aquí se deduce que tampoco las tendrá para valores del exponente múltiplos de 4. Pero, fue aún más lejos en su afán generalizador y enunció que la ecuación $x^n+y^n=z^n$ no tiene solución entera para $n > 2$. Es el único resultado que no figura en su correspondencia, y sólo sabemos que lo escribió en el margen del libro II, problema 8, de la *Aritmética* de Diofanto, que habla de la división de un cuadrado en suma de otros dos. Fermat expresó de esta manera su conclusión:

> Es imposible dividir un cubo en suma de otros dos o un bicuadrado en otros dos bicuadrados, en general una potencia cualquiera superior a dos en dos potencias del mismo grado; he descubierto una demostración maravillosa pero este margen es demasiado estrecho para contenerla.

Ha sido imposible, al menos hasta ahora, saber si realmente Fermat tenía esa demostración maravillosa o no, pero tal demostración no apareció por ninguna parte. ¿La habría escrito Fermat por algún sitio ya desaparecido? Es posible que después de su trabajo con las potencias 3 y 4, mediante el descenso infinito, intuyera una generalización para la potencia n, que no llegara a desarrollar bien por falta de tiempo, o bien porque se diera cuenta de alguna dificultad no prevista en su idea inicial.

El hecho es que el problema planteado por lo que sólo era una conjetura más de las realizadas por el genio, entretuvo a los matemáticos desde el siglo XVIII, en que Euler logró el primer paso demostrando el teorema para n = 3 (aunque con ciertas lagunas en su razonamiento), pasando por Dirichlet y Legendre que lo demostraron para n = 5, hacia 1820, y otros numerosos matemáticos, hasta el año 1995 en que Andrew Wiles con la ayuda de su antiguo discípulo Richard Taylor, logró una demostración para cualquier n que resultó ser definitiva (ocupaba 200 páginas!, de un número de la revista *Annals of Mathematics*, dedicado enteramente al teorema). Pero, como suele ocurrir en la ciencia y en la técnica, no solo entretuvo a los matemáticos desde el siglo XVIII hasta finales del XX, sino que los esfuerzos por conseguir esa demostración han sugerido algunas de las máximas creaciones del pensamiento matemático y las técnicas desarrolladas con ese motivo han contribuido notablemente a la solución de otros problemas.

Finalmente, Fermat continuó sus trabajos en Toulouse hasta 1663, en que regresó a Castres, donde murió en 1665. Años después de su muerte, en 1679, su hijo Samuel, publicaría los principales escritos de su padre bajo el título de *Varia Opera Matemática*.

HACE ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Torrecillas Jover, B. (1999): *Fermat. El mago de los números*. Madrid: Nivola

Collette, J-P. (1985): *Historia de las matemáticas II*. Madrid: Siglo XXI

Este artículo fue solicitado por SUMA en enero de 2010 y aceptado en marzo de 2010 para su publicación.