

Los alumnos de cuarto de la ESO ya sabían que la suma de los ángulos de un triángulo es un ángulo llano. También conocían que el teorema de Thales ligaba la semejanza de triángulos con la proporcionalidad de sus lados. Sólo quedaba ya relacionar unos con otros, los ángulos con los lados de un mismo triángulo. Así era como la trigonometría cerraba el círculo, definiéndose el *seno*, *coseno* y *tangente* de un ángulo en un triángulo rectángulo. Gracias al teorema de Thales las definiciones resultaron coherentes.

Durante varias sesiones resolvieron problemas de triángulos rectángulos. Algunos fueron puramente geométricos, es decir, geoméricamente puros. Otros, en cambio, tuvieron un aire mucho más práctico y realista. Se hallaron los tres ángulos y los tres lados de un triángulo rectángulo dado, se calculó la altura de un ciprés visible a través de la ventana conociendo el ángulo de depresión visual de su cima y la distancia hasta su base, se determinó también la inclinación de la escalera del instituto midiendo la huella y la contrahuella de un único escalón.

Las actividades no acabaron ahí, pues había programada una visita al MMB (*Museu Marítim de Barcelona*). Allí se les mostró cómo los navegantes se orientaban en el mar gracias a las

estrellas y se les explicaban los aspectos principales de un problema fundamental en la navegación como fue determinar la longitud. El ingenio matemático de Cristóbal Colón se puso de manifiesto con el descubrimiento de América y si este fue tal, fue porque el navegante llegó hasta el nuevo continente observando siempre la estrella polar bajo el mismo ángulo. Colón no descubrió América porque fue capaz de llegar hasta allí, sino porque supo cómo regresar.

Como colofón a la visita, los estudiantes realizaron una actividad práctica de Trigonometría. Primero, construyeron un cuadrante (Figura 1). Luego, usaban el instrumento para medir el ángulo de depresión visual de la estatua de Colón que hay a escasos metros del MMB y, finalmente, con esos datos y la fórmula de la tangente, calcularon la altura de la estatua.

Miquel Albertí Palmer

IES Vallés, Sabadell

adherencias@revistasuma.es

De vuelta a clase se les planteó un nuevo problema práctico para cuya resolución utilizarían el cuadrante construido en el MMB. El planteamiento fue posible porque un estudiante vivía en el edificio al otro extremo del patio del instituto y cuyas ventanas se veían desde el aula donde se hacía una de las sesiones de clase (Figura 2).

El problema era: *¿Qué distancia hay entre la fachada de nuestra aula y la del edificio al otro lado del patio?*

El ángulo de depresión visual (6°) fue medido en clase con el cuadrante construido en el MMB. La altura sobre el suelo desde la que se tomó esa medida era de unos 5 m . La altura del edificio en cuestión se calculó contando el número de ladrillos por piso de la fachada (accesible a pie), que fue de unos 24 m . Con estos datos se resolvió el problema:

$$\tan(6^\circ) = \frac{24 - 5}{x} \Rightarrow x = \frac{19}{\tan(6^\circ)} \approx 181\text{m}$$

Además de resolver la cuestión mediante Trigonometría fueron invitados a buscarla utilizando únicamente el teorema de Thales. El alumno que vivía en el edificio proporcionó el dato necesario para abordar la cuestión. Él mismo midió la anchura de la ventana de su casa: 80 cm . Pero no tuvieron éxito. Fue entonces cuando llevé a cabo una aplicación magistral del



Figura 2: Patio del Institut Vallès de Sabadell.



Figura 1: Cuadrante construido en el MMB.

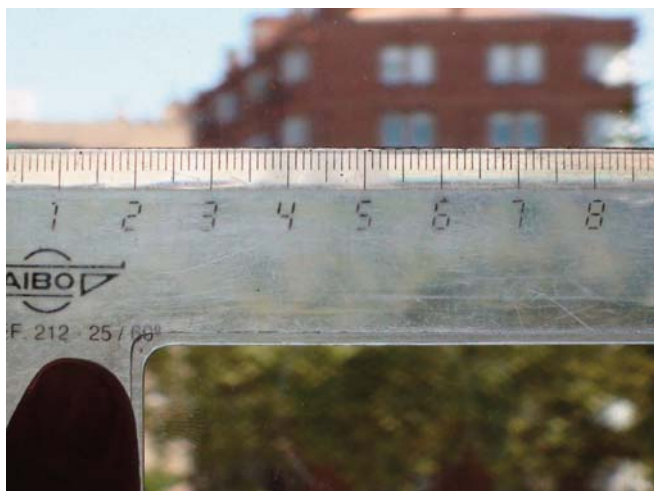


Figura 3: El ancho aparente de una ventana es de unos 3 mm.
 teorema de Thales.

Había que construir dos triángulos semejantes relacionados con la posición de las fachadas. Me situé junto a la ventana y pedí una regla. La puse sobre el cristal y dirigí la mirada hacia una de las ventanas. Desde donde estaba mi ojo, a unos 35 cm del cristal, la regla indicaba que la anchura de la ventana era de unos 3 mm (Figura 3).

Entonces ya podía trazar en la pizarra del aula el par de triángulos semejantes (Figura 4):

El cálculo final era sencillo:

$$\frac{D+35}{35} = \frac{80}{0,3} \Rightarrow D = \frac{35 \cdot 80}{0,3} - 35 \approx 93m$$

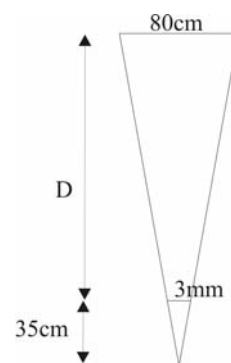


Figura 4: Triángulos semejantes entre la ventana del aula y la del edificio

Demasiada diferencia entre ambos resultados, ¿verdad? Por eso se les invitó a resolver el problema de cualquier otro modo que se les ocurriese.

Unos días más tarde, se presentaron algunas soluciones. Una de ellas se había obtenido contando los pasos del recorrido paralelo por la calle Valentí Almirall (Figura 5). Fueron 140 pasos de unos 80 cm cada uno, lo que daba como resultado otro valor distinto:

$$140 \cdot 0,80 \text{ cm} = 112 \text{ m.}$$

El autor confesó que su resultado le merecía más confianza que los calculados en clase. Otras soluciones habían utilizado herramientas TIC. En la web de *Google Maps* habían ampliado la visión cenital de la zona en cuestión hasta obtener una vista del patio del instituto. En el margen inferior izquierdo se mostraba la escala, en metros y en pies: 50 m = 2,15 cm (Figura 5).

En un caso se había trazado encima de la imagen un segmento con *WordDibujo* cuya longitud abarcaba la distancia buscada. Presionando el botón derecho del ratón sobre ese segmento se conocía su longitud: 5 cm (en amarillo en la Figura 5).



Figura 5: El patio del Institut Vallès según <http://maps.google.es/maps/>

Realizando la conversión con la escala incluida en la imagen de *Google Maps* se obtenía el resultado:

$$D = 5\text{cm} \cdot \frac{50\text{m}}{2,15\text{cm}} \approx 116\text{m}$$

¡Cuatro resultados distintos para la misma distancia!: 181 m, 93 m, 112 m y 116 m. Su clasificación según el procedimiento se relaciona con épocas determinadas de nuestro desarrollo cultural y tecnológico:

1. Trigonometría: uso del cuadrante construido en el MMB.
2. Proporcionalidad: aplicación magistral del teorema de Thales.
3. Medición indirecta: recuento de pasos de un recorrido paralelo.
4. Proporcionalidad TIC: *Google Maps* y *WordDibujo*.

No hay dudas de que la última resolución es la que merece más confianza. Y si es así, es porque sus datos son mucho más precisos que aquellos con los que se resolvieron las demás.

Cuando se calculó la altura de la estatua de Colón los estudiantes no tuvieron la impresión de que el resultado fuese tan impreciso, aún cuando los datos para los cálculos se habían tomado de la misma forma. Pero un error de 1° en una medida de unos 20° es mucho menos significativo que en una medida de 6°.

La cosa no acabó ahí, pues se les formuló una pregunta sobre el funcionamiento del cuadrante artesano construido en el MMB. Ninguno de los 60 alumnos que realizaron la experiencia de medir el ángulo de depresión visual de la estatua de Colón con el cuadrante cayó en la cuenta de que la medida del ángulo que daba el cuadrante no era directa. Sólo cuatro de ellos dieron respuestas aceptables a la pregunta:

¿Por qué el ángulo de depresión visual es el que marca la plomada del cuadrante?

Todo ello nos lleva a algunas reflexiones acerca de la competencia matemática y la trigonométrica.

Una persona competente en matemáticas debería ser capaz de argumentar por qué la plomada de un cuadrante como el de la figura 1 da una medida indirecta del ángulo de depresión visual.

El concepto de competencia no es independiente de la época y de la cultura. Depende de ambas en tanto depende del contexto del problema a resolver y de la tecnología disponible. La idea de competencia cambia a medida que se desarrolla una sociedad.

Desde la perspectiva matemática tradicional, ser competente en trigonometría significa poseer la capacidad de resolver el problema planteado según los métodos 1 y 2. En una educación por competencias significa resolverlo como en 3 y 4. La resolución 3 es, sin duda, la más universal y debe ser tenida por la más elemental de las competencias. La solución 4 muestra competencia contemporánea.

La tecnología contemporánea ha hecho accesibles distancias antaño inaccesibles. Para éstas fue creada la Trigonometría. Pero pretender resolver ciertos problemas mediante Trigonometría puede ser, en algunos casos, desacertado. Si lo que se desea es mostrar su utilidad y eficacia, hay que hacerlo en problemas en los que tenga más sentido que en el que se ha expuesto.

El concepto de competencia no es independiente de la época y de la cultura. Depende de ambas en tanto depende del contexto del problema a resolver y de la tecnología disponible.

Una vez más se pone de manifiesto que la resolución teórica de un problema práctico no suele ser la mejor solución práctica del problema. La eficacia de procedimientos teóricos magistrales puede llevar a errores excesivos cuando se aplican a situaciones reales y prácticas, sobre todo por la imposibilidad de obtener valores precisos de los datos necesarios.

I
Si Euclides, Thales y Arquímedes viviesen ahora utilizarían la tecnología actual dejando de lado algunas de sus propias técnicas. Gran parte del conocimiento matemático se desarrolló para resolver problemas inabordables con la tecnología del momento. Los problemas de hace dos mil años no son los de hoy.

Esto no significa que haya que desterrar antiguos procedimientos, sino utilizarlos y fomentar su uso en prácticas en las que verdaderamente resultan eficaces. Ése es el reto del educador que quiera desarrollar la competencia matemática de sus alumnos. Ahí reside lo hermoso de la educación, que no sólo deben aprender aquellos que se supone que deben hacerlo.

ADHERENCIAS ■

Este artículo fue solicitado por *Suma* en junio de 2010 y aceptado en octubre de 2010 para su publicación.