

SUMA

REVISTA SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE
DE LAS MATEMATICAS

n.º 35

NOVIEMBRE
2000

Directores

Emilio Palacián Gil
Julio Sancho Rocher

Administrador

José Javier Pola Gracia

Consejo de redacción

Jesús Antolín Sancho
Eva Cid Castro
Bienvenido Cuartero Ruiz
Faustino Navarro Cirugeda
Rosa Pérez García
Daniel Sierra Ruiz

Consejo Editorial

José Luis Aguiar Benítez
Javier Brihuega Nieto
M.^a Dolores Eraso Erro
Ricardo Luengo González
Luis Puig Espinosa

Edita

Federación Española de Sociedades
de Profesores de Matemáticas

Diseño portada

José Luis Cano

Diseño interior

Concha Relancio y M.^a José Lisa

Maquetación

E. Palacián, J. Sancho, D. Sierra

Revista SUMA

ICE Universidad de Zaragoza
C. Pedro Cerbuna, 12
50009-ZARAGOZA

Tirada: 6.500 ejemplares
Depósito Legal: Gr. 752-1988
ISSN: 1130-488X

Impresión: INO Reproducciones. Zaragoza

3

EDITORIAL

ARTÍCULOS

- 5** Calados canarios y matemáticas.
Luis Balbuena Castellano, Dolores de la Coba García y Emma García Mora
- 15** Algoritmos genéticos: la evolución como modelo matemático.
Raúl Corzo Suárez y Francisco Javier Paredes Olay
- 21** Sobre Matemática y Ciencia Aplicadas.
José M. González Rodríguez
- 27** ¿Por qué seguir anclados en Egipto?
Carlos Usón Villalba y Ángel Ramírez Martínez
- 35** El aprendizaje de estrategias de resolución de problemas con una hoja de cálculo.
Manoli Pifarré Turmo y Jaume Sanuy Burgués
- 45** Una propuesta metodológica para la enseñanza de la Geometría a través de los fractales.
Lourdes Figueiras, María Molero, Adela Salvador y Nieves Zuasti
- 55** ¿Para qué enseñar fórmulas pudiendo enseñar procedimientos? Una propuesta didáctica para el tratamiento de la Probabilidad en Bachillerato.
Santiago E. Gómez Hernández

IDEAS Y RECURSOS

- 63** El algoritmo de la raíz cuadrada. Dos tipos distintos de aproximación heurística.
Guido Ramellini
- 71** Algunas demostraciones del valor de la potencia de un punto con respecto a una circunferencia.
Juan Ricardo Escribano Rivero

MISCELÁNEA

- 75 Reflexiones sobre el diseño de las «taulas» de Menorca y su relación con el mundo pitagórico.
Vicente Ibañez Orts
- 87 Etimología de algunos términos matemáticos.
Esteban Serrano Marugán

RINCONES

- 97 Taller de problemas: El problema isoperimétrico en el Islam Medieval.
Grupo Construir las Matemáticas
- 101 Mates y medios: La ONCE: un número.
Fernando Corbalán
- 103 Juegos: Rompecabezas de aviones.
Grupo Alquerque
- 105 Recursos en Internet: Matemáticas... ¿menos serias?
Antonio Pérez Sanz
- 109 Desde la Historia: Unos siglos que cambiaron el mundo (y II).
Ángel Ramírez Martínez y Carlos Usón Villalba

RECENSIONES

Sigma. El mundo de las Matemáticas (J. R. Newman). Hacia una filosofía de la Educación Matemática crítica (O. Skovsmose). El tío Petros y la conjetura de Goldbach (A. Doxiadis). El teorema del loro (D. Guedj).

CRÓNICAS

XI Olimpiada Matemática Nacional de la FESPM. Pero... ¿esto son matemáticas? Tríptico de la Federación. Seminario de La Gomera: Las Matemáticas en la Educación Obligatoria: propuestas de futuro.

CONVOCATORIAS

X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM). IV Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (IV CIBEM). Congreso Nacional de Didácticas Específicas: las Didácticas de las Áreas Curriculares en el Siglo XXI. 15.^a Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 15). Galileo 2001. 53 CIEAEM.

Las ilustraciones de este número corresponden a las fotografías realizadas por los participantes en la Prueba Fotográfica de la X Olimpiada Matemática Nacional.

Asesores

Pilar Acosta Sosa
Claudi Aguadé Bruix
Alberto Aizpún López
José Luis Álvarez García
Carmen Azcárate Giménez
Manuel Luis de Armas Cruz
Antonio Bermejo Fuentes
Javier Bergasa Liberal
María Pilar Cancio León
Mercedes Casals Colldecarrera
Abilio Corchete González
Juan Carlos Cortés López
Carlos Duque Gómez
Francisco L. Esteban Arias
Francisco Javier Fernández
José María Gairín Sallán
Juan Gallardo Calderón
José Vicente García Sestafe
Horacio Gutiérrez Fernández
Fernando Hernández Guarch
Eduardo Lacasta Zabalza
Andrés Marcos García
Ángel Marín Martínez
Félix Matute Cañas
Onofre Monzo del Olmo
José A. Mora Sánchez
María José Oliveira González
Tomás Ortega del Rincón
Pascual Pérez Cuenca
Rafael Pérez Gómez
Antonio Pérez Sanz
Ana Pola Gracia
Ismael Roldán Castro
Modesto Sierra Vázquez
Vicent Teruel Martí
Carlos Usón Villalba

SUMA

no se identifica necesariamente
con las opiniones vertidas
en las colaboraciones firmadas

Ante la reforma de la reforma

AÚN NO HABÍAMOS OLVIDADO el enorme revuelo que se levantó en la pasada legislatura con la llamada Reforma de las Humanidades, que intentara promover la ministra Esperanza Aguirre, con el apoyo de ciertos sectores de las áreas clásicas, cuando de nuevo nos sorprenden con nuevos planes de reforma de la reforma, de los que nos hemos ido enterando a cuentagotas a través de los medios de comunicación. Por lo que hemos podido ver, la reforma que ahora se propone, en sus diversas fases, es bastante más importante de lo que se esperaba. En lo que se refiere a las Matemáticas, los cambios que se plantean hacen referencia a la carga horaria en la ESO, aunque sólo en el primer ciclo, y a los contenidos de toda la Educación Secundaria.

Sin embargo, con la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), una organización que integra a diecisiete sociedades y a más de 5000 profesores y profesoras de toda España, nadie ha contado en todo este proceso. Y no es porque no nos hayamos dirigido al Ministerio ofreciendo nuestra colaboración: hace escasos días lo hemos hecho por enésima vez.

Por otro lado, resulta paradójico que la FESPM, en el marco de los convenios de colaboración con el MEC, haya desarrollado varias actividades que han tenido por objeto, precisamente, el análisis y valoración de los planes de estudio vigentes. Los seminarios de Jaca, El Escorial, Granada y La Gomera son los más claros ejemplos de ello, aunque no debemos olvidar otras muchas actividades de las sociedades en las que este tema también ha estado presente. El rigor con el que se llevan a cabo estos seminarios, con un trabajo previo de todas las sociedades y un encuentro final entre representantes cualificados de todas ellas, es razón suficiente para que sus conclusiones merezcan la máxima consideración.

Estas conclusiones sugerían medidas urgentes e importantes para la mejora de la enseñanza de las Matemáticas. Propuestas como el aumento del número de horas de clase en la ESO, la mejora de las dotaciones de los centros, establecer una mejor coordinación con la Universidad o poner en marcha medidas que faciliten el tratamiento de la diversidad del alumnado, entre otras, se hicieron llegar en su momento a las autoridades educativas, tanto del MEC como de las comunidades con competencias educativas. No obstante, no tenemos constancia alguna de la consideración de nuestras propuestas en los planes de reforma que se tienen en marcha. Por el contrario, lo que conocemos parece confirmar que avanzamos en sentidos casi opuestos. Nosotros, en definitiva, no pedíamos más contenidos, sino poder enseñar mejor los que ya tenemos.

Aunque los cambios que nos proponen exigen un análisis amplio y riguroso por parte de nuestra Federación, que incluiremos en el próximo número de la revista, me gustaría adelantar ya algunos aspectos especialmente preocupantes.

Con el pretexto de una formulación más rigurosa de objetivos y contenidos por cursos, los asesores ministeriales no han elaborado un nuevo currículo; se han limitado a hacer una declaración programática de contenidos conceptuales, sin ninguna referencia a contenidos procedimentales y de actitudes. No hay ninguna alusión, tampoco, a aspectos metodológicos ni a los principios pedagógicos que inspiran los cambios propuestos. La ampliación del horario se contempla en el primer ciclo de la ESO, pero no en el segundo ciclo, en el que incluso se amplían los contenidos, incorporando en cuarto curso algunos que en la actualidad se impartían en bachillerato.

Es difícil predecir qué matemáticas necesitará el ciudadano del siglo XXI, pero lo que sí es seguro es que la respuesta no está en el pasado. Los programas de matemáticas de los años setenta, a los que tanto se parecen las propuestas de esta reforma, han producido varias generaciones de incultos matemáticos, de gente que al terminar el antiguo BUP es incapaz de descifrar su nómina, o de personas que abiertamente declaran su «odio» a las matemáticas.

En definitiva, la reforma que se propone es anticuada, inabarcable y, por ello, muy probablemente resulte ineficaz. La educación matemática no puede ser tratada como una mercancía política: el futuro y el desarrollo de nuestro país depende en una gran medida de una buena educación matemática. Por eso, desde la experiencia que nos proporciona la práctica diaria de miles de profesores en sus aulas reiteramos nuestro ofrecimiento a la Sra. Ministra y a las autoridades educativas de los distintos niveles para colaborar en la enmienda, corrección y desarrollo racional y positivo de la Reforma de las Matemáticas.

José Luis Álvarez García

Secretario General de la FESPM

Calados canarios y matemáticas

**Luis Balbuena Castellano
Dolores de la Coba García
Emma García Mora**

*Las formas que mejor
expresan la belleza
son el orden,
la simetría,
la precisión.*

Aristóteles
(384-322 a.C.)

Se describe una experiencia de investigación en el aula, realizada en un Taller de Matemáticas, con el propósito de localizar aspectos matemáticos en general, y geométricos en particular, en los calados artesanales canarios.

* Patricia Cintas Lobato, Silvia Cintas Lobato, Dácil Díaz Amador, Diana García González, Eva García Llorente, Julia González González, Dalia Hernández de la Rosa, Elena Romero Sánchez

EL TRABAJO que presentamos es un resumen de una experiencia pedagógica realizada por los firmantes y un grupo de ocho alumnas* del Taller para Re-crear Matemáticas del IES «Viera y Clavijo» (La Laguna, Tenerife, Canarias).

Los calados constituyen un importante capítulo de la artesanía canaria. Es una larga tradición que, como tal, se ha venido transmitiendo de generación en generación llegando hasta nosotros, afortunadamente, con una gran vitalidad. En efecto, por una parte existe un amplio conjunto de caladoras que mantienen viva la tradición y, de otra parte, en los últimos años ha aumentado considerablemente la sensibilidad de las autoridades e instituciones hacia todo lo que suponga nuestro acervo tradicional y, en particular, hacia los calados.

Este material artesanal (figura 1) es el que ha centrado el trabajo del presente artículo. Pero hemos de aclarar que nuestro objetivo no ha consistido en hacer un catálogo de los distintos modelos de calados existentes, ni una relación de las caladoras que se dedican a esta noble y admirable labor.

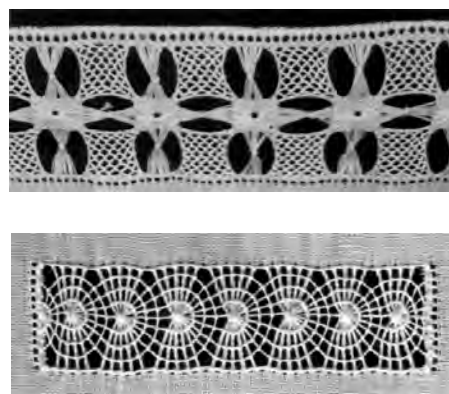


Figura 1. Dos modelos de calados canarios



Figura 2. Tomando buena nota

Nuestro estudio y nuestras investigaciones se han orientado hacia la localización de cuanta matemática en general, y geometría en particular, pueda encontrarse tras esos bellos trabajos. Hecha esta aclaración, hemos de indicar que, no obstante, tuvimos que visitar a muchas caladoras (figura 2) y acudir a cuantas ferias de artesanía se realizaban en distintos lugares, siempre en busca de más y más modelos de módulos diferentes tratando de analizarlos todos y de clasificarlos según criterios geométricos. En este sentido y no contando aquellos modelos cuyas diferencias con otros son insignificantes, hemos localizado y estudiado 55 módulos diferentes.

El trabajo de campo para la recopilación de documentación fue largo e intenso y además tiene la particularidad de que no se puede dar por acabado ya que en cualquier lugar pueden aparecer modelos nuevos.

Al mismo tiempo que se realizaba el trabajo de campo, se explicaba a las alumnas los fundamentos de geometría que nos permitirían estudiar matemáticamente este material (isometrías, isomorfismos, rosetones, frisos). Se trata de conceptos geométricos muy intuitivos y de presencia habitual en la vida cotidiana, que no requieren una sólida formación matemática para poder ser entendidos.

Una vez localizados los modelos de calados, se procedió a su clasificación y se encargó a las caladoras que realizaran muestras incluyendo aquellos modelos que nos parecieron más significativos.

*Nos propusimos
conocer
si en los calados
que hacen
nuestras
artesanas,
aparecen
los siete frisos
que es posible
construir tal y
como explican
los distintos
algoritmos
que ayuda
y orientan en
la clasificación.*

Poco a poco, fuimos penetrando en el peculiar mundo de las caladoras, en la metodología de su trabajo, en cómo organizan sus casas o sus talleres para poder colocar los utensilios que les permiten elaborar sus calados, en cuáles son las dificultades y competencias –generalmente desleales– con las que tienen que luchar. Conocimos que existe un apoyo institucional que les ayuda a organizarse y sacar mayor rendimiento a su trabajo. Toda esa información y todo el trasfondo humano que hay detrás de cada calado lo pudimos compaginar con nuestro estudio, aparentemente frío y distante, sobre la matemática que subyace en cada calado.

Nos propusimos conocer si en los calados que hacen nuestras artesanas, aparecen los siete frisos que es posible construir tal y como explican los distintos algoritmos que ayudan y orientan en la clasificación. Ello nos obligó a rastrear los distintos modelos, incluso algunos que ya no se suelen hacer y que algunas caladoras guardan celosamente como herencia de su madre o de su abuela.

Desde el punto de vista didáctico, presentamos también un conjunto de actividades complementarias al trabajo explicado. Entendemos que se trata de una investigación adaptada perfectamente al nivel académico de las alumnas participantes. Pero sobre todo, destacamos lo formativo que puede representar el haber realizado un trabajo de estas características por lo que supone de transferencia para otros similares.

Entre los elementos complementarios se encuentra una colección de 14 murales explicativos y sintetizadores de todo el trabajo, elaborados con una finalidad estrictamente didáctica. A ellos se añaden 30 calados diferentes enmarcados en otros tantos cuadros, así como un juego de dominó (figura 3) cuyos motivos son módulos de calados y un juego memory de 20 parejas.

Fueron preparados y pensados para ser expuestos en centros educativos y culturales de forma que la persona que los mire con atención e interés pueda, por un lado, conocer la enorme riqueza esté-

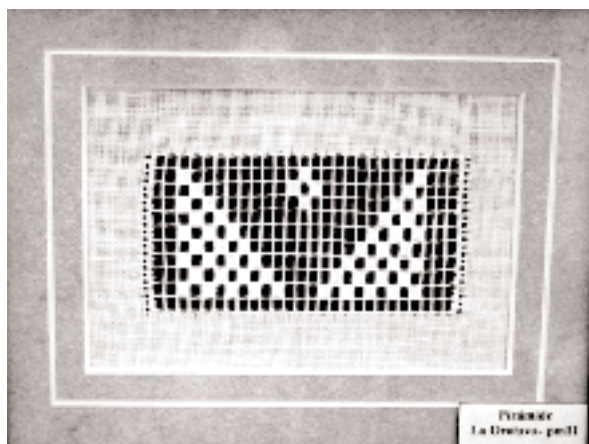


Figura 3.
Dominó de calados

tica de los calados y, por otro, aprender la gran carga matemática que hay detrás de los distintos modelos. El primer objetivo entendemos que se logra con los cuadros, pues contienen modelos significativos de calados elaborados por las artesanas especialmente para este trabajo. El segundo objetivo se consigue con los murales que recogen una síntesis de los conceptos y los algoritmos así como una explicación pormenorizada de las distintas ideas geométricas de cada modelo.

En definitiva, los conceptos e ideas matemáticas que se exponen en este trabajo, tienen modelos en el mundo cotidiano (figura 4). Lo único que hemos hecho, desde el punto de vista matemático, es organizar los conceptos, darles coherencia, rigor y nombres. Las ideas las tiene cualquier persona que conozca o esté familiarizada con los calados u otros materiales parecidos. Ésta ha sido una de las grandes lecciones: las caladoras que posiblemente oían hablar por primera vez de estos conceptos matemáticos, los entendían perfectamente.

Figura 4.
Cuadro con calado



Fundamentación matemática

Exponemos a continuación, de manera sucinta, las ideas matemáticas que explicamos para realizar el estudio.

— La *simetría* forma parte de nuestra cultura. La frase de Aristóteles que preside este trabajo, deja bien claro que se trata de algo íntimamente relacionado con la belleza. La simetría, en sentido amplio, incluye también nociones de equilibrio, semejanza y repetición. Se trata de un elemento estético profusamente utilizado en las obras humanas (anagramas, fachadas de edificios, distribución de objetos en un escaparate, diseños de las alcantarillas o de las carrocerías de los coches, etc.). Sin embargo, la simetría, «en estado puro» no es abundante en la naturaleza, y esto es interesante hacerlo ver, pues el hombre ha hecho una abstracción de algo que raramente ve en su entorno natural. A veces hacemos alusión a la simetría de hojas de árboles o de las alas de las mariposas pero, si las observamos con atención, comprobaremos que siempre hay «un algo» que elimina la simetría perfecta. En tal sentido, se podría tal vez establecer un índice de simetría que midiera de 0 a 1 hasta qué punto presenta simetría un determinado elemento.

— Las *isometrías* en el plano (movimientos que mantienen las distancias en la figura a la que se aplican), son sencillas de inducir. Se tienen cuando la figura:

- Se traslada de un lugar a otro.
- Se gira respecto de un determinado centro de giro.
- Es sometida a una simetría a lo largo de un eje.
- Es sometida a una simetría y después se traslada.

Estas son las cuatro únicas posibilidades de movimiento en un plano siempre que, como se ha indicado, se quiera conseguir que la forma y el tamaño de la figura permanezcan rígidos.

La isometría d) es la más difícil de inducir y, sin embargo, existen imágenes que permiten asimilarla con gran facilidad. Por ejemplo, las huellas que nuestros pies dejan en la arena de una playa cuando caminamos en línea recta (figura 5).



Figura 5. Isometría de verano

— Los *isomorfismos*, también en el plano (movimiento que conserva la forma del objeto), son específicos de cada figura y tampoco resulta complicado inducirlos en los alumnos.

Tanto la identidad como el giro de 360° en torno al centro tienen la propiedad de que todos los puntos de la figura quedan en el mismo lugar. Sin embargo, hay isomorfismos que cambian de lugar los puntos del módulo manteniendo éste su forma al final del movimiento. En la figura 6 se muestran los isomorfismos de un módulo. Se trata de:

- Un giro de 180° con centro en el punto O, (centro del módulo).
- Una simetría de eje r_1 .
- Una simetría de eje r_2 .

A partir de los elementos anteriores, y dependiendo de factores tales como el nivel de los alumnos, el tiempo disponible, etc., se tiene la oportunidad de entrar en un mundo matemático que atrae y «atrapa» a algunos alumnos con especial inclinación hacia las matemáticas. Se trata de empezar formalizando cada movimiento estudiado, pasar a la composición de movimientos, construir la tabla de todas las composiciones posibles, entrar en la estructura

$$I = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & D \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix}$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}$$

O	I	G	S₁	S₂
I	I	G	S ₁	S ₂
G	G	I	S ₂	S ₁
S₁	S ₁	S ₂	I	G
S₂	S ₂	S ₁	G	I

Figura 7. Grupo de isomorfismos del módulo de la figura 6

de grupo,... el vuelo puede llegar tan alto como se quiera.

Con lo estudiado se está ya en disposición de construir los siete grupos de frios que presentamos en el cuadro algoritmo de la página siguiente con la notación correspondiente.

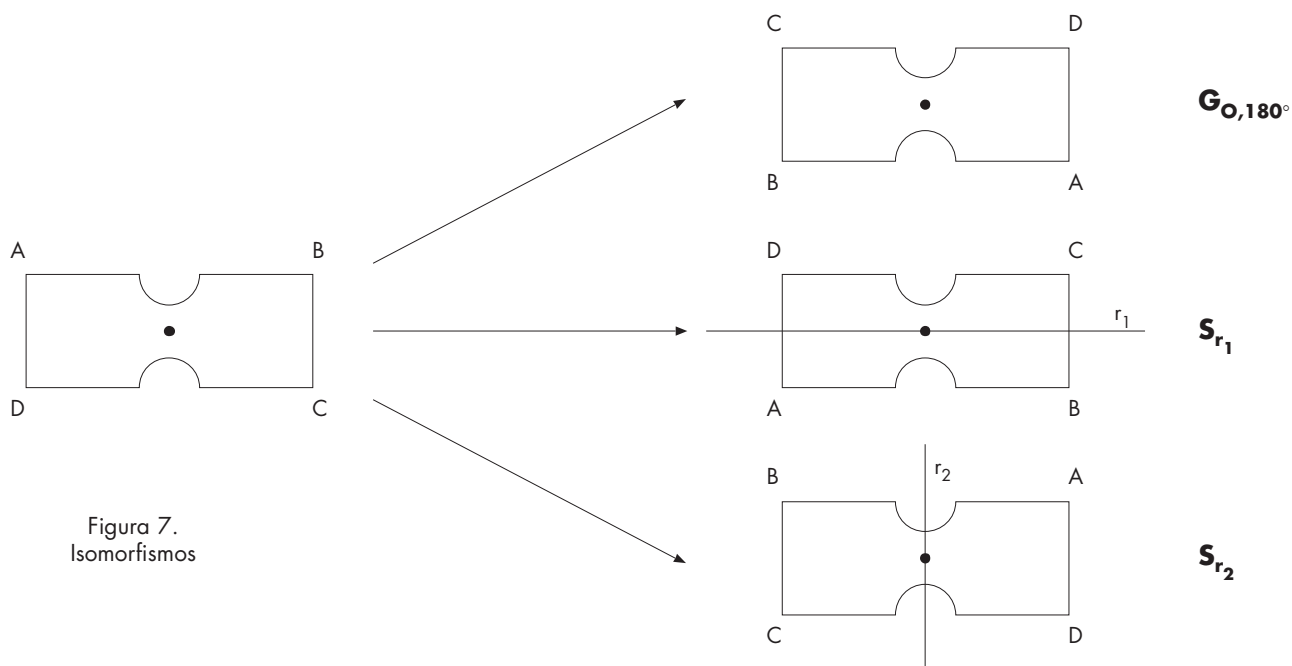
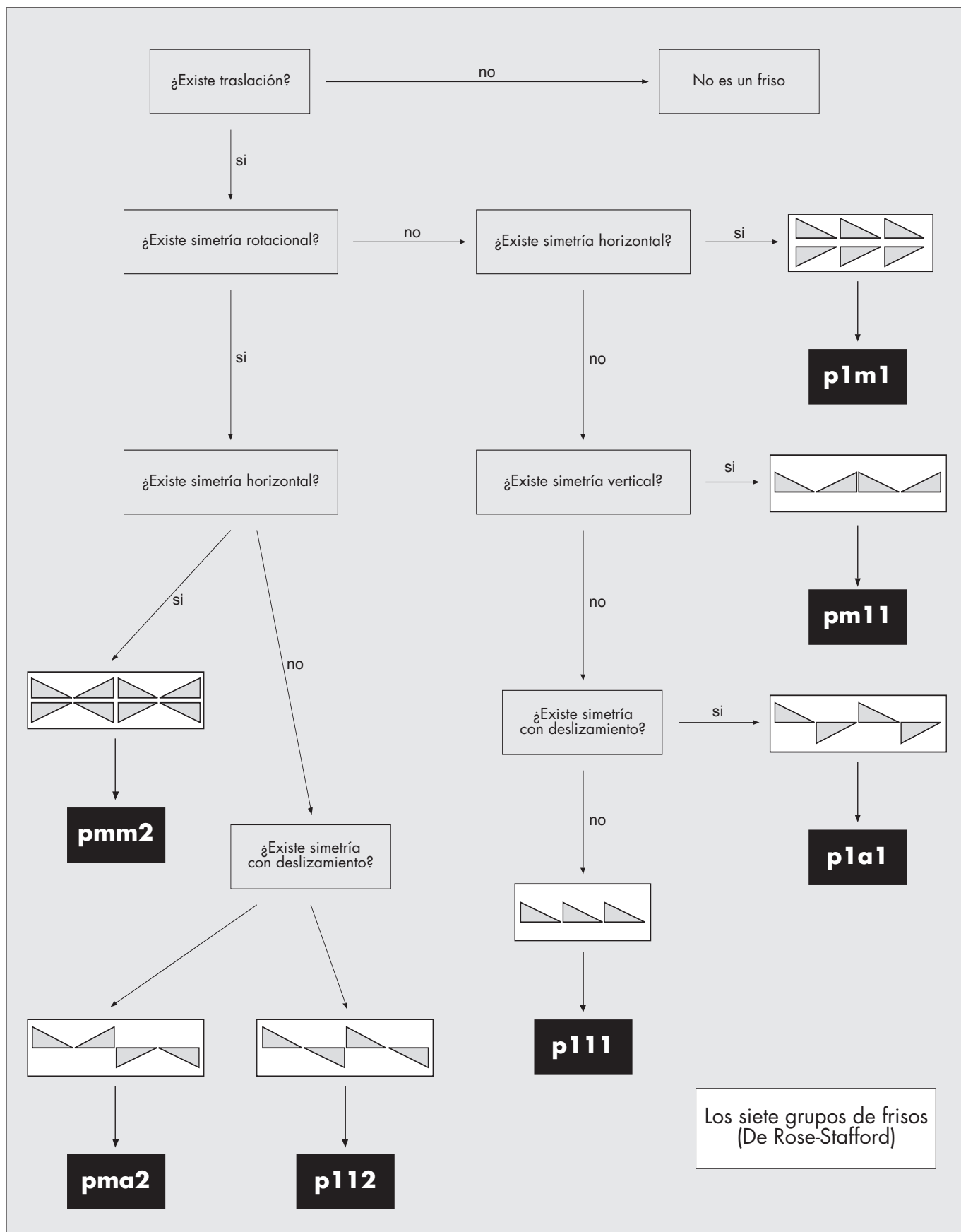


Figura 7. Isomorfismos



— En los calados es normal encontrar *rosetones*. Se suelen utilizar, sobre todo, para resolver las esquinas en piezas tales como pañuelos, manteles, colchas, etc. (figura 8).

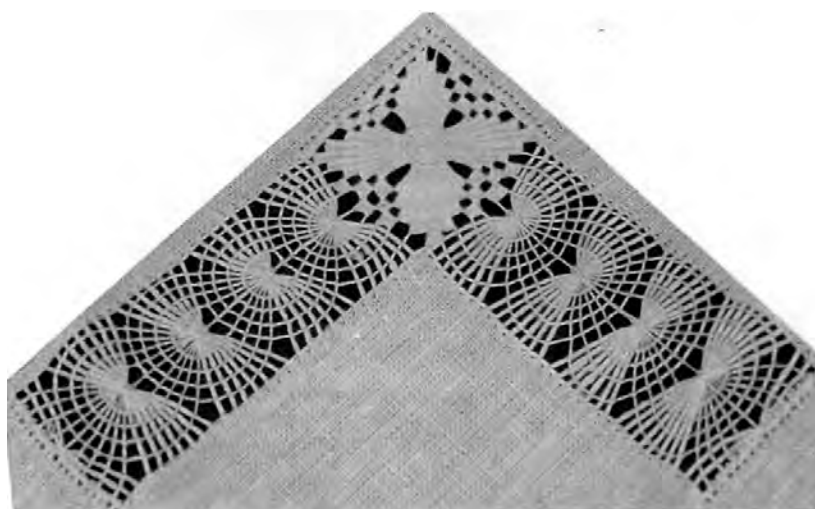


Figura 8. El rosetón resuelve la esquina

Su estructuración es mucho más sencilla. Cuando en un círculo se introduce un elemento cualquiera se pasa de una figura que tiene infinitos isomorfismos a otra con un número finito de ellos. En el caso particular de que ese elemento tenga «pétalos» que hacen posible girarlo n veces con el mismo ángulo, se tienen los rosetones diédricos, si los pétalos son simétricos, y cíclicos, si no lo son. De esta forma, se llega a los rosetones d_n y c_n en los que n representa el número de giros de $360/n$ grados que se pueden realizar.

Los calados

Un calado una labor artesanal muy popular en Canarias (especialmente en las islas de Gran Canaria y de Tenerife) que se realiza sobre una tela (generalmente de lino). No sabemos exactamente cuál ha sido su origen aunque se cree que proceden de Venecia y Portugal. Por los datos que hemos podido recabar, era una labor muy apreciada a finales del siglo XIX y desde siempre ha supuesto un complemento de las débiles economías familiares de la gente sencilla.

La base del trabajo se realiza contando y sacando hilos. En la Península existen bordados que utilizan técnicas de deshilados, parecidos a los que se realizan en Canarias,

como son los segovianos (sacando hilos en una sola dirección) y lagarteranos (en dos direcciones al igual que los canarios). También son conocidos los calados sencillos de Huelva que se realizan también en otros lugares de Andalucía y adornan el traje popular de la mujer.

Para la realización de un calado no se necesitan herramientas sofisticadas (figura 9). Además de tela, hilo, tijeras y aguja es necesario contar con un bastidor en el que colocar la tela bien tensa formando una superficie plana no deformable. Las manos de la caladora, que apenas rozan la tela, se sitúan una por encima y la otra por debajo de la misma. El bastidor debe estar apoyado de forma estable con el fin de que la caladora no se vea obligada a sujetar en ningún momento la tela.

Para cada calado se deben realizar unos pasos determinados conocidos por las caladoras, pero que resultan muy difíciles de reproducir si no se conoce la técnica. Es un proceso metódico y laborioso. La caladora experta puede reproducir cada paso que hay que seguir estudiando un calado ya terminado, pero no es fácil saber cuál es el orden en el que se han realizado los diferentes nudos, si se es novato en esta técnica.

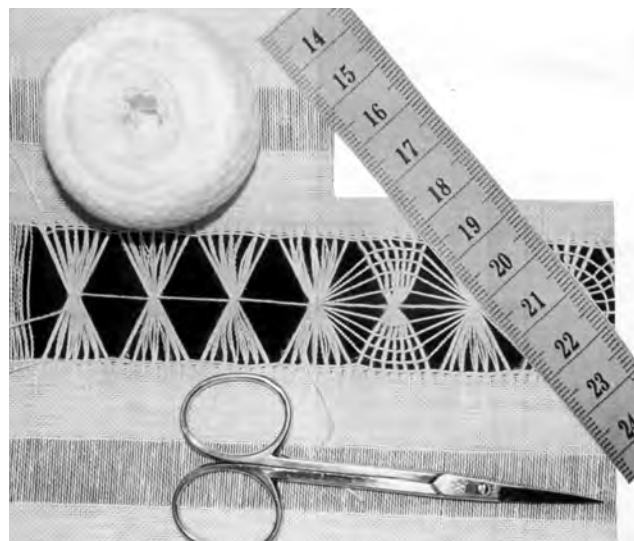


Figura 9.

Tela + ovillo de hilo + tijeras + cinta métrica + destreza = calado

Los calados y los frisos

Con los elementos geométricos expuestos, procedimos a clasificar todo el material recopilado, estudiando el grupo de friso al que pertenecía cada una de las labores. No obstante, y aún contando con un gran número de modelos distintos, no encontramos ninguno que respondiera a dos de los frisos, concretamente, al pma2 y al p1a1.

Esa eventualidad la resolvimos con éxito explicando a D.^a Juana Mesa, una de las caladoras con la que trabajamos, los siete grupos de frisos, comprobando los que faltaban y diseñando uno de cada modelo (figuras 10 y 11). Al poco tiempo, una vez entregados los trabajos, pudimos diseñar un marcalibros (figura 12), alusivo al 2000 como Año Mundial de las Matemáticas, que contiene todos los grupos de frisos de calados. También utilizamos calados para adornar un calendario de bolsillo del 2000 (figura 13).



Figura 10. pma2

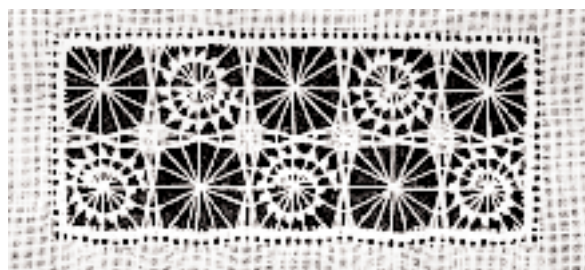


Figura 11. p1a1

Figura 13. Calados en un almanaque de bolsillo

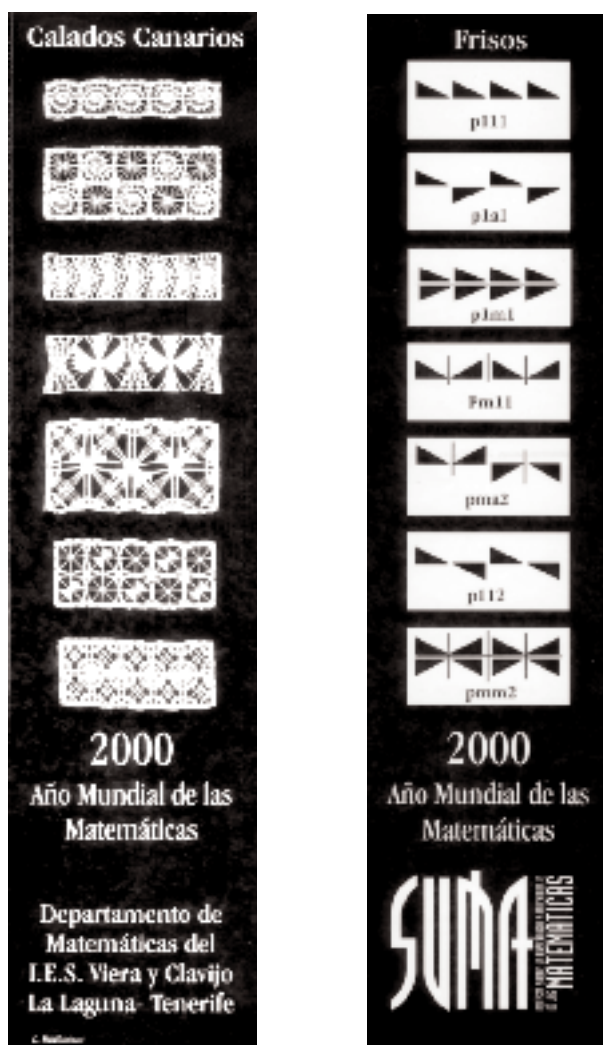


Figura 12. Dos caras de un marcalibros



Calados y rosetones

Ya explicamos el papel que juegan los rosetones en esta labor. Encontramos muchos rosetones diédricos, algunos de los cuales presentaban ciertas dificultades más o menos formales para su clasificación exacta (figura 14) y un solo modelo para los rosetones cíclicos (figura 15), posiblemente por la dificultad técnica que supone hacer formas no simétricas con esta labor.

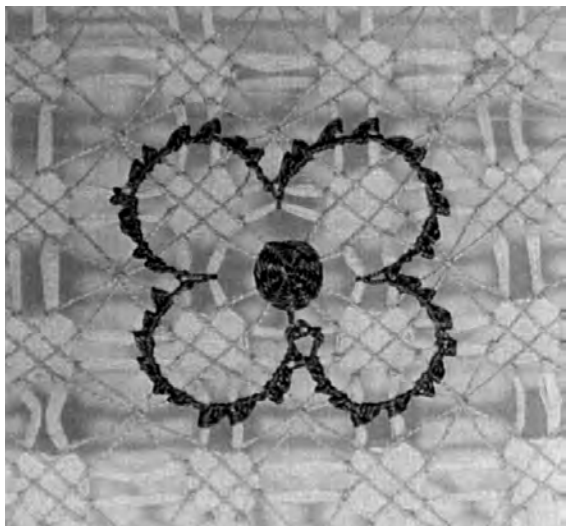


Figura 14. d_4



Figura 15. c_4

Otros elementos matemáticos

Al analizar los diferentes tipos de calados, encontramos algunos modelos que presentaban elementos y conceptos matemáticos de interés.

Módulos en escalera

La figura 16 corresponde a un diseño de calado que se elabora en casi todos los lugares. Es una doble escalera de módulos. Cada peldaño posee un número impar de módulos. Por tanto, para calcular el número total de módulos que hay que hacer para una determinada escalera, se ha de realizar una interesante deducción.

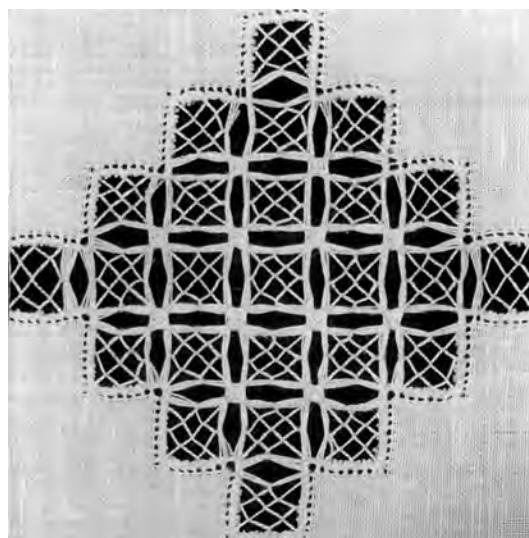
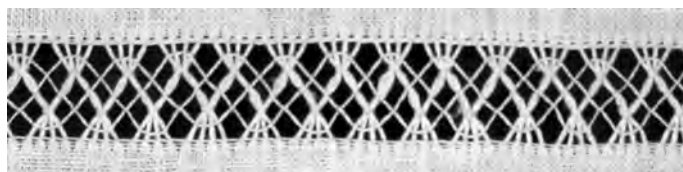


Figura 16.
Módulos
en escalera

Sinusoides

Existen varios modelos de calados que presentan como uno de los motivos las gráficas de las funciones seno y coseno dibujadas en el mismo módulo (figura 17).

Figura 17.
Sinusoides
caladas



Figuras geométricas

Además de las ya descritas, encontramos en los diferentes modelos de calados un buen número de figuras geométricas: cuadrados, rombos, polígonos de más de cuatro lados, tanto regulares como irregulares, elipses, circunferencias... (figura 18).

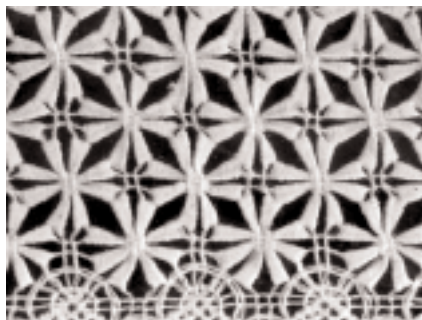


Figura 18.
Localizar
figuras geométricas

Murales y cuadros

El trabajo se complementó con un conjunto de catorce murales en los que se sintetizaron las ideas y resultados obtenidos en la investigación.

Cualquier persona, a través de ellos, podrá conocer e interpretar matemáticamente estos valiosos y bellos trabajos artesanales de nuestro entorno cotidiano (figuras 19 y 20).

A modo de conclusión

No es posible detallar la gran cantidad de aspectos interesantes y sumamente positivos que encierra la experiencia que hemos intentado resumir.

El propio método de trabajo desarrollado constituye uno de esos aspectos. Para poder iniciarlo, varias ferias de artesanía de las que periódicamente se celebran en nuestra isla, especialmente la muestra iberoamericana que se organiza en el mes de octubre. Allí acudi-

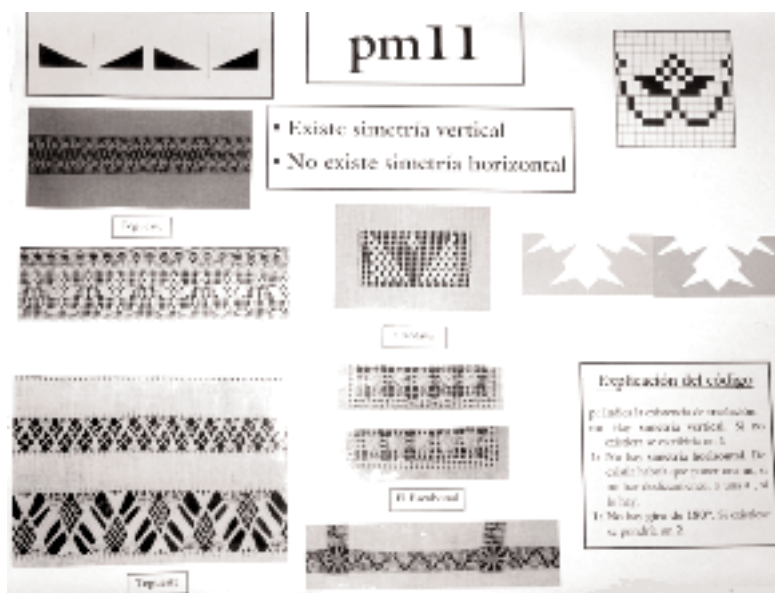


Figura 19. Mural del pm11



Figura 20. De la nada al friso

Luis Balbuena
Dolores de la Caba
Emma García
IES Viera y Clavijo.
La Laguna.
Sociedad Canaria
de Profesores de Matemáticas
«Isaac Newton»

mos a ver los muestrarios de calados que presentaban las artesanas, a fotografiarlos con su consentimiento previo, naturalmente, y a conocerlas personalmente.

«Aquí hay matemáticas», nos decíamos. es cuestión de organizarse y de empezar a hacer un estudio sistemático y lo más riguroso posible.

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Comisión Ejecutiva

Presidenta: María Jesús Luelmo
Secretario General: José Luis Álvarez García
Vicepresidente: Serapio García
Tesorero: Florencio Villarroya Bullido
Secretariados:
Prensa: Antonio Pérez Sanz
Revista SUMA: Emilio Palacián/Julio Sancho
Relaciones internacionales: Luis Balbuena/Florencio Villarroya
Actividades: Xavier Vilella Miró
Publicaciones: Ricardo Luengo González

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya

Presidente: Marta Berini López-Lara
Apartado de Correos 1306. 43200-REUS (Tarragona)

Organización Española para la Coeducación Matemática «Ada Byron»

Presidenta: Xaro Nomdedeu Moreno
Almagro, 28. 28010-MADRID

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»

Presidente: Salvador Guerrero Hidalgo
Apartado 1160. 41080-SEVILLA

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo»

Presidente: Florencio Villarroya Bullido
ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»

Presidente: José Joaquín Arrieta Gallastegui
Apartado de Correos 830. 33400- AVILES (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»

Presidente: Francisco Aguiar Clavijo
Apartado de Correos 329. 38201-LA LAGUNA (Tenerife)

Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas

Presidente: Santiago Pascual
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Villalar, s/n. 09006-BURGOS

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas

Presidente: Serapio García
Avda. España, 14, 5ª planta. 02006-ALBACETE

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia

Presidenta: Remedios Peña Quintana
IES Francisco de Goya. C./ Caravaca, s/n. 30500-MOLINA DE SEGURA (Murcia)

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)

Coordinador: Luis Carlos Cachafeiro Chamosa
Apartado de Correos 103. SANTIAGO DE COMPOSTELA

Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»

Presidente: Ricardo Luengo González
Apartado 590. 06080-BADAJOS

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»

Presidenta: María Jesús Luelmo
Apartado de Correos 14610. 28080-MADRID

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria

Presidenta: Ángela Núñez
CPR de Santander. C./ Peña Herbosa, 29. 39003-SANTANDER

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»

Matematika Iraskasleen Nafar Elkarte
Tornamira
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.
Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra. 31006-PAMPLONA

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas

Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Despacho 3517. Facultad de Educación. Universidad Complutense. 28040-MADRID

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas

Presidente: Javier Galarreta Espinosa
C.P.R. Avda. de la Paz, 9. 26004 LOGROÑO

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»

Presidente: Luis Puig Espinosa
Departament de Didàctica de la Matemàtica. Apartado 22045. 46071-VALENCIA

Algoritmos genéticos: la evolución como modelo matemático

Raúl Corzo Suárez
Francisco Javier Paredes Olay

DURANTE MILLONES de años los seres vivos se han encontrado con numerosas situaciones adversas, es decir, con una enorme cantidad de problemas que han tenido que ir solucionando poco a poco mediante sucesivas adaptaciones. El éxito de la vida en innumerables entornos no es sino el reflejo de que los seres vivos han encontrado soluciones para los distintos problemas con los que se han enfrentado. Son varias las cuestiones que podemos plantearnos en relación a esta cuestión: ¿cuál es el mecanismo que ha permitido la supervivencia de los seres vivos en ambientes tan distintos?, ¿existe algún algoritmo matemático que subyazca en el mismo?, en este caso, ¿podría ser aplicable a otras situaciones y problemas? Los algoritmos genéticos son una de las herramientas que han nacido para responder a estas cuestiones.

Un poco de historia

En 1831, a los 22 años de edad, un joven naturalista se embarca en el velero *Beagle* que le llevará a realizar un apasionante viaje de más de tres años por las costas de Sudamérica. Con apenas una libreta por compañía, el joven observa detenidamente la fauna y la flora de las selvas tropicales, de los fríos desiertos de la Tierra de Fuego, de las islas... y una idea va formándose en su cabeza. Acabado el viaje llega el regreso al hogar y, algunos años más tarde, el naturalista publica un libro cuya primera edición se agotó el mismo día de su publicación y que llevaba por título *Sobre el origen de las especies por medio de la selección natural* y cuyo autor era un tal Charles Darwin...

Los postulados básicos en los que descansa la teoría evolutiva de Darwin son los siguientes:

El advenimiento de los computadores ha supuesto la posibilidad de enfrentarse a problemas que hace tiempo parecían inabordables. Se precisan, no obstante, modelos adecuados que sean capaces de utilizar acertadamente la fuerza de cálculo tan potente de los ordenadores. Dentro de este campo se han desarrollado métodos como el de Montecarlo, el de cristalización simulada, las redes neuronales o los propios algoritmos genéticos. En el presente trabajo nos centramos en este último modelo en base al éxito que está obteniendo, sobre todo, en el campo matemático de la optimización, tanto a nivel industrial como a nivel científico.

ARTÍCULOS

1. El número de individuos de la mayoría de las poblaciones naturales permanece constante debido a la limitación de los recursos y a la competencia por su uso.
2. Dentro de una población los individuos difieren entre sí y estas diferencias pueden ser positivas o negativas para poder competir por los recursos.
3. El resultado de esta competencia es la selección natural: sobrevivirán los individuos mejor adaptados.

Mucho ha llovido desde que aquel joven iniciara aquel viaje hacia la gloria y, sobre todo, mucho se ha desarrollado la Biología Molecular desde entonces. La teoría neodarwinista, basada en los estudios de Darwin y fundamentada en los conocimientos actuales sobre Genética y Biología Molecular se basa en los siguientes principios:

1. Para que una población evolucione deben existir diferencias entre los individuos de la misma y los responsables de estas diferencias son los genes.
2. Algunos de los individuos estarán mejor adaptados al medio que el resto.
3. Los individuos mejor adaptados contribuyen con más descendientes a las siguientes generaciones.

Un poco de Genética

Nuestro punto de partida es una población que estará formada por individuos que, lógicamente, presentarán alguna diferencia entre ellos. Vamos a suponer que estas diferencias entre individuos se deben a diferencias entre sus genes, es decir, diferencias en el *genotipo*, que es el conjunto de genes de un individuo. Definiremos también el *fenotipo* como la expresión observable del genotipo.

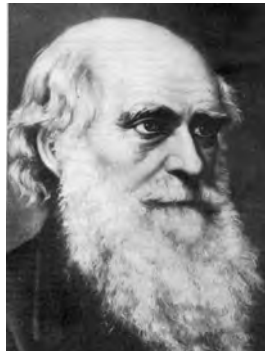
Existen diversos mecanismos cuya acción supone alteraciones en el genotipo, entre los que destacaremos dos: mutación y cruce.

a) *Mutación*:

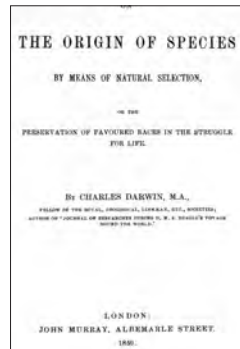
La mutación se define como la alteración de uno o más genes. Esto hace cambiar las características del individuo y, por lo tanto, su nivel de adaptación. Por lo general las mutaciones suelen empeorar la adaptación del individuo al medio, pero algunas de ellas la mejoran. Esta es una operación muy importante, puesto que a pesar de su baja probabilidad de mejorar al individuo, permite la introducción de nuevas características en la población.

b) *Cruce*:

La operación de cruce consiste en la combinación de dos cromosomas para crear uno o más individuos nuevos. En este caso, los individuos mejor adaptados serán los que más probabilidades tengan de cruzarse con



Charles Darwin



Portada de la primera edición de *El origen de las especies*

otros. El tipo de cruce más utilizado es el cruce puntual, que consiste en «partir» por un mismo punto los dos cromosomas a cruzar e intercambiar sus partes obteniendo así dos nuevos individuos. Otro tipo de cruce, es el cruce uniforme, que recorre los genes de cada uno de los cromosomas y los intercambia al azar.

Algoritmos genéticos

Los algoritmos genéticos (AG) trabajan a partir de estas equivalencias:

- *Gen*: un conjunto finito de bits.
- *Genotipo* o *cromosoma*: el conjunto de los genes, es decir, todas las cadenas de bits.
- *Mutación puntual*: alteración en un bit de un gen al azar.
- *Cruce*: intercambio de bits entre las cadenas de bits.
- *Función objetivo*: entorno al que deben adaptarse los individuos para sobrevivir.
- *Factor de mutación*: fracción de individuos que sufren mutación.
- *Factor de intercambio*: fracción de individuos que sufren intercambio de bits.

Inicialmente, se parte de una población que presente individuos con distintos genotipos, es decir, que tengan distintas cadenas de bits. Tras la aplicación de las operaciones de mutación y cruce sobre un porcentaje de nuestra población inicial, se obtiene una serie de nuevos individuos que pasan a formar parte de la población. Para lograr que la población se mantenga constante en número de individuos y no crezca en progresión geométrica, se aplica lo que se denominan *políticas de dispersión*.

Dicho de manera un tanto violenta, una política de dispersión decide qué individuos han de morir para evitar el crecimiento de la población. Normalmente no se suelen aplicar *políticas de envejecimiento*, por lo que la supervivencia de un individuo se decide por

su nivel de adaptación sin que influya su edad en ello.

Las dos políticas de dispersión más utilizadas en los AG son:

a) *Dispersión elitista:*

Los nuevos individuos se comparan con los peores individuos de la población, y sobreviven los mejor adaptados a la función objetivo.

b) *Dispersión pseudoelitista:*

La mitad de los nuevos individuos se comparan con los peores de la población, la otra mitad se compara con los mejores y se seleccionan a los mejor adaptados.

Tras estas operaciones se ha concluido lo que se llama una generación. Ahora tenemos una nueva población en la que muy posiblemente tengamos individuos que se adapten mejor a la función objetivo. Tras esto, sólo queda repetir de nuevo las operaciones anteriores hasta conseguir, al menos, un individuo que se adapte perfectamente a las función objetivo, es decir, la solución a nuestro problema.

El problema de las 8 reinas

La filosofía y desarrollo de un AG se entienden mejor con un ejemplo. En este caso nos hemos decidido por tratar de resolver el problema de las ocho reinas debido a que la aplicación de los algoritmos genéticos en este caso es muy clarificador en cuanto a su funcionamiento.

El problema de las 8 reinas consiste en colocar sobre un tablero de ajedrez ocho reinas sin que ninguna de ellas esté amenazada por ninguna otra. El problema original (que fue investigado por C. F. Gauss en 1850 sin llegar a resolverlo completamente) consiste en hallar todas las posibles soluciones. En nuestro caso, no obstante, nos vamos a limitar a buscar alguna de las soluciones posibles. Como comentario diremos que existen 92 soluciones del pro-

El problema de las 8 reinas consiste en colocar sobre un tablero de ajedrez ocho reinas sin que ninguna de ellas esté amenazada por ninguna otra. El problema original (que fue investigado por C. F. Gauss en 1850 sin llegar a resolverlo completamente) consiste en hallar todas las posibles soluciones.

blema de las 8 reinas, aunque sólo son 12 las sustancialmente diferentes, pues el resto son soluciones simétricas de estas (Wirth, 1980). Las combinaciones posibles de reinas sobre el tablero, con la restricción impuesta de colocar cada reina en una columna, son 16.777.216 (es decir, 8^8).

Consideraciones generales de los AG para el problema de las 8 reinas

Un tablero de ajedrez consta de 8 columnas y 8 filas. Por otro lado, la reina se puede desplazar tantas casillas como quiera en cualquiera de los ocho sentidos (Figura 1).

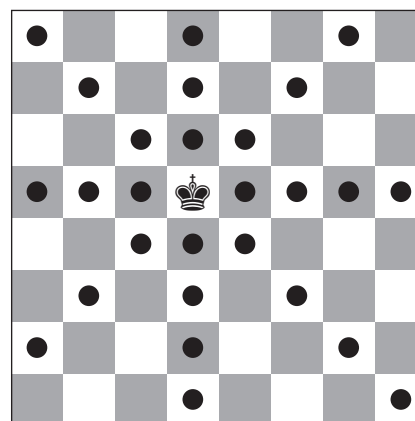


Figura 1. Movimientos de la reina

En el problema que nos ocupa cualquier solución que obtengamos debe tener únicamente una reina por columna. Partiendo de esta consideración, representaremos un individuo mediante un vector de ocho elementos en el que cada elemento representa una de las columnas del tablero, y el valor del elemento representa la fila en la que se encuentra la reina dentro de esa columna. Numerando las filas de 0 a 7 (en lugar de 1 a 8) la figura 2 recoge el ejemplo de un individuo cuya representación vectorial sería (2,4,0,6,1,3,5,1).

¿A qué se debe que empecemos numerando las filas con el número 0? Pues a que el AG trabaja con estos números pero en formato binario, por lo que para representar ocho valores diferentes podemos utilizar tres *bits* ($2^3=8$). Así, nuestro cromosoma constará de un total de $8 \times 3 = 24$ *bits*. En el caso del ejemplo anterior, el vector quedaría representado por la siguiente cadena de bits: 010 100 000 110 001 011 101 001. Obsérvese que numerando las filas de 0 a 7 en lugar de 1 a 8 aprovechamos al máximo los 3 bits (ya que el número 8 en binario es 1000, número de 4 *bits*).

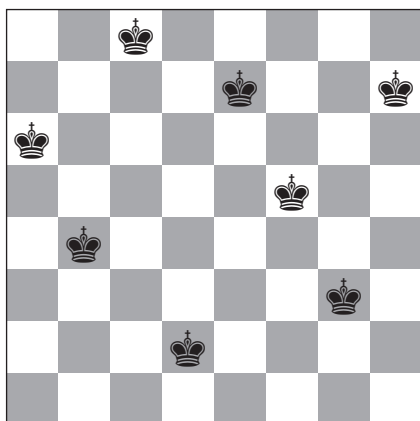


Figura 2. Ejemplo de una disposición al azar de 8 reinas
Cromosoma: 010 100 000 110 001 011 101 001

De esta manera, ya hemos definido el genotipo de un individuo, que consistirá en una cadena de veinticuatro *bits*. La interpretación de estos datos, es decir, la disposición de las reinas sobre el tablero, sería el fenotipo.

El siguiente paso es definir la función de ajuste. Esta nos dará una valoración de lo bien que nuestro individuo se adapta al medio, es decir, lo cerca o lejos que se encuentra de la solución al problema. La elección de esta función, junto con la definición del cromosoma, son los dos pasos más críticos, y son los que marcarán en gran medida el éxito del algoritmo así como su rapidez.

Nuestra función de ajuste debe tratar de penalizar aquellas disposiciones de las damas en las cuales una fila o una diagonal estén ocupadas por más de una dama. Sabemos que una reina situada en la fila x y en la columna y ocupará también las diagonales $x + y$ y $x - y$. En el tablero de ajedrez existen ocho filas, ocho columnas, quince diagonales en una dirección y quince en la otra.

Nuestra función de ajuste utiliza tres vectores. Uno con ocho elementos representando las filas y los otros dos, con quince elementos cada uno, que representan las diagonales. Inicialmente todos los elementos valen -1 . Para evaluar una posible solución atendemos a las posiciones de las damas. A partir de las coordenadas de cada una de ellas obtenemos tres valores: el número de fila que ocupa, y los números de las dos diagonales. Con estos valores incrementamos en una unidad los elementos que le correspondan en los vectores anteriormente mencionados. Tras estas operaciones, realizamos la suma de todos los elementos mayores que cero, siendo la mejor solución aquella que se encuentre más cercana al valor cero, pues sólo la coincidencia de dos o más piezas en una fila o diagonal producirá valores mayores que cero en el vector correspondiente. La función de ajuste para el ejemplo

Nuestra función de ajuste debe tratar de penalizar aquellas disposiciones de las damas en las cuales una fila o una diagonal estén ocupadas por más de una dama.

anterior sería 6, que se corresponde con la coincidencia de damas en una fila, en dos diagonales en un sentido y en tres diagonales en el otro, tal y como puede observarse en la figura 3.

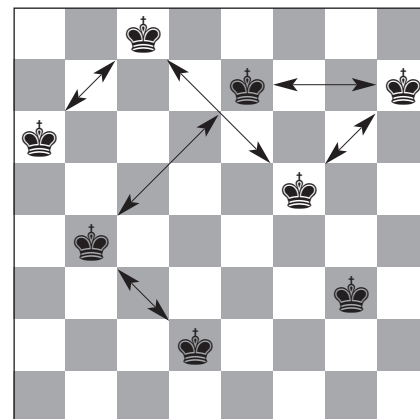


Figura 3. Representación de reinas coincidentes en filas y diagonales

Condiciones de trabajo del AG

Para la resolución del problema se realizó un programa en lenguaje *C* sobre un *Pentium* 233Mhz con 64Mb RAM bajo sistema operativo *Linux*. Las librerías de AG utilizadas fueron *GALIB v2.4.4* by Matthew Wall at the Massachusetts Institute of Technology. Tras varias pruebas iniciales se optó por elegir las siguientes características de los AG: en cuanto a los operadores que actúan sobre los individuos de la población, en nuestro ejemplo hemos utilizado la mutación simple y el cruce puntual. El tipo de dispersión elegida fue la elitista. Inicialmente se partió de una población de 20 individuos. El factor de la mutación fue de 0,5 y el de recombinación de 0,5. Se programó una supervivencia de 10 individuos por generación.

Con estos datos, podemos seguir cómo ha sido la ejecución del programa mediante las figuras 4, 5 y 6.

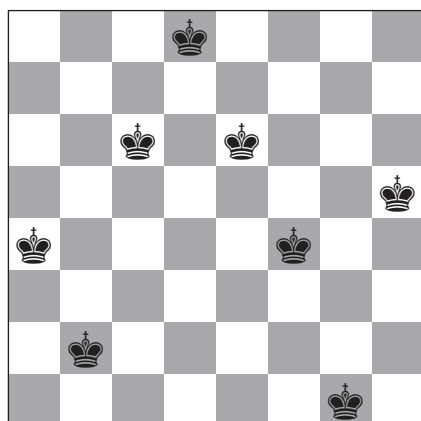


Figura 4. Individuo mejor adaptado de la generación: 1
Cromosoma: 100 110 010 000 010 100 111 011
Función de ajuste: 3

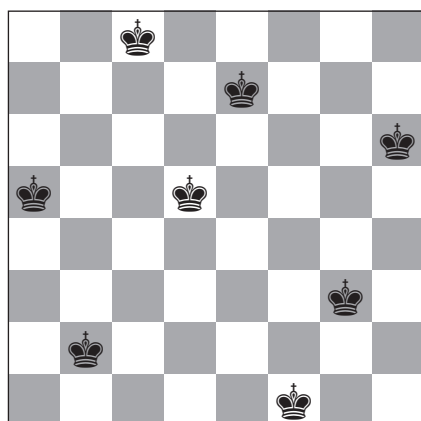


Figura 5: Individuo mejor adaptado de la generación: 22
Cromosoma: 011 110 000 011 001 111 101 010
Función de ajuste: 1

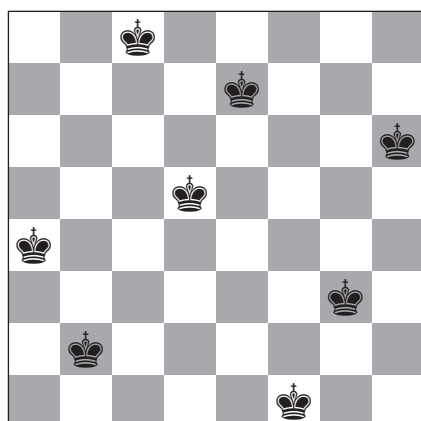


Figura 6: Individuo mejor adaptado de la generación: 23
Cromosoma: 100 110 000 011 001 111 101 010
Función de ajuste: 0 (solución)

Es decir, en la generación 23 ya ha aparecido algún individuo totalmente adaptado que representa la solución a nuestro problema. Es interesante destacar que si ejecutamos de nuevo el programa podemos obtener soluciones distintas a la mostrada en la figura 6 aun partiendo de los mismos datos.

Otras aplicaciones de los algoritmos genéticos

Aplicaciones industriales

Los algoritmos genéticos están teniendo una importante aplicación en diversas industrias debido a que la esencia de determinados problemas es de tal naturaleza que son difícilmente abordables desde la matemática convencional. Un problema típico lo constituye la obtención de varias piezas metálicas de diversos tamaños a partir de una viga metálica optimando al máximo su aprovechamiento, es decir, que el material sobrante sea el menor posible. El planteamiento y resolución de un problema semejante mediante tratamientos matemáticos convencionales es realmente complicado. Sin embargo, los algoritmos genéticos han aportado brillantes soluciones en este campo (Paredes, 1995).

Otro ejemplo de aplicación exitosa de algoritmos genéticos en el campo de la industria lo constituye el control de la distancia de paso del acero fundido entre los cilindros de un molino de rodillos utilizado en la industria metalúrgica para dar un espesor concreto a las láminas de acero. Es conocido que la base de este proceso descansa en el conocimiento de muchos parámetros que deben ser ajustados empíricamente. Debido a que los modelos matemáticos de tratamiento de los mismos descansan en funciones no lineales, la determinación de los mismos es bastante complicada. Los algoritmos genéticos, sin embargo, han resultado ser una herramienta tremendamente interesante para resolver este problema (Paredes, 1996).

Aplicaciones científicas: difracción de rayos-x

La técnica de difracción de rayos-X de monocristal se ha venido utilizando con el propósito de la determinación de las posiciones atómicas en las estructuras cristalinas. La resolución de una estructura típica (Corzo-Suárez, 1997) supone enfrentarse a un sistema de 3.000 ecuaciones no lineales con 300 incógnitas. Estos sistemas de ecuaciones no lineales son demasiado complicados, por lo que en cristalografía no se afronta la resolución direc-

ta del sistema, sino que vienen utilizando ingeniosas transformaciones de estas ecuaciones y haciendo uso de numerosas relaciones matemáticas y probabilísticas (Sands, 1974). En cualquiera de los casos, la solución conlleva un proceso iterativo relativamente largo y tedioso en el que se hace imprescindible poseer un elevado conocimiento de química cristalográfica y en el que no está garantizado el éxito del estudio, ya que los métodos usados permiten abordar el problema pero a costa de perder parte de la información experimental en lo que se ha venido a denominar el problema de las fases, que constituye el principal problema de la cristalografía estructural. La aplicación de los algoritmos genéticos en este campo, aún en pañales hoy día, está suponiendo un importante avance al permitir trabajar con el sistema de ecuaciones original y manejar de esta forma toda la información.

Raúl Corzo
Departamento
de Química-Física y Analítica.
Universidad de Oviedo
Francisco Javier Paredes
EDS España.
Oviedo

Bibliografía

- CORZO-SUÁREZ, R. y otros, (1997): «Redetermination of Bis(2-aminopyrimidinium) Tetrabromocopper(II) at 200 and 100 K», *Acta Cryst.*, C53, 1786-1789.
- PAREDES, J. y otros (1995): «Beam cutting optimization system through genetic algorithms», *World Congress on Neural Networks (17-7-1995)*, Washington.
- PAREDES, J. y otros (1996): «Width control in semicontinuous rolling mills through evolutionary strategies», *World Congress on Neural Networks (17-7-1995)*, Washington.
- SANDS, D. E. (1974): *Introducción a la Cristalografía*, Reverté, Barcelona.
- WIRTH, N. (1980): *Algoritmos + Estructuras de Datos = Programas*, Ediciones del Castillo, Madrid.



Espiral en el paraíso matemático
XI Olimpiada Matemática Nacional
Equipo 1



Semáforo geométrico
XI Olimpiada Matemática Nacional
Equipo 2
(En blanco y negro pierde mucho,
hay que imaginar los colores)



Geometría por un tubo
XI Olimpiada Matemática Nacional
Equipo 3

Sobre Matemática y Ciencias Aplicadas

José M. González Rodríguez

ARTÍCULOS

No existe una clara diferencia entre la enjundia científica de las contribuciones en Matemáticas y Física Aplicadas o en los estudios más abstractos de estas especialidades, aunque, tradicionalmente, se haya desprestigiado a los investigadores que cultivan los procedimientos menos «puros». En todo caso, la Historia de la Ciencia y las necesidades reales de la sociedad actual inciden de forma notable en la trascendencia de los trabajos de investigación que, en mayor medida, se muestren en consonancia con los problemas reales de la vida cotidiana.

LA REPRESENTACIÓN POPULAR del científico que desarrolla su investigación en temas abstractos, matemáticos y físicos principalmente, no se aleja notablemente del tópico que habitualmente nos proponen los tebeos. Suele caracterizarse a estos señores con aspecto distraído, atuendos desaliñados, con ropas poco o nada conjuntadas; la mirada desvaída, el pelo ensortijado y sin peinar; en definitiva imagen gemela de aquella que paseara por el mundo el científico más conocido y reconocido de nuestro siglo: Albert Einstein. Prototipo del investigador abstracto. Einstein no sólo estableció la imagen externa del científico moderno, sino también el modelo intelectual e ideológico de los académicos puros, nada interesados en la realidad. La ingente labor de divulgación que el físico-matemático desarrolló en los últimos años de su vida y su compromiso consciente con la causa judía no fue entendida ni apreciada en su justa dimensión por el grueso de la comunidad no científica. Y el fracaso de Einstein en el empeño de aportar su prestigio científico a los debates políticos y sociales de nuestro mundo nos confirma la imagen estereotipada del pensador abstracto alejado de los asuntos materiales.

Mas resulta que esta idealización tópica no se corresponde exactamente con la realidad; y, a pesar de los esfuerzos de nuestros investigadores por alejar de sus mentes problemas cotidianos o diatribas no eruditas, una buena parte de los científicos contemporáneos no sólo se ven comprometidos con cuestiones mundanas ajenas a sus intereses científicos sino que basan su investigación en la búsqueda de métodos, teorías y modelos que ayuden a interpretar la realidad y, como corolario, a transformar ésta.

Investigadores «puros» y aplicados

La Historia (en este caso la Historia de la Ciencia) nos aporta la visión retrospectiva que mejor nos ayuda a enmarcar

correctamente la idea tópica del científico despistado. Como puede comprobarse, los investigadores aplicados, imbricados en la cultura material de las sociedades en que vivieron, implicados en las transformaciones político-sociales, y nada ajenos a las cuestiones puramente materiales de la vida, han destacado en número, y, en buena medida, sobresalen por la mayor relevancia de sus descubrimientos.

Bien alejado del tópico que nos interesa se encuentran relevantes científicos como Isaac Newton, Lagrange, Joseph Fourier, Karl Friederich Gauss y tantos otros. Quien contemple sus retratos (por otra parte poco o nada identificables por la inmensa mayoría de la gente, inclusive de formación universitaria) no podrá entrever en sus semblantes serios y dignos signo alguno de «despiste» informal. Es más, muchos de ellos no sólo no rehuyeron el compromiso social sino que, además, ocuparon cargos de responsabilidad pública. Sabemos que Newton fue Administrador de la Casa de Moneda e Inspector de Pesos y Medidas; Fourier, colaborador de Napoleón Bonaparte en la campaña de Egipto, desempeñó el cargo de perfecto del departamento de Isère; y Carnot, Monge y Condorcet ocuparon escaños en la Asamblea de la Revolución Francesa.

Investigadores «puros»¹, enteramente implicados en el estudio abstracto o aplicado de la Ciencia han existido en todas las épocas y en la mayoría de las culturas. Mas, con todo, la distinción polémica entre «puros» y aplicados sólo se reconoce muy tardíamente a partir de la Revolución científica acaecida en torno a 1687 (fecha de publicación de los *Principios Matemáticos* de Isaac Newton); punto de inflexión natural del discurrir del pensamiento científico, por cuanto la creciente especialización y la imposibilidad material de poder abarcar todo el espectro de la investigación físico-matemática, provocó una clara, aunque no siempre explícita, división en la comunidad científica.

No habremos de entrar en el debate sobre el alcance de cada tipo de investigación o sobre las aportaciones de cada uno de ellos, pues sólo nos interesa indagar en la supuesta «mejor o peor» disposición de esos dos modelos de científicos para encabezar el progreso de la Ciencia e incidir en la mejora práctica del bienestar de todos los humanos. Dicho con otras palabras, nos preocupa entender y esclarecer la profunda e íntima convicción que se presupone debe guiar la correcta práctica científica. Esto es, nos cuestionamos ¿para qué investigan los científicos no experimentales? y ¿cuál es el objetivo individual que persiguen alcanzar con su esfuerzo cotidiano?

Digamos, ante todo, que esta cuestión ontológica ha preocupado e incluso obsesionado a la mayor parte de los investigadores. Desde la civilización griega hasta nuestros días, los creadores de Ciencia, bien sea abstracta o aplicada, se han visto impelidos a justificar su labor, muchas veces oscura, solitaria y poco comprendida por sus coetá-

*Desde
la civilización
griega hasta
nuestros días,
los creadores
de Ciencia,
bien sea abstracta
o aplicada,
se han visto
impelidos a
justificar su labor,
muchas veces
oscura, solitaria
y poco
comprendida
por sus coetáneos,
buscando alguna
remota o próxima
«excusa racional»
que delimitara
con precisión
el alcance
y la generalidad
de sus
descubrimientos.*

neos, buscando alguna remota o próxima «excusa racional» que delimitara con precisión el alcance y la generalidad de sus descubrimientos. Ya la escuela pitagórica incidía en una cosmovisión primitiva en la que la búsqueda de la verdad en la numerología de concepciones místicas. Visión ontológica del descubrimiento científico que se reconoce igualmente en los matemáticos y físicos del Renacimiento, y, en particular, en Galileo Galilei, quien concibió su hacer científico como una búsqueda consciente de la armonía de la creación divina en las leyes de la Naturaleza. Ideal que no ha dejado de guiar el pensamiento de los científicos occidentales y que con Gregor Cantor alcanza su expresión más clara y, al propio tiempo, angustiosa. Atormentado por su enfermedad escribía sin embargo esperanzado:

Un sino peculiar, que gracias a Dios no me ha roto en forma alguna; antes bien, me ha vuelto interiormente más vigoroso, feliz y lleno de gozo expectante de lo que he estado durante un par de años, me ha tenido apartado de mi hogar, y puedo decir que también del mundo... En mi largo aislamiento, ni las matemáticas ni más en particular la teoría de números transfinitos han dormido. (Dauben, 1983: 85).

Esta causalidad ontológica del descubrimiento científico, lejos de desaparecer en la cosmovisión particular, impregna en la actualidad la razón de un buen número de investigadores, que se aliarían conscientemente con el punto de vista del premio Nobel Chen-Ning Yang, quien, en su discurso de aceptación de tan honrosa distinción afirmaba:

La Naturaleza parece sacar partido de las representaciones matemáticas simples de las leyes de simetría. Se experimenta siempre un profundo sentimiento de respeto ante el poder de estas leyes cuando se piensa en la elegancia y la sorprendente perfección del razonamiento matemático que las subtiende, sobre todo si se compara con la complejidad y el sorprendente alcance de sus consecuencias físicas. (Boutot, 1986: 86).

Vemos así como la búsqueda incesante de la verdad y la comprensión de la compleja estructura de la realidad guía y dirige la actitud más íntima del investi-

¹ Esclarecedor calificativo que frecuentemente se asocia con las denominadas ciencias no experimentales, y, que en particular, en España se aplicó a los especialistas en matemáticas hasta fechas recientes.

gador abstracto, esté implicado o no en las contingencias diarias de la sociedad. Con todo, muchos otros investigadores se han «comprometido» más directamente en el devenir de la historia de los humanos y han basado su acción investigadora en fundamentos más próximos a la realidad concreta. Así, Condorcet, especialmente preocupado por mejorar la calidad de vidas de sus coetáneos; Morris Klein, siempre interesado en materializar el proceso de búsqueda de la verdad en actuaciones concretas en el medio social que la sustenta; e, inclusive, Jean Dieudonné, uno de los más «puros» representantes de la abstracción «bourbaquiana»; se suceden ininterrumpidamente en toda la historia de la Ciencia. Mas con todo, podemos apreciar una clara divergencia de intenciones en la actitud de estos dos grupos de investigadores. Divergencia que naturalmente cabe reconocer en todos los ámbitos de la creación científica.

Quizá podamos explicitar de mejor forma esta colisión de intereses con dos ejemplos actuales donde, de nuevo, quedan confrontados los dos motivos antagónicos que guían el trabajo de todo investigador. En concreto, el primero surge de la reciente demostración del bien conocido último teorema de Fermat. Tras más de tres siglos de investigaciones incesantes, los profesores Andrew Wilkes y Richard Taylor han conseguido, aparentemente con todo éxito, concluir la prueba definitiva de uno de los problemas más populares de la Matemática; y, casi por primera vez, su encomiable esfuerzo ha concitado el interés de los medios de información de nuestro país, muy poco atentos hacia una especialidad científica reconocible al menos como «poco popular». La noticia de la demostración conmocionó el entorno científico de estos dos especialistas del álgebra abstracta y, por extensión, a toda la comunidad matemática.

Interrogado sobre la utilidad y aplicación práctica de dicha demostración, el prestigioso matemático español, Antonio Córdoba respondía que «sería por el honor del espíritu humano»; pues en su opinión: «...ha sido un desafío

*...los llamados
aplicados estarían
abocados
a una práctica
de la investigación
más interesada
en la mejora
y transformación
de la realidad
social;
por contra,
«los puros»
entenderán
y en algunas
ocasiones
justificarán
su labor sólo,
y, ante todo,
por la búsqueda
incesante
de la verdad,
de la perfección
o del
enriquecimiento
intelectual de toda
la Humanidad.*



Luca Paccioli

durante mucho tiempo y en el proceso de intentar demostrarlo se ha creado una gran cantidad de matemáticas, *algunas incluso útiles*» (el subrayado es nuestro) (Diario *El País*, 25-6-1993: 30).

Como contrapunto lógico y, por otra parte, absolutamente necesario de esta visión «no aplicada» de la investigación cabe anotar de nuevo como ejemplo aclaratorio, la concepción que de ésta tiene otro gran matemático universal, el estadístico hindú Calyampudi Radhakrishna Rao. Entrevistado en su visita a nuestro país con motivo de su merecido homenaje académico comenta que:

Uno de los principales objetivos de la estadística es contribuir a mejorar la calidad de vida. Estadística deriva de la palabra estado, y su significado etimológico no es otro que recoger información para tomar decisiones del tipo de cómo repartir comida o trabajo o cómo mejorar la calidad de vida de los ciudadanos. (Diario *El País*, 12-4-95: 24)

Queda pues meridianamente esclarecida la diatriba que separa a las dos ramas bien diferenciadas de la comunidad científica. Entonces, si nos preguntamos sobre la causa o el origen de esta bifurcación de intereses u objetivos, comparece en primer lugar la propia práctica científica que ejerce cada investigador. Esto es, los llamados aplicados (Rao como ejemplo) estarían abocados a una práctica de la investigación más interesada en la mejora y transformación de la realidad social; por contra, «los puros» entenderán y en algunas ocasiones justificarán su labor sólo, y, ante todo, por la búsqueda incesante de la verdad, de la perfección o del enriquecimiento intelectual de toda la Humanidad. Mas ocurre que la Historia de la Ciencia no confirma por entero esta divergencia de intereses, más bien nos aporta múltiples ejemplos que destruyen toda clasificación simplista.

Matemáticos aplicados como Herón de Alejandría, Setsibius o Filón elaboraron un amplio corpus de conocimientos prácticos que sólo fueron utilizados en la construcción de ingeniosos aparatos para divertimento de los monarcas. A su vez, casi toda la contribución matemática de la Europa Medieval Cristiana, desde Beda El Venerable hasta Gerberto de Aurillac, puede reducirse a la búsqueda incesante de la reforma del calendario y, como consecuencia, a la determinación precisa de la fecha de la Pascua de Resurrección (Murray, 1988). Investigación aplicada, ciertamente, pero desprovista de todo sentido práctico, y carente del más mínimo interés social.

Por contra es reconocido por la mayor parte de los historiadores de la Ciencia (Bochner, 1991: 48) que la motivación más clara y explícita del desarrollo del Álgebra abstracta a finales de la Edad Media convergió con las necesidades de la contabilidad que se precisaban en los emergentes focos del comienzo del capitalismo; La Hansa, etc. Matemáticos como Leonardo de Pisa (Fibonacci, 1200-1256), Luca Paccioli (1445-1514) o Simón Stevin (1548-

1620), no sólo contribuyeron notablemente a la consolidación de los métodos de esta disciplina matemática, sino que a su vez, y principalmente, facilitaron el desarrollo de la economía apuntalando así la íntima conexión entre ésta y la matemática². Este particular interés de los investigadores renacentistas en el uso directo y aplicado de sus innovaciones no desapareció en el posterior desarrollo del Álgebra abstracta; y, ya en nuestro siglo, son reconocibles no pocas aplicaciones de esta rama de la Matemática. En particular, la teoría de grupos, que poco o nada parece deber a las contingencias materiales, posibilitó la predicción de Murray Gell-Mann y Yuval Ne'eman de la existencia de la partícula Ω ; más tarde detectada en el laboratorio Nacional de Brookhaven en 1964.

A Emmy Noether (1881-1935), algebrista y mujer, se le debe un teorema aplicable en el cálculo diferencial que recientemente fue recogido por Cheng-Ning Yang y Robert Mills en su teoría lenguaje de unificación de campos, quizá el modelo más perfecto y completo de interacción de la realidad física con la abstracción formal (Boutot, 1986: 81).

Ideología y Ciencia

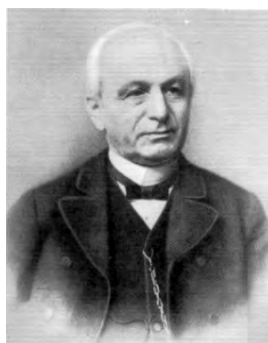
Las diferencias ideológicas o religiosas tampoco decantan la predisposición de un científico sólo hacia la búsqueda formal de la verdad, ni confiere a su práctica investigadora una particular visión de su trabajo. Basta recordar la ingente labor desarrollada por todos los matemáticos y físicos de la Revolución Francesa: Carnot, Monge, Laplace, Legendre, Lagrange y Condorcet entre otros; quienes ajenos a sus diferencias ideológicas (Carnot y Monge fueron destacados defensores de la Revolución, participando incluso en la organización militar de la Asamblea; por el contrario, Lagrange y Legendre sirvieron complacidos la monarquía, por lo cual recibieron múltiples reconocimientos) emprendieron tareas tan esenciales para el posterior avance material de la Humanidad como fuera la formalización del SMI, la «mayor invención de la Humanidad» según la Lavoisier (González, 1991).

Tal práctica social de la Ciencia coexistía en estos matemáticos con diferentes concepciones de su utilidad y significación. Así, según recoge C. Boyer (1986: 620):

Las mentalidades de Laplace y de Lagrange, los dos matemáticos más importantes de la Revolución, eran diametralmente opuestas en muchos aspectos. Para Laplace la naturaleza era lo esencial, y la matemática no era más que una caja de herramientas que él sabía manejar con extraordinaria destreza. Para Lagrange la matemática era un arte sublime que justificaba por sí mismo su existencia.

y de Condorcet nos informa el mismo autor (1986: 595):

Condorcet, que era un fisiócrata, un filósofo y un enciclopedista, perteneció al círculo de Voltaire y de D'Alembert. Fue un mate-



L. Kronecker



G. Cantor

mático competente que publicó libros sobre teoría de probabilidades y sobre cálculo integral, pero también fue un inquieto idealista y visionario que se interesaba por todo lo que tuviera que ver con el bienestar de la Humanidad. Condorcet sentía, como Voltaire, una profunda aversión por la injusticia y, a pesar de conservar su título de marqués, había visto tantas desigualdades injustas en el *Ancien Régime*, que se dedicó a escribir y a trabajar en favor de la reforma. Con una fe implícita en la posibilidad de perfeccionamiento de la humanidad, y creyendo que la educación conseguiría eliminar el vicio, defendió la educación pública y libre.

Esta multiplicidad de criterios ideológicos de las distintas prácticas científicas también es reconocible en la más conocida (y quizá prestigiosa) escuela de matemáticas de nuestro siglo: el grupo Bourbaki. Es bien conocido que entre los miembros de esta familia matemática convivían las más dispares afiliaciones políticas (siendo J. Dieudonné y S. Eilenberg los representantes señeros de los polos opuestos) con una única visión del acontecer científico. Por el contrario, si bien los biógrafos de Evariste Galois han rodeado la vida de este insigne innovador de múltiples leyendas, es bien cierto que Agustín Canchy se olvidó sancionar el primero de los revolucionarios trabajos que el joven Galois enviara a la Academia de Ciencias; y también pudo ocurrir que este «descuido histórico» tuviera que ver con la diferencia ideológica que claramente separaba a ambos matemáticos. Revolucionario Galois, enfrentado directamente con la restauración de la monarquía (por cuyas actividades «delictivas» fuera encarcelado); decidido partidario de la involución conservadora el eminente A. Cauchy (Rothman, 1982: 94). También es conocida la enconada rivalidad científica que se diera entre L. Kronecker y G. Cantor en la segunda mitad del siglo XIX, debida a simples celos profesionales, o alimentada por el posicionamiento religioso antagónico de ambos. Mientras Leopold Kronecker, próspero hombre de negocios, defendía una visión conservadora, cuando no, fundamentalista, de la inter-

² A Luca Paccioli se le atribuye la paternidad de la moderna contabilidad de doble entrada y, por otra parte, Stevin, claramente implicados en la lucha contra la España católica encabezado por Guillermo de Orange, se reconoce como el mayor difusor renacentista de la práctica económica.

vención divina en la ciencia, G. Cantor profesó una fe cristiana mucho más próxima a la teología social que representaba en esa época el papa Alejandro XIII con quien llegó a intercambiar frecuente correspondencia.

Entorno social y Ciencia

Vemos, por tanto, que la afiliación ideológica o las creencias religiosas nada determinan la «ideología» científica de los investigadores no experimentales. Quizá únicamente se puede reconocer una cierta predisposición hacia alguna de las dos concepciones de la ciencia dentro del entorno de cada cultura particular y de cada momento histórico en el que se desarrolle la investigación. Se conoce meridianamente bien cómo se produce el proceso de ósmosis de las características culturales de cada grupo humano diferenciados entre sus científicos (Lizcano, 1993; Camino Cañón Luyes, 1993) y suele asociarse cada cultura histórica con un modelo prefijado de ciencia. Mas esta visión reduccionista de la práctica científica tampoco explica por entero la disposición particular de cada uno de los investigadores.

Si bien los desarrollos matemáticos, astronómicos y metrológicos de la Antigüedad se encontraban íntimamente conectados con las aplicaciones prácticas: las contabilidades mercantiles originaron las primeras cifras de la Historia en Mesopotamia (Friberg, 1976; Ifrah, 1998) las mediciones de las tierras anegadas por el crecimiento del Nilo, provocaron el florecimiento de la matemática egipcia, según reconoce Herodoto en el capítulo 109 del II libro de su Historia (Bochner, 1991: 34); estos se encuentran siempre acompañados por actividades de indagación científica, poco o nada, aplicables a las tareas diarias. El asombroso calendario ideado por los sacerdotes mayas (Ifrah, 1998; Aveni, 1980) servía

*...en ninguna
cultura
histórica,
ni siquiera
en cada modo
particular
de organización
de la sociedad
cabe destacar
un único
y universal
modelo
de indagación
científica.*

³ La matemática de los árabes recogió perfectamente las innovaciones hindúes (los numerales son el ejemplo emblemático) que en su cálculo siempre estuvieron interesados en las aplicaciones cotidianas (regla de tres, interés).

tan sólo para ordenar correctamente las festividades y como justificación de las agoreras (o no) predicciones de los sacerdotes, y Aristóteles en su *Metafísica* nos informa de que las matemáticas fueron creadas por los egipcios, «porque su clase sacerdotal disponía de suficiente tiempo libre para dedicarse a tales investigaciones» (Bochner, 1991: 35).

Justamente la concepción puramente formal del indagar matemático que parece apuntarse en la mentalidad occidental con el advenimiento de la cultura griega (no por casualidad Aristóteles concebía de tal forma el quehacer matemático de los egipcios) nos persigue desde entonces. Mas ocurre que, si bien los matemáticos griegos sólo «se entretenían» en consideraciones geométricas abstractas, dejando el pesado trabajo del cálculo para los esclavos (González, 1992), en toda la cultura de la Grecia Clásica, y posteriormente en el periodo Helenista, la sucesión continua de matemáticos aplicados fue ingente: Tales, Arquímedes, Herón, Ptolomeo, etc.

En definitiva, en ninguna cultura histórica, ni siquiera en cada modo particular de organización de la sociedad cabe destacar un único y universal modelo de indagación científica. El renacer de la cultura grecolatina en el Renacimiento europeo aglutinó tanto la abstracción matemática que impregnaba los textos de Euclides o Apolonio como el compendio de aplicaciones recogido por la tradición hindo-árabica³; y no podemos prejuzgar que las aportaciones de Descartes, Bombelli y otros estudiosos entusiastas de los libros griegos (que, por otra parte, fueron traducidos por matemáticos árabes) caracterizaran la cultura renacentista en mayor medida que aquellas que asociábamos con Paccioli o Stevin.

Únicamente cabe destacar la particular influencia de determinados acontecimientos históricos en la mentalidad científica, de tal modo que estos cambios estructurales: Revolución Francesa, Primeros Movimientos Revolucionarios, etc., inclinan firmemente la balanza a favor de la cosecha de investigadores aplicados (digamos mejor: de mentalidad aplicada). De nuevo el «imaginario colectivo» (Lizcano, 1993) de la sociedad determina en buena medida el concepto y la aplicabilidad de la ciencia.

A modo de conclusión

Cabe concluir, por tanto, que ninguna de las dos formas contrapuestas de hacer ciencia: ciencia básica o ciencia aplicada se recoge como preferible o más productiva e innovadora. No determina su relevancia científica ni su

interés material, ni siquiera su posible aplicabilidad futura. En consecuencia, ningún argumento puede convencer a un investigador neófito en el momento de escoger su particular ejercicio de la Ciencia. Sólo la individual e íntima convicción propia de cada investigador, «su» responsabilidad científica y «su» compromiso con la sociedad le situarán en «la» correcta disposición de «su» línea de investigación. Mas con todo, sí que podemos comentar al menos dos circunstancias que delimitan en el momento actual, en la España de fin de siglo, la «correcta» disposición de todo investigador.

En primer lugar, como quiera que nadie discute la importancia de la inversión en Investigación y Desarrollo I + D, la investigación básica (olvidemos por tanto el término abstracto) actúa como impulsor y catalizador de todo el esfuerzo que se haga en I + D, y será obligación del Estado financiarla. Pero, habida cuenta de que, siendo la sociedad en su conjunto quien sostiene y financia la búsqueda científica, la comunidad pública habrá de dotarse de los mecanismos precisos para valorar en distinta medida las aportaciones de sus investigadores. Esto es, si bien nadie debe quedarse fuera en el reparto del presupuesto; ante todo y sobre todo, el Estado, representante de todos los ciudadanos, deberá priorizar su aportación en I + D, incentivando económicamente las áreas de investigación que, en acuerdo y consenso público, se consideren más determinantes para el desarrollo material de todos. Reconocido este principio, cada investigador se adscribirá libremente al tipo de investigación que más y mejor responda a sus inquietudes científicas, y resolverá su particular compromiso social de acuerdo a la relevancia que le otorgue a su práctica.

En segundo término, como en nuestra sociedad española de finales del siglo xx, la inmensa mayoría de los que desarrollamos labores de investigación básica (cuando no la totalidad), ejercemos a su vez de educadores (tarea por la que se nos asigna un papel social concreto y una identificación laboral específica⁴), nos corresponde el doble reto de profundizar tanto en nuestra búsqueda constante de la verdad científica como en extraer de su práctica, la sabiduría y la experiencia necesaria para mejorar y enriquecer nuestro quehacer docente. En mi opinión, quien actúe ajeno a esta vocación, sólo dispuesto a desarrollar una penosa y árida búsqueda científica, no sólo se aleja del mundo real que lo circunda, justificando, por tanto, la desalentadora imagen del científico distraído que caricaturizábamos al comienzo de estas páginas; sino que descuida a su vez su auténtica trascendencia. Optar por investigación básica o aplicada no determina la naturaleza social del científico; quien compromete su investigación y su tra-

*Sólo
la individual
e íntima
convicción propia
de cada
investigador,
«su»
responsabilidad
científica
y «su» compromiso
con la sociedad
le situarán
en «la» correcta
disposición
de «su» línea
de investigación.*

4 Cuan difícil resulta hacerse entender por una persona ajena de nuestra actividad diaria sobre el motivo y la justificación de nuestro trabajo de investigador.

José M. González
Facultad de Ciencias
Económicas.
Universidad de La Laguna

bajo con los hombres y mujeres con los que con vive si especialmente lo hace con sus alumnos.

Bibliografía

- AVENI, A. (1980): *Observadores del cielo en el México antiguo*, Fondo de Cultura Económica, México DF.
- BOCHNER, S. (1991): *El papel de la Matemática en el desarrollo de la Ciencia*, Alianza Universidad, Madrid.
- BOUTOT, A. (1986): «El poder creador de las Matemáticas», *Mundo Científico*, n.º 98, 787-87.
- BOYER, C. R. (1986): *Historia de la Matemática*, Editorial Alianza Universidad, Madrid.
- CLINE, D. B. y otros (1976): «La búsqueda de nuevas familias de partículas elementales», *Investigación y Ciencia*, Octubre de 1976, 20-31.
- DAUBEN, J. W. (1983): «Gregor Cantor y la teoría de conjuntos transfinitos», *Investigación y Ciencia*, agosto de 1983, 82-93.
- FILLAT, M., NÚÑEZ ESPALLARGAS y J. SERVAT (1989): «La influencia de la Revolución Francesa en la enseñanza elemental de la Matemática», *Suma*, n.º 4, 21-26.
- FRIBERG, J. (1976): «Número y medidas en los primeros documentos escritos», *Investigación y Ciencia*, número especial.
- GONZÁLEZ RODRÍGUEZ, J. M. (1991): «Historia de la Formalización de un sistema único de medidas», *Actas del Simposio «Agustín de Bethencourt»*, Puerto de la Cruz, Tenerife.
- GONZÁLEZ RODRÍGUEZ, J. M. (1992): «La matemática aplicada y la cultura material en Grecia», *Seminario Orotava de Historia de la Ciencia*, Santa Cruz de Tenerife.
- IFRAH, G. (1998): *Historia Universal de las cifras*, Espasa Fórum, Madrid.
- LIZCANO, E. (1993): *Imaginario colectivo y creación matemática*, Gedisa, Barcelona.
- MURRAY, A. (1982): *Razón y Sociedad en la Edad Media*, Taurus Ediciones, Madrid.
- PARADIS, J. y otros (1989): *El Álgebra en el periodo renacentista*, PPU, Barcelona.
- ROTHMAN, T. (1982), «La breve vida de Evariste Galois», *Investigación y Ciencia*, Junio de 1982, 90-100.

¿Por qué seguir anclados en Egipto?

Carlos Usón Villalba
Ángel Ramírez Martínez

ARTÍCULOS

La pervivencia en las aulas de listas y listas de ejercicios de cálculo con fracciones es un arcaísmo gremial. Fue al-Kashi (s. XV) quien propuso por primera vez que las fracciones decimales son válidas para representar cualquier número, rompiendo así con la tradición de la Antigüedad. El desarrollo de la notación ha llevado finalmente a que $\frac{7}{4}$ se escriba como 1,75. Nadie hace hoy día operaciones con quebrados. Utilizamos las fracciones clásicas sólo como descriptores de situaciones en las que el denominador es más pequeño que 10.

CIERTAMENTE corren malos tiempos para la lírica. Vivimos una paz tensa, cargada de desalientos, en la que las voces del inmovilismo parecen tener justificación a sus proclamas. Entre ellas, cómo no, las que insisten en las virtudes formativas del aprendizaje de los algoritmos de lápiz y papel. Si la marea conservadora alcanza círculos próximos decides, aunque sólo sea para mantener en buen estado las defensas, entrar al trapo. Hay que volver a recordar entonces uno y mil argumentos para comprobar, con una sorpresa siempre renovada a causa de nuestra ingenuidad, que lo que era innovador hace quince años sigue siéndolo en este momento.

No vamos a repetirlos. Parece irremediablemente perdida la batalla por liberar a niñas y niños de la Enseñanza Primaria de los «trabajos de soldado» (recupérese la lectura de Freinet, 1986) a que se ven sometidos. Nos limitaremos a recordar, aunque sea de mal gusto en estos tiempos supuestamente desideologizados, que las intenciones subliminales, aunque inconscientes, existen; que se perpetúan si son útiles para defender a la sociedad de un exceso de creatividad que pueda resultar peligroso para el «normal» funcionamiento de las cosas; y que estos condicionantes ideológicos también actúan, por supuesto que sí, en las clases de matemáticas. Es decir, forman parte del currículo «oculto» (?) del profesorado. Decimos sólo esto, y no más, porque sobre este tema ya hemos escrito con más amplitud (Ramírez y Usón, 1996; Ramírez, 1997) y porque nuestra intención ahora es trasladar la reflexión a otro contexto con una similar problemática.

¿A cuál? En realidad todas las matemáticas escolares, tanto en Primaria como en Secundaria, están reducidas a la prác-

tica de algoritmos. En ocasiones, incluso, se definen los conceptos a partir de uno de los algoritmos posibles para desarrollarlos o calcularlos, olvidando que, por su carácter de tales, hacen tanto en tan poco tiempo y/o espacio que necesariamente ocultan la complejidad del concepto.

Esto es lo que ocurre, por ejemplo, si definimos: « $a/b = c/d$ si $ad = bc$ ». La relación entre decimales y fracciones permite accesos más naturales a la igualdad de fracciones, por más que nos resulte entonces una obviedad, pero si observamos que alumnas y alumnos de segundo de bachillerato afirman que se puede hacer $2^{1/2}$ pero no $2^{0,5}$, queda claro cuánto se pierde, cuántas conexiones básicas se tiran por la borda, si se elige el camino del formalismo.

La multiplicación en cruz aparece también como base de la definición habitual de la división de fracciones. Definición caprichosa donde las haya, que no suele justificarse. Afirmar que $(a/b) : (c/d) = ad/bc$ porque dividir es multiplicar por el inverso del divisor no es explicación suficiente; sigue siendo más algorítmica que conceptual. Y además: ¿por qué el inverso de $3/4$ es $4/3$? ¿Por qué $(3/4)(4/3) = 1$? ¿Y por qué se multiplican los quebrados como se multiplican? No es nada evidente, por otra parte, que $1,333... \times 0,25 = 1$.

Desde luego que la lista de «porqués» puede hacerse infinita y que en algún momento hay que pararla. Pero no estamos adoptando una actitud filosóficamente provocadora y didácticamente improductiva. Estamos sugiriendo que si bien es cierto que cualquier definición es socialmente un convenio, también lo es que los convenios no se acuerdan como en un juego lógico desprovisto de significado y que es necesario y útil justificarlos. Veamos: ¿es habitual razonar que $(6/7) : (3/7)$ es muy fácil de obtener porque las dos fracciones, al tener el mismo denominador, son comparables y que para dividir fracciones hay que ponerlas primero con denominador común? Sí, por supuesto que con el tiempo ahorraremos este paso, pero al final, no al principio, porque si vamos directamente al algoritmo ocultaremos la naturaleza de la operación que efectuamos. La naturaleza conceptual, la que esconde precisamente el algoritmo imponiendo su enfoque utilitarista. Por esto mismo, porque es necesario el denominador común, se explica el criterio para decidir la igualdad de fracciones: igualados los denominadores es obligada la igualdad de los numeradores.

Curiosamente nos parece más difícil la justificación del producto de fracciones. Pero es que ¿acaso tenemos claro el concepto de producto de dos números? ¿Qué hacemos al calcular $0,75 \times 0,666...$, $25\% \times 12\%$ o, incluso, $1/2 \times 20\%$? Para la división hemos podido emplear todavía nuestra vieja concepción de esta operación como una comparación de magnitudes, casi un reparto, pero al multiplicar uno de los quebrados se convierte necesariamente en un operador. Y su efecto, en el efecto combinado de otros dos operadores.

*En realidad
todas
las matemáticas
escolares,
tanto
en Primaria como
en Secundaria,
están reducidas
a la práctica
de algoritmos.*

¹ Muy poco eficaz, por cierto. A pesar de haber manejado exclusivamente quebrados en sus clases de matemáticas, alumnos y alumnas muestran predilección, si se les deja elegir, por la mayor claridad interpretativa inmediata que les ofrecen los decimales. Optan, por ejemplo, por

$$\sqrt{2} + 0,5\sqrt{2} = 1,5\sqrt{2}$$

en lugar de

$$\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

Una elección que alerta de nuevo sobre la nula comprensión conceptual que se alcanza después de cursos y cursos de emplear las fracciones desconectadas de los decimales.



Lejos de nuestra intención desarrollar en las páginas de *Suma* un elemental tratado sobre las operaciones con fracciones. Lo que pretendemos es reivindicar la necesidad de una mayor insistencia en los conceptos. Puesto que lo único que se hace en muchos centros con las fracciones es simple calculote¹, hay tiempo para ello: basta con romper con ese absolutismo. Los afortunados tiempos tecnológicos en que nos ha tocado desarrollar nuestra labor docente nos permiten incluso, si nos apetece, caer en un absolutismo de signo contrario. Lo queremos gritar bien alto:

¡Hay calculadoras baratas que trabajan con fracciones!

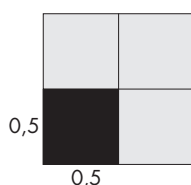
Bien: ahora que los ingleses, esos amantes de las tradiciones más rancias, han avisado de la maldad didáctica intrínseca de la calculadora (ese maravilloso invento), desempolvemos de nuevo parte de la vieja batería argumental para defender su empleo.

- No se trata de usar las calculadoras solamente como en el supermercado. ¡Cuidado! No afirmamos que esta prestación de la máquina sea despreciable. Uno de los objetivos de la Enseñanza Primaria debería ser que los estudiantes fueran capaces de hacer un uso inteligente de una calculadora elemental (científica para la Secundaria y el Bachillerato). Inteligente quiere decir que sepan aprovechar al máximo sus posibilidades (¿cuántas tiendas conocéis en las que sepan utilizar una memoria tan básica como la de una calculadora de 700 ptas.), que no la empleen para efectuar, por ejemplo, $50 + 50$ (entre otras cosas porque no es elegante hacerlo), y que estimen previamente y tengan costumbre de valorar los resultados que aparecen en pantalla. Siguen siendo válidas las sugerencias del Informe Cockcroft (elaborado en Inglaterra, claro).
- No usarlas sólo como en el supermercado quiere decir que, como

docentes, deberíamos ser capaces de aprovechar el enorme potencial didáctico de estos pequeños aparatos. Hay literatura más que suficiente a este respecto. Es inevitable aquí recordar a Fielker (otro inglés)².

- El tiempo que ganaríamos podría emplearse en:

- Mejorar la comprensión conceptual de las operaciones con quebrados. En particular, ampliar el concepto de multiplicación. Explicar, por ejemplo, que $0,5 \times 0,5 = 0,25$ porque se crece en dimensión pero disminuye la proporción de la superficie obtenida respecto al cuadrado unidad.



- Establecer conexiones entre decimales, quebrados, tantos por ciento y modelos geométricos.
- Hacer problemas, no ejercicios rutinarios, en los que intervengan fracciones (por ejemplo: «El 36% de las tortillas que hace mi abuela tienen mucha sal, y el 53% mucha patata. ¿Qué porcentaje de las tortillas que hace mi abuela tienen mucha sal y mucha patata?»)
- Cálculo mental con quebrados. Es fácil proponerlo como un juego. Además la existencia de regularidades lo favorece. Por ejemplo:

$$1/2 + 1/4 = 3/4$$

$$1/3 + 1/6 = 3/6 = 1/2$$

$$1/4 + 1/8 = 3/8$$

De paso podemos aprovechar para generalizar, el auténtico vicio de los matemáticos. ¿No nos interesa el Álgebra?

$$1/n + 1/2n = 3/2n$$

¿Conocéis a alguien que opere con quebrados en la calle?

² Citamos sólo una pequeña y deliciosa obra suya: *Usando las calculadoras con niños de 10 años*, Generalitat Valenciana, 1986. Aunque está agotada la edición, es posible encontrarla, junto con el Informe Cockcroft, en los CPR.

También se puede empezar por el final (dar el resultado y perder la operación), bien en abstracto:

¿A qué quebrado le puedo añadir su mitad para obtener $1/2$?

o contextualizando la pregunta de forma atractiva:

Luisa partió la tarta en tres trozos: ella se quedó con la mitad y Juan recibió el doble que Antonio. ¿Cuánto correspondió a cada uno de ellos?

(¡No olvidemos que se propone como cálculo mental! No se trata de repetir el algoritmo de lápiz y papel...).

Otra bonita serie:

$$1/2 - 1/3 = 1/6$$

$$1/3 - 1/4 = 1/12$$

$$1/n - 1/(n+1) = 1/n(n+1)$$

- Pensar, sobre todo pensar. Si la máquina trabaja ya no hay justificación para obligar al alumnado a ejercitarse en trabajos de soldado ni para perder después ridículamente el tiempo en valorarlos de forma ridícula. ¿Cómo no equivocarse al realizar un churro («castillo» o como se le quiera llamar) que da finalmente como resultado $223/315$? (por cierto: ¿no es más expresivo «71%» que « $223/315$ »? Si se siente nostalgia de los viejos tiempos (un vicio dulce y comprensible) siempre pueden hacerse algunos ... con la calculadora, claro: una excelente ocasión para practicar la prioridad de las operaciones sin machacar para ello la mente ni extenuar la paciencia.

IV

Abandonamos esta línea argumental. No llegaremos a decir nada nuevo que no se encuentre ya publicado. Hablemos más bien de la utilidad social de nuestro trabajo. *¿Conocéis a alguien que opere con quebrados en la calle?* Los quebrados se emplean en la vida cotidiana como operadores (tres cuartos de litro, cuarto y mitad de carne, etc.), no como instrumentos de cálculo. Antes ya de la aparición de las calculadoras electrónicas la contabilidad de las oficinas, las compra-ventas de terrenos, las operaciones comerciales, se efectuaban con decimales. ¡Cuánto más en el momento actual!

Frente a esto, los quebrados mantienen su vigencia en las aulas a causa de nuestro gremialismo como matemáticos. Hagamos una breve visita a la Historia. Allá por el 1650 a. C., el escriba egipcio Ahmes se ocupaba, en el conocido hoy como «papiro de Rhind», de descomposiciones de fracciones como éstas:

$$2/7 = 1/28 + 1/4;$$

$$1/15 + 1/3 = 2/5;$$

$$2/13 = 1/8 + 1/52 + 1/104$$

No son ejercicios aislados. Ahmes aporta una tabla que expresa $2/n$ como suma de fracciones de numerador 1 para valores de n desde 3 a 101. Toda una demostración de virtuosismo al servicio de la simplificación de los cálculos en las necesidades prácticas, desarrollada a partir de métodos diferentes de los nuestros: empleo de fracciones unitarias y de la técnica del desdoblamiento. Veamos un ejemplo (Collette):

$$\begin{aligned} 2/7 &= 1/7 + 1/7 = 1/14 + 1/14 + 1/7 = 1/28 + 1/28 + \\ &+ 1/14 + 1/7 = 1/28 + (1/28 + 1/14 + 1/7) = 1/28 + 1/4 \end{aligned}$$

El sistema egipcio de escritura de los números era jeroglífico, decimal y no posicional. Queda claro que esa «decimalidad» no ejerció ninguna influencia sobre el tratamiento algorítmico de las operaciones con fracciones. ¿Cómo iba a hacerlo? Dividir por 10 sólo es cómodo si el sistema de numeración es decimal y posicional. Si la escritura no aporta ninguna ayuda el primer recurso es emplear la división más sencilla: buscar mitades. Para multiplicar o dividir números enteros los egipcios empleaban también la técnica del desdoblamiento.

La sombra de la tradición es alargada. En el siglo IX, 2600 años después de Ahmes, la obra en la que al-Khwarizmi muestra por primera vez cómo operar con el sistema decimal posicional hindú, permite ver que la lengua árabe disponía de nombres particulares para las fracciones de numerador 1. El *Libro sobre la aritmética necesaria a los escribas y a los comerciantes*, de Abu-l-Wafa (s. X), distingue tres tipos de fracciones fundamentales (Youschkevitch):

- Principales: $1/2$, $1/3$, $1/4$, ..., $1/10$
- De la forma m/n , con $m < n$ " 10
- Expresables en la forma $(1/m) \times (1/n) \times \dots \times (1/p)$ (exceptuando las principales)

Abu-l-Wafa lleva el virtuosismo operativo al extremo, con la finalidad de expresar fracciones a partir de las incluidas en estos tres tipos (y si no es posible lo hace de forma aproximada), pero ya no recurre al desdoblamiento. Su táctica consiste en desarrollar las fracciones en fracciones sexagesimales y de éstas pasar a las fundamentales. Y obtiene, por ejemplo:

$$2/5 = 1/3 + (2/3)(1/10)$$

$$9/10 = 1/2 + 1/3 + (2/3)(1/10)$$

$$3/17 \approx 1/10 + (1/2)(1/9) + (1/6)(1/8)$$

El desarrollo seguido para $3/17$ es especialmente fascinante (Youschkevitch).

Mientras los funcionarios y comerciantes empleaban fracciones unitarias, los científicos árabes, continuando la tra-

dición de la antigua Babilonia, efectuaban sus cálculos con un sistema sexagesimal. En el cruce de estas dos tendencias con las nuevas ideas venidas de la India (un largo período de tiempo indeciso) es razonable terminar planteándose una pregunta hoy día ingenua pero entonces revolucionaria: ¿son adecuadas las fracciones decimales cuando el problema requiere una respuesta con una aproximación muy precisa? Al-Kashi (s. XV) responde que sí, da por primera vez una descripción detallada de las operaciones con ellas y aplica su habilidad a la conversión de fracciones sexagesimales en decimales y viceversa.

¿Hace falta recordar que la Humanidad ha optado finalmente por las fracciones decimales? Hoy no empleamos $3/17$, ni la aproximación de Abu-l-Wafa. Hoy aproximamos $3/17$ con el valor

$$\begin{aligned} 1/10 + 7/10^2 + 6/10^3 + 4/10^4 + 7/10^5 + \\ + 5/10^7 + 8/10^8 + 8/10^9 \end{aligned}$$

La calculadora muestra en pantalla 0,176470588 porque hemos adoptado la notación resultante de un largo proceso colectivo (como siempre) de pruebas, cuyo remate final, la coma que separa la parte entera de la decimal, fue propuesta por el holandés Snellius a principios del siglo XVII.

V

*Si la sociedad
ha elegido operar
con fracciones
decimales,
y hacerlo además
bajo la forma
de «decimales»,
¿qué justifica
dedicar
tanto tiempo
a efectuar
operaciones
con quebrados?*

Si la sociedad ha elegido operar con fracciones decimales, y hacerlo además bajo la forma de «decimales», ¿qué justifica dedicar tanto tiempo a efectuar operaciones con quebrados? No negamos la necesidad didáctica de ocuparse de las ideas básicas; afirmamos la conveniencia de entusiasmarse ante la habilidad desplegada para desarrollar un cálculo o para inventar o interpretar un algoritmo; pero todo ello sin perder de vista que los quebrados no son hoy día un instrumento social de cálculo. Es cierto que siguen empleándose como descriptores útiles y elegantes de algunas situaciones cuando el denominador es 2, 3, 4, 5 o incluso 6. Seguimos hablando de un cuarto de litro, un quinto o un tercio de

cerveza, las abuelas de Forges siguen pidiendo «cuarto y mitad» en la tienda, pero ya nadie opera con quebrados. La generalización del empleo de calculadoras electrónicas tiene forzosamente consecuencias. Incluso como indicadores de información los quebrados están cediendo terreno, cada vez más, al «tanto por ciento».

Es inevitable la sensación de estar asistiendo al final de un período. Y si bien es comprensible la añoranza del especialista que debe reciclarse y desea mostrar la belleza de su anticuado instrumental, hay que recordarle que no tiene derecho a presentar como piezas actuales las que están en desuso; y que cuando un grupo de personas sin vocación de historiadores visita un museo muy amplio, selecciona las salas de mayor interés.

Desde este punto de vista, ¿cómo valorar la insistencia de un alumno en escribir $1/4$ en lugar de $0,25$ porque le han dicho «que son más elegantes los quebrados»?³ La elegancia siempre ha sido una cuestión condicionada por la subjetividad de cada cual y por el momento histórico. Lejos de nuestra intención negarle prestancia a $1/4$, pero una persona cultivada apreciará la belleza tanto en un Monet como en un Saura: tiene todo el derecho a elegir, por supuesto, y sería maravilloso que fuera capaz de transmitir entusiasmo por los logros del pasado, pero no a seguir afirmando la validez permanente, como medio de expresión, de propuestas ya superadas.

¿Sabemos realmente disfrutar el atractivo de la notación decimal? ¿Qué ofrece una igualdad como $(5/6) \times (6/5) = 1$ frente a la sorpresa que aporta $0,83333... \times 1,2 = 1$? La pervivencia obsesiva en las aulas del cálculo con quebrados nos parece una imposición gremial. La afirmación de su superioridad frente al cálculo con decimales, un desatino, a la vista de la marcha de la Historia, y un elitismo sectorial y platónico. El disfrute del encanto artesanal de las habilidades de Abu-l-Wafa es perfectamente compatible con el de la funcionalidad y la eficacia de las operaciones con decimales. En cualquier caso tenemos derecho, si nos apetece, a

*La pervivencia
obsesiva
en las aulas
del cálculo
con quebrados
nos parece
una imposición
gremial.*

*La afirmación de
su superioridad
frente al cálculo
con decimales,
un desatino,
a la vista
de la marcha
de la Historia,
y un elitismo
sectorial
y platónico.*

3 ¿Habéis podido observar alguna vez en una pizarra de la que no se han borrado todavía los cálculos de la clase anterior la resolución de un sistema como $\{1,5x - y = 4; -x + 0,75y = 1\}$? ¿De qué oscuro fondo asciende el rechazo a esta forma de expresar los coeficientes? ¿Por qué se prohíbe en beneficio de $\{3x - 2y = 8; -4x + 3y = 4\}$? Prohibición (tácita, no suele estar explicitada) tanto más absurda desde el momento en que se dispone de calculadoras gráficas.

permanecer personalmente anclados en Egipto, pero no a abandonar allí a nuestros alumnos y alumnas.

VI

¿Hace falta decir que también somos contrarios a la pervivencia obsesiva del cálculo manual con decimales? ¿Que nos parece una liberación maravillosa la funcionalidad y la contundencia de una calculadora de bolsillo? Léase el párrafo III de este artículo cambiando «fracciones» por «decimales».

VII

Una propuesta de problemas sobre fracciones para 3.º de ESO. No es exhaustiva, por supuesto: hay que hacer multitud de problemas con enunciado, ocuparse del tanto por ciento, etc. La proponemos como ejemplo alternativo a los interminables listados de «castillos» fraccionarios con que se topan habitualmente los adolescentes. Se trata, por tanto, de problemas (sí, en la situación actual son auténticos problemas, no ejercicios) en los que se propone trabajar sobre los números en abstracto, fuera de un contexto real o matemático en el que tuvieran un significado.

1. Localiza dos números periódicos puros cuya diferencia sea más pequeña que una milésima.

Dos periódicos mixtos cuya diferencia sea más pequeña que una décima.

Un periódico mixto, un periódico puro y un irracional comprendidos entre $4,6$ y $4,61$.

Un periódico mixto y un decimal exacto comprendidos entre $3,2$ y $3,2$.

Tres fracciones comprendidas entre $1,1$ y $1,1$.

2. ¿Qué números cumplen la condición de que al dividirlos por 4 dan ...,25 y al dividirlos por 3 dan 3? ¿Y que den ...,75 al dividirlos por 4 y ...,6 al dividirlos por 5?

3. ¿Qué denominadores pueden dar lugar a decimales de la forma ...,125? ¿Cuántos hay? ¿Y a decimales de la forma 6?

4. Divido un número entre 18 y obtengo $\dots, \bar{3}$. ¿Cuál es el resto de la división?
 ¿Y si obtengo $\dots, \bar{4}$? ¿Los puedes adivinar sin emplear la calculadora?

5. ¿Lo tienes claro? ¿Seguro? Veamos otro ejemplo. Divido por 16 y obtengo $\dots, 5$. ¿Cuál es el resto? ¿Y si obtengo $\dots, 125$?

6. Ahora empleamos la calculadora. Dividimos $73:13$ y aparece en la pantalla 5,6153846. Queremos obtener el resto sin necesidad de pulsar AC para borrar el resultado anterior. ¿Qué operaciones harías?

7. ¿Sabes que *calculus*, en latín, significa «piedra pequeña»? Los romanos hacían sus cuentas, con piedras de pequeño tamaño. Todos los pueblos han hecho cuentas con «cálculos». Bien: ahí va un capazo de cálculos ... pero no para que los hagas con «cálculos». ¡Mala suerte! Tampoco te propongo que los hagas con la calculadora (ese maravilloso invento) y no te deo recurrir a los algoritmos (¿qué querrá decir «algoritmo»? ¿lo sabes?) de lápiz y papel. ¡Y tienes que dar el resultado como número decimal!

$$\begin{array}{cccc} 0, \bar{2} \times 4,5 & 0,00\bar{2} \times 45 & 1,25 \times 1,6 & 0,2:0,0\bar{2} \\ 0, \bar{6} \times 0,1\bar{6} & 0,75:0,5 & 1,5:0,5 & 0,1:0,01 \\ 0,1:0,1 & 0,1:0,1 & 1:0,1 & 1,3 \times 0,3 \end{array}$$

VIII

Desde luego que el listado anterior de problemas requiere un amplio período previo de búsqueda de regularidades en los procesos de división de un número por 2, 3, 4, 5, 6, 8 y 9. La calculadora proporciona la base experimental necesaria para llegar a ellas mediante un proceso inductivo, y para una comprensión suficiente de la situación que permita justificarlas deductivamente. A fin de cuentas son procesos muy sencillos. La división entre 9 es especialmente divertida.

$$\begin{array}{lll} 1/9 = 0,111111\dots & 2/9 = 0,222222\dots & 3/9 = 0,333333\dots \\ 9/9 = 1 & 10/9 = 1,11111\dots & 11/9 = 1,22222\dots \\ 34/9 = 3,77777\dots & 53/9 = 5,88888\dots & 83/9 = 9,22222\dots \end{array}$$

Aparecerán en clase diversas formas de describir la regularidad observada, pero seguro que entre ellas está la que advierte que el período se obtiene «sumando» las cifras del dividendo: $8 + + 3 = 11 \rightarrow 1 + 1 = 2$. Sorprende entonces la dificultad que manifiestan para conectar este mecanismo con algo conocido. Y, por supuesto, cuando recuperan del baúl de la memoria el criterio de divisibilidad por 9 nadie sabe justificar qué tiene que ver con lo que han hecho.

Un tema tan atractivo y con tantas posibilidades para que alumnos y alumnas investiguen por su cuenta, elaboren, comprueben y modifiquen conjeturas, como el de los criterios de divisibilidad, es tratado habitualmente con una perspectiva meramente instrumental, como un recetario que no es necesario justificar sino simplemente aplicar obediente-mente para obtener resultados. Como las transformaciones de Ahmes o las reglas de Abu-l-Wafa. Seguimos metodológicamente anclados en Egipto, pero con un diferencia social que hace la situación sangrante: los matemáticos de la Antigüedad y de la Edad Media escribían para usuarios analfabetos. Hay sugerencias dolorosas por este camino que preferimos no detallar.

Desde luego que habría que intentar justificar con cierto rigor que la «suma» de los dígitos de un número, su resto entero al dividir por 9 y la cifra del período son la misma cosa. Hay argumentaciones sencillas que siempre pueden ser posteriores al convencimiento empírico, y ya suficientemente riguroso, que se puede adquirir experimentalmente con la calculadora.

IX

A la hora de optar por uno u otro camino didáctico hay que recordar siempre que una experimentación exhaustiva e inteligente convence aunque no demuestra y una demostración rigurosa demuestra pero muchas veces no convence. La comprensión lógica afecta al

*...hay
que recordar
siempre
que una
experimentación
exhaustiva
e inteligente
convence
aunque
no demuestra
y
una demostración
rigurosa
demuestra
pero
muchas veces
no convence.*

cerebro pero el convencimiento es algo más visceral. Como diría Gattegno, se siente en el estómago. Un ejemplo muy claro lo proporciona la pequeña crisis que surge al dividir por 9: ¡no aparece 0,99999...!

Bien: ¿cómo convencer (¡convencer!, no demostrar) a cerca de veinte adolescentes de que $0,999999... = 1$? Hay que tener en cuenta que escrita en la forma $0,9 = 1$ es todavía más dura de aceptar, se pierde cierta referencia visual. Desde luego que no se consigue con un proceso del tipo «llamo $x = 0,999999...$; entonces $10x = 9,999999...$; y por tanto $9x = 9$, luego $x = 1$ ». Una vez explicado suele ser habitual escuchar un escéptico «Bueno, ¿y qué?». Y quien lo emite tiene razón, está advirtiendo que la frialdad del camino seguido le impide «sentir» la igualdad $0,999999... = 1$. De hecho es inevitable cierta sensación de que algo se escapa en esta argumentación. Algo así como si se hubiera hecho en el vacío y no en la «realidad». Un camino más pegado al suelo, más experimental, nos llevaría a intentar escribir un número comprendido entre $0,999999...$ y 1 (o a calcular la diferencia entre ambos). Si son diferentes, habrá infinitos entre los dos. La imposibilidad de hacerlo suele convencer a un porcentaje alto de alumnos y alumnas. Siempre quedan recalitrantes, pero la necesidad de tiempo para asumir resultados es un elemental derecho de quien aprende.

Analícemos los dos métodos. El primero es irrefutable y tiene la ventaja de que se puede generalizar para obtener la fracción generatriz de cualquier decimal periódico, no en vano es una argumentación algorítmica. Pero ahí reside su debilidad para convencer. Aporta «como hacer» pero no «porqués», puesto que no va a la naturaleza del problema ... al menos aparentemente. Si lo analizamos con detalle vemos fácilmente que se sustenta en el carácter periódico de los decimales que pretende convertir en fracción. No podía ser de otra manera, pero para convencer puede ser preferible una experimentación más elemental como la que propone el segundo méto-

*...¿cómo
convencer
(¡convencer!,
no demostrar)
a cerca
de veinte
adolescentes
de que
 $0,999999... = 1$?*

do: aporta menos rigor, deja la explicación a la imaginación, pero va de lleno a enfrentarse con la estructura de la notación decimal.

X

La obtención de la fracción generatriz es otra de las cuestiones habitualmente reducida a una receta. En el peor de los casos aprendida memorísticamente. En el mejor, lo que se memoriza, sin comprender cómo se ha inventado, es el algoritmo empleado anteriormente. Se ha dicho ya mil veces que todo esto contribuye a una mitificación absurda de las Matemáticas y de la tarea de los matemáticos. Y la excusa de la eficacia se sostiene mucho peor en este caso. ¿Conocéis a alguien que tenga necesidad de obtener fracciones generatrices en su quehacer diario? Y además, ¡otra vez!, hay calculadoras que efectúan esa conversión.

El estudio de la división por 9 permite a un porcentaje muy alto de alumnos y alumnas convertir, sin haber recibido información previa, periódicos puros con una sola cifra en el período en fracciones. Para los casos en los que el período tiene dos cifras habrá que estudiar la división por 99.

$1/99 = 0,010101...$	$2/99 = 0,020202...$
$23/99 = 0,2323...$	$98/99 = 0,9898...$
$101/99 = 1,0202...$	$121/99 = 1,2222...$
$134/99 = 1,353535...$	$234/99 = 2,363636...$
$1234/99 = 12,464646...$	$2345608/99 = 23693,010101...$

Al margen de la fracción generatriz la atención se centra poco a poco en una conjetura inesperada. El criterio de divisibilidad por 9 es fácilmente generalizable a 99. El resto entero de la división por 99, las dos cifras del período de su parte decimal, se obtiene «sumando» pares de cifras del dividendo hasta obtener un resultado de dos cifras:

$$12 + 34 = 46;$$

$$2 + 34 + 56 + 08 = 100 \rightarrow 1 + 00 = 01$$

Se puede demostrar de forma tan sencilla como en el caso del 9. Basta tener en cuenta que $10^n - 1$, con n par, y $10^n - 10$, con n impar, son divisibles por 99. Veamos, como ejemplo, el caso de un número de cinco cifras.

$$\begin{aligned} «x_4x_3x_2x_1x_0» &= 10000x_4 + 1000x_3 + 100x_2 + 10x_1 + x_0 = \\ &= (9999x_4 + x_4) + (990x_3 + 10x_3) + (99x_2 + x_2) + 10x_1 + x_0 = \\ &= (9999x_4 + 990x_3 + 99x_2) + [x_4 + (10x_3 + x_2) + (10x_1 + x_0)] = \\ &= (9999x_4 + 990x_3 + 99x_2) + [«x_4» + «x_3x_2» + «x_1x_0»] \end{aligned}$$

Puesto que los sumandos del paréntesis son todos divisibles por 99 el corchete pertenecerá a la misma clase de restos módulo 99 que « $x_4x_3x_2x_1x_0$ ».

La demostración es tan fácilmente generalizable que está ya claro cual será el criterio de divisibilidad por 999:

$$23456007/999 = 23479,486486... \quad (007 + 456 + 23 = 486)$$

y, en general, para $999...9$ (n nueves).

Si nos decidimos a indagar por nuestra cuenta, si desnudamos las situaciones en lugar de manejarlas empaquetadas como nos las dejaron en nuestros años de estudiantes, hay una probabilidad alta de que encontremos sorpresas inesperadas.

XI

¿Qué tiene el 9 para que pasen con él estas cosas? La respuesta está clara a estas alturas. Si el resto de la división de « abc » entre 9 es $a + b + c$ (es decir: $a + b + c$ pertenece a la misma clase de restos módulo 9 que « abc ») ello es debido a que 9 es el número anterior a la base del sistema de numeración que empleamos.

Fantaseemos un poco. El citado al-Kashi (s. xv) manejaba, además del decimal, un sistema de numeración posicional de base 60. Por analogía, el criterio de divisibilidad por 59 en este sistema debería ser el mismo que el del 9 en el decimal. Una descomposición como las del párrafo anterior en base 10 no cambiará en lo esencial en base 60. ¿Sabría esto al-Kashi? Es igual, juguemos un rato (con nuestras grafías, claro).

$$\text{«}28\ 45\ 53\text{»} / \text{«}59\text{»} = \text{«}29\ 15\ ,\ 8\ 8\ 8\text{...»}$$

como muestra la división de abajo. Y, efectivamente,

$$\text{«}28\text{»} + \text{«}45\text{»} + \text{«}53\text{»} = \text{«}2\ 6\text{»}$$

(es decir, 126)

y

$$\text{«}2\text{»} + \text{«}6\text{»} = \text{«}8\text{»}$$

28	45	53	59			
-28	31		29	15	,	8
	14	53				
	-14	45				
		8		0		
		-7		52		
		8				

XII

¿Hasta cuándo la insistencia en un uso exclusivamente instrumental de las matemáticas en las aulas? Es cierto

*¿Hasta cuándo
la insistencia
en un uso
exclusivamente
instrumental
de las matemáticas
en las aulas?*

4 Y de la mujer, obviamente. (El añadido de esta nota no nos parece superfluo en absoluto.)

Carlos Usón
IES Quintiliano.
Calahorra (La Rioja).
Sociedad Riojana
de Profesores de Matemáticas

Ángel Ramírez
IES Biello Aragón.
Sabiñánigo (Huesca).
Sociedad Aragonesa
de Profesores de Matemáticas
«Pedro Sánchez Ciruelo»

que hay toda una larga tradición cultural en esta línea. La obra de Abu-l-Wafa antes citada no incluye demostraciones de sus reglas y resultados. Como su título indica se dirige a escribas y comerciantes, a los que se les aportan reglas y ejemplos suficientes para que operen con eficacia; no es necesario que comprendan. La cuestión a plantear es qué entendemos, o deberíamos entender, como conveniente para la formación de los adolescentes. También sobre esto se ha escrito mucho y se ha leído o asumido muy poco. Citaremos simplemente, para terminar, un fragmento de Erich Fromm (1998).

El pensamiento crítico es la facultad humana específica. El pensamiento instrumental, o sea, pensar cómo conseguiré, qué haré para coger esto y aquello, es cosa que hacen muy bien los chimpancés. De hecho, los chimpancés son animales con una inteligencia instrumental excelente. En experimentos, han cumplido tareas tan difíciles que muchas personas no habrían podido hacerlas. En cambio, la facultad de pensar críticamente es una dote exclusiva del hombre⁴ y es a la vez su único recurso. Sólo con el pensamiento crítico puede el hombre apreciar la realidad.

Bibliografía

- COLLETTE, J. P. (1985): *Historia de las matemáticas, tomo I*, Siglo XXI, Madrid.
- FREINET, C. (1986): *Parábolas para una pedagogía popular*, Planeta-Agostini.
- FROMM, E. (1998): *El arte de escuchar*, Altaya, Barcelona.
- RAMÍREZ, A. (1997): *De la mano a la electrónica. Máquinas de calcular* (folleto para la exposición del mismo título en la UNED de Barbastro, en noviembre)
- RAMÍREZ, A. y C. USÓN (1996): «...Por los trillados caminos de la aritmética escolar de las cuatro operaciones», *Suma*, n.º 21, 63-71.
- YOUSCHKEVITCH (1976): *Les mathématiques arabes (VIII-XV siècles)*, J. Vrin, Librairie philosophique, Paris.
- Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*, MEC. Madrid, 1985.

El aprendizaje de estrategias de resolución de problemas con una hoja de cálculo*

**Manoli Pifarré Turmo
Jaume Sanuy Burgués**

EL OBJETIVO de este artículo consiste en presentar las posibilidades de utilizar una hoja de cálculo como instrumento mediador para el aprendizaje de estrategias metacognitivas de resolución de problemas a alumnos de enseñanza secundaria obligatoria.

Nuestro trabajo parte de la revisión de diferentes investigaciones que consideran el concepto de la metacognición como el control y la regulación de la actividad cognitiva (Brown, 1987; Martí, 1995). Desde estos trabajos, se diferencian tres fases o estadios en el proceso de gestión y de regulación de las acciones cognitivas: la planificación antes de iniciar la resolución de una tarea; el control de la acción y la rectificación en caso necesario mientras se realiza la tarea y la evaluación del resultado final de la acción.

La importancia del uso de diferentes estrategias correspondientes a estos tres momentos del proceso de resolución de una tarea también se aprecia en los trabajos de investigación realizados desde la psicología cognitiva y en referencia a la mejora del proceso de resolución de problemas matemáticos. En este campo de estudio se plantea la enseñanza explícita de estrategias metacognitivas como variable que puede mejorar el proceso de resolución de problemas de los alumnos. Las investigaciones que han analizado el proceso de resolución de problemas de los alumnos de diferentes niveles académicos después de seguir un programa de enseñanza/aprendizaje de estrategias metacognitivas de resolución de problemas muestran resultados muy positivos (Delclos i Harrington, 1991; Shaw, 1997).

Nuestro estudio se insiere en este tipo de trabajos y tiene como objetivo educativo potenciar el aprendizaje de estrategias de planificación, de regulación y de evaluación para resolver problemas de matemáticas a alumnos de ESO. Para ello, en nuestro trabajo, la enseñanza/aprendizaje de estrategias metacognitivas se realiza con la mediación del programa informático de una hoja de cálculo.

Este artículo presenta, en primer lugar, las características educativas del programa informático de una hoja de cálculo y que pueden facilitar el aprendizaje de estrategias de resolución de problemas en la enseñanza secundaria obligatoria. En segundo lugar, se describe las principales características de una propuesta didáctica que incorpora este programa informático para la enseñanza/aprendizaje de estrategias de resolución de problemas numéricos de proporcionalidad. Y, en tercer lugar, se presentan algunos de los resultados obtenidos por los alumnos y que confirman las posibilidades educativas de la hoja de cálculo en la clase de matemáticas.

* Este estudio ha sido realizado gracias a una ayuda para la financiación de proyectos de investigación de la Universidad de Lleida, proyecto n.º 812.

Características educativas de una hoja de cálculo para el aprendizaje de estrategias de resolución de problemas

Creemos importante destacar las siguientes características de las hojas de cálculo y que justifican su importancia educativa en el área curricular de las matemáticas.

- a) Las hojas de cálculo, al igual que otros programas informáticos, permiten una representación multisimbólica de la realidad. Una misma información puede ser representada utilizando diferentes códigos simbólicos (matemático, escrito, gráfico, etc.) aportando un conocimiento y una representación compleja de la realidad.

Esta multi-representación de la información puede favorecer el aprendizaje de las relaciones esenciales de un contenido, potenciando su generalización y su transferencia a otras situaciones. El aprendizaje resultante puede ser un aprendizaje más profundo y significativo, centrado en los elementos y las relaciones substanciales del contenido (Balacheef y Kaput, 1996).

Por ejemplo, cuando un alumno utiliza una hoja de cálculo para resolver un problema debe representar el enunciado del problema en una estructura de casillas que forman una tabla de doble entrada. Esta primera traducción y manipulación de los datos favorece que el alumno comprenda mejor las relaciones que existen entre la información numérica y textual presentada en el enunciado del problema. Posteriormente, y durante todo el proceso de resolución, la información y el trabajo matemático de los datos pueden ser traducidos a un lenguaje gráfico, utilizando las opciones de gráficos que el programa ofrece al alumno (diagrama de barras, de líneas...), potenciando el análisis y la comprensión de las consecuencias que tienen para la resolución del problema las acciones matemáticas que realiza el alumno.

- b) El tipo de interacción del alumno con un programa informático, como la hoja de cálculo, desarrolla el aprendizaje de un proceso de ejecución riguroso, preciso, ordenado y reglado, características importantísimas en la utilización del lenguaje matemático. El espacio de trabajo de la hoja de cálculo en casillas que forman un cuadro de doble entrada requiere que el alumno organice toda la información que introduce, que etiquete y que numere cada una de las casillas del cuadro. Estas exigencias de trabajo en la resolución de un problema con la hoja de cálculo requieren que el alumno planifique todas sus acciones favoreciendo una resolución del problema más consciente y controlada (Martí, 1992).

Las hojas de cálculo, al igual que otros programas informáticos, permiten una representación multisimbólica de la realidad.

La resolución de un problema con la utilización de una hoja de cálculo obliga al estudiante a explicitar el proceso de pensamiento que sigue para resolverlo.

- c) El tipo de interacción que se produce cuando el alumno resuelve un problema utilizando una hoja de cálculo es continuada, inmediata y dinámica. Cada una de las acciones y decisiones que realiza el alumno tienen una respuesta inmediata en la pantalla del ordenador. Esta característica es muy importante, ya que puede facilitar que el alumno regule y evalúe sus acciones en función de las consecuencias que éstas producen en el proceso de resolución y, por tanto, que pueda modificarlas si no se adecuan a los objetivos previamente planificados. Este tipo de interacción puede potenciar el aprendizaje de estrategias de control, de regulación y de evaluación, estrategias muy importantes en la resolución de problemas matemáticos (Schoenfeld, 1992).
- d) La resolución de un problema con la utilización de una hoja de cálculo obliga al estudiante a explicitar el proceso de pensamiento que sigue para resolverlo. El alumno debe introducir las órdenes necesarias en el ordenador para que éste las ejecute y resolver el problema. Estas órdenes, que representan el proceso de resolución seguido por el alumno, quedan registradas en la hoja y permiten que éste las analice y evalúe. En este sentido, el ordenador actúa como «espejo del propio pensamiento» favoreciendo, de este modo, la consciencia y la regulación de los propios procesos cognitivos (Monereo, 1992).
- e) La resolución de un problema utilizando una hoja de cálculo permite manipular números con una gran facilidad. El alumno puede cambiar números, fórmulas y rehacer cálculos de manera muy sencilla y sin esfuerzo. Éste tiene a su alcance un entorno que le estimula a establecer hipótesis matemáticas y verificarlas. Es decir, permite al alumno comprobar «que pasa si...» cambia un número, una fórmula de la hoja, y puede explorar cómo estas modificaciones

afectan en el resultado del problema. En definitiva, la hoja de cálculo facilita que el alumno «juegue» con los números de manera fácil e inmediata (Abramovich y Nabors, 1997).

Esta facilidad que ofrece la hoja de cálculo para que el alumno experimente y manipule entornos numéricos puede favorecer el aprendizaje significativo de conceptos matemáticos, porque proporciona al alumno la oportunidad de ser un sujeto activo en la manipulación de contenidos de alto nivel de abstracción, una de las bases fundamentales para conseguir un aprendizaje significativo.

- f) El uso de la hoja de cálculo para la resolución de un problema realiza una función de compensación y de descarga de una parte del trabajo del alumno. La hoja de cálculo asume la realización de cálculos matemáticos, a veces largos, complicados y costosos, y permite al estudiante dedicar sus esfuerzos cognitivos a pensar cómo resolver el problema, qué procedimientos son los más adecuados para conseguir el objetivo planteado en el enunciado del problema (Filloy y Sutherland, 1996).

Esta facilidad que aporta el uso de la hoja de cálculo para resolver el cálculo numérico puede favorecer el aprendizaje de contenidos procedimentales de todos los alumnos, pero, especialmente, de los alumnos con dificultades educativas a la hora de efectuar cálculos numéricos (dificultades para recordar las tablas de multiplicar, dificultades en la mecánica del cálculo...), permitiendo a estos alumnos detenerse en el proceso de resolución y tener posibilidades de conseguir resolver el problema con éxito, sin topar con el «fantasma» del cálculo, obstáculo insuperable para muchos alumnos.

- g) Finalmente, y como consecuencia de la función de compensación y de ayuda en la manipulación numérica que realiza la hoja de cálculo,

*El uso
de la hoja
de cálculo
para la resolución
de un problema
realiza
una función
de compensación
y de descarga
de una parte
del trabajo
del alumno.*

su uso aumenta la motivación de los alumnos en el área de matemáticas y en el proceso de resolución de problemas. La eliminación de las dificultades del cálculo posibilita que un mayor número de alumnos consiga con éxito la solución del problema, mejorando su autoconcepto y su motivación (Ortega, 1990).

La hoja de cálculo en la Enseñanza Secundaria Obligatoria: un ejemplo concreto

Metodología

A continuación, vamos a analizar algunas de las características y de los resultados obtenidos en un estudio educativo que ha incorporado la hoja de cálculo para el aprendizaje de estrategias metacognitivas de resolución de problemas matemáticos. En este trabajo participan todos los alumnos de tercer curso de ESO del Instituto de Secundaria IES Ronda de la ciudad de Lleida, un total de 106 alumnos.

Con el objetivo de estudiar y comparar las características del aprendizaje de los alumnos cuando utilizan una hoja de cálculo y cuando no utilizan este programa informático, la muestra de alumnos se divide en dos grupos. Un grupo, que denominamos «ordenador», formado por 46 alumnos y que sigue una propuesta didáctica que incorpora la hoja de cálculo *Works* para facilitar el aprendizaje de estrategias de resolución de problemas; y un grupo, que denominamos «no ordenador», formado por 60 alumnos y que utiliza una calculadora para resolver los problemas planteados en la propuesta didáctica.

El estudio se realiza en tres fases o momentos: evaluación inicial-intervención-evaluación final.

Las pruebas de evaluación inicial y final consistieron en la resolución de 7 problemas sobre proporcionalidad numérica similares a los realizados en la propuesta didáctica, cinco de los cuales se resolvían individualmente y dos en pareja. En la prueba final, uno de los problemas a resolver individualmente y uno a resolver en pareja, el grupo «ordenador» utilizaba la hoja de cálculo y el grupo «no ordenador» la calculadora.

La fase de intervención consistió en la realización por los alumnos de dos propuestas de enseñanza/aprendizaje de estrategias metacognitivas de resolución de problemas sobre el contenido de la proporcionalidad y a lo largo de un trimestre de clase (30 horas de clase, aproximadamente).

Las dos propuestas de enseñanza/aprendizaje comparten los mismos objetivos, contenidos, actividades y metodología de enseñanza y difieren en que el grupo «ordenador» utiliza las potencialidades educativas del programa infor-

mático de una hoja de cálculo para resolver los problemas que se plantean en la propuesta didáctica y facilitar el aprendizaje de estrategias metacognitivas de resolución de problemas y el grupo «no ordenador» utiliza la calculadora.

En líneas generales, las dos propuestas didácticas se dividen en dos partes bien diferenciadas. Una primera parte que tiene como principal objetivo el aprendizaje del contenido de la proporcionalidad directa, básicamente, se trabajan los contenidos conceptuales de: proporción, razón y porcentaje. En esta primera parte de la propuesta didáctica se plantean problemas cotidianos sencillos y se favorece que el alumno aplique, perfeccione y amplíe las estrategias de resolución de este tipo de problemas adquiridas de manera intuitiva y espontáneamente en la vida cotidiana. Para resolver estos problemas se potenció el aprendizaje de la estrategia específica de proporcionalidad del «cálculo del operador funcional» y el caso específico del «cálculo del valor de la unidad» (Vergnaud, 1983).

Una segunda parte que tiene como principal objetivo favorecer el aprendizaje de estrategias de resolución de problemas complejos sobre proporcionalidad numérica. En esta segunda parte de la propuesta didáctica se plantea al alumno la resolución de 10 problemas contextualizados en la vida cotidiana, así, el enunciado del problema hace referencia a conceptos de la vida diaria como por ejemplo: el IVA., valoración de las condiciones de diferentes préstamos bancarios, la interpretación de facturas de luz, gas, teléfono, el cálculo de una nómina... En estos problemas se presentan situaciones problemáticas amplias, con una gran cantidad de datos y que implican la búsqueda de un proceso de resolución. El alumno, para poder contestar a las preguntas planteadas en el enunciado del problema, es necesario que seleccione y articule diferentes estrategias de resolución, tanto generales como específicas del contenido de la proporcionalidad. En el cuadro 1 (figura 1) se presenta un ejemplo de los problemas planteados en esta parte de la propuesta didáctica.

Para conseguir que los alumnos resuelvan con éxito estos problemas complejos, se ha diseñado un proceso de enseñanza/aprendizaje que guía el aprendizaje de estrategias metacognitivas de resolución de problemas. Este guiamiento se realiza con el material didáctico que denominamos «hojas para pensar el problema» (Pifarré, 1998).

El material didáctico «hojas para pensar el problema» ha sido diseñado para ser una ayuda externa que el alumno utiliza mientras resuelve el problema. En este material se plantean interrogantes, indicaciones y sugerencias sobre los posibles procedimientos para resolver con éxito un problema. El objetivo último de esta interrogación al alumno es favorecer la estructuración de la resolución del problema y la reflexión y discusión sobre los procedimientos que hay que utilizar antes, durante y después del proceso de resolución. En esta guía, y en el grupo «ordenador» se

Seguro que sueñas tener dieciocho años y que tus padres te regalen un coche. Tener un coche exige tener que pagar un gran número de gastos. En este problema te proponemos que reflexiones sobre los gastos de un coche y calcules cuánto cuesta al día mantenerlo. Observa el siguiente resumen de los datos sobre los diferentes gastos que ha anotado un propietario de un coche durante seis años:



Tiempo que ha utilizado el coche	6 años
Precio de compra	1.570.000 pta.
Kilómetros realizados	500.000 km
Consumo medio de gasolina.....	9 litros cada 100 km
Seguro obligatorio anual (media)	46.000 pta./año
ITV a partir del 4º año (media)	7.000 pta./año
Limpieza mensual (media)	500 pta./mes
Cambio de aceite	4.000 pta. Cada 5.000 km
Cambio pastillas del freno.....	12.000 pta. Cada 40.000 km
Reparaciones (media)	25.000 pta./año

Calcula:

- ¿Cuánto ha costado el uso y el mantenimiento del coche, de media y por día, durante los seis años que este propietario ha tenido el coche?
- ¿Qué concepto implica una mayor inversión de dinero? ¿En qué porcentaje respecto al total de los gastos?
- ¿Qué concepto implica una menor inversión de dinero? ¿En qué porcentaje respecto al total de los gastos?

Cuadro 1: Ejemplo de un problema de la propuesta didáctica (adaptado de Pifarré, 1998:107-108)

- Lee el enunciado del problema. Subraya los datos más relevantes: ¿Qué te pide el problema? ¿Qué datos del enunciado son los más importantes?
- ¿Qué te pide el problema? ¿Qué tienes que encontrar? ¿Dónde tienes que llegar?
- ¿Qué datos ya conoces? Anótalos brevemente.
- Anota los datos que tienes que encontrar para solucionar el problema

Cuadro 2. Pautas para analizar el problema

Figura 1

favorece que el alumno utilice las posibilidades de la hoja de cálculo para seleccionar los procedimientos más adecuados y resolver el problema.

Concretamente, la guía se estructura en cinco apartados o estrategias generales que la investigación en resolución de problemas muestra que presentan los expertos cuando resuelven un problema (Schoenfeld, 1992; García Jiménez, 1992; Shaw, 1997). Cada estrategia define un objetivo general que el alumno puede alcanzar realizando diferentes procedimientos en función de las características del problema. Para enfatizar el concepto de estrategia como la definición de un objetivo y la planificación, selección e implementación de diferentes procedi-

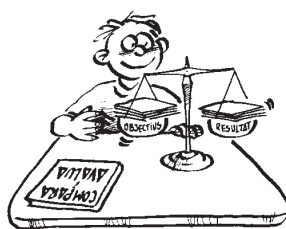
Los diferentes procedimientos y acciones para resolver un problema que se trabajan en la guía son los siguientes:

Este primer grupo de indicaciones tienen como principal objetivo facilitar un buen grado de análisis, comprensión y representación de la situación inicial y final del problema. En este apartado se pide al alumno que explicita los objetivos del problema, los datos del enunciado y los principales datos desconocidos y que son necesarios calcular para resolver el problema. Un ejemplo de las cuestiones planteadas en este apartado se muestra en el cuadro 2 (figura 1).

Este segundo grupo de ayudas pretenden que el alumno reflexione sobre cómo organizar y diseñar un plan de resolución que le permita conseguir los objetivos del problema con el uso de una hoja de cálculo. En este apartado, se pide que el alumno en un lenguaje sencillo, no matemático, diseñe las principales líneas de actuación para resolver el problema.

Una vez que el alumno ha perfilado las acciones que debe realizar para resolver el problema, se le pide que las represente y las organice en una estructura simbólica de un cuadro de doble entrada y utilizando el lenguaje matemático. El alumno tiene que representar toda la información que ha ido descubriendo en los apartados anteriores: datos conocidos, datos desconocidos, algoritmos a utilizar... en una tabla de doble entrada.

Cuatro son los motivos que fundamentan la elección de representar y organizar la información del problema en un cuadro de doble entrada. En primer lugar, se trata de una estrategia muy



visual que permite en un espacio reducido representar las relaciones entre una gran cantidad de información. En segundo lugar, la información representada en la tabla permite trabajar procesos tan importantes en la resolución de un problema como: observación, comparación y análisis de datos numéricos, representación lógico-matemática de los datos del problema, evaluación y detección de errores. En tercer lugar, la representación de la información numérica en una tabla es una estrategia muy utilizada para representar información en otras áreas curriculares y también fuera del ámbito escolar, principalmente en los medios de comunicación, tanto en la prensa escrita como en televisión. En cuarto lugar, la organización de la información en un cuadro de doble entrada es la manera como el programa informático de la hoja de cálculo organiza y manipula la información numérica.

En el cuadro 3 (figura 2) se muestra un ejemplo de las cuestiones planteadas en este apartado de la guía.

- Primero, piensa qué etiquetas pondrás en cada fila y/o columna,
- Segundo, piensa y escribe como organizarás todos los datos en la tabla, tanto los que conoces como los que tienes que encontrar.
- Tercero, piensa y escribe las principales órdenes (fórmulas) que darás al ordenador para que realice los cálculos necesarios y solucionar el problema.

Cuadro 3: Pautas para organizar el proceso de resolución del problema

¿Cómo puedes evitar en el futuro cometer este tipo de error?

Cuadro 4: Pautas para evaluar el resultado y el proceso de resolución del problema

Figura 2

d) Resolver el problema

El objetivo de las sugerencias de este apartado es el de favorecer una resolución del problema reflexiva y controlada por el alumno. Este apartado proporciona al alumno un conjunto de preguntas que éste se puede formular mientras resuelve el problema con el objetivo de contrastar si los diferentes «subresultados» que va obteniendo son adecuados y van en la línea de la planificación realizada anteriormente.

e) Evaluar el problema

Este último apartado de la guía pretende conseguir dos objetivos, en primer lugar, facilitar la detección de posibles errores en el proceso de resolución y, en segundo lugar, facilitar la valoración del proceso y su posterior optimización.

Para conseguir el primer objetivo se sugiere al alumno que utilice la estrategia de traducir a un lenguaje gráfico los resultados y el proceso de resolución. La hoja de cálculo permite al alumno representar la información de la hoja de trabajo en un gráfico en el que puede valorar si la evolución de los datos es lógica y le permite detectar algún error.

Para conseguir el segundo objetivo se sugiere al alumno que busque otra manera de resolver el problema. Esta estrategia puede ayudar al alumno bien a encontrar otras maneras de solucionar el problema o bien, a justificar que el proceso seguido es el más adecuado.

Un ejemplo de las cuestiones planteadas en este apartado se muestra en el cuadro 4 (figura 2).

Algunos resultados empíricos

A continuación vamos a exponer, en primer lugar, el análisis del resultado obtenido por los dos grupos de alumnos después de seguir las dos propuestas didácticas y, en segundo lugar, el tipo de estrategias que utilizan los dos grupos de alumnos para resolver un problema después del proceso de enseñanza/aprendizaje.

El análisis del resultado del aprendizaje se realiza a partir de la corrección de las pruebas de evaluación inicial y final. Esta corrección se ha efectuado con una pauta en la que se detallan los criterios de evaluación de cada problema. Cada problema se ha puntuado de 0 a 1 puntos.

Para garantizar la fiabilidad de la pauta de corrección y de la evaluación del resultado que obtienen los alumnos, el 25% de las pruebas han sido corregidas por un sistema de dos jueces. El análisis estadístico de los resultados obtenidos por los dos jueces se ha realizado mediante la prueba estadística de *Correlación de Pearson*. La fiabilidad entre los dos jueces es muy alta, las correlaciones se sitúan entre 0,86 y 1,00.

Los resultados obtenidos en referencia al nivel de aprendizaje obtenido por los dos grupos de alumnos se orientan en la dirección esperada. Los alumnos del grupo «ordenador»



obtienen en la prueba de evaluación final resultados estadísticamente superiores que los alumnos del grupo «no ordenador» tanto en la resolución individual de problemas ($t(1,105) = 2,5; p < 0,05$) como en la resolución de problemas en parejas ($t(1,105) = 2,5; p < 0,05$) tal y como se observa en la figura 3. Este resultado nos permite afirmar que el uso intencional de las características educativas de una hoja de cálculo para enseñar estrategias metacognitivas de resolución de problemas incide positivamente en el proceso de aprendizaje de los alumnos.

Rendimiento en la resolución de problemas

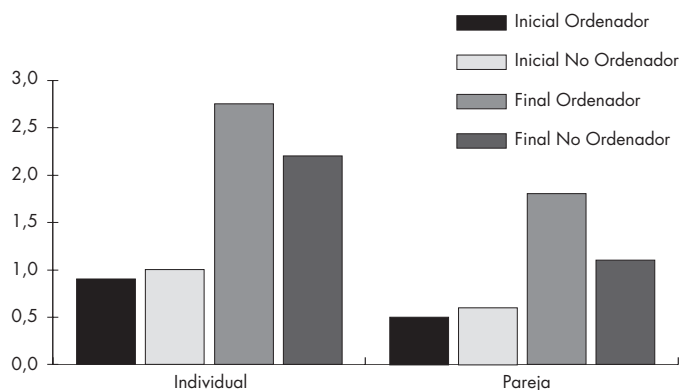


Figura 3. Puntuaciones medias obtenidas por los alumnos en la resolución individual y en pareja en las pruebas de evaluación inicial y final.

La puntuación máxima de los problemas resueltos individualmente es de 5 puntos y la puntuación máxima de los problemas resueltos en pareja es de 2 puntos

Con el objetivo de conocer las características del proceso de resolución de los alumnos que han participado en nuestro estudio después de seguir la propuesta didáctica diseñada se registra en vídeo la resolución de un problema con y sin uso de la hoja de cálculo de 12 parejas de alumnos escogidas al azar entre la muestra total de alumnos.

Posteriormente, la información grabada se transcribe en unos protocolos que recogen simultáneamente las acciones y las verbalizaciones de los dos alumnos. En la tabla 1 se presenta un ejemplo de una transcripción.



Tiempo	Verbal /No verbal		Acciones	
	Alumno 1	Alumno 2	Alumno 1	Alumno 2
0'-2'			0'-2' Sitúa a hoja en el centro, lectura individual, en silencio	0'-2' Lectura individual, en silencio
2'-4'	2'30" De descuento. Esto es lo que tenemos (señala los datos del problema) 3'40" Ahora escribimos los datos, luego restamos y calculamos el porcentaje.	2'04" Tenemos que sacar el porcentaje. 2'15" (lee en voz alta) el porcentaje... (piensa) 2'40" ¿Y si hacemos un cuadro? 3'50" Vale. Yo te dicto.	2'06" Continúa leyendo en silencio 2'45" Mira lo que hace el compañero	2'45" Coge una hoja en blanco, dibuja un cuadro de doble entrada con cuatro columnas. Escribe como etiquetas: precio actual, precio rebajado, descuento.

Tabla 1. Ejemplo de una transcripción del proceso de resolución del problema de una pareja de alumnos del grupo «no ordenador»

Finalmente, se categoriza la información grabada y transcrita en función de las diferentes categorías elaboradas en un instrumento de evaluación específicamente diseñado en nuestro estudio.

En nuestro trabajo se utilizan cuatro categorías que, en líneas generales, corresponden a las estrategias trabajadas en la guía *hojas para pensar el problema*, las categorías utilizadas son las siguientes:

- **Análisis.** El alumno divide el problema en componente más básicos, examina y busca las relaciones entre los diferentes elementos. El alumno realiza acciones como: lectura, relectura, selecciona datos, anota datos del enunciado, representa datos del enunciado.
- **Planificación.** El alumno organiza el proceso de resolución del problema. Se realizan acciones como: selecciona la estrategia general de resolución del problema; tantea o explora posibles acciones para resolver el problema; explicita un conjunto de procedimientos ordenados a ejecutar; organiza los

...se categoriza la información grabada y transcrita en función de las diferentes categorías elaboradas en un instrumento de evaluación específicamente diseñado en nuestro estudio.

datos o las acciones que realizará para resolver el problema.

- **Ejecución.** El alumno realiza un conjunto de acciones y de procedimientos matemáticos para resolver el problema. El alumno realiza acciones como: ejecuta un procedimiento matemático (correcto o incorrecto), realiza cálculos, introduce datos en el ordenador o en la calculadora, realiza acciones de formato en la hoja de trabajo.
- **Revisión.** El alumno realiza acciones para controlar, revisar la validez del proceso de resolución y/o de los resultados que va obteniendo y detectar posibles errores. El alumno realiza acciones como: cuestiona verbalmente la validez de algún resultado o del procedimiento de resolución; busca errores de forma poco sistemática; revisa de manera sistemática los datos introducidos, los procedimientos de resolución utilizados y los cálculos matemáticos realizados.

El proceso de categorización se ha realizado utilizando un procedimiento de toma de decisiones por consenso entre dos jueces. El procedimiento utilizado ha sido el siguiente: en primer lugar, a partir de la visualización del vídeo y de las transcripciones, los dos jueces categorizan, por separado, el proceso de resolución de una pareja en intervalos aproximados de 20 minutos. En segundo lugar, los dos jueces contrastan la categorización realizada y en los segmentos en que se observan diferencias se llega a un acuerdo por consenso.

Se ha utilizado este procedimiento dada la imposibilidad de definir previamente todas las posibles acciones que los alumnos pueden realizar para resolver el problema porque, si bien en cada categoría se ha definido el objetivo general que dirige la acción del alumno y algunas de las diferentes acciones que el alumno puede realizar para conseguir este objetivo, éstas no son las únicas.

Los resultados obtenidos en referencia a las estrategias utilizadas por los dos grupos de alumnos para resolver un problema muestra importantes diferencias. El grupo de alumnos que utiliza el programa informático de la hoja de cálculo realiza un mayor número de estrategias de análisis, de planificación y de revisión del proceso de resolución que el grupo de alumnos que no utiliza el ordenador, tal y como se puede observar en la figura 4.

Estrategias metacognitivas: puntuación en porcentajes

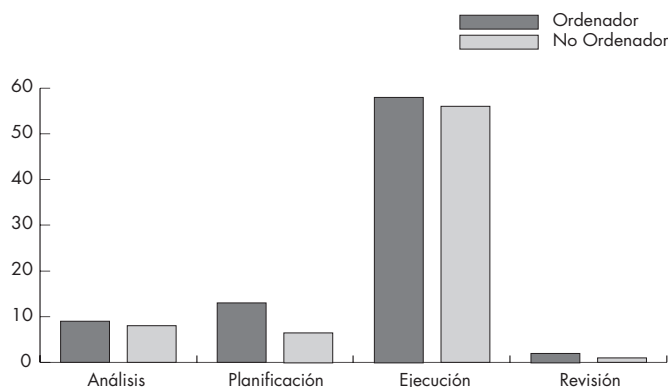


Figura 4. Porcentaje de tiempo en que los alumnos ejecutan una estrategia metacognitiva durante la resolución de un problema en pareja de la prueba de evaluación final

Resulta pertinente reseñar, a modo anecdótico, que la propuesta de enseñanza/aprendizaje realizada también ha aportado cambios en la percepción del uso y de la utilidad de los ordenadores por parte de los alumnos. El trabajo ha servido para que los alumnos cambien la imagen y, con frecuencia, el uso tradicional del ordenador dentro y fuera del contexto escolar. Éste ha pasado de ser un instrumento que facilita el trabajo, que ahorra tiempo y que permite el juego instructivo, a ser un soporte y una guía que ayuda a estructurar y pensar el proceso de resolución de problemas matemáticos.

*El trabajo
ha servido para
que los alumnos
cambien
la imagen y,
con frecuencia,
el uso tradicional
del ordenador
dentro y fuera
del contexto
escolar.*

Discusión de resultados y conclusiones

En este artículo, hemos aportado evidencia empírica y argumental que avala la mayor presencia de estrategias de planificación, de regulación y de evaluación del proceso de resolución de problemas del grupo de alumnos que ha utilizado la hoja de cálculo. Desde nuestro punto de vista, esta mayor presencia de estrategias metacognitivas puede explicar el mejor rendimiento conseguido por este grupo de alumnos.

Un gran número de investigaciones ha destacado, por un lado, la importancia de las estrategias de planificación y de revisión para la resolución exitosa de un problema, y por otro lado, el incremento en el uso de este tipo de estrategias después de un período de instrucción (Delclos y Harrington, 1991; Schoenfeld, 1992).

En referencia al uso de la mediación de la hoja de cálculo, los resultados obtenidos en nuestro estudio se enmarcan en la misma tendencia que la observada en diversos estudios que destacan las potencialidades educativas del medio informático. Entre los estudios más próximos a nuestro trabajo destacamos los resultados conseguidos por Lambrecht (1993) que utiliza una hoja de cálculo para resolver problemas sobre el contenido de la proporcionalidad relacionados con el campo temático de la banca. En este estudio, los alumnos que utilizan la hoja de cálculo también obtienen niveles de aprendizaje estadísticamente superiores que los alumnos de un grupo control que utilizan una calculadora para resolver los mismos problemas.

Desde nuestro punto de vista, dos características de la hoja de cálculo han potenciado un mejor aprendizaje del contenido matemático y de estrategias metacognitivas. En primer lugar, la

manera de organizar y de manipular los datos del programa informático en una estructura lógica de cuadro de doble entrada favorece el análisis del enunciado del problema, la estructuración y la planificación del proceso de resolución porque el alumno ha de realizar acciones como: separar datos conocidos y desconocidos para etiquetar las filas y las columnas del cuadro de doble entrada; traducir la información del enunciado del problema en información matemática que el programa informático pueda entender, y organizar toda la hoja de trabajo para poder resolver el problema.

En segundo lugar, la característica del medio informático de ser un entorno interactivo en el cual las acciones que realiza el alumno tienen una consecuencia inmediata en la pantalla del ordenador y éste puede modificarlas fácilmente si no se adecuan a sus objetivos ha tenido una incidencia positiva en el aprendizaje de estrategias de revisión, control y evaluación del proceso de resolución.

Finalmente, el hecho de que los alumnos que han realizado nuestra propuesta didáctica utilicen estrategias de planificación, de regulación y de evaluación para resolver problemas matemáticos es, desde nuestro punto de vista, muy importante ya que muestra la posibilidad de enseñar estrategias en una situación de aula e integradas en la programación habitual del profesor. Para ello es necesario que el profesor diseñe situaciones de enseñanza/aprendizaje que, en primer lugar, ofrezcan a los alumnos diferentes soportes (material didáctico, ordenador...) que guíen el conocimiento, la selección y el uso de diferentes técnicas, métodos y procedimientos de resolución y, en segundo lugar, favorezcan espacios de discusión y de reflexión sobre el proceso de resolución de problemas, el trabajo en situaciones de pequeño grupo puede potenciar esta reflexión.

*...la característica
del medio
informático
de ser un entorno
interactivo
[...]
ha tenido
una incidencia
positiva
en el aprendizaje
de estrategias
de revisión,
control
y evaluación
del proceso
de resolución.*

**Manoli Pifarré
Jaume Sanuy**
Facultad de Ciencias
de la Educación.
Universidad de Lleida

Bibliografía

- ABRAMOVICH, S. y W. NABORS (1997): «Spreadsheets as generators of new meanings in middle school algebra», *Computers in the schools*, n.º 13 (1/2), 13-25.
- BALACHEFF, N. y J. KAPUT (1996): «Computer-based learning environments in mathematics» en A. J. BISHOP, K. CLEMENTS, C. KEITEL, J. KILPATRICK y J. LABORDE: *International handbook of mathematics education*, Kluwer Academic Publishers, London, 469-501.
- BROWN, A. (1987): «Knowing when, why and how to remember: A problem of metacognition», en R. GLASER (ed.): *Advances in instructional psychology*, Lawrence Erlbaum, Hillsdale.
- DELCLOS, V. y C. HARRINGTON, (1991): «Effects of strategy monitoring and proactive instruction on children's problem solving performance», *Journal of Educational Psychology*, n.º 83 (1), 35-42.
- FILLOY, E. y S. SUTHERLAND (1996): «Designing curricula for teaching and learning algebra», en A. J. BISHOP, K. CLEMENTS, C. KEITEL, J. KILPATRICK y J. LABORDE: *International handbook of mathematics education*, Kluwer Academic Publishers, London, 139-160.
- GARCÍA JIMÉNEZ, J. E. (1992): «Ideas, pautas y estrategias heurísticas de resolución de problemas», *Aula*, n.º 6, 14-21.
- LAMBRECHT, J. (1993): «Applications software as cognitive enhancers», *Journal of Research on Computing in Education*, n.º 25 (4), 506-520.
- MARTÍ, E. (1992): *Aprender con ordenadores en la escuela*, ICE-Horsori, Barcelona.
- MARTÍ, E. (1995): «Metacognición: entre la fascinación y el desencanto», *Infancia y aprendizaje*, n.º 72, 9-32.
- MONEREO, C. (1992): «Del aprender al com aprender», en *Educar és un procés*, Cruïlla, Barcelona.
- ORTEGA, J. L. (1990): «Aplicaciones de las hojas de cálculo en el ámbito educativo», *INFODIDAC*, junio-agosto.
- PIFARRÉ, M. (1998): *Aprèn estratègies per resoldre problemes matemàtics*, Pagès Editors, Col·lecció de crèdits variables de ESO, Lleida.
- SCHOENFELD, A. (1992): «Learning to think mathematically: Problem Solving, Metacognition, and sense Making in mathematics», en D. GROWS: *Handbook for research on mathematics teaching and learning*, Macmillan Publishing Company, New York, 334-370.
- SHAW, J. (1997): «Cooperative problem solving: using K-W-D-L as an organizational technique», *Teaching children mathematics*, n.º 3 (9), 482-486.
- VERDEBER, N. L. (1990): «Spreadsheets and problem solving with AppleWorks in mathematics teaching», *Jl. of Computers in Mathematics and Science Teaching*, vol. 9 (3), Spring.
- VERGNAUD, G. (1983): «Multiplicative structures», en R. LESH y M. LANDAU (eds.): *Acquisition of mathematics concepts and processes*, Academic Press, New York, 127-174).



*Entre arco y arco
siempre hay algún barco*
XI Olimpiada Matemática Nacional
Equipo 4



Información poliédrica
XI Olimpiada Matemática Nacional
Equipo 5



Jugando con las líneas, de rectas a curvas
XI Olimpiada Matemática Nacional
Equipo 6

*El símbolo $\neq$ no lo creó el hombre,
se encuentra en la naturaleza*
XI Olimpiada Matemática Nacional
Equipo 7
(Premio a la mejor fotografía)



Una propuesta metodológica para la enseñanza de la Geometría a través de los fractales

Lourdes Figueiras, María Molero, Adela Salvador, Nieves Zuasti

REFLEXIONES sobre la enseñanza de la Geometría

La famosa frase de J. Diouddonné «A bas Euclides» pertenece al pasado de la historia de las Matemáticas, sin embargo los efectos que ha producido en la educación matemática de los actuales profesores son impredecibles, ya que ha ido incidiendo, de forma distinta pero siempre nefasta, en muchas generaciones que se han visto privadas, en alguna o en todas, las etapas de su educación de los múltiples y variados recursos que aporta su aprendizaje a la enseñanza de las Matemáticas.

Desde luego aquellos que sufrieron su impacto sólo en la enseñanza universitaria pueden considerarse privilegiados porque al menos disponían de modelos concretos para afrontar el formalismo de las estructuras algebraicas que sustituían al método axiomático deductivo de la geometría euclídea. Sin embargo para todos los que se vieron afectados por este cambio en sus primeras etapas educativas los resultados han sido en la mayoría de los casos irreversibles, y muchos de ellos son en la actualidad profesores de Matemáticas. No hay duda de la educación que se ha recibido cuando en la resolución de un problema se prefiere un método algebraico que se ejecuta de forma automática, manejando variables de forma aleatoria frente a un método geométrico en el que la solución se sintetiza en una sola idea.

Es importante tener en cuenta ese principio biológico aplicado tantas veces a situaciones psicológicas según el cual «la ontogénesis (desarrollo del ser) repite la filogénesis (desarrollo de la especie)» y entre la geometría euclídea y la teoría de conjuntos hay veinte siglos de diferencia. Y aunque la geometría fractal es también un producto del último tercio de este siglo que resalta por su aplicabilidad

La enseñanza de la Geometría es un asignatura pendiente en educación matemática, y nuestra propuesta metodológica es enseñarla siempre dentro del aula y aprovechando todas las oportunidades. En este artículo utilizamos un tema de innovación matemática, los objetos fractales, para sugerir actividades de aula donde se trabaje en Geometría, además de límites, sucesiones, funciones complejas...

ARTÍCULOS

a la realidad, su especial relación con la naturaleza y su intrínseca belleza, los métodos que se utilizan para su estudio están basados en los principios de la geometría.

En las Matemáticas que se enseñan, aquellas que en la Enseñanza Obligatoria se dice que servirán para adquirir lo que se necesita para desenvolverse en la vida, ¿quién puede negar un sitio a la belleza? ¿pretendemos dejarnos llevar sólo por el dudoso pragmatismo de una matemática recortada tanto en el tiempo disponible para su enseñanza como en la potencialidad de sus valores? En las orientaciones didácticas que sirven de base para los Proyectos Curriculares se insiste en la necesidad de vincular los objetivos pedagógicos a la realidad. El camino aún está por recorrer.

La enseñanza de la Geometría ha sido objeto de numerosos estudios, ha generado variadas experiencias, pero sigue siendo una asignatura pendiente. Cabría preguntarse dónde está el punto débil de la cuestión, ¿por qué se siguen ubicando en los capítulos finales, curso tras curso, los conceptos geométricos básicos, y por qué se mantiene una ordenación que pasa del plano al espacio de una manera fría y poco conectada con la realidad?

En la llamada «pedagogía tradicional» se introducían primero los elementos formales mediante símbolos difíciles de asimilar por los alumnos y las alumnas. Y de la etapa del simbolismo se pasaba a la etapa de representación que en geometría se reducía casi en un 90% al estudio del plano, o del espacio basado en el plano. Para lograr afianzar este sistema formal se recurría entonces a las aplicaciones a la «realidad» (enormes depósitos, esferas, pirámides, etc.). Este proceso en la enseñanza de la geometría es realmente aburrido y conduce en gran parte al fracaso.

La enseñanza de la Geometría debe estar vinculada al entorno para que su estudio y sistematización pueda conseguirse mediante la manipulación de objetos y la observación de los espacios y las formas más cercanas. La toma de contacto con esta realidad ayuda a generar muchas otras percepciones que atañen al campo de la Física, de la Educación Plástica o de la Tecnología. Las aportaciones de la Geometría a estas áreas son fundamentales para la asimilación de conocimientos y procedimientos básicos.

Con frecuencia pedimos a nuestros alumnos y alumnas que sean escrupulosos dibujantes a la hora de reproducir un objeto o una forma geométrica, sin comprobar qué destrezas o conocimientos están utilizando en este proceso. En el fondo la dificultad no es tanto entender lo que ven sino comprender la hoja en blanco en la que tienen que dibujarlo. En los llamados «dibujos libres» que con frecuencia se proponen en las aulas de primaria los alumnos y las alumnas nos dan una clara muestra de su percepción de la realidad y del proceso mediante el cual representan tanto lo que ven como lo que imaginan.

*¿Por qué
no se pueden
ir aprovechando
momentos en los
que la alusión a
una determinada
situación,
o a un problema,
considerado
en principio
aritmético,
permita buscar
un enfoque
que se apoye
en conocimientos
geométricos
ya adquiridos,
favoreciendo
una visión
más amplia
en cuanto
a los recursos con
los que pueden
contar
para interpretar
aquello que
se les plantea?*

En Secundaria, la Educación Plástica y Visual es una magnífica aliada de la geometría ya que descubre con belleza y libertad «dentro de un orden» multitud de conceptos, propiedades y relaciones geométricas cuyo estudio resultaría de otro modo tedioso para buena parte del grupo. Si, además, incorporamos en las aulas la observación y realización de pinturas y esculturas veremos cómo se favorece la comprensión de los conceptos espaciales.

Una cuestión que ayuda a romper con dinámicas anteriores es no relegar la aparición de conocimientos o propiedades geométricas a los temas que el libro de texto utilizado señala estrictamente como tales. ¿Por qué no se pueden ir aprovechando momentos en los que la alusión a una determinada situación, o a un problema, considerado en principio aritmético, permita buscar un enfoque que se apoye en conocimientos geométricos ya adquiridos, favoreciendo una visión más amplia en cuanto a los recursos con los que pueden contar para interpretar aquello que se les plantea? ¿No es más lógico posibilitar una fluida conexión entre las informaciones que han ido recibiendo con el fin de que se constituyan en constructos más afianzados?

Resulta curioso advertir que en multitud de enunciados de ejercicios y problemas, a pesar de que se hable de recipientes, terrenos, telas, carreteras, etc., el alumnado acostumbra a enfrascarse en operaciones aritméticas y no está, en general, interesado en cuestionar si cuenta con suficientes datos para poder hacerse una representación mental que tenga visos de realidad. Las carreteras son siempre rectas, los campos rectangulares, los recipientes son rígidos e indeformables, los trajes que hay que confeccionar han de ser iguales, etc. Esta actitud de desentenderse del discurso que sirve de modo rutinario para ejercitarse sobre las fórmulas y expresiones aprendidas, aún es más penosa cuando se dice que el problema es de Geometría. Se puede trabajar calculando volúmenes de todo tipo de cuerpos geométricos, pero a veces se manifiestan incapaces de estimar el de un objeto que

tienen delante, y por supuesto esto les separa del cálculo estimado de su masa.

Una cuestión que siempre se menciona cuando se habla de enseñanza de la Geometría es proporcionar una adecuada visión del espacio. Quienes nos interesamos por la coeducación, opinamos que es importante trabajar la visión espacial en el aula, estableciendo acciones compensatorias que permitan que chicos y chicas sean igualmente perceptores de las formas y el espacio que les rodea.

En este artículo nos hemos detenido en una geometría bella y novedosa, la geometría fractal, que por un lado nos encontramos en el entorno próximo como montañas, nubes, costas, coliflores, etc, pero cuyos fundamentos matemáticos son realmente complejos. Esto ocurre con frecuencia en muchos fenómenos físicos o en actividades cotidianas, sencillos de explicar mediante una aproximación intuitiva y que ayudan a desarrollar otros conocimientos y destrezas con más motivación.

El término fractal evoca algo de insólita belleza, irregular, intrincado en que las partes más pequeñas son similares al todo, y que se genera por la repetición de procesos muy simples. La geometría fractal es una herramienta que permite describir objetos considerados como extremadamente complejos y desordenados

La Matemática, hasta ahora, cuando estudia la realidad, la simplifica, bien linealizando las leyes, bien suponiendo que las formas son suaves y regulares. Pero gracias al uso del ordenador, que permite la rápida repetición de procesos, se ha posibilitado ampliar el campo, y estudiar sistemas dinámicos no lineales que dan lugar a fenómenos complejos, al caos, y estudiar esas formas irregulares lo que se denomina «geometría fractal».

La dinámica no lineal supone hoy un cambio de rumbo en la Ciencia, un nuevo paradigma, y ha sido calificada incluso como una tercera revolución. Los sistemas dinámicos estudian la variación de las magnitudes, en ocasiones las magnitudes varían de forma

*Encontrar
objetos fractales
naturales
es francamente
fácil
puesto que
la geometría
propia
de la naturaleza
es la geometría
fractal.*

*El estudio
de los fractales
es un elemento
motivador
en el alumnado,
debido a
la estética
implícita en
sus construcciones
y a lo sugerentes
que pueden
resultar
sus diseños.*

errática y aparentemente impredecible. Es el caos. Caos y fractales están íntimamente relacionados.

Sin embargo el estudio de los fractales no hubiera sido tan importante como lo es en la actualidad si no existieran tantos modelos en la naturaleza a los que se les puede aplicar este tipo de geometría. Encontrar objetos fractales naturales es francamente fácil puesto que la geometría propia de la naturaleza es la geometría fractal. Por ejemplo, la medida de costas con muchos fiordos, los bordes de comunidades vegetales en paisajes no humanizados, los sistemas ramificados como el sistema nervioso, la ramificación de los bronquios en los alvéolos pulmonares, la naturaleza de las fracturas o los sistemas de fallas, la porosidad de las rocas, la estructura de las galaxias, así como en otras ramas de la ciencia y de la técnica como en el mercado de valores o en la extinción de especies naturales donde la dimensión fractal proporciona el grado de predictibilidad del fenómeno.

Los recursos didácticos que se emplean para la enseñanza de las matemáticas son cada vez más ricos y variados. Nosotras queremos aportar algunas ideas en esta línea y os invitamos al atrevimiento de jugar con fractales hasta donde en cada nivel sea posible. Y sobre todo disfrutarlos.

Objetivos

Entre los muchos argumentos que podemos citar a favor de utilizar los fractales, en la clase de Matemáticas como recurso metodológico, posiblemente el más importante sea que nos permite volver a hablar de *Geometría* en el aula desde una perspectiva moderna. Ya que el proceso de construcción de los fractales autosemejantes favorece la adquisición de las *técnicas básicas para dibujar con precisión* figuras geométricas y nos permite diseñar actividades para desarrollar en el alumnado *procesos de inferencia*, descubriendo leyes generales, a partir de la observación de casos particulares. Además su análisis induce al estudio de las *semejanzas* y por consiguiente los *movimientos* y las *homotecias* en el plano, y podemos utilizarlos para profundizar en el concepto de *límite* y en los procedimientos que nos facilitan su cálculo.

El estudio de los fractales es un elemento *motivador* en el alumnado, debido a la estética implícita en sus construcciones y a lo sugerentes que pueden resultar sus diseños. Además es importante tener en cuenta la motivación que todavía tiene la utilización del ordenador. Así, por ejemplo, podemos realizar prácticas con programas informáticos, como *Cabri*, que nos permiten profundizar en el concepto de *recursividad* y en la forma de elaborar un programa informático en un lenguaje de programación estructurado, es decir, dividiendo el objetivo final en subobjetivos, que son realizados de forma independiente por subprogramas,

de forma que con la adecuada secuenciación de éstos se obtiene el programa. Otro programa que podemos utilizar es *Fractint*, mediante el que podemos diseñar actividades para introducir, consolidar o justificar la importancia que tiene el estudio de los números complejos en la elaboración de modelos que simulan fenómenos reales.

Además resalta la *aplicabilidad de las matemáticas* y encuentra modelos para fenómenos y elementos naturales que antes era imposible modelizar, lo que pone de manifiesto la interdisciplinariedad de las Matemáticas, relacionándola con otras ciencias como Biología, Geología, Medicina, Geografía, Economía, etc.

Por último, la revolución que ha supuesto en el concepto de *dimensión* el descubrimiento de los fractales es un hecho que nuestros alumnos y alumnas deben conocer.

Comencemos con algo de historia

¿Existen en Matemáticas objetos a los que pueda llamarse- se objetos matemáticos «monstruosos»?

Karl Weierstrass en 1872 mostró en la Academia de Ciencia de Berlín una curva de trazo continuo, pero absolutamente irregular, ya que no es derivable en ninguno de sus puntos.

George Cantor en 1877 probó que en el intervalo $[0, 1]$ hay tantos puntos como en el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. ¿Qué significa tener «igual» número de puntos en conjuntos infinitos? El resultado de Cantor contradice el principio de Euclides de que «el todo es mayor que cada una de sus partes» y atenta contra la intuición de que en un cuadrado hay más puntos que en un segmento. Esto nos llevará a tener que distinguir entre cardinalidad y dimensión.

Giuseppe Peano en 1890 complica aún más la situación al encontrar una línea, de trazo continuo, que pasa por todos y cada uno de los puntos de un cuadrado. ¿Cuál es entonces su dimensión? ¿Dimensión uno como la de las líneas, o dimensión dos como el cuadrado?

Los años setenta están marcados por las intuiciones de Benoit Mandelbrot que fue el primero en atisbar algunas de las posibilidades de aplicación que este campo presentaba y en proponerlas abiertamente en publicaciones de gran divulgación. Mandelbrot establece las bases para estudiar objetos fractales como el conjunto de Cantor, la curva del copo de nieve o de Koch, el triángulo de Sierpinski o el tetraedro de Sierpinski, entre otros. Algunos autores dieron el nombre de *fractal* (nombre derivado del latín *fractus*, fraccionado) a un objeto de dimensión fraccionaria, no obstante existen ejemplos de fractales con dimensión entera. Mandelbrot dice que un objeto es fractal cuando su dimensión topológica no coincide con su dimensión de Hausdorff.

Esto nos lleva a profundizar en el problema de la dimensión.

*Los años setenta
están marcados
por las intuiciones
de Benoit
Mandelbrot
que fue el primero
en atisbar
algunas de
las posibilidades
de aplicación
que este campo
presentaba
y en proponerlas
abiertamente
en publicaciones
de gran
divulgación.*

¿Qué entendemos por dimensión?

Los fractales han supuesto una revolución en el concepto geométrico de dimensión. Antes de su estudio la dimensión de una figura geométrica estaba perfectamente determinada y se pensaba que los únicos valores que podía tomar eran números naturales.

¿Qué dimensión tiene una recta? ¿Y una circunferencia? ¿Por qué es la misma? ¿Qué otras figuras tienen dimensión uno? ¿Qué figuras tienen dimensión dos? y ¿dimensión tres?

Un conjunto finito tiene dimensión topológica cero, una curva rectificable tiene dimensión uno, una superficie diferenciable tiene dimensión dos. Pero si nos planteamos qué dimensión tiene esa curva de Peano que pasa por todos los puntos de un cuadrado comenzamos a tener dudas, y de hecho hay toda una teoría matemática que se ocupa de calcular la dimensión de objetos, como los fractales, cuya dimensión no es necesariamente un número natural. Si la dimensión topológica de una curva es uno, la dimensión de esas curvas que rellenan el plano ¿será uno? o ¿será dos? Seguimos sin saber cómo medir la dimensión de la curva de Peano pues por ser una curva debería tener dimensión uno, pero al pasar por todos los puntos de un cuadrado debería tener dimensión dos.

¿Podemos conocer cuánto mide la longitud de una costa entre dos lugares? ¿La línea de costa viene dada por una curva rectificable? La medida de una línea de costa es uno de los ejemplos clásicos que aparecen en la bibliografía de fractales. Para medir una costa elegimos una unidad de medida, un kilómetro por ejemplo, y vamos contando el número de veces que hacemos coincidir esa unidad con el borde de la costa. Si la unidad es menor, un metro, la longitud de la costa medida resulta mayor. Se observa que la longitud L de una costa depende de la unidad de medida o tamaño de paso p , y que L es proporcional a una potencia de p , $L(p) = kp^d$,

luego $\ln(L) = \ln(k) + d\ln(p)$ por tanto d es la pendiente de la recta, de abscisa, el logaritmo del tamaño del paso, y ordenada, el logaritmo de la longitud de costa medida.

Una «medida» sirve para distinguir el tamaño de conjuntos diferentes, por lo que una medida será adecuada para medir una familia de conjuntos si su valor es mayor que cero y es finito. Ya hemos visto como el «cardinal» no nos sirve para distinguir el tamaño de un segmento del de un cuadrado. Entre 1917 y 1919 Hausdorff construyó la herramienta fundamental para medir estos conjuntos peculiares mediante la introducción de los conceptos que hoy llamamos de «medida y dimensión de Hausdorff». Introduce toda una familia infinita de medidas que llevan su nombre, para distinguir el tamaño de conjuntos claramente diferentes, problema que no resolvía ni la cardinalidad ni la medida de Lebesgue. Besicovitch en los años 20 continúa estos trabajos construyéndose la teoría geométrica de la medida.

Las medidas de Hausdorff de un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es una familia de medidas $\{H^s: s \geq 0\}$ donde la medida H^0 de un conjunto coincide con su cardinal, la medida H^1 de una curva rectificable es su longitud, la medida H^2 de una región plana es su área, la medida H^3 de un objeto en $\mathbb{R}^3$ es su volumen... Para un objeto A de $\mathbb{R}^n$ unas de esas medidas valen infinito y otras cero, pero se puede ver que existe un único valor $D \geq 0$, al que llamaremos dimensión de Hausdorff del conjunto A , tal que, si $t < D$, H^t valdrá infinito, y si $t > D$, entonces H^t valdrá cero.

Así

$$D = \dim A = \sup\{t: H^t(A) = \infty\} = \inf\{t: H^t(A) = 0\}.$$

La dimensión de Hausdorff es difícil de manejar por lo que en objetos autosemejantes podemos calcularla a partir de la *dimensión de semejanza*, utilizando que estos fractales son el punto fijo de un conjunto finito de aplicaciones contractivas.

De esta forma, para calcular la dimensión del conjunto de Cantor, como la

*Entre
1917 y 1919
Hausdorff
construyó
la herramienta
fundamental
para medir
estos conjuntos
peculiares
mediante
la introducción
de los conceptos
que hoy
llamamos de
«medida
y dimensión
de Hausdorff».*

razón de semejanza es $1/3$ y tomamos dos segmentos se debe cumplir que: $(1/3)^D H^D(C) = (1/2) H^D(C)$, luego $3^D = 2$, por tanto el conjunto de Cantor tiene como dimensión $\log 2 / \log 3$, que es un número mayor que cero y menor que uno. Del mismo modo veremos que un objeto como la curva del copo de nieve de Koch, que es un objeto de dimensión intermedia entre la de una línea y la de un plano, tiene de dimensión fractal $\log 4 / \log 3$, pues tomamos 4 segmentos de longitud $1/3$; y el triángulo de Sierpinski tiene de dimensión $\log 3 / \log 2$, pues tomamos 3 triángulos de longitud de lado $1/2$.

Llamamos dimensión de semejanza al número calculado así: si el todo se descompone en N partes, las cuales se pueden obtener de él por semejanzas de razón $1/r$, entonces $D = (\ln N) / (\ln r)$. Este número no es realmente una dimensión pues no verifica los axiomas para ello, pero es fácil de calcular y en los fractales autosemejantes coincide con la dimensión de Hausdorff, mucho más difícil de determinar.

Actividades para el aula

Después de esta breve descripción de los conceptos fundamentales y de especificar razones para introducir los fractales en el curriculum de matemáticas en la Enseñanza Secundaria proponemos una serie de actividades para iniciar su estudio

Conjunto de Cantor

Partimos de un segmento, lo dividimos en tres partes iguales y eliminamos la parte central. En los dos segmentos restantes se repite el procedimiento. Y así sucesivamente. A esta figura se la denomina *Conjunto de Cantor* (figura 1).

Hemos aplicado al segmento dos homotecias de centros los extremos del segmento y razón $1/3$, volviendo aplicar a la figura obtenida iterativamente dichas homotecias, obteniéndose, en el límite el conjunto de Cantor. El conjunto de Cantor es, pues, el atractor de dos homotecias de razón $1/3$.

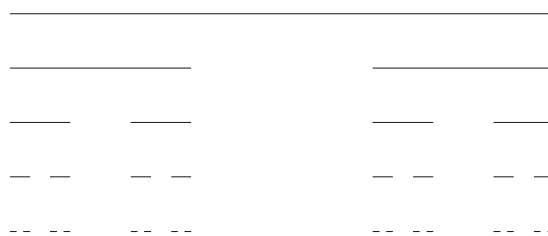


Figura 1. Conjunto de Cantor

Su dimensión de semejanza es menor que uno y mayor que cero: $D = \ln 2 / \ln 3$

Si partimos inicialmente de, únicamente, los dos puntos que dividían en tres al segmento anterior y aplicamos iteradamente las dos homotecias ya definidas volvemos obtener, en el límite, el conjunto de Cantor.

Completando la tabla 1 podemos analizar el comportamiento de la figura con el paso al límite.

Etapa	0	1	2	3	4	n
Número de segmentos	1	2	4			2^n
Longitud de cada segmento	L	L/3	L/9			$L/3^n$
Longitud de la figura	L	2L/3				$(2/3)^n L$

Tabla 1

El conjunto de Cantor es no vacío pues los extremos del intervalo que lo generan nunca se eliminan en ese proceso infinito. Está formado por unión infinita de conjuntos cerrados, y está acotado, luego es un compacto.

Su longitud es nula, pues la longitud de su complementario en el intervalo unidad tiene de longitud uno ya que: $1/3 + 2/3^2 + 4/3^3 + \dots = (1/3)/(1 - 2/3) = 1$.

Si expresamos los puntos del intervalo unidad en base tres de la forma: $0, a_1 a_2 a_3 \dots$ donde a_i vale 0, 1 o 2. Observamos que, por la construcción del conjunto de Cantor, la expresión decimal de sus puntos no contiene la cifra 1, es decir, a_i vale 0 o 2. Luego el cardinal del conjunto de Cantor es no numerable como el cardinal de los números reales. Tenemos pues un conjunto de longitud nula, cuyo cardinal coincide con el de $\mathbb{R}$.

Un conjunto de Cantor en el plano

Partimos de un cuadrado de lado uno. En el primer paso nos quedamos con cuatro cuadrados, uno en cada vértice, y de lado $1/4$. En el paso segundo tendremos 16 cuadrados de lado $1/16$ y, así sucesivamente.

Es el atractor de un conjunto de cuatro homotecias de razón $1/4$. ¿Cuánto vale su dimensión? ($D = \ln 4 / \ln 4$). Al calcular su dimensión observamos que vale $D = \ln 4 / \ln 4 = 1$, es decir, tiene la misma dimensión que una curva, lo que no nos sorprende pues es un conjunto no vacío, compacto, no numerable y de área cero, pero su perímetro vale siempre 4.

Modificando la razón de homotecia se obtienen otros Conjuntos de Cantor generalizados.

El Conjunto de Besicovitch

Partimos también de un cuadrado de lado uno y en el primer paso nos quedamos con 4 cuadrados de lado $1/4$, pero situados de otra manera.

En la figura 2 vemos como se repite también el proceso.

Su dimensión de semejanza resulta ser uno, luego tiene la misma dimensión que una curva, pero dicha curva no sólo no tiene tangente en ningún punto sino que de forma sorprendente, su proyección ortogonal sobre casi todas las rectas es de longitud cero.

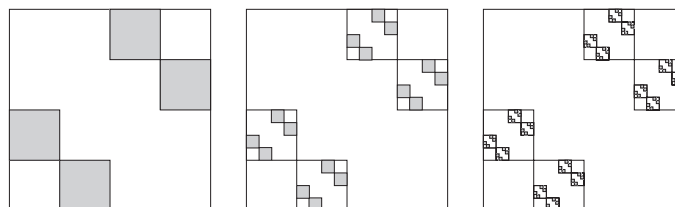


Figura 2. El conjunto de Besicovitch

La curva del copo de nieve

Para dibujar esta curva comenzamos construyendo un triángulo equilátero. Cada lado de este triángulo lo dividimos en tres partes. En la parte central, y de lado esta longitud, dibujamos otro triángulo equilátero borrando el lado que se superpone con el triángulo anterior. Volvemos a repetir este proceso con cada uno de los segmentos de la nueva figura y así tantas veces como nos lo permita el tamaño de los triángulos que vamos dibujando. La curva que obtenemos cuando repetimos este proceso indefinidamente se denomina *curva del copo de nieve* o *curva de Koch* (figura 3).

A partir de las figuras construidas podemos completar la tabla 2, que nos permite analizar el comportamiento de la figura con el paso al límite.

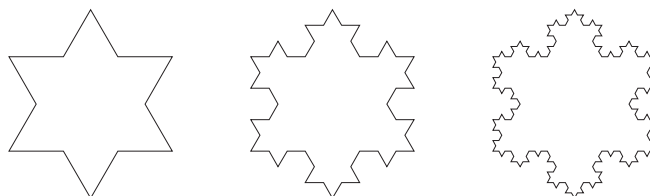


Figura 3. La curva del copo de nieve

<i>Etapas</i>	0	1	2	3	4	<i>n</i>
Longitud de un lado	<i>L</i>	<i>L</i> /3				
Número de lados	3	4·3				
Longitud de la figura	3 <i>L</i>	2 <i>L</i> /3				
Área de la figura	<i>A</i>	<i>A</i> + <i>A</i> /3				
Número de vértices	3	3+9				

Tabla 2

¿Cuál es su área? ¿Qué ocurre con su longitud?

En la siguiente práctica dibujamos la curva de Koch utilizando el ordenador, esta curva, mucho antes de hablar de fractales, era un modelo de curva continua que no tiene tangente en ninguno de sus puntos.

Práctica con Cabri: La curva del copo de nieve o curva de Koch.

Vamos a realizar una *macro* que *divida un segmento en tres partes iguales*. Primero hacemos la construcción utilizando el *Teorema de Tales*, pero observamos que para que *Cabri* pueda definirla como una *macro* la recta auxiliar no puede ser cualquiera. Una posibilidad es elegirla perpendicular. También es importante determinar explícitamente la medida del radio de las circunferencias que vamos a trazar en esta recta eligiendo, por ejemplo, la mitad o la cuarta parte de nuestro segmento.

Definimos la *macro* tomando como *objeto inicial* el segmento que queremos dividir y los *objetos finales* los dos puntos que lo dividen en tres partes iguales y que han sido definidos como *puntos de intersección* entre el segmento y las rectas auxiliares que hemos trazado. Denominamos la *macro* como *divide3* y la guardamos como *divide3.mac*. Archivamos también la figura hasta comprobar que la *macro* funciona.

Construimos una nueva *macro* que dibuje un *triángulo equilátero* a partir de dos puntos. Recordemos que para dibujar el triángulo tenemos que trazar dos circunferencias con centro en un punto y radio la distancia hasta el otro. Es importante determinar el tercer punto como *punto de intersección* y uti-

...la curva
de Koch
[...]
mucho antes
de hablar
de fractales,
era un modelo
de curva
continua
que no tiene
tangente
en ninguno
de sus puntos.

lizar *polígono* para dibujar el triángulo. Ocultamos las líneas accesorias, y nos aseguramos que la construcción está bien hecha. Guardamos la figura realizada como *triequi.fig*.

Construimos la *macro* definiendo como *objeto inicial* los dos puntos de partida y como *objeto final* el polígono (triángulo) construido, definimos la *macro* como *triequi*. Modificamos el icono y la grabamos como *triequi.mac*. La *macro* así creada forma parte del cuadro de herramientas *macro*. Es importante activarla varias veces para comprobar que funciona correctamente.

En un archivo nuevo definimos dos puntos y trazamos el segmento que los une, activamos la *macro divide3* para dividirlo en tres partes iguales. Utilizamos la *macro triequi* para dibujar un triángulo equilátero en la parte central del segmento.

Definimos como objeto inicial el segmento y lo ocultamos para que no salga al activar la *macro*. Dibujamos los dos segmentos extremos del original y los de la parte superior del triángulo que van a ser los objetos finales, definimos la *macro* como *koch* y la guardamos como *koch.mac*.

Archivamos la figura como *koch1.fig* y en un fichero nuevo nos aseguramos que la *macro* funciona correctamente, activándola repetidamente sobre un segmento. Guardamos la figura como *koch2.fig*.

Con la *macro triequi* dibujamos un triángulo equilátero, determinamos sus tres segmentos y en cada uno de ellos activamos de forma iterativa la *macro koch* obtendremos la curva de Koch o curva del copo de nieve. La guardamos como *koch3.fig*.

Si analizamos el comportamiento de la figura con el paso al límite ¿Cuál es su área? Observamos que su área crece:

$$A + \frac{A}{3} + \frac{A}{3} + \frac{A}{3} + \frac{A}{3^n} +$$

pero está acotada. Es una sucesión geométrica de razón 1/3, luego su suma es

$$\frac{A}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3A}{2}$$

Sin embargo ¿Qué ocurre con su longitud?

- Con respecto al lado: *L*, *L*/3, ..., *L*/3^{*n*}, ...
- Considerando el número de lados: 3, 4×3, 4²×3, ..., 4^{*n*}×3 ...

Luego la longitud de la figura *N* es (4/3)^{*n*} × 3*L*, sucesión geométrica de razón 4/3 > 1, y por lo tanto la longitud de la figura tiende a ∞. ¿Cómo es posible siendo una figura acotada?

Hemos comentado que los fractales son figuras cuya dimensión no siempre es un número natural, ¿entre qué valores debe estar la dimensión de éste?

No hay ninguna duda que la superficie encerrada por cada una de estas curvas es finita y permanece acotada. Sin embargo, el perímetro de la curva límite es infinito, e incluso puede probarse que es infinita la longitud entre dos cualesquiera de sus puntos.

Triángulo de Sierpinski

En un triángulo equilátero se marcan los puntos medios de los lados, se unen formando cuatro triángulos iguales y quitamos el triángulo central. En cada uno de los tres nuevos triángulos se repite el proceso. Y así sucesivamente.

A la figura formada se denomina triángulo de Sierpinski (figura 4).

El proceso que hemos seguido ha sido aplicar tres homotecias de razón $1/2$ y centros los tres vértices del triángulo al triángulo inicial y de forma iterativa a la figura obtenida, de donde el triángulo de Sierpinski es el punto fijo o atractor del conjunto de aplicaciones contractivas formado por las tres homotecias.

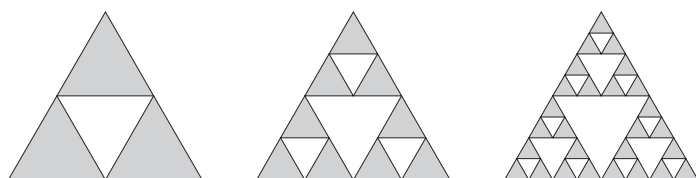


Figura 4. Triángulo de Sierpinski

Si partimos inicialmente de cualquier otra figura y le aplicamos iterativamente las mismas tres homotecias, llegamos a idéntico punto fijo.

A partir de las figuras construidas podemos completar la tabla 3.

Observamos que el número de triángulos crece. ¿Cuál es el límite del número de triángulos cuando n tiende a infinito? ¿Cómo varía la longitud de un lado? ¿A qué tiende la longitud de un lado cuando crece n ? ¿Y la longitud de la

figura, crece o disminuye? ¿Cuál es el límite de la longitud de la figura cuando n tiende a infinito? ¿Qué ocurre con el área? ¿Y con el número de vértices?

Observamos que la longitud de la figura tiende a infinito y el área a cero, lo que no nos sorprende pues su dimensión de semejanza es menor que dos y mayor que uno: $D = \ln 3 / \ln 2$

En la siguiente práctica dibujamos el triángulo de Sierpinski utilizando el ordenador con el programa *Cabri*.

Práctica con Cabri: Triángulo de Sierpinski

Para realizar esta figura necesitamos dibujar un triángulo equilátero a partir de dos puntos, para lo que vamos a utilizar la *macro triequi* construida en la práctica anterior cargándola en memoria mediante la opción *Abrir...* del menú *Archivo*.

A partir del triángulo equilátero dibujado con la *macro*, determinamos el punto medio de cada lado y dibujamos a partir de ellos cuatro triángulos equiláteros con la *macro triequi* (observamos que es importante el orden de definir los puntos para obtener el triángulo deseado y establecemos una secuencia fija para dibujarlos).

Utilizamos *rellenar* para colorear los tres triángulos que comparten un vértice con el triángulo original.

Definimos una nueva *macro* cuyo objeto inicial sea el triángulo grande y los objetos finales los tres triángulos coloreados. Como hay triángulos superpuestos, según la parte de la pantalla que señalemos, el programa nos puede preguntar cuál es el polígono que queremos utilizar por lo que hay que recordar que el orden en que aparecen escritos coincide con el de su construcción de forma que la primera figura que aparece escrita es la que primero ha sido construida. Definimos la *macro* como *sierpins* y la guardamos como *sierpins.mac*.

Volvemos a dibujar un triángulo equilátero con la *macro triequi*. Activamos la *macro sierpins* y aparecen los tres triángulos coloreados. Repetimos el proceso

Etapas	0	1	2	3	4	n
Número de triángulos	1	3	9			
Longitud de un lado	L	$L/2$	$L/4$			
Longitud de la figura	$3L$	$9L/2$				
Área de la figura	A	$3A/4$				
Número de vértices	3	$3+3$	$3+3+9$			

Tabla 3

sobre cada uno de los triángulos coloreados dos veces más y guardamos la figura como *sierpin3.fig*.

Si analizamos el comportamiento del área con el paso al límite observamos que es cero ya que el valor del área de la figura en la etapa n es:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n A$$

Sin embargo el perímetro de la figura crece y podemos comprobar que tiende a infinito calculando su valor en la etapa n , que es igual a:

$$3^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

En la construcción del triángulo de Sierpinski partimos de un objeto plano, un triángulo de área A y sin embargo en el límite el área de la figura es cero ¿Es entonces el triángulo de Sierpinski un objeto de dimensión dos?

También observamos que toda la figura está acotada por el triángulo inicial mientras que su longitud tiende a ∞ . Esto nos hace suponer que la dimensión del triángulo de Sierpinski no es ni uno ni dos, sino un número D tal que $1 < D < 2$.

Por su construcción el triángulo de Sierpinski es un conjunto compacto de perímetro infinito y área nula.

Tetraedro de Sierpinski

En un tetraedro regular marcamos los puntos medios de las aristas y al unirlos se forman tetraedros de lado mitad. Quitamos la figura central. En cada uno de los cuatro tetraedros restantes volvemos a repetir el proceso sucesivamente.

La forma central eliminada, que es un octaedro regular, es difícil de percibir. En el laboratorio de Matemáticas sugerimos construir cuatro tetraedros iguales y analizar lo que falta para obtener el tetraedro de lado doble de partida.

Completando la tabla 4 se analiza el comportamiento de la figura con el paso al límite.

¿Cómo varía su volumen? ¿Y su superficie total? ¿Qué dimensión le correspondería?

<i>Etapas</i>	0	1	2	3	4	n
Número de tetraedros	1	4	16			
Longitud de una arista	L	$L/2$	$L/4$			
Número de aristas	6	24				
Longitud total	$6L$	$12L$				
Volumen de cada tetraedro	V	$V/8$				
Volumen de la figura	V	$V/4$				
Número de vértices	4	$4 + 4$				
Número de caras	4	16				
Superficie de cada cara	4	$A/4$				
Superficie total	$4A$					

Tabla 4

El tetraedro de Sierpinski es el punto fijo del conjunto de cuatro homotecias de razón $1/2$ y centros en los cuatro vértices de un tetraedro, luego $D = \ln 4 / \ln 2 = 2$. Es un ejemplo de objeto fractal de dimensión 2, no fraccionaria.

Fractal tipo Newton

El método de Newton nos permite encontrar las raíces de una función de fórmula conocida, calculando de forma iterativa la ecuación de la tangente a su gráfica en puntos cada vez más cercanos a la solución. Si aplicamos este método a funciones complejas de la forma $f(z)=z^p - 1$ obtenemos una figura fractal que podemos utilizar como recurso metodológico en el estudio de los números complejos.

Práctica con Fractint

Empezamos calculando las raíces de la función $f(z)=z^p - 1$ en el cuerpo de los números complejos para $p = 5$ y las representamos gráficamente en el plano.

Relacionamos el resultado con la imagen obtenida con el programa *Fractint* al elegir el tipo Newton, seleccionando el exponente 5 (figura 5).

Observamos un gráfico en colores en el que hay cinco zonas circulares, y al compararlas con las raíces obtenidas ¿Qué te parecen que representan?

Cuando ampliamos las partes del gráfico que parecen más caóticas, observamos que estas regiones que parecen separar las zonas circulares asociadas a las raíces no las delimitan sino que sus fronteras se entremezclan formando sorprendentes diseños que mantienen la autosemejanza. A partir de esta observación ¿Qué región del plano te parece que alcanzará antes la solución al ser iterada?

Si cambiamos el valor del parámetro $p = 5$ por 3, 4, 6, etc. ¿Se sigue manteniendo la relación de la figura con las raíces de la ecuación?

*Por
su construcción
el triángulo
de Sierpinski
es un conjunto
compacto
de perímetro
infinito
y área nula.*

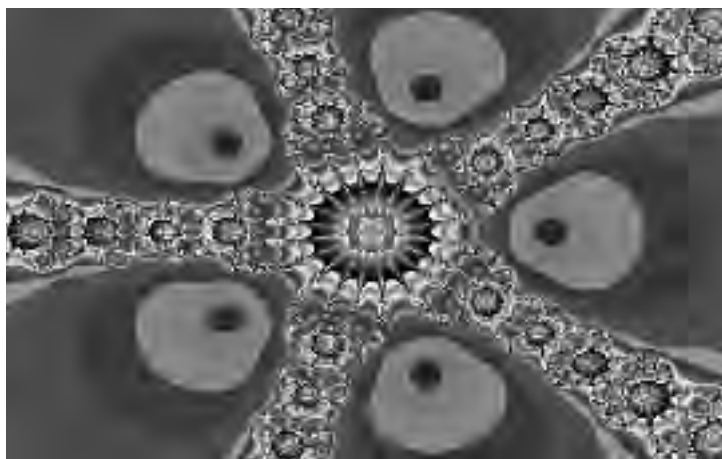


Figura 5. Fractal tipo Newton

Conclusiones

Muchos autores opinan que es probable que caos y fractales, por su belleza y aplicaciones, pronto tendrán cabida en el currículo de la educación secundaria obligatoria, formación profesional y bachilleratos. Actualmente es uno de los temas del Bachillerato Artístico en la asignatura «Matemáticas de la forma».

En este artículo se ha pretendido introducir en dicho campo de innovación en el área de las Matemáticas tanto el aspecto teórico, proporcionando unas ideas sobre el problema de la dimensión y de sus aplicaciones, como el práctico sugiriendo algunas actividades que se pueden incorporar a la clase de matemáticas.

El estudio de fractales hemos visto que puede aparecer en diferentes momentos de la enseñanza secundaria: transformaciones geométricas, homotecias, sucesiones, límites, iteración, azar y probabilidad. Si consideramos varias homotecias, (la homotecia de razón menor que la unidad es un ejemplo de aplicación contractiva), y las aplicamos reiteradamente a determinados conjuntos hemos observado cómo estos se van transformando hasta conseguir un fractal como el punto fijo de un conjunto de aplicaciones contractivas. El

fractal viene a ser el producto final de una iteración infinita de un proceso geométrico muy simple. El avance en el estudio de los fractales se debe en parte al uso del ordenador, que permite simular con mucha facilidad estos procesos y especialmente en la construcción de los fractales autosemejantes, es decir, los generados por la repetición de un mismo proceso y en el que una pequeña parte es semejante al todo.

Bibliografía

- BARNSELEY, M. F. (1988): *Fractals Everywhere*, Academic Press.
- BRIHUEGA, J., M. MOLERO y A. SALVADOR (1994): *Didáctica de las Matemáticas*, Complutense, Madrid
- FALCONER, K. J. (1990): *Fractal Geometry*, John Wiley & Sons, Chichester.
- FEDER, J. (1988): *Fractals*. Plenum Press, New York.
- FIGUEIRAS, L., M. MOLERO, A. SALVADOR y N. ZUASTI (1998): *Matemáticas en las Matemáticas*, Proyecto Sur de Ediciones, S.A.L., Granada.
- GARMENDIA, A. y A. SALVADOR (1993): *Fractal: Punto fijo de aplicaciones contractivas*, VI JAEM, Badajoz.
- GUZMÁN, M. DE, M. A. MARTÍN, M. MORÁN y M. REYES (1993): *Estructuras fractales y sus aplicaciones*, Labor, Barcelona.
- MANDELBROT, B. (1988): *Los objetos fractales* (2.ª ed.), Tusquets, Barcelona.
- PEITGEN, H. O., H. JÜRGENS, H. y D. SAUPE (1991): *Fractals for the classroom*. Springer. New York.
- ROGERS, C. A. (1970): *Hausdorff measures*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- El número 28, volumen 10 (1), de la revista *Epsilon*, Revista de las S.A.E.M. «Thales», está dedicado por completo al caos y los fractales.

Lourdes Figueiras
María Molero
Adela Salvador
Nieves Zuasti

SUMA

ENVÍO DE COLABORACIONES

Revista SUMA

ICE Universidad de Zaragoza

Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

¿Para qué enseñar fórmulas pudiendo enseñar procedimientos?

Una propuesta didáctica para el tratamiento de la Probabilidad en Bachillerato

Santiago E. Gómez Hernández

No debe llenarse la cabeza del joven con hechos, nombres y fórmulas. Para saber eso no necesita ir a la universidad, ya que puede encontrarlo en los libros. Los profesores deberían dedicarse únicamente a enseñar a pensar a los jóvenes y a entrenarlos en algo que ningún texto puede hacer.

AUNQUE esta antigua declaración —atribuida a Albert Einstein— está referida a un contexto de enseñanza universitaria, sin duda es también aplicable hoy en día a la enseñanza secundaria, particularmente en los últimos niveles. De hecho, ése es el espíritu de la reforma educativa a la que todos los docentes hemos accedido durante los últimos años: hacer huir al alumno de un aprendizaje meramente memorístico —hechos, nombres y fórmulas— y fomentar en él un aprendizaje comprensivo y analizador —enseñar a pensar—, es decir, un aprendizaje realmente significativo (Ausubel, 1983). Sin embargo, a pesar de este cambio de paradigma educativo, aún siguen apareciendo en los libros de texto teoremas y fórmulas para resolver problemas, que pueden ser tomados por el alumnado como «recetas», sin más implicaciones cognitivas. Este hecho puede provocar una regresión en los objetivos educativos a los que antes hemos hecho referencia.

Ese es el caso del tema de *Probabilidad*. Centrándonos en el desarrollo que los distintos autores realizan de este tema en el último curso de enseñanza secundaria preuniversitaria (actual 2.º de Bachillerato LOGSE), podemos observar que habitualmente se presenta precedido del tema de Combinatoria, ya que ésta puede ser una herramienta útil para aplicar en el cálculo de probabilidades, y también se cuenta para ello con los conceptos, propiedades, operaciones y leyes de la Teoría de Conjuntos. Tras las primeras definiciones básicas (tipos de sucesos, compatibilidad o incompatibilidad entre sucesos, dependencia o independencia entre los mismos, etc.), el concepto de Probabilidad suele plantearse mediante un enfoque *frecuen-*

En este artículo se presenta una propuesta didáctica que constituye un método alternativo al tratamiento formal de la probabilidad.

Conocidas son las dificultades que presentan habitualmente la mayoría de los alumnos en resolución de problemas de Probabilidad, y en particular de Probabilidad Condicionada.

El método propuesto aquí está basado en el recurso de los *diagramas de árbol*, convenientemente ampliado mediante un procedimiento que hemos denominado de *renormalización*, el cual permite resolver cualquier problema de Probabilidad Condicionada, evitando el *Teorema de Bayes* e incluso manifestando un margen de aplicabilidad mucho más extenso que éste. El método ya ha sido aplicado en el aula, con una muy buena acogida por parte de los alumnos.

ARTÍCULOS

cialista que da paso al *apriorístico*: la ley de Laplace. (Los textos del ya casi extinto COU presentan un planteamiento *axiomático* de la probabilidad, con toda su complejidad de pensamiento abstracto basado en axiomas, corolarios y demostraciones de los mismos.)

Es entonces cuando suele presentarse la definición operativa de Probabilidad Condicionada: $P(A/B) = P(A \cap B) / P(B)$ —con la consabida restricción de que B no corresponda al conjunto vacío—, que permite establecer el valor de la probabilidad de la intersección de dos sucesos: $P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$, y redefinir la independencia de sucesos y sus consecuencias: A y B son independientes si y sólo si: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$; A y B son independientes si y sólo si: $P(A/B) = P(B)$ y $P(B/A) = P(A)$ (Arias y Maza, 1998). El tema suele concluirse con los enunciados —y sus correspondientes demostraciones— del Teorema de la Probabilidad Total y del Teorema de Bayes, éste último como instrumento para la resolución de problemas de Probabilidad Condicionada.

Sin duda este enfoque en el tratamiento de la Probabilidad en el último curso de enseñanza secundaria no obligatoria presenta serias dificultades para el alumnado. Ana María Ojeda (1995) autora de una tesis doctoral sobre Didáctica de la Probabilidad y profesora de Matemática Educativa señala que

...aunque en los programas de estudio se especifica el tratamiento del Teorema de Bayes, en ocasiones el tema no se trata pues se le considera difícil de entender dado el enfoque formal en este nivel; es usual que se le presente en el lenguaje de conjuntos, a cuyo dominio difícilmente llegan los estudiantes. En caso de que se apoye la enseñanza con medios de representación, éstos son los diagramas de Venn y, ocasionalmente, se emplean diagramas de árbol para ilustrar soluciones a problemas específicos. Lo mismo se puede señalar en lo que se refiere al tratamiento del tema en los libros de texto. Así, atendiendo exclusivamente al planteamiento del tema en los programas de estudio, no se puede asegurar que al final de un curso «tradicional», el estudiante haya adquirido una idea completa de probabilidad condicional.

Obviamente, la supresión del estudio de la Probabilidad Condicionada *no* es la solución al problema derivado de la dificultad intrínseca al planteamiento formal del tema. Se hace necesario desarrollar un método alternativo a las fórmulas y teoremas tradicionales de Probabilidad que sea suficientemente asequible al alumnado, permitiéndole una mejor comprensión de la Probabilidad Condicionada, y con el cual pueda resolverse cualquier enunciado propuesto. Con esta idea nos implicamos en la búsqueda de un procedimiento didáctico que permitiera rehuir el tratamiento formal del referido tema y que fuese más operativo y facilitador de la comprensión en el alumno.

*Los diagramas
de árbol,
cuya
institucionalización
ha sido propuesta
por Parzys
(1990)
constituyen
una herramienta
utilísima
en la enseñanza
del cálculo
de probabilidades,
y en nuestra
opinión,
infrautilizada.*

Una herramienta didáctica infrautilizada

Los diagramas de árbol, cuya institucionalización ha sido propuesta por Parzys (1990) constituyen una herramienta utilísima en la enseñanza del cálculo de probabilidades, y en nuestra opinión, infrautilizada. Proporcionan un medio para distinguir entre intersección de sucesos y sucesos condicionados, permitiendo identificar al evento condicionado del condicionante, y facilitan el orden cronológico en sucesos consecutivos (por ejemplo, lanzamientos sucesivos de una moneda) o el esquema de posibilidades para hechos simultáneos (por ejemplo, lanzamiento de varias monedas simultáneamente). Si el número de casos no es muy elevado constituyen un buen apoyo para resolver problemas de Combinatoria.

A pesar de sus muchas aplicaciones, su utilización en los libros de texto —y, como consecuencia, en las situaciones de enseñanza/aprendizaje en el aula— ha tardado en generalizarse. En un estudio comparativo del tratamiento dado al tema de Probabilidad por los libros de texto pudimos observar que en los textos del casi desaparecido COU, sólo un 10% de los autores hacían referencia a los diagramas en árbol a la hora de resolver algún problema de probabilidad. Afortunadamente, sí se han ido incorporando en la mayoría de los textos actuales de 2.º de Bachillerato LOGSE, pero como un medio para ordenar los datos del enunciado y tener éstos en buena disposición para aplicarlos en las fórmulas correspondientes. Vamos a ver dos ejemplos de ello, correspondientes a textos de 2.º de Bachillerato LOGSE, donde se pone de manifiesto el tratamiento que dichos autores dan al cálculo de la probabilidad condicionada.

Ejemplo 1

Extraído de Arias y Maza (1998), páginas 237 y 238:

Probamos tres vacunas A_1 , A_2 y A_3 en 100 personas; la vacuna A_1 en 30; la A_2 en 20

y la A_3 en 50. Pasado el tiempo adecuado, observamos que del grupo A_1 , 23 no han contraído la enfermedad; del A_2 , 17 y del A_3 , 39. Si elegimos una persona al azar y está sana, ¿qué probabilidad tenemos de que proceda del grupo A_3 ?

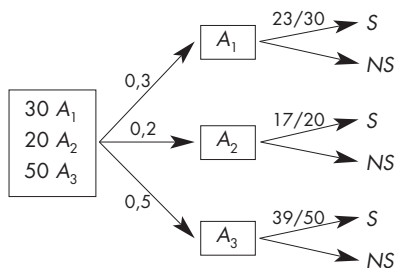


Figura 1

Sea S el suceso «personas sanas». Nos piden $P(A_3 / S)$. Aplicando la fórmula de Bayes, tenemos:

$$P(A_3 / S) = \frac{P(A_3) \cdot P(S / A_3)}{P(A_1) \cdot P(S / A_1) + P(A_2) \cdot P(S / A_2) + P(A_3) \cdot P(S / A_3)}$$

Viendo el árbol anterior, tenemos: Probabilidades *a priori*: $P(A_1) = 0,3$; $P(A_2) = 0,2$; $P(A_3) = 0,5$. Probabilidades *verosimilitudes*: $P(S / A_1) = 23/30 = 0,77$; $P(S / A_2) = 17/20 = 0,85$; $P(S / A_3) = 39/50 = 0,78$. Sustituyendo en la fórmula, tenemos:

$$P(A_3 / S) = \frac{0,5 \cdot 0,78}{0,3 \cdot 0,77 + 0,2 \cdot 0,85 + 0,5 \cdot 0,78} = 0,49$$

Luego, la probabilidad *a posteriori* es: $P(A_3 / S) = 0,49$.

Ejemplo 2

Extraído de Jiménez y otros (1999), página 80:

Tenemos tres cajas, una verde, una roja y una amarilla, y en cada una, una moneda. La de la caja verde está trucada y la probabilidad de que salga cara es doble de la probabilidad de que salga cruz, la moneda de la caja roja tiene dos caras y la de la caja amarilla no está trucada. Se toma una caja al azar y se lanza la moneda que está en esa caja. Calcular razonadamente: a) La probabilidad de que salga cara. b) La probabilidad de que sabiendo que ha salido cara, se haya lanzado la moneda de la caja roja.

Hacemos un diagrama de árbol:

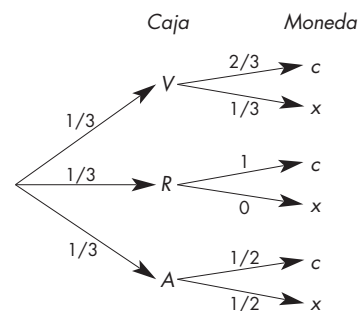


Figura 2

- Aplicamos la probabilidad total: $P(c) = (1/3) \cdot (2/3) + (1/3) \cdot 1 + (1/3) \cdot (1/2) = 13/18$
- Aplicamos el teorema de Bayes:

$$P(R / c) = \frac{P(R) \cdot P(c / R)}{P(c)} = \frac{(1/3) \cdot 1}{13/18} = 6/13$$

A la luz de estos dos ejemplos el lector podrá observar, como ya hemos adelantado, que la utilidad que se da a los diagramas de árbol se centra en el ordenamiento de los datos del enunciado (sucesos y probabilidades asociadas a los mismos), haciendo depender la resolución del problema de la aplicación de las fórmulas tradicionales. Con este artículo nos proponemos ampliar sensiblemente los horizontes de aplicabilidad de los diagramas arbóreos.

Para la construcción de un diagrama de árbol (Esteve y Ramírez, 1994) debe arrancarse del suceso E (espacio total) una rama para cada suceso del primer concepto, acompañada de su probabilidad. De éstas deben partir nuevas ramas, según las posibilidades de sucesos del siguiente concepto en consideración. Los cálculos se realizan en cada caso con arreglo a las correspondientes reglas de la suma de probabilidades –unión de sucesos incompatibles– y del producto de probabilidades –intersección de sucesos– en diagramas de árbol (Engel, 1975).

El alumno debe ser conocedor, por tanto, de los siguientes principios:

- Las probabilidades que surgen de cada nudo están condicionadas por los sucesos anteriores al mismo.
- La suma de las probabilidades de las ramas que parten de un determinado nudo debe ser la unidad, y si de un nudo sólo parte una rama, deberá asignársele a ésta una probabilidad unidad.
- Cada uno de los recorridos posibles representa un suceso distinto, y éstos son entre sí incompatibles dos a dos.
- La probabilidad de cada suceso posible es el producto de las probabilidades asociadas a los distintos tra-

mos del recorrido que lo describe, pues se trata de la probabilidad de la intersección entre sucesos.

- 5) La suma de las probabilidades asociadas a los distintos recorridos debe ser la unidad, pues abarcan todo el Espacio Muestral.

Como ya hemos comentado, a pesar de la incorporación de los diagramas de árbol en los textos, este práctico recurso no está siendo totalmente aprovechado, pues continúa haciéndose depender al alumnado de las fórmulas tradicionales para resolver los problemas. Nuestra propuesta es que puede y debe evitarse la aplicación (habitualmente no reflexiva) de las mismas por parte de los alumnos. En este sentido, en las siguientes secciones mostramos cómo aprovechar al máximo las posibilidades que permiten los diagramas en árbol, siempre que se complemente su construcción en la forma que exponemos.

La suma de probabilidades resultantes en diagramas arbóreos como alternativa al Teorema de la Probabilidad Total

En este apartado vamos a ver cómo puede prescindirse del Teorema de la Probabilidad Total al resolver problemas en los que se solicite la probabilidad de que ocurra un determinado suceso, subconjunto del espacio muestral. Para ello deben darse tres sencillos pasos:

- 1) Eliminar del diagrama arbóreo todos aquellos recorridos que no culminen en un caso particular del suceso referido.
- 2) Calcular la probabilidad asociada a cada recorrido que sí culmine en un caso particular del suceso referido.
- 3) Sumar las probabilidades asociadas a dichos recorridos (recuérdese que se trata de sucesos incompatibles dos a dos).

Veamos dos ejemplos:

Ejemplo 3

De un determinado país se sabe que el 35% de la población femenina es fumadora, lo cual ocurre en el 55% de la población masculina. Hay igual proporción de hombres que de mujeres (50%). Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea fumador/a?

Este es un enunciado sencillo, típico del nivel de enseñanza al que nos estamos refiriendo (último curso de bachillerato LOGSE). La resolución tradicional de este problema se realiza mediante el Teorema de la Probabilidad Total. Representemos por H el suceso «ser hombre», por M

«ser mujer», por F «ser fumador/a» y por NF «ser no fumador/a». La aplicación del referido teorema nos conduce a:

$$P(F) = P(F/H) \cdot P(H) + P(F/M) \cdot P(M) = 0,55 \cdot 0,5 + 0,35 \cdot 0,5 = 0,45$$

El planteamiento en diagrama de árbol permite resolver el problema sin aplicar dicha expresión, siguiendo los tres sencillos pasos enumerados anteriormente:

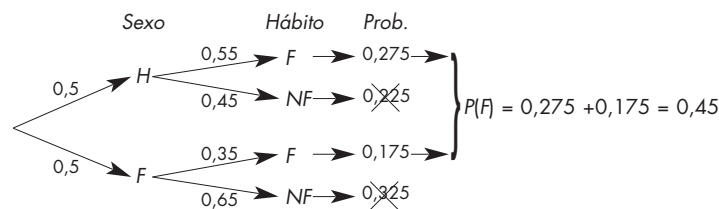


Figura 3

... cómo puede prescindirse del Teorema de la Probabilidad Total al resolver problemas en los que se solicite la probabilidad de que ocurra un determinado suceso, subconjunto del espacio muestral.

Ejemplo 4

Dos equipos de baloncesto se enfrentan en una final al mejor de tres partidos. La estadística desprendida de los enfrentamientos anteriores muestra que el equipo A ha ganado el 60% de los partidos disputados entre ambos, siendo el otro 40% restante para el equipo B. ¿Cuál es la probabilidad de que la final deba decidirse en un tercer partido?

En este ejemplo hay tres factores a considerar (los tres partidos), a diferencia del ejemplo anterior, en el que sólo había que considerar dos (sexo y hábito). Ello hace que el planteamiento tradicional mediante el Teorema de la Probabilidad Total complique de forma ostensible su resolución. Denotaremos por A_i al suceso «que gane el equipo A el partido i» y por B_i al suceso «que gane el equipo B el partido i»:

$$\begin{aligned} P(3 \text{ partidos}) &= P(A_3 / (B_2 / A_1)) \cdot P(B_2 / A_1) \cdot P(A_1) + \\ &+ P(B_3 / (B_2 / A_1)) \cdot P(B_2 / A_1) \cdot P(A_1) + P(A_3 / (A_2 / B_1)) \cdot P(A_2 / B_1) \cdot P(B_1) + \\ &+ P(B_3 / (A_2 / B_1)) \cdot P(A_2 / B_1) \cdot P(B_1) = \\ &= 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 + 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 0,48 \end{aligned}$$

Tal como adelantábamos, la aplicación formal del citado teorema se hace bastante compleja al tratarse de tres factores (1.º, 2.º y 3.º partido), en lugar de dos como la mayor parte de los proble-

mas aparecidos en los textos. ¡Imagínemos el incremento en dificultad de la resolución tradicional si el enunciado considerase la posibilidad de una final al mejor de cinco partidos...!

Mediante un diagrama arbóreo la resolución es mucha más clara y comprensible:

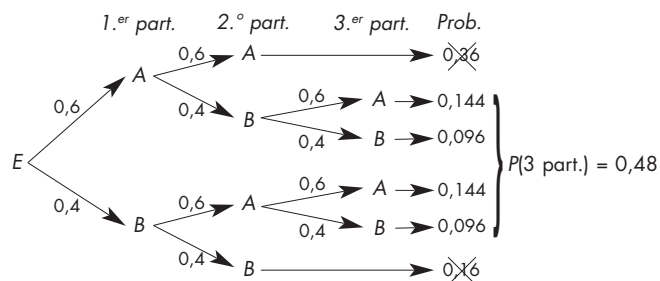


Figura 4

Evidentemente, otra forma de resolver el problema sin necesidad de aplicar el Teorema de la Probabilidad Total ni el Diagrama de Árbol es plantear la probabilidad del suceso contrario:

$$P(3 \text{ partidos}) = 1 - \{P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap B_2)\} = 1 - \{0,6 \cdot 0,6 + 0,4 \cdot 0,4\} = 0,48$$

La renormalización en diagramas arbóreos como alternativa al Teorema de Bayes

En el caso de que el enunciado del problema aporte una información que restrinja los casos posibles que pueden darse, afirmando que ha ocurrido cierto suceso, las probabilidades resultantes pueden variar. Si la restricción es simple, la resolución tradicional suele realizarse utilizando el Teorema de Bayes. Sin embargo, esta fórmula se hace realmente difícil de aplicar cuando la restricción es compleja, como veremos en la sección siguiente, en cuyo caso suele recurrirse a otras expresiones formales. Nuestra propuesta didáctica *permite resolver cualquier problema de Probabilidad Condicionada* y siempre de una forma proceduralmente más sencilla.

...esta fórmula [Teorema de Bayes] se hace realmente difícil de aplicar cuando la restricción es compleja...

El método desarrollado por nosotros consiste en una ampliación del método de los diagramas arbóreos, mediante su *renormalización* (Gómez, 1999). La comprensión del fundamento de este procedimiento requiere ciertos conocimientos previos (dominados en su mayoría por los alumnos, llegados a este nivel, o en caso contrario, fácilmente aprendibles mediante ejemplos sencillos). Estos son:

- 1) Un convenio: $P(E) = 1$. Se trata de la probabilidad del suceso seguro, que abarca todo el espacio muestral. Este concepto se plantea en el principio del tema de probabilidad.
- 2) Una propiedad: *para normalizar (convertir en 1) una cierta cantidad, basta con dividirla por ella misma* (Ejemplos: $3/3 = 1$; $0,8/0,8 = 1$, etc.). Esta propiedad se aplica, por ejemplo, en el tema de álgebra vectorial (habitualmente trabajado con anterioridad al de probabilidad), al desarrollar el concepto de vector unitario y su obtención: división de un vector entre su norma, obteniendo otro vector de longitud 1 (unitario, normalizado) en la misma dirección y sentido que el vector original.
- 3) Generalización de la propiedad anterior: *para convertir un conjunto de valores, en otro con la misma proporcionalidad relativa y cuya suma sea 1 (normalizado), basta con dividir cada valor del conjunto inicial entre el total de éste*. Puede utilizarse el siguiente ejemplo para que los alumnos puedan alcanzar fácilmente esta generalización: «Sea el conjunto formado por los números 1, 3 y 6, cuya suma es 10. Si los comparamos entre sí podemos ver que el segundo es tres veces más grande que el primero, y el tercero es seis veces más grande que el primero y dos veces más grande que el segundo. Si cada uno de ellos lo dividimos entre 10 (la suma de los tres) se obtiene otro conjunto de números: 0,1, 0,3 y 0,6 que guardan entre sí la misma proporción y además suman la unidad.

Una vez establecidos estos prerrequisitos, puede aplicarse el proceso ideado por nosotros, y que hemos denominado *Renormalización*, siguiendo los siguientes pasos:

- 1) Eliminar del diagrama arbóreo todos aquellos recorridos que no concluyan de forma concordante con la información suministrada en el enunciado (restricción). La suma de las probabilidades asociadas a los recorridos no excluidos, obviamente, ya no será la unidad, por lo que deberemos
- 2) Renormalizar la probabilidad asociada a cada recorrido no excluido, dividiéndola entre el total de las probabilidades asignadas a los recorridos no excluidos. Puede comprobarse en este momento que la suma de las nuevas probabilidades renormalizadas vuelve a ser la unidad.

- 3) Buscar, entre los nuevos valores renormalizados, el que aporta (o los que aportan) la solución a la cuestión planteada en el enunciado.

De esta manera, disponemos de toda la información para responder a las cuestiones que el enunciado plantee, sin necesidad de aplicar la expresión formal del Teorema de Bayes, aunque ésta, obviamente, subyace en este tratamiento.

Veamos lo expuesto en dos nuevos ejemplos.

Ejemplo 5

Se dispone de dos urnas idénticas. En el interior de una de ellas hay billetes auténticos (5 billetes de 1000 pts. y 5 de 5000 pts.). En el interior de la otra hay billetes falsos (8 de 1000 pts. y 2 de 5000 pts.). Se desconoce en cuál de las dos están los falsos y en cuál los auténticos. Se elige una urna al azar y extraemos un billete que resulta ser de 5000 pts. ¿Cuál es la probabilidad de que sea falso?

Se trata de dos hechos consecutivos: 1.º elección de urna; 2.º extracción de billete. Se habrá elegido la urna de los billetes auténticos o la de los falsos con probabilidades de 1/2. La probabilidad del billete extraído dependerá de la urna, ya que las proporciones son distintas. Llamaremos A o F a «haber elegido la urna de billetes Auténticos» o «haber elegido la urna de los billetes Falsos», respectivamente. Denotaremos por 1000 o por 5000 el haber extraído un billete de ese valor. La probabilidad solicitada es la de que haya ocurrido F , condicionado a que se sabe que ha ocurrido 5000.

Al resolver formalmente mediante la fórmula de Bayes se obtiene:

$$P(F / 5000) = P(5000 / F) \cdot P(F) / \{P(5000 / F) \cdot P(F) + P(5000 / A) \cdot P(A)\} = \\ = (2/10)(1/2) / \{(2/10)(1/2) + (5/10)(1/2)\} = 2/7$$

El mismo resultado se obtiene si se resuelve por un diagrama arbóreo renormalizado, sin necesidad de recurrir a la fórmula citada, y con mayores posibilidades de éxito en la resolución y en la comprensión del problema. Siguiendo los pasos descritos:

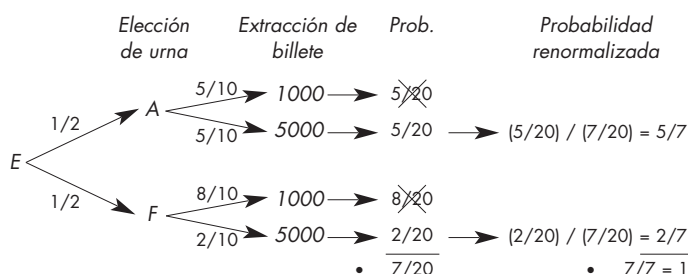


Figura 5

Ejemplo 6

En la ciudad en la que vive Jorge llueve el 20% (2/10) de los días. Jorge es muy perezoso para levantarse de la cama. Ello provoca que a veces pierda el autobús, con lo que le toca ir caminando hasta el instituto y llega tarde a la primera clase. Normalmente, si hace buen tiempo, suele perder el autobús el 30% (3/10) de las ocasiones. Sin embargo, si llueve, se vuelve más perezoso aún para levantarse, y entonces la probabilidad de que pierda el autobús es del 50% (5/10). Un día llegó tarde al instituto. ¿Cuál es la probabilidad de que apareciera hecho una sopa?

Es evidente que la pregunta del enunciado está planteando indirectamente cuál es la probabilidad de que ese día estuviera lloviendo, sabiendo que perdió el autobús. Llamaremos LL y NLL a los sucesos «llueve» y «no llueve», respectivamente, y denotaremos por A y NA a los sucesos «coger el autobús» y «no coger el autobús», respectivamente. La probabilidad solicitada es la de que haya ocurrido LL , sabiendo que ocurrió NA . Planteando la fórmula de Bayes:

$$P(LL / NA) = P(NA / LL) \cdot P(LL) / \{P(NA / LL) \cdot P(LL) + P(NA / NLL) \cdot P(NLL)\} = \\ = (5/10) \cdot (2/10) / \{(5/10) \cdot (2/10) + (3/10) \cdot (8/10)\} = 5/17$$

Resolvamos ahora este ejemplo mediante un diagrama arbóreo renormalizado:

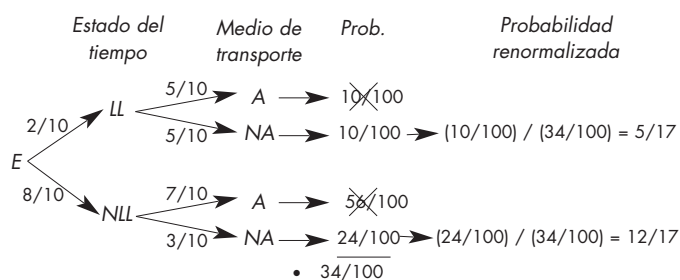


Figura 6

Alcance en la aplicabilidad del método de renormalización

Tal como hemos afirmado en la sección anterior, el método alternativo que propo-

nemos permite, además, ser aplicado en otros problemas de Probabilidad Condicionada, como, por ejemplo, el que constituyó parte de un ejercicio de las Pruebas de Acceso a la Universidad (septiembre de 1994) en el distrito de Valencia.

Ejemplo 7

Jugando a los dardos, la probabilidad de hacer diana de un jugador A es de $1/4$, y la de un jugador B es de $1/3$. Sabiendo que cada jugador ha hecho un solo disparo y que se ha obtenido exactamente una diana, ¿cuál es la probabilidad de que la haya conseguido el jugador A?

Obsérvese que la restricción que propone el enunciado —que se ha obtenido exactamente una sola diana— es un suceso que abarca dos posibilidades —que haya acertado sólo el jugador A o que haya acertado sólo el jugador B—. Ello hace muy complicada la utilización del Teorema de Bayes. Veamos:

Sea A el suceso «hacer diana el jugador A» y B «hacer diana el jugador B». A' y B' serán los correspondientes complementarios (no hacer diana). Se solicita la probabilidad de que haya acertado A, sabiendo que se ha producido una sola diana. Es decir:

$$P(A / [(A \cap B') \cup (A' \cap B)])$$

Aplicando Bayes:

$$\begin{aligned} P(A / [(A \cap B') \cup (A' \cap B)]) &= \\ &= \frac{P([(A \cap B') \cup (A' \cap B)] / A) \cdot P(A)}{P([(A \cap B') \cup (A' \cap B)] / A) \cdot P(A) + P([(A \cap B') \cup (A' \cap B)] / B) \cdot P(B)} \end{aligned}$$

Debemos utilizar ahora la definición de probabilidad condicionada entre dos sucesos (probabilidad de la intersección entre los sucesos condicionado y condicionante, dividido entre la probabilidad del suceso condicionante) en cada uno de los tres elementos del miembro de la derecha de la anterior igualdad. Ello nos lleva, tras realizar las correspondientes simplificaciones, a la expresión:

$$\frac{P[(A \cap B') \cup (A' \cap B)] \cap A}{P[(A \cap B') \cup (A' \cap B)] \cap A + P[(A \cap B') \cup (A' \cap B)] \cap B}$$

que, después de aplicar distributividad entre la unión y la intersección y otras propiedades de operaciones entre conjuntos, esta expresión queda reducida a:

$$\frac{P(A \cap B')}{P(A \cap B') + P(A' \cap B)} = \frac{P(A) \cdot P(B')}{P(A) \cdot P(B') + P(A') \cdot P(B)} = \frac{(1/4) \cdot (2/3)}{(1/4) \cdot (2/3) + (3/4) \cdot (1/3)} = 2/5$$

La solución aportada por el equipo de coordinación del citado distrito, eludía el Teorema de Bayes y aplicaba directamente la definición de probabilidad condicionada (probabilidad de la intersección entre condicionado y condicionante partido por la probabilidad del condicionante). Con la consiguiente utilización de propiedades distributivas entre la unión e intersección entre conjuntos, y considerando que los sucesos $(A \cap B')$ y $(A' \cap B)$ son incompatibles entre sí, se obtiene (se omiten pasos):

$$P(A / [(A \cap B') \cup (A' \cap B)]) = \frac{P[A \cap ((A \cap B') \cup (A' \cap B))]}{P[(A \cap B') \cup (A' \cap B)]} = \frac{P(A \cap B')}{P(A \cap B') + P(A' \cap B)} = 2/5$$

El proceso formal, como puede apreciarse, se hace muy complejo, tanto si se aplica el Teorema de Bayes, como la definición de Probabilidad Condicionada. Creemos que pretender que cualquier alumno de secundaria consiga resolver el problema de una u otra manera es poco menos que utópico.

La resolución es mucho más fácil y comprensible mediante nuestro método de *renormalización del diagrama arbóreo*:

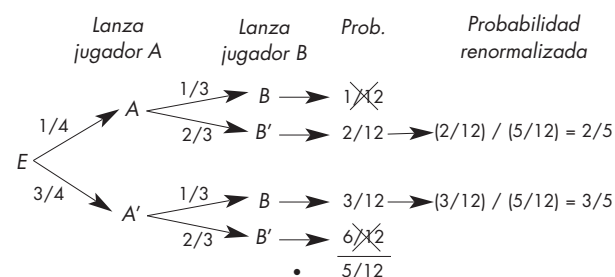


Figura 7

Este procedimiento desarrollado por nosotros puede ser igualmente aplicado en problemas de un nivel de dificultad aún más elevado para los planteamientos formales, como el que proponemos a continuación:

Ejemplo 8

Luis (empresariales), Ana (fisioterapia) y Javi (telecomunicaciones) son tres amigos que han acabado a la vez sus carreras. La probabilidad de incorporarse al mundo laboral durante los seis meses siguientes es, respectivamente, del 40%, 60%, y 70%. Se sabe que seis meses después, al menos dos de ellos ya estaban trabajando. ¿Cuál es la probabilidad de que Luis fuera uno de los afortunados?

Aquí sólo vamos a resolver este problema aplicando nuestro método. Dejamos para el lector la tarea de resolverlo formalmente, si lo desea.

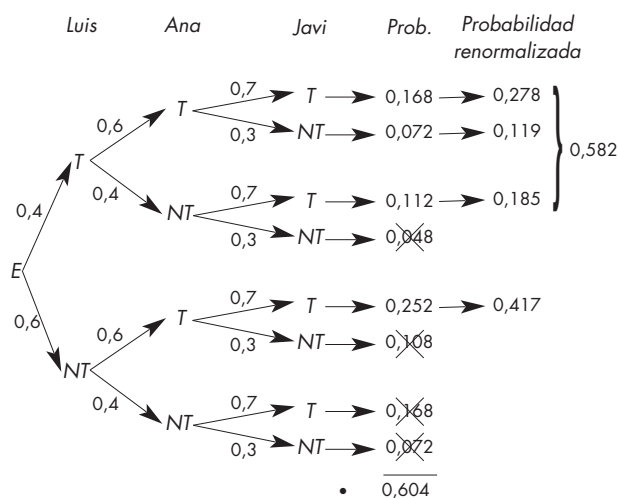


Figura 8

Respuesta ante el método propuesto

Durante los últimos cursos este tema ha sido tratado por nosotros en el aula de enseñanza secundaria preuniversitaria explicando ambos métodos (formal y procedimental) simultáneamente, y hemos podido comprobar que prácticamente la totalidad de los alumnos, al resolver este tipo de problemas, se inclina por utilizar diagramas arbóreos (renormalizados en el caso de probabilidad condicionada) en vez de las expresiones tradicionales. Creemos que ello es debido principalmente a que es mucho más fácil comprender y recordar los pasos de un procedimiento –sencillo y general– que memorizar varias fórmulas cuyo significado preciso no es fácilmente intuible o comprensible. Defendemos que nuestra propuesta instruccional permite al alumnado entender mejor qué es la Probabilidad Condicionada –además de hacer bastante más sencilla la resolución de este tipo de problemas–, a diferencia de las fórmulas tradicionales, cuya aplicación, aunque se produzca de forma correcta, no facilita una comprensión profunda de estos conceptos. Pensamos que la buena acogida que ha tenido el método por parte del alumnado es una evidencia de su claridad y eficacia didáctica.

A la aceptación positiva de nuestro método por parte de los alumnos se une el entusiasmo manifestado por los profesores de matemáticas que han entrado en contacto con el mismo, en aquellos círculos donde lo hemos presentado. Ello nos ha animado a compartirlo con el resto de la comunidad educativa. Pensamos que el procedimiento alternativo expuesto puede ser de gran ayuda al cuerpo de

*...este tema
ha sido tratado
por nosotros
en el aula
de enseñanza
secundaria
preuniversitaria
explicando
ambos métodos
(formal
y procedimental)
simultáneamente,
y hemos podido
comprobar
que prácticamente
la totalidad
de los alumnos,
al resolver este tipo
de problemas,
se inclina
por utilizar
diagramas
arbóreos...*

Santiago E. Gómez
Departamento de Ciencias
Experimentales.
Universitat Jaume I
de Castellón

profesores de matemáticas en su actividad docente a la hora de transmitir estos contenidos.

Agradecimientos

Deseo manifestar mi gratitud al Dr. Vicente Sanjosé (Dpto. de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Universidad de Valencia) por su importante colaboración y manifiesto interés en que este artículo saliera a la luz. También al Dr. Pedro Huerta y al Dr. Bernardo Gómez, (ambos del Dpto. de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia) por su buena disposición a realizar una revisión crítica del manuscrito de este artículo y aportar valiosas sugerencias al mismo.

Referencias bibliográficas

- ARIAS, J. M. e I. MAZA (1998): *Matemáticas, 2.º Bachillerato LOGSE, Humanidades y Ciencias Sociales*, Casals, Barcelona.
- AUSUBEL, D. P., J. NOVAK, y H. HANESIAN (1983): *Psicología Educativa: un punto de vista cognoscitivo* (2.ª edición), Trillas, México.
- ENGEL, A. (1975): *L'enseignement des probabilités et de la statistique (Tomo 1)*, CEDIC, París.
- ESTEVE, R. y A. RAMÍREZ (1994): *Matemáticas-II COU*, Ecir, Valencia.
- GÓMEZ, S.E. (1999): «Resolución de problemas de probabilidad condicionada: renormalización en diagramas arbóreos como alternativa a la fórmula de Bayes», en el Libro de Actas de las *Jornades de Investigació y Educació: Reflexions y Experiències*, Puzol (Valencia).
- HUERTA, P. (1999): *Apuntes de Didáctica de la Probabilidad y de Estadística*. Universidad de Valencia, no comercializado.
- JIMÉNEZ, P. y otros, (1999): *Matemáticas 2º Bachillerato LOGSE, Ciencias Sociales*, Santillana, Col. Acceso, Las Claves del Bachillerato, Madrid.
- OJEDA, A.M. (1995): «Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional», *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, n.º 5, 37-44.
- PARZYSZ, B. (1990): «Un Outil Sous-estimé: l'Arbre Probabiliste», *APMEP*, año 69, n.º 372, 47-54.

El algoritmo de la raíz cuadrada. Dos tipos distintos de aproximación heurística

Guido Ramellini

**IDEAS
Y
RECURSOS**

Detrás de los algoritmos y de los contenidos más aburridos de las matemáticas se esconden a veces ideas e intuiciones ricas y fascinantes. Si dejamos a un lado la pura mecánica y damos preferencia a las actividades de laboratorio, a una metodología heurística y a una aproximación geométrica, podemos encontrar contenidos y estimular habilidades importantes e inesperadas. Este trabajo lo intenta con algo tan aburrido y mecánico como el algoritmo de la raíz cuadrada, que puede sorprendernos y ayudarnos a entender más y mejor no sólo unos contenidos (relaciones entre polígonos, el concepto de área, etc.), sino algunos errores de nuestros alumnos.

- 1 Un matemático es alguien que nunca ha extraído con papel y lápiz una raíz cuadrada, sino en los deberes de sus hijos.
- 2 Dicen que Calvino solía extraer raíces o resolver largas divisiones con la intención de mantener ocupado el hemisferio racional y dejar al creativo libre de buscar la inspiración literaria.
- 3 Fundador de la Antroposofía y de las escuelas Waldorf, en donde la enseñanza del algoritmo de la raíz cuadrada tiene un lugar en el currículo de matemáticas.

Un matematico è qualcuno che non ha mai estratto a mano una radice quadrata, se non nei compiti dei propri figli.¹

Tullio Lombardo Radice

SI HICIERA falta, después de la cita inicial, declaro que el objetivo del artículo es muy distinto al de obligar a los alumnos de primero de ESO a extraer raíces cuadradas con papel y lápiz, aplicando esa lista de instrucciones que resulta mágica como un arcano, compleja como un trabajo de lenguas y más abstracta que la lógica formal.

Pero,

- a) *el algoritmo de la raíz cuadrada –sin duda complicado– ¿es realmente tan abstracto y mágico? Y,*
- b) *dejando a un lado el aspecto práctico, que las calculadoras resuelven tan satisfactoriamente, un trabajo en clase sobre este tema ¿puede desarrollar habilidades matemáticas importantes?*

Aparte el encanto de la experiencia personal de un autor como Italo Calvino² o de los enfoques de un pedagogo como Rudolf Steiner³, pocos profesores estarían dispuestos a dedicar parte del exiguo tiempo del programa de matemáticas a enseñar el algoritmo de la raíz cuadrada, aun cuando se reconozca un valor pedagógico a la concentración, al rigor y a la autodisciplina que comporta.

Teniendo en cuenta que se puede conseguir que los alumnos adquieran estos hábitos en casi todas las actividades matemáticas que les proponemos, este trabajo no tiene un valor específico, ni por contenido ni por metodología, pero permite evidenciar unos aspectos que me parece útil subrayar, a saber:

- a) Que hay un significado, a veces oculto, bajo las fórmulas o las instrucciones matemáticas que muy a menudo aceptamos de manera mecánica.

- b) Que hay métodos de aproximación heurísticos que merece la pena investigar.
- c) Además, el trabajo de analizar las instrucciones del algoritmo de la raíz cuadrada puede permitir a los profesores entender más profundamente las razones de unos errores muy comunes entre los estudiantes.

Las potencias y, por consiguiente, las raíces parecen desempeñar el papel de señalar el paso de la escuela primaria a la secundaria. Las fórmulas para calcular el área del cuadrado, su diagonal y los teoremas de Pitágoras y Euclides introducen definitivamente estas nuevas operaciones en el bagaje del estudiante de la E.S.O.

Los profesores resuelven el problema de calcular las raíces cuadradas de tres maneras:

- a) utilizando las *tablas numéricas*;
- b) a través de la *descomposición en factores primos*;
- c) usando las *calculadoras*.

Cada cual insistirá más en uno o en otro de los tres procedimientos, consciente de las ventajas y de los defectos que tienen:

- a) *Tablas numéricas*: son muy fáciles de utilizar para números pequeños (normalmente, hasta mil); después (números más grandes o decimales) se hace más complejo consultarlos y hay que desarrollar estrategias y prever aproximaciones y redondeos. Estos son los aspectos que más gustan a los profesores y menos a los estudiantes y, desafortunadamente, permanecen por un tiempo muy limitado entre las habilidades de los alumnos.
- b) *Descomposición en factores primos*: aunque permite aplicar las propiedades de las potencias y constituye una técnica dúctil, a la que se puede recurrir cada vez que un cálculo se nos presenta largo y complicado, mantiene los problemas de repetición y mecánica que nos hacen rechazar tener que enseñar el algoritmo de la raíz cuadrada.
- c) Cuando por fin dejamos que el alumnado utilice la *calculadora* en clase (porque en casa la utilizan desde siempre y ya han conseguido adquirir los típicos vicios: abuso, mecanicidad, superficialidad, etc.), las dos técnicas anteriores desaparecen de la memoria, como si nunca las hubieran visto.

¿Es esta pérdida de contenidos tan grave? ¿Se ha consolidado alguna de las habilidades que hemos intentado desarrollar? ¿Cuántos alumnos cometen todavía los errores más clásicos que se registran cada vez que se debe calcular el lado del cuadrado sabiendo su área: dividir por 2, o por 4, o por un número que no saben encontrar? ¿Cómo juzgamos estos errores tan radicados, tan difíciles de eliminar que parecen «fósiles»?

*Las potencias y,
por consiguiente,
las raíces
parecen
desempeñar
el papel de señalar
el paso
de la escuela
primaria
a la secundaria.*

No soy tan ingenuo como para pensar que tengo un remedio infalible o que existe una terapia completamente eficaz, pero creo que desmontar con los alumnos el algoritmo de la raíz cuadrada nos puede ayudar a comprender mejor el significado de la operación y el origen de muchos errores.

Para ello propongo dos tipos de aproximación, que no son alternativos y que, por el contrario, se integran y tienen en común un talante heurístico.

El método geométrico

Nos preguntábamos al inicio del artículo si las instrucciones para desarrollar el algoritmo de la raíz cuadrada eran realmente tan abstractas y mágicas. Intentamos contestar a la pregunta buscando el significado geométrico de cada una de ellas (Glenn y Johnson, 1960).

Objetivos

Además de los objetivos estrictamente disciplinares, hay otros con carácter más transversal, como el de transmitir a los alumnos el gusto (o por lo menos insinuar la sospecha) que detrás de procedimientos aparentemente mecánicos hay adquisiciones, trucos y estrategias que merecen la pena ser investigados, aun cuando requieren un pequeño esfuerzo.

Habilidades desarrolladas

Capacidad de:

- a) organizar un razonamiento coherente;
- b) reconocer analogías estructurales;
- c) individuar estructuras básicas;
- d) comprender y utilizar el cálculo aproximado;
- e) analizar las relaciones entre cuadrado y rectángulo.

Actividad: empezamos calculando la raíz cuadrada de un número pequeño: 588.

- a) La primera operación es la de dividir el número en grupos de dos

cifras, empezando por la derecha. Esto se explica considerando que el cuadrado de un número de una cifra varía entre $1^2 = 1$ y $9^2 = 81$. Así, de forma aproximada, del grupo de dos cifras de la derecha obtendremos la cifra de las unidades del resultado y, moviéndonos hacia la izquierda, resultarán las cifras de las decenas, de las centenas, etc.⁴

b) Así:

$$\sqrt{588} = \sqrt{5.88}$$

y ya sabemos que el resultado será un número de dos cifras; además, dado que $20^2 = 400$ y $30^2 = 900$, el resultado será comprendido entre 20 y 30, o sea:

$$20 < \sqrt{588} < 30$$

En términos geométricos, si un cuadrado tiene el área $588 u^2$, su lado medirá entre 20 y 30 unidades. Así que dentro de nuestro cuadrado podemos dibujar otro cuadrado más pequeño de lado $20 u$. El área restante corresponderá a dos rectángulos de lados 20 y x_1 , y un cuadrado de lado x_1 (figura 1).

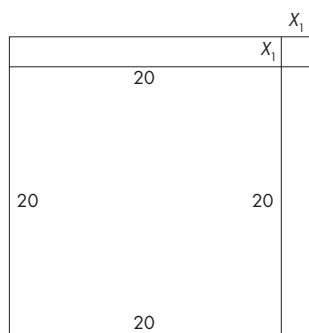


Figura 1

Dado que $x_1 < 20$, el área del cuadrado x_1^2 será mucho más pequeña que el área del rectángulo $20 \cdot x_1$, así que momentáneamente podemos hacer como si el cuadrado pequeño (x_1^2) no existiera. Entonces, $588 - 400 = 188 u^2$ será lo que miden las áreas de los dos rectángulos, o sea: $188 = 2 \cdot 20 \cdot x_1$.

Será muy fácil obtener que

$$x_1 = 188 / (2 \cdot 20) \approx 4.$$

4 Es interesante observar que extrayendo la raíz sin muchos miramientos, aprovechando al máximo las aproximaciones, se obtienen resultados sorprendentemente precisos.

Por ejemplo:

$$\sqrt{20.25} \Rightarrow \sqrt{20} \approx 4$$

$$\text{Y } \sqrt{2^2} = 5$$

entonces:

$$\sqrt{202^2} \approx 4^2$$

No siempre las cosas resultan tan acertadas, pero el error queda entre límites muy aceptables. Por ejemplo: $321^2 = 103041$; o sea:

$$\sqrt{10304} \Rightarrow \sqrt{10} \approx 3$$

$$\sqrt{30} \approx 5$$

$$\sqrt{4} \approx 6$$

Así que:

$$\sqrt{10304} \approx 356$$

El error cometido es aproximadamente del 10%.

Otro ejemplo: $7899^2 = 62394201$; o sea:

$$\sqrt{62.3942.01} \Rightarrow \sqrt{62} \approx 7$$

$$\sqrt{62} \approx 7$$

$$\sqrt{39} \approx 6 \quad \text{y} \quad \sqrt{42} \approx 6$$

$$\sqrt{01} \approx 0$$

Así que:

$$\sqrt{62394201} \approx 766$$

Con un error del 3%.

Dejo que cada profesor juzgue los riesgos que comporta esta divagación.

Cuando los alumnos posean algún instrumento de álgebra se les podrá demostrar de dónde sale la aproximación: $452 = (40 + 5)^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 5 + 5^2 = 1600 + 400 + 25$. Obviamente, la aproximación no tiene en cuenta el doble producto.

5 Muy esquemáticamente:

$\sqrt{5.88}$	24,2
4	$2^2 = 4$
18.8	$18 : (2 \cdot 2) = 4$
176	$44 \cdot 4 = 176$
120.0	$120 : (24 \cdot 2) = 2$
964	$482 \cdot 2 = 964$
236	

6 a) En vez de dividir el área entre los dos rectángulos se multiplica por dos el lado conocido.

b) Se introduce el valor del área del cuadrado pequeño automatizando la operación correspondiente al cálculo algebraico: $2 \cdot \text{lado} \cdot x + x^2 = x \cdot (2 \cdot \text{lado} + x)$.

Por $x_1 = 4 u$, el área de cada rectángulo será $80 u^2$ y la del cuadrado pequeño (x_1^2) será $16 u^2$.

En total habremos asignado otras $176 u^2$.

O sea, que dentro del cuadrado del que hemos partidos es posible dibujar otro cuadrado de lado $24 u$ y todavía nos sobrará una pequeña área de $12 u^2$ (figura 2), y podremos ser más precisos repitiendo los pasos vistos antes:

$$12 u^2 = 1200 du^2$$

$$24 u = 240 du$$

$$\text{Área de cada rectángulo} = 1200 / 2 = 600 du^2$$

$$x_2 = 600 / 240 \approx 2 du.$$

O sea, que dentro de nuestro cuadrado se puede dibujar otro cuadrado de lado $24,2 u$ y continuar de este modo si queremos ser todavía más precisos.

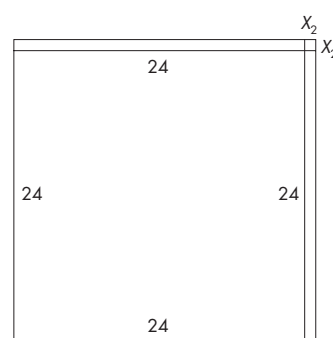


Figura 2

Creo que es fácil darse cuenta de que el algoritmo de la raíz cuadrada,⁵ salvo unos ajustes puramente aritméticos,⁶ sigue paso a paso el desarrollo geométrico presentado.

Estoy convencido y además lo he comprobado en clase, que muy pocos alumnos habrán podido seguir y comprender todo el desarrollo precedente. De hecho, no era éste nuestro objetivo pero, si algún profesor quisiera dedicarle un poquito más de tiempo y aumentar el nivel de comprensión, las dos actividades previas que aquí presento resultan muy efectivas.

Es fácil imaginar que el profesor presente el tema *Área/lado del cuadrado* preguntando algo como:

Calculad el área del cuadrado de lado 5 cm.

Sigue un dibujo (figura 3), y unas posibles soluciones.

Si procede, otro dibujo (figura 4) facilita encontrar la solución correcta.

Rápidamente podemos recorrer todas las soluciones: las más elementales (contar los cuadrados) y la primera fórmula (*base · altura*), hasta llegar a utilizar las potencias:

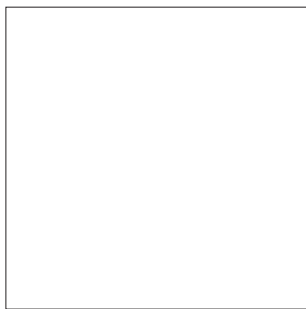


Figura 3

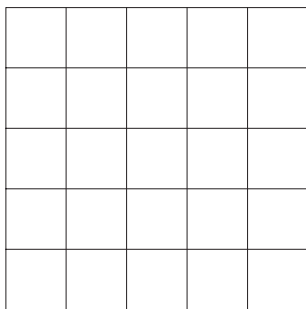


Figura 4

$$\text{Área del cuadrado} = \text{lado}^2 = 5^2 = 25 \text{ cm}^2.$$

Después de unos cuantos ejemplos, podremos enfrentarnos con el problema opuesto, o sea el de calcular el lado de un cuadrado conociendo su área.

Unos cálculos y unas simples construcciones geométricas, con valores del lado o del área muy fáciles, nos permiten confirmar los conceptos fundamentales:

- el área del cuadrado se obtiene elevando el lado a la segunda potencia;
- el lado del cuadrado se obtiene extrayendo la raíz cuadrada del área;
- la operación de la raíz es opuesta a la potencia.⁷

Antes de enfrentarnos con situaciones en las que calcular la raíz del área no sea tan fácil y se deba recurrir a algún método de cálculo, podemos organizar una actividad de acercamiento al problema que permita su comprensión y resolución al mayor número de alumnos.

Podríamos suministrar un breve cuestionario con tres preguntas.

- ¿Cuál es el área de un cuadrado de lado 7 metros?
- ¿Cuánto aumenta esa área si el lado aumenta 2 metros?
- Se dan dos cuadrados: Q_1 , de lado 5 m, y Q_2 , de lado 8 m. Si se aumenta 1 m el lado de cada cuadrado, ¿es correcto afirmar que las áreas de Q_1 y Q_2 aumentarán el mismo valor, o sea 1 m²?

*...el problema
opuesto
o sea
el de calcular
el lado
de un cuadrado
conociendo
su área.*

Será interesante recoger y confrontar las respuestas y las estrategias utilizadas.

Normalmente encontraremos dos tipos de respuestas a las preguntas b) y c):

- 1) 4 m² y sí; o
- 2) 32 m² y no.

La respuesta 1) corresponde a una visualización del problema en el que el cuadrado grande se obtiene sumando las áreas de los cuadrados de lado 7 m y 2 m. De este modo, la contestación a la pregunta c) resulta coherente.

La respuesta 2) corresponde a una estrategia del tipo:

$$S_1 = 7^2 = 49 \text{ m}^2$$

$$S_2 = (7 + 2)^2 = 81 \text{ m}^2$$

Así que:

$$S_2 - S_1 = 81 - 49 = 32 \text{ m}^2$$

Confrontando las dos respuestas será fácil convencer los alumnos de que la estrategia 2) es la correcta.⁸

Estamos preparados para preguntar lo siguiente, con la referencia de la figura 4:

¿Cómo cambiará el área de un cuadrado si se aumenta su lado (l) en x cm?

No obstante los ejercicios resueltos, encontrar la solución es más complejo de lo que parece.

Merece la pena recoger las hipótesis que los alumnos propongan antes de comprobarlas con la ayuda de una nueva construcción geométrica (figura 5):

7 Cada profesor evaluará si es el caso de ampliar la explicación a exponentes y raíces de orden mayor y si introducir el concepto de logaritmo, o si dejarlos para otro momento.

8 Podríamos comprobar cuánto han entendido los alumnos suministrando un nuevo cuestionario y preguntado:

- ¿Cuál es el área de un círculo de radio 5 m?
- ¿Cuánto aumentará este área si el radio aumenta 2 m?
- Se dan dos círculos, C_1 , de radio 6 m, y C_2 , de radio 10 m. Si se aumenta el radio de cada círculo 2 m, ¿es correcto afirmar que el área de los dos círculos aumenta el mismo valor, o sea 4 m²?

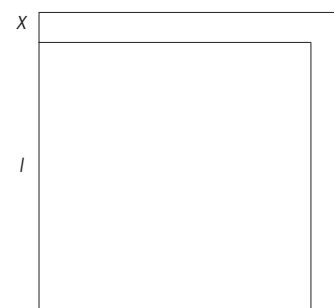


Figura 5

Puede que ahora más de un alumno sepa ver cómo, aumentando x cm el lado del cuadrado, en su área aparecen *dos rectángulos* de área $l \cdot x$, y *un cuadrado* de área x^2 (figura 6).

(Hemos escogido una x bastante más pequeña que l , para que sea lo más parecido a lo que sucede en la resolución del algoritmo de la raíz cuadrada).

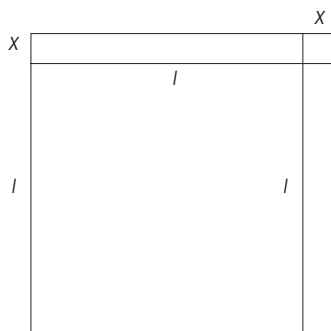


Figura 6

Podemos comprobar que todo marcha bien atribuyendo valores numéricos a l y a x .

Por ejemplo:

$$\text{si } l = 10 \text{ y } x = 2 \Rightarrow S = 12^2 = 144$$

o sea,

$$\begin{aligned} 10^2 + 10 \cdot 2 + 10 \cdot 2 + 2^2 &= \\ &= 100 + 20 + 20 + 4 \end{aligned}$$

Después de unos cuantos ejemplos de este tipo, podemos intentar que los alumnos calculen el valor del incremento x , sabiendo las medidas de l y del área final. Por ejemplo: $l = 12$ cm y $S = 225$ cm².

Es probable que los alumnos necesiten ser guiados. Hacemos que observen atentamente en la figura 6 qué polígonos forman el cuadrado grande.

Es evidente que el cuadrado interno mide 144 cm²; entonces el área restante ($225 - 144 = 81$ cm²) se debe a los dos rectángulos y al cuadrado pequeño.

Si dejamos momentáneamente a un lado el área de este último, mucho más

pequeña que la de los rectángulos, es mucho más fácil calcular un valor aproximado de x :

$$x = S / (2 \cdot l) = 81 / (2 \cdot 12) = 3,375$$

Si aceptamos la aproximación por defecto, es fácil comprobar que:

$$(12 + 3)^2 = 15^2 = 225,$$

o sea que $x = 3$.

Está claro que no hemos hecho otra cosa que resolver como cuestión aislada lo que probablemente representa el principal obstáculo cognitivo para la comprensión del significado geométrico del algoritmo de la raíz cuadrada.

He comprobado que después de este ejercicio, un número muy superior de alumnos es capaz de seguir el desarrollo del procedimiento completo.

En todo caso, me gustaría subrayar que la cuestión referente al incremento de x , tiene validez por sí sola y pone en movimiento habilidades matemáticas de alto nivel, como: aproximar, formular y comprobar hipótesis, controlar el error, etc.

El método estadístico

Una vez comprobada la eficacia de un método basado en la aproximación para salir del paso, dejando para un momento posterior el precisar los resultados, parecería fácil introducir un procedimiento que se funda sobre los conceptos de *media* (Glenn y Johnson, 1960) y el *proceder por intentos*, especialmente si podemos utilizar una *hoja de cálculo*.

Las adquisiciones más interesantes no son, como ocurre a menudo, las más tradicionales, sino las habilidades más originales de los nuevos currículos de secundaria y constituyen algo que se podría definir como «bricolaje matemático».

Las tareas de laboratorio matemático permiten a los profesores entender el origen de algunos errores típicos. Algunos de estos errores son muy ricos en conocimientos a veces aplicados de forma incorrecta o superficial, y permiten planear una estrategia personal y más eficaz.

Los errores más comunes que los alumnos cometen para encontrar el lado a partir del área del cuadrado son:

- dividir por cuatro;
- dividir por dos;
- dividir por algún número que no saben expresar.

Hay quien evidentemente confunde el perímetro del cuadrado con el área, pero la mayoría de los errores depen-

*...después
de este ejercicio,
un número
muy superior
de alumnos
es capaz
de seguir
el desarrollo
del procedimiento
completo.*

den de la complejidad de la operación de raíz que los empuja a recurrir a la –más conocida– división.

¿Estos errores dependen de faltas de conocimientos o hay algo importante detrás?

Si en el ámbito aritmético la operación de raíz tiene evidentes relaciones con la división, en el ámbito geométrico las relaciones son menos evidentes, pero igualmente importantes.

El alumno que intenta calcular el lado a partir del área a través de una división, está tratando el cuadrado como si fuera un rectángulo, pero ¿qué es el cuadrado sino un rectángulo un poco especial?

Esto es el punto de partida del método estadístico.

Actividad

Pongamos que debemos otra vez calcular $\sqrt{588}$

El primer paso será siempre el cálculo aproximado, aunque esta vez no importa si es por exceso o defecto ni, como veremos, que la primera aproximación se aleje bastante del resultado exacto.

Partimos otra vez del 20.

Si estuviéramos trabajando con un rectángulo, poniendo que la base (b_1) sea 20, sería fácil encontrar el valor aproximado de su otra dimensión:

$$b_1 = 588 : 20 = 29,4$$

Para que el rectángulo se transforme en un cuadrado, sus dimensiones tienen que ser iguales, o sea que la base debe achicarse y la altura crecer.

No hay mejor manera para obtener este efecto que hacer la *media* entre las dos dimensiones:

$$b_2 = \frac{b_1 + b_1}{2} = \frac{20 + 29,4}{2} = 24,7$$

*En la tabla
se pone
de manifiesto
cómo
el grado final
de exactitud
depende
de la primera
aproximación...*

A este valor de la base le corresponderá una altura:

$$b_2 = 588 : 24,7 = 23,8056...$$

El procedimiento se puede repetir muchas veces, encontrando valores cada vez más cercanos al exacto:

$$b_3 = \frac{b_2 + b_2}{2} = \frac{24,7 + 23,8056...}{2} = 24,2528$$

Este valor representa ya una óptima aproximación al lado del cuadrado: $24,2528^2 = 588,12$, con un error del 0,02%.

Si hiciera falta (pero, ¿para qué?) calcular la raíz de números más grandes, deberíamos aceptar unos resultados menos aproximados o repetir más veces el procedimiento.

Esto no es un problema si podemos utilizar una *boja de cálculo* (tabla 1).

Una vez insertados en la primera columna el número del cual queremos calcular la raíz cuadrada y en la segunda el valor aproximado, en tan sólo tres pasos se obtienen aproximaciones del orden del 1%.

En la tabla se pone de manifiesto cómo el grado final de exactitud depende de la primera aproximación: es suficiente acertar con el orden, o sea, otro concepto importante y otro buen ejercicio de análisis y previsión de resultados para nuestros alumnos.

Número	B1	H1	Error%	B2	H2	Error%	B3	H3	L	Error%
588	10	58,8	-124,4871131	34,4	17,093	-64,6583214	25,7474	22,838	24,292	-0,17966802
588	20	29,4	-21,24355653	24,7	23,806	-92,3408018	24,253	24,245	24,249	-1,445E-06
12345678	1000	12346	-251,3641701	6672,1	1850,1	-52,6156248	4261,5	2897	3579,3	-1,86756999
12345678	3000	4115,2	-17,12139002	3557,6	3470,2	-98,7237732	3513,9	3513,4	3513,6	-2,9003E-07
0,004567	0,1	0,04567	32,42041728	0,0728	0,0627	1999,87946	0,0678	0,0674	0,0676	-0,00039247
0,004567	0,06	0,0761	-12,63263786	0,0681	0,0671	1993,36739	0,0676	0,0676	0,0676	-3,1042E-08
9,89899E+14	1E+07	1E+08	-214,6266025	5E+07	2E+07	-57,7349976	4E+07	3E+07	3E+07	-1,03630021
9,89899E+14	3E+07	3E+07	-4,875534161	3E+07	3E+07	-99,886795	3E+07	3E+07	3E+07	-2,0579E-11

Tabla 1

Conclusiones

En el transcurso del artículo he planteado y repetido las observaciones que me parecen didácticamente importantes, así que, para terminar, me limitaré a resumirlas brevemente:

- los pasos metodológicamente más significativos (aproximación, previsión de resultados, medición del error, evaluación de los intentos, etc.) pueden ser desarrollados en muchas ocasiones, sin necesariamente trabajar sobre este tema;
- lo mismo se puede decir de los contenidos: área/perímetro, potencia/raíces, raíces/división, rectángulos/cuadrado, propiedades de las operaciones, etc.;
- las técnicas didácticas tampoco presentan grandes novedades: el método constructivo en la geometría, las actividades de laboratorio, el desarrollo heurístico de los contenidos, la utilización de las nuevas tecnologías... ya son patrimonio común de los docentes.

Me parece importante dejar un espacio propio al análisis de los errores de los alumnos, en especial de los que al principio del artículo he llamado «fósiles», por profundos, aparentemente superados por el aprendizaje de nuevos conceptos y habilidades, pero que se presentan con frecuencia. En este trabajo hemos visto varios errores –y más todavía se podrían encontrar confrontando las experiencias de más docentes– muy comunes. Más allá de una primera evaluación negativa, estas equivocaciones esconden un modo propio de cada alumno de «ver» la situación cognitiva: los contenidos, las preguntas, las formas geométricas, el desarrollo de las estrategias resolutivas, la comprobación consciente o inconsciente de los resultados, que pueden dar a los profesores importantes pistas para conducir a los alumnos hacia la solución correcta o –mejor todavía– las soluciones correctas.

*Me parece importante
dejar
un espacio propio
al análisis
de los errores
de los alumnos...*

⁹ Dos grupos de profesores de la Sociedad «Emma Castelnuovo» de Madrid están utilizando este material para realizar un laboratorio itinerante.

Guido Ramellini
Scuola Media Italiana
de Madrid
Sociedad Madrileña
de Profesores de Matemáticas
«Emma Castelnuovo»

Las actividades presentadas en este trabajo nos pueden ayudar a entender algunos de estos errores:

- pasar del área de cuadrado al lado dividiendo por 4 esconde evidentemente una confusión entre los conceptos de área y perímetro. Emma Castelnuovo (1979)⁹ tiene muchas interesantes y eficaces propuestas de trabajo sobre este problema;
- intentar dividir por dos significa haber asimilado, aún de un modo un poco superficial, el concepto de igualdad de las dimensiones del cuadrado;
- el intento de resolver el problema a través de una división deriva de los fuertes vínculos entre las operaciones (y los algoritmos) de división y raíz, y los rectángulos y el cuadrado. Efectivamente, con la hoja de cálculo hemos trabajado de este modo, transformando la ecuación $x^2 = n$ en $x = n/x$, asignando valores arbitrarios a x , tales que resultara $n = x$.

Otro aspecto desarrollado que me parece muy importante, porque a menudo está poco presente en el programa de matemáticas, es el de la aproximación, que en esta etapa los alumnos asocian al error. De hecho, nuestros alumnos están acostumbrados a trabajar las matemáticas en contextos tan artificiales, en los que los resultados son tan rotundos que, en la mayoría de los casos, un resultado decimal parece sospechoso o alarmante. Trabajando más a menudo en un contexto real, midiendo objetos concretos, nos acostumbraríamos a aceptar valores decimales, con la necesidad de aproximarlos por razones concretas, con relación a las unidades de medidas utilizadas.

Puede que los pocos lectores que han llegado hasta aquí se pregunten: ¿merece la pena dedicar tanta atención al algoritmo de la raíz cuadrada?

Quizá muchos profesores decidan que no. Entonces, ¿qué quedaría de este trabajo?

Quizás lo más importante sería el comprobar cómo este modo de trabajar permite transformar en algo interesante y didácticamente productivo un tema aparentemente tan obsoleto como el algoritmo de la raíz cuadrada, y sin que ningún matemático haya tenido que extraer a mano raíces, ni siquiera en los deberes de sus hijos.

Bibliografía

- CASTELNUOVO E. (1976): *Matematica nella realtà*, Boringhieri.
GLENN, W. H. y JOHNSON, D. A. (1960): *The Pythagorean Theorem*, Webster Publishing Company.

Algunas demostraciones del valor de la potencia de un punto con respecto a una circunferencia

Juan Ricardo Escribano Rivero

**IDEAS
Y
RECURSOS**

Se proponen tres demostraciones sobre el valor de la potencia de un punto con respecto a una circunferencia. La primera utiliza el método de la geometría analítica, y las propiedades de las soluciones de la ecuación de segundo grado. La segunda se basa sólo en el Teorema de Pitágoras. Y, la tercera utiliza el álgebra de vectores. Por último, se da el resultado de la potencia de un punto con respecto a una elipse. Con esto se intenta suplir el hueco en los libros de texto, de nivel de Bachillerato, que no recogen una demostración general sobre la constancia de la potencia del punto con respecto a una circunferencia.

LA POTENCIA DE UN PUNTO coplanario con una circunferencia es objeto de atención en el Bachillerato. Antes de estudiar las cónicas, se ha tratado la geometría analítica de la recta y el plano afín. Todo ello lleva a que el estudio de las cónicas tiene lugar, en los actuales planes de estudio, desde un punto de vista analítico más que geométrico. Esto es así para familiarizar a los estudiantes con toda la capacidad predictiva del método analítico, para que se vayan entrenando en el método de las coordenadas cartesianas y para ir conociendo la forma de las ecuaciones de unas cuantas curvas importantes en toda la Ciencia y la Técnica. Existe, en mi opinión, una pequeña parcela donde el método analítico no se aplica en toda su extensión y esto es precisamente en la demostración de que la potencia de un punto con respecto a una circunferencia es una cantidad constante, una vez fijados el punto y la circunferencia.

Los textos de enseñanza de 3.º de B.U.P. o de 1.º de Bachillerato definen (apriorísticamente) a la potencia de un punto con respecto a una circunferencia como una cantidad constante. Esto es un error: a) se presupone algo que no ha sido demostrado, lo cual es grave dentro del espíritu lógico-matemático que se pretende transmitir a los estudiantes; y, b) si el texto lo «demuestra», en general, tal demostración consiste en que la recta que pasa por el punto sea tangente a la circunferencia, pero no una recta cualquiera que sea secante a la misma. Estas pseudo-demostraciones son peligrosas pues se cae en el error de la generalización a partir de un resultado particular. Por desgracia, esta es «la demostración» de la constancia de la potencia de un punto con respecto a una circunferencia que contienen la mayoría de los textos de este nivel (...eso si contiene alguna demostración al respecto).

Aquí lo que se pretende es llenar ese pequeño hueco, y proporcionar tres demostraciones. La primera está basada en la geometría analítica. Es una demostración algo laboriosa,

pues requiere de muchos pasos algebraicos, y recurre a propiedades de las soluciones de una ecuación de segundo grado, pero tiene el interés de «mantener la tensión» hasta el final. Puede ser presentada por el profesor cuando se explique la geometría analítica de la circunferencia. La segunda demostración necesita únicamente de Teorema de Pitágoras (!!). Es con diferencia la más elegante, y puede ser explicada por el profesor, o propuesta como problema, mientras se imparte la trigonometría del triángulo rectángulo. La tercera demostración usa el álgebra vectorial. No es una demostración tan directa como la anterior, pero tiene el interés de proporcionar otro método de ataque a la solución de un mismo problema.

En cualquier caso no se pretende entrar en el estudio de las propiedades de la potencia, y posiciones relativas entre el punto y la circunferencia, lo cual suele estar recogido en cualquier libro de texto.

En último lugar, y como extensión del método analítico, se extiende la definición de potencia de un punto al caso de una elipse, y una vez proporcionado el resultado se sugiere que se compare con los correspondientes a los de una circunferencia.

Definición

La potencia del punto P con respecto a la circunferencia coplanaria C , y se denota por $\mathcal{P}_C(P)$, a la cantidad

$$\mathcal{P}_C(P) = \overline{PA_1} \cdot \overline{PA_2}$$

siendo A_1 y A_2 las intersecciones de una recta del haz que pasa por P , con la circunferencia Γ . Ver figura 1.

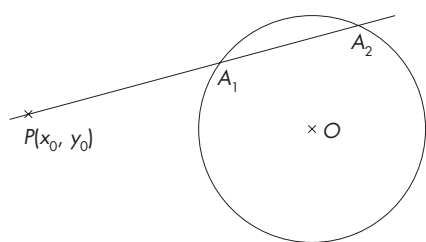


Figura 1

Teorema

La potencia, $\mathcal{P}_C(P)$, es una cantidad *constante*, cuyo valor es $d^2 - r^2$, siendo d la distancia del punto P al centro de la circunferencia O , y r su radio:

$$\mathcal{P}_C(P) = d^2 - r^2$$

Demostración basada en la geometría analítica

Consideremos una circunferencia Γ , centrada en el origen (no por ello se pierde generalidad), y de radio r . Sea un punto $P(x_0, y_0)$, que no pertenece a la circunferencia Γ , da igual que sea interior o exterior a ella. Supongamos que $y - y_0 = m(x - x_0)$ es la ecuación del haz de rectas $\neq$ que pasa por $P(x_0, y_0)$.

Como los puntos P , A_1 y A_2 están alineados, entonces se verifica:

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} \quad [1]$$

ya que $\overline{PA_1}$ y $\overline{PA_2}$ son las distancias de P a A_1 y A_2 , verifica:

$$\mathcal{P}_C(P) = \overline{PA_1} \cdot \overline{PA_2}$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \cdot \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2} \quad [2]$$

Si tenemos en cuenta las propiedades de las proporciones, podemos aplicarlas a la expresión [1], en concreto, si

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

entonces

$$\frac{a^2 + b^2}{b^2} = \frac{c^2 + d^2}{d^2}$$

y usarla en [2], con lo que resulta:

$$\mathcal{P}_C(P) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) + (y_1 - y_0)(y_2 - y_0) \quad [3]$$

Es de notar que a este mismo resultado [3] podríamos haber llegado a partir del producto escalar de los vectores

$$\overrightarrow{PA_1} \text{ y } \overrightarrow{PA_2}$$

expresándolos en componentes cartesianas, como fácilmente se puede demostrar.

Desarrollando la expresión [3] se obtiene:

$$\mathcal{P}_C(P) = x_1 x_2 + y_1 y_2 - x_0(x_1 + x_2) - y_0(y_1 + y_2) + d^2 \quad [4]$$

donde hemos hecho $d^2 = x_0^2 + y_0^2$, que es la distancia entre P y O .

Si $A_1(x_1, y_1)$ y $A_2(x_2, y_2)$ son los puntos de intersección de la recta $\neq$ y la circunferencia Γ , entonces sustituyendo el valor de la variable y de $\neq$ en Γ se obtiene la ecuación de segundo grado:

$$(1 + m^2)x^2 + 2m(y_0 - mx_0)x + (y_0 - mx_0)^2 - r^2 = 0 \quad [5]$$

Si x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación [5] se cumplirá, según las propiedades de las raíces de las ecuaciones de segundo grado:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{\left(y_0 - \frac{mx_0}{m}\right)^2}{1+m^2} r^2 & [6a] \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{-2m \left(y_0 - \frac{mx_0}{m}\right)}{1+m^2} & [6b] \end{cases}$$

Por otro lado, si sustituimos el valor de la variable x de $\neq$ en Γ , se obtendrá ahora la ecuación:

$$\left(1 + \frac{1}{m^2}\right) y^2 - \frac{2}{m} \left(\frac{y_0}{m} - x_0\right) y + \left(\frac{y_0}{m} - x_0\right)^2 - r^2 = 0 \quad [7]$$

Si y_1 y y_2 son las soluciones de la ecuación [7] se verificará a su vez:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{\left(y_0 - \frac{mx_0}{m}\right)^2}{1+m^2} m^2 r^2 & [8a] \\ y_1 \cdot y_2 = \frac{2 \left(y_0 - \frac{mx_0}{m}\right)}{1+m^2} & [8b] \end{cases}$$

Los resultados [6a, 6b] y [8a, 8b] aseguran que efectivamente los puntos $A_1(x_1, y_1)$ y $A_2(x_2, y_2)$ pertenecen a $\neq$ y a Γ . Sustituyendo [6a, 6b] y [8a, 8b] en la expresión [4] resulta:

$$\begin{aligned} r_c(F) &= \frac{\left(y_0 - \frac{mx_0}{m}\right)^2}{1+m^2} r^2 + \frac{\left(y_0 - \frac{mx_0}{m}\right)^2}{1+m^2} m^2 r^2 \\ &= x_0 \left[\frac{m \left(y_0 - \frac{mx_0}{m}\right)}{1+m^2} \right] - y_0 \left[\frac{2 \left(y_0 - \frac{mx_0}{m}\right)}{1+m^2} \right] + d^2 = \\ &= d^2 - r^2 \end{aligned}$$

Que era el resultado que se deseaba demostrar.

Demostración a partir del Teorema de Pitágoras

Por definición:

$$P_c(F) = PA_1 - FA_1, \quad [1]$$

En la figura 2 consideremos el triángulo $\Delta(POA_2)$, en él tenemos:

$$\begin{cases} d^2 = h^2 + \overline{PA_2}^2 & [2a] \\ r^2 = h^2 + \overline{AA_2}^2 & [2b] \end{cases}$$

y también:

$$A_1A = AA_2 \quad [3]$$

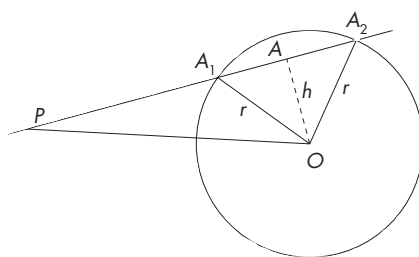


Figura 2

Como

$$PA_2 = PA + AA_2 \quad [4a]$$

y

$$PA_1 = PA - A_1A \quad [4b]$$

Sustituyendo [4a, 4b] en [1] resulta:

$$r_c(F) = \overline{PA} - \overline{A_1A} \left(\overline{PA} + \overline{AA_2} \right) = \overline{PA}^2 - \overline{AA_2}^2 \quad [5]$$

donde hemos usado [3]. Si sustituimos $\overline{PA}$ usando [2a], y $\overline{AA_2}$ de [2b]; en [5] se obtiene:

$$r_c(F) = \overline{PA}^2 - \overline{AA_2}^2 = d^2 - h^2 - r^2 + h^2 = d^2 - r^2$$

Demostración vectorial

Por definición:

$$P_c(F) = \overline{PA_1} - \overline{FA_1}, \quad [1]$$

Como $\overline{PA_1}$ y $\overline{PA_2}$ son vectores paralelos (fig. 2), entonces:

$$P_c(F) = \overline{PA_1} \cdot \overline{PA_2} \quad [2]$$

Por otro lado,

$$\overline{PA_1} = \overline{PO} + \overline{OA_1} \text{ y } \overline{PA_2} = \overline{PO} + \overline{OA_2} \quad [3]$$

Sustituyendo [3] en [2] resulta:

$$r_c(F) = \left(\overline{PO} + \overline{OA_1} \right) \cdot \left(\overline{PO} + \overline{OA_2} \right) = \overline{PO} \cdot \overline{PO} + \overline{PO} \cdot \overline{OA_2} + \overline{OA_1} \cdot \overline{PO} + \overline{OA_1} \cdot \overline{OA_2} \quad [4]$$

Si tenemos en cuenta que (ver figura 3):

$$|\overline{PO}| = d \quad \text{y} \quad |\overline{OA_1}| = |\overline{OA_2}| = r$$

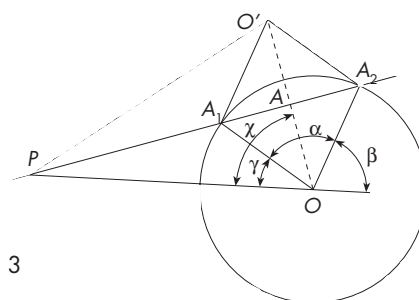


Figura 3

$$\text{se tiene que: } \begin{cases} \overline{PO} \cdot \overline{PO} = d^2 \\ \overline{OA_1} + \overline{OA_2} = \overline{CO} \\ \overline{OA_1} \cdot \overline{OA_2} = r^2 \cos \alpha \end{cases} \quad [5]$$

Sustituyendo ahora [5] en [4] resulta:

$$\mathbf{P}_C(P) = d^2 + \vec{PO} \cdot \vec{OO'} + r^2 \cos \alpha \quad [6]$$

En la figura 2, es de observar que el triángulo $\Delta(OA_1A_2)$ es isósceles, al ser $|\vec{OA_1}| = |\vec{OA_2}| = r$, luego $\vec{OO'}$ es perpendicular a A_1A_2 .

También el triángulo $\Delta(POO')$ es isósceles, pues la figura $(OA_1O'A_2)$ es un rombo, y por lo tanto $|\vec{OA}| = |\vec{AO'}|$. Luego $|\vec{PO}| = |\vec{PO'}| = d$. Entonces:

$$\vec{PO} \cdot \vec{OO'} = d \left(2r \cos \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\beta + \frac{\alpha}{2} \right) = 2r \left[d \cos \left(\beta + \frac{\alpha}{2} \right) \right] \cos \frac{\alpha}{2} \quad [7]$$

Sean los ángulos $\chi = \angle(POO')$ y $\gamma = \angle(POA_1)$, entonces:

$$\chi = \gamma + \alpha/2 = [180 - (\alpha + \beta)] + \alpha/2 = 180 - (\beta + \alpha/2)$$

Luego:
$$\begin{cases} d \cos \chi = r \cos \frac{\alpha}{2} \\ d \cos \chi = d \cos \left[180 - \left(\beta + \frac{\alpha}{2} \right) \right] = -d \cos \left(\beta + \frac{\alpha}{2} \right) \end{cases}$$

con lo cual:

$$d \cos \left(\beta + \frac{\alpha}{2} \right) = -r \cos \frac{\alpha}{2}$$

Sustituyendo [8] en [7] queda:

$$\vec{PO} \cdot \vec{OO'} = 2r \left(-\cos \frac{\alpha}{2} \right) \cos \frac{\alpha}{2} = -2r \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

Por último, sustituyendo [9] en [6] se obtiene por fin:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_C(P) &= d^2 - 2r^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + r^2 \cos \alpha = \\ d^2 + r^2 \left(\cos \alpha - 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right) &= d^2 + r^2 (-1) = d^2 - r^2 \end{aligned}$$

Potencia de un punto con respecto a una elipse

Todo este mismo razonamiento podría aplicarse a la «potencia de una elipse» con respecto a un punto coplanario con ella. Ahora el resultado es:

$$\mathbf{P}_C(P) = \frac{a^2 b^2 (1 + m^2)}{b^2 + a^2 m^2} \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 \right) \quad [1]$$

donde a y b son los valores de los semiejes de la elipse centrada en el origen, y m es la pendiente de la recta que pasa por el punto $P(x_0, y_0)$.

Evidentemente, en esta situación, la «potencia» es una función del punto y del tamaño de la elipse (como también ocurre en la circunferencia), pero a su vez depende de la pendiente m . Por lo tanto, quizás sería mejor hablar de que la «potencia de la elipse» es una *función potencia* de m .

Es sencillo comprobar ahora las situaciones relativas del

punto con respecto a la elipse, y el caso particular en que la elipse se reduce a una circunferencia ($a = b$), en la fórmula [1].

Conclusiones

Los razonamientos expuestos para demostrar el valor de la potencia de la circunferencia están al alcance de un estudiante de Bachillerato. Probablemente el método analítico sea el más laborioso, desde el punto de vista de la manipulación algebraica, pero debido a que hay que emplear diversos resultados (propiedades de las proporciones y de las raíces de las ecuaciones de segundo grado) en la demostración, ayudará a ejercitarse en diversas herramientas manipulativas. La demostración vectorial exige prestar cierta atención a los ángulos que forman los vectores. La demostración que usa el teorema de Pitágoras es la más sencilla y directa. Cada una de estas demostraciones pueden usarse en la sección apropiada de enseñanza: geometría analítica, vectores y trigonometría, pero sea cual sea el razonamiento empleado el resultado es el mismo. Existe también una demostración geométrica (Puig Adam, 1980) que no ha sido incluida.

El estudiante suele pensar que las áreas de las Matemáticas no sólo están divididas, sino que la relación entre ellas es escasa. Quizás estas demostraciones muestren un ejemplo de la unicidad de las Matemáticas y del hecho de que un resultado es independiente de los razonamientos lógicos usados para obtenerlo.

Agradecimientos

El autor desea expresar el reconocimiento a las fructíferas conversaciones que para el desarrollo de este trabajo ha tenido con D^a. Luz González, y con D. Antonio Gámez, a los que está agradecido por su amistad y cooperación.

Referencia

PUIG ADAM, P. (1980): *Curso de Geometría Métrica, Tomo I*, Gómez Puig Ediciones, Madrid, 135-136.

Juan Ricardo Escribano
IES Huerta del Rosario.
Chiclana de la Frontera
(Cádiz)

Reflexiones sobre el diseño de las «taulas» de Menorca y su relación con el mundo pitagórico

Vicente Ibañez Orts

LA CULTURA TALAYÓTICA se desarrolla a lo largo de un extenso período histórico que abarca desde el 1800 a.C. hasta el 200 d.C. Esta cultura se asienta en las islas de Mallorca y Menorca, que en la antigüedad más remota se conocían con el nombre de Gimnesias o Baleáricas.

Se trata de una cultura muy peculiar que tiene como sustrato un pueblo guerrero y jerarquizado, que sobrevive en un medio pobre y difícil. Como arma principal emplean la honda, dada la escasez de metales en las islas. La industria bélica se completaba con un pequeño escudo de piel de cabra y una jabalina de madera con la punta aguzada a fuego. El nombre de esta cultura procede de «Talayot», atalaya o torreón circular, que servía de vivienda a la familia más poderosa y presidía el poblado. Estas torres recuerdan las «Torri» y «Nuraghi» de Córcega y Cerdeña, donde posiblemente también se asentó este pueblo marino de origen desconocido.

Los honderos menorquines eran muy apreciados como soldados mercenarios de infantería ligera, tanto por los ejércitos cartagineses como, posteriormente, por los romanos. Está documentada la leva de 2.000 honderos que llevó a cabo el general cartaginés Magón en el invierno del 206-205 a.C., y que, tras pasar varios años de preparación y adiestramiento en Cartago, formaron parte de la vanguardia del ejército que, al mando de Aníbal, combatió en la decisiva batalla de Zama. En ella murieron, dando por finalizada la II Guerra Púnica. La ciudad de Mahón debe su nombre a este militar, ya que fue él quien la fundó.

La cultura talayótica se caracteriza por un cierto barbarismo, debido a que desconocen el aceite de oliva, el vino y el torno de alfarero, por lo que sus vasijas están hechas a mano, de manera tosca y mal cocidas, ya que se limitan a abrir un agujero en el suelo, a depositar la loza y a cubrir-la con leña. A este panorama hay que añadir que no usan

La cultura talayótica se difunde en las islas de Mallorca y Menorca desde el 1800 a.C. hasta el 200 d.C. Pese a ser similar en ambas islas, tan sólo en Menorca tiene lugar la construcción de los denominados recintos de taula, de carácter religioso, en los que se celebraban ritos relacionados con el solsticio de verano y se sacrificaban animales. En el centro del recinto se levantaba la taula, formada por dos grandes piedras en forma de «T» gigantesca. Una de ellas está en posición vertical. Cruzada sobre ésta en posición horizontal se sitúa la denominada piedra capitel, que descansa sobre la anterior por su propio peso. Su forma es troncopiramidal invertida, ya que está biselada. En este artículo se estudia el diseño de estas últimas. Se llega a la conclusión de que las dimensiones mayores de estas piedras siguen determinadas relaciones matemáticas.

moneda en sus intercambios comerciales y desconocen la escritura. El hecho de ir generalmente desnudos, untando sus cuerpos con grasa de cerdo y aceite de lentisco, llama poderosamente la atención a los cultivados romanos, y así lo reflejan en los pocos testimonios que nos han legado.

Los poblados talayóticos se construyen con casas circulares tangentes entre sí, caóticamente compartimentadas, y están llenos de cuevas y pasadizos, donde se ignora totalmente la línea recta y la ordenación urbana, tan característica del mundo heleno y latino.

Junto con el talayot destacan las siguientes construcciones pétreas: las navetas, tanto de habitación como de enterramiento, que semejan el casco de un barco vuelto del revés, las salas hipóstilas y las taulas.

Dentro de esta cultura tan singular, la taula es un monumento único y específico de la isla de Menorca, y encarna la manifestación arquitectónica mas autentica y original de la isla. La taula se compone de dos grandes bloques de piedra perfectamente tallados. La inferior, denominada piedra soporte o vertical, es un paralelepípedo estrecho y gigante como una enorme caja de cerillas, que llega a medir mas de cuatro metros de altura, dos o tres de anchura y apenas cuarenta o sesenta centímetros de espesor, y que en su parte posterior está sin pulir. Suele estar hincada en el suelo o reposa directamente sobre él. La superior, colocada transversalmente sobre la anterior por su propio peso, recibe el nombre de piedra capitel u horizontal, y también llega a medir cerca de los cuatro metros en las taulas mayores. Tiene la forma de tronco de pirámide invertida, ya que esta biselada. Ambas piedras conforman una especie de letra «T» colosal, y de alguna manera recuerdan una mesa de pie central, de donde procede su nombre, ya que en catalán «taula» equivale a mesa. Ambos bloques están tallados en la roca caliza propia de la isla, que aparece formando estratos horizontales de fácil labra, y se denomina «marés».

La importancia de las taulas queda reflejada en el uso de su imagen tanto en sellos de correos como en monedas de curso legal. En Menorca existen actualmente 31 taulas, y de ellas 11 están completas. Hay constancia escrita de que varias han desaparecido. Se encuentran distribuidas de manera aleatoria en la parte Sur de la isla, siempre en el interior de un poblado y en posición próxima al talayot mayor. Con la excepción de So na Casana, en la que hay dos recintos de taula, tan sólo existe uno por población. En tiempos prehistóricos la parte norte era pantanosa e insalubre y, por ello, poco habitada.

La taula es el monumento principal del denominado recinto de taula, con forma absidal o de herradura, especie de basílica en la que se realizaban determinados ritos de carácter religioso, que nos han llegado envueltos en un halo de misterio, y que seguidamente vamos a detallar, y

*Los poblados
talayóticos
se construyen
con casas
circulares
tangentes
entre sí,
caóticamente
compartimentadas,
y están llenos
de cuevas
y pasadizos,
donde se ignora
totalmente
la línea recta
y la ordenación
urbana,
tan característica
del mundo
heleno
y latino.*

nunca sirvió como lugar de enterramiento. Estos recintos estaban cerrados por un doble muro de piedras bien colocadas, de altura similar a la taula, cuyo interior se rellenaba de cascotes y piedras de menor tamaño. En el interior del recinto, gruesas columnas delimitaban capillas.

A la derecha de la entrada, generalmente adintelada, ardía permanentemente una gran hoguera, dado el enorme espesor de cenizas que han aparecido, en la que se sacrificaban animales troceados, generalmente ovidos y cápridos, aunque en menor cantidad también aparecen restos de suínidos y vacuno. Dado que la época de celo y parto no ha variado en los rebaños con el paso de los años, por el tamaño de los cuernos se ha llegado a conjeturar que estas fiestas paganas se celebraban coincidiendo con el solsticio de verano. Todo ello viene acompañado de abundantes cascotes de ánforas dedicadas al transporte de vino.

La taula junto con su recinto conforma una unidad de diseño. Su enorme complejidad, impropia de la cultura que la erige, se manifiesta de diversas maneras. En primer lugar destaca que la posición de la taula no es central respecto al recinto, sino que se encuentra ligeramente desplazada hacia atrás y a la derecha, vista desde la entrada. Además, su orientación no es frontal respecto a dicha entrada, sino que suele conformar con ella un ángulo entre 10° y 15°, hecho realizado de manera intencionada. Por otra parte, existe una relación entre la taula y su recinto, de modo que a mayor taula corresponde un recinto mas grande, llegando a medir en algunos casos mas de 100 metros cuadrados. Hasta ahora se creía que el tamaño de la taula obedecía al azar o a algún principio desconocido, en función de que el maestro cantero que realizaba su talla encontrara la pieza de roca más o menos dura y adecuada para cumplir esta función.

No deja de sorprender la existencia de la denominada columna libre, rematada por un capitel y de altura similar a la



Foto 1. Recinto de taula de *Torralba d'en Salort*. Se observan las bases de las columnas pegadas al muro, que delimitan capilla. A la izquierda de la taula principal destaca el pie de la segunda taula, que carece de capitel.

propia taula. Se encuentra situada a la derecha de la taula, a aproximadamente la longitud de la piedra capitel, y conectada por su base mediante una serie de losas con la propia taula. Su función ritual es un misterio, y su geometría y diseño está unido al enigma que rodea la taula.

Lo mismo cabe decir de la segunda taula, situada ligeramente detrás y a la izquierda de la taula principal, sobre la pared del recinto. Tanto la posición de las grandes pilastras que sobresalen a tramos del recinto, como los nichos que aparecen con frecuencia en el propio muro, así como los pequeños ventanucos que se abren al exterior a través de la pared, son todo un reto. El propio muro de cierre en su fachada principal tiene una forma ligeramente cóncava, y es asimétrico respecto a la puerta de entrada, con uno de sus lados mayor que el otro. En fin, todo ello induce a pensar que nos encontramos ante un monumento de elaboradísima trama y enorme complejidad geométrica.

El hecho de que la piedra soporte esté sin pulir en su parte posterior, indica que el recinto de taula se dividía claramente en tres espacios: La entrada con

su pequeño corredor, el recinto en sí, frente a la taula, dedicado al culto y a los sacrificios rituales junto a la hoguera, y el espacio posterior a la taula, no accesible a los feligreses y dedicado íntegramente a los sacerdotes y a los menesteres del culto.

Según el arqueólogo Fernández-Miranda su fecha de construcción se sitúa alrededor del siglo IV a.C., en época tardía y ya de decadencia de esta cultura, y permanecen en uso hasta el siglo II d.C. ya plenamente romanizada la isla. Este investigador apunta la posibilidad de que la propia taula pudo haber sido objeto de culto en sí mismo, y es partidario de que el recinto de taula no estaba cubierto, excepción hecha quizás de la capillas que circundan las paredes, que podían tener una cubierta con falsa bóveda de lajas de piedra. Estas ideas no las comparten todos los investigadores que han trabajado sobre estos monumentos. Por citar sólo un caso destacado, Luís Plantalamor, actual Director del Museo Arqueológico de Mahón, es partidario de que las taulas se construyeron al comienzo de la cultura talayótica, y de que los recintos de taula estaban cubiertos. Estas cuestiones, por el momento, están abiertas y sin resolver. No hay que decir que levantan encendidas pasiones y acaloradas polémicas.

Los arqueólogos dividen las taulas que actualmente existen completas en tres grupos: Taulas cuya piedra soporte tiene columna posterior de apoyo, al que corresponden Torre Llafuda, segunda taula o capitel en forma de taula P4 de Torre Llafuda y Torre Trencada. Taulas cuyas piedras soporte tienen espina posterior, que son Torralba y Torreta de Tramuntana, y el resto, que incluye Torre d'en Gaumés, Na Comerma, Binisafullet y Trepucó. Dejamos

Foto 2.
Vista frontal de la taula de *Torralba d'en Salort*. Toda ella esta muy bien tallada y conservada. La piedra capitel está biselada. El cambio de color de la piedra soporte se debe a la excavación que realizó el arqueólogo Fernández-Miranda, ya que la parte inferior estaba cubierta de tierra.



fuera de este grupo Talatí de Dalt y Torre Vella d'en Loçano, ya que para estas dos últimas no hemos podido descifrar su posible diseño.

Para un aficionado a la historia de las matemáticas no hay tarea tan interesante como buscar en las medidas de estas piedras venerables determinadas relaciones numéricas. En este trabajo proponemos que las dimensiones mayores de las piedras capitel del primer grupo siguen entre sí una sucesión aritmética, las del segundo armónica y las del tercero geométrica, y que todo ello puede estar relacionado con el mundo pitagórico. De ser ciertas estas proporciones que apuntamos, se trataría de un caso claro de relación entre matemáticas y arquitectura, ya que el arquitecto que diseñó estos monumentos empleó conocimientos matemáticos para determinar sus medidas. Hasta se podría llegar a conjeturar que al utilizar en algunos de ellos una sucesión armónica, tan vinculada en el mundo heleno con la música, quizás al construirlas estaba pensando en algún determinado acorde sonoro. Además, se trataría del primer caso en el que las complejas relaciones geométricas utilizadas en la concepción de unos monumentos se utilizan, tanto para determinar su probable fecha de construcción, dado que por la historia de las matemáticas se sabe el momento en el que aparecen determinadas fórmulas y teoremas, como el lugar de origen de su inventor. Las medidas que damos de las piedras capitel las hemos tomado personalmente sobre las propias taulas, con la ayuda de dos escaleras de aluminio y diversos niveles y metros.

Sobre la ubicación y características de las taulas de Menorca y sus recintos, y la función sacra que desempeñaron en la antigüedad, pueden consultarse Fernández-Miranda (1981), Hochsieder y Kösel (1995) y Mascaró (1983a). A propósito del análisis geométrico de las taulas ver mis trabajos (Ibañez Orts, 1997a; 1997b; 1998a, 1998b; 1999a; 1999b; y 1999c).

Sucesión geométrica

Este grupo lo componen las taulas de Torre d'en Gaumés, Na Comerna, Binisafullet y Trepucó.

Torre d'en Gaumés

La piedra capitel está caída, vuelta del revés y situada sobre un paramento de piedras junto a la entrada del recinto, tal como la dejó Flaquer i Fàbregues tras su excavación en los años cuarenta. Las medidas en metros que para su piedra horizontal hemos obtenido, junto con las propuestas por otros investigadores, se dan en la tabla adjunta. Todas estas piedras tienen, como ya se ha comentado, forma de tronco de pirámide o artesa invertida, ya



Foto 3. Tomada desde la parte posterior de la taula de Torre d'en Gaumés. La piedra capitel está vuelta del revés, sobre un paramento de piedras. Presenta una doble incisión en su parte inferior –de unos centímetros– que le servía para encajar la piedra soporte y que se amplió en época romana. Sus dimensiones siguen una sucesión geométrica.

que están biseladas, de ahí la doble medida que damos para la longitud y la anchura.

	Flaquer	Mascaró	Martorell	Ibañez
Longitud	2,50	2,50-2,32	2,45-2,32	2,56-2,33
Anchura	1,25	1,25-1,18	1,25-1,18	1,32-1,17
Grueso	0,60	0,65	0,65	0,67

Tabla 1

Directamente de las medidas de Flaquer se desprende que la anchura es el doble del grueso y, a su vez, la longitud el doble del ancho, y esto mismo ocurre con el resto de medidas.

A continuación, se calcula la media geométrica (G) a partir de la longitud y el grosor de la piedra horizontal, hallando la raíz cuadrada del producto de ambos valores, y su resultado se compara con la anchura (a), lo que da una idea del error cometido al seguir esta teoría.

Tabla 2

	Flaquer	Mascaró	Martorell	Ibañez
Longitud	2,50	2,50	2,45	2,56
Grueso	0,60	0,65	0,65	0,67
Anchura (a)	1,25	1,25	1,25	1,32
G	1,225	1,275	1,262	1,310
$G - a$	2,5 cm	-2,5 cm	-1,2 cm	1,0 cm

Se aprecia la casi total coincidencia entre el valor calculado para la media geométrica (G) y el medido en el campo (a). Las diferencias, en centímetros, han sido: 2,5; 2,5; 1,2 y 1. Este resultado confirma plenamente la hipótesis propuesta de que el diseño de esta piedra capitel se hizo de acuerdo con esta proporción.

Así mismo, dado que el grueso de esta piedra fluctúa entre 0,60; 0,65 y 0,67 metros, que parece coincidir con 9 palmos helenos ($9 \times 7,4 = 66,6$ cm), se puede conjeturar que sus dimensiones debieron de ser 36, 18 y 9 palmos.

Na Comerma de sa Garita

Esta pequeña taula forma parte del conjunto monumental de Na Comerma de sa Garita, que está por excavar, y que se encuentra muy próximo al poblado tala-yótico de Torre d'en Gaumés. La taula se encuentra en un extremo del mismo, y está embutida en el muro de piedras que rodea el recinto. Las medidas en metros de su piedra capitel son:

	Mascaró	Ibañez
Longitud	1,80-1,65	1,78-1,65
Anchura	0,85-0,75	0,88-0,78
Grueso	0,45	0,44

Tabla 3

Seguidamente se calcula la media geométrica a partir de la longitud y el grosor, como en el caso anterior, y su resultado se compara con la anchura.

	Mascaró	Ibañez
Longitud	1,80	1,78
Grueso	0,45	0,44
Anchura (a)	0,85	0,88
G	0,90	0,86
$G - a$	-5 cm	-0,5 cm

Tabla 4

Es muy similar el valor calculado para la media geométrica y la medida de la anchura directa sobre la taula. Estas diferencias han sido de 5 cm para Mascaró y de 0,5 para Ibañez, lo que

*...se calcula
la media
geométrica
a partir
de la longitud
y el grosor,
y su resultado
se compara
con la anchura.*



Foto 4. Pequeña taula de Na Comerma de sa Garita, embutida en la pared del recinto y aún por excavar.

confirma la idea de que el diseño de esta piedra se hizo de acuerdo con esta relación.

El grueso de la piedra capitel, 0,44 o 0,45 cm, parece coincidir con 6 palmos helenos ($6 \times 7,4 = 44,4$ cm). De seguir esta hipótesis, las medidas en palmos de esta taula fueron 24, 12 y 6.

Taula de Binisafullet

Pequeña taula, muy erosionada, descubierta por Plantalamor en el año 1989. Las medidas en metros de su piedra



Foto 5.
Taula de Binisafullet,
descubierta recientemente
y muy erosionada.

capitel son las siguientes, donde ETSAV corresponde al levantamiento de la taula que ha llevado a cabo mediante restitución fotogramétrica el Departamento de Expresión Gráfica Arquitectónica (EGA) de Valencia, bajo la dirección de P. Navarro.

	PH&DN	Ibañez	ETSAV
Altura	1,95	2,05	1,91-1,84
Anchura	0,88	1,02	1,00
Grueso	0,45-0,47	0,52	0,50

Tabla 5

A simple vista, de seguir los datos de Ibañez o de la ETSAV, se comprueba que estos valores están en sucesión geométrica. Sus medidas en palmos helenos fueron 28, 14 y 7, ya que $7 \times 7,4$ es 51,8.

Taula de Trepucó

Grandiosa taula, situada próxima a Mahón. Bien conservada, aunque tras subir a ella por medio de una escalera, su piedra capitel en su cara superior esta mucho mas desgastada de lo que aparenta desde el suelo, con socavones de 20 cm. Fue excavada por M. Murray en los años treinta. Sus medidas en metros son:

	Ramis	Fenn	Murray	Mascaró	Ibañez	ETSAV
Longitud	3,75-3,44	3,80-3,66	3,76-3,45	3,65-3,45	3,88-3,64	3,76-3,52
Anchura	1,84-1,00	1,60-1,36	1,70-1,02	1,60-1,50	1,75-1,54	1,66-1,56
Grueso	0,61	0,60	0,635	0,60	0,80	0,72

Seguidamente y como venimos haciendo, se calcula la media geométrica a partir de la longitud y el grosor, y su resultado se compara con la anchura.

	Ramis	Fenn	Murray	Mascaró	Ibañez	ETSAV
Longitud	3,75	3,80	3,76	3,65	3,88	3,76
Grueso	0,61	0,60	0,64	0,60	0,80	0,72
α	1,84	1,60	1,70	1,60	1,75	1,66
G	1,51	1,51	1,55	1,48	1,76	1,65
$G - \alpha$	32,8 cm	9,0 cm	15,5 cm	12,0 cm	-1,2 cm	1,5 cm

Para los investigadores Ramis, Fenn, Murray y Mascaró, la diferencia entre el valor observado y el teórico es importante, ya que oscila entre 9 y 33 cm. Pero para Ibañez y la ETSAV esta diferencia es mucho menor, ya que apenas alcanza 2 cm.

Sus medidas en palmos pudieron ser 52; 24 y 11, si bien la media geométrica entre 52 y 11 es 23,92, y por tanto sus constructores no dieron a esta dimensión un valor

Foto 6.
Grandiosa taula de Trepucó, muy próxima a Mahón. Se observa el escaso espesor de la piedra soporte. Las dimensiones de su piedra capitel siguen una sucesión geométrica.



Tabla 6

entero. Parece claro que esta taula también sigue una sucesión geométrica, aunque hay que matizar que en lugar de multiplicar cada una de sus dimensiones por dos, como en las tres taulas anteriores, lo hace por una cantidad mayor que estimamos entre 2,2 y 2,5. Ello supone que sus constructores llevaron en esta ocasión el tamaño de la piedra capitel al límite de la resistencia del material. La piedra soporte está inclinada hacia atrás $5,1^\circ$ y reforzada modernamente con un contrafuerte de hormigón.

Sucesión armónica

Este grupo lo componen las taulas cuya piedra vertical posee espina posterior de apoyo y bisel, y lo forman las taulas de Torralba y Sa Torreta de Tramuntana.

Torralba d'en Salort

Taula excavada durante los años 1973-81 por Fernández-Miranda y Waldren. Tanto la taula como su recinto están muy bien conservados e impresionan por su grandiosidad. Las medidas en metros que para este monumentos dan diversos investigadores vienen en la tabla 8.

Tabla 7

Llama la atención la falta de precisión en las medidas dadas por el arqueólogo Fernández-Miranda, sobre todo en el 1,60 de anchura, que de haber consultado las publicaciones de Binimelis o Mascaró, con quien colaboró en diversas ocasiones, podría haber corregido. Por ello no las tendremos en cuenta.

Seguidamente, se calcula la media armónica a partir de la longitud y el grosor de la piedra capitel, y su resultado se compara con la anchura. Dadas dos longitudes A y B , la media armónica se obtiene mediante la fórmula: $H = 2AB/(A+B)$. La media armónica (H) era una medida muy empleada por los geómetras y arquitectos griegos, y su cálculo gráfico puede encontrarse en el capítulo doce de Palladio (1988).

Prácticamente coinciden los valores calculados para la media armónica y los medidos en el campo, dado el lógico desgaste de la piedra debido al paso del tiempo (tabla 9). Las diferencias han sido las siguientes: 11,1; 2,3; 1,2; 1,2 y 4,6 cm. Estos resultados confirman plenamente la idea de que el diseño de la piedra capitel se hizo de acuerdo con esta proporción.

Las medidas del espesor de la piedra capitel son muy parecidas entre sí, 0,72; 0,70; 0,71; 0,72 y 0,73. Este valor parece corresponder a 10 palmos griegos (74 cm), y nos indica el grado de erosión que ha sufrido la parte superior del monumento, que estimamos en tan solo 1 cm, debido a la gran calidad del material. Si dividimos las dimensiones que da Ibañez para esta piedra horizontal por 7,4, y seguidamente redondeamos, obtenemos 52; 16,76 y 10. La media armónica entre 52 y 10 es 16,774, que no es un número entero. Hemos comprobado todas las posibles combinaciones de números enteros entre 46 y 56, que comprende la longitud, con los que hay en el intervalo 4-14 que incluye el grosor, y tan solo el par 56-8 tiene por media armónica otro número entero, que es 14. Por tanto, a partir de las dimensiones que hemos dado en palmos, la anchura no pudo ser un número entero.

	Binimelis	Mascaró	F. Miranda	Tolós	Ibañez	ETSAV
Longitud	3,80-3,56	3,80-3,70	3,75-3,32	3,83-3,60	3,86-3,66	3,83-3,69
Anchura	1,10-0,90	1,20-1,05	1,60-1,46	1,20-1,05	1,24-1,10	1,18-1,05
Gruoso	0,72	0,70	0,71	0,72	0,73	0,73

Tabla 8

	Binimelis	Mascaró	F. Miranda	Tolós	Ibañez	ETSAV
Longitud	3,80	3,80	–	3,83	3,86	3,83
Gruoso	0,72	0,70	–	0,72	0,73	0,73
a	1,10	1,20	–	1,20	1,24	1,18
H	1,211	1,177	–	1,212	1,228	1,226
$H - a$	–11,1 cm	2,3 cm	–	–1,2 cm	1,2 cm	–4,6 cm

Tabla 9



Foto 7. Vista lateral de la taula de *Torralba d'en Salort*. Se nota el arranque de la espina posterior de apoyo. Las medidas de su piedra capitel siguen una sucesión armónica

La piedra soporte está biselada, con un ángulo de 85,5° que fuga a la parte posterior de la taula. Este bisel desaparece a un metro de la parte superior, lo que indica una clara finalidad estética. A su vez, esta piedra no está aplomada, sino inclinada ligeramente hacia atrás 3,2°. Pese a ello, la piedra superior mantiene el nivel horizontal. Según Ibañez, la piedra vertical es ligeramente más ancha en su parte superior (2,44 m) que en la inferior (2,40 m).

Sa Torreta de Tramuntana

Taula estudiada por la Dra. Murray en los años treinta, conjuntamente con la de Trepucó, siendo patrocinadas ambas excavaciones por la Universidad de Cambridge. Las medidas en metros de su piedra capitel son:

	Cartailhac	Murray	Mascaró	Ibañez
Longitud	2,97	2,97-2,54	2,75-2,40	2,80-2,66
Anchura	0,80	0,89-0,71	1,10-1,00	1,16-1,00
Grueso	0,54	0,58-0,50	0,60	0,72

Tabla 10

La taula está muy erosionada, lo que dificulta mucho tomar sus medidas, y de ahí la disparidad entre las propuestas. Seguidamente se calcula el valor de la media armónica a partir de la longitud y el grosor, tal como hemos hecho con Torralba.

	Cartailhac	Murray	Mascaró	Ibañez
Longitud	2,97	2,97	2,75	2,80
Grueso	0,54	0,58	0,60	0,72
Anchura (a)	0,80	0,89	1,10	1,16
H	0,914	0,970	0,985	1,146
H – a	-11,4 cm	-8,1 cm	11,5 cm	1,5 cm

Tabla 11

Según Ibañez se confirma la hipótesis propuesta, con una diferencia de 1,5 cm, aunque con los demás investigadores se obtiene un error mayor, del orden de 10 cm en el metro que mide aproximadamente de anchura.

Dividiendo las medidas de Ibañez por 7,4 cm y redondeando, se obtienen sus dimensiones en palmos griegos: 40; 16 y 10. En este caso sí que se cumple que la media armónica entre 40 y 10 es un número entero.



Foto 8.
Taula
de Sa Torreta
de Tramuntana.
Se están
tomando
sus medidas
con ayuda de
dos escaleras.

El ángulo del bisel de la piedra soporte es de 75°, y como en Torralba, no llega a la parte superior. Esta piedra está inclinada hacia atrás 5°. Además, su anchura es claramente mayor en la parte superior que en la inferior, 1,90 frente a 1,75.

Creemos que en este tipo de taulas se dan una serie de refinados efectos ópticos, entre los que destaca vencer la piedra soporte ligeramente hacia atrás mientras que la superior mantiene la horizontalidad. Este juego pétreo se consigue al dotar a la piedra vertical de espina posterior de apoyo. Con ello, se pretende evitar al observador el efecto de que la taula se le caiga encima y, al mismo tiempo, aumentar la sensación de verticalidad del monumento. Las taulas, en nuestra opinión, están diseñadas para verlas exclusivamente de frente. Por otra parte, al biselar la piedra soporte, se amplía el ángulo desde el que se puede mirar frontalmente estos monumentos sin llegar a observar el grueso del perfil lateral de dicha piedra. Así mismo, el que la piedra soporte sea mayor en su parte superior que en la inferior, como ocurre de forma muy acusada en Sa Torreta y menor en Torralba, viene a insistir en el efecto de acrecentar en el ánimo de quien las mire una mayor sensación de altura y poder. Todo ello nos inclina a pensar, junto con el hecho de ocultar en sus dimensiones elaboradas relaciones matemáticas, que su diseño se debe a la mano maestra de un arquitecto griego o de algún personaje embebido en dicha cultura. Las taulas de este grupo son las mas complejas y evolucionadas.

Sucesión aritmética

En este grupo se incluyen Torre Llafuda, pilastra en forma de taula P4 de Torre Llafuda y Torre Trencada. Este tipo de taulas se caracteriza porque la anchura de su piedra superior es tan enorme, que obligaron a sus constructores a suplementar la piedra base con una columna posterior de apoyo.

Torre Llafuda

La piedra capitel está caída y recostada sobre la entrada del recinto, mostrando su parte inferior. Sus medidas se dan seguidamente, donde PH&DN son siglas que corresponden a los investigadores alemanes P.Hochsieder y D. Nösel, que no hemos citado hasta ahora ya que suelen tomar sus datos directamente de Mascaró (tabla 12).

Como ya se ha dicho, dada la desmesurada anchura de la piedra capitel, la piedra soporte necesitaba suplementarse con una pilastra posterior, para poder mantener correctamente el equilibrio. Esta pilastra estaba colocada perpendicularmente a la piedra soporte. Sus medidas vienen dadas en la tabla 13.

Seguidamente se calcula la media aritmética (X) a partir de la longitud y el grosor de la piedra horizontal, y su resultado se compara con la anchura (tabla 14).

Para tres investigadores esta diferencia es notable, entre 23 y 45 cm, pero para Ibañez apenas llega a 3 cm. La piedra capitel esta apoyada contra el muro del recinto, de medio lado, por lo que es muy difícil medirla, y a ello hay que achacar estas discrepancias.

La piedra capitel muestra en su parte inferior un rebaje de 2 cm donde se insertaba la piedra soporte y la pilastra adicional. Ello indica una idea clara de diseño, ya que al tallar la piedra capitel se debían conocer perfectamente las dimensiones de la piedra soporte. Además, esta incisión no está centrada. Se encuentra a 33 cm de la parte frontal y a 68 de la posterior. Sus dimensiones para la piedra soporte son 2,12 de longitud y 0,36 de anchura, y para la pilastra, 0,68 de longitud por 0,39 de anchura. Esta ranura divide la parte inferior de la piedra capitel en cuatro partes. Una primera de vuelo, otra corresponde al espesor de la piedra soporte, y quedan dos más para la columna posterior, distribución que corresponde a una concepción geométrica precisa. Según ello, la anchura de la parte inferior debía de medir $4 \times 0,36 = 1,44$. Frente a este

Tabla 12

	Mascaró	Ramis	PH&DN	Ibañez
Longitud	2,80-2,60	2,70-2,45	2,76-2,68	2,82-2,68
Anchura	2,05-1,95	1,28-1,21	1,46-1,36	1,80-1,37
Grueso	0,40	0,63	0,62	0,72

Tabla 13

	Mascaró	Ibañez
Longitud	3,10	3,15
Anchura	0,70	0,72
Grueso	0,35	0,36

Tabla 14

	Mascaró	Ramis	PH&DN	Ibañez
Longitud	2,80	2,70	2,76	2,82
Grueso	0,40	0,63	0,62	0,72
Anchura (a)	2,05	1,28	1,46	1,80
X	1,60	1,67	1,69	1,77
X - a	45 cm	-39 cm	-23 cm	3 cm

*...indica
una idea clara
de diseño,
ya que al tallar
la piedra capitel
se debían
conocer
perfectamente
las dimensiones
de la piedra
soporte*

valor, en la medida de campo hemos obtenido 1,37, lo que da una idea de la erosión que ha sufrido esta parte del monumento que estimamos en 7 cm. Si en esta zona del capitel se observa con detenimiento la ranura de encaje de la pilastra posterior, se comprueba que ésta debía de continuar y que en parte ha desaparecido.

Si en las últimas medidas citadas dividimos la longitud de la ranura inferior de encajamiento (2,12) por 0,36, obtenemos, 5,89, es decir: 6. Esta medida, 0,36, es también la anchura de esta ranura, prácticamente el grueso de la pilastra de apoyo (0,39), y $2 \times 0,36 = 0,72$ es, tanto el grueso de la piedra capitel, como la anchura de la pilastra adicional. Todas estas coincidencias nos han llevado a tomar esta longitud como unidad, que coincide con 5 palmos helenos ($5 \times 7,4 = 37$ cm). Si las medidas de Ibañez las dividimos por 0,36 y redondeamos, obtenemos 8; 5 y 2.

Segunda taula de Torre Llafuda

Esta segunda taula, también conocida como capitel en forma de taula (P4), se encuentra situada a la izquierda y detrás de la taula central, vista desde la entrada del recinto. Gran parte de la misma está cubierta de tierra, aún por excavar, lo que permite tener un cómodo acceso a su piedra horizontal. Está bien conservada. Sus medidas son:

Tabla 15

	Mascaró	Ramis	Ibañez
Altura	2,50-2,10	2,54-2,20	2,60-2,16
Anchura	1,30-0,80	1,44-1,10	1,65-1,00
Grueso	0,55	0,50	0,65

Seguidamente se calcula la media aritmética a partir de la longitud y el grosor (tabla 16).

	Mascaró	Ramis	Ibañez
Longitud	2,50	2,54	2,60
Grosor	0,55	0,50	0,65
Anchura (α)	1,30	1,44	1,65
X	1,525	1,520	1,625
$X - \alpha$	-22,5 cm	-8 cm	2,5 cm

Tabla 16

Las diferencias van desde 22,5 cm de Mascaró hasta tan solo 2,5 cm de Ibañez. Si las medidas de Ibañez las dividimos por 0,33, espesor de la piedra soporte, obtenemos 7,87; 5,00 y 1,97, que tras redondear quedan en 8; 5 y 2, igual que en el monumento central.

Aunque esta taula no tiene columna posterior de apoyo, la piedra capitel es tan grande que se le ha practicado una profunda incisión en su parte inferior, donde penetra y encaja la piedra soporte. Con ello se asegura su asentamiento. Las medidas de esta entalladura son 1,57 de longitud, 0,30 de anchura y entre 9 y 10 cm de profundidad.

Los bisels de la piedra capitel están muy acentuados, y son iguales dos a dos. Para medirlos se ha utilizado un goniómetro digital con una precisión de 0,1°. Vista la taula de frente, la medida que hemos obtenido para el ángulo del bisel está entre 69° y 71°. Vista de perfil, el ángulo del bisel oscila entre 61° y 63°.



Foto 9. Vista frontal de la taula de *Torre Trencada*



Foto 10. Vista lateral de la taula de *Torre Trencada*. Se observa la columna posterior de apoyo, necesaria para mantener el equilibrio, dada la anchura desmesurada de la piedra capitel. Las dimensiones de esta piedra siguen una sucesión aritmética.

	Ramis	Mascaró	PH&DN	Ibañez	ETSAV
Longitud	3,13-2,90	3,10	3,10	3,25-3,07	3,11
Anchura	1,72-1,70	1,65	1,55-1,50	1,86-1,70	1,88
Grosor	0,45	0,45	0,45	0,64	0,42-0,47

Tabla 17

	Ramis	Mascaró	PH&DN	Ibañez	ETSAV
Longitud	3,13	3,10	3,10	3,25	3,11
Grosor	0,45	0,45	0,45	0,64	0,47
α	1,72	1,65	1,55	1,86	1,88
X	1,79	1,78	1,87	1,95	1,79
$X - \alpha$	-7 cm	-12,5 cm	-32 cm	-9 cm	9 cm

Tabla 18

Torre Trencada

Taula muy erosionada. Una grieta recorre su piedra soporte de parte a parte, de ahí su nombre. Presenta columna posterior de apoyo rematada con una piedra cuña. Sus medidas vienen dadas en la tabla 17.

La diferencia de grosor de Ibañez respecto a los demás, se debe a que al inspeccionar personalmente la parte superior de la taula se comprobó en su centro una elevación, y esa es la referencia para la medida que se ha tomado. La ETSAV, al realizar el levantamiento foto-

gramétrico desde el suelo, no detectó esta protuberancia.

Seguidamente se calcula la media aritmética en función de la longitud y el grosor (tabla 18).

A pesar del enorme desgaste, las diferencias parecen confirmar la hipótesis propuesta.

Tanto en esta taula como en So na Casana Oest, cuyo capitel se ha perdido, la pilastra posterior de apoyo se colocó paralelamente a la piedra soporte y no perpendicularmente como en Torre Llafuda. Este último diseño supo-



Foto 11. Vista posterior de la taula de *Torre Trencada*. La columna posterior de apoyo está colocada paralelamente a la piedra soporte y remata por una piedra cuña



Foto 12. Segunda taula de *Torre Llafuda*, aún por excavar. Sus biseles están muy acusados. las dimensiones de su piedra superior sigue una sucesión aritmética

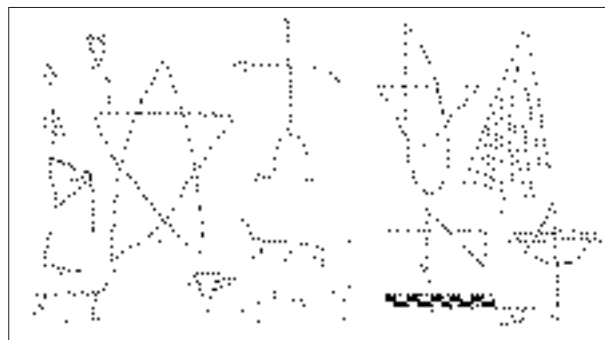
ne una mejor realización técnica, lo que nos lleva a pensar que su construcción fue posterior.

Resumen

Si consideramos como valores teóricos para la longitud y el grosor de la piedra capitel, 8 y 2, su anchura según la media aritmética será 5, según la geométrica, 4, y de acuerdo con la armónica 3,2. Siempre se cumple que la media aritmética es mayor o igual que la geométrica, y esta a su vez, que la armónica. La anchura de la piedra capitel se ajusta a este modelo en función de los tres grupos estudiados.

En las taulas que siguen una sucesión aritmética aparentemente carece de sentido el hacer una piedra capitel tan ancha, que obliga a reforzar la piedra soporte con una columna posterior de apoyo, para afianzar su sustentación. Vista de frente, apenas se aprecia su enorme tamaño, ya que lo oculta el propio pie de taula. Una posible explicación a este hecho es el deseo expreso de sus constructores de que sus dimensiones se ajusten a esta sucesión.

Si a las complejas relaciones matemáticas que hemos mencionado añadimos los efectos ópticos ya comentados en el grupo dos, como son la ligera inclinación hacia atrás del pie de taula, el bisel lateral de esta piedra que no alcanza hasta su parte mas alta, y su mayor anchura en la parte superior que en la inferior, llegamos a la conclusión de que su diseño se debió a un geómetra griego. En este punto es interesante recordar que el símbolo de la escuela pitagórica es el pentágono estrellado o estrella de cinco puntas. En Menorca esta figura aparece en los grabados incisos de las paredes de la Cova d'es Encantaments (Alayor), formando parte del ideograma, en el que con trazo esquemático, un hombre desnudo y con cabeza de triángulo está arrodillado ante una estrella de este tipo. En las jambas de la puerta de entrada de la cueva de Santa Ana, enclavada en el polígono industrial de Mahón, aparecen recortadas dos estrellas de cinco puntas y también en Alcaldús de Dalt.



Grabados rupestres incisos de la *Cueva d'es Encantaments* (Alayor) Menorca. Se observa la estrella de cinco puntas y un hombre desnudo y arrodillado, con cabeza de triángulo, ante ella. Tomado de Mascaró Pasarius.



Foto 14. Conjunto de los grabados rupestres de la Cueva d'es Encantaments.

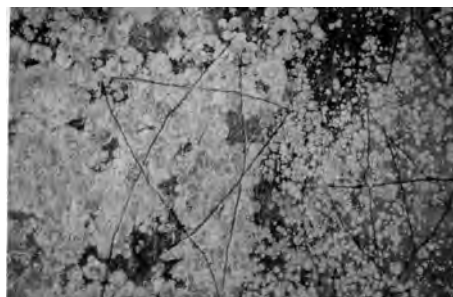


Foto 15. Detalle de la estrella de cinco puntas que se puede considerar como una representación del emblema de la secta pitagórica.

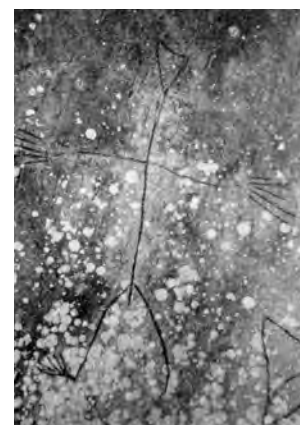


Foto 16. Detalle del hombre desnudo con cabeza triangular. Destaca el pene y la rodilla doblada.

Todo ello nos lleva a proponer que los constructores de las taulas pertenecían a dicha escuela, y que debieron llegar a Menorca tras la destrucción de la secta en Metaponto, hacia el año 450 a.C. y la consiguiente diáspora que se originó, que llevaron al matemático Filolao de Crotona a refugiarse en Siracusa, del que fue discípulo Arquitas de Tarento, y a Lysis, a buscar cobijo en Tebas. En esta desbandada algún otro miembro de esta secta pudo desembarcar en Menorca e introducir en la forma de vida talayótica el culto a las taulas. La fecha que acabamos de dar para la construcción de estos monumentos está conforme con los conocimientos matemáticos de la época y con la propuesta por los arqueólogos M. Murray y Fernández-Miranda, y explica a su vez porqué no hay taulas en Mallorca, siendo similar la cultura en ambas islas, ya que dado lo avanzado de la fecha, período final de la cultura talayótica, los contactos con el mundo cartaginés a través de la vecina Ibiza, feudo avanzado de Cartago, y seguidamente con el mundo romano, impidieron este trasvase.

Bibliografía

- DÉRIBÉRE, M. (1953): «Sobre el ideograma de S'Encantament», *Diario El Iris*, Ciudadella, n.º 530, 1 agosto 1953, 4.
- FERNÁNDEZ-MIRANDA, M. (1981): «Las taulas de Menorca, un monumento único», *Revista de Arqueología*, n.º 4, 6-13.
- GHYKA, M.C. (1978): *El número de oro*, Ed Poseidon, Barcelona.
- HOCHSIEDER, P. y D. KÖSEL (1995): *Les taules de Menorca, un estudi arqueoastronòmic*, Institut Menorquí d'Estudis, Menorca.
- IBÁÑEZ ORTS, V. (1998): «Análisis geométrico de las taulas de Menorca», *Revista de Arqueología*, n.º 209, Madrid, 12-23.
- IBÁÑEZ ORTS, V. (1999): «La columna menorquina», *Revista de Arqueología*, n.º 214, Madrid, 6-7.

IBÁÑEZ ORTS, V. (1998): «Análisis geométrico de las taulas de Menorca: Taulas de Torralba y Sa Torreta», en *2.º Congreso Nacional de Historia de la Construcción*, A Coruña, 245-249.

IBÁÑEZ ORTS, V. (1999): «Análisis geométrico de las taulas de Menorca cuyas dimensiones de su piedra capitel siguen la media armónica», en *XXV Congreso Nacional de Arqueología*, Valencia, 529-532.

IBÁÑEZ ORTS, V. (1999): «Análisis geométrico de las taulas de Menorca cuyas dimensiones de su piedra capitel siguen la proporción geométrica», en *XXV Congreso Nacional de Arqueología*, Valencia, 534-539.

IBÁÑEZ ORTS, V. (1997): «Análisis geométrico de las taulas de Menorca. Capitel en forma de taula P4 de Torre Llafuda», en *XXIV Congreso Nacional de Arqueología*, Cartagena, en prensa.

IBÁÑEZ ORTS, V. (1997): «Análisis geométrico de las taulas de Menorca. Taula de Torre Llafuda», en *XXIV Congreso Nacional de Arqueología*, Cartagena, en prensa.

MASCARÓ PASARIUS, J. (1983): *Las Taulas*, Ateneo de Mahón, Menorca.

MASCARÓ PASARIUS, J. (1983): «Los grabados rupestres», en *Geografía e Historia de Menorca*, Tomo IV, Menorca, 55-63.

MASCARÓ PASARIUS, J. (1952): «El local megalítico y las figuras rupestres de Bini-guarda Vell», *Diario El Iris*, Ciudadella, n.º 493, 22 noviembre 1952, 3-4.

PALLADIO, A. (1988): *Los cuatro libros de arquitectura*, Akal, Madrid.

Vicente Ibañez
Societat d'Educació
Matemàtica
de la Comunitat Valenciana
«Al-Khwarizmi»

Etimología de algunos términos matemáticos

Esteban Serrano Marugán

UNA DE LAS PRINCIPALES dificultades que tiene el alumno a la hora de acercarse a las matemáticas consiste en entender las palabras empleadas, cuando, en realidad, el lenguaje matemático surge para facilitar la comprensión exacta de los conceptos. Sin dicha comprensión no es posible desarrollar la capacidad de abstracción necesaria en esta disciplina. Un camino para lograr este objetivo consiste en conocer el sentido de algunos términos fundamentales y, a partir de ellos, deducir el significado de nuevas palabras.

Después de varios años explicando el origen de las palabras que surgen en las clases de matemáticas, he comprobado que, no sólo despierta el interés entre el alumnado, sino que también favorece el entendimiento de dichas expresiones. Por esta razón he elaborado un pequeño diccionario etimológico de los términos matemáticos usados con más frecuencia por los estudiantes de secundaria. Junto a la etimología de cada término, se incluyen otras palabras con la misma raíz para facilitar la comprensión y ayudar a nuestros alumnos a retener su significado. Con ello espero ofrecerles nuevas herramientas para el dominio de su propia lengua, y mostrarles que ciencias y humanidades son inseparables.

Para la elaboración de este trabajo me he basado fundamentalmente en el *Breve Diccionario Etimológico de la Lengua Castellana* de Joan Corominas, obra que recomiendo encarecidamente a todos los docentes. (Para las voces griegas he seguido la transcripción latina de la obra citada.)

Aleatorio (del latín *alea*, dado, suerte, azar)

Julio César pronunció su famosa sentencia *Alea iacta est* (la suerte está echada) en el momento de cruzar el río

Después de varios años explicando el origen de las palabras que surgen en las clases de matemáticas, he comprobado que, no sólo despierta el interés entre el alumnado, sino que también favorece el entendimiento de dichas expresiones. Por esta razón he elaborado un pequeño diccionario etimológico de los términos matemáticos usados con más frecuencia por los estudiantes de secundaria. Junto a la etimología de cada término, se incluyen otras palabras con la misma raíz para facilitar la comprensión y ayudar a nuestros alumnos a retener su significado. Con ello espero ofrecerles nuevas herramientas para el dominio de su propia lengua, y mostrarles que ciencias y humanidades son inseparables.

Rubicón y comenzar la guerra civil contra Pompeyo, allá por el año 49 a.C.

Álgebra (del árabe *al-jabr*, restauración)

El origen de este término se remonta al año 830 cuando el insigne matemático árabe Mohamed ibn Musa al-Khuwarizmi escribió un libro titulado *Al-jabr w'al muqabâbala*, que se puede traducir como *Restauración y simplificación*. Restaurar hace referencia a pasar de una ecuación a otra equivalente, como por ejemplo, pasar de $x + 3 = 5$ a $x = 5 - 3$ sin más que restar 3 a ambos miembros; simplificar es agrupar términos semejante como $3x + 4x = 7x$, o también suprimir términos iguales a ambos lados del igual como $5 + 3x = x + 5 \rightarrow 3x = x$.

En castellano se conserva, bastante en desuso ya, la siguiente acepción de algebrista: cirujano dedicado especialmente a la curación de dislocaciones de huesos. Algo así como restaurador o componedor de huesos.

Al final del capítulo XV de la segunda parte del *Quijote* (1615), después de que Don Quijote golpeará al Caballero del Bosque (también llamado Caballero de los Espejos, y que era el bachiller Sansón Carrasco disfrazado) con el que se había batido en duelo, Cervantes escribe: «En esto fueron razonando los dos, hasta que llegaron a un pueblo donde fue ventura hallar un algebrista, con quien se curó el Sansón desgraciado», y un poco antes, al final del capítulo XIV, se dice que buscaban «algún lugar donde bizmarle y entablarle las costillas» (*bizmar*: poner emplastos).

Por esas mismas fechas, Francisco de Quevedo escribe su célebre novela *El Buscón*. Al principio de la obra, cuando el personaje describe las características de su madre lo hace en estos términos: «... unos la llamaban “zurcidora de gustos”, otros “algebrista de voluntades desconcertadas”, otros “juntona”, cual la llamaba «enflautadora de miembros», y cual “tejedora de carnes” y, por mal nombre, “alcagüeta”».

(Inciso: muchas veces, recordando este pasaje me digo: ...algebrista de voluntades desconcertadas..., ¡qué magnífica definición de la labor docente!)

Algoritmo (del árabe)

Es una deformación del nombre de Al-Khuwarizmi, que ya hemos dicho que fue uno de los grandes matemáticos árabes del siglo IX a. C. Cuando se tradujeron al latín sus obras la gente se refería a su sistema de notación como el de Al-Khuwarizmi, y su nombre se fue deformando y latinizando hasta llegar a nuestro actual algoritmo.

Algoritmo es cualquier artificio operativo empleado para resolver un problema. Ejemplo: algoritmo de la división,

Álgebra

Algoritmo

Aritmética

Áureo

algoritmo de Euclides para la obtención del máximo común divisor de dos números, la regla de Sarrus, etc.

El mismo origen tiene nuestro término guarismo.

Ángulo (del latín *angŭlus*, ángulo, rincón)

Triángulo (tres ángulos), anguloso (que tiene esquinas).

Apotema (del griego *apo*, desde y *ítēmi*, poner)

Segmento que une el centro de un polígono regular y el punto medio de uno cualquiera de sus lados.

Arco (del latín *arcus*, arco)

Arco es la línea comprendida entre dos puntos de una circunferencia. Se llama así porque su forma se asemeja a un arco y la cuerda recibe este nombre porque parece la cuerda del arco.

Aritmética (del griego *arithmós*, número)

Asíntota (del griego *asýmptōtos*, «que no coincide»)

Línea recta que se acerca a una curva sin llegar nunca a tocarla.

Áureo (del latín *aurum*, oro)

El número áureo se denomina también número de oro o número dorado, llamado así por la proporción áurea, que debe su nombre a su gran belleza.

Por esta etimología, el símbolo químico del oro es *Au*.

Dorar, aureola (resplandor, disco luminoso que suele figurarse detrás de la cabeza de las imágenes sagradas), oro-péndola (oro y péndula {pluma}, pájaro de olor amarillo).

Axioma (del griego *áxios*, digno, valioso)

Proposición que se da por verdadera sin necesidad de demostrarla.

Un conocido axioma es «el todo es mayor que la parte». En matemáticas el más famoso axioma es de las paralelas de Euclides.

De nuevo, en el capítulo XXXIII de la primera parte del *Quijote*, en el cual comienza la novela del Curioso Impertinente, aparece un axioma. Lotario dice a su amigo Anselmo (el curioso impertinente): «...les han de traer ejemplos palpables, fáciles, intelegibles, demostrativos, indubitables, como demostraciones matemáticas que no se pueden negar, como cuando dicen: “Si de dos partes iguales quitamos partes iguales, las que quedan también son iguales”».

Azar (del árabe *zahr*, flor, dado)

Antiguamente se pintaba una flor en una de las caras del dado para señalar la cara desfavorable, y por esto la palabra dado tomó su nombre de flor.

Azahar (flor blanca).

Bicuadrado

Dos veces cuadrado. Las ecuaciones bicuadradas son ecuaciones de cuarto grado que tienen términos en x^4 , x^2 e independientes, pero no en x^3 , ni en x .

Bíceps (músculo del brazo que tiene dos cabezas).

Binomio (del latín *bi*, dos, doble y *nomen*, nombre, es decir, «de dos nombres»)

A partir de esta expresión, se formaron los términos monomio, polinomio, etc.

Bisectriz (del latín *bis*, «dos veces» y *sēcarē*, cortar)

Recta que divide al ángulo en dos ángulos iguales.

Axioma

Azar

Cartesiano

Capicúa

Cicloide

Segar, sección, disecar, insecto (del latín *insectus*, participio de *insecare*, cortar, hacer una incisión, en alusión a las incisiones que tienen en su cuerpo dichos animales).

Calcular, Cálculo (del latín, del diminutivo *calcŭlus*, piedrecilla)

Dicho origen se debe a que antiguamente se utilizaban piedrecillas o cálculos para representar números y realizar operaciones con ellos.

Así nos referimos a las piedras en el riñón como cálculos renales. Habitáculo (habitación pequeña), retícula (redecilla), versículo (verso pequeño de las Sagradas Escrituras).

Cartesiano (proviene de Descartes)

René Descartes, matemático francés del siglo XVII está considerado como el inventor de la geometría analítica. Curiosamente los ejes que empleó Descartes eran oblicuos.

Cateto (del griego *káthetos*, perpendicular)

Cada uno de los lados que forman el ángulo recto en un triángulo rectángulo.

Catéter (sonda que se introduce por la uretra) tiene la misma etimología.

Capicúa (del catalán *cap i cúa*, «cabeza y cola»)

Se dice de los números que se escriben igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda.

Las palabras o frases capicúas se denominan palíndromos (del griego, *pálin*, «de nuevo», «otra vez» y *drómos*, carrera): NO MOLAS SALOMON.

Centro (del griego *kéntron*, aguijón)

Alusión a la punta del compás, ya que señalaba el centro al trazar la circunferencia.

Cero (del árabe *sifr*, vacío)

Es curioso observar que cero y cifra tienen la misma etimología.

Cicloide (del latín *cyclus*, tomado del griego *kýklos*, círculo y *eîdos*, forma, «con forma de»)

Curva que describe la trayectoria de un punto de una circunferencia que rueda sobre una línea recta.

Cíclico, ciclomotor, ciclón (huracán que gira en grandes círculos).

Cifra (del árabe *sifr*, vacío)

Es curioso observar que cifra y cero tienen la misma etimología.

Círculo (del latín *cīrcus*, circo, cerco, anillo y *ulus*, terminación de diminutivo)

Circular, cerco, circo, clavícula (hueso en forma de llave pequeña).

Clepsidra (del griego *hýdōr*, agua y *kléptō*, robar, sustraer, «dejar escurrir»)

Reloj de agua que medía el tiempo dejando salir el líquido por un orificio. Estos relojes suplieron la carencia de los relojes de sol que no podían funcionar por la noche.

Hidrógeno, hidroavión, cleptómano (individuo propenso al hurto).

Cociente (del latín *quotiens*, «cuántas veces»)

Cóncavo (del latín *cum*, con y *cāvus*, hueco)

Cavidad (espacio hueco dentro de un cuerpo cualquiera).

Cono (del griego, *kōnos*, cono, piña)

Conífera (que lleva piñas)

Convexo (del latín *convexus*, curvado)

Cuadrado (del latín *quadrum*, cuadrado, afín a *quattor*, cuatro)

Cuadrilátero (de cuatro lados), cuadrricular, cuádriga (tiro de cuatro caballos), cuadra.

Cuadrángulo

De cuatro ángulos

Cuadrante (del latín *quadran*, cuarta parte)

Cada una de las cuatro partes en que queda dividido el plano (o un círculo) cartesianos.

Cifra

Cuadrado

Cuadrante

Diagonal

Dígito

Cuerda (ver arco)

Deca- (del griego *déka*, diez)

Decena, decimal, décimo, decilitro, decálogo (conjuntos de normas y consejos, que normalmente son diez), diciembre (este mes, en el antiguo calendario romano ocupaba el lugar diez), decenio (periodo de diez años), diezmar (sacar de algo la décima parte).

Decaedro (del griego *déka*, diez y *hédra*, cara, plano)

Poliedro de diez caras.

Decágono (del griego *déka*, diez y *gonía*, ángulo)

Polígono de diez ángulos

Diagonal (del griego *dia*, «a través de», separación y *gónía*, ángulo)

En efecto, las diagonales pasan a través de los ángulos.

Diafragma (membrana que separa la cavidad torácica de la abdominal).

Diámetro (del griego, *dia*, «a través de», separación y *métron*, medida)

Recta que pasa a través del círculo y lo separa en dos partes iguales.

Diéresis (separación en dos sílabas distintas de un diptongo. En cirugía se dice de las operaciones que consisten en la división de tejidos orgánicos).

Diedro (del griego *di*, «dos veces» y *hédra*, cara, plano)

Ángulo que forman dos planos que se cortan.

Dígito (del latín *dīgītus*, dedo)

Número que puede expresarse con un solo guarismo, llamado así porque pue-

den contarse con los dedos (son los números del 0 al 9).

Digital, computador digital (aquel que traduce toda la información a números).

Discreto (del latín *dīscrētus* es el participio de *discernere*, discernir, «separar una cosa de otra»)

En matemáticas se dice que una magnitud o una variable son discretas si están formadas por unidades o partes separadas unas de otras. Lo contrario de discreto es continuo.

Discriminante (del latín *discriminare*, separar, distinguir, discernir, «diferenciar una cosa de otra»)

El discriminante de una ecuación de segundo grado nos permite distinguir el número de soluciones que tendrá la ecuación sin necesidad de resolverla.

Dividir (del latín *divīdĕre*, partir, separar)

División, divisor, dividendo, individuo (indivisible).

Dodeca- (del griego *dōdeka*, prefijo que indica doce)

Dodecágono, dodecaedro, dodecasílabo, duodeno (del latín *duōdĕcim*, doce, llamado así por tener doce dedos de largo).

Duplicar (del latín *duplicare*, plegar, doblar)

Hacer doble una cosa. En matemáticas, multiplicar por dos.

Duplo (doble), dobladillo (pliegue que se hace en los bordes de la ropa).

Ecuación (del latín, derivado de *aequus*, igual)

Es una igualdad en la que hay incógnitas.

Discreto

Discriminante

Ecuación

Eje

Equilátero

Ecuador (círculo máximo que divide a la Tierra en dos hemisferios iguales), ecuánime (que tiene igualdad de juicio, imparcial).

Eje (del latín *axis*, eje)

De aquí deriva el término axial (relativo o perteneciente al eje).

Simetría axial, axis (segunda vértebra del cuello, sobre la cual se verifica el movimiento de rotación de la cabeza).

Elipse, Hipérbola, Parábola

Fue Apolonio en el siglo III a. C. quien introdujo los nombres de las cónicas (se pueden obtener como secciones de un cono) que actualmente empleamos. Su origen se debe a que Apolonio comparaba las áreas de ciertos cuadrados construidos sobre las cónicas con el área de un rectángulo de referencia: en la parábola (del griego *parabolē*, comparación) eran iguales ambas áreas; en la hipérbola (del griego *hyperbolē*, exceso, exageración) era mayor el área del cuadrado que del rectángulo; y en la elipse (del griego *ēlleipsis*, insuficiencia) era menor.

Parábola: narración de un suceso fingido del que se deduce, mediante comparación o semejanza, una verdad o enseñanza.

Hipérbole: figura retórica que consiste en aumentar o exagerar aquello de que se habla.

Elipsis: figura de construcción que consiste en omitir en la oración una o más palabras.

Elipsoide

Con forma de elipse. La terminación griega *eîdos*, forma, «con forma de», aparece en muchos términos matemáticos.

Paraboloide, esferoide, cicloide.

Endecágono (del griego *héndeka*, once y *gōnía*, ángulo)

Polígono de once ángulos (y lados).

Endecasílabo (verso de once sílabas).

Eneágono (del griego *enneá*, nueve y *gōnía*, ángulo)

Polígono de nueve ángulos (y lados).

Equilátero (del latín *aequalis*, igual y *latus*, lado)

De lados iguales, en matemáticas se aplica a los triángulos que tiene sus tres lados iguales.

Igualdad, ecuación, equidistante, equilibrio (del latín *aequalis*, igual y *libra*, balanza), equinoccio (época en la que los días son de igual duración que las noches), lateral (perteneciente o situado al lado de una cosa).

Escaleno (del griego *skalēnós*, cojo, deforme)

Se aplica al triángulo de tres lados desiguales.

Escoliosis (desviación del raquis).

Esfera (del griego *sphâira*, esfera)

Esférico, esferoide.

Examen (del latín *exāmen*, «fiel de la balanza», acción de pesar)

Finito (del latín *finis*, fin, término)

Que tiene fin.

Infinito, final, fenecer (morir).

Fracción (del latín *frangēre*, romper, quebrar)

Acción de romper. En matemáticas las fracciones son los números quebrados, formados por numerador y denominador.

Frágil (quebradizo, que se hace pedazos con facilidad).

Geometría (del griego *gê*, tierra y *métron*, medida)

Etimológicamente significa medida de la tierra. El término latino es *agrimensura*, «medida de la tierra». El origen de este término se debe a los egipcios que después de la inundación anual de sus tierras de cultivo a causa de la crecida del Nilo, se veían obligados a ingeniárselas para dar a cada agricultor una porción de tierra equivalente a la que tenían ya que las lindes se borraban.

Geología, geografía.

Giro (del griego *gýros*, círculo)

Girasol (planta que gira siguiendo al sol), girola (nave que rodea el ábside).

Grado (del latín *gradus*, paso, peldaño)

Grado de un polinomio, grado de una ecuación.

Escaleno

Geometría

Guarismo

Heurística

Hipótesis

Grada (asiento a manera de escalón corrido).

Guarismo

Cifra. Tiene la misma procedencia que algoritmo. Viene de una progresiva deformación del nombre de Al-Khuwarizmi (matemático árabe del siglo IX d. C.).

Hecto- (del griego *hekatón*, ciento)

Hectárea, hectómetro, hectogramo. El término hecatombe tiene su origen en el griego *hekatón*, ciento y *bûs*, buey, es decir sacrificio de cien bueyes con motivo de algo extraordinario, hoy en día se aplica a una desgracia o catástrofe.

Hepta- (del griego *heptá*, siete)

Heptaedro, heptágono, heptasilabo.

Hexa- (del griego *hék*, seis)

Hexaedro, hexágono.

Heurística (del griego *heurískō*, «yo hallo, descubro»)

Arte de inventar.

Hipérbola (ver elipse)

Hipotenusa (del griego, es el participio de *hypotéinō*, «tender por debajo», extender, estirar)

Es el lado opuesto al ángulo recto en los triángulos rectángulos.

Hipótesis (del griego *hypo*, «debajo de» y *thésis*, poner, es decir, «lo que se pone a la base»)

Suposición de una cosa para obtener de ella una consecuencia.

Hipoteca (finca que sirve como garantía del pago de un crédito).

Icosaedro (del griego *éikosi*, veinte y *hédra*, cara)

Poliedro de veinte caras

Igual (del latín *aequalis*, igual)

Ecuación, igualdad, equidistante, equivalente, ecuánime.

Impar (del latín *in*, no y *par*, *paris*, igual, par, semejante)

No par, se aplica a los números que no son múltiplos de dos.

Incógnita (del latín *in*, no y el participio de *cognōscere*, conocer)

No conocida. Se aplica a la cantidad desconocida de una ecuación.

Conocer, desconocer, reconocer.

Isósceles (del griego *ísos*, igual y *skélos*, piernas)

Etimológicamente significa de piernas iguales. En matemáticas se aplica a los triángulos que tiene dos lados iguales (a modo de piernas) y el otro lado desigual.

Escelalgia (dolor en el muslo), ortóscelo (aparato para enderezar las piernas), isobara, isotérmico.

Kilo- (del griego *khílion*, mil)

Kilómetro, kilogramo, kilolitro, kilovatio.

Latitud (del latín *latus*, ancho, amplio)

En geografía, indica la distancia que hay desde un punto de la superficie terrestre al Ecuador. En matemáticas, tiene otra acepción menos empleada que es la menor de las dos dimensio-

Icosaedro

Incógnita

Latitud

Logaritmo

Matemáticas

Metro

nes principales que tiene las cosas o figuras planas, en contraposición a la mayor o longitud.

Latifundio (del latín *latus*, ancho y *fundus*, finca, terreno, es decir, finca rústica de gran tamaño), dilatar (ensanchar).

Línea (del latín *linēa*, «hilo de lino», cordel, a su vez viene de *linum*, lino)

Alinear, delinear, linotipia (del inglés *linotype*, contracción de *line of type*, máquina de composición de la cual sale la línea formando una sola pieza).

Logaritmo (del griego *lógos*, razón, argumento, tratado y *arithmós*, número)

En matemáticas, el logaritmo de un número es el exponente al que hay que elevar una cantidad determinada para obtener dicho número.

Lógica (del griego *lógos*, razón, argumento, discusión)

Longitud (del latín *lōngus*, largo)

En geografía, indica la distancia que hay desde un punto de la superficie terrestre al meridiano de Greenwich. En matemáticas significa la mayor de las dos dimensiones principales que tienen las cosas o figuras planas, en contraposición a la menor o latitud.

Prolongar (alargar), longevo (del latín *lōngus*, largo y *aevum*, edad, duración de la vida).

Magnitud (del latín *magnus*, grande)

En matemáticas se aplica a las propiedades que se pueden medir. Magnitudes escalares, magnitudes vectoriales.

Tamaño (del latín *tam magnus*, «tan grande»), Alejandro Magno, magnífico (del latín *magnus*, grande y *fācere*, hacer, es decir, espléndido, admirable).

Matemáticas (del griego *mathēmatikós*, estudioso, derivado de *máthēma*, conocimiento, a su vez derivado de *manthánō*, «yo aprendo»)

Fue Pitágoras el primero que empleó este término.

Metro (del griego *métron*, medida)

Unidad de longitud creada en Francia en el año 1791.

Perímetro, metrónomo (del griego *métron*, medida y *nómos*, regla, máquina para medir el tiempo e indicar el compás en las composiciones musicales).

Mil (del latín *mille*, mil)

Milímetro, milenio, millón, milla, milhojas.

Minuto

El gran matemático griego del siglo II d.C., Ptolomeo, estudió a fondo la astronomía. Él dividía la circunferencia en 60 grados, y éstos en 60 *partes minutae primae* (es decir, «partes pequeñas primeras»), y éstas a su vez las subdividía en otras 60 *partes minutae secundae* (o sea, «partes pequeñas segundas»), y de estas expresiones latinas es de donde provienen nuestros minutos y segundos actuales.

Peccata minuta: error, falta o vicio leve. Menudo.

Módulo (del latín *mōdus*, «medida para medir algo», manera, género y el diminutivo *ulus*)

Monomio (ver binomio)

Neutro (del latín *neŭter*, «ninguno de los dos», derivado de *uter*, «cuál de los dos» y la negación *ne*)

Neutral, neutrón (partícula desprovista de carga eléctrica).

Nulo (del latín *nŭllus*, ninguno, derivado de *ne-un(u)lus* que es el diminutivo de «no uno»)

Anular (hacer cero).

Número (del latín *nŭmĕrus*, número)

Enumerar, numeral.

Octo- (del griego *ōcto*, ocho)

Octógono, octaedro, ochenta, octosílabo, octogenario, Octubre (este mes era el octavo mes del año cuando aún no se habían añadido los meses de Julio y Agosto en el antiguo calendario romano).

Parábola (ver elipse)

Mil

Número

Paradoja

Paralelepípedo

Periodo

Paradoja (del griego *parà*, contra, «fuera de» y *dóxa*, opinión)

Contrario a la opinión común.

Paranoia (del griego *parà*, contra, «fuera de» y *nŭs*, mente).

Paralelo (del griego *parà*, «junto a», «cerca de», y *allélus*, «los unos a los otros»)

Parásito (del griego *parà*, «junto a» y *sîtos*, alimento).

Paralelogramo (del griego *pará*, «junto a», *allélus*, «los unos a los otros» y *grammĕ*, línea)

Crucigrama.

Paralelepípedo (del griego *parà*, «junto a», *allélus*, «los unos a los otros» y *epípedon*, plano)

Penta- (del griego *pĕnte*, cinco)

Pentágono, pentagrama (del griego *pĕnte*, cinco y *grammĕ*, línea), Penteuico (del griego *pĕnte*, cinco y *téukhos*, libro, volumen, se llama así a los cinco primeros libros de la Biblia). Pentecostés (del griego *pentecostĕ*, quincuagésima, festividad que se celebra cincuenta días después del domingo de Resurrección).

Perímetro (del griego *perì*, alrededor y *métron*, medida)

Contorno de una figura.

Pericardio (envoltura del corazón), periferia.

Periodo (del griego *perì*, alrededor y *hodós*, camino)

En matemáticas se puede hablar de funciones periódicas y también del periodo de un número.

Ánodo y cátodo (vienen del griego *bodós*, camino y *ana*, «hacia arriba» y *kata*, «hacia abajo», camino ascendente o descendente por donde va la corriente eléctrica, polos positivo y negativo respectivamente), éxodo, método (del griego *meta*, hacia y *bodós*, camino, camino para llegar a un resultado).

Permutación (del latín *per*, prefijo que denota intensidad y *mūtāre*, cambiar)

Mudar, mudanza, conmutar.

Perpendicular (del latín *per*, prefijo que añade intensidad y *pēndēre*, «estar colgado», pender)

Es la recta que forma ángulo recto con otra dada. Las cosas que «cuelgan» forman 90° con la horizontal.

Pendiente (adorno para la oreja), depender, suspender.

Pi, número π

Fue Euler (1737) el impulsor (aunque el primero en emplearlo fue Willian Jones) de usar la letra griega π (equivale a nuestra p) para representar al número que indica la razón entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro. Precisamente por ser la inicial de perímetro.

Poli- (del griego *polýs*, mucho)

Polifacético, policlínica, polifonía.

Polígono (del griego *polýs*, mucho y *gōnía*, ángulo)

Polinomio (ver binomio)

Primo (del latín *prīmus*, primero)

Primicia, primitivo.

Quinto (del latín *quīntus*, quinto)

Quíntuplo, quinquenio, quinteto, quinta (es una de casa de recreo en el

Permutación

Primo

Rectángulo

Segmento

Seno

campo cuyos colonos solían pagar por renta la quinta parte de los frutos).

Razón (del latín *ratio*, cálculo, cuenta)

En matemáticas, una razón es un cociente.

Racional, irracional.

Rectángulo (del latín *rectus*, recto y *angŭlus*, ángulo, rincón)

Recto (del latín *rectus*, recto, derivado de *rēgēre*, dirigir)

Rectorado, recto (última porción del intestino).

Romboide (del griego *rhómbos*, rombo y *eídos*, forma, aspecto, apariencia)

Es decir, con forma de rombo.

Elipsoide, alcaloide, trapezoide.

Rumbo (del griego *rhómbos*, rombo)

En un principio, designaba cada uno de los 32 espacios en que se dividía la rosa de los vientos, y se les llamó rombos por estar representada dicha figura en esos 32 espacios de la brújula.

Secante (del latín *secare*, cortar)

Líneas o figuras que cortan a otras.

Sección, bisecar, bisectriz, disecar.

Segmento (del latín *segmētum*, segmento, derivado de *sēcāre*, cortar)

Segundo (la acepción de ordinal viene del latín *secūndus*, «el siguiente»)

Seguir, perseguir.

Para la acepción de medida de ángulos, ver minutos.

Semicírculo (del latín, *semi*, medio, mitad y *circus*, circo, cerco, anillo, y el diminutivo *ulus*)

La mitad de un círculo.

Semidiós, semiplano, semitono. El equivalente griego de *semi* es *hemi*.

Seno

La historia de este término está jalonada de una serie de errores de traducción. En sánscrito se empleaba el térmi-

no *jya-ardba* (cuerda-media), y los indios lo abreviaron como *jya* o *jiva*; los árabes lo tradujeron como *jiba*, pero como no tenían vocales escribían *jb*, pero estas dos consonantes se interpretaron más tarde como *jaib* (seno). En el siglo XII, al traducirlo al latín se le llamó *sinus*, y de aquí viene nuestro término seno.

Simetría (del griego *syn*, con y *métron*, medida)

O sea, con medida. Las figuras simétricas tienen igual tamaño y forma pero con distinto sentido.

Simpatía (del griego *syn*, con y *páthos*, sentimiento, acto de sentir igual que otro), sinónimo (del griego *syn*, con y *ónoma*, nombre), simbiosis (del griego *syn*, con y *bíos*, vida).

Simplificar (del latín *simplus*, simple y *fācēre*, hacer)

Hacer más sencilla una cosa.

Superficie (del latín *super*, sobre, encima y *facies*, cara, aspecto)

O sea, sobre la cara. Superdotado, superviviente, sobrecargado, fachada, antifaz.

Tangente (del latín, participio de *tangēre*, tocar)

Tañer, tangible, tacto, intacto.

Tetraedro (del griego *tetra*, abreviatura de *téttares*, cuatro y *hédra*, cara)

Poliedro de cuatro caras.

El conocido juego del *Tetris* debe su nombre a que las fichas que aparecen tienen todas cuatro cuadraditos, a modo de tetraminós.

Topología (del griego *tópos*, lugar y *lógos*, estudio, ciencia, tratado)

Topónimo (nombre de lugar), topografía, Utopía (del griego, formado por la negación *u* y *tópos*, lugar, lugar inventado por Tomás Moro en su famosa obra queriendo indicar que no existía dicho lugar).

Trapezio (del griego *trapézion*, diminutivo de *trápeza*, mesa)

Cuadrilátero irregular con sólo dos lados paralelos.

El trapezio del circo debe su nombre a que, a menudo, tiene la barra inferior no horizontal.

Simetría

Trigonometría

Vértice

Esteban Serrano
IES África.
Fuenlabrada (Madrid).
Sociedad Madrileña
de Profesores de Matemáticas
«Emma Castelnuovo»

Tri- (del latín *trēs*, tres, y también, del griego *treis*, tres)

Triángulo, tercio, tresillo, trilogía, trípode, tricolor, tridente.

Triángulo (del latín *trēs*, tres y *angŭlus*, ángulo)

Trigonometría (del griego *trígonos*, triángulo y *métron*, medida; a su vez *trígonos* está formado por *treis*, tres y *gónía*, ángulo)

Rama matemática que se encarga del estudio de los triángulos.

Vertical (del latín *verticalis*, «que va a la cumbre», a su vez se deriva de *vĕrtĕre*, girar, «hacer girar», «dar vuelta»)

Verter, vertiente, vértebra.

Vértice (del latín *vertex*, «polo en torno al cual gira el cielo», cumbre; derivado de *vĕrtĕre*, girar, «dar vuelta», «hacer girar»)

Verso (del latín, *vĕrsus*, «surco que da la vuelta»).

Bibliografía

- BOYER, C. (1986): *Historia de la matemática*, Alianza, Madrid.
- COROMINAS, J. (1973): *Breve Diccionario Etimológico de la Lengua Castellana*, Gredos, Madrid.
- KATZ, V. (1993): *A History of Mathematics (an introduction)*, Harper-Collins, New York.
- MATEOS, A. (1994): *Compendio de etimologías grecolatinas del español*, Esfinge, México.
- PICATOSTE, F. (1862): *Vocabulario Matemático-Etimológico* (Facsimil de 1994 en Librerías París-Valencia, Valencia).
- REAL ACADEMIA ESPAÑOLA (1992): *Diccionario de la Lengua Española*, Espasa Calpe, Madrid.

El problema de los isoperímetros en el Islam Medieval

Grupo Construir las Matemáticas*

ES CURIOSO cómo desaparece una cultura, prácticamente, de la Historia de las Ciencias. Parece como si desde la caída de la Casas de la Sabiduría de Bagdad la civilización islámica no haya hecho ninguna aportación científica a la Humanidad. Sin embargo, no es así. Con esta entrega deseamos rendir un merecido homenaje a cuantos arabistas están dando a la luz excelentes resultados fruto de su investigación. Españoles como José Sánchez Pérez, Juan Vernet, Julio Sansó y Mercé Comas, franceses como Djebar, etc. Merecen ocupar un lugar destacado en cuanto a sus aportaciones en investigación para esclarecer la Historia de las Matemáticas en el Islam Medieval.

A comienzos del s. IX, tanto el *Almagesto* de Ptolomeo como los *Comentarios* de Theón de Alejandría estaban traducidos a la lengua árabe. Estas fueron las fuentes de al-Kindi a quien, parece ser, se atribuye el haberse ocupado del problema de los isoperímetros en el mundo árabe. Recuerda en su *Gran Arte* la influencia de Theón (ms. de Istambul, Aya Sofía 4830, fol. 53r-80v) al escribir que «nosotros lo hemos explicado en nuestro libro sobre esféricas». Pero el biobibliógrafo del s.X al-Nadin añade que al-Kindi dedicó un tratado a este problema en el que concluye que «la esfera es la mayor entre las figuras sólidas y el círculo es mayor que cualquier figura plana». Al igual que otros muchos, los escritos de al-Kindi han desaparecido por lo que no podemos afirmar nada de su contribución ni hacer seguimiento alguno entre sus discípulos. Así llegamos hasta mediados del s.X en el que figura al-Khazin quien, como también sucediera con sus sucesores, parece tener como centro de interés la cosmografía. Al-Khazin escribe un libro con nueve lemas, con los que se pone de manifiesto que conocía los resultados de Zenodoro a través del resumen de Theón, y abre nuevas vías de demostración. Los cuatro primeros lemas tratan de establecer que el área de un triángulo equilátero es mayor que la de cualquier triángulo isósceles de igual perímetro. En el lema quinto demuestra que el área de un triángulo equilátero es mayor

* Los componentes del Grupo Construir las Matemáticas son Rafael Pérez, Isabel Berenguer, Luis Berenguer, Belén Cobo, M.ª Dolores Daza, Francisco Fernández, Miguel Pasadas y Ana M.ª Payá.

**TALLER
DE
PROBLEMAS**

que la de cualquier otro de igual perímetro. Con el sexto lema pasa a los paralelogramos y rombos, comparando sus áreas con las de un cuadrado de igual perímetro. El pentágono regular es la figura sobre la que trata en el séptimo lema y demuestra que su área es mayor que la de cualquier otro pentágono de igual perímetro.

Si comparamos el camino de al-Khazin con el de Zenodoro, se observa la diferencia entre ambos. Zenodoro comienza comparando un triángulo cualquiera con uno isósceles de igual base y perímetro para decir que «la suma de dos triángulos isósceles, semejantes entre sí, cuyas bases son desiguales, es mayor que la suma de dos triángulos isósceles, no semejantes entre sí, isoperimétricos a los triángulos semejantes». Por isoperimétrico hay que entender aquí que la suma de los lados, excluyendo las bases, son iguales. Este lema de Zenodoro no es correcto. Coolidge (1940) lo ha puesto de manifiesto al usar un lenguaje diferente para el lema. Trata de buscar el máximo de la suma de áreas de los triángulos de bases $2x$ y $2y$ y alturas a y b , respectivamente, $ax+by$, cuando

$$\sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{b^2+y^2} = 1$$

(se ha tomado como 1 el valor del isoperímetro dado). Es necesario, pues, que $ax'+by' = 0$ por lo que $x'/y' = -b/a$; derivando la segunda igualdad:

$$\frac{bx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{ay}{\sqrt{b^2+y^2}}$$

Escribiendo $x = au$ e $y = bv$ queda:

$$\frac{u}{a\sqrt{1+u^2}} = \frac{v}{b\sqrt{1+v^2}}$$

mientras que el enunciado exige que $u = v$.

Es posible que al-Khazin eligiese otro método demostrativo debido a este error de Zenodoro.

Después, al-Khazin demuestra que si dos polígonos regulares, P_1 y P_2 , tienen, respectivamente, n_1 y n_2 lados, $n_1 > n_2$, e igual perímetro, el área de P_1 es mayor que la de P_2 y que, entonces, el área del círculo es mayor que la del polígono cuyo perímetro coincide con la longitud de la primera.

Ya podemos ver que el camino seguido por al-Khazin es el siguiente:

- 1.º Comienza comparando polígonos regulares de igual perímetro y número de lados diferentes.
- 2.º Compara un polígono regular con un círculo de igual perímetro.

¿Puede ser la evolución histórica hasta aquí presentada un esquema que permita planificar la actuación en clase

de la mano del modelo Van Hiele? Es decir, discutir si el área de un triángulo equilátero es mayor que la de cualquier triángulo isósceles de igual perímetro, para el diagnóstico; demostrar que el área de un triángulo equilátero es mayor que la de cualquier otro de igual perímetro, para la orientación dirigida; esta misma reflexión, en este mismo momento del análisis histórico, puesta en boca del alumnado, la explicitación; y demostrar que si dos polígonos regulares, P_1 y P_2 , tienen, respectivamente, n_1 y n_2 lados, $n_1 > n_2$, e igual perímetro, el área de P_1 es mayor que la de P_2 y que, entonces, el área del círculo es mayor que la del polígono cuyo perímetro coincide con la longitud de la primera, la orientación libre. Todo está un poco desordenado desde este punto de vista, ¿verdad? A nosotros nos sirve de mucho organizar toda esta información en una ficha con la que analizamos cualquier problema. En las entregas 4.ª y 8.ª presentaremos las dos fichas siguientes:

- Ficha para presentar el problema de los isoperímetros de la mano de los métodos trigonométricos en 3.º de ESO.
- Ficha para presentar el problema de los isoperímetros de la mano de las funciones a lo largo de la ESO.

Volvamos con al-Khazin y sus investigaciones. ¿Cómo abrir el problema de los isoperímetros al espacio? Después de enunciar varios lemas sobre el área de una pirámide y su volumen, así como del cono y tronco de cono, enuncia tres proposiciones. La primera dice que:

«siendo S un sólido de revolución, formado por troncos de conos y conos, inscrito en una esfera E de radio R y circunscrito a otra esfera E' de radio R' se demuestra que $4\pi R'^2 < \text{área de } S < 4\pi R^2$ ».

En la segunda proposición, demuestra que el área de la esfera es igual a cuatro veces el área de su círculo máximo. En la tercera, determina el volumen de la esfera.

Para finalizar, al-Khazin define un sólido particular inscrito en la esfera y admite la existencia de una esfera tangente a todas las caras del sólido, lo que es inexacto, y, sin embargo, el resultado obtenido es exacto. Acto seguido demuestra la propiedad de volumen máximo de la esfera del modo siguiente:

Sea una esfera de centro O y radio R , con área S y volumen V . Un poliedro de igual área S y volumen V_1 está circunscrito a otra esfera de radio R' y área S' . Entonces, $V_1 = (1/3)SR'$; el área S' es inferior a la del poliedro, luego $S > S'$; y, por tanto, $R' < R$ y $(1/3)SR' < (1/3)SR$; es decir, $V_1 < V$.

Aunque el poliedro no está explícitamente descrito, en la demostración se supone circunscrito a la esfera y, por tanto, regular. Así pues, la demostración no es válida en general.

¿Por qué sigue al-Khazin un camino diferente para 3D al de 2D en el análisis de casos posibles? En esta ocasión no compara poliedros de igual área y distinto número de caras sino que obtiene, directamente, un resultado utilizando la fórmula que relaciona el volumen de una esfera con su área, fórmula que obtiene aproximando la esfera por poliedros no regulares.

Casi medio siglo después de que al-Khazin escribiera estos resultados, Ibn al-Haytham retoma este problema y elabora su tratado sobre los isoperímetros. En la presentación justifica el porqué lo hace al escribir que: «Los matemáticos han mencionado esta noción y la han utilizado, pero alguna de las demostraciones dadas no parecen correctas». En este trabajo, Ibn al-Haytham sigue un camino diferente analizando el problema tanto en el plano como en el espacio y, para lo segundo, desarrolló una teoría original del ángulo sólido, la primera en la Historia merecedora de este nombre.

El tratado sobre los isoperímetros de Ibn al-Haytham puede considerarse como vanguardista en la investigación matemática de su momento. Comienza comparando polígonos regulares de igual perímetro y diferente número de lados, llegando a demostrar que:

- 1.º Sean P_1 y P_2 polígonos regulares con n_1 y n_2 lados, tales que $n_1 < n_2$, de áreas A_1 y A_2 y perímetros p_1 y p_2 . Si $p_1 = p_2$ entonces $A_1 < A_2$.
- 2.º Sea p la longitud de una circunferencia, A el área del círculo que determina, p' el perímetro de un polígono regular y A' su área. Si $p = p'$ entonces $A > A'$.

Al contrario de todos sus predecesores, Ibn al-Haytham utiliza la primera proposición para demostrar la segunda. Además, hablando en lenguaje actual, considera el círculo como dominio del plano obtenido como límite de la sucesión de los dominios determinados por polígonos regulares.

A partir de estas dos proposiciones demuestra que, entre todas las figuras planas con un perímetro dado, es el círculo la de mayor área. En su demostración nunca se duda sobre si tal límite existe, lo que no es de extrañar porque estaba asegurada desde que Arquímedes publicara *La medida del círculo*.

El estudio para 3D lo basa en diez lemas que establecen dos proposiciones:

- 1.ª) Dos poliedros que tienen caras semejantes y áreas iguales, tiene mayor volumen el de mayor número de caras.

Sean A y B los centros de dos esferas circunscritas a cada poliedro. Sean AE y BG las distancias desde cada uno de los centros de las esferas a una cara del poliedro correspondiente. S_A y S_B las áreas de cada poliedro y V_A y V_B sus volúmenes. Se verifica que:

$$V_A = (1/3)S_A \cdot AE \text{ y } V_B = (1/3)S_B \cdot BG$$

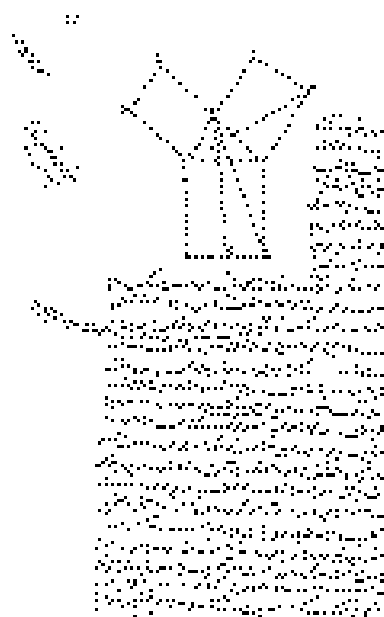
Si n_A y n_B son el número de caras de cada uno de los poliedros y, por ejemplo, $n_A = n_B$, al ser, por hipótesis, $S_A = S_B$, resulta que $V_A < V_B$.

La demostración de Ibn al-Haytham consiste en comparar AE y BG para, a continuación, considerar las bases de las pirámides de vértices A y B que descompone, a su vez, en triángulos. El razonamiento se hace entonces a partir de los resultados, ya establecidos, sobre ángulos sólidos cuyos vértices están en los centros de las esferas.

2.ª) Si dos poliedros regulares tienen por caras polígonos regulares semejantes, y están inscritos en la misma esfera, es el de mayor número de caras el de mayor superficie y volumen.

Las etapas que Ibn al-Haytham sigue en su demostración son las siguientes.

- a) Sean P_1 y P_2 poliedros, con n_1 y n_2 caras tales que $n_1 > n_2$, de áreas A_1 y A_2 y volúmenes V_1 y V_2 . Si A es el centro de la esfera circunscrita a los dos poliedros, existirán n_1 pirámides regulares e iguales con vértice en A asociadas a P_1 y n_2 asociadas a P_2 .
- b) Sean α_1 , s_1 y h_1 , respectivamente, el ángulo en el vértice, el área de la base y la altura de una pirámide regular P'_1 asociada al poliedro P_1 . Análogamente, sean α_2 , s_2 y h_2 , respectivamente, el ángulo en el vértice, el área de la base y la altura de una pirámide regular P'_2 asociada al poliedro P_2 . Se tiene que $n_1 \alpha_1 = n_2 \alpha_2 = 8$ ángulos sólidos rectos; pero, como $n_1 > n_2$, se verificará que $\alpha_1 < \alpha_2$.



- c) Puede suponerse que las pirámides P'_1 y P'_2 tienen el mismo eje. Al ser $\alpha_1 < \alpha_2$, el ángulo sólido de P'_1 es interior al de P'_2 , las aristas de P'_1 cortan a la esfera por debajo del plano de la base de P'_2 . Los planos de las dos bases son paralelos y cortan a la esfera siguiendo circunferencias circunscritas a las bases; se deduce que $s_1 < s_2$ y $h_1 > h_2$.

Por otra parte, $\alpha_1/(8D) = s_1/S_1 = 1/n_1$ y $\alpha_2/(8D) = s_2/S_2 = 1/n_2$, de donde $\alpha_2/\alpha_1 = (s_2 S_1)/(s_1 S_2)$.

- d) Ibn al-Haytham había establecido en uno de los lemas que $\alpha_2/\alpha_1 > s_2/s_1$. Se sigue, pues, que $(s_2 S_1)/(s_1 S_2) > s_2/s_1$, de donde $S_1 > S_2$. Además se sabe que $V_1 = (1/3)S_1 h_1$ y $V_2 = (1/3)S_2 h_2$. Luego, al verificarse que $S_1 > S_2$ y $h_1 > h_2$, se sigue que $V_1 > V_2$.

¿Qué podemos decir de la demostración de Ibn al-Haytham? Lo principal es que, realmente, bajo esta pretendida generalidad, sólo se está trabajando con los deltaedros regulares –es decir, el tetraedro, el octaedro y el icosaedro– y que si tienen igual área sus volúmenes crecen desde el tetraedro, que sería el menor, hasta el icosaedro. Sin embargo, la intención parece ser la misma que en el caso plano; es decir, a partir de la comparación de poliedros regulares de igual área y un número diferente de caras, se

trata de establecer que sería la esfera la de mayor volumen al ser éste aproximado por el límite de la sucesión de volúmenes de los poliedros inscritos. Pero este camino es inútil dado que el número de poliedros regulares es finito.

Las contribuciones de al-Khazin e Ibn al-Haytham están muy por encima de las de otros matemáticos árabes medievales. Ibn Hud, Jabir b. Aflah, Abu al-Qasim, al Sumaysali, etc. son algunos de sus seguidores que se ocuparon también del problema de los isoperímetros.

Los dos primeros son andalusíes y sus aportaciones a las Matemáticas, no sólo en este problema, son de gran interés. Como noticia, diremos que muy pronto será publicado un libro, de Rafael Pérez, en el que figuran los matemáticos andalusíes más destacados como parte de nuestro legado histórico-cultural que, por lo demás, es prácticamente desconocido.

¿Cómo diseñar ahora las fases de Van Hiele para el aprendizaje desde el problema en su visión tridimensional?

Como conclusión, señalaremos el hecho del tratamiento plano y espacial del problema. Actualmente se aconseja que la enseñanza de la Geometría se ocupe simultáneamente de los resultados en 2D y 3D. Aquí tenemos, pues, un buen ejemplo a seguir.



Altura de un triángulo
XI Olimpiada Matemática Nacional
Equipo 8



Thales de subida
XI Olimpiada Matemática Nacional
Equipo 9

The logo for SUMA 35, featuring the word 'SUMA' in a stylized, bold, sans-serif font, with the number '35' to its right.

noviembre 2000, pp. 101-102

La ONCE: un número

Fernando Corbalán

EN LAS DOS ENTREGAS anteriores de esta sección nos hemos ocupado fundamentalmente de mensajes aparecidos en periódicos (un medio más cercano a la práctica escolar). Pero la evolución de la sociedad de la información nos lleva a que cada vez más los grupos de comunicación son multimedia (se elaboran informaciones que se emiten con ligeras variantes por prensa, radio, televisión e Internet) y una misma noticia da lugar a respuestas en diferentes formatos. Y también la influencia nos llega a través de medios diversos. Hoy nos ocuparemos de una campaña de publicidad con repercusión multimedia.

La ONCE se ha distinguido desde el lanzamiento masivo de sus sorteos del cupón por unas campañas publicitarias rompedoras e impactantes, que han pasado a la historia como modelos. Dos de las últimas que ha abordado tienen que ver directamente con las matemáticas. La más antigua en el tiempo, por la primavera pasada, tenía el hermoso lema «Los números te hablan. Sólo tienes que escucharlos». Que considero tan aprovechable que, si no hubiera problemas de derechos, se podría utilizar para una campaña de publicidad de las propias matemáticas o de este Año Mundial que estamos acabando. Añadiendo quizás de forma apropiada que las matemáticas son algo más que números y que la misión de los profesores de los distintos niveles es justamente afinar el oído de los escolares para que escuchen esa música (aunque eso podría ser la letra pequeña de los anuncios, porque ya se sabe que los eslóganes tienen que ser cortos, rápidos y directos).

No tengo noticia de que se alabara a los responsables de la ONCE por esa campaña, por más que yo estuve en un tris de hacerlo. Y justo a continuación (quizás para vengarse porque no había habido la esperable reacción laudatoria del colectivo matemático) se descolgaron con otra campaña en TV en la que un niño soñaba con las cosas que le gustaría que sucedieran, entre las que estaba «que las matemáticas no existan». Aquí ya sí que (con razón) el profesorado se sintió concernido; y comenzaron las reacciones.

Aquí voy a recoger un extracto de las que aparecieron en EDUMAT una red de educación matemáticas en Internet (sobre la que se puede tener información en <http://listserv.rediris.es/archives/edumat.html> o escribiendo

**M A T E S
Y
M E D I O S**

do a la dirección EDUMAT@LISTSERV.REDIRIS.ES), aunque también hubo reflejos en prensa y radio. El 5/6/00 J. F. López (5/6/00) envía el siguiente mensaje dirigido a la ONCE:

Celebro que la ONCE de la posibilidad de realizar sus sueños a todos los niños y niñas ciegos, pero pienso que sería más acertado incluir el anuncio el sueño de «SACAR UN SOBRESALIENTE EN MATEMÁTICAS» en vez del sueño que proponen de que no existan las matemáticas, más cuando se está celebrando el Año Mundial de la Matemáticas.

y al día siguiente inserta la respuesta que le ha hecho llegar la ONCE:

Estimado amigo: [...] Quiero trasladarle la sincera preocupación que me ha ocasionado su interpretación de la creatividad de la citada campaña, y proponerle un análisis conjunto de los mismos puntos que Vd. me cita en su correo y que, en mi opinión, no tienen intención de ser lesivos para las matemáticas.

De entrada quiero plantearle el problema de la particularidad del lenguaje publicitario. Igual que sucede en otras materias como el periodismo, la poesía, la música, y no digamos las propias matemáticas, el discurso publicitario está sometido a una serie de condicionantes de muy diferente tipo, que obligan en algunas ocasiones a simplificar, como es el caso que nos atañe. Entre estos condicionantes cabe destacar el factor tiempo, que determina una mayor o menor abstracción del relato, y las características del receptor del mensaje, que en el medio televisivo es un público heterogéneo al que para abarcarlo hace falta recurrir a mensajes no complejos de manera que los lugares comunes, los estereotipos, y las convenciones sociales, se convierten, por desgracia en muchas ocasiones, en recursos inevitables.

Por otro lado, lamentablemente la ONCE no es quién para oponerse a la realidad que nos rodea. Estoy convencido de que compartirá conmigo que la metodología de la enseñanza de las matemáticas ha acabado por construir una realidad concreta; para los jóvenes aún sigue siendo una materia compleja y a la que resulta difícil enfrentarse. El hecho de que en nuestra comunicación reflejemos de forma risueña y no agresiva esa realidad consolidada no es más que producto de lo que se siente en la calle. Es algo que está ahí. Sin embargo, qué duda cabe que a nosotros, como organización responsable de la educación de los niños ciegos y deficientes visuales, nos encantaría que, gracias a iniciativas como la celebración del Año Mundial de las Matemáticas y al esfuerzo de innumerables profesionales que como Vd. trabajan en la materia, en un momento determinado se consiguiera que este estereotipo quede desautorizado por la realidad y que nuestros jóvenes pudieran asumir con mayor naturalidad esta ciencia fundamental. [...] Estando seguro de que aceptará mis explicaciones. Reciba un cordial saludo. Fernando Mendía. Director de Comunicación e Imagen.

Curiosa la forma en que la ONCE echa balones fuera, porque no hay que olvidar que quien da el visto bueno de una campaña es quien la paga. Las reacciones llegaron lejos y Orlando Barreda, el 7/6/00, comenta

Pues que yo creía que sólo a este lado del gran charco, en nuestra pobrecita Latinoamérica, se daba esto que estuviéramos en manos de un atajo de... «publicistas», que con sus «particulares lenguajes» nos llenan de basura so pretexto de «que vende»... doblemente triste y alarmante si de chicos se trata...

Y también ese día comentaba Abilio Corchete

La respuesta del Dpto. de Relaciones Públicas de la ONCE no tiene desperdicio. ¿No es sorprendente que una organización como la ONCE que para facilitar la incorporación de invidentes y otros desfavorecidos a nuestra sociedad, realiza campañas publicitarias en las que se nos insta a modificar la realidad que nos rodea, se inhíba a la hora de oponerse a la «realidad matemática» que nos rodea? ¿lo saben sus asociados?, ¿lo saben sus directivos?

Pasaron unos días y el 21/6/00 comunicaba E. de la Torre:

También yo envié una protesta a la ONCE por sus mensajes sobre las matemáticas y esto es lo que me respondieron

y adjunta lo siguiente:

Le agradezco muy sinceramente sus comentarios al respecto de la última campaña de publicidad de la ONCE. Lamento que el tratamiento que se da a las matemáticas no haya sido bien acogido por los profesionales de las mismas. No siempre se puede acertar en todo y le aseguro, que en la medida de lo posible, tomamos buena nota de sus aportaciones para el futuro. Sin otro particular reciba un cordial saludo y mi agradecimiento. Fernando Mendía. Director de Comunicación e Imagen.

donde parece que ya no están tan comunicativos.

Ese mismo día J.F. López adjuntaba «el artículo publicado hoy (21/6/2000) en el diario *Levante* de Valencia». Era el que con el título «No tienen perdón» escribía Juan José Millás, que es difícil de mejorar y con el que acabamos este repaso multimedia:

Estamos en el año mundial de las matemáticas. Quizá por eso la ONCE ha llevado a cabo una magnífica campaña de publicidad cuyos protagonistas eran los números. Hasta los de letras dependemos de ellos para administrar nuestro salario, y controlar manías construidas a sus expensas: algunos números de teléfono, por poner un ejemplo sencillo, tienen un significado especial incluso para los que no sabemos dividir. Todo a nuestro alrededor es número. La semana tiene siete días; el mes, treinta; y el año trescientos sesenta y cinco. Faltan cinco paradas para la casa de mi novia o siete recibos para terminar de pagar la hipoteca. Mi padre sólo me llevó al cine en tres ocasiones y mi madre daba dos besos a mi hermano y uno a mí. Hoy sólo me ha llamado tres veces por teléfono. Faltan cuatro días para el sábado...

Los matemáticos se han enfadado mucho porque en uno de estos anuncios un niño soñaba que las matemáticas no existían. Los matemáticos dicen que esta clase de publicidad alienta el rechazo hacia la materia. El caso es que la ONCE ha suspendido la campaña. Los matemáticos se equivocan. Los niños van a continuar soñando lo mismo con campaña o sin ella. Lo inteligente habría sido invitar a la ONCE a que llevara ese sueño hasta el final. Tuve un alumno cuyo sueño era que no existía la gramática. Lo contó en clase y yo invité a todos a que nos comportáramos como si la gramática no existiera. Pasados quince días, los alumnos habían comenzado a construir una gramática propia, pues se dieron cuenta de que se podía vivir sin balones y sin recreos y sin merienda, pero no sin gramática. Durante aquel curso estudiamos la gramática escrita por ellos y aprendimos (yo también) más que en los cinco años anteriores.

Si los matemáticos hubieran invitado a la ONCE a desarrollar ese sueño, habríamos comenzado a construir unas matemáticas porque se puede vivir sin otras cosas, pero no sin saber cuántos dedos tenemos en cada mano. Los matemáticos han metido la pata, pues: y en el año mundial de las matemáticas. No tienen perdón. Gracias, ONCE, por esa publicidad tan imaginativa.

Rompecabezas de aviones

Grupo Alquiler*

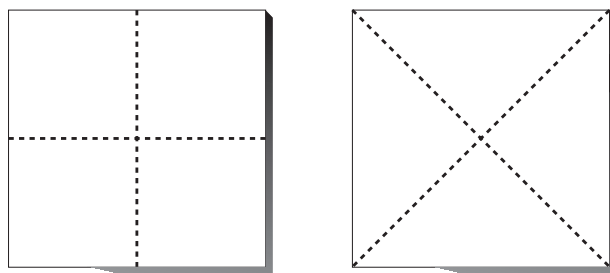
LOS ROMPECABEZAS más conocidos actualmente son los de piezas que hay que encajar para reproducir una imagen; en ellos la dificultad estriba en el número de piezas que lo componen y la propia imagen con tonos parecidos y piezas casi iguales.

Los rompecabezas matemáticos juegan también con las múltiples formas de colocar las fichas y, a veces, además de con la forma, con el color. Son menos conocidos pero muy frecuentes, desde principios de siglo, en el mundo publicitario.

Planos o tridimensionales suelen ser fáciles de construir en madera o cartón y siguen siendo muy interesantes como juego didáctico.

Comenzamos con cuadrados y colores.

Construye fichas cuadradas de igual superficie, divídelas en cuatro partes iguales y cada una píntala de un color distinto (necesitas cuatro colores). Puedes escoger una de estas divisiones:



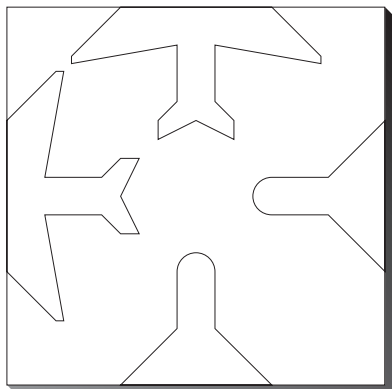
1. ¿Cuántas fichas distintas podemos construir?
2. Si las colocamos una junto a otra siguiendo la regla: «lados adyacentes, colores iguales», ¿cuántas disposiciones distintas son posibles?

* Los componentes del Grupo Alquiler de Sevilla son Juan Antonio Hans Martín (C.C. Santa María de los Reyes), José Muñoz Santonja (IES Macarena), Antonio Fernández-Aliseda Redondo (IES Camas), José Blanco García (IES Alcalá del Río) y Josefa M.ª Aldana Pérez (C.C. Inmaculado Corazón de María –Portaceli–).

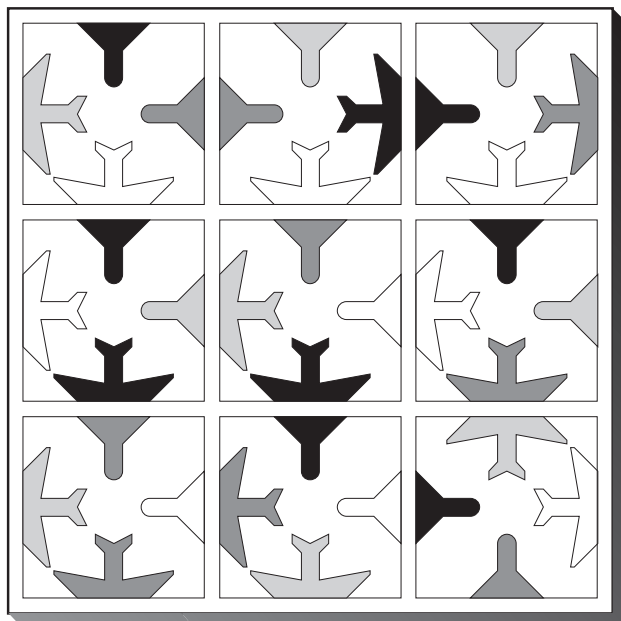
3. ¿Y cuántas fichas y cuáles tenemos que repetir para construir un cuadrado de 3×3 fichas en el que los lados adyacentes tengan los mismos colores?

Basándose en la idea anterior os presentamos un rompecabezas que regalaban las líneas aéreas suizas *Swissair* en sus vuelos.

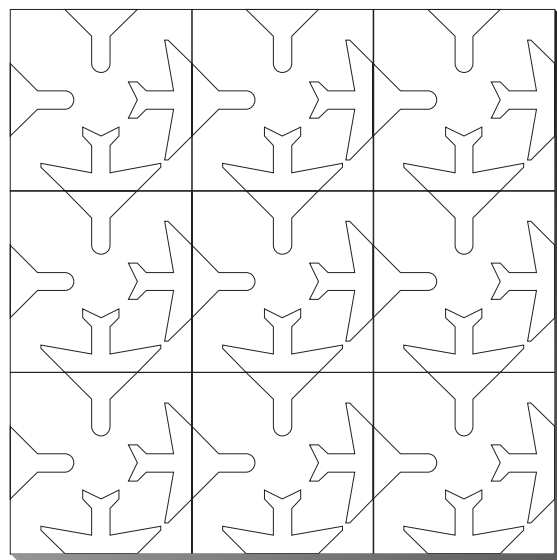
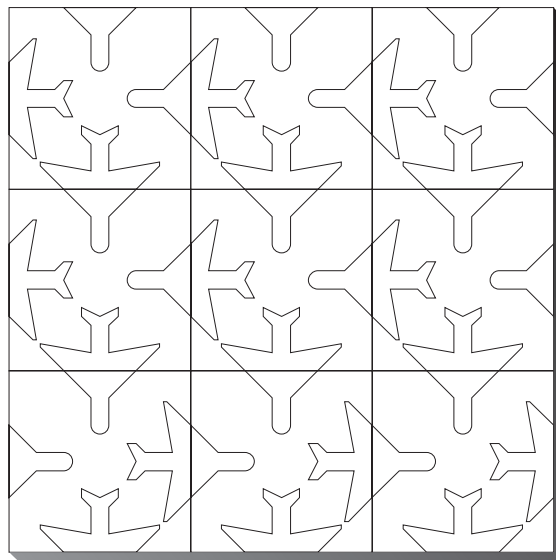
Consta de 9 fichas cuadradas que tienen dibujadas: dos cabezas y dos colas de avión, dispuestas en todas las fichas de la misma manera. La diferencia de las piezas está en el color de cada elemento. Utiliza cuatro colores.



El juego consiste en disponer las nueve fichas formando un tablero de 3×3 , de manera que los aviones interiores estén bien formados y tengan sus dos partes, cabeza y cola, del mismo color.



Para empezar aquí tienes dos soluciones distintas con un pequeño problema: se nos han borrado los colores.



Coge las fichas, juega y encontrarás las soluciones que te damos y seguro que otras muchas.

Matemáticas... ¿menos serias?

Antonio Pérez Sanz

**RECURSOS
EN
INTERNET**

LAS MATEMÁTICAS son algo muy serio. Nadie nos tiene que convencer a los profesores de matemáticas de la seriedad de las mismas. A pesar del hecho innegable de que ramas enteras de esta ciencia tienen su origen en el intento de dar respuestas a situaciones más bien lúdicas, vamos, a auténticos juegos. Hoy en día nadie osaría afirmar que el Cálculo de Probabilidades es menos serio que el Cálculo Integral.

Por fortuna muchos matemáticos no han perdido esa variante lúdica de la disciplina y han creado y recreado auténticas joyas matemáticas de apariencia ligera y divertida pero con una gran carga de contenidos matemáticos en su interior. Son lo que se ha dado en llamar las «Matemáticas Recreativas».

Desde los primeros momentos de Internet, matemáticos profesionales y aficionados, profesores y estudiantes, se han volcado en publicar miles de páginas con contenidos matemáticos y muchas de ellas con los más interesantes aspectos amables de esta ciencia.

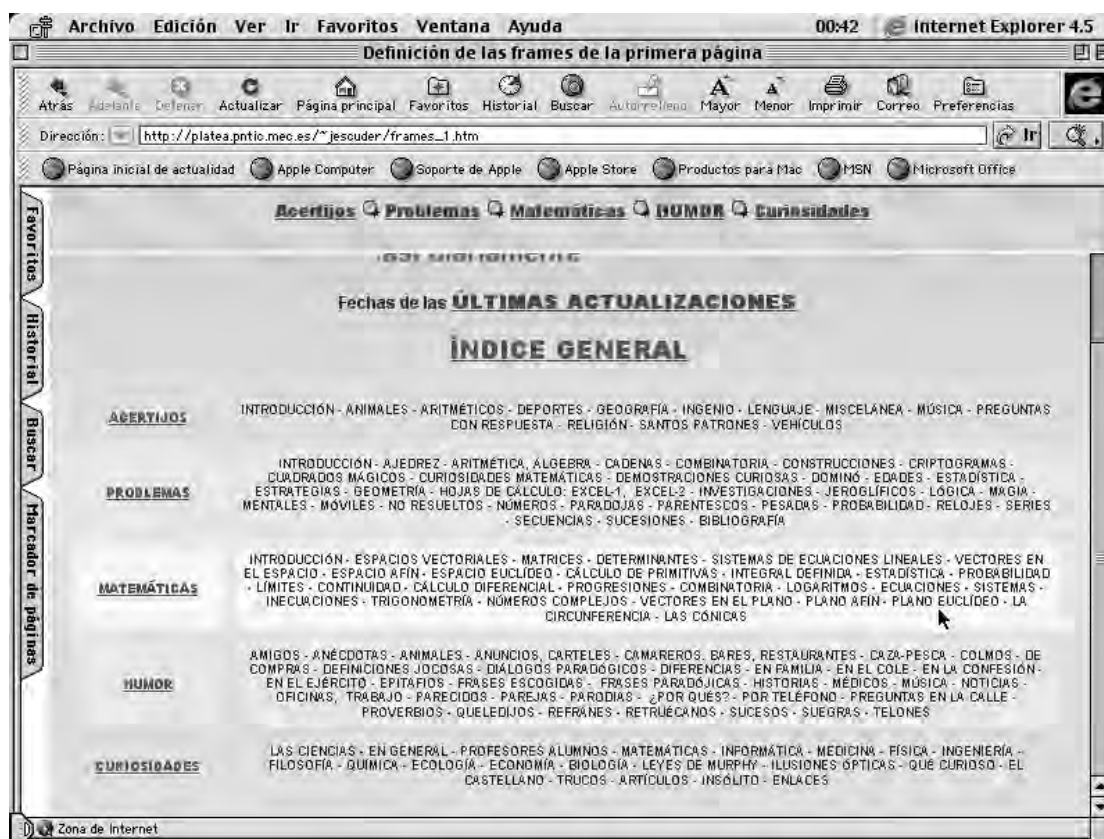
Pero uno de los grandes problemas de la Red es el exceso de información, con demasiada frecuencia el bosque no nos deja ver los mejores árboles. Si a través de un buscador general hacemos una búsqueda con la palabra «matemáticas» nos aparecerán miles de sitios. Si acotamos la búsqueda a matemáticas recreativas, matemáticas y juegos o problemas seguiremos obteniendo unos centenares. No es tan fácil encontrar lo que queremos en INTERNET.

Para no perder el tiempo, y el dinero, navegando sin rumbo lo mejor es contar con una serie limitada de sitios interesantes ya que a partir de ellos encontraremos enlaces hacia lo que buscamos. Ya sé que muchos echarán en falta alguna página que ellos conocen y que les ha parecido fabulosa en este campo, pero en una concha no cabe todo el mar.

Problemas curiosos, acertijos y buen humor...

Desde su ya veterana página, Jesús Escudero, profesor del IES Fray Luis de León de Salamanca,

<http://platea.pntic.mec.es/~jescuder>



nos deleita con una de las recopilaciones más completas de acertijos aritméticos, de problemas con historia, muchos de los cuales nos resultarán familiares y hasta con una excelente colección de chistes matemáticos.

La sección de acertijos, que son varios centenares de todo tipo y temática, desde aritméticos, hasta de deportes, está introducida por unas sabias reflexiones sobre la filosofía del propio acertijo, con joyas como esta:

La variedad de acertijos es tan infinita que es muy difícil clasificarlos en grupos definidos. A grandes rasgos, pueden dividirse en dos grandes clases:

Los que se construyen sobre algún pequeño principio interesante o informativo. [Son adecuados para la diversión del hombre y lo mujer inteligente].

Los que no encierran ninguna clase de principios. (Figuras recortadas al azar en pequeños trozos para ser vueltas a formar, jeroglíficos, etc.) [Recomendados confidencialmente, con perdón, para débiles mentales].

Y como muestra de los primeros seleccionamos éste:

ENMENDAR LA MULTIPLICACIÓN. ¿Cómo puede enmendarse esta simple multiplicación (que tal como aparece está mal, sin agregar, ni quitar, ni escribir nada? $81 \times 9 = 801$).

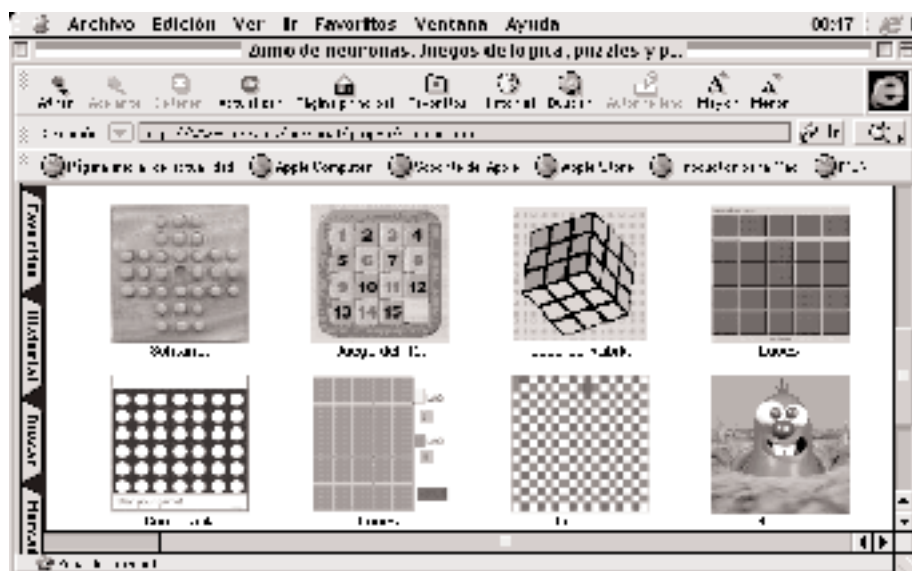
Por supuesto, y esto es un detalle que se le agradece, nos brinda la solución de todos ellos.

Si la colección de acertijos es extensa la de problemas curiosos lo es mucho más, ¡varios miles!, abordando temas tan variopintos como ajedrez, álgebra, aritmética, cadenas, construcciones, cuadrados mágicos, dominó, ilusiones ópticas... hasta problemas no resueltos (todavía). Y por supuesto todos con su chispa de ingenio.

Este nos puede dar una pista del estilo general:

EL MÁGICO NUMERO 68. Consiga una hoja de papel, recorte de ella un cuadrado de aproximadamente 20 centímetros de lado. Doble el papel al medio cuatro veces, de modo que al desdoblarlo los pliegues formen una cuadrícula de 16 cuadrados pequeños. Ahora marque bien cada pliegue hacia adelante y hacia atrás, para que el papel se doble fácilmente en cualquier dirección. Numere los cuadrados de 1 a 16 como se muestra en la ilustración:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16



Doble el papel a lo largo de los pliegues hasta que quede del tamaño de uno de los cuadrados pequeños. Su modo de doblarlo puede ser tan complicado como quiera; puede incluso meter pliegues dentro de pliegues. Tome unas tijeras y corte los cuatro bordes del paquete final para que le queden 16 cuadrados separados. Algunos de los cuadrados tendrán un número arriba, otros un número abajo. Sin dar la vuelta a ninguno de los cuadrados, desparrámelos sobre la mesa. Sume todos los números que hayan quedado boca arriba y escriba el resultado. El número que Vd. ha escrito, ¿será el 68? ¡Qué extraña coincidencia! ¿Verdad? En fin, un material para pasar entretenido todo un curso.

Juegos para pensar

Los juegos de carácter matemático constituyen una simiente que se desarrolla en la Red como pez en el agua. En Internet podemos encontrar desde los juegos más cargados de historia hasta los de última generación concebidos a la luz del desarrollo informático y los nuevos lenguajes de programación.

José Ignacio Martín, en su página Zumo de Neuronas,

<http://www.terra.es/personal/jimpvc>

nos brinda una cuidada selección de puzzles, juegos de lógica, matemática, calidociclos y, sobre todo, una agradable sección de juegos en lenguaje JAVA para jugar desde su ordenador: el solitario inglés, el juego del 15, el cubo de Rubik, conecta 4 y juegos de luces y líneas. Una vez cargados se puede jugar sin conexión. Ideales para despreocuparse sin dejar de hacer gimnasia mental.

Y para los que piensan que las Matemáticas Recreativas no son Matemáticas...

Si queremos meternos en complicaciones de más dificultad el lugar indicado es la página de Juegos y Problemas del Club Mensa

<http://www.ciudadfutura.com/juegosmensa/carrollia.html>

En ella encontraremos 160 problemas clasificados en distintos grados de dificultad que pondrán en tensión todos nuestros recursos mentales. Muchos de ellos se pueden resolver sin conocimientos matemáticos elevados, para otros se necesita alguna herramienta matemática no elemental y lo que sí es seguro es que para resolver cualquiera de ellos se necesita una buena dosis de ingenio y bastante paciencia.

Los problemas están clasificados en cuatro categorías, por estrellas. Así, desde el principio uno sabe a lo que se está enfrentando:

- * No requiere conocimientos especiales sino sólo sentido común.
- ** Requiere conocimientos matemáticos medios.
- *** Requiere conocimientos de primer ciclo de carrera universitaria.
- **** Problemas sólo para gourmets.

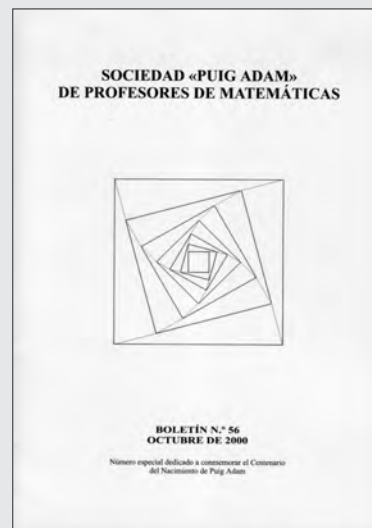
Si al final te pica el gusanillo lúdico y quieres navegar por más páginas de Matemáticas Recreativas no olvides que en la página de Flavio Piñeiro

<http://www.redemat.com>

tienes toda una sección de enlaces a este tipo de páginas.

Y no olvides que si tú mismo no te crees que las Matemáticas pueden ser divertidas difícilmente podrás convencer de ello a tus alumnos.

PUBLICACIONES DE LAS SOCIEDADES



Unos siglos que cambiaron el mundo (y II)

**Ángel Ramírez Martínez
Carlos Usón Villalba**

INICIA Alfred W. Crosby su obra *Medida de la realidad* con un problema que es a la sazón la excusa de este artículo. El enunciado es el siguiente:

[En el siglo X] un geógrafo musulmán, el gran Masudi, escribió que los europeos eran gentes de mente embotada y hablar pesado, y cuanto más al norte están, más estúpidos, groseros y brutos son. [...] Seis siglos más tarde [...] les llevaban la delantera en cierto tipo de matemáticas y de innovaciones mecánicas. Se encontraban en la primera etapa de creación de la ciencia y la tecnología que serían la gloria de su civilización y el arma afilada de su expansión imperialista. ¿Cómo habían logrado todo esto aquellos palurdos?

La solución histórica más tradicional nos traslada a las fronteras del Imperio Bizantino donde el cristiano se enfrenta al bárbaro musulmán usurpador de Tierra Santa. Allí, entre batalla y batalla, habría tomado contacto con la cultura griega que se conservaba, cual flor *in vitro*, a la espera de ser rescatada. Esta visión tan estrábica como simplista olvida por completo el papel jugado por la Península Ibérica, y más concretamente por la cultura judía que, en su particular coyuntura política, aquí nunca representó un papel de odiosa vencedora ni de ignominiosa vencida.

Algunas inconsistencias a modo de preámbulo

La historiografía convierte a Silvestre II en protagonista principal de la transmisión de las cifras indoarábigas a Europa¹. Para ello necesita ignorar indicios de que hubo otros focos de utilización y transmisión, además de Ripoll. Incluso la reputada enciclopedia *Histoire des sciences arabes*, dirigida por Roshdi Rushd, relega a una nota a pie de página —precedida de la coletilla «si exceptuamos»— la presencia de dichas cifras en el códice *Vigilanus*² (976), el primer documento conocido del Occidente cristiano en el que aparecen estos guarismos.

Aún relativizando la importancia de estos «primeros» testimonios, tampoco podemos negarlos, al menos como indicio de la necesidad de investigar posibles contactos y vías de intercambio entre distintos monasterios cristianos. Incluso como síntoma de que el conocimiento de este sistema numeral estaba más extendido de lo que habitualmente se piensa. Otra

**DESDE
LA
HISTORIA**

cosa bien distinta pudo ser la popularización de su uso, y el de sus algoritmos. Urge una visión más coherente con la importancia que las matemáticas tuvieron en al-Andalus, y en particular en el valle del Ebro, durante el siglo XI y con el impresionante esfuerzo traductor que se desarrolló más tarde. También con el hecho de que el *Libro del número* de Abraham ben Ezra (1089-1164) sea la primera referencia escrita (conocida) del mundo judío en la que aparecen las cifras indoarábigas, incluido el cero.

En cualquier caso, fuera como fuere, Europa estaba mucho de ser un terreno abonado para la ciencia en los albores del segundo milenio. Ni siquiera la condición papal de Gerberto de Aurillac le protegió de las acusaciones de satanismo. A través de él, la difusión de aquel sistema de numeración importado de al-Andalus fue escasa. Se necesitó la presencia de las tropas cruzadas en Oriente y la seguridad que da la victoria de las armas para superar recelos y espantar temores. Sólo así fue posible aprovechar la brecha que se iba abriendo en las certezas oficialmente instituidas.

Y es que, una idea, para ser socialmente aceptada, requiere tan sólo unas dosis de credibilidad, conectar con el subconsciente colectivo y ser repetida suficientemente para que por mor de la insistencia se transforme en insoslayable verdad. Pero una vez convertida en creencia, precisa después, para ser desmontada, un ambiente propicio al cambio de convicciones y, sobre todo, una carga argumental y científica que, en la mayoría de los casos, resulta desproporcionada.

En el lento caminar hacia el racionalismo, la carga científica la aportaron los textos árabes traducidos febrilmente en el norte peninsular y la labor docente desarrollada desde Sefarad. Los argumentos tuvieron protagonistas tan apasionados como Pedro Alfonso y sus discípulos. El ambiente propicio, ya lo dijimos antes, lo aportaron las Cruzadas. Mientras, el cambio de convicciones tuvo a Avempace, Averroes y Maimónides como artífices.

Las traducciones

Es posible que la visión de Masudi minusvalorase el hecho de que los garantes de la sabiduría en el mundo cristiano residían en los monasterios y, en general, bajo el ala protectora de la Iglesia. Pero, de lo que no cabe duda, es que poner la ciencia árabe al alcance de los estudiosos cristianos requería una profunda «adaptación curricular».

En cualquier caso, la coherencia argumental, también la histórica, suscita una pregunta previa: ¿Qué pasó con la rica biblioteca de al-Mu'taman tras la conquista de la taifa zaragocana?

Charles Brunet³ imagina a Hugo de Santalla y a su mentor, el obispo Miguel de Tarazona, asaltando los anaqueles de los Banu Hud en Rueda de Jalón antes de 1151. Una visión perfectamente coherente con la vorágine traductora que caracterizó la época y que mantendría su intensidad a lo largo de los siglos XII y XIII. De Toledo a Provenza, la zona norte de la península, quedó salpicada de un sinfín de escuelas⁴ dedicadas en cuerpo y alma a exportar la ciencia árabe, y a través de ella la griega⁵, a Europa. Burgos, Pamplona, Tudela, Tarazona, Huesca, Zaragoza, Lérida, Barcelona, Marsella, Narbona... fueron importantes centros de traducción sin los que hubiera sido mucho más difícil cualquier cambio.

Y es que, a pesar del tremendo vendaval que supuso la conquista cristiana, la llama de la cultura semítica tardaría en apagarse. Alimentaron su combustión desde la filosofía primero Avempace (1085-1128)⁶ y más tarde Averroes (1126-1198) y Maimónides (1135-1204), pero el oxígeno que la mantuvo viva hasta acabar incendiando «Europa» lo aportaron, desde la crítica, las matemáticas y la docencia, personajes tan relevantes⁷ y desconocidos como Moseh Sefardi o Abraham ben Ezra.

Abu Bakr Muhammad ibn al-Sa'ig ibn Bayya (Avempace)

Sobre su producción matemática poco sabemos, al parecer sus textos se han perdido. Lo traemos a estas líneas porque la ciencia y las ideas siempre caminaron de la mano a la hora de construir la Historia y, este proceso de transformación hacia el racionalismo que más tarde convirtió en imprescindibles las figuras de Tomás de Aquino y Alberto Magno, lo tuvo a él como principal instigador. Él fue el primer comentarista occidental de Aristóteles⁸. Sus ideas influyeron de forma decisiva en las de Ibn Tufayl (1110-1185) pero, sobre todo, en las de Averroes.

La obra de Aristóteles, que fue conocida y comentada en el Oriente musulmán desde el siglo IX por autores tan importantes como al-Kindi (796-873), al-Farabi (870-950) o Avicena (980-1037), era desconocida en al-Andalus y, por supuesto, en el mundo cristiano. Tan sólo se disponía de una parte de la *Lógica* pero faltaba, además del resto del *Organon*, toda la *Física*, *Metafísica*, *Ética* y *Política*.

En sus comentarios, Avempace supo compaginar el misticismo con la fe en la racionalidad del filósofo griego. La fuerza de su influjo contribuyó a que la evolución de las ideas fuera diferente en esta parte de mundo. En Oriente la figura de al-Gazzali (1058-1111) con su *Destrucción de los filósofos* acabó con la influencia aristotélica. En al-Andalus, Avempace fue el primero en levantar la voz contra al-Gazzali; más tarde, Averroes escribiría *La destrucción de la destrucción*.

El misticismo de Ibn Arabi (1165-1240) podría haber provocado en Occidente un efecto similar al que generó al-Gazzali en Oriente⁹. Sin embargo, la convicción compartida por los pensadores judíos y musulmanes de que la razón era una vía segura para la fe, terminó arraigando en el seno de una sociedad emergente que empezaba a tomar conciencia de sus posibilidades. Favoreció ese asentamiento un ambiente religioso que, sumido en múltiples controversias, buscaba un equilibrio dialéctico. Comenzaba así un largo proceso en el que el pensamiento de Aristóteles, tamizado de averroismo, acabaría por determinar los fundamentos filosóficos del orbe cristiano.

La labor crítica: Moseh Sefardí

Este judío de Huesca, que llegó a ser el experto más valorado de su tiempo en la ley talmúdica, adoptó tras el bautismo el nombre de Pedro Alfonso (1074->1142). Famoso por su riqueza argumental, supo distanciarse de la mayoría de sus contemporáneos que acostumbraban a suplir la escasa calidad de sus razonamientos con la intransigencia. Su conversión en 1106 tuvo como padrino de ceremonias nada menos que a Alfonso I el Batallador y contó con la incomprensión de sus correligionarios.

Una incomprensión que se convirtió en avieso antagonismo al alcanzar una marcada relevancia como polemista



Pedro Alfonso de Huesca, según el *Liber Chronicarum cum figuris*, de Schedel (1493).
Museo Episcopal y Capitular de Huesca.
(Foto: Adolfo Castán)

antijudío. Posiblemente fue esta animosidad la que le obligó a exiliarse y recorrer, primero Francia, donde fracasaron sus intentos de impartir docencia ante el recelo que inspiraba su condición de converso, y después Inglaterra donde al parecer ejerció como médico de Enrique I.

Más allá de las interminables discusiones acerca de su participación en algunas de las obras que se le atribuyen¹⁰, de lo que no cabe ninguna duda es del efecto que las enseñanzas de este médico, astrónomo, cosmógrafo, matemático y astrólogo causaron en Inglaterra. Sirvan como ejemplo sus *Tablas astronómicas*¹¹. Adaptadas al latín y al calendario juliano por su discípulo Walcher de Malvern con objeto de ser difundidas entre los benedictinos, esa primera edición contó con numerosos errores. Pero el alcance de su publicación fue tal que diez años más tarde quedaron totalmente superadas por las de Adelardo de Bath, en las que también participó. Hoy lo traemos aquí, a este rincón de la historia, precisamente como instigador y protagonista de esa corriente de opinión que recorrería Europa socavando los cimientos del neoplatonismo agustiniano.

Sus críticas a los «sabios tradicionales» no dejan lugar a dudas acerca de su posicionamiento intelectual. En su *Carta a los peripatéticos franceses* (prólogo de las *Tablas astronómicas*) los compara con «la cabra, que, habiendo llenado en la viña su vientre de hojas, creyó que no había allí un fruto mejor» o con aquel vendedor «que no entendía cómo el mercader de perlas podía pedir un precio tan alto por cebollas tan pequeñas». De ellos dice también que tienen la costumbre de «juzgar las cosas que ignoran y refutar lo que todavía no se ha probado».

Más clara, si cabe, es su oposición a la cultura libresca y especulativa de la época a la que enfrenta su fe en la ciencia árabe y en el método experimental. De ello da testimonio su consejo: «lee cuanto tengas a mano, pero no creas todo lo que leyeres». Un posicionamiento intelectual que, poco a poco, irá captando adeptos y más tarde impregnándose de aristotelismo averroista hasta romper la cadena de la que habla su discípulo Adelardo de Bath:

Yo he aprendido de mis maestros árabes a tomar la razón por guía; tú te contentas con seguir atado a la cadena de una actitud fabuladora, porque ¿qué otro nombre dar a la autoridad más que el de cadena? Igual que los animales estúpidos son arrastrados por una cadena y no saben a dónde ni por qué se les arrastra y se conforman con seguir la cuerda, así la mayoría de vosotros estáis prisioneros de una credulidad animal y os dejáis conducir encadenados hasta creencias peligrosas llevados por la autoridad que las ha escrito.

La difusión: Abraham ben Ezra

Pocas veces la labor docente, en particular de las matemáticas, fue tan decisiva y trascendentalmente ideologiza-

dora como la desarrollada por esta singular figura. Astrónomo por astrolólogo, este políglota de su época (dominaba el latín, hebreo y árabe), tradujo en 1160 los comentarios de al-Biruni a al-Khwarizmi y construyó un astrolabio planisférico. Su influencia entre los intelectuales cristianos de la Edad Media fue indiscutible, sobre todo en el campo de la astrología, a tenor de la gran cantidad de autores que lo citan y de las múltiples traducciones y copias manuscritas que se hicieron de sus obras.

De este infatigable viajero se sabe que pasó su juventud en Córdoba y mantuvo estrechos contactos con Lucena. Más tarde, ante la inminente invasión almohade, huyó al Norte de África. Sabemos también, con total precisión, que en 1140 residía en Roma y que después visitó Egipto y Salerno. En 1145 estuvo en Lucca; en 1146 en Mantua; en 1147 hay noticias suyas en Verona; en 1148, Béziers y Narbona; de 1154 a 1158 estuvo en Francia; en 1158 viajó a Londres y en 1161 de nuevo a Narbona. Algunos autores sitúan la fecha de su muerte en 1167 en Calahorra (La Rioja). Hay razones para pensar que la causa de este prolongado periplo fue la, más que probable, conversión de su hijo Yishaq al Islam mientras visitaba Oriente, acompañado de su amigo y corregilionario Yeuda ha-Leví. Este hecho, al parecer, le llenó de vergüenza y le obligó a peregrinar por las aljamas¹² europeas entre las que fue repartiendo las 180 obras¹³ en las que se estima su producción científica.

A modo de epílogo

Hablábamos en el artículo anterior de la importancia del valle del Ebro en el desarrollo de la ciencia en general y de las matemáticas en particular a lo largo del siglo XI. Hemos ampliado cronológicamente aquel periodo para abarcar una época que estableció las bases de una profunda transformación.

Suponemos que a estas alturas del relato no será necesario comentar que lo que el eurocentrismo militante llamó Edad Media —especialmente la Alta— como sinónimo de puente entre dos culturas brillantes, Grecia y el Renacimiento, y asimiló a Edad Oscura por la escasa calidad de su producción científica y filosófica, aquí no existió. Por el contrario, nos encontramos posiblemente ante la época más brillante de nuestra historia cultural tanto por su producción como por su influencia posterior.

Hemos pretendido con este artículo reivindicar tres figuras que han pasado casi inadvertidas para la historia y que, a nuestro juicio, son trascendentales porque establecen una línea de continuidad más allá de los hitos¹⁴ hasta definir un espacio común para ciencia, filosofía, ideología y matemáticas. Ese mismo espacio que establece la sociedad de cada época a través de sus intereses convertidos en aspiración colectiva. Y es que los hitos en historia de las matemáticas

no los genera el azar, son consecuencia de una actitud intelectual y de un ambiente propicio¹⁵. Y eso nos remite a la solución que aporta Crosby al problema con el que iniciamos el artículo: *mentalité*. A eso contribuyeron estos tres protagonistas (y otros muchos): a preparar el futuro.

Notas

- 1 Se sabe que estuvo en contacto con Atón, obispo de Vic, con Lupitus de Barcelona y con el obispo Mirón de Gerona. Todo lo demás, disfraces incluidos, parece ser fruto de la fantasía, aunque resulta verosímil que recorriera otros centros hispanos en busca de ciencia árabe.
- 2 Durante mucho tiempo visible en la catedral de Calahorra, en la exposición «Rioja Tierra Abierta», aunque allí se prefirió resaltar la calidad de sus dibujos. El segundo documento conocido, el códice *Aemilianensis*, de 992 es copia del anterior. Cabe sospechar que no fue la única.
- 3 «Las obras de Pedro Alfonso: problemas de autenticidad» en *Estudios sobre Pedro Alfonso de Huesca*, Huesca, 1996.
- 4 La de Toledo no dejó de ser una entre muchas. De hecho, a pesar de toda la fama que la ha rodeado, tan sólo estuvo formada por su mentor, Raimundo de Sauvetât, y otros dos traductores (hay dudas sobre la presencia de un tercero). Lo que sí es innegable es la importancia de la ciudad como lugar de ubicación de un gran número de traductores y el inmenso trabajo llevado a cabo por Juan Hispano y Domingo Gundisalvo.
- 5 No sólo ciencia, también filosofía y literatura, incluso el Corán.
- 6 No existen fechas seguras de su nacimiento que se sitúa entre 1085 y 1090, ni de su muerte, datada entre 1128 y 1138.
- 7 Al igual que sucediera en el artículo anterior, la objetividad histórica exigiría haber hablado también de otros autores, tan importantes como estos, también escasamente conocidos (otros menos). Abraham bar Hiyyá (Savasorda) (1065-1138), sería uno de ellos. Su *Tratado de las áreas y medidas* traducido al latín por Platón de Tivoli con el título de *Liber embadorum*, justifica por sí sólo su presencia en la historia de las Matemáticas. Fue referencia segura para la Europa altomedieval y fuente de inspiración del *Liber abaci* y de la *Practica geometriae* de Fibonacci. Creemos que no es este lugar, para aportar excesivos datos. Tampoco nos proponemos reescribir la Historia, tan sólo intercalar algunos renglones en ella. Unicamente pretendemos que éste, sea un rincón para las ideas. Para reforzar unas y poner en entredicho otras. Para sugerir caminos que, cada cual deberá recorrer si lo desea. También para la crítica y la discrepancia. Incluso para la disidencia cuando haga falta. Por supuesto, para la epistemología y la didáctica. Inevitablemente para la filosofía, porque no hay historia de la ciencia que se pueda construir sin ella, mucho menos al margen de ella. Salvo que se busque un sectarismo tan irreal y reduccionista como empobrecedor.
- 8 También fue el primero en detectar la inconsistencia del sistema de Tolomeo, antes que Alpetragio o Averroes, inventando un sistema de esferas excéntricas que no precisaba de epiciclos.
- 9 De hecho ejerció un gran influjo en amplios sectores de la población musulmana. Su figura sigue siendo venerada aún hoy en el mundo islámico como una de las más importantes del pensamiento sufi junto a al-Gazzali o Suhrawardi (1154-1191).
- 10 Algunos historiadores creen que él fue el autor de *Liber Ysagogarum Alchorismi in artem astronomicam* identificándolo con el «magister A.» al que alude la obra. Entre los que mantienen dudas al respecto, Dickey, por ejemplo, opina que es más probable que sea él su autor y no Adelardo de Bath, como sugieren otros.
- 11 Un ajuste de la reelaboración que hiciera Maslama ibn Ahmad al-Magriti del *Zig al-Sindhind* de al-Khwarizmi.
- 12 Con escaso éxito crematístico a tenor de lo que describe en una de sus poesías.
- 13 Algunos autores, entre ellos J. Lomba, le adjudican una cantidad ligeramente inferior.
- 14 En realidad, no son más que entes artificiales resultado de una racionalización a posteriori.
- 15 Sirvan como ejemplo las traducciones sicilianas. Su importancia en el posterior desarrollo del álgebra italiana en el Renacimiento es innegable. La coyuntura política y económica eran favorables. La social, en cuanto a asumir una ambición colectiva, también. Eso las distancia de las desarrolladas en la Península Ibérica. Exportadas al continente, su huella en el campo de las matemáticas hispanas fue muy escasa.

SUMA 35

noviembre 2000

***Sigma:* una antología «antológica»**

SIGMA. EL MUNDO DE LAS MATEMÁTICAS

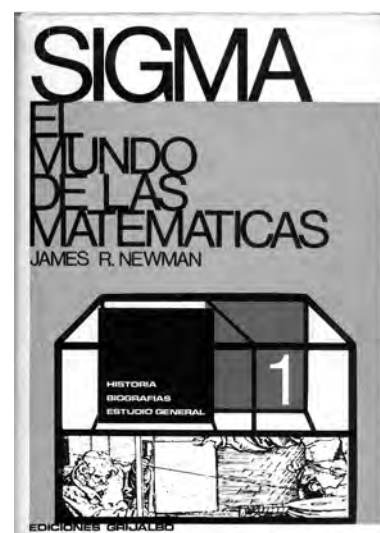
James R. Newman (Selección, notas y comentarios)

6 volúmenes

Ediciones Grijalbo

Barcelona, 1968

XX + 430 + 437 + 394 + 416 + 464 + 420 páginas



RECENSIONES

Cuando nos hicimos cargo de la dirección de SUMA Julio Sancho y el que esto escribe y pensamos en el diseño de sus diferentes secciones, veíamos claro que una de ellas debía consistir en recensiones de libros y material didáctico que fuesen apareciendo en el mercado editorial, lo cual no era nada original pues es una de las secciones habituales –obligatoria, más bien– en todas las revistas del tipo de la nuestra. Se nos ocurrió iniciar esta sección en cada número con una reseña «larga» de una obra que sin ser novedad, hubiese tenido, desde nuestro punto de vista, una cierta significación en la enseñanza de las matemáticas o en su divulgación o en la formación de los profesores. Así, han ido apareciendo en estas páginas trabajos sobre libros de Rey Pastor, Puig Adam, Polya, Freudenthal, Klein... Nosotros mismos nos comprometimos a hacer una de ellas; Julio cumplió su compromiso con el magnífico libro *¿Qué es la matemática?* de Courant y Robbins y yo, por razones personales, pensé siempre en *Sigma*.

Dos cosas bastante obvias, aunque a veces se olvidan: la primera, un profesor de matemáticas de secundaria debe «saber matemáticas»; y la segunda, este «saber matemáticas» no es suficiente para ser un buen profesional en la enseñanza de la materia, es preciso un conocimiento apreciable de diversas disciplinas englobadas en lo que se denomina ciencias de la educación (psicología, sociología educativa, teoría del currículo, etc.), además, por supuesto, de unas ciertas dotes personales que haga que el clima de clase funcione.

Centrémonos en el «saber matemáticas». ¿Qué y cuántas matemáticas debe conocer un profesor de secundaria?, ¿son suficientes los contenidos matemáticos que se adquieren a lo largo de una licenciatura en matemáticas? Rotundamente, sí. Sin embargo, hay una serie de aspectos de lo que podríamos llamar «cultura matemática» que normalmente no se adquieren en los estudios universitarios. Me estoy refiriendo a cuestiones de historia de la matemática, de epistemología, de relaciones de la matemática con otras ciencias o con el arte o la música; y también a una visión de conjunto sobre lo qué es la matemática y sus diversas partes. De alguna forma se trataría de un humanismo de las matemáticas dentro de las mismas matemáticas y en sus relaciones con otros aspectos de la cultura y de la vida.

En los últimos años el mercado editorial español ha sacado a la luz muchos títulos que cumplen perfectamente esta visión de las matemáticas, pero hace treinta años la escasez de libros en español de estos temas era considerable; sólo algunos de la antigua Labor –recuérdense los de Colerus–, otros de la entrañable colección Austral –sobre todo de historia de la matemática y cuatro sensacionales de Poincaré–, alguno importado de México y Argentina y... poco más.

Por eso, cuando Grijalbo comenzó a publicar en 1968 los tomos de *El Mundo de las Matemáticas*, fue muy bien recibido por todos aquellos que entonces intuíamos lo dicho más arriba: lo estudiado en la carrera resultaba insuficiente, era preciso complementarlo con lecturas matemáticas de un tipo distinto al de los manuales universitarios al uso. Personalmente recuerdo que estaba estudiando cuarto y tuve que dejar el «Ducados» y pasarme al «Celtas», pues las trescientas pesetas que había que desembolsar cada dos o tres meses (era la frecuencia con la que aparecía cada volumen) era ciertamente gravoso; quizás por ello *Sigma* es, para mí, una de las obras más queridas de mi modesta biblioteca.

Sigma. El Mundo de las Matemáticas es una recopilación de más de un centenar de ensayos (133 exactamente) recopilados por James R. Newman cuya edición original data de 1956 con el título original *The World of Mathematics*, aun cuando inicialmente, y según el propio Newman, estaba previsto para 1942.

Newman no sólo hace la recopilación de estos textos, sino que los introduce a través de comentarios, que por sí solos poseen un gran valor.

Pero, antes de seguir con *Sigma*, un pequeño comentario sobre otros dos libros significativos.



*Newman
no sólo hace
la recopilación
de estos textos,
sino que
los introduce
a través
de comentarios,
que por sí solos
poseen
un gran valor.*

Dos libros del estilo de *Sigma*

Existen otras dos obras colectivas que tienen la misma filosofía que *Sigma*. Una algo posterior, la edición original es de 1968, y la primera edición española de 1971. Me estoy refiriendo a *Matemáticas en el Mundo Moderno*, cuyas introducciones corren a cargo de Morris Kline y la versión española es de Miguel de Guzmán. En esta obra se presentan medio centenar de artículos, agrupados en cinco grandes temas: La naturaleza de las matemáticas, Biografía, Algunos capítulos de la matemática, Los fundamentos de la matemática y El alcance de la matemática. Entre los autores figuran Halmos, Poincaré, Cohen, Newman, Kline, Euler, Nagel, Dirac... Algunos de los artículos coinciden con los de *Sigma*.

La otra es anterior a *Sigma*, *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*, debida a François Le Lionnais y colaboradores, y está dentro de la órbita de la matemática francesa. La primera edición es de 1948 (*Les grands courants de la pensée mathématique*) y la traducción castellana es de 1962, publicada por la Editorial Universitaria de Buenos Aires, en la que el español Luis Santaló tuvo a su cargo la revisión técnica.

La gestación de esta obra –durante la Segunda Guerra Mundial– tuvo un buen número de vicisitudes que describe Jean Ballard en el prefacio:

En 1942, François Le Lionnais se encontraba en Marsella. Seducido por la amplitud y sobre todo por la claridad de su saber, le sugerí recabar las explicaciones de los mejores matemáticos de este tiempo y reunirlos en un libro que presentara un cuadro de las investigaciones y del espíritu de las matemáticas actuales.

Estuvimos de acuerdo en tratar de mostrar a través de este examen [...] no el panorama inmóvil de los dominios perteneciente a esta ciencia, sino, sobre todo, las direcciones en las que se internan sus diferentes disciplinas [...].

Ninguno de nosotros se engañaba en 1942 sobre las dificultades de tal empresa, pero estábamos lejos de imaginar que se necesitarían cinco largos años para llevarla a término. [...] Recuérdese la época

en que los franceses de las dos zonas sólo podían escribirse tarjetas postales [...]. No había lugar para la fantasía y menos aún para las relaciones intelectuales [...].

Ballard, después de deplorar la muerte o desaparición de algunos de los colaboradores previstos, narra el episodio de la prisión de Le Lionnais que si no fuera por lo trágico de la situación, parecería sacado de un sainete. Estas son sus palabras:

[...] Le Lionnais, que pertenecía a un grupo de la resistencia, fue detenido a fines de abril de 1944 y enviado al campo de concentración de Dora, donde, durante los interminables meses que transcurrieron hasta el avance aliado, fue adscrito a las usinas subterráneas de V2. Muy pocos volvieron de este infierno de lúgubre fama; nuestro amigo pudo escapar de esta triste suerte, gracias a su salud y a su fuerza moral. Entre las esperanzas que lo sostenían, el proyecto de *Las Grandes Corrientes del Pensamiento Matemático* ocupaba de tal manera su espíritu que un día estuvo a punto de costarle la vida. Había rehecho el sumario de memoria y ciertos nombres escritos en una hoja de papel cayeron desdichadamente bajo las miradas de los guardianes. Fue llamado a explicarse ante un policía, quien, ignorante como puede serlo un carcelero, media todo por su propio pensamiento. El hombre no quería ver en la lista de nombres: Borel, Montel, de Broglie, Valéry, Brunschvicg, etc., sino a presidiarios dispuestos a evadirse. Era imposible hacerle abandonar esa idea. Exigía confesiones totales: ¿a qué hora y en qué lugar se reunirían los cómplices? Acabó por dejarse convencer, pero eso no le impidió decretar un castigo por haber escrito con un lápiz nazi sobre un papel del Tercer Reich. Fue así que nuestro amigo Le Lionnais, por amor a las matemáticas, recibió los golpes de baqueta reglamentarios que hubieran podido matarlo.

Una vez terminada la guerra, vuelto a Francia y después de un periodo de recuperación, Le Lionnais pudo culminar la obra volviendo a recuperar todas las colaboraciones y escribir las introducciones de cada artículo que unidas a la presentación inicial constituyen, como él mismo señala, como los fragmentos de un artículo único. La obra está estructurada en tres partes. La primera, titulada *El templo matemático*, tiene como grandes epígrafes: Estructuras, El número, El espacio, La función, El grupo y La probabilidad. *La epopeya matemática* conforma la segunda parte, dedicada a aspectos históri-



*El prólogo
de la edición
norteamericana
se debe a
su recopilador
James R. Newman.
[...]
...indica
sus preferencias
personales que,
por supuesto,
tienen
un reflejo
en la selección...*

cos y está subdividida en Pasado, Presente y Futuro. Finalmente, la tercera la titula *Las influencias* y sus epígrafes indican claramente su contenido: Las matemáticas y el espíritu humano; Las matemáticas y la filosofía; La verdad, la realidad, las matemáticas y las ciencias de la naturaleza; Arte y estética. Las matemáticas y la belleza; Las matemáticas y las técnicas; y Las matemáticas y la civilización. En estos temas escriben Borel, Bourbaki, Fréchet, Dubreil, Montel, Lentin, Servien, Cartan, Dubreil-Jacotin, Godeaux, Dieudonné, Weil y un largo etcétera que constituye la nómina de los mejores matemáticos franceses de los inicios de la segunda mitad del siglo XX.

Pero, volvamos a Sigma.

Los prólogos

La versión de *Sigma* que estamos manejando dispone de tres prólogos de las correspondientes ediciones norteamericana, sueca y española. En ellos se muestra claramente cuál es el propósito de la obra.

El prólogo de la edición norteamericana se debe a su recopilador James R. Newman. Además de los agradecimientos de rigor, describe las dificultades que tuvo para llevar a cabo esta empresa y cómo el trabajo que esperaba acabar en dos años le llevó casi veinte. Según él, ha seleccionado:

...lo que mejor muestre el campo de las matemáticas, la riqueza de sus ideas y la multiplicidad de sus aspectos. Presento las matemáticas como una herramienta, un lenguaje y un mapa; como una obra de arte y un fin en sí mismas; como un resultado de la pasión por la perfección. Aparecen como objeto de ironías, tema para el humor y fuente de controversias; como un estímulo para la imaginación, un fermento para los narradores; como algo que ha llevado a los hombres al frenesí y que les proporciona deleite.

También indica sus preferencias personales que, por supuesto, tienen un reflejo en la selección:

Una antología es una obra de prejuicios. Esto no es menos cierto en una obra de matemáticas que cuando se trata de poesía o ficción. Los cuadrados mágicos, por ejemplo, me aburren; en cambio, nunca me cansaría de la teoría de probabilidades. Prefiero la geometría al álgebra, la física a la química, la lógica a la economía, las matemáticas del infinito a la teoría de números. Hay tópicos que rehuyo, algunos que trato ligeramente y otros que acojo con la mayor benevolencia. [...]

Tord Hall presenta la edición sueca, que es la que se ha seguido en cuanto a organización de los textos en la edición española. Hall habla en su presentación de la dificultad de la obra:

...Newman no intenta saltar las dificultades. Por el contrario, utiliza todas las dimensiones del registro de las matemáticas. Los artículos elegidos tienen, pues, dificultades en grados diversos: desde la parte literaria, donde el elemento matemático apenas se percibe, sube lentamente la curva, pasando por los resúmenes históricos y biográficos, o las orientaciones de tipo más general, para culminar en los artículos sobre, por ejemplo, la teoría de la relatividad, o sobre lógica matemática. En una serie como ésta se encuentran muchos ensayos que no requieren ninguna preparación especial. Éstos pueden servir como punto de partida para seguir adelante con estudios que nos enseñan a

comprender el cambiante ser de las matemáticas: un medio y una meta, un instrumento para la técnica y un bello arte, independiente de la realidad.

La presentación de la edición española corre a cargo de Manuel Sacristán, que muy bien podría haber pasado a formar parte del cuerpo de la obra, pues no se limita a describir lo que el lector se va a encontrar en las páginas siguientes, sino que con unas breves pinceladas señala los problemas que puede acarrear una interpretación equivocada de la matematización de las ciencias de la sociedad.

Sacristán termina su prólogo con estas palabras:

...La historicidad de la matemática misma se revela en esta antología al lector atento por la vía más viva, fecunda y gustosa: por la lectura de los textos clásicos que han dado origen a los principales giros del pensamiento matemático.

James R. Newman tenía títulos y autoridad para llevar a cabo una empresa de esta calidad y de estas dimensiones (mucho mayores aún en perspectivas que en páginas). La exposición a la vez sería y educativa o elemental de temas matemáticos profundos no es un arte en el que tuviera que ponerse a prueba por vez primera. Ya hace años publicó, en colaboración con el lógico E. Nagel, una exposición didáctica del teorema de Gödel que es una pieza clásica de divulgación. Esta antología no se queda a la zaga de aquel texto.

Para empezar... historia

El volumen inicial está dedicado a la historia de las matemáticas y a un último ensayo sobre *La naturaleza de la matemática*.

Los estudios históricos comienzan con una historia biográfica, *Los grandes matemáticos*, de Turnbull que abarca desde los griegos hasta el siglo XIX y pretende ser el marco de referencia para las otras selecciones. Las escasas cien páginas de este libro pueden constituir un buen punto de partida para quienes deseen iniciarse en historia de las matemáticas, antes de pasar a obras de mayor envergadura (el mismo papel lo pueden hacer las historias de Babiní, Rey Pastor, Colerus o Hoffmann).

El resto de artículos de esta sección muestran algunos momentos y figuras especialmente relevantes de la matemática, en algunos casos por medio de biografías como en los casos de Kepler, Newton (se le dedican dos trabajos, como no podía ser menos), Gauss, Cayley, Sylvester y el sorprendente Ramanujan; en otros, se reproducen textos originales como las primeras páginas de *La geometría* de Descartes o un extracto del curioso *El Analista*, donde el obispo Berkeley ataca sin piedad a los infinitesimos «evanescentes» de Newton. Especial relevancia tienen las páginas autobiográficas de Bertrand Russell, que con el título *Mi desarrollo intelectual*, son —en palabras del propio Newman— «el comentario de uno de los más grandes escritores actuales sobre uno de los más importantes filósofos vivientes». El coautor, con Russell, Whitehead, de los *Principia Mathematica* cierra esta sección con su ensayo sobre *La matemática como elemento en la historia del pensamiento*.

Philip E. B. Jourdain es el autor único de la segunda sección de

*Los estudios
históricos
comienzan
con una historia
biográfica,
Los grandes
matemáticos,
de Turnbull
que abarca
desde los griegos
hasta el siglo XIX
y pretende ser
el marco
de referencia
para las otras
selecciones.*

este volumen con su ensayo *La naturaleza de la matemática*. Él mismo señala en la introducción su objetivo:

La finalidad de este pequeño volumen no es —como la de un libro de texto— el dar una colección de métodos y ejemplos matemáticos, sino, ante todo, la de decir lo que no dan los libros de texto: una visión de cómo y por qué se han originado esos métodos.

Y prosigue:

En este libro no voy a prestar mucha atención a los detalles de la aritmética elemental, la geometría y el álgebra que aparecen en la mayoría de los libros de texto, sino que atenderé al estudio de aquellas nociones —como la de número negativo— que se usan sin discusión suficiente en dichos libros.

El mundo físico

El carácter instrumental de las matemáticas en las ciencias experimentales se pone claramente de manifiesto en el segundo volumen de *Sigma*, titulado *Las matemáticas y el mundo físico*.

A Galileo (con una selección de sus *Diálogos referentes a dos nuevas ciencias*) le sigue Daniel Bernoulli con un breve extracto sobre teoría cinética de los gases y de ahí se pasa a la astronomía, con una historia sobre la determinación de la longitud terrestre y otra sobre el descubrimiento del planeta Neptuno en 1846.

La Química está representada por Mendeléef y su ley periódica de los elementos; y la Biología por las matemáticas de la herencia de Mendel y la selección natural y teoría evolutiva.

Capítulos de la física, como la ley de gravitación, teoría cuántica, el principio de incertidumbre de Heisenberg, la mecánica ondulatoria o la teoría de la relatividad completan este volumen.

Lógicamente, de todos estos temas aparecen extractos o aspectos concretos, pues está claro que la teoría de la relatividad, por ejemplo, no se puede despachar en unas cuantas páginas.

Azar, estadística y ciencias sociales

La sección dedicada a la probabilidad comprende seis trabajos de Laplace, Peirce,

Keynes, Poincaré y Nagel, que recogen las tres interpretaciones importantes de la probabilidad, según Newman:

La opinión clásica, formulada por Laplace y De Morgan, sostiene que la noción se refiere a un estado de ánimo. [...] Otro punto de vista define la probabilidad como una relación lógica, esencialmente imposible de analizar, pero intuitivamente comprensible. [...] El tercer criterio de la probabilidad radica en el concepto estadístico de la frecuencia relativa.

Personalmente me cautiva el estilo claro y a la vez riguroso de las divulgaciones de Poincaré. Su artículo *El azar* (publicado con anterioridad en castellano en su librito *Ciencia y Método* de la Colección Austral) es una muestra excelente de ello.

Sigma ofrece dos artículos sobre estadísticas de vida debidos al mercader John Graunt (que se considera de alguna forma el iniciador de la estadística) y al astrónomo Edmund Halley, que constituyen el punto de partida de la creación de las compañías de seguros. Sobre este tema, y también sobre juegos, trata el entretenido *El vicio del juego y la virtud de asegurarse* del no matemático Bernard Shaw, que junto con otros ensayos, en general con poco aparato técnico y de carácter muy divulgativo, hacen que los textos de esta sección sean especialmente aprovechables para la lectura y posterior comentario en una clase de secundaria.

La última sección de este tercer volumen está dedicada a las relaciones de las matemáticas con algunas ciencias sociales: psicología, demografía, economía, sociología... Si *Sigma* se diseña hoy, seguramente está sección aparecería notablemente enriquecida con otras aportaciones.

El meollo de la cuestión

Aritmética y números, geometría, grupos y las matemáticas del infinito son las secciones del cuarto volumen. De acuerdo con la cita que hemos hecho del prólogo de Newman, aquí (y en el volumen siguiente) figurarían sus preferencias matemáticas.

La sección de números comienza con Arquímedes y su *Arenario*. Paulos en su librito *El hombre anumérico* señala que los tópicos en los que se muestra el anumerismo en nuestra sociedad son la probabilidad y los grandes números. Éstos, en general, han

sido poco tratados en las matemáticas escolares y hasta la última reforma no han sido introducidos en los currículos, aunque tengo la sensación de que no han llegado al aula con la importancia que creo que tienen. El *Arenario* puede servir, con las naturales adaptaciones, como un ejemplo entre muchos para ese tratamiento. Arquímedes inicia este trabajo planteando el problema:

Algunos creen, rey Gelón, que el número de los granos de arena es una cantidad infinita: hablo no solamente de la que está alrededor de Siracusa y de toda Sicilia, sino de toda la tierra tanto habitada como deshabitada. Hay algunos que no creen que sea infinito, sino que no hay ningún número nombrado que supere esta cantidad. [...] Yo sin embargo trataré de probarte con demostraciones geométricas que puedas seguir, que algunos de los números nombrados por mí y explicados en los escritos dirigidos a Zeuxipo no solamente superan al número de los granos de arena de una magnitud igual a la de la Tierra llena tal como hemos dicho, sino de una magnitud igual a la del cosmos.

En esta sección hay otros artículos que pueden ser explotados didácticamente con alumnos de secundaria, son los dos referidos a la forma de contar y sistemas de numeración de distintas civilizaciones (aunque el mismo papel lo puede hacer uno de los libros de Ifrah, sobre las cifras) y los dedicados a calculadores prodigio y la capacidad de los pájaros para «contar».

De otro carácter muy distinto son los dos breves, pero magníficos, ensayos de Dedekind y Bertrand Russell sobre los números irracionales y el concepto de número, respectivamente.

La geometría es el objeto de la sección Matemáticas del espacio y del movimiento. Clifford, en los tres primeros artículos de esta sección, y Helmholtz, al tratar sobre el origen y la significación de los axiomas geométricos, explican de forma muy clara el nacimiento y el sentido de las geometrías no euclideas, lo que proporciona un magnífico ejemplo de la esencia de la matemática como modelo axiomático-deductivo; ejemplo que, convenientemente simplificado y sin tecnicismo alguno, puede (y me atrevería a decir que debe) ser introducido en clase de bachillerato. Resulta sorprendente que una apreciable proporción de recién titulados universitarios no hayan oído hablar de las geometrías no euclideas.

La memoria de Euler sobre el famoso problema de los siete puentes de Königsberg y un capítulo del excelente libro de Courants y Robbins, *¿Qué es la Matemática?*, y que ya ha sido comentado en esta misma sección de SUMA, conforman la parte dedicada a topología.

Las matemáticas en la obra de Durero, un estudio de Morris Kline sobre geometría proyectiva y un par de conferencias de Hermann Weyl dedicadas a la simetría completan esta sección geométrica que, en mi opinión, es una de las más logradas de toda la obra que estamos comentando.

Como modelo de abstracción matemática, Newman se inclina por la teoría de grupos: «La teoría de grupos —escribe— es el máximo ejemplo del arte de la abstracción matemática.

*...explican
de forma
muy clara
el nacimiento
y el sentido
de las geometrías
no euclideas, lo
que proporciona
un magnífico
ejemplo
de la esencia
de la matemática
como modelo
axiomático-
deductivo;
ejemplo que,
convenientemente
simplificado
y sin tecnicismo
alguno,
puede ser
introducido
en clase
de bachillerato.*

Volumen primero

1. Historia y biografías

- Los grandes matemáticos (Herbert Westren Turnbull).
- El papiro Rhind (James R. Newman).
- Arquímedes (Plutarco, Vitruvio y Tzetzes).
- Matemáticos griegos (Ivor Thomas).
- Declaración sobre la utilidad de la aritmética (Robert Recorde).
- Johann Kepler (Sir Oliver Lodge).
- La Geometría (René Descartes).
- Isaac Newton (E. N. da Andrade).
- Newton, el hombre (John Maynard Keynes).
- El analista (El Obispo Berkeley).
- Gauss, el príncipe de los matemáticos (Eric Temple Bell).
- Gemelos invariables, Cayley y Sylvester (E. Temple Bell).
- Srinivasa Ramanujan (James R. Newman).
- Mi desarrollo intelectual (Bertrand Russell).
- La matemática como elemento en la historia del pensamiento (Alfred North Whitehead).

2. Estudio general

- La naturaleza de la matemática (Philip E. B. Jourdain).

Volumen segundo

1. Las matemáticas y el mundo físico

- La matemática del movimiento (Galileo Galilei).
- Teoría cinética de los gases (Daniel Bernoulli).
- La longitud (Lloyd A. Brown).
- John Couch Adams y el descubrimiento de Neptuno (Sir Harold Spencer Jones).
- Números atómicos (H. G. J. Moseley).
- Los rayos Röntgen (William Bragg).
- Los cristales y el futuro de la física (Philippe Le Corbeiller).
- ¿Qué es el cálculo de variaciones y cuáles son sus aplicaciones? (Karl Menger).
- Las burbujas de jabón (C. Vernon Boys).
- El problema de Plateau (Richard Courant y Herbert Robbins).
- Ley periódica de los elementos químicos (Dmitri Mendeléief).
- Mendeléief (Bernard Jaffe).
- Matemáticas de la herencia (Gregor Mendel).
- El tamaño adecuado (J. B. S. Haldane).
- Matemática de la selección natural (J. B. S. Haldane).
- La herencia y la teoría cuántica (Erwin Schrödinger).
- Sobre la magnitud (D'Arcy Wentworth Thompson).
- El principio de incertidumbre (Werner Heisenberg).
- Causalidad y mecánica ondulatoria (E. Schrödinger).
- Las constantes de la Naturaleza (Sir Arthur Stanley Eddington).
- La nueva ley de la gravitación y la ley antigua (Sir Arthur Stanley Eddington).
- La teoría de la Relatividad (Clement V. Durell).



Volumen tercero

1. Las leyes de la probabilidad

- Sobre la probabilidad (Pierre Simon de Laplace).
- Las rojas y las negras (Charles Sanders Peirce).
- La probabilidad de la inducción (Charles Sanders Peirce).
- La aplicación de la probabilidad al comportamiento (John Maynard Keynes).
- El azar (Henry Poincaré).
- Significado de la probabilidad (Ernest Nagel).

2. Las estadísticas y la programación de los experimentos

- Fundamentos de las estadísticas de vida (John Graunt).
- Las primeras tablas de seguros de vida (Edmund Halley).
- La ley de los grandes números (Jacob Bernoulli).
- Muestreo y desviación tipo (L. C. Tippett).
- Promedio y dispersión (M. J. Moroney).
- Las matemáticas de una catadora de té (Sir Ronald A. Fisher).
- El vicio del juego y la virtud de asegurarse (George Bernard Shaw).

3. Matemáticas y Ciencias Sociales

- Gustav Theodor Fechner (Edwin G. Boring).
- Clasificación de los hombres según sus dotes naturales (Sir Francis Galton).
- Las matemáticas de los alimentos y de la población (Thomas Robert Malthus).
- Matemáticas del valor y la demanda (Augustin Cournot).
- Teoría de la economía política (William Stanley Jevons).
- Las matemáticas de la guerra y la política internacional (Lewis Fry Richardson).
- Estadística de los conflictos bélicos (Lewis Fry Richardson).
- Teoría del comportamiento económico (Leonid Hurwicz).
- Teoría de los juegos (S. Vajda).
- La sociología aprende el lenguaje de las matemáticas (Abraham Kaplan).

Volumen cuarto

1. Aritmética, números y arte de contar

- Arenario (Arquímedes).
- Contar (Levi Leonard Conant).
- De los números a los numerales y de los numerales al cálculo (David Eugene Smith y Jekuthiel Ginsburg).
- Calculadores prodigio (W. W. Rouse Ball).
- La capacidad de los pájaros para «contar» (O. Koehler).
- La reina de las matemáticas (Eric Temple Bell).
- Sobre el teorema del binomio para exponentes fraccionarios y negativos (Isaac Newton).
- Números irracionales (Richard Dedekind).
- Definición de número (Bertrand Russell).

2. Matemáticas del espacio y del movimiento

- La exactitud de las leyes matemáticas (William Kingdon Clifford).
- Postulados de la ciencia del espacio (W. Kingdon Clifford).
- Teoría de la materia en el espacio (W. Kingdon Clifford).
- Los siete puentes de Königsberg (Leonhard Euler).
- Topología (Richard Courant y Herbert Robbins).
- Durero como matemático (Erwin Panofsky).
- Geometría proyectiva (Morris Kline).
- Sobre el origen y la significación de los axiomas geométricos (Hermann von Helmholtz).
- Simetría (Hermann Weyl).

3. El arte supremo de la abstracción: teoría de grupos

- El concepto de grupo (Cassius J. Keyser).
- La teoría de grupos (Sir Arthur Stanley Eddington).

4. Las matemáticas del infinito

- Los metafísicos y las matemáticas (Bertrand Russell).
- El infinito (Hans Hahn).

Volumen quinto

1. La verdad matemática y la estructura de las matemáticas

- Sobre la naturaleza de la verdad matemática (Carl G. Hempel).
- La geometría y la ciencia empírica (Carl G. Hempel).
- El método axiomático (Raymond L. Wilder).
- La demostración de Gödel (Ernest Nagel y James R. Newman).
- Una ciencia matemática (Oswald Veblen y J. Wesley Young).
- La matemática y el mundo (Douglas Gasking).
- Los postulados matemáticos y el entendimiento humano (Richard von Mises).

2. Forma del pensamiento matemático

- El estudio que no sabe nada de la observación (James Joseph Sylvester).
- La esencia de la matemática (Charles Sanders Peirce).
- La economía de la ciencia (Ernst Mach).
- Medición (Norman Robert Campbell).
- Las leyes numéricas y el uso de las matemáticas en la ciencia (Norman Robert Campbell).
- El modo matemático de pensar (Hermann Weyl).

3. Matemática y lógica

- Análisis matemático de la lógica (George Boole).
- Historia de la lógica simbólica (Clarence Irving Lewis y Cooper Harold Langford).
- La notación simbólica, los ojos de Haddock y la ordenanza sobre los perros (Ernest Nagel).
- Lógica simbólica (Alfred Tarski).

4. La sinrazón de las matemáticas

- Paradoja perdida y paradoja recuperada (Edward Kasner y James R. Newman).
- Crisis de la intuición (Hans Hahn).

5. Cómo solucionarlo

- Cómo resolverlo (G. Polya).

6. El vocabulario de las matemáticas

- Nuevos nombres para lo viejo (Edward Kasner y James R. Newman).

7. Las matemáticas como arte

- Las matemáticas como arte (John W. Navin Sullivan).

8. El matemático

- Apología del matemático (G. H. Hardy).
- Invención matemática (Henri Poincaré).
- El matemático (John von Neumann).

Volumen sexto

1. Máquinas matemáticas. ¿Puede pensar una máquina?

- Teoría general y lógica de los dispositivos automáticos (John von Neumann).
- ¿Puede pensar una máquina? (A. M. Turing).
- Una máquina de jugar al ajedrez (Claude E. Shannon).

2. Las matemáticas y el arte de la guerra

- Las matemáticas y el arte de la guerra (Frederick William Lanchester).
- Cómo localizar un submarino (Phillip M. Morse y George E. Kimball).

3. Teoría matemática del arte

- Matemáticas de la estética (George David Birkhoff).

4. Las matemáticas del bien

- Una aproximación matemática de la ética (George David Birkhoff).

5. Las matemáticas en la literatura

- Budín cicloide (Jonathan Swift).
- El joven Arquímedes (Aldous Huxley).
- Geometría en el sur del Pacífico (Sylvia Townsend Warner).
- Lógica inflexible (Russell Maloney).
- La ley (Robert M. Coates).

6. Matemáticas y música

- Matemáticas de la música (Sir James Jeans).

7. Las matemáticas como clave cultural

- El significado de los números (Oswald Spengler).
- El lugar de la realidad matemática: una referencia antropológica (Leslie A. White).

8. Entretenimientos, rompecabezas, fantasías

- Colección de paradojas (Augustus de Morgan).
- Flatland (Edwin A. Abbott).
- Lo que la tortuga dijo a Aquiles y otros acertijos (Lewis Carroll).
- La palanca de Mahoma (R. Courant y H. Robbins).
- Pasatiempos del pasado y del presente (Edward Kasner y James R. Newman).
- Reconstrucciones aritméticas (W. W. Rouse Ball).
- Los siete setes (W. E. H. Berwick).
- Matemáticas sencillas y tenis sobre hierba (T. J. I'A. Bromwich).
- Matemáticas para jugadores de golf (Stephen Leacock).
- El sentido común y el universo (Stephen Leacock).



Solamente se interesa por la sutil filigrana de las relaciones fundamentales; es el instrumento más poderoso inventado hasta ahora para aclarar las estructuras», y selecciona dos ensayos, uno de Keyser a pesar de que dice que «su estilo es algo plúmbeo y pasado de moda» y otro divulgativo de Eddington.

El volumen termina dedicado al infinito; el polivalente Bertrand Russell escribe sobre *Los metafísicos y las matemáticas*, y el austriaco Hans Hahn describe el trabajo del creador de la moderna teoría matemática del infinito, Georg Cantor.

Verdad, lógica...

Hempel, Wilder, Nagel, Peirce, Weyl, Boole, Tarski, Polya, Hardy, Poincaré y Newman como jugador-entrenador, junto con los reservas... ¡vaya alineación!

Esta selección, individualmente o en parejas, trata de responder a cuestiones como: ¿qué es la matemática?, ¿cuáles son sus fundamentos?, ¿qué estructura tiene?, ¿qué significa el teorema de Gödel?, ¿cuál es la esencia de la matemática?, ¿hay un modo matemático de pensar?, ¿qué forma presenta?, ¿qué relaciones existen entre matemáticas y lógica?, ¿es importante lo absurdo en matemáticas?, ¿qué pasa con las paradojas?, ¿se puede aprender a resolver problemas?, ¿son bellas las matemáticas?, ¿se puede hablar del arte de las matemáticas?, ¿qué es ser matemático?, ¿cómo se hacen las matemáticas?, ¿qué sucede en el cerebro de un matemático?...

No diré nada más de este volumen, únicamente la recomendación de leerlo.

Un poco de todo

Una obra preparada en 1956, hace más de cuarenta años, tiene que notar el paso del tiempo y aunque bastantes de las secciones se pueden leer hoy perfectamente, hay alguna, como la que inicia el volumen sexto, que es evidente que hoy Newman las diseñaría de forma totalmente diferente. Son los artículos referidos a calculadoras automáticas, aunque existe uno de Turing cuya lectura resulta interesante.

La mayor parte de este volumen está dedicado a relaciones entre matemáticas y algunas ramas de las humanidades, así como a lo que se ha dado en llamar matemática recreativa.

En sendos artículos Birkhoff pretende trazar programas racionales para codificar los ámbitos estético y... ético (¡casi nada!):

El programa implica la introducción de ideas cuantitativas elementales basadas en una simple fórmula de «cuantía ética», con el fin de clasificar y codificar el vasto ámbito de la ética. Cabe esperar que tal programa pueda desempeñar la misma clase de servicio útil para la ética que el desempeñado por la lógica para las matemáticas y por la gramática para el lenguaje.

Más interesantes, al menos más entretenidos, son los cinco relatos de la sección Las matemáticas en la literatura: un extracto del Viaje a Laputa, de los *Viajes de Gulliver*, de Jonathan Swift, en el que se ridiculiza a las matemáticas y a quienes las cultivan;

*Hempel,
Wilder,
Nagel,
Peirce,
Weyl,
Boole,
Tarski,
Polya,
Hardy,
Poincaré
y Newman
como
jugador-
entrenador,
junto con
los reservas...
¡vaya alineación!*

una novela corta de Huxley; *Geometría en el Sur del Pacífico*; y un par de relatos fantásticos con la estadística como eje inspirador de las historias. Hoy, Newman hubiese dispuesto de relatos con más fuerza para añadir a esta selección; un solo ejemplo, Borges.

Las matemáticas como clave cultural es la sección que promete más de lo que da: un ensayo sobre el significado de los números y otro que consiste en una referencia antropológica sobre si las verdades matemáticas residen en el mundo externo o son invenciones del hombre.

La última sección de este sexto volumen —en mi opinión el más flojo de los seis— está conformado por una decena de trabajos de matemática recreativa: paradojas, pasatiempos, juegos, reconstrucciones aritméticas, cuadrados mágicos, problemas curiosos, etc. Está bien, pero se echa en falta un nombre que ya publicaba en aquella época: Martin Gardner.

Para finalizar...

...tengo que seguir escribiendo algo más, pues no quedaría bien acabar con la última frase del apartado anterior y me gustaría, además, acabar la página, por aquello de la maquetación. Y voy a hacerlo con una justificación y una recomendación.

Ya sé que la justificación es un recurso literario muy cómodo, pero aún así lo haré. Desde el momento en que decidí escribir estas pocas páginas fui consciente de que no me era posible hacer un comentario, aunque sólo fuese medio profundo, por falta de conocimientos, capacidad, tiempo, extensión... ¡Haría falta ser otro Newman! Sin embargo, es una obra tan querida por mí, me ayudó tanto en mi formación matemática y en mis primeros años de ejercicio profesional que no he querido dejar pasar la ocasión de hacer en SUMA este pequeño homenaje a SIGMA (¡qué casualidad: suma y sigma!). Entiéndase pues así, más como un homenaje que como una recensión.

¡Ah!, me falta la recomendación y de esta forma termino. Por favor, si no lo han hecho ya, léanlo o, al menos, hojeénlo.

Emilio Palacián

HACIA UNA FILOSOFÍA DE LA EDUCACIÓN

MATEMÁTICA CRÍTICA

Título original:

Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education (1994)

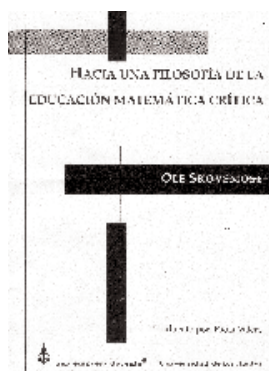
Ole Skovsmose

Edit. Una empresa docente
Universidad de los Andes,
Colombia, 1999

<http://ued.uniandes.edu.co>

ISBN: 958-9216-24-2

253 páginas



Es importante hacer crítica a la educación si se quiere que ésta no degenera en una manera de socializar efectivamente a los estudiantes en una sociedad tecnológica y, al mismo tiempo, aniquilar la posibilidad de que desarrollen una actitud crítica hacia, justamente, esa misma sociedad (Skovsmose, 1999: 67)

Hemos confundido el término modernidad, hablando de él como si se tratara de un momento indudable de conquista. En cierto modo lo es, hemos conquistado el progreso y sus ventajas. Pero, a su vez, no deja de ser una conquista fragmentada y excluyente: mientras unos viven el progreso, los otros apenas crean las condiciones para que aquellos puedan progresar. Y, sin embargo, decimos que todos están implicados de manera activa en su construcción, no importa si desde los márgenes o desde la tribuna.

En estas circunstancias, tal vez sea más adecuada la metáfora de la sociedad cerrada. Parece que existe una compleja red de factores que están al servicio de este desigual orden de cosas. Teóricos y prácticos de diversas áreas de conocimiento han iniciado la búsqueda de indicios de complicidad en sus respectivas disciplinas. Aquí es donde cabe localizar las teorías en pedagogía crítica aplicadas a la educación matemática. Detrás de la supuesta neutralidad con que se visten los manuales matemáticos, descubren hasta qué punto todo conocimiento científico está a las órdenes de un determinado poder social y representa una ideología particular. Bajo esta perspectiva, asumen la experiencia educadora como un proceso social y cultural repleto de reconocimientos, resistencias y críticas. De ahí que sea preciso que el educador mate-

*...el objetivo
explícito
de Skovsmose es
proveer
fundamentos
para interpretar
y aclarar
las prácticas
educativas
siempre teniendo
en cuenta
que éstas son
el propósito
último de
su pensamiento.*

mático adopte una actitud permanente y radical de compromiso con la realidad de los márgenes.

La educación matemática, y toda educación en general, es progresista o reaccionaria según si ignora o asume las implicaciones de su huella social. *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*, editado por Kluwer en el año 1994, es una apuesta progresista sobre cómo usar socialmente las matemáticas y su práctica educativa. Ha bastado poco tiempo para que se convirtiera en un clásico indiscutible de la literatura en educación matemática. Por ello, y a pesar del riesgo que siempre supone la traducción de libros con un público minoritario, la editorial colombiana 'Una empresa docente' junto con el riguroso trabajo realizado por Paola Valero han hecho posible la versión en castellano de este libro.

Sin duda, cada vez suenan con más fuerza las voces que abogan por una educación matemática crítica que asuma un papel activo. Más allá del aprendizaje matemático individual de cada persona, se hace necesario formular reflexiones sobre las consecuencias colectivas de este aprendizaje en la sociedad actual. El trabajo del danés Ole Skovsmose, con un amplio reconocimiento en la comunidad internacional, pretende desenmascarar la dimensión política del conocimiento matemático a través de una cuidadosa disección de los mecanismos de poder que están en la base de toda estructura humana. En este sentido, su obra aporta el desarrollo de conceptos centrales para una educación matemática crítica, sin olvidar en ningún momento la relación permanente con sus posibilidades prácticas.

Este libro genera numerosos interrogantes en todos aquellos maestros e investigadores en educación matemática comprometidos con la transformación de las prácticas educativas y de la sociedad en general. En la escuela, la práctica matemática puede ejercer una enorme influencia en dos sentidos totalmente opuestos: por un lado, la matemática reducida a meros cálculos rutinarios puede reforzar actitudes pasivas y complacientes y, por otro lado, la matemática en su sentido más amplio puede desarrollar el pensamiento crítico y alternativo. La paradoja radica en creer estar formando una ciudadanía crítica cuando, a su vez, limitamos los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a aspectos memorísticos que, en cualquier caso, sólo nos dan herramientas para superar exámenes y promocionar bajo unos determinados criterios.

Aunque el título de este libro pueda llevarnos a pensar que se trata de un manual decantado hacia la formulación teórica, lo cierto es que el objetivo explícito de Skovsmose es proveer fundamentos para interpretar y aclarar las prácticas educativas siempre teniendo en cuenta que éstas son el propósito último de su pensamiento. La larga experiencia previa del autor como maestro de escuela antes de entrar en la Universidad de Aalborg nos suponen una garantía de su compromiso con la realidad del aula. Más allá de una crítica conceptual, intenta traducir al aula de matemáticas sus principios generales sobre educación e identificar los aspectos presentes de una educación crítica dentro de la práctica educativa.

Para tal tarea se sirve de las nociones de educación crítica, alfabetización, democracia, poder formativo de las matemáticas en sociedades con alto desarrollo tecnológico, modelaje matemático, conocer reflexivo, aprendizaje como acción e intencionalidad en el aprendizaje, entre otras. De manera ágil y con humor sutil, discute los valores y significados atribuidos a estos términos en el contexto de las sociedades modernas e ilustra sus reflexiones a partir de seis proyectos educativos llevados a cabo en escuelas danesas.

Ciertamente, la lectura de Skovsmose nos sugiere una y otra vez el camino que va desde el alumno como mero receptor de información al alumno como un participante activo y relevante cuya opinión en el aula de matemáticas vale la pena escuchar. En este proceso, las propias creencias de los alumnos sobre las matemáticas son una grave interferencia. En general, éstos consideran las matemáticas como un juego donde hay que encontrar la única respuesta correcta. Por lo tanto, ante esta visión, es absurdo plantearse la necesidad de la comunicación, la discusión y el intercambio en el aula. No hay necesidad de comunicación, tan sólo hay preguntas necesarias y respuestas correctas o erróneas.

En definitiva, estamos ante un libro de importancia democrática que, sin duda, recomendamos. Deseamos que en un futuro próximo nos lleguen en su versión castellana otras obras del mismo autor y de otros autores relevantes en el campo de una educación matemática al servicio de una sociedad donde la acción crítica sea una tarea permanente.

Núria Planas i Raig

**EL TÍO PETROS
Y LA CONJETURA DE GOLDBACH**
Apostolos Doxiadis
Ediciones B
Barcelona, 2000
ISBN: 84-406-9490-3
199 páginas

Nos encontramos frente a una interesante novela, escrita en 1992 por el australiano Apostolos Doxiadis. Este autor nació en Australia aunque creció en Atenas, razón por la que esta obra la redacta en griego, aunque en 1998 el mismo autor la tradujo al inglés. La versión española es de M.^o Eugenia Ciocchi.

Esta obra narra la historia de un anciano (el tío Petros) que se dedica a cuidar de su jardín y a jugar al ajedrez. La historia está contada por su sobrino favorito, quien un buen día descubre que su tío, oveja negra de su familia empresaria, fue un profesor eminente de las universidades alemana e inglesa y niño prodigio, nada más y nada menos que en Matemáticas.



La novela describe la aventura del sobrino al ir descubriendo la vida del tío Petros Papachristos desde su infancia, pasando por su juventud como estudiante y su época profesional como profesor universitario dedicado a la docencia y a la investigación. Es precisamente una investigación en particular, el intentar demostrar únicamente desde muy joven la famosa conjetura de Goldbach («Todo entero par mayor que dos es igual a la suma de dos números primos») lo que hace su vida difícil, solitaria y misteriosa. Sin embargo, esta misma dificultad permite al autor presentar a famosos matemáticos como Caratheodoris, Hardy, Ramanujan, Turing y Gödel, que el autor los hace contemporáneos del protagonista, el tío Petros, los cuales conversan con los diversos personajes de la novela sobre temas de teoría de números y el famoso teorema de la completitud. Y además, por relación con sus investigaciones matemáticas o su vida personal, se menciona a un numeroso elenco de matemáticos importantes como Hilbert, Riemann, Euler, Gauss, Abel, Galois...

La posibilidad de que dicha conjetura sea indemostrable sume al personaje en un estado de cierto letargo, abatimiento y aceptación de haber dedicado toda su energía a algo realmente imposible. Su padre le había dicho desde pequeño que debía proponerse siempre metas alcanzables. Sin embargo, al final de su vida, su sobrino, en un intento de que su tío reconozca y sea consciente de su vida, consigue que éste vuelva a su método geométrico, un nuevo método que él mismo había desarrollado a base de figuras construidas en el suelo con judías.

De forma análoga a como Fermat escribió en un margen del libro *Arithmetica* de Diofanto, que tenía la demostración de su llamado posteriormente último teorema ($z^n = x^n + y^n$), nuestro protagonista Petros llama a su sobrino diciéndole que ya tiene la demostración geométrica del estudio de toda su vida, aunque cuando éste llega, su tío yace muerto bajo la lluvia en su jardín, rodeado de las judías que formaban las figuras geométricas en el suelo, arrastradas por el agua.

La novela se lee rápidamente y en ningún momento pierde la emoción o suspense de la historia. Me parece excelente que autores como éste, que adquirieron un cierto

nivel de Matemáticas con sus estudios universitarios, consigan difundir conceptos profundos y a la vez sencillos de forma fácilmente comprensible para personas ajenas a las Matemáticas. Sólo me parece que podría ocurrir que al leer la novela algunas personas pudiesen pensar que los matemáticos somos gente «loca». Es decir, que los profesionales de las Matemáticas que se dedican a la investigación, pueden parecer personas ciertamente raras y que casi siempre terminan con cierto grado de locura. Se describen a lo largo de la novela los intentos de suicidio de Hardy, Ramanujan y el suicidio efectivo de Turing. A Gödel se le describe en un estado lamentable y patético en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton. Todos ellos aparecen en la novela hablando con el personaje. Además, se relata que Cantor pasó los últimos años de su vida en un manicomio, que Pascal y Newton cambiaron las Matemáticas por la Teología, que Galois murió con un disparo en un duelo...

En palabras del propio autor que no me resisto a reproducir:

El proverbial «matemático loco» estaba mas cerca de la realidad que de la fantasía.... Los grandes artífices de la Reina de las Ciencias como polillas atraídas por una luz cruel, brillante pero abrasadora y feroz –polillas locamente enamoradas de la luz brillante– se acercaron demasiado, se quemaron las alas y cayeron muertos.

En la solapa de la contraportada, y en este mismo sentido hay una cita del premio Nobel de Economía John Nash:

Pinta un cuadro sugestivo acerca de cómo un matemático puede caer en una trampa mental al dedicar sus esfuerzos a un problema demasiado difícil.

Espero que a pesar de leer esta novela, que me parece muy interesante por las diversas consideraciones anteriores, los lectores no salgan con la opinión de que todos los matemáticos somos así, sino que la investigación matemática, como otras muchas investigaciones científicas, así como otras muchas manías de la vida cotidiana que no tienen por qué ser investigaciones pueden llevar a la mente humana a situaciones al borde de la locura, pero no especialmente porque sean Matemáticas.

M.^a Carmen Escribano



EL TEOREMA DEL LORO
Novela para aprender matemáticas
Denis Guedj
Anagrama
Barcelona, 2000
ISBN: 84-339-6908-0
540 páginas

La declaración del año 2000 como el Año Mundial de las Matemáticas ha permitido que las editoriales publiquen obras sobre temas matemáticos que, de otra forma, hubiesen tenido difícil su publicación.

Quiero comenzar haciendo una declaración de principio, esta novela me encantó, disfruté con ella hasta sentir pena por haber llegado a su final. Es, por esto, por lo que me he atrevido a hacer esta reseña.

En primer lugar, creo que hay que decir que nos encontramos ante una obra de divulgación de las matemáticas, una obra dirigida a un público desconocedor de los grandes y pequeños problemas matemáticos y, por supuesto, de su historia. Es decir, una obra para todo el mundo, salvo para profesores de Matemáticas.

Para cualquiera que haya estudiado Exactas y se haya interesado en su historia, esta novela, como historia de las Matemáticas, no le aportará nada nuevo. Los amantes de las novelas de intriga y misterio dirán que la trama policial que sostiene la novela es pobre y nada creíble. En este punto más de uno se preguntará ¿qué es lo que te ha gustado?

Me ha gustado la forma sencilla, clara y sin pedantería de explicar a las personas que no estén familiarizadas con esta rama de la ciencia, la historia de las Matemáticas, decirles qué es un teorema y explicarles su importancia en el desarrollo posterior de la ciencia, que la esencia de las Matemáticas es la LIBERTAD, que los griegos fueron unos grandes matemáticos porque «los pensadores son hombres libres», mostrar cómo trataron sus maestros a uno de los más grandes matemáticos, Galois, del que entre otras cosas dijeron: «¡Aspira a la originalidad!», «¡Protesta contra el silencio!». Conocer cómo eran las relaciones entre algunos de los grandes matemáticos, ver las zancadillas, «robos» y desprecio que sufrieron de sus colegas, en fin, cosas que, desgraciadamente, no aparecen en la mayoría de las clases que damos los profesores de Matemáticas.

Escribiendo estas líneas acabo de caer en la cuenta de que estamos ante un plan del gobierno sobre la Reforma de las Humanidades en el que sólo se habla del Latín, del Griego, ¡ah! y de la Historia.

Cuando leía el libro estaba pensando en mis alumnos. Creo, sinceramente, que puede ser leído por muchos de ellos y quizás alguno perdiese ese miedo y, por qué no decirlo, el odio (como le pasa al protagonista de la novela) que tienen hacia la asignatura.

Si hacemos abstracción de la trama argumental, los capítulos pueden ser leídos sin seguir el orden en el que están escritos, cada uno de ellos tiene entidad propia. Puede ser una buena herramienta para hacer pequeños trabajos sobre la historia de las Matemáticas y, lo que es más importante, está desprovisto del rigor que tanto asusta, que tienen los libros serios y, por tanto, per-

mite un más ameno acercamiento al tema. Lástima que la historia prácticamente termine con Euler, con lo que gran parte de los conceptos que manejan nuestros alumnos del bachillerato no aparece en esta historia.

Eusebio Rodríguez Briega



Para fumar, vaya a la corona circular
XI Olimpiada Matemática Nacional
Equipo 10



Por debajo del puente baja la corriente
XI Olimpiada Matemática Nacional
Equipo 11



Un paseo por el infinito
XI Olimpiada Matemática Nacional
Equipo 12

Olimpiada de la Federación, Museo Elder, Tríptico de la FESPM, Seminario de La Gomera

XI

Olimpiada Matemática Nacional de la FESPM

La pequeña historia de la XI Olimpiada arranca de la petición realizada por parte de FEEMCAT en 1998 en que solicitó de la FESPM su organización en el año 2000, con la consiguiente presentación de un proyecto para la misma. Afortunadamente en el segundo trimestre del año 1999, la Federación aceptó nuestro proyecto y nos encomendó que lleváramos a cabo en Cataluña la celebración de la undécima olimpiada, dirigida a estudiantes de segundo curso de ESO. Era ciertamente un reto organizar la Olimpiada del mítico año 2000, declarado por la UNESCO como Año Mundial de las Matemáticas, pero con la ilusión necesaria y la experiencia acumulada de las anteriores olimpiadas, se constituyó el comité organizador definitivo en junio de 1999.

En el proyecto inicial se había previsto organizar la olimpiada entre Reus y Girona por ser sus respectivas asocia-

CRÓNICAS

Acto Inaugural
XI OMN
Comarruga
(Tarragona)





Magia
Matemática
Comarruga
(Tarragona)

ciones de matemáticas las más antiguas de la FEEMCAT. Sobre tal base iniciamos la planificación y la fijación de objetivos para que el desarrollo de la olimpiada, pese a las dos ubicaciones geográficas distintas, tuviera la necesaria unidad y armonía y facilitar de paso un conocimiento más amplio de la realidad plural catalana. Con tal finalidad se acordó incluir un día en Barcelona, a medio camino entre El Vendrell y Girona.

Además de los objetivos propios de estas olimpiadas como son, entre otros, fomentar el gusto por las matemáticas, eliminar ciertos miedos hacia esta asignatura, favorecer las relaciones de amistad y conocimiento entre jóvenes de diferentes comunidades autónomas, potenciar la resolución de problemas como base para una adecuada formación matemática, nos propusimos rendir un pequeño homenaje a las diez olimpiadas precedentes y programar actividades matemáticas que pudieran integrarse de forma natural en el desarrollo del programa.

Fijados los objetivos, nos enfrentamos a la ardua tarea de obtener los recursos económicos necesarios. Son muchos los parabienes y entusiasmos que levanta un evento como éste, pero la cruda realidad es que las matemáticas toda-

vía no figuran dentro de los objetivos prioritarios de las instituciones, salvando honrosas excepciones. Dentro de este capítulo queremos dejar constancia de un especial agradecimiento a la *Diputació de Girona* y *Levi Strauss* que han patrocinado la olimpiada. También destacamos las aportaciones de la *Diputació de Tarragona*, y los ayuntamientos de *Girona*, *Sant Feliu de Guíxols*, *El Vendrell* y *Barcelona*, entre otros.

Participantes y asistentes

Cuarenta y seis participantes en representación de Andalucía, Andorra, Aragón, Asturias, Canarias, Cantabria, Castilla-León, Castilla-La Mancha, Cataluña, Extremadura, Madrid, Murcia, Navarra y Valencia fueron los protagonistas últimos de esta fiesta matemática. En esta ocasión hemos de constatar que los chicos (31) duplicaron el número de chicas (15). Cabe resaltar su colaboración para que se cumplieran los objetivos del programa y la buena convivencia entre ellos, facilitando que la olimpiada fuera un éxito.

Como ya es habitual los dieciséis acompañantes y otros invitados mostraron en todo momento un alto nivel de colaboración en todas las tareas, destacando siempre lo positivo y obviando los contratiempos o inconvenientes que pudieran encontrar. Con este ambiente de amistad y comprensión nos resultó mucho más fácil y agradable asumir la responsabilidad organizativa.

Programa

Se facilitó a los participantes la posibilidad de llegar el día veintitrés a partir de las seis de la tarde o el día veinticuatro antes del mediodía, considerando los distintos medios de transporte utilizados.

Se decidió elegir como alojamiento albergues con la finalidad de tener un contacto más directo con la naturaleza y de disponer de instalaciones adecuadas para actividades propias de la olimpiada, facilitando así cubrir uno de los objetivos primordiales como es el de potenciar la convivencia entre todos.



Coordinadores
XI OMN
Barcelona

El contenido del programa se constituyó sobre los siguientes ejes:

- Limitar a dos las pruebas de tiempo limitado y potenciar actividades matemáticas de forma más flexible como la prueba fotográfica, los juegos matemáticos y la lista de treinta problemas a tiempo libre.
- Asistir a conferencias matemáticas lúdicas como magia matemática, geometría mojada y tácticas matemáticas para prácticas telepáticas y participar en un taller de astronomía.
- Facilitar el conocimiento de Cataluña a través de visitas turísticas como La visita guiada a la Tarragona Romana, día turístico en Barcelona, Paseo por el barrio antiguo de Girona y visitas al Museo de la Ciencia de Barcelona y al Museo del Cine en Girona.
- Incluir actividades lúdicas como la visita a Port Aventura (Tarragona) o el paseo en barca por la Costa Brava o la fiesta de despedida.
- Popularizar la matemática mediante exposiciones como fotografía matemática, sellos matemáticos, calculadoras, carteles de la diez olimpiadas precedentes, historia de los números.
- Rendir homenaje a la decena de olimpiadas precedentes mediante una publicación recopilatoria de las pruebas realizadas y una serie de artículos conmemorativos.

Pruebas

Siguiendo con la tradición, no podían faltar la clásica prueba individual, la fotográfica y la de equipos.

La *prueba individual* constaba de cuatro problemas seleccionados entre los diversos planteados por un equipo de tres profesores, con la finalidad de conseguir enunciados adecuados a los participantes.

Se propuso un problema numérico, otro geométrico, un juego de estrategia y un problema de lógica con la intención de abarcar distintos ámbitos de las mate-

Prueba individual
Tarragona



Prueba por
equipos
Sant Feliu de
Guíxols
(Girona)



máticas y procurando un enunciado asequible a la mayoría de los alumnos. Nuestro deseo era facilitar que todos los participantes con sus peculiares habilidades pudieran resolver algún problema, pero manteniendo el nivel necesario para este tipo de pruebas.

La *prueba por equipos* se realizó fuera del aula tomando parte de la realidad de un pueblo de la Costa Brava como es Sant Feliu de Guíxols, con la finalidad de conocer el entorno donde se encontraban y a la vez facilitar el trabajo en común. Básicamente consistió en calcular el área de una figura irregular, un problema sobre embaldosar una pared y resolver pequeños acertijos matemáticos.

La *prueba fotográfica*, como ya viene siendo habitual, consistió en la entrega a cada equipo de una cámara fotográfica de un solo uso para que captaran, en los distintos ámbitos y espacios visitados, imágenes con algún sentido o referencia matemática. Lugares y oportunidades no faltaron, y así quedó reflejado en la variedad y belleza de las fotografías presentadas.

Pero además creímos oportuno incluir dos pruebas más que, sin limitación de tiempo y realizables en tiempo libre,

incentivaran el gusto por el quehacer matemático: *prueba de los 30 problemas y juegos matemáticos*. A la mitad de la Olimpiada se entregó a cada participante una lista de 30 problemas con la característica de tener un enunciado corto, cuya solución era un número entero del 1 al 30, sin que se repitieran las soluciones. Sin ser obligatoria, se animó a que todos participaran, trabajando en equipo. Esta prueba tuvo mucho éxito y fue valorada muy positivamente por los participantes. La prueba de juegos matemáticos fue la más informal de todas. Se realizó durante el tiempo libre, de forma voluntaria, en una aula preparada para el caso con distintos juegos matemáticos. Un profesor explicó las reglas de los distintos juegos y en una pizarra iba anotando los nombres de los participantes y los logros que conseguían. Tuvo mucha aceptación.

Actividades paralelas matemáticas y lúdicas

A lo largo de la Olimpiada se fueron desarrollando, como ya se ha dicho, distintas actividades paralelas. En el propio acto de inauguración tuvo lugar la primera sesión matemática a cargo de los profesores Anton Aubanell y David Barba. Todos disfrutamos con las bonitas formas geométricas de las pompas de jabón y con la magia de los números.

En el Albergue de Santa María del Mar se expusieron fotografías matemáticas de un concurso que anteriormente había convocado la Asociación de Profesores de Matemáticas de Barcelona (ABEAM), con el fin de ayudar y estimular a los alumnos en la tarea de la prueba fotográfica.

En Girona tuvo lugar el acto de homenaje a las 10 olimpiadas anteriores. El acto se inició con una segunda sesión matemática a cargo de Joan Carles Ferrer, que con su amabilidad y gracia consiguió despertar el interés de los asistentes con sus tácticas matemáticas para prácticas telepáticas. A continuación, diversos parlamentos de la Coordinadora de la XI Olimpiada, del Presidente de la FEEMCAT,



Visita turística a la ciudad de Girona

y del representante de la FESPM, pusieron de relieve el trabajo entusiasta de todos los que han hecho posible la pequeña y entrañable historia de las Olimpiadas matemáticas. Y ello de forma breve y concisa. Como colofón al acto se fue relacionando el lugar, fecha y coordinador de las 10 primeras olimpiadas y se presentó y entregó a todos los coordinadores la publicación recopilatoria que se realizó para tal evento. Dicha publicación contiene artículos sobre diversos aspectos de la resolución de problemas y de los concursos matemáticos, y los problemas que se plantearon en las referidas olimpiadas.

En la residencia de Girona se expuso una colección de carteles anunciadores de las olimpiadas precedentes. Y finalmente, con motivo del acto de clausura se realizó una exposición de sellos matemáticos, de los carteles de las olimpiadas precedentes y de calculadoras.

Premios y obsequios

Tal y como se les dijo a los participantes en la XI Olimpiada, el hecho mismo



Crucero
Costa Brava
Sant Feliu
de Guixols
-Tossa de Mar

PREMIADOS XI OLIMPIADA MATEMÁTICA NACIONAL

INDIVIDUAL

- Víctor Díez Corral (Castilla-León).
- Luis de Arquer Fernández (Asturias).
- Carles Ventura Royo (Cataluña).

PRUEBA POR EQUIPOS

- Yolanda Ruiz Franco (Cataluña).
- Josep Martínez Reinoso (Andorra).
- José Lorente Arencibia (Canarias).
- Marina Martínez Carmona (Murcia).

PRUEBA FOTOGRÁFICA

- Eduardo Cuevas (Castilla-La Mancha).
- Olaia Orzaiz Garde (Navarra).
- Andrea Rodríguez Segovia (Cantabria).
- Carles Ventura Royo (Cataluña).

CONCURSO 30 PROBLEMAS

- Todos los equipos resultaron ganadores.

JUEGOS MATEMÁTICOS

- José Lorente Arencibia (Canarias)
- Víctor Díez Corral (Castilla-León).
- Carmen Golmayo Flethes (Andalucía).

Los tres primeros
clasificados
con parte de
la organización



de haber podido acudir a la misma es un premio más que remarcable. Pero además de esa satisfacción moral, se les obsequió a todos –participantes y coordinadores– con diferentes objetos conmemorativos de esta XI edición : dos camisetas y un polo, bolígrafos, carpetas, gorra, así como carteles, trípticos y pegatinas. Y el último día se entregó a cada uno diversos obsequios, algunos de ellos proporcionados por diferentes entidades colaboradoras: un diploma personal, una orla de los participantes, una fotografía de grupo general y otra del coordinador y participantes de cada sociedad. Además se les entregó varios libros: *El señor del Cero* de Editorial Alfaguara, *Minimanual* de la Editorial Castellnou, así como el libro editado como homenaje a las X olimpiadas anteriores. También se les entregó una calculadora de bolsillo.

A los ganadores de la prueba individual y la prueba por equipos se les obsequió con una calculadora científico-gráfica y un juego matemático. Al equipo ganador de prueba fotográfica se les regaló una calculadora y un álbum de fotos. Es de remarcar que todos los equipos resolvieron correctamente la prueba «30 problemas» y se les entregó un práctico bloc.

Valoración de la Olimpiada

Como primera idea respecto al desarrollo de esta XI olimpiada quiero dejar constancia de una consideración previa y fundamental: los verdaderos protagonistas de esta fiesta matemática han sido los treinta mil alumnos, que con sus profesores y organizadores, han participado en las fases previas, haciendo posible y dando sentido a esta olimpiada.

Como segunda idea es menester mencionar la voluntad de la Comisión Organizadora de hacer que fueran muchas las personas que de una u otra forma participasen en el evento. Y creemos haberlo conseguido. En ese trabajo silencioso y previo, es preciso insistir en algo obvio: muchas horas de dedicación a las tareas burocráticas y administra-

Entrega
del Diploma
al primer clasificado





Participantes, coordinadores, organizadores, colaboradores y autoridades después del acto de clausura de la XI Olimpiada Matemática Nacional

tivas y de preparación y búsqueda de recursos se han invertido sin que se redujeran las obligaciones habituales o las horas y responsabilidades de los diversos profesores colaboradores. Desde un primer momento se ha trabajado coordinadamente en pequeños comités locales. Periódicamente algunos organizadores nos reuníamos en Barcelona para ir atando cabos y programando las tareas pendientes.

Según nuestro criterio, la organización y desarrollo de la XI olimpiada han sido como habíamos previsto: compleja y ajetreada pero bien planificada y con la satisfacción de haber conseguido hacer realidad la mayoría de los objetivos planteados.

Según la encuesta realizada a los alumnos, el último día de la olimpiada, en la que podían responder de *muy mal* a *muy bien* (5 categorías en total) en diversos aspectos, la mayoría valoró entre bien y muy bien la organización, las pruebas, las visitas y las actividades. En cambio valoraron de regular a bien el alojamiento.

Valoramos positivamente estos días de convivencia, de intercambio, de vivir las matemáticas de otra manera y ver cómo los participantes se entusiasmaban con sus pequeños y significativos logros matemáticos. Como en toda obra humana, a la que no somos ajenos, a buen seguro que algún error habremos cometido, de ahí que nuestro agradecimiento a todos los coordinadores y participantes, por su amable comprensión, sea mayor. Deseamos un futuro de éxito a las próximas olimpiadas, brindándoles a los futuros organizadores nuestro apoyo.

Como colofón de esta XI Olimpiada matemática quiero

COMITÉ ORGANIZADOR XI OMN

Girona

Elisabet Saguer
(Coordinadora)
Teresa Pagès
Pilar Xifra
Francesc Borrell

Barcelona

Marta Berini
Pilar Figueras

Tarragona

M. Lúisa Gironde
Josep Borrut
Marià Cano
Joan M. Castells

hacer llegar mi gratitud a todos los que han colaborado en la organización, de una u otra forma, haciendo posible con su ayuda el desarrollo y éxito de la misma. De todos ellos es el mérito.

Elisabet Saguer Canadell

Coordinadora de la XI OMN

PRUEBA INDIVIDUAL

Problema 1

Para conmemorar el año 2000, Año Mundial de las Matemáticas, vamos a proponer algunas cuestiones relacionadas con el número 2.000.

El número 2.000 tiene muchos divisores, concretamente 20, y la suma de los mismos (sin contar el 2.000) es superior a 2.000, exactamente 2.836. Esto posibilita que se pueda expresar 2.000 como suma de algunos de sus divisores. Por ejemplo

$$2.000 = 1.000 + 500 + 400 + 100$$

es la descomposición que utiliza el menor número de divisores.

- ¿Sabrías expresar 2.000 como suma de divisores, todos distintos, de manera que el número de términos fuera el mayor posible?
- Coloca un número distinto en cada una de las nueve casillas del cuadrado de la figura de manera que el producto de los tres números de cada fila y de cada columna sea 2.000.

Problema 2

Como bien habrás podido apreciar el logotipo de FEEMCAT está compuesto por 5 triángulos rectángulos que al unirse dan lugar a un pentágono regular interno y otro externo. Cada uno de los triángulos simboliza a cada una de las asociaciones de profesores que integran FEEMCAT.

- ¿Sabrías determinar la amplitud de los ángulos de esos triángulos?
- Si en vez de cinco fueran seis las asociaciones de profesores, ¿podría obtenerse una figura similar? ¿Cómo serían los ángulos del triángulo en este caso?
- ¿Y si fueran siete u ocho? ¿y para el caso general n ?
- Encuentra una relación entre los ángulos de los triángulos y los ángulos del polígono regular que se representa en cada caso.
- ¿Para qué número de asociaciones queda más bonito el logotipo?

Problema 3

Queremos colocar siete monedas en las siete casillas de la figura. Cada vez que colocamos una moneda debemos girar cambiar la cara, C , por la cruz, X , o viceversa) todas aquellas ya colocadas que están conectadas con la moneda que colocamos. Dos monedas están conectadas si no hay ninguna casilla vacía entre ellas.

- ¿En qué posiciones se deben ir colocando para realizar el mayor número de giros? ¿Cuántos giros de moneda se deben hacer?
- ¿Cómo las colocaremos (C o X) para que al final todas las monedas muestren la cara?
- Si en lugar de 7 monedas queremos colocar 50 (en un tablero de 50 casillas), ¿cuántos giros de moneda se podrán hacer como máximo?



1.º 2.º 3.º 4.º 5.º 6.º 7.º

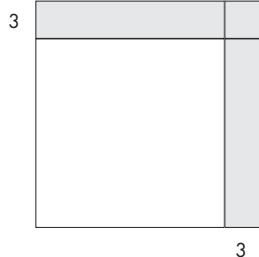


Figura
Problema A05

Problema 4

Alberto, Berta y Carlos comen juntos cada día. Al finalizar la comida cada uno de ellos pide beber té o café.

- Si Alberto pide café, entonces Berta pide lo mismo que Carlos.
- Si Berta pide café, entonces Alberto pide la bebida que no pide Carlos.
- Si Carlos pide té, entonces Alberto pide la misma bebida que Berta.

¿Cual de ellos pide siempre la misma bebida después de comer?

PRUEBA DE LOS 30 PROBLEMAS

Los 30 problemas que os presentamos tienen la peculiaridad de que sus soluciones van del número 1 al 30, sin que se repita ningún resultado.

A01. Un número de dos cifras tiene la cifra de las decenas menor que la cifra de las unidades. La suma de las cifras es 5 y su producto es 6. ¿De qué número se trata?

A02. Ricardo acompaña cada mañana unos niños a la escuela. María le pregunta por el número de niños que acompaña y él responde:

Llevo dos niños delante de un niño, dos niños detrás de un niño y un niño en medio.

¿Cuál es el número mínimo de niños que acompaña Ricardo?

A03. Dos atletas separados 10 Km parten uno hacia el otro con velocidad constante de 5 km/h. Una mosca, situada en la frente de uno de ellos, parte, en el mismo instante, hacia el otro atleta con velocidad constante de 12 km/h. Cuando llega a la frente del segundo atleta, gira y se dirige de nuevo hacia el primer atleta a la misma velocidad y así sucesivamente, hasta que, al final, los atletas la aplastan con sus frentes. ¿Qué distancia ha recorrido la infortunada mosca?

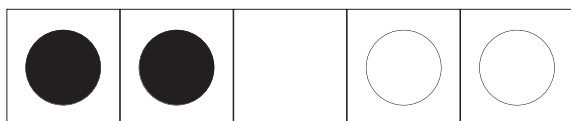
A04. Siete personas se encuentran y cada una de ellas, al saludarse con otra persona, le da un apretón de mano. ¿Cuántos apretones de mano se han dado en total?

A05. La longitud del lado de un cuadrado ha aumentado en 3 cm y su área ha aumentado en 45 cm². ¿Cuánto medía el lado inicialmente?

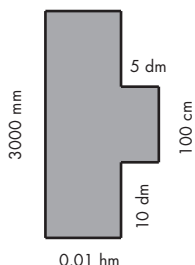
A06. El número 266 puede descomponerse en producto de tres números primos. El mayor de los tres, es...

A07. Si en un movimiento sólo puedes desplazar una bola un cuadro o hacerla saltar sólo una bola de distinto color

y las bolas blancas sólo pueden desplazarse a su izquierda y las negras a su derecha, ¿Cuál es el mínimo número de movimientos que permite cambiar las bolas blancas por las negras?

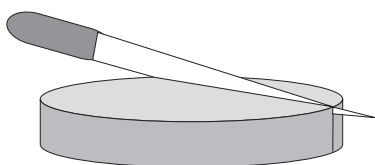


A08. Calcula el perímetro de la figura, en metros.



A09. Disponemos de dos piezas de plástico rectangulares de medidas 28×63 y 35×91 , respectivamente, y queremos construir a partir de ellas, piezas de plástico cuadradas iguales y tan grandes como sea posible, sin que falte ni sobre material. ¿Cuánto medirá el lado de estas piezas cuadradas?

A10. A un pastel redondo le hacemos cuatro cortes verticalmente y cada corte atraviesa totalmente el pastel. ¿Cuántos trozos de pastel podemos obtener como máximo?

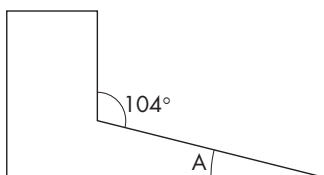


B01. Disponemos de tres cajas de distinto color y en cada una de ellas hay un objeto: una moneda, una concha y un garbanzo.

- La caja verde está a la izquierda de la caja azul.
- La moneda está a la izquierda del garbanzo.
- La caja roja está a la derecha de la concha.
- El garbanzo está a la derecha de la caja roja.

¿Qué posición ocupa la caja en la que se encuentra la moneda?

B02. Calcula el valor del ángulo A de la figura adjunta.



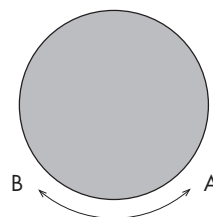
*Todos
los equipos
participantes
resolvieron
bien
los 30
problemas.*

B03. Las medidas de los lados de un triángulo son números naturales consecutivos. Si el perímetro mide 33, ¿cuánto mide el lado menor?

B04. Dos trenes que circulan por vías distintas, parten en el mismo momento y van uno hacia el otro. Uno de ellos se desplaza con velocidad constante de 96 km/h, el otro se desplaza con velocidad constante de 80 km/h. y se cruzan cuando han transcurrido 7 min. y 30 seg. ¿Qué distancia, en km, separa las dos estaciones?

B05. Si el radio de un círculo se duplica, ¿por cuánto queda multiplicada su área?

B06. Ana y Bernardo salen del mismo punto, al mismo tiempo y en sentidos contrarios en una pista circular. Ana tarda 60 seg. en dar una vuelta a la pista y cada 20 seg. se cruza con Bernardo. ¿Cuánto tarda Bernardo en dar una vuelta completa?



B07. Cuántos números primos hay entre 90 y 100?

B08. ¿Cuál es el menor número que tiene exactamente 8 divisores?

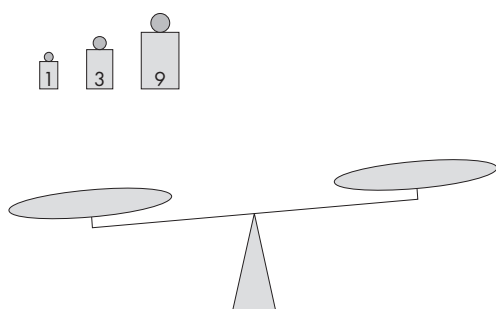
B09. En una cesta hay cerezas. Pedro se come la mitad de las cerezas menos 1. Después José se come la mitad de las que quedan menos 1 y, posteriormente, Marta se come la mitad de las cerezas que encuentra menos 1. Finalmente, Manuel se come las últimas 5 cerezas que hay en la cesta. ¿Cuántas cerezas había inicialmente en la cesta?

B10. En una clase de 29 alumnos hay 3 chicas más que chicos. ¿Cuántas chicas hay en la clase?

C01. ¿Cuántos litros de agua se necesitan para llenar una garrafa de 30^3 mililitros?

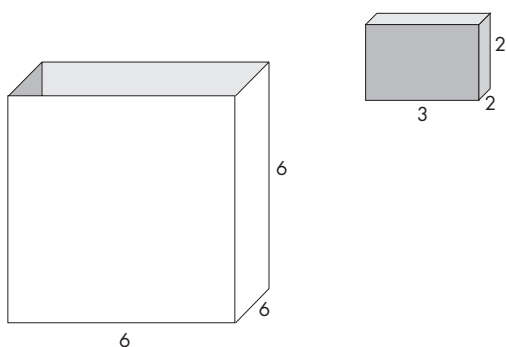
C02. En un bolsillo llevo el doble de monedas de 25 ptas. que monedas de duro. Si en total llevo 825 ptas., ¿cuántas monedas de duro llevo?

C03. ¿Cuántas pesadas exactas distintas podemos realizar con una balanza de dos brazos si disponemos de un peso de 1 kg de un peso de 3 kg y de un peso de 9 kg?



C04. Un coche ha recorrido 35 km a velocidad constante de 105 km/h. ¿Cuántos minutos ha tardado en hacer el recorrido?

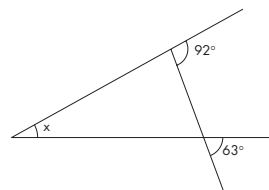
C05. Un cubo de 6 dm de lado está lleno de ortoedros de $2 \times 2 \times 3$ dm. ¿Cuántos ortoedros contiene el cubo?



C06. En un cajón hay calcetines negros, azules, marrones y blancos. Si la habitación está a oscuras, ¿cuántos calcetines debemos coger para asegurarnos de que podremos ponernos dos calcetines del mismo color?

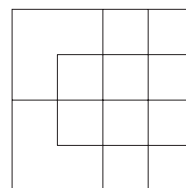
* La prueba por equipos de la XI Olimpiada Matemática Nacional será publicada en el n.º 36 de SUMA (febrero 2001)

C07. ¿Cuántos grados mide el ángulo x de la figura?



C08. En tres clases hay el mismo número de alumnos. En la primera están en filas de 4 alumnos y queda en una fila, un alumno solo. En la segunda, están en filas de 6 alumnos y también hay una fila con sólo un alumno. En la tercera están en filas de 8 alumnos y de nuevo hay un alumno sólo en una fila. ¿Cuántos alumnos hay en esas clases si sabemos que hay menos de 40 alumnos?

C09. ¿Cuántos cuadrados hay en la figura adjunta?



C10. Busca el siguiente término de la sucesión:

-3, 4, 1, 5, 6, 11, 17, ...

Pero... ¿esto son matemáticas?

El Museo Elder de la Ciencia y la Tecnología de Las palmas de Gran Canaria, inaugurado en diciembre de 1999, con motivo del Año Mundial de las Matemáticas, ha presentado una exposición titulada «Pero... ¿esto son matemáticas?», que va a tener carácter permanente, aunque irá modificándose y ampliándose a lo largo del tiempo.

La exposición no ocupa un lugar específico dentro del Museo, sino que las piezas (módulos interactivos) se distribuyen en los distintos espacios expositivos del Centro. En total, 36 módulos interactivos, 6 piezas singulares, 2 murales, 1 escultura y 12 posters conforman el desarrollo de la exposición.

La exposición ha sido diseñada por Jacinto Quevedo sarmiento, Director del Museo Elder y miembro activo de la Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas, de la que fue Presidente a principios de los años noventa. Sus títulos son los siguientes:

Asimismo, durante este año 2000, se han realizado diversas actividades en el Museo de cara a la mencionada efemérides matemática, un concurso de problemas de matemáticas para escolares con importantes premios, talleres y

diversas conferencias impartidas por distintos profesores, entre los que destacan Miguel de Guzmán en la inauguración de la exposición, y Claudi Alsina. En diciembre se clausurarán las actividades del Año Mundial de las Matemáticas de Canarias en el propio Museo.

CONTENIDO

PERO... ¿ESTO SON MATEMÁTICAS?

- Mural «El número mágico: un paseo por la historia de las proporciones y la perspectiva».
- Las máquinas «inteligentes».
- Direcciones Web.
- Urna de libros.
- ¡No me mates, por favor!
- Anamorfosis.
- El cubo mágico.
- Papiro de Rhind.
- Número de 10 dígitos.
- ¿Qué es un fractal?
- Palillos y aceitunas.
- Cubos rodantes.
- Cuadrado mágico.
- Mendel y el manual de instrucciones.
- Herencia y azar.
- Intruso entre platónicos.
- Hombres y sombreros.
- Alicia y el Bosque del Olvido.
- Bloques deslizantes.
- Caballos y damas.
- Superficies de área mínima.
- La llave y la cerradura.
- Euler y las cuatro escuelas.
- Intercambio de posiciones.
- ¡Puedo volar!
- ¡Viva la reproducción!
- Botellas y gráficos.
- Billar elíptico.
- Cónicas de agua.
- La máquina de Galton.
- Problemas de Lloyd.
- Superficie reglada.
- Ventana al mar.
- Mural «Pioneros».



Típtico de la Federación

Con motivo del 9.º ICME celebrado en Japón el pasado mes de julio, la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas editó y distribuyó un atractivo tríptico informativo para dar a conocer a nuestra organización en ámbitos internacionales amplios, relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

En el mismo, además de una breve descripción de la FESPM y de sus contactos internacionales más relevantes (Federación Europea de Asociaciones de Profesores de Matemáticas, Federación Iberoamericana de Educación Matemática y Subcomisión Española del ICMI) se explicitan sus actividades más relevantes:

- Revista SUMA.
- Olimpiadas.
- Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM).
- Grupos de trabajo.
- Servicio de Publicaciones.



Seminario de La Gomera

Las Matemáticas en la Educación Obligatoria: Propuestas de Futuro

— ¡Mira, por allí vienen Coque y Aurora!

— ¡Y por allá Xaro! ¡Y Francis con Lucy! ¡Y Marta! ¡Y Julio!...

— ¿Qué tal?, ¿cómo fue el viaje? ¿Y los Antonio?

Llegarán por la tarde con Pedro, José Luis y Toño. Un viaje necesariamente agotador y unas maratónicas sesiones de trabajo en ciernes, no se correspondían con el ambiente entusiasta de los congregados. Saludos, besos, abrazos, presentaciones de caras nuevas y apertura de nuevas fichas se intercambiaban con las caras de siempre para las que bastaba con actualizar los datos de la ficha, en algunos casos algo amarillentas dada la larga ausencia. Risas, ánimos y ganas de empezar, bolsas en ristre, carpetas bajo el brazo y un sinfín de detalles revelaban que algo importante nos aguardaba.

El viaje desde Tenerife a La Gomera fue algo movidito, pero como la duración es tan corta no dio tiempo para que Pili llegara a marearse. Se hace a bordo de un fast ferry de última generación que llegó a Canarias no hace mucho desde casi nuestras antípodas (Tasmania), lujoso, limpio, espacioso, luminoso, agradable, rápido. Eso sí, un poco «cabezón» porque el mar estaba algo rizado.

Acto inaugural
del Seminario



Manolo Fernández Reyes, Coordinador

San Sebastián de La Gomera, capital de la isla, es una encantadora Villa (nombre por el que se la conoce en la isla) que se gana el afecto del visitante en poco tiempo. Está en la desembocadura de un barranco y se extiende plácidamente a lo largo del cauce. Se nota que existe una gran vitalidad porque hay muchos edificios nuevos y otros en construcción. Frente a nuestro lugar de trabajo, se extiende un precioso parque en donde se ubica la Torre del Conde, símbolo de la Villa y que nos recuerda, además, que ésta fue una isla de «señorío» y no de realengo como Gran Canaria, Tenerife y La Palma.

Aquella misma tarde empezamos a trabajar en las modernas instalaciones del Cabildo Insular de la isla, después de que el rejuvenecido Manolo Fernández nos saludara, diera la bienvenida y nos hiciera presentar en una mesa redonda de verdad. Aunque para gran contrariedad de Florencio, sin decir de dónde éramos. Pero es que, según el guión, eso quedaba como ejercicio para los días siguientes. Había que entablar relaciones binarias: Y tú, ¿de dónde eres? ¿Es de equivalencia?... Pues si lo es, haz la clasificación en clases y entrégala al final.

Nos organizamos en tres equipos de trabajo para intentar exprimir al máximo el documento, que la organización había enviado días antes, y que se elaboró haciendo un «refrito» con las respuestas recibidas al cuestionario inicial. Por cierto, que no de todas las sociedades, porque algunas no contestaron y otras que sí lo hicieron, como Cantabria, no pudieron venir. Lástima.

La misma tarde del jueves, 12 de octubre, los equipos se organizaron, establecieron su método de trabajo y con

mayor o menor dificultad empezaron a penetrar en el documento.

Aunque el viernes se iniciaba la actividad oficialmente con un acto de inauguración a las 10 de la mañana, los equipos, ávidos, se reunieron a las 9. Y avanzaron en el trabajo hasta que Paco Aguiar, principal artífice de que estuviésemos allí y siempre pendiente de los detalles, nos avisó de que había que ir al salón de actos. Allí escuchamos los saludos de bienvenida y los deseos de que fuera provechoso el encuentro de dos de los impulsores y artífices de la puesta en práctica de la idea del Seminario: el viceconsejero de Educación Fernando Hernández Guarch y el vicepresidente del Cabildo, Gregorio Medina Tomé. Y es que un profesor de Matemáticas lo es siempre, aun cuando circunstancialmente sea político.

El resto del día, ya se puede imaginar: reunión, comida, alguna que otra «llamada por teléfono», más reunión, cafelito, más reunión, cena, y para concluir, una exquisita «quemada» gentileza de Coque, que vino arrastrando el orujo desde su lejana A Coruña. Y más reunión hasta altas horas de la madrugada para los que tenían que redactar el documento.

Al día siguiente, más reunión para leer y matizar los documentos y prepararlos para exponer los contenidos en el acto de clausura. Allí subimos Manolo García Déniz, Manolo Fernández y yo ante el Consejero del Cabildo de La Gomera que nos ayudó a hacer efectivo el encuentro, Juan Alonso Herrera Castilla y la Directora del Instituto Canario de Evaluación y Calidad, Isabel de Luis.

Terminada la faena, empezó la diáspora. Unos tuvieron que regresar rápidamente a Tenerife para tomar sus vuelos o regresar a casa. Otros, en cambio, pudieron permanecer el resto del día en la isla y disfrutar así de una agradable excursión en *guagua* por el interior, gentileza, una vez más, del Cabildo Insular. De esta forma, tuvieron la oportunidad de comprender por qué La Gomera es una isla única, cuyo bosque de laurisilva ha sido declarado Patrimonio de la Humanidad. Impresionantes y profundos barrancos, majestuosos pitones volcánicos, cultivos en terraza que tienden a infinito ladera arriba y que dicen mucho de la legendaria laboriosidad del gomero. El viaje concluyó en Agulo donde un avisado vendedor de lotería hizo su «agosto» en octubre al ofrecer a este grupo de matemáticos un número considerado como una «buena aproximación» de π : el 31412 y que, además, contenía el recuerdo de los tres días pasados en la isla: del 12 al 14.

El día siguiente amaneció espléndido; todos abandonaron la isla pero con la sensación del deber cumplido y con unos lazos de amistad más profundos.

Esta es una crónica de urgencia sobre el encuentro porque no es posible resumir las conclusiones, pues éstas necesi-



Los participantes en el Seminario

*Esta es
una crónica
de urgencia sobre
el encuentro
porque
no es posible
resumir
las conclusiones,
pues éstas
necesitan
un trabajo
más reposado y
reflexivo.
Pero estén atentos
al próximo
número de
la revista SUMA,
porque tendrán el
documento
completo.*

tan un trabajo más reposado y reflexivo. Pero estén atentos al próximo número de la revista SUMA, porque tendrán el documento completo.

Agradecimientos habría que hacer bastantes. Unos, a las personas que con sus horas de dedicación consiguieron que el encuentro saliera adelante y que podríamos personificar en Manolo Fernández. Otros a instituciones, entre las que destacamos al Cabildo Insular de la isla que, por si fuera poca la delicada atención que nos brindó, se ofreció a publicar el documento que fuésemos capaces de hacer. Debemos mencionar también el original programa díplico que preparó para el evento: debajo de las letras que anuncian y desmenuzan el programa, aparecen las muchas primeras cifras del número π y, en la página siguiente, del número e . Y también a la Consejería de Educación, Cultura y Deportes del Gobierno de Canarias, tanto por su apoyo y estímulo como por la presencia de un día, casi a pie de obra, de los altos cargos que nos acompañaron.

La Laguna, octubre de 2000

Luis Balbuena Castellano

SUMA³⁵

noviembre 2000

X JAEM, IV CIBEM, 53 CIEAEM...

X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM)

La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas convoca una de sus actividades más significativas: las JAEM. Esta nueva edición, la décima, se celebrará en Zaragoza los días 7, 8 y 9 de septiembre de 2001 (fechas definitivas), organizadas conjuntamente por la Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo» y el Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Zaragoza.

Núcleos temáticos

Las Jornadas girarán en torno a los siguientes ocho núcleos temáticos siguientes.

1. La modelización como actividad matemática.
2. ¿Qué pasa con la demostración?
3. Lenguaje visual y geometría.
4. Funciones: una confluencia de lenguajes.
5. Azar: la matemática de lo posible.
6. Números: significado y destrezas.
7. Álgebra: ¿cuándo? ¿cómo?
8. Medida: de la regla a la trigonometría.

Dentro de cada uno de estos temas caben acercamientos desde: el tratamiento de la diversidad, aspectos históricos, investigación didáctica, experiencias, gestión del aula, resolución de problemas, etc., así como desde los diversos niveles educativos.

Conferencias plenarias

El Comité de Programas ha invitado a pronunciar las conferencias plenarias a los profesores M.^a Antonia Canals

CONVOCATORIAS

**X JORNADAS PARA EL APRENDIZAJE
Y LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS**

(Universidad de Girona), Martin Kind (Instituto Freudenthal de Utrech –Holanda–) y Florencio Villarroya (IES Miguel Catalán de Zaragoza). Los tres han aceptado la invitación.

Ponencias

En cada uno de los ocho núcleos temáticos se presentarán cuatro ponencias. Por parte del Comité de Programas han sido ya cursadas las correspondientes invitaciones a 32 socios y socias de la FESPM. En el momento de redactar estas líneas, la gran mayoría han aceptado participar como ponentes en las JAEM y se está en la fase de decisión sobre los títulos de sus ponencias.

Comunicaciones orales

- Se podrán presentar comunicaciones orales a los distintos núcleos temáticos, preferentemente.
- La extensión máxima de cada comunicación será de cinco páginas (alrededor de 10.000 caracteres).
- El plazo de admisión de comunicaciones finalizará el 15 de abril de 2001.
- Antes del 15 de junio de 2001 se confirmará a los autores si la comunicación ha sido aceptada por el Comité de Programas.
- Normas más precisas para el envío de originales se remitirán a quien las solicite en la dirección de las X JAEM (ver más abajo).

Zoco matemático y talleres

En estas JAEM, y retomando la experiencia de las III y IV JAEM, se vuelve a convocar el Zoco Matemático, un espacio para presentar físicamente todo tipo de materiales didácticos, pósters, etc., con la presencia de los autores, con los que se podrá departir sobre sus trabajos. Además, los participantes podrán proponer la impartición de algún taller.

*El Comité
de Programas
ha invitado
a pronunciar
las conferencias
plenarias
a los profesores
M.^a Antonia
Canals,
Martin Kind
y Florencio
Villarroya.*

El plazo para presentar propuestas en estas secciones finalizará el 1 de mayo de 2001. Quien desee participar en ellas, deberá solicitar las normas correspondientes, por el mismo procedimiento que para las comunicaciones orales.

Otras actividades

Están previstas diversas exposiciones, conferencias complementarias, proyección de vídeo, visitas culturales, actos sociales...

Inscripciones y alojamiento

El número máximo previsto de asistentes es de 800. El periodo de inscripción finalizará el 30 de abril de 2001 para las cuotas reducidas, y desde esa fecha hasta el 30 de junio para las normales.

Cuotas de inscripción reducidas (hasta el 30 de abril):

- Socios FESPM: 10.000 pts.
- No socios: 17.000 pts.

Cuotas de inscripción normales (desde el 1 de mayo hasta el 30 de junio):

- Socios FESPM: 14.000 pts.
- No socios: 22.000 pts.

La agencia oficial de las Jornadas para el alojamiento y viajes es:

Tívoli Congresos
c/ Verónica, 16. 50001 Zaragoza
Tfno.: 976 200368
Fax: 976 201404

Los boletines de inscripción, así como información sobre la oferta de alojamiento en hoteles y colegios mayores para las Jornadas, se incluirá en el programa de las JAEM que se distribuirá a centros en el próximo mes de enero y se adjuntará con el número de SUMA del mes de febrero.

Para solicitar más información dirigirse a:

X JAEM
ICE Universidad de Zaragoza
c/ Pedro Cerbuna, 12
50009 Zaragoza
Fax: 976 76 13 45
Correo: xjaem@posta.unizar.es

IV Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (IV CIBEM)

El Comité Nacional del IV Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (IV CIBEM), tiene el placer de invitarlos a participar en dicho Congreso. Sus actividades tendrán lugar en Cochabamba, del 2 al 7 de julio del 2001, la organización estará a cargo de la Sociedad Boliviana de Educación Matemática (SOBOEDMA).

El IV CIBEM pretende continuar el objetivo de los CIBEM anteriores: impulsar el desarrollo de la educación matemática, tanto en la investigación como en el mejoramiento de su aprendizaje y de su enseñanza.

Los temas que proponemos son:

- La Enseñanza Matemática y su proceso de evaluación.
- La integración de la educación matemática en los diferentes niveles del sistema educativo.
- La formación inicial y permanente del docente.
- Reformas educativas y sus implicaciones sobre la didáctica matemática.
- Experiencias de transformación de los modelos de enseñanza aprendizaje.
- Relaciones de la matemática con diversos campos de la vida social.
- La Educación Matemática para jóvenes entre 11 y 13 años.
- Etnomatemática

Agradeceremos sugerencias sobre metodología y nuevos temas que puedan incluirse en el temario del congreso

Así es Cochabamba

La ciudad

Pasear por Cochabamba resulta muy agradable y mejor si se hace en bicicleta, pues la ciudad cuenta con una magnífica ciclovía. Los principales atractivos

El IV CIBEM pretende continuar el objetivo de los CIBEM anteriores: impulsar el desarrollo de la educación matemática, tanto en la investigación como en el mejoramiento de su aprendizaje y de su enseñanza.

en la ciudad son El Prado, vía central llena de restaurantes, juventud, centros de diversión, hoteles y bancos; la Plaza 14 de Septiembre y los barrios aledaños antiguamente señoriales hoy en día formando parte de zonas residenciales de la ciudad, como Cala Cala, Queru-Queru, Aranjuez y Recoleta.

Clima

Durante el período del Congreso la temperatura media es de 18 °C, siendo la media de las máximas 22 °C y las de las mínimas 0 °C, esta época es seca por lo que llueve en muy raras ocasiones.

Pero la región de Cochabamba no es sólo valles, ya que cuenta también con llanos tropicales y ríos pertenecientes a la cuenca del Amazonas, además de dos zonas altiplánicas a más de 3.000 m sobre el nivel del mar. Su variedad en microclimas le dotan de gran versatilidad en su producción agrícola y permiten albergar variada flora y fauna.

Atractivos de la región

- El Chapare.- Zona de bosques tropicales situada en plena Amazonia, con enormes recursos en maderas preciosas tales como mara, caoba, cedro, laurel, balsa, pino y otras, así como también importantes yacimientos de hidrocarburos recientemente descubiertos. Además de su riqueza natural en materias primas para la industria, el Chapare es la región del futuro en Cochabamba en cuanto a Ecoturismo, por ser una zona de ríos insertos en la cuenca del Amazonas, con biodiversidad de especies en flora y fauna sumamente importante y atractivos naturales de gran belleza y esplendor.
- Puerto Villarroel.- Población portuaria de gran belleza natural a 248 km de la ciudad de Cochabamba con aceptable infraestructura. Es el punto de unión entre el departamento de Cochabamba, Beni y Pando en Bolivia, a través de los ríos Ichilo, Mamoré y Madre de Dios.
- Incachaca.- Antigua planta hidroeléctrica a 90 km de la ciudad de Cochabamba. Recurso natural de belleza sin igual con impresionantes cascadas semi-subterráneas y pozas naturales de aguas cristalinas.
- Laguna de la Angostura.- Se encuentra a 17 km de la ciudad. Presenta como atracción turística una vista panorámica impresionante con un paisaje incomparable. Aquí se pueden practicar los deportes de pesca, caza, náuticos y degustar platos exquisitos de pescado.
- Balnearios de aguas termales.- Se encuentran en las faldas de la cordillera del Tunari en forma de corrientes subterráneas de aguas termales mineralizadas. Se afirma que sanan enfermedades hepáticas, renales,

reumáticas, de la piel, gota y ciática. Los balnearios más importantes por su infraestructura turística son: «La Cabaña», Liriuni, Kehuiña y Cayacayani, Tunari

Oportunidades para el viaje

Queremos comunicarles que la línea aérea boliviana LAB, como auspiciadora nos concederá descuentos en los tramos que esta línea cubre, en el siguiente anuncio le haremos conocer como podrán acceder a este descuento.

Lenguas oficiales

Las lenguas oficiales del Congreso serán el español y el portugués.

Programa

Comprende conferencias centrales, paneles de especialistas, comunicaciones breves y grupos de trabajo.

Conferencias centrales

Serán en total 4 (una por día del evento) incluyendo la sesión inaugural el primer día del evento y una sesión de clausura en el último día. Los tópicos estarán relacionados con algunos de los temas anteriormente citados. Cada conferencia tendrá una duración de 1 hora seguidos de 30 minutos para preguntas y respuestas.

Paneles de especialistas

Son grupos de especialistas que se reúnen y dan a conocer su visión personal sobre algún aspecto. Cada panel tendrá una duración de una hora y 15 minutos. Incluyendo las exposiciones de los panelistas y el derecho a réplica por parte del auditorio.

Talleres

Donde determinados especialistas (tanto nacionales como extranjeros) presentan propuestas didácticas concretas para ser realizadas en el aula desde los niveles de Pre-Primaria a Secundaria, trabajan con un grupo de profesores del sistema. Los talleres dependiendo de los temas podrán tener duración de 3 a 6 horas.

Pósters

Son presentaciones de algún trabajo de naturaleza esencialmente visual o exposiciones de material gráfico relacionado con los temas del congreso.

Comunicaciones breves

Es intención de la organización del CIBEM facilitar la participación activa del mayor número de profesores y profesoras. Por ello, siguiendo la tradición de los cibem, se anuncia la posibilidad de presentaciones en el Congreso

*La finalidad
del Congreso
de Didácticas
específicas
es profundizar
en las bases
teóricas,
desarrollo de
la investigación
y las dimensiones
culturales
y prácticas
relacionadas
con la enseñanza,
el aprendizaje
y la formación
del profesorado...*

mediante Comunicaciones Breves, para la exposición de tales comunicaciones se detallará un horario concreto en el programa del Congreso, la presentación tendrán una duración de 30 minutos incluyendo preguntas.

Podrán presentar un resumen de propuestas para las actividades anteriores, hasta el 30 de enero para ser considerado por el Comité Académico, a las direcciones indicadas abajo.

La aceptación o rechazo de las propuestas presentadas se comunicará antes del 15 de mayo de 2000.

Inscripciones

Hasta el 30 de enero 50\$us. Después del 30 de enero 80\$us.

Solicite la información enviando, su nombre y dirección, a cualquiera de las siguientes direcciones:

SOBOEDMA-Bolivia

Casilla 4234 Cochabamba Bolivia

Correo electrónico:

bgrigori@supernet.com.bo

Telef: 00591-4- 241863

(preguntar por Begoña)

fax 00591 - 4 - 255963

Congreso Nacional de Didácticas Específicas: las Didácticas de las Áreas Curriculares en el Siglo XXI

Este Congreso tendrá lugar los próximos días 1, 2 y 3 de febrero de 2001 en la ciudad de Granada y está organizado por las Áreas de Conocimiento de Didáctica de las Ciencias Experimentales, de las Ciencias Sociales, de la Expresión Corporal, de la Expresión Musical, de la Expresión Plástica, de la Lengua y la Literatura y de la Matemática, con sede en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada.

La finalidad de este Congreso es profundizar en las bases teóricas, desarrollo

de la investigación y las dimensiones culturales y prácticas relacionadas con la enseñanza, el aprendizaje y la formación del profesorado en las disciplinas mencionadas, tareas que afectan a la calidad de nuestro Sistema Educativo en su conjunto.

El programa científico se estructura en torno a los siguientes paneles de debate:

1. Las didácticas de las áreas curriculares en las ciencias de la educación.
2. Estatus científico de las didácticas de las áreas curriculares.
3. Formación de maestros en las didácticas de áreas curriculares.
4. Formación de profesores de secundaria en las didácticas de áreas curriculares.
5. Líneas de investigación en didácticas específicas.

Además tendrá lugar la mesa redonda: «La formación didáctica del profesorado» y la conferencia final: «perspectivas de futuro de las didácticas específicas».

Para más información dirigirse a:

Joaquín Roldán Martínez

Facultad de Ciencias de la Educación

Aulario. Cartuja s/n. Granada

Tfno.: 958 246 351

Fax: 958 246 351

Correo:

congresodidacticasespecia@wanadoo.es

página web: www.ugr.es/local/cnde

15.ª Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 15)

Tendrá lugar en Buenos Aires (Argentina) del 16 al 20 de julio de 2001 y está organizado por el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Las actividades estarán centradas en compartir experiencias, conocimientos e investigaciones en el aprendizaje y la enseñanza de la Matemática con colegas



*Los días
19 a 23
de febrero de 2001
va a tener lugar
en Tenerife
el EuroSymposium
Galileo 2201...*

latinoamericanos y de diferentes partes del mundo con el deseo de que este encuentro permita mejorar la realidad de nuestros países en el área de la Matemática Educativa mediante la reflexión conjunta y permanente. Se presentarán trabajos en los diferentes niveles educativos.

Los temas propuestos son:

- Pensamiento matemático avanzado.
- Pensamiento numérico.
- Pensamiento algebraico.
- Pensamiento geométrico.
- Pensamiento de probabilidad y la estadística.
- Incorporación de la tecnología en el aula y su impacto.
- Paradigmas teóricos y metodológicos de la matemática educativa.
- Desarrollo del currículum.
- Formación inicial y permanente de profesores.

Más información en las direcciones electrónicas:

ccrespo@sinectis.com.ar

relme15@sinectis.com.ar

y en la web:

<http://www.cinvestav.mx/clame>

Galileo 2001

Los días 19 a 23 de febrero de 2001 va a tener lugar en Tenerife el EuroSymposium Galileo 2201, organizado por la Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia.

Centrará su atención en tres áreas temáticas, con tres secciones cada una:

1. La ciencia de Galileo.
 - Mecánica.
 - Leyes del movimiento.
 - Cosmología.
2. Galileo y la Iglesia.
 - El Affaire Galileo.
 - Galileo y la Teología.
 - Relaciones históricas del «caso Galileo».
3. El siglo de Galileo.
 - Galileo y la cultura europea.
 - La difusión del trabajo de Galileo.
 - Galileo y las Instituciones científicas.

Durante el simposio se impartirán cinco conferencias plenarios, veinte ponencias, cuatro mesas redondas y treinta y seis comunicaciones.

Para más información dirigirse a:

Fundación Canaria Orotava
Apartado 238
38300 La Orotava-tenerife
s_orotava@redestb.es

53 CIEAEM

La Comisión Internacional para el Estudio y Mejora de la Enseñanza de las Matemáticas, cuya vicepresidencia la ostenta la presidenta de la FESPM, María Jesús Luelmo, convoca en Rodas (Grecia) su 53.º Conferencia los días 4 a 10 de julio de 2001.

El Encuentro comprenderá conferencias plenarios con el objetivo de introducir los diferentes aspectos del tema central, grupos de trabajo y presentaciones individuales y en grupo organizados según los subtemas, talleres que permitan una participación más activa, etc.

El Encuentro tiene como tema principal «La alfabetización matemática en la era espacial. Investigación y práctica escolar hacia una educación matemática para todos».

Se han propuesto cinco subtemas:

1. Las relaciones entre el desarrollo de la investigación del concepto de alfabetización matemática y la mejora de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

*El 53 CIEAEM
tiene como tema
principal
«la alfabetización
matemática
en la era espacial.
Investigación
y práctica
escolar
hacia
una educación
matemática
para todos».*

2. Las competencias matemáticas indispensables de los currículos y del material didáctico, en el contexto de las nuevas demandas sociales.
3. Los desafíos de la investigación sobre la formación profesional de los profesores y sobre las innovaciones posibles de la práctica escolar en los planos nacional e internacional.
4. Las posibilidades, límites y riesgos de las tecnologías de la información y de la comunicación para la alfabetización matemática.
5. Alfabetización matemática y educación diferenciada: la cuestión de la diversidad cultural y de la equidad social.

Más información:

Prof. F. Kalavassis
Université de la Mer Egee
Faculté des Sciences Humaines
Département d'Education Prescolaire
1, Rue democratias
85100 RHODES (Grecia)
Tfno: 00-30-241-99421 ó 00-30-241-99122
fax: 00-30-241-99420
E-mail: cieaem53@rhodes.aegean.gr



SUSCRIPCIONES

Particulares: 3.500 pts. (3 números)
Centros: 5.000 pts. (3 números)
Número suelto: 1.700 pts.

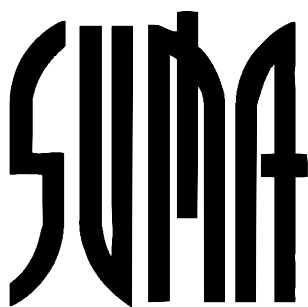
Revista SUMA

ICE Universidad de Zaragoza. c/ Pedro Cerbuna, 12. 50009 ZARAGOZA
Fax: 976 76 13 45.
E-mail: suma@public.ibercaja.es

Se ruega a los suscriptores y a los socios de la Federación que para cualquier comunicación sobre envío de ejemplares atrasados, reclamaciones, suscripciones... se haga por correo, fax o mail. No se podrán atender este tipo de comunicaciones por teléfono.

NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, ICE de Universidad de Zaragoza, C./ Pedro Cerbuna 12, 50009 Zaragoza), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.
2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos en ningún caso serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.
3. Los gráficos, diagramas y figuras se enviarán en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. Así mismo, podrán incluirse fotografías. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.
4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de entre cinco y diez líneas, que no necesariamente tiene que coincidir con la Introducción al artículo. Debe ir escrito en hoja aparte. En ese mismo folio aparecerán los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede).
5. Si se usa procesador de texto, agradeceremos que además se envíe un disquette con el archivo de texto que contenga el artículo, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quiera incluir. La etiqueta del disquette debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda MS-Word (hasta versión 5.0) en Macintosh, o WordPerfect (hasta versión 5.1) en PC. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF.
6. En cualquier caso, tanto un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.
7. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.
8. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo.
9. La bibliografía se dispondrá al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:
TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma*, n.º 20, 91-98.
En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas*, Labor, Barcelona.
En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas*, 2, ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.
10. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ...supone un gran avance (Hernández, 1992).
Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ...según Rico (1993).
11. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como —en caso afirmativo— la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.



BOLETÍN DE SUSCRIPCIÓN

	Tarifa	
	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	3.500 pts.	1.700 pts.
Centros	5.000 pts.	1.700 pts.
Europa	\$40 USA	\$14 USA
América y resto del mundo	\$50 USA	\$17 USA

Fotocopiar y enviar a: Revista SUMA. ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Deseo suscribirme a la revista SUMA:

Nombre y apellidos:

Dirección: Tno.:

Población: CP:

Provincia/país CIF/NIF:

☐ Suscripción a partir del n.º (3 números)

☐ N.ºs sueltos:

Total

Importe

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto).

☐ Transferencia bancaria (Ibercaja: 2085-0168-50-03-000415-98).

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista Suma.

Firma y fecha:

☐ Giro postal dirigido a Revista Suma.

Nombre y apellidos:

Código Cuenta Cliente

Entidad

--	--	--	--	--

 Oficina

--	--	--	--	--

 DC

--	--

 Cuenta

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Banco/Caja

Agencia n.º: Dirección:

Población: Provincia:

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que periódicamente les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (Fecha y firma):

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

FESPM