suma+
SECCIONES
Julio 2014
76
pp. 91-98

Algunas actividades para hablar de divisibilidad

David Barba Uriach
Cecilia Calvo Pesce

Tal como comentamos en las entregas previas de esta sección dedicada a las Matemáticas en Primaria, nuestra intención es la de analizar dinámicas de clase centradas en la conversación y la comunicación: ¿qué actividades podemos proponer para generar este ambiente de clase?, ¿qué preguntas podemos formular para fomentar las discusiones?, ¿qué modelos podemos presentar a los alumnos para ayudarlos a pensar y a comunicar sus razonamientos?

En esta séptima entrega, continuamos haciendo propuestas en este sentido, ahora centrándonos en un tema del bloque «Numeración y cálculo» con la misma intención de dar a nuestr@s alumn@s un papel protagonista en la construcción de su aprendizaje a partir de actividades en las que ell@s tienen la palabra.

Esta entrega presenta una característica especial respecto a los anteriores, ya que la acción tiene lugar en un espacio más acotado que los otros temas tratados: la unidad de Divisibilidad que se estudia en los últimos cursos de Primaria. Aquí también apostamos por un trabajo a través de actividades que favorezcan la formación de esquemas conceptuales robustos antes que la repetición de definiciones o la mecanización de procesos poco transparentes.

Ell@s tienen la palabra

Artículo solicitado por *Suma* en febrero de 2014 y aceptado en abril de 2014

En la quinta entrega de la sección titulada «Introducción a las estrategias multiplicativas» (*Suma*, n.º 74), comentamos la relevancia que creemos debe darse al residuo desde el primer momento en que trabajamos en primaria la división de números naturales. Ahora nos detendremos en comentar el trabajo que en nuestras aulas proponemos con relación a aquellas divisiones donde el residuo es cero. Creemos que la manera de trabajar en el aula la relación que se establece entre dos números a partir de la división, también en esta etapa, debería implicar que l@s alumn@s manipulen, representen, interactúen con la tecnología, busquen regularidades, planteen y evalúen conjeturas y, sobre todo, que comuniquen sus razonamientos.

Introducción a la divisibilidad

Observando algunas prácticas escolares o libros de texto constatamos que, en un número importante de casos, existe cierta precipitación para presentar la definición del concepto a tratar, que en este caso sería definir cuando un número es divisor de otro, para después plantear algunos ejercicios para aplicar la definición.

Si lo que se busca es que «ell@s tengan la palabra», empezar por la definición es contradictorio con la idea que preside esta sección. Apostamos por plantear un itinerario que presente un problema que haga emerger el concepto, seguido del plateo de situaciones de discusión que lo institucionalicen y finalizar con propuestas de actividades de práctica enriquecedora.

La situación inicial, para el tema que nos ocupa y que puede fácilmente acompañarse del uso de material manipulativo, podría ser la siguiente:

> Queremos cubrir una cenefa de 12 cm de longitud con adhesivos iguales. Disponemos de adhesivos de diferentes medidas enteras: desde 1 cm a 18 cm. Los de 1 cm, son rojos; los de 2 cm, son naranjas, etc. ¿Qué otras medidas de adhesivo me serán útiles si quiero que cubran exactamente los 12 cm de cenefa?

En la imagen 1 se ven algunos adhesivos y cómo quedaría la cenefa si se eligen los adhesivos naranjas para decorarla.

Los alumnos que llegan a dar como respuesta que sirven los adhesivos de 1, 2, 3, 6, 9 y 18 cm muestran haber identificado el concepto de divisor en este contexto. Se podría discutir colectivamente cuál seria la respuesta al tener una cenefa de otra longitud, por ejemplo, 27 cm y adhesivos de diferentes medidas enteras entre 1 y 27 cm.

Entrando en la etapa de institucionalización del concepto, comenzaremos identificando la regularidad implícita en este tipo de situaciones: divisiones con residuo cero. El concepto que emerge, necesita ser nombrado y llega así el momento de introducir el término divisor[1].

Es necesario tener en cuenta los distintos niveles de dificultad que supone el trabajo sobre el concepto de divisor

El primer nivel consiste en decidir si un número es o no divisor de otro, bien por estrategias propias, bien efectuando la división y comprobando si da de residuo cero.

El segundo nivel seria encontrar algunos divisores (no necesariamente todos), para ello llegan los primeros descubrimientos (teoremitas les llamamos) nos ayudan a organizar la tarea. El 1 y el mismo número son divisores. Si la cifra de las unidades

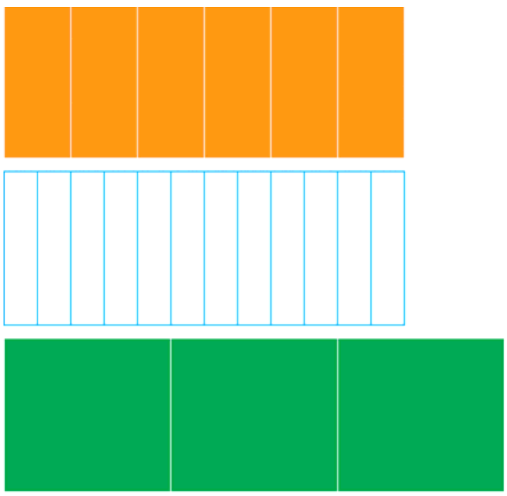

Imagen 1. El adhesivo de naranja 2 cm cubre exactamente la cenefa; el rojo de 5 cm, no.

es par, 2 será un divisor. Si por ejemplo 3 es divisor, el cociente de dividir el número entre 3 también será un divisor, etc.

El protagonismo de la ejercitación de rutinas, si nos fijamos en el tiempo de clase empleado en ello, es un problema preocupante y que reclama un cambio necesario

El tercer nivel ya implica un pensamiento exhaustivo: encontrar todos los divisores de un número. Para ello es necesario aplicar un método sistemático, por ejemplo, buscar ordenadamente pares de números que multiplicados den como resultado el número del que se quiere encontrar todos los divisores.

Por ejemplo, si buscamos los divisores de 12, empezando el proceso por el 1 hallamos el 12, ya que $1 \times 12 = 12$. Siguiendo la serie de los números naturales, seguimos por el 2, al que asociamos el 6; después, el 3 con el 4. Y finalizamos el proceso, ya que el siguiente par seria 4 y 3, que ya hemos encontrado. Una consecuencia de este proceso da paso a poder comprobar que no se ha dejado ninguno.

Un recorrido por las distintas estrategias posibles para buscar divisores nos brinda la posibilidad de proponer ricas discusiones en clase: ¿de qué maneras distintas podríamos saber si un número es divisor de otro? Por ejemplo, para saber si 108 es divisible entre 6 podemos proceder de diferentes maneras:

a) Podemos hacer la división, aplicando el algoritmo y analizar el residuo; o con la calculadora, y analizar si el cociente da entero o decimal.
b) Podemos restar 6 de 108 reiteradamente hasta saber si la última resta da 0 o dar saltos de longitud 6 sobre la línea numérica hacia atrás desde 108 y analizar si el último salto cae exactamente en el 0.
c) Podemos averiguar si es posible descomponer 108 como una suma donde todos los sumandos son divisibles entre 6: $108 = 60 + 30 + 18$. O como un producto donde al menos uno de los factores es divisible entre 6: $108 = 2 \cdot 54$, y 54 es divisible entre 6.
d) Podemos comprobar si 108 es divisible entre 2 y entre 3 simultáneamente.

El último punto correspondería a la frase «podemos saber si un número es divisor de otro aplicando los criterios de divisibilidad», pero ¿cómo planteamos su introducción? Darlos como una lista de instrucciones para aplicar es, a nuestro entender, perder una gran oportunidad de discutir sobre Matemáticas.

Deducir en clase los criterios de divisibilidad por 2, 5 y 10 es fácil para nuestros alumnos. Para 3 y 9 el uso de contextos, en este caso el dinero, ayuda a justificar la razón de sumar los valores de sus cifras. En el caso del 7, podemos decidir no presentar un criterio, pero no llevar a nuestros alumnos a la creencia generalizada que no existe un criterio de divisibilidad por siete[2]. Finalmente, no podemos olvidar el aspecto cultural: la necesidad de disponer de algoritmos para decidir y así evitar el proceso de hacer largas divisiones.

Práctica productiva, reproductiva y lúdica

El protagonismo de la ejercitación de rutinas, si nos fijamos en el tiempo de clase empleado en ello, es un problema preocupante y que reclama un cambio necesario. J. M.ª Goñi en la introducción al libro *El currículum de Matemáticas en los inicios del siglo XXI*[3] afirma: «no es nada exagerado afirmar que más del 75% del tiempo escolar se reduce al entrenamiento de los alumnos en la aplicación mecánica de los algoritmos». Un paso adelante en este sentido consistiría en cambiar la propuesta de este tipo de actividades, planteando la ejercitación de destrezas básicas en un ambiente de resolución de problemas que invite a los alumnos a conjeturar, a argumentar, y a rebatir a la vez que consolidan sus aprendizajes.

La práctica productiva, tal como la denomina Van den Heuvel-Panhuizen en su libro *Children learn Mathematics*, consiste en la substitución de algunas tareas rutinarias de ejercitación por otras más ricas desde el punto de vista matemático. Analicemos un ejemplo de práctica de la determinación de todos los divisores de un número:

> En el camino del descubrimiento de los números que tienen mayor cantidad de divisores, descubren que ser más grande no implica tener más divisores, que un número tiene siempre menos divisores que su doble...

Reproductiva. En un libro de texto se propone al alumno calcular todos los divisores de una serie de números, 14 en total (el libro va acompañado de un cuaderno de práctica en el que se proponen más números a los que calcular todos sus divisores).

Productiva. Se pregunta a la clase cuál creen que es el número de dos cifras que tiene más divisores. Así planteado, el problema invita a una dinámica de trabajo «colaborativo»: al tener que estudiar la cantidad de divisores de 90 números se reparte la tarea por pequeños grupos y cada uno de ellos se ocupa de calcular todos los divisores de una serie de números.

A pesar que cada alumno ejercita lo mismo en una y otra propuesta hay grandes diferencias entre ellas, tanto en la naturaleza de la actividad matemática que se lleva a cabo en el aula, como en la dinámica. En el camino del descubrimiento de los números que tienen mayor cantidad de divisores, descubren que ser más grande no implica tener más divisores, que un número tiene siempre menos divisores que su doble, etc. Y en lo que respecta al rol del alumno no se trata de realizar el ejercicio y después corregir si está bien o no, sino de asegurar como grupo que los cálculos son correctos.

El proyecto *Nrich*, al que Carme Burgués dedicó la sección *Vale la pena* (Suma, n.º 72), es una fuente inagotable de ejemplos de práctica productiva. Entre ellos encontramos algunos relacionados con el cálculo de divisores como el siguiente:

Completar las celdas de la imagen 2 con números diferentes elegidos entre 2 y 100. ¿Cuál es el mayor número que puede ir en la celda verde? ¿Cuál es el menor número que puede ir en la celda azul? ¿Puede aparecer el número 99 en la celda naranja? ¿Cuántas soluciones diferentes hay que tengan un 8 en la celda verde?[4]

Imagen 2

La idea de enriquecer actividades de práctica viene de lejos. Todos recordamos, por ejemplo, los dominós de fracciones donde el objetivo que acompaña a la ejercitación es ganar el juego. Sin embargo, este nuevo objetivo no implica necesariamente pensamiento matemático, cosa que deja fuera de la práctica productiva a algunas de estas actividades. Las clasificamos, pues, como «práctica lúdica» y entre ellas podemos destacar muchos *applets* que recurren a este carácter para motivar la práctica. Hemos seleccionado tres de estos *applets* como muestra[5]:

Dozens[6]. El ordenador propone un dígito y el usuario otros dos para conseguir el mayor número de tres cifras divisible entre 2, 3, 4 o 6.

Factors Game[7]. Un jugador elige un número en una tabla y el otro ha de elegir la mayor cantidad posible de números no elegidos con anterioridad que sean divisores del número elegido por el contrincante.

Factors and Multiples Game[8]. Un jugador elige un número en una tabla y el otro ha de elegir un divisor o un múltiplo del número elegido con anterioridad hasta dejar al contrincante sin opciones de jugar.

Números primos y compuestos

Desde el momento en que a un alumno le podemos proponer que dibuje sobre papel cuadriculado todos los rectángulos diferentes que cubren 23, 24 o 25 cuadritos ya podemos introducir los conceptos de números primos, compuestos y cuadrados.

El 23, como todos los números primos, lo podemos representar únicamente con un rectángulo de 1 × 23. El 24, con más de un rectángulo: 1 × 24, 2 × 12, 3 × 8 y 4 × 6, pero ninguno de esos rectángulos es un cuadrado, cosa que si sucede cuando queremos representar el 25 con rectángulos[9].

Esta aproximación tiene el inconveniente que clasifica al 1 como número primo lo cual sabemos que no responderá a nuestros intereses[10], pero creemos que es una buena manera de contactar con la clasificación de números a partir de sus divisores. Luego ya podremos explicar la convención de que el 1 no es primo ni compuesto y la conveniencia de definir los números primos como aquellos que tienen exactamente dos divisores.

Además de saber identificar los números primos creemos en la importancia de que los alumnos memoricen algunos de ellos para poder avanzar en tareas posteriores sin tener que en cada caso detenerse a verificar si tienen o no más de dos divisores.

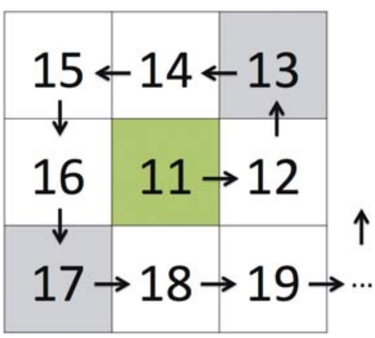

Imagen 3

Pese a ello, creemos que esta memorización puede adquirirse en un contexto de resolución de problemas. Uno entre los muchos ejemplos de este tipo de actividades que permiten a los alumnos familiarizarse con la sucesión de números primos es el siguiente[11]:

> En un papel cuadriculado continua la espiral numérica que aparece en la imagen 3 y pinta las celdas donde aparezcan números primos. ¿Qué observas?

Descomposición factorial de un número

El trabajo con la descomposición factorial debería seguir el mismo itinerario que el trabajo con divisores y múltiplos o con números primos mencionado antes: un problema que hace emerger el concepto, una discusión de clase que lo institucionaliza y la propuesta de una serie de actividades de práctica productiva.

Como problema inicial solemos pedir que encuentren diferentes multiplicaciones (de 2 o más factores, sin utilizar el 1 como uno de ellos) que tengan un resultado concreto y que analicen cuáles de ellas incluyen más factores. Buscamos que los alumnos infieran que la de mayor cantidad de factores en todos los casos utiliza únicamente números primos (36 = 2 × 3 × 2 × 3 o 42 = 2 × 3 × 7) y llamaremos descomposición factorial en factores primos a tal multiplicación.

Nos resulta de vital importancia en este momento el uso de un applet como *Árbol de Factores*[12], de la Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales de la Universidad de Utah, que permite practicar estas descomposiciones liberando parcialmente los requerimientos de cálculos aritméticos para que el alumno se pueda centrar en la búsqueda de divisores como factores de tal descomposición.

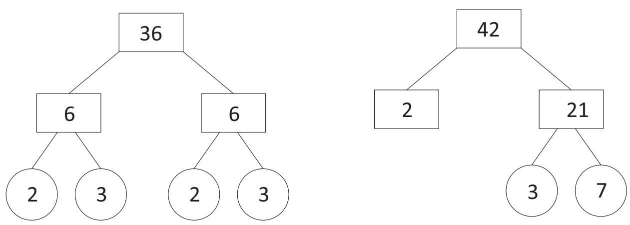

Imagen 4. Captura de pantalla del applet *Árbol de Factores* usado para descomponer factorialmente los números 36 y 42

Realmente nos gusta mucho cómo han llevado al aula esta idea de los árboles de factorización los maestros de la *International School of Toulouse*[13] en la que se inspiraron las maestras de la escuela La Sínia de Vic (Barcelona), tal como se ve en la imagen 5.

Como práctica productiva presentamos tres ejemplos de dificultad creciente (en todos ellos asumimos la convención del applet *Árbol de Factores* que usa rectángulos alrededor de los números compuestos y círculos alrededor de los números primos).

> Encuentra un árbol de descomposición para el número 36 que tenga la apariencia del diagrama azul de la imagen 6 y otro que tenga la apariencia del diagrama naranja.
> Completa de todas las maneras posibles el árbol de descomposición que aparece en el diagrama rojo de la imagen 6.
> ¿Cuáles son todos los números de dos cifras que tienen algún árbol de descomposición con la apariencia del diagrama verde de la imagen 6?

Imagen 5

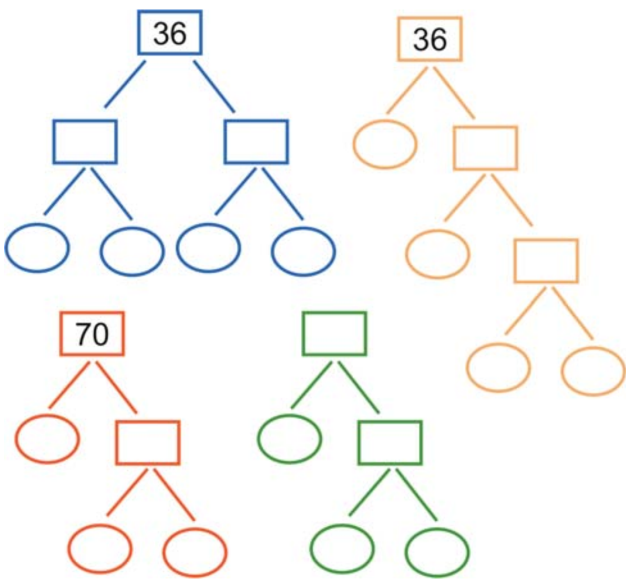

Imagen 6

Divisores y múltiplos comunes a dos números

Siempre es mala idea anteponer el dominio de un algoritmo al estudio del problema que ese algoritmo pretende resolver. Lo es cuando pensamos en las operaciones aritméticas básicas y lo es también cuando hablamos de máximo común divisor (mcd) y mínimo común múltiplo (mcm). ¿Qué interés puede tener que un alumno recite la frase «comunes y no comunes con su mayor exponente» si es incapaz de calcular el *mcm(6,4)* mentalmente o si no tiene idea de la relación que hay entre la descomposición factorial de un número y la de sus múltiplos y que constituye la base de la justificación de su frase?

Creemos firmemente que si apostamos por unas matemáticas transparentes dentro del aula de primaria, unas matemáticas donde l@s alumn@s construyen su conocimiento a partir de las experiencias y las discusiones grupales, el cálculo de mcd y mcm debe emerger de la comparación de los divisores y los múltiplos de cada uno de esos números. Obviamente que éste no es un procedimiento eficiente cuando los números en cuestión son cualesquiera pero creemos que podemos posponer a Secundaria el trabajo con estos algoritmosxiv y centrarnos aquí en situaciones en que los alumnos puedan calcular mcd y mcm a partir de las propias definiciones de estos conceptos.

No queremos alumnos que necesiten descomponer factorialmente el 13 y el 130 para saber que 13 es el mayor número que divide al 13 y al 130 simultáneamente.

Queremos alumnos a los cuales calcular *mcd(16,20)* no les requiera más esfuerzo que pensar que si los divisores del 16 son 1, 2, 4, 8 y 16, y los del 20 son 1, 2, 4, 5, 10 y 20; el 4 es el máximo número que aparece en ambas listas.

Queremos alumnos que ante el cálculo del *mcm(7,8)* comparen la lisa de múltiplos de ambos números y vean que no hay ningún número que se repita en esas listas antes que el propio 7×8.

Y, sobre todo, queremos alumnos que delante de un problema clásico de aplicación no tengan dudas de si lo que necesitan aplicar es el *mcm* o el *mcd*. Seguramente sea más rápido pedirles que memoricen algoritmos relacionados con la descomposición factorial, pero creemos que no es esa la mejor manera en la que podemos invertir el tiempo en nuestras clases.

En una clase de matemáticas donde nos interesa que hablen los alumnos podemos proponerles que completen la siguiente tabla y relacionen las dos primeras columnas con las dos últimas:

a	b	mcd(a,b)	mcm(a,b)
4	6		
7	8		
16	20		
13	130		
11	11		
1	56		
17	8		
...	...		

Podría parecer que esta tabla simplemente sustituye a una página de libro de texto donde se pide una serie de cálculos repetitivos, pero creemos que es mucho más. Es una invitación a que l@s alumn@s hablen, que cuenten a sus compañeros qué resultado han obtenido y cómo han llegado a él, que conjeturen qué relación hay entre las columnas. Por ejemplo:

[...] algunos aspectos que consideramos relevantes para fomentar la discusión en la clase de matemáticas... la sustitución de ejercicios de práctica reproductiva, mecánica y repetitiva por propuestas que promueven la práctica de habilidades básicas

—los números de la tercera columna nunca superan a los de la cuarta columna,
—los números de las dos últimas columnas son iguales únicamente cuando lo son los de las dos primeras,
—los números de la última columna son generalmente mayores que los de las dos primeras (cuando esto no se cumple es porque el mcm es igual a uno de los dos números y eso sucede cuando entre los dos números de la izquierda uno es múltiplo del otro)
—el producto de los números de las dos primeras columnas da lo mismo que el producto de los números de las dos últimas.

Otros problemas relacionados con la divisibilidad

Antes de terminar, nos gustaría mencionar el interés que tiene presentar en la clase algunos problemas que en su formulación inicial no alertan la presencia de la divisibilidad pero que permitirán a nuestros alumnos hablar sobre tal presencia e intuir el potencial de la divisibilidad en el análisis de situaciones cotidianas. Nos estamos refiriendo a problemas tan conocidos como los siguientes:

> ¿Cómo puedo medir un litro de agua si solamente dispongo de un bidón de 4 litros y uno de 7 litros?[15]
>
> ¿Qué precios de envío por correo puedo franquear con sellos de 5 y de 7 céntimos?[16]
>
> Si en una circunferencia marcamos 20 puntos y los unimos de *n* en *n*, ¿para qué valores de *n* obtendremos un polígono estrellado?[17]

Reflexión final

En esta entrega de la sección, y con la excusa del estudio del tema divisibilidad que principalmente desarrollamos durante el tercer ciclo de Primaria, quisimos reflexionar sobre algunos aspectos que consideramos relevantes para fomentar la discusión en la clase de matemáticas:

1) La sustitución de ejercicios de práctica reproductiva, mecánica y repetitiva por propuestas que promueven la práctica de habilidades bási-

cas. Como, por ejemplo, fomentar la búsqueda de divisores y múltiplos, la memorización de los primeros números primos, la descomposición factorial o el cálculo del *mcd* y *mcm* en un ambiente de resolución de problemes que invite a los alumnos a conjeturar, a argumentar, a rebatir…

2) Posponer las definiciones formales de los conceptos y de la presentación de los algoritmos dando así mayor relevancia al desarrollo de ideas emergentes y estrategias personales que los propios alumnos han de explicitar y explicar a sus compañeros.

Para profundizar

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (ed), 2001, *Children learn mathematics*. Utrecht: Freudenthal Institute, Utrecht University.

Diferentes entradas del blog del *Puntmat* relacionadas con la divisibilidad:

http://puntmat.blogspot.com.es/

David Barba Uriach
Universitat Autònoma de Barcelona

Cecilia Calvo Pesce
Escola Sadako (Barcelona)
<tienenlapalabra@revistasuma.es>

1 La introducción del término múltiplo como palabra necesaria para poder hablar del proceso inverso aparece paralelamente: «si a es divisor de b, diremos que b es múltiplo de a».

2 El uso del dinero como material manipulativo que puede dar soporte a la justificación de los criterios y presencia de un criterio de divisibilidad entre 7 en el Talmud nos acercan a las respuestas tal como se puede leer en:
<http://puntmat.blogspot.com.es/2014/05/els-criteris-de-divisibilitat.html>.

3 Obra colectiva editada por Graó en el año 2000.

4 Actividad propuesta en <http://nrich.maths.org/5578>

5 Se pueden encontrar otros ejemplos en
<http://puntmat.blogspot.com.es/2012/03/applets-de-divisibilitat.html>, o en
<http://puntmat.blogspot.com.es/2013/09/divisors-i-pensament-exhaustiu.html>.

6 <http://nrich.maths.org/559> comentado en
<http://appletspuntmat.blogspot.com.es/2014/02/buscar-el-nombre-mes-gran-que.html>.

7 <http://illuminations.nctm.org/Activity.aspx?id=4134>. Comentario en nuestro blog: <http://appletspuntmat.blogspot.com.es/2013/12/joc-de-divisors.html>.

8 <http://appletspuntmat.blogspot.com.es/2013/10/joc-de-multiples-i-divisors.html>.

9 Podemos encontrar una recopilación de representaciones visuales de números primos y compuestos en
<http://puntmat.blogspot.com.es/2012/09/nombres-primers-compostos-i-quadrats.html>.

10 Si el 1 fuera un número primo la descomposición factorial en factores primos perdería unicidad: 6 = 2 x 3 = 2 x 3x1 = 2 x 3 x 1 x 1 = …

11 Aparecen otros ejemplos de problemas de práctica productiva destinada a la familiarización de los alumnos con la sucesión de los números primos en
<http://puntmat.blogspot.com.es/2014/04/els-primers-nombres-primers.html>.

12 <http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_202_g_2_t_1.html> comentado en
<http://puntmat.blogspot.com.es/2011/12/mes-sobre-larbre-de-factors.html>.

13 Se puede ver el trabajo realizado en el curso 2013–2014 en
<http://pinkmathematics.blogspot.com.es/2013/10/this-years-forest-of-factors.html>
o en el curso 2012–2013 en
<http://pinkmathematics.blogspot.fr/2013/02/important-factors.html>.
Observar como destacan que el 1 no es primo ni compuesto, no representándolo como un árbol, tal como representan a todos los números compuestos, ni como una seta, tal como representan a todos los números primos.

14 Tampoco creemos que el principal algoritmo que deberíamos trabajar en Secundaria para el cálculo del *mcd* y *mcm*, sea el que pasa por calcular las descomposiciones factoriales y considerar «factores comunes con su menor exponente» ni «factores comunes y no comunes con su mayor exponente». En
<http://puntmat.blogspot.com.es/2011/11/un-algorisme-mes-transparent-per.html>
planteamos una alternativa.

15 Se puede obtener más información sobre este problema y sobre simuladores virtuales para experimentar con el trasvase de líquidos entre diferentes contenedores en
<http://appletspuntmat.blogspot.com.es/2014/04/transvasament-de-liquids.html>.

16 Se pueden encontrar formulaciones diferentes del mismo problema en
<http://puntmat.blogspot.com.es/2012/05/matematiques-primera-hora-del-mati.html>.

17 En
<http://appletspuntmat.blogspot.com.es/2014/04/poligons-estrellats-i-divisibilitat.html>
se pueden ver algunos applets que permiten trabajar este problema en un entorno virtual.