

# Análisis de los cuadernos de un grupo de alumnos (1)

MATÍAS ARCE SÁNCHEZ

Se presenta el primero de dos artículos que versan sobre una investigación didáctica en la que se analizaron los cuadernos de matemáticas de un grupo de alumnos de bachillerato. En esta primera parte se describen los antecedentes bibliográficos, el contexto en el que se desarrolló el estudio y se indican los grupos de variables e indicadores que se consideraron adecuados para realizar el análisis.

*Palabras clave:* Investigación didáctica, Cuadernos de los alumnos, Indicadores, Errores y dificultades.

## Analysis of Mathematical Notebooks of a Group of Students (1)

This article is the first one of a couple of articles based on a didactic research where we have carried out an analysis of the mathematical notebooks of a group of high school students. In this report, we have described bibliographic precedents that we have found on the topic, the context where this study is carried out. According to this, we have considered groups of suitable variables and indicators of these variables for this study of notebooks.

*Key words:* Didactic research, Students' notebooks, Indicators, Mistakes and difficulties.

La Matemática, a lo largo de la Enseñanza Secundaria, es una ciencia con un carácter eminentemente instrumental. Es incuestionable que una manera adecuada de aprender los conceptos matemáticos presentes en el currículo es la de trabajar con, y pensar y reflexionar sobre ellos de una manera autónoma y particular, acciones a través de las cuales el alumno podrá llegar a su convencimiento sobre el entendimiento del concepto y la consolidación del mismo en su bagaje matemático. Para poder llevarlas a cabo, el cuaderno de matemáticas de los alumnos nos ofrece un lugar adecuado, por lo que éste puede llegar a ser un instrumento de gran utilidad para el aprendizaje de las matemáticas en esta etapa.

En la investigación descrita en este artículo, a partir de las circunstancias observadas en el grupo experimental (GE) de alumnos (metodología del profesor, uso del cuaderno previsto, curso...) establecimos una serie de variables (e indicadores de cada una) adaptadas a este caso, que nos proporcionaron un marco teórico con el que se pudo realizar un análisis de los cuadernos. Este estudio nos permitió cumplir los objetivos siguientes:

- a) Determinar diferentes perfiles en el alumnado en función de las características relacionadas con

la estructura y la organización del cuaderno de matemáticas y los modos de trabajo con ese documento.

- b) Identificar la correspondencia entre las opiniones de los alumnos del GE sobre el uso del cuaderno y los resultados obtenidos del análisis de los mismos.
- c) Caracterizar la relación entre perfiles y rendimiento escolar en la asignatura de matemáticas.
- d) Describir tanto los errores que consideremos más graves como los más frecuentes incluidos en los cuadernos analizados.

El estudio se dividió en varias etapas, las cuales se reseñan de manera breve a continuación:

1. Elaboración de un marco teórico de referencia inicial, así como una primera descripción de variables a tomar en cuenta en el análisis de los datos.
2. Diseño de estrategias del control de lo que pasa en la clase de matemáticas, en particular lo que se escribe en la pizarra.
3. Recopilación de datos, la cual se llevó a cabo de dos maneras diferentes: a. por medio de fotocopias de los cuadernos de matemáticas de los alumnos a los 15 días de iniciadas las observaciones en el grupo (GE) y 15 días después y b. por medio de debate con los estudiantes.
4. Puesta a prueba de las categorías de análisis de los datos.
5. Elaboración de un marco teórico de referencia, así como de los perfiles de alumnos.
6. Análisis de los datos usando los perfiles y contraste con las concepciones de los alumnos.
7. Caracterización de errores cometidos por los estudiantes, identificación de aquellos que ocurren con más frecuencia y diseño de intervenciones didácticas.
8. Escritura del informe de la investigación.

## Antecedentes

La búsqueda de investigaciones en este campo nos permite asegurar que el estudio y el análisis del uso que hacen los alumnos de matemáticas del cuaderno

es un tema poco tratado. Es difícil encontrar artículos en revistas de educación matemática que versen sobre este tema. Entre los documentos que se han encontrado se pueden mencionar los trabajos de Fried y Amit, 2003; Price *et al.*, 1997 y Porras, 1994. Las ideas principales de los primeros investigadores fueron tomadas como un marco de referencia teórica para la investigación sobre los cuadernos de matemáticas; las resumimos a continuación.

Fried y Amit (*ibidem*) distinguen entre actividades de dominio público y de dominio privado. En las primeras, el alumno es responsable de las mismas ante el profesor y los compañeros, hay ataduras y la necesidad de una comunicación formal de lo realizado. En las segundas no existe esa responsabilidad, se liberan las ataduras y restricciones y el alumno es libre de explorar, dar marcha atrás o reflexionar. Para estos investigadores, *dentro del ámbito privado se encuentran cualidades de gran peso en la educación matemática*, como la reflexión, la internalización, la visualización o la creación de significados matemáticos. Argumentan que el cuaderno, instrumento susceptible de ser visto en ambos dominios, tiene un papel diferente si un alumno o un profesor lo considera dentro del dominio privado o del dominio público.

Asimismo, Fried y Amit (*ibidem*, 104) afirman que la escritura de los estudiantes en el cuaderno de matemáticas puede mostrar cómo éstos han interiorizado los conocimientos y habilidades estudiados y qué piensan de ellos. Varios autores (Britton *et al.*, 1975; Fulwiler, 1982, ambos citados en Fried y Amit) distinguen tres tipos de escritura diferente:

- a) *Escritura hecha para el intercambio* (EI, en inglés *Transactional writing*): Escritura hecha para un lector diferente al escritor y que tiene por objeto informar, persuadir, instruir a una audiencia de

manera clara y concisa. Es una escritura dentro del dominio público, limpia y organizada.

- b) *Escritura poética* (EP, en inglés *Poetic writing*): La escritura poética es del mismo tipo que la anterior, pero tiene diferentes propósitos.
- c) *Escritura expresiva* (EE, en inglés *Expressive writing*): Es una escritura hecha para el propio escritor, con la intención de externalizar y clarificar sus pensamientos. Es una escritura dentro del dominio privado, quien la usa lo hace libremente y con ella explora diferentes cosas, entre ellas la resolución de un problema, la reflexión sobre los procedimientos usados, etc.

Para nuestra investigación, las escrituras principales son la primera y la tercera. En defensa de la aparición de EE en los cuadernos, Fried y Amit (*ibidem*) recogen algunas ideas de Fulwiler (1982, citado por ellos, 105) y King (1982, citado por ellos, 105). Una de ellas es que el exceso de EI y la ausencia de EE en el cuaderno debilitan la habilidad del profesor de fomentar el pensamiento creativo e independiente de los estudiantes. Otra, es que debe comenzarse escribiendo con EE en los cuadernos para ir transformando ésta en EI a medida que aumenta la comprensión y entendimiento del problema y éste quiera explicarse a otras personas.

En el último capítulo de su artículo, Fried y Amit (*ibidem*) conjeturan que la ausencia del dominio privado en el aprendizaje de las matemáticas influye en la capacidad de los estudiantes para comprender que las ideas matemáticas requieren reflexión, y que la reflexión propia es legítima. Reiteran que el cuaderno es el lugar natural para plasmar esa actividad reflexiva, y de desarrollo y elaboración de pensamientos, defendiendo su papel dentro del dominio privado (aunque sin excluirlo del dominio público).

## Planteamiento y desarrollo del análisis

Hemos efectuado el análisis sobre la parte de los cuadernos de matemáticas que los alumnos construyeron durante el período de prácticas del «Máster en profesor de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas», realizadas por el autor del artículo en el Instituto Gómez Pereira de Medina del Campo (Valladolid) durante seis semanas.

La metodología seguida para el análisis fue el *estudio de casos* de tipo múltiple o colectivo (según la clasificación de Stake, 2005). Cada uno de los alumnos de la clase constituyó un caso para investigar conjuntamente acerca del uso de los cuadernos de matemáticas que hacen los alumnos de Enseñanza Secundaria. Para esta metodología, Stake defiende la absoluta concentración del investigador en el caso o casos a estudiar, independientemente del método que siga para ello, buscando siempre la optimización en el entendimiento de los mismos. Para ello, la comunidad investigadora ha establecido una serie de requisitos fundamentales que deben cumplirse. Se presentan a continuación dichos requisitos, añadiendo los recursos aquí utilizados para su cumplimiento:

- a) *Elección y tratamiento adecuado de las cuestiones o asuntos de investigación, mediante una planificación previa.* Dichos asuntos dependen de cuál sea el objetivo final buscado y deben establecerse buscando profundizar en el entendimiento del caso. En la investigación aquí descrita, se fijaron unos objetivos para el trabajo y se elaboró un marco teórico provisional para el análisis (variables e indicadores utilizados) con anterioridad a que empezara la recolección de las fotocopias de los cuadernos que se efectuó. Tras el análisis de la primera tanda de fotocopias, los objetivos y el marco teórico fueron adaptados y concretados con mayor profundidad.
- b) *Estudio y descripción de todos los contextos que influyan en el caso tratado, para poder descubrir todas las posibles relaciones existentes dentro del caso y hacer una mejor explicación causal de los eventos.* En este estudio, fue-

ron analizados todos los contextos que entendimos que podían intervenir e influir, mediante la presencia in situ (bien como observador, bien como docente) en las clases de matemáticas del grupo y mediante charlas continuadas con su profesor de matemáticas y tutor de las prácticas del Máster. Aparecen descritos los más importantes dentro de este apartado del artículo.

- c) *Preocupación por la claridad de las percepciones y la validez de las comunicaciones, considerando las máximas impresiones sobre el caso que sean posibles (entrevistas a gente relacionada, otros observadores...) para triangular descripciones e interpretaciones y evitar posibles malentendidos.* En el trabajo del que aquí se informa, hubo entrevistas casi diarias con el profesor de matemáticas del grupo, que, además, actuó como observador algunos días. También hubo contraste con los alumnos acerca de las reflexiones obtenidas, gracias a un debate mantenido en el aula sobre el tema y las preguntas que fueron tratadas en el mismo.
- d) *Poseción de un conocimiento empírico del caso y de una atención meticulosa a sus actividades.* Debe realizarse un trabajo de observación, preferentemente in situ, experimentando por uno mismo las actividades. En caso negativo, debe delegarse en personas que sí que lo hagan, intentando eliminar sesgos de posible subjetividad y opiniones poco fundamentadas. Acompañando a ese trabajo de observación, debe efectuarse otro de reflexión sobre los datos y registros, las descripciones dadas y las impresiones obtenidas, intentando tender hacia reflexiones lo más entrelazadas posibles (en inglés, *criss-crossed reflections*) y suficientes para que los lectores comprendan las interpretaciones que se dan y, así, puedan incorporarlas a sus experiencias previas sobre el tema tratado. En nuestra investigación, como ya se ha indicado anteriormente, hubo una observación presencial in situ en el aula todos los días que duró el estudio y un análisis propio y detallado de las fotocopias. No se ha delegado en ninguna persona. Se compartieron las reflexiones obtenidas tanto con el profesor (en charlas particulares) como con los alumnos (en el debate), para lograr así reflexiones lo más entrelazadas y completas posible.

Debido a que sólo íbamos a poder llevar a cabo el análisis en el GE, esta metodología de estudio de casos nos pareció la más adecuada. Al existir demasiados factores influyentes (curso de los alumnos, grupo, profesor, metodología, tópico matemático tratado, entorno...), el trabajo no ha buscado la generalización o extrapolación de los resultados obtenidos a ámbitos más generales, sino una validez interna asociada a una realidad de aula.

A continuación se describen los factores contextuales con mayor interés para el análisis. El GE era un grupo de 1.º Bachillerato con 22 alumnos. En el estudio participaron 17 (los que acudían regularmente a clase), 11 chicos y 6 chicas. Estaban distribuidos en el aula por parejas (dos mesas individuales agrupadas), constituidas así: cuatro parejas de chicos, dos parejas de chicas, dos parejas mixtas y un alumno solo. Además, se situaban en la clase con tendencia a estar agrupados por sexos. A lo largo de los dos artículos, cuando se haga referencia a alumnos en concreto, se hará mediante una A seguida de su número en la clase.

Es claro que la metodología del profesor puede tener bastante influencia en el uso que hagan los alumnos de su cuaderno. Seguidamente aparece un resumen de la línea metodológica seguida por el docente:

- a) Dio *total libertad* a los alumnos para que elaborasen el cuaderno como ellos quisieran, sin señalarles ninguna directriz o mandato específico.
- b) El profesor les proporcionó la teoría por medio de fotocopias, por lo que era previsible que casi no hubiera una toma de notas teóricas en el cuaderno (salvo, si acaso, una cuestión introducida en clase de manera dictada: los conceptos de función inyectiva, suprayectiva y biyectiva). Así, *el análisis sería, fundamentalmente, de ejercicios.*

- c) En el cuaderno *se mezclaron ejemplos y ejercicios* (tanto hechos en clase como propuestos) *del tema anterior* (que el profesor dejaba pendientes para su realización por parte de los alumnos, y que corregía a lo largo del tema siguiente) *con los del tema que se estaba explicando*. Aquí, se mezclaron en clase ejercicios sobre números complejos, que estaban pendientes de corregir, con ejercicios y ejemplos sobre funciones (características, operaciones con funciones, límites y continuidad).

Se hicieron dos tandas de fotocopias de los cuadernos de los alumnos, fijando una periodicidad de quince días para la realización de las mismas. Las razones que nos decidieron a no fijar una periodicidad menor fueron dos: una, que los días que el profesor explicara teoría era esperable que no apareciera nada o casi nada nuevo en sus cuadernos, y, otra, no introducir cambios bruscos con respecto al contrato didáctico fijado con el profesor para que los alumnos no sospecharan nada. Durante el curso, el profesor les había pedido a veces el cuaderno para hojearlo y no comentamos a los alumnos el propósito concreto de las fotocopias. Buscábamos que la manera de trabajar con el cuaderno que quedara patente en este análisis fuera la propia de los alumnos, sin que pudieran propiciarse cambios en la misma por interferencias de su profesor o del investigador.

La secuenciación temporal del trabajo, tras la toma de las fotocopias, fue la siguiente:

- a) *Análisis individualizado de cada una de las dos tandas de fotocopias*, siguiendo las variables e indicadores que aparecerán en el siguiente apartado del artículo.
- b) *Establecimiento de los perfiles y obtención de las primeras reflexiones*.
- c) *Debate en el aula* para conocer las opiniones de los alumnos y estudiar la co-

rrespondencia entre las reflexiones obtenidas y sus opiniones con respecto al perfil en el que han sido incluidos. Refinamiento de las reflexiones anteriores.

## Marco teórico de la investigación: variables e indicadores

Para poder desarrollar el análisis de los cuadernos y ser capaces de interpretar el modo de trabajo con el mismo de cada uno de los alumnos, hemos establecido una serie de variables principales en las que nos hemos fijado, concretando cada una de ellas en una serie de indicadores (entendidos como señales que ponen de manifiesto cada una de las variables) adaptados a este caso. Las ideas para la elaboración de estas variables e indicadores provienen tanto de los antecedentes antes reseñados como de los indicadores de observación que aparecen en Monterrubio (2007), Monterrubio y Ortega (2009 y 2011) y en Zapata (2009). A continuación se enumeran dichas variables agrupadas en cinco categorías, junto con los indicadores considerados.

En la primera categoría hemos encuadrado un conjunto de variables relacionadas con los hábitos de organización, presentación y estilo propio del alumno en sus cuadernos de matemáticas.

### *Estructura, orden y presentación del cuaderno*

Organización del cuaderno:

- a) Separación en el cuaderno de los ejercicios de diferentes temas. En caso de que aparezcan mezclados, presencia de avisos que indiquen de algún modo los cambios de tema producidos.
- b) Ausencia de ejercicios cuya resolución se haya partido en varios trozos a lo largo del cuaderno. En caso de que aparezca alguno, presencia de indicaciones sobre la circunstancia.
- c) Ausencia de ejercicios inacabados o sin completar en el cuaderno.

Presentación del cuaderno:

- a) Nivel de limpieza del cuaderno.



- b) Número de tachones en el cuaderno y estudio de cómo afectan los mismos a la presentación del cuaderno.
- c) Respeto de los márgenes y adecuada utilización de los espacios.
- d) Presencia de dibujos y esquemas adecuadamente presentados y bien integrados en el cuaderno.
- e) Legibilidad de la letra y claridad en la caligrafía de letras, números, símbolos y signos matemáticos.

Estilo propio en el cuaderno:

- a) Nivel de personalización en la organización y presentación de su cuaderno.
- b) Adecuación de los rasgos personales que se detecten para las funciones que pretende cumplir el cuaderno para el alumno.

En la segunda categoría hemos incluido un bloque de variables relacionadas con el nivel de completitud de los cuadernos de matemáticas de los alumnos.

### **Completitud del cuaderno**

Presencia de teoría en el cuaderno:

- a) Frecuencia en la escritura en el cuaderno de definiciones, ejemplos, esquemas, notas o aclaraciones relativas a la teoría impartida en clase.

Completitud de las actividades que aparecen en el cuaderno:

- a) Porcentaje de ejercicios registrados de los que se realizan o corrigen en la clase.
- b) Número de ejercicios que se resuelven en el cuaderno (o, por lo menos, se intentan resolver) de entre las actividades que el profesor deja pendientes.
- c) Aparición de actividades ejecutadas por el alumno que son distintas de las propuestas por el profesor en el aula.

Implicación en la resolución de los ejercicios que se proponen:

- a) Número de actividades cuya resolución se detecta que ha sido copiada literalmente de la corrección de la misma en clase, sin intentos propios.
- b) Cantidad de ejercicios cuya solución se revela copiada literalmente del cuaderno de un compañero.

- c) Número de ejercicios en cuya resolución hay indicios de que pudieran haberse realizado en clases particulares, academias o con la guía de otra persona (aparición de métodos muy extraños o variables o de letra que no es suya ni de sus compañeros).
- d) Frecuencia de las actividades planteadas que son intentadas por ellos mismos.

Revisión en el cuaderno de las tareas que se corrigen en clase:

- a) Corrección de sus errores en la resolución de los ejercicios.
- b) Indicación explícita y explicación de los errores cometidos.
- c) Número de ejercicios mal hechos que se rehacen de forma satisfactoria con posterioridad en el cuaderno.

En la tercera categoría situamos una variable relacionada con el nivel de intención (detectado en el análisis) mostrado por los alumnos para conseguir que su cuaderno de matemáticas sea para ellos un instrumento lo más útil posible para el aprendizaje de las mismas.

### **Intención del cuaderno como instrumento para el aprendizaje (única variable)**

- a) Escritura explícita de los procesos mentales seguidos en la resolución de un ejercicio.
- b) Frecuencia de registro de los comentarios o aclaraciones que el profesor ha hecho durante la realización de actividades en el aula.
- c) Número de anotaciones propias del alumno que le sirven de ayuda para la resolución satisfactoria de actividades.
- d) Uso del cuaderno de manera personal para constatar si han asimilado los conceptos o técnicas que se le han presentado en clase. (Por ejemplo, mediante la aparición y el número de ac-

tividades distintas de las propuestas en clase que son realizadas por el alumno y registradas en su cuaderno).

En la cuarta categoría hemos ubicado una variable relacionada con la riqueza del léxico y del lenguaje verbal utilizado por el alumno. Hay que decir que, en este análisis, ha sido una variable poco importante por la escasez de texto escrito en sus cuadernos.

### ***Riqueza del lenguaje verbal utilizado en el cuaderno (única variable)***

- a) Presencia de un vocabulario variado, adecuado y comprensible.
- b) Sintaxis correcta de las oraciones registradas.
- c) Uso adecuado de los signos de puntuación.
- d) Ausencia de faltas de ortografía y presencia de una acentuación adecuada.

En la quinta categoría hemos encuadrado un grupo de variables relacionadas tanto con la corrección desde el punto de vista matemático de lo que se escribe en el cuaderno como con la presencia de diferentes tipos de errores detectados en la investigación.

### ***Corrección matemática y presencia de errores en el cuaderno***

Lenguaje matemático utilizado en el cuaderno:

- a) Frecuencia en el uso del lenguaje matemático introducido a lo largo de las clases.
- b) Utilización adecuada de los símbolos matemáticos.
- c) Uso correcto de la terminología matemática y nivel de precisión del lenguaje matemático registrado.

Errores asociados a la transcripción de la pizarra:

- a) Frecuencia de aparición de errores asociados a la transcripción.
- b) Nivel de gravedad de dichos errores: éstos se muestran ocasionales, denotan una falta de atención en lo que se está copiando o indican una falta de entendimiento del concepto tratado (entendemos que están ordenadas de menor a mayor gravedad).

Errores conceptuales asociados a un aprendizaje deficiente o incompleto de algún concepto (considerados como muy graves en esta investigación, para su superación buscamos su integración en la docencia).

Errores de cálculo:

- a) Frecuencia de aparición de errores de cálculo.
- b) Nivel de gravedad de dichos errores: éstos se muestran como ocasionales o debidos a descuidos o bien hay indicios que ponen de manifiesto algún déficit en conocimientos matemáticos de tipo operacional, que ya deberían dominarse en el curso estudiado (estos también fueron considerados como muy graves y fueron comunicados al profesor).

## **Errores detectados en los cuadernos de los alumnos**

El análisis de los cuadernos nos ha ofrecido una oportunidad magnífica, como docentes, para conocer cuáles han sido los errores que han cometido los alumnos de manera más repetida o los que hemos entendido como más graves, e intentar solucionarlos en el transcurso de las clases mediante su integración en la docencia. Para llevarlo a cabo el estudio y análisis de los errores, hemos utilizado la categorización de Ortega (2010) en la que se resume el trabajo de varios autores (Astolfi, 1999; Brousseau, 2001; Radatz, 1979; Rico, 1995; Socas, 1997, todos ellos citados en Ortega, 2010), adaptándola para el estudio realizado. Se incluye además una reflexión sobre los diferentes tipos de errores encontrados. Los errores más frecuentes o considerados más graves que encontramos fueron los siguientes:

## Errores de tipo conceptual

Error al escribir los números reales negativos como números complejos en la notación módulo-argumental, poniendo como módulo el propio número real negativo (en 5 alumnos). Hemos considerado este error como un obstáculo epistemológico (Brousseau, 1983), ya que formaba parte del conocimiento de los alumnos, tenía un dominio de validez (en los números reales positivos sí que es cierto que el módulo de los mismos coincide con el propio número) y aparecía con frecuencia en los cuadernos de esos cinco alumnos (en particular, en el de A6, aparecía repetido en muchísimas ocasiones y con números reales negativos diferentes). Se intentó corregir este error insistiendo en la idea gráfica de que el módulo de un número complejo, en realidad, es el módulo de un vector en el plano complejo y representa una distancia, por lo que nunca puede ser negativo. No fue posible comprobar si el error persistió o volvió a aparecer en algún alumno, pues no tuvimos acceso a fotocopias de actividades posteriores de números complejos donde pudiera haberse manifestado de nuevo.

Error al asociar en una función la característica de simetría par con la simetría de su gráfica con respecto a cualquier eje vertical (no únicamente al eje de abscisas), debido a la similitud entre sus gráficas (en 4 alumnos).

Muchos errores de interpretación del simbolismo algebraico, tanto al definir (en 4 alumnos) como al representar gráficamente (en 5 alumnos) funciones del tipo  $y = |x \pm a|$  o  $y = |x| \pm a$  (siendo  $a$  un número real), al no lograr comprender qué es lo que está afectado por la función valor absoluto y asimilar qué es lo que eso supone.

Error de representación gráfica al dibujar las gráficas de funciones cuadráticas, haciendo las ramas de las parábolas totalmente verticales (en 6 alumnos), lo cual expresa un déficit en la asimilación del concepto de función.

Diversos errores relacionados con la aplicación incorrecta de las técnicas de resolución de indeterminaciones en el cálculo de límites y con la transformación algebraica de las expresiones que en éstos

aparecen. Sobre todo, en indeterminaciones del tipo  $\rightarrow 1^{\infty}$  en cuya resolución está implicado el número  $e$  (estos últimos en 5 alumnos).

Hubo opción de integrar en la docencia, dentro del periodo de prácticas, los tres primeros errores aquí citados, para intentar erradicarlos en los alumnos.

## Errores de cálculo

Han aparecido en los cuadernos varios errores graves de cálculo que han puesto de manifiesto una falta de base matemática en un grupo de cuatro alumnos. Dichos errores han estado asociados a las operaciones con fracciones numéricas, a la manipulación de fracciones algebraicas y al cálculo de cuadrados de binomios. También ha habido errores relacionados con el manejo de desigualdades y con la resolución de inecuaciones, curiosamente en dos alumnos con buen rendimiento académico.

## Errores asociados al lenguaje matemático

Ha habido gran cantidad de errores de este tipo. Aunque algunos puedan tener su explicación en una mala transcripción de lo escrito en la pizarra, muchos de ellos desvelaron carencias importantes relacionadas con el desconocimiento o el no entendimiento de los signos y símbolos matemáticos.

Los problemas encontrados de un modo más repetido se relacionan con el símbolo igual. Han existido en varios alumnos problemas relacionados con el papel de este símbolo como equivalencia entre dos expresiones que coinciden (Molina, 2006: 150). Confirmamos que algunos alumnos sólo tenían interiorizado el papel de « $\Rightarrow$ » como símbolo para dar el resultado de



una operación (papel de operador), no como símbolo de equivalencia algebraica. El 65 % de los estudiantes que participaron no escribió « $\Rightarrow$ » al definir y trabajar con funciones definidas a trozos y el 41 % no enlazó las cadenas de igualdades con este símbolo, sustituyéndolo por flechas o por puntos y comas. Estas deficiencias se pusieron de manifiesto en el debate, con frases de los alumnos como: «Voy con flechas y, cuando sea el resultado, pongo el igual y ya está», dicha por A14.

También ha habido siete alumnos que han omitido el signo  $\lim_{x \rightarrow}$  en las cadenas de igualdades que se generan al resolver las indeterminaciones relacionadas con el cálculo de límites. Además, en algunas ocasiones lo escribían cuando ya se había eliminado la indeterminación y se había sustituido el valor de  $x$ , es decir, justo cuando ya no procede.

## Referencias Bibliográficas

- BROUSSEAU, G. (1983), «Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 4, n.º 2, 165-198.
- FRIED M., y M. AMIT (2003), «Some reflections on mathematics classroom notebooks and their relationship to the public and private nature of student practices», *Educational Studies in Mathematics*, vol. 53, n.º 2, 91-112.
- MOLINA, M. (2006), *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de Primaria*. [Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Disponible en <<http://0-hera.ugr.es/adraستا.ugr.es/tesisugr/16546167.pdf>>.]
- MONTEERRUBIO, M. C. (2007), *Modelos de valoración de manuales escolares de Matemáticas*. [Tesis doctoral. Departamento de las Ciencias Sociales y Experimentales, Universidad de Valladolid. Disponible en la Biblioteca General Reina Sofía de dicha Universidad.]
- MONTEERRUBIO, M. C., y T. ORTEGA (2009), «Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones», en M. J. González, M. T. González y J. Murillo (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*, SEIEM, Santander, 37-53.
- (2012), «Creación de un modelo exhaustivo de análisis de textos escolares matemáticos», *Revista de Educación*, n.º 358, 471-496.
- ORTEGA, T. (2010), *Dificultades y errores de aprendizaje*. [Notas elaboradas para la asignatura de Didáctica de la Matemática del Máster de Profesorado en Secundaria, en la especialidad de Matemáticas, Universidad de Valladolid.]
- PORRAS, D. (1994), «Do your students digest mathematics like ice cream or like steak?», *Mathematics and Computer Education*, vol. 28, n.º 1, 6-15.
- PRICE, J. J., M. CANARECCI, J. CONRAD, D. EHRESMAN, C. FOSTER, M. D. HARRIS, K. MARTIN, T. MULLENDORE, T. K. RICE y P. WRIGHTHOUSE (1997), «Mathematics notebooks in middle school and junior high school», *Mathematics Teaching in the Middle School*, vol. 3, n.º 1, 34-38.
- STAKE, R. E. (2005), «Qualitative Case Studies», en N. K. Denzin y Y. S. Lincoln, (eds.), *Handbook of Qualitative Research*, Sage Publications, Thousand Oaks, California, 443-466.
- ZAPATA, M. A. (2009), *Análisis de la práctica profesional de los estudiantes para profesores de Secundaria, de la especialidad de Matemáticas y Física de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Piura-Perú*. [Tesis doctoral. Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas, Universidad de Extremadura. Disponible en Biblioteca Central de Badajoz.]

MATÍAS ARCE SÁNCHEZ  
Didáctica de la Matemática. Universidad de Valladolid  
<[arcesan@am.uva.es](mailto:arcesan@am.uva.es)>