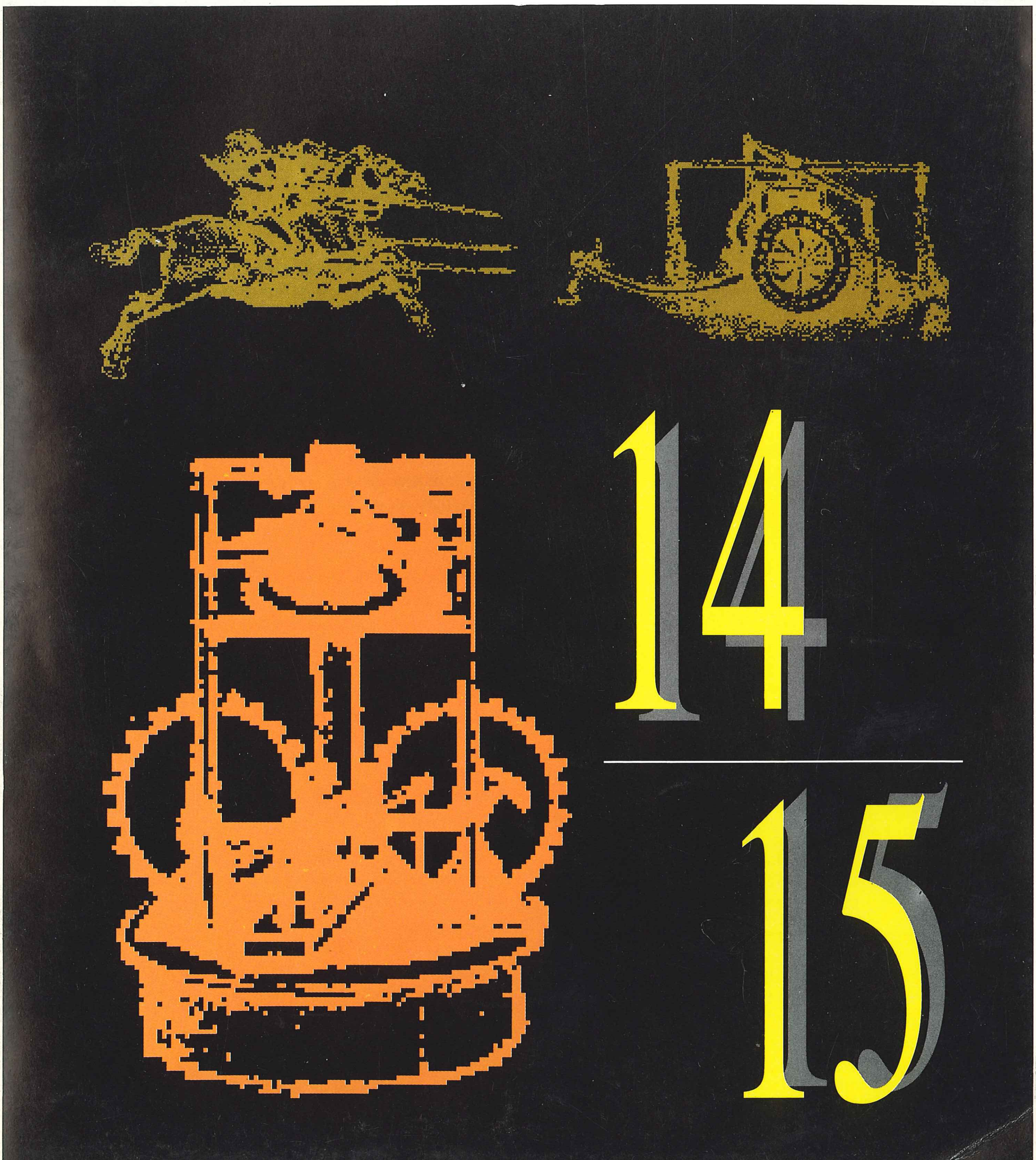
SUMA

Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas



EDITA:
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Associació D'ensenyants de Matemàtiques de les Comarques Gironines
ADEMGI
Presidenta: María Antonia Canals
Apartat de Correus 835. 17080-Girona

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"
Presidente: Gonzalo Sánchez Vázquez
Apartado 1.160. 41080-Sevilla

Sociedad Aragonesa de Prof. de Matemáticas "P. Sánchez Ciruelo"
Presidente: Rosa Pérez García
ICE Ciudad Universitaria. 50006-Zaragoza

Sociedad Canaria de Prof. de Matemáticas "Isaac Newton"
Presidente: Manuel Fernádez Reyes
Apartado de Correos 329. 38201-La Laguna (Tenerife)

Sociedad Castellano-Leonesa de Prof. de Matemáticas.
I.B. Comuneros de Castilla.
Presidente: Constantino de la Fuente Martínez
C/ Batalla Villalar, s/n. 09006-Burgos

Sociedad Castellonenca de Matemáticas
Presidente: Timoteo Briet Blanes
Apartado 607. 12080-Castellón

Sociedad Extremeña de Educ. Matemática "Ventura Reyes Prósper"
Presidente: Ricardo Luengo
Apartado 536. 06080-Mérida

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia I.B. de Ribadavia.
Coordinador: Andrés Marcos García
C/ Rodríguez Valcárcel. Ribadavia. 32400-Orense

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas "Tornamira"
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea
Presidente: José Ramón Pascual Bonís
Dto. Matemáticas. E.U. del P. EGB. Plaza de S. José, s/n. 31001-Pamplona

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas
Presidente: Javier Brihuega
Apartado 14610. 28080-Madrid

Sociedad de Profesores de Matemáticas de Alicante
Presidente: Germán Torregrosa
Apartado 1009. 03080-Alicante

Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Vicente García Sestafé
Apartado 9479. 28080-Madrid

Depósito legal: Gr. 752 - 1988
I.S.S.N.: 1130 - 488X
Fotocomposición e Impresión:
Proyecto Sur de Ediciones. Armilla (Granada)

ARTÍCULOS

IDEAS PARA LA CLASE

RIO

RECURSOS PARA EL AULA

INFORMACIÓN

RESEÑAS

MISCELÁNEA

Suplemento "Para Coleccionar"

2ª Parte del listado de trabajos aparecidos en Scientific American y Calendarios del Centres de Professors i Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "al Khwaritzmi"

EDITORIAL

"Por alguna razón que desconoces el corazón se llena de alegría. Entonces la reparte por todo el cuerpo, aunque con un poco de confusión... Aunque nunca se sabe, comienza un nuevo año y eso siempre trae un poco de magia a nuestras vidas"

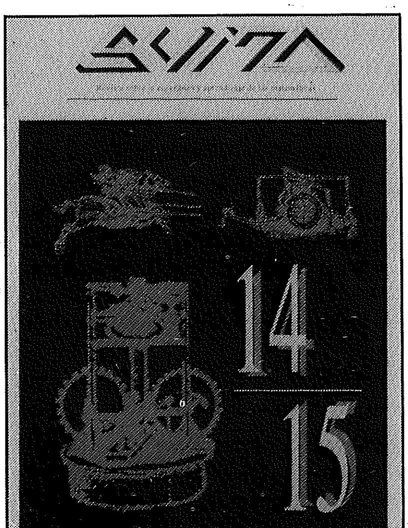
En el número especial correspondiente al año mil novecientos noventa y dos, con buena intención, justificábamos la puesta al día en cuanto a la regularidad de la edición de tres números por año, sin embargo algunas meigas se han introducido en la gestión de SUMA.

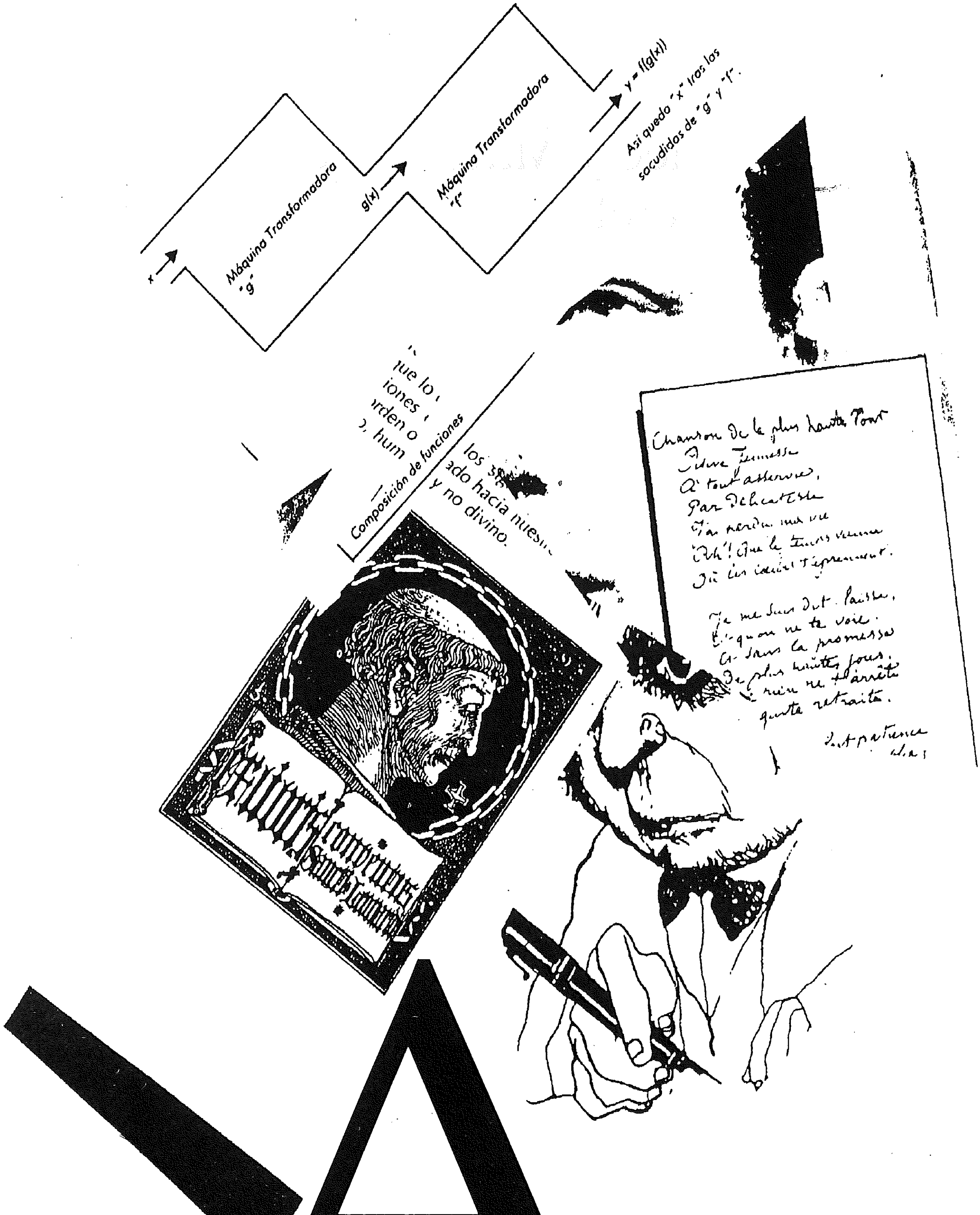
En la última reunión de la Junta Directiva de la FSPM en septiembre del 93 explicábamos que algunas causas de tipo administrativo por un lado, y la escasez de fondos de artículos por otro, habían provocado el retraso de la edición del siguiente número. Desde entonces hasta el momento actual hemos configurado este número especial que pueda responder al compromiso adquirido con socios y suscriptores, pero la realidad es que a nuestra redacción no llegan trabajos suficientes para su publicación. Reconocemos que desde el momento de recepción del artículo hasta su posible publicación pasa un tiempo que inexorablemente no puede ser recuperado. En este sentido, hacemos una llamada a la colaboración: la revista SUMA es el órgano de difusión de la actividades que realizamos día a día en nuestras aulas.

Abusando de la generosidad de todos los lectores, con esta introducción de la editoral intentamos comunicar que ante la ausencia de trabajos se puede correr el riesgo de que sólo se publiquen dos números por año. Este no es nuestro deseo, pero tampoco quisiéramos tomar como norma que al finalizar los años en curso tuviéramos que justificar, de nuevo, el montaje de otros números dobles especiales.

A pesar de las dificultades que nos ha deparado el presente año 93, estamos convencidos que este número interesará por la variedad de su contenido en temas tan importantes, entre otros como, el uso de los MAV's en el aula, las diferencias de sexo en el aprendizaje de las matemáticas, los problemas en la enseñanza de conceptos de cálculo, etc. Todos estos temas aparecen configurados junto a un número sustancial de ideas y recursos para las clases; además el capítulo de información recoge las actividades que nuestras sociedades realizan en sus respectivos núcleos de actuación.

Para finalizar recordemos a Bertrand Russell: *hagamos posible lo imposible.* Es obligación nuestra que la *aventura* comenzada hace años prevalezca. No olvidemos que el ICME'8 es tarea de todos y un gran reto en el que la revista SUMA debe jugar un papel importante.




x
Máquina Transformadora "g"
g(x)
Máquina Transformadora "f"
y = f(g(x))
Así quedó "x" tras las sacudidas de "g" y "f".
Composición de funciones
y no divino.
Chanson de la plus haute Tour

ARTICULOS

Psicología, Vídeo y Matemáticas: Un extraño cóctel

Ismael Roldán Castro

Los medios de comunicación cobran mayor importancia cada vez en los procesos de enseñanza-aprendizaje. En este artículo, se desvelan ciertos aspectos psicológicos inherentes a la videoproducción educativa, con un lenguaje matemático y en clave de humor.

Introducción

Se recogen en el Informe Cockcroft que los profesores de matemáticas deberían demostrar a sus alumnos que las matemáticas constituyen un poderoso medio de comunicación, riguroso, preciso y conciso.

Y como los medios de comunicación, entre ellos el Vídeo que será el que abordaremos desde una peculiar óptica, pueden constituir un poderoso aliado en el proceso de enseñanza-aprendizaje, nos adentraremos en una de las parcelas más atractivas del Vídeo: la vídeo-producción educativa, entendiendo como tal, la que un profesor de EE.MM. puede realizar con los limitados recursos de su Centro.

Pero, seguramente se habrán formulado la siguiente pregunta algunos lectores:

¿Qué tiene que ver Vídeo-producción educativa con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, su divulgación o popularización?

Quienes hayan manejado la bibliografía actual sobre Vídeo en la enseñanza, habrán observado que incide básicamente sobre dos aspectos: el técnico y el teórico (semiótica del Vídeo). Sin embargo, no es fácil encontrar información acerca de un aspecto singularmente interesante en la producción de Vídeos educativos: el psicológico, es decir, una introducción a lo que sería un análisis de las vivencias subjetivas de cualquier profesor que decidiera investigar las posibilidades del Vídeo en la educación.

El autor del presente artículo, basándose en la experiencia adquirida en la realización de tres vídeos educativos, uno de ellos sobre matemáticas, expondrá algunas percepciones que pudieran ser universales y por tanto útiles para quienes deseasen aventurarse en proyectos de este tipo.

Así pues, lo que nos proponemos es: una caricatura, en clave matemática, de ciertos aspectos psicológicos que aparecen en los procesos de producción de vídeos educativos.

Una aproximación a los usos del Vídeo en la Educación

El único interés que puede tener la utilización del Vídeo en la Educación es el de contribuir a incrementar la calidad del proceso de enseñanza y aprendizaje. Aunque el significado de calidad educativa siempre será objeto de discusión y polémica, quizás pudieran apuntarse algunos elementos constituyentes:

- La libertad de pensamiento y expresión
- La práctica de la tolerancia
- El rigor en los procesos
- La participación crítica
- La coherencia y la responsabilidad como principios éticos.

Acerca de los usos del Vídeo en la educación citaremos tres fuentes principales:

- Producciones de Vídeos educativos
- Visionado de cintas de Vídeo (comerciales, educativas, divulgativas, programas T.V., etc.).

En definitiva, cada profesor debería cuestionarse continuamente la rentabilidad educativa del uso concreto del Vídeo en su ámbito curricular particular.

Nosotros abordaremos a continuación las producciones de Vídeos educativos realizadas por profesores, desde un enfoque psicológico, con un lenguaje matemático y en clave de humor.

Algoritmo de la producción del Vídeo Educativo

Ante un proyecto de realización de Vídeo en el entorno educativo, pudiera resultar útil plantearse previamente ciertas cuestiones, aparentemente triviales, cuya definición precisa configurase algo así como el plan general de actuación, o lo que es lo mismo, las estrategias de resolución del problema de la videoproducción educativa. En este sentido, el esquema de la Fig. 1 invita a un recorrido secuencial.

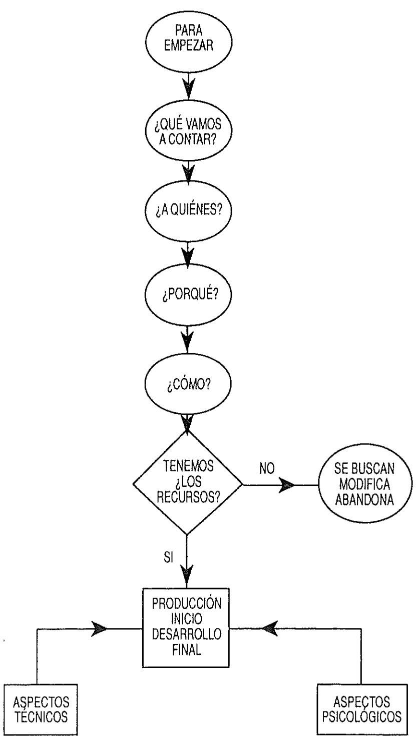


Fig. 1. Algoritmo de la producción del vídeo educativo

De esta forma, y en el supuesto de que los recursos necesarios estén a nuestra disposición: cámaras, trípode, mesas de edición o VTR's con mando shuttle, cintas, etc., se pasaría a la producción propiamente.

En el desarrollo del proceso de producción incidirán aspectos técnicos: guionización, sintaxis de la imagen y tecnología sobre los que existe amplia bibliografía, una pequeña muestra de la misma se ofrece al final del presente artículo. Y también los aspectos psicológicos que hemos venido anunciando y en los que entraremos sin mayor dilación.

Límite de una sucesión

Consideremos la siguiente sucesión videoproductiva v_n:
v_n = Ideas, guiones, tiempo invertido, fallos técnicos, repeticiones,..., producto final.

Entonces, la experiencia confirma que:

$$\lim_{n \to \infty} v_n = \text{SATISFACCIÓN}$$

Ese límite tan apreciado alcanza su máximo justo cuando damos por concluida la producción. Además, mientras más avanzados estemos en la sucesión mayor será la sensación de experimentar su límite, o lo que es equivalente, la diferencia entre el nivel de satisfacción correspondiente a cualquier término de la sucesión y el propio límite se hace tan pequeña como queramos.

Curva de la atención/interés frente al tiempo

En la representación gráfica de la Fig. 2, I_0 representa la motivación inicial de los alumnos ante algún tema que vaya a tratarse mediante el uso del Vídeo. Es el caso del visionado de alguna cinta de Vídeo que hayamos considerado de interés.

También la experiencia confirma que transcurridos los treinta primeros minutos de la reproducción, los niveles de atención e interés tienden a caer estrepitosamente. Conviene que se tenga en cuenta este dato tanto para las producciones que nos propongamos realizar como para los Vídeos que utilicemos como apoyo didáctico. En cualquier caso, siempre será conveniente una pequeña presentación del Vídeo (sobre todo para crear cierta expectación y nunca para adelantar sorpresas) así como alguna actividad posterior al visionado que permita la participación crítica de los espectadores y

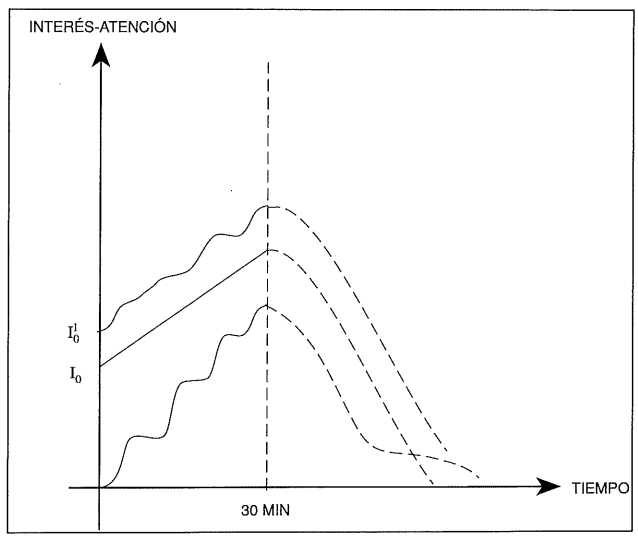


Fig. 2. Curva de la Atención e Interés

una evaluación del grado de consecución de los objetivos que nos habíamos propuesto.

Curva del Vídeo contraproducente

En la Fig. 3 se representa gráficamente la situación indeseable que puede alcanzarse si gracias al uso del Video conseguimos un incremento negativo del interés inicial, llegando incluso a la cota ínfima que sería su anulación.

Condición necesaria, pero no suficiente

Atendiendo a los símbolos que se detallan a continuación:

P = Proyecto de videoproducción
C = Contenido del Vídeo
D = Divertido
PR = Profesor
AL = Alumno
PRO = Probabilidad de culminar P

Puede establecerse la condición necesaria siguiente:

$$\text{Si P y C} \equiv \text{D},$$
$$\forall \text{ PR y AL} \nRightarrow \text{PRO} \approx 1$$

En efecto, si el proyecto y su contenido resultan divertidos tanto para el profesor como para el alumno, entonces casi con certeza puede vaticinarse que el proyecto se culmina.

Obviamente es sólo necesaria la condición porque para que fuese suficiente habría que añadirle elementos como los recursos técnicos básicos (sin videocámara la producción sería una ilusión), la disposición del tiempo requerido, etc.

Diagrama de barras

El gráfico que aparece en la Fig. 4 debería ser más elocuente que cualquier intento de explicación en tanto que viene a comunicar que lo más importante, en el ámbito de la educación, son los procesos seguidos durante la videoproducción (protagonismo real de los alumnos, trabajo en equipo, buen clima, etc.) y que la calidad técnica del producto tiene una menor importancia. Ahora bien, todo profesor debería aspirar a perfeccionar esta última, sobre todo en lo que a la optimización del rendimiento del equipamiento tecnológico se refiere.

Sistema incompatible

Denominemos a las dos incógnitas del sistema que construiremos por:

PP = Producción Profesional
PC = Producción de Centro Educativo

Sea el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 4\,\text{PP} + 8\,\text{PC} = 3 \\ \text{PP} + 2\,\text{PC} = 5 \end{cases}$$

Dejando a Cramer y resolviendo por uno cualquiera de los clásicos métodos se llega a:

¡20 = 3!

Llegándose a la conclusión que se intuía:

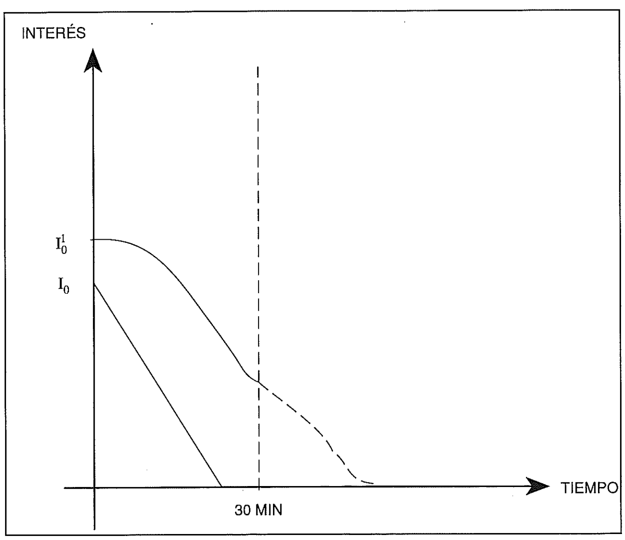


Fig. 3. Curva del Vídeo Contraproducente

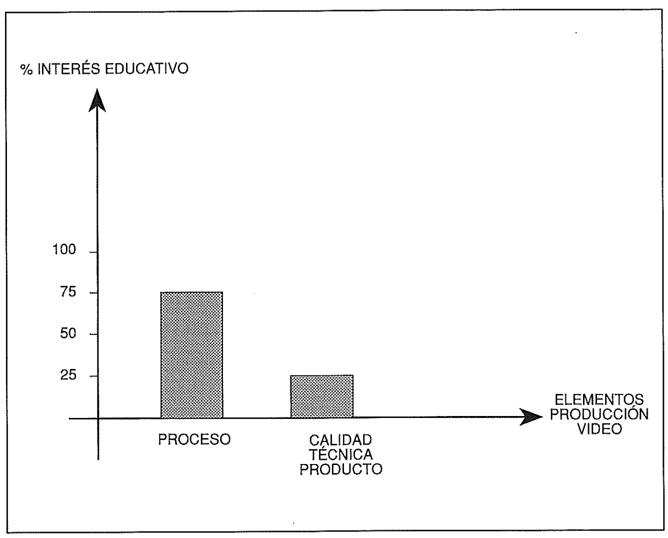


Fig. 4. Diagrama de Barras

"El PP y el PC son incompatibles, o sea, no son comparables»

Realmente lo que subyace tras esta fábula algebraica no es otra cosa que un mensaje para que no comparen de inmediato los programas profesionales de la T.V. con las producciones realizadas en los Centros, cuyos medios siempre serán muy limitados.

Curva dedicación-perfección

Con la Fig. 5 se intenta llevar al ánimo de quienes aman la perfección técnica que si bien es cierto que para elevar la cota en ésta última necesariamente hay que incrementar también la dedicación al proyecto, no lo es menos que perfección y dedicación no guardan entre sí una relación lineal, es decir, que a doble dedicación, lamentablemente, no corresponde doble perfección.

En la curva de la Fig. 5 los pares (D_1, P_1) y (D_2, P_2), representan los niveles de dedicación invertidos. Pero lo que interesa resaltar es que:

$$\Delta D \neq \Delta P$$

Por ejemplo, el número de líneas de resolución horizontal que proporciona el sistema de Vídeo 8 mm. es de aproximadamente 250, y no podrá mejorarse sino cambiando de sistema, por ejemplo Hi-8 con más de 400. Podremos mejorar algún sector de la producción, pero existirán algunos aspectos inmodificables debido a la propia naturaleza de los componentes técnicos.

La ineludible inecuación

Es una realidad que apenas si se dispone de tiempo durante la jornada escolar como para implicarse a fondo en investigaciones pedagógicas a partir del Vídeo. En este sentido convendría recordar a las distintas Administraciones competentes que los voluntarismos altruistas tienden naturalmente a extinguirse por elementales principios de supervivencia y equilibrio psicoafectivo. Siendo así, que casi cuanto se ha ido proponiendo a lo largo del presente artículo requiere de una inversión de tiempo extraescolar que en muchos casos repercute no sólo en el propio profesor sino, y esto es obvio, en quienes le acompañan en su vida privada.

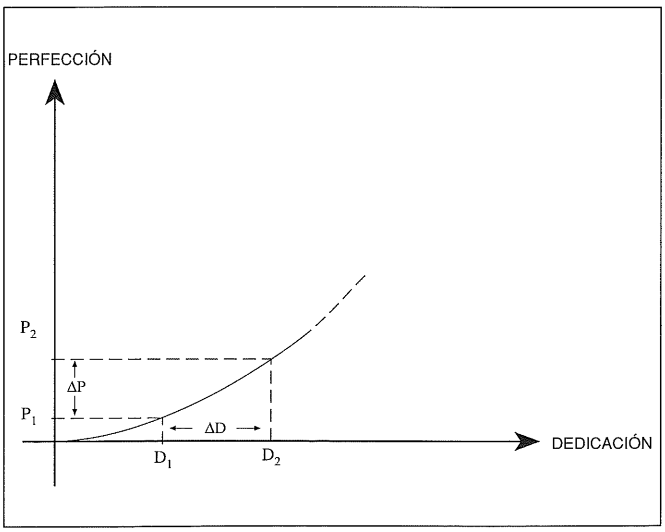


Fig. 5. Curva Dedicación-Perfección

Pensando en estos últimos (entiéndase en los géneros masculino y femenino, según sea el caso), sufridores en parte de estas vicisitudes, es por lo que debe plantearse la ineludible inecuación:

$$\Delta D \leq \Delta C$$

Donde:
ΔD = Aumento de la dedicación
ΔC = Incremento compensación compañero/a

Curvas de la post-producción y neutralización

Es frecuente que al concluir el proceso comiencen los críticos comentarios de quienes nos rodean, algunos mejor intencionados que otros, agrios y dulces, directos e indirectos, audibles e insonoros, etc. La disposición inteligente debiera ser siempre receptiva por todo lo cierto que pudiese haber y que sin lugar a dudas incidiría favorablemente en posteriores realizaciones, evitándonos caer en los mismos errores. Sin embargo y dadas las características del ser humano, pudiera ocurrir que, al margen del planteamiento teórico inicial, conforme el número de críticas fuese aumentado también lo hiciera el nivel depresivo de quien correspondiese. Posiblemente, se llegaría a un máximo, a partir del cual no tendrían incidencia alguna las nuevas críticas (Fig. 6).

Para evitar una previsible desagradable experiencia como la anterior, habría de aplicarse la denominada curva de neutralización (Fig. 7), la cual consiste simplemente en inyectar en los momentos precisos las dosis adecuadas de autoestima, las cuales, irían cancelando los negativos efectos que potencialmente pudieran haberse generado.

Hipérbola valorativa

La hipérbola equilátera, según se desprende de la Fig. 8, ha resultado ser la idónea para relacionar la hipervaloración de una producción con la experiencia que progresivamente va acumulándose. Y es que ocurre que, mientras menos expe-

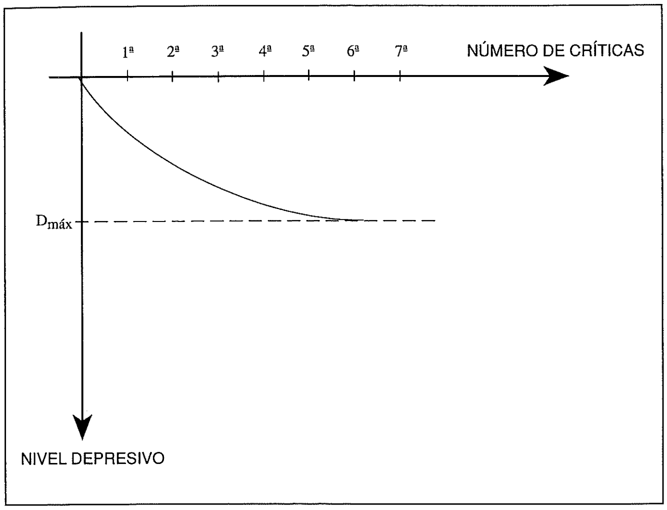


Fig. 6. Curva de la Post-Producción

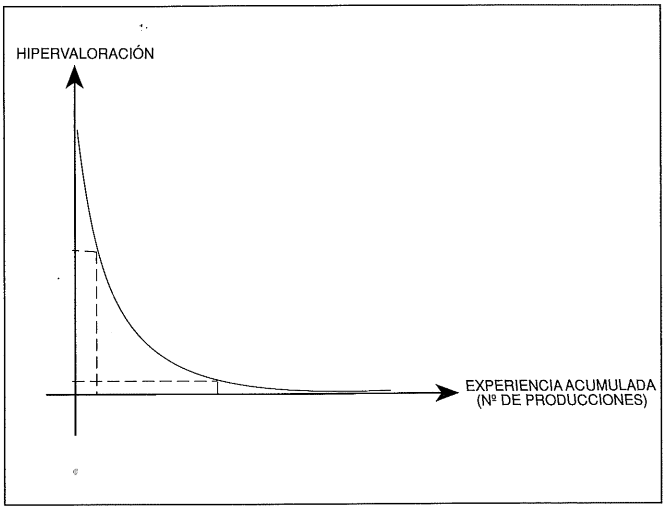


Fig. 8. Hipérbola valorativa

riencia en producciones se tiene, más se autovaloran éstas, de tal manera que con el tiempo las tendencias hipervalorativas se van amortiguando.

Ley Universal de la producción videográfica educacional o Ley REI

A modo de epílogo de cuanto se ha dicho y en un intento por enunciar una ley universal, podemos formular:

$$\frac{\text{RESULTADOS}}{\text{ESFUERZOS INVERTIDOS}} << 1$$

De donde la Ley REI resulta inmediata:

$$\boxed{\frac{\text{R}}{\text{E. I.}} << 1}$$

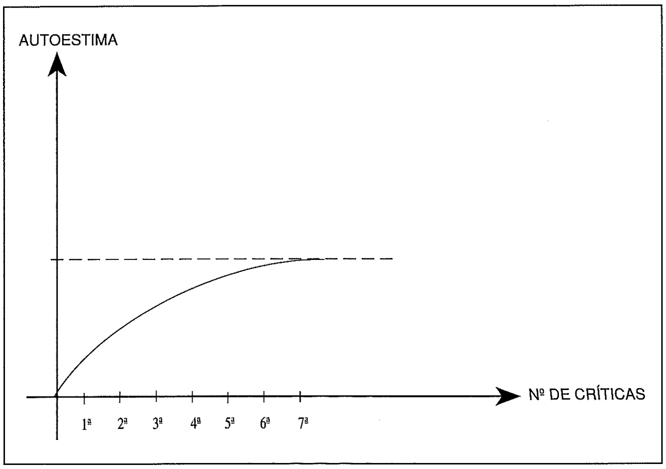


Fig. 7. Curva de la Neutralización

Bibliografía

* COMPARATO D. (1989). **El guión. Arte y técnica de escribir para cine y televisión.** Madrid, Instituto Oficial de Radio y Televisión.

* COPPEN H. (1982). **Utilización didáctica de los medios audiovisuales.** Madrid, Anaya.

* CHION M. (1988). **Cómo se escribe un guión.** Madrid, Cátedra.

* FERRÉS J. (1992). **Vídeo y educación.** Barcelona, Paidós.

* FERRÉS J. (1988). **Cómo integrar el vídeo en la escuela.** Barcelona, CEAC (aula práctica).

* GARCÍA S. J.L. (1987). **Lenguaje audiovisual.** Madrid, Alhambra.

* HERNÁNDEZ C. P. (1990). **Imagen y sonido.** Madrid, Alhambra.

* KAMMER B. (1992). **Teoría y práctica del vídeo.** Barcelona, Martínez Roca.

Ismael Roldán Castro
I. F.P. Virgen de los Reyes. Sevilla

Fundamentos lógicos de la Programación Declarativa

José F. Quesada Moreno

El objetivo del artículo es el estudio de los fundamentos lógicos que están en la base de gran cantidad de sistemas de razonamiento automático, y que suponen una estrategia computacionalmente viable para la demostración de teoremas o el diseño de motores inferenciales (Prolog). En concreto se presenta la forma clausal, en tanto que formalismo para la representación de conocimiento, y el principio de resolución, como mecanismo inferencial que asegura la completud y corrección lógicas.

Lógica y Programación

La *programación de ordenadores* incluye un amplio espectro de técnicas, metodologías, etc., centradas en torno al problema que supone la implementación computacional de sistemas que permitan la resolución automática de determinados tipos de problemas. Esta concepción nos retrotrae inmediatamente hasta el concepto de *algoritmo*, entendido como la especificación formal del proceso que dirige la resolución y las estructuras de datos que intervienen en ella. A partir de estos conceptos se puede entender un *lenguaje de programación* como un formalismo que rige las reglas sintácticas y semánticas necesarias para la implementación computacional de algoritmos, o de forma similar, y siguiendo el modelo propuesto en [DERSHEM-90], un lenguaje de programación es un lenguaje cuya gramática ha sido diseñada específicamente para que una persona pueda expresar formalmente el proceso que un ordenador deberá seguir para resolver un problema.

Esta definición pone de manifiesto la intervención de múltiples factores en el proceso de diseño de un lenguaje de programación, entre los que destacan: *la persona*, que idea el algoritmo y lo codifica; *el ordenador*, en tanto que plataforma física y lógica que ejecuta automáticamente las órdenes programadas; *el problema*, cuya arquitectura conceptual puede verse favorecida o incluso requerir determinados aspectos del formalismo para su implementación; y por último, *el proceso* mismo de resolución. La prioridad de cada uno de estos elementos en el diseño de un lenguaje determina otras tantas cuatro metodologías o paradigmas básicos de la programación, como son la *programación procedimental* o imperativa (cuando se da mayor importancia a la perspectiva de la arquitectura del ordenador), la *orientación lógica* o programación declarativa (que pondera la perspectiva de la persona), la *programación funcional* (que asume el punto de vista del proceso) y la *orientación a objetos* (donde el foco de interés es el problema real).

Este enfoque nos permite caracterizar a los lenguajes declarativos por su interés en la dotación al programador de un entorno lo más cercano posible a los esquemas de razonamiento que son usados comúnmente por los hombres en la solución de problemas. A otro nivel, y por comparación con el paradigma imperativo, la programación declarativa se interesa por el *qué hacer* y no por el *cómo hacer*.

La perspectiva que caracteriza a la programación declarativa y por extensión a los denominados lenguajes lógicos de programación[1] genera interesantes consecuencias tanto a nivel computacional como de aplica-

---

1 Los lenguajes lógicos de programación son una subclase de los lenguajes declarativos basados en la lógica simbólica, dirigidos por el objetivo, aún no alcanzado, de programar en lógica «pura».

ción, destacando ámbitos como la investigación en torno a la especificación de lenguajes formales, el procesamiento del lenguaje natural, el estudio de teorías a un nivel formal (coherencia, consistencia, demostrabilidad, etc.), la simulación de procesos regidos por leyes, etc. Asimismo es destacable el enorme potencial de aplicabilidad didáctica de estos entornos, pues la misma concepción de los mismos permite una aproximación lógica y argumentativa a los problemas, con una sintaxis y una semántica muy próximas a los mismos campos de estudio, de forma que en la implementación computacional el principal factor de esfuerzo se centra en el estudio del problema a resolver más que en el mismo proceso de codificación del algoritmo o en el entorno para su implementación.

A pesar de su interés, el objetivo básico de este artículo no lo constituye la aplicabilidad de la orientación lógica de los lenguajes de programación, sino el estudio de los fundamentos lógicos de la programación declarativa, es decir, de un conjunto de técnicas lógicas que permiten el desarrollo de sistemas capaces de realizar razonamientos (y por tanto, argumentaciones y demostraciones) de una forma *automática*. El estudio de los fundamentos teóricos nos permitirá una visión más fundada acerca del funcionamiento de estos sistemas, y consecuentemente, de sus posibilidades y sus limitaciones.

En la próxima sección abordaremos el estudio del conocimiento declarativo a nivel computacional, lo que nos permitirá obtener un modelo básico de la orientación lógica a partir de la diferenciación entre motores de inferencias y bases de conocimiento. En la sección 3 se hará un repaso de la lógica de primer orden, cuya sintaxis se utilizará como fundamento conceptual y notacional y cuyo cálculo deductivo será el substrato para el estudio de la potencia argumentativa de los lenguajes lógicamente orientados. La sección 4 aborda la traducción de las fórmulas de la lógica de primer orden a la *forma clausal*, un formalismo que facilita su manipulación automática por parte del algoritmo inferencial que se estudia en la sección 5: el *principio de resolución*. La consecuencia lógica más importante de la forma clausal (en tanto que formalismo para la especificación del conocimiento) y el principio de resolución (como algoritmo deductivo) es que aseguran la *completud y corrección lógicas* a nivel de insatisfacibilidad. Es decir, todo conjunto de fórmulas lógicas bien formadas puede ser representado en forma clausal (de forma automática), y además, si en lógica de primer orden se puede demostrar un teorema a partir de un conjunto de axiomas, el principio de resolución asegurará que en un número finito de pasos se podrá demostrar la insatisfacibilidad entre el conjunto de axiomas y la negación del teorema (representados en forma clausal)[2].

Conocimiento Declarativo

Una de las características de la historia de la informática es la tendencia a la explicitación del conocimiento. Tendencia de la que dejan constancia el mismo paradigma de la orientación lógica en la programación, la aparición de disciplinas como la Ingeniería del Conocimiento o el basar la quinta generación de lenguajes de programación en el concepto de sistemas basados en el conocimiento.

En [GENESERETH-88] se propone una ya común distinción entre dos planteamientos generales de representación y utilización del conocimiento desde un punto de vista computacional: el conocimiento procedural o implícito almacenado en la misma secuencia de operaciones que constituyen un programa (Figura 1a) y el conocimiento declarativo o explícito que aparece en los programas como sentencias o *declaraciones explícitas de conocimiento*, con una clara e intuitiva interpretación semántica (Figura 1b).

```
InvierteMatriz (m, d)
int *m, d;
{
      int c1, c2, i;
      for (c1 = 0; c1 <d; c1++);
            for (c2=c1+1; c2<d; c2++);
            {
                  i=m [c1*d+c2];
                  m[c1*d+c2] *m[c2*d+c1];
                  m[c2*d+c1] = i;
            }
}
```

Figura 1a

```
derivada (X,X,1) :- !.
derivada (C,X,0) :- atomic (C).
derivada (U+V, X, DU+DV) :-
            derivada (U,X,DU) ,
            derivada (V,X,DV) .
derivada (U*V,X,DU*V+U*DV) :-
            derivada (U,X,DU) ,
            derivada (V,X,DV) .
```

Figura 1b

2 Siempre dentro de los límites que la tesis de Church impone a la decidibilidad de la lógica de primer orden.

A este nivel, como en la mayoría, la exclusividad suele ser perniciosa, y no se puede defender sin más ninguna de las alternativas. En general la metodología declarativa aumenta la flexibilidad y generalidad del planteamiento del problema, pero a costa de la eficiencia, que suele ser mayor en un planteamiento procedimental.

No obstante, para determinados ámbitos de problemas (y de forma específica para la Inteligencia Artificial) la orientación declarativa supone una serie de ventajas, como son la reutilizabilidad del conocimiento, la posibilidad de realizar inferencias sobre él, la facilidad de modificación, etc.

Las bases de conocimiento declarativas requieren, para su manipulación, sofisticados sistemas, computacionalmente complejos, que permitan realizar argumentaciones (obtención de conocimiento) a partir de la información disponible. Estos sistemas se denominan *motores de inferencia* y se basan en la implementación de una parte del cálculo deductivo que asegure la corrección y completud lógicas.

Estas consideraciones nos permiten obtener un primer esquema de un entorno típico de programación declarativa, formado por: (a) Un lenguaje formal desde el que se lleva a cabo la especificación de las bases de conocimiento; y (b) Un motor inferencial que puede manipular la base de conocimiento para distintos fines, pero que en última instancia se basa en su potencia deductiva o de razonamiento.

Formalismos de la Lógica de Primer Orden

Nuestro interés por la lógica se centrará en el estudio de los formalismos, en tanto que conjuntos de signos y combinaciones correctas de éstos. Más específicamente nos centraremos en los formalismos de primer orden, caracterizados por la restricción de la cuantificación a los términos.

Un formalismo no es más que un mero juego de signos susceptible de múltiples interpretaciones, pero que en sí mismo no incluye ninguna interpretación; estas mismas son parte de la semántica, y su inclusión convierte al formalismo en un lenguaje formal. En nuestro caso, y por motivos de brevedad, presentaremos un formalismo para la lógica de primer orden junto con la interpretación común. Un tratamiento más exhaustivo del tema se puede encontrar en [CUENA-85] y [MOSTERÍN-83].

Alfabeto de los formalismos

Un formalismo lógico es en realidad un lenguaje, y por tanto su especificación requiere en primer lugar la explicitación del alfabeto. Para los formalismos de la lógica de primer orden se distinguen dos tipos de signos: los comunes a todos los formalismos y los peculiares de cada uno.

Son símbolos comunes las variables y los signos lógicos. Las variables constituyen un conjunto recursivamente numerable de símbolos distintos; para referirnos a ellas utilizaremos las últimas letras del alfabeto en minúsculas: $x, y, z, \ldots$ Respecto al conjunto de signos lógicos es necesario tener en cuenta que no tiene por qué ser fijo, sino que, de hecho, distintos conjuntos pueden asegurar la misma potencia expresiva, aunque no las mismas economía y concisión. En nuestro caso, utilizaremos los cinco conectores ya clásicos (negador: $\neg$, conjuntor: $\wedge$, disyuntor: $\vee$, condicionador: $\rightarrow$, y bicondicionador: $\leftrightarrow$) y los dos cuantificadores (generalizador: $\forall$ y particularizador: $\exists$). La misma potencia expresiva se puede conseguir sólo con el operador NAND (negación del conjuntor) y el generalizador.

Serán específicos de cada formalismo las constantes individuales, los functores y los relatores, pudiendo existir o no, y en caso de existir pudiendo ser su número variable, lo que dependerá del formalismo en sí.

Las constantes individuales se utilizarán para referirse a objetos del mundo (teniendo en cuenta que lo que se entiende por objeto es dependiente de la conceptualización). Las representaremos con las primeras letras del alfabeto en minúsculas, numeradas si es necesario: $a, b, c, \ldots$

Los functores equivalen formalmente al concepto matemático de función, mediante el que se designa unívocamente un objeto a partir de un conjunto de términos (por ejemplo, *la suma de 3 y 4* designa el número 7). La aridad de un functor indica el número de términos que requiere para completar su designación. Usualmente utilizaremos las letras $f, g, h, \ldots$ como functores, con superíndices indicando su aridad si resulta necesario par eliminar ambigüedades.

Los relatores o predicados combinan términos designando relaciones entre ellos que podrán ser verdaderas o falsas (por ejemplo, *4 es mayor que 3* es una relación verdadera, es decir, se satisface por la interpretación matemática usual de todos los conceptos implicados). De forma similar a los functores se define la aridad de cada relator; para representarlos utilizaremos las letras *P, Q, R, ...*, provistas si es necesario de subíndices de diferenciación y superíndices designando su aridad.

Gramática de los formalismos

No todas las combinaciones posibles de los signos de un formalismo serán correctas. En concreto, se considerarán expresiones (filas de signos correctas) las que se pueden formar de acuerdo con las siguientes reglas:

1.- Cualquier variable es un término (variable).
2.- Cualquier constante individual es un término (constante individual).
3.- Si $t_1,...,t_n$ son términos y f^n un functor n-ario, entonces $f^n t_1,...,t_n$ será un término (término functorial).
4.- Si $t_1,...,t_n$ son términos y P^n es un relator, entonces $P^n t_1,...,t_n$ será una fórmula (fórmula atómica o predicativa).
5.- Si α es una fórmula, entonces $-\alpha$ es una fórmula (negación).
6.- Si α y β son fórmulas, entonces $\alpha\wedge\beta$, $\alpha\vee\beta$, $\alpha\rightarrow\beta$, $\alpha\leftrightarrow\beta$ son también fórmulas (respectivamente, conjunción, disyunción, condicional y bicondicional).
7.- Si α es una fórmula, entonces para toda variable x, $\forall x\ \alpha$ y $\exists x\ \alpha$ son fórmulas (generalización y particularización, respectivamente).

- Filas de signos
  - Expresiones (Correctas)
    - Términos
      - Variables
      - Constantes individuales
      - Términos functoriales
    - Fórmulas
      - Predicativas
      - Negaciones
      - Conjunciones
      - Disyunciones
      - Condicionales
      - Bicondicionales
      - Generalizaciones
      - Particularizaciones
  - Incorrectas

Cálculo deductivo

Dentro de un formalismo se pueden introducir determinadas relaciones entre sus fórmulas. No obstante, a la lógica sólo le interesan algunas de estas relaciones, en concreto, las que aseguran la preservación de la verdad, es decir, las relaciones de deducibilidad.

El conjunto de estas reglas de inferencia o deducción forman un cálculo deductivo (junto con las reglas que rigen la construcción de las deducciones). Obviamente existen muchos cálculos deductivos que aseguran la misma capacidad inferencial. Básicamente se distinguen dos modelos: los basados en reglas de inferencia o sistemas de deducción natural, introducidos por Gerhardt Gentzen en los años 30 y los sistemas axiomáticos, en los que a partir de un número muy reducido de reglas de inferencia (incluso en ocasiones una sola, como puede ser *modus ponens* o eliminación del disyuntor) aseguran la misma potencia deductiva mediante la inclusión de esquemas axiomáticos que de alguna forma traducen el resto de las reglas de inferencia.

Lo más importante para un cálculo deductivo es que asegure, dentro de un formalismo (y una teoría es un formalismo), dos propiedades fundamentales: (a) *Corrección*: toda fórmula (teorema) deducida a partir de axiomas verdaderos debe ser verdadera; y (b) *Completud*: toda fórmula o teorema verdadero dentro del formalismo debe poder obtenerse mediante el cálculo deductivo, es decir, debe ser posible obtener una deducción del teorema utilizando el aparato argumentativo o inferencial del cálculo.

En esta sección se ha presentado sólo la parte de la lógica de primer orden que interesa a nuestros objetivos; en las siguientes secciones se abordarán los problemas que surgen durante la implementación computacional de sistemas inferenciales. El primer y quizás principal punto a tener en cuenta es la complejidad que supondría la simulación de un cálculo deductivo con múltiples reglas; asimismo la sintaxis presentada no puede ser manipulada fácilmente por un ordenador. Por lo tanto, los objetivos primordiales serán la obtención de un formalismo para la representación de conocimiento y un cálculo deductivo lo más simplificados posibles pero que aseguren la potencia expresiva de los formalismos, por un lado, y la corrección y completud del sistema, por otro.

Una posibilidad lo constituyen la forma clausal, en tanto que formalismo para la representación, y el principio de resolución, que permite realizar inferencias sobre cláusulas basándose en la determinación de su contradicción o insatisfacibilidad.

Forma clausal

Forma clausal de las sentencias de la lógica de primer orden

La representación clausal de una fórmula está constituida por una o más cláusulas, cada una de las cuales es un elemento de la *forma normal conjuntiva*, es decir, la forma clausal es una conjunción de cláusulas, cada una de las cuales es una disyunción de fórmulas atómicas (predicativas) o negaciones de fórmulas atómicas.

Todas las variables que aparezcan se sobreentenderá que están dentro del alcance de un cuantificador universal, de forma que la eliminación de cuantificadores existenciales requerirá la utilización de constantes y/o funciones de Skolem.

A continuación se presentará un algoritmo, que puede ser implementado computacionalmente, y que permite la traducción de cualquier fórmula correcta de la lógica de primer orden a su forma clausal.

Se utilizarán dos ejemplos para ilustrar el proceso: la fórmula α conceptualiza la univocidad de la relación de maternidad (a es madre de b se escribirá como Mab); la fórmula β es una definición de la propiedad simétrica para relaciones (el par ordenado formado por los elementos a y b se construirá mediante el functor $<\,,\,>$: $<a,b>$).

$$\alpha \equiv \forall xyz\,(Mxz \wedge Myz \rightarrow x = y)$$
$$\beta \equiv \forall r\,(Sim\ r \leftrightarrow \forall xy\,(<x,y> \in r \rightarrow <y,x> \in r))$$

a) ***Eliminación de condicionales y bicondicionales***: Se eliminarán estos conectores lógicos teniendo en cuenta que, para cualesquiera dos fórmulas Φ y Ψ:

$\Phi \rightarrow \Psi$ se puede reescribir como $\neg\Phi \vee \Psi$
$\Phi \leftrightarrow \Psi$ se puede reescribir como $(\neg\Phi \vee \Psi) \wedge (\Phi \vee \neg\Psi)$

$$\alpha \equiv \forall xyz\,(\neg(Mxz \wedge Myz) \vee x = y)$$
$$\beta \equiv \forall r\,((\neg Sim\ r \vee \forall xy\,(<x,y> \notin r \vee <y,x> \in r)) \wedge$$
$$(Sim\ r \vee \neg\forall xy\,(<x,y> \notin r \vee <y,x> \in r)))$$

(b) ***Eliminación del negador sobre fórmulas no atómicas***, basándose en las siguientes reglas: para cualesquiera fórmulas Φ y Ψ y cualquier variable x:

$\neg(\Phi \wedge \Psi)$	se puede reescribir como	$\neg\Phi \vee \neg\Psi$
$\neg(\Phi \vee \Psi)$	se puede reescribir como	$\neg\Phi \wedge \neg\Psi$
$\neg\forall x\Phi)$	se puede reescribir como	$\exists x\neg\Phi$
$\neg\exists x\Phi$	se puede reescribir como	$\forall x\neg\Phi$
$\neg\Phi$	se puede reescribir como	Φ

$$\alpha \equiv \forall xyz\,(\neg Mxz \vee \neg Myz \vee x = y)$$
$$\beta \equiv \forall r\,((\neg Sim\ r \vee \forall xy\,(<x,y> \notin r \vee <y,x> \in r)) \wedge$$
$$(Sim\ r \vee \exists xy\,(<x,y> \in r \wedge <y,x> \notin r)))$$

(c) ***Estandarización de variables***, de forma que una misma variable no aparezca en varios cuantificadores dentro de la misma fórmula.

$$\alpha \equiv \forall xyz\,(\neg Mxz \vee \neg Myz\,) \vee x = y)$$
$$\beta \equiv \forall r\,((\neg Sim\ r \vee \forall xy\,(<x,y> \notin r \vee <y,x> \in r)) \wedge$$
$$(Sim\ r \vee \exists uv\,(<u,v> \in r \wedge <v,u> \notin r)))$$

d) ***Eliminación de los cuantificadores existenciales***. Desde un punto de vista lógico, la presencia de un cuantificador existencial ($\exists x\ \Phi$) asegura la existencia de al menos un objeto que cumple la condición expresada por Φ. Para eliminar estas cuantificaciones se utilizará el procedimiento de *skolemización*, distinguiéndose dos casos:

En primer lugar, si el cuantificador existencial no se encuentra dentro del alcance de ningún generalizador se puede sustituir la variable por una constante (constante de Skolem) y prescindir del particularizador, lo que nos permite pasar de $\exists x(Px \wedge Qx)$ a $(Pa \wedge Qa)$, siempre que a no haya sido utilizada previamente.

En segundo lugar, si el particularizador está dentro del alcance de uno o más generalizadores, la variable cuantificada existencialmente se sustituirá por un término functorial, donde el functor será uno nuevo (función de Skolem) previamente no utilizado, cuya aridad coincidirá con el número de generalizadores que le afectan y los términos sobre los que se aplica el functor serán las mismas variables universalmente cuantificadas. Por ejemplo, si R es el predicado *ser un número real*, tendrá sentido reescribir

$$\forall xy\,(Rx \wedge Ry \wedge x<y \rightarrow \exists z\,(Rz \wedge z>x \wedge z<y))$$

como

$$\forall xy\ (Rx \wedge Ry \wedge x<y \rightarrow (Rfxy \wedge fxy>x \wedge fxy<y))$$

Es decir, podemos construir para cada par de números reales *x* e *y* un nuevo número *fxy* que es menor que *x* y mayor que *y*. El nuevo functor de Skolem *f* designa a partir de cada par de números ese otro intermedio.

$\alpha \equiv \forall xyz\ (\neg Mxz \vee \neg Myz) \vee x = y)$
$\beta \equiv \forall r\ (\ (\neg Sim\ r \vee \forall xy\ (<x,y> \notin r \vee <y,x> \in r)) \wedge$
$(Sim\ r \vee (<f_1r, f_2r> \in r \wedge <f_2r, f_1r> \notin r))$

donde f_1 y f_2 son dos nuevos functores introducidos para eliminar respectivamente las variables u y v, cuantificadas existencialmente.

(e) ***Eliminación de los cuantificadores universales***: simplemente se eliminarán todos los cuantificadores universales dando por sobreentendido que todas las variables que aparecen en forma clausal están cuantificadas universalmente.

$\alpha \equiv \neg Mxz \vee \neg Myz \vee x = y$
$\beta \equiv (\neg Sim\ r \vee (<x,y> \notin r \vee <y,x> \in r) \wedge$
$(Sim\ r \vee <f_1r, f_2r> \in r \wedge <f_2r, f_1r> \notin r)$

(f) ***Forma normal conjuntiva***: se trata de obtener la fórmula como conjunción de disyunciones, para lo que se aplica la siguiente regla

$\Phi \vee (\Psi \wedge \Omega)$ se reescribe como $(\Phi \vee \Psi) \wedge (\Phi \vee \Omega)$

$\alpha \equiv \neg Mxz \vee \neg Myz \vee x = y$
$\beta \equiv (\neg Sim\ r \vee (<x,y> \notin r \vee <y,x> \in r) \wedge$
$(Sim\ r \vee <f_1r, f_2r> \in r) \wedge (Sim\ r \vee <f_2r, f_1r> \notin r)$

(g) ***Representación en forma clausal***. Cada una de las conjunciones obtenida será una cláusula construida como el conjunto (desordenado) de sus disyuntores. Así por ejemplo, a partir de $(\Phi \vee \Psi) \wedge (\Phi \vee \Omega)$ se obtendrían las dos cláusulas $\{\Phi,\Psi\}$ y $\{\Phi,\Omega\}$.

$\alpha \equiv \{\neg Mxz \vee \neg Myz, x = y\}$
$\beta \equiv \{\neg Sim\ r, <x,y> \notin r, <y,x> \in r\}$
$\{Sim\ r, <f_1r, f_2r> \in r\}$
$\{Sim\ r, <f_2r, f_1r> \notin r\}$

Los elementos o disyuntores de una cláusula serán siempre fórmulas atómicas o negaciones de éstas. Para referirse a ambos tipos de fórmulas se utiliza el término *literales*.

Algunos autores añaden un paso adicional mediante el que se asegura que cada variable aparezca en una sóla cláusula, es decir, se evita la aparición de una misma variable en más de una cláusula. El añadir este paso simplifica la definición del algoritmo de resolución.

Interpretación de las cláusulas

Cada una de las cláusulas se define como una disyunción de literales. La principal consecuencia lógica es que una cláusula será verdadera si al menos alguno de los literales lo es, o de forma equivalente, no puede ocurrir que todos los literales de una cláusula verdadera sean falsos.

Esto nos permite obtener una interpretación bastante intuitiva del comportamiento lógico de una cláusula: la negación de todos los literales menos uno de una cláusula verdadera asegura la verdad del literal no negado.

Por ejemplo, si partimos de la cláusula $\{\neg Mxz, \neg Myz, x=y\}$ y si negamos los dos primeros literales, es decir, afirmamos *Mxz* y *Myz*, entonces forzosamente deberá cumplirse $x=y$. De forma similar, si negamos el primer y tercer literales: *Mxz* y $x \neq y$, podemos concluir que $\neg Myz$.

El principio de resolución

Este principio fue introducido inicialmente por Robinson en 1965 [ROBINSON-65, ROBINSON-68, KOWALSKY-79]. Está caracterizado básicamente como una regla universal de resolución con unificación, y pretende dar cuenta de la derivación automática de teoremas de la lógica de primer orden, dentro de las limitaciones que impone la indecidibilidad en este ámbito.

Unificación

Una unificación es un conjunto de asociaciones entre variables y términos que permite la identificación entre dos expresiones. Así por ejemplo las dos expresiones *Mxz* y *Mab* son unificables (identificables) si sobre la primera se aplica la unificación $\{x/a, z/b\}$. El resultado de aplicar una sustitución λ sobre una expresión Φ se denomina *factor* de Φ y se escribe como $\Phi\lambda$.

La decisión acerca de si dos expresiones son unificables y en caso de que sí lo sean, la obtención de unificadores, son procesos relativamente sencillos, para los que se han definido algoritmos implementables en ordenador. En concreto se han diseñado procedimientos para la obtención automática del unificador más general de dos expresiones. Por cuestiones de espacio no se presenta ninguno de estos algoritmos y se remite al lector interesado a [CUENA-85] y [GENESERETH-88] donde se presentan en detalle.

El principio de resolución

Este principio se basa en la regla lógica de eliminación del disyuntor:

$$\frac{\Phi \vee \Psi \qquad \neg\Phi}{\Psi} \qquad\qquad \frac{\{\Phi,\Psi\} \qquad \{\neg\Phi\}}{\{\Psi\}}$$

Formalmente, el principio de resolución afirma que si tenemos dos cláusulas Φ y Ψ, y existe un literal α en un factor Φ' de Φ y un literal $\neg\beta$ en algún factor Ψ' de Ψ, y entre α y β se puede obtener un unificador (y por tanto el unificador más general λ) entonces podremos obtener una nueva cláusula de la siguiente forma:

$$\frac{\begin{array}{ll}\Phi & (\text{donde } \alpha \in \Phi') \\ \Psi & (\text{donde } \beta \in \Psi' \text{ y } \alpha\lambda \equiv \neg\beta\lambda)\end{array}}{((\Phi'-\{\alpha\}) \cup (\Psi'-\{\beta\}))\lambda}$$

El algoritmo de resolución necesita hacer uso de un mecanismo de *simplificación* que se encargue de eliminar de una cláusula dos literales idénticos, o identificables mediante algún unificador.

Razonamiento mediante el principio de resolución

¿Qué sucedería si mediante el principio de resolución obtuviéramos una cláusula vacía? Si volvemos a la interpretación lógica de las cláusulas, sólo podemos obtener una cláusula vacía si podemos negar todos los elementos de la cláusula, lo cual está en contradicción con la definición dada para las cláusulas.

La consecuencia lógica de este planteamiento es que si un conjunto de cláusulas puede generar mediante resolución una cláusula vacía entonces el conjunto original de cláusulas era autocontradictorio. La aplicación de este planteamiento para el razonamiento es inmediato: si queremos demostrar un teorema a partir de un conjunto de axiomas, representaremos en forma clausal los axiomas y la negación del teorema e intentaremos obtener la contradicción en la forma de una cláusula vacía, proceso que es denominado *refutación por resolución.*

Este enfoque permite asegurar la completud y corrección lógicas del principio de resolución en función de la insatisfacibilidad:

(a) *Corrección*: si existe una deducción por resolución de una cláusula a partir de un conjunto de cláusulas, entonces este conjunto de cláusulas implica lógicamente la cláusula inicial.

(b) *Completud*: si un conjunto de cláusulas es insatisfacible, entonces existe una deducción por resolución de la cláusula vacía a partir del conjunto inicial de cláusulas.

Un ejemplo para la teoría de conjuntos

A continuación intentaremos demostrar el teorema

$$\beta \equiv \forall r\ (Sim\ r \wedge Tras\ r \rightarrow Refl\ r)$$

según el cual toda relación simétrica y transitiva es reflexiva.

Para ello partiremos de los siguientes axiomas

$$\begin{array}{l}\alpha_1 \equiv \forall r\ (Refl\ r \leftrightarrow \forall x'(x \in dr \rightarrow \\ \quad \rightarrow <x,x> \in r)) \\ \alpha_2 \equiv \forall r\ (Sim\ r \leftrightarrow \forall xy'(<x,y> \in \\ \quad \in d \rightarrow <y,x> \in r)) \\ \alpha_3 \equiv \forall r\ (Tras\ r \leftrightarrow \forall xyz'(<x,y> \in \\ \quad \in r \wedge <y,z> \in r \rightarrow <x,z> \in r))\end{array}$$

En α_1, *dr* representa el conjunto de todos los elementos que pertenecen al dominio o codominio de la relación *r*. Para que podamos manipular este axioma será necesario introducir uno nuevo:

$$\alpha_4 \equiv \forall r\, x(\, x \in dr \leftrightarrow \exists y\,'(<x,y> \in r \vee <y,x> \in r\,))$$

En primer lugar llevaremos a cabo la transcripción clausal de los axiomas y la negación del teorema a demostrar, numerando cada una de las cláusulas obtenidas e indicando para cada una de ellas su procedencia. Los functores f_n corresponden a las diferentes funciones de Skolem introducidas, y *a* es una constante de Skolem introducida en la transcripción de la negación del teorema a demostrar.

1	$\{\neg Refl\ r,\ x \notin dr,\ <x,x> \in r\}$	(α_1)
2	$\{Refl\ r,\ f_1 r \in dr\}$	(α_1)
3	$\{Refl\ r,\ <f_1 r\ ,f_1 r> \notin r\}$	(α_1)
4	$\{\neg Sim\ r,\ <x,y> \notin r,\ <y,x> \in r\}$	(α_2)
5	$\{Sim\ r,\ <f_2 r\ ,f_3 r> \in r\}$	(α_2)
6	$\{Sim\ r,\ <f_3 r\ ,f_2 r> \notin r\}$	(α_2)
7	$\{\neg Trans\ r,\ <x,y> \notin r,\ <y,z> \notin r,\ <x,z> \in r\}$	(α_3)
8	$\{Trans\ r,\ <f_4 r\ ,f_5 r> \in r\}$	(α_3)
9	$\{Trans\ r,\ <f_5 r\ ,f_6 r> \in r\}$	(α_3)
10	$\{Trans\ r,\ <f_4 r\ ,f_6 r> \notin r\}$	(α_3)
11	$\{x \notin dr,\ <x,f_7 x> \in r,\ <f_7 x,x> \in r\}$	(α_4)
12	$\{x \in dr,\ <x,u> \notin r\}$	(α_4)
13	$\{x \in dr,\ <u,x> \notin r\}$	(α_4)
14	$\{Sim\ a\}$	$(\neg\beta)$
15	$\{Trans\ a\}$	$(\neg\beta)$
16	$\{\neg Refl\ a\}$	$(\neg\beta)$

Y a continuación aparece una demostración por refutación:

17	$\{<x,y> \notin a,\ <y,x> \in a\}$	$(4,14)\ \{r/a\}$
18	$\{<x,y> \notin a,\ <y,z> \notin a,\ <x,z> \in a\}$	$(7,15)\ \{r/a\}$
19	$\{f_1 a \in da\}$	$(2,16)\ \{r/a\}$
20	$\{<f_1 a,f_1 a> \notin a\}$	$(3,16)\ \{r/a\}$
21	$\{<f_1 a,f_7 f_1 a> \in a,\ <f_7 f_1 a,f_1 a> \in a\}$	$(11,19)\ \{x/f_1 a,r/a\}$
22	$\{<f_1 a,f_7 f_1 a> \in a\}$	$(17,21)\ \{x/f_7 f_1 a,y/f_1 a\}$
23	$\{<f_7 f_1 a,f_1 a> \in a\}$	$(12,22)\ \{x/f_1 a,y/f_7 f_1 a\}$*
24	$\{<f_7 f_1 a,z> \notin a,\ <f_1 a,z> \in a\}$	$(18,22)\ \{x/f_1 a,y/f_7 f_1 a\}$
25	$\{<f_1 a,f_1 a> \in a\}$	$(23,24)\ \{z/f_1 a\}$
26	$\{\ \}$	$(20,25)$

* Se aplica simplificación, pues el resultado de la unificación son dos literales idénticos.

Aplicación para la búsqueda de soluciones

La capacidad de demostración de teoremas puede ser utilizada para encontrar soluciones que cumplen una serie de condiciones.

Supongamos, por ejemplo, que los relatores *M* y *A* representan, respectivamente, las relaciones *ser madre de* y *ser abuela de*, y que dispone de la siguiente información (axiomas):

$$\alpha_1 \equiv \forall xyz\ (Mxy \wedge Myz\,) \rightarrow Axz)$$
$$\alpha_2 \equiv Mab$$
$$\alpha_3 \equiv Mbc$$

y nos interesa conocer *los nietos* de *a*, es decir, nuestra pregunta será *Aau*, donde *u* es la variable que referencia la solución.

En primer lugar obtendremos la representación clausal de los axiomas, y añadiremos como teorema a demostrar el presentado en la línea 4. A continuación aparece el desarrollo del algoritmo de resolución, que concluye presentando *c* como solución a la interrogación planteada:

1	$\{\neg Mxy,\ \neg Myz,\ Axz\}$	(α_1)
2	$\{Mab\}$	(α_2)
3	$\{Mbc\}$	(α_3)
4	$\{\neg Aau,\ Su\}$	(*teorema a demostrar*)
5	$\{\neg Mbz,\ Aaz\}$	(1,2)
6	$\{Aac\}$	(2,5)
7	$\{Sc\}$	(4,6)

En este caso, el procedimiento de demostración no termina con la cláusula vacía sino con una cláusula que contenga un único literal formado por el relator S.

Estrategias de resolución

Desde el punto de vista computacional el principal problema que aparece es la definición de una estrategia que dirija el proceso de resolución.

En definitiva el principio de resolución nos permite recorrer todo el espacio del problema (el grafo generado) y lo que nos interesará será disponer de algún control que nos asegure la mayor rapidez en la obtención de la demostración.

De esta forma convertimos la demostración en un claro problema de búsqueda (véase [BARR-81]) para el que por tanto son aplicables los numerosos sistemas o algoritmos diseñados, destacando entre otras las estrategias de mayor profundidad, de menor distancia, la resolución simple, la resolución lineal, la resolución dirigida (basada en la utilización de heurísticas) o la satisfacción de restricciones.

Bibliografía

[BARR-81] BARR, A. y FEIGENBAUM, E.A. (eds) (1981): **The Handbook of Artificial Intelligence**, Volumen 1. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

[CUENA-85] CUENA, J. (1985): **Lógica Informática**. Madrid, Alianza Informática.

[DERSHEM-90] DERSHEM, H.L. y JIPPING, M.J. (1990): **Programming Languajes: Structures and Models**. Belmont, California, Wadsworth Publishing Company.

[GENESERETH-88] GENESERETH, M.R. y NILSSON, N.J. (1988): **Logical Foundations of Artificial Intelligence**. Morgan Kaufmann Publishers Inc.

[KOWALSKY-79] KOWALSKI, R. (1979): **Logic for Problem Solving**. Elsevier Science Publishing Co. [Existe traducción al español: **Lógica, Programación e Inteligencia Artificial**. Díaz de Santos, 1986]

[MOSTERÍN-83] MOSTERÍN, J. (1983): **Lógica de primer orden**. Barcelona, Ariel.

[ROBINSON-65] ROBINSON, J.A. (1965): **A Machine Oriented Logic Based on Resolution Principle**. J. ACM 12 (Enero 1965), pp. 23-41

[ROBINSON-68] ROBINSON, J.A. (1968): **The Generalised Resolution Principle**. En DALE y MICHIE (edts): **Machine Intelligence 3**, Oliver and Boyd, Edinburg, 1968.

José F. Quesada Moreno
C.I.C.A. Sevilla

Diferencias de sexo y el aprendizaje de las Matemáticas

Victoria Sánchez García

En el artículo que presentamos se revisan las investigaciones y trabajos relacionados con el papel que desempeñan las diferencias de sexo en el aprendizaje de las Matemáticas. Después de señalar las distintas conjeturas que se han ofrecido como explicación a las diferencias en logros y expectativas, se destaca la influencia social y cultural: condicionantes sociales, influencias grupales, la propia estructura de las Matemáticas y la de la propia escuela y los profesores.

Introducción

El que publicaciones como el Informe Cockroft (1982) prestasen atención específica al problema que plantea la diferencia de sexos en relación con el aprendizaje de las Matemáticas da una idea del interés que este tema ha despertado en algunos países europeos.

Refiriéndose a los resultados obtenidos en el Reino Unido, el informe indicaba que:

> "Recientemente se viene prestando una atención cada vez mayor al hecho de que, a juzgar por los resultados de los exámenes oficiales, el nivel general de conocimientos matemáticos en las chicas es significativamente inferior al de los chicos" (pág. 76 de la versión en español),

Señalando que esta situación se podía generalizar a otros países, como se puso de manifiesto en el IV Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemáticas celebrado en Berkeley en 1980. El mismo Informe, en su Apéndice 2, recoge información de distintos estudios y revisiones en los que se señalan diferencias entre los sexos en relación con el rendimiento matemático.

En el citado Informe se recogen trabajos como el de Ward (1979), en el que se analizaron las respuestas dadas por 2.296 niños de diez años a un test que planteaba distintas cuestiones. Estos trabajos, aunque no iban específicamente dirigidos a estudiar variaciones entre niños y niñas, indicaron de alguna manera diferencias en algunas respuestas. El rendimiento en las preguntas relacionadas con medida, visualización espacial y resolución de problemas.

Sin embargo, al ser presentado posteriormente el mismo cuestionario a un grupo de profesores, para que ordenaran las preguntas en relación a la importancia que les atribuían, se vio que aquellas cuestiones en las que las niñas eran significativamente mejores eran precisamente las consideradas como más relevantes por los profesores, lo que podía influir en los resultados obtenidos. Esto lleva a Shuard (1986) a indicar que tanto la situación como nuestra comprensión de ella ha cambiado desde la fecha en que los trabajos de Ward se llevaron a cabo, señalando que diferentes condicionamientos sociales podrían favorecer determinados estilos de enseñanza.

Otros trabajos recogidos fueron:

* distintas encuestas realiadas por el APU (Assesment of Perfomance Unit), que señalaron que las diferencias mayores no eran precisamente en los niveles de primaria, sino que era en la adolescencia (alrededor de los quince años) cuando esas diferencias se hacían más acusadas,

* los estudios llevados a cabo en los Estados Unidos por Fennema (1981), a partir de los resultados de la Evaluación Nacional del

Progreso Educativo (NAEP), correspondiente al año 1978, para alumnos de nueve, trece y diecisiete años. Estos estudios indicaron que, en relación con las Matemáticas, excepto en destrezas de cálculo en nueve y trece años, los resultados de los chicos superaron a los de las chicas, aumentando las diferencias en los aspectos geométricos y cuestiones relacionadas con perímetro, área y volumen.

No obstante, a pesar de la gran cantidad de investigaciones realizadas en los últimos veinte años relacionadas con los diferentes resultados y participación en tareas relacionadas con las Matemáticas, no hay un acuerdo ni en la extensión de tales diferencias ni en los factores que contribuyen a ellas. Además, las diferencias entre las muestras elegidas en los estudios y en las tareas planteadas hace difícil comparar resultados entre distintos países.

¿Cuáles son los resultados más admitidos de todas estas investigaciones relacionadas con la incidencia del sexo en el aprendizaje matemático? Gairín (1987) los ha resumido en los siguientes puntos:

1. Las diferencias entre sexos con respecto a las actividades matemáticas son mínimas en la escuela elemental, aumentando a partir de los 12 a 13 años.
2. Esas diferencias se observan tanto en aptitudes y elección de cursos optativos como en los rendimientos obtenidos por chicos y chicas.
3. Se dan en todos los países.
4. La superioridad masculina se muestra preferentemente en tareas relacionadas con visualización espacial y resolución de problemas. Las chicas obtienen rendimientos similares a los varones, o más altos, en problemas de cálculo aritmético o algebraico.
5. La superior habilidad de visualización espacial y su importancia en el rendimiento matemático afecta a ámbitos específicos y depende de los instrumentos de medida.
6. Los principales factores subjetivos que afectan a la elección de posteriores estudios matemáticos son la evaluación subjetiva que se hace de su utilidad y de la seguridad que proporcionan. La importancia vital que dan las chicas a las Matemáticas es sensiblemente menor.
7. En la actividad matemática influyen factores culturales y de socialización.
8. Los resultados académicos diferentes están relacionados con el clima escolar.

Se nos plantea entonces indagar sobre las diversas variables que pueden influir en que se manifiesten estas diferencias, en logros y expectativas, entre ambos sexos en relación con las Matemáticas.

Conjeturas sobre los orígenes y causas de las diferencias

¿Cuáles son las causas de las diferencias? Superada la época en que se veía como algo inherente a la naturaleza humana la aparente predisposición superior de los varones hacia las Matemáticas, en la década de los setenta, numerosos investigadores comienzan a buscar posibles explicaciones a la escasa participación y proporción de éxitos en algunas actividades relacionadas con las Matemáticas por parte de las mujeres, desde distintas perspectivas.

Con respecto a las diferencias en relación con la visualización, teorías biológicas aludieron a aspectos tales como variaciones cromosomáticas, hormonales o de lateralización cerebral (Sherman, 1977, citado en Informe Cockcroft). Otros autores atribuyeron la falta de mujeres en tareas de alto nivel científico a factores cognitivos.

Pero lo que alcanzó gran divulgación fue un estudio de Benbow y Stanley (citado por Beckwith y Durkin, 1981), relatando los resultados de ocho años de investigaciones en relación con jóvenes matemáticamente precoces, en el que señalaron como conclusión:

> "Nos decantamos hacia la hipótesis de que las diferencias según el sexo en el rendimiento y la actitud hacia la matemática provienen de una mayor habilidad matemática masculina, que a su vez puede relacionarse con una también mayor habilidad masculina en los problemas espaciales. Esta superioridad masculina probablemente es debida a una combinación de factores endógenos y exógenos" (p. 72).

Estas palabras fueron ampliamente difundidas por la prensa, y revistas como Newsweek las recogieron bajo títulos tan sugerentes como "¿Tienen los varones un gen matemático?" (Williams y King en Wesweek, 15-12-1980), reforzando la hipótesis de aquellos investigadores que conjeturaban que el pobre rendimiento femenino era más genético que ambiental.

Sin embargo, Beckwith y Durkin (1981) analizan el resultado de las investigaciones de Benbow y Stanley, poniendo el énfasis en tres aspectos:

- el único condicionante social tenido en cuenta es el número de

cursos de Matemáticas recibidos, olvidando todas las investigaciones, ya desarrolladas en la época, que ponían de manifiesto el impacto de la socialización en relación a la capacidad matemática.
- no se presta la importancia adecuada al papel del profesor. el que los alumnos hayan tomado el mismo número de cursos compartiendo profesor puede significar experiencias diferentes para alumnos de distinto sexo.
- no se tiene en cuenta la influencia del tipo de educación recibida en los años infantiles, en relación al tipo de juguetes manejados por niños y niñas y, lo que es aún más importante, las distintas expectativas hacia su futuro por parte de padres y familiares.

La poca consideración de todos estos aspectos hace señalar a Beckwit y Durkin la naturaleza limitada de las conclusiones de estos investigadores, insistiendo en la falta de evidencias que den soporte a esos resultados y cuestionándose el hecho de que sean precisamente los resultados de estos trabajos los que más divulgación hayan tenido.

Como Fennema et al. (1990) señalan, el que a diferentes sexos se atribuyan distintos resultados en los logros con respecto a la educación matemática.

"Constituye una difundida desigualdad educativa que se manifiesta en un rendimiento superior de los chicos en tareas de alto nivel cognitivo, un sistema de creencias personal más negativo acerca de las Matemáticas por parte de las chicas y una baja participación de las mujeres en tareas relacionadas con las Matemáticas" (Fennema et al., 1990, pág. 55).

Las diferencias entre sexos debidas a restricciones biológicas, si es que las hubiere, están empequeñecidas por las grandes presiones impuestas por los estereotipos sociales y culturales en torno a las destrezas cognitivas y ocupacionales (Leder, 1985).

En cualquier caso, no deja de llamar la atención que trabajos posteriores como el de Hanna (1989), que recogen resultados de una investigación llevada a cabo en veinte países con estudiantes de alrededor de trece años y que encuentran un rendimiento muy similar en niños y niñas, siendo más marcadas las diferencias entre colectivos de distintos países que entre diferentes sexos en un mismo país, no hayan tenido la misma divulgación que aquellos que se insiste en la falta de capacidad femenina.

Influencias sociales y culturales

Refiriéndose a los cambios en la investigación sobre los chicos, chicas y la ciencia en general Kelly (1987) indica que, en los últimos años, ha habido un marcado cambio en la orientación de las investigaciones. En estos momentos, se ha pasado a alternativas más sociológicas desde las aproximaciones psicológicas.

En estas últimas se intentaba el conocer por qué las chicas eludían las ciencias, buscando una respuesta a actitudes individuales y caracteres personales, pero sugiriéndose, de alguna manera, que si la chicas no participaban en tareas científicas debía de pasarles algo a sus percepciones con respecto a la ciencia, el mundo o ellas mismas.

Desde un punto de vista sociológico, los aspectos anteriormente citados: condicionantes sociales y culturales, el papel del profesor y de la escuela son apartados, entre otros, como explicaciones por investigaciones que abordan el fenómeno bajo esa perspectiva.

Condicionantes familiares e influencias grupales

Entre los condicionantes sociales, podemos señalar la influencia de padres y familiares. Ya en los primeros años se manifiestan diferencias entre el trato dado a niños y niñas, valorando en los niños el rendimiento y la independencia y en las niñas la sumisión y obediencia.

El hecho de que a los varones se les provea de juegos que fomenten de alguna manera el desarrollo espacial (mecanos, construcciones, etc.), frente a las tradicionales muñecas femeninas podría favorecer de alguna manera un desarrollo de la medida o la visualización espacial, en los que las chicas parece ser que obtienen peores resultados. Incluso el que actualmente se tienda a utilizar juguetes unisex, con los que en principio podría parecer que se da un trato uniforme a ambos sexos, como los pequeños muñecos articulados o los cubos encajables no garantiza un uso similar por ambos colectivos.

También las concepciones de los padres, respecto a los objetivos educacionales de los cursos de Matemáticas, influyen en gran manera sobre las actitudes de estudiantes hacia las mismas, y sobre la decisión de continuar estudios relacionados con ellas. De una manera a veces inconsciente, pero otras manifestada en forma explícita, se tiende a estimular los estudios matemáticos de los hijos varones frente a los de las hijas (Leder, 1985).

Y es precisamente a través de las interacción de los niños con los adultos y con otros niños, como se van construyendo socialmente masculinidad y femineidad. Los roles asumidos se refuerzan en la adolescencia, cuando se añade la influencia de las presiones de grupo, y se presupone en ocasiones que el éxito en tareas matemáticas plantea dificultades en la relación con el sexo contrario. Todo esto se refleja en las actitudes adoptadas en todo lo relacionado con las Matemáticas. Mientras los varones dirigen sus intereses hacia áreas tradicionalmente valoradas como de alto nivel intelectual y de capacidad directiva, las mujeres escogen áreas más congruentes con su rol social, lo que a largo término afecta a sus objetivos ocupacionales.

Esa diferencia se aprecia claramente en nuestro país. Estudios realizados por Revuelta y Pons (1992), en base a los resultados de los exámenes de alumnos de secundaria de una amplia muestra (4.396 alumnos) indican que, globalmente, el nivel de suspensos de las chicas es inferior al de los chicos. ¿Por qué entonces el paso a la Universidad y al mercado laboral produce esa polarización de las mujeres hacia trabajos menos considerados socialmente? Estamos de acuerdo con estos autores, y con otros muchos que lo han mencionado, en que pueden ser aspectos como motivación, influencia de padres y profesores, miedo al éxito de aquellas mujeres que entran en campos tradicionalmente masculinos, etc., los que alejen a las chicas de las Matemáticas. También la propia estructura patriarcal que actúa en la ciencia puede plantear dificultades a todo aquello que no reproduce su esquema.

La ciencia como dominio de varones

Este aspecto de "ciencia como dominio de varones" ha sido destacado también por diversos investigadores. ¿Cuál es la naturaleza de los "hechos" que conocemos acerca de las chicas y las Matemáticas? ¿Se pueden entender la ideas acerca de la razón y el razonamiento fuera de las consideraciones históricas en relación al sexo? A este respecto, Walkerdine (1987) señala que

> "El desarrollo de la Ciencia desde el siglo diecisiete está íntimamente conectado con el control de la naturaleza por el hombre" (Walkerdine, 1987, p. 41),

excluyendo axiomáticamente a las mujeres. El lenguaje, la estructura y la propia naturaleza de las Matemáticas pueden presentar tendencias que favorezcan las desigualdades.

Actitudes hacia las Matemáticas en relación al sexo

También las actitudes hacia las Matemáticas son diferentes en niños y niñas. Así, aunque en la escuela primaria hay poca diferencia entre sexos en relación al interés o utilidad de las Matemáticas, durante la enseñanza secundaria las actitudes hacia las Matemáticas por parte de las chicas sufren un deterioro en relación con sus compañeros varones, que se refleja en una menor elección por parte de las chicas de cursos de Matemáticas no obligatorios. Se podría pensar que las diferencias que se establecen entre sexos en relación con las Matemáticas son un reflejo de las diferentes actitudes hacia ellas, estando estas a su vez originadas por los condicionanates sociales anteriormente considerados (padres, compañeros, sociedad).

En un marco más general, parece ser que se aprecia una actitud más baja por parte de las chicas en relación al interés por la escuela, tarea escolar y actitud hacia la disciplina escolar, mientras que superan a los varones en la aceptación de la conducta escolar e identificación con la escuela, señalándose en ellas una actitud más favorable hacia la experiencia escolar (Gairín, 1987).

Otro factor de interés lo constituye la propia imagen de las Matemáticas que tienen los niños. Las chicas se refieren prioritariamente a sentimientos y preocupaciones acerca de lo que sucederá en el futuro (en relación al cambio de nivel educativo, futuros estudios, etc.), mientras que los muchachos hablan de ellas como algo que puede no ser muy agradable, pero que es necesario (Burton, 1989).

Papel de la escuela y de los profesores

Entre otros factores que contribuyen a las diferencias entre sexos en Matemáticas, la escuela y los profesores juegan un importante papel. Los niños llegan a la escuela con un marcado sentido de la identidad del sexo, sentido que la propia escuela se encarga de reforzar de forma implícita y explícita. Las diferencias en función del sexo se establecen de muy diversas formas: procedimientos organizativos, conductas, expectativas, creencias, etc. (Leder, 1985).

Distintos aspectos que han llamado la atención de los investigadores han sido la atención de los profesores durante las clases de Matemáticas, la forma de involucrarse en tareas matemáticas, la estructura y organización de las clases y los libros de texto. En relación a los libros de texto, exploraciones de tipo sociológico han considerado los modos en que los libros de texto escolares pueden entenderse estableciendo al aprendiz como un sujeto con sexo, y según el sexo, con una habilidad específica (Dowling, 1991).

Pero lo que Fennema et al. (1990) destacan especialmente es la influencia de las creencias y atribuciones de los profesores acerca de las chicas, chicos y las Matemáticas, y la influencia de estas creencias en el aprendizaje. sus investigaciones han mostrado que las atribuciones y creencias de los profesores acerca de los niños y niñas de primaria en Matemáticas son diferentes. estos perciben a los muchachos como mejores estudiantes, atribuyendo como razones para los éxitos y fallos la habilidad para el caso de los chicos y el esfuerzo para el de las chicas. Además, incluso en comparaciones establecidas entre los mejores estudiantes de ambos sexos, los varones eran considerados como más competitivos, lógicos y atrevidos.

Precisamente en el modelo de aprendizaje autónomo, propuesto por Fennema y Peterson (1985) como una de las posibles explicaciones a las diferencias entre sexos en Matemáticas y que a continuación vamos a detallar, se hipotetiza la relación entre estas creencias y las diferencias entre sexos.

Algunas explicaciones a las diferencias relacionadas con el sexo con respecto a las Matemáticas

El modelo de aprendizaje autónomo, que fue propuesto por Fennema y Peterson (1985) como una explicación a las diferencias entre sexos en atemáticas, hipotetiza la relación entre las creencias de los profesores y las diferencias de sexo (figura 1). Este modelo indica que una componente de las influencias externas, que afectan el desarrollo de las citadas diferencias, es la influencia de los profesores tanto en las creencias motivacionales internas de los estudiantes como en su participación en las actividades de aprendiaje desarrolladas en la clase.

Tareas de alta complejidad cognitiva, tales como resolución de problemas, que implican trabajar independientemente, persistir, escogerlas y salir bien de ellas (Fennema y Peterson, 1985) son precisamente en las que se ha encontrado mejor rendimiento por parte de los varones. Esos comportamientos autónomos de aprendizaje pueden servir de mediadores entre las influencias externas e internas y el desarrollo de esas tareas, considerando *la falta de desarrollo en el comportamiento autónomo* de aprendizaje como una explicación razonable para las diferencias de rendimiento entre sexos en relación con las Matemáticas.

Otro modelo es el propuesto por Eccles (1985), en el que se asocia la decisión de involucrarse en tareas Matemáticas a dos constructos cognitivos específicos:

- la expectativa de éxito
- el valor subjetivo que la tarea presenta para el individuo,

atribuyendo las diferencias individuales en relación con estos constructos a variaciones en aptitud y rendimiento, experiencias de socialización y objetivos, tanto presentes como futuros, de los estudiantes.

De las dos componentes del modelo, la primera está relacionada con la socialización evolutova, que enfatiza los comportamientos y actitudes de padres y profesores y la autopercepción de los estudiantes de esas actitudes. La segunda se relaciona con los determinantes psicológicos del logro, comprendiendo las expectativas de éxito, valor subjetivo de las tareas, etc.

Por otra parte, Isaacson (1989) sugiere dos constructos teóricos,

- inducimiento coercitivo y
- doble conformidad,

que individualmente, y todavía más juntos, pueden ofrecer explicaciones y ser útiles en las investigaciones desarrolladas en el campo.

El primero de ellos se relaciona con el hecho de que se previene a las chicas para no tomar roles que no sean los que de ellas se espera en la sociedad. En el segundo, se expresa el dilema de una persona que está en una situación en la que tiene que compaginar al mismo tiempo dos clases de expectativas, cuando esas dos clases son mutuamente inconsistentes. El efecto combinado del inducimiento coercitivo y la doble conformidad incrementa en gran manera los obstáculos que encuentran las mujeres cuando intentan abordar áreas tradicionales de dominio masculino. (Figura 2).

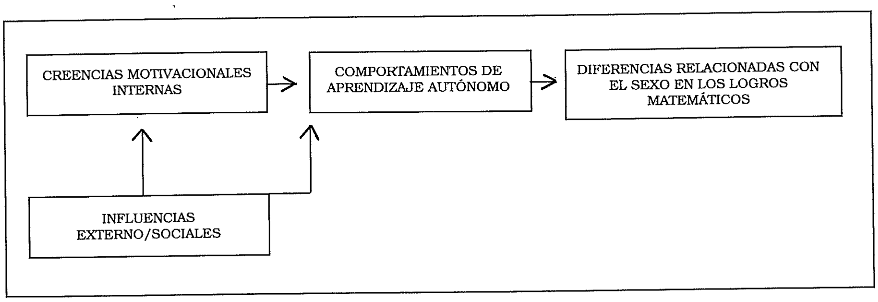


Figura 1. Modelo de comportamiento de aprendizaje autónomo como mediador (Fennema y Peterson, 1985).

Los modelos anteriormente citados son algunos modelos alternativos que no sólo intentan explicar las diferencias relacionadas con el sexo en Matemáticas, sino que tienen implicaciones en relación a la igualdad de oportunidades para las mujeres en la sociedad. Como se pone de manifiesto, el problema es complejo y está afectado por muchos factores. Como Fennema et al. (1985) señalan, los condicionamientos sociales "no pueden responder completamente del problema de las diferencias relacionadas con el sexo en Matemáticas. Uno debe examinar cómo afectan estos condicionamientos sociales al entorno educacional de una chica así como afectan al sistema de creencias personales de cada aprendiz. Tanto el entorno educacional como lo que una persona cree acerca de ella misma tiene directa influencia en lo que se aprende en Matemáticas" (Fennema, 1985, p. 304).

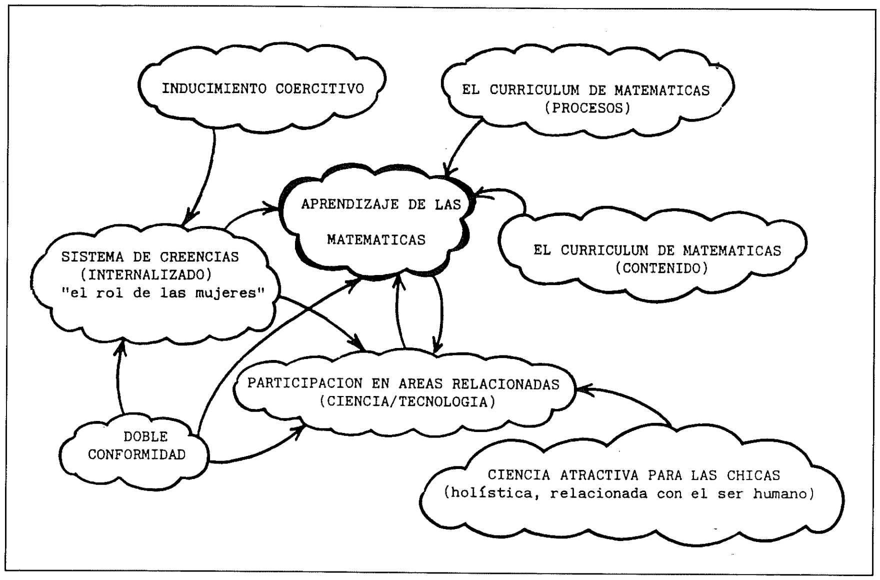


Figura 2. Influencias en el aprendizaje de las Matemáticas según Isaacson.

Sugerencias para el cambio

La comparación de los resultados de las investigaciones en la actualidad con relación a los desarrollados en épocas anteriores indica que el problema de las diferencias de sexo en relación con los logros matemáticos y expectativas profesionales es un problema construido socialmente, de una gran complejidad y que, para una misma declaración, confronta puntos de vista muy distintos (Lee, 1992).

Sería una simplificación absurda en un problema tan complejo como el que hemos estado tratando hablar de una estrategia de cambio. Debemos considerar estrategias muy diversas, que incidan en distintos terrenos. Como señala la AAMT (The Australian Association of Mathematics Teachers Inc) en sus declaraciones sobre las chicas y las Matemáticas, para lograr una igualdad de oportunidades se deben efectuar cambios en relación a los métodos de enseñanza, curriculum, valoración de los programas de Matemáticas, libros de texto, formación inicial y permanente del profesorado y, en definitiva, de la sociedad, la comunidad y la escuela.

Podemos señalar, entre otras actividades, programas diseñados específicamente para fomentar el estudio de las Matemáticas y las Ciencias por las jóvenes, como el de Women and Mathematics, llevado a cabo en USA a través de la Mathematical Association of America, asociaciones como la AWM (Association for Women in Mathematics) en USA, EWM (European Women in Mathematics) en Europa, congresos y publicaciones específicos, expectativas de futuro puestas de manifiesto en la organización del ICMI sobre Sexo y Educación Matemática, que tendrá lugar en Suecia (octubre 1993), etc. En todos ellos, se intenta lograr una educación libre de rasgos sexistas, que no sea una simple superposición o complementariedad de perspectivas femeninas y masculinas, sino que en ella lo femenino y lo masculino se integren en un proyecto común (Rubio y Mañeru, 1989).

Bibliografía

* AAMT (1990): **A National Statement on Girls and Mathematics**. Australian Association of Mathematics Teachers Inc., GPO Box 1729, Adelaida, Australia, SA 5001.

* BECKWITH, J. Y DURKIN, J. (1981): **Chicos, chicas y Matemáticas**. Revista "Mientras tanto", n. 10 (Traducción del artículo aparecido en el número de septiembre-octubre de 1981 de la revista Science for the People 13 (5), p. 6.

*BURTON, L. (1989): **Images of Mathematics**. En P. Ernest (Edt.) Mathematics Teaching: The State of the Art. (The Falmer Press: London).

* COCKCROFT, E.H. (1982): **Mathematics Counts**. Crow: London. (Versión española: **Las Matemáticas sí cuentan**. Informe de la comisión de investigación sobre la enseñanza de las Matemáticas. MEC: Madrid, 1985).

* DOWLING, P. (1991): **Gender, Class and Subjectivity in Mathematics: A critique of Humpty Dumpty**. For the Learning Mathematics 11 (1), 2-8.

* ECCLES, J. (1985): **Model of Students' Mathematical Enrollement Decisions**. En E. Fennema (Edt.) Explaining sex-

related differences in Mathematics: Theoretical Models. Educational Studies in Mathematics 16, 303-320.

* FENNEMA, E. Y CARPENTER, T. (1981): **Sex-related differences in Mathematics: Results from national assessment** Mathematics Teacher (74), 555-559.

* FENNEMA, E. Y PETERSON, P.L. (1985): **Autonomous learning behavior: A possible explanation of gender-related differences in Mathematics**. En E. Fennema (Edt.) Explaining sex-related differences in Mathematics: Theoretical Models. Educational Studies Mathematics 16, 303-320.

* FENNEMA, E., WALBERG, H. Y MARRET, C. (1985): **Introduction**. En E. Fennema (Edt.) Explaining sex-related differences in Mathematics: Theoretical Models. Educational Studies Mathematics 16, 303-320.

* FENNEMA, E., PETERSON, P.L., CARPENTER, T.P. Y LUBINSKI, CH.A. (1990): **Teachers' attributions and beliefs about girls, boys and Mathematics**. Educational Studies in Mathematics 21, 55-69.

* GAIRÍN, J. (1987): **Las actitudes en educación** (PPU: Barcelona).

* GÓMEZ CHACÓN, I.M. (1993): **Mujer y Matemáticas** VI Jornadas Andaluzas de Educación Matemática, Sevilla, Septiembre.

* HANNA, G. (1989): **Mathematics achievement of girls and boys in grade 8: Results from twenty countries**. Educational Studies in Mathematics 20, 225-232.

*ISAACSON, Z. (1989): **Of curse You Could Be an Engineer, Dear, But Wouldn't You Rather Be a Nurse or Teacher or Secretary?** En P. Ernest (Edt.) Mathematics Teaching: The State of the Art. (The Falmer Press: London).

* KELLY, A. (1987): **Introduction**. En Kelly (Edt.) Science for Girls? (Open University Press: London).

* LEDER, G. (1985): **Sex-related differences in Mathematics: an overview**. Educational Studies in Mathematics 16 (3), 304-309.

* LEE, L. (1992): **Gender Fictions**. For the Learning Mathematics 12 (1), 28-37.

* REVULTA, G. Y PONS, J. (1992): **En torno a un análisis parcial o de como minar voluntades con el cientifismo**. I Jornadas Provinciales de Profesores de Matemáticas, Benidorm, Mayo.

* RUBIO, E. Y MAÑERU, A. (1989): **El género como categoría de análisis en la Educación**. Revista de Educación 290, sep-dic, 7-20.

* SHUARD, P. (1986): **The relative Attainment of Girls and Boys in Mathematics in the Primary Years**. En L. burton (Edt.) Girls into Maths Can Go (Casell Education: London).

* WALKERDINE, V. (1987): **Some Issues in the historical construction of the scientific truth about girls**. En P. Ernest (Edt.) Mathematics Teaching: The State of the Art. (The Falmer Press: London).

* WARD, M. (1979): **Mathematics and the Ten-Year-old** (Evans Methuem: London).

Victoria Sánchez García
Dpto. de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales y Matemáticas.
Universidad de Sevilla.

Problemática de la enseñanza de conceptos del cálculo

M. Carmen Penalva Martínez
Joaquín Sánchez Soriano

Teniendo en cuenta que las dificultades de aprendizaje de conceptos que tienen los estudiantes se localizan en las mentes, las matemáticas y el mensaje, se debe realizar una revisión del curriculum encaminada a potenciar el aprendizaje comprensivo de los contenidos del cálculo.

Cuando un estudiante decide si un «objeto matemático» es o no un ejmplo de un determinado concepto, no siempre utiliza la **definición del concepto** (palabras y términos asociados que caracterizan el concepto). En la mayoría de los casos su decisión se fundamenta en la **imagen del concepto** (conjunto de todas las propiedades y procesos asociados al concepto, así como todo tipo de imágenes mentales que el estudiante relaciona con el concepto). Por imagen mental se entiende cualquier tipo de representación -gráfica, simbólica, etc. [3].

Ante las dificultades que tienen los estudiantes en el aprendizaje de conceptos del cálculo, se debe tener en cuenta que los conflictos de aprendizaje pueden estar localizados en uno o más de los siguientes campos [2]:

- **Las mentes** de los estudiantes y profesores. Se tienen experiencias y estructuras creadas, que no siempre son consistentes, y puede ser que se unan ideas matemáticas a aspectos idiosincráticos.

- **Las matemáticas**, pues, contienen conceptos, tales como el infinito, que contienen implícitos significados complejos que pueden ser interpretados de forma errónea.

- **El mensaje,** que puede ser transmitido en un lenguaje que evoque ideas inapropiadas, o bien, presentado en una secuencia de contenidos que no favorece la compresión adecuada del concepto.

Durante el proceso de comprensión de un concepto por un estudiante se establecen relaciones entre los aspectos mencionados anteriormente:

En la **mente** del alumno se forma la **imagen del concepto**, que está estrechamente conectada con las experiencias del estudiante sobre el concepto. La mayoría de las veces estas experiencias se obtienen a través de ejemplos y ejercicios, presentados por el profesor, y éstos «hacen fe» en la imagen del concepto que el estudiante capta. Además, de estos ejemplos se extraen «ideas simplificadas», no generales, que el estudiante identifica con el concepto.

Se ha observado, por ejemplo, que la imagen de función continua que tienen asimilada los estudiantes es aquella que se puede dibujar de un sólo trazo o la que está definida mediante una única fórmula [3].

Otros casos, sobre inconsistencias en el aprendizaje del concepto de función, se pueden analizar en D. Tall [2], y en el trabajo de S. Vinner y T. Dreyfus [4].

También existe una conexión entre la **definición del concepto** y el **mensaje**. Se sabe que cuando un estudiante se expresa en términos matemáticos no implica, necesariamente, que entienda dichas expresiones. Las respuestas a las cuestiones: ¿cómo hacer llegar el mensaje al sujeto?, ¿qué palabras utilizar?, y algo muy importante, ¿cuándo introducir la **definición del concepto**?, están condicionadas por el desarrollo **mental** del estudiante.

Las inconsistencias detectadas en el aprendizaje de los conceptos del cálculo se deben, sobre todo, a conflictos producidos por las relaciones entre la **imagen del concepto** y la **definición del concepto**. En muchas ocasiones las relaciones imagen-definición son totalmente inconsistentes, también puede suceder que no haya una correspondencia total entre la definición y la imagen del concepto [4].

En otros casos se observa que un estudiante no ha asimilado el significado de un concepto, ya que, a cuestiones con respuesta acertada, la argumentación que la justifica es totalmente errónea. Esto puede ser debido a que la imagen y la definición del concepto no son evocadas con la misma fuerza. Puede ser que haya una imagen fuerte con una definición del concepto débil o viceversa [3].

Cuando el problema viene derivado de la secuenciación de las matemáticas, puede ocurrir que el alumno comprenda y conozca los conceptos dentro de un cierto marco. Parece que el alumno aprende bien, pero sucede que al sacarle de su contexto habitual, por ejemplo, al hacerle una pregunta general sobre el concepto, el estudiante se equivoca, pues no sabe usar las imágenes adecuadas. Lo que el estudiante hace en este caso es dar *imágenes contextualizadas*, esto es, imágenes para cada situación, y no usa imágenes claras y globales sobre el concepto. El estudiante lo que suele aprender no es el concepto en sí, sino la imagen del concepto para cada momento. Así cuando se le formula una pregunta general sobre el concepto, tiene dificultades para evocar la imagen correspondiente.

Esto nos da una idea de *compartimentación* de un concepto y sus posibles imágenes. Dicho proceso está muchas veces provocado por el propio profesor, pues en gran número de ocasiones se da el concepto y se piden aspectos de él para situaciones concretas, con lo cual el alumno siempre responde sobre el concepto aplicado, nunca sobre el «propio concepto», con lo cual no llega a entender el concepto pero sí a usarlo, [2], [3] y [4].

Hay que lograr que esta compartimentación sea la menor posible, dando una secuenciación de los contendidos más coherente, haciendo matemáticas sobre el «támdem» *uso-comprensión*, y no sólo sobre uno de estos aspectos.

El cómo superar los conflictos mencionados es difícil e influyen varios aspectos que muchas veces nos pasan inadvertidos (predisposición, «todos no somos iguales», «todos no tenemos las mismas circustancias»,...), pero superados éstos, se pueden citar, de acuerdo con J. Ferrini -Mundy y K. G. Graham [1], numerosas acciones que potencian el aprendizaje del cálculo:

- Enriquecer las concreciones de los conceptos.
- Mejorar los ejemplos y contraejemplos.
- Mayor reflexión sobre los conceptos.
- Introducir el uso del ordenador en el aula.
- Observar que todos los conceptos no tienen ejemplificaciones gráficas sencillas.
- Secuenciar los contenidos de forma más efectiva.
- Intentar conseguir una conducta más participativa del alumno.
- Investigar qué materiales son adecuados para cada nivel.
- Etc.

Bibliografía

[1]. FERRINI -MUNDI, J.; GRAHAM, K. G. (1991). **An overview of the calculus curriculum refort effort: issues for learning, teaching, and curriculum development**. The teaching of Mathematics. August-september, 627-635.

[2]. TALL, D. (1990). **Inconsistencies in the learning of calculus and analysis**. Focus on learning problems in Mathematics, 12, 3 y 4, 49-63.

[3]. TALL, D.; VINNER, S. (1981). **Concept image and concept definition mathematics with particular reference to limits and continuity**. Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.

[4]. VINNER, S.; DREYFUS, T. (1989). **Images and definitions for the concept of function**. Journal for research in Mathematics Education, 20, 4, 356-366.

M. Carmen Penalva Martínez
Joaquín Sánchez Soriano
Departamento de Matemáticas y Estadística.
Universidad de Alicante.

Teselaciones Periódicas, Aperiódicas y Especiales

Francisco Jesús Salguero Andújar

Realizar una *teselación* del plano consiste en «pavimentarlo» completamente con ayuda de *formas* planas de dimensiones finitas. El término proviene del Latín *tesellam*, o pieza cuadrada de mármol, piedra, etc., que entraba en la composición de pavimentos de mosaico romanos. El problema -de recubrir completamente el plano mediante figuras poligonales o no-, aunque ha experimentado un espectacular desarrollo a partir de la última mitad de nuestro siglo, ha sido, no obstante tradicionalmente encuadrado dentro de lo que ha venido en denominarse «matemáticas recreativas».

Naturalmente estas cuestiones revisten alguna importancia más allá del mero pasatiempo. Cuando menos, representan un potente aliado del docente a la hora de introducir conceptos matemático-geométricos, tales como traslaciones, giros, simetrías y sumas y diferencias de ángulos entre otros muchos, que de otra forma aparecerán como entelequias ante el alumno.

Paradojas de Gödel, Ecuaciones Diofánticas y Teselaciones Aperiódicas

¿Es el pensamiento humano una simple realización de operaciones repetitivas de enorme complejidad, o implica alguna característica no susceptible de reproducir, por ejemplo, en un ordenador tal como lo conocemos hoy?

Sabemos, a partir de una serie de trabajos publicados durante los años treinta por Kurt Gödel, Alan M. Turing y Alonzo Church, que existen problemas que no pueden ser resueltos por un ordenador por muy potente que éste sea. Gödel demostró en su trabajo de 1931 que un sistema deductivo, -incluida la aritmética ordinaria-, contiene proposiciones que son *indecidibles*, es decir, proposiciones que son ciertas, pero cuya veracidad no puede ser demostrada dentro del sistema. La conjetura de Goldbach, por ejemplo, afirma que todo número mayor que 2 es suma de dos números primos. Nadie lo ha podido demostrar ni hallar un contraejemplo. Es posible que la conjetura sea un indecidible de Gödel.

En 1936, Alan Turing y Alonzo Church demostraron la existencia de problemas para los que no hay algoritmos finitos. Entre estos problemas, que constituyen indecidibles de Gödel, se encuentran, junto con otros, algunas cuestiones que plantean las teselaciones aperiódicas, y, más recientemente, se ha sumado a estos indecidibles, el problema de si las ecuaciones diofánticas, -sistemas de ecuaciones polinómicas de coeficientes enteros con soluciones enteras-, poseen o no tales soluciones.

Por ejemplo, el sistema:

$$z^3-y-1=0$$
$$yz^2-2x-2=0$$
$$y^2-2xz+z+1=0$$

tiene las soluciones enteras $x=13$; $y=7$; $z=2$, pero si sustituimos el 1 de la primera ecuación por un 2, el sistema no posee soluciones enteras. Ningún programa de ordenador podría decidir de una forma fiable la respuesta general a un problema de este tipo. Sin embargo, el ambiente geométrico en que se desarrollan las pavimentaciones del plano y del espacio están gobernados por este tipo de ecuaciones, y gran número de ellas se encuentran determinadas de forma precisa.

Teselaciones planas periódicas

Se dice que un teselado es periódico cuando podemos delimitar en él una región que pavimenta el plano por traslación, esto es, desplazando la ubicación de la región sin someterla a giros ni simetrías. La teselación periódica se dice regular, si está realizada con un solo tipo de polígonos regulares. Todo polígono, -regular o no-, puede ensamblarse con otros de su misma especie o de distinta, siempre que los ángulos de cada uno, reunidos alrededor de un punto, sumen cuatro rectos.

Partiendo de la fórmula:

$$\text{II}\,(x_1 - 2) \,/\, x_1$$

que proporciona el ángulo interior formado por los lados contiguos de un polígono regular de x_1 lados, encontrar los polígonos regulares que teselan el plano, se reduce a resolver la siguiente ecuación diofántica:

$$2x_1 - x_1x_2 + 2x_2 = 0$$

donde x_2 representa el número de polígonos regulares de x_1 lados que concurren en un vértice.

Esta ecuación posee tres soluciones, una de las cuales utilizan las abejas, **(Fig. 1)**.

$x_1=6;\ x_2=3$
$x_1=4;\ x_2=4$
$x_1=3;\ x_2=6$

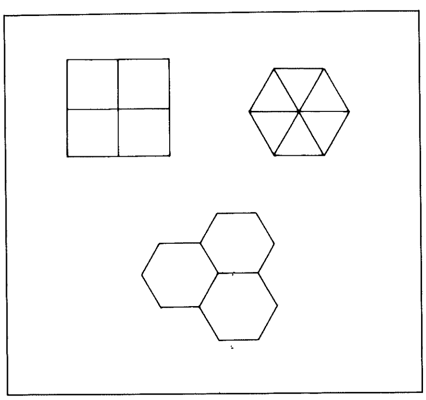


Figura 1

Una teselación semirregular consiste en una pavimentación del plano con un mosaico de polígonos regulares de vértices comunes y arbitrario número de lados. Ello equivale a resolver:

$$\sum_1^n m_i = 2\,[1 + \sum_1^n m_i / x_i]$$

donde m_i es el número de polígonos de x_i lados que concurren en un vértice.

Para el caso de sólo dos tipos de polígonos, la ecuación anterior toma la forma:

$$m_1 + m_2 = 2[1 + m_1/x_1 + m_2/x_2]$$

que tiene las siguientes soluciones, **(Fig. 2)**:

$m_1=3;\ m_2=2;\ x_1=3;\ x_2=3$: 3 triángulos y 2 cuadrados

$m_1=2;\ m_2=2;\ x_1=3;\ x_2=6$: 2 triángulos y 2 hexágonos

$m_1=4;\ m_2=1;\ x_1=3;\ x_2=6$: 4 triángulos y 1 hexágono

$m_1=1;\ m_2=2;\ x_1=3;\ x_2=12$: 1 triángulo y 2 dodecágonos

$m_1=1;\ m_2=2;\ x_1=4;\ x_2=8$: 1 cuadrado y 2 octógonos

$m_1=2;\ m_2=1;\ x_1=5;\ x_2=10$: 2 pentágonos y 1 decágono

Las teselaciones semirregulares resultan ser, al igual que las regulares, periódicas.

El pintor holandés M. C. Escher se hizo famoso por sus numerosos grabados y litografías de mosaicos periódicos cuyas teselas adoptan formas orgánicas. Representa una ventaja notable el introducir este tipo de teselaciones en el aula a partir de figuras creadas por el propio alumno, evitando así tener que utilizar siempre polígonos regulares. Esto puede conseguirse a partir de una serie de reglas que permiten infringir modificaciones en las teselas poligonales para convertirlas en formas caprichosas, animales, vegetales, etc., y que utilizó el propio Escher para la realización de sus dibujos. Estas pueden resumirse en tres tipos de transformaciones:

Traslación paralela: toda parte recortada de un lado de un paralelogramo o hexágono de lados opuestos paralelos, se traslada paralelamente añadiéndose al lado opuesto, **(Fig. 3)**:

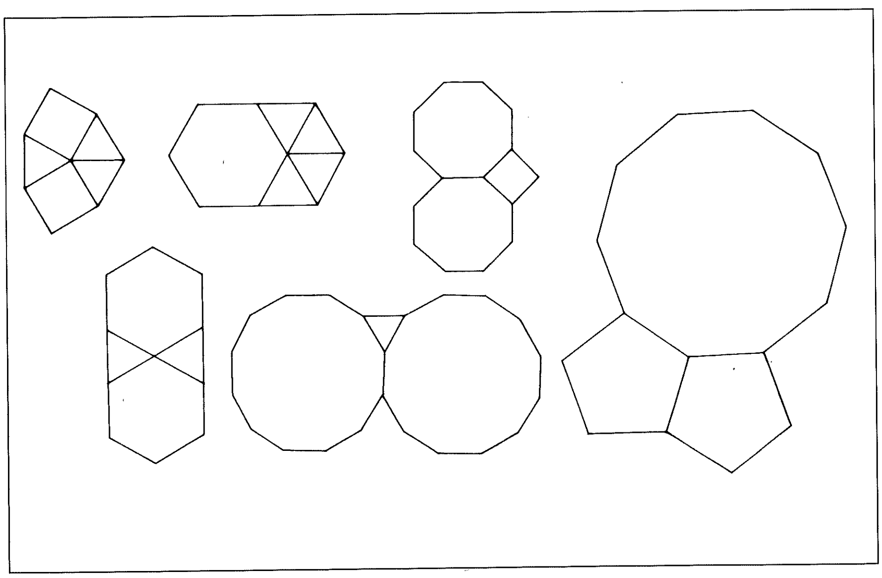


Figura 2

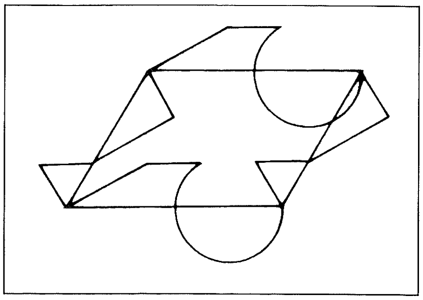


Figura 3

Giro a partir de un lado: al recortar una forma de un lado de un triángulo o cuadrilátero, habrá que añadirla en el mismo lado mediante un giro de 180º con centro en el punto medio de dicho lado, **(Fig. 4)**:

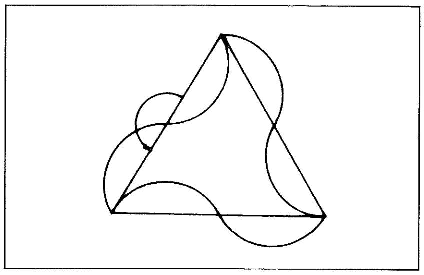


Figura 4

Giro a partir de un vértice: Al recortar una forma de un lado, habrá que añadirla a otro lado mediante giro de 60º ó 120º con centro en el vértice común de los dos lados. Los vértices que son centro de giro no pueden ser consecutivos. Los giros son de 90º cuando los centros pertenecen a un triángulo, cuadrilátero o pentágono, **(Fig. 5)**.

Teselaciones Aperiódicas

Así como el hexágono regular, por ejemplo, engendra únicamente pavimentaciones periódicas, son infinitas las teselas que generan mosaicos, lo mismo periódicos que aperiódicos. De la misma forma, es relativamente sencillo convertir una teselación periódica en aperiódica, seccionando, por ejemplo las teselas en dos y alterando las orientaciones con el fin de evitar la periodicidad, **(Fig. 6)**:

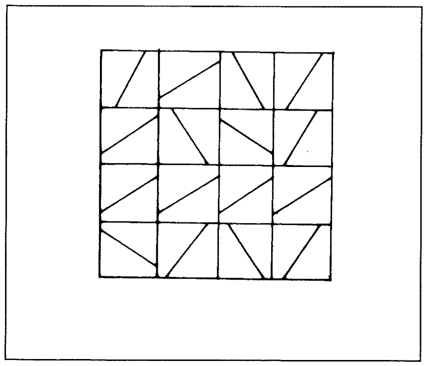


Figura 6

Cabría entonces preguntarse: ¿existirán juegos de teselas que tan sólo engendren pavimentos no periódicos?, es decir, que ninguna de sus piezas por separado, ni ninguno de sus subconjuntos, ni el juego completo engendren pavimentaciones periódicas, mientras que utilizándolas todas si sea posible un mosaico aperiódico.

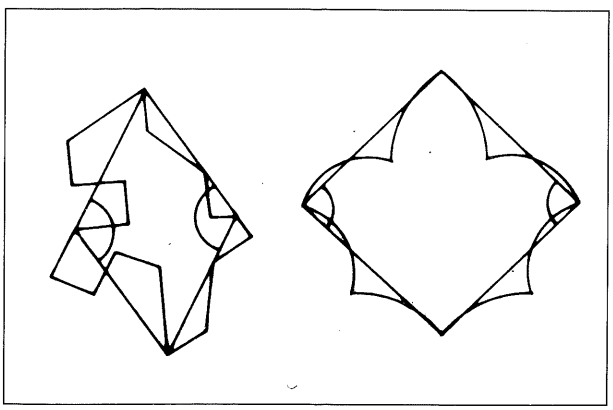


Figura 5

Existen dos juegos de teselas, basadas en el pentágono regular, y descubiertas por Roger Penrose en 1974, que generan pavimentaciones exclusivamente aperiódicas del plano. Uno de estos pares es conocido como *rombos de Penrose* y se compone de un par de rombos cuyos ángulos interiores mayor y menor miden respectivamente 108º y 72º para el rombo de mayor área y 36º y 144º para el de menor área, **(Fig. 7)**. Los lados de dichos rombos son iguales.

Pero cualquier rombo puede teselar el plano de forma periódica. Ahora bien, se pueden hacer en las teselas, mediante las reglas vistas anteriormente, dientes y entalladuras en los lados, que dispuestas de forma conveniente impidan la pavimentación periódica.

El otro par de teselas descubiertas por Penrose son denominadas por John Horton Conway, «dardos» y «cometas» respectivamente, y pueden deducirse del rombo de Penrose de mayor área sin más que dividirlo es dos de la forma que se indica en la **figura 8**, es decir, imponiendo que los ángulos interiores que forman los lados de las teselas sigan siendo múltiplos de (360/10)=36º.

Para impedir que estas teselas generen pavimentaciones periódicas bastará añadirles dientes y entalladuras que impidan formar con ellas el rombo de Penrose de mayor área.

Los teselados que forman dardos y cometas, así como los que generan los rombos de Penrose, están fuertemente relacionados entre sí y con el número Φ, sección áurea de un segmento. Cualquier teorema o propiedad relativo a dardos y cometas tiene su homólogo en los rombos y a la inversa. El número de dardos y cometas, así como de rombos de área grande y pequeña se encuentran en proporción áurea. Es decir, en un

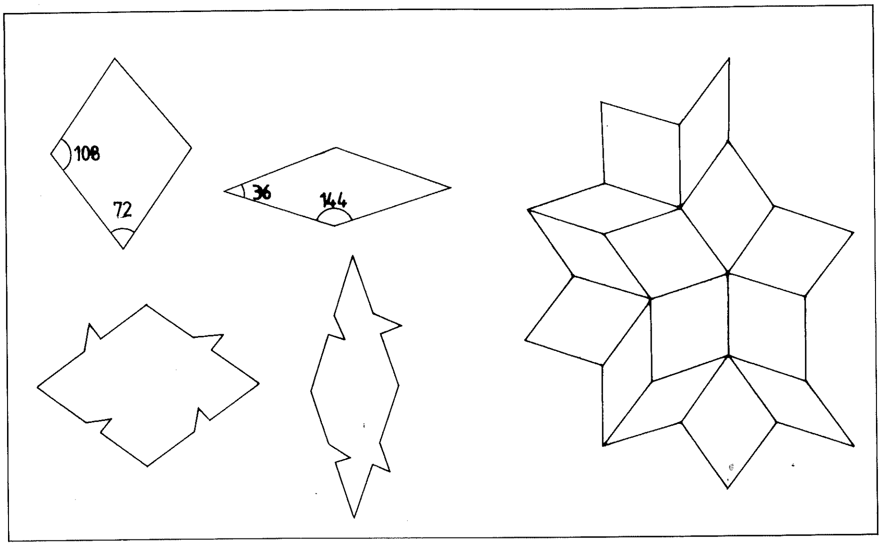


Figura 7

mosaico aperiódico infinito la proporción entre rombos de área grande y pequeña, o entre dardos y cometas es exactamente Φ, (1,618033...).

Otra curiosa e importante propiedad que muestran las teselaciones de Penrose es el denominado *Teorema del Isomorfismo Local*, -cuyo cumplimiento imputan también al Universo algunas teorías cosmológicas-, por el cual, todos los teselados de Penrose, -ya sea de dardos y cometas o de rombos-, son indistinguibles. Se puede demostrar que cualquier región finita de cualquier teselación infinita de Penrose, forma parte de cualquier otro de tales pavimentos, de tal manera que sólo resulta posible distinguir dos teselados cualesquiera en el límite, inalcanzable. De otra forma: cualquier punto de una teselación de Penrose pasa por ser su centro, ya que desde todos sus puntos presentará un aspecto *similar*.

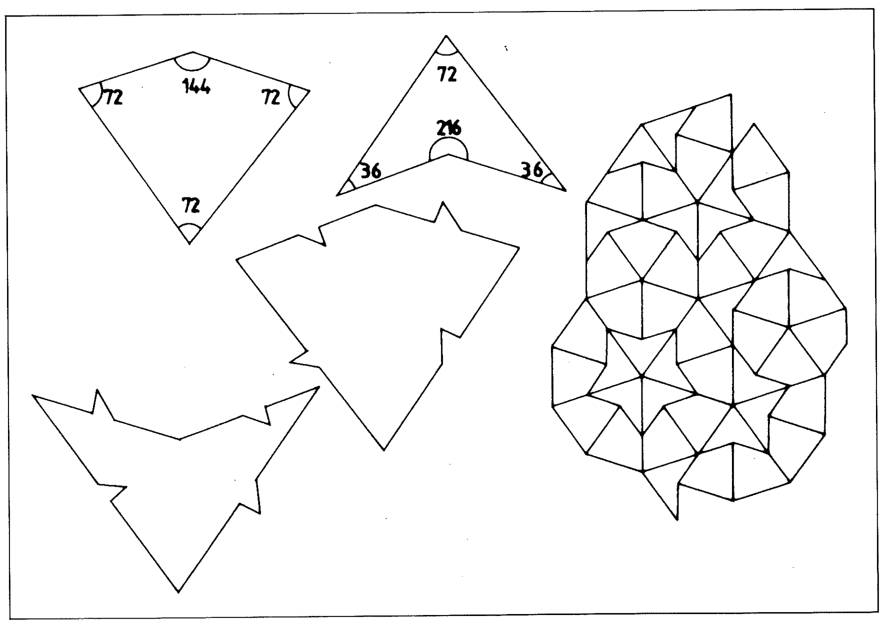


Figura 8

Zonoedros

Estos dos pares de teselas, así como otros, que también pavimentan el plano de forma aperiódica, pueden ser obtenidos a partir de una operación en el plano bien sencilla: el giro de un pentágono o un decágono regulares alrededor de uno de sus vértices, **(Fig. 9)**.

Las configuraciones engendradas al aplicar una rotación completa a un polígono regular son ciertamente notables, no sólo por la generación de las teselas de Penrose, sino porque son la base a partir de la cual puede construirse una familia infinita y numerable de poliedros sorprendentes y a la que Antonio Sáseta, arquitecto, profesor de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Sevilla, con quien estoy en deuda por haberme iniciado hace años, -sin él saberlo-, en el estudio de estos cuer-pos, denomina Polipiedros.

Los Polipiedros son poliedros que se engloban dentro de la familia de los Zonoedros. Existe un Polipiedro para cada una de las rotaciones que podemos infringir a los polígonos regulares. Dichas rotaciones pueden considerarse proyección ortogonal de cada uno de ellos sobre un plano perpendicular al eje de máxima simetría del poliedro. Constituyen por tanto una familia infinita y numerable, de la cual se han representado en la **figuras 10a** y **10b** los ocho primeros.

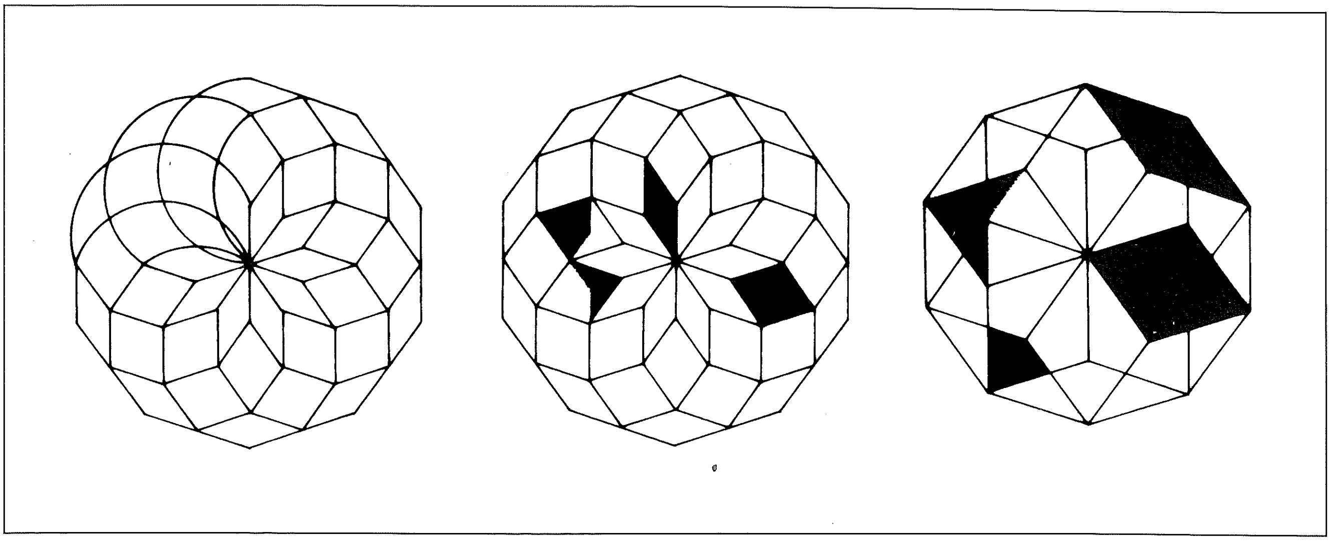


Figura 9

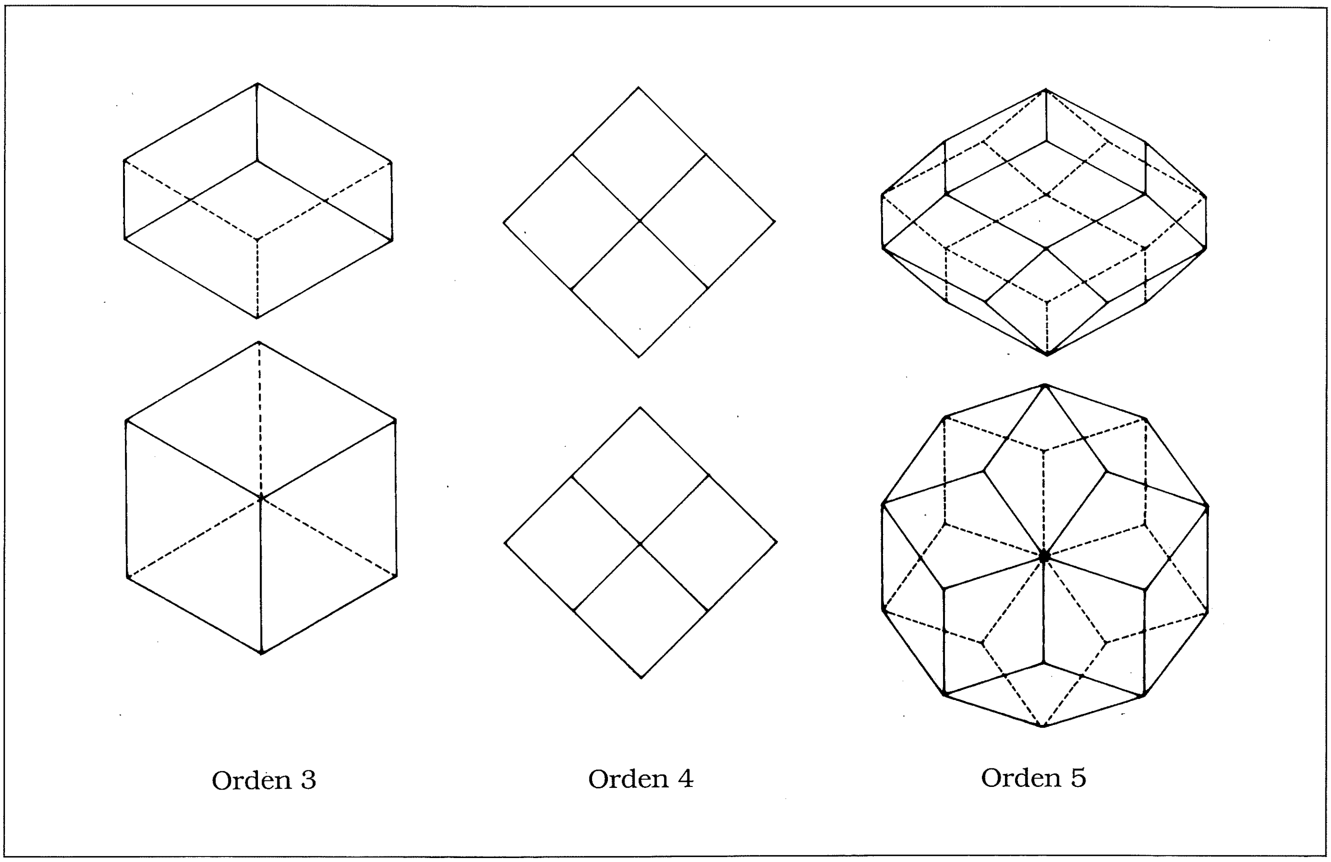


Figura 10a

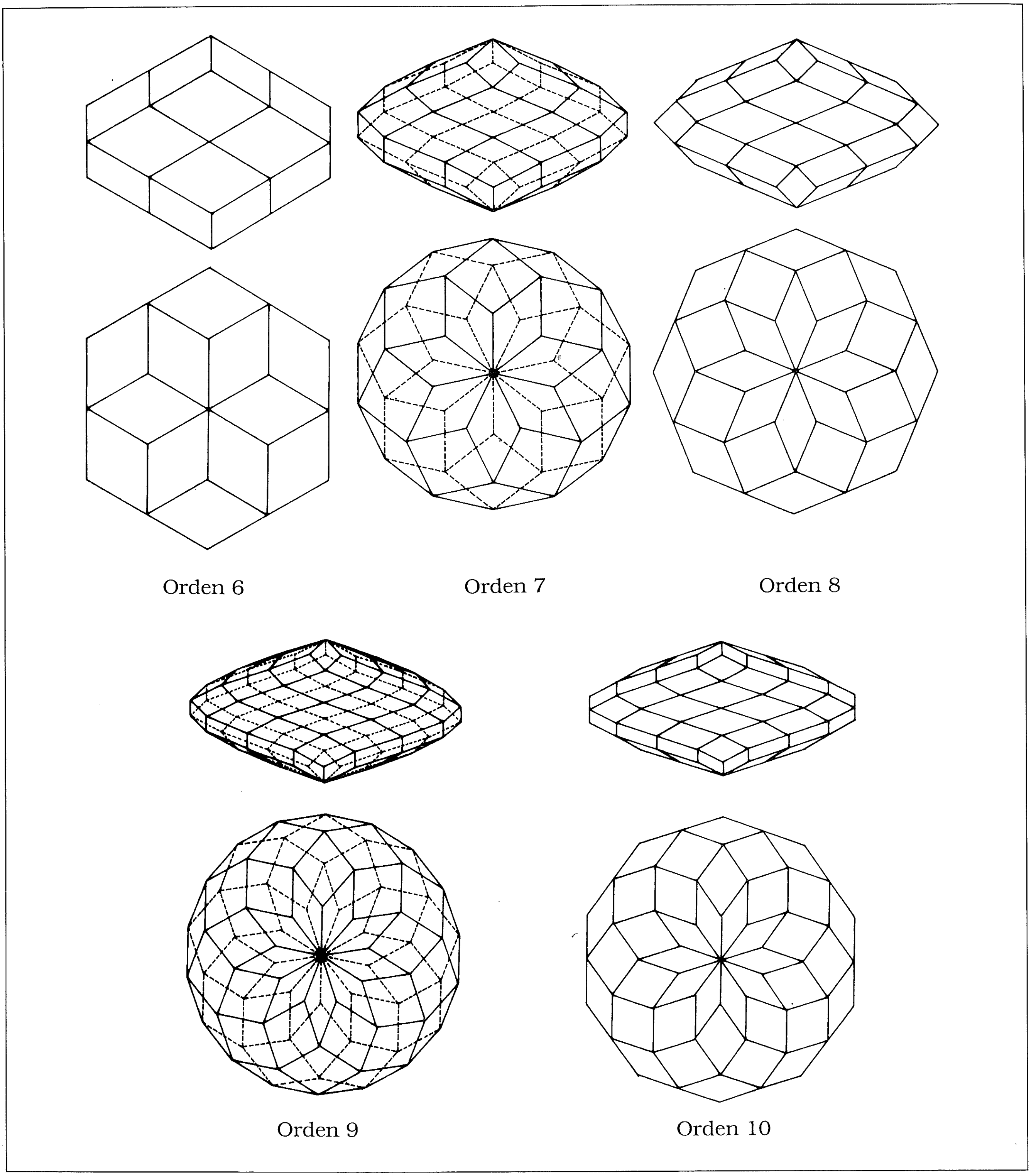


Figura 10b

Todas las caras de los polipiedros son rombos de lados iguales, de donde se deduce que son poliedros equiláteros, es decir, con sus aristas de igual longitud. El número de caras está relacionado con el número de lados del polígono generador, **L**, siendo aquéllas en número igual a **C=L(L-1)**. Podríamos entonces distinguir dos subfamilias: aquella en la que el número **L** es par, -polipiedros de orden par-, y la otra en la que el número de lados del polígono generador en impar. Los polipiedros de orden par son simétricos respecto de su sección polígono regular máximo, y antisimétricos los de orden impar.

Conforme aumenta el número de lados del polígono generador, obtendremos lógicamente polipiedros con mayor número de caras que son *automorfos*, aunque en el límite no se forma un objeto fractal.

El siguiente listado BASIC, proporciona las coordenadas espaciales **X**, **Y**, **Z** de cualquier polipiedro ya sea de orden par o impar, a partir del número de lados del polígono generador, **L**, y del radio de la circunferencia, **R**, que circunscribe a su sección polígono regular máximo:

```
10 INPUT «RADIO»;R
20 INPUT «LADOS»;L
30 PI=3.1415926535#
40 A=PI/L
50 DIM R(L/2)
60 IF ((L/2)-(INT(L/2)))<>0 THEN 270
70 FOR I=L/2 TO 0 STEP -1
80 R(I)=R*COS((2*PI)-(I*A))
90 NEXT I
100 FOR I=L/2 TO 0 STEP -1
110 B=0
120 IF ((I/2)-(INT(I/2)))<> 0 THEN B=A
130 FOR J=0 TO (L-1)
140 X=R(I)*COS(PI/2-2*J*A-B)
150 Y=R(I)*SIN(PI/2-2*J*A-B)
160 IF L=0 OR L=2 THEN 210
170 Z1=(L/2-I)*(R*(SIN(A)))
180 Z2=(L-(L/2-I))*(R*(SIN(A)))
200 PRINT X,Y,Z1
210 IF I=0 THEN 240
220 PRINT X,Y,Z2
230 IF I=L/2 THEN 250
240 NEXT J
250 NEXT I
260 END
270 DI=L/2
280 DIM R((L-1)/2)
290 FOR I=(L-1)/2 TO 0 STEP -1
300 R(I)=(R*COS((2*PI)-((I+.5)*A)))/
    (COS(A/2))
310 IF I=0 THEN R(I)=0
320 NEXT I
330 FOR I=(L-1)/2 TO 0 STEP -1
340 B=0
350 IF ((I/2)-(INT(I/2)))=0 THEN B=A
360 FOR J=0 TO (L-1)
370 X1=R(I)*COS(PI/2-2*J*A-B)
380 X2=R(I)*COS(PI/2-2*J*A-B-A)
390 Y1=R(I)*SIN(PI/2-2*J*A-B)
400 Y2=R(I)*SIN(PI/2-2*J*A-B-A)
410 IF L=1 OR L=3 THEN 450
420 Z1=(L/2-DI)*((R((L-1)/
    2-2))*(SIN(A)))/(COS(A/2))
430 Z2=DI*((R((L-1)/2-2))*(SIN(A)))/
    (COS(A/2))
440 GOTO 470
450 Z1=(L/2-DI)*(R*(SIN(A)))/(COS(A/2))
460 Z2=DI*(R*(SIN(A)))/(COS(A/2))
470 PRINT X1,Y1,Z1
480 PRINT X2,Y2,Z2
490 IF I=(L-1)/2 THEN 510
500 NEXT J
510 DI=DI-.5
520 NEXT I
```

De entre todos los zonoedros así obtenidos existen algunos de especial interés. El polipiedro de orden 3 es más conocido con el nombre de *romboedro*, y además presenta la característica de ser un poliedro equifacial, es decir, con todas sus caras iguales. Otros poliedros equifaciales son el de orden 4, -*dodecaedro rómbico*-, que además es semirregular, -es decir, existe una esfera tangente a todas sus caras-, y el de orden 5, al que Antonio Sáseta denomina *«Poli de Oro»*, y que constituye un icosaedro rómbico equifacial de interesantes posibilidades.

Teselaciones romboédricas aperiódicas

Existen dos romboedros equifaciales cuyas caras tienen sus diagonales en proporción áurea, -por lo que son conocidos como romboedros áureos-, y que teselan aperiódicamente el espacio mediante reglas adecuadas sobre acoplamiento de caras. El desarrollo de estos cuerpos, -preparados para ser recortados en papel y montados uniendo solapas al interior de las caras con algún adhesivo-, se muestra en la **figura 11**, constituyendo un buen ejercicio para la clase su construcción y unión, permitiendo así al alumno investigar las reglas por las que se impide la teselación periódica. Llamaremos a estos romboedros, por su forma, *«agudo»* y *«obtuso»*.

La relación entre romboedros áureos, rombos de Penrose y polipiedros es inmediata: con 5 romboedros agudos y 5 obtusos convenientemente unidos se forma el icosaedro rómbico equifacial de orden 5. La proyección ortogonal de este polipiedro sobre un plano perpendicular a su eje de máxima simetría, muestra los rombos de Penrose.

Pero volvamos por un momento a las teselaciones mediante dardos y cometas: la más interesante de ellas es la denominada *«rueda de carro»*, **(Fig. 12)**.

Fijemos nuestra atención en los motivos semi-infinitos marcados en gris y que Conway denomina *«gusanos»*. Existen dos gusanos completos que se extienden a través de la rueda central. A parte de estos dos «diámetros», y el interior de la rueda, la configuración presenta simetría decagonal. Supongamos que «vaciamos» de teselas la rueda central y volteamos uno de los gusanos. Este gusano seguirá encajando con todas las tesela vecinas, sin embargo, ahora será imposible teselar la rueda central, quedando un **hueco**, en el sentido de región vacía dentro de una pavimentación infinita y que es imposible de teselar legalmente. Esto es posible hacerlo con cada uno de los gusanos, que son 10, con lo que eliminando combinaciones iguales

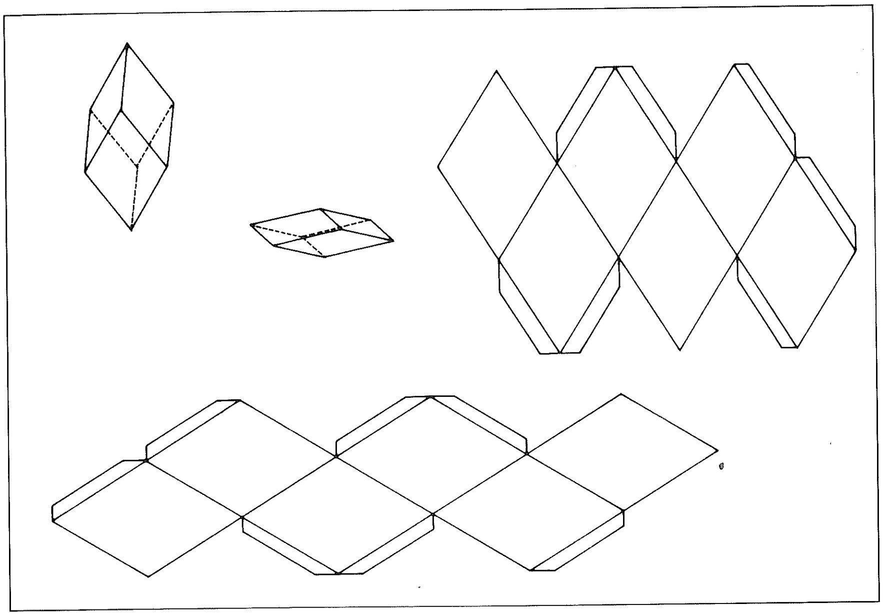


Figura 11

por giro o simetría, obtenemos 60 huecos que poseen una propiedad notable: *imponen el motivo que lo rodea*. Esto huecos son denominados por Conway, *«decápodos»* porque pueden ser pavimentados por 10 triángulos isósceles mitades de un dardo.

Si asimilamos el decápodo a una pieza maciza, cada una de ellas puede ser considerada como la imperfección que solidifica un cristal, pues impone una única pavimentación del plano para cada una. En cuanto a la teselación romboédrica espacial aperiódica, ya sabemos que 5 romboedros agudos y 5 obtusos componen un icosaedro rómbico equifacial. Añadiendo 5 más de cada tipo, obtenemos un **triacontaedro rómbico**, poliedro semirregular de 30 caras rombo iguales. Si seguimos añadiendo romboedros adecuadamente, orlando el triacontaedro con más romboedros de ambos tipos, podemos originar otro triacontaedro, y así continuar obteniendo triacontaedros cada vez mayores hasta teselar completamente el espacio de una forma no periódica.

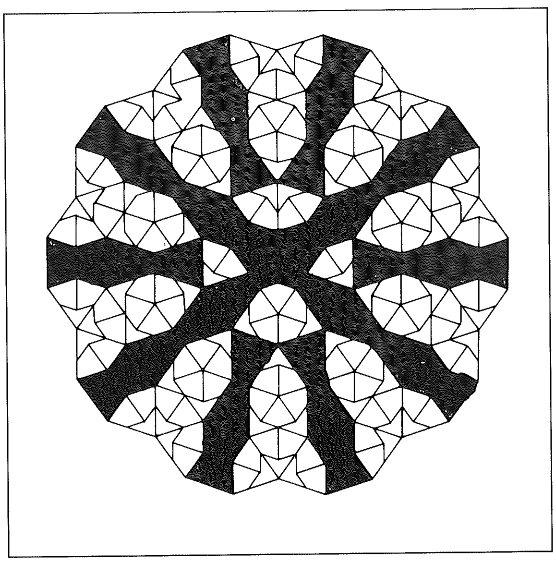


Figura 12

Sin embargo, el icosaedro rómbico del que partimos no puede volver a ser obtenido mediante ninguna teselación fractal infinita, quedando en el interior de la teselación anterior como una impureza que invita a plantear conjeturas como las que propone Antonio Sáseta:

¿Impondrá, al igual que los decápodos de Conway, el icosaedro rómbico equifacial una determinada teselación cristalina del espacio?

¿Existirá un conjunto finito de decápodos en el sentido de huecos en el espacio que impongan un determinado empaquetamiento del mismo?

Bibliografía

[1] GARDNER, M. (1990) **Mosaicos de Penrose y Escotillas Cifradas**. Labor. Barcelona.

[2] DÍAZ MARTÍNEZ, E. (1989) **Poliedros semirregulares. Parte I. Poliedros Equiángulos**. Departamento de Expresión Gráfica Arquitectónica. Universidad de Sevilla.

[3] DÍAZ MARTÍNEZ, E. y ORTEGA NIETO, L. A. (1993) **Poliedros Semirre-gulares. Parte II. Poliedros Equifaciales**. Departamento de Expresión Gráfica Arquitectónica. Universidad de Sevilla.

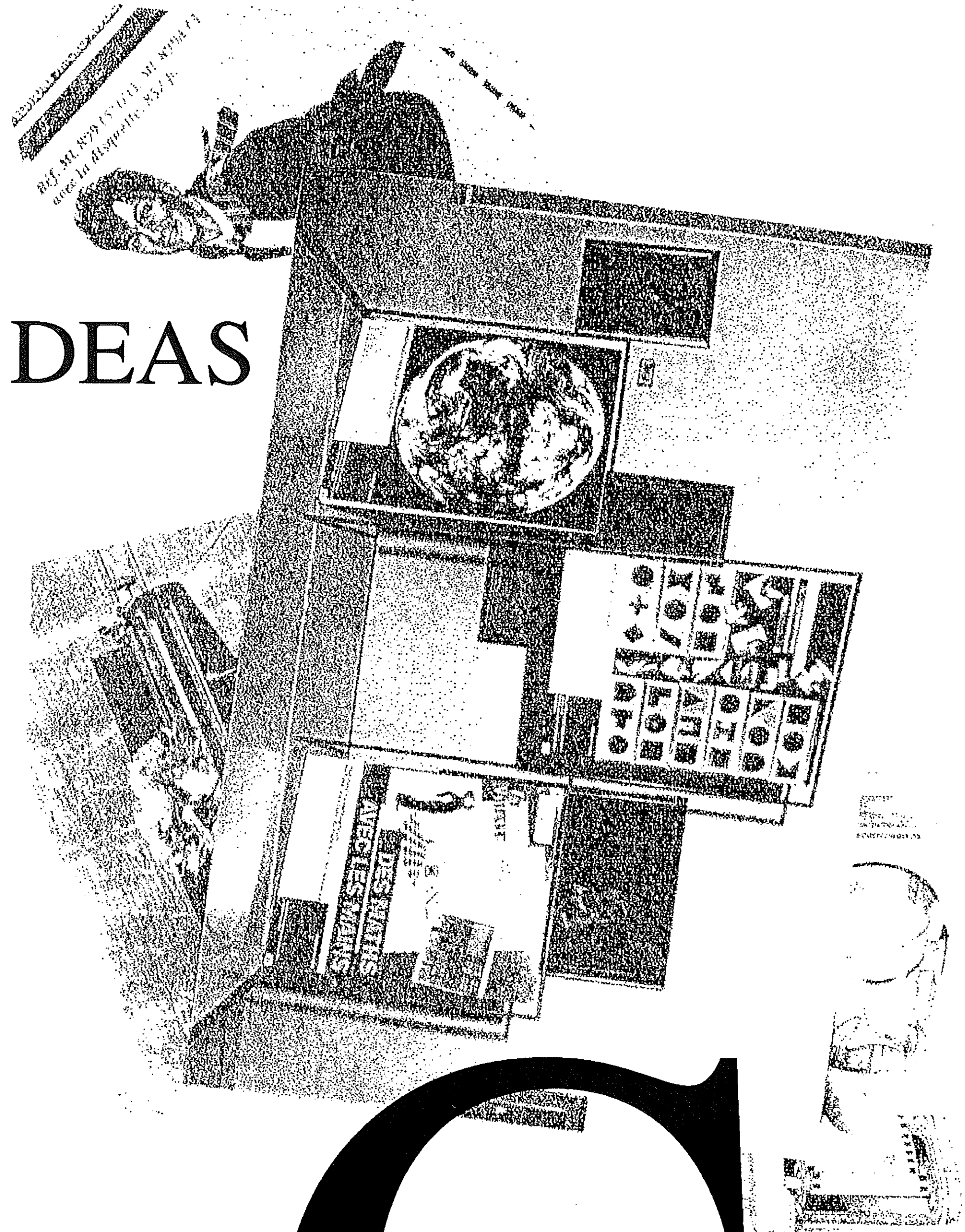
[4] SÁSETA VELÁZQUEZ, A. y otros (1992) **3as Jornadas de Informática Aplicada a la Arquitectura**, pp. 49 a 54. Escuela Técnica Superior de Arquitectura. Universidad de Sevilla.

[5] PÉREZ SORDO, M. T. y NESTARES PLEGUEZUELO, P. (1990) **Tramas geométricas en la Decoración Cerámica de la Alhambra**. Universidad de Granada.

[6] PENROSE, R. (1991) **La Nueva Mente del Emperador**. Mondadori.

Francisco J. Salguero Andújar
Departamento de Ingeniería de Diseño y Proyectos
Universidad de Huelva

IDEAS



PARA LA CLASE

Elementos de Euclides: una aplicación de la historia al aula, enfocada desde la resolución de problemas

Joaquín Fernández Gago
José Gutiérrez Bueno
Francisco Hinojosa Onieva
Damián Jiménez Vázquez
Emilio J. Muñoz Velasco

El artículo se enmarca en el trabajo del Seminario Permanente de Historia de las Matemáticas de Málaga. Se presenta aquí lo que fue una clase en que se les planteó a los alumnos una actividad construida sobre la mediatriz, extraída del Libro I de los «Elementos» de Euclides. Metodológicamente, se enfoca desde la resolución de problemas por ser éste el ambiente natural en las clases del grupo elegido.

Introducción

La acción del Seminario Permanente de Historia de las Matemáticas de Málaga tiene como eje el diseño de actividades y su puesta en práctica en las clases a través del estudio - entre otros temas - de la influencia del conocimiento y de la utilización de la Historia de las Matemáticas en el aprendizaje de su lenguaje. El hecho de centrarnos en **Historia de la Matemática** está motivado, tal como se señala en el Diseño Curricular de la E.S.O, por **la reorganización de conceptos que hace el alumno al desenfocarlos de su contexto científico actual**.

Por ejemplo, en el caso concreto del lenguaje matemático se pueden comprender su arbitrariedad y su eficacia al comparar los métodos de los griegos con los de Fermat.

También es de destacar la importancia de la historia para contribuir a que los estudiantes aprecien el papel que las Matemáticas han jugado y siguen jugando en el desarrollo científico y en el progreso de la humanidad.

Lo que aquí se presenta es producto de una clase dirigida a los alumnos de 2º de BUP del Instituto de Bachillerato «Licinio de la Fuente», en Coín (Málaga). En ella se promueve una dinámica participativa orientada desde continuas preguntas, incitando a que el alumno busque las respuestas para incidir sobre la formación y reestructuración de sus conocimientos. A la vez, se pretende que los alumnos desarrollen su capacidad de expresión oral para obtener mayor precisión en el dominio del lenguaje matemático. Esta actividad contiene muy poco del estilo deductivista de los «Elementos» de Euclides, ya que la estructura natural de la clase en que trabajamos es la típica de resolución de problemas (en el sentido que inició Polya).

Objetivos

1. Extraer el concepto de mediatriz de su actual contexto científico, enfocándolo primero desde un punto de vista empírico (previo al método deductivo de los griegos), y después desde la perspectiva de la geometría clásica (construcción de Euclides).
2. Potenciar el uso del lenguaje algebraico y observar sus ventajas e inconvenientes.
3. Relacionar los conceptos de distancia, ángulo, bisectriz, mediatriz, recta, triángulo, lugar geométrico.
4. Incitar al alumno a entender un problema por medio de preguntas tipo: ¿Cuáles son los datos?, ¿cuál es la incógnita?, ¿cuál es la condición?.
5. Incitar al alumno a usar y reconocer estrategias para resolver

problemas: hacer más fácil el problema y buscar semejanzas con conceptos o problemas conocidos, o escoger una notación adecuada.

6 Favorecer el gusto por la certeza, incitando a los alumnos a que fundamenten sus propios resultados.

7 Ver la matemática más como un proceso evolutivo que como un conjunto de resultados estáticos.

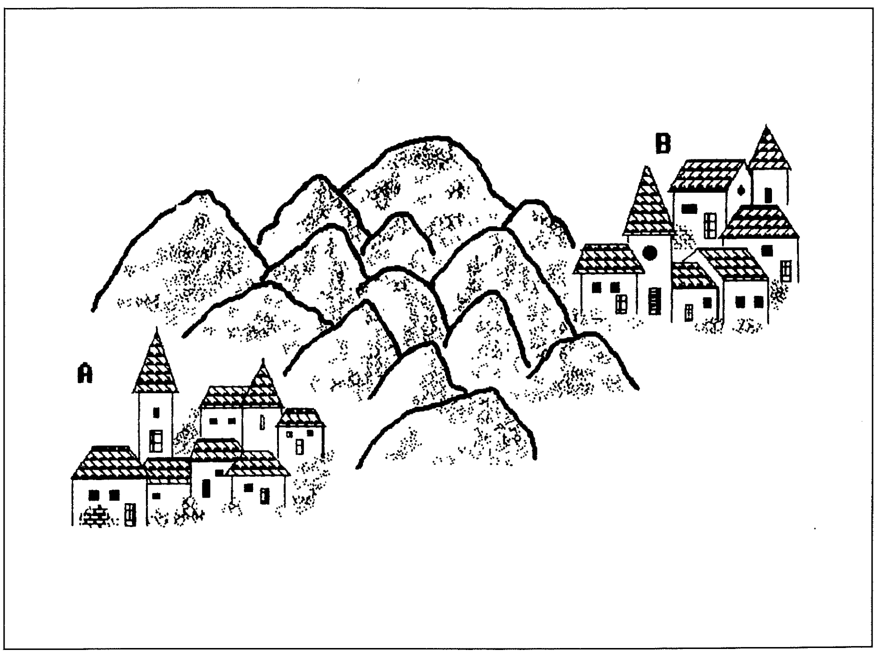
8 Incitar a los alumnos a utilizar el método ensayo-error.

Motivación

Se comienza planteando a los alumnos el siguiente problema para que lo intenten resolver como quieran.

¿Dónde situarías una fábrica que equidiste de dos pueblos separados por una cadena montañosa?

- ¿Qué se te ocurre?
- ¿Cuántas posibilidades tienes de colocar la fábrica?
- ¿Te suena algo a la asignatura de Dibujo?

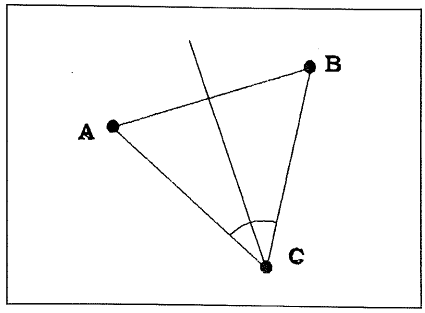


Respuestas de los alumnos

En primer lugar observamos, al pasar por sus bancas, que todos van respondiendo que sólo hay una. Mas tarde afirman que dos. Ello es porque anteriormente, con otra actividad, han construido con regla y compás un triángulo equilátero. En este punto pregunto: ¿Sólo hay dos? Rápidamente responden que hay infinitas, aunque algunos todavía no lo tengan claro. Es el momento de reorganizar la información y ver en qué se han equivocado. Pronto surgen explicaciones, afirmando que la distancia de la fábrica a los pueblos no tiene por qué ser la misma que la distancia entre los pueblos.

Construcción euclidiana

Ellos leen la que viene a continuación extraída de la Proposición 10 del Libro I de los «Elementos» de Euclides.



1º) Llamamos **AB** al segmento que queremos dividir en dos; a partir de éste construimos el triángulo equilátero **ABC**.

2º) Calculamos ahora la bisectriz del ángulo **ACB**. Esta recta es la buscada.

(Para dibujar la bisectriz de un ángulo, te será muy útil la Proposición 9, o cualquier libro de Dibujo).

Para los alumnos no presenta mucho interés, pues prácticamente ellos la habían hecho ya a partir de la Motivación.

Ejercicios

Les proponemos los siguientes:

1) En el triángulo equilátero **ACB**, la altura dividía a la base en dos partes iguales. ¿Es esto cierto en cualquier triángulo?. Intenta justificarlo.

2) Se llama mediatriz **(*)** de un segmento al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos de dicho segmento. Escribe en coordenadas cartesianas la ecuación de la mediatriz de un segmento: comienza por ejemplo con los puntos **A(3,0)** y **B(0,3)**. ¿Pasa la mediatriz por el punto **(0,0)**? ¿y por **(1'5,1'5)**?. Responde de dos formas distintas a esta pregunta: por el dibujo y por la ecuación de la recta. Hazlo ahora de una forma más general eligiendo dos puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2).

3) Busca cinco puntos que estén a la misma distancia de **A** que de **B**.

4) ¿Qué diferencia encuentras entre lo que hizo Euclides y lo que has hecho tú en el ejercicio anterior? ¿Por qué Euclides no usó coordenadas?.

Alumnos. Sobre el primero se observan por las bancas las siguientes estrategias:

- Usar el teorema de Pitágoras. Su razonamiento consiste en que las partes en que queda dividido el segmento son los catetos de dos triángulos rectángulos iguales.

- usar la trigonometría que ya conocen: las partes en que queda dividido el segmento como el coseno de un mismo ángulo.

- doblando el papel por la altura ellos ven que son iguales.

Respecto al segundo problema se establece un diálogo muy interesante.

Profesor: **Vamos a plantear el problema**: ¿Cuáles son los **datos**?, ¿cuál es la **incógnita**?, ¿cuál es la **condición**?

Alumnos: Los datos son que distan de los pueblos igual.

Profesor: ¡Mejor, eso lo ponemos en la condición!

Alumnos: Los datos son los dos puntos o pueblos.

Profesor: **¿Cómo los llamamos**?

Alumnos: Por ejemplo A y B. (Surge la siguiente pregunta) ¿Pero quiénes son A y B?

Profesor: Como no los conocemos **hagámoslo más fácil** y supongamos que son dos puntos concretos del plano, como por ejemplo A(3,0) y B(0,3).

Centrémonos ahora en la condición.

Alumno: Yo tengo otra condición, y es que la recta es la perpendicular que divide a la distancia AB en dos.

Profesor: Está muy bien pero queda mejor expresado diciendo que es la perpendicular al segmento AB que pasa por el punto medio de AB.

Bueno ¡ya podéis atacar el problema! Usemos la estrategia **¿A qué os suena**?.

(Sigue a continuación un silencio que no entiendo muy bien). Sí, algo de lo que tenemos escrito en la condición lo hemos dado en clase.

Alumnos: ¿la distancia entre puntos? (lo dicen dudando).

Profesor: Vamos a traducirlo al lenguaje algebraico de Fermat.

Alumnos: (x,y) está en la mediatriz cuando d((x,y)(3,0)) = d((x,y)(0,3))

Profesor: Bueno ahora decidme cómo se calcula la distancia entre puntos.

Alumnos: Se busca un triángulo rectángulo en los puntos A y B.

Profesor: No hace falta que lo deduzcáis, decidme la fórmula.

Alumnos (a coro): raíz cuadrada de $x_1 - x_2$ al cuadrado más $y_1 - y_2$ al cuadrado.

Profesor: ¿Quién es aquí x_1? ¿Quién es aquí x_2? ¿Quién es y_1? ¿Quién es y_2?.

Después de pensar las variables escriben la fórmula

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-3)^2}$$

Profesor: Bueno, sólo queda ahora hacer cálculos.

Alumnos: ¿Para quitar las raíces elevamos al cuadrado?

Profesor: Sí.

Alumno: ¿Es $(x-3)^2 = x^2-9$?

Profesor: No, ¿recuerdas del año pasado la fórmula $x^2 + 3^2 - 6x$?

Alumno: ¡Ah! ¡Ya recuerdo!

Profesor: ¿Qué queda después de los cálculos?

Alumnos: $-6x + 6y = 0$

Profesor: Si os da igual $y = x$, que es la ecuación explícita de una recta.

¿Es lógico el resultado que ha salido?

Alumnos: No entiendo.

Profesor: Sí, nos ha salido una recta que pasa por el (0,0). Pero eso yo ya lo sabía sin hacer cálculos, ¿por qué?.

Alumnos: Porque (0,0) está separado de A tres unidades, y (0,0) está separado de B también tres unidades.

Profesor: ¡En efecto! ¿y por qué los puntos tienen la x igual a la y?

(Silencio que sí entiendo)

Por ejemplo, el punto (1'5,1'5) está en la mediatriz porque es el punto medio del segmento AB. Bueno, usar ahora la otra estrategia,... (pero toca el timbre y pasan de mí).

(*) Es importante aclarar que Euclides en ningún momento de la **Proposición 10** llama mediatriz a la recta que buscamos. Es más, ni siquiera demuestra que la recta buscada sea el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos puntos fijos.

Bibliografía

* BOYER, CARL B. **Historia de la matemática**. Ed. Alianza. Madrid (1986)

* GUZMÁN, MIGUEL DE. **Aventuras matemáticas**. Ed. Labor. Barcelona (1986)

* HEATH, THOMAS L. **The Thirteen Books of Euclid's Elements**. Dover (1956)

* MASON, J.- BURTON L.- STACEY K. **Pensar matemáticamente**. Ed. Labor-MEC. Barcelona (1989)

* POLYA, G. **Cómo plantear y resolver problemas**. Ed. Trillas. México (1965)

Joaquín Fernández Gago
José Gutiérrez Bueno
Francisco Hinojosa Onieva
Damián Jiménez Vázquez
Emilio J. Muñoz Velasco
I.B. Licinio de la Fuente

Códigos Secretos: otra forma de aplicar las matrices en Bachillerato (16-18)

Julián Baena Ruiz

Tras una breve introducción para hacer referencia a distintos tipos de códigos secretos, el artículo estudia con detalle, esquemáticamente y mediante ejemplos, los códigos matriciales. Se expone, además, una forma de automatizar dichos códigos en el aula, mediante un programa escrito en dBASE III Plus. La parte final consta de unas preguntas sobre sus posibilidades didácticas.

Objetivo

Se quiere presentar la criptografía como un campo de aplicación del cálculo matricial y un contexto para conectar dicho estudio con la programación de ordenadores. Las ideas expuestas pretenden ser útiles a profesores que busquen enfoques distintos de esta parte del álgebra lineal y, para ello, estén dispuestos a utilizar ordenadores.

Introducción

Criptografía significa arte de escribir con una clave secreta. Nos referiremos en adelante a esta clave con el nombre de código.

Algunos códigos secretos, a los que llamaremos elementales, se basan en la sustitución de cada carácter por un determinado símbolo. Por ejemplo si la letra A se sustituye por el signo +, la M por ?, O por % la palabra "AMO" se codifica: "+?%". Un ejemplo de ellos aparece en el cuento de Edgar Allan Poe[1] "El escarabajo de oro" [1]; aquí se explican, razonadamente, estrategias que conducen a descifrar un criptograma. Todos los códigos elementales son equivalentes y fáciles de descifrar comparando las frecuencias con que aparecen los símbolos en el texto codificado, con las frecuencias de aparición de los caracteres en el idioma usado para escribir. Algunos autores (profesores) han propuesto actividades para clase, usando códigos de este tipo [2]; en ellas se deja claro lo fácil que resulta descubrir un código elemental utilizando la Estadística.

En los últimos años, y debido al interés creciente de proteger la información en las comunicaciones, la criptografía ha logrado grandes progresos a partir de códigos secretos más avanzados, cuya descripción sería imposible sin conocimientos de álgebra [3]. Entre ellos podemos citar los que usan vectores y matrices [4] (para nosotros matriciales), basados en las ideas de Hill [5], de los que nos vamos a ocupar a continuación, y otros, que se estudian a partir de resultados de la Teoría de Números [6], iniciados con trabajos de Diffie y Hellman donde se trata la criptografía en términos matemáticos y un "sistema criptográfico" es considerado como una "familia uniparamétrica de transformaciones invertibles" [7] (pág. 646).

Códigos matriciales

Tratando de evitar el abuso de formalismos, que puedan aburrir a los menos iniciados, la exposición de esta sección se basa en casos particulares; así el lector podrá dar, a medida que avanzamos, un tratamiento más general a todo lo que hay escrito.

Comenzamos definiendo un conjunto S formado por todos los signos disponibles para escribir los textos que después se codificarán. Este conjunto, por comodidad, lo consideramos compuesto por las letras del alfabeto castellano, (excepto la ll y la ch) el espacio (que representaremos en esta sección mediante "-"), el signo de interrogación "?" y el punto ".". Nuestro conjunto S tiene 30 elementos.

$$S = \left\{ \begin{matrix} A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,Ñ, \\ O,P,Q,R,S,T,U,V,W,X,Y,Z,.,?,- \end{matrix} \right\}$$

Definición: Llamamos S-mensaje a una secuencia de caracteres del conjunto S, que escribiremos siempre entre comillas.

Por ejemplo:
M = "HOLA-BUENAS-NOCHES"

[1] Poe fue un reconocido criptoanalista.

Establecemos, a continuación, una correspndencia 1-1, f, de S en Z_{30} (conjunto de los enteros módulo 30). Por ejemplo elegimos f(x)=n, donde n es la clase del número que ocupa x en el orden dado anteriormente. De esta forma tenemos identificado S con Z_{30}.

1. Pasos a seguir para la codificación

(con un ejemplo 2x2)

Vamos a codificar el mensaje M del ejemplo anterior. Para ello seguiremos los siguientes pasos:

1.1. Elegimos una matriz 2x2 invertible sobre Z_{30} por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Esta matriz determina unívocamente el código y su dimensión 2x2 da nombre a los códigos de este tipo.

1.2. Pasamos, mediante la aplicación f, del mensaje a un conjunto ordenado de números (imágenes de los caracteres que aparecen en M). En nuestro caso:

8 16 12 1 0 2 22 5 14 1 20 0 14 16 3 8 5 20

1.3. A partir de este conjunto definimos, ordenadamente, pares de números como se hace a continuación:

(8,16) (12,1) (0,2) (22,5) (14,1) (20,0) (14,16) (3,8) (5,20)[2]

1.4. Multiplicamos por la matriz A, cada uno de los pares anteriores y resulta:

(20,12) (7,16) (2,8) (1,12) (23,18) (10,20) (8,18) (2,5) (0,25)

1.5. Obtenemos una nueva secuencia numérica:

20 12 7 16 2 8 1 12 23 18 10 20 8 18 2 5 0 25

1.6. Aplicando la inversa de f, conseguimos el mensaje codificado:

M'= "SLGOBHALUQJSHQBE-X"

Llamaremos a M' S-mensaje codificado por A o imagen de M mediante A, y escribiremos:

M'= A(M)

2. Pasos a seguir para decodificar un mensaje

Es un proceso análogo al anterior. Consiste en hacer lo mismo que en 1. partiendo del mensaje M' y eligiendo, en el primer punto 1.1, como matriz, la inversa de A (que llamaremos B):

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 29 \\ 29 & 8 \end{pmatrix}$$

No es necesario efectuar cálculos para asegurar que, el S-mensaje codificado de M', mediante B, es M.

3. Generalización

Es imprescindible definir con precisión el conjunto S de símbolos que se utilizarán para escribir, y su cardinal, k, nos conducirá a trabajar en el anillo Z_k de los enteros módulo k.

Como se indicó antes, el código viene determinado unívocamente por la matriz invertible A (definida sobre Z_k). Si A es cuadrada de orden n, en el punto 1.3. formaremos n-uplas y completaremos la última con los ceros que sean necesarios (en el caso de que la longitud del S-mensaje de partida no sea múltiplo de n).

Podemos, incluso codificar usando matrices no cuadradas mxn procurando que para A (la que codifica) exista una matriz B de orden nxm tal que el producto A.B sea la matriz I (identidad) mxm; hablándose así, según la matriz, de códigos 2x2, 3x3, 4x5, etc.

Conviene destacar que un código 1x1, definido por unidad de Z_k, será a todos los efectos un código elemental, pues lo único que introduce es una permutación en el orden de los caracteres.

Automatizando el proceso

Se presenta un programa (ver anexo), fruto de actividades llevadas a cabo, tanto dentro como fuera del aula, con un grupo de 18 alumnos de COU[3] que, en su mayoría (14), habían recibido (en informática de 3º) un curso completo de dBASE III, manejo interactivo y programación. El trabajo informático surgió a partir de una opinión compartida: los códigos matriciales deben automatizarse, y una razón fundamental: no es operativo ni eficaz aplicarlos manualmente.

El Programa, escrito en dBASE III PLUS, permite codificar y decodificar el contenido de una base de datos (dBASE), total -todos los campos- o parcialmente -algunos campos-.

Se ha elegido como conjunto de símbolos, el de los 255 caracteres

---

[2] Se colocaría un cero en el último par, si el mensaje de partida tuviese un número impar de caracteres.
[3] Del IB " Mediterráneo " de Salobreña (Granada)

ASCII, y las funciones "asc" y "chr", incorporadas al lenguaje de programación usado, han sido consideradas como f y f^{-1} respectivamente. No fue necesario, para nuestros fines, hacer un estudio formal de los anillos Z_k, ni hubo grandes dificultades, por parte de los alumnos, con las operaciones en Z_{255}; a estas edades ya se ha trabajado, de manera intuitiva, la aritmética modular en diversas situaciones como, por ejemplo, en operaciones con ángulos y su reducción al primer cuadrante.

Cuestiones posteriores

Aparte de ideas para su ampliación y mejora, la ejecución del programa puede suscitar preguntas como las siguientes: si codificamos dos veces consecutivas, ¿el resultado es una codificación matricial?, en caso afirmativo ¿qué matriz define este nuevo código? ¿Qué situaciones de codificación pueden expresarse con el producto de matrices? ¿Qué propiedades debe cumplir una matriz para que al codificar iteradamente, nos encontremos en algun paso el texto inicial?.

En las respuestas a estas y otras muchas preguntas, se espera surjan reflexiones que faciliten la elaboración de propuestas de trabajo dirigidas a las clases de los nuevos bachilleratos. En ellos sí tiene cabida el, tan olvidado, estudio de las matrices; además de su aplicación en la regla de Cramer[4], no deberíamos olvidarnos de las posibilidades educativas como modelos de representación[5] que facilitan la matematización en muchas y diferentes situaciones.

Bibliografía

[1] POE, E. A. (1970). **Narraciones Completas**. Ed. Aguilar, Madrid. pp. 383-432.

[2] AZARQUIEL (Grupo) (1982). **Curso Inicial de Estadística en el Bachillerato**. Ed. ICE, Madrid.

[3] GARDNER, M. (1977). **Claves de nuevo tipo cuyo desciframiento ocuparía unos cuantos millones de años**. Investigación y Ciencia 13. pp. 96-101.

[4] CHILDS, L. (1979). **A concrete introduction to higher algebra**. Ed. Springer, New York.

[5] HILL, L. S. (1931). **Concerning Certain lineal transformations apparatus of cryptography**. American Mathematical Monthly 38. pp. 135-154

[6] NICOLAS, J. L. (1984). **Test de primalité**. Expositions Mathematicae 2. pp. 223-234.

[7] DIFIE, W.; HELLMAN, M. E. (1976). **New directions in cryptography**. IEEE Transactions on Informations Theory (vol. IT-22) 6. pp. 644-654.

[8] MEC. (1991). **Bachillerato. Estructura y contenidos**. Ed. MEC, Madrid.

[9] CARRETERO, R. ET. AL. (1989). **Diseño curricular de Matemáticas 16-18**. Ed. Consejería de Educación y Ciencia, Sevilla.

ANEXO

A.- FICHERO PROGRAM.PRG

```
set echo off
set talk off
set procedure to proced
clear
text
      ESTE PROGRAMA CODIFICA O DECODIFICA
      CUALQUIERA DE LOS CAMPOS DE UNA BASE
      DE DATOS
      (Es importante que tenga delante el nombre de
      los campos de la base que desea codificar)
endtext
do while .t.
  text
      ¿QUÉ DESEA?
             (A) CODIFICAR
             (B) DECODIFICAR
             (C) SALIR
  endtext
  wait "PULSE UNA OPCION..." to op
  if upper(op)="A"
    do codifica
  endif
  if upper(op)="B"
    do decodif
  endif
  if upper(op)="C"
    clear
    clear all
```

[4] Vuelve a incluirse en los documentos del MEC [8].
[5] En este sentido se hacen recomendaciones desde los diseños de Andalucía [9].

```
      close procedure
      ?"ADIOS...."
      exit
   endif
enddo
```

B.- FICHERO PROCED.PRG

```
PROCEDURE CODIFICA
clear
accept "NOMBRE DE LA BASE DE DATOS..." to base
use &base
clear
a11=2
a12=9
a21=1
a22=5
do while .t.
   accept "Nombre del campo a codificar..." to field
   do while .not. eof ( )
      store &field to campo
      result=""
      if mod(len(campo),2)=1
         campo=campo+" "
      endif
      j=1
      do while j<=len(campo)/2
          k=len(campo)
          x1=asc(campo)
          x2=asc(substr(campo,2,k-1))
          campo=substr(campo,3,k-2)
          y1=x1*a11+x2*a21
          y2=x1*a12+x2*a22
          result=result+chr(mod(y1,255))+chr(mod(y2,255))
      enddo
      ?result
      replace &field with result
      skip 1
   enddo
   clear
   do while .t.
     wait " CAMPO &field CODIFICADO. ¿CODIFICAR OTRO
CAMPO? (S/N)  " to r
     if r$"SsnN"
        go top
        exit
     endif
   enddo
   if r$"Nn"
     exit
   endif
enddo
return

PROCEDURE DECODIF
clear
accept "NOMBRE DE LA BASE DE DATOS..." to base
use &base
clear
a11=5
a12=246
a21=254
a22=2
do while .t.
   accept "Nombre del campo a decodificar..." to field
   do while .not. eof ( )
      store &field to campo
      result=""
      if mod(len(campo),2)=1
         campo=campo+" "
      endif
      j=1
      do while j<=len(campo)/2
          k=len(campo)
          x1=asc(campo)
          x2=asc(substr(campo,2,k-1))
          campo=substr(campo,3,k-2)
          y1=x1*a11+x2*a21
          y2=x1*a12+x2*a22
          result=result+chr(mod(y1,255))+chr(mod(y2,255))
      enddo
      ?result
      replace &field with result
      skip 1
   enddo
   clear
   do while .t.
     wait "CAMPO &field
DECODIFICADO.¿DECODIFICAR OTRO CAMPO?(S/N) "
to r
     if r$"SsnN"
        go top
        exit
     endif
   enddo
   if r$"Nn"
     exit
   endif
enddo
return
```

Julián Baena Ruiz
I.B. "Mediterráneo".
Salobreña (Granada).

Investigación dirigida: Medición del radio de la Tierra

Víctor Arenzana Hernández
Vicente Trigo Aranda

Introducción

La génesis de este artículo fue la experiencia realizada con (y por) nuestros alumnos para que conocieran el procedimiento seguido por Eratóstenes para medir el radio de la Tierra y lo repitiesen. Es decir, un primer y claro objetivo de la experiencia era que los alumnos aprendieran un método clásico e ilustrativo de la rigurosidad e ingenio científicos; sin embargo, también nos planteamos un segundo objetivo que, a nuestro entender, es mucho más interesante y formativo: ver cómo los alumnos eran capaces de investigar por su cuenta con unas pocas indicaciones, con el fin de conocerlos mejor y tratar de fomentar las capacidades específicas de cada uno.

La experiencia consistió en ofertar a nuestros alumnos de 2º de BUP la posibilidad de repetir el experimento de Eratóstenes, de tal manera que la realización de ese trabajo (fuera del horario lectivo) sólo serviría para subir su nota. Por tanto, en este artículo se analizará la forma de trabajar de un determinado alumnado, ni el mejor ni el peor, con una característica común: su interés, al menos en lo relativo a su nota, y que, con todo, muestra una serie de iniciativas propias de una juventud creativa de la que se pueden esperar buenos frutos. Prueba de ello es que haya suscitado en nosotros tanto interés y entusiasmo como para ponernos a escribir este trabajo con el fin de difundir las ideas y recursos que mostraron nuestros alumnos en la reproducción del método de medición del radio de la Tierra por Eratóstenes.

La importancia de la investigación dirigida en la enseñanza

El aprendizaje es fundamentalmente un ir descubriendo día a día los principios fundamentales del conocimiento, detectar dificultades, resolver pequeños problemas que se ponen en medio del problema principal que inicialmente nos habíamos planteado. Es, en último término, una actividad personal que el individuo desarrolla a través de muchos medios, pero de lo que no cabe duda es de que cuando los alumnos han realizado un «descubrimiento», por pequeño que sea, éste tiene muchos aspectos enriquecedores para su personalidad y desarrollo científico. En primer lugar adquieren confianza en sí mismos y en sus propios razonamientos; son capaces, porque *les ha subido la moral*, de leer con espíritu crítico trabajos especializados incluso de autores reputados; emplean en otros enfrentamientos con problemas el método de analogía y, lo que es importante, son capaces de abordar un problema con la esperanza de resolverlo. Todo esto no es más que una somera enumeración de la transformación que se produce en el espíritu del alumno cuando ha realizado un pequeño descubrimiento o se siente capaz de hacerlo.

Está claro que el alumno por sí solo es difícil que lleve a cabo ninguna investigación académica que le pueda servir para su vida futura. Es por lo que adquiere en la enseñanza una importancia vital la investigación dirigida. Esto es, una investigación en la que al alumno se le plantean una serie de cuestiones a partir de un problema claramente planteado.

Hemos de hacer notar que este tipo de investigación, que, a primera vista, puede parecer escolar y un tanto artificial no dista mucho de la Investigación real. Así, por ejemplo, en la Universidad se trabaja en amplios programas de investigación claramente planteados y bien conocidos por todos los investigadores que trabajan en ese campo y las preguntas son formuladas por los propios investigadores o por un equipo. El paralelismo entre la investigación dirigida y la investigación con mayúsculas es claro. La eficacia de la investigación dirigida reside fundamentalmente en la elección de los temas a trabajar y en las sugerencias más o menos fructíferas que seamos capaces de hacer los profesores.

El sustrato filosófico general de la propuesta de la investigación dirigida está claramente emparentado con el de la resolución de problemas, pero no se limita únicamente a abordar problemas puramente matemáticos que atraen y divierten a los alumnos con una especial disposición hacia las matemáticas. La investigación dirigida plantea cuestiones más amplias, que van desde desarrollar la capacidad de relación y el fomento de recursos humanos hasta el desarrollo del conocimiento científico.

Nosotros en esta ocasión mostraremos un ejemplo de una investigación dirigida a la que los alumnos han aportado una serie de respuestas interesantes que analizaremos en los apartados siguientes.

Presentación y didáctica de la Investigación dirigida a los alumnos

La investigación se les presentó a los alumnos que deseaban subir nota por medio de una guía de investigación elaborada a tal efecto y sin darles ninguna explicación. De esta forma, debían desarrollar la comprensión verbal, además de aprovechar los conocimientos que habían adquirido durante el mismo curso en sus estudios en las asignaturas de Geografía y Matemáticas, en las que se les habían presentado los principales conceptos que figuraban en la guía de investigación. La guía que se les presentó fue la siguiente:

Medición del radio de la Tierra

Desarrollo expositivo

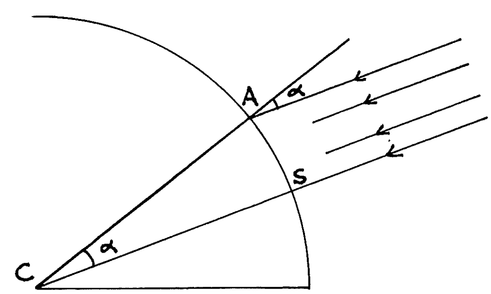
Eratóstenes (275-195 a. C.) era la personalización de la típica imagen de un sabio griego que ha llegado hasta nosotros. Entre otras cosas fue preceptor de hijo del rey Potlomeo III, conservador de la Biblioteca de Alejandría (el máximo centro del saber en aquellos tiempos) y obtuvo también una gran reputación como historiador, matemático, geógrafo y astrónomo.

Entre los científicos de esa época, era del dominio común que la Tierra era una esfera y Eratóstenes ideó un método para calcular su radio. El procedimiento que siguió es todavía hoy un ejemplo modélico de ingenio y rigurosidad científica.

Eratóstenes tenía conocimiento de que en una pequeña ciudad junto al Nilo, Siena (la actual Asuan), había un pozo muy profundo en el que se reflejaba perfectamente el Sol el día del solsticio de verano al mediodía. Es decir, el Sol se encuentra justo sobre la vertical del lugar, por encontrarse Siena en el trópico de Cáncer.

Ese mismo día, y a la misma hora, se había observado que los rayos solares sufrían una cierta inclinación en Alejandría. De este hecho dedujo Eratóstenes que esta inclinación era debida a la esfericidad de la Tierra, por lo que midiendo el ángulo de inclinación de los rayos solares podía averiguar el radio terrestre.

Para realizar la medición tuvo en cuenta que Siena se encontraba a 5000 estadios (un estadio egipcio equivale a unos 157,5 metros) al sur de Alejandría, sobre el mismo meridiano. De esta manera se tenía el siguiente esquema:



Para medir el ángulo α que forma la vertical del lugar con los rayos del Sol al mediodía del solsticio de verano, Eratóstenes colocó en el suelo un trozo de esfera. En el centro de ésta situó un gnomon (un palo) de altura igual al radio de la esfera. Eratóstenes observó que la sombra del gnomon sobre la esfera era aproximadamente 1/50 de su circunferencia (1/50 de vuelta equivale a 7° 7').

Por consiguiente la longitud total de la circunferencia terrestre sería: $5000 \cdot 50 = 250.000$ estadios; aunque todos los autores de la antigüedad citan la cifra de 252.000 estadios, quizá para que así cada sesentavo del ecuador (Eratóstenes dividía el ecuador en 60 partes) mida un número exacto de estadios (4.200).

De esta forma el radio de la Tierra sería:

$$\frac{252.000 \cdot 157'5}{2 \cdot \pi} \text{ metros}$$

y, tomando $\pi = 3'14$, resulta como valor del radio 6.320 Kms.

Para hacernos idea del grado de aproximación alcanzado por Eratóstenes, tengamos en cuenta que actualmente se considera que el radio ecuatorial es de 6.378'4 Kms.

Hoja 1ª

Preguntas a responder

1ª) ¿En qué influye el hecho de que ambas ciudades se encuentren en el mismo meridiano?

2ª) ¿Qué sucede en los trópicos al mediodía del solsticio de verano?

3ª) ¿Realmente Alejandría y Siena se encuentran en el mismo meridiano? ¿y Siena sobre el trópico? Buscar sus coordenadas geográficas.

4ª) ¿Realmente la distancia entre ambas ciudades es de 5000 estadios de 157'5 metros? Medirla en un atlas.

Nota: *Los errores de Eratóstenes en las mediciones se compensan, de tal manera que el resultado final de sus cálculos es una aproximación bastante buena del radio de la Tierra.*

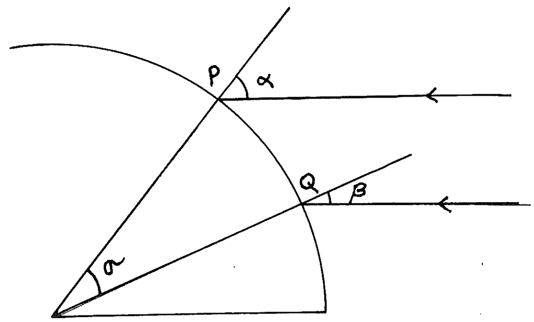
5ª) ¿Cómo crees que pudo medir Eratóstenes la distancia entre ambas ciudades?

6ª) ¿Cómo sabía Eratóstenes que la medición del ángulo se realizaba justo a la misma hora en ambas ciudades?

Medición del radio terrestre

Actualmente el reloj permite conocer la hora exacta en cualquier lugar de la Tierra, por lo que no es preciso ceñirse al mediodía de un solsticio.

Basta con conocer la distancia d entre dos puntos (P y Q) de la Tierra, que estén en el mismo meridiano, y medir los ángulosa α y β) de incidencia de los rayos solares en ambos lugares simultáneamente al mediodía, hora solar.



Como los rayos solares pueden considerarse prácticamente paralelos, se tiene $\sigma = \alpha - \beta$ y puede establecerse la siguiente regla de tres:

360° ______________ $2\pi R$
σ° ______________ d

de donde se deduce fácilmente el valor de R.

Trabajos a realizar

a) Buscar en el atlas una ciudad del mismo meridiano que Zaragoza.

b) Ponerse de acuerdo con alumnos de algún centro de enseñanza de allí y explicarles lo que deben hacer y a qué hora.

c) Medir en un mapa la distancia entre ambas ciudades y calcular el radio de la Tierra.

d) Presentar por escrito todos los pasos seguidos para desarrollar la experiencia (cálculos, medidas, inconvenientes surgidos, etc.), así como vuestra evaluación de ella.

Hoja 2ª

Aspectos destacables en la evaluación global de la investigación

La evaluación de la experiencia fue positiva en todos los casos de alumnos que se presentaron, pero nos alegró ver superadas nuestras expectativas en diferentes aspectos. A continuación destacamos la actuación de nuestros alumnos en una serie de frases literales, extraídas de los trabajos que nos presentaron y que hemos agrupado según los siguientes aspectos:

a) Desenvoltura en las relaciones personales para conseguir datos que necesitaban.

Nuestros alumnos buscaron ayuda para saber la manera de determinar el mediodía y para que les midieran la sombra de un gnomon en otra ciudad situada en el mismo meridiano. Debemos valorar en lo que vale esta capacidad de relación y búsqueda de recursos humanos para solucionar un problema planteado.

«Cabe destacar la colaboración del C.P. de Torre-Pacheco y en especial a sus profesores de Matemáticas por su inestimable colaboración, que no pusieron ningún impedimento a la hora de facilitarnos datos»

«Los inconvenientes surgidos han sido bastantes por la poca participación de las personas de otras ciudades a prestar ayuda»

«Nos pusimos en contacto con diferentes centros donde pudieran facilitarnos el dato:

- Departamento de Astronomía de la Universidad de Zaragoza donde conocían el dato pero, tras informarse del uso que iba a hacerse de él, nos sugirieron que realizaramos la medición a intervalos de un objeto, proceso que como se ha detallado en la obtención de los datos, ya se había efectuado.

- Departamentos de Astrofísica y Ciencia de la Tierra de la Universidad de Zaragoza: ambos desconocían el dato».

b) Imaginación de nuestros alumnos en la reconstrucción efectiva de cómo Eratóstenes pudo realizar la medida del radio de la Tierra.

Primer aspecto: ¿Cómo pudo realizar la medida Siena-Alejandría?

Utilizando probablemente el tiempo de viaje de una caravana o, tal vez, medidores expresamente contratados para ello»

Otra manera de medir la distancia entre las ciudades sería recorrer la vía de comunicación entre Alejandría y Siena y en cada localidad preguntar la distancia a los vecinos de allí que distaba la siguiente población también situada en el camino. La suma total sería la distancia deseada con un margen de error bastante alto»

Segundo aspecto: ¿Cómo supo Eratóstenes que las medidas eran simultáneas?

«Años antes habría observado ya este fenómeno y mediante un reloj de arena habría tomado la medida del tiempo desde que sale el sol hasta que los rayos caen perpendiculares y tomando esa medida la llevó a Alejandría y cuando acabó de caer la arena en el reloj, tomó la medida. En Alejandría y Siena el sol sale a la misma hora»

«Para medir el ángulo que los rayos del sol hacían con un objeto en Alejandría, cuando en Siena caían perpendicularmente, Eratóstenes pudo haber entrenado a una paloma mensajera para que hiciera el trayecto Alejandría-Siena-Alejandría calculando cuánto tiempo empleaba en realizarlo. Así pudo saber cuánto invertiría en realizar únicamente el viaje de ida. Cuando faltó ese tiempo para que en Siena se produjera el mediodía solar se soltó a la paloma desde allí para que llegara a Alejandría. En el momento de llegar (aproximadamente) sería el mediodía solar en Siena y entonces Eratóstenes pudo medir el ángulo»

Algunas de las reconstrucciones aportadas por los alumnos son realmente ingeniosas y requerirían extensos comentarios, pero baste la muestra de las citas literales presentadas para mostrar la eficacia en el desarrollo de la imaginación de la **investigación dirigida**.

c) Se abrieron a la problemática que representaba en tiempos de Eratóstenes resolver el problema de la determinación del mediodía Solar.

«Para conocer el mediodía solar, con un palo hemos tomado medidas entre las 12:45 y las 13:15, y después de tomar medidas cada minuto, hemos considerado como hora del mediodía solar las 12:56, puesto que el palo proyectaba a dicha hora, la sombra menor. A través de la longitud del palo y de la sombra que proyectaba a la hora del mediodía solar, que hemos hallado, hemos averiguado la tangente de la inclinación que forman los rayos solares con la Tierra».

d) Aportaron algunas ideas originales fruto del conocimiento de los fundamentos científicos del problema y de haber profundizado en el mismo.

Primera aportación: Medida del radio en el equinoccio de primavera.

«El día 21 de marzo los rayos caen perpendiculares sobre el ecuador. Por tanto ese día encargué a una persona que midiera la sombra que tenía un palo. Justo a las 13 horas había una nube que tapaba el sol por lo que se tuvo que retrasar unos minutos la medición.
Mediante una proporción se despeja el radio: r = 6667,904 Kms.
Tiene el inconveniente de poder hacerlo sólo los días 21 y 22 de Marzo y Septiembre, respectivamente»

Segunda aportación: Exigir que la distancia entre las ciudades sea grande.

«La ciudad elegida por nosotros fue Cartagena, por estar situada en el mismo meridiano con bastante exactitud y a una distancia que permita obtener un ángulo apreciable, ya que con una distancia inferior a 110 km el ángulo no puede apreciarse por ser menor a 1 grado».

e) Búsqueda bibliográfica.

Otro aspecto destacable en la **investigación dirigida** fue la consulta de libros, a iniciativa de los propios alumnos. Buscaron información por su cuenta y completaron, añadiendo datos e información encontrada por ellos, el desarrollo expositivo que se les había presentado en la Hoja 1ª. Como prueban los datos eruditos siguientes:

«En el solsticio de verano la sombra de las columnas de los templos se

hacía cada vez menor a medida que se acercaba el mediodía, y en ese instante el sol se proyectaba perpendicularmente sobre las cabezas de todos los habitantes de Siena»

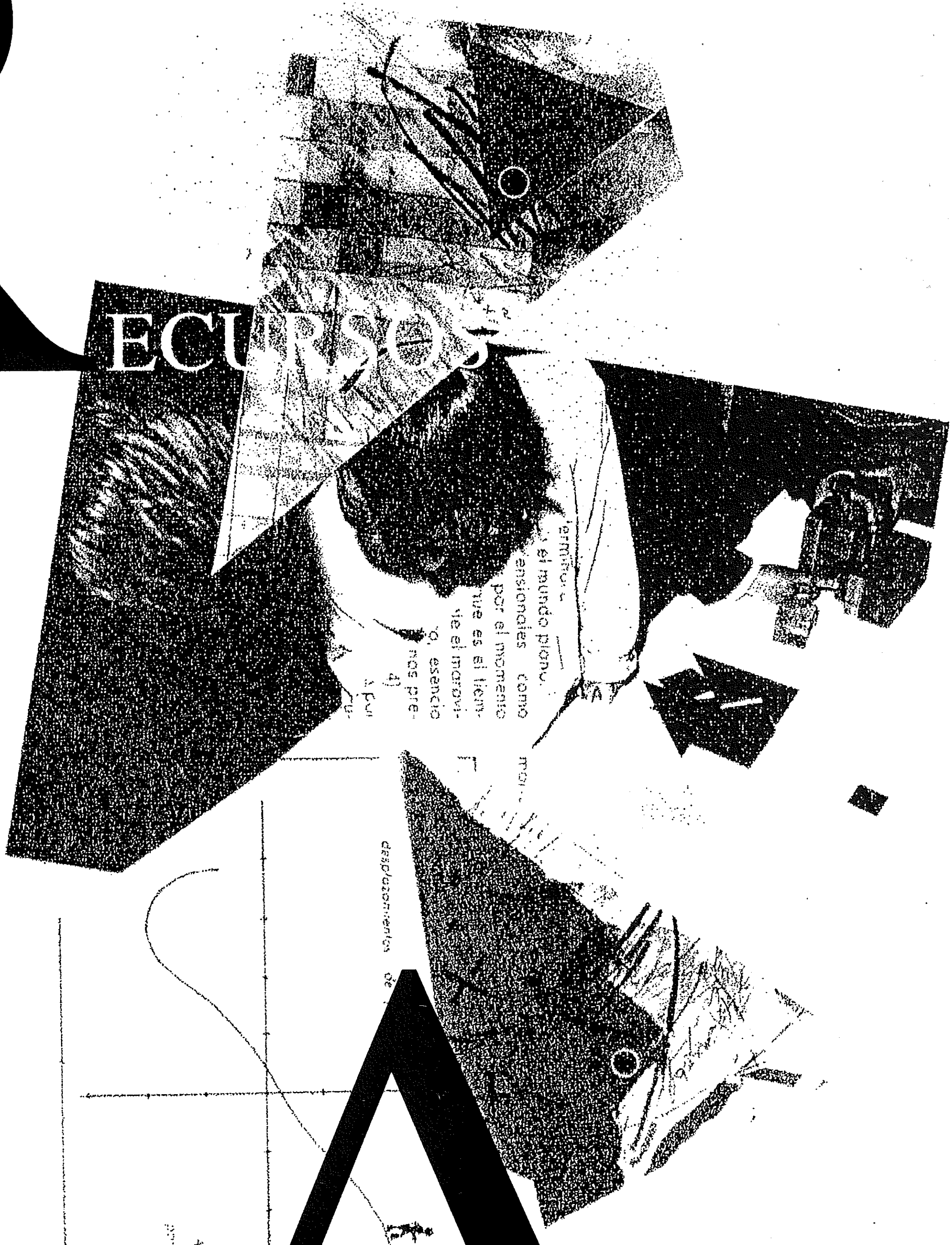
«Eratóstenes, que era director de la Biblioteca de Alejandría, leyó en un viejo papiro que en Siena, al mediodía del 21 de junio, un objeto colocado verticalmente no proyectaba sombra alguna».

Para finalizar, en el siguiente cuadro se presentan algunos de los resultados cuantificables presentados en los trabajos. En el mismo se puede apreciar el grado de precisión con el que lo hicieron, las ciudades elegidas, la hora en que realizaron la medida y la distancia en Km. de Siena a Alejandría. La diferencia de las distancias obtenidas entre Siena y Alejandría es debido a que no han manejado Cartografía con la escala adecuada, ya que en ella los puntos que marcan en el mapa la situación de ambas ciudades tenían casi tanto diámetro como la distancia entre las mismas en el mapa. Un aspecto menos justificable es el hecho de que se tomaran medidas a las cinco y media de la tarde.

Número alumnos	Segunda ciudad	Hora medida	Kms radio Tierra	Kms Siena-Alejandría
3	Cartagena	12:56	6378	900
1	Murcia	13:30	6371	--
4	Torre Pacheco	12:35	6369	280
1	Cartagena	13:28	6496	787
1	--	14:28	6350	570
1	Ansó	17:30	6026	870
4	Cartagena	12:57	6354	967
2	Ansó	17:30	6295	850
1	Teruel	12:30	6069	900

Víctor Arenzana Hernández
Vicente Trigo Aranda
I. B. Félix de Azar. Zaragoza

RECURSOS PARA EL AULA



El salto de la rana

Francisco Merchán Cid

Los conceptos y propiedades que desarrollamos en un tema deben incluirse, siempre que podamos, en situaciones que anime a los alumnos a explorar, formular y comprobar conjeturas, ... etc., y les permita aprender matemáticas de forma creativa e independiente.

¿Por qué no empezamos con un juego?

El **salto de la rana** es un **JUEGO INDIVIDUAL** que consiste en intercambiar la posición de dos grupos de fichas colocadas sobre un tablero.

Para practicar el juego se necesita un tablero lineal con un número impar de casillas y un número par de fichas: la mitad de un color y la otra mitad de otro color; por ejemplo, si se utiliza un tablero de cinco casillas, serán necesarias dos fichas blancas y dos fichas negras. En la figura I se muestra cómo se colocan las fichas en el tablero: todas las fichas del mismo color a un lado u otro de la casilla central que permanece vacía. (Por ejemplo: blancas a la izquierda y negras a la derecha de la casilla central).

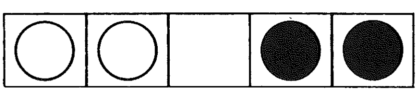


Figura I

El objetivo del juego consiste en intercambiar las fichas: las fichas blancas donde están las negras y viceversa, teniendo en cuenta las siguientes reglas:

PRIMERA: Las fichas colocadas a la izquierda de la casilla central se mueven hacia la derecha y las colocadas a la izquierda se mueven hacia la derecha. **LAS FICHAS NO PUEDEN RETROCEDER.**

SEGUNDA: En cada jugada (movimiento) sólo se puede mover una ficha (de cualquier color).

TERCERA: Una ficha puede mover a la casilla de al lado si está vacía. (Sin retroceder).

CUARTA: Una ficha puede saltar sobre **otra de distinto color** si la casilla que hay a continuación está vacía.

Las primeras actividades que ha de realizar el alumnado deben estar orientadas a familiarizarse con el juego y sus normas, practicar, jugar e intentar el intercambio de la fichas según las reglas dadas. Se les sugerirá que simplifiquen el juego, que lo intenten con un número reducido de fichas en cada parte, primero con una, luego con dos, con tres, etc., y que observen los movimientos que impiden avanzar y los que bloquean las fichas.

Una vez conseguido el objetivo del juego, intercambiar las fichas, se hará ver al alumnado la necesidad de expresar mediante un **código** cada uno de los movimientos realizados. Para ello es necesario numerar las casillas del tablero que, **dependiendo del nivel del alumnado**, podemos hacerla de una de las dos formas siguientes:

a) Con una **sucesión de números naturales** (del 1 al 5, del 1 al 7, etc.) de forma correlativa y comenzando por la primera casilla de la izquierda a la que se le asigna el número 1.

b) Con una **sucesión de números enteros** asignando el número cero a la **casilla central**, las casillas situadas a su derecha se numeran con **números positivos** (+1,+2,+3,..) y las casillas situadas a su izquierda con **números negativos** (-1,-2,-3,..).

Cada movimiento puede quedar expresado por un **par ordenado** de números: el primero indica la casilla de partida de la ficha en movimiento y el segundo la casilla de llegada. El par **(-2,0)** significa que una ficha colocada en la **casilla -2** pasa a colocarse en la **casilla 0.** De esta forma tenemos codificados los movimientos.

En lo que sigue, consideraremos el tablero numerado con los números enteros y los conceptos matemáticos se deberán introducir dependiendo del nivel del alumnado que esté desarrollando el juego.

A partir de este momento podemos iniciar una serie de actividades relacionadas con: **GEOMETRÍA**, **CÁLCULO DE ÁREAS** y **MODELOS MATEMÁTICOS.**

Es conveniente establecer unas **condiciones iniciales:**

a) **Las fichas blancas están colocadas a la izquierda de la casilla central y las negras a la derecha.**

b) **Las casillas las numeramos con números enteros.**

c) **El estudio se realiza, primero con una ficha de cada color, luego con dos, con tres, ...**

d) **El primer movimiento se realiza con fichas blancas.**

Establecidas las condiciones iniciales, pueden realizarse una serie de actividades que introducen al alumnado en el lenguaje simbólico, en las representaciones gráficas, -una de las grandes dificultades del alumnado- en el cálculo de áreas y en la búsqueda de modelos matemáticos.

Actividades relacionadas con la Geometría

I) **Expresar mediante pares ordenados los movimientos que deben realizarse; con una, dos, tres,... fichas de cada color, hasta completar el juego.**

II) **Representar gráficamente los pares ordenados que representan los movimientos necesarios para completar el juego. (Conviene utilizar representaciones distintas siempre que se varíe el número de fichas de cada color).**

III) **Unir, mediante una línea poligonal, los distintos movimientos desde el primero hasta el que completa el juego, en cada una de las representaciones gráficas obtenidas anteriormente.**

IV) **Observar las figuras obtenidas al aumentar el número de fichas de cada color que intervienen en el juego y compararlas entre sí.**

V) **Observar la representación gráfica de los movimientos que se realizan con fichas de un mismo color.**

Estudio y análisis de las actividades

La realización de las actividades señaladas y el análisis de los resultados obtenidos, puede llevar consigo la introducción, según sean necesarios, de conceptos como: **par ordenado, ejes de coordenadas, abscisa, ordenada, cuadrantes, simetría, bisectriz, giro, ecuación de una recta, región del plano, inecuación,...**

En el desarrollo del juego y analizando las gráficas obtenidas al representar los movimientos, podemos observar que, al aumentar el número de fichas que intervienen en el juego, algunos movimientos se repiten. Esto hace que la figura obtenida con **n** fichas contenga las figuras obtenidas con un número de fichas menor a **n**. Por ejemplo la figura obtenida con 4 fichas de cada color (fig.7) contiene las figuras obtenidas con 1, 2, y 3 fichas de cada color; figuras 1, 3, 5 respectivamente.

Entre los movimientos que se repiten destaca el representado por **(-1,1)**. Este punto es el único que pertenece a todas las figuras obtenidas.

Una vez que se ha detectado esa circunstancia podemos pedir al alumnado que dibuje la línea que pasa por este punto y el origen de coordenadas en todas las figuras obtenidas y que mental o manualmente **doblen** la figura por la línea dibujada.

CONCLUSION: Obtenemos figuras simétricas respecto de la bisectriz de los cuadrantes pares. (figuras: 1,3,5,7).

Esta situación nos puede permitir introducir conceptos como: **simetría, figura simétrica, eje de simetría, bisectriz, bisectriz de los cuadrantes 2º y 4º**.

De la observación de los puntos que representan las movimientos de las fichas de un mismo color, (actividad V) puede deducirse que están **separados.** Es el momento de pedir al alumnado que represente los "hipotéticos movimientos" que dejan cada ficha en su sitio (intentan mover una ficha pero la vuelven a dejar en su sitio) y que dibujen la línea que pasa por ellos; de esta forma obtienen los puntos del plano con coordenadas iguales **(x = y)** y la línea recta que pasa por ellos **(bisectriz de los cuadrantes 1º y 3º)**.

Esta situación nos puede permitir introducir conceptos como: **bisectriz, bisectriz de los cuadrantes 1º y 3º, función identidad, semiplano.**

Durante el desarrollo del juego o el análisis de los resultados, posiblemente algún alumno/a nos habrá planteado la cuestión siguiente: **¿qué ocurre si el primer movimiento se realiza con las fichas negras?**. Si no fuese así, debemos proponer al alumnado que realice un estudio completo teniendo en cuenta esta nueva variante y que comparen los resultados obtenidos según sea el primer movimiento del juego con blancas o con negras.

Aunque obtenemos figuras distintas y el movimiento que destaca es el representado por **(-1,1)**, ya que es el único que pertenece a todas la figuras obtenidas, **las conclusiones son las mismas:**

Todas las figuras contienen a las anteriores.

Se mantiene la simetría respecto de la bisectriz de los cuadrantes pares (fig. 2,4,6,8).

Se mantiene la posición relativa de los puntos que representan los movimientos de las fichas de distinto color.

Las propiedades estudiadas hasta ahora, son independientes de las condiciones iniciales: **primer movimiento y número de fichas.**

Realicemos un nuevo estudio modificando las condiciones iniciales:

Manteniendo el número de fichas de cada color, analizar y comparar las dos figuras que obtenemos según iniciemos el juego moviendo la ficha blanca o la ficha negra.

Previsiblemente algunas/os alumnas/os nos dirán: **"Es la misma figura que se le ha dado la vuelta". "Sale la misma figura pero girada".**

Tomando como referencia una de las dos figuras, por ejemplo, la obtenida moviendo en primer lugar una ficha blanca, podemos plantear dos nuevas actividades al alumnado:

VI) Dibuja en una cuadrícula los puntos y segmentos que obtienes al doblar la figura por la bisectriz de los cuadrantes impares.

VII) Con el compás o semicírculo graduado y en la misma cuadrícula que

CONCLUSIONES:

Los puntos que representan los movimientos de las fichas blancas "están encima" de la bisectriz de los cuadrantes 1º y 3º, (recta de ecuación x - y = 0) por lo que pertenecen al semiplano de ecuación x - y < 0.

Los puntos que representan los movimiento de las fichas negras "están debajo" de la bisectriz de los cuadrantes 1º y 3º, (recta de ecuación x - y = 0) por lo que pertenecen al semiplano de ecuación x - y > 0.

En la figura II están representadas estas conclusiones en el caso de tres fichas de cada color. Los movimientos de las fichas blancas están señalados con **B** y los de las fichas negras con **N**.

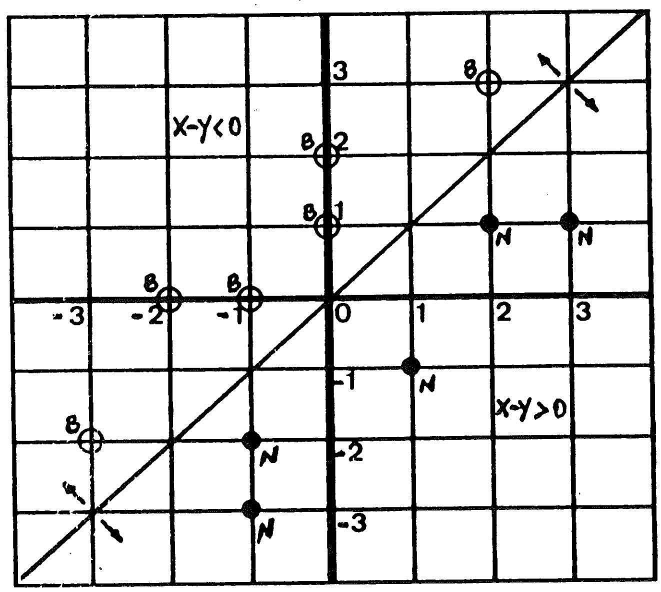


Figura II

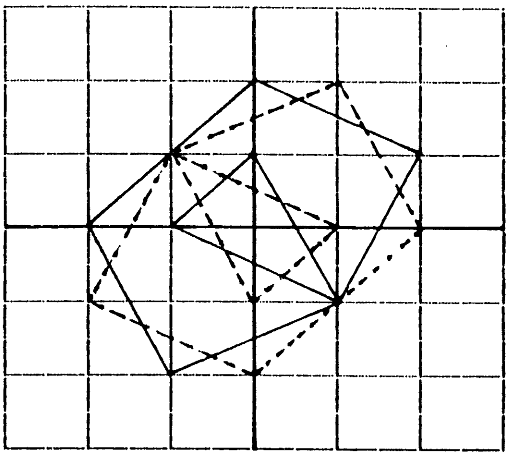


Figura III

CONCLUSIÓN:

Las figuras que representan el desarrollo del juego, según realicemos el primer movimiento con la ficha blanca o negra, (fig. 1 y 2; 3 y 4; 5 y 6; 7 y 8) **pueden realizarse, una a partir de la otra, realizando una simetría respecto de la bisectriz de los cuadrantes impares o un giro de 180º con centro en el origen de coordenadas.**

En la Figura III se representa con trazo continuo la figura a girar y con trazo discontinuo la figura obtenida al aplicar el giro o la simetría.

tienes dibujada la figura, efectúa un giro de 180º a cada punto. Es conveniente que realices los giros por segmentos y que dibujes, con un color distinto al de la figura que estás girando, el segmento que determinan.

La figura obtenida, en cualquier caso, coincide con la obtenida moviendo en primer lugar una ficha negra.

Estas actividades nos pueden permitir introducir los conceptos de: **eje de simetría, puntos simétricos, figuras simétricas, y giros.**

Actividades relacionadas con el cálculo de áreas

Una vez representados los movimientos y obtenidas las distintas figuras, podemos entrar en una etapa en la que intervienen conceptos relacionados con el cálculo, para ello podemos proponer una nueva actividad:

VIII) Estudiar el área de las distintas figuras obtenidas independientemente del primer movimiento realizado.

Estudio y análisis de la actividad

El desarrollo de esta actividad introduce al alumnado en el procedimiento del cálculo del área de una figura por descomposición en otras (triángulos, paralelogramos, ...) de área conocida o de cálculo más sencillo, de forma que sumadas obtenga el área de la figura que está estudiando.

Puede aprovecharse la actividad para que el alumnado señale distintos tipos de triángulos, figuras, elementos y propiedades geométricas, e incluso la utilización del Teorema de Pitágoras.

En la figura siguiente (Figura IV) está señalada una posible descomposición de la figura que obtenemos al jugar con tres fichas de cada color, en ella aparecen: **un paralelogramo (a); un trapecio (b) y diversos triángulos (c).**

El área total de la figura:

$a+b+2c_1+2c_2+c_3=4+5+2\cdot(3/2)+2\cdot 2+1=17$

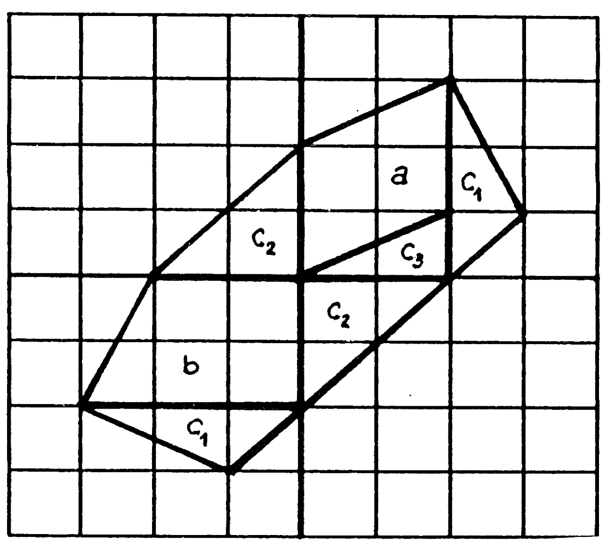


Figura IV

Las áreas correspondientes a triángulos:

Paralelogramo:
(a) $2 \cdot 2 = 4$

Trapecio:
(b) $((3 + 2) / 2) \cdot 2 = 5$

Triángulos:
(c_1) $(3 \cdot 1) / 2 = (3/2)$

(c_2) $(2 \cdot 2) / 2 = 2$

(c_3) $(2 \cdot 1) / 2 = 1$

La tabla siguiente indica el área de algunas figuras:

Nº de fichas de cada color	1	2	3	4	5		n
Área de la figura obtenida	?	9	17	25	33		?

Analizando la tabla obtenida observamos que, cuando tenemos dos o más fichas de cada color, el área de la figura aumenta en ocho unidades al aumentar en una las fichas de cada color que intervienen en el juego. Podemos iniciar un proceso de generalizaciones para encontrar una fórmula que permita conocer el área de la figura obtenida con un número cualquiera de fichas de cada color. Al mismo tiempo podemos introducir el concepto de **progresión aritmética.**

Sería interesante conseguir que el área de la figura obtenida cuando tenemos una ficha de cada color ($n=1$) esté en progresión con las calculadas para $n>1$; situación que merece un análisis particular.

La figura obtenida para $n=1$, al no repetirse los movimientos, no es una **línea poligonal cerrada.**

Podemos "cerrarla" de dos formas:

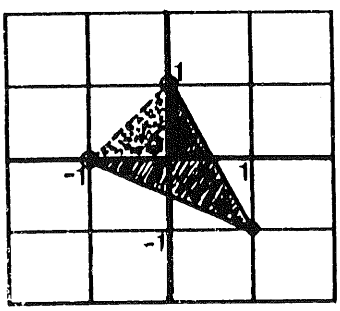


Figura V

a) Uniendo los movimientos 1 y 3 obtenemos una figura (Figura V) de área 3/2 que no está en progresión con los demás valores.

b) Podemos considerar como figura (Figura VI) la limitada por: **la recta que une los movimientos 1 y 2; la recta que une los movimientos 2 y 3; y los ejes coordenados.**

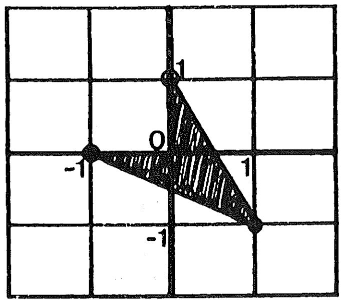


Figura VI

El área de la figura VI, obtenida según la forma "b", es 1 que sí está en **progresión aritmética** con las demás.

Teniendo en cuenta la forma "b" (Figura VI) y que las áreas están en **progresión aritmética** de **diferencia** 6 y **primer término** 1 podemos aplicar la expresión del término general de una progresión aritmética: $a_n = a_1 + (n-1) \bullet d$ que aplicado a nuestro caso es:

$$a_n = 1 + (n-1) \bullet 8 = 1 + 8n-8 = 8n-7$$

La tabla queda completa de la forma siguiente:

Nº de fichas de cada color	1	2	3	4	5		n
Área de la figura obtenida	1	9	17	25	33		8n-7

Búsqueda de modelos matemáticos

Siguiendo con el análisis de los datos que obtenemos al realizar el juego, podemos estudiar situaciones que permitan encontrar una ley general o modelo matemático.

Esta ley general debe conseguirse a través de la experimentación, la intuición, la formulación de hipótesis y de una expresión que satisfaga el modelo matemático.

Las cuestiones tendrán en cuenta que el juego puede realizarse con 1, 2, 3, ..., 10, ..., 234,..... fichas de cada color.

Etapa experimental

En esta etapa se planteará al alumnado una serie de cuestiones con el objeto de evidenciar que llega un momento en el que la dificultad de responder de forma experimental o manipulativa es mayúscula y se necesita **algo** que ayude.

Etapa intuitiva

En esta etapa debe ponerse en evidencia que al utilizar un determinado número de fichas de cada color se hace prácticamente imposible responder o resolver las cuestiones planteadas. Los datos obtenidos en la etapa experimental deben darnos **alguna pista** que permita responder a situaciones con mayor número de fichas, deben hacernos intuir una posible solución.

Formulación de hipótesis

El análisis de las gráficas, las series numéricas u otros datos obtenidos de forma experimental junto a las pistas o intuiciones harán que el alumnado formule hipótesis, posibilidades, soluciones, etc., que deben ser comprobadas. Todo este estudio debe conducir al alumnado a descubrir una ley general y una fórmula o expresión que se cumpla de forma general y satisfaga la cuestión planteada.

Cuestiones en busca de un modelo matemático

Al aumentar en una las fichas de cada color que intervienen en el juego, se obtiene una nueva figura que contiene a las anteriores; basándose en ello:

1ª) ¿Cuántos movimientos son necesarios para lograr el objetivo del juego?

2ª) ¿Al realizar qué movimiento se inicia una figura nueva? (Primer movimiento no realizado en las figuras obtenidas con menos fichas)

3ª) ¿Cuántos movimientos han de realizarse antes de iniciar una figura nueva? (Movimientos ya realizados en figuras obtenidas con menos fichas)

4ª) ¿Cuántos movimientos son necesarios para completar una figura nueva? (Movimientos no realizados en las figuras obtenidas con menos fichas)

5ª) ¿Cuántos movimientos han de realizarse para terminar el juego después de completar la figura?.

6ª) Área de las figuras geométricas obtenidas.

Responder de forma experimental, aún utilizando **diferencias finitas**, a las cuestiones planteadas y con un número elevado de fichas de cada color que intervienen en el juego, resulta lento, pesado y poco práctico.

El problema se soluciona encontrando una ley o fórmula general que nos permita resolver de forma directa la cuestiones cuando tengamos **n fichas de cada color colocadas en un tablero de 2n+1 casillas.** Esta situación puede aprovecharse para introducir los conceptos de **sucesión, término general, cálculo de términos a_i, a_j, etc.**

Es recomendable realizar una serie de acciones que faciliten el descubrimiento de la ley general, entre ellas:

* **Análisis detallado, minucioso y profundo de la serie numérica.**

* **Formular hipótesis y comprobarlas.**

* **Búsqueda de una pauta o regularidad en la serie.**

* **Comparar los términos de la serie con los de otra ya estudiada.**

Puede ocurrir que algunos/as alumnos/as encuentren expresiones distintas de una ley general, en este caso sería conveniente aprovechar la ocasión para trabajar con **expresiones literales** y deducir, estudiar, analizar, etc., todas las propiedades que podamos.

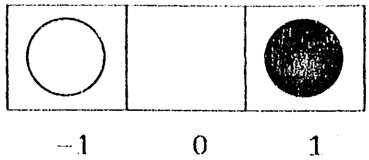
La siguiente tabla muestra el estudio de las seis cuestiones planteadas:

Nº de fichas de cada color	1	2	3	4	5		n
Nº de movimientos	3	8	15	24	35		$(n+1)^2-1$
Iniciamos una figura nueva al realizar el movimiento	1	3	6	10	15		$n(n+1)/2$
Nº de movimientos previos al inicio de una figura	0	2	5	9	14		$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$
Nº de movimientos que completan la figura	3	5	7	9	11		$2n+1$
Nº de movimientos después de completar la figura	0	1	3	6	10		$(n-1)n/2$
Área de la fig. geométrica	1	9	17	25	33		$8n-7$

Francisco Merchán Cid
I.B. Domenico Scarlatti
Aranjuez.

REPRESENTACION GRAFICA DE LOS MOVIMIENTOS

UNA FICHA EN CADA LADO



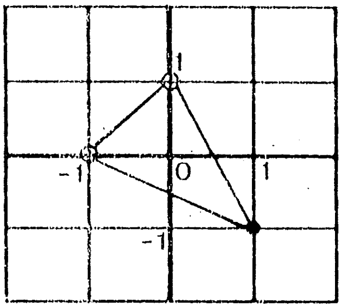


FIGURA 1

PRIMER MOVIMIENTO CON FICHA BLANCA (FIGURA 1)

(-1,0); (1,-1); (0,1)

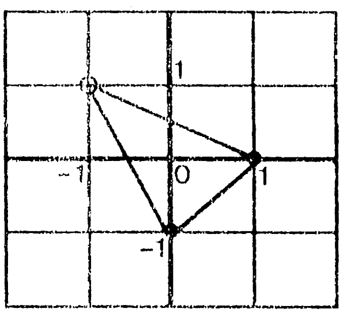
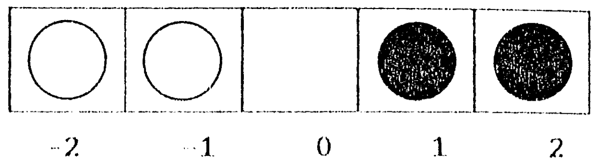


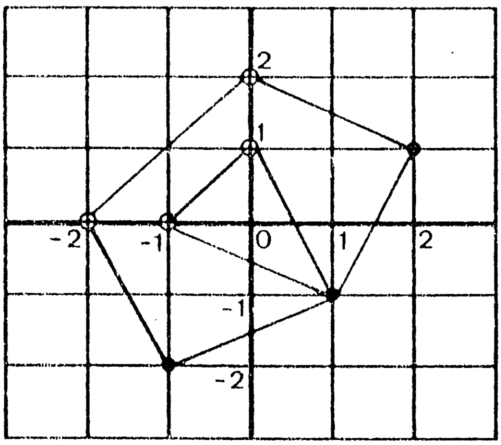
FIGURA 2

PRIMER MOVIMIENTO CON FICHA NEGRA (FIGURA 2)

(1,0); (-1,1); (0,-1)

DOS FICHAS EN CADA LADO

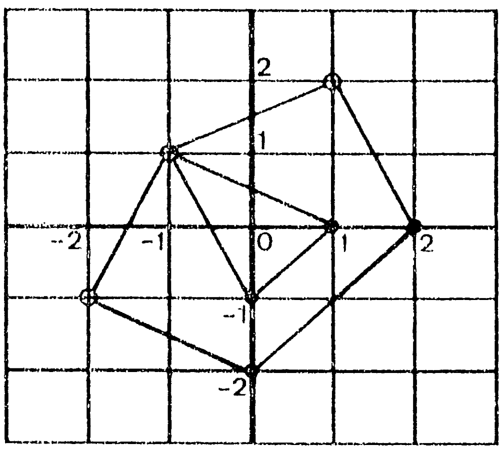




PRIMER MOVIMIENTO CON FICHA BLANCA (FIGURA 3)

(-1,0) ; (1,-1);
(2,1) ; (0,2);
(-2,0) ; (-1,-2);
(1,-1) ; (0,1)

FIGURA 3

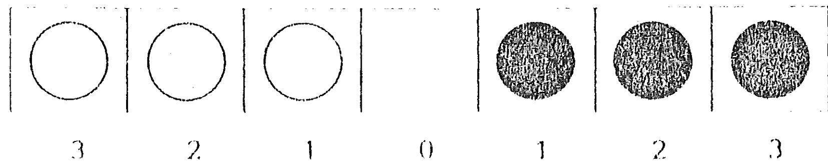


PRIMER MOVIMIENTO CON FICHA NEGRA (FIGURA 4)

(1,0) ; (-1,1);
(-2,-1); (0,-2);
(2,0) ; (1,2);
(-1,1) ; (0,-1)

FIGURA 4

TRES FICHAS EN CADA LADO



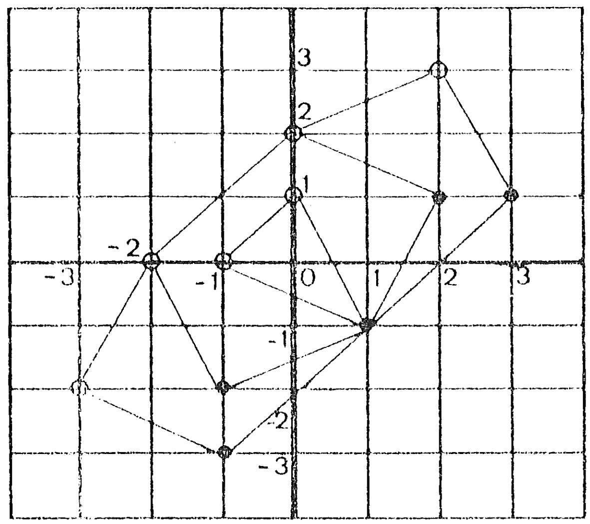


FIGURA 5

PRIMER MOVIMIENTO CON FICHA BLANCA (FIGURA 5)

(-1,0) ; (1,-1);
(2,1) ; (0,2);
(-2,0) ; (-3,-2);
(-1,-3); (1,-1);
(3,1) ; (2,3);
(0,2) ; (-2,0);
(-1,-2); (1,-1);
(0,1)

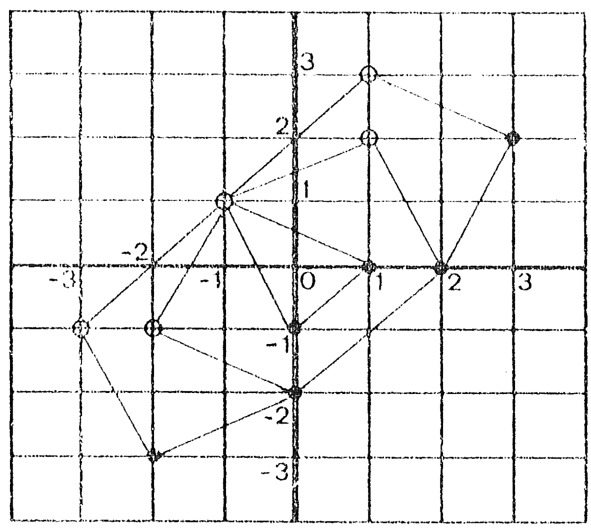
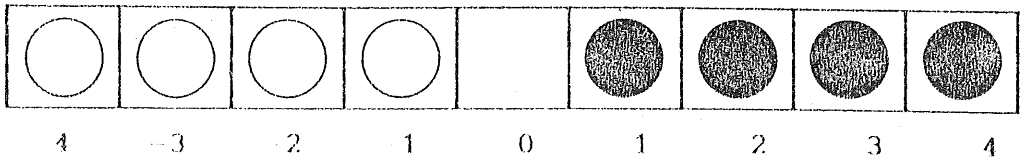


FIGURA 6

PRIMER MOVIMIENTO CON FICHA NEGRA (FIGURA 6)

(1,0) ; (-1,1);
(-2,-1); (0,-2);
(2,0) ; (3,2);
(1,3) ; (-1,1);
(-3,-1); (-2,-3);
(0,-2) ; (2,0);
(1,2) ; (-1,1);
(0,-1)

CUATRO FICHAS DE CADA COLOR



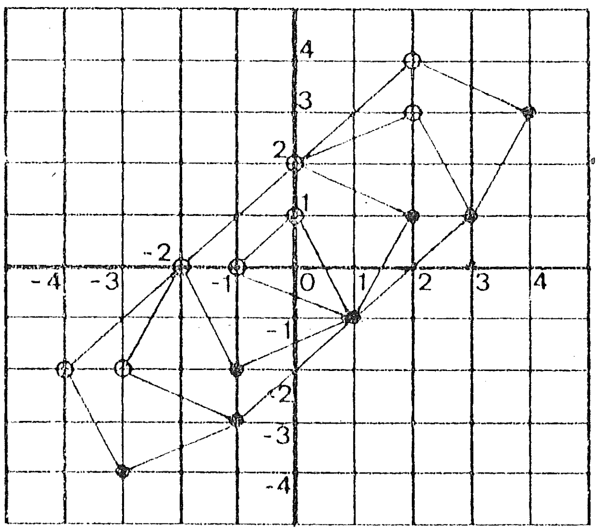


FIGURA 7

PRIMER MOVIMIENTO CON FICHA BLANCA (FIGURA 7)

(-1,0) ; (1,-1);
(2,1) ; (0,2);
(-2,0) ; (-3,-2);
(-1,-3); (1,-1);
(3,1) ; (4,3);
(2,4) ; (0,2);
(-2,0) ; (-4,-2);
(-3,-4); (-1,-3);
(1,-1) ; (3,1);
(2,3) ; (0,2);
(-2,0) ; (-1,-2);
(1,-1) ; (0,1)

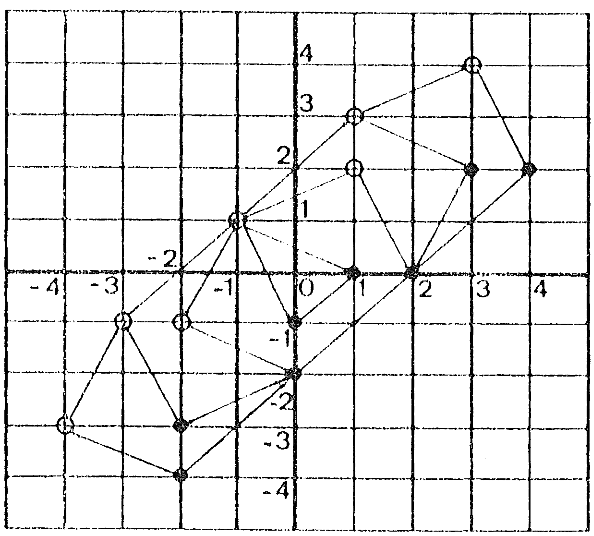


FIGURA 8

PRIMER MOVIMIENTO CON FICHA NEGRA (FIGURA 8)

(1,0) ; (-1,1);
(-2,-1); (0,-2);
(2,0) ; (3,2);
(1,3) ; (-1,1);
(-3,-1); (-4,-3);
(-2,-4); (0,-2);
(2,0) ; (4,2);
(3,4) ; (1,3);
(-1,1) ; (-3,-1)
(-2,-3); (0,-2);
(2,0) ; (1,2);
(-1,1) ; (0,-1)

15

La Música y sus materiales: una ayuda para las clases de Matemáticas

Vicente Liern Carrión

Quienquiera que tenga por profesión la enseñanza habrá comprobado que cada día resultan más vigentes las dos afirmaciones que pronunciara D. Miguel de Guzmán en las IV Jornadas Andaluzas de Educación Matemática:

(1) *"... la didáctica no concibe ya la clase como una sala de conferencias; ya la palabra maestro se va pareciendo cada vez más a la de maestro de taller y cada vez menos a la de conferenciante ..."*

P. Puig Adam, "La Matemática y su enseñanza actual" (1960)

(2) *"El aula es un ambiente insuficiente de aprendizaje artificial e ineficiente que la sociedad se ha visto obligada a inventar debido a que sus ambientes informales fallan en ciertos dominios esenciales del aprendizaje, como la escritura, la gramática o las matemáticas..."*

S. Papert. "Desafío a la mente" (1985)

En cuanto al viraje hacia las clases participativas, que preconiza Puig Adam, no hay otro inconveniente que la propia actitud de los profesores. Sin embargo, la labor de naturalizar la enseñanza no resulta tan sencilla; es más, la única alternativa viable con que contamos es la introducción de nuevos materiales que permitan simular el mundo que rodea al aula.

La renovación constante de contenidos y enfoque de las asignaturas ya no es suficiente para ofrecer una visión actual de una disciplina. Es necesario que el material con el que se trabaja sea acorde con la época. De igual modo que a la mayoría de profesores de matemáticas les resulta impensable seguir utilizando tablas de logaritmos o de senos en lugar de la calculadora, debe resultarnos preocupante la insuficiencia de la tiza y el encerado para desarrollar nuestra asignatura. Es necesario no quedar anclado en materiales pasados que sirven para resolver situaciones de antaño, pero que resultan pobres cuando los adaptamos a la situación actual. Además con la utilización de nuevos instrumentos se pueden introducir con menor dificultad algunos conceptos que, en sí mismos, pueden resultar demasiado abstractos para nuestros alumnos.

Presentación

La presente experiencia, que ha sido desarrollada con alumnos de primero y segundo de BUP del Instituto de Bachillerato Benlliure de Valencia, ha sido expuesta en el I Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (Sevilla 1990) y en las V Jornadas de Aprendizaje y Educación Matemática (Castellón - marzo 1991). Además ha formado parte de la Mesa Redonda "Música y Matemáticas" desarrollada en el VII Comité Interamericano de Educación Matemática (Miami - agosto 1991).

La idea de la experiencia es utilizar la atracción que la música despierta en nuestros alumnos para hacer una revisión de conceptos matemáticos.

Nuestros chicos saben que la mayoría de la música que escuchan ha salido de un ordenador y que incluso los micrófonos que utilizan los cantantes en directo pasan por una mesa de mezclas que modifica la entonación. Pues se trata de utilizar estas ideas y los instrumentos con los que pasan gran parte de su ocio (cassettes, discos, etc.), para obtener conceptos matemáticos que en principio podían parecer tan extraños a la música.

Esta experiencia muestra una vertiente de las matemáticas que en muchas ocasiones olvidamos: También hay en ellas un lenguaje capaz de *traducir* de forma más operativa los conceptos de la vida cotidiana, (en este caso la música), retomando así su carácter de abstracción a partir de problemas empíricos.

Ha sido estructurada en los cuatro apartados siguientes:

a) Una explicación de las escalas mediante tipos de números.

b) Música y vectores.

c) Distancia entre sonidos. Utilización de logaritmos.

d) Música y funciones.

Cada uno de los apartados ha sido desarrollado en tres o cuatro sesiones de una hora con grupos de veinte alumnos. En cada apartado daremos un listado del material que hemos empleado, pero en general con calculadoras, ordenador y cassette es suficiente para realizar toda la experiencia.

Desarrollo de la experiencia

Tipos de números. Una explicación utilizando las escalas

Mediante una grabación en la que suenan simultáneamente un piano y un clarinete bien afinados (o cualquier otro instrumento de viento) que ejecutan una octava, puede comprobarse que parece haber notas en las que ambos instrumentos desafinan. Esto es debido a que no en todos los instrumentos se entiende la octava de igual manera. Esta circunstancia nos permitirá prácticas muy interesantes en la clase de matemáticas, para ello necesitaremos el siguiente *material*:

- Un cassette capaz de grabar y reproducir.
- Un ordenador.
- Calculadora.

Fundamento teórico

El único concepto que se impone a cualquier instrumento y cualquier época, es que ***un sonido de frecuencia f y el de frecuencia 2f son el principio y fin de una octava***. Tenemos así un intervalo **[*f*,2*f*]**. Cualquier partición de este intervalo determina una octava (tenga o no sentido en la música actual), por ejemplo:

$f \quad (9/8)f \quad (4/3)f \quad (3/2)f \quad 2f$

Las divisiones en subintervalos pueden hacerse con cualquier criterio, pero según trabajemos con múltiplos racionales o irracionales de f obtendremos tipos de escalas que sean conocidos o no.

Desarrollo de las sesiones

Primer paso

Fijamos una frecuencia arbitraria p.e. f= 264 Hz. y calculamos $2f$ = 528 Hz. Entre estas dos frecuencias determinamos valores intermedios formando así escalas. Vemos dos ejemplos:

1.- *Con números irracionales*

$\ldots f, 2^{1/12}f, 2^{2/12}f, 2^{3/12}f, 2^{4/12}f, 2^{5/12}f, 2^{6/12}f, 2^{7/12}f, 2^{8/12}f, 2^{9/12}f, 2^{10/12}f, 2^{11/12}f, 2^{12/12}f, 2f, \ldots$

Obtenemos así el sistema temperado que es en el que afinan los pianos y las arpas.

2.- *Con números racionales*

Multiplicando por fracciones $(3^i/2^j)$ i,j = 1,2...10, se obtiene

$\ldots f, (258/243)f, (9/8)f, (32/27)f, (81/64)f, (4/3)f, (729/512)f, (3/2)f, (128/81)f, (27/16)f, (16/9)f, (243/128)f, 2f, \ldots$

que es el sistema pitagórico en el que siguen afinando la mayoría de instrumentos de cuerda.

Segundo paso

Una vez calculadas las divisiones de la escala podemos escucharlas con ayuda del ordenador. En nuestro caso hemos usado lenguaje gw-basic y logo en un ordenador PC, así

En Basic

SOUND frecuencia, duración hace que en el ordenador suenen las distintas notas, por ejemplo

```
10 SOUND 130.810, 10
20 SOUND 146.830, 10
30 SOUND 164.830, 10
40 SOUND 174.610, 10,
etc.
```

En LOGO

TONE frecuencia, duración sirve para lo mismo, así

```
TONE    130.810, 10
TONE    146.830, 10,
etc.
```

Ambos hacen que suenen durante diez segundos las notas cuya frecuencia hemos prefijado.

Sonido y vectores

En estas sesiones hemos de convencer a los alumnos de la necesidad de manejar los sonidos como vectores y no como escalares, puesto que en ellos hay al menos tres magnitudes que debemos tener en cuenta independientemente:

1.- La ***intensidad*** que es la medida de lo fuertes o débiles que son los sonidos. Por extraño que parezca es difícilmente apreciable por el oído si no están en el mismo tono.

2.- El ***tono*** determina la altura de un sonido, es decir lo grave o agudo que éste es.

3.- El ***timbre*** es la cualidad que nos permite distinguir sonidos idénticos emitidos por instrumentos distintos.

Material

- Cassette con ecualizador digital.
- Audímetro. (Es fácil de conseguir puesto que lo suelen utilizar en los laboratorios de física y no es muy caro).

Fundamento teórico

Teniendo en cuenta que el sonido es un vector, vamos a definir las tres cualidades que lo determinan en lenguaje vectorial, y con ello ya estaremos en el *campo matemático*, pudiendo así trabajar con ellos en clase de matemáticas.

Si un sonido es un vector $\vec{s} = (s_1, \ldots s_n) \in \mathbb{R}^n$, tenemos definidas las siguientes magnitudes:

La ***intensidad*** de $\vec{s}$ es $\|\vec{s}\|$

El ***tono*** de $\vec{s}$ es su primera componente s_1

El ***timbre*** de $\vec{s}$ es el vector formado por el resto de componentes, es decir $(s_2, s_3, \ldots, s_n)$

Desarrollo de las sesiones

Se trata de escribir los vectores que corresponden a un sonido dado, para ello hemos de hacer tres actividades:

Intensidad

Para calcularla no hace falta más que conectar el audímetro y anotar la intensidad de éstos en decibelios.

Tono

Debemos prefijar de antemano el sistema en que están afinados los instrumentos, y con ello podemos saber cuál es la frecuencia que corresponde a cada tono, por ello es importante realizar primero las prácticas del apartado 3.

Timbre

Es la práctica más atractiva porque en ella se maneja el concepto de *vector* y de *base*.

Hacemos sonar en un cassette con ecualizador digital sonidos "patrones" que han sido grabados previamente. Cuando estos suenan, utilizamos las barras del ecualizador como si se tratase de la base de un espacio vectorial, así midiendo cada una de las aprtes iluminadas de las distintas barras del ecualizador, obtenemos un vector de tantas coordenadas como barras haya. Como lo habitual es que haya cinco, suelen obtenerse vectores del tipo (2,0, 5,2,1,)...

Las tres actividades propuestas son conceptuales, porque en la práctica, resulta muy difícil trabajar en BUP con vectores de más de tres coordenadas, por ello, lo más práctico es escribir los sonidos como vectores de dos componentes $\vec{s} = (s_1, s_2)$ en donde s_1 es la intensidad y s_2 el tono. El timbre podemos considerarlo como cualidad asociada a cada instrumento.

Distancia entre sonidos. Utilización de logaritmos

Cuando escuchamos cualquier tipo de música, y sobre todo si tenemos en cuenta el carácter vectorial de los sonidos, comprobamos que hay piezas en las que parece que no hay casi altibajos, mientras que hay otras en las que los saltos son la práctica predominante. Esto significa que de algún modo todos intuímos una distancia entre los sonidos. En este sentido se han desarrollado varios trabajos entre los que destacaremos dos:

1) ***Joan Girbau*** en la "Revista Catalana de Matemàtiques" identificando los sonidos con su tono (es decir con su frecuencia) establece la siguiente distancia entre sonidos:

Dados dos sonidos f_1, f_2

$$d(f_1, f_2) = |\log (f_1/f_2)|$$

2) La ***Ley de Weber-Fechner*** asegura que "la sensación sonora que provoca un sonido de intensidad I, es función lineal del logaritmo de la excitación", y esto permite definir la sensación acústica como

$$\mathscr{S} = 10 \log (I/I_0)$$

siendo I_0 la sensación umbral para oir.

Teniendo en cuenta estos dos estudios, vamos a definir una función distancia en el espacio vectorial de los sonidos.

Material

- Calculadora.
- Grabaciones de música de distintos tipos.

Fundamento teórico

Desde el punto de vista matemático se trata de construir una función distancia entre los vectores de $\mathbb{R}^n$, con lo cual tenemos la seguridad de que cualquiera que esta sea será equivalente a la norma euclídea en $\mathbb{R}^n$. Sin embargo, esto no puede manejarse con nuestros alumnos, ni sería un reflejo fiel de la idea intuitiva de distancia entre sonidos. Por ello vamos a definir una distancia como la siguiente:

Dados dos sonidos $\vec{s}_1 = (a_1, b_1, \vec{c}_1)$, $\vec{s}_2 = (a_2, b_2, \vec{c}_2)$, donde las a_i representan el tono, las b_i la intensidad y $\vec{c}_i$ los timbres

$$d(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = \alpha\,|\log(a_1/a_2)| + \beta\,|\log(b_1, b_2)| + \gamma\,\|\vec{c}_1 - \vec{c}_2\|$$

α, β, γ son constantes cuyo valor fijaremos en las prácticas.

En esta distancia el primer sumando mide la diferencia entre tonos, el segundo entre intensidades, y el tercero de algún modo mide la diferencia de timbres.

Desarrollo de las sesiones

Como hemos expuesto en el punto anterior expresamos algunos sonidos en forma vectorial, y con ello podemos utilizar la función distancia que hemos definido anteriormente.

Con esta práctica no sólo afianzaremos el concepto de crecimiento logarítmico al contraponerlo al de crecimiento lineal, sino que además podremos persuadir a los alumnos de la libertad que nos deja el poder determinar el valor de las constantes α, β, γ. Para fijar los valores de estas constantes, oiremos varios tipos de música y veremos qué sumando debemos hacer más grande y cuál más pequeño.

Por ejemplo si se trata de una música muy rítmica en la que lo fundamental es el contraste entre los planos sonoros, haremos mayor el segundo sumando, es decir daremos un valor grande a β. Si la música es intimista y nos interesa destacar el timbre, aumentaremos el valor de γ...

Música y funciones

Igual que en matemáticas las funciones suponen la utilización de la mayoría de conceptos previos (escalares, vectores, operaciones, etc.), la música significará la utilización de todos los elementos anteriormente expuestos.

La definición de música que se utiliza desde antiguo es

"Música es el arte de combinar el tiempo y los sonidos"

Está claro que desde nuestro punto de vista esta definición puede interpretarse como *una función que tiene por variable independiente el tiempo y cuyo conjunto imagen es el conjunto de los sonidos (un subconjunto de $\mathbb{R}^n$).*

Material

- Calculadora.
- Papel milimetrado.
- Audímetro.
- (Si se quiere ordenador para la representación de funciones).

Fundamento teórico

Llamaremos música a una función ***M*** definida de un intervalo de $\mathbb{R}$ en un conjunto de vectores (sonidos). En esta función el dominio y el rango verifican algunas propiedades obviamente:

1) El dominio puede ser considerado un intervalo [0,H] porque no tiene sentido una música que suene infinitamente.

2) El conjunto imagen está acotado, porque el hombre no puede oir fuera del intervalo [16, 20.000] Hertz en cuanto a frecuencias, y tampoco es capaz de oir por encima de los 160 decibelios de intensidad sin dañar sus oídos.

Desarrollo de las sesiones:

Para trabajar con sonidos vamos a utilizar vectores de dos componentes $\vec{s} = (s_1, s_2)$ en los que s_1 es el tono y s_2 la intensidad.

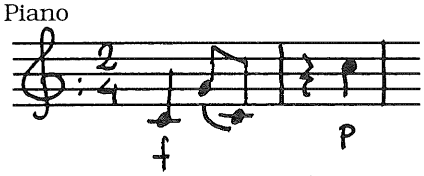
La música será una función escalonada de este tipo

$$M = \begin{cases} (261,60) & \text{si } t \in (0,4) \\ (291,40) & \text{si } t \in (4,6] \\ (261,40) & \text{si } t \in [6,8) \\ (0,0) & \text{si } t \in (8,12) \\ (252,30) & \text{si } t \in (12,16) \end{cases}$$

Las frecuencias han sido medidas en Hercios y la intensidad en decibelios.

En un pentagrama usual resultaría

Piano



Conceptualmente la idea no es demasiado complicada y permite seguir extrayendo consecuencias:

- Que dos sonidos suenen ligados (es decir uno se solapa con otro) que los intervalos en los que varía t en ambas notas son cerrados, mientras que si las notas no son ligadas los intervalos son abiertos.

- La continuidad en la función música se traduce al escucharla en que el instrumento pasa por todos los sonidos intermedios entre dos dados, es decir lo que hace un trombón de varas al interpretar un glissando.

- La derivabilidad en la función música significaría suavidad al oir esta música.

Otra práctica

El proceso puede también hacerse en ambos sentidos, es decir dada una música saber que tipo de función es la que la origina y al revés, dada una función cuya gráfica conocemos (logarítmica, parábolas, polinomios ...) qué música sonaría con esa función.

En cualquier caso, estas sesiones permiten entender cómo un ordenador puede crear música, y porque simplemente dibujando con el ratón de un ordenador se puede componer. (En este sentido es de destacar que existen programas muy completos para composición por ordenador, p. e. FINALE para ordenadores Machintosh, NOTATOR para ordenadores Atari ...).

Conclusiones

Es sorprendente comprobar la capacidad de trabajo que poseen nuestros alumnos cuando la actividad les motiva. La mayoría de ellos han pasado muchas horas convirtiendo sonidos en vectores, viéndose sorprendidos de que en este caso un vector no lleve inevitablemente asociada una dirección y un sentido, sin que por ello dejen de ser vectores.

Después de trabajar con funciones que responden a un modelo de la vida cotidiana, conceptos como el de continuidad o derivabilidad llegan a verse como una necesidad de catalogar algunas situaciones que realmente existen.

La mayoría de alumnos llegan a comprender que las matemáticas no son una ciencia estancada en la que no cabe la opinión que ellos puedan tener, o en la que ya no queda nada nuevo por decir.

Bibliografía

* J. CATALÁ DE ALEMANY. **Física General**. Editorial Guerri S. A. Valencia, 1969.

* J. DIEDONNE. **Elements d'Analyse**. Gauthier-Villars. París, 1981.

* J. JACQUES MATRAS. **El sonido**. Presses Universitaires de France. 1977.

* **Revista de la Societat Catalana de Matemàtiques**. Article de Joan Girbau. 1988.

* **ACTAS de las IV Jornadas Andaluzas de Educación Matemática**. Sep. 1989.

Vicente Liern Carrión
Universitát de Valéncia

Telematemáticas

Margarita Marín
Antonio España
Carlos Cruz

El artículo recoge una experiencia telemática realizada entre dos colegios de Madrid y cuyo objetivo era motivar la investigación en matemáticas por parte de nuestros alumnos. Esta experiencia nos ha permitido utilizar conjuntamente ordenador y modem en el aula, así como introducir a nuestros alumnos en el manejo del correo electrónico.

La mayoría de nosotros hemos comprobado que cualquier hecho novedoso en el aula atrae poderosamente a los niños y les fomenta su curiosidad hasta que se familiarizan con la nueva situación. El modem, ese teléfono personal para que dos ordenadores se comuniquen sus cosas, nos permite introducir situaciones nuevas constantemente, teniendo a los niños pendientes del hilo telefónico. Esta realidad la hemos utilizado para, de una forma sutil, motivar la investigación en matemáticas por parte de nuestros alumnos; cómo lo hemos realizado y qué hemos conseguido es lo que pretende narrar este artículo: una experiencia telemática, basada en el correo electrónico, llevada a cabo con alumnos de 6º de EGB de dos escuelas madrileñas. Esta experiencia se realizó gracias al soporte prestado por Clavius, base de datos educacional, en la utilización de su mensajería electrónica.

Llega pies ligeros

La experiencia a grandes rasgos consiste en que un personaje inventado, Pies ligeros, trotamundos de profesión, recién llegado a Madrid, solicita la amistad de los niños a través del correo electrónico, entablándose conversaciones en las que les cuenta anécdotas y les plantea preguntas que les obliga a investigar por su cuenta en matemáticas, bien individualmente bien en equipo.

El profesor realiza un papel absolutamente orientativo, facilitando a los niños bibliografía adecuada donde puedan encontrar respuestas. Después de que el niño las ha encontrado y está motivado en el tema que planteaba la cuestión, el profesor, en el aula, trabaja los puntos que cree conveniente aumentando los conocimientos de los niños.

El correo electrónico nos permitió lanzar las preguntas a la vez a dos escuelas emplazadas en extremos de Madrid, y los niños se contestaban e interrogaban entre ellos, enriqueciéndose mutuamente.

La clave de la experiencia está en la realización de los mensajes que va dejando este personaje, ya que tienen que ser a la vez divertidos y serios, comunicativos y exigentes, motivadores y orientativos. Estas preguntas fueron realizadas por el equipo de profesores participantes para que se pudiese obtener el máximo provecho de cada cuestión en el aula.

Los objetivos que nos propusimos con esta experiencia fueron:

- motivar a los niños a la investigación en el aula
- enseñar a los niños a buscar y trabajar con bibliografía
- fomentar el trabajo en grupo y no competitivo
- poner a los niños en contacto con un «nuevo» medio de comunicación que van a emplear constantemente en el futuro
- facilitar «la salida» de la escuela, intercambiando opiniones con niños de otras en distintas partes de la geografía.
- habituar al niño a pensar de forma globalizada, no por compartimentos, según la asignatura que toque.

- fomentar la solidaridad y la ayuda entre personas.
- potenciar el estudio de aspectos no convencionales de la matemática.

La experiencia así planteada tiene las siguientes características:

- es socializadora, ya que facilita la interacción social entre compañeros, proporcionando una adecuada situación para desarrollar el proceso de aprendizaje.
- es diversificadora, permite que cada niño investigue y trabaje a su ritmo dentro de su equipo o individualmente, contestando cuando ya lo tiene preparado y no cuando le mandan.
- potencia un aprendizaje significativo en el alumno, ya que éste quiere aprender por estar altamente motivado y realiza los aprendizajes por descubrimiento, siendo el constructor de su propio conocimiento.

En el transcurso de la experiencia, además de ampliar sus conocimientos sobre matemáticas, los niños realizaron importantes aprendizajes informáticos, como son:

- uso de editores para poder escribir los mensajes.
- conocimiento y utilización del modem como herramienta de trabajo.
- uso de programas de comunicación que posibilitan que el ordenador «hable por teléfono».
- uso y manejo de bases de datos de acceso telemático.

La experiencia comenzó el 18 de enero de 1993 y con la duración de un mes. Anterior a esta fecha, los profesores responsables de la misma fuimos preparando los mensajes que debía enviar nuestro personaje a los niños y completando la biblioteca de aula, fundamental para la investigación, con los libros que pensábamos que eran necesarios y asequibles para su edad y conocimientos.

Dos veces en semana se llamaba a Clavius para enviar/recoger el correo, rotándose en este trabajo los diversos alumnos. Este paquete de mensaje se imprimía y repartía a los niños para que lo trabajasen. Una vez obtenidas las respuestas, el profesor las ampliaba en el camino preacordado por el equipo de profesores.

Los mensajes clave de la experiencia dejados por nuestro personaje potenciando la investigación matemática fueron:

Título: Buscando a Lilavati

¡¡Hola a todos!!

¡¡Lo que me ha gustado leer vuestros mensajes!!. Ya no me siento solo.

Voy a pediros vuestra ayuda: hace poco he estado en la India y allí me hablaron de una hermosa mujer llamada Lilavati, desde entonces la estoy buscando, pero no doy con ella. ¿Podéis ayudarme a encontrarla?

Hasta pronto

Pies ligeros

Conceptos matemáticos que potencia:

Con este mensaje se pretende que los niños investiguen acerca del personaje, buscando en los libros facilitados. Una vez averiguado quién fue Lilavati, el profesor orientará en trabajo hacia la matemática hindú y su contribución con el sistema decimal, relatando su introducción y evolución en Europa, sus características fundamentales, etc.

Título: Cuadrados mágicos

¡¡Gracias a todos por vuestras respuestas!!. Así que no pudo encontrar a Lilavati porque vivió en el siglo XII, ¡¡y yo buscándola por todas partes!!. Menos mal que vosotros me habéis ayudado que si no...

Por cierto, después de la India fui a China y allí me quedé muy asombrado porque la mayoría de la gente pasa sus ratos libres ¡¡haciendo sumas!!. Su juego favorito es hacer «cuadrados mágicos»; de verdad que es divertido, os lo cuento»

Fijaos en este cuadrado:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

esta formado por 9 casillas y cada una la ocupa un nº distinto del 1 al 9 y si sumamos o las filas, o columnas o diagonales siempre sale 15¡¡. Por eso son mágicos.

Un amigo de Pekín me propuso hacer uno con los números: -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, y 6, y todavía no lo he conseguido. ¿Podéis ayudarme?.

Hasta pronto

Pies ligeros

Conceptos matemáticos que potencia:

Con este mensaje introducimos en el aula las asombrosas figuras mágicas, fomentando con su actividad el cálculo mental de los niños. Una vez motivados por el mensaje, se les facilita libros dónde se habla de la leyenda del origen del 1º cuadrado chino, el «Lu Shu», y de la generalización a figuras mágicas. En este tema los niños siempre han manifestado un gran interés por la resolución de las mismas.

Uno de los cuadrados mágicos que más se trabajó en el aula, fue el que aparece en el grabado «Melancolía» de Alberto Durero. Los coordinadores, provistos de sendas transparencias del grabado, incitaron a los niños a hacer un minucioso análisis del mismo con ojos matemáticos.

Títulos: Cintas de Möbius

¡¡Gracias a todos por vuestras respuestas!!. Cuando vuelva a Pekín iré a ver a mi amigo con la solución dada por vosotros.

No sé cómo me las arreglo que siempre ando metido en follones. Cuando estaba en Alemania, el compañero de habitación del albergue me habló de una tira de papel de un sólo lado. Le aposté mi saco de dormir a que no era capaz de demostrármelo, y sabéis lo que pasó?, pues que perdí mi saco.

¡¡Sí existen las tiras de papel de un sólo lado!!. El que no se lo crea que las busque o pregunte a su profesor.

Hasta pronto

Pies ligeros

Conceptos matemáticos que potencia:

Las intenciones con este mensaje son claras: introducir a los niños en los objetos topológicos. Se trabajaron en clase con cintas de Möbius construidas por los niños, comprobando, mediante un esmalte de uñas, que efectivamente sólo hay un lado. Se continuó investigando cortándolas por la mitad, a 1/3 del borde, etc., anotando cuidadosamente los resultados para después intentar obtener conclusiones.

Títulos: los apuros del pastor

¡¡Hola a todos!!.

Así que también os habéis convencido de que existen tiras de papel de un solo lado. ¡¡Me alegro!!.

Hoy he estado paseando por la orrilla del Manzanares, he visto el estadio «Vicente Calderón» y he llegado al puente de los franceses, donde me he sentado a descansar. Allí me he acordado de una curiosa situación que me contaron cuando estaba en tierras manchegas a la altura de Piedrabuena: Un pastor que sólo llevaba un lobo, una cabra y una col tenía que atravesar el río, pero, en la única barca que había para ello sólo cabían el pastor y el lobo, o el pastor y la col o el pastor y la cabra.

Desgraciadamente no se atreve a dejar solo al lobo con la cabra, porque aunque está amaestrado le sigue gustando la carne de cabra, y tampoco puede dejar solos a la cabra y la col, porque la cabra se la comería. Después de pensar un rato, llegó a la conclusión de que podía cruzar el río con todos sus pertenencias sin que tuviese que perder ninguna. ¿Sabéis cómo lo hizo?

Hasta pronto

Pies ligeros

Conceptos matemáticos que potencia:

Con este antiquísimo rompecabezas intentamos que los niños comiencen a resolver pequeños problemas lógicos de dificultad aceptable para su edad. Se les hace ver la necesidad de una buena anotación simbólica para resolver adecuadamente y con el mínimo esfuerzo el rompecabezas.

Una vez motivados a seguir investigando en el tema, se les propusieron dos nuevos ejercicios de este tipo, recogidos como programas para ordenador: el «Algolema de la oveja» y el «Algolema de los ríos». Los niños los enfocaron como dos divertidos juegos de los que querían copia inmediatamente.

Después de haber trabajado con ambos programas, les pedimos a todos que pusiesen por escrito todos los movimientos realizados hasta conseguir la solución. A la mayoría de los niños fue este paso el que más les costó y hubo que orientarles continuamente para que no se perdiesen en su propia notación.

Estos son todos los mensajes dejados por Pies Ligeros con un contenido matemático prefijado. El personaje tuvo que dejar otros muchos corespondiendo a las muestras de amistad y contestando a las más variadas cuestiones que salieron de sus cabecitas, No nos parece oportuno incorporarlos a este artículo por su gran cantidad.

La evaluación de la experiencia ha sido altamente positiva, consiguiendo sobre todo que los niños trabajasen en matemáticas con alegría y diversión, aprendiendo nuevos temas o afianzando los ya conocidos y, principalmente realizaron un agradable descubrimiento: leer libros de matemáticas no es aburrido.

Bibliografía

* AGOSTINI, F.; **Juegos y matemáticas**; Pirámide, 1985, Madrid.

* AGOSTINI, F. Y DE CARLO, N.; **Juegos de la inteligencia**; Pirámide, 1986, Madrid.

* ARMEJACH, R. Y CEMELI, R.; **Tecnologías en el aula**; Cuadernos de Pedagogía nº197.

* BOLT, B.; **Divertimentos matemáticos**; Labor, 1988, Barcelona.

* CARLAVILLA, J. L. Y FERNÁNDEZ, G.; **Historia de las matemáticas**; 1988 Junta de Comunidades de Castilla - La Mancha.

* GARDNER, M.; **¡Ajá!**; Labor, 1981 Barcelona.

* GARDNER, M.; **Miscelánea matemática**; Biblioteca científica. Salvat 1986 Barcelona.

* GROS SALVAT B.; **Psicología cognitiva e informática educativa**; Cuadernos de Pedagogía nº 197.

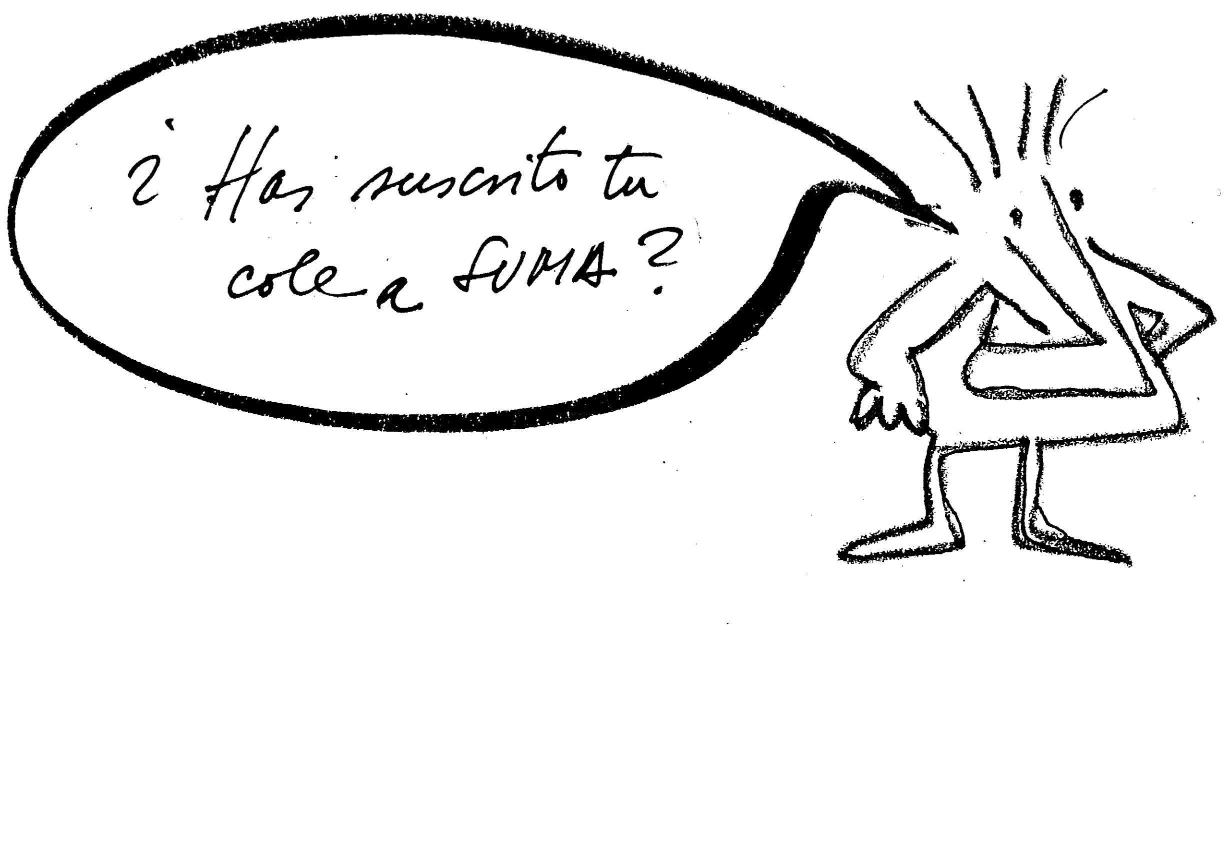
* GRUPO TIDOC-PROJECTE; **Datos e información**; Cuadernos de Pedagogía nº 197.

* I. C. M. I.; **Las matemáticas en primaria y secundaria en la década de los 90**; Mestral 1987.

* LANGDON, N. Y SNAPE, CH.; **El fascinante mundo de las matemáticas**; Limusa, 1989 México.

* MARÍN, M.; **Telemática en la escuela: Proyecto Clavius**; Base informática, nº 22, abril de 1993.

Margarita Marín
Universidad de Castilla-La Mancha.
Antonio España
CP Alcalde de Móstoles.
Carlos Cruz
CP Francisco Carrillo



Algoritmos y azar con la Hoja de Cálculo

Salvador Sánchez Majadas

« ¿Presenta el microordenador modos fundamentalmente nuevos de experiencia matemática? »

Esta es la cuestión que S. PAPERT plantea como respuesta a la carta que DAVID WHEELER escribe a varios colegas del campo de la educación matemática de varios paises, invitándole a participar en un pequeño ejercicio («For the Learning of Mathematics», 1984). Consistía el ejercicio en formular cierto nº de *problemas* cuya solución conduciría probablemente a un avance substancial en nuestro conocimiento matemático. Recuerda en la carta que puede ser constructivo seguir el ejemplo de HILBERT cuando, en su conferencia de 1900, anunció los famosos 23 problemas.

Aunque en algunos aspectos S. PAPERT haya dado su propia respuesta a través del LOGO, la utilización de programas de Hoja de cálculo tan sencillos como WORKS 2.0, abre el camino para ser utilizados cada vez más dentro del currículo.

Introducción

El PROYECTO ATENEA español a través del **Informe de evaluación** de la OCDE, en el apartado **4. El Proyecto aún tiene que centrar la atención en cuestiones de aprendizaje**, aporta una información que me parece esclarecedora para la fase de generalización en la que estamos inmersos:

«Resta por explorar definitamente hasta qué punto pueden ofrecer los ordenadores nuevas técnicas de activación y nuevas vías para formalizar el aprendizaje. Las pruebas aportadas por otros países muestran que, en proyectos análogos a Atenea, la insistencia en los procesos de aprendizaje se produce en una segunda fase o más tardíamente». (p. 45)

Con la ESO adelantada por algunos centros ya no es nada nuevo asegurar que un alumno no sólo aprende cuando domina los contenidos académicos, sino que también aprende cuando mejora en sus procesos y desarrollo de las tareas habituales, cuando modifica las estrategias que utiliza para resolver situaciones escolares o extrescolares, cuando cambia sus actitudes hacia determinadas materias como la matemática (DE LA TORRE, S.).

Historia

Rememorando algo de historia sobre la introducción de las calculadoras en las aulas, éstas se utilizan en el Reino Unido desde 1975; el informe COCKROFT, encargado por el gobierno y realizado en 1982, dio respaldo al uso de calculadoras en las escuelas, y expresaba ciertas reservas acerca de la cantidad de cálculos con lápiz y papel que sería necesario ahora; especialmente para alumnos de nivel bajo (S. FIELKER, D.).

Antes de esto MICHAEL GIRLING (1977) escribió lo siguiente sobre el uso de las calculadoras y algoritmos escritos:

No voy a sugerir que los algoritmos de lápiz y papel no deberían enseñarse, pero solamente debería hacerse como parte del arsenal que tenemos para ayudar al entendimiento de los números y no porque sean útiles.

Un posterior informe de inspectores del gobierno en 1982 apoyaba estas ideas, y llegó a decir que solamente necesitan hacerse sobre el papel los cálculos básicos y simples. Incluso que algunos métodos estandar de cálculo, tales como las divisiones largas, en las que muchos alumnos encuentran dificultad y muy pocos entienden realmente, no deberían seguir haciéndose.

En esta línea se manifiesta HILLARY SHUARD en 1986, Director del proyecto de «Iniciativas en Educación Matemática», diciendo:

Es dudoso hasta qué punto esas técnicas (aritmética de lápiz y papel) deben retenerse, ya que no son muy utilizadas fuera de la escuela. En la vida real, los adultos normalmente hacen los cálculos mentales si los números son pequeños, o utilizan calculadoras para cálculos más complicados.

En el libro de Matemáticas de la SECUNDARIA OBLIGATORIA cuando, en la Introducción, se analizan los contenidos y procedimientos en las matemáticas, termina el párrafo con una consideración hacia los medios tecnológicos:

La misma introducción y aplicación de nuevos medios tecnológicos en matemáticas obliga a un planteamiento diferente, tanto en los contenidos como en la forma de enseñanza. (p. 13)

Características de una Hoja de Cálculo

El informe COCKCROFT, anteriormente aludido, incluyó entre sus recomendaciones como focos del aprendizaje de la matemática la «resolución de problemas» y el «trabajo de investigación».

El libro Matemáticas de SECUNDARIA OBLIGATORIA en el apartado dedicado a las Calculadoras, dentro de **Orientaciones sobre contenidos específicos**, hace una referencia explícita a la herramienta motivo de este artículo:

*El **Ordenador** permite, principalmente a través de las hojas de cálculo, manejar cualquier cantidad de números, organizarlos de muchas maneras en tablas, diagramas o gráficos sobre los que se pueden observar e investigar propiedades y relaciones.* (p. 123)

Las Hojas de cálculo, además de favorecer los aspectos antes indicados, cuentan con características generales como las siguientes:

- Permiten la interacción entre el medio y el alumno
- Cálculo automático o no al variar los datos
- Posibilidad de gráficos asociados a los datos

Por último, como características técnicas a resaltar de la Hoja de cálculo de WORKS 2.0 se pueden señalar:

- Es un programa abierto y fácil de programar (57 funciones)
- Tiene 4096 filas y 256 columnas (1.048.576 celdas)
- Permite proteger los datos contra borrado (Menú Formato)
- Posibilidad de utilizar colores, en modo Texto
- Posee macros o macroinstrucciones (ALT y K)

Algoritmos

JESÚS M. GOÑI (nº 3 **Aula**) después de indicar que no solamente existen los algoritmos «aritméticos» en la Matemática, se inclina porque una virtualidad interesante de la reflexión que la reforma está provocando sería que se ampliara el abanico de los algoritmos. A continuación nos ofrece una idea en la línea de la carta de la introducción de DAVID WHEELER:

«Sería realmente un avance interesante para la educación matemática de los alumnos».

Algoritmo para el M.C.D.

La presencia de algoritmos está en la Historia de la Matemática y el más claro exponente es el algoritmo de Euclides:

Si B divide a A, B es común divisor de B y A, y es el **mayor**, ya que ningún entero mayor que B puede dividir a B. Pero, si B no divide a A, entonces, el menor de los números A y B continuamente sustraído del mayor, tendrá como resultado el número que divida a su anterior. Este número que resta es el MCD de A y B, y cualquier común divisor de A y B divide al MCD de A y B.

Ilustro el proceso anterior con un ejemplo:

36 - 26 = 10, 26 no divide a 36
26 - 10 = 16, 16 « « « 26
16 - 10 = 6, 10 « « « 16
10 - 6 = 4, 6 « « « 10
6 - 4 = 2, 4 « « « 6
4 - 2 = 2, 2 divide a 4 $\Rightarrow$ MCD(36,26)=2

Este algoritmo aparece propuesto en el X CONCURSO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS para el NIVEL II (1º de FP2 y 2º de BUP) de la forma siguiente (CDL/Enero 1993):

Escribe dos números naturales

↓

Escribe su diferencia (mayor menos menor)

↓

Borra el mayor de los tres números

Los que quedan ¿Son iguales?

Si son iguales FIN, y si NO lo son, vuelve al nivel 2º. Razona qué número se obtiene con este algoritmo (el que queda igual al otro) e identifica este método con otro que conozcas.

Esta última forma de proponer el algoritmo es muy aconsejable para hacerlo en el aula y especialmente con calculadoras u ordenador y una Hoja de cálculo, como la siguiente:

ALGORITMO PARA EL CÁLCULO DEL M.C.D.

Nº MAYOR(A)= 36

Nº MAYOR(B)= 26

A	B	A - B
36	26	10
26	10	16
16	10	6
10	6	4
6	4	2
4	2	2
N/D	N/D	N/D
N/D	N/D	N/D
N/D	N/D	N/D

Se utiliza la función **ND( )** de WORKS que devuelve el valor N/D, para indicar que no hay información disponible.

Algoritmo para la multiplicación

Existen métodos antiguos para la multiplicación de números enteros, como el utilizado por algunos campesinos rusos, que se remontan a los tiempos de los egipcios. Si se quiere calcular el producto de dos enteros y positivos A y B hacer lo siguiente:

Con B diferente de 1 hacer: multiplicar Ax2 y, si B es par dividirlo entre dos, si B es impar entonces restar 1 de B y dividir el resultado entre dos. Cuando B es impar sumar su correspondiente A, la suma de las A respectivas de todas las B impares es igual al producto AxB.

Una Hoja de cálculo como la siguiente favorece la comprobación inmediata y la interacción con el alumno, pues puede introducir tantos factores A y B como sea preciso:

ALGORITMO PARA MULTIPLICAR DOS ENTEROS POSITIVOS

A = 13

B = 25

A	B	C	A x B = 325
13	25	13	
26	12	0	
52	6	0	
104	3	104	
208	1	208	
0	0	0	
0	0	0	
0	0	0	
0	0	0	

Es interesante hacer notar que se obtiene el mismo resultado para AxB tomando como columna A los cocientes aproximados por defecto, resultado de dividir reiteradamente A por 2, y en la columna B, los sucesivos productos de B por 2. A continuación se eliminan las filas en las que el número de la columna A es par y se suman los restantes de la columna B.

Una comprobación de la última forma de obtener AxB lleva a que se tenga que escribir en binario la descomposición polinómica del número A.

Algoritmo para buscar números primos

Comprobar si un número es o no primo siempre es una tarea importante; pero se puede convertir en apasionante tratar de encontrar con los alumnos un algoritmo eficiente. Ya lo dice la inscripción griega del retrato de GAUSS y W. WEBER (1804-91): «Dios hace aritmética» (STEWAT, I.).

El punto de partida para la búsqueda de este algoritmo dependerá de los preconceptos de los alumnos. Después de comprobar que no se producen resultados satisfactorios como divisores D de N:

1º. De 2 a N-1

2º. De 2 a N/2

Razonar como suficientes los valores de D: 2, 3, 5,..., $N^{1/2}$

Una Hoja de cálculo como la que propongo puede ayudar en este proceso de investigación, es decir, después de comprobar el 2, sólo se necesita dividir por los números impares hasta el mayor número entero menor o igual que raíz cuardrada de N:

BUSCANDO NÚMEROS PRIMOS

NÚMERO(N)= 361 ¿N ES PRIMO?= FALSO

Números: 2 e impares <= RAÍZ(N)	D	N/D	ENTERO(N/D)	D divisor de N	CONTADOR
2	2	180.5	180	FALSO	0
3	3	120.33333	120	FALSO	0
5	5	72.2	72	FALSO	0
7	7	51.571429	51	FALSO	0
9	9	40.111111	40	FALSO	0
11	11	32.818182	32	FALSO	0
13	13	27.769231	27	FALSO	0
15	15	24.066667	24	FALSO	0
17	17	21.235294	21	FALSO	0
19	19	19	19	VERDADERO	1

Algoritmo para buscar números perfectos

Una vez asumido el concepto de que son números iguales a la suma de sus divisores propios (6, 28,..), se puede motivar a los alumnos con algo de Historia, que resumida podría ser:

Desde EUCLIDES (300 a. d. C.) que ya demostró una condición para que un número perfecto sea primo, hasta que BRENT y COHEN en 1989 anuncian una demostración de inexistencia de números perfectos impares $\leq 10^{300}$. (STEWART, I.)

Con una Hoja de cálculo similar a la propuesta en el apartado anterior se facilita la búsqueda de estos números:

BUSCANDO NÚMEROS PERFECTOS

NÚMERO(N)= 28 ¿N ES PERFECTO?=VERDADERO

Números: desde 1 hasta N	D	N/D	ENTERO(N/D)	D divisor de N	SUMADOR
1	1	28	28	VERDADERO	1
2	2	14	14	VERDADERO	2
3	3	9.33333	9	FALSO	0
4	4	7	7	VERDADERO	4
5	5	5.6	5	FALSO	0
6	6	4.66667	4	FALSO	0
7	7	4	4	VERDADERO	7
8	8	3.5	3	FALSO	0
9	9	3.11111	3	FALSO	0

El resto de la Hoja de cálculo es análoga hasta la fila veintiocho, en la que se comprueba que el número 28 es perfecto.

Las únicas limitaciones se encuentran en las 4.096 filas de la Hoja de cálculo de Works o en la cantidad de memoria disponible; esto último se resuelve con un gestor de memoria EMS o trabajando bajo WINDOWS.

Tabla de multiplicar restos módulo un número

Pocas veces se tiene tiempo para observar la cantidad de simetrías curiosas que contienen las tablas de multiplicar. Por ejemplo, los polígonos (regulares) estrellados que se obtienen con las tablas de sumar de los números que son primos con doce. (THIO DE POL, S.)

Hay en Matemáticas otras leyes sugestivas que pueden requerir una Hoja de cálculo como la siguiente tabla de multiplicar:

TABLA DE MULTIPLICAR DE LOS RESTOS MÓDULO DOCE

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10
3	0	3	6	9	0	3	6	9	0	3	6	9
4	0	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8
5	0	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7
6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6
7	0											
8	0											
9	0											
10	0											
11	0											

Se han dejado vacías las filas a partir de la siete para comentar la facilidad de **copia** en la Hoja de cálculo. De hecho sólo es preciso llenar la primera celda con una condición y la función:

=RESIDUO(A6*C4;12)

donde A6 contiene al 0 vertical y C4 al 0 horizontal.

Tasa de variación media de una función

Una forma atractiva e interdisciplinar de introducir el concepto de derivada de una función en un punto suele ser: estudiando la variación de unas cantidades respecto de otras y calculando velocidades medias.

En este apartado el uso de la calculadora o una Hoja de cálculo como la siguiente, sobre todo si la función es trascendente, puede ser de gran utilidad en la Secundaria Obligatoria:

TASA DE VARIACIÓN MEDIA (T.V.M.): y = LN (x)

ABSCISA DEL PUNTO: a = 1

ORDENADA DEL PTO: f(a)= 0

&x	a + &x	f(a + &x)	f(a+&x)-f(a)	T.V.M
1	2	0.6931472	0.693147181	0.6931472
0.75	1.75	0.5596158	0.559615788	0.7461544
0.5625	1.5625	0.4462871	0.446287103	0.7933993
0.421875	1.421875	0.3519764	0.351976423	0.8343145
0.31640625	1.3164063	0.2749055	0.274905486	0.8688371
0.23730469	1.2373047	0.2129354	0.212935375	0.8973079
0.17797852	1.1779785	0.1637998	0.163799847	0.9203349
0.13348389	1.1334839	0.125296	0.125295975	0.9386599
0.10011292	1.1001129	0.0954128	0.095412825	0.9530521
0.07508469	1.0750847	0.0723994	0.072399436	0.9642371
— — —	— — —	— — —	— — —	— — —
1.3424E-06	1.0000013	1.342E-06	1.34239E-06	0.9999993
1.0068E-06	1.000001	1.007E-06	1.00679E-06	0.9999995
7.551E-07	1.0000008	7.551E-07	7.55095E-07	0.9999996
5.6632E-07	1.0000006	5.663E-07	5.66321E-07	0.9999997
4.2474E-07	1.0000004	4.247E-07	4.24741E-07	0.9999998
3.1856E-07	1.0000003	3.186E-07	3.18556E-07	0.9999998
2.3892E-07	1.0000002	2.389E-07	2.38917E-07	0.9999999
1.7919E-07	1.0000002	1.792E-07	1.79188E-07	0.9999999
1.3439E-07	1.0000001	1.344E-07	1.34391E-07	0.9999999
1.0079E-07	1.0000001	1.008E-07	1.00793E-07	1

La notación científica o exponencial de los números se puede cambiar a otro formato de la Hoja de cálculo (fijo, etc.).

Azar y Probabilidad

Este apartado es todo un Bloque de Contenido de la E.S.O. Toma aún más relevancia al ser incluido como núcleo temático en los dos 1os. cursos de Matemáticas en el **Bachillerato** de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud y en el de Humanidades y Ciencias Sociales (Reforma); éste último también lo incluye en Matemáticas de 2º Curso.

Uno de los consejos prácticos más claros a la hora de seleccionar contenidos para una Unidad Didáctica es: hacerlo de más de un bloque y, si fuera posible, de todos. (GOÑI, J. nº 10 **Aula**)

Los fenómenos aleatorios pueden ser un buen ejemplo de este consejo pues, ya en 1991, TANUR trata de clasificar los campos de aplicación de la Estadística: El hombre y su mundo biológico, el mundo físico, el social y el político. (D. GODINO, J.)

La probabilidad frecuencial o empírica, defendida por R. von Mises (1919), tiene como exclusivo objetivo la demostración práctica a través de la experimentación. Ésta se calcula a partir de las frecuencias relativas observadas de cada uno de los diversos resultados en pruebas repetidas.

Simulación de experimentos aleatorios

La introducción del ordenador en las aulas permite simular la probabilidad desde el anterior punto de vista y su versatilidad le concede cierta ventaja sobre otros medios tecnológicos. Ya lo dice S. PAPERT en «Desafío a la mente»:

(...)La computadora es el proteo de las máquinas. Su esencia es su universalidad, su poder de simular,...

Por ejemplo, componiendo las funciónes ALEATORIO( ), que genera un número aleatorio en [0,1), y la función ENTERO (x), parte entera de x, se pueden generar números enteros entre 0 y 9:

ENTERO(ALEATORIO( )*10)
↓
ENTERO([0,10))
↓
0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

Copiando esta fórmula, en el rango deseado, se puede generar una tabla de números aleatorios como la siguiente:

TABLA DE NÚMEROS ALEATORIOS

0	6	9	3	6	3	9	2	6	2	4	8	9	5	7	2	9	3	5	8	2
6	4	4	7	8	5	5	6	7	8	7	5	3	5	9	4	5	8	8	2	4
8	4	8	8	5	6	7	4	5	1	7	6	3	4	4	4	7	6	5	5	8
4	2	4	6	0	2	3	2	4	6	5	8	7	9	6	5	3	8	6	9	0
0	9	7	9	2	8	2	7	1	2	8	3	2	8	2	5	2	8	2	3	5
4	7	0	0	8	8	7	3	6	3	3	0	8	7	7	2	6	3	1	3	3
4	7	1	3	4	0	1	0	6	6	1	1	5	6	3	8	6	2	3	4	7
5	6	3	1	9	5	8	8	8	7	6	0	5	9	7	7	0	6	3	5	4
2	9	1	6	5	6	0	1	4	2	2	2	0	6	4	0	1	0	8	9	7
6	6	2	0	4	3	7	4	3	4	8	7	0	5	9	9	0	9	7	7	3
1	7	2	3	1	1	8	5	1	6	4	9	9	8	4	1	6	2	3	3	0
2	3	8	7	2	0	6	7	9	3	3	4	7	6	0	4	9	8	7	0	2
6	1	7	5	5	8	0	3	3	7	4	8	5	0	7	4	6	7	6	2	5
5	0	1	3	3	5	5	6	7	0	3	4	2	0	1	8	6	9	2	5	4
4	3	0	7	6	6	3	0	7	7	1	5	3	0	1	2	5	9	9	6	5
9	5	6	3	3	0	5	6	5	8	7	4	5	1	6	9	3	4	8	5	1
6	6	6	2	2	1	1	9	1	3	0	1	7	1	9	0	6	3	7	8	3

Las actividades que se realicen con alumnos con una tabla similar a esta dependerá de muchos factores (tiempos, espacios, interés, ...). En todo caso, es recomendable conocer ideas como las del apartado **Números aleatorios** que J. DÍAZ GODINO y clres. dedican en su libro.

A) No cuesta demasiado esfuerzo simular en la Hoja de cálculo: 100, 200,...., 4.000 lanzamientos de dos dados y contar el número de veces que la suma de sus caras superiores es 2, 3, 4,...., 12.

AZAR Y PROBABILIDAD

«Simulación del lanzamiento de dos lados, para 100 tiradas»

2		3	4	5	6	7	Suma	F. relat	P. teórica
8	0	4					2	0.02	1/36
8	0	9							
8	0	9					3	0.05	2/36
9	0	8							
6	0	3					4		
9	0	6							
9	0	6					5		
5	0	10							
5	0	9					6		
7	0	5							
2	1	7					7		
7	0	6							

La columna del 2 se ha obtenido combinando dos funciones de la Hoja de cálculo de WORKS:

ENTERO(1+ALEATORIO()*6) + ENTERO(1+ALEATORIO()*6)
ENTERO([1,7]) ENTERO([1,7])
1,2,3,4,5,6 1,2,3,4,5,6

La columna de al lado (en el caso del 3 está oculta) es un contador de casos en los que aparece el 2: pone un 1 ó un 0, según la suma anterior sea ó no un 2. Los números 4, 5, 6 y 7 están sin rellenar.

B) Simular otros experimentos aleatorios, como el del lanzamiento de monedas o dados, supone pequeñas variaciones en la función ALEATORIO( ) para que genere los números aleatorios buscados.

Por ejemplo, supongamos que se quiere evaluar el suceso «salir par», en el experimento aleatorio de lanzar un dado. Una vez introduccido en el rango deseado:

=ENTERO(1+ALEATORIO( )*6)

Se tiene que introducir una condición para poder contar el número de 2, 4 ó 6 que salgan; una puede ser:

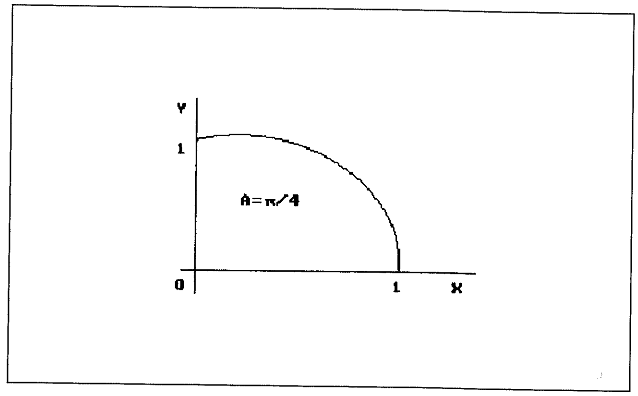
=SI(ENTERO(B8/2)=B8/2;1;0)

es decir, si la celda B8 contiene un 2, 4 ó 6 escribe un 1 y sino un 0.

Cálculo del número PI

El método de Montecarlo y la función ALEATORIO() proporcionan una simulación probabilística curiosa para el cálculo aproximado del número ¶.

Suponiendo que se lanzan disparos «aleatorios» en el interior de un cuadrado de lado unidad:



Así, la probabilidad de que los disparos «caigan» dentro de la cuarta parte del círculo de radio unidad, centrado en el origen, es:

$$P = \frac{\P/4}{1} = \frac{\P}{4}$$

Si se efectúan N disparos y k caen dentro, una estimación de P es: k/N. Por tanto, una estimación de ¶ es: **4xk/N**.

La Hoja de cálculo siguiente produce resultados satisfactorios en función del número de pruebas efectuadas:

NÚMERO PI

Nº PRUEBAS = 100 TOTAL DIANAS = 78
Valor de π = 3.12

Nº Pruebas N	Disparos aleatorios Xi	Yi	X + Y = 1	¿Cae dentro el disparo?	Diana
1	0.2680727	0.5313162	0.96339867	VERDADERO	1
2	0.7831092	0.9537289	0.62188423	FALSO	0
3	0.3148646	0.1266779	0.94913659	VERDADERO	1
4	0.5901703	0.4968312	0.8072788	VERDADERO	1
5	0.5088475	0.273424	0.86085665	VERDADERO	1
6	0.5932943	0.6030325	0.80498566	VERDADERO	1
7	0.1487438	0.9543771	0.98887577	VERDADERO	1
8	0.5530764	0.0241668	0.83313054	VERDADERO	1
9	0.2825115	0.9746534	0.95926392	FALSO	0
10	0.8196778	0.7564004	0.57282489	FALSO	0

Cálculo de integrales definidas

Mediante el método anterior se puede simular el cálculo aproximado de integrales definidas. Por ejemplo, efectuando disparos aleatorios en el interior de un cuadrado unidad para calcular la integral de Log(1+x) entre 0 y 1:

$$P = \frac{A}{1} = A$$

Por tanto, en este caso el área bajo la curva, entre x=0 y x=1, se aproxima al número: **k/N**.

INTEGRAL DEFINIDA

Nº PRUEBAS = 100 TOTAL DIANAS = 25

Área aprox = 0.25

Nº Pruebas	Disparos aleatorios		Log(1+X)	¿Cae dentro el disparo?	Dianas
N	Xi	Yi			
1	0.1047229	0.9096725	0.0432533	FALSO	0
2	0.354621	0.6947504	0.1318178	FALSO	0
3	0.9013216	0.9438642	0.2790556	FALSO	0
4	0.681801	0.0904664	0.2257746	VERDADERO	1
5	0.6197822	0.1789439	0.2094566	VERDADERO	1
6	0.9793441	0.0924313	0.2965213	VERDADERO	1
7	0.3251563	0.349365	0.1222671	FALSO	0
8	0.264759	0.5713322	0.1020078	FALSO	0
9	0.8928336	0.4091927	0.2771124	FALSO	0
10	0.2130868	0.7304757	0.0838919	FALSO	0

Para conseguir buenas aproximaciones del área A (0.3863) hay que simular un número de pruebas mayor que el reflejado en la Hoja anterior (100). Esto último se consigue copiando hacia abajo hasta el número deseado de filas, que como se ha dicho antes en WORKS son 4096 en total.

Cálculo del Área de una elipse

El método de Monte Carlo se puede aplicar al cálculo aproximado del área encerrada por una elipse.

La probabilidad de que los disparos «aleatorios» caigan en la cuarta parte de la elipse, centrada en el origen, es:

$$P = \frac{A}{axb} \approx \frac{k}{N}$$

Por tanto, el área de la elipse se aproxima al número: **4xaxbxk/N**.

ÁREA DE LA ELIPSE

Nº PRUEBAS = 100 TOTAL DIANAS = 79
SEM. MAYOR = 5
SEM. MENOR = 2

Área aprox = 31.6

Nº Pruebas	Disparos aleatorios		X /a + Y /b = 1	¿Cae dentro el disparo?	Dianas
N	Xi	Yi			
1	1.759798	0.383289	1.8720303884	VERDADERO	1
2	4.5199274	1.6130114	0.855126272	FALSO	0
3	0.6254934	0.5056336	1.9842886097	VERDADERO	1
4	0.6324635	1.6108167	1.9839350783	VERDADERO	1
5	0.1343905	0.9921221	1.9992774374	VERDADERO	1
6	4.9447867	0.3622396	0.2964008948	FALSO	0
7	4.5114867	1.5227962	0.8622285732	FALSO	0
8	3.6481635	1.3468116	1.3676784879	VERDADERO	1

Resulución de problemas

1º. *Un tirador da en el blanco una de cada tres veces, y otro tirador, una de cada cuatro. Si disparan los dos a la vez, ¿qué probabilidad hay de que el blanco sea alcanzado una vez al menos?*

Con una Hoja de cálculo se puede simular el problema anterior. Para ello, se considera que el tirador 1º **acierta** si sale **0** cuando se elige un número (entero) al azar entre 0 y 2; a su vez el tirador 2º si se elige un número entre 0 y 3.

Tirador 1º

ENTERO(ALEATORIO()*3)
ENTRO([O,3))
0,1,2

Tirador 2º

ENTERO(ALEATORIO()*4)
ENTERO([O,4))
0,1,2,3

El blanco será alcanzado cuando el producto de los dos números sea 0.

PROBLEMA DE LOS TIRADORES

«Un tirador da en el blanco una de cada tres veces, y otro tirador una de cada cuatro. Si disparan los dos a la vez....»

Prueba	1ª		2ª	3ª	4ª	5ª	Prueba	Acierta	Frecuencias
	0	1	0	1	0	1	1ª	49	0.49
	0	1	0	1	1	1			
	0	1	0	0	0	0	2ª	50	0.5
	0	1	0	1	0	0			
	6	0	0	0	1	1	3ª	59	0.59
	2	0	0	1	1	1			
	1	0	1	1	1	0	4ª	54	0.54
	0	1	1	1	0	0			
	3	0	1	1	1	0	5ª	39	0.39
	0	1	0	1	1	0			
	2	0	1	0	1	0	Media frecuencias:	0.502	
	0	1	1	0	1	0			

Se ha mejorado la solución frecuencial de la probabilidad efectuando 5 pruebas de 100 intentos cada una y hallando la media, para aproximarse a la solución teórica (1/2).

2º. Una excelente exposición de la *Paradoja de Bertrand* se puede encontrar en los Juegos matemáticos de Investigación y Ciencia (I. Stewart):

- *Andrómeda está encerrada en una de las tres cavernas. La probabilidad de que se encuentre en una dada es, pues, de 1/3, cualquiera que sea la caverna elegida.*

- *Perseo elige una caverna.*

- *La urraca designa una de las otras dos y declara (sin mentir) que en ella mora una gorgona.*

- *Entonces Perseo puede elegir la otra caverna.*

La urraca afirma que si Perseo cambia a la otra caverna la probabilidad de localizar a Andrómeda es de **2/3** y de **1/3** si no modifica su elección inicial.

El diseño de una Hoja de cálculo que cuenta el número de veces en las que Perseo acierta y falla, terminará dando la razón a la urraca:

PARADOJA DE LA CAJA DE BERTRAND

Andrómeda A	Perseo B	Urraca C	Perseo NO modifica	Perseo SI modifica	RESULTADOS Elección Perseo
1	3	2	FALSO	VERDADERO	NO modifica: 31
3	1	2	FALSO	VERDADERO	
3	1	2	FALSO	VERDADERO	SI modifica: 69
2	3	1	FALSO	VERDADERO	
1	2	3	FALSO	VERDADERO	
3	2	1	FALSO	VERDADERO	
3	3	N/D	VERDADERO	FALSO	
1	2	3	FALSO	VERDADERO	
2	1	3	FALSO	VERDADERO	
2	3	1	FALSO	VERDADERO	
3	2	1	FALSO	VERDADERO	
3	2	1	FALSO	VERDADERO	

Conclusión

El apartado que ADELA SALVADOR dedica a la Hoja de cálculo, en su libro dedicado a la Informática en la acción educativa, nos marca un camino que a mí me parece especialmente adecuado:

(...) ¿En qué sentido debemos utilizar la Hoja de cálculo para mejorar la enseñanza?. Siempre que permitamos al alumno investigar, conjeturar, plantearse problemas, estaremos en el buen camino. (p. 49)

NOTA: Las Hojas de cálculo han sido capturadas con SideKick e introducidas en Wordperfect.

Bibliografía

1. WHEELER, D.(1984). **For the Learning of Mathematics.**

2. M.E.C. (1991). Proyecto Atenea: **Informe de evaluación OCDE.**

3. DE LA TORRE, S.(1991). **El potencial cognitivo del lenguaje LOGO.** nº 16 InfoDidac.

4. FIELKER, D. **Los Centros de Profesores en el Reino Unido y la Educación Matemática.**

5. M.E.C. (1992). Secundaria Obligatoria: **Matemáticas.**

6. GOÑI, J.(1992-3). **Los Procedimientos en el Área de Matemáticas y La secuenciación de los contenidos.** nºs. 3 y 10 Aula.

7. STEWART, I. (1989-1993). **Juegos matemáticos**: Investigación y Ciencia.

8. THIO DE POL, S. (1976). **Primos o algunos dislates sobre números.** Alhambra.

9. D. GODINO, J. (1991). **Azar y probabilidad.** Síntesis.

10. SALVADOR, A. (1991). **La informática en la acción educativa.** M.E.C.-Castalia.

Salvador Sánchez Majadas
Asesor de Medios Informáticos
CEP. Getafe (Madrid)

INFORMACION

C. I. E. A. E. M.

Connission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques

International commission for the study and improvement of mathematics teaching

Présidente: Lucia Grugnetti (Italie)
Vice Présidents: P. Abrantes (Portugal), B. Heraud (Québec), K. Keitel (Allemagne)
Secrétaire: A. Hardy (Belgique)
Trésorier: A. Bertoletti (Suisse)

46ème Rencontre Internationale de la CIEAEM

La CIEAEM a le plaisir de vous annoncer qu'elle tiendra sa prochaine rencontre à Tolulouse (France) du 10 au 16 juillet 1994

Organization

La 46ème rencontre aura lieu à l'Univerité Paul Sabatier de Toulouse.

Le cout global du séjour (inscription, logement, petit déjeuner, déjeuner, diner, actes de la rencontre et excursion) est évalué à environ 2000 FF.

Les langues de travail seron le français et l'anglais.

Thème de la rencontre

Représentations graphique et symbolique de la maternelle à l'université

Sous-thèmes

1. Représentation graphique
   - en géometrie
   - dans d'autres domines (analyse, algèbre, statistique,...)
   - dans les activités mathématiques (preuves, résolution de problèmes)

2. Représentation graphique, symbolique, et nouvelles technologies (calculatrices, ordinateur,...)

3. Représentation graphique dans les autres disciplines (technologie, physique, chimie, biologie,....)

4. Représentation graphique, symbolique et représentations mentales

5. Représentations graphique et symbolique: aspect culturel et historique

6. Foncitionnement des représentations graphique et symbolique dans l'activité d'ensignement.

André Antibi (CIEAEM)
I. R. E. M. - Université Paul Sabatier
118, route de Narbonne
31062 - Tolulouse Cedex
Fax: 61.55.82.58 (Tél: 61.55.68.83)

Nom ....

Prenom ....

Adresse ....

....

....

Je m'intéresse surtout au sous-thème ....

....

Je voudrais présenter une communication sur ....

....

Dans le cadre de la Foire Aux idees* je voudrais présenter une

activité didactique sur ....

Signature ....

*La foire aux idees a pour objectif d'intensifier les éxhanges entre les participants

La Universidad Regional de Blumenau (FURB) y la Sociedad Brasilera de Educación Matemática se sienten honradas en sediar el ***II CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA (II CIBEM)***, del 17 al 22 de Julio de 1994.

Hermanados por la proximidad de las lenguas y por los fuertes lazos históricos y culturales, los Educadores Matemáticos del Brasil, de toda América Latina, de Portugal y de España, harán del ***II CIBEM*** una excelente oportunidad para encontrarse y discutir problemas comunes, para conocer sus experiencias y para establecer programas de intercambio y de cooperación.

Las lenguas oficiales del ***II CIBEM*** serán el Portugués y el Español, sin cualquier facilidad de traducción.

Serán discutidos los temas más variados dentro de la enseñanza de la matemática en todos los niveles: pesquisa, acción en sala de clases, administración, materiales educativos, proyectos de innovación, entre otros.

COMISIÓN ORGANIZADORA

Coordinador General: José Valdir Floriani
Coordinadora Ejecutiva: Maria Salett Biembengut

PROMOCIÓN

Universidad Regional de Blumenau-FURB
Sociedad Brasilera de Educación Matemática-SBEM

APOYO

CNPq, CAPES, UNESCO, OAE, Banco do Brasil
Agencia de Congresos y Eventos de Blumenau
Secretaría Municipal de Educación de Blumenau
Secretaría Municipal de Turismo de Blumenau
Varig

DINÁMICA

El Congreso adoptará una metodología de acción, utilizando una dinámica de grupo grande (Conferencias), de grupo pequeño (grupos de trabajo, sesiones de comunicaciones científicas y de experiencias, mesas redondas y proyectos) e individual (letreros); además habrá tiempo para el esparcimiento y reuniones especiales.

MESAS REDONDAS

Seis mesas redondas tendrán desarrollo simultáneo por seis moderadores: tres en un día y tres en el otro, permitiendo movilidad al participante.

Temas

- La Mujer Ibero-Americana en la Educación Matemática
- Política Partidaria y Educación
- Calidad en la Educación Matemática
- Ibero-América en el Escenario Internacional de la Educación Matemática
- Filosofía de la Educación Matemática
- Historia de la Matemática Ibero-Americana

GRUPOS DE TRABAJO

Serán abordados, simultáneamente, 20 temas predefinidos.

Las sesiones de trabajo acontecerán el día lunes, martes y jueves, en la Escuela de 1º e 2º Grado Barão do Rio Branco.

El abordaje del tema seguirá la siguiente dinámica:

1º día: discusión del temario;
2º día: comunicaciones de los participantes/discusiones;
3º día: redacción y discusión del documento final.

Temas

- La Enseñanza de la Geometría
- La Educación Indígena
- Formación del Educador Matemático
- Educación Matemática y Psicoanálisis
- Problematización y Resolución de Problemas
- Enseñanza de Cálculo
- Etnomatemática
- Informática y Educación Matemática
- El Discurso Matemático en la Educación Matemática
- Psicología de la Educación Matemática
- Matemática/Arte y Mídia
- La Organización de Apoyo a la Pesquisa en Educación Matemática
- Modelación Matemática en la Enseñanza
- Matemática Extra Clase
- Nuevas tecnologías, Realidad y Utopía de la Enseñanza
- Lenguaje y Matemática
- Historia como Recurso Didáctico para la Educación Matemática
- Matemática y Ecología
- Educación Matemática y Movimientos Sociales
- Educación Matemática en los cursos iniciales

LETREROS

Los proyectos, las comunicaciones científicas y de experiencias serán presentadas en forma de letreros.

Los stands permanecerán montados durante todo el Congreso.

El horario oficial será de las 14:30 horas a las 16:30 horas.

Habrá salas a disposición de los autores que quieran presentar sus trabajos. En este caso, el autor deberá inscribirse junto a la Comisión Organizadora.

Habrá también salas reservadas para la exhibición de vídeos.

REUNIONES ESPECIALES

Los días lunes y martes, entre las 20:00 y 21:00 horas, habrá espacio para encuentros especiales. Socios de Sociedades Científicas o Culturales podrán aprovechar el Congreso para reuniones extraordinarias. La organización de la reunión cabrá a su directoría. La Comisión Organizadora reservará espacio mediante solicitud. Esas reuniones serán anunciadas en el Folleto Diario del **II CIBEM**.

El jueves está prevista la reunión para la formación del Comité Ibero-Americano de Educación Matemática.

ACTIVIDADES CULTURALES

Habrá "un período de descanso" diario a partir de las 18:30 horas.

Para las 21:00 horas del lunes, martes y jueves, están programadas actividades culturales abiertas a todos los participantes.

EXPOSICIÓN

Entidades interesadas en la divulgación de libros, material didáctico y otros deben mantener contacto con la Comisión Organizadora para obtención de espacio.

TRABAJOS

Los interesados en presentar trabajos o vídeos, podrán inscribirse hasta el día 15 de marzo de 1994.

Observaciones: 1) La Comisión Organizadora no garantiza ayuda financiera (pasaje, estancia, etc.) a los que vengan a presentar sus trabajos.

2) La Comisión Organizadora responderá a los pedidos de presentación de los trabajos y vídeos hasta el día 30 de Abril.

INSCRIPCIÓN

Las inscripciones deben ser hechas a través de ficha especial en anexo.

Hasta el 31 de marzo 1994	US$ 100,00 (cien dólares)
Hasta el 31 de mayo 1994	US$ 150,00 (ciento cincuenta dólares)
Después del 31 de mayo 1994	US$ 200,00 (doscientos dólares)

El pago de la tasa de inscripción es fundamental para que la Comisión Organizadora pueda costear la infraestructura del evento. No habrá excepciones.

LOCAL

El Congreso será realizado en el Centro de Convenciones del **Grande Hotel Blumenau**, localizado en la Alameda Rio Branco, 21, teléfono 55-473-26-0145 y fax 55-473-26-1280.

Los grupos de trabajo estarán localizados en la Escuela de 1º y 2º Grado Barão do Rio Branco, muy próximo a la sede principal.

HOSPEDAJE

La tercera fuente de ingresos de la ciudad de Blumenau es el turismo. Como el **II CIBEM** será realizado en época de vacaciones escolares, recomendamos reservas anticipadas. El hospedaje correrá por cuenta de los participantes. Las reservas pueden hacerse con la Agencia de Turismo oficial del Congreso: **Gardentur**, por el teléfono 55-473-26-3544 y fax 55-473-26-0366.
Observación: La Universidad no tiene alojamiento propio.

ALIMENTACIÓN

Blumenau cuenta con variadas opciones gastronómicas. Los precios giran en torno de US$ 5,00 por comida.

TRANSPORTES

Aéreo: Blumenau no tiene aeropuerto de gran tamaño. El terminal aéreo más cerca está en la ciudad de Navegantes (SC), a 55 Km de Blumenau. Solamente la empresa Varig hace la línea Río de Janeiro-São Paulo-Navegantes. A cada vuelo, buses ejecutivos hacen el traslado hasta Blumenau.
Rodoviário: La distancia entre São Paulo y Blumenau es de aproximadamente 700 Km. Diariamente parten dos buses (tipo coche cama) del terminal Tietê (São Paulo-SP) que hacen el trayecto en 10 horas más o menos, y de Porto Alegre-Blumenau con los mismos horarios e igual distancia. Recomendamos la compra anticipada de los pasajes.
Alquiler de Automóviles: Puede ser hecha en el aeropuerto o en el hotel. La carretera Jorge Lacerda, que une Navegantes a Blumenau, fue recientemente reformada y ofrece seguridad tanto de día como de noche, a pesar del movimiento intenso.

MONEDA

En virtud de la inestabilidad de la moneda nacional, recomendamos que el participante mantenga sus reservas financieras en dólares, haciendo el cambio conforme a la necesidad de gastos. Algunos restaurantes, tiendas, hoteles y alquiladoras de automóviles aceptan la moneda norteamericana.

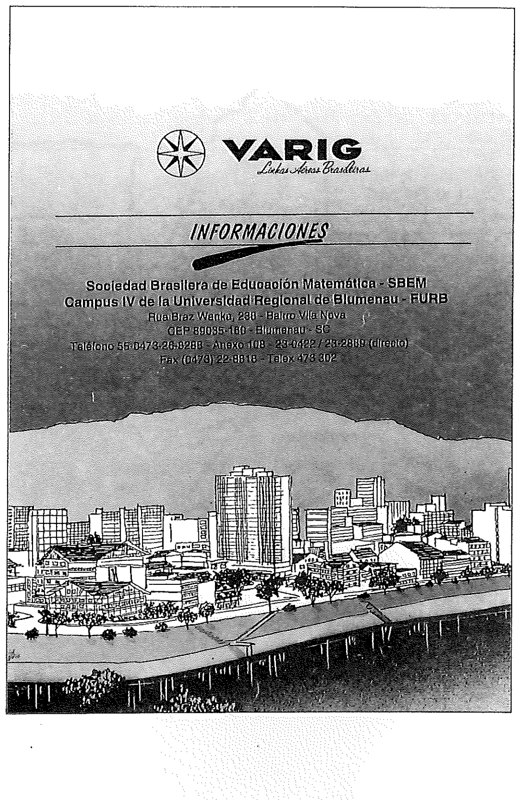
CIBEM ESPECIAL

Parte de las actividades del martes, día 19, estarán abiertas a aquellos que no puedan participar del Congreso como un todo.

Serán realizadas mini-conferencias y sesión de letreros en el Centro de Convenciones del Grande Hotel, y una mini Oktaberfest en el pabellón (A) de la PROEB (local donde se realiza la Oktoberfest anualmente). Los interesados en participar sólo del CIBEM ESPECIAL, deberán hacer su inscripción por separado, conforme ficha de inscripción a ser remitida a partir de febrero.

VÍA SATÉLITE

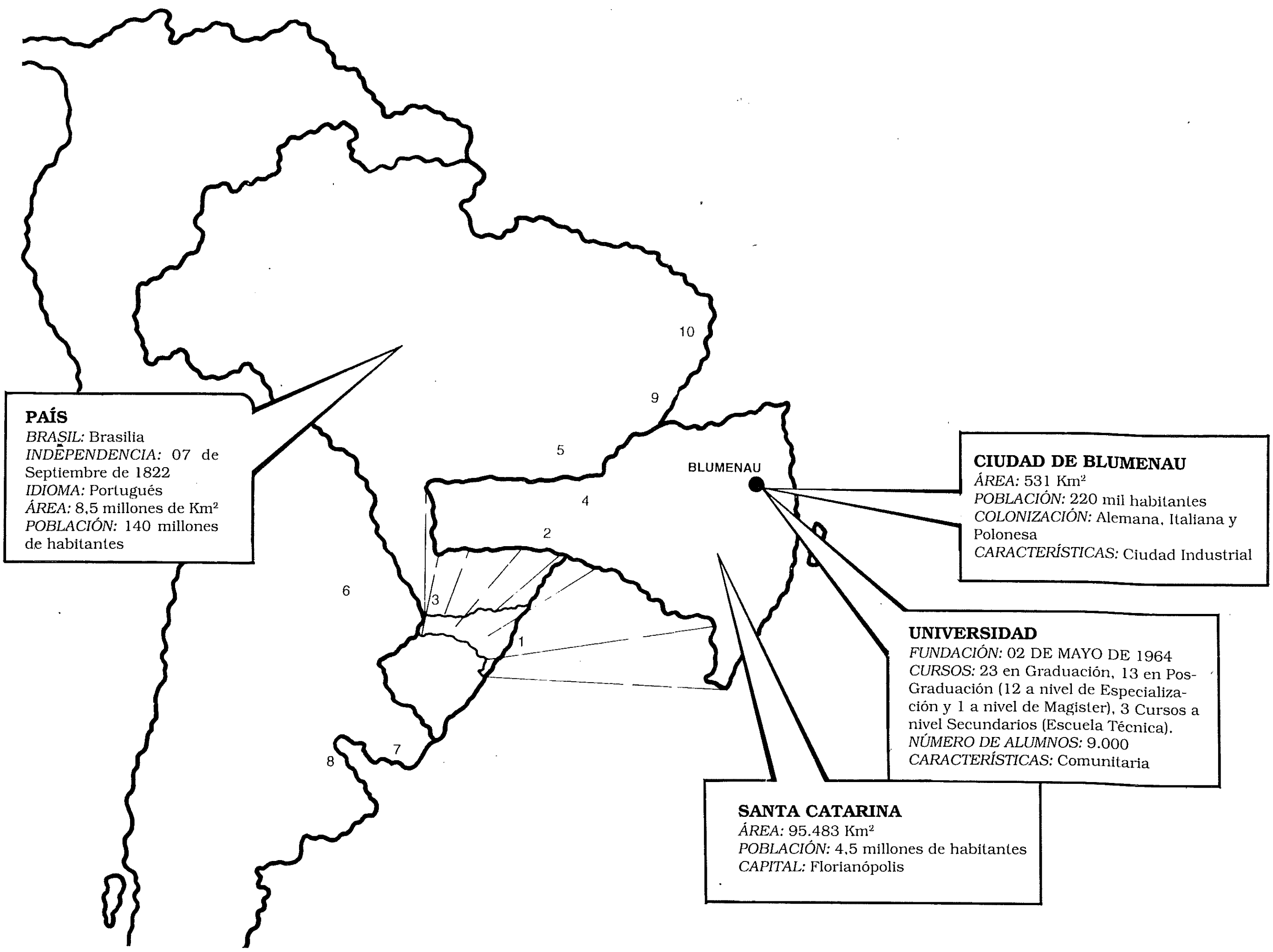
La coordinación está negociando con la Empresa Brasilera de Telecomunicaciones (EMBRATEL), el televisionamiento directo del **CIBEM ESPECIAL** para todo el país. Los que no puedan venir a Blumenau, tendrán la posibilidad de asistir al ciclo de mini-conferencias vía satélite.



DISTANCIAS DE BLUMENAU A:

1- Florianópolis	130 Km
2- São Paulo	680 Km
3- Foz do Iguaçu	1000 Km
4- Rio de Janeiro	1080 Km
5- Belo Horizonte	1195 Km
6- Asunción (Paraguay)	1220 Km
7- Montevideo (Uruguay)	1500 Km
8- Buenos Aires (Argentina)	1720 Km
9- Salvador	2557 Km
10- Recife	3326 Km

Con 220 mil habitantes, ***Blumenau*** *es la principal ciudad del Valle del Itajaí, Estado de Santa Catarina, en la región sur del Brasil, de colonización predominantemente alemana, italiana y polonesa. Su riqueza está basada en un parque fabril segmentado, en el que destaca la industria textil y de vestuario. También son famosos sus cristales y porcelanas. Es uno de los principales centros comerciales del Estado. En el sector de prestación de servicios, Blumenau se destaca como el tercero más importante polo de producción de software del Brasil.*



PAÍS
BRASIL: Brasilia
INDEPENDENCIA: 07 de Septiembre de 1822
IDIOMA: Portugués
ÁREA: 8,5 millones de Km²
POBLACIÓN: 140 millones de habitantes

CIUDAD DE BLUMENAU
ÁREA: 531 Km²
POBLACIÓN: 220 mil habitantes
COLONIZACIÓN: Alemana, Italiana y Polonesa
CARACTERÍSTICAS: Ciudad Industrial

UNIVERSIDAD
FUNDACIÓN: 02 DE MAYO DE 1964
CURSOS: 23 en Graduación, 13 en Pos-Graduación (12 a nivel de Especialización y 1 a nivel de Magister), 3 Cursos a nivel Secundarios (Escuela Técnica).
NÚMERO DE ALUMNOS: 9.000
CARACTERÍSTICAS: Comunitaria

SANTA CATARINA
ÁREA: 95.483 Km²
POBLACIÓN: 4,5 millones de habitantes
CAPITAL: Florianópolis

PROGRAMA PROVISIONAL

<table>
<tr><th>HORARIO</th><th>DOMINGO</th><th>LUNES</th><th>MARTES</th><th>MIÉRCOLES</th><th>JUEVES</th><th>VIERNES</th></tr>
<tr><td>9h a 10h30</td><td rowspan="4">Recepción Inscripción y Entrega de Material</td><td>Conferencia Plenaria</td><td>Conferencia Plenaria</td><td rowspan="7">L I B R E</td><td>Conferencia Plenaria</td><td>Conferencia Plenaria</td></tr>
<tr><td>11h a 12h30</td><td>Mesa Redonda</td><td>Mini Conferencia</td><td>Mesa Redonda</td><td rowspan="4">Evaluación de la Producción en Educación Matemática en el Mundo Ibero Americano</td></tr>
<tr><td>14h30 a 16h</td><td>Letreros</td><td>Mini Conferencia</td><td>Letreros</td></tr>
<tr><td>17h a 18h30</td><td>Grupo de Trabajo</td><td>Grupo de Trabajo</td><td>Grupo de Trabajo</td></tr>
<tr><td>18h30 a 19h30</td><td rowspan="2">Sesión Solemne de Apertura</td><td>Happy Hour</td><td>Happy Hour</td><td>Happy Hour</td></tr>
<tr><td>20h a 21h</td><td>Reuniones Especiales</td><td>Reuniones Especiales</td><td>Reuniones Especiales</td><td rowspan="2">Sesión de Clausura</td></tr>
<tr><td>21h a 24h</td><td>Cocktail</td><td>Actividad Cultural</td><td>Mini Oktoberfest</td><td>Actividad Cultural</td></tr>
</table>

Obs.: Las actividades del viernes se encierran a las 12:30 hrs.

FICHA DE INSCRIPCIÓN DEL PARTICIPANTE

Tasas y Plazos:	Hasta 31 de marzo	US$ 100,00
	Hasta 31 de mayo	US$ 150,00
	Después 31 de mayo	US$ 200,00

Nombre: ______________________________

Dirección ______________________________

Barrio: ____________________ Teléfono: __________ Fax: __________

Casilla: __________ Ciudad: __________ Estado: ________ País: __________

Profesor ( ) Pesquisador ( )

Actúa en el Primario ( ) Secundario ( ) Universidad ( )

Institución de Origen: ______________________________

Cheque nº __________ Banco: ____________________ Valor: __________

Enviar cheque nominal para FURB-IICIBEM, o fotocopia del recibo de depósito bancario, destinado al Banco do Brasil, agência 0095-7 para la cuenta C/C 150638-2.
SWIFT: BRASBRRJBNU, Telex: 230.4554, calle Antônio da Veiga, 140, Casilla 1507, CEP 89010-971, teléfono 55-473-26-8288 Anexo 108-23-2898 (directo) - fax 55-473 22-8818, - Telex 473 302, a los cuidados de José Valdir Floriani o Maria Salett Biembengut.

FICHA DE INSCRIPCIÓN DEL (LA) ACOMPAÑANTE

Tasas y Plazos:	Hasta 31 de marzo	US$ 30,00
	Hasta 31 de mayo	US$ 50,00
	Después 31 de mayo	US$ 80,00

Nombre: ______________________________

Dirección ______________________________

Barrio: ____________________ Teléfono: __________ Fax: __________

Casilla: __________ Ciudad: __________ Estado: ________ País: __________

Grado de parentesco con el participante ( ) Esposa(o) - ( ) Amigo(a) - ( ) Hijo(a) - ( ) Otros

Cheque nº __________ Banco: ____________________ Valor: __________

Enviar cheque nominal para FURB-IICIBEM, o fotocopia del recibo de depósito bancario, destinado al Banco do Brasil, agência 0095-7 para la cuenta C/C 150638-2.
SWIFT: BRASBRRJBNU, Telex: 230.4554, calle Antônio da Veiga, 140, Casilla 1507, CEP 89010-971, teléfono 55-473-26-8288 Anexo 108-23-2898 (directo) - fax 55-473 22-8818, - Telex 473 302, a los cuidados de José Valdir Floriani o Maria Salett Biembengut.

Matemáticas generales para alumnos singulares

En el pazo de Mariñan (La Coruña) nos hemos reunido unos 25 profesores, en un seminario organizado por Enciga (Enseñantes de Ciencias de Galicia) como miembros de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas bajo el tema de Matemáticas generales para alumnos singulares. Presentamos, a modo de resumen, las conclusiones a las que se llegó.

Conclusiones

Todos los alumnos/as son singulares (diferencias de ritmos de aprendizaje, diferencias físicas, psíquicas, raciales, culturales, sociales, de adaptación...), en consecuencia precisan una atención individualizada, no obstante hay algunas simgularidades específicas que necesitan un grado de conocimiento de sus peculiaridades muy diferenciado. Es en este contexto en el que hablaremos de alumnos «singulares».

Hemos tratado la problemática general de integración y específica observando la siguiente clasificación:

Con disminuciones físicas (acústicas, auditivas,...)
Con disminuciones psíquicas.
Cultural y/o étnicamente distintos.
Con aptitudes nuy superiores a la media.

La integración no se puede hacer en bloque ni por decreto, tiene que ser específica.

El grupo de alumnos con «singularidades especiales» debe ser reducido para que la integración sea efectiva.

Se estableció un debate sobre dos formas de tratar la integración.

- Cada centro plantea su propio programa de integración atendiendo a las necesidades del entorno, especializándose en el tratamiento de esa singularidad, con un apoyo de las administaciones educativas en medios materiales y fundamentalmente en equipos humanos.
- La integración debe realizarse en el centro donde coincida el alumno con el apoyo de un equipo especializado según las diversas necesidades (psicólogo, pedagogo, logopeda, fisioterapeuta, profesor de soporte, especialista de áreas, etc.).

El tratamiento de las singularidades es un poderoso motivo de reflexión metodológica para el profesorado, y no sólo en su actuación con respecto a los singulares, sino para todos. Se pone de manifiesto una necesidad de «recursos didácticos» para dar respuesta a las situaciones de diversidad.

Lo importante es el alumno en «situaciones de aprender», por lo tanto debemos modificar situaciones de enseñanza (personales y didácticas) que puedan llevar a situaciones de «fracaso».

No podemos confundir integración con puesto escolar.

La ADMINISTRACIÓN tiene la obligación de:

PROMOVER Y APOYAR experiencias concretas de integración.
ENCARGARSE de su posterior difusión.
FORMACIÓN del profesorado.
DOTAR de medios humanos y materiales a los centros.

Facilitar la elaboración de materiales de apoyo y recopilación de recursos didácticos imprescindibles para la atención de la clase con diversidad, para lo cual debe proporcionar los medios materiales y el tiempo para realizarlos con una reducción del horario docente en el profesorado implicado en la integración.

GARANTIZAR el diagnóstico de las singularidades en las etapas más tempranas posibles, potenciando los equipos especializados y con una buena información y formación a todo el profesorado, en especial con los que trabajan con edades más tempranas.

Se ha puesto de manifiesto que la integración es positiva, donde ha sido llevada a cabo con medios y recursos humanos, tanto para los alumnos «*singulares*» como para los demás, y por lo tanto las escuelas deben de estar bien equipadas.

No debe hacerse integración en aquellos centros en los que falta la más mínima infraestructura tanto humana como material.

Es necesaria la implicación de todos los sectores educativos: padres, profesores, alumnos, equipos psicopedagógicos, administraciones públicas. Si se desa integrar de forma adecuada y satisfactoria a los alumnos «*singulares*».

Las concreciones del área específica de matemáticas deben hacerse a su vez para cada una de las especificidades que presenten nuestros alumnos, así hemos visto con más detalle sus implicaciones para el grupo de los disminuidos auditivamente, siendo necesario un estudio del curriculum de matemáticas para llevar a cabo una pedagogía de la diversidad.

Andrés Marcos García
ENCIGA. La Coruña

V Olimpíada Nacional

Los compañeros de la Sociedad Castellano-Leonesa nos informan sobre la organización de la V Olimpíada Nacional. A modo de resumen destacamos:

Objetivos

- Contribuir al desarrollo de las capacidades relacionadas con uno de los modos de hacer matemático: la resolución de problemas.

- Potenciar la popularización de la matemáticas a través de una actividad formativa y divertida.

- Fomentar el trabajo en equipo, la convivencia, el intercambio de ideas y la amistad entre estudiantes y profesorado de diferentes ámbitos del estado.

- Resaltar el papel cultural de las matemáticas en la educación de los estudiantes.

- Contribuir al desarrollo de las Sociedades de profesores de matemáticas integradas en la Federación.

Estructura

Actividades académicas

- Prueba individual. Se está pensando en alrededor de 6 problemas en dos fases o sesiones, seleccionando entre los que envíen las distintas sociedades.

Sería deseable que desde las sociedades envíen los problemas con respuestas y criterios de evaluación (puntuación).

- Prueba por parejas. Con el fin de evitar el carácter competitivo, elegir entre: a) investigación por grupos de un problema; b) Debate en mesa redonda de un problema (gran grupo).; c) Taller comentando fases en la resolución de problemas y algunas estrategias.

Actividades culturales: visita a la ciudad, visita a la provincia, conciertos, etc. En esas fechas son las fiestas de la ciudad de Burgos.

Las actividades culturales no serán una cantidad excesiva, con el fin de permitir tiempo libre y no abusar de autobús.

Participantes

Estudiantes: alrededor de 35 de 8º de EGB.

Acompañantes: alrededor de 15, dependiendo del nº de sociedades y entidades participantes.

En este apartado se hará un análisis de los participantes de entidades que no sean sociedades, procurando que sean representativos de algo: provincia, experiencias difundidas y consolidadas, etc., no colegios aislados.

Fechas

Entre el 20 y el 30 de Junio. El nº de días estará en función de las subvenciones conseguidas. El nº mínimo serían 4 días y el máximo 7.

Premios

Con el fin de resaltar el carácter formativo, los premios tendrán un valor simbólico.

Otros aspectos

La coordinación de la Olimpíada se está decidiendo actualmente, en función de las personas que conocen el tema y están interesadas.

Sociedad Castellano-Leonesa del Profesorado de Matemáticas

Acerca del ICME'8

El tiempo pasa y cada vez está más cerca la fecha del 14 de Julio de 1996. En reunión de la Junta Directiva de la F. E. S. P. M. ,celebrada el pasado septiembre en Madrid, el presidente del Comité local del ICME'8, Antonio Pérez, nos adelantó la información que presentamos a continuación.

Cuota de inscripción

La cuota de inscripción será de 40.000 pts. más 4.000 que pasarán a formar parte de un fondo de solidaridad. Es importante destacar que los socios de la Federación pagarán los dos tercios (2/3) de esa cantidad más el fondo de solidaridad (30.000 pts.), siempre que efectúen el ingreso antes del 30 de Junio de 1995.

Borrador para el primer anuncio:

El Comité Nacional Español del ICME'8, en representación de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, tiene el placer de anunciar que el Octavo Congreso Internacional de Educación Matemática tendrá lugar en Sevilla, España, del 14 al 21 de julio de 1996.

Los anteriores ICME'e tuvieron lugar en Lyon (Francia), Karlsruhe (Alemania), Berleley (U.S.A), Adelaide (Australia), Budapest (Hungría) y Québec (Canadá) bajo los auspicios de Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI), una subcomisión de la Unión Matemática Internacional (IMU). El ICME-8 pretende continuar esta serie de congresos con el objetivo de ampliar el desarollo de la educación matemática y sus consecuencias sobre la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de la misma.

Le invitamos a participar en el ICME-8 en cuyo programa se incluirá una amplia variedad de actividades científicas, un variado programa cultural y social para los congresistas y acompañantes y donde tendrá la oportunidad de intercambiar opiniones y discutir nuevas ideas sobre las claves de la educación matemática, dentro de un marco internacional.

Programa del congreso

El ICME-8 contendrá un rico programa científico que cubrirá las más importantes áreas de la educación matemática en todos los niveles y hará frente a temas cruciales que pueden ser de interés para los 3.500-4.000 participantes que esperamos acudan a este Congreso. Las principales actividades incluirán Conferencias plenarias y no plenarias, Grupos de trabajo, Grupos temáticos, Mesas redondas, Talleres, Presentaciones nacionales, Comunicaciones breves, Proyectos y Exposiciones. Igualmente habrá exposiciones de libros, software y de distintos materiales para la enseñanza. Los grupos de estudio del ICMI y los organizadores de los seminarios del ICMI contribuirán al programa presentando informes sobre sus actividades. También se realizarán Encuentros especiales (Asamblea del ICMI, Asociaciones, Revista, etc.). Cada participante recibirá un ejemplar de las Actas del Congreso.

La lista provisional de grupos de trabajo y de grupos temáticos es la siguiente:

Grupos de trabajo:

Wg1. Cambios curriculares: Por qué y cómo
Wg2. Diferenciación en la clase
Wg3. Innovaciones en la evaluación
Wg4. Comunicación en la clase
Wg5. Mejora de actitudes y las motivaciones
Wg6. Errores de los estudiantes en el aprendizaje
Wg7. Dificultades cognitivas en el aprendizaje
Wg8. Género y Educación matemática
Wg9. Formación en contenidos matemáticos
Wg10. Aprendizaje a distancia en matemáticas
Wg11. Aprendizaje post-escolar
Wg12. Formación de profesores
Wg13. Enseñanza integrada de las mats. y ciencias
Wg14. Matemáticas para alumnos singulares
Wg15. Cultura y educación matemática
Wg16. Matemáticas, educación y sociedad
Wg17. Aplicaciones de la realidad y modelización
Wg18. El impacto de la tecnología en el curriculum
Wg19. La didáctica de las matemáticas como ciencia
Wg20. Solidaridad en educación matemática

Grupos temáticos:

Tg1. Reforma de las matemáticas en la enseñanza infantil
Tg2. Reforma de las matemáticas en la enseñanza primaria
Tg3. Reforma de las matemáticas en la enseñanza secundaria
Tg4. Experiencias innovadoras en la formación del profesorado
Tg5. Matemáticas para el trabajo
Tg6. El futuro de la geometría
Tg7. Arte y matemáticas
Tg8. Ecología y matemáticas
Tg9. Ciencias sociales y matemáticas
Tg10. Matemáticas discretas y cálculo, hoy
Tg11. El papel de las calculadoras y los ordenadores
Tg12. Metodología de la resolución de problemas
Tg13. Etnomatemáticas
Tg14. Juegos, puzzles y materiales en matemáticas
Tg15. El laboratorio de matemáticas
Tg16. El uso de la TV, películas y vídeos en la clase
Tg17. Lesnguaje y matemáticas
Tg18. Competiciones matemáticas
Tg19. Constructivismo, enseñanza y aprendizaje
Tg20. Investigación en educación matemática

Organización del ICME'8.

La SAEM «Thales», es la encagada por la Federación de la Organización del citado evento. Por ahora, funciona interinamente un Comité Organizador cuya misión consiste en la realización de los primeros pasos para la presentación de la Sede, principalmente.

Siguiendo el esquema organizativo de Québec, la organización del ICME-8 estará compuesta, esencialmente, por los siguientes Comités:

a) Comité Ejecutivo del ICMI.

Comisión encargada de la coordinación del Congreso a nivel internacional.

presidente
Miguel de Guzmán (España),
vicepresidente
Jeremy Kilpatrick (USA),
vicepresidente
Lee Pen Yee (China),
secretario
Mogens Niss (Dinamarca),
Vocales:
Yuri L. Ershov (Rusia).
Eduardo Luna (Rep. Dominicana).
Anna Sierpinska (Canadá).
Jean Pierre Kahane (Francia).
J. H. van Lint (Holanda).
Presidente del IMU
Jacques-Louis Lions (Francia).
Secretario del IMU.
Jacob Palis Jr. (Brasil).

b) Comité encargado de programa.

Encargado de los contenidos de que ha de constar el Congreso y de marcar las directrices didácticas del mismo.

Presidente:
Claudi Alsina (España).

Luis Balbuena (España).
Lida Barret (USA).
Werner Blum (Alemania).
Milan Hejny (Checoslovaquia).
Bernard Hogdson (Canadá).
Jeremy Kilpatrick (USA).
Colette Laborde (Francia).
Antonio Pérez (España).
Luis Rico (España).
Toshio Sawada (Japón).
Ana Sfard (Israel).
Saliou Touré (Costa de Marfil).
Zhang Dianzhou (China).
Presidente ICMI, ex officio:
Miguel de Guzmán (España).
Secretario ICMI, ex officio:
Mogens Niss (Dinamarca).

c) Comité Nacional.

Comité representativo a nivel nacional de las instituciones y asociaciones de profesores de nuestro país.

e) Comité local de organización.

Encargado de la infraestructura y puesta en funcionamiento del Congreso.

Jornadas Nacionales de la A.P.M.E.P.

Los pasados días 22, 23 y 24 de octubre (coincidiendo con los primeros días de las vacaciones de Todos los Santos), se han celebrado en ese lugar simbólico llamado **Futuroscope**, cerca de Poitiers, las Jornadas Nacionales de la Asociación de Profesores de Matemáticas de la Enseñanza Pública de Francia, bajo la denominación: **"Matemáticas, Pasado y ... Futuro"** con asistencia de más de 1.200 personas, entre ellos franceses, belgas, suizos y de otros países de habla francesa.

El núcleo fundamental de las jornadas fueron las Conferencias.

La primera de ellas, el viernes 22 por la mañana, a cargo de Didier Dacunna Castelle, profesor universitario de matemáticas (está en París-I y ha trabajado en especial en Probabilidades y Estadística), y que durante los últimos tres años ha sido presidente del Consejo Nacional de Programas, cargo del que recientemente ha dimitido (por razones personales, no políticas), su título fue: **¿Qué debate es posible hoy respecto de los contenidos pasados y futuros?** Entre las ideas que apuntó, destaco: a) en Primaria hay algunos aprendizajes imprescindibles: lectura, aritmética, referencias espaciales y temporales, y otros necesarios, pero que no terminan nunca: la proporcionalidad, en el resto Secundaria y después es posible enseñar todo, con una condición: asegurar la coherencia del conjunto. b) Colegio Único no tiene nada que ver con Colegio para todos. Alguno de los asistentes a las Jornadas, le replicó que había hecho un discurso imperialista y napoleónico de las Matemáticas, borrando el debate de las matemáticas de la cultura actual.

La siguiente fue el viernes por la tarde a cargo de Jean Dhombres, profesor universitario en el O.N.R.S. de París, dedicado a la Historia de la Ciencia, y en especial de las matemáticas, además ha sido responsable junto con Mariano Hormigón y Elena Ausejo (de la Universidad de Zaragoza) de la organización del último Congreso internacional de Historia de la Ciencia, celebrado en agosto del 93 en Zaragoza. El tema de su conferencia fue **"El papel de los "problemas" en la organización de las matemáticas (investigación y enseñanza): el programa de Hilbert de 1900 a nuestros días"**, sobre cómo han influido sobre las matemáticas y su enseñanza los famosos problemas de Hilbert (en el cincuenta aniversario de su muerte).

Simultáneamente a la conferencia de Dhombres hubo otra a cargo de Robert Noirfalaise, dedicado a **"desarrollo cognitivo y resolución de problemas: ¿características del individuo o adaptación a un medio?"**, con los nuevos aportes de la psicología y la didáctica a dicho tema.

El sábado 23 Gilles Cohen, presidente de la Federación Francesa de Juegos Matemáticos (la que organiza un Torneo Internacional de Matemáticas, en el que un año intervinieron representantes españoles, los ganadores de la Olimpiada Matemática Nacional de EGB), habló sobre popularización de las matemáticas, intentando integrar la práctica de las matemáticas a nuevas dimensiones lúdicas, culturales, etc., utilizando diferentes medios, su título **"Las matemáticas, talento de la sociedad"**.

En paralelo con ella, Roger Cuppens habló de **"¿Revolucionarán los medios modernos de cálculo y la informática, la enseñanza de las matemáticas?"**, estudiando los problemas que nos planteamos y que nos plantea la utilización de calculadoras y ordenadores.

Finalmente, el domingo 24 por la mañana, hubo dos conferencias más, seguidas de un debate conjunto de las mismas, la primera a cargo de uno de los más importantes matemáticos franceses de la actualidad, Pierre Cartier, trató de **"¿Hay sitio para las matemáticas visuales?"**, y la segunda a cargo del más famoso e importante matemático internacional de la actualidad Benoit B. Mandelbrot, que, como no, habló de **"Fractales, ordenadores y enseñanza de las matemáticas"**. Me gustaría destacar aquí la brillantez expositiva de Mandelbrot que hizo una magnífica exposición de su vida escolar (las máximas calificaciones que le ponían, a veces sin leerse sus trabajos), sus dificultades para desarrollarse matemáticamente en la Francia bourbakista, que le llevaron a Estados Unidos de América a trabajar a la IBM, donde invitaban a grandes matemáticos a dar conferencias (no les entendía nada), para presentarnos la belleza de las matemáticas (paisajes artificiales, garantizados 100%, en su artificialidad), a la que se llega después de cálculos pavorosos (por ejemplo para la determinación de algunas dimensiones fractales).

(Si alguien está interesado en recibir el vídeo de alguna de las conferencias –recomiendo la de B. Mandelbrot, especialmente– puede dirigirse a la APMEP de Poitiers, 40. Avenua du Recteur Pineau, F-86022 Poitiers Cedex. Tlf. 07.33-49453877, el precio es de 80 Fr.Fr. cada una). (También aparecerá al menos un resumen en algún próximo Boletín Verde de la APMEP, suscripciones 26 rue Dumeril 75013 París).

El resto del tiempo de las Jornadas se dedicó a Reuniones de las Asambleas Regionales de la APMEP y a la presentación de talleres y comunicaciones. Aquí cabría señalar el poco espacio temporal, solamente cuatro períodos horarios (cinco horas en total) para las mismas y el gran número, consecuentemente de sesiones paralelas. A una de estas sesiones de talleres asistí, como ponente, invitado por los responsables de la APMEP, de las relaciones internacionales cuyo título era: **"Las probabilidades a ambos lados de los Pirineos"**.

En él presenté de un modo rápido los programas de matemáticas españoles actuales y del nuevo modelo LOGSE, haciendo especial hincapié en lo referido a las probabilidades. Los asistentes se sorprendieron de que actualmente se mantuvieran vigentes los programas de 1975 de B.U.P. y C.O.U. (éstos con leves modificaciones) más la posterior creación de las matemáticas II, puesto que en Francia, en los últimos años, cada dos o tres años, a veces menos tiempo, se hacen modificaciones parciales de los mismos, que se llevan a la práctica inmediatamente. (Ejemplo: se publican en el Boletín Oficial en febrero-abril de un año, y a primeros de septiembre, al empezar el siguiente curso ya se aplican).

En general se observó que el modo de presentación de las probabilidades en Francia y España era análogo, siendo más ambicioso el contenido de nuestros programas en 3º de BUP que sus correspondientes de Première, al presentar las distribuciones binomial y normal. (Nueva observación por mi parte: en la mayoría de centros de BUP, los temas de estadística de 3º no se abordan).

Otro tema que les sorprendió fue que en general, en los manuales españoles, no aparecían problemas, ni problemas de investigación, sino que mayoritariamente aparecen ejercicios rutinarios, aplicaciones de algoritmos o de fórmulas inmediatas o casi. A la vez preguntaban como eran los exámenes, en general, como mi respuesta fue que también mayoritariamente se proponían ejercicios rutinarios, esto les llevó a sugerir que en las próximas Jornadas de la APMEP, se continuase el taller "franco-español" analizando los contenidos de los exámenes propuestos en diferentes niveles, y en especial sobre los de entrada a la Universidad. Por ello, solicito de todos aquellos que quieran colaborar en la próxima presentación, me envíen pruebas, de evaluación, exámenes propuestos por ellos mismo en los niveles de 1º de BUP a COU (I y II), así como Exámenes de Selectividad de sus correspondientes Universidades. El agradecimiento,como siempre será eterno. Mi dirección "Facultad de Veterinaria, Departamento de Matemática Aplicada, Avda. Miguel Servet, 177. 50013 Zaragoza".

Las próximas Jornadas de la APMEP, tendrán lugar en Brest (Bretaña) los días 13 al 16 de octubre de 1994.

Florencio Villarroya
S.A.P.M. "P.S. Ciruelo"

Jornadas sobre
Matemáticas y Coeducación

Organización Española para
la Coeducación Matemática
"Ada Byron"

Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
Ciudad Universitaria

10 y 11 de Marzo de 1994

Programa de actividades

Jueves 10 de Marzo:

16:00 Entrega de documentación.
16:30 Sesión de apertura.
16:45 Conferencia: "*Panorámica actual de la coeducación matemática*". Dra. Christine Keitel, Presidenta de I.O.W.M.E., profesora de la Universidad Libre de Berlín.
18:15 Descanso.
18:45 a 20:15 Talleres y Ponencias.

Viernes 11 de Marzo:

Sesión de mañana

10:00 Ponencias.
11:30 Descanso.
12:00 Conferencia: "*Mujeres matemáticas en la Historia de la Ciencia*". Dra. Eulalia Pérez Sedeño, profesora de la Facultad de Filosofía, U.C. de Madrid.
13:15 Ponencias.

Sesión de la tarde

15:30 Talleres y Ponencias.
17:00 Descanso.
17:30 Mesa redonda: "*Actuaciones urgentes en coeducación matemática*".
18:30 Clausura de las jornadas.
19:00 Asamblea general de la O.E.C.O.M. "Ada Byron".

Para las Ponencias y Talleres está confirmada la presencia de:

Capi Corrales
Inés Gómez
Christine Keitel
Magda Morata
Fidela Velázquez
Nieves Zuasti

Enviar la ficha de inscripción a:
O.E.C.O.M. "Ada Byron". Apdo. 4051. 28080 Madrid.

Adjuntar cheque nominal o resguardo de transferencia a la cuenta: Organización Española para la Coeducación Matemática. Entidad: Caja Postal (2088) Suc.: Génova 6, Madrid (9050-7). C/C: 17556541.

Cuota de inscripción:

Socios/as de Ada Byron:	2.000 pts.
No socios/as:	4.000 pts.

La cuota incluye la recepción posterior de las actas.

Fecha límite de inscripción: 15 de Febrero.

Ficha de inscripción y petición de actas

Nombre: ....
Apellidos: ....
Dirección: ....
C.P.: .... Localidad: ....
Provincia: .... Tlf.: ....
Titulación: ....
Centro de trabajo: ....
Dirección: ....
C.P.: .... Localidad: ....
Provincia: ....
Asignaturas: ....
Niveles: ....

☐ Asistente ☐ Ponente

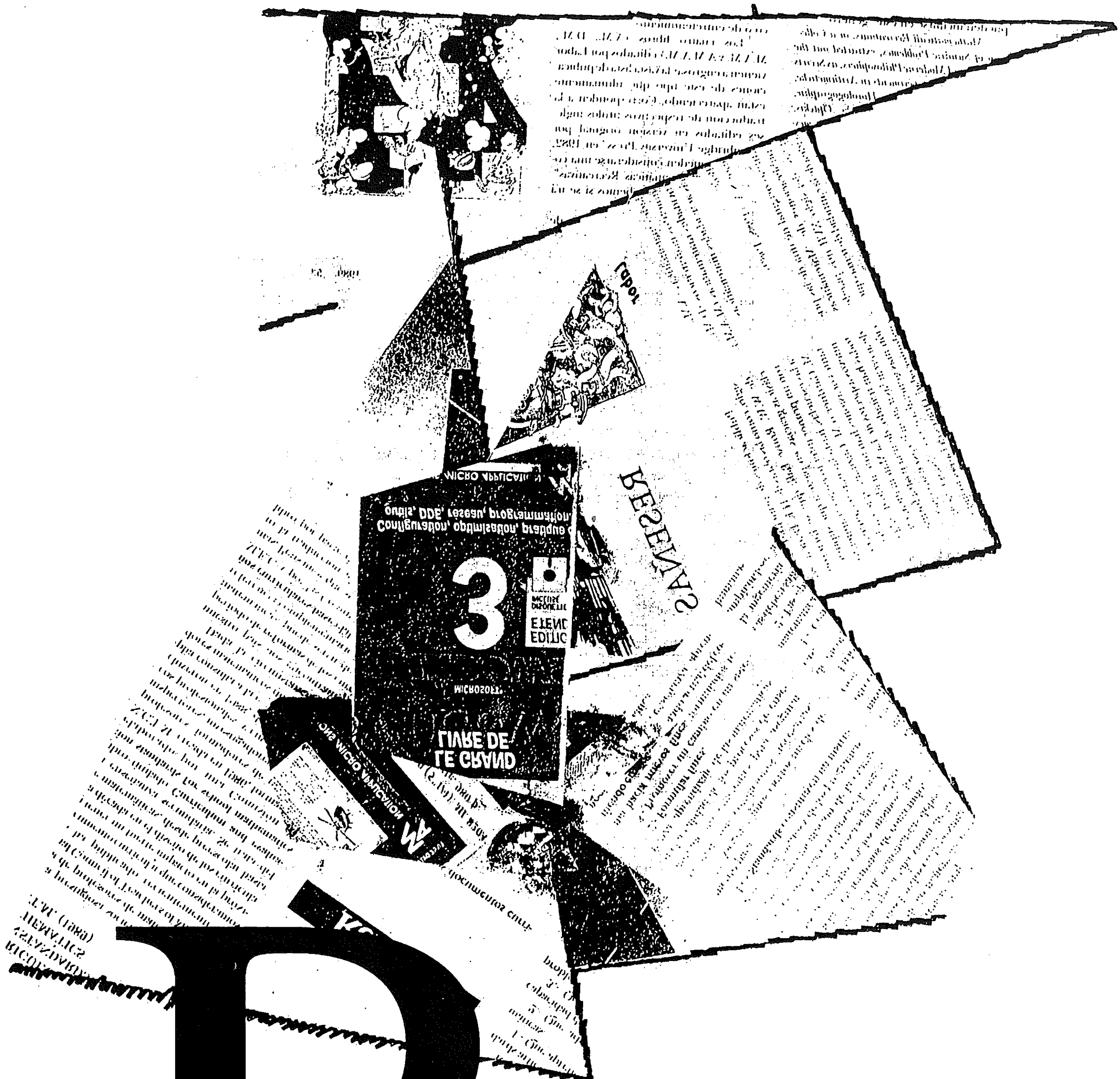
Los/as ponentes deben enviar:
- Título de la ponencia
- Resumen mecanografiado (30/50 líneas)
- Duración estimada de la ponencia.

☐ No asistiré pero deseo recibir posteriormente las actas contra reembolso.

Organiza:
Organización Española para la Coeducación Matemática "ADA BYRON"

Colabora: Facultad de Matemáticas U.C.
Asociación Lewis Carroll
Editorial Anaya
Editorial Morata

Subvenciona:
Ministerio de Asuntos Sociales.
Instituto de la Mujer.



RESEÑAS

Proyecto de Innovación Educativa: P.I.E.

Universidad Politécnica de Valencia, 1993

Los autores del Plan de Innovación Educativa, en adelante P.I.E., han pretendido mostrar: "... un proceso de innovación metodológica y organizativo de la docencia que completase la reforma de los Planes de Estudios e hiciese posible progresar hacia el logro de una Universidad Politécnica Moderna, autocrítica y permanente instalada en un proceso de innovación..."

El P.I.E. viene reflejado en un interesante documento coordinado y gestionado por la Comisión de Mejora y Control de Calidad de la Enseñanza-Aprendizaje en el que participan profesores y alumnos de la U.P.V.

Los objetivos formulados por el P.I.E. pueden concretarse:

- En la innovación metodológica del proceso de enseñanza-aprendizaje adecuándola a las exigencias de una universidad moderna.

- En promover un proceso permanente y abierto de perfeccionamiento del Profesorado, participativo, innovador y eficaz.

- En el deseo de generar entre los Profesores actitudes de cooperación, intercambio de experiencias, búsqueda de nuevas metodologías y de reflexión hacia su propio trabajo.

Justo Nieto, rector de la Universidad Politécnica de Valencia afirma: "... el P.I.E. se hubiera legitimado sólo por haber sido capaz de generar un revulsivo intelectual en la que la docencia es siempre la hermana pobre de la Universidad...". Esta afirmación ha sido y sigue siendo cierta en muchos curricula y más aún en las especialidades que corresponden a estudios científicos-tecnológicos.

El modelo que se presenta en este trabajo podría ser utilizado por muchas Universidades. Es un libro que consta de tres partes perfectamente diferenciadas. En una primera los autores presentan la justificación y las fases de desarrollo del P.I.E.; análisis y debate, acuerdos y realizaciones. Importante es la segunda parte donde, por un lado establecen un balance de las tres convocatorias del P.I.E. desde que en Octubre del año 1988 comenzará la primera fase para centrar el estudio posteriormente en las diferentes valoraciones de las convocatorias de los Proyectos de Innovación Docentes (PID'S) aportados tanto por alumnos como por profesores. La tercera y última parte presenta una detallada exposición de diferentes tipos de proyectos realizados sobre centros y asignaturas.

En suma, una aportación realmente interesante en la que se refleja que en la Universidad Politécnica de Valencia la docencia ha tomado verdadero cuerpo de naturaleza.

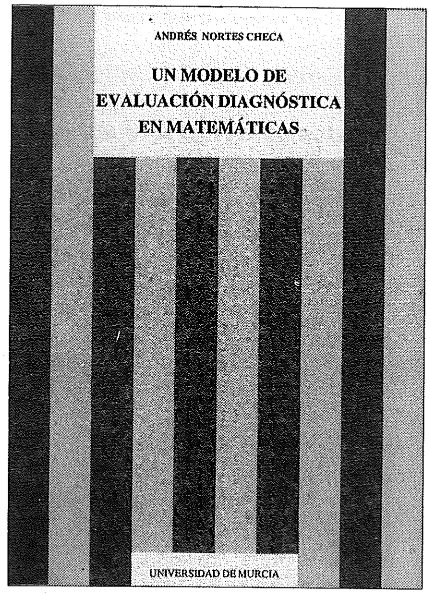
¡Un ejemplo a imitar!

Sixto Romero Sánchez
Departamento de Matemáticas.
Universidad de Huelva.

Un modelo de Evaluación diagnóstica en Matemáticas

Andrés Nortes Checa

Universidad de Murcia, 1993.



El resultado de una investigación realizada en Murcia ha dado lugar a la publicación por el Secretariado de Publicaciones e intercambio científico de la Universidad de Murcia del libro que el Prof. Nortes Checa titula: Un modelo de Evaluación Diagnóstica en Matemáticas.

Esta obra que recoge un análisis de predicción en Matemáticas para alumnos de sexto curso de E.G.B., supone un gran acierto porque pone a la luz determinados caminos que unen las operaciones concretas y las operaciones formales. Es claro que el autor proporciona, como dice J. Manuel Serrano en el prólogo: "... una aproximación al problema debido a la complejidad del mismo que viene motivada por la gran dimensionalidad que presenta un proceso de estas características...".

A pesar de que la transición del razonamiento empírico-deductivo al hipotético-deductivo ha sido tratada por numerosos autores hay que destacar que la experiencia recogida en esta obra es muy útil para todos aquellos profesores de matemáticas que imparten docencia en el ciclo superior.

El contenido del libro se divide en cinco partes.

La primera expone las variables que intervienen en todo proceso educativo así como la eficacia de los métodos y modelos en matemáticas, en determinadas circunstancias de uso.

En la segunda parte, el autor plantea el problema de la elección de un sexto de E.G.B., en base a que éste es un curso de transición en el cambio de pensamiento de la utilización (por el alumno) de esquemas operacionales concretos a operacionales formales.

La tercera, cuarta y quinta están dedicadas a la presentación, análisis y conclusión de los resultados para finalizar con las ecuaciones de pronóstico.

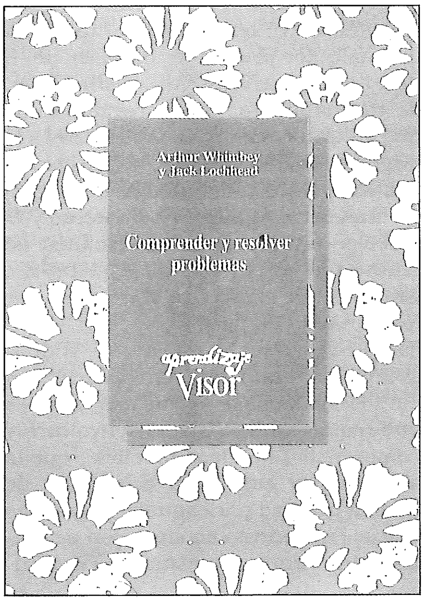
Se trata en definitiva de un libro provechoso que con seguridad puede ser útil (como instrumento si se aplica correctamente) y puede ayudar a mejorar el rendimiento de nuestros alumnos en Matemáticas.

Sixto Romero Sánchez
Departamento de Matemáticas
Universidad de Huelva

Comprender y Resolver problemas

Whimbey, A. y Lochhead, J. 1993

Madrid. Visor. 355 páginas.



Con el título *Comprender y resolver problemas* nos encontramos con un libro, que en un principio pensamos iba solamente referido a problemas matemáticos, pero en el prólogo los autores nos indican que van más allá puesto que pretenden enseñar a aumentar el poder para analizar problemas y comprender lo que el alumno lee y oye a través de unas técnicas que se podrán aplicar tanto en exámenes como en test, o a lo largo del curso académico.

En 11 capítulos los autores desarrollan su trabajo, partiendo de la prueba WASI que contiene un total de 38 preguntas de completar series, analogías, problemas aritméticos, etc., para que el lector vea en que condiciones se encuentra al comenzar la lectura de este libro, debiendo contrastar sus respuestas con las dadas por sus compañeros de clase.

En el segundo capítulo exponen los autores los fallos obtenidos por alumnos a los que se les aplicó la prueba, destacando que ocurren estos fallos: 1) Al observar y utilizar los factores relevantes de un problema; 2) al acercarse al problema de forma sistemática, saltándose la lógica y llegando a conclusiones sin comprobarlas; 3) Al escribir relaciones completas y 4) Porque son chapuceros e inexactos corrigiendo información y desarrollando actividades mentales. Tras analizar los errores encontrados en ocho preguntas del WASI aprecian que son causados por una falta de exactitud y esmerada forma de pensar, indicando que la exactitud es un hábito que se puede cultivar a través de cursos y ejercicios apropiados, presentando una lista de 25 puntos para comprobar los errores en la solución de problemas agrupados en: inexactitud leyendo; inexactitud razonando; debilidad en los análisis de problemas: Inactividad; falta de perseverancia; y fracaso pensando en voz alta.

El capítulo 3 lo titulan "Métodos para resolver problemas" y en él se exponen varios ejemplos secuenciados en donde se indica lo que va diciendo la persona que soluciona el problema y la persona que escucha, sacando como conclusión que los métodos que utilizan personas bien preparadas para solucionar problemas son: Actitud positiva, Interés por la exactitud, Dividir el problema en varias partes, Evitar adivinar y Actividad en la solución de un problema. Por el contrario la persona que escucha cuando trabaja con un compañero debe comprobar la exactitud continuamente y pedir una vocalización constante, ya que es posible que la persona que soluciona el problema se niegue a concentrarse completamente para ser más exacto, u olvide aproximarse al problema paso a paso, de forma sistemática dando paso a errores que a veces no tienen importancia pero otras veces desvían la solución del problema a un camino erróneo.

El capítulo cuarto y el quinto van destinados a los problemas de razonamiento verbal y a exponer mitos sobre la lectura. Los centran en: No subvocalices cuando leas; Leer sólo las palabras clave:

No seas un lector de palabra por palabra; Leer en grupos de pensamiento; Puedes leer a velocida de 1.000 o más palabras por minuto sin perder comprensión; No volver hacia atrás o releer.

Los cuatro capítulos siguientes vienen titulados así: Analogías, Fases de relación escritas, Cómo formar analogías y Análisis de tendencias y pautas. En ellos desarrollan las fases de relación, exponiendo una serie de problemas de analogías y series de letras o de números que ayudan a aumentar la autoconfianza en el alumno, considerando como premisa que las analogías ayudan a explicar ideas a otras personas.

El capítulo diez lo titulan "Solución de problemas matemáticos de enunciado verbal" y en él intentan ayudar a desarrollar una mayor seguridad en sí mismo y habilidad en matemáticas que eviten la ansiedad. Los autores resumen los procedimientos para resolver problemas matemáticos de enunciado verbal así: 1) Intenta decir todo lo que piensas en voz alta; 2) Adopta el procedimiento analítico de ir paso a paso y otras técnicas que utilizan personas expertas en la solución de problemas (dividir un problema en partes, soluciona una parte de manera exacta y luego pasa a la próxima, Traduce frases que no son familiares, Visualiza o haz un diagrama, simplifica un problema sustituyéndolo por números que sean fáciles, etc., 3) Sé extremadamente exacto, 4) Mientras que otro alumno soluciona un problema comprueba su exactitud y así aprenderás a pensar con más precisión y perfección.

Tras resolver paso a paso una serie de problemas matemáticos de enunciado verbal presenta 31 problemas enunciado en una página y resueltos en la siguiente, al volver. Por último se completa con el enunciado de 67 problemas.

El capítulo 11 es la Prueba Post-WASI complementaria de la WASI del capítulo primero, que servirá para comprobar los logros obtenidos.

Con dos apéndices termina el libro, el primero incluye las respuestas a los problemas propuestos y el segundo presenta una tabla para determinar la inteligencia en función de la puntuación obtenidas en el WASI para alumnos de 14, 15, 16 y 17 años o más.

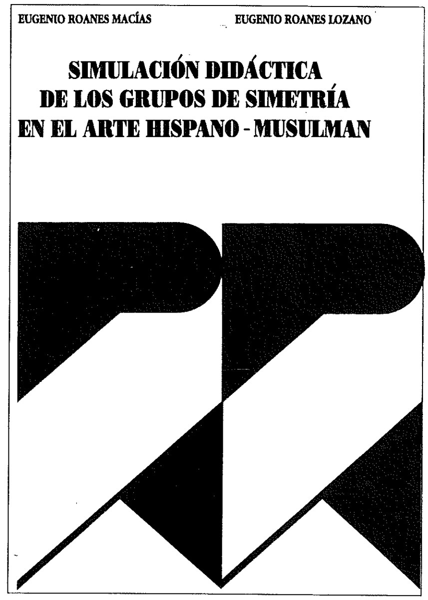
El libro que comentamos nos ha resultado interesante y sirve de preparación para todos aquellos alumnos que se van a someter a una prueba psicotécnica. Los ítems que aparecen en cualquier prueba de inteligencia, o de aptitud, bien numérica o verbal, bien de razonamiento, son parecidos a los que los autores nos han presentado a lo largo de las 355 páginas de que consta el libro, ya que una analogía o completar una serie numérica o de letras y el resolver un problema matemático de enunciado verbal son de ésta índole. Creemos que el objetivo pretendido por los autores, "en poco tiempo, las técnicas que aprendas en este libro te podrán ayudar en exámenes, en test, en tus cursos académicos, y en ocupaciones que requieran análisis, desenvoltura y comprensión de ideas difíciles", queda alcanzado y este libro puede ser de mucha utilidad para aquellas personas que se encuentren en situación de realizar una prueba de estas características.

Andrés Nortes Checa

Simulación Didáctica de los Grupos de Simetría en el Arte Hispano-Musulmán

Eugenio Roanes Macías
Eugenio Roanes Lozano

Publicaciones "Pablo Montesino"
Universidad Complutense,
Madrid 1993



La E.U. "Pablo Montesino", de la Universidad Complutense de Madrid, decidió conceder su Premio de Investigación de 1992 al trabajo que recoge la obra que aquí se presenta.

Nada nuevo voy a añadir a la comunidad de la Educación Matemática de nuestro país sobre la personalidad de los autores de este trabajo. Desde que, los que sois de mi edad, vimos aquella Didáctica de las Matemáticas, que en su día escribiera el primero de los autores, hasta los manuales recientes que se basan en la utilización de las nuevas tecnologías para la enseñanza de las Matemáticas, y que firman padre e hijo, va toda una trayectoria digna de encomio y reconocimiento como lo atestigua el premio concedido.

Al ser su último trabajo, entra en la línea antes dicha de los autores: la utilización del ordenador personal desde una óptica didáctica.

El libro incluye un disquete, con dos ejecutables, para compatibles con tarjeta gráfica VGA o EGA. El primer ejecutable contiene simulaciones de grupos del tipo p1, pg, pm, cm, p2, pgg, pmg, pmm y cmm. El segundo, sobre los p3, p3m1, p31m, p4, p4m, p4g, p6 y p6m.

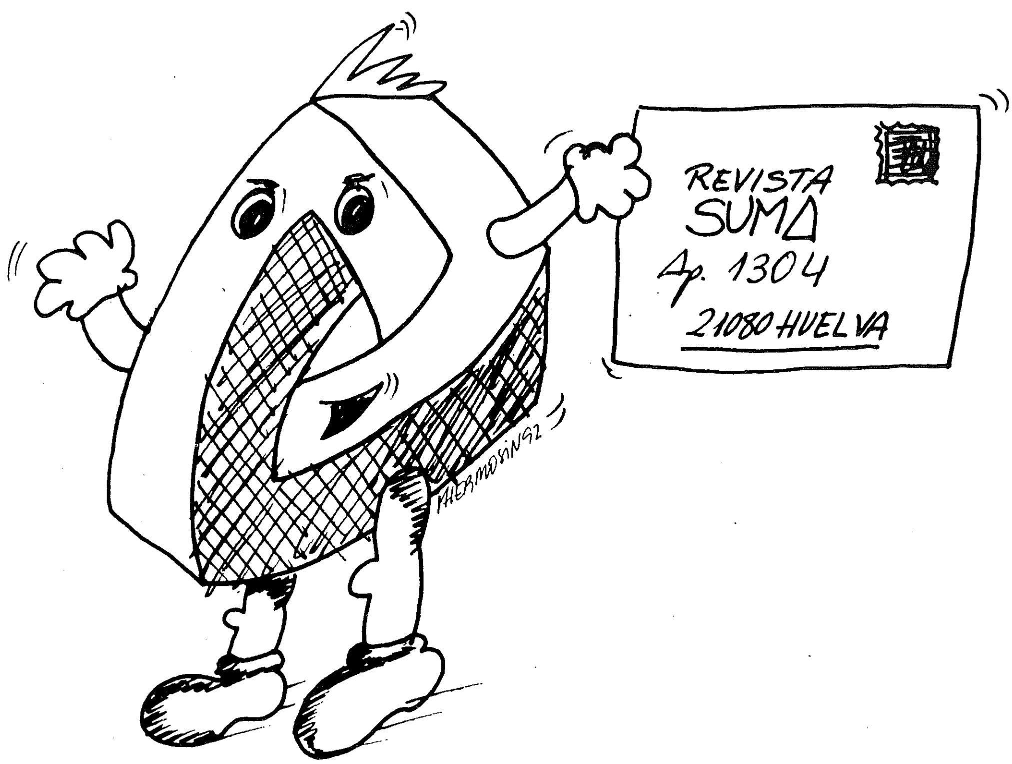
La implementación que hacen los autores permite teselar una región cuadrada de la pantalla del ordenador, fijando el usuario el número de "células" que se usarán. El motivo es fijo para cada uno de los 17 grupos cristolográficos planos. Puede pedirse al ordenador que muestre un estudio pormenorizado de los elementos de simetría que intervienen en cada mosaico presentado (dominio fundamental, isometrías, etc.). La simulación utiliza una unidad gráfica de los autores, llamada *Turtgeom* traducida, posteriormente, a Turbo Pascal 6.0.

Comienza el libro con una breve descripción, de carácter general. En ella que da información sobre aplicaciones informáticas, existentes en el mercado, sobre el tema de los mosaicos, y se indican posibles destinatarios de este trabajo. Sigue una segunda parte dedicada al desarrollo de su trabajo.

La parte dedicada a la exposición de los conceptos matemáticos, que se requieren sobre el tema de los mosaicos periódicos, es excelente. Está bien organizada y extractada a partir de la bibliografía que se presenta al final de la obra, de la que también hay que decir que está bien escogida. Tiene especial interés la descripción de los 17 tipos de Grupos Cristolográficos Planos, la cual se efectúa mostrando, en cada caso, la generación del mosaico, las isometrías del grupo y "sus" generadores, la célula reticular y "la" red de puntos. Únicamente echo en falta una indicación acerca de la no-unicidad de tales elementos, pero entiendo que el estilo directo de la obra se vería perjudicado. Esta descripción concluye con la presentación de un mosaico "de la Alhambra" generado por ordenador bajo su implementación. Advertiré al lector que no siempre es un mosaico real de la Alhambra el reproducido, aunque es cierto que se trata de mosaicos de arte hispanomusulmán.

En suma, la aparición de esta publicación se convierte en un motivo más de satisfación para todos aquellos que somos estudiosos del tema sobre mosaicos.

Rafael Pérez Gómez



hoja para fotocopiar y enviar

Nombre y Apellidos: ______________________________

Calle: ______________________________

Población: ______________________________ C.P.: __________

Provincia/País: ______________________ Tfno.: (   ) __________

CIF/NIF: ________________ Centro de Trabajo __________

Firmado: ______________________ Fecha: __________

☐ Renovación (Nº de suscriptor ____________)*

☐ Primera suscripción

☐ Ha sido antes suscriptor

Deseo suscribirme por 3 números, a partir del número en curso al precio: 3.000 pts. particulares y 3.500 pts. Centros./Europa $35 U.S.A./América y resto del Mundo $45 U.S.A. (Ver condiciones de suscripción)

☐ Cheque bancario adjunto

☐ Domiciliación bancaria

☐ Giro Postal Nº ______ Fecha __________

* Imprescindible poner el nº de suscriptor

Domiciliación Bancaria

Señores, les agradeceré que con cargo a mi cuenta corriente/libreta atiendan al recibo que anualmente les presentará la revista «SUMA» correspondiente al pago de mi suscripción a la citada revista.

(Sólo para el Estado Español)

Banco/Caja: ______________________________

Agencia: ______________________ Nº C/C: __________

Calle: ______________________________

Población: ______________________ C. Postal: __________

Provincia: ______________________________

Titular: ______________________________

Firmado: ______________________ Fecha: __________

Firma:

Condiciones de Suscripción

Los miembros de cualquiera de las Sociedades que componen la Federación reciben la Revista por el mero hecho de ser socios. Si no pertenece a ninguna Sociedad y desea recibir SUMA en su domicilio envíe, debidamente cumplimentado, el boletín adjunto a **Revista SUMA, Apdo. 1304, 21080 Huelva (España)**. El número de inicio de la suscripción es siempre el que en ese momento se vaya a editar, considerándose los números precedentes como números atrasados. Dichos números, se enviarán previa solicitud contrarreembolso, al precio de **1.200 pts.** para España y **$ 12 U.S.A.** para el resto del Mundo cada ejemplar, más gastos de envío, excepto el nº 1 que está agotado. Para su comodidad la suscripción le será renovada automáticamente al finalizar el período inicial indicado, si no nos comunica por escrito, su deseo de causar baja. Para Iberoamérica, Europa y resto del Mundo, sólo se aceptará la suscripción por el importe indicado, mediante transferencia internacional a la c/c nº **101.133920286** de EL MONTE, Caja de Huelva y Sevilla, Oficina Principal, sita en c/Plus Ultra, 4. 21001 HUELVA (España). Si decide suscribirse a SUMA, puede optar por cualquiera de las formas de pago que aparecen en el boletín de suscripción. No obstante nos permitimos sugerirle la domiciliación banciaria como forma más cómoda de hacer efectivo el importe de la suscripción. En ese caso no olvide rellenar con letra clara y firmar y, en el caso de los Centros sellar, los datos bancarios que aparecen en el boletín.

RECOMENDACIONES A AUTORES

1. De carácter general:

1.1. Los artículos se remitirán por triplicado, mecanografiados a doble espacio, por una sola cara y en formato DIN A-4.

1.2. Adjunto al artículo se redactará un resumen (Abstract) de cinco líneas como máximo, que no necesariamente tiene que coincidir con la introducción. Debe ir escrito en hoja aparte.

1.3. Si el/los autor/es ha/n utilizado un procesador de textos, recomendables Wordstar y Wordperfect 5.1. Es conveniente enviar un diskette para facilitar el trabajo de edición y posibles erratas.

1.4. Se identificará el autor o los autores debidamente al final del artículo. Deberá aparecer el nombre completo, lugar de trabajo (si procede) y dirección completa; en el caso de ser varios autores, los datos de al menos uno de ellos y para todos un número de teléfono de contacto.

2. Normas específicas.

2.1. Es aconsejable no rebasar las quince páginas de extensión.

2.2. Los símbolos y unidades empleadas no deben dar lugar a equívocos en su interpretación.

2.3. Las referencias bibliográficas deben ir numeradas entre corchetes y listadas al final del artículo claramente identificadas.

2.4. Las notas a pie de página deben ir correlativamente numeradas con superíndices a lo largo del artículo.

2.5. Los listados de ordenador deben ser rigurosamente originales.

2.6. Las ilustraciones y fotografías (preferentemente en hojas aparte e identificadas), deben estar hechas en blanco y negro, en el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.

La mejor forma de presentar las ilustraciones es a tinta china sobre papel vegetal, en el caso de estar hechas con impresora, que sean originales.

3. Envíos.

Revista SUMA, Aptdo. 1304. 21080-HUELVA. España.

Excepcionalmente se puede enviar a cualquiera de los miembros del Consejo de Redacción.

MISCELANEA

Francisco Vera Fernández de Córdoba

Matemático-humanista (Humanista-matemático) Extremeño

José Cobos Bueno

En este trabajo se da una pequeña reseña bio-bibliográfica del ilustre matemático extremeño *Francisco Vera Fernández de Córdoba*, como cultivador del pensamiento científico, muerto en el exilio (Argentina) en el año 1967.

Pasado el año de las celebraciones, hay una que, aún habiendo tenido audiencia en los medios de comunicación, es forzoso insistir más en ella por las repercusiones irreversibles que tuvo el devenir de la Ciencia en España. La incomprensión de unos españoles hacia otros -judíos y árabes- hizo, en mi opinión, que la Ciencia, en particular la Matemática, adquiriese las connotaciones que tuvo para *Gerberto* y *Boecio*.

Y como la Historia no se aprende, cuatro siglos y medio más tarde, 1936-1939, se vuelve a repetir la incomprensión de unos españoles hacia otros -españoles demócratas- y hace que estos últimos vuelvan a abrir fronteras.

Entre estos está *Francisco Vera Fernández de Córdoba.*

Nace en Alconchel (Badajoz) -26 de febrero de 1888- pueblo fronterizo con Portugal, frontera del subdesarrollo. Y muere, en el exilio, en Buenos Aires (Argentina) el 31 de julio de 1967.

Este ilustre extremeño, matemático, periodista, funcionario (Tribunal de Cuentas), filósofo y fundamentalmente historiador de las ideas científicas, se vió, como muchos otros españoles, perseguido por sus ideas.

Intentar resumir en unas líneas la vida y obra de este ilustre investigador desborda mi capacidad y para el lector más interesado le recomiendo la excelente biografía publicada en 1988 por el Servicio de Publicaciones de la Diputación de Badajoz, cuyo autor es D. *Manuel Pecellín Lancharro.*

Pero es obligado decir, que fue republicano, masón y teósofo (por influencia de *Mario Roso de Luna*) y sobre todo profundamente liberal; aunque anticlerical, era tolerante y antidogmático. Defensor acérrimo de los valores científicos hispánicos. Fue condenado a muerte, por aquellos mismos que preconizaban la reconciliación, entre otras cosas, por el crimen de haber escrito el código criptográfico del ejercito leal a la República.

Después de un periplo, que comienza en Francia, termina residiendo en Buenos Aires de cuya Universidad fue Catedrático.

De la documentación que poseemos parece deducirse que es nuestro autor quien publica la primera obra sistemática -en castellano- de Lógica -*La lógica en la Matemática*, Madrid, Páez. 1929-, lo que hace sospechar su dominio de las teorías de *Boole, Grassmann, Peirce, Schröder, Russell,* etc. No obstante los primeros trabajos que aparecen en español son de otro excelso extremeño -*Ventura Reyes Prósper*- en los años 1891-1892-1893, en *El Progreso Matemático*, período de investigación que dirigía *Zoel García de Galdeano.*

La obra de *Francisco Vera* está publicada en una colección donde figuran nombres como *Blas Cabrera, Menéndez Pidal, Gregorio Marañón, Eugenio D'Ors, Ramón Pérez de Ayala, Azorín*, etc.

Como constante en su vida es de destacar, la búsqueda de la Verdad Científica. *Vera* nunca escribe sin constatar la información, acude constantemente a las fuentes y por eso, en aras de que prevalezca la verdad científica, no evita corregir en muchas ocasiones a diversos autores. Este ese el caso de la conferencia pronunciada en el Ateneo de Madrid "*Los historiadores de la Matemática española*", dada como réplica al discurso que *D. José Echegaray* pronunció en su ingreso en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. (Publicada en Madrid, V. Suárez, 1935. Figura como apéndice en el libro "*José Echegaray*", edición de *José M. Sánchez Ron*, Fundación Banco Exterior de España, 1990, también puede verse en un trabajo del cual soy autor en "*Revista* *de Extremadura*" núm. 5, Segunda Época, Mayo-Agosto 1991, pp. 53-58).

En esta conferencia, *Francisco Vera*, rebate las opiniones de dos grandes investigadores, *D. José Echegaray* y *D. Julio Rey Pastor*, en particular las del primero, sobre la existencia de matemática y matemáticos españoles en la Edad Media según *Vera*, caen en el error extremo al intentar rebatir a *Menéndez Pelayo*.

Asímismo desde las páginas de *El Liberal*, interviene en la famosa polémica entre *Menéndez Pelayo* y *Pío Baroja* (a favor del primero).

Nuestro autor antes de marchar al exilio -finales de enero de 1939- nos deja una nutrida nómina de trabajos científicos (*Extracta Mathematicae*, Vol. 3, núm. 2, 1988, pp. i-vii):

Teoría general de ecuaciones. P. Orrier. Madrid. 1909.

Aritmética y Geometrías prácticas. Hernando. Madrid. 1911. (2ª ed. en Páez. Madrid. 1922).

Introducción al estudio de la Geometría Superior. Perlado-Páez y Cía. 1911.

La sucesión de Fibonacci. Sociedad Matemática Española. 1920.

La tabla pitagórica n-dimensional. Real Academia de Ciencias. Madrid. 1920.

Suave entrapalia matemática (ironías matemáticas). Publicaciones de El Telégrafo Español. Madrid. 1921.

Los elementos esenciales del razonamiento matemático. Publicaciones de El Telégrafo Español. Madrid. 1921.

El Hiperespacio. Publicaciones de El Telégrafo Español. Madrid. 1921.

Aritmética racional. Páez. Madrid. 1926.

Espacio, hiperespacio y tiempo. Páez. Madrid. 1926.

Evolución del concepto de número. La Lectura. Madrid. 1929.

El tratado de Astrología del Marqués de Villena. R. Velasco. Madrid. 1930.

San Isidoro matemático. R. Velasco. Madrid. 1931.

El matemático árabe madrileño Maslama Benhamed. Gráfica Municipal. Madrid. 1932.

Historia de la Matemática en España. 4 vols. V. Suárez. Madrid. 1933.

La cultura española medieval. Datos bio-bibliográficos para su historia. Imprenta Góngora. Madrid. T. I. 1933; T. II. 1934.

Psicogénesis del razonamiento matemático. Plutarco. Madrid. 1934. (2ª ed. Buenos Aires. Poseidon. 1947).

Introducción a la Ecuación de segundo grado en Europa. Góngora. Madrid. 1934.

Esquema y carácter general de la Ciencia española en el siglo XVII. Gráfica Universal. Madrid. 1935.

Los historiadores de la Matemática española. V. Suaréz. Madrid. 1935.

Estudios sobre la Ciencia española del siglo XVII. Asociación española para el progreso de las Ciencias. Madrid. 1935.

San Isidoro. Aguilar. Madrid. 1936.

Historia de la Ciencia. Joaquín Editor. Barcelona. 1937.

El Calculador. Nuestro Pueblo. Valencia. 1937.

Ya en el exilio, se tienen referencias precisas de 21 obras, entre Matemática e Historia de la Ciencia.

A su paso por Francia, principio de su peregrinar, debió completar la documentación que habría recogido en su primera estancia en París (1912-1914) en diversos Archivos, pues hace referencia a unos manuscritos a partir de los cuales demuestra que el gran *Leonardo de Pisa* (conocido por *Fibonacci*) copia al judío catalán *Abraham bar Hiia* (conocido por *Savasorda*), pero en vez de hacerlo del original, plagia la traducción que de la obra de *Savasorda*, *Sépher hibbur hameixihá nehatixbóret -Libro de la medida y el cálculo-* hace *Platón de Tívoli* (de la Escuela de Traductores de Toledo). *Francisco Vera* dice que Fibonacci copia hasta los ejemplos.

Este dato y muchos otros interesantes nos lo ha dejado en un libro, publicado en Argentina y cuyo manuscrito hemos tenido el honor de transcribir y publicar conjuntamente con el Servicio de Publicaciones de la Diputación de Badajoz, que lleva por título "*La Matemática en el Occidente Latino-Medieval*". De su penuria económica puede dar idea el que tal manuscrito está realizado en invitaciones de boda.

Vera escribió también algunos libros de divulgación, libros de bolsillo, que escritos con el ánimo de que se pudieran "leer en el tranvía", tienen un rigor digno de encomio. Así en 1948, publica "*Breve historia de la Geometría*" (alcanza dos ediciones). En este libro dedica un capítulo a la Topología, y si tenemos en cuenta que hasta 1942 no toma carta de naturaleza propia esta rama de la Matemática (*Mathematical Reviews*), es de destacar la lucidez con que escribe de esta materia, lo cual quiere significar que tenía un cierto dominio de ella, aunque no fuera un especialista.

Bajo mi criterio una de las obras más importantes que publica en esta época es la *Historia de la Cultura Científica*, 5 volúmenes (Buenos Aires, Ediar, 1956-1969), obra inconclusa pues el último ve la luz después de que nuestro autor muriera, dejando por escribir el que hubiera sido el 6º, correspondiente a la edad contemporánea. (Según se lee en el proyecto que él mismo reseña en la obra).

Otras obras referentes a la Matemática y a la Historia de la Ciencia que escribe (*Extracta Mathematicae*, Vol. 3, núm. 2, 1988, pp. i-vii) en esta época son:

Tratado de Geometría proyectiva. Cultural. La Habana. 1941.

Dualidad de valores en el campo de la Matemática. Ed. Cuadernos Limitada. Barranquilla. 1942.

Aritmética Moderna. Instituto Gráfico. Bogotá. 1943.

Geometría intuitiva. Voluntad. Bogotá. 1943.

Historia de las ideas Matemáticas. 2 vols. Sociedad Colombiana de Ingenieros. 1944.

Principios fundamentales de la Geometría. Cultural. La Habana. 1943.

Puntos críticos de la Matemática contemporánea. Losada. Buenos Aires. 1944.

Evolución del pensamiento científico. Suramericana. Buenos Aires. 1945.

Breve historia de la Matemática. Losada. Buenos Aires. 1946.

La Matemática de los musulmanes españoles. Nova. Buenos Aires. 1947.

Introducción a la teoría de conjuntos. Coepla. Buenos Aires. 1948.

Los judíos españoles y su contribución a las Ciencias Exactas. Fundación Fomento Cultural Hebrea. Buenos Aires. 1948.

Matemática para ingenieros. 3 Vols. Ediar. Buenos Aires. 1950-53.

Veinte matemáticos célebres. Fabril. Buenos Aires. 1961

Inventores célebres. El Ateneo. Buenos Aires. 1964.

Lexicon Kapelusz: Matemáticas. Kapelusz. Buenos Aires. 1969.

Científicos Griegos. 2 Vols. Aguilar. Madrid. 1970.

Estas obras deberían ser referencia obligada para cualquier investigador español, así como lo han sido para *Boyer, Loria, Rey Pastor, Cuesta Dutari*, pero por razones -aunque entendidas- no explicadas, en España son prácticamente desconocidas.

En cualquiera de sus obras destaca su amor a la matemática. Su visión de esta ciencia se puede entender con lo que sigue, entresacado de su libro *Evolución de concepto de número* (p. 8):

"Lamartine habló de una "liga universal contra los estudios matemáticos" porque no supo ver que la Matemática está tejida de armonía y de ritmo, y, en este sentido, constituye la forma más perfecta del pensamiento poético. Un matemático moderno, Weierstrass, -acaso el más cerebral de todos- ha dicho que el matemático no es completo si no tiene algo de poeta, y la oposición que encontraba Pascal entre el espíritu geométrico y el mundano quizá explique el fenómeno social de la ignorancia de los matemáticos respecto de los sentimientos frívolos".

Fue un gran conferenciante además de un buen enseñante. Para terminar quiero transcribir dos opiniones recogidas de su Biografía, una es la de Joaquín Piñol publicada el 23 de Octubre de 1980 en el diario bonaerense *La Prensa*:

"Extremeño como algunos de los grandes conquistadores, fue el doctor don Francisco Vera y Fernández de Córdoba, escritor, periodista, historiador, hombre de ciencia, gran matemático y pedagogo. Humanista completo, al fin. Y uno de los talentos más amplios, profundos y lúcidos de cuantos llegué a conocer".

Y la otra publicada por *España Republicana* (Buenos Aires, septiembre de 1965), sobre la pedagogía del ilustre extremeño:

"Sus clases magistrales, si bien ceñidas a la severa disciplina de la ciencia matemática, que cultiva con pasión de enamorado, no cansan jamás, sino que deleitan a su auditorio por la gracia del lenguaje, el primoroso y castizo estilo castellano y la anécdota chispeante, llena de intención o mordacidad que salta juguetona para romper la seriedad del tema, siempre preciso, exacto, científico".

¡Evidentemente, un bonito epitafio para cualquier profesor!.

José Cobos Bueno
Departamento de Matemáticas.
Universidad de Extremadura.

IV Olimpíada Matemática Nacional

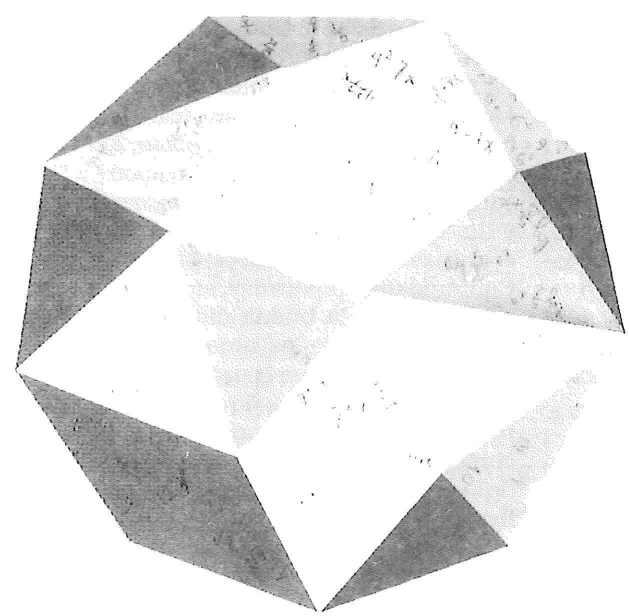
José Cobos Bueno

***La Olimpíada Matemática Nacional sigue adelante, ¿es cierto?**

- Pues sí, este evento matemático va consolidándose, poco a poco y con el paso de los años está adquiriendo una solera que, como los buenos vinos, lucirá dignamente el etiquetado de calidad que se merece.

*** Y la IV Olimpíada, ¿cómo transcurrió en el Principado de Andorra?**

- Tal y como estaba previsto el 18 de Junio se reunieron la mayoría de los participantes en Barcelona y fue "el pistoletazo de salida" de siete días de autocar, fronteras, hotel, visitas, comidas, recepciones, trenes, escaleras, cuevas, castillos e incluso pruebas de Matemáticas con patinaje sobre hielo incluido; en definitiva una semana en la que, a las chicas y chicos que vinieron a estas Tierras Andorranas se les brindó la oportunidad de:



- Convivir con compañeros y compañeras de distintas regiones de España en un pequeño país enclavado entre montañas y arropado por dos países; así como de conocer Andorra y algunos lugares próximos de España y Francia.
- Realizar algunos problemas y ejercicios matemáticos, evitando -en la medida de lo posible- a la hora de dar resultados, la competitividad.

*** Hablando de problemas y ejercicios, ¿cómo fueron las pruebas?**

- Siguiendo el esquema de ediciones anteriores, el sábado 19 se realizó la prueba individual consistente en ocho ejercicios o problemas y en la que se evidenció un cierto cansancio a los participantes. Y el lunes 21 la prueba por parejas -formadas por componentes de distintas comunidades- en el Palacio de Hielo de Andorra donde se les planteó una situación problemática con piscina y pista de hielo incluida. (Al final pude ver ambas pruebas y algunas de las respuestas de los participantes).

*** ¿Quiénes fueron los que destacaron en dichas pruebas y, que premios recibieron?**

- El sistema de corrección que se lleva, como es conocido, es anónimo y únicamente sabemos los tres que más destacaron en la fase individual y las dos parejas más notables; el resto son todos cuartos individualmente y terceros por parejas. Concretamente en la fase individual los tres destacados fueron: Jorge Alonso Vicente, Omer Giménez Llach y Juan Bailón de la Calle; las parejas más notables fueron las formadas por Felix Martos Trenado y Alberto Mínguez Espallargas y por Jaime Rodrigo Pla y Eduardo Prada Vidal.

Insisto en que se intenta evitar en lo posible la competitividad; de ahí que todos recibieran el mejor premio: una semana de vacaciones en Andorra, diversos obsequios, el correspondiente diploma y una medalla olímpica. Y a los que más destacaron en la fase individual y por parejas un trofeo conmemorativo de la Olimpíada.

*** ¿Cuántos niños y niñas participaron?**

- Un total de 40 procedentes de: Albacete, Alicante, Andalucía, Aragón, Canarias, Castellón, Castilla-León, Extremadura, Madrid, Murcia, Navarra y la anfitriona Andorra. Curiosamente ha habido una gran desproporción de chicos (31) y chicas (9).

También me gustaría resaltar que estos cuarenta "destacados" que han llegado a la Fase Nacional no son más que una pequeña punta del iceberg de los 11.276 participantes (cuadro 1) que se han presentado en total en todas las comunidades (algunas de ellas ya previamente habían hecho una selección de las cifras que ahí se reflejan), por lo que se puede afirmar que el número de niños y niñas que se vieron implicados desde el comienzo de las distintas fases comunitarias es aún mayor.

Y para darnos una idea de la evolución que están teniendo las distintas ediciones de todas las Comunidades desde su comienzo, basta "echar un vistazo" a los totales de éstas (cuadro 2) y nos encontramos rondando los 60.000 alumnos y alumnas de 8º de E.G.B. que se han visto implicados en estas Olimpíadas Matemáticas.

*** Además de las pruebas de Matemáticas, ¿qué otras actividades se han realizado durante esta semana?**

- Dentro de las limitaciones del marco en que nos desenvolvíamos se hizo un programa de actividades lo más diverso posible. Así cabría destacar:

• Dos excursiones a Francia, en la primera se combinó un paseo en el tren transpirenaico con una "pequeña subida de 1.000 escalones" al Castillo Medieval de Villafranca de Conflent y la visita a la farmacia más antigua de Europa en Llivia. En la segunda, se visitó la ciudad y castillo de Foix y las cuevas de Mas-D'Azil.

• En el Principado de Andorra se visitaron parajes naturales como el Lago de Engolasters, museos como: el del Automóvil, la Casa de la Vall y la Casa Plandolit y el Santuario de la Patrona de Andorra, la Virgen de Meritxell.

• Y las recepciones del Gobierno de Andorra y de la Entidad Bancaria que, en parte, nos financiaba. Además de las protocolarias comidas de "bienvenida" y de "despedida".

*** Todas estas actividades, desplazamientos, hoteles, comidas, etc., tienen un coste laboral y económico digno de tener en cuenta. ¿Cómo se ha solucionado esto?**

- "La unión hace la fuerza", ésa ha sio la estrategia tanto para trabajar como para buscar la financiación. El esfuerzo constante de los responsables de organizaciones en Andorra y la eficaz colaboración de los coordinadores de las Sociedades y Comunidades implicadas, sin olvidar por supuesto la buena disposición de las niñas y de los niños participantes, hicieron que la organización fuese la adecuada. Desde aquí reitero nuevamente mi más cordial agradecimiento a todos y hacerles partícipes de los elogios y felicitaciones que han llegado.

La cuestión económica se ha resuelto gracias a las distintas Sociedades que se pagaron su desplazamiento hasta el punto de origen y de partida marcado, concretamente Barcelona y el resto se cubrió con las aportaciones que hicieron la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, la Conselleria de Educacio, Cultura i Joventut del Gobierno de Andorra, una entidad bancaria andorrana (Banc Internacional-Banca Mora) y la Consejería de Educación de España en Andorra.

De todos modos, somos conscientes de que en otras regiones no es tan fácil encontrar ese respaldo económico, por lo que el esfuerzo es aún mayor al tener que hace excesivas gestiones.

*** ¿La Olimpíada Matemática Nacional seguirá?**

- No cabe la menor duda, la V Olimpíada está en marcha, la Sociedad de Profesores de Matemáticas de Castilla-León se ha comprometido a llevarla a cabo y consideramos que hay profesores que no escatimarán esfuerzos para que sea un rotundo éxito.

Y por los rumores que se escucharon hay Sociedades dispuestas a hacerse cargo de la sexta y de la séptima. Eso sin olvidar que en una reunión de Coordinadores que se celebró en Andorra se gestó la idea tratar de forma monográfica en unas sesiones de trabajo o a nivel de Comisión el tema de las Olimpíadas para que en la medida de lo posible se definan y se marquen las pautas de las próximas Olimpíadas Matemáticas, entre otros aspectos la edad en la que se han de poner, pues no olvidemos que 8º curso va a desaparecer.

Por último, hay un factor importantísimo que es decisivo para la continuidad de las Olimpíadas la popularización de las Matemáticas que con ellas se consigue y más aún la ilusión que los chicos y chicas le ponen a esta materia.

José Mª Sánchez Molina
Coordinador Nacional de la IV Olimpíada

La medida popular en España

Introducción

En Julio de 1996, se va a producir en España quizá el acontecimiento más importante de lo que va de siglo, referente a la Educación Matemática. En esa fecha se desarrollará en Sevilla el **VIII Congreso Internacional de Educación Matemática** (ICME-8, en lo que sigue).

Los relacionados con la Educación Matemática en nuestro país debemos hacer un esfuerzo para que este reto sea un éxito, no sólo desde el punto de vista organizativo, que sin duda la será, sino sobre todo desde el punto de vista de la aportación científica. No es fácil improvisar en este campo. Todo trabajo debe venir precedido por un esfuerzo de concentración y estudio reguroso y, tal vez, de superación de las primeras fases que, suelen producir desánimo.

Desde este punto de vista, la idea que a continuación se explica pretende ser una contribución más a ese magno acontecimiento en la completa convicción de que si el tema es tomado con la suficiente seriedad y rigor por cada responsable, el resultado final puede ser algo digno de ser expuesto en el marco del ICME-8.

Objetivos generales

1.- Conseguir la presencia de alumnos en el ICME-8 a través de un trabajo acorde con sus capacidades.

2.- Promover entre las Comunidades Educativas el conocimiento del ICME-8, de su importancia y labor.

3.- Trabajar para rescatar y/o dar a conocer medidas populares.

4.- Conocer y valorar la utilidad e importancia de las Matemáticas en una de las actividades más cotidianas: medir.

5.- Reproducir modelos de medidas populares o conseguir una muestra que, debidamente estudiada y ordenada, se pueda exponer en lugar adecuado.

Desarrollo de la actividad

* La exposición tendrá carácter nacional.

* Cada Sociedad, en su ámbito territorial, desarrollará las fases del programa que luego se explicitarán. La forma de hacerlo queda a la discreción de las personas responsables aunque, se tratará desde el principio de establecer unos criterios, métodos y objetivos comunes que den homogeneidad al trabajo.

* El proyecto pretende, como ya se ha indicado, culminar su labor en una exposición, que luego puede ser itinerante y, por tanto, ese fin ha de inspirar todo el desarrollo del trabajo. En consecuencia, deben concebirse paneles didácticos, materiales no demasiado frágiles, reproducciones en material adecuado, estuches para el traslado al lugar (y posteriormente a otros lugares) de exposición.

* Por problemas de organización y salvo que las condiciones puedan mejorar, de cada sociedad acudiría a Sevilla un máximo de 15 alumnos/as acompañados de su profesor. En cualquier caso ésta es una cuestión a concretar en el futuro.

* Cada Sociedad podrá formar más de un grupo de trabajo, si sus condiciones humanas y económicas se lo permiten.

* Si se encuentra el equipo docente adecuado para desarrollar el trabajo, en general, existen posibilidades de conseguir ayudas institucionales (M.E.C., Consejerías, Ayuntamientos, Diputaciones, Cabildos, etc.), tanto para la financiación de materiales como para el posible traslado del equipo de trabajo a Sevilla.

* Puesto que el trabajo a desarrollar se pretende que ocupe más de un curso, sería aconsejable que se formasen equipos con alumnos de 7º de E.G.B., ó de 1º de BUP para garantizar la continuidad de los profesores y de los alumnos al curso siguiente.

* Con el fin de unificar criterios y hacer un trabajo siguiendo más pautas acordadas, se presentará un plan de la actividad a debatir con los responsables en las distintas sociedades. Una vez fijadas las bases y las fechas habrá que adaptarse disciplinadamente a las mismas, a no ser que la puesta en funcionamiento del programa aconseje hacer modifica-

ciones. Para ello, se harán reuniones de seguimiento del programa en fechas que se determinarán.

* Existirá un coordinador nacional del programa y un responsable en cada una de las Sociedades que desee participar. Teniendo en cuenta los objetivos previstos, entendemos que todas las sociedades deberían hacer un esfuerzo para estar presentes en este trabajo. Por lo que sabemos, además, no tiene precedente en las organizaciones de los ICME la presencia de alumnos y de profesores "de a pie" con trabajos de este tipo.

Fases previstas

* Es conveniente insistir en la importancia de las fechas que se fijen y la rigidez con que habrá que llevarlas.

* Una primera aproximación de fechas es la siguiente:

1.- Las Sociedades que decidan participar en este programa deberán comunicarlo a la Secretaría General de la Federación antes del 30 de Mayo de 1994. En esa comunicación se propondrá el nombre de (o los) responsable (s) así como las señas, para su localización. Se les enviará el borrador del plan de trabajo.

Del 1 al 15 de Octubre de 1994: Reunión de coordinación para fijar los criterios y pautas del plan del trabajo a desarrollar. Es algo así como el "punto cero".

Febrero de 1995: Reunión de seguimiento del programa.

Septiembre de 1995: Reunión de seguimiento.

Febrero de 1996: Reunión de seguimiento.

1 de Mayo de 1996: Envío a Sevilla del material que se vaya a exponer.

Julio de 1996: Inauguración de la exposición con la presencia de los alumnos que trabajaron en el proyecto y sus profesores, que lo explicarán a los visitantes.

Estancia en Sevilla de los alumnos y participantes en el tiempo y forma que ya se fijará.

Adelanto de ideas sobre el Plan de Trabajo

* Cada Sociedad podrá plantear el trabajo con autonomía, pero siempre teniendo presente que:

A.- El trabajo hecho representará a esa Sociedad en la exposición.

B.- Tendrá que procurarse la financiación de la actividad.

C.- La Federación es la responsable de la coordinación de la actividad y de los aspectos organizativos, relacionados con la exposición del material y de la estancia de los alumnos y profesores en Sevilla.

D.- En muchos lugares existen aún determinadas unidades de medida que, no han perdido su vigencia a pesar de la presencia del Sistema Métrico. Otras ya no se usan.

E.- Se pretende elaborar un plan de trabajo para que parte de estas medidas sean dadas a conocer. Cada Sociedad puede establecer un plan que, con la participación de alumnos, permita recabar información sobre su uso o desuso, conseguir ejemplares de los instrumentos de medida, reproducirlos y ser expuestos si fuera posible, hacer estudios sobre equivalencias, zonas de distribución de la medida, etc.

F.E.S.P.M. Secretaría General

La Geometría como Matemática aplicada en su evolución histórica: de Euclides a Mandelbrot

María Begoña del Hoyo

En la presente contribución intentamos evidenciar cómo la Geometría a lo largo de toda su historia ha desempeñado un papel fundamental interactivo con la ciencia natural, en particular con la Física, y más en concreto aún con la Mecánica. En la primera parte esbozamos nuestra visión de esta íntima interrelación desde el alba de la Geometría en China, Mesopotamia y Egipto hasta nuestros días. En la segunda damos una breve descripción de la nueva Geometría Fractal, haciendo énfasis en su emergencia como consecuencia de la necesidad de representar los objetos reales con una mejor aproximación que la que suministran las formas suaves de la geometría euclidiana o diferencial.

Introducción

De entre todas las ramas de las Matemáticas, quizá la Geometría sea la que más dramáticamente puede ilustrar la íntima y misteriosa relación entre matemática y naturaleza. Esto se debe en gran parte a las connotaciones plásticas y sensoriales que la Geometría suele tener. El propósito de este artículo es poner de manifiesto cómo la ciencia geométrica, desde su nacimiento en los albores de nuestra civilización, ha ido evolucionando determinando el modelo de las ciencias físicas -comenzando por la Mecánica- sirviendo, a la vez, como una poderosa herramienta para el estudio de éstas, y enriqueciendo su acervo por las demandas que una percepción más profunda de los fenómenos y formas físicas ha venido ejerciendo sobre ella. Veremos que el origen de la Geometría necesariamente tuvo que ser precursor del nacimiento de la Mecánica, cómo se desarrollaron paralelamente, fecundándose mutuamente, estas dos ciencias, hasta llegar a las modernas y abstractas concepciones de la teoría geométrica de la gravitación -la teoría de la relatividad general- y las teorías geométricas de las restantes fuerzas de la naturaleza que constituyen lo que hoy se conoce con el nombre de modelo estándar -teoría electrodébil y cromodinámica cuántica. Por supuesto que no pretendemos entrar en el detalle de estas sofisticadas elaboraciones, lo que, por otra parte, estaría fuera de lugar aquí. Sólo intentamos, sucinta y parcialmente, esbozar una interrelación entre Geometría y ciencia natural (en particular ciencia física), profundamente significativa y de un valor cultural y educativo indudable. Finalizamos refiriéndonos a la nueva geometría de la naturaleza descubierta en esta época de los ordenadores por Benoît Mandelbrot: la geometría fractal.

Geometría y mecánica a lo largo de la historia

No es de extrañar que la Mecánica sea la «Ciencia Madre» de la Física pues el objeto de su estudio lo constituye el fenómeno más elemental y común que el hombre observa en el mundo: el movimiento. En el mundo existen cosas, y relaciones entre estas cosas que son percibidas, a veces inalteradas y a veces cambiantes, por el ser humano. Es cuando la conciencia humana alcanza su madurez reflexiva y observa inquisitivamente el movimiento cuando se dan las condiciones para el nacimiento de la Mecánica como ciencia.

Como ocurre con los orígenes de todo es difícil precisar y conocer los orígenes de la Mecánica. La toma de conciencia crítica del movimiento debió incubarse durante un largo período, y también durante genera-ciones, probablemente en diversos lugares de la Tierra, se comenzaron a plantear los primeros interrogantes y a producirse las primeras respuestas. Todo esto, muy diluído y muy difuso, se habría de perder para la historia. Desde un punto de vista restrictivo con respecto a la naturaleza de la Mecánica podemos decir que los primeros datos históricos de que disponemos al respecto se remontan a la China de la «época de los reinos guerreros» (del siglo VIII al III antes de J.C.). Las guerras y perturbaciones sociales de ese tiempo harían aparecer Escuelas políticas de sabios y científicos que buscarían una solución de buen gobierno y paz universal. Una de las mas importantes desde el punto de vista que nos concierne sería la de Mo Ti, que creía posible la paz universal a través de una activa propaganda en favor del amor interpersonal y una organización militar al servicio de la seguridad colectiva. En los mismos fragmentos de los sermones de Mo Ti (siglo V antes de J.C.) donde se hallan las primeras huellas de una geometría en la antigua China encontramos, como era de esperar, los primeros elementos de mecánica. Ya hay una definición de «duración», *kien;* del «instante sin duración», *che*; de la «fuerza», *li*, que es lo que hace mover; de los «sólidos», *hing*, etc . (1).

Pero Mo Ti no ejercería ningún efecto sobre la ciencia que terminaría siendo predominantemente un producto de la cultura occidental. Por eso, generalmente las diversas historias de la Mecánica suelen comenzar en la antigua civilización griega, de cuya lengua tomaría su nombre, con Aristóteles y más fundamentalmente con Arquímedes. Pero el objeto de esta contribución no es la historia de la Mecánica o de algún aspecto concreto de ella; más bien pretende elucidar la naturaleza de la conexión entre Mecánica y Geometría a través de la cambiante situación histórica de estas dos disciplinas. Aquí queremos resaltar que si la Mecánica es la ciencia del movimiento también lo es del reposo que es un caso límite del movimiento, a la vez que su negación. Y la descripción de las cosas en reposo, por lo que a sus formas e interrelaciones espaciales se refiere, es la geometría del mundo físico. Por ello una actitud menos restrictiva sobre la naturaleza de la Mecánica nos fuerza a hacer retroceder el nacimiento de la Mecánica hasta el de la Geometría.

La Geometría, en un principio, fue pues mecánica. Los testimonios históricos más lejanos indican que, a lo más temprano, en el año 4.241 a. de C. y, en todo caso, no más tarde que el 2.781 a. de C. en Egipto los conceptos de número y forma se hallaban mucho más desarrollados que lo que permitiría el estadio primitivo de la cultura. Lo mismo ocurría para Mesopotamia hacia el 5.700 a. de C. Tanto la necesidad de un calendario, con las observaciones astronómicas que ello implica, para las civilizaciones agrícolas de estos pueblos, como el hecho de que babilonios y egipcios eran constructores infatigables y primitivos ingenieros de sistemas de irrigación, estímulo el cálculo empírico. En esta edad -edad del empiricismo- la Geometría fue una ciencia experimental.

Los babilonios de alrededor del año 2.000 a. de C. conocían, como hechos de la experiencia, teoremas de pura geometría tan fundamentales como que el ángulo inscrito en un semicírculo es recto, el teorema de Pitágoras, al menos para ciertos casos particulares de triángulos rectángulos, y el que los lados de ángulos correspondientes en triángulos semejantes son proporcionales (2). Los antiguos egipcios parecen haber sabido que el área de un triángulo se obtiene multiplicando un medio de la base por la altura; pero el resultado mas importante en la geometría pregriega del que ellos dispusieron parece haber sido descubierto -o imaginado- por el anónimo egipcio que dio un ejemplo numérico de la fórmula correcta, $(1/3)h(a^2+ab+b^2)$ para el volumen de una pirámide cuadrada truncada de altura h, y lados a y b para sus dos bases. Esto ocurría alrededor del 1.850 a. de C. Ni babilonios ni egipcios probaron sus resultados. Estos eran para ellos producto de sus observaciones del mundo físico, constituían la «geometría física», el germen de la Mecánica.

Las características de unidad y generalidad como valores deseables y logrados que caracterizan al pensamiento científico en contraposición a la mentalidad que se satisface con una colección de hechos, el razonamiento deductivo, a partir de un conjunto de hechos o postulados, y la prueba tendrían que esperar hasta la Grecia del siglo VI a. de C. con Tales y la escuela Pitagórica.

Además del espacio, a la idea del movimiento físico se encuentran indisolublemente asociadas las nociones de tiempo y materia -o más modernamente- energía. El espacio y el tiempo son las formas de existencia del mundo real, y la materia-energía su sustancia. Descartes definió como objetivo de las ciencias exactas la descripción de todo devenir físico en términos de estos tres conceptos fundamentales, y por tanto, al menos en gran parte, con referencia al movimiento, mecanicísticamente (3). Los griegos elevaron a la categoría de ciencia la descripción mecánica del mundo físico en reposo. Eso fue la geometría euclidiana. El nacimiento de la Geometría como ciencia física determinó que tuviera que ser precisamente euclidiana puesto que el mundo físico tridimensional, el objeto de su estudio en sus comienzos, es a primera vista empíricamente euclidiano. El concepto de tiempo está tan estrechamente ligado al de movimiento que cualquier definición operacional que se dé de él implica algún tipo de movimiento.

La conexión íntima entre la Geometría y la Mecánica no se limita a sus orígenes. La historia entera de la Mecánica ilumina constantemente una relacion con la Geometría, algunos de cuyos más profundos aspectos sólo empezaron a ponerse de manifiesto cuando Einstein publicó en 1916 los fundamentos de la teoría de la relatividad general.

Con Arquímedes, generalmente considerado el fundador de la Mecánica como ciencia, la «Premecánica» que fue sólo geometría euclidiana dejó paso a la Estática. Dejando aparte las explicaciones apriorísticas del movimiento de Aristóteles, por primera vez registra la historia un interés en las condiciones que posibilitan el reposo. Y esto, con contraste experimental a pesar de la tradición antiexperimentalista de los griegos. Arquímedes formuló su Estática siguiendo el modelo de la Geometría de Euclides; comenzando por sentar unos postulados de los cuales deducir proposiciones. Además de esta influencia estilística, Arquímedes usó la Geometría como ciencia auxiliar en su razonar mecánico. De paso es curioso notar que Arquímedes utilizara también en una ocasión la Mecánica como ayuda para resolver el problema geométrico de la obtención del área de un segmento parabólico (2).

La Geometría siempre jugó con creciente sofisticación desde entonces esos dos papeles en la ciencia que ya la había trascendido. Fue el prestigio de la Geometría como ideal de ciencia exacta lo que determino la estructuración al modo geométrico -definiciones, postulados o leyes, y demostración de proposiciones- de la obra magna, de Newton «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica» (1687), obra en la que además se ilustran las demostraciones de tal modo con la geometría griega que puede considerarse como un monumento a la geometría sintética.

A finales del siglo XVIII Lagrange con su «Méchanique Analytique» (1788), creyó haber logrado la emancipación de la Mecánica de su servidumbre hacia la Geometría. Lagrange escribía en el prefacio: «... En esta obra no se encontrarán diagramas. Los métodos que expongo no requieren ni construcciones ni razonamientos mecánicos o geométricos, sino solamente operaciones algebraicas (analíticas) sujetas a un procedimiento uniforme y regular». Pero la misma Geometría habría de evolucionar para hacer ver que la tutela de la que Lagrange había liberado a la Mecánica era aquella de la geometría sintética de los griegos para hacerla depender en vez de la geometría diferencial. La lagrangiana de un sistema mecánico en efecto es una función sobre el fibrado tangente de la variedad diferenciable que es el espacio de configuración del sistema.

La formulación hamiltoniana de la Mecánica supone un paso adelante en la formalización y geometrización de la Mecánica en un cierto sentido. El punto de vista moderno considera la mecánica hamiltoniana como una geometría en el espacio de las fases. Este espacio posee una estructura de variedad simpléctica. En este contexto un sistema mecánico hamiltoniano se define por una variedad de dimensión par (el espacio de las fases), una estructura simpléctica sobre esta variedad (la integral invariante universal de Poincaré), y una función sobre la variedad (la función de Hamilton). La formulación de Lagrange es menos general que la de Hamilton ya que el grupo de transformaciones de la última es el de las transformaciones canónicas que contiene como subgrupo el de las transformaciones puntuales. (El espacio de las fases es el fibrado cotangente del espacio de configuración, y la función de Hamilton, la transformada de Legendre del lagrangiano). Aunque Hamilton introdujo sus ecuaciones en 1834, la interpretación geométrica de la formulación hamiltoniana no se haría hasta el presente siglo a raíz de los trabajos de Cartan (4). La primera exposición moderna de la teoría de los sistemas hamiltonianos sobre variedades simplécticas probablemente es la debida a Reeb en 1952 (5).

De hecho muchas de las ideas abstractas de la Geometría pura han tenido su origen en el estudio de la mecánica; así por ejemplo el concepto de fibrado cotangente de una variedad diferenciable apareció por primera vez como el espacio de las fases de la mecánica hamiltoniana. En otro orden de cosas hemos visto cómo la Geometría nació como ciencia empírica; más tarde Euclides había mostrado en sus «Elementos» cómo aquella geometría podía deducirse a partir de un número de postulados. Durante dos milenios la geometría euclidiana se tomó sin ninguna duda como la geometría del mundo físico. Durante estos dos milenios se esforzaron inútilmente los geómetras en simplificar el sistema de postulados de Euclides deduciendo el quinto postulado de los restantes. En 1733 el jesuita Geralamo Saccheri intentó un nuevo procedimiento de prueba tratando de construir una geometría sin el quinto postulado con la esperanza de llegar a contradicción (6).

Parece que fue Carl Friedrich Gauss quien primero tuvo el coraje de aceptar que fuera lógicamente posible una geometría no euclidiana. Aunque esto ya suponía la emancipación de la Geometría de su relación con el mundo físico, se dice que Gauss incluso pensó en la posibilidad de que el espacio físico no fuera euclidiano y comprobó con resultado afirmativo, dentro de su precisión experimental, si la suma de los ángulos del triángulo formado en Alemania por los tres puntos de Brocken, Hoher Hagen e Inselberg era o no 180°. El desarrollo de la primera geometría no euclidiana se debe a los tres contemporáneos Gauss, Bólyai y Lobachevski. En 1870 Felix Klein demostró la consistencia interna de esta nueva geometría, probando en consecuencia la independencia del quinto postulado de Euclides.

El espacio de la geometría de Gauss, Bólyai y Lobachevski era un espacio bidimensional de curvatura constante. La generalización y extensión a espacios de más dimensiones, no una cuestión trivial, la resolvió en 1854 Georg Friedrich Bernhard Riemann, que presentó lo que hoy llamamos geometría Riemanniana en su lección inaugural de Gotinga «Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen». El subsiguiente trabajo de Christoffel, Ricci, Levi-Civita, Beltrami y otros desarrolló las ideas de Riemann para dar lugar a la bella estructura matemática que Einstein utilizaría para proponer un sustituto más sofisticado a la teoría de la gravitación de Newton.

Es curioso que el mismo Riemann, al final de su vida, intentara sin éxito relacionar la gravitación con el concepto de curvatura en la nueva geometría. Sin embargo Riemann sólo consideró para su propósito el espacio y la curvatura del espacio, y no el espacio-tiempo y la curvatura del espacio-tiempo (7).

Con la teoría de la relatividad general, una parte de la Mecánica, la teoría de la gravitación, volvió a ser más una geometría que nunca lo había sido cualquier parte de ella desde el momento en que con Arquímedes esta ciencia dejó de ser una pura geometría estática del espacio físico tridimensional. Pero ahora en un sentido más profundo y completo que en la época preArquimediana, pues por una parte en este caso se trata de la geometría del espacio- tiempo, del que el espacio físico tridimensional es una sección, y por otra, siendo la teoría de la gravitación de Einstein un marco en el que el comportamiento de la materia es afectado por la geometría del espacio-tiempo y, a la vez ésta depende de la localización de la materia, lo que tenemos es una geometrodinámica.

El éxito que alcanzó la geometrización de la gravitación indujo a los teóricos a intentar construir un marco geométrico que unificara las dos teorías de campo principales del momento: la de Einstein del campo gravitatorio y la de Maxwell del campo electromagnético. Weyl construyó en 1918 la primera geometría no Riemanniana en un esfuerzo para producir la buscada teoría unificada (8). Varios intentos posteriores en la misma línea por Einstein, Kaluza (1919), Klein y Mandel (1926) tampoco se tradujeron en resultados satisfactorios. La idea básica consistía en enriquecer la geometría del espacio substrato de los fenómenos físicos dotándolo no sólo de curvatura (que representa la gravitación), sino también de torsión (que representaría el electromagnetismo), o bien introduciendo una quinta dimensión para los fenómenos electromagnéticos.

La artificialidad de estas teorías dio lugar a que se abandonase este tipo de aproximación al problema de la unificación geometrizada de las fuerzas de la naturaleza. Fueron otros derroteros iniciados con la teoría de campos «gauge» de Yang-Mills (1954) (9) los que habrían de conducir a esquemas geométricos unificadores de las fuerzas electromagnéticas y aquellas otras de la microfísica que se descubrieron en el siglo XX. Aunque los pioneros Yang y Mills no fueron conscientes de ello, después se vería que su construcción teórica podía interpretarse geométricamente a la luz de la generalización de las geometrías de Riemann sobre fibrados que supuso hacia 1950 el establecimiento de la teoría de conexiones afines sobre estas estructuras. En este marco los campos gauge determinan la conexión sobre el fibrado: las fibras corresponden a los atributos internos (cargas) de las partículas elementales. Los campos gauge, como el campo electromagnético, están directamente relacionados con las propiedades geométricas de las fibras o espacios internos, no con el espacio-tiempo, como pensaban Weyl, Einstein y otros alrededor de los años veinte en sus vanos intentos para unificar el campo electromagnético y el gravitatorio.

El esquema construido por Yang y Mills en 1954 fue el modelo antecedente para la teoría de la interacción electrodébil de Weinberg (1967) y Salam (1968). Dicha teoría unificó efectivamente la fuerza electromagnética y la débil (responsable de la desintegración beta de los neutrones en los núcleos atómicos) con tal éxito que, al verificarse experimentalmente la existencia de las partículas asociadas a los campos gauge que ella predecía, se les otorgó a sus autores el premio Nobel de física. Hacia el mismo tiempo, siguiendo también el modelo gauge de Yang y Mills se construyó la teoría gauge de las fuerzas nucleares o de las interacciones fuertes, hoy en día conocida como «cromodinámica cuántica». Finalmente, las fuerzas electrodébiles y las nucleares se unificaron en un único esquema geométrico gauge: la llamada Teoría de la Gran Unificación. Hay que mencionar, sin embargo, que las predicciones experimentales de esta teoría, así como las de una de sus componentes -la cromodinámica cuántica- aún no han podido ser confirmados por la observación, lo cual pudiera ser debido a la enorme dificultad y altísimas energías que se necesitan para realizar los experimentos necesarios. No obstante, son muchos los que están convencidos de que en lo esencial la Teoría de la Gran Unificación es una geometrización unificadora correcta de tres de las fuerzas básicas de la naturaleza. La situación presente es paradójica, pues la cuarta fuerza básica, la gravitación, que fue la primera que se geometrizó en 1916 con la bella construcción de la Teoría de la Relatividad General, queda aparte habiéndose resistido hasta ahora a incorporarse a un esquema unitario con las otras tres fuerzas fundamentales que forman y mueven el universo.

Geometría fractal

Para finalizar vamos a mencionar brevemente cómo, observando más cuidadosamente las formas que se presentan en la naturaleza, ha emergido una geometría, distinta de la euclidiana en un sentido muy diferente de aquél en que lo son las geometrías riemannianas, pero más apta para describir con mejor aproximación las formas reales de los objetos naturales. Nos referimos a la que ha convenido en llamarse «geometría fractal» a propuesta de Benoît Mandelbrot que, en su libro de 1975 «Les objects fractales. Forme, hasard et dimension», además de acuñar el término, hizo notar la utilidad de los objetos fractales para describir hechos naturales muy diversos. En palabras del propio Mandelbrot «...las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son arcos de circunferencia, la corteza de los árboles no es suave, ni el rayo describe una línea recta». Estas formas naturales y muchas otras, como las que corresponden a los cráteres de la luna, la distribución de galaxias en el universo, o a los fenómenos de turbulencia, mejor que por las figuras familiares de la geometría euclidiana se representan más exactamente mediante fractales.

La historia de las fractales comenzó en el periodo que va de 1875 a 1925 cuando se fueron encontrando ejemplos de objetos geométricos que no entraban en el marco de la geometría diferencial y que presentaban propiedades sorprendentes: curvas que rellenaban el plano, regiones de este último con área finita pero perímetro infinitamente largo, curvas que no tenían tangente en ningún punto, etc. Aunque matemáticos ilustres (Cantor, Peano, Weiertrass y Hausdorff, entre otros) estudiaron estos objetos, fueron considerados en general como curiosidades sólo útiles a la hora de exhibir contraejemplos que pusieran de manifiesto los riesgos de la intuición y la necesidad del rigor en geometría. Hubo incluso quien las tachó de «curvas monstruosas o curvas patológicas».

Veamos un ejemplo de curva fractal debido a Helge Von Koch (1904). Se parte de un segmento que se divide en tres partes iguales. La parte central es sustituida por otros dos segmentos iguales formando ángulos de 60° con el tercio de segmento que se sustituye, y del mismo lado de éste. Se aplica la misma transformación a cada uno de los cuatro segmentos iguales que forman la curva quebrada que se obtiene tras el primer paso. La curva fractal de Von Koch es la curva límite que se obtendría repitiendo este proceso «ad infinitum».

Es fácil comprobar varias propiedades de esta curva que son comunes a muchas fractales. En primer lugar, en cada transformación aplicada a un segmento la longitud de éste se multiplica por 4/3. Por tanto, la curva límite tendrá una longitud infinita. Por otro lado, el número de vértices en la curva, en los que no hay una única tangente, crece indefinidamente. En consecuencia la curva de Von Koch no va a tener tangente en ningún punto y no va a poder ser analizada por medio de la geometría diferencial. En tercer lugar, cada segmento obtenido en cualquier etapa del proceso infinito arriba descrito experimenta eventualmente el mismo destino y será en el límite completamente idéntico a la curva total excepto por la escala y orientación. Se dice que la curva es «autosimilar», porque cada trozo de la misma es equivalente a cualquier otro salvo transformaciones elementales. Esta «invariancia de escala» es en este caso exacta, mientras que en otros fractales (particularmente en los que se encuentran en la naturaleza) es sólo aproximada.

Otra interesante propiedad de este objeto está relacionada con su dimensión. En un cierto sentido sigue teniendo dimensión 1, como cualquier curva «normal». En efecto, basta retirar un punto de la curva para dividirla en dos partes disconexas. Se dice que la dimensión «topológica» de la curva es 1. Existen, sin embargo, distintas definiciones matemáticas de dimensión. Cada una tiene interés por distintas razones, pero algunas son más apropiadas que otras para dar una estimación numérica de la complejidad del objeto estudiado. Aquí no podemos entrar en detalles, pero bástenos mencionar que la definición de dimensión apropiada para los fractales es la que se conoce con el nombre de dimensión de Hausdorff-Besicovitch. Para las formas no fractales propias de la geometría euclidiana esta dimensión siempre coincide con la dimensión topológica, mientras que para los objetos fractales es mayor que esta última. Esta propiedad se toma como característica esencial que define un fractal. La dimensión de Hausdorff-Besicovitch es un número no entero para los fractales, de ahí el nombre de fractal. En el caso de la curva de Von Koch la dimensión es $\log 4/\log 3 \cong 2.618$. Para una mayor información sobre esta cuestión y la geometría fractal se pueden consultar las referencias 9 y 10 de la Bibliografía. El copo de nieve o isla de Von Koch está formado por tres curvas de Von Koch construidas sobre los tres lados de un triángulo equilátero. La apariencia de la figura resultante es la de un copo de nieve, y siendo infinito el perímetro de la curva límite resultante, el área que encierra es finita.

Con la ayuda de ordenadores se pueden construir muchas otros fractales, no sólo de dimensión fractal comprendida entre 1 y 2 sino también de dimensiones entre 2 y 3. Entre estos últimos están aquellos que simulan con gran realismo panoramas terrestres o de un planeta imaginario. Tales paisajes resultan más y más accidentados a medida que es mayor la dimensión fractal. Por supuesto en estos casos la «autosimilitud» no es exacta, como lo es en el caso de la curva de Von Koch, sino estadística, en sentidos perfectamente definidos.

Consideración final

Hemos visto más arriba como la Geometría, desde sus orígenes hasta el presente, ha mostrado una íntima y rica conexión con la descripción y el estudio de las formas y fenómenos naturales. Al mismo tiempo, hemos tratado de poner de manifiesto como también la concepción científica de los fenómenos y formas físicas determinó el nacimiento de la Geometría como preMecánica, originó la aparición de la Geometría Fractal, y ha tenido en muchas ocasiones un profundo efecto sobre el modo de evolucionar de la Geometría.

Este proceso histórico dialéctico aún no ha terminado. Las estructuras geométricas de las teorías físicas más abstractas y actuales y el reciente descubrimiento de la Geometría Fractal así lo indican. La historia de la honda y dinámica relación entre Geometría y Naturaleza, con toda seguridad, se prolongará en el futuro, volviendo a deparar a los seres humanos sorpresas, asombro reverencial y belleza. Es esta insondable relación y este convencimiento lo que hemos tratado de transmitir modestamente en esta contribución.

Bibliografía

1. R. TATON, **Historia General de las Ciencias**, Vol. I, Ediciones Destino, Barcelona, 1971.

2. E. T. BELL, **The Development of Mathematics**, McGraw-Hill, New York, 1945.

3. H. WEYL, **Space-Time-Matter**, Dover Publications, 1950.

4. E. CARTAN, **Lecons sur les invariants intégraux**, Hermann, Paris, 1922.

5. G. REEB, **Variétés symplectiques, variétés presque-complexes et systémes dynamiques**, C. R. Acad. Sci., Paris, 235, 776-778, 152.

6. G. SARTON, **Ancient Science and Modern Civilization**, University of Nebraska Press, 1954; reimpresión por Harper and Brothers, New York, 1959, p. 26.

7. C. W. MISNER, K. S. THORNE Y J. A. WHEELER, **Gravitation**, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1973.

8. H. WEYL, **Gravitation and Electricity**, en **The Principle of Relativity**, Dover Publications, 199-216, 1923.

9. C. M. YANG Y R. L. MILLS, **Phys. Rev**. 96, 191, 1954.

10. J. M. AGUIRREGABIRIA, **Los Fractales**, en **Anexo a la Enciclopedia Durvan**, Durvan S. A., Bilbao, en prensa.

11. B. B. MANDELBROT, **The Fractal Geometry of Nature**, W. H. Freeman and Company, New York, 1983.

María Begoña del Hoyo
Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Minera
Universidad del País Vasco
Baracaldo, Vizcaya

La curiosa historia de ...

Dos o tres teoremas bastante paradójicos de Pappus

Mariano Martínez Pérez

No sabemos casi nada con seguridad acerca de la vida de Pappus de Alejandría, salvo que vivió y trabajó hacia mediados del siglo IV de nuestra era, cuando el Imperio Romano se encaminaba ya, lento pero seguro, a su desintegración.

Su obra más importante, que nos ha llegado casi completa, es la llamada **Synagoge** o **Colección**, que contituye una enérgica reivindicación de la mejor geometría clásica griega, en la tradición de Euclides, Arquímedes y Apólonio, aunque no tan sistemática, y que ha servido además a los historiadores para reconstruir partes de otras obras anteriores que se han perdido.

En el libro VI de la **Colección** demuestra Pappus dos o tres teoremas sugeridos por algunas proposiciones de la **Óptica** de Euclides, y que resultan un tanto paradójicos por chocar con algunos aspectos de nuestra intuición espacial.

Se trata de las proposiciones 50, 53 y 54, que vamos a comentar brevemente.

Todo el mundo estará de acuerdo en que, al observar una circunferencia situada en un plano, digamos horizontal, desde cualquier punto de la recta perpendicular a dicho plano por el centro de la circunferencia, excluído precisamente ese centro, lo que vemos es realmente una circunferencia (no deformada por ningún efecto de perspectiva). Es trivial demostrar que, en efecto, es así. Pero mucha gente se dejaría cortar alguna cosa (no entremos en el qué) porque los puntos de esa recta son **los únicos** desde los que la circunferencia se ve como una "verdadera" circunferencia. Desde otro punto cualquiera "lateral", la circunferencia se vería inevitablemente como una elipse, tanto más deformada cuanto más nos aproximemos al plano de la circunferencia.

Nada más alejado de la realidad, sin embargo, tal como nos dice Pappus. En la proposición 50 del libro VI afirma (y la demostración es inmediata) que, aparte de los puntos de la recta mencionada, la circunferencia se ve como una verdadera circunferencia desde todos los puntos de la superficie esférica que tiene por ecuador a dicha circunferencia (Fig. 1), excluída, naturalmente, ella misma (¡cierto que no lo parece, pero...la demostración es irrefutable!).

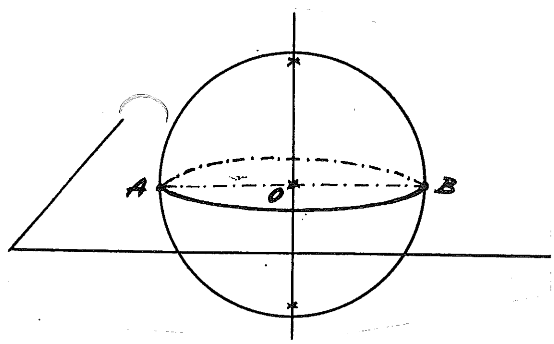


Figura 1

En la proposición 51 demuestra Pappus que desde cualquier otro punto no situado en el plano de la circunferencia, se verá ésta "aplastada", con un diámetro aparentemente máximo y otro aparentemente mínimo, perpendiculares entre sí y en las condiciones que eran de esperar. Ninguna sorpresa en ésto. Pero las sorpresas van a volver a aparecer. Al final de la proposición 51 dice Pappus:

"Puesto que la circunferencia parece presentarse al ojo bajo la apariencia de una elipse [cosa por demostrar aún], y su centro *pasa por ser* el centro de dicha elipse, esta consideración da lugar a una objeción *poco común*. Es posible, en efecto, demostrar que es otro cierto punto del círculo el que se ve como si fuera el centro de la línea, tal como se nos presenta a la vista". [Subrayados míos].

Y, efectivamente, después de la proposición 52, que no es más que un lema técnico, demuestra Pappus la bella proposición 53, que dice lo siguiente:

"Sea AHBD una circunferencia de centro O situada en un plano α, y sea E un punto cualquiera exterior a α y tal que OE no sea perpendicular a α y además sea distinto del radio OA de la circunferencia. Sea M la proyección perpendicular de E sobre α; tracemos la recta OM que corta al círculo según el diámetro AB; unamos A y B con E y sea EC la bisectriz del ángulo AEB [que no es EO, pues es fácil demostrar que $\widehat{AEO} < \widehat{OEB}$]. Sea la cuerda DH perpendicular por C al diámetro AB. Tracemos las tangentes a la circunferencia por D y por H, y sea K su punto de intersección. (Fig. 2).

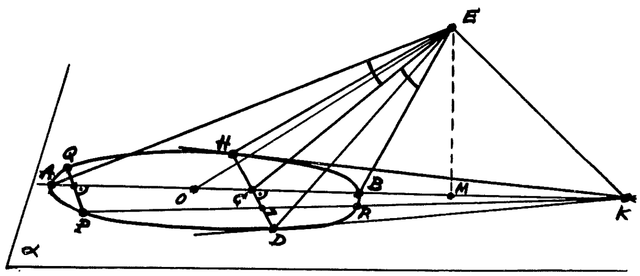


Figura 2

Entonces, la circunferencia AHBD, vista desde E, se presenta como una elipse de centro C, semieje mayor CD (=CH), semieje menor CA (="aparentemente" a CB). En dicha elipse, las cuerdas paralelas al eje mayor DH son las "verdaderas" cuerdas paralelas a DH en la circunferencia, como PQ, mientras que las cuerdas paralelas al eje menor AB, y perpendiculares por lo tanto al DH (ambas cosas "aparentemente") son exactamente aquéllas que prolongadas pasan por K, como la PR por ejemplo".

En la elegante demostración de Pappus se usa la propiedad de que

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AK}{KB}$$

es decir, que C y K separan armónicamente a A y B, propiedad hoy "proyectiva" y bien conocida de la polaridad. Esto le permite demostrar de paso que el ángulo $\widehat{CEK}$ siempre es recto.

Es interesante observar que el hecho de que "parezcan" perpendiculares a la cuerda DH todas las rectas que pasan por su polo K (y sólo ellas) es una anticipación notable y sumamente curiosa del tratamiento de la perpendicularidad en el modelo de Beltrami-Klein de la geometría hiperbólica (con "universo" el interior de un círculo y rectas las cuerdas sin sus extremos).

Pero sigamos, sigamos, que Pappus nos tiene reservada otra notable sorpresa como traca final de esta breve serie de proposiciones, en la número 54. Dejemos hablar de nuevo a Pappus directamente:

"Proposición 54: Demostrado todo ésto, es posible mostrar un problema aún más sorprendente, que proponemos de la manera siguiente:

Dada una circunferencia en un plano y un punto del interior de su círculo, encontrar el lugar del ojo desde donde se vea la circunferencia como una elipse que tenga por centro el punto dado interior al círculo.

Sea AHBD la circunferencia dada de centro O, y sea C (Fig. 3) un punto interior al círculo [ha de ser $C \neq O$, como se verá enseguida]. Se trata de buscar el lugar desde el que la circunferencia aparezca como una elipse de centro C. Prolonguemos la recta CO de una parte y de la otra y tracemos por E la perpendicular DH a AB. Sean HK y DK las tangentes a la circunferencia por H y por D, respectivamente, y tracemos la semicircunferencia CEK de diámetro CK y situada en el plano perpendicular al de la circunferencia AHBD. Yo afirmo entonces que, si se toma un punto cualquiera sobre el arco completo CEK y se sitúa allí el ojo, entonces la circunferencia se verá efectivamente como una elipse de centro C" [habría que excluir los extremos C y K del arco, claro].

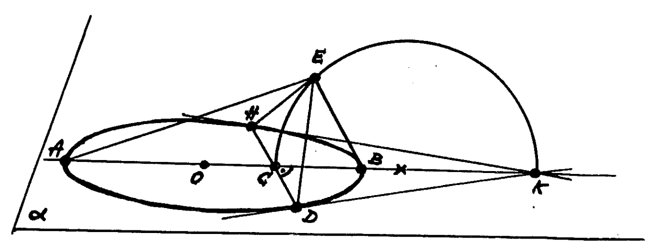


Figura 3

Mariano Martínez Pérez

PANEL DE COLABORADORES

Aizpún López, A.
SCPM "Puig Adam", Madrid.
Arias Vílchez, J.
SAEM "Thales". I.B. "Auringis", Jaén.
Arrieta Gallastegui, J.
Centro de Profesores, Gijón.
Azcárate Goded, P.
EUPEGB, Cádiz.
Balbuena Castellano, L.
SCPM "Isaac Newton". La Laguna.
Bou García, L.
I.B. "Zalaeta", La Coruña.
Benítez Trujillo, F.
SAEM "Thales", E.U. de Estudios Empresariales, Cádiz.
Burgués Flamarich, C.
Escola de Mestres " S. Cugat", Univ. Autónoma, Barcelona.
Cajaraville Pegito, J.
EUPGB, Melilla.
Cancio León, Mª P.
SCPM "Isaac Newton", Telde (Las Palmas).
Cardeñoso Domingo, J. Mª
EUPGB, Melilla.
Castro Castro, A.
Secret. Gral. Técn. Cons. Educación, Santiago.
Colectivo "Manuel Sacristán"
Centro de Profesores, Algorta (Vizcaya).
Colera Jiménez, J.
I.B. "Colmenar Viejo", Colmenar Viejo, Madrid.
Coriat Benarroch, M.
SAEM "Thales" (Granada).
Díaz Godino, J.
SAEM "Thales", EUPEGB, Granada.
Dorta Díaz, J. A.
SCPM "Isaac Newton", La Laguna.
Fernández Sucasas, J.
EUPEGB, León.
Fortuny Aymemí, J. Mª
Escola de Mestres "S. Cugat", Univ. Autónoma, Barcelona.
Fuente Martos, M.
SAEM "Thales", I.B. "Averroes", Córdoba.
García Arribas, C.
SAEM "Thales", I.B. "Padre Suárez", Granada.
García Cruz, J. A.
SCPM "Isaac Newton", La Laguna.
García González, E.
SCPM "Isaac Newton", Las Palmas.
García Cuesta, S.
Centro de Profesores, Albacete.
Garrudo García, M.
SAEM "Thales", Colegio Público, Palomares del Río (Sevilla).
Gil Cuadra, F.
SAEM "Thales", EUPEGB, Almería.
Giménez, J.
EUPEGB, Tarragona.
Gómez Fernández, J. R.
SCPM "Isaac Newton", Santa Cruz de Tenerife.
Grupo AZARQUIEL
ICE de la Universidad Autónoma, Madrid.
Grupo BETA
EUPEGB, Universidad de Extremadura, Badajoz.
Grupo CERO
Centro de Profesores, Valencia.
Grupo GAUSS
ICE de la Universidad de Salamanca, Salamanca.
Grup ZERO
Escola de Mestres "S. Cugat", Universidad Autónoma, Barcelona.
Guzmán Ozámiz, M. de
Facultad de Matemáticas, Univ. Complutense, Madrid.
Hernández Guarch, F.
SCPM "Isaac Newton", Las Palmas.
López Gómez, J.
SAEM "Thales", I.B. "Luis Cernuda", Sevilla.
Luelmo Verdú, Mª J.
SMPM, I.B. "San Mateo", Madrid.
Llinares Ciscar, S.
SAEM "Thales", EUPEGB, Sevilla.
Martínez Recio, A.
SAEM "Thales", EUPEGB, Córdoba.
Mayor Forteza, G.
Dep. Matemáticas, Univ. Islas Baleares, Palma de Mallorca.
Mora Sánchez, J. A.
Centro de Profesores, Alicante.
Moreno Gómez, P.
Instituto Español, Andorra.
Nicolau Voguer, J.
Centro de Profesores, Palma de Mallorca.
Nortes Checa, A.
EUPEGB, Murcia.
Padilla Díaz, F. J.
SCPM "Isaac Newton", Santa Cruz de Tenerife.
Pareja Pérez, J. L.
SAEM "Thales", EUPEGB, Ceuta.
Pascual Bonis, J. R.
SNPM "Tornamira", EUPEGB, Pamplona.
Pérez Bernal, L.
SAEM "Thales", I.B. "Emilio Prados", Málaga.
Pérez Fernández, J.
SAEM "Thales", IFP "Las Salinas", San Fernando (Cádiz).
Pérez García, R.
SAPM "P. S. Ciruelo", I.B. "Miguel Servet", Zaragoza.
Pérez Jiménez, A.
SAEM "Thales", I.B. "Nervión", Sevilla.
Petri Etxeberría, A.
SNPM "Tornamira", C.P. "Mª Ana Sanz", Pamplona.
Puig Espinosa, L.
Dept. de Didáctica de la Matemática, Universitat de Valencia.
Rico Romero, L.
SAEM "Thales", EUPEGB, Granada.
Ruiz Garrido, C.
SAEM "Thales", Facultad de Ciencias, Granada.
Ruiz Higueras, L.
SAEM "Thales", EUPEGB, Jaén.
Salvador Alcaide, A.
I.B. "San Mateo", Madrid.
Sánchez Cobos, F. T.
SAEM "Thales", I.F..P. "Andrés de Vandelviva", Baeza. Jaén.
Santos Hernández, A.
SCPM "Isaac Newton", La Laguna.
Seminario ACCIÓN EDUCATIVA
(M. Aguilera, I. Callejo, C. Calvo, L. Ferrero), Madrid.
Socas Robayna, M. M.
SCPM "Isaac Newton", La Laguna.
Soto Iborra, F.
EUPEGB, Valencia.
Suárez Vázquez, J. A.
SAEM "Thales", C.E. "Blanco White", Sevilla.
Varo Gómez de la Torre, A.
SAEM "Thales", I.B. "Trafalgar", Barbate (Cádiz).
Velázquez Manuel, F.
SCPM "Isaac Newton", Santa Cruz de Tenerife.
Vicente Córdoba, J. L.
SAEM "Thales", Facultad de Matemática, Sevilla.

PARA COLECCIONAR
SUMA
Nº 5

Libros y artículos de Martin Gardner

Esta es la segunda entrega en la Sección "Para coleccional de los libros y artículos de Martin Gadner.

He pretendido presentar una amplia colección en la que se pone de manifiesto la influencia del autor Martin Gadner en las matemáticas denominadas recreativas.

NOTA: ***Esta información se distribuye en tres "Para Coleccionar".***

PARA COLECCIONAR Nº 5

En el listado que sigue se da la fecha de la publicación en la revista Scientific American y el libro (el número que se corresponde con la relación anterior) y el capítulo que le corresponde en dicho libro (un * significa que está en el libro de versión inglesa). Puede haber algún error de correspondencia. Hasta Agosto de 1972 la lista está tomada de "A Bibliography of Recreational Mathematics", W. L. Scchaaf, Vol. 4º. NCTM, 1978.

Scientific American

Mes	Año	Libro	Título
Diciembre	56	1a (5)	Flexagons
Enero	57	1a (3)	Magic matrices
Febrero	57	1a (1)	Nine problems
Marzo	57	1a (2)	The game "Ticktacktoe"
Abril	57	1a (6)	Paradoxes
Mayo	57	1a (8)	Games: Icosian; Tower of Hanoi; polyominoes
Junio	57	1a (4)	The Möbius band
Julio	57	1a (7)	The game of HEX
Agosto	57	1b (1)	Sam Loyd
Septiembre	57	1b (5)	Cards tricks
Octubre	57	1b (6)	Mnemonic devices
Noviembre	57	1b (7)	Nine puzzles
Diciembre	57	1b (3)	Polyominoes
Enero	58	1b (2)	Fallacies
Febrero	58	1b (4)	The game of Nim
Marzo	58	1b (8)	Left and rigth handedness
Abril	58	2 (9)	The monkey and the coconuts
Mayo	58	2 (2)	Tetraflexagons
Junio	58	2 (3)	The puzzles of H. E. Dudeney
Julio	58	2 (4)	Number tricks
Agosto	58	2 (5)	Nine brainteasers

Mes	Año	Libro	Título
Septiembre	58	2 (6)	The Soma cube
Octubre	58	2 (7)	Four mathematical diversions involving topology
Noviembre	58	2 (17)	Perfect squares and perfect rectangles
Diciembre	58	2 (1)	Diversions wich involve the Platonic solids
Enero	59	2 (10)	Mazes: how they can be traversed
Febrero	59	2 (11)	Brainteasers that involve formal logic
Marzo	59	2 (12)	Magic squares
Abril	59	2 (13)	Problems
Mayo	59	2 (14)	Nine brainteasers
Junio	59	2 (15)	The game of Eleusis
Julio	59	2 (16)	Origami
Agosto	59	2 (8)	The golden ratio (Phi)
Septiembre	59	2 (18)	Mechanical Puzzles
Octubre	59	2 (19)	Probability
Noviembre	59	3 (14)	Graeco-Latin squares
Diciembre	59	3 (2)	Group Therory: diversions that clarify
Enero	60	4 (1)	Numerology (Dr. Matrix)
Febrero	60	3 (3)	Brainteasers
Marzo	60	3 (4)	The games and puzzles of Lewis Carroll
Abril	60	3 (6)	Board games
Mayo	60	3 (7)	The packing of spheres
Junio	60	3 (5)	Paperfolding and papercutting
Julio	60	3 (8)	"PI"
Agosto	60	3 (9)	Magic tricks based on mathematical principles
Septiembre	60	3 (10)	The four-color problem

PARA COLECCIONAR Nº 5

Mes	Año	Libro	Título
Octubre	60	3 (12)	Nine brainteasers
Noviembre	60	3 (13)	More about polyominoes
Diciembre	60	3 (1)	Some recreations based on the binary sistem
Enero	61	4 (2)	Numerology (Dr. Matrix)
Febrero	61	3 (15)	The ellipse
Marzo	61	3 (16)	TMacMahon's cubes and dominoes
Abril	61	3 (17)	Coxeter's *Introduction to Geometry*
Mayo	61	3 (11)	Tricks and puzzles
Junio	61	3 (19)	Brainteasers
Julio	61	3 (18)	Board-games
Agosto	61	3 (20)	Claculus of finite differences
Septiembre	61	5 (2)	Topological diversions
Octubre	61	5 (3)	The exponential constant
Noviembre	61	5 (4)	Dissections
Diciembre	61	5 (5)	Probability and gambling
Enero	62	5 (6)	The fourth dimension
Febrero	62	5 (7)	Eigth problems
Marzo	62	5 (8)	How to build a game-learning machine
Abril	62	5 (9)	Three types of spirals and how to construct them
Mayo	62	5 (10)	Symmetry and asymmetry
Junio	62	5 (11)	The game of solitaire
Julio	62	5 (12)	Abbot's "Flatland" and two-dimensional geometry
Agosto	62	5 (13)	Tricks collected at a fictitious magicians' convention
Septiembre	62	5 (14)	Tests of division
Octubre	62	5 (15)	A collection of nine puzzles involving numbers, logic and probability

Mes	Año	Libro	Título
Noviembre	62	5 (16)	Checker-board puzzles: dissections, etc.
Diciembre	62	5 (17)	Manipulations with strings
Enero	63	4 (3)	Numerology (Dr. Matrix)
Febrero	63	5 (18)	Curves of constant width
Marzo	63	5 (1)	Paradoxes
Abril	63	5 (20)	Foolisheness for April Fools' Day
Mayo	63	5 (19)	Reptiles
Junio	63	6 (1)	Helical structures: spirals and cockscrews
Julio	63	6 (2)	Topological diversions
Agosto	63	6 (3)	Perms and paradoxes in combinatorial mathematics
Septiembre	63	6 (4)	How to solve puzzles by graphing the rebounds of a bouncing ball
Octubre	63	6 (5)	Four board games
Noviembre	63	6 (6)	Nine problems
Diciembre	63	6 (8)	Parity tests: odd and even
Enero	64	4 (5)	Numerology (Dr. Matrix)
Febrero	64	6 (7)	Sliding puzzles: the 15 puzzle
Marzo	64	6 (9)	Prime numbers
Abril	64	6 (10)	Planar graphs: sets of vertices connected by edges
Mayo	64	6 (11)	Number bases: the false coin problem
Junio	64	6 (12)	Nine short problems and more about primes
Julio	64	6 (13)	Curious properties of a cycloyd curve
Agosto	64	6 (14)	Magic tricks based on mathematical principles
Septiembre	64	6* (15)	Word games: puns, palindromes, etc.

Mes	Año	Libro	Título
Octubre	64	6 (15)	Simple proofs of Pythagoras
Noviembre	64	6 (16)	Infinite series and the concept of limit
Diciembre	64	6 (17)	Polyominoes
Enero	65	4 (6)	Numerology (Dr. Matrix)
Febrero	65	6 (18)	Tetrahedrons
Marzo	65	6 (19)	Nine short problems
Abril	65	6 (21)	The infinite regress: snowflake curves, ...
Mayo	65	6 (20)	The lattice of integers considered as an orchard or billiard table
Junio	65	6 (22)	Postman problems: routing problems
Julio	65	6 (23)	"Op Art" patterns: tessellations
Agosto	65	6 (24)	Communication with intelligent organisms in other worlds
Septiembre	65	7 (18)	The "Superellipse": a curve betwenn the ellipse and the rectangle
Octubre	65	8 (12)	Pentominoes and polyominoes
Noviembre	65	7 (9)	Nine elementary word and number problems
Diciembre	65	7 (5)	Magic stars, graphs and polihedrons
Enero	66	4 (7)	Numerology (Dr. Matrix)
Febrero	66	7 (2)	Coin puzzles
Marzo	66	7 (3)	The hierarchy of infinities
Abril	66	7 (8)	The eerie Mathematical art or Maurits C. Escher
Mayo	66	7 (17)	How to "cook" a puzzle, or mathematical one-uppery
Junio	66	7 (19)	Efforts to trisect the angle
Julio	66	7 (12)	Wilhelm Flies and his theory of male and female life cycles
Agosto	66	7 (14)	Twenty-three problems solvable by reasoning based on elementary physical principles

Mes	Año	Libro	Título
Septiembre	66	7 (11)	The problem of Mrs. Perkin's quilt
Octubre	66	7 (10)	Can the shuffling of cards be reversed?
Noviembre	66	7 (4)	To visualize a four-dimensional figure
Diciembre	66	7 (15)	Pascal's triangle
Enero	67	4 (9)	"Acrostics" (Dr. Matrix)
Febrero	67	7 (16)	Mathematical strategies for two persons contests
Marzo	67	8 (5)	Eight problems solvable with elementary techniques
Abril	67	7 (6)	Professional mental calculators
Mayo	67	7 (7)	Cube-root extraction and the calendar trick
Junio	67	8 (10)	Polyhexagons and polyabolos
Julio	67	7 (1)	"Sprouts" and "Brussels sprouts": topological games
Agosto	67	8 (4)	In wich the computer prints out mammoth polygonal factorials
Septiembre	67	8* (6)	Double acrostics
Octubre	67	8 (13)	Problems on the knight's move in chess
Noviembre	67	8 (14)	Nine logical and illogical problems to solve
Diciembre	67	8 (3)	Game theory is applied (for a change) to games
Enero	68	4 (10)	Numerology (Dr. Matrix)
Febrero	68	8 (16)	Tree graps and forests of trees
Marzo	68	8 (11)	Perfect and amicable numbers
Abril	68	9 (20)	Puzzles and tricks with a dollar bill
Mayo	68	9 (3)	Packing: circles and spheres
Junio	68	8 (6)	Combinatorial possibilities in a pack of shuffled cards
Julio	68	7 (13)	Random numbers

Mes	Año	Libro	Título
Agosto	68	8 (9)	Thirty-one quick problems
Septiembre	68	8 (8)	Conting systems and the relation between numbers and the real worls
Octubre	68	8 (15)	MacMahon's color triangles
Noviembre	68	8 (17)	The ancient lore of dice
Diciembre	68	8 (8)	The Möbius strip
Enero	69	4 (11)	Numerology (Dr. Matrix)
Febrero	69	9 (8)	Boolean algebra, Venn diagrams and the propositional calculus
Marzo	69	9 (13)	The Fibonacci sequence
Abril	69	9 (15)	Eight problems emphasizing gamesmanship, logic and probability
Mayo	69	9 (6)	Random walks
Junio	69	9 (7)	Random walks on the square and the cube
Julio	69	9 (2)	Tricks, games and the puzzles with matches
Agosto	69	9 (14)	Simplicity as a scientific concept
Septiembre	69	9 (17)	Constructions with a compass and a straighedge: with a compass
Octubre	69	4 (13)	Matrix of the lunar flight of Apollo 11 (Dr. Matrix)
Noviembre	69	9 (4)	"Patterns", a new paper and pencil game based on inductive reasoning
Diciembre	69	9 (12)	Dominoes: a handful of combinatorial problems
Enero	70	9 (18)	The abacus: primitive but effective digital computer
Febrero	70	9 (11)	Nine new puzzles to solve, some answers and addenda
Marzo	70	9 (10)	Cyclic numbers and their properties
Abril	70	9 (16)	Some mathematical models embedded in the solar system

Mes	Año	Libro	Título
Mayo	70	9 (1)	Optical illusions
Junio	70	9 (5)	Elegant triangle theorems
Julio	70	10 (2)	Diophantine analysis and Fermat's "lasta theorem
Agosto	70	9 (19)	Backward run numbers, letters, words and sentences
Septiembre	70	10 (1)	On the cyclical curves generated by rolling wheels
Octubre	70	10 (20)	Solitaire game of "Life"
Noviembre	70	10 (3)	New collection of short problems
Diciembre	70	10 (5)	The paradox of the nontransitive dice
Enero	71	4 (14)	Lessons from Dr. Matrix in chess and numerology
Febrero	71	10 (21)	On cellular automata, self-reproduction, the Garden of Eden and the game of "Life"
Marzo	71	10 (4)	The orders of infinity, the topological nature of dimension and "supertasks"
Abril	71	10 (6)	Geometric fallacies: hidden errors pave the road to absurd conclusions
Junio	71	9 (9)	The Turing game and the question it presents: can a coputer think?
Julio	71	10 (8)	Quickie problems: not hard, but look out for the curves!
Agosto	71	10 (9)	Ticktacktoe and its complications
Septiembre	71	10 (10)	The plaiting of Plato's polyhedrons and the asymmetrical Yin-Yan-Lee
Octubre	71	10 (11)	New puzzles from the game of Halma, the noble ancestor of Chinese checkers
Noviembre	71	10 (12)	Advertising premiums to beguile the mind: classics by Sam Loyd, master puzzle-poser
Diciembre	71	10 (13)	Further encounters with touching cubes, and the paradoxes of Zeno as "supertasks"
Enero	72	10 (14)	How to triumph at Nim; the Hackenbush game

Mes	Año	Libro	Título
Febrero	72	4 (15)	Dr. Matrix proposes some heteroliteral puzzles
Marzo	72	10 (15)	The graceful graphs of Salomon Golomb
Abril	72	10 (16)	A. topological problem, and eight other puzzles
Mayo	72	10 (17)	Challenging chess tasks for puzzles buffs
Junio	72	10 (18)	A miscellany of transcendental problems
Julio	72	10 (19)	Amazing mathematical cards tricks
Agosto	72	11 (2)	The curious properties of the Gray code and how it can be used to solve puzzles
Septiembre	72	11 (3)	Pleasurable problems with polycubes, and the winning strategy for Slither
Octubre	72	11 (1)	Why the long arm of coincidence is usually not as long it seems
Noviembre	72	11 (4)	On the practical uses and bizarre abuses of Sir Francis Bacon's biliteral cipher
Diciembre	72	11 (5)	Knotty problems with a two-hole torus, and solutions for last month's ciphers
Enero	73	11 (9)	Sim, Chomp and Race Track: new games for the intellect (and not for Lady Luck)
Febrero	73	11 (10)	Up-and-down elevator games and Piet Hein's mechanical puzzles
Marzo	73	11 (7)	The calculating rods of John Napier, the eccentric father of the logarithm
Abril	73	11 (8)	How to turn a chessboard into a computer and to calculate with negabinary numbers
Mayo	73	11 (6)	A new miscellany of problems, and encores for Race Track, Sim, Chomp and elevators
Junio	73	11 (11)	Plotting the crossing number of graphs, and answers to last month's miscellany
Julio	73	11 (13)	Free will revisited, with a mind-bending prediction paradox by William Newcomb
Agosto	73	4 (16)	An astounding self-test of clairvoyance by Dr. Matrix
Septiembre	73	11 (12)	Problems on the surface of a sphere offer an entertaining introduction to points sets

Mes	Año	Libro	Título
Octubre	73	11 (16)	"Look-see" diagrams that offer visual proof of complex algebraic formulas
Noviembre	73	11 (17)	Fantastic patterns traced by programmed "worms"
Diciembre	73	11 (18)	On expressing integers as the sum of cubes and other unsolved number-theory problems
Enero	74	11 (20)	The combinatorial basis of the "I Ching", the Chinesse book of divination and wisdom
Febrero	74	11 (19)	Cram, Crosscram and Quadraphage: new games having elusive winning strategies
Marzo	74	11 (14)	Reflections on Newcomb's problem: a prediction and free-will dilemma
Abril	74	11 (15)	Nine challenging problems, some rational and some not
Mayo	74	12 (1)	On the contradiction of time travel
Junio	74	4 (17)	Dr. Matrix brings his numerological science to bear on the occult powers of the pyramid
Julio	74	12 (2)	On the patterns and the unusual properties of figurate numbers
Agosto	74	12 (3)	On the fanciful history and the creative challenges of the puzzle game of tangrams
Septiembre	74	12 (4)	More on tangrams: Combinatorial problems and the game possibilities of snug tangrams
Octubre	74	12 (5)	On the paradoxical situations that arise from nontransitive relations
Noviembre	74	12 (6)	Some new and dramatic demonstrations of number theorems with playing cards
Diciembre	74	12 (7)	The arts as combinatorial mathematics, or how to compose like Mozart with dice
Enero	75	12 (8)	The curious magic of anamorphic art
Febrero	75	8 (1)	How the absence of anything leads to thoughts of nothing
Marzo	75	12 (9)	From rubber ropes to rolling cubes, a miscellany of refreshing problems

Mes	Año	Libro	Título
Abril	75	12 (10)	Six sensational discoveries that somehow or another have escaped public attention
Mayo	75	12 (11)	On the remarkable Császár polyhedron and its applications to problem solving
Junio	75	12 (12)	Games of strategy for two players: star nim, meander, dodgem and rex
Julio	75	12 (13)	On tesellating the plane with convex polygon tiles
Agosto	75	12 (14)	More about tiling the plane: the possibilities of polyominoes, polyamonds and polyhexes
Septiembre	75	4 (8)	Dr. Matrix finds numerological wonders in the King James Bible
Octubre	75		Concerning an effort to demonstrate extrasensory perception by machine
Noviembre	75	12 (15)	On map projections (with special reference to some inspired ones)
Diciembre	75	12 (16)	A random assortment of puzzles, together with reader responses to earlier problems
Enero	76	12 (17)	A breakthrough in magic squares, and the first perfect magic cube
Febrero	76	12 (18)	Some elegant brick-packing problems and a new order-7 perfect magic cube
Marzo	76	12 (19)	On the fabric of inductive logic, and some probability paradoxes
Abril	76		Snarks, Boojums and other conjectures related to the four-color-map problem (Inv. y Ci. Abr77)
Mayo	76	8 (18)	A few words about everything there was, is and ever will be
Junio	76	12 (20)	Catalan numbers: an integer sequence that materializes in unexpected places
Julio	76	12 (21)	Fun and serious business with the small electronic calculator
Agosto	76	12 (22)	The symmetrical arrangement of the stars on the American Flag an related matters
Febrero	77		The flip-strip sonnet, the lipogram and other mad modes of wordplay

Cronología de la columna "juegos Matemáticos" de Martin Gardner en Investigación y Ciencia

A partir de septiembre se publican en español en Investigación y Ciencia, con dos meses de desfase (por ejemplo, Oct-76 en Sci. Am. aparece en Dic-76 en Inv. y Ci.). Sin embargo el de febrero de 1977 de Sci. Am. no es traducido y en su lugar en Inv. y Ci. de abril de 1977 aparece el artículo correspondiente a abril de 1976 de Sci. Am. (En el primer número de Inv. y Ci. de octubre de 1976 aparece traducido el artículo correspondiente a enero de 1974 de Sci. Am.).

Investigación y Ciencia

Mes	Año	Libro	Título
Octubre	76	11 (20)	La base combinatoria del "I Ching", el libro chino de la adivinación y la sabiduría (Sci. Am. Ene-74)
Noviembre	76	13 (4)	Un libro de John Horton Conway que abarca una infinidad de juegos
Diciembre	76	13 (5)	Problemas de combinatoria, viejos unos, otros nuevos, tratados mediante ordenador
Enero	77	4 (19)	En donde DM (Dr. Matrix) se revela como el gurú de la MP (Meditación Pentagonal)
Febrero	77	13 (3)	Curvas "monstruosas" que obligan a redefinir el término "curva"
Marzo	77	13 (1)	Extraordinario mosaico no periódico que enriquece la teoría del teselado
Abril	77		Snarks, Boojums y otras conjeturas relativas al llamado teorema del mapa de cuatro colores (Sci. Am. Abr-76)
Mayo	77	13 (6)	Inesperadamente, al acorralar la dama se llega a recovecos de la teoría de números. (Nim de Wythoff)
Junio	77	13 (7)	El triángulo de bolas, una paradoja versificada y un surtido de problemas
Julio	77	13 (8)	La inducción matemática y su semejanza con la caída de una hilera de piezas de dominó
Agosto	77	13 (9)	La noción de número negativo y lo arduo que resulta entenderla
Septiembre	77	13 (10)	Las descomposiciones en partes iguales conducen hasta importantes regiones de las matemáticas

Mes	Año	Libro	Título
Octubre	77	13 (11)	Claves de nuevo tipo cuyo desciframiento ocuparía unos cuantos millones de años
Noviembre	77	13 (13)	Secciones cónicas, superficies regladas y otras manifestaciones de la hipérbola
Diciembre	77	13 (14)	De cómo jugar a la "Nueva Eleusis", pasatiempo que simula muy bien la búsqueda de la verdad
Enero	78	13 (15)	Donde al unir mediante líneas los puntos de un conjunto se recorren caminos diversos, divergentes y divertidos
Febrero	78	4 (20)	En California, el Doctor Matrix aplica al estudio de los terremotos las sacudidas del "rock punk"
Marzo	78	13 (16)	Todas las esculturas de Berrocal son desmontables, lo mismo que los rompecabezas mecánicos de enclavamiento
Abril	78	13 (17)	Donde se trata de los saltos de damas, del juego de amazonas, dados y otros pasatiempos
Mayo	78	13 (18)	Donde el Conde Drácula, Alicia, Porcia y otros muchos participan en diversos rompecabezas lógicos
Junio	78		Música blanca y música pardea, curvas fractales y fluctuaciones del tipo 1/f
Julio	78		Los versátiles números de Bell permiten contar desde particiones de un conjunto hasta versos monorrimos
Agosto	78		Un parque zoológico matemático en donde habitan ciertas criaturas increíbles, imaginarias unas, otras no
Septiembre	78		A Charles Sanders Peirce: filósofo y experto en juegos
Octubre	78		Las bandas de Möbius tienen espesor finito; en realidad se trata de prismas retorcidos
Noviembre	78		Problemas sobre la matriz de Conway, cubos que son polícronos y dominós tridimensionales
Diciembre	78		Acertijos y problemas de la teoría de números que nos suscitan las curiosas fracciones del antiguo Egipto

Mes	Año	Libro	Título
Enero	79		Se aplican al moderno arte minimal conceptos de estética matemática
Febrero	79	4 (21)	¿Se trata de un robot superdotado, o del Dr. Matrix que vuelve a la carga?
Marzo	79		Múltiples palceres matemáticos de las circunferencias mutuamente tangentes
Abril	79		De la rectangulación de rectágulos y de otros muchos gratos problemas
Mayo	79		De cómo perturbar el pasado, retrasar el futuro y de otras indebidas manipulaciones del tiempo
Junio	79		Donde los expertos en tatetí pueden perseguir caza mayor
Julio	79		De cómo poseer psiquismo, incluso siendo caballo o cualquier otro animal irracional
Agosto	79		Problemas ajedrecísticos en otro plano, incluídos giros y simetrías
Septiembre	79		"Gödel, Escher, Bach" de Douglas Hofstadter
Octubre	79		"Cómo imaginarse los números imaginarios"
Noviembre	79		En ciertas pautas de números o palabras quizá no haya tanto como salta a la vista
Diciembre	79		Ciertos problemas de empaquetado no se resuelven sentándose en la maleta
Enero	80		El número irracional omega parece albergar todos los misterios insondables del Universo
Febrero	80		Una selección de problemas, entre ellos, uno virtualmente imposible de resolver
Marzo	80		El juego de damas, más interesante de lo que muchos podrían pensar
Abril	80		Coloreando mapas insólitos, podemos descubrir tierras vírgenes fabulosas
Mayo	80		Grafos que pueden ser útiles a caníbales, misioneros, lobos, cabras y repollos a ir de un lado para otro

Mes	Año	Libro	Título
Junio	80		Huevos de Pascua: cocidos, crudos, a la vinagreta y ¿por qué no? matemáticos
Julio	80		¿Pueden recibir invitados, colegialas y presos encadenados idéntico trato?
Agosto	80		La captura del monstruo matemático: un grupo algebraico con un número terrible de elementos
Septiembre	80		Los placeres de crear ciencia y técnica en el planiverso ideal de los geómetras
Octubre	80		Del arte de encajar músicos, píldoras y puntos en casilleros apropiados
Noviembre	80	4 (22)	Como Sherlock Holmes, El Dr. Matrix sufre un fin misterioso y prematuro
Diciembre	80		El célebre postulado euclídeo de las paralelas y sus modernos herederos
Febrero	82		La curva de Laffer y otras gracias de nuestra economía de tipo mixto
Octubre	83		Tareas que es forzoso concluir, por mucho que se quiera evitarlo
Noviembre	83		Topología de nudos y los resultados insolidarios de la Lotería Seductora
Agosto	86		De cómo lanzar una red sobre un damero y otros rompecabezas del bosque de Steiner

Francisco Herrero Ruiz

Enero 94

Calendario Matemático

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo

1 — 2 CUESTIÓN DE ARITMÉTICA

Juan ha de repartir 16 pesetas entre cuatro personas. Realiza las operaciones y obtiene nada menos que ¡13 pesetas! para cada uno. Sorprendido por el resultado, ha pensado realizar comprobaciones con la división, el producto y la suma:

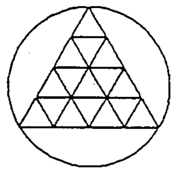
$$\begin{array}{r|l} 16 & 4 \\ \hline 12 & 13 \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13 \\ 4 \\ \hline 12 \\ +4 \\ \hline 16 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13 \\ 13 \\ 13 \\ +13 \\ \hline 16 \end{array}$$

¿Puedes explicar cómo ha hecho cada una de las operaciones?

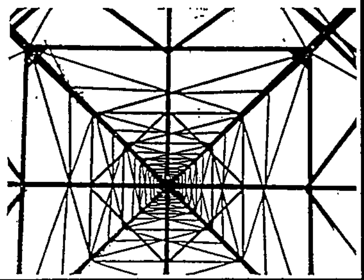
¿En qué pensaba Juan en cada caso para creer que lo hacía bien?

3 CON UN SOLO TRAZO

Aquí tienes un símbolo usado en la antigua Grecia. Dibújalo sin levantar el lápiz del papel e intenta hacerlo con el mínimo número de cambios de dirección.

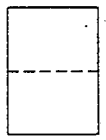


4 ESTRUCTURA TRIANGULAR



5 LA HOJA

Una hoja de papel sujeta a la norma DIN ha de tener unas dimensiones tales que si la cortamos por la mitad, obtengamos dos rectángulos semejantes al inicial (de un folio DINA3 obtenemos dos folios DINA4). Calcula la relación entre los lados

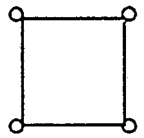


6 EL PIANO

Juan: ¿Cuántos años tienen tus tres hijas?
Pedro: El producto de sus edades es 36
J: ¿Me puedes dar más datos?
P: La suma de sus edades es el número del portal en el que estamos.
J: Aún me falta un dato
P: La mayor toca el piano
J: ¡Ya!. Sus edades son ...

7 LA ACAMPADA

Una tienda de campaña se montó entre cuatro árboles que formaban un cuadrado. Más tarde se montó otra tienda cuyo suelo era dos veces el de la primera entre esos mismos árboles. ¿Cómo fué posible?.



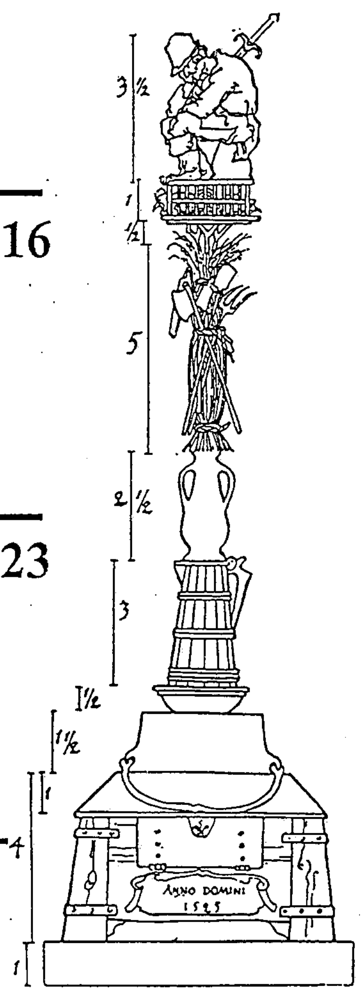
8 OCHOS

Consigue el número 1000 con ocho ochos.

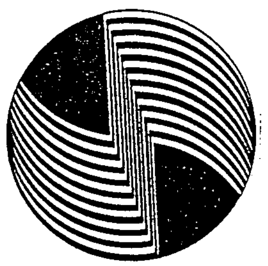
8

(de dos formas distintas)

9 MONUMENTO A LA VICTORIA DE DURERO



10 SIMETRÍA ROTACIONAL

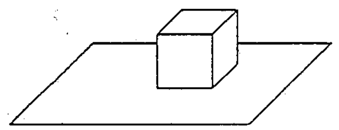


11 EL REPARTO JUSTO

Dos beduinos caminan por el desierto, uno de ellos lleva 3 panes y el otro 5. Cuando van a comer aparece un tercero que no lleva comida y se comen los 8 panes entre los tres. En agradecimiento a su buena acción, el último en llegar ofrece a los beduinos 8 monedas de oro, ¿Cómo han de repartirlas?

12 — 13 LOS NÚMEROS GEOMÉTRICOS DE PLATÓN

Se atribuye a Platón el diseño de este monumento formado por un cubo situado sobre una plaza. Tanto el cubo grande como el perímetro de la plaza se han construido con cubitos pequeños de lado unidad. Casualmente se ha utilizado la misma cantidad para el monumento que para el pavimento.



¿Cuál es el mínimo número de cubos que son necesarios para construirlo?. ¿Cuál es la siguiente solución en tamaño?

14 ESTIMA Y CALCULA

Estima el grosor de:
a) una hora de un libro de texto,
b) una hoja del listín telefónico, y
c) la hoja de una enciclopedia.

Busca un procedimiento para calcular con precisión los grosores estimados anteriormente.

15 LA CARRERA

Don José y doña María son aficionados al deporte que están bastante igualados y se disponen a disputar una carrera. D. José corre la mitad del tiempo y anda la otra mitad. Doña María corre la mitad de la distancia y anda la otra mitad, ¿quién llega antes?.

16

17 CALCULADORA

$$\frac{17}{7} = 2 \quad (\text{resto } 3)$$

Tu calculadora seguramente da

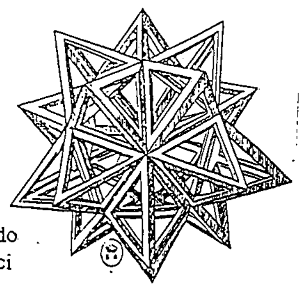
$\boxed{2.4285714}$

Utiliza la calculadora para obtener el resto de una división cualquiera

18 VIDA O MUERTE

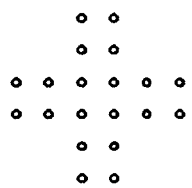
En un castillo hay dos puertas: una de ellas es la de la VIDA y la otra la de la MUERTE. Queremos saber cuál es cada una realizando una sola pregunta a uno de los dos habitantes del castillo, uno de ellos siempre dice la verdad, mientras el otro siempre miente, pero no sabemos cual de ellos. ¿Cuál será la pregunta?

19 DODECAEDRO ESTRELLADO



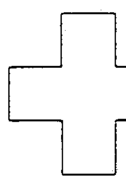
Leonardo da Vinci

20 PUNTOS



¿Cuál es el mínimo número de puntos que hay que quitar en el dibujo para que sea imposible dibujar cuadrados que tengan sus vértices en la trama

21 CRUZ ROJA



Corta la cruz con cuatro cortes rectos de forma que puedas formar un cuadrado con las piezas resultantes

22 CEREZAS

A un cerezo subí
que con cerezas hallé.
Yo cerezas no comí
mas con cerezas no dejé.

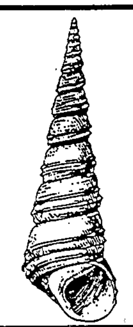
¿Cómo pudo ser?

23

24 / 31 CONCHA

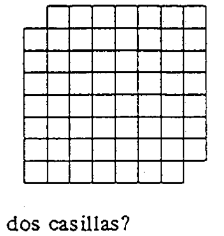
Turritella Duplicata

Rotación
+
Dilatación



25 TABLERO DE AJEDREZ

¿Puedes tapar este "tablero de ajedrez" al que le faltan dos casillas utilizando fichas de dominó de forma que cada una cubra exactamente dos casillas?



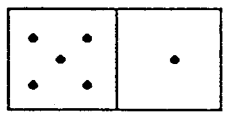
26 EL NENÚFAR

La flor de un nenúfar sobresale 10 cm. por encima del nivel del agua en un lago. Si se tira de ella lateralmente, desaparece del agua a 21 cm. de donde se encontraba al principio.

¿Cuál es la profundidad de lago en ese punto?

27 DOMINÓ

¿Cuánto suman las 28 fichas del dominó?



28 EN LA FERIA

Un popular juego de dados que se jugaba en la feria consistía en lo siguiente: un jugador escogía una casilla numerada del 1 al 6. Se lanzaban tres dados y, si salía una vez su número recibía el doble de lo apostado, si salía dos veces, recibía el triple, y si salía tres veces, recibía el cuádruple. ¿Es un juego equitativo?

29 MONEDAS

Tengo en la mano dos monedas que juntas hacen treinta pesetas, y una de ellas no es un duro.

¿De qué valor son las monedas?

30

La geometría es la base correcta para toda pintura

Durero

Coordina: José Antonio Mora Sánchez. Centre de Professors d'Alacant. Avda. d'Aguilera, 1- 2ª - 03007-ALACANT

Centres de Professors i Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana

Gener 94

Calendari Matemàtic

Dilluns	Dimarts	Dimecres	Dijous	Divendres	Dissabte	Diumenge

1 QÜESTIÓ D'ARITMÈTICA — 2

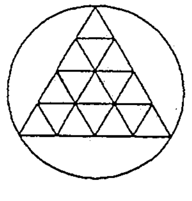
Joan ha de repartir 16 pessetes entre quatre persones. Realitza les operacions i obté res més que ¡13 pessetes! per a cadascun. Sorprés pel resultat, ha pensat realitzar comprovacions amb la divisió, el producte i la suma:

$$\begin{array}{r|l} 16 & 4 \\ \hline 12 & 13 \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13 \\ \underline{4} \\ 12 \\ \underline{+4} \\ 16 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13 \\ 13 \\ 13 \\ \underline{+13} \\ 16 \end{array}$$

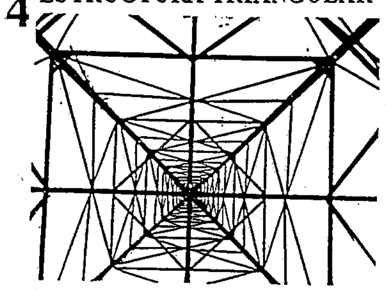
¿Pots explicar com ha fet cadascuna de les operacions?
¿En què pensava Joan en cada cas per a creure que ho feia bé?

3 AMB UN SOL TRAÇ

Aquí tens un símbol usat en l'antiga Grècia. Dibuixa'l sense alçar el llapis del paper i intenta fer-ho amb el mínim nombre de canvis de direcció.

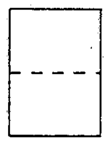


4 ESTRUCTURA TRIANGULAR



5 EL FULL

Un full de paper subjecte norma DIN ha de tenir una dimensió tal que si el tallem per la meitat obtinguemm dos rectangles similars a l'inicial (d'un full DINA3 obtenim dos fulls DINA4). Calcula la relació entre els costats dels rectangles.

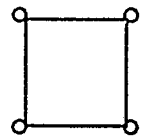


6 EL PIANO

J: ¿Quants anys tenen les teues tres filles?
P: El producte de les seues edats és 36.
J: ¿Pots donar-me més dades?
P: La suma de les seues edats és igual al número del portal en què estem.
J: Encara em falta una dada.
P: La major toca el piano
J: ¡Ja està!: les seues edats són ...

7 L'ACAMPADA

Una tenda de campanya va ser muntada entre quatre arbres que formaven un quadrat. Més tard es va muntar, entre els mateixos arbres, una altra el terra de la qual era dues vegades el de la primera. ¿Com va ser possible?



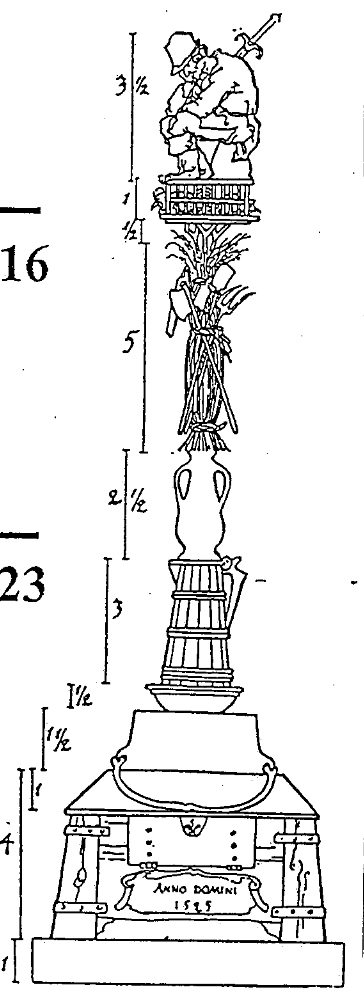
8 VUITS

Aconsegueix el número 1000 amb vuit vuits.

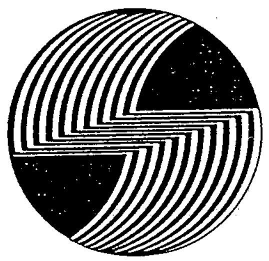
8

(de dues formes diferents)

9 MONUMENT A LA VICTÒRIA DE DÜRER



10 SIMETRIA ROTACIONAL

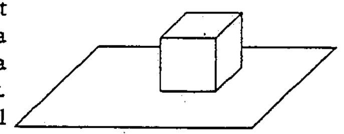


11 EL REPARTIMENT JUST

Dos beduins caminen pel desert, un dels dos porta 3 pans i l'altre 5. Quan van a dinar hi apareix un tercer beduí que no porta menjar i es mengen els 8 pans entre els tres. En agraïment a la bona acció, l'últim en arribar ofereix als beduins 8 monedes d'or; ¿com haurien de repartir-les?

12 ELS NÚMEROS GEOMÈTRICS DE PLATON — 13

S'atribueix a Platon el disseny d'aquest monument format per un cub situat sobre una plaça. Tant el cub gran com el perímetre de la plaça s'han construït amb cubs petits de costat unitat. Casualment s'ha utilitzat idèntica quantitat per al monument que per al paviment.



¿Quin és el mínim nombre de cubs que són necessaris per a construir-lo?. ¿Quina és la següent solució en grandària?

14 ESTIMA I CALCULA

Estima la grossària de:
a) un full d'un llibre de text,
b) un full de la guia telefònica, i
c) un full d'una enciclopèdia.

Busca un procediment per a calcular amb precissió les grossàries estimades anteriorment.

15 LA CARRERA

En Josep i na Maria són afeccionats a l'esport, en què estan bastant igualats i es disposen a còrrer una cursa. En Josep corre la meitat del temps i camina l'altra meitat. Na Maria corre la meitat de la distància i camina l'altra meitat, ¿qui arribarà abans?.

16

17 CALCULADORA

$$\frac{17}{7} = 2 \quad \text{(residu 3)}$$

La teua calculadora segurament dóna

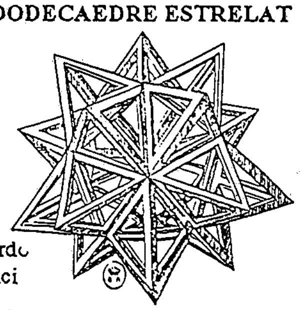
2.4285714

Utiliza la calculadora per a obtenir el residu d'una divisió qualsevol.

18 VIDA O MORT

En un castell hi ha dues portes: una és la de la VIDA i l'altra la de la MORT. Volem saber quina és cadascuna realitzant una única pregunta a un dels dos habitants del castell, un dels quals sempre diu la veritat, mentre que l'altre sempre menteix, però no sabem quin d'ells és a qui preguntem. ¿Quina haurà de ser la pregunta?

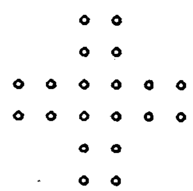
19 DODECAEDRE ESTRELAT



Leonardo da Vinci

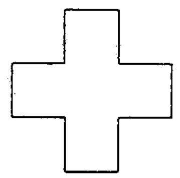
20 PUNTS

¿Quin és el mínim nombre de punts que cal llevar en el dibuix per a que siga impossible dibuixar quadrats que tinguen els vèrtexs en la trama?.



21 CREU ROJA

Talla la creu amb quatre talls rectes de manera que pugues formar un quadrat amb les peces resultants



22 CIRERES

A un cirerer vaig pujar
que cireres en tenia.
Cireres no em vaig menjar
però cireres no hi van quedar.

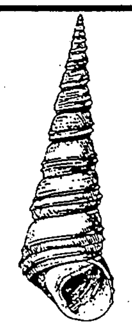
¿Com va poder ser?

23

24 CONXA

Turritella duplicata

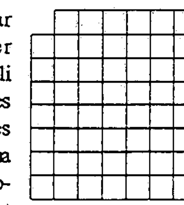
Rotació
+
Dilatació



31

25 TAULER D'ESCACS

¿Pots tapar aquest "tauler d'escacs" al què li falten dues caselles utilitzant fitxes de dòmino de forma que cadascuna cobrisca exacta-ment dues caselles?.



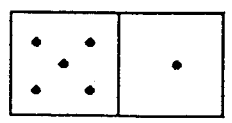
26 EL NENÚFAR

La flor d'un nenúfar sobresurt 10 cm per damunt del nivell de l'aigua en un llac. Si s'estira d'ella lateralment, desapareix de l'aigua 21 cm d'on s'hi trobava al principi.

¿Quina és la fondària del llac en eixe punt?

27 DÒMINO

¿Quant sumen les 28 fitxes del dòminó?



28 EN LA FIRA

Un popular joc de daus que se jugava en la fira consistia en el següent: un jugador escollia una casella numerada de l'1 al 6. Se llançaven tres daus, i, si eixia una vegada el número triat rebia el doble de l'apostat, si n'eixia dues vegades, rebia el triple, i si n'eixia tres, rebia el quàdruple. ¿És un joc equitatiu?

29 MONEDES

Tinc en la mà dues monedes que juntes fan trenta pessetes, i una d'elles no és un duro.

¿De quin valor són les monedes?

30

La geometria és la base correcta per a tota pintura.

Dürer

Coordina: José Antonio Mora Sánchez. Centre de Professors d'Alacant. Avda. d'Aguilera, 1- 2ª - 03007-ALACANT   Traducció: Daniel Climent i Leandre Iborra

Centros de Profesores y Sociedad de Educación Matemática de la Comunidad Valenciana

Febrero 94

Calendario Matemático

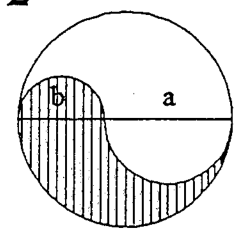
Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo

1 EL MAYOR

Utiliza los números 1, 2 y 3 y las operaciones matemáticas que conozcas. Trata encontrar el número más alto que puedas utilizándolos cada uno de ellos una vez. Por ejemplo:

31x2   21x3   231

2 PARTE DEL CÍRCULO



Sabiendo que **a=2b.**

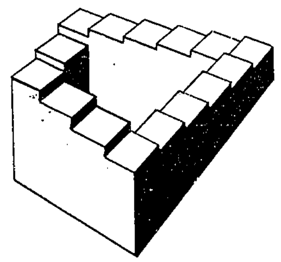
¿Qué relación hay entre las dos partes de la figura

3 CRIPTOGRAMA

¿Qué valores de A, B, C y D hacen que la operación sea correcta:

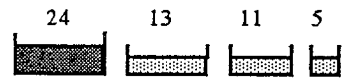
$$\begin{array}{r} AB \\ \times\, CD \\ \hline DAB \end{array}$$

4 ESCALERA DE PENROSE

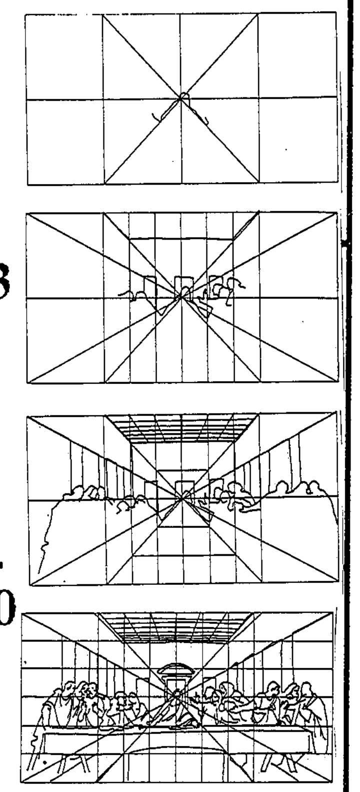


5 CÁNTAROS

Tenemos un cántaro con 24 litros de vino y tres cántaros vacíos de 5, 11 y 13 litros. Queremos repartir los 24 litros en tres partes iguales. Relata los pasos necesarios para conseguirlo



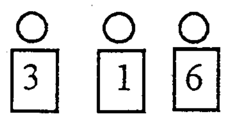
6 LA ÚLTIMA CENA
Leonardo da Vinci



Cuatro pasos en el análisis geométrico de esta pintura.

7 ROMPECABEZAS DEL 7

¿Cómo deben colocarse estos tres niños para que las cifras marcadas en sus camisetas formen un número de tres cifras que sea múltiplo de 7?

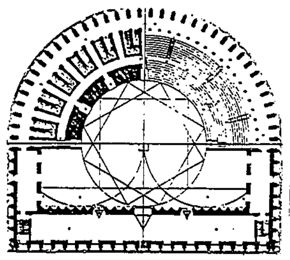


8 EDADES

Cuando mi madre tenía 41 años, yo tenía 9. Ahora tiene el doble de mi edad.

¿Qué edad tengo?.

9 TEATRO GRIEGO (Planta)



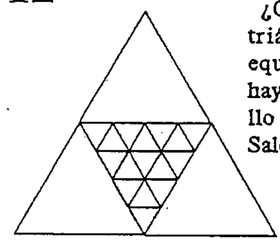
10 EL HALCÓN **11**

Dos trenes separados entre sí por 100 kilómetros de distancia salen el uno al encuentro del otro a 50 km/h. En el mismo instante sale de la cabecera de uno de los trenes un halcón que vuela a 200 Km/h. Cuando alcanza la cabecera del otro tren, regresa al primero y repite la operación las veces necesarias hasta que se cruzan los trenes.

¿Qué distancia habrá recorrido el halcón?
¿Cuánto habrá tardado en recorrer esa distancia?

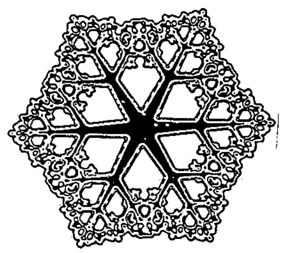
12 EL SELLO DE SALOMÓN

¿Cuántos triángulos equiláteros hay en el sello del rey Salomón?



13

14 MODELO FRACTAL



15 RECTÁNGULOS

En estas figuras hay 1, 3 y 6 rectángulos respectivamente:

¿Cuántos hay en estas otras?

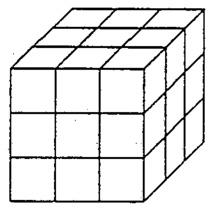
16 EL BANCO

Un banco tiene tal necesidad de moneda fraccionaria, que está dispuesto a pagar 1000 pesetas a cada persona que lleve 500 en 10 monedas de 10, 25 ó 50 pesetas, con la única condición de que lleve al menos una de cada valor.
Busca la forma de hacerte rico

17 EL CUBO DE CARAS NEGRAS **18**

Pintamos un cubo de negro y luego lo cortamos en 3x3x3=27 cubitos más pequeños.

¿Cuántos cubitos obtendremos con una cara pintada?. ¿y dos caras pintadas?, ¿y tres caras? ¿y ninguna?



Haz el mismo recuento para un cubo pintado de negro pero que ahora lo hemos partido en 4x4x4=64 cubitos.

Y si lo cortamos en nxnxn=n^3 cubitos

19 LA HERENCIA

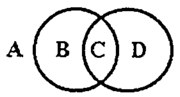
Tres hermanos han de repartirse una herencia de 21 toneles de vino: 7 llenos, 7 por la mitad y 7 vacíos.

Sin trasvasar vino, ¿cómo harán el reparto para recibir igual cantidad de vino y de toneles?.

20

21 CÍRCULOS

Un círculo divide el plano en dos regiones. Dos círculos lo pueden dividir en cuatro regiones como máximo:



Tres círculos lo dividen en ..... regiones. ¿Y cuatro? ¿Y **n** círculos?

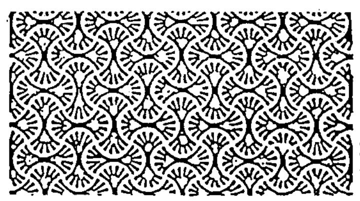
22 MÁS EDADES

"Yo tenía n años en el año n^2", decía el Sr. Gómez a sus amigos.

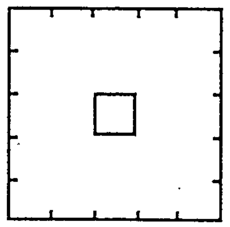
¿Cuándo nació?.

¿Cuántos años cumplirá en las próximas navidades?

23 MOSAICO. INDIA



24 LA HERENCIA **25**



Un antiguo príncipe indio tenía 6 hijos y 2 hijas.
Notando que su vida tocaba a su fin, dividió el jardín de su palacio en partes de igual forma y tamaño entre sus hijos varones, reservándose el palacio central.
La princesa protestó en defensa de sus hijas y logró que el reparto se hiciera con las mismas condiciones entre los ocho hijos.
¿Podrías encontrar los dos repartos sobre el dibujo?.

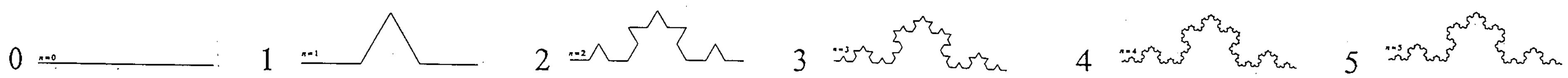
26 SOPA DE LETRAS **27**

Busca los nombres de doce famosos matemáticos

U	N	E	L	S	O	N	P	O	A
S	E	L	A	H	T	S	I	S	R
E	W	M	C	A	S	O	A	O	Q
D	T	U	S	I	I	R	N	E	U
I	O	T	A	L	O	E	O	L	I
L	N	G	P	P	A	L	K	I	M
C	A	N	A	R	T	U	A	L	E
U	L	T	A	M	R	E	F	A	D
E	I	N	I	F	F	U	R	G	E
P	D	E	S	C	A	R	T	E	S

28 LA CURVA DE KOCH

Es una curva construida por el matemático Helge von Koch. Se parte de un segmento unidad y se divide en tres partes, sustituyendo la parte central por segmentos tales que, con dicha parte, formarían un triángulo equilátero. Se repite la operación con cada uno de los cuatro segmentos obteniendo líneas poligonales cuya longitud es cada vez mayor. En un número infinito de operaciones de este tipo conseguiremos una curva de longitud infinita.
Aquí tienes los cinco primeros pasos en la construcción de esta curva



Coordina: José Antonio Mora Sánchez. Centre de Professors d'Alacant. Avda. d'Aguilera, 1 - 2ª - 03007-ALACANT

CENTRES DE PROFESSORS

Centres de Professors y Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana

Febrer 94

Calendari Matemàtic

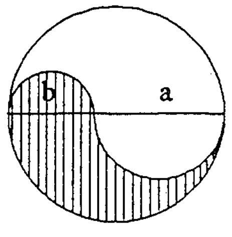
Dilluns	Dimarts	Dimecres	Dijous	Divendres	Dissabte	Diumenge

1 — **EL MAJOR**

Utilitza els números 1, 2 i 3 i les operacions matemàtiques que conegues. Tracta de trobar el número més alt que pugues utilitzant-los cadascun tan sols una vegada. Per exemple:

31x2   21x3   231

2 — **PART DEL CERCLE**



Sabent que **a=2b.**

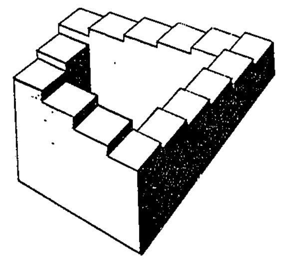
¿Quina relació hi ha entre les dues parts de la figura?

3 — **CRIPTOGRAMA**

¿Quins valors d' A, B, C i D fan que l'operació siga correcta?:

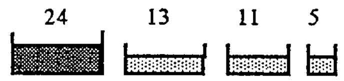
$$\begin{array}{r} AB \\ \times\, CD \\ \hline DAB \end{array}$$

4 — **ESCALA DE PENROSE**

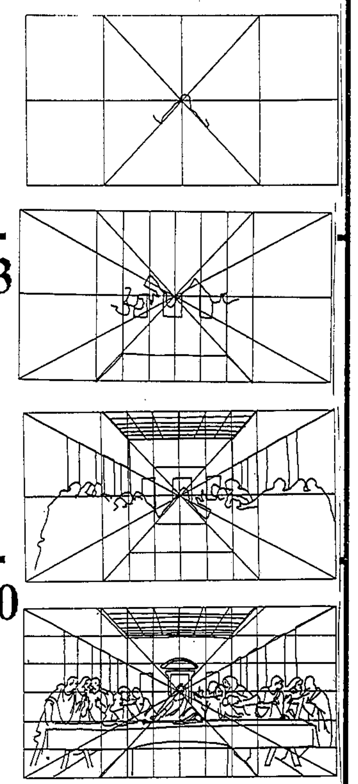


5 — **CÀNTERS**

Tenim un cànter amb 24 litres de vi i tres cànters buits de 5, 11 i 13 litres de cabuda. Volem repartir els 24 litres en tres parts iguals. Relata els passos necessàris per aconseguir-ho.

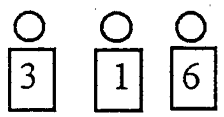


6 — **L'ÚLTIM SOPAR**
Leonardo da Vinci



7 — **TRENCACLOSQUES DEL 7**

¿Com han de col·locar-se aquests tres xiquets per a què les xifres marcades en les samarretes formen un número de tres xifres que siga múltiple de 7?

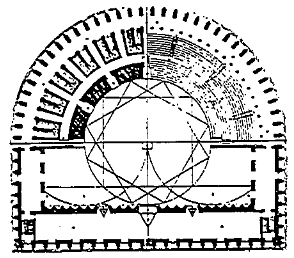


8 — **EDATS**

Quan ma mare tenia 41 anys, jo en tenia 9. Ara té el doble de la meua edat.

¿Quina edat tinc?.

9 — **TEATRE GREC (Planta)**



10 — **EL FALCÓ**

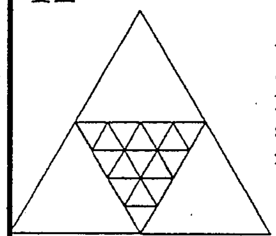
11

Dos trens separats entre si per 100 kilòmetres de distància eixen l'un cap l'altre a 50 km/h. En el mateix instant ix de la capçalera d'un dels trens un falcó que vola a 200 km/h. Quan arriba a la capçalera de l'altre tren regressa al primer i repeteix l'operació les voltes necessàries fins que s'entrecreuen els trens.

¿Quina distància haurà recorregut el falcó?

¿Quant haurà tardat en fer-ho?

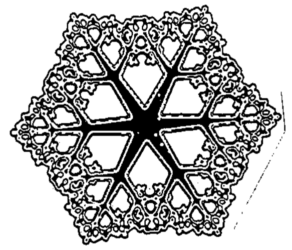
12 — **EL SEGELL DE SALOMÓ**



¿Quants triangles equilàters hi ha en el segell del rei Salomó?

13

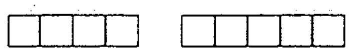
14 — **MODEL FRACTAL**



15 — **RECTANGLES**

En aquestes figures hi ha 1, 3 i 6 rectangles respectivament:

¿Quants hi ha en aquestes altres?



16 — **EL BANC**

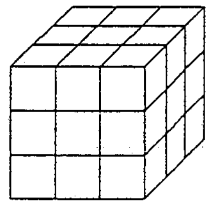
Un banc té tal necessitat de moneda fraccionària que està disposat a pagar 1.000 pessetes a cada persona que porte 500 en 10 monedes de 10, 25 ó 50 pessetes, amb l'única condició de que en porte almenys una de cada valor.

Busca la forma de fer-te ric.

17 — **EL CUB DE CARES NEGRES**

Pintem un cub de negre i després el tallem en 3x3x3=27 cubs més petits.

¿Quants cubs menuts n'obtindrem amb una cara pintada?, ¿i amb dues cares pintades?. ¿i amb tres?, ¿i sense cap cara pintada?



18

Fes el mateix recompte per a un cub pintat de negre però que ara l'hem dividit en 4x4x4=64 cubs.

I si el tallem en $(n \times n \times n) = n^3$ cubs

19 — **L'HERÈNCIA**

Tres germans han de repartir-se una herència de 21 bótes de vi: 7 plenes, 7 per la meitat i 7 buides.

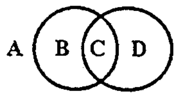
Sense transvasar vi, ¿com faran el repartiment per a rebre igual quantitat de vi i de bótes?

20

Quatre passes en l'anàlisi geomètric d'aquesta obra.

21 — **CERCLES**

Un cercle divideix el plànol en dues regions. Dos cercles el poden dividir en quatre regions com a màxim:



Tres cercles el divideixen en ..... regions. ¿I quatre? ¿I **n** cercles?

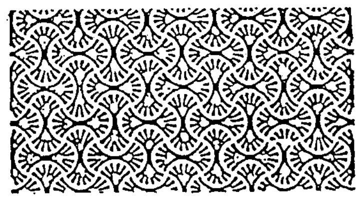
22 — **MÉS EDATS**

"Jo tenia **n** anys en l'any **n²**", deia el senyor Gomis als seus amics.

¿Quan va nàixer?.

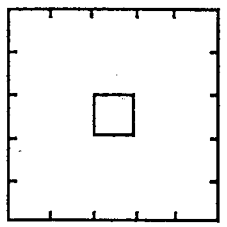
¿Quants anys cumplirà en el proper Nadal?

23 — **MOSAIC. ÍNDIA**



24 — **L'HERÈNCIA**

25



Un antic príncep indi tenia 6 fills i 2 filles.

En notar que sa vida arribava al final, va dividir el jardí del seu palau en parts d'igual forma i mida entre els fills varons, reservant-se el palau central.

La princesa protestà enèrgicament en defensa de les filles i va aconseguir que el repartiment es fera amb les mateixes condicions entre els 8 fills.

¿Podries trobar els dos repartiments sobre el dibuix?

26 — **SOPA DE LLETRES**

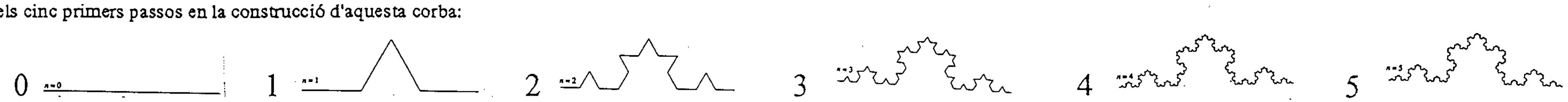
27

Busca els noms de dotze famosos matemàtics

U	N	E	L	S	O	N	P	O	A
S	E	L	A	H	T	S	I	S	R
E	W	M	C	A	S	O	A	O	Q
D	T	U	S	I	I	R	N	E	U
I	O	T	A	L	O	E	O	L	I
L	N	G	P	P	A	L	K	I	M
C	A	N	A	R	T	U	A	L	E
U	L	T	A	M	R	E	F	A	D
E	I	N	I	F	F	U	R	G	E
P	D	E	S	C	A	R	T	E	S

28 — **LA CURVA DE KOCH**

És una corba construïda pel matemàtic Helge von Koch. Es parteix d'un segment unitat i es divideix en tres parts, substituint la part central per segments tals que, amb aqueixa part, formarien un triangle equilàter. Es repeteix l'operació amb cadascú dels quatre segments obtenint línies poligonals la longitud de les quals cada vegada és major. En un nombre infinit d'operacions d'aquest tipus aconseguirem una corba de longitud infinita. Açí tens els cinc primers passos en la construcció d'aquesta corba:



Coordina: José Antonio Mora Sánchez. Centre de Professors d'Alacant. Avda. d'Aguilera, 1- 2ª - 03007-ALACANT

Traducció: Daniel Climent i Leandre Iborra

Centres de Professors i Societat d'Educació Matemàtica de la Comunidtat Valenciana

CENTRES DE PROFESSORS

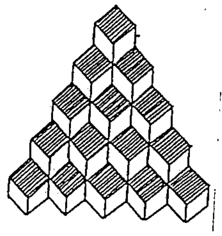
Marzo 94

Calendario Matemático

Lunes · Martes · Miércoles · Jueves · Viernes · Sábado · Domingo

1 CUBOS

En el rincón de una habitación hemos amontonado cubos del mismo tamaño.



¿Cuántos no se ven?

2 EL DOS

Investiga un procedimiento que te permita calcular con rapidez la cantidad de números naturales que contienen la cifra 2 entre el 100 y el 200.

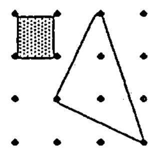
¿Cuántas veces encontraremos la cifra 2 en los primeros 1000 números naturales?

3 SÍMBOLO

Coloca un símbolo matemático conocido entre 2 y 3, con el fin de expresar un número mayor que 2 y menor que 3:

2 3

4 AREA



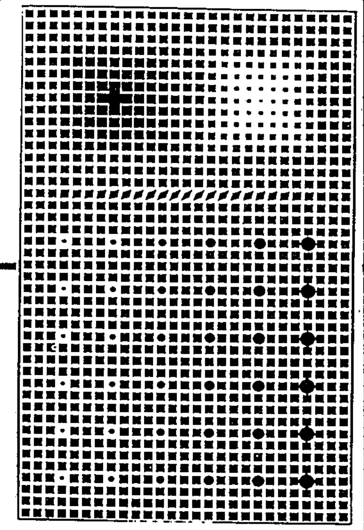
Calcula el área (en unidades cuadradas) de la región triangular.

5 LA ZANJA

Cinco obreros en cinco horas cavan cinco metros de zanja. ¿Cuántos cavadores serán necesarios para cavar en cien horas, cien metros de zanja?.

5 ⟶ 100 ?

6 SUPERNOVAE



13 *Victor Vasarely*

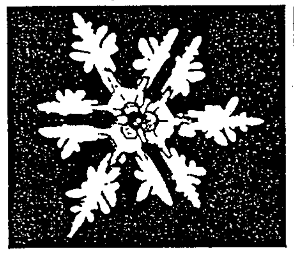
7 POTENCIA

¿Cuál es la última cifra del número:

7^{9999} ?

8 COPO DE NIEVE

Estructura hexagonal de un cristal de hielo.



9 CUATRO NUEVES

Expresa el número 20 empleando cuatro nueves.

9

Haz lo mismo con el número 100.

10 DIEZ CIFRAS

Encuentra un número de diez cifras que use todos los dígitos del 0 al 9 solo una vez y que tenga la propiedad de que su primer dígito sea divisible por 1, el número formado por los dos primeros sea divisible por 2, el formado por los tres primeros sea divisible por 3, y así sucesivamente hasta que el número con las diez cifras sea divisible por 10.

11 CONTINÚA

Continúa las series:

3600, 1800, 600, 150, ...

60°, 90°, 108°, 120°, ...

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

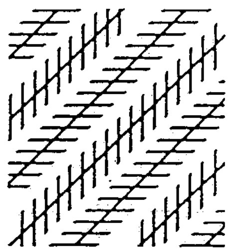
12 CALCETINES

En una caja hay 30 calcetines revueltos: 15 negros y 15 blancos. Necesitamos un par de ellos pero no hay luz.

¿Cuál es el mínimo número de calcetines que debemos sacar para estar seguros de haber sacado una pareja del mismo color?.

14 ILUSIÓN DE ZOLLNER

Las líneas oblicuas son paralelas aunque no lo parezcan.



15 PIZZAS

¿Qué crees que te resultará más rentable, comprar tres pizzas de 25 centímetros de diámetro a 600 pesetas cada una, o una de 50 centímetros de diámetro que cueste 1800 pesetas?

16 ANTENA PARABÓLICA

17 ENIGMA

El producto de dos números es 256. Su suma es el doble de 14 más 12. Los dos números están entre 5 y 50. La diferencia entre ellos es múltiplo de 2.

¿Cuáles son esos números?.

18 SIMETRÍA ESFÉRICA

19 AUTOBUSES

Un obrero trabaja en dos fábricas: A y B. Los autobuses que salen hacia A lo hacen a las horas exactas y los de B a la hora y cuarto. Si sale de casa al azar y toma el primero que llega. ¿Cuál es la probabilidad de que trabaje en A un día cualquiera?.

20 LOS MOCHUELOS

Cada mochuelo a su olivo y sobra un mochuelo.

En cada olivo dos mochuelos y sobra un olivo.

¿Cuántos mochuelos y olivos hay?

21 EL NENÚFAR

Sobre la superficie de un estanque se encuentra un nenúfar que cada día que pasa duplica su superficie. Si en ocho días cubre la totalidad del estanque. ¿Cuántos días hubiesen tardado en cubrirlo de haber plantado dos nenúfares en lugar de uno?.

22 CÁLCULO MENTAL

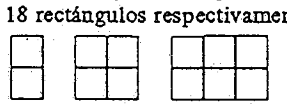
Calcula mentalmente el área de un triángulo cuyos lados miden 3, 4 y 5 centímetros.

23 REPARTO

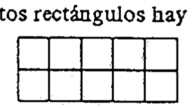
Un billete de lotería resultó premiado con 1.500.000 pesetas. Las repartieron entre dos amigos de forma que uno recibió 600.000 y el otro 900.000. Si el billete costó 5.000 pesetas, ¿cuánto puso cada uno?.

24 RECTÁNGULOS

En las siguientes figuras hay 3, 9 y 18 rectángulos respectivamente:



¿Cuántos rectángulos hay en:



25 MÁS RECTÁNGULOS

Si n es el número de columnas del rectángulo de cada figura formada como se indica en el problema anterior (siempre hay dos filas). Cuántos rectángulos hay contando los de todos los tamaños?.

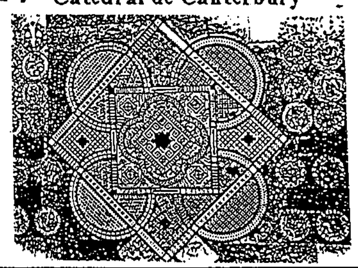
26 SUMAS MUSICALES

Cada letra representa un número que se verifica en las tres sumas:

$$\begin{array}{r} \text{DO} \\ +\,\text{RE} \\ \hline \text{MI} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{FA} \\ +\,\text{SI} \\ \hline \text{LA} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{RE} \\ \text{SI} \\ +\,\text{LA} \\ \hline \text{SOL} \end{array}$$

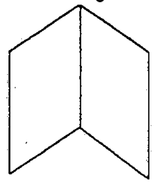
27 MOSAICO

Catedral de Canterbury



28 ESPEJOS

Colócate frente a dos espejos que formen ángulo recto. ¿Notas algo raro?

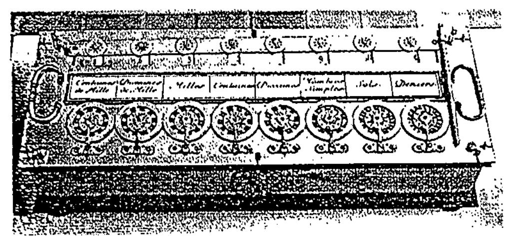


29 INVERSIÓN

¿Por qué los espejos invierten izquierda-derecha y en cambio no invierten arriba-abajo

30 LA MÁQUINA DE CALCULAR DE BLAISE PASCAL 31

Siglo XVII. Es uno de los primeros intentos de mecanizar el cálculo. Es una calculadora mecánica con palancas, tornillos, engranajes y ruedas dentadas.



Coordina: José Antonio Mora Sánchez. Centre de Professors d'Alacant. Avda. d'Aguilera, 1- 2ª - 03007-ALACANT

Centres de Professors i Societat d'Educació Matemàtica de la Comunidtat Valenciana

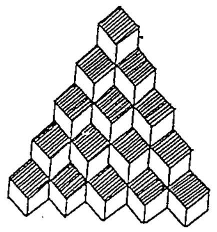
Març 94

Calendari Matemàtic

Dilluns | Dimarts | Dimecres | Dijous | Divendres | Dissabte | Diumenge

1 CUBS

En el racó d'una habitació hem amuntonat cubs de la mateixa mida.



¿Quants no s'hi veuen?

2 EL DOS

Investiga un procediment que te permitisca calcular amb rapidesa la quantitat de números naturals que contenen la xifra 2 entre 100 i el 200.

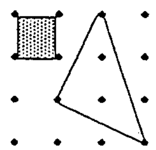
¿Quantes vegades trobarem la xifra 2 en els primers 1.000 números naturals?

3 SÍMBOL

Col·loca un símbol matemàtic conegut entre 2 i 3, amb la finalitat d'expressar un número major que 2 i menor que 3:

2 3

4 ÀREA



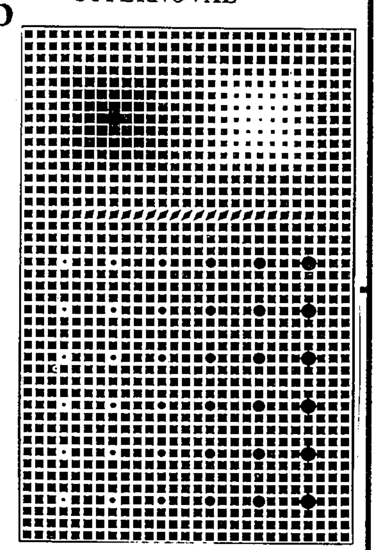
Calcula l'àrea (en unitats quadrades) de la regió triangular.

5 LA RASA

Cinc obrers caven en cinc hores cinc metres de rasa. ¿Quants obrers seran necessaris per a cavar en cent hores cent metres de rasa?.

5 ⟶ 100 ?

6 SUPERNOVAE



Victor Vasarely

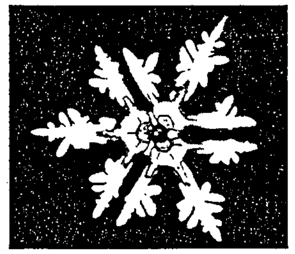
7 POTÈNCIA

¿Quina és l'última xifra del número:

7^{9999} ?

8 FLOC DE NEU

Estructura hexagonal d'un cristal de gel.



9 QUATRE NOUS

Expressa el número 20 emprant quatre nous.

9

Fes el mateix amb el número 100.

10 DEU XIFRES

Troba un número de deu xifres que use tots els dígits del 0 al 9 tan sols una vegada i que tinga la propietat de que el seu primer dígit siga divisible per 1, el número format pels dos primers ho siga per 2, el format pels tres primers, per 3, i així successivament fins que el número amb les deu xifres siga divisible per 10.

11 CONTINUA

Continua les sèries:

3600, 1800, 600, 150, ...

60°, 90°, 108°, 120°, ...

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

12 CALCETINS

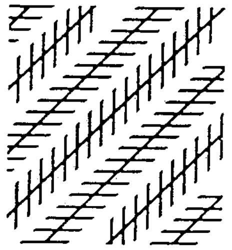
En una capsa hi ha 30 calcetins rebolicats i solts: 15 de negres i 15 de blancs. En necessitem un parell però no hi ha llum.

¿Quin és el mínim número de calcetins que haurem de traure per a estar segurs d'haver-ne tret una parella del mateix color?

13

14 IL·LUSIÓ DE ZOLLNER

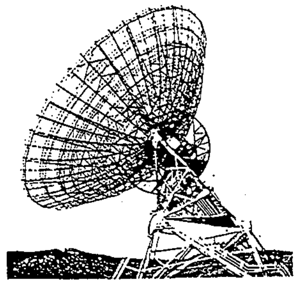
Les línies oblíqües són paral·leles encara que no ho parega.



15 PIZZES

¿Què creus que et resultarà més econòmic, comprar tres pizzes de 25 centímetres de diàmetre a 600 pessetes cadascuna, o una de 50 centímetres de diàmetre que coste 1.800 pessetes?

16 ANTENA PARABÒLICA

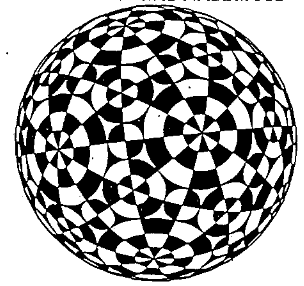


17 ENIGMA

El producte de dos números és 256. La seua suma és el doble de 14 més 12. Els dos números estan entre 5 i 50. La diferència entre ambdós és múltiple de 2.

¿Quins són eixos números?

18 SIMETRIA ESFÈRICA



19 AUTOBUSOS

Un obrer treballa en dues fàbriques: X i Y. Els autobusos que eixen cap a X ho fan a les hores exactes, i els de Y a l'hora i quart. Si ix de casa a l'atzar i pren el primer que arriba ¿quina és la probabilitat que treballe en X un dia qualsevol?

20 MUSSOLS

Cada mussol a la seua olivera i en sobra un.

En cada olivera dos mussols i en sobra una.

Quants mussols i oliveres hi ha?.

21 EL NENÚFAR

Sobre la superfície d'un estany es troba un nenúfar que cada dia que passa duplica la seua superfície. Si en vuit dies cobreix la totalitat de l'estany. ¿Quants dies s'haguera tardat en cobrir-lo d'haver plantat dos nenúfars en lloc d'un?.

22 CÀLCUL MENTAL

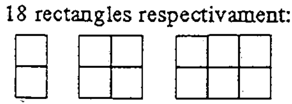
Calcula mentalment l'àrea d'un triangle els costats dels quals medeixen 3, 4 i 5 centímetres.

23 REPARTIMENT

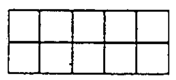
Un bitllet de loteria va resultar premiat amb 1.500.000 pessetes. Les van repartir entre dos amics de manera que un va rebre 600.000 i l'altre 900.000. Si el bitllet va costar 5.000 pessetes, ¿quant va posar cadascun?.

24 RECTANGLES

En les següents figures hi ha 3, 9 i 18 rectangles respectivament:



¿Quants rectangles hi ha en:



25 MÉS RECTANGLES

Si n és la quantitat de columnes del rectangle de cada figura formada com s'indica en el problema anterior (sempre n'hi ha dues files), ¿quants rectangles hi ha comptant-los de totes les mides?.

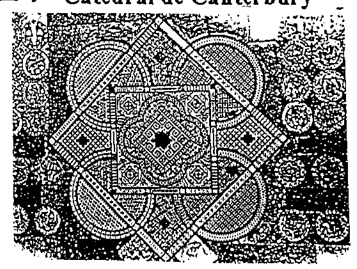
26 SUMES MUSICALS

Cada lletra representa un número que es verifica en les tres sumes:

$$\begin{array}{r} DO \\ +\,RE \\ \hline MI \end{array} \qquad \begin{array}{r} FA \\ +\,SI \\ \hline LA \end{array} \qquad \begin{array}{r} RE \\ SI \\ +\,LA \\ \hline SOL \end{array}$$

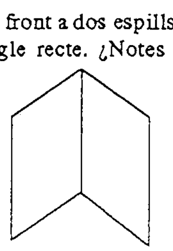
27 MOSAICO

Catedral de Canterbury



28 ESPILLS

Situat front a dos espills que formen un angle recte. ¿Notes quelcom estrany?

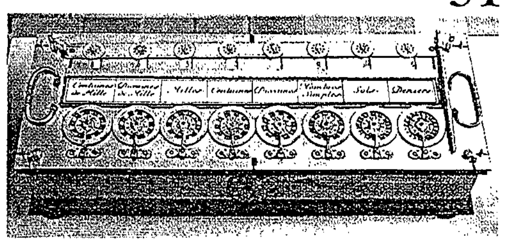


29 INVERSIÓ

¿Perquè els espills inverteixen esquerra-dreta i en canvi no inverteixen dalt-baix.

30 LA MÀQUINA DE CALCULAR DE BLAISE PASCAL **31**

Segle XVII. Es tracta d'un dels primers intents de mecanitzar el càlcul. És una calculadora mecànica amb palanques, caragols, engranatges i rodes dentades.



Coordina: José Antonio Mora Sánchez. Centre de Professors d'Alacant. Avda. d'Aguilera, 1- 2ª - 03007-ALACANT

Traducció: Daniel Climent i Leandre Iborra