

La fuerza y belleza de las imágenes debería usarse para entender la conexión entre la vida real y las matemáticas. Nos motiva estimular a nuestros alumnos en el análisis de las curvas y superficies de su entorno. En este artículo consolidamos diferentes definiciones y propiedades matemáticas aplicadas al estudio de la geometría específica del *arco carpanel* utilizando para ello técnicas tanto analíticas como sintéticas.

Palabras clave: Teoría, Geometría y Análisis, Figuras en el plano, Conceptos, Bachillerato y universidad.

Geometry of the basket-handle arch

The strength and beauty of images should be used to understand the connection between real life and mathematics. It is our motivation to stimulate our pupils to analyze the curves and surfaces they see in their environment. In this article, we consolidate different mathematical definitions and properties in the study of the specific geometry of the *basket-handle arch* using analytic and synthetic methods.

Key words: Theory, Geometry and analysis, Plane figures, Concepts, High school and University.

En el proceso de aprendizaje de la geometría analítica, resulta de gran motivación para el alumnado del Grado en Arquitectura la generación de elementos arquitectónicos mediante su representación gráfica en unos ejes cartesianos a través de un software informático. Así, en el estudio de las superficies, suele ser sugerente la recreación de cúpulas, bóvedas o cubiertas singulares de edificios; en el estudio de las curvas planas, encontramos en los diferentes tipos de arcos una fuente casi inagotable de ejemplos (Sánchez Sánchez, 2011). El *trazado* de dichos elementos arquitectónicos suele requerir, más allá del álgebra de las ecuaciones paramétricas necesarias para representarlos, el conocimiento de la geometría sintética inherente a los mismos y, en ocasiones, podemos hacer intervenir otras áreas como el Análisis Matemático. Entendemos que esta transversalidad en el estudio de un problema matemático supone para el estudiante un proceso de maduración significativo.

En este artículo, nos centramos en la exposición de los fundamentos de la geometría de un tipo de arco, el carpanel, en cuyo trazado pueden ponerse de manifiesto las consideraciones mencionadas anteriormente. A nuestro entender, de la exposición que sigue pueden extraerse ideas para la elaboración de una acción formativa que motive y fomente el tra-

bajo autónomo del alumnado, ambos objetivos claves en el marco en el que se encuentra actualmente la educación superior. De entre las destrezas y actitudes que pueden desarrollarse a través de dicha actividad formativa, destacamos las siguientes:

- identificar, analizar y describir aspectos espaciales de la realidad (en este caso, los arcos) mediante la geometría;
- manejar adecuadamente las ecuaciones paramétricas de curvas (en este caso, arcos de circunferencia) para su representación gráfica a través de un software informático;
- comprender el significado geométrico presente en el enlace armónico entre curvas (tangencias);
- comprender argumentaciones propias de la geometría sintética en las que están involucrados elementos geométricos notables (bisectriz de un ángulo, mediatriz de un segmento, incentro de un triángulo, ángulos central, inscrito y semiinscrito en circunferencias);
- conocer el lugar geométrico arco capaz de un segmento para un ángulo, deducir métodos de trazado del mismo en algunos casos particulares y valorar su utilidad en la resolución de problemas de geometría sintética;
- reflexionar sobre las ventajas e inconvenientes de los diferentes métodos para la identificación de los elementos de un arco, valorando la procedencia de utilizar técnicas de la geometría analítica o sintética (Ortega y Ortega, 2004);
- modelar y resolver un problema geométrico utilizando la optimización de funciones de una variable.

Generación de arcos como curvas planas

Sin duda alguna, el arco más conocido y posiblemente el más utilizado a lo largo de la Historia es el arco de medio punto, formado por una semicircunferencia (figura 1). En este caso, la luz (anchura máxima del arco) es el doble de la flecha (altura máxima del arco).

Cuando no hay suficiente espacio en la parte superior para la construcción del arco de medio punto, puede recurrirse al arco rebajado, formado por un

trozo de semicircunferencia en el cual la flecha b es menor que la semiluz a .

Denotamos por O el origen del sistema de referencia y por A y B los puntos de los ejes coordenados de modo que la semiluz $|OA| = a$ y la flecha $|OB| = b$, como se observa en la figura 2.

Conocidos a y b , el correspondiente arco rebajado queda perfectamente determinado y es fácil de trazar. Puesto que la circunferencia que lo contiene pasa por los puntos A y B , el centro C de la misma equidista de A y B y, por ello, está en la mediatriz del segmento AB . La simetría del arco respecto del eje de ordenadas permite afirmar que C es el punto intersección entre la mediatriz de AB y el eje de ordenadas (figura 3).

Una solución alternativa a la anterior es la semielipse de semiejes a y b . En dicho trazado, se *redondean los picos* que aparecen en el arco rebajado, si bien es cierto que presenta mayor complejidad desde el punto de vista constructivo. Por ello, en la mayoría de los casos, se recurre al arco carpanel o apainelado como opción alternativa al arco rebajado (figura 4).

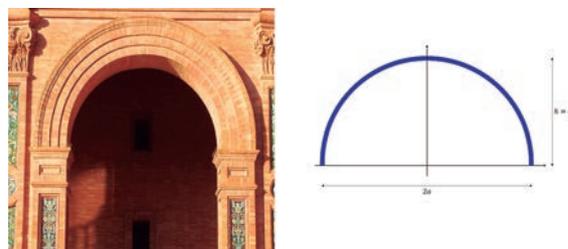


Figura 1. Arco de medio punto



Figura 2. Arco rebajado

El arco carpanel es precisamente la mitad superior de un óvalo, cuyo trazado incluye arcos de un número impar de circunferencias de centros distintos y con transiciones *suaves* (figura 5).

En lo que sigue se presentan algunos aspectos de la geometría del arco carpanel de tres centros. En primer lugar, se obtienen unas ecuaciones paramétricas de dicho tipo de arcos y además se describe un método sintético para el trazado del mismo. A continuación, a partir de un arco carpanel dado, se exponen un par de métodos

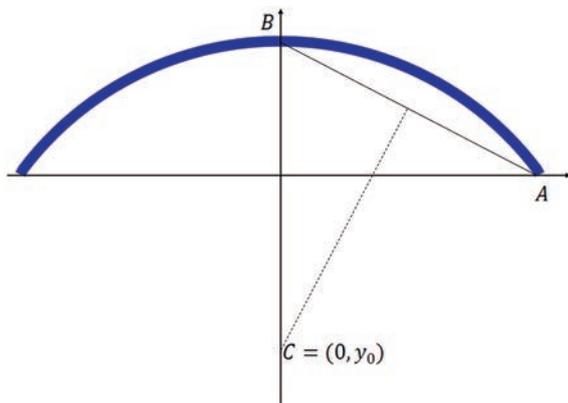


Figura 3. Arco rebajado



Figura 4. Arco carpanel

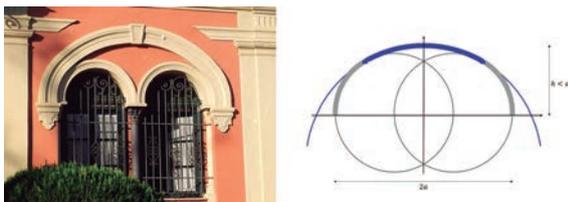


Figura 5. Arco carpanel de tres centros

para la obtención de los elementos del mismo (centros y radios de las circunferencias que lo componen así como sus puntos de enlace); cabe destacar el interés del segundo, basado en la descripción del lugar geométrico de los puntos de enlace de todos los arcos carpanel de semiluz y flecha fijadas. Finalmente, se utiliza la optimización de funciones de una variable para trazar el arco carpanel óptimo (aquel compuesto por circunferencias con curvaturas *parecidas*). En la justificación de todas las propiedades enunciadas se han combinado métodos propios tanto de la geometría analítica como sintética, en la búsqueda de facilitar las argumentaciones o introducir alguna herramienta matemática interesante. Debido a la simetría del arco carpanel, el estudio que sigue se realiza en el primer cuadrante.

Unas ecuaciones paramétricas del arco carpanel

En el arco carpanel, la clave para que la transición entre arcos correspondientes a circunferencias distintas sea adecuada reside en que las circunferencias lateral y central son tangentes entre sí en el punto de enlace. Puesto que en una circunferencia, la dirección tangente en un punto cualquiera de la misma es perpendicular al radio que pasa por dicho punto, se deduce que los centros C_1 y C_2 de las circunferencias y el punto de enlace (o tangencia) T están alineados.

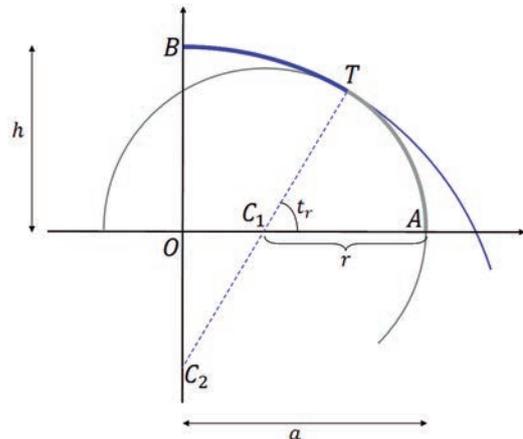


Figura 6. Arco carpanel de tres centros

Supongamos fijadas la semiluz a y la flecha $b < a$. A diferencia de lo que ocurre con el arco rebajado, ahora puede obtenerse toda una gama de arcos carpanel con dichos datos. En efecto, tomemos como parámetro el radio r de la circunferencia lateral; así, su centro es $C_1 = (a-r, 0)$. En cuanto al centro $C_2 = (0, y_r)$ de la circunferencia central, que está en el semieje de ordenadas negativo, se determina analíticamente teniendo en cuenta que dicha circunferencia pasa por B y T , luego $|BC_2| = |TC_2| = |TC_1| + |C_1C_2|$. Utilizando el teorema de Pitágoras en el triángulo OC_1C_2 para evaluar este último sumando, se llega a la igualdad

$$b - y_r = r + \sqrt{(a-r)^2 + y_r^2}$$

Despejando, resulta

$$y_r = \frac{b-a}{2} \left(1 + \frac{a-r}{b-r} \right) \quad [1]$$

El significado geométrico de r muestra que dicho parámetro es un valor positivo que no sobrepasa la flecha del arco. Por tanto, el rango de variación del parámetro r es el intervalo $(0, b)$. Esto queda corroborado, más aún si cabe, cuando se utiliza el siguiente método sintético para la construcción del arco carpanel a partir del radio r de la circunferencia lateral (figura 7): sobre el eje de ordenadas, consideramos el punto P del segmento OB de modo que $|BP| = r$. La mediatriz del segmento PC_1 corta al eje de ordenadas en un punto C_2 . Por construcción, el triángulo PC_2C_1 es isósceles, así como el triángulo BC_2T , donde T es el extremo del segmento que resulta de prolongar C_2C_1 una longitud r por C_1 . Basta tomar centro en C_2 y radio $|C_2B|$ para determinar la circunferencia central.

El caso $r=0$ corresponde al *arco rebajado*, que puede entenderse como un arco carpanel degenerado en el que la circunferencia lateral es un punto; el otro caso extremo, $r=b$, es un arco carpanel degenerado que puede entenderse como un *arco de medio punto* cuyo punto más alto se sustituye por un segmento rectilíneo (figura 8).

De hecho, volviendo al método analítico, se obtiene

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} y_r = \frac{b^2 - a^2}{2b}, \quad \lim_{r \rightarrow b^-} y_r = -\infty$$

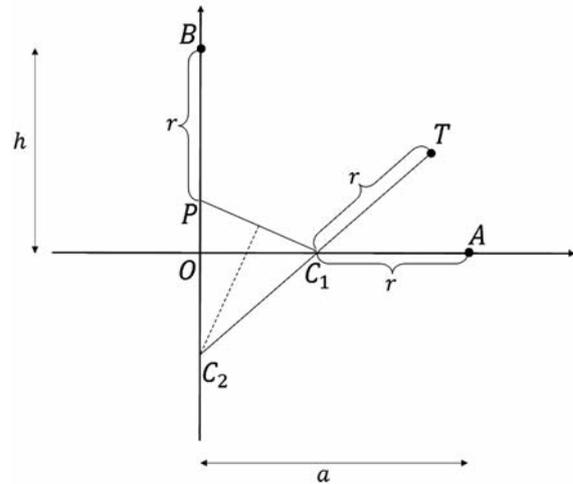


Figura 7



Figura 8. Arco carpanel degenerado ($r=b$)

Para precisar el ángulo t_r que permite obtener el rango de variación del parámetro en las ecuaciones paramétricas de las distintas circunferencias del arco carpanel, nos fijamos en el triángulo rectángulo C_1OC_2 (figura 6), de donde se obtiene

$$t_r = \arctg \left(-\frac{y_r}{a-r} \right)$$

(en todo el trabajo, los ángulos se medirán en radianes). En definitiva, fijadas la semiluz a y la flecha b , unas ecuaciones paramétricas del arco carpanel cuya circunferencia lateral tiene radio r son:

$$\begin{cases} x = (r-a) + r \cos t \\ y = r \operatorname{sent} \end{cases}; t \in [\pi - t_r, \pi]$$

Arco lateral izquierdo

$$\begin{cases} x = (b - y_r) \cos t \\ y = y_r + (b - y_r) \operatorname{sen} t \end{cases}; t \in [t_r, \pi - t_r]$$

Arco central

$$\begin{cases} x = (a - r) + r \cos t \\ y = r \operatorname{sen} t \end{cases}; t \in [0, t_r]$$

Arco lateral derecho

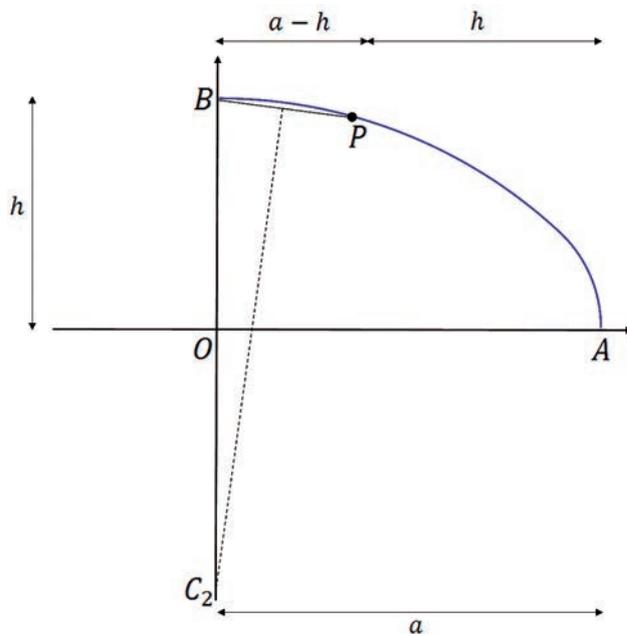


Figura 9

Identificación de los elementos de un arco carpanel trazado

El punto de partida es un arco carpanel no degenerado que habremos identificado y fotografiado previamente en nuestro entorno. Para poder trabajar con una aproximación de las posiciones de los puntos del arco, puede imprimirse dicha fotografía en papel milimetrado. Una vez determinadas las coordenadas de los puntos A y B (asociados a la semiluz a y la flecha h , respectivamente), el centro C_2 de la circunferencia central puede calcularse fácilmente: se considera un punto P del arco que esté en dicha circunferencia y C_2 se obtiene como intersección de la mediatriz del segmento BP con el eje de ordenadas (figura 9). Teniendo en cuenta que el radio de la circunferencia lateral varía en $(0, h)$, para garantizar que el punto considerado P está en la circunferencia central basta con que su abscisa sea menor que $a-h$. Una vez conocido C_2 , la igualdad [1] permite averiguar el radio r de la circunferencia lateral y, consecuentemente, su centro C_1 . Finalmente, el punto de enlace puede obtenerse bien de forma analítica (mediante las ecuaciones paramétricas del arco), o bien de forma sintética (como la intersección del arco carpanel con la recta que pasa por los centros).

En el procedimiento anterior, podemos evitar el uso de técnicas analíticas y obtener C_1 de igual modo que C_2 . Para ello,

debemos tomar un punto Q del arco carpanel en la circunferencia lateral y razonar de forma análoga. Sin embargo, la elección de dicho punto Q puede ser más delicada en ocasiones si se desconoce el punto de enlace (y, por tanto, qué tramo del arco corresponde a cada circunferencia).

Las principales virtudes del método anterior son, sin lugar a dudas, la sencillez y claridad para identificar los elementos del arco. Vemos a continuación otro método menos evidente para identificar los elementos de un arco carpanel trazado, pero que nos permite profundizar un poco más en el conocimiento de su geometría. Dados tres puntos P, Q y R , el ángulo delimitado por los segmentos PQ y QR se denotará por $\sphericalangle PQR$. Las propiedades sobre ángulos en la circunferencia pueden consultarse, por ejemplo, en (Nortes Checa, 1993).

Designamos por C el punto de coordenadas (a, h) . Obviamente, BC (respectivamente, AC) es tangente a la circunferencia central (respectivamente, lateral).

Veamos que $\sphericalangle ATB = 3\pi/4$ (como anteriormente, T designa el punto de enlace entre las circunferencias central y lateral). En la figura 10, obsérvese que

$$\sphericalangle ATB = \sphericalangle ATC_1 + \sphericalangle C_2TB \quad [2]$$

Vamos a expresar de otra forma cada uno de los sumandos que aparecen en la igualdad anterior. Denotemos por α el ángulo que forman el segmento BC y la cuerda BT . Dicho ángulo es *semiinscrito* en la circunferencia central pues su vértice está en dicha circunferencia, uno de sus lados es una cuerda y el otro es tangente. Puesto que todo ángulo semiinscrito en una circunferencia mide la mitad del ángulo central correspondiente al arco que abarca, se deduce que

$$\alpha = \frac{\angle BC_2T}{2} = \frac{\angle OC_2C_1}{2}$$

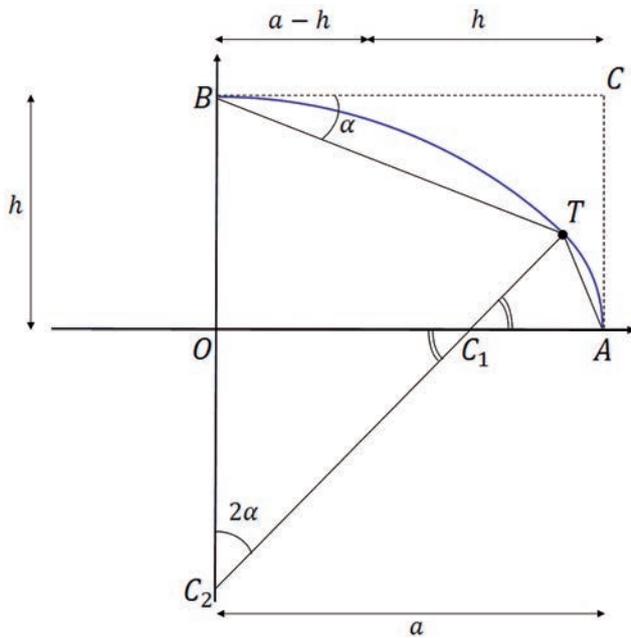


Figura 10

Por otra parte, el triángulo AC_1T es isósceles, luego

$$\begin{aligned} \angle ATC_1 &= \frac{\pi - \angle TC_1A}{2} = \frac{\pi - \angle OC_1C_2}{2} = \\ &= \frac{\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \angle OC_2C_1\right)}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\angle OC_2C_1}{2} = \frac{\pi}{4} + \alpha \end{aligned}$$

Para el otro sumando, tenemos

$$\angle C_2TB = \angle C_2BT = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

puesto que el triángulo BC_2T es isósceles. Sustituyendo en [2], se obtiene $\angle ATB = 3\pi/4$.

A la vista de lo anterior, concluimos que cualquier arco carpanel de semiluz $|OA| = a$ y flecha $|OB| = b$ tiene la propiedad siguiente: el ángulo con vértice en el punto de enlace y cuyos lados se apoyan en A y B mide $3\pi/4$. Utilizando un razonamiento de la misma naturaleza que el anterior, se comprueba que la propiedad recíproca es cierta, esto es, cualquier punto T interior al triángulo ABC tal que los segmentos TA y TB se cortan con ángulo $3\pi/4$ verifica que es punto de enlace de un arco carpanel de semiluz $|OA|$ y flecha $|OB|$.

La propiedad del párrafo anterior puede expresarse alternativamente utilizando la noción de *arco capaz*. Recordemos que el arco capaz de un segmento AB para un ángulo λ es el lugar geométrico de los puntos del plano desde los que dicho segmento se “ve” con ángulo λ ; es decir, el lugar geométrico de los puntos T tales que el ángulo $\angle BTA = \lambda$. En la figura 11, T_1 y T_2 están en el arco capaz del segmento AB para el ángulo λ .

Recordemos que un ángulo *inscrito* en una circunferencia es aquél cuyo vértice es un punto de la circunferencia y está delimitado por dos cuerdas de la misma. Es conocido que todo ángulo inscrito mide la mitad del (ángulo central correspondiente

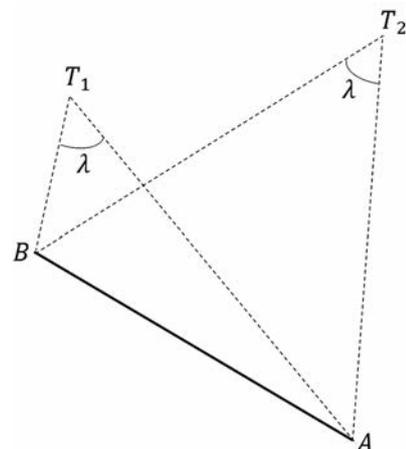


Figura 11

al) arco que abarca. De ello se deduce que el arco capaz de un segmento AB para un ángulo λ son dos arcos de circunferencia simétricos respecto del segmento, como se observa en la figura 12.

Según lo visto anteriormente, puede afirmarse que el lugar geométrico de los puntos de enlace de todos los arcos carpanel de semiluz $|OA|$ y flecha $|OB|$ es el trozo del arco capaz del segmento AB para el ángulo $3\pi/4$ interior al triángulo ABC . La figura 13 ilustra el hecho de que los centros V y W de las circunferencias que conforman el arco capaz para $\lambda=3\pi/4$ son vértices del cuadrado de diagonal AB .

Con la idea anterior en mente, es fácil proponer un método para identificar los elementos de un arco carpanel trazado utilizando exclusivamente técnicas de la geometría sintética. A partir de los segmentos OA y OB , se traza el vértice V del cuadrado de diagonal AB que queda por debajo del arco. La intersección de la circunferencia de centro V y radio $|VB|$

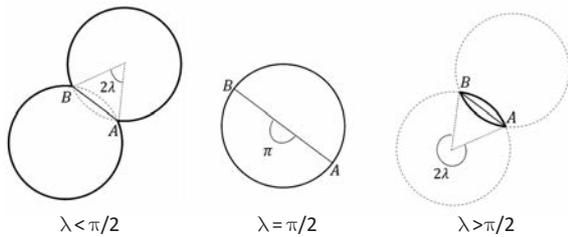


Figura 12. Arco capaz del segmento AB para el ángulo λ

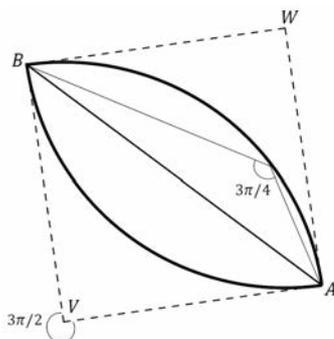


Figura 13

con el arco carpanel resulta ser el punto de enlace (figura 14). Conocido éste, podemos obtener los centros de la circunferencia central y lateral como se ha detallado al principio de este apartado.

Un sencillo cálculo muestra que

$$V = \left(\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2} \right) \text{ y } |VB| = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Es interesante observar que el incentro I del triángulo ABC es punto de enlace de un arco carpanel de semiluz OA y flecha OB . Para cerciorarse de esto, basta comprobar que el segmento AB se ve desde I con ángulo $3\pi/4$ (figura 15).

En efecto, designemos por β el ángulo $\sphericalangle BAC$. Fijándonos en los ángulos del triángulo IAB , tenemos

$$\hat{I} + \frac{\beta}{2} + \frac{\pi - \beta}{2} = \pi \Rightarrow \hat{I} = \frac{3\pi}{4}$$

Además, la recta que pasa por el incentro I y por los centros del correspondiente arco carpanel es

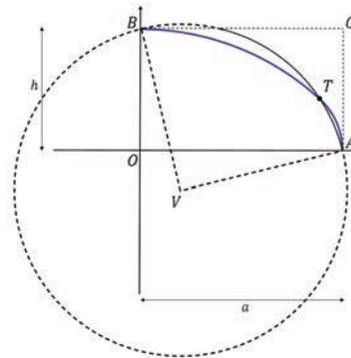


Figura 14

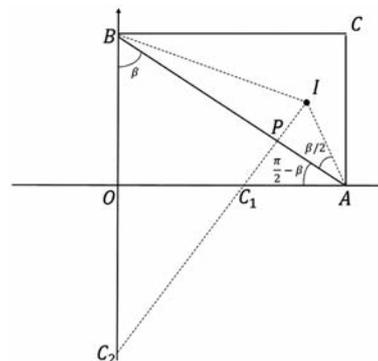


Figura 15

perpendicular a AB . Esto se debe a que, al ser IC_1A un triángulo isósceles, se deduce que

$$\sphericalangle C_1LA = \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}$$

en consecuencia, el triángulo IPA es rectángulo en P (véase la figura anterior). Un razonamiento de naturaleza parecida revela que el incentro de ABC es el único punto de enlace con dicha propiedad; esto es, si T es punto de enlace (distinto de I) de un determinado arco carpanel, entonces la recta que pasa por los respectivos centros del arco (y que también contiene a T) no es perpendicular a AB .

Arco carpanel óptimo

De todos los arcos carpanel que pueden trazarse fijadas la semiluz a y la flecha b , podría considerarse como más armonioso aquél en el que las curvaturas de los diferentes arcos que lo componen fuesen *más parecidas*. En este sentido, se denomina *arco carpanel óptimo* a aquél en el que la razón entre las curvaturas de la circunferencia lateral y de la circunferencia central es más próxima a 1. Teniendo en cuenta que la curvatura de una circunferencia es constante e igual al inverso de su radio, la función

$$f(r) = \frac{\frac{1}{r}}{\frac{1}{b-y_r}} = \frac{b-y_r}{r} = \frac{a^2+b^2-2ar}{2r(b-r)}, \quad r \in (0, b)$$

designa la razón antes mencionada. Puesto que el radio de la circunferencia central es siempre mayor que el de la lateral, es evidente que $f(r) > 1$; así pues, para obtener el radio de la circunferencia lateral correspondiente al arco carpanel óptimo, vamos a calcular el mínimo absoluto de f en $(0, b)$. Puesto que es derivable en dicho intervalo y

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r) = \lim_{r \rightarrow b^-} f(r) = +\infty$$

el mínimo está en un punto de derivada nula. Se cumple

$$f'(r) = \frac{-1}{2r^2(b-r)^2} (2ar^2 - 2(a^2+b^2)r + b(a^2+b^2))$$

Por tanto, resolviendo la ecuación $2ar^2 - 2(a^2+b^2)r + b(a^2+b^2) = 0$ obtenemos los puntos críticos de f .

Resulta

$$r_1 = \frac{a^2+b^2+(a-b)\sqrt{a^2+b^2}}{2a}$$

$$r_2 = \frac{a^2+b^2-(a-b)\sqrt{a^2+b^2}}{2a}$$

Ahora bien,

— Puesto que $\sqrt{a^2+b^2} > b$, tenemos

$$r_1 > \frac{a^2+b^2+(a-b)b}{2a} = \frac{a+b}{2} > b$$

Por consiguiente, el valor r_1 se sale del rango de búsqueda.

— Puesto que $a-b < \sqrt{a^2+b^2}$, tenemos, por una parte

$$r_2 > \frac{a^2+b^2-\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2}}{2a} = 0$$

por otro lado

$$r_2 < \frac{a^2+b^2-(a-b)(a-b)}{2a} = b$$

Se concluye que r_2 es el único valor en $(0, b)$ que anula la derivada de f , por tanto, el valor en el que f alcanza su mínimo absoluto en $(0, b)$.

Uno de los aspectos más interesantes del arco carpanel óptimo de semiluz $|OA|$ y flecha $|OB|$ es que el punto de enlace T_{opt} es precisamente el incentro del triángulo ABC . Teniendo presente las consideraciones del final del apartado anterior, esto queda perfectamente justificado si se comprueba que la recta que une los respectivos centros $C_{1\text{opt}}$ y $C_{2\text{opt}}$ (y que también contiene a T_{opt}) es perpendicular a AB . Tenemos

$$C_{1\text{opt}} = (a-r_2, 0) = \left(\frac{a-b}{2a}(a+b+\sqrt{a^2+b^2}), 0\right)$$

$$C_{2\text{opt}} = (0, y_{r_2}) = \left(0, (a-b)\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a-b-\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

y se cumple que el producto escalar entre (un vector paralelo a) $C_{1\text{opt}}C_{2\text{opt}}$ y AB es nulo, es decir,

$$\left(\frac{-1}{2a}(a+b+\sqrt{a^2+b^2}), \frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a-b-\sqrt{a^2+b^2}}\right) \cdot (a, -b) = 0$$

Conclusión

Resulta evidente la presencia de las Matemáticas en el Arte y la Arquitectura. Precisamente, el trazado y estudio de ciertos elementos arquitectónicos como el arco carpanel no sólo favorecen la identificación y descripción de aspectos espaciales de nuestro entorno, sino que además pueden servir como punto de partida para el planteamiento de problemas matemáticos cuya resolución necesite de la intervención de áreas como la Geometría o el Análisis Matemático. Además de la adquisición por parte del alumnado de los conceptos y procedimientos propios de tales áreas, dicho estudio permite mos-

trar cómo un problema puede ser abordado desde enfoques diferentes: en nuestro caso, desde la perspectiva de la geometría analítica, propia de la Matemática; desde la perspectiva de la geometría sintética, propia del Dibujo; o incluso, conjugando ambos enfoques y propiciando así una actividad a desarrollar conjuntamente entre los departamentos responsables.

Referencias bibliográficas

- NORTES, A. (1993), *Matemáticas y su didáctica*, tema-DM, Madrid.
- ORTEGA, I., y T. ORTEGA (2004), «Los diez problemas de Apolonio», *Suma*, n.º 46, 59-70.
- SÁNCHEZ, N. (2011), *Geometría de los arcos*, Región de Murcia, Consejería de Educación, Formación y Empleo.

ENCARNACIÓN ABAJO CASADO

Departamento de Matemática Aplicada I (Universidad de Sevilla)
Escuela Técnica Superior Arquitectura
<cabajo@us.es>

JUAN MANUEL DELGADO SÁNCHEZ

Departamento de Matemática Aplicada I (Universidad de Sevilla)
Escuela Técnica Superior Arquitectura
<jmdelga@us.es>