suma+ 76
Artículos
Julio 2014
pp. 9-16

La diferencial de una función y su interpretación geométrica

Rafael Andrés Alemañ Berenguer

La diferencial de una función suele interpretarse como un incremento infinitesimal de dicha función en torno a un punto en el cual dicha función resulta derivable. Esta idea es incorrecta y su origen se halla en las primeras interpretaciones del cálculo infinitesimal, históricamente ligadas a las concepciones griegas sobre el infinito. El desarrollo posterior de la matemática no parece haber disipado los malentendidos que todavía subsisten en numerosos estudiantes sobre este asunto.

Palabras clave: Divulgación, Análisis, Dificultades, Historia, Universidad

The Differential of a Function and Its Geometric Interpretation

Abstract: The differential of a function is used to be regarded as an infinitesimal increment of such a function in a point where that very function happens to be derivable. This idea is incorrect and its origin is rooted in the early interpretations of infinitesimal calculus which were historically linked to classical Greek notions on infinity. Later developments of mathematics seem not to have cleared out those mistakes that are still found in a number of students on this theme.

Keywords: Divulgation, Analysis, Difficulties, History, University

El análisis infinitesimal fue desarrollado en el siglo XVII de manera independiente por dos figuras intelectuales de la talla de Isaac Newton (1642-1727) y Gotfried Wilhem Leibniz (1646-1716), quienes lamentablemente acabaron enzarzándose en una amarga disputa por la prioridad del descubrimiento. El análisis matemático en su más amplia acepción, puede considerarse legítimamente como uno de las mayores logros del pensamiento humano, para el cual no faltan precedentes en el camino que condujo hasta Newton y Leibniz. Eudoxo de Cnidos (s. V a.C.) y Arquímedes de Siracusa (s. II a.C.) practicaron una técnica antecesora del análisis llamado método de exhaución (Heath, 1921), aunque siempre recurrieron a él como herramienta para facilitar la invención de resultados que después esperaban probar mediante procedimientos más rigurosos (Cajori, 1915).

Muchos siglos después, el jesuita y matemático italiano Bonaventura Cavalieri (1598-1647), alumno de Galileo, profundizó en esta senda (González-Urbaneja, 1992). Su método de los «indivisibles» consistía en dividir las figuras planas en líneas rectas paralelas a uno de los segmentos de la figura, o los sólidos en superficies paralelas a un plano dado. Estos elementos mínimos, o «indivisibles», se tomaban entonces como los constituyentes básicos de las áreas o volú-

Artículo recibido en *Suma* en mayo de 2012 y aceptado en agosto de 2013

menes, que podían entonces compararse estableciendo una proporción entre los indivisibles de ambos objetos (Palmieri, 2009). Para obtener la suma de los indivisibles, Cavalieri se servía de los trabajos —de muy diverso valor— sobre series infinitas de los matemáticos del Medioevo (Boyer, 1941).

Ya en pleno siglo XVII las curvas generales comenzaron a contemplarse como las trayectorias de puntos animados por movimientos arbitrarios, cuyo tratamiento matemático se reconoce igual al de las curvas engendradas de cualquier otra manera (Bochner, 1991). Las curvas llamadas «mecánicas» por Descartes abren la posibilidad de buscar la tangente de una curva en un punto tomando una línea recta que corte la curva estudiada en dos puntos sucesivos, y aproximando uno de tales puntos de corte al otro tanto como se quiera. A este propósito coadyuvó decisivamente la fusión de los métodos algebraicos con los geométricos para dar lugar a una geometría algebraica —que tras la aparición del cálculo se convirtió en geometría analítica— empeño en el que destacarían autores como Pascal, Fermat, Vièta, Descartes, Saint-Vicent, Wren, Barrow, Wallis, Gregory y Roberval.

Ya en pleno siglo XVII, Newton completó un tratado sobre su método infinitesimal hacia 1666, y tres años después el manuscrito *De analysi*, sobre series infinitas, publicado en 1711 (Sellés, 2006). A estas obras siguieron otro tratado sobre cálculo y series infinitas, en 1671, y un texto titulado *De Quadratura Curvarum* en 1693, que vio la luz como un apéndice de su *Opticks* once años después (Boyer, 1959). Por su parte, Leibniz elaboró su propia versión del cálculo en torno a 1675, aunque sus trabajos se dieron a conocer en dos cortos artículos en la revista científica alemana *Acta Eruditorum*, uno en 1684 sobre cálculo diferencial y otro en 1686 sobre cálculo integral. Acicateado por ciertos problemas sobre sumas y diferencias de series que Huygens le había propuesto, el sabio alemán pensó en aplicar sus resultados a la geometría de las curvas. Partidario de una notación cómoda y manejable, Leibniz decidió finalmente adoptar el símbolo «*d*», abreviatura de la palabra *differentia* para la designación de diferencias infinitesimales. También representó la operación inversa (o «integración») como suma de las infinitas ordenadas de una curva, por el símbolo $\int$, partiendo de la letra inicial de la palabra *Summa*.

Figura 1. Isaac Newton

Newton imaginaba las curvas geométricas como las estelas creadas por puntos en movimiento, de modo que denominó «fluentes» a las cantidades dependientes del tiempo (posición, velocidad, etc.) —o de cualquier variable independiente distinta del tiempo— y «fluxiones» a sus correspondientes ritmos de variación temporal. Así, para un objeto móvil, la posición en función del tiempo, $x(t)$, sería una variable fluente, y la fluxión, $\dot{x}(t)$, su variación instantánea que hoy denominamos «derivada». Con respecto a lo que hoy consideraríamos una función $y = x^2$, Newton calculaba su variación instantánea mediante el método de fluxiones el cociente de la resta $(x + o)^2 - x^2$, entre el cuadrado de x y el cuadrado de un valor $(x + o)$ obtenido incrementado x en una cantidad infinitesimal o. Dicho de otra forma, se trataba de calcular la variación de la fluente bajo

Figura 1. Gottfried Leibniz

un incremento infinitesimal y dividirla entre dicho incremento infinitesimal. Empleando el desarrollo del binomio de Newton tendríamos:

$$[(x+o)^2 - x^2]/o = [2xo + o^2]/o = 2x + o$$

Tomando igual a cero la cantidad infinitesimal o, a todos los efectos, obtenemos finalmente que $\dot{y} \sim 2x$. Considerada en sí misma, la fluxión proporciona la ecuación de la recta tangente en un punto a la curva definida por la variable fluente. La operación inversa —obtener la fluente a conocida la fluxión— se llamó «integración», y en una gráfica suministraba el valor del área comprendida desde el eje horizontal hasta la curva analizada (Grabiner, 1981).

Lebiniz, por el contrario, pensaba en su método de integración tal como Cavalieri concebía sus sumas de indivisibles. Imaginando una curva cualquiera como una línea poligonal de infinitos lados, no tuvo dificultad en interpretar dy como la diferencia infinitesimal entre dos ordenadas consecutivas, y dx como la diferencia entre dos abcisas consecutivas. En consecuencia, la operación e $\int ydx$ representaba la suma de una infinidad de pequeños rectángulos infinitesimales caracterizados cada uno de ellos por un área ydx. Leibniz también se percató de que el cociente dy/dx (hoy diríamos la derivada de y con respecto a x) proporcionaba el valor de la tangente en cada punto a la curva descrita por la relación entre x e y, pero no utilizó este resultado como una definición de lo que actualmente llamamos «derivada» (Grabiner, 1978).

Las discusiones sobre la fundamentación lógica del análisis infinitesimal se mantuvieron durante el siglo posterior a la obra de Newton y Leibniz (Bardi, 2006). Antecedido por D'Alembert, Lacroix y especialmente por el polígrafo y matemático Bernard Bolzano (1781-1848), fue Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) quien liberó la noción de límite de la servidumbre impuesta por ciento cincuenta años de intuición geométrica (Cleave, 1971). Para una cantidad variable cualquiera expresada como sucesión de números reales, el límite se definía como

Figura 3. Augustin-Louis Cauchy

un valor fijo al que se aproximaban indefinidamente los valores sucesivamente atribuidos a la mencionada variable, de modo que acaben por diferir de él tan poco como se quiera (Cleave, 1979). Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815-1897) culminó esta empresa estableciendo rigurosamente los axiomas que libraron definitivamente el cálculo de cualquier reminiscencia relativa al tiempo y al movimiento o a cantidades infinitamente pequeñas.

En la notación usual, sea una sucesión a_n cuyos subíndices pertenezcan al conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$. La sucesión se dice convergente a L, y L se denomina entonces el límite de a_n, si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists m \in \mathbb{N} \mid \forall i > m \rightarrow |a_i - L| < \varepsilon$. Tengamos ahora una función f definida en un entorno $\Omega = \{x; |x - x_0| < \rho; \rho > 0, \rho \in \mathbb{R}\}$ de x_0. Se dice que S es el límite de f en x_0 si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\delta < \rho \mid \forall x$, $|x - x_0| < \delta \rightarrow |S - f(x)| < \varepsilon$. Gracias a ello nada impedía definir por fin la derivada de una función como el límite de un cociente incremental, $df(x)/dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0}\{\Delta f(x)/\Delta x\}$, sin recurrir en absoluto al auxilio de cantidades infinitamente pequeñas.

Figura 4. Karl Weierstrass

La diferencial como infinitésimo

La erradicación de las cantidades infinitas pudo considerarse completa tras la aritmetización del análisis matemático llevado cabo por Weierstrass, cuya obra convirtió en obsoleta cualquier apelación a lo infinitamente grande o infinitamente pequeño (Grattan-Guinness, 1970*a*). Sin embargo, la fascinación que el infinito ejerce sobre la mente humana no iba a desvanecerse tan fácilmente. Un lenguaje técnico plagado de términos referidos a infinitos e infinitésimos siguió empleándose con toda naturalidad en la enseñanza del cálculo, con especial incidencia en aquellos profesionales que por no cursar estudios específicamente matemáticos no se veían obligados a profundizar en el significado de los conceptos y se limitaban a un uso eficiente de la herramienta. En tales casos, una concepción incorrecta de la base del método no impedía obtener de hecho los resultados correctos en cualquier cómputo práctico, perpetuando así los malentendidos.

Esa es la razón de que una gran parte de los alumnos que actualmente siguen cursos de matemáticas superiores continúa aferrada a la idea de que las derivadas, escritas con la notación de Leibniz, denotan un cociente de infinitésimos, es decir, de cantidades infinitamente pequeñas. Desde este punto de vista, la expresión $f' = dy/dx$ se referiría en realidad al cociente formado por dos cantidades independientes, dy y dx, que serían infinitamente pequeñas, sin que quienes así razonan se detengan a considerar la coherencia formal del sus argumentos en tanto los resultados prácticos sean correctos.

A esta confusión colabora asimismo la interpretación poco rigurosa —pero en apariencia muy intuitiva— que se concede a la integral, entendida también al estilo de Leibniz. Si escribimos $\int f'(x)dx$, poco esfuerzo nos cuesta imaginar, siguiendo la estela de Cavalieri, que la superficie subtendida por una curva cualquiera se puede descomponer en una infinidad de rectángulos infinitamente estrechos (y por ello con un área infinitamente pequeña), la suma de los cuales conducirá al valor de la integral entre dos límites definidos.

Incluso en ciertos casos contemplamos atónitos que las integrales, definidas o indefinidas, se resuelven con el siguiente procedimiento:

$$\int f'(x)\,dx = \int\left(\frac{dy}{dx}\right)dx = \int dy\left(\frac{dx}{dx}\right) = \\ = \int dy\cdot 1 = \int dy$$

Es decir, se manipulan los símbolos dy y dx como si fuesen números reales, y las expresiones dy/dx como cocientes ordinarios. Sucede así que la notación de Leibniz, tan cómoda como resulta, pierde su valía formal si olvidamos que el cociente de diferenciales representa en realidad un *operador*, el operador «derivación» $d(\,)/dx$, y que no puede manejarse como si de números ordinarios se tratase.

La idea en sí misma provenía de la costumbre, de razón, griega, que invitaba a pensar en las curvas continuas como si fuesen curvas poligonales con un número infinito de lados. El método de exhaución de Eudoxo y Arquímedes se basaba en un argumento semejante (Boyer, 1985). No era descabellado por tanto suponer algo similar para el área subtendida por una curva cualquiera y proceder a su descomposición para luego obtener la suma reuniendo de nuevo los infinitos fragmentos infinitamente pequeños (Cornford, 1938).

Tanto los antiguos griegos como los modernos estudiantes que les siguen en este punto cometieron el error de identificar el límite de una serie con la serie misma (o al menos con un presunto «último término de la serie»). Puede ser cierto que a la longitud de una circunferencia sea posible aproximarse arbitrariamente aumentando el número de lados de un polígono inscrito en ella. Pero esa conclusión se obtiene tras un proceso de paso al límite que en modo alguno nos permite afirmar que la longitud de la circunferencia sea idéntica a la de un polígono con infinitos lados, concepto éste que carece del necesario rigor matemático (Katz, 1998).

Con estos antecedentes, tampoco debería sorprendernos que el concepto de diferencial de una función padezca de los mismos errores. Si la igualdad $f' = df(x)/dx$ expresa un cociente de cantidades infinitamente pequeñas, nada más natural que admitir la posibilidad de trasponer el cociente de diferenciales para desembocar en una igualdad uno de cuyos miembros se halla constituido por un producto. En concreto, y siguiendo la pauta errónea antes mencionada, tendríamos:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \rightarrow f'(x)dx = \left[\frac{df(x)}{dx}\right]dx \rightarrow \\ \rightarrow f'(x)dx = df(x)\left[\frac{dx}{dx}\right] \rightarrow f'(x)dx = df(x)\cdot 1 = \\ = df(x) \rightarrow df(x) = f'(x)dx$$

Puesto que finalmente se llega a la misma expresión que aparece en todos los textos que la deducen de modo más riguroso, la confusión tiene muchas oportunidades de pasar desapercibida, como en realidad ocurre con demasiada frecuencia. Y nos encontramos de nuevo con la idea equivocada, pero muy poderosamente arraigada, que asimila $df(x)$ con una cantidad infinitamente minúscula obtenida multiplicando el valor de la derivada $f'(x)$ en un cierto punto por el infinitésimo dx.

El genuino concepto de diferencial

Partamos de la definición de derivada de una función de una sola variable en un punto cualquiera x_0,

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \\ = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y_0}{\Delta x}$$

de lo cual deducimos que para pequeños valores de Δx,

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x} \cong f'(x_0) \Rightarrow \Delta y_0 \cong f'(x_0)\Delta x$$

En tales condiciones resulta posible utilizar el valor de la derivada de una función en un punto para calcular, aproximadamente, los valores de la función en puntos cercanos al mismo (Kline, 1972). Las aproximaciones a la variación del valor de la función $f'(x_0)\Delta x$ correspondientes a variaciones Δx en el valor de x_0 serán tanto mejores cuanto más pequeño sea Δx. Para un mismo valor de Δx, el error cometido depende de la función de que se trata y del punto x_0 considerado. La aproximación será exacta, cualquiera que sea x_0 o Δx, si $f(x)$ es una función lineal.

Con algo más de rigor, ya que el cociente $\Delta y/\Delta x$ puede aproximarse mediante la derivada $f'(x)$ cuando Δx es suficientemente pequeño, definamos la función $\varepsilon(\Delta x)$ como

$$\varepsilon(x) = \frac{\Delta y_0}{\Delta x} - f'(x_0)$$

cuyo límite, cuando $\Delta x \to 0$, es obviamente cero. A continuación, podemos escribir

$$\Delta y_0 = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

lo que pone de manifiesto la dependencia de Δy_0 con respecto al punto x_0 considerado y el incremento Δx tomado a partir de él.

Ahora ya podemos obtener un criterio adecuado de diferenciabilidad. La función $y = f(x)$ es diferenciable en $x = x_0$, si existe una función lineal T_{x_u} y una función $g(\Delta x)$ tales que:

I. $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = T_{x_u}(\Delta x) + g(\Delta x)$

II. $\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{g(\Delta x)}{\Delta x}\right) = 0$

Evidentemente, si $f(x)$ es diferenciable en x_0 se tendrá que $T_{x_u}(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x$ y $g(\Delta x) = \varepsilon(\Delta x)\Delta x$.

Razonamientos semejantes pueden extenderse a los campos escalares del modo siguiente. Sea el campo escalar $y = f(\mathbf{x})$, donde $\mathbf{x} \in U \subset \mathbb{R}^n \to f(\mathbf{x}) = y \in \mathbb{R}$; y sea también $\mathbf{x}_0$ un punto interior de U con $B_r(\mathbf{x}_0) \subset U$ una bola abierta de centro $\mathbf{x}_0$ y radio r contenido en U; por último $\Delta \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ un vector tal

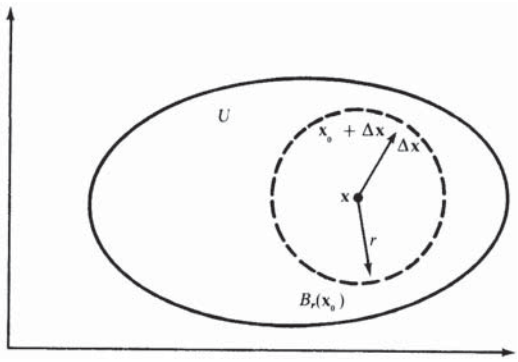

Figura 5. Bola abierta de radio *r*

que $\|\Delta \boldsymbol{x}\| < r$, de forma que el vector $\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x} \in B_r(\boldsymbol{x}_0)$. En tales condiciones decimos que $y = f(\mathbf{x})$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ si existen una transformación lineal : $T_{x_u}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, y una función $g(\Delta \boldsymbol{x})$ de manera que:

a) $f(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = T_{x_u}(\Delta \mathbf{x}) + g(\Delta \mathbf{x})$

b) $\lim_{\|\Delta \mathbf{x}\| \to 0}\left(\frac{g(\Delta x)}{\|\Delta x\|}\right) = 0$

Por ello, la transformación lineal T_{x_u} recibe el nombre de «diferencial total» de $f(\mathbf{x})$ en $\mathbf{x}_0$, o también $dy(\mathbf{x}_0)$.

Nótese que la diferencial total de $f(\mathbf{x})$ en un punto $\mathbf{x}_0$ no es un número, sino una transformación lineal. Cuando dicha transformación se aplica a un vector $\Delta \mathbf{x}$ de incremento arbitrario de las variables x_i se obtiene el valor numérico $T_{x_u}(\Delta \mathbf{x}) = dy(\mathbf{x}_0)$. En consecuencia, los incrementos de $f(\boldsymbol{x}_0)$ ocasionados por $\Delta \mathbf{x}$ pueden aproximarse por el valor $T_{x_u}(\Delta \mathbf{x})$ resultante de aplicar la transformación lineal a dicho vector de incrementos $\Delta \mathbf{x}$. El error cometido en dicha aproximación está representado por la función $f(\Delta \mathbf{x})$, pero ese error disminuye más rápidamente que $\Delta \mathbf{x}$ a medida que éste tiende a cero.

Interpretación geométrica

Para terminar de aclarar el concepto de diferencial, nos detendremos ahora en su interpretación geométrica aplicada por sencillez al caso de una función escalar de una sola variable. Por tanto, sea $y = f(x)$ una función derivable y sea Δx un incremento arbitrario no nulo de la variable x. Entonces, la diferencial dx se define como $dx \equiv \Delta x$, en tanto la diferencial dy es una función definida como $dy = f'(x)dx$.

De ello se deduce que el valor dy, tal como ha sido definido, no ha de ser necesariamente pequeño. Nada impide que tome cualquier valor entre $-\infty$ y $+\infty$, en función del incremento $dx \equiv \Delta x$ escogido. Bien es cierto que para pequeños valores de dx la diferencial de una función representa una aproximación a las correspondientes variaciones del valor de la función, tanto más precisa cuanto menor sea el dx considerado (Grattan-Guinness, 1970*b*). Las aproximaciones al valor de $f(x)$ en un entorno de x_0, construidas mediante dy, equivalen a suponer que la función se comporta linealmente a partir de x_0 y que por ello su gráfica coincide con la de su tangente en ese punto.

Es interesante notar que para un incremento Δx a partir de un cierto x_0, no debe confundirse la variación $dy = [f'(x)|_{x=x_0}]dx$ con la variación $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. La diferencia entre ellas sería $\delta = |dy - \Delta y|$. Ciertamente, con una función afín $y = mx + b$, tendríamos $\delta = 0$.

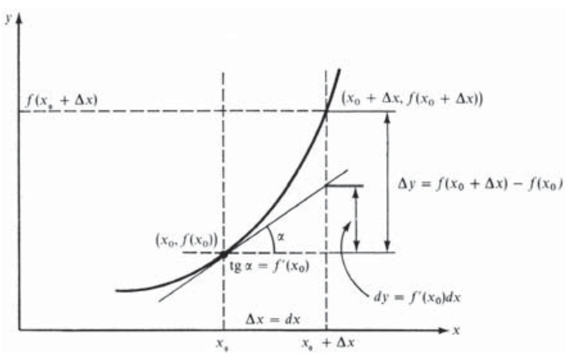

Figura 6. Interpretación geométrica de la diferencial

El concepto de diferencial está asociado a una función, y se define como el producto de su derivada en un punto por un incremento arbitrario de la variable independiente a partir de dicho punto (Whitney, 1936). Solamente por abuso de lenguaje se habla de dx como la «diferencial» de la variable x para referirse a un incremento diferencial —en el sentido de «infinitamente pequeño»— de x. Pero los incrementos infinitamente pequeños no tienen sentido, salvo en el análisis no estándar de Robinson (Dauben, 1995), como tampoco lo tienen los infinitamente grandes, razón por la cual semejante denominación carece de fundamento.

Conclusiones

Por una tradición que se remonta al origen del análisis matemático, la noción de diferencial se apoya en engañosas consideraciones semi-intuitivas sobre el manejo de cantidades infinitamente pequeñas, o «infinitésimos». Así se supone que dx es uno de tales infinitésimos, en tanto df representa también un incremento infinitesimal de la función f. Un examen más riguroso de este concepto nos demuestra que nada de eso es correcto. Ni dx simboliza infinitésimo alguno, ni tampoco df ha de ser un incremento infinitamente minúsculo.

En el caso más simple, correspondiente a una función escalar de una sola variable, la diferencial de la función constituye una aproximación lineal al valor de dicha función en torno a un punto cualquiera de su dominio. Dicha aproximación puede ser tan precisa o tan imprecisa como se desee, dependiendo del valor del incremento arbitrario en torno al punto escogido. No es la exactitud de la aproximación lo que aquí nos interesa sino su carácter lineal, pues esa linealidad resulta ser la principal característica de la diferencial. Tanto es así que al pasar a los campos escalares se declara explícitamente que la diferencial de una función viene dada entonces por una transformación lineal.

Es de esperar, por tanto que la insistencia en estas matizaciones vaya modificando la comprensión, pragmáticamente fructífera pero conceptualmente inadecuada, que muchos estudiantes universitarios de ciencias adquieren y mantienen sobre un instrumento matemático de tanta relevancia como es la diferencial.

Referencias bibliográficas

BARDI, J. S. (2006), *The Calculus Wars. The greatest mathematical clash of all time*, Thounder's Mouth Press, Nueva York.

BOCHNER, S. (1991), *El papel de la matemática en el desarrollo de la ciencia*, Alianza, Madrid.

BOYER, C. B. (1941), «Cavalieri, Limist and Discarded Infinitesimals» *Scripta Mathematica*, n.º 8, 79-91.

— (1959), *The history of the calculus and its conceptual development*, Dover Pub. Inc, Nueva York.

— (1985), *A History of mathematics*, Princeton Univ. Press, Princeton.

CAJORI, F. (1915), «The History of Zeno's Arguments on Motion: Phases in the Development of the Theory of Limits», *American Mathematical Monthly*, n.º 23, 1-6, 39-47, 109-115, 143-149, 179-186, 215-220, 253-258, 292-297.

CLEAVE, J. P. (1971), «Cauchy, Convergence and Continuity», *British J. Phil. Sci.*, n.º 22, 27-37.

— (1979), «The concept of 'variable' in nineteenth century analysis», *British J. Phil. Sci.*, n.º 30, 266-278.

CORNFORD, F. M. (1938), «Greek Natural Philosophy and Modern Science», en Needham, J. y Pagel, W. (Eds.), *Background to Modern Sciencie,* Cambridge Univ. Press, London, 45-67.

DAUBEN, J. (1995), *Abraham Robinson, The Creation of Nonstandard Analysis: A Personal and Mathematical Odyssey*, Princeton University Press, Princeton.

GONZÁLEZ-URBANEJA, P. M. (1992), *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII*, Alianza Universidad, Madrid.

GRABINER, J. V. (1978), «The origins of Cauchy's theory of the derivative», *Historia Mathematica*, n.º 5, 379-409.

— (1981), *The origins of Cauchy's rigurous calculus*, Dover, New York.

GRATTAN-GUINNESS, I. (1970*a*), *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*, MIT Press, Massachusets.

— (1970*b*), «Bolzano, Cauchy and the "new analysis" of the early nineteenth century», *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 6, n.º 5, 372-400.

HEATH, T. L. (1921), *A History of Greek Mathematics* (2 Vols.), Clarendon Press, Oxford.

KATZ, V. J. (1998), *A history of mathematics*, Addison-Wesley, Reading.

KLINE, M. (1972), *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford Univ. Press, New York.

PALMIERI, P. (2009), «Superposition: on Cavalieri's practice of mathematics», *Arch. Hist. Exact Sci.*, n.º63, 471-495.

SELLÉS, M. (2006), «Infinitesimals in the foundations of Newton's mechanics», *Historia Mathematica*, n.º 33, 210–223.

WHITNEY, H. (1936), «Differentiable Manifolds», *Annals of Mathematics*, n.º 37, 645–680.

RAFAEL ANDRÉS ALEMAÑ BERENGUER
Instituto de Física Aplicada a la Ciencia y a la Tecnología
Universidad de Alicante
<raalbe.autor@gmail.com>