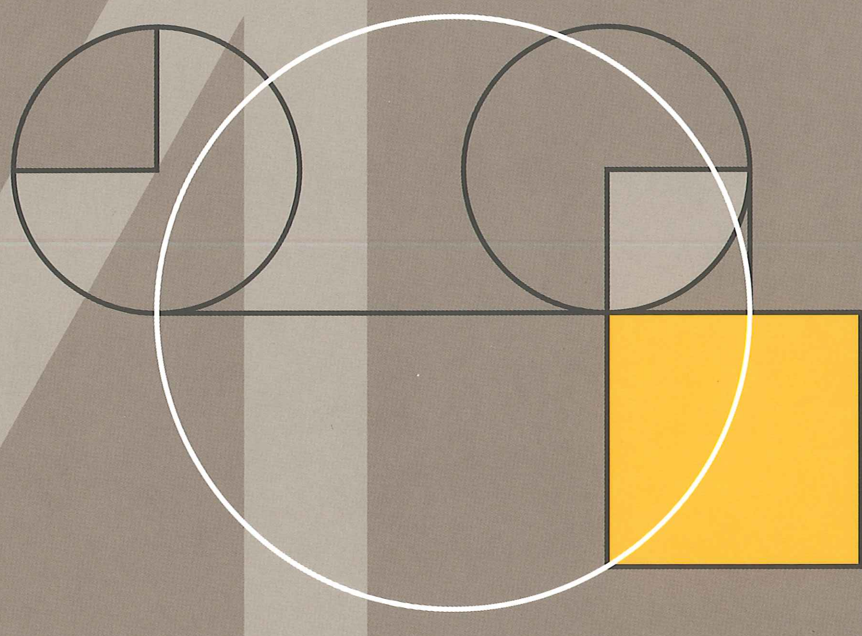
SUMA

REVISTA SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

n.º 40



JUNIO 2002

SUMA 40

junio 2002

Índice

Edita
Federación Española de Sociedades
de Profesores de Matemáticas

Diseño portada
Pablo Cano
Diseño interior
Concha Relancio y M.ª José Lisa
Maquetación
E. Palacián, J. Sancho, D. Sierra

Revista SUMA
ICE Universidad de Zaragoza
C. Pedro Cerbuna,12
50009-ZARAGOZA

Tirada: 6.800 ejemplares
Depósito Legal: Gr. 752-1988
ISSN: 1130-488X
Impresión: INO Reproducciones. Zaragoza

MISCELÁNEA

RINCONES

SUMA 40
junio 2002

Estelas en la mar

EDITORIAL

DESDE EL PASADO mes de marzo ocupo la presidencia de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, por esta razón los directores de SUMA me han ofrecido muy gentilmente este espacio editorial.

Quiero empezar por agradecer a María Jesús Luelmo su extraordinaria dedicación al cargo en el que me ha precedido; tampoco puedo olvidar a los anteriores presidentes, Ricardo Luengo, Manuel Fernández, y especialmente a Gonzalo Sánchez. Mi recuerdo no es sólo un agradecimiento por su entrega y trabajo, sino porque una federación, un trabajo colectivo, se hace «paso a paso» o «infinitésimo sobre infinitésimo», con el esfuerzo de todo un equipo y sus sucesivos relevos a lo largo de los años. Esta Federación es, y espero que siga siendo, un punto de referencia obligado en la mejora de la enseñanza de las matemáticas en todos sus niveles en nuestro país, sin olvidar la influencia que podamos tener en Europa, desde el seno de la ya existente Federación Europea de Asociaciones de Profesores de Matemáticas, y en América Latina, donde, gracias sobre todo al esfuerzo de Luis Balbuena, estamos impulsando la creación de una Federación Iberoamericana.

En los últimos meses las matemáticas han estado y siguen estando de actualidad, mejor dicho la enseñanza de las matemáticas está de actualidad.

Por un lado está la estela de los informes: TIMSS, o más recientemente PISA, en el que, con respecto a ciertos indicadores estandarizados, la enseñanza de las matemáticas en España, en términos absolutos, no ha salido muy bien parada. Estos estudios muestran un déficit en el aprendizaje de las matemáticas de las personas jóvenes de nuestro país, pero no *contabilizan aspectos importantes para la interpretación de estos resultados como: horas efectivas de clase en cada período de escolarización, número de alumnas y alumnos por aula, presupuesto económico dedicado a educación, o la valoración de resultados sobre informes anteriores.*

La OCDE es un organismo eminentemente económico y la finalidad de su informe está orientada hacia el mercado laboral en una libre economía mundializada; en este sentido el informe tiene un valor indiscutible, pues advierte del posible déficit laboral de nuestros jóvenes. Pero sería bueno que nuestras instituciones educativas hicieran también sus informes y valoraciones teniendo en cuenta las variables antes citadas, y otras posibles, y con objetivos educativos tendentes a mejorar nuestros resultados, a aumentar la calidad de la enseñanza de las matemáticas en las aulas.

Por otro lado, la Ley de Calidad de la Enseñanza, aún en fase de tramitación, nace como ley de ordenación general del sistema educativo, que modifica sustancialmente la Ley actualmente en vigor. El sistema educativo de un país democrático no puede ser una moneda de cambio político. Hoy existe en el desarrollo de todas las ciencias, también las matemáticas, un importante capítulo que versa sobre qué ciencia (qué matemáticas) se debe enseñar y cómo se debe enseñar, en cualquier etapa educativa. Contenidos curriculares y didáctica.

Las matemáticas en la enseñanza escolar no pueden ser troceadas por bloques de conocimiento, como hacen muchos programas y libros de textos; deben ser presentadas globalmente, ligadas a la propia vida de las y los estudiantes y orientadas a desarrollar su capacidad personal de razonamiento y abstracción. Y el aprendizaje sólo puede hacerse de una manera activa: por construcción, por descubrimiento, por experimentación. La enseñanza dogmática debe quedar fuera de la enseñanza de las ciencias.

Finalmente quiero nombrar dos problemas más. El primero es la diferencia de horas destinadas a la enseñanza de las matemáticas en los diferentes ámbitos territoriales, comunidades autónomas, países de Europa. El segundo es de gran importancia, la enseñanza de las matemáticas en la Educación Primaria. A mi juicio, la muy deficiente formación matemática inicial del profesorado conlleva una mala práctica educativa en los primeros años, vitales para la formación de las personas.

Y por supuesto, no vamos a olvidar nuestras queridas olimpiadas y esta revista SUMA que, con este número, casi sin darse cuenta, ha cumplido 40, ¡felicidades!

A todas estas tareas, en realidad una sola, mejorar la enseñanza de las matemáticas, queremos dedicar nuestro esfuerzo.

Florencio Villarroya

Presidente de la FESPM

SUMA 40
junio 2002, pp. 5-6

In memoriam Luis Santaló

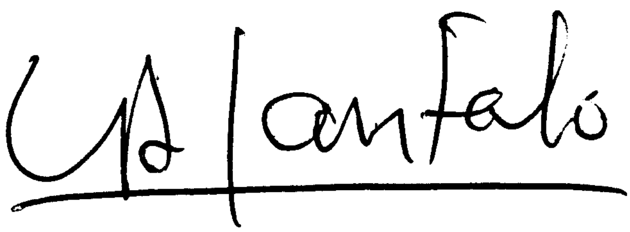
Jose M.ª Galdón Canavese

ARTÍCULOS

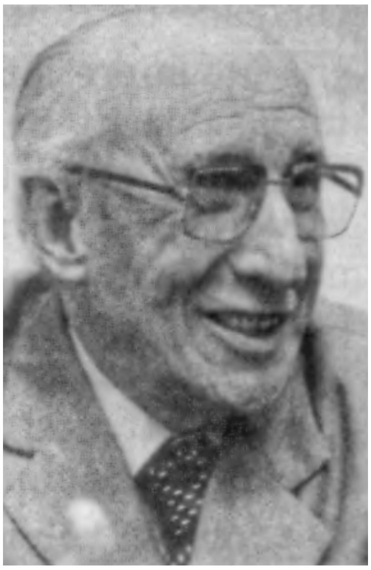
EL PASADO 22 DE NOVIEMBRE falleció en Buenos Aires el insigne matemático español Luis Antonio Santaló Sors, Premio Príncipe de Asturias de Investigación Científica y Técnica 1983.

El Profesor Santaló nacido en Gerona en 1911, estudió Ciencias Exactas en la Universidad de Madrid, doctorándose en 1935 bajo la dirección de Julio Rey Pastor. Marcha a Alemania a ampliar estudios de la incipiente Geometría Integral con el Profesor Virgen Blázquez, creador de esta rama de la Matemática. A su regreso a España en 1936 es movilizado y sigue los cursos de piloto, volando los famosos cazas Polikarpof I-15. A1 acabar la guerra pide asilo político en Francia, y gracias a la ayuda de los matemáticos Henry Cartan y Julio Rey Pastor consigue irse a Buenos Aires, donde se encontraba éste último, que alternaba la docencia en Argentina y España. Es contratado como profesor en la Universidad de Rosario, donde es decano el Ingeniero Cortés Pla, que había creado el Instituto de Matemáticas, y allí ejerce la enseñanza e investigación durante diez años.

En 1949 marcha a Princenton, Nueva Jersey, al Instituto de Estudios Avanzados donde prosigue sus investigaciones e imparte cursos de formación del profesorado. Después es requerido por la Universidad de Chicago. A su regreso a Argentina es contratado por la Universidad de Buenos Aires donde trabaja con Rey Pastor y consigue la cátedra.



El Profesor Santaló ha sido una autoridad mundial en el campo de la Geometría Integral, con numerosísimos trabajos de investigación. Uno de sus libros *Geometría Integral y Probabilidades geométricas* es un clásico en muchas Facultades de Matemáticas y Escuelas de Ingenieros. A su vez estuvo sumamente interesado por la Educación Matemática, cuando prácticamente nadie se interesaba en las Facultades de Matemáticas por la pedagogía y didáctica de esta asignatura. Fue una de sus obsesiones el intentar hacer comprensibles las Matemáticas a todos los niveles, en especial en la Secundaria, donde introdujo nuevos contenidos relacionados con la Estadística, que él consideraba de obligado estudio en edades tempranas.



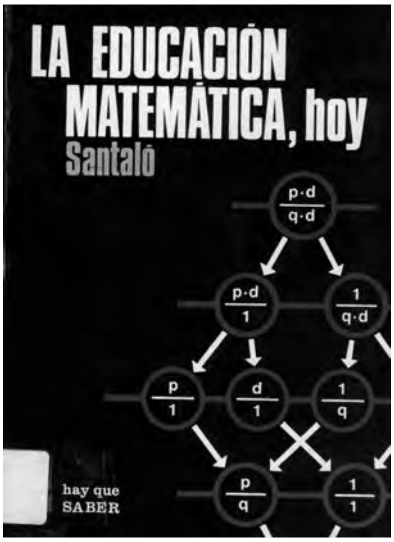
En Argentina fue miembro de la Comisión Nacional de Energía Atómica, y presidente de la Academia de Ciencias. También fue miembro de la Academia de Ciencias de Nueva York y de la Real Sociedad de Estadística del Reino Unido, Doctor honorífico por la Universidad Politécnica de Cataluña y miembro del Instituto de Estudios Catalanes.

Se le concedió en 1983 el premio Príncipe de Asturias de Investigación Científica y Técnica, por «sus sobresalientes investigaciones en diversos campos de la Matemática, especialmente en Geometría Integral, de gran trascendencia en el desarrollo de las corrientes modernas de esta ciencia; sus investigaciones –indicaba el acta del fallo del jurado–, asociadas a una labor universitaria ejemplar, configuran la personalidad de este gran matemático de Hispanoamérica, internacionalmente reconocido y considerado como uno de los más importantes geómetras contemporáneos».

Asiduo ponente en todos los ICME, Congreso Internacional de Educación Matemática, tuve la fortuna de conocerlo en el IV, que se celebró en la Universidad de Berkeley, California en 1980, y ver su entusiasmo por cómo hacer más fáciles las explicaciones de las matemáticas en la Secundaria, sus métodos y consejos para los que nos dedicamos a esta labor, y la importancia de saber enseñar esta asignatura a edades tempranas.

Los profesores de matemáticas tenemos que agradecer al Profesor Santaló toda la labor que hizo por la didáctica de la Matemática e intentar –como él dijo al Príncipe de Asturias– «endulzar el trago amargo que parece resultar para tantos estudiantes y hacer que nadie quede al margen de un lenguaje hoy indispensable».

José M.ª Galdón
IES Carlos Bousoño.
Majadahonda (Madrid).



SUMA 40
junio 2002, pp. 7-17

La acción tutorial en los trabajos de investigación en el Bachillerato

Grup Vilatzara*

ARTÍCULOS

En este artículo presentamos un modelo de acción tutorial de los trabajos de investigación en el Bachillerato, que estamos poniendo en práctica. Clasificamos los diferentes tipos de investigaciones y analizamos los puntos más significativos de tal modelo, cuya finalidad es la de mejorar las capacidades de investigación del alumnado.

LOS TRABAJOS de investigación que los alumnos de Cataluña han de realizar en el Bachillerato son un conjunto de actividades estructuradas y orientadas a la investigación, sobre un ámbito escogido y acotado, en parte, por el alumnado, y llevadas a cabo durante un período aproximado de un curso.

El objetivo principal del trabajo de investigación es que el alumnado use determinados procedimientos, y que lo haga en ámbitos que pueden ser diferentes de aquellos en los que los adquirió, profundizando, al mismo tiempo, sobre algún tema de su interés. Han de ser actividades para consolidar y desarrollar capacidades de investigación, argumentación y expresión, aplicándolas a las diferentes materias del currículo. Con ellas se pretende que los alumnos sean capaces de transferir conocimientos de un campo a otro. En definitiva, pretenden ser trabajos en los que intervengan todos los elementos de una investigación –incluyendo una presentación oral ante un tribunal del instituto–, como se describe en la normativa que los regulan (Departament d'Ensenyament, 1992).

Un trabajo de investigación compromete al alumnado y al profesorado en una tarea común de acuerdo con los objetivos generales oficiales (resumidos en el párrafo anterior). Estos objetivos se pueden conseguir siguiendo una acción tutorial que permita involucrar a los alumnos en la realización de investigaciones ricas y novedosas, y que sean, a la vez, de su interés. Para conseguir este fin, el Grup Vilatzara ha desarrollado y ha puesto en práctica una forma de actuar específica (Grup Vilatzara, 1999, 2000), que abarca aspectos tan diversificados como las ofertas de trabajos de investigación, las reflexiones iniciales con cada alumno o alumna, las orientaciones básicas a los profeso-

* Los componentes del Grup Vilatzara son Jesus Bondia, Pedro Cobo, Joaquín Giménez, Francesc Campos, Jordi Comellas, Jaume Serra, Manuel Sol y Xavier Vilella.

res, la planificación, el seguimiento y la producción final, así como la evaluación y la autorreflexión de los alumnos.

En este artículo nos proponemos incidir en los aspectos más relevantes de esta acción tutorial, con la finalidad de mejorar nuestra actuación como profesores en la dirección de trabajos de investigación, conscientes de que esta mejora contribuirá a desarrollar de forma más efectiva las capacidades de investigación de los alumnos, que es, en definitiva, el fin último de nuestra actuación. Con ello, además, cada profesor o profesora tendrá la oportunidad de ampliar sus conocimientos respecto a los contenidos de las investigaciones, lo que le facilitará la generación de líneas nuevas de investigación.

Proceso de tutorización

La acción tutorial que proponemos, y que mostramos esquematizada en la figura 1, la hemos dividido en tres fases: inicio y adaptación, desarrollo, y comunicación y reflexión. La primera de ellas abarca aspectos como: la preparación y presentación de las ofertas de posibles trabajos de investigación al alumnado, las propuestas que éste nos hace sobre los temas de su interés y los acuerdos a los que los profesores y los alumnos llegan sobre el contenido del trabajo y sobre la actuación futura. En esta fase, el tutor o la tutora ha de facilitar al alumnado la elección del tema, sabiendo adaptarlo a su nivel de conocimientos. Al mismo tiempo, ha de ir cediéndole el protagonismo, de tal forma que los acuerdos que se consensúen entre ambos al final de la fase –acotación del tema y de los objetivos, explicitación del problema, planificación y prevención de actuaciones, y organización general–, sirvan para dar al alumnado autonomía plena en las siguientes fases.

A partir de su compromiso con el tutor y de la elaboración de la planificación, el alumno toma el protagonismo y los profesores pasan a un segundo plano, realizando, en la fase de desarrollo, un papel no menos importante que el de la primera, como es el de controlar el cumplimiento de los acuerdos a los que han llegado. Este control se realizará mediante entrevistas periódicas y revisiones del material que vaya presentando el alumno o alumna.

Durante el desarrollo de la investigación, las interacciones profesor-alumno han de incidir en la toma de conciencia por parte de éste sobre dónde se encuentra en el proceso de resolución y sobre las posibles modificaciones y aceptación de limitaciones que se vayan produciendo. La explicitación de tales acotaciones y limitaciones del tema a investigar obligará al alumno a aportar ideas sobre posibles ampliaciones de la investigación, o sobre nuevos temas que puedan ser objeto de futuras investigaciones. Todo ello contribuirá al desarrollo de su madurez científica.

La fase de desarrollo acaba con la decisión de que se tienen suficientes elementos de la resolución para darla por finalizada, aunque no se haya resuelto totalmente el problema de partida.

En la última fase —comunicación y reflexión—, el objetivo estará centrado en instar al alumnado a perfeccionar los argumentos que ha dado y a preparar una buena presentación del proceso realizado. Esta presentación puede aprovecharse como instrumento de revisión y autorreflexión, de tal forma que le obligue a ser consciente de todas las fases del proceso y a reflexionar sobre la eficiencia y utilidad de la solución encontrada, aspecto que nunca hemos de perder de vista.

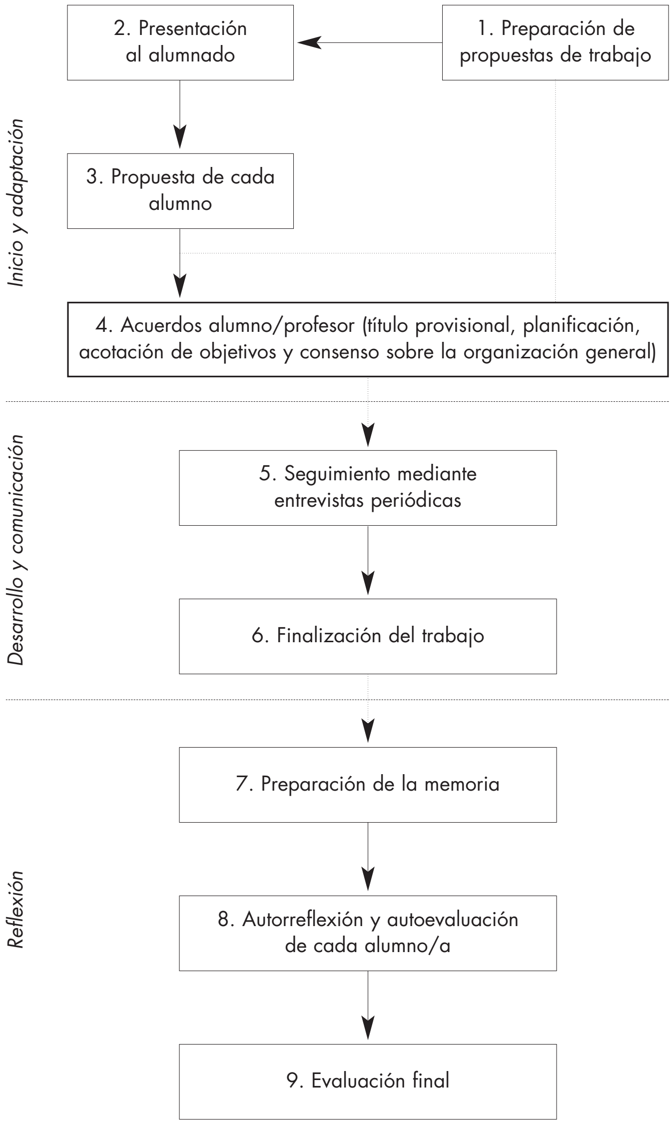


Figura 1. Esquema secuencial de la acción tutorial de los trabajos de investigación en el Bachillerato

Los temas y los tipos de investigación

Para conseguir ilusionar al alumnado y darles la oportunidad de que sean ellos los que definan el tema de investigación, debemos reconocer, desde el inicio, la importancia de definir ámbitos de trabajo y no temas concretos. Así, pensamos que las investigaciones matemáticas consideradas tienen tres elementos clave: una pregunta relevante, un desarrollo organizado que intenta darle respuesta y un proceso comunicativo que explica el cómo y el porqué del resultado. La pregunta puede ser sobre un tema cualquiera, pero siempre que en su desarrollo se usen técnicas propias de las matemáticas.

Ante todo, debemos reconocer que existen distintos tipos de investigación y problemas posibles, y que no siempre cualquier tipo de trabajo está al alcance de cualquier alumno.

Según las técnicas a utilizar podemos considerar tres tipos de investigaciones: experimental, tecnológica (que algunos llaman aplicada) y básica.

Llamamos investigación *experimental* a la que parte de un problema que requiere de un estudio de la situación misma, observándola con medios directos de entrevista, analizando los datos con medios propios de la etnografía y concluyendo, normalmente, con descripción y conjeturas. En este sentido, se puede hablar de un personaje matemático y su actuación, del reconocimiento de elementos matemáticos de una realidad como la calle, la arquitectura..., o de la modelización de un problema real, como el análisis del tránsito en los cruces de las calles, etc.

Consideramos como *tecnológica* la investigación que se centra en reconocer soluciones aplicadas de conocimientos matemáticos adquiridos o conocidos previamente. Aquí, lo importante es buscar relaciones, sintetizar informaciones matemáticas, o bien resolver algún caso particular de un problema real. En este tipo de problemas, se tiende a plantear su solución de formas distintas, aislando variables y concluyendo por reconocer que sólo se ha resuelto una parte de los mismos. Entre otros, en esta categoría estarían los siguientes trabajos: los números de Fibonnacci y sus aplicaciones, bases matemáticas de la música dodecafónica, qué se sabe de la teoría de onditas y en qué se aplica, las fractales, etc.

La investigación *básica* se centraría en tratar de descubrir aspectos en el interior de la matemática y su conceptualización. Evidentemente el alumnado no descubrirá teoremas importantes nuevos, pero puede rehacer soluciones computacionales a algún problema conocido, explicar sistemáticamente aspectos de la matemática actual no habituales, etc. Normalmente este es el tipo más complejo de investigación porque el alumnado no está preparado y no conoce ejemplos en su formación, pero podemos encomendar alguna tarea que se acerque a la teorización para alumnos muy predispuestos para la matemática abstracta. En un nivel más simple, el trabajo podría concluir en una buena síntesis de resultados. Lo importante en este tipo de investigación es que el alumnado se enfrente, como nuevo, al problema, aunque éste se haya resuelto ya. Ejemplos de este tipo son investigaciones sobre métodos numéricos de aproximación, análisis de técnicas diferentes de muestreo, etc.

Según el tipo de información de que se trate, los trabajos de investigación pueden ser: temáticos matemáticos (aproximaciones, fuerzas y máquinas, análisis matemático de un movimiento como un molino de agua, realización de un esquema en movimiento con ordenador, etc.), biográficos (Mateu de Santcliment, Francesc Aragó, Llorens Presas, Enric Jardí, Francesc Comas i Solà, etc.), modelizadores (fracciones y crecimiento, minerales y geometría, cerámica y geometría, análisis de cúpulas, etc.), historia de la ciencia (Galileo, Einstein, mapas y proyecciones, etc.).

La elección del tema es importante porque deben hacerse compatibles la diversidad de intereses del alumnado, las posibilidades reales de no encontrar todo resuelto, y el realismo de reconocer la capacidad de enfrentarse con objetivos factibles.

Los enfoques temáticos y la adaptación al alumnado

La elección del tema es importante porque deben hacerse compatibles la diversidad de intereses del alumnado, las posibilidades reales de no encontrar todo resuelto, y el realismo de reconocer la capacidad de enfrentarse con objetivos factibles. Sería bonito para algunos estudiantes el enfrentarse con un problema de intervención real o de mejora del entorno, pero quizás se requieren instrumentos técnicos matemáticos que no están a su alcance. Guardar ese equilibrio inicial es importante.

En la figura 2 se presentan algunos ejemplos de cómo un mismo centro de interés puede dar lugar a trabajos distintos con contenidos matemáticos diversos. Así, el tutor o tutora debe reconocer si es mejor encauzar al estudiante hacia un tema u otro, según la capacidad de cada alumno. Es posible que esta elección no se pueda hacer inmedia-

Centro de Interés	Tema concreto	Contenidos asociados
La vida, lo biológico y lo complejo	• Caos y moléculas • Ecología y Matemáticas • Arte kinético	Sistemas biológicos Ecuaciones de Volterra Ecuaciones en diferencias Métodos de pronóstico
Mensajes secretos, espionaje...	• Criptografía y protección de datos • Criptoanálisis	Modelos estadísticos Diseños muestrales Lenguajes de programación
Observación de formas curiosas	• Formas ergonómicas • Diseño y empaquetamientos • Paraboloides y Gaudí	Simetría Geometría y realidad Ecuaciones y gráficas Modelos geométricos Diseño por ordenador

Figura 2. Contenidos asociados a temas concretos de investigación

tamente y deba esperarse a ver la información que se puede obtener en cada caso. Esa adaptación es importante, porque el alumnado no es capaz de tomar esa decisión por sí mismo en esta edad debido a su inexperiencia.

Con todo, es importante que la elección del tema vaya acompañada de la búsqueda de la pregunta o preguntas que deben responderse a lo largo del trabajo. El contacto tutor-estudiante debe facilitar no sólo la elección del tema de trabajo sino las pistas de cómo éste debería desarrollarse.

A continuación (figura 3) indicamos dos ejemplos diferentes de trabajos de investigación que incluyen dos niveles diferentes de tratamiento o enfoque.

	Nivel más simple	Nivel más alto
Trabajo biográfico sobre un personaje	Identificación del papel matemático del personaje, describiendo sus descubrimientos y organizando algunos ejemplos de forma original. Resumen sistemático de la información sin más aportaciones personales.	Identificación de algunas tareas matemáticas ejecutadas. Reelaboración de alguna de ellas mediante el cambio a un lenguaje actual de lo aportado por el autor en su momento, o la realización de alguna forma alternativa de resolución a algún problema que haya resuelto...
Trabajo de aplicación-experimentación	Búsqueda de información relevante sobre el tema y desarrollo organizado de ideas. Sistematización de algún elemento creativo, pero sin aportar soluciones propias.	Modelización completa del fenómeno, trabajando con datos reales y tratando de establecer relaciones matemáticas con ellos. Establecimiento de ecuaciones, o explicación de varios casos particulares. Análisis pormenorizado de las variables consideradas.

Figura 3. Ejemplos de niveles asociados a trabajos de investigación

La elección de un nivel de dificultad más bajo no quiere decir que vaya a haber un trabajo menos relevante, ya que la relevancia depende de la novedad, del impacto social y de la auténtica resolución de un problema. Y eso no tiene nada a ver con que el trabajo pueda ser más o menos digno, que depende fundamentalmente de cómo se presenta y qué síntesis aporta.

Oferta de trabajos de investigación

Con la oferta de trabajos de investigación que hacemos al alumnado, cuya redacción completa mostramos en la figura 4, tratamos de transmitirle básicamente dos ideas relacionadas entre sí:

a) La de que no es una lista cerrada de temas, sino que pretendemos abrirle perspectivas de hacer una investigación en matemáticas, con la finalidad de que tenga la posibilidad real de elegir él mismo el tema que más le guste. Es decir, tratamos de que la oferta que le mostramos sea un punto de partida que le haga reflexionar sobre sus aficiones e intereses, y la relación de éstos con las matemáticas.

b) La de poner de manifiesto, al mismo tiempo, la inmensa cantidad de posibilidades de identificar las

Hay muchas cosas sobre las que puedes investigar relacionadas con las Matemáticas, para que te hagas una idea te mostramos a continuación algunos ejemplos.

- *Si tienes alguna afición* –el tenis, el baloncesto, la pesca, la fotografía, la astronomía, la música, la guitarra o cualquier otra–, puedes investigar su relación con las Matemáticas.
- *Si estás interesado en trabajos* de investigación que estén relacionados con *la historia de personajes importantes*, sean más universales –Euclides, Pitágoras, etc.– o más cercanos a nosotros –R. Llull, P. Puig Adam, Rey Pastor, etc.–, puedes estudiar tanto sus vidas y sus obras como sus contribuciones a la construcción del conocimiento matemático. O puedes estar interesado en hacer un estudio de las medidas antiguas de longitud, de áreas y de volúmenes de tu comarca.
- *Si tienes afición por las Artes* puedes llegar a identificar las Matemáticas que hay en las obras de Durero, Gaudí, Escher, etc., o a analizar desde el punto de vista matemático algún edificio importante que conozcas, o, por ejemplo, a estudiar las proporciones góticas y románicas. O, ¿per qué no?, el diseño y la generación de rejas.
- *Si te preocupas por le ecología, la biología, el urbanismo* o cualquier otra disciplina, sin olvidar las Matemáticas, puedes investigar los aspectos matemáticos relacionados con, por ejemplo, el ruido, el corazón, la contaminación atmosférica, la energía en el mundo, las epidemias, la evolución del precio del suelo en tu ciudad, etc.
- Quizás te gusten los *juegos de estrategia*. Si es así puedes dedicarte a investigar alguno de ellos, como por ejemplo el Nim, las ranas y los sapos, el ajedrez de Dawson, la liebre y los perros, etc., o bien hacer una clasificación general de ellos, estudiando las características más significativas de algunas clases.
- En esta propuesta no nos olvidamos del alumnado al que más le gusta las Matemáticas. Para ellos y ellas, *proponemos temas puramente matemáticos* –la razón áurea, la sucesión de Fibonacci, el teorema de los cuatro colores, etc.–, o bien temas relacionados con la *modelización matemática de situaciones reales*, como por ejemplo, la optimización de empaquetamientos, el aterrizaje de un avión, el ala delta, la distribución de farmacias en una ciudad, la regulación y duración de los semáforos, las formas y el aprovechamiento del espacio de los aparcamientos, etc.

Con esta propuesta te queremos transmitir la idea de que las Matemáticas están muy presentes en la vida real, y que investigar esta presencia puede aportar descubrimientos importantes que están a tu alcance.

Figura 4. Modelo de una oferta de trabajos de investigación

matemáticas en diferentes situaciones de la vida real y de relacionarlas con otras disciplinas, tratando de acabar con la idea de que el objeto de la investigación matemática sólo sea las propias matemáticas. En definitiva, tratamos de transmitir al alumnado la idea de que cualquiera de sus aficiones, por sencilla que sea, puede ser objeto de investigación desde el punto de vista matemático.

Los instrumentos y la búsqueda de información

Inicialmente el alumnado no sabe qué hacer y se siente perdido. Hemos de tener a mano diferentes fuentes de información, según el tipo de trabajo, para aprovechar su interés inicial. Los alumnos deben ser conscientes de que han de buscar información, que les sea útil y no disperse el trabajo. La tentación de acumular información siempre es grande, por tanto se ha de tratar de evitar.

Las fuentes de información pueden ser: personales (entrevistas, encuestas, visitas, etc.), institucionales (organismos, empresas, centros de documentación, etc.), documentales (libros, manuales, enciclopedias, etc.), telemáticas (webs, bases de datos, peticiones por e-mail), etc.

A todos los efectos aquí recomendamos las webs

www.pntic.es;
www.xtec.es/recursos/prg_educ/matematiques/,

y también los ejemplos que se encuentran en los artículos sobre Internet y matemáticas (Pérez, 2000, y monográfico de UNO, 1998).

Otras páginas de interés las mostramos en la figura 5.

La web es un sistema en el que muchos alumnos encuentran información. Debemos ayudar a descubrir lo importante, despreciar lo accesorio, centrar el tema... Eso no es nada fácil ante la avalancha de información. Si el alumnado no ha usado los buscadores, deberemos ayudarlo, pero siempre sin perder de vista el enfoque inicial del problema. El trabajo de investigación no se acaba con la información, pero también es cierto que sin esa búsqueda, cualquier trabajo sin referencias parece llovido del cielo y no conecta con la historia de la propia ciencia. Es crucial y de gran potencial educativo reconocer el valor de que un problema quizás ya se ha resuelto o se conocen aproximaciones.

En resumen, en la primera fase del trabajo –inicio y adaptación–, son los mismos alumnos los que seleccionan su trabajo. Con ello pretendemos conseguir que se lo tomen como un reto y se sientan motivados para dedicarse plenamente. Si logran alcanzar esa motivación habrán conseguido un buen punto de partida, pero para que el alumno empiece el trabajo con una cierta autonomía, independientemente de que se le tenga que ayudar a buscar fuentes de información, hay que orientarle en el establecimiento de un plan de trabajo y ayudarle a concretar los objetivos del mismo.

Planificación y acotación de objetivos

Para acabar la primera fase del modelo de acción tutorial de los trabajos de investigación que proponemos, los alumnos han de conseguir una aproximación al tema de estudio, mediante la realización de un esquema general que sirva de guía en su desarrollo, que señale los objetivos concretos que se han de alcanzar y las preguntas clave

NASA homepage	http://sse.jpl.nasa.gov/ Todo tipo de información sobre el Sistema solar
ERIC database	http://ericir.syr.edu/ Base educativa de artículos sobre educación.
NCTM	http://www.nctm.org/ Información y red de relaciones con las matemáticas en USA
CHANCE Database	http://www.dartmouth.edu/~chance/ Base de datos sobre cuestiones de probabilidades
Matemáticas y mundo real	http://score.kings.k12.ca.us/real.world.html Trabajos sobre matemáticas y el mundo real
Fórum de matemáticas	http://forum.swarthmore.edu/social/index.html Toda clase de contenidos matemáticos
Problemas y Puzzles	http://www.mathsoft.com/puzzle.html Todo tipo de puzzles
Matemáticas	http://www.maths.usyd.edu.au:8000/s/search/ http://euclid.math.fsu.edu/Science/Software.html http://www.sunburstonline.com/ Base de datos de temas matemáticos
Bases de historia de la ciencia	http://www.asap.unimelb.edu.au/hstm/hstm_bio.htm http://www.-groups.dcs.st-and.ac.uk:80/~history/Indexes/ http://es.rice.edu/ES/humsoc/Galileo/Catalog/Files/
La época de Galileo	http://galileo.imss.firenze.it/ http://www.imss.fi.it./museo
Recursos matemáticos	http://www.ex.ac.uk/cimt/general/mathguid.htm#pi Historia de π, números primos y otros.

Figura 5. Algunas páginas webs de información, útiles para los trabajos de investigación

a las que se debe dar respuesta. Esto implica un trabajo intenso de colaboración entre profesor y alumno. Éste ha de buscar información sobre cuestiones generales sin detenerse en cuestiones de detalle para tener una visión de conjunto de lo que podría ser el trabajo. Pero lo que ha de resultar más interesante y fructífero es la conversación entre ambos para comenzar a seleccionar, resaltar y acotar aquellas partes que son coherentes y que ayudan a concretar los objetivos de la investigación.

…implica un trabajo intenso de colaboración entre profesor y alumno.

En nuestra experiencia constatamos que es interesante observar las primeras impresiones que van teniendo los alumnos, qué es lo que les sorprende, qué les llama la atención, qué les inquieta, dónde creen que encontrarán la dificultad. Si profesor y alumno no se conocían de antemano, también resulta interesante detectar el talante, la actitud, la capacidad y el interés con el que el alumno se acerca al trabajo que haya elegido. Todo ello contribuirá a ir concretando la orientación que se le dará al trabajo y a crear un clima de confianza y comunicación necesario para el buen acompañamiento que se ha de dar a lo largo de todo el proceso.

Todas las actuaciones anteriores han de desembocar en la elaboración de un guión del trabajo que servirá al alumno para empezar la segunda fase —desarrollo—, que se pretende que sea más autónomo, adquiera más protagonismo y la colaboración del profesor pase más a un segundo plano.

Para que el alumno elabore una planificación y la consensúe con el profesor, le damos unas pautas con los cuatro elementos clave siguientes:

1. *Objetivos provisionales*

   Hay que explicar con enunciados concretos lo que se pretende con el trabajo. La finalidad de la fijación de los objetivos provisionales es la de orientar hacia la búsqueda de información y proporcionar criterios para seleccionarla. Evidentemente tienen un carácter provisional ya que con el desarrollo del trabajo pueden aparecer nuevos objetivos de interés o una modificación de los iniciales.

2. *Partes fundamentales*

   Es interesante diferenciar las partes del trabajo porque facilita una visión de conjunto y facilita el análisis de su coherencia. En ciertos momentos puede suponer una ayuda para que las cosas concretas no nos haga perder de vista el conjunto del trabajo y nos ayude a administrar esfuerzos.

3. *Esquematización de las actuaciones más importantes*

   Es difícil prever con detalle lo que habrá que hacer, y la propia dinámica se irá imponiendo. Pero es importante hacer una previsión sobre, por ejemplo, si hay que hacer consultas bibliográficas, en qué bibliotecas (dirección, horarios); si hay que hacer trabajos de campo para recogida de datos, en qué momento, en qué lugar, con qué instrumentos. También se podrá prever una estimación del tiempo que requerirá cada actuación.

4. *Bibliografía*

   Se trata de relacionar una primera bibliografía para empezar a trabajar. Esta relación, en parte, se habrá seleccionado en esta fase para elaborar el esquema general. La bibliografía seleccionada por el alumno también da idea al profesor de cómo orienta el trabajo.

El desarrollo: seguimiento y evaluación de entrevistas periódicas

A partir de aquí el trabajo ha de quedar muy encauzado, y la desorientación inicial que hemos observado muchas veces en nuestros alumnos desaparece. En este momento, el alumno se siente confiado y sabe por donde empezar el trabajo. Es ahora cuando empieza la segunda fase –desarrollo–, que se caracteriza por un trabajo más autónomo del alumno y un papel más discreto del profesor. El alumno se dedica a la elaboración de las distintas partes del trabajo, ejecutando las actuaciones previstas. Los alumnos tienden a dejarse llevar por informaciones no relevantes o por aspectos demasiados complejos. El papel del profesor es hacer un seguimiento de este proceso para asegurar que lleva hacia los objetivos planteados y no nos perdemos por el camino en cuestiones secundarias no previstas, ni en dificultades que surjan que bloqueen el proceso.

Este seguimiento consiste en entrevistas semanales o quincenales en las que se analizan cómo va el proceso, la información que se encuentra, las dificultades que aparecen, las nuevas alternativas, las nuevas líneas por donde podría discurrir el trabajo, etc. Hay que ayudar a valorar todo ello, fijar limitaciones, esclarecer dudas, ofrecer nuevas fuentes de información etc. Esta fase puede durar unos tres meses aproximadamente.

Es interesante destacar que a lo largo de todo el trabajo se dan diferentes momentos. Al principio es donde se da más desorientación e inseguridad. Luego hay momentos en los que el alumno ya controla más, va asimilando la información que maneja, integra en sus conocimientos lo que va descubriendo, empieza a hacer sus explicaciones de manera argumentada, aparecen nuevas dudas. Es por todo esto que consideramos interesante ir registrando como se vive este proceso. En la figura 6 mostramos un modelo sencillo de registro de entrevistas.

…empieza la segunda fase –desarrollo–, que se caracteriza por un trabajo más autónomo del alumno y un papel más discreto del profesor. El alumno se dedica a la elaboración de las distintas partes del trabajo, ejecutando las actuaciones previstas.

Para facilitar este seguimiento de las entrevistas ofrecemos una pauta de los diferentes aspectos que resultan interesantes de evaluar formativamente. Esta pauta (Figura 7) pretende facilitar al profesor el seguimiento del trabajo y su valoración final con argumentos de interés para el alumno.

Título:

Autor/a: Grupo: Curso:

Fecha sesión:

Fecha sesión:

Figura 6. Modelo de registro de entrevistas personales

A. *Capacidad de Análisis*
   1. Identifica información adecuada.
   2. Se adapta a la situación vivida por el trabajo.
   3. Aporta reflexiones y sugerencias adecuadas.
   4. Da muestras de aceptar las sugerencias que le dan.
   5. Sabe explicitar los problemas de la investigación.

B. *Conocimiento e integración*
   1. Comunica y expresa experiencias, dificultades concretas.
   2. Relaciona hechos vividos con elementos de reflexión general.
   3. Interpreta bien los aspectos matemáticos a trabajar.

C. *Claridad y comunicación*
   1. Expresa opiniones equilibradas.
   2. Mantiene coherencia de criterios.
   3. Sabe defender sus posiciones.
   4. Reconoce sus limitaciones con lucidez.

D *Progreso*
   1. Sabe situarse en el trabajo, reconociendo lo que le falta.
   2. Interpreta bien los comentarios del docente y los integra.

Figura 7. Pautas para la evaluación de las entrevistas periódicas

Preparación de la presentación

La tercera parte del modelo de acción tutorial que proponemos –comunicación y reflexión– se inicia con la preparación de la presentación definitiva del trabajo y se finaliza con la exposición oral ante un tribunal.

Las formas de presentación pueden ser diversas. Una de las más atractivas que fomentamos es el formato hipertextual que se puede presentar en la web del instituto. Hasta ahora, la manera más común de presentar un trabajo de investigación es en formato dossier. Aunque en cualquier soporte habrá una descripción escrita.

La exposición ante el tribunal, de una duración aproximada de unos quince minutos, requiere que el alumno sea capaz de sintetizar y transmitir en ese tiempo las ideas básicas del trabajo, haciendo uso de los soportes más idóneos.

No es habitual que un alumno de Bachillerato haya hecho antes un trabajo de investigación de esta envergadura, por ello necesita una ayuda especial para la elaboración de la presentación final que recoja los múltiples aspectos que han aparecido. Así, en una entrevista previa a la redacción definitiva de la memoria, consideramos de interés ayudar al alumno a que haga una reflexión global del trabajo realizado. Le proponemos el siguiente esquema de reflexión:

A) Incidencias

1. ¿Qué dificultades has encontrado?
2. ¿Qué tipo de colaboración has obtenido (de padres, amigos, etc.)?

B) Discusión sobre la metodología y el problema

1. ¿El problema o problemas se quedarán así? ¿Queda algo por completar?
2. ¿Crees que hay algún aspecto modificable? ¿Cuál sería?
3. ¿Tienes claro qué aspectos resaltarás en las conclusiones?

C) Comentarios a algún aspecto específico del trabajo

1. ¿Cómo explicarías el tratamiento que has hecho?
2. ¿Por qué has escogido esta forma de presentarlo?
3. ¿Qué crees que es lo más importante del trabajo?

D) Madurez del trabajo realizado

1. ¿Es suficiente lo que se ha hecho?
2. ¿Qué aspectos te perecen más relevantes?
3. ¿Qué puede resultar interesante cuando lo presentes públicamente?
4. ¿Qué has aprendido?
5. ¿Qué dirías si tuvieras que explicar cuáles han sido las fases del trabajo?
6. ¿Qué limitaciones tiene el trabajo?

E) Dossier que hay que presentar

1. ¿Todo te queda claro?
2. ¿Sabes lo que hay que hacer?
3. ¿Tienes decidido cómo lo presentarás (papel, programa ordenador, etc.)?

La exposición ante el tribunal, de una duración aproximada de unos quince minutos, requiere que el alumno sea capaz de sintetizar y transmitir en ese tiempo las ideas básicas del trabajo, haciendo uso de los soportes más idóneos.

F) Presentación pública

1. ¿Cuáles son los puntos claves del trabajo?
2. ¿Por qué has escogido un determinado formato de presentación?
3. ¿Cómo podrías hacer una presentación lo más atractiva posible? (Conviene saber lo que se podría hacer aunque no se pueda hacer).

G) Concreción, aclaraciones y dudas

1. ¿Qué más quieres comentar? (Dejando la pregunta abierta)
2. ¿Sabes acabar tú sólo el escrito?
3. ¿Quieres comentar el escrito y presentarme antes un borrador?
4. ¿Crees que necesitas alguna ayuda más? ¿En qué?

Una vez hecha esta reflexión podemos plantearnos la elaboración final de la memoria, cuyo contenido sugerimos en la figura 8.

1. *Introducción*
   Motivación inicial. Objetivos. Desarrollo, dificultades aparecidas... Aportaciones del trabajo.
2. *Los problemas abordados*
   Concreción de la idea. Evolución o modificación del planteamiento inicial si es que se ha producido.
3. *Desarrollo*
   Descripción del proceso seguido y de las decisiones tomadas. Reflexiones que se han presentado. Resultados.
4. *Conclusiones*
   ¿Qué has aprendido? ¿Qué has aportado? ¿Has respondido a tus preguntas iniciales?
5. *Limitaciones y expectativas*
   Variables que no se han considerado. Ideas que han aparecido pero que no se han podido desarrollar. Explicitar si podrían ser objeto de otro trabajo de investigación.
6. *Fuentes de información consultada*
   Bibliografía, páginas web, entrevistas...

Figura 8. Pautas para la elaboración de una memoria escrita

La introducción se ha de caracterizar por una exposición sincera y honesta sobre la motivación inicial, la forma de concretar el título, los intereses y motivaciones que hay. Por lo tanto, no corresponden frases grandilocuentes y pomposas que normalmente distorsionan la realidad. Los alumnos son habitualmente parcos en sus explicaciones, por eso conviene que hagan una descripción general de cómo se ha desarrollado todo el proceso y de las dificultades que han aparecido, destacando, si es posible, alguna anécdota que se haya producido. Además, ha de plasmar los objetivos a los que responde el trabajo, así como, en líneas generales, la forma de desarrollar el trabajo y qué aporta.

Por lo que se refiere a los problemas abordados, ha de concretar la idea, y definir y acotar el problema. Es bueno que el alumno explique también si esta idea se ha ido concretando a lo largo del proceso y qué condicionantes han aparecido.

En el desarrollo, ha de exponer el grueso del trabajo, todo el proceso que se ha seguido, detallando cómo ha ido resolviendo todas las cuestiones, qué decisiones ha ido tomando, los resultados que ha obtenido, etc. Es interesante que cuide las explicaciones que da, que han de ser claras y que combinen diferentes lenguajes (natural, algebraico, gráfico y tablas).

En las conclusiones fomentamos la visión sintética de lo que ha sido el trabajo. Lo que ha aprendido tanto de matemáticas como de aspectos procedimentales y de tratamiento de la información. Lo que ha aportado al trabajo, es decir, este mismo trabajo realizado por otra persona seguramente no habría resultado el mismo. Qué elementos son los que han caracterizado de una manera personal el estudio. Finalmente ha de valorar las conclusiones a las que llega, y si completan las expectativas abiertas al principio.

En el apartado de limitaciones y expectativas, una vez finalizado el proceso se hace una reflexión sobre lo que se ha hecho, qué es lo que queda pendiente, si se ha descubierto alguna línea nueva o no prevista al principio que va más allá de lo que se pretendía inicialmente y que podría ser de interés para otro trabajo. Realizar este tipo de reflexiones son una muestra de madurez del alumno.

Respecto a las fuentes de información, ha de citar de forma completa todas las que ha utilizado.

La reflexión, por parte del propio alumno, sobre el proceso que él mismo ha seguido durante la realización del trabajo de investigación (autorreflexión) y su propia evaluación (autoevaluación), son dos de los apartados más importantes del modelo de acción tutorial que hemos desarrollado…

Autorreflexión y autoevaluación

La reflexión, por parte del propio alumno, sobre el proceso que él mismo ha seguido durante la realización del trabajo de investigación (autorreflexión) y su propia evaluación (autoevaluación), son dos de los apartados más importantes del modelo de acción tutorial que hemos desarrollado, porque las opiniones de los alumnos que acaban de realizar una investigación, escribir una memoria y presentar de forma oral su trabajo ante un tribunal (o un profesor) son una fuente de información de primera mano que puede incidir en la modificación futura de este modelo o de alguna de sus partes.

En la autorreflexión el alumno responde por escrito a diversas preguntas que le formulamos (figura 9), en las que se tratan aspectos relacionados, principalmente, con

1. ¿Pensabas que el trabajo sería así?
2. ¿Creías que el contenido matemático te sería de una dificultad especial? ¿Ha sido así?
3. ¿Qué pensabas aprender concretamente con este trabajo? ¿Y qué has aprendido realmente?
4. ¿Consideras que el trabajo te ha servido para ver el uso de la ciencia, y, concretamente, por lo que se refiere a saber que las Matemáticas sirven para comprender el mundo cotidiano?
5. ¿Has hecho otros proyectos antes? ¿Cuáles?
6. ¿Te ha resultado diferente la forma de trabajar en este trabajo que en los otros?
7. ¿En qué crees que ha mejorado tu capacidad de investigación la experiencia que has adquirido con este trabajo?
8. ¿Qué crees que has aprendido específicamente de Matemáticas que no hubieras aprendido en otros tipos de actividades matemáticas?
9. ¿Qué te ha aportado de nuevo este trabajo en comparación con otros trabajos que hayas hecho en el bachillerato?
10. ¿Qué tendría que mejorar el Departamento de Matemáticas en cuanto a la organización de los trabajos de investigación?
11. ¿Cómo valoras el seguimiento del trabajo hecho por tu tutor?
12. Otros comentarios que quieras hacer.

Figura 9. Cuestionario de autorreflexión la comparación del trabajo realizado con otros que el alumno haya hecho, con la mejora de su aprendizaje de las Matemáticas y de su relación con el mundo real, y con la valoración de la actuación del tutor.

En la autoevaluación el alumno ha de valorar los aspectos relacionados con la planificación, exploración y diseño de la investigación, el conocimiento de la realidad, la integración, la reflexión y comunicación del contenido, etc. En particular, en la figura 10 mostramos un ejemplo de modelo de autoevaluación (adaptado de Giménez, 1997) que hemos experimentado.

Evaluación final

En la evaluación final del trabajo de investigación hemos de valorar las capacidades genéricas que se relacionan a continuación:

- La planificación del trabajo de investigación (el proyecto, el cumplimiento de los plazos y el seguimiento del plan establecido, con la justificación *a priori* de su cambio, si fuera necesario).
- La actitud hacia la investigación (interés mostrado por lo que se hace y formulación de cuestiones a partir del trabajo desarrollado, variabilidad en la aplicación de recursos, entre otros los informáticos, la autonomía, la profundización en los resultados obtenidos, etc.).
- La creatividad y la originalidad y la profundidad de los resultados.
- La presentación de una memoria del trabajo (introducción, descripción del trabajo llevado a cabo, resultados, discusión, conclusiones, etc.) en la que han de quedar reflejadas las diferentes etapas de la elaboración del trabajo y de la que tendremos en cuenta: la presentación, el uso adecuado de la lengua, la valoración crítica del propio trabajo, el establecimiento adecuado de conclusiones, etc.
- La exposición oral del trabajo realizado (la corrección, la claridad, el vocabulario adecuado a la expresión oral, capacidad de síntesis en la presentación, etc.).

Además de las capacidades relacionadas anteriormente, la evaluación final ha de incluir la valoración de las capacidades específicas, propias de cada tipo de trabajo, en concreto de los contenidos matemáticos involucrados (Departament d'Ensenyament, 1992).

En concreto, en cada investigación hay unas actuaciones y los consiguientes criterios de evaluación. En la figura 11 mostramos un ejemplo sobre la evaluación de un trabajo biográfico sobre un personaje matemático.

Valora de 1 a 4	*1*	*2*	*3*	*4*
Planificación, exploración y diseño				
1. Me considero capaz de explicar lo que he hecho en el trabajo				
2. Reconozco las variables principales del trabajo realizado				
3. Sería capaz de programar mejor un trabajo similar una próxima vez				
4. Sabría hacer un guión de las fases de mi trabajo justificadamente				
5. He aprendido a planificar actividades de contraste de mis descubrimiento				
6. Sé explicar claramente el proceso de recogida de mis datos				
Conocimiento de la realidad				
7. Sé reflejar el aspecto de la realidad que ha sido más importante en el trabajo				
8. Sé reconocer las dificultades que me he encontrado				
9. Sé explicar con claridad las relaciones entre los datos que he encontrado				
10. He aprendido a reconocer las consecuencias de las informaciones buscadas				
Integración				
11. Me veo capaz de hacer reflexiones detalladas sobre el tema				
12. Sé orientar un trabajo científico en el futuro ..				
13. Sé hacer juicios detallados sobre otros trabajos como el mío.................				
14. Puedo decir que he dado un estilo personal a mi trabajo				
Reflexión. Comunicación del contenido				
15. Soy capaz de explicar los contenidos que he utilizado en mi trabajo				
16. He incorporado reflexiones nuevas a partir de lo que he visto				
17. Soy capaz de explicar algunos de los diferentes procedimientos utilizados ...				
Construcción. Apertura e invención				
18. He sido capaz de mantener coherencia de criterios a lo largo del trabajo				
19. Me veo capaz de colaborar con otros trabajos como el que he hecho				
20. He mejorado mi base matemática				
21. He sido autónomo en el trabajo de investigación				
22. Ha mejorado mi visión del mundo científico ...				
23. Sería capaz de dar ideas a otro compañero para que hiciera un trabajo como el mío				
24. Considero que todavía he de mejorar mi base conceptual				
25. Hay mucha invención propia en mi trabajo				
Mi valoración final personal sería				

Figura 10. Modelo de autoevaluación

Actuaciones	Criterios de evaluación
• Búsqueda del hilo argumental del personaje.(biografías existentes, investigación en periódicos…) • Consulta de fuentes diversas, directas o no (estadísticas, gráficas, iconográficas, audiovisuales…) • Comparación entre las opiniones o tesis de diversos autores sobre el tema de investigación. • Elaboración de fichas bibliográficas. • Elaboración de resúmenes, esquemas mapas conceptuales. • Contraste de los resultados obtenidos a partir de fuentes primarias y secundarias. • Contextualización de las obras literarias.	• Variedad de lecturas y consultas efectuadas de forma correcta. • Iniciativa en la búsqueda de formas de información • Iniciativa en el establecimiento de las líneas de desarrollo del trabajo despues de la primera aproximación bibliográfica. • Capacidad de replantear la hipótesis o los objetivos de acuerdo con las informaciones obtenidas durante la investigación. • Capacidad de seleccionar y adecuar la información consultada al tema planteado. • Capacidad de analizar, sintetizar, comparar y valorar críticamente la información recogida • Capacidad de distinguir los aspectos, objetivos y subobjetivos de la información encontrada. • Valoración crítica de las fuentes de información consultadas. • Capacidad de expresar de forma ordenada y coherente el proceso desarrollado para la realización del trabajo. • Utilización de pautas correctas de lectura e interpretación de las fuentes primarias. • Capacidad de aportar conclusiones personales. • Utilización correcta de la lengua oral y escrita. • Valoración positiva del uso de programas informáticos de tratamiento de textos y herramientas multimedia.

Figura 11. Evaluación de un trabajo biográfico

Reflexión final

Pensamos que los alumnos que realizan un trabajo de investigación tienen siempre presente el contenido conceptual del mismo, es decir, son capaces de explicar de qué va el trabajo. Pero lo que pretendemos con la metodología que hemos llevado a cabo es que esos alumnos sean conscientes del procedimiento que han seguido y de los beneficios cognitivos que les ha producido. Si es así, habremos contribuido al desarrollo de sus capacidades de investigación, que era uno de los objetivos que nos habíamos propuesto.

Además, a modo de conclusión, resaltaríamos dos aspectos fundamentales de la metodología que hemos expuesto: por una parte, que es susceptible de futuras modificaciones que resulten de las interacciones del modelo propuesto con nuestra propia experiencia y con las opiniones de los alumnos, extraídas de la autorreflexión y autoevaluación; y, por otra, que es lo suficientemente abierta como para poderse adaptar a las capacidades cognitivas de cada alumno para facilitarle la tarea y evitar su rechazo inicial a realizar un trabajo de investigación en Matemáticas.

Jesus Bondia
IES Serra de Marina,
Premià de Mar
Pedro Cobo
IES Pius Font i Quer, Manresa
Joaquín Giménez
Universitat de Barcelona

Francesc Campos
Jordi Comellas
Jaume Serra
Manuel Sol
Xavier Vilella
IES Vilatzara,
Vilassar de Mar

Federació d'Entitats
per l'Ensenyament
de les Matemàtiques
a Catalunya

Bibliografía

DEPARTAMENT D'ENSENYAMENT (1992): *Treballs de recerca*, Generalitat de Catalunya, Barcelona.

GIMÉNEZ, J. (1997): *Evaluación en matemáticas. Una integración de perspectivas*, Síntesis, Madrid.

GRUP VILATZARA, (1999): *Recerca i Matemàtiques al Batxillerat: alguns suggeriments*, material de trabajo no publicado.

GRUP VILATZARA, (2000): *Memoria de trabajo*, ICE de la UAB, material no publicado.

MONOGRÁFICO UNO, (1998): «Educación matemática e Internet», *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, n.° 15, Graó, Barcelona.

PÉREZ, A. (2000): «La Federación y Thales en Internet», *Suma,* n.° 34, 165-168.

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Comisión Ejecutiva

Presidente: Florencio Villarroya
Secretario General: José Luis Álvarez García
Vicepresidente: Serapio García
Tesorera: Claudia Lázaro

Secretariados:
Prensa: Antonio Pérez Sanz
Revista SUMA: Emilio Palacián/Julio Sancho
Relaciones internacionales: Carmen Azcárate/Luis Balbuena
Actividades: Xavier Vilella Miró
Publicaciones: Ricardo Luengo González

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidente: Marta Berini López-Lara
Apartado de Correos 1306. 43200-REUS (Tarragona)

Organización Española para la Coeducación Matemática «Ada Byron»
Presidenta: Xaro Nomdedeu Moreno
Almagro, 28. 28010-MADRID

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»
Presidente: Salvador Guerrero Hidalgo
Apartado 1160. 41080-SEVILLA

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo»
Presidente: Florencio Villarroya Bullido
ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12.
50009-ZARAGOZA

Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»
Presidente: José Joaquín Arrieta Gallastegui
Apartado de Correos 830. 33400- AVILÉS (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»
Presidenta: Dolores de la Coba
Apartado de Correos 329. 38201-LA LAGUNA (Tenerife)

Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas
Presidente: Santiago Pascual
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Villalar, s/n.
09006-BURGOS

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García
Avda. España, 14, 5ª planta. 02006-ALBACETE

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidenta: Remedios Peña Quintana
IES Francisco de Goya. C./ Caravaca, s/n.
30500-MOLINA DE SEGURA (Murcia)

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Ricardo Padrón
Apartado de Correos 103.
SANTIAGO DE COMPOSTELA

Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»
Presidente: Ricardo Luengo González
Apartado 590. 06080-BADAJOZ

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»
Presidenta: Carmen da Veiga
C/ Limonero, 28
28020-MADRID

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: Begoña Martínez Barreda
CPR de Santander. C./ Peña Herbosa, 29.
39003-SANTANDER

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidenta: Luis Serrano Romero
Facultad de Educación y HUmanidades
Ctra. Alfonso XIII, s/n. 52005-MELILLA

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea Tornamira
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.
Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra.
31006-PAMPLONA

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Despacho 305. Facultad de Educación.
Universidad Complutense. 28040-MADRID

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas
Presidente: Javier Galarreta Espinosa
C.P.R. Avda. de la Paz, 9. 26004-LOGROÑO

Sociedade Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)
Presidente: Manuel Díaz Regueiro
Apartado 4188. 15080-A CORUÑA

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departament de Didàctica de la Matemàtica.
Apartado 22045. 46071-VALENCIA

SUMA 40
junio 2002, pp. 19-24

Matemáticas y escuela secundaria en Europa

Philippe R. Richard

ESTE INFORME tiene como intención comparar el contexto de la enseñanza de las matemáticas en los diversos países europeos, exponiendo aspectos relevantes relacionados con la escuela secundaria. No se trata ni mucho menos de establecer una ordenación entre niveles de resultados, sino proporcionar la información necesaria para asentar una coherencia externa entre la situación española y aquella que prevale en Europa.

Aunque el aprendizaje del alumno aparece como objeto central de la gestión educacional, la esfera de los condicionantes sociales es muy amplia y el reconocimiento de sus estructuras, de sus funciones y de sus interrelaciones resulta imprescindible para acercarse a cualquier diagnosis sobre el estado de los sistemas de enseñanza. Al mismo tiempo, tal empresa resulta peligrosa dado los incesantes cambios sociales, así como el gran volumen y la rapidez con la cual circula la información. Para paliar este inconveniente, presentamos un informe que quiere ser un puente entre la cultura habitual de una presentación en una Comisión del Senado español, cultura ordenada pero estática, y una actualidad en movimiento, que debe situarse en su medio.

Este artículo recoge el contenido de la intervención de su autor el 11 de abril de 2002 ante la Ponencia sobre «La Situación Comparativa de las Enseñanzas Científicas con los países Europeos en la Educación Secundaria» creada en la primavera de 2001 en la Comisión de Educación, Cultura y Deporte del Senado español.

ARTÍCULOS

Si bien existen estudios internacionales a gran escala que suministran elementos de referencia en la evaluación de los conocimientos y de las competencias desarrolladas en el alumnado (TIMSS), la ausencia de unos exámenes oficiales al final de la escuela secundaria en muchos países impide tanto contextualizar estos estudios como disponer de resultados cuantitativos. Además, cuando estos resultados están disponibles a nivel nacional o internacional, la pluralidad de las posturas teóricas previas, de los métodos de recolección de datos, de su análisis y de su valoración impide cualquier comparación que no sea la mera descripción a partir de unos puntos de referencia básicos, como en los informes de la UNESCO o de la OCDE. Asimismo, no existe aún el desarrollo de una macrodidáctica de las matemáticas que, de forma similar a la macroeconomía, permitiría tener acceso al estudio de las magnitudes y variables agregadas y que ignora por ello los comportamientos individuales, dando información integral sobre los efectos a medio plazo de las políticas educacionales.

Para asegurar la objetividad y el rigor necesario a esta presentación, adoptamos un enfoque cualitativo, ciertamente el más apropiado en estas circunstancias, que recoge una parte del análisis y de las conclusiones del proyecto *Niveles de Referencia para la Enseñanza de las Matemáticas en Europa*, elaborado por el Comité sobre Educación Matemática de la Sociedad Matemática Europea y financiado por la Unión Europea. Este comité científico, constituido por miembros nacionales de países actuales o futuros de la Unión, entregó su informe en Luxemburgo en el mes de mayo de 2001. Se consideraron cuestiones generales sobre la sociedad, los sistemas escolares, la especificidad de la enseñanza de las matemáticas en Europa y se propusieron reflexiones generales sobre las matemáticas y su enseñanza. En particular, a partir de 16 informes nacionales, se hizo hincapié al establecer algunas de las similitudes y diferencias más patentes que prevalecen entre los países del estudio (Alemania, Bélgica, Dinamarca, España, Finlandia, Francia, Grecia, Hungría, Italia, Luxemburgo, Países Bajos, Polonia, Reino Unido, Rusia, Suecia y Suiza).

Un panorama complejo

Parece un tópico afirmar que los sistemas escolares en Europa son de la misma naturaleza que las regiones donde se encuentran. Dicho de otro modo, la gran diversidad de sus tradiciones históricas, de sus condiciones sociales y de sus culturas políticas les conceden recursos, les prestan ideales y, sobre todo, enlazan a los individuos en la vertebración y en las funciones de las instituciones y de los colectivos que intervienen en el mundo educacional. Aun cuando estos sistemas no están en transición, se aprecia grandes variaciones en cuanto a las formas en que se diferencian los tipos de centros educativos, al lugar conferido a las matemáticas en los programas generales o profesionales, a las edades de los alumnos de la educación obligatoria y a la cantidad semanal o anual de horas de clase. Hasta el lenguaje utilizado para describir los sistemas escolares se acomoda de un país a otro –incluso en los nombres empleados para nombrar propiedades matemáticas idénticas que figuran en los programas oficiales–. En los países de costumbres centralizadoras como Francia, Grecia, Italia e Inglaterra se oponen los sistemas de competencias exclusivas o compartidas como en los lander alemanes o en las autonomías españolas, pasando por los estados que no son federales pero que admiten ajustes de acuerdo con sus comunidades (como Bélgica, Hungría y Finlandia –con su minoría de habla sueca–), dando un sentido específico a la palabra «región» cuando se trata de educación. Al mismo tiempo, los sistemas centralizadores tienen tendencia a descentralizarse, mientras que los sistemas descentralizados tienden a buscar mecanismos de coordinación central, correspondiendo, según una encuesta de la OCDE, a los deseos de sus ciudadanos.

…los sistemas centralizadores tienen tendencia a descentralizarse, mientras que los sistemas descentralizados tienden a buscar mecanismos de coordinación central, correspondiendo, según una encuesta de la OCDE, a los deseos de sus ciudadanos.

Si el intento de bosquejar un cuadro del panorama europeo lleva deliberadamente al reconocimiento de puntos de encuentro, la elección de éstos y del lenguaje utilizado resultan de una simplificación, so pena de prohibir la comparación o, al menos, de atenuar ampliamente su alcance. Muchas de las consideraciones expuestas a continuación se tienen que interpretar como un primer acercamiento a una realidad muy diversa. Además, los datos necesitarán ponerse al día para tomar en cuenta las evoluciones en curso. Como información complementaria y más precisa, adjuntamos los informes nacionales y un resumen que pone en paralelo los sistemas escolares, el lugar y la importancia de las matemáticas en los currículos, los objetivos matemáticos generales, los contenidos básicos, las variaciones regionales y las estrategias de implementación curricular.

Sistemas escolares: tendencias, cambios en curso y desafíos

- Actualmente en todos los países considerados, la *enseñanza obligatoria* dura como mínimo nueve años, a pesar de que la casi totalidad de los jóvenes están escolarizados al menos hasta los 16 años y, muy a menudo, hasta los 18 años. No obstante, según las estadísticas de la OCDE, en 1996, la proporción de jóvenes que no estaban escolarizados a los 16 años varía entre el 5% y el 20% en seis de estos países

(Dinamarca, España, Finlandia, Grecia, Reino Unido, Suiza). En un sentido opuesto, y cuando el sistema lo permite, es muy frecuente que los alumnos que cursaron una formación profesional preuniversitaria continúen sus estudios de una forma u otra a causa de la saturación del empleo, aunque estuvieran destinados al mundo laboral.

Desafío. No disminuir el nivel global de la formación de los alumnos, aun cuando sólo sería para no penalizarles en la continuación de sus estudios, más allá de la educación obligatoria.

- Además del *alargamiento de la escolaridad*, existe una tendencia general que consiste en *retrasar la especialización* tanto como se pueda. Para los jóvenes que están todavía escolarizados, y en la mayoría de los países, la especialización se produce después de los 14 o 15 años. Si bien ya tiene lugar a los 16 o 17 años en Dinamarca, Finlandia y Suecia, la especialización interviene desde los 11 o 12 años en Alemania, Bélgica, Países Bajos, Reino Unido y Suiza. Muchos de estos últimos países procuran retrasar esta edad.

Desafío. Identificar unívocamente los conocimientos y las capacidades básicas necesarias al conjunto de los futuros ciudadanos, aunque resulta difícil prever cómo será la sociedad en la cual tendrán que participar. A la fuerza, no es evidente encontrar esta univocidad dentro de un mismo país, todavía menos a escala europea.

- El nuevo orden mundial y la apertura del espacio europeo a los estudiantes y a los trabajadores llevan a una petición cada vez más insistente que vinculan la *formación y el mercado laboral con la movilidad*. Aun cuando su grado de acogida varía bastante de un país a otro, se pretende que la escuela no prepare prematuramente a los alumnos para un empleo determinado, sino que les provea de herramientas culturales y de una formación sólida que les permitan adaptarse y actualizarse a lo largo de su vida profesional.

Desafío. Organizar la enseñanza de tal modo que todos los alumnos puedan adquirir los conocimientos y las capacidades básicas mencionadas anteriormente, de forma consciente, durable y utilizable tanto en el ámbito escolar como en la diversidad de las futuras situaciones a las que se enfrentarán. En este sentido, la cultura de la normalización, en la cual la organización procede a partir de disposiciones previstas de antemano y que pretende dar objetividad y ser controlable, compite con la cultura de la responsabilidad, cultura más flexible que puede adaptarse a las realidades que no se supo prever y que favorece la búsqueda de compromisos.

Además del alargamiento de la escolaridad, existe una tendencia general que consiste en retrasar la especialización tanto como se pueda.

- Se suponía que la *introducción sistematizada de las tecnologías de la información y de la comunicación* en las escuelas permitiría proporcionar a los alumnos una formación básica en o con la informática, imprescindible para el desarrollo de sus competencias generales. Sin embargo, persiste una ambivalencia: ¿el uso efectivo de las TIC contribuye a completar conocimientos anteriores a su introducción o ambiciona sustituirlos? En clase de matemáticas, no se sabe muy bien cuando estas tecnologías deben emplearse, en la medida de lo posible, al servicio de saberes tradicionales o cuando la naturaleza misma de éstos se ven modificados. Del mismo modo que la información digital que concierne a los ciudadanos está cada vez más presente y de forma cada vez más compleja, queda claro que la práctica profesional de las matemáticas está estrechamente influida por las nuevas tecnologías, tanto a nivel cotidiano como investigador.

Desafío. A no ser que se quiera que sólo una parte de los ciudadanos puedan entender el mundo que les rodea, la cuestión de la calidad del acceso a las TIC no pone solamente en tela de juicio la formación de los futuros matemáticos o de los futuros usuarios profesionales de las competencias matemáticas. Lo que está en juego concierne a los mismísimos fundamentos de la democracia.

- En la *problemática de la evaluación*, está creciendo por todas partes la idea de responsabilizar a los integrantes del mundo educacional para valorar, en su justa medida, los efectos de las múltiples facetas de los sistemas escolares. La cultura de la evaluación concierne tanto al docente en su clase como al alumno mismo, a la organización de los establecimientos, y a la calidad de los proyectos educativos, de los programas y de los manuales.

Desafío. Conciliar la cultura de la responsabilidad con la cultura de la normalización en esta cuestión.

Particularidades de la enseñanza de las matemáticas

- Además de la práctica docente tradicional y de la pedagogía por objetivos que marcan aún la estrategia curricular de sistemas escolares enteros, varias regiones están estableciendo un *estilo de enseñanza* que pretende basarse en el constructivismo (el alumno construye sus conocimientos) o el socioconstructivismo (que se realiza en el intercambio social)[1]. Se considera que los Países Bajos sobre todo y, en cierta medida, Italia, algunos cantones suizos, una parte de Bélgica y el Reino Unido han adquirido una experiencia sugerente en este sentido. Por todas partes se encuentran profesores de matemáticas que lo comparten. En otros países, como Francia, se trata de un enfoque oficial, aunque se reduce a menudo al uso sistemático de actividades, lo que alimentó desde hace poco una crítica social en contra. Todas las regiones consideran que es la *resolución de problemas* lo que induce más a los alumnos a comprender las ideas matemáticas, aun cuando todas no se valen de estas situaciones con la misma importancia. Numerosas competiciones (olimpiadas, pruebas, gymkhanas, concursos, juegos, etc.) tienen un efecto muy positivo al respecto (Hungría, Francia, Suiza…).
- A los 16 años, el *tiempo medio dedicado a las matemáticas* varía entre 3 y 5 horas semanales de clase de 45 minutos, representando una proporción entre el 10 y el 15% del tiempo total. En la mayoría de los países, según una encuesta de la OCDE, la disciplina que se considera como la más importante después de la lengua materna son las matemáticas. De forma general, el tiempo dedicado a ello parece estar en baja relativa puesto que se ambiciona dar más importancia a otras asignaturas, en particular a la informática. No obstante, en los países que consiguen globalmente resultados bajos a la luz de estudios internacionales (TIMSS, PISA) suelen desplegar esfuerzos considerables para remediar la situación.
- Debido a las diferencias notables entre los sistemas escolares europeos, resulta arduo abstraer los *objetivos principales de la enseñanza de las matemáticas* que no se limitan a los contenidos. Si se incluye también los efectos de la enseñanza y las competencias desarrolladas, se podrían sintetizar en la tabla 1.

  En cuanto a los hábitos actuales en tareas de evaluación, el empleo en exclusiva de ejercicios escritos permanece por todas partes. Esta actitud no ayuda en la promoción ni en la evaluación de algunas capacidades indispensables en el aprendizaje de las matemáticas, como expresarse y argumentar correctamente, plantear en términos matemáticos una situación concreta, resolver problemas más complejos que de costumbre, trabajar en grupo en un proyecto de investigación juvenil, consultar libros o manuales escolares de forma autónoma, etc.

Competencias generales	*Mundo matemático*	*Aplicaciones de las matemáticas*
• Algoritmos • Razonamiento, deducción, prueba • Lenguaje y símbolos (uso, creación, comunicación…) • Pensamiento visual • Transferencia • Interés por las matemáticas, seguridad en su uso	• Aritmética • Variables, ecuaciones • Geometría • Gestión de datos • Funciones y gráficos	• Modelizar • Buscar, investigar • Cálculos aproximados • Uso de la informática • Control de resultados

Tabla 1

…se necesita un replanteamiento de la jerarquía de valores de los conocimientos matemáticos.

- La introducción en clase de los dispositivos calculadores e informáticos pone en evidencia que se necesita un replanteamiento de la *jerarquía de valores de los conocimientos matemáticos*. E1 dominio de algunas técnicas de cálculo resulta menos útiles que antes, mientras la capacidad de elaborar un programa de cálculo y de controlar sus resultados aparece en primer plano. En el mismo sentido, los conocimientos básicos en estadística y en probabilidades se precisan ahora para el futuro ciudadano.
- La cuestión de la *innovación curricular* varía mucho entre regiones en cuanto al contexto, enfoques, contenidos y métodos. Se aprecia, en general, un nuevo interés por la enseñanza de la geometría, en particular por la geometría del espacio. Sin embargo, su estudio puede referirse tanto al simple cálculo de volúmenes como al desarrollo del pensamiento visual (Países Bajos). La geometría euclidiana de factura tradicional queda sustancialmente presente en Francia, Grecia e Italia. En algunos casos, la innovación

* En realidad, la perspectiva constructivista enfoca el cambio de concepción del alumno y la superación de obstáculos en la construcción efectiva de conocimientos pertinentes, reproduciendo características constitutivas del quehacer matemático, sin caer en la fantasía de volver a descubrir lo que ya está descubierto.

apunta hacia la integración de la estadística, de las probabilidades o de la historia de las matemáticas en los programas oficiales. En otros casos, se acentúa el interés por el uso práctico de las matemáticas en situaciones que no parecen solicitarlas antes de un primer contacto o de su profundización.

Relación entre las matemáticas y el mundo educacional

- El telón de fondo de las reformas curriculares previstas (Grecia, Hungría, Luxemburgo, Rusia…) o realizadas (Bélgica, Francia, Italia, Reino Unido, Suecia…) afirma o sobreentiende dos *concepciones* básicas sobre la *enseñanza y el aprendizaje*: una primera, tradicional, en la cual el profesor «hace la clase» y el alumno «resuelve ejercicios» y, una segunda, más innovadora, que se centra en el alumno como actor en la construcción de sus conocimientos. Aunque se potencia más esta última, se mantienen contradicciones entre, por una parte, los objetivos curriculares, el contenido de los manuales escolares y de los exámenes y, por otra parte, los resultados obtenidos por el alumnado en términos de conocimientos y de competencias. Ocurre un fenómeno parecido entre la formación continuada del profesorado y los nuevos contenidos, los nuevos métodos de enseñanza, la gestión de las nuevas tecnologías en clase, el interés y las capacidades muy variadas en el alumnado; la formación inicial del profesorado y las posibilidades de las organizaciones o de los establecimientos que la imparte, así como las costumbres adquiridas por el profesorado en ejercicio durante las prácticas o las relaciones de tutorización. Algunos países priorizan la «matemática para todos» (Reino Unido, Suecia…), mientras otros se preocupan del nivel alto (Francia, Rusia…).

Cuando se pierde globalmente una competencia dentro de un sistema escolar, resulta laborioso recuperarla. El ejemplo de la enseñanza de la geometría es muy llamativo.

- Si bien se reduce a menudo a una versión intuitiva que no se fundamenta en la investigación, la *didáctica de las matemáticas* como disciplina científica conoce un destino variado en Europa. En algunos países, como Francia, se considera como una disciplina ya hecha mientras que en otros, como Alemania, se le concede cátedras en los departamentos de matemáticas o, como Suecia, está en vía de desarrollo. Dispone tanto de revistas internacionales de prestigio (*Educational Studies in Mathematics*; *Journaltür Mathemati-Edidaktik*; *Recherches en Didactique des Mathématiques*) como de escuelas de verano, conferencias y seminarios nacionales importantes (Francia, Italia…). Aunque no existe una concepción homogénea de la didáctica de las matemáticas, la comunicación y la cooperación entre diversos puntos de vista no solamente es deseable sino que podría florecer especialmente desde la fundación de la sociedad European Research in Mathematics Education (ERME). En cuanto a la relación que mantiene la didáctica con la práctica docente, resulta muy provechosa cuando la intuición que los profesores en ejercicio supieron desarrollar con la experiencia, junto a una formación inicial en matemáticas, se complementa con una formación de segundo o de tercer ciclo en didáctica.
- La capacidad de razonar correctamente de forma autónoma en situaciones problemáticas, más o menos complejas, constituye un valor social fundamental. Si bien no le pertenece en exclusiva, la disciplina discursiva que predomina en matemáticas, tanto en actividades de descubrimiento como en situaciones de validación, se muestra un medio privilegiado para desarrollar *hábitos argumentativos estructurados*. ¿Se debe recordar que la presencia conjunta de la lengua y del registro matemático en clase exige constantemente un ajuste entre la eficacia de pensamiento y el rigor asociado? Los países que abandonaron completamente el modo hipotético deductivo sienten la dificultad que tiene el alumnado para entender la unidad y la continuidad de las matemáticas escolares. A la inversa, los países que conservaron una disposición hacia la geometría euclidiana tradicional lamentan que subsiste una parte del profesorado que nunca emplea enfoques heurísticos. Cuando se pierde globalmente una competencia dentro de un sistema escolar, resulta laborioso recuperarla. El ejemplo de la enseñanza de la geometría es muy llamativo.
- De las *relaciones entre las matemáticas y la informática* se desprenden cuestiones fundamentales que van desde la integración de ambas en la enseñanza de la otra hasta el lugar ocupado por las nuevas tecnologías en clase, durante los exámenes oficiales y el seguimiento de la experiencia del alumnado a nivel inter-

nacional. E1 rapidísimo crecimiento tecnológico crea constantemente nuevas configuraciones de condiciones en los entornos interactivos de aprendizaje, dando la sensación mareante de que lo que parecía posible o acertado hace tan poco necesita ya un replanteamiento. El alcance de muchos programas educativos, que procuraban evaluar los efectos de las nuevas herramientas y prácticas pedagógicas, pierden relieve a medida que se desarrollan los medios tecnológicos y su contextos. En todo caso, sin hablar de Internet, de software didáctico o de diseño de nuevos entornos interactivos de aprendizaje, las simples calculadoras de bolsillo pasaron de científicas a tener interfaces gráficas en aproximadamente cinco años, implementadas con programas de cálculo simbólico, de geometría dinámica, de base de datos, además de facilitar la programación estándar con edición de texto en un aparato que puede intercambiar información con dispositivos externos.

- En el conjunto de Europa, aun cuando la tendencia general consiste en favorecer el uso de las TIC en la enseñanza, las variaciones suelen aparecer en los centros, incluso dentro de un mismo seminario. Esta situación conlleva, al menos, desigualdades de hecho y desfases sustanciales. En primer lugar, resulta visible en: la integración de la informática en la clase de matemáticas y viceversa; el reequilibrio, en términos de horario docente, entre la informática y las disciplinas científicas o humanísticas; la formación del profesorado con las TIC; la enseñanza sistemática de su manejo en las escuelas; la coordinación de las iniciativas privadas dentro de un seminario o de un área de conocimiento; el lugar concedido a las calculadoras en las tareas de evaluación. En segundo logar, es aparente entre: los objetivos curriculares y el equipamiento actual; las recomendaciones oficiales, los recursos económicos y tecnológicos asignados a ello (por los centros, por los padres); la incitación institucional en aprovechar las nuevas tecnologías y su uso real en clase; el grado de autonomía de los profesores y de los alumnos; la diversidad de los medios tecnológicos disponibles y la exigencia de normalización para la organización de actividades eficaces.

Conclusión

La evolución de la situación actual lanza muchos desafíos difíciles de aceptar. Sólo la velocidad vertiginosa del desarrollo científico-tecnológico (matemáticas, didáctica de las matemáticas, informática…) no parece dar tiempo suficiente para prever las consecuencias que podría tener su integración en los sistemas de enseñanza. Pero el rechazo a estos retos o cualquier aprecio superficial podría complicar aún más el panorama escolar o engendrar algún tipo de retraso indeseable. La toma de decisión en las políticas educacionales requiere una sutil coherencia entre circunspección, para afianzar la solidez y la durabilidad de los cambios, y atrevimiento, para integrar los nuevos descubrimientos que prorrumpían por todos lados. La apuesta para el futuro, porque se trata realmente de una apuesta, pasa inevitablemente por el progreso de la cultura de la responsabilidad, asociada a la universalidad de acceso a la información útil. Hay un dicho popular que dice: «tenemos los gobiernos que nos merecemos». ¿Falta recordar que, además de guiar y dirigir, gobernar significó también sustentar o alimentar? Si se quiere conjugar aptitudes y calidad en la gran inversión europea, las matemáticas y su enseñanza intervienen como condición y vehículo privilegiados en la vertebración de la sociedad que viene.

Si se quiere conjugar aptitudes y calidad en la gran inversión europea, las matemáticas y su enseñanza intervienen como condición y vehículo privilegiados en la vertebración de la sociedad que viene.

Philippe R. Richard
Faculté des Sciences de l'Education.
Université de Montreal.
Sociedad Matemática Europea.
Comité sobre Educación Matemática

Apéndice

Acrónimos

- Trends in Mathematics and Science Study (TIMSS) • International Study Centre at Boston College
- Le Programme international pour le suivi des acquis des éleves (PISA) • Organisation de Coopération et de Développement Economiques (OCDE)
- United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization (UNESCO)

Documentos

Además de las 16 presentaciones nacionales, los informes oficiales elaborados por el Comité sobre Educación Matemática, Sociedad Matemática Europea están disponibles en versión digitalizada en:

http://www-math.univ-fcomte.fr/DEPARTEMENT/CTU/IREM/internat.htm

SUMA 40
junio 2002, pp. 25-41

All Lights y Lights Out: una investigación entre luces y sombras

Rafael Losada Liste

ARTÍCULOS

Existe un cierto tipo de juegos electrónicos cuya dificultad reside en la misma idea: un rectángulo, cuyas casillas, al ser seleccionadas, alteran su estado y el de otras casillas circundantes. Tal vez Lights Out sea el más conocido. En la actualidad siguen considerándose como problemas exponenciales y sus soluciones son halladas por tanteo, frecuentemente utilizando el código de Gray sobre una matriz de posibilidades. En este artículo se buscará demostrar que en realidad se tratan de problemas lineales, a la vez que se intentará obtener el método de resolver todos ellos, basándonos en la aritmética modular. Al contrario que el resto de los métodos de tanteo hasta el momento, el aquí expuesto buscará encontrar directamente la solución, sin ensayos ni errores.

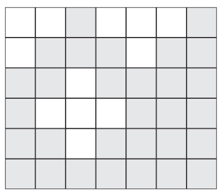
–MÍRELA. Así lleva ya una semana.

Observé la espalda de la muchacha que en el lujoso salón se inclinaba frente a un enorme monitor plano en donde una multitud de casillas cuadradas formaban un mosaico de luces y sombras. Mi cliente, el multimillonario banquero, insistió apesadumbrado:

–Maldita la hora en que mi nieta descubrió ese comecocos en internet. Primero empezó con un cuadrado dividido en 25 casillas, y hace cinco días logró resolverlo aunque no sabe muy bien cómo. Pero justo en el momento de conseguirlo, la pantalla se transformó mostrando un gigantesco cuadrado de 48 casillas de lado. Mire, ahí está. En total son 2.304 casillas. Desde que este monstruo apareció, mi nieta casi ni come ni duerme. Tiene que ayudarme: le pagaré bien.

–Hmmm. ¿En qué consiste el juego?

–Es un invento del diablo. Al principio, todas las casillas están en sombra. *Cuando se elige una y se pulsa sobre ella, cambia de color, es decir, se ilumina si estaba oscura y se apaga si estaba iluminada. ¡Pero lo mismo hacen las casillas que comparten un lado con la elegida!* Así que muchas veces al conseguir iluminar algunas casillas se apagan otras que ya habían sido iluminadas.



Empezaba a comprender. Este caso recordaba las epidemias de locura producidas por el 15 de Lloyd o el cubo de Rubik: el problema era construir sin destruir lo ya conseguido.

Mi cliente me condujo, me arrastró más bien, hasta su despacho.

–Y, por si fuera poco, ¡el rompecabezas asegura que sólo hay una forma de iluminar todas las casillas, que es el objetivo buscado!

Extendí la mano para recoger el papel que me ofrecía. Era un pagaré a mi nombre por 48.000 euros que podría hacer efectivo en caso de tener éxito en mi misión.

Vaya. El viejo sabía rascarse el bolsillo. Calculé, con esa amarga nostalgia que nos invade al recordar duros momentos pasados, que esa pasta equivalía a más de dos años de sueldo como profesor de matemáticas. Traduje mis pensamientos:

–Parece considerarlo un caso difícil.

Sonrió tristemente:

–Tengo mis asesores. Aseguran que hay más posiciones posibles en ese juego que partículas subatómicas en el universo. No debe ser fácil encontrar la única válida.

Objetivos de esta investigación

All Lights (Null-space), Lights Out (Lights Off / Tiger), Flip, Merlin Square… son distintos nombres de juegos electrónicos similares. Circulan desde hace poco más de una década, pero se han extendido rápidamente. La dificultad de todos ellos reside en la misma idea: un panel rectangular cuyas casillas, al ser seleccionadas, alteran su estado y el de otras casillas circundantes. En la actualidad, All Lights y especialmente Lights Out tal vez sean los más extendidos por internet. Según distintos trabajos, alguno publicado (Pelletier, 1987) y otros encontrados en internet, la resolución de estos juegos está supeditada a su consideración como problema exponencial. En este artículo se intentará, a pesar de ello (más bien precisamente por ello), resolver el caso general. Con este fin se empleará algo de matemáticas y mucha, mucha intuición. No quiero privar al lector del *suspense* que acompaña a nuestro héroe en tan fatigosa tarea. Que triunfe o fracase en su misión tal vez sea lo de menos. Importan más los detalles de cada una de las dificultades que aparecen y cómo se intentan superar. Nuestro héroe deberá adentrarse en el álgebra de congruencias, profundizar en los sistemas de ecuaciones lineales y su discusión, y descubrir los principios del cálculo simbólico por ordenador. Si tiene éxito, habrá resuelto todos los problemas emparentados. Si no, habrá profundizado lo suficiente para mostrar la insolubilidad, en un tiempo de cálculo razonable, del problema.

Además, los métodos de resolución empleados hasta ahora en este tipo de rompecabezas se basan todos, en última instancia, en el tanteo de distintas posibilidades hasta encontrar la solución (en particular, con frecuencia se recurre al código de Gray binario para agilizar la búsqueda). Por el contrario, nuestro héroe tratará de encontrar un método *que vaya directamente hacia la solución, sin ensayos ni errores.* ¿Lo logrará?

Ahora, volvamos con nuestro pertinaz sabueso y con sus pensamientos.

Nuestro héroe deberá adentrarse en el álgebra de congruencias, profundizar en los sistemas de ecuaciones lineales y su discusión, y descubrir los principios del cálculo simbólico por ordenador.

El camino fácil

Regresé a mi cubil con la sensación de que (ya era hora) la vida me sonreía. Pese a la opinión de los asesores del ricachón, era evidente que el caso estaba resuelto de antemano. Bastaba descubrir quién había colocado ese juego en la red. La persona que lo hiciera aseguraba que había una única solución, ¡así que seguramente también sabría cuál es! No parecía éste un caso en el que sea fácil demostrar la existencia de solución sin haber construido un método para obtenerla. Mi olfato para estas cosas no suele equivocarse. Nada, nada, aflojo un poco de pasta y seguro que me entregan la solución. Ya me veo dentro de un par de días con 48 grandes en mi bolsillo.

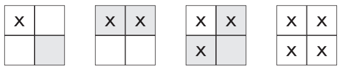
El desengaño

Al día siguiente apareció el fiambre. Llevaba frío 48 horas. Otra vez ese número maldito. Todas mis averiguaciones condujeron a la misma e inevitable conclusión: el muerto era precisamente el autor del problema-rompecabezas y la única persona de este asqueroso mundo que conocía la solución. No había dejado papeles, ni discos, ni nada. Todo estaba en su cabeza. Pues ya era raro, el tío. No me quedaba más remedio que intentar solucionar el caso con mis propios recursos.

Primera iluminación

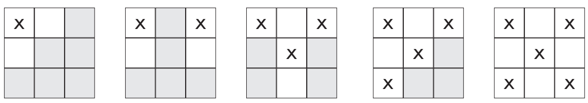
Si algo había aprendido en mi carrera como investigador privado, y antes como matemático, era que debemos comenzar modestamente. Así que dibujé un cuadrado con una única y sombría casilla. Bien, ahora la selecciono y ¡paf!, problema resuelto. Se ha iluminado. Por hacer la gracia, le coloqué una cruz en el centro. Así sabré qué casilla he seleccionado, me dije riendo.

Me propuse algo «más difícil». Dibujé un cuadrado con cuatro casillas. Pocos ensayos fueron suficientes para convencerme de que sólo había una solución. Al mismo tiempo, observé que era indiferente el orden en que hubiera seleccionado las casillas.



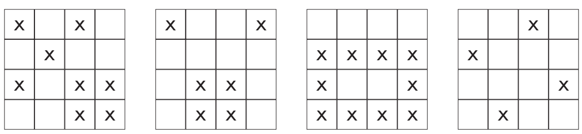
…así que el número de posibilidades tendrá… ¡unas 690 cifras!

Hasta ahora, como la seda. Dibujé un cuadrado mayor. También ahora encontré rápidamente la solución, pero me costó comprobar que era única, pues para ello tuve que ensayar todos los casos: ¡lo que me llevó bastante tiempo, pues eran 512! Claro, ahora había 9 casillas y cada una de ellas podía ser elegida o no.



Esto se pone feo. Bien, al menos hasta ahora he conseguido resolverlo y las soluciones encontradas reflejan una fuerte simetría. Tal vez esto me ayude.

Mi sorpresa fue mayúscula cuando poco a poco fui encontrando una, dos, tres... ¡hasta 16 soluciones! en el siguiente cuadrado. ¡Y no todas simétricas!



Cuando terminé, habían pasado varias horas y me encontraba agotado. Me retiré a descansar y fue en ese instante en que me di cuenta de que marcar las casillas había sido una feliz idea, pues ¡así se diferenciaba perfectamente la acción «seleccionar una casilla» de la acción «iluminar una casilla»!

Ya tenía una pista.

Segunda iluminación

Me incorporé pesadamente. Había tenido una pesadilla. En ella oía unas voces coléricas increpándome sin descanso. «¡Idiota!», repetían, «¡no te das cuenta! ¡No serán 16 sino 2.304 casillas, cada una de las cuales puede estar o no seleccionada! ¿Acaso no recuerdas la dificultad intrínseca de los problemas exponenciales?». En mi sueño realizaba una estimación desesperada, un cálculo hiperastronómico. La potencia 2.304 de 2. Apliqué el logaritmo decimal frenéticamente. El logaritmo de 2 es poco más de 0,3, así que el número de posibilidades tendrá... ¡unas 690 cifras! Desfallecí. El viejo tenía razón.

Ya bien despierto, regresé cansinamente a mi mesa de trabajo. Entre todas las hojas dispersas destacaban los cuadrados de 16 casillas. Curiosamente, tantas como soluciones. Pero ni siquiera estaba seguro de que no existieran más soluciones. Necesitaba observar más detenidamente.

Llevaba una hora de observación infructuosa (aparentemente) cuando mi mirada cayó sobre un cuadrado ya resuelto y casi oculto tras algunas hojas. Sólo mostraba la primera fila iluminada.

Entonces lo vi. Apareció nítida en mi mente la imagen de la segunda fila, que permanecía tapada.

Desenterré la hoja. La imagen mental y la del papel encajaban perfectamente. ¡Estaba clarísimo! ¡La segunda fila SE DEDUCE de la primera, pues solamente seleccionando las dos últimas casillas de la segunda fila pueden haber quedado iluminadas todas las casillas de la primera fila! Pero, entonces, la tercera fila se deduce de las dos anteriores, y lo mismo ocurre con el resto de las filas. ¡Todo el cuadrado se deduce fácilmente con sólo conocer la disposición de cruces de la primera fila!

Eufórico, volví a completar el cuadrado, al mismo tiempo que cambiaba mi notación de vacíos y cruces por la correspondiente de ceros y unos (los matemáticos somos así).

1	0	0	0
0	0	1	1
0	0	1	1
1	0	0	0

1ª	2ª	3ª	4ª
5ª	6ª	7ª	8ª
9ª	10ª	11ª	12ª
13ª	14ª	15ª	16ª

No había terminado cuando otra idea estallaba en mi cabeza: si desde la posición inicial a la final todas las casillas han cambiado de estado, ¡es que cada una de ellas ha sido «iluminada» un número impar de veces! Como «iluminar una casilla» significa «seleccionar esa casilla o una casilla adosada a ella», el número de casillas seleccionadas alrededor de una dada (contando con ella) debe ser impar. Por ejemplo, la casilla seleccionada en la posición 7ª está rodeada de otras dos casillas marcadas más, lo que hace un total de 3. Este número indica las veces que ha cambiado de estado la casilla 7ª. Así que al final quedará *irremediablemente* iluminada.

¡Ya estaba preparado para continuar! Además, ahora ya sabía que las 16 soluciones que había encontrado eran todas las que existían. No podía ser de otra manera, ya que la primera fila, con sus 4 casillas, sólo podía adquirir 16 configuraciones diferentes. Y para cada una de ellas, había encontrado una solución.

Me estaba frotando las manos pensando en el dinero cuando, paradójicamente, el recuerdo de la pesadilla me devolvió a la realidad. ¡Existían todavía 2^{48} posiciones posibles para la primera fila de aquel cuadrado monstruoso! Agarré la calculadora y con dedos temblorosos pulsé: ... 2 ... x^y ... 48 ... = ...¡Casi 300 billones de posibilidades! Aunque programase mi ordenador para que comprobase un millón de estados de la primera fila por segundo (lo que se me antojaba mucho comprobar en mi modesto PC) ¡podría tener que esperar más de ocho años antes de encontrar la solución! Los asesores del viejo de nuevo parecían tener razón: el problema no había perdido su carácter exponencial. Sólo había conseguido disminuir el exponente.

Aunque programase mi ordenador para que comprobase un millón de estados de la primera fila por segundo ¡podría tener que esperar más de ocho años antes de encontrar la solución!

La gran iluminación

Me quedé dormido con la cabeza rebosante de unos y ceros. Toda la noche estas cifras danzaron salvajemente en un espacio vacío sólo iluminado por el brillo que despedían. A punto de despertarme, me encontraba ante un único y gigantesco cero, desplazándose lentamente hacia mi izquierda hasta casi desaparecer arrastrando una pequeña estela de luz. Más que un cero, parecía la letra *a*. Entonces me desperté con un grito ahogado: ¡*El álgebra*! En vez de probar por ensayos, ¿por qué no buscar directamente la solución? Para ello tenía que lograr encontrar una disposición algebraica que reflejase el problema. Me puse a ello.

Volví a dibujar el cuadrado de 3 casillas de lado, del cual ya sabía que tenía solución única, y asigné una letra a cada casilla de la fila primera.

a	b	c
x	y	
z		

Bien, la segunda y tercera fila se deducen de la primera, así que debe existir una relación entre ellas. Veamos: *la casilla ocupada por la letra a* (que puede ser 1 o 0, es decir, puede ser seleccionada o no) *debe quedar iluminada*. Lo que conlleva que $a + b + x$ ha de ser un número impar. Esto se puede expresar así:

$$a + b + x \equiv 1 \quad \text{mod } 2$$

(expresión que leyéndose «$a + b + x$ es congruente con 1 módulo 2», significa que $a + b + x$, como buen impar, deja resto 1 al ser dividido por 2)

Esta notación puede ser simplificada si convenimos que, en adelante, todas las operaciones las realizamos con el álgebra módulo 2 (en cuya aritmética 1+1=0).

De esta manera podemos escribir

$$x = a + b + 1$$

(comprobación: $a + b + (a + b + 1) = 1$).

De la misma forma, *para iluminar irremediablemente la casilla que ocupa la letra b*, la letra y debe tomar un valor tal que $a + b + c + y$ dé como resultado «1». De lo que se deduce que el valor de y debe ser precisamente $a + b + c + 1$.

Así, para que quede iluminada la casilla que ocupa la letra x, sumaremos $a + x + y + 1$, colocando el resultado (que es $a + c + 1$) en la casilla inferior.

Algo nervioso, completé en pocos segundos el resto de las casillas.

a	b	c
a+b+1	a+b+c+1	b+c+1
a+c+1	0	a+c+1

Esta disposición consigue iluminar las dos primeras filas de casillas cualesquiera que sean los valores de *a*, *b* y *c*. ¡Ah, pero ahora *necesito que también la última fila quede iluminada*! Para ello, añado una cuarta fila «virtual» cuyo estado, siguiendo el mismo método, será:

b+c+1	a+b+c	a+b+1

Bien, ya está iluminada la tercera fila, pero ahora «me sobra» la cuarta fila que he añadido. Esta fila fue añadida para obligar a la tercera a iluminarse, pero no aparecía en el cuadrado original. Por tanto, ninguna de estas «casillas virtuales» podrá ser seleccionada. Pues nada, hay que eliminarlas, suprimirlas, *anularlas*:

$$\begin{cases} b+c+1=0 \\ a+b+c=0 \\ a+b+1=0 \end{cases}$$

¡Un sencillísimo sistema lineal de tres ecuaciones! Ya olía el dinero. ¡Ahora sí que tenía la pasta en el bote! Procedí a ordenar el sistema como es habitual (no olvidemos que trabajamos con aritmética modular):

$$\begin{cases} b+c=1 \\ a+b+c=0 \\ a+b=1 \end{cases}$$

Traté de calmarme un poco. Primero, comprobemos que esto funciona. Del anterior sistema se deduce fácilmente que $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$. Sustituyamos los valores encontrados en el cuadro y... ¡premio! aparece la única solución del cuadrado de nueve casillas.

1	0	1
0	1	0
1	0	1
0	0	0

Éxtasis derivado de la gran iluminación

Había encontrado un método para convertir el supuesto problema exponencial en un sencillo problema lineal. Ya no me asustaba el cuadrado monstruoso. Encontrar su solución equivalía a generar y resolver un sistema lineal de 48 ecuaciones. Empleando lápiz y papel, y con la facilidad que ofrece la aritmética modular, cuestión de horas. La seguridad de encontrarme a las puertas de resolver el caso (y embolsarme la generosa recompensa) me incitó a recrearme en atar los cabos sueltos antes de proseguir. Para empezar, ¿por qué el cuadrado de 16 casillas tenía más de una solución? Ahora, empuñando firmemente mi método, podría averiguarlo:

Había encontrado un método para convertir el supuesto problema exponencial en un sencillo problema lineal.

a	b	c	d
a+b+1	a+b+c+1	b+c+d+1	c+d+1
a+c+1	d	a	b+d+1
b+c+d+1	a+b+d+1	a+c+d+1	a+b+c+1
0	**0**	**0**	**0**

Aquí estaba la razón de tantas soluciones. El sistema (?) generado por la fila añadida era ahora indeterminado (¡y tanto!). Ahora veía clara la razón de que cualquier disposición de la primera fila era válida para solucionarlo. Independientemente de los valores asignados a la primera fila, la fila añadida a la última quedaría siempre apagada.

Extasiado, me propuse el cuadrado de 25 casillas, aquel que la nieta de mi cliente había resuelto tanteando.

a	b	c	d	e
a+b+1	a+b+c+1	b+c+d+1	c+d+e+1	d+e+1
a+c+1	d	a+e	b	c+e+1
b+c+d+1	a+b+d+e +1	a+c+e	a+b+d+e +1	b+c+d+1
e	d+1	c+1	b+1	a
b+c+e+1	**a+b+c**	**a+b+ d+e**	**c+d+e**	**a+c+d+1**

Así que el sistema que hay que resolver es:

$$\begin{cases} b+c+e=1 \\ a+b+c=0 \\ a+b+d+e=0 \\ c+d+e=0 \\ a+c+d=1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a=e+1 \\ b=d+1 \\ c=d+1 \end{cases}$$

¡Esto funciona! Quedan libres los valores de d y e, lo que significa que pueden tomar cualquier valor. Habrá por tanto 4 soluciones. Rápidamente las representé (para facilitar la comprobación y visualización, decidí cubrir sólo las casillas con valor «1»).

1	1			
1	1		1	1
		1	1	1
	1	1	1	
	1	1		1

	1	1		1
	1	1	1	
		1	1	1
1	1		1	1
1	1			

1		1	1	
	1	1	1	
1	1	1		
1	1		1	1
			1	1

			1	1
1	1		1	1
1	1	1		
	1	1	1	
1		1	1	

No me sorprendió demasiado encontrarme con la misma configuración básica en todos los casos, pues estaba claro que cualquier giro o simetría de una solución producía una nueva, en caso de no coincidir con la original. Ya había observado este hecho al encontrar las 16 soluciones del cuadrado de 16 casillas. Por mi cabeza había pasado la idea de que ya no eran 2^{48} las posibilidades de la primera fila del cuadrado monstruoso sino sólo 2^{24}, pues si la solución era realmente única ¡tenía que ser simétrica! Este número de posibilidades (con una primera fila capicúa) era ya abordable por un análisis exhaustivo ensayando todos los casos con ayuda del ordenador. Pero ya no me importaba esta cuestión. El problema había dejado de ser exponencial, y no sólo eso, incluso podía dirigirme directamente hacia la solución.

La cuarta iluminación

Ahora que tenía la solución del caso a un paso, no tenía prisa por alcanzarla. La naturaleza humana es así. Además, había dos motivos que me hacían rechazar la idea de ponerme inmediatamente a la labor de dibujar un inmenso cuadrado de 48 casillas de lado y colocar en la primera fila las incógnitas $a_1,\dots, a_{48}$. El primero era que prefería que el ordenador hiciera el trabajo mecánico por mí, generando y resolviendo el sistema, aunque todavía no sabía cómo podía programarlo para hacer tal cosa. El segundo motivo procedía de mi pasado matemático. ¡Antes de buscar la solución, me gustaría poder probar que existe! Me estaba rondando la idea de invocar a uno de los métodos que anuncia el nombre del *príncipe de las matemáticas*, título merecidísimo, incluso modesto, que recae sobre el gran Gauss (quien, además, era a la sazón inventor del álgebra de congruencias y creador de la notación modular ya mencionada). A fin de cuentas, estaba ante un sistema de ecuaciones lineales. ¡Debería ser capaz de analizarlo!

¡Antes de buscar la solución, me gustaría poder probar que existe!

Veamos. El sistema generado por la fila añadida se puede expresar de la forma $A \cdot X = C$, donde A es una matriz cuadrada del mismo orden que el número de casillas de la primera fila. Si todas las filas que componen la matriz A son independientes entre sí, está garantizado (por la existencia de matriz inversa) que el sistema tiene solución y es única. Lo que se conoce como Sistema Compatible Determinado, vamos. Eso es lo que pasa, por ejemplo, cuando la primera fila consta de una, dos o tres casillas.

Pero, ¿qué sucede cuando una o más filas son dependientes del resto? ¡Ah, maldición! Entonces el sistema tiene más de una solución (no infinitas, porque cada incógnita sólo puede tomar dos valores)... ¡o no tiene ninguna! Tenía que eliminar esta última posibilidad si quería garantizar la existencia de solución en todos los casos.

Profundicemos más. ¿En qué casos se produce la incompatibilidad, es decir, la inexistencia de solución? Es aquí donde aparece el método de Gauss. Recordemos que, esencialmente, consiste en sumar y restar las diversas ecuaciones hasta obtener un sistema equivalente escalonado, en donde la última ecuación consta de una única incógnita, la penúltima de dos, etc. En este proceso, una fila de la matriz A se transformará en una fila de ceros sólo cuando exista una dependencia de esa fila respecto a otras. Por ejemplo, en el caso del sistema que soluciona el cuadrado de 25 casillas, podemos observar que la 3ª fila es la suma de la 1ª y de la 5ª. Afortunadamente, esta misma relación se guarda para los correspondientes valores del segundo miembro. Sólo cuando esto no suceda, es decir, cuando no exista la misma dependencia en los elementos de la matriz C que la existente entre las filas de la matriz A, el sistema carecerá de solución.

$$\begin{cases} \mathbf{b+c+e=1} \\ a+b+c=0 \\ \mathbf{a+b+d+e=0} \\ c+d+e=0 \\ \mathbf{a+c+d=1} \end{cases}$$

¡Y entonces surgió la comprensión total! Fue un chispazo, algo físico que me puso los pelos de punta. *La interdependencia de los elementos de la matriz C era exactamente la misma que entre las filas de la matriz A*. Como sucede frecuentemente en estos casos, la comprensión instantánea de esta realidad no es descriptible, no se puede transmitir. Lo único que puedo hacer es dejar constancia de la verdad de tal afirmación.

Veámoslo en un ejemplo (generalizable a cualquier situación). La siguiente tabla muestra la evolución, desde la primera fila, de los términos independientes hasta llegar a los definitivos elementos de *C* en la última fila. Se observará que, naturalmente, esta tabla es equivalente a la ya expuesta sin más que asignar el valor 0 a todas las incógnitas. Obsérvese además la simetría perfecta en cada fila.

0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1
0	1	1	1	0
1	**0**	**0**	**0**	**1**

Atención ahora. El primer 1 de la segunda fila procede de sumar 1 a la expresión «*a* + *b*» para lograr que la casilla ocupada por la letra *a* se ilumine. Cada vez que construimos una nueva fila, sumamos 1 en cada casilla. Así hasta la fila añadida a la última que es la que genera el sistema. Dicho de otra forma, la construcción de la matriz *A* es el resultado de una serie de sumas que tienen su reflejo como suma de «1» en la matriz *C*. O si se quiere ser más precisos, cada vez que el coeficiente de una incógnita se anula es porque ha sido sumada un número par de veces. Si se anulan todos estos coeficientes entonces el número total de sumas ha sido par, lo que conlleva haber sumado un número par de «1». Por tanto, cualquier relación existente entre las casillas de la última fila existe *tanto para los coeficientes de las incógnitas como para los términos independientes correspondientes*.

...¿cómo diseñar un programa que generase el propio sistema antes de resolverlo?

[Aquí es muy importante resaltar que lo anterior es consecuencia de que *en la construcción de cada fila añadimos* siempre *un «1» en cada casilla* (buscando iluminar la casilla superior). Si alguna casilla tuviera que permanecer apagada (situación que veremos más adelante), la compatibilidad del sistema se vería amenazada].

Conclusión: el cuadrado de 48 casillas de lado tenía solución y había encontrado el procedimiento para hallarla. Sólo me quedaba un pequeño problema por resolver...

La quinta iluminación

Ya sintiéndome seguro del éxito de mi investigación, únicamente me faltaba encontrar un procedimiento para que el ordenador generase por mí el sistema correspondiente a la fila añadida del cuadrado de 48 casillas de lado.

En mis anteriores casos no había tenido ocasión de enfrentarme a un problema similar. Sabía cómo escribir fácilmente un programa que resolviese un sistema de ecuaciones (por ejemplo, mediante el rápido y cómodo método de Gauss), pero ¿cómo diseñar un programa que generase el propio sistema antes de resolverlo?

Repasé y repasé mis observaciones del caso hasta dar con la solución. La clave de encontrarla residió en formularme una pregunta ridícula: ¿qué significa la *a* de la primera casilla? Respuesta: pues simplemente es una letra que INDICA QUE SE REFIERE A LA PRIMERA CASILLA. Es decir, indica solamente una posición. Pero, entonces, basta utilizar una notación posicional, como la de un vector, para poder prescindir de las letras. El primer elemento del vector indica el coeficiente de la letra *a*, el segundo el de la letra *b*, etc. De paso, añado un último elemento que indique el estado del término independiente.

(1, 0, 0, 0, 0, **0**)	(0, 1, 0, 0, 0, **0**)	(0, 0, 1, 0, 0, **0**)	(0, 0, 0, 1, 0, **0**)	(0, 0, 0, 0, 1, **0**)
(1, 1, 0, 0, 0, **1**)	(1, 1, 1, 0, 0, **1**)	(0, 1, 1, 1, 0, **1**)	(0, 0, 1, 1, 1, **1**)	(0, 0, 0, 1, 1, **1**)
(1, 0, 1, 0, 0, **1**)	(0, 0, 0, 1, 0, **0**)	(1, 0, 0, 0, 1, **0**)	(0, 1, 0, 0, 0, **0**)	(0, 0, 1, 0, 1, **1**)
(0, 1, 1, 1, 0, **1**)	(1, 1, 0, 1, 1, **1**)	(1, 0, 1, 0, 1, **0**)	(1, 1, 0, 1, 1, **1**)	(0, 1, 1, 1, 0, **0**)
(0, 0, 0, 0, 1, **0**)	(0, 0, 0, 1, 0, **1**)	(0, 0, 1, 0, 0, **1**)	(0, 1, 0, 0, 0, **1**)	(1, 0, 0, 0, 0, **0**)
(0, 1, 1, 0, 1, **1**)	(1, 1, 1, 0, 0, **0**)	(1, 1, 0, 1, 1, **0**)	(0, 0, 1, 1, 1, **0**)	(1, 0, 1, 1, 0, **1**)

[En realidad, esta tabla es equivalente a una matriz tridimensional cuyos elementos de subíndices (i, j, k) expresan el valor que tiene el coeficiente de la incógnita k-ésima, y el término independiente, en la casilla (i, j).]

¡Han desaparecido las letras! ¡Corriendo al ordenador! Sólo tengo que introducirle los 48 vectores de la primera fila, el método de construcción de las demás filas a partir de la primera y, gracias a Gauss, tardará menos de un segundo en darme la solución esperada.

Última escena

Nieta feliz, banquero satisfecho. Lo que es yo... ¡además de obtener una buena suma, había aprendido un montón de cosas!

x		x			x	x		x				x		x						x							x						x		x				x		x	x			x		x
	x				x	x	x			x			x			x	x	x				x	x	x	x				x	x	x			x			x			x	x	x				x	
x		x	x			x	x	x				x		x		x		x				x			x				x		x		x		x				x	x	x			x	x		x
		x	x		x		x	x							x	x		x		x		x	x	x	x		x		x		x	x							x	x		x		x	x		
				x						x	x		x	x	x		x	x	x		x					x		x	x	x		x	x	x		x	x						x				
x	x		x		x	x				x	x	x	x				x	x	x			x			x			x	x	x				x	x	x	x				x	x		x		x	x
x	x	x			x	x		x			x			x				x			x					x			x				x			x			x		x	x			x	x	x
	x	x	x				x			x	x	x	x			x	x	x	x			x	x	x	x			x	x	x	x			x	x	x	x			x				x	x	x	
x		x	x			x		x		x	x		x	x		x		x	x		x	x			x	x		x	x		x		x	x		x	x		x		x			x	x		x
									x					x	x	x				x	x		x	x		x	x				x	x	x					x									
	x			x	x		x	x		x		x	x						x	x			x	x			x	x						x	x		x		x	x		x	x			x	
				x	x	x	x	x			x	x	x	x			x		x		x					x		x		x			x	x	x	x			x	x	x	x	x				
x		x			x		x			x	x	x	x	x				x	x									x	x				x	x	x	x	x			x		x			x		x
	x			x	x		x	x		x	x	x	x			x	x	x				x	x	x	x				x	x	x			x	x	x	x		x	x		x	x			x	
x		x		x		x		x	x		x	x		x		x			x	x		x			x		x	x			x		x		x	x		x	x		x		x		x		x
			x	x					x						x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x						x					x	x			
	x	x	x				x	x	x				x	x	x	x			x	x		x			x		x	x			x	x	x	x				x	x	x				x	x	x	
	x			x	x		x				x		x		x		x	x				x	x	x	x				x	x		x		x		x				x		x	x			x	
	x	x	x	x	x	x	x	x				x	x		x		x	x	x									x	x	x		x		x	x				x	x	x	x	x	x	x	x	
				x	x		x	x		x	x	x		x	x	x		x	x		x					x		x	x		x	x	x		x	x	x		x	x		x	x				
x			x						x	x				x	x	x				x			x	x			x				x	x	x				x	x						x			x
				x		x		x	x		x				x				x		x		x	x		x		x				x				x		x	x		x		x				
	x	x	x		x		x	x					x	x	x	x	x					x			x					x	x	x	x	x					x	x		x		x	x	x	
	x		x				x		x	x			x		x		x			x	x		x	x		x	x			x		x		x			x	x		x				x		x	
	x		x				x		x	x			x		x		x			x	x		x	x		x	x			x		x		x			x	x		x				x		x	
	x	x	x		x		x	x					x	x	x	x	x					x			x					x	x	x	x	x					x	x		x		x	x	x	
				x		x		x	x		x				x				x		x		x	x		x		x				x				x		x	x		x		x				
x			x						x	x				x	x	x				x			x	x			x				x	x	x				x	x						x			x
				x	x		x	x		x	x	x		x	x	x		x	x		x					x		x	x		x	x	x		x	x	x		x	x		x	x				
	x	x	x	x	x	x	x	x				x	x		x		x	x	x									x	x	x		x		x	x				x	x	x	x	x	x	x	x	
	x			x	x		x				x		x		x		x	x				x	x	x	x				x	x		x		x		x				x		x	x			x	
	x	x	x				x	x	x				x	x	x	x			x	x		x			x		x	x			x	x	x	x				x	x	x				x	x	x	
			x	x					x						x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x						x					x	x			
x		x		x		x		x	x		x	x		x		x			x	x		x			x		x	x			x		x		x	x		x	x		x		x		x		x
	x			x	x		x	x		x	x	x	x			x	x	x				x	x	x	x				x	x	x			x	x	x	x		x	x		x	x			x	
x		x			x		x			x	x	x	x	x				x	x									x	x				x	x	x	x	x			x		x			x		x
				x	x	x	x	x			x	x	x	x			x		x		x					x		x		x			x	x	x	x			x	x	x	x	x				
	x			x	x		x	x		x		x	x						x	x			x	x			x	x						x	x		x		x	x		x	x			x	
									x					x	x	x				x	x		x	x		x	x				x	x	x					x									
x		x	x			x		x		x	x		x	x		x		x	x		x	x			x	x		x	x		x		x	x		x	x		x		x			x	x		x
	x	x	x				x			x	x	x	x			x	x	x	x			x	x	x	x			x	x	x	x			x	x	x	x			x				x	x	x	
x	x	x			x	x		x			x			x				x			x					x			x				x			x			x		x	x			x	x	x
x	x		x		x	x				x	x	x	x				x	x	x			x			x			x	x	x				x	x	x	x				x	x		x		x	x
				x						x	x		x	x	x		x	x	x		x					x		x	x	x		x	x	x		x	x						x				
		x	x		x		x	x							x	x		x		x		x	x	x	x		x		x		x	x							x	x		x		x	x		
x		x	x			x	x	x				x		x		x		x				x			x				x		x		x		x				x	x	x			x	x		x
	x				x	x	x			x			x			x	x	x				x	x	x	x				x	x	x			x			x			x	x	x				x	
x		x			x	x		x				x		x						x							x						x		x				x		x	x			x		x

Más juegos luminosos

A la hora de jugar a *All Lights*, es decir, de iluminar el cuadrado anterior, basta seleccionar las casillas marcadas en la primera fila. Seleccionaremos a continuación, fila a fila, todas aquellas casillas *cuya casilla superior permanece apagada*, ya que es la única forma de iluminarla. Por supuesto, este proceder equivale a seleccionar todas las casillas marcadas.

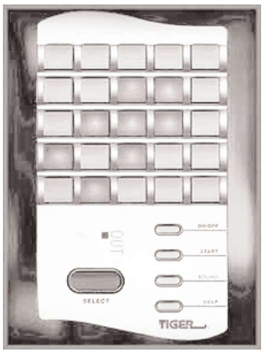
Las distintas «iluminaciones» de nuestro héroe son fácilmente trasladables a otra variedad de casos. Para empezar, es evidente (supongo) que no comporta ningún cambio la generalización a cualquier rectángulo. Ahora bien, en el caso de rectángulos más anchos que altos, el número de operaciones se puede reducir si previamente giramos noventa grados el rectángulo (con lo que el número de casillas de la primera fila, y por tanto el orden del sistema, se reduce).

Se pueden cambiar también otros aspectos del juego: las casillas que son alteradas cuando se elige una (Merlin Square, Flip, Rey), las casillas que hay que alterar (Lights Out y similares), el número de estados posibles de cada casilla (pueden ser más de dos) e incluso la superficie sobre la que se juega (plano, cilindro, banda de Möbius, toro, botella de Klein y gorro cruzado). Veremos cómo afectan estas variaciones a la resolución del juego.

Merlin Square

En el caso del juego Merlin Square, el único cambio reside en las casillas que alteran su estado cuando se selecciona una esquina o una casilla de un borde (Merlin Square coincidirá con All Lights cuando no haya bordes, como pasará al jugar sobre superficies cerradas).

Para mayor claridad, en el siguiente cuadrado se representan los tres tipos posibles de alteraciones:



Lights Out circulando por internet

x				x	
		x			x

a	b	c	d	e	f
	s	s	s	s	s
					s

Basta hacer la oportuna modificación en el método de construcción de cada fila a partir de la primera para resolver la cuestión. No obstante, dado el especial comportamiento de las casillas de las esquinas y de los bordes, esta vez el sistema no se genera añadiendo una nueva fila virtual sino por las condiciones impuestas a las casillas señaladas con «s». Además, surge un caso especial cuando el número de columnas es 2. En este caso, el estado de la casilla correspondiente a la esquina inferior derecha del rectángulo es independiente del estado de las casillas de la primera fila, por lo que se debe añadir una tercera incógnita que ocupe esa esquina.

Lights Out

De todas las variantes de este tipo de juegos, tal vez sea Lights Out la que más desconcierta al jugador. Incluso existen «clubs de fans» de este juego (el primero en crearse, en 1996, se mantiene en la dirección gbs.mit.edu/~kbarr/lo/). El modo en que se altera el estado de las casillas es idéntico al de All Lights. Sin embargo ahora, como su nombre indica, hay que apagar las luces iluminadas. Es fácil comprender que si todo el rectángulo estuviese iluminado no existiría ninguna diferencia esencial con All Lights. Pero en la posición inicial de Lights Out *aparecen iluminadas sólo algunas casillas del rectángulo*, que son las que hay que apagar. Así, podemos considerar All Lights como un caso particular de Lights Out. Como ejemplo, la tabla siguiente recoge un problema propuesto y su única solución.

			X	X	
		X			X
	X	X			X
X			X	X	
X			X		
	X	X			

Hablando de soluciones, ya se había adelantado que All Lights tiene siempre solución debido a que todas las casillas deben alterar su estado. Además, cuando el sistema generado sea indeterminado, el método de Gauss generará una o más filas de ceros en la matriz de coeficientes y los correspondientes ceros en la matriz de términos independientes. Por cada una de estas filas, existirán dos soluciones. La tabla siguiente muestra el número de soluciones (se consideran diferentes los giros y las simetrías) dependiendo de las dimensiones del rectángulo, hasta el orden 20:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	19	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	2	1	1	2	1	1	2	1	1	2	1	1	2	1	1	2	1	1	2
2	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1	4	1
3	1	4	1	1	8	1	1	4	1	1	8	1	1	4	1	1	8	1	1	4
4	1	1	1	16	1	1	1	1	16	1	1	1	1	16	1	1	1	1	16	1
5	2	2	8	1	4	1	16	2	2	1	16	1	2	2	16	1	4	1	8	2
6	1	1	1	1	1	1	1	64	1	1	1	1	1	1	1	1	64	1	1	1
7	1	4	1	1	16	1	1	4	1	1	128	1	1	4	1	1	16	1	1	4
8	2	1	4	1	2	64	4	1	2	1	4	1	128	1	4	1	2	1	4	64
9	1	2	1	16	2	1	1	2	256	1	2	1	1	32	1	1	2	1	256	2
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	2	4	8	1	16	1	128	4	2	1	64	1	2	4	256	1	16	1	8	4
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	2	1	1	2	1	1	128	1	1	2	1	1	2	1	1	8192	1	1	2
14	2	1	4	16	2	1	4	1	32	1	4	1	2	16	4	256	2	1	64	1
15	1	4	1	1	16	1	1	4	1	1	256	1	1	4	1	1	16	1	1	4
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	256	1	256	1	1	1	1
17	2	2	8	1	4	64	16	2	2	1	16	1	8192	2	16	1	4	1	8	128
18	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
19	1	4	1	16	8	1	1	4	256	1	8	1	1	64	1	1	8	1	A	4
20	2	1	4	1	2	1	4	64	2	1	4	1	2	1	4	1	128	1	4	1

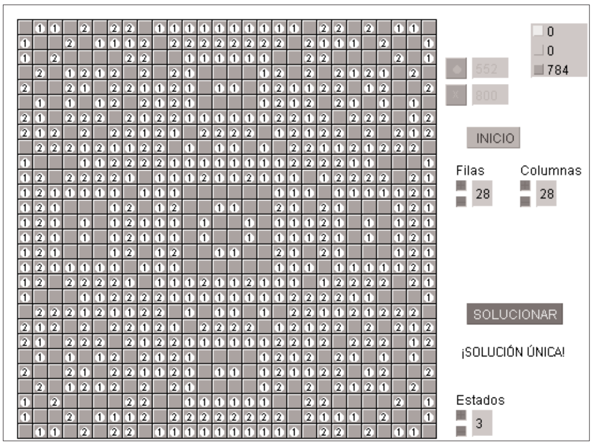
Nota. En la tabla anterior A = 65536

Sin embargo, se produce una vuelta de tuerca (otra más) cuando jugamos a Lights Out. Si la solución es única para All Lights también lo es para cualquier estado inicial de Lights Out puesto que en ambos casos la matriz de coeficientes será no singular, independientemente de lo que le suceda a la matriz de términos independientes. ¡Ah! ¿pero qué sucede en aquellos rectángulos que admiten varias soluciones en All Lights? Pues resulta que en Lights Out, como no todas las casillas alterarán su estado, sino sólo aquellas iluminadas en la situación inicial, la regularidad se rompe de manera que cuando aparecen las filas de ceros en la matriz de coeficientes *puede que el término independiente correspondiente también sea cero o puede que no*. Así que, por cada fila de ceros en la matriz de incógnitas, hay una posibilidad entre dos (y con la misma probabilidad) de que la ecuación correspondiente sea una identidad. Conclusión: *la tabla anterior no sólo muestra el número de soluciones de All Lights (y de Lights Out en caso de haberlas), sino también los inversos de la probabilidad de que exista solución en Lights Out*. Como ejemplo, si iluminamos al azar casillas de un cuadrado de lado 5, la probabilidad de que sea posible apagarlas es de 1/4. Si el cuadrado tiene lado 19, ¡sólo será posible una vez de cada 65536!

Ampliando la gama de colores

También se puede generalizar este tipo de juegos considerando que cada casilla admite *más de dos estados* (se pasa de sombra a luz y viceversa por estados intermedios, como en un semáforo). Aquellos rectángulos en donde existe un gran número de soluciones son los más interesantes para jugar debido a que se puede proponer el reto añadido de encontrar entre todas las soluciones la más económica en jugadas, es decir, la que selecciona menos casillas para resolver el problema. Resulta que aumentar el módulo de la aritmética supone aumentar la base de la potencia que genera el número de soluciones, por lo que pronto se alcanzan millones de soluciones. Realmente es complicado (si es que en general se puede) decidir, *antes de encontrarlas*, cuál de todas las soluciones será la más económica.

Para generar el sistema correspondiente a varios estados basta tomar como módulo de la aritmética el número de estados posibles.



La única solución de All Lights con 3 estados en un cuadrado de orden 28

No obstante, se debe ser cuidadoso con la aritmética modular. Nuestro héroe observó que en módulo 2 el sistema que genera All Lights es siempre compatible *porque si dos filas de la matriz de coeficientes son dependientes es que son iguales, igualdad que conservan los términos independientes*. Sin embargo, no ocurre lo mismo con otros módulos. El ejemplo más sencillo lo encontramos en el cuadrado de orden 2 de All Lights *módulo*

3. ¡Ahora no hay solución! Veamos la causa. El sistema generado es:

$$\begin{cases} a + 2b = 2 \\ 2a + b = 2 \end{cases}$$

(Un buen momento para tomarse una pausa, o un té, y comprobar que éste es efectivamente el sistema). El determinante de la matriz de coeficientes es –3, ¡que es equivalente a 0 en módulo 3! Así que el sistema, aparentemente determinado, resulta ser incompatible. Obsérvese que la segunda fila de la matriz de coeficientes es el duplo de la primera, relación que ahora no guardan los términos independientes.

Por si fuera poco, que no lo es, todo se complica bastante cuando el módulo utilizado es, además, un número compuesto. En estos casos, *la integridad del anillo se rompe* (ocurrente expresión que indica que existen divisores propios de cero). Por ejemplo, usando módulo 6, ecuaciones en principio determinadas como $3a = 0$, ¡tienen tres soluciones: 0, 2, 4! Esta característica invalida el método de Gauss, ya que ahora no tenemos la garantía de que las soluciones encontradas empleando el método sean realmente soluciones del sistema. Recordemos que dicho método necesita a menudo multiplicar los dos miembros de una ecuación por un número. Pero si este número *es divisor del módulo* se corre el riesgo de eliminar o reducir la relación existente entre las incógnitas. En estos casos, parecería lógico recurrir a procesos menos drásticos que la eliminación de coeficientes. Un buen camino podría ser el empleo del método de sustitución. Lástima que este método es mucho menos elegante, a la par que bastante engorroso. Podemos solventar el problema descomponiendo el módulo en módulos primos, siempre y cuando sean además primos entre sí (es decir, distintos). Así, en módulo 6, el sistema tiene solución S_6 si y sólo si tiene solución S_2 en módulo 2 y solución S_3 en módulo 3. La siguiente igualdad nos permite relacionar las soluciones entre estos módulos:

$$S_6 = (3\ S_2 + 4\ S_3) \bmod 6$$

Por si fuera poco, que no lo es, todo se complica bastante cuando el módulo utilizado es, además, un número compuesto.

Un ejemplo para aclarar las cosas. Queremos solucionar el siguiente problema en módulo 6 de Lights Out, en donde las cifras representan la iluminación inicial, es decir, el número de alteraciones que debe sufrir cada casilla para ser apagada.

1	1
0	4

Generamos el sistema correspondiente:

a	*b*
5*a*+5*b*+1	5*a*+5*b*+1
***a*+2*b*+4**	**2*a*+*b*+2**

Tenemos entonces que el sistema, módulo 6, es:

$$\begin{cases} a + 2b = 2 \\ 2a + b = 4 \end{cases}$$

El determinante de la matriz de coeficientes es –3, ¡que ya no es equivalente a 0 en módulo 6! Así que presumimos que el sistema es determinado. Pues no. No podemos sacar esta conclusión puesto que basta que –3 sea divisor propio de cero para que no exista matriz inversa (no existe inverso de 3)[1].

Lo que debemos hacer es resolver el anterior sistema módulo 2 (una solución), volverlo a resolver módulo 3 (tres soluciones) y obtener con la igualdad dada las tres soluciones módulo 6 del sistema.

$$S_6(1) = 3\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$$

$$S_6(2) = 3\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$$

$$S_6(3) = 3\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$$

Por lo que las tres soluciones del problema planteado son (las cifras representan ahora el número de veces que debe ser seleccionada cada casilla para apagar el cuadrado completo):

2	0
5	5

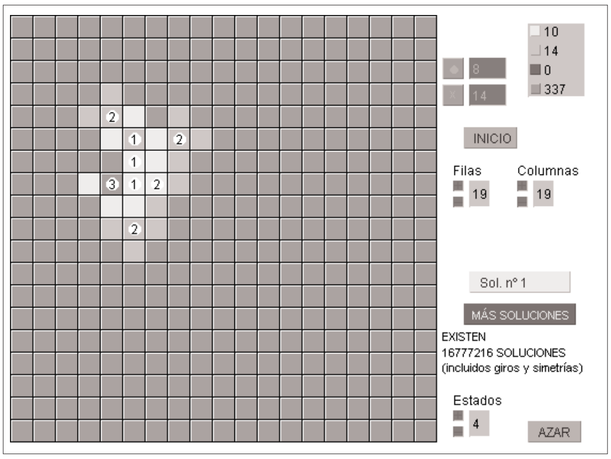
0	4
3	3

4	2
1	1

¿Y si el módulo es 4, pongamos, que es producto de primos iguales? Es el caso más complicado. No nos queda más remedio que realizar cambios en el modo en que se eliminan los coeficientes al aplicar el método de Gauss,

1 Supongamos que existe 3^{-1}. Entonces $3^{-1}3 = 1$. Duplicando, $3^{-1}0 = 2$. Absurdo, ya que 0 no es igual a 2 (módulo 6).

ya que si multiplicamos una fila por 2 corremos el riesgo de eliminar información provocando la aparición de «soluciones» falsas. Una posible salida consiste en buscar los coeficientes impares por toda la matriz (o submatriz que estemos escalonando) y obligar al proceso a elegir sólo éstos como pivotes, permutando columnas si es preciso. Si surgiera la circunstancia de que todos los coeficientes de la submatriz son pares, procedemos a dividir entre 2 todos los coeficientes de las incógnitas de cada fila (una vez encontrada una solución, se invierte el proceso para no perder soluciones).



Un problema de Lights Out
con 4 estados y millones de soluciones

Mensaje en una botella encontrada navegando por internet

(copia exacta y completa)[2]

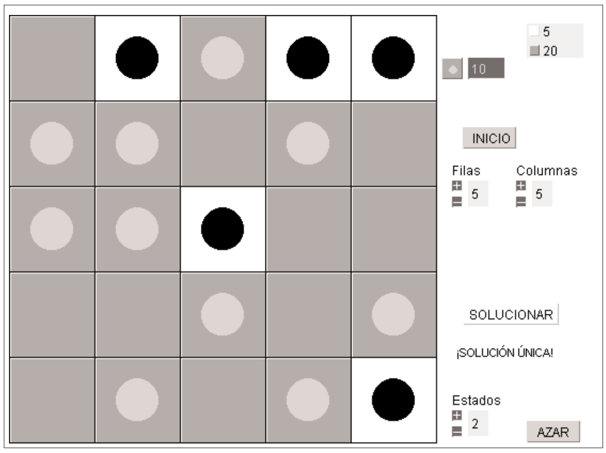
Subject: Light's Out   Date: Sun, 2 Jan 2000 15:03:30

From: Gary Watson   To: kbarr

Hi,

I wrote a program similar to Tiger's "Light's Out" back in 1985 or so, in GWBasic for IBM PC's. It was called "Flip". I deliberately used the block characters so that people without a graphics card could still play it. I'm not sure, but it's possible I invented the game as I had never heard of it before hand. My version was different from the hand held Tiger game (which is pretty cool by the way) in that the object was to get all the squares lit up, always five squares were lit up at random to start the game, and you were not allowed to press an illuminated square. I'm not sure why I made that restriction, but it made it hard to solve. The starting position was generated randomly, and a mathematician friend of mine speculated that some starting positions were insolvable, but he couldn't prove it (I suspect it was sour grapes because he couldn't ever beat it). Tiger has a patent on the Light's Out game, and it would be a hoot if it turned out that the invention really belonged to the public domain! I uploaded Flip to about a hundred BBS's from 1985 to about 1988 or thereabouts. Any idea how long Tiger has been making their game?

Gary Watson. Technical Director. Nexsan Technologies, Ltd.



Una de las 3.270 posiciones resolubles
de Watson y su única solución

Ya habíamos visto que, efectivamente, sólo una de cada cuatro disposiciones al azar en un cuadrado de cinco por cinco casillas tiene solución en Lights Out. Restringir los casos para sólo considerar aquellos en los que hay que apagar (equivalente a iluminar, en el caso de Watson) 20 casillas apenas altera esta probabilidad (13.326 casos de 53.130). Sin embargo, la condición impuesta por Watson de no poder seleccionar ninguna de las 5 casillas fijadas inicialmente, lo que significa añadir cinco condiciones –cinco ecuaciones– más al sistema, reduce enormemente el número de casos con solución (3.270 de 53.130). Esto significa que ¡un 94 por ciento de las veces se pretendía encontrar una solución que no existía! Demasiado poco probable para que esta versión del juego tuviese éxito[3]. No es de extrañar que el amigo matemático de Watson se mosquease.

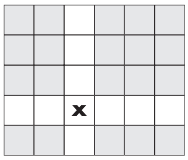
Juego de bolsillo
Lights Out
patentado por Tiger

2 (Traducción, más o menos:) Escribí un programa similar al *Light's Out* de Tiger hacia 1985, en GWBasic para PC. Lo llamé Flip. Utilicé deliberadamente caracteres para que incluso los que no poseyeran tarjeta gráfica pudieran jugar. Es posible que haya inventado el juego, pues no tengo anteriores referencias. Mi versión se diferenciaba de la del juego electrónico de bolsillo de Tiger (que, por cierto, está muy bien) en que *el objetivo era iluminar todas las casillas*, partiendo de *una posición inicial en la que cinco casillas se iluminaban aleatoriamente y no podían ser seleccionadas*. No sé por qué hice esta restricción, pero dificultaba mucho su resolución. Un matemático amigo mío conjeturó que *algunas* posiciones iniciales eran irresolubles, pero no pudo demostrarlo (sospecho que estaba picado por no haber conseguido resolver nunca el rompecabezas). Tiger ha patentado el juego Light's Out, ¡y sería escandaloso que ocultasen que en realidad el invento pertenecía al dominio público! Entre 1985 y 1988, más o menos, envié Flip a una centena de BBS [sistemas de archivos por correo electrónico]. ¿Tienes idea de cuánto hace que Tiger diseñó su juego? (Gary Watson, director técnico de Nexsan Technologies).

3 Al menos no habiendo apuestas por medio.

Otro Flip

Resulta curioso, después de la lectura del mensaje anterior, observar que el nombre *Flip* corre actualmente por internet relacionado con un rompecabezas distinto de Lights Out y del juego de Watson, aunque con evidentes similitudes. Ahora las casillas que alteran su estado son todas aquellas que se encuentren en *la misma fila o columna* que la casilla seleccionada.



Este cambio altera radicalmente el método de resolución. La causa reside en que cada fila no es construible basándose en la anterior. El enfoque debe ser ahora por filas y columnas enteras, no por casillas aisladas.

Resolver Flip en su versión *All*, es decir, alterar *todas* las casillas del rectángulo, es muy fácil. Basta seleccionar todas las casillas de cualquier fila o columna, siempre que sean un número impar. En el caso de que el rectángulo tenga dimensiones pares, la única y sencilla solución consiste en seleccionar todas las casillas.

El problema se complica cuando pasamos a la versión *Out*, esto es, debemos apagar sólo *algunas casillas previamente iluminadas*. Como ya he mencionado, la estrategia debe basarse en filas y columnas enteras. Y, por supuesto, no debemos olvidar que seguimos trabajando con la cómoda aritmética módulo 2. Emplearé la notación expresada en el cuadro adjunto (siguiente columna de esta página)

Datos	
n	Número de filas del rectángulo.
m	Número de columnas del rectángulo.
B	Matriz cuyos elementos valen 1 en las casillas que hay que apagar y 0 en el resto.
$f_B(i)$	Suma (mod 2) de los elementos de la fila i de B.
$c_B(j)$	Suma (mod 2) de los elementos de la columna j de B.
t_B	Suma (mod 2) de los elementos de B.
Incógnita	
A	Matriz buscada, cuyos elementos valen 1 en las casillas que hay que elegir y 0 en el resto.
Parámetros	
$f(i)$	Suma (mod 2) de los elementos de la fila i de A.
$c(j)$	Suma (mod 2) de los elementos de la columna j de A.
t	Suma (mod 2) de los elementos de A.

El problema se complica cuando pasamos a la versión Out, esto es, debemos apagar sólo algunas casillas previamente iluminadas.

En primer lugar, se tiene la ecuación fundamental que relaciona la matriz de partida B con la matriz buscada A:

$A(i, j) = f(i) + c(j) - B(i, j) \quad \forall i, j$ (mod 2)

Para entender esta ecuación, nada mejor que un ejemplo. Supongamos que tenemos que apagar la casilla (1, 1). Es decir, $B(1, 1) = 1$. Cada vez que la primera fila o la primera columna cambien de estado, esto es, cada vez que $f(1)$ y $c(1)$ alteren su valor, la casilla (1, 1) se apagará y volverá a encender. Si la primera fila y la primera columna cambian un número impar de veces [$f(1) + c(1) = 1$], la casilla (1, 1) no deberá ser seleccionada [$A(1, 1) = 1-1 = 0$]. Análogamente sucede en el resto de los casos.

De la ecuación fundamental se deducen, sumando los elementos de cada fila y de cada columna, las siguientes tres ecuaciones (mod 2, aunque conservo los signos negativos para facilitar su comprensión) que nos encaminarán rápidamente hacia la solución del problema:

$$\begin{cases} f(i) = \sum_{j=1}^{m} A(i,j) = m \cdot f(i) + t - f_B(i) & \forall i \\ c(j) = \sum_{i=1}^{n} A(i,j) = n \cdot c(j) + t - c_B(j) & \forall j \\ t = \sum_{i=1}^{n} f(i) = m \cdot t + n \cdot t - t_B & \end{cases}$$

Dependiendo de la paridad de m y n, surgen cuatro casos con la solución correspondiente:

i) m=0 mod 2, n=0 mod 2. La única solución es (mod 2):

$$A(i, j) = -f_B(i) - c_B(j) - B(i, j) \quad \forall i, j$$

ii) m=0 mod 2, n=1 mod 2. Esto implica que $t = c_B(j)\ \forall j$. Así que sólo existirá solución cuando todas las columnas tengan la misma paridad en cuanto al número de casillas inicialmente iluminadas. Siempre que se cumpla este requisito de compatibilidad, lo que sucederá una vez de cada 2^{m-1}, existirán $2m-1$ soluciones de la forma (mod 2):

$$A(i, j) = -f_B(i) - c_B(j) - B(i, j) + c(j) \quad \forall i, j$$

con

$$c(m) = c_B(m) - \sum_{j=1}^{m-1} c(j)$$

donde $c(j)$ puede tomar cualquier valor.

iii) m=1 mod 2, n=0 mod 2. Es el mismo caso anterior, sin más que girar el rectángulo 90 grados.

iv) m=1 mod 2, n=1 mod 2. Esto implica que $f_B(i) = c_B(j) = t \ \ \forall\, i, j$. Así que sólo existirá solución cuando todas las filas y columnas tengan la misma paridad en cuanto al número de casillas inicialmente iluminadas. Siempre que se cumpla este requisito de compatibilidad, lo que sucederá una vez de cada 2^{m+n-2}, existirán $2m+n-2$ soluciones de la forma (mod 2):

$$A(i, j) = f(i) + c(j) - B(i, j) \quad \forall i, j$$

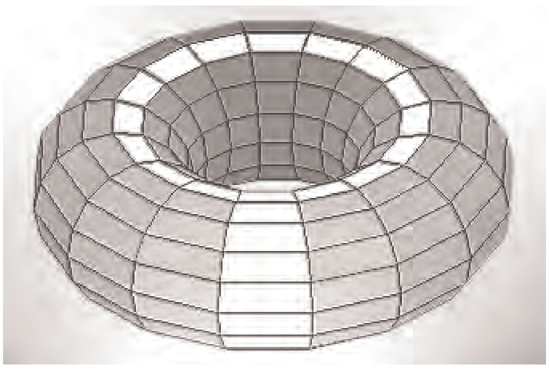
con

$$f(n) = f_B(n) - \sum_{i=1}^{n-1} f(i)$$

$$c(m) = c_B(m) - \sum_{j=1}^{m-1} c(j)$$

donde $f(i)$, $c(j)$ puede tomar cualquier valor.

En cualquier caso, la matriz A ha sido hallada a la vez que se ha encontrado el método de discusión de existencia de solución.



Jugando a Flip sobre un toro

Rey

Le he puesto este nombre a una variante de Lights Out que, curiosamente, no he visto todavía circulando. Puede que sea aquí la primera vez que aparece... y sin embargo ¡es tan evidente pensar en esta nueva posibilidad! Se trata de que ahora las casillas que alteran su estado, además de la elegida, son todas aquellas que la rodean, igual que sucede con las casillas amenazadas por el rey de ajedrez (de ahí el nombre).

…ahora las casillas que alteran su estado, además de la elegida, son todas aquellas que la rodean, igual que sucede con las casillas amenazadas por el rey de ajedrez (de ahí el nombre).

x					
				x	

Al igual que pasa con Flip, es muy fácil solucinar Rey en su versión All, pero la cosa se complica en la versión Out (aunque sigue siendo más fácil de resolver que Lights Out).

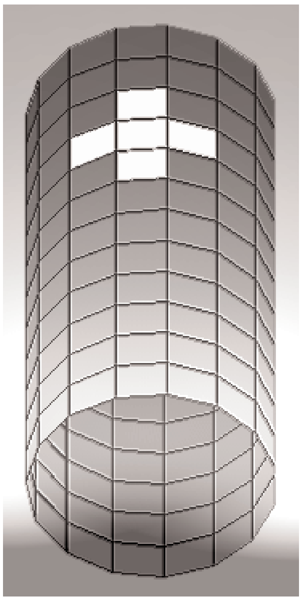
El análisis de Rey nos conduce a un sistema con tantas ecuaciones e incógnitas como casillas tenga la primera fila y (en el caso de existir más de una columna) el resto de la primera columna. La causa de ello reside en que el estado de las casillas señaladas con las 9 primeras letras en la siguiente tabla decide el estado del resto de las casillas. Así que estas son ahora las incógnitas.

a	b	c	d	e	
f					s
g					s
h					s
i					s
	s	s	s	s	s

Análogamente a lo que hizo nuestro héroe, basta añadir las casillas «virtuales» marcadas con «**s**» para establecer las ecuaciones correspondientes que permiten iluminar las casillas sombreadas. Por otra parte, al crecer el número de incógnitas, abundan los rectángulos para los que existen muchas soluciones. Por ejemplo, se alcanzan más de mil millones de soluciones en un cuadrado de orden 8 (como el tablero de ajedrez) con 4 estados posibles en cada casilla.

Otras superficies

Hasta ahora, todos los juegos se desarrollaban en el plano. Sin embargo, esta no es la única superficie que podemos utilizar como tablero de juego. Por ejemplo, cabe imaginar que diseñamos el tablero sobre una superficie cilíndrica, de tal forma que ya no existe ni primera ni última columna. No hará falta complicar la representación plana del tablero. Lo único que tenemos que tener presente es que la «última columna» representada es vecina (y anterior) de la «primera columna». No es difícil pasar del modelo plano al modelo real espacial, ya que basta imaginar que los bordes izquierdo y derecho del rectángulo han sido «pegados». Por supuesto, si dejamos estos bordes en paz y pegamos los bordes superior e inferior volveremos a obtener una superficie cilíndrica.



Pegando dos bordes opuestos del tablero

…cabe imaginar que diseñamos el tablero sobre una superficie cilíndrica, de tal forma que ya no existe ni primera ni última columna

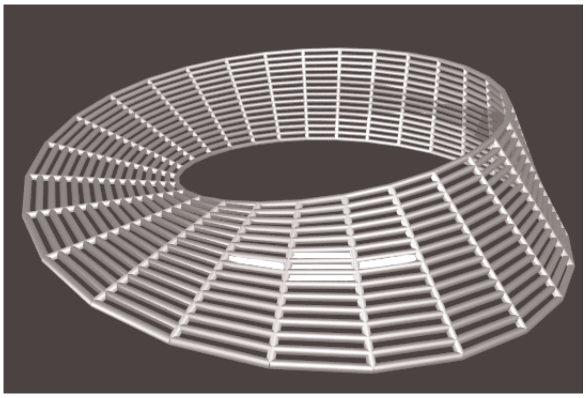
Ya puestos a pegar bordes, existen cinco formas esencialmente diferentes de hacerlo:

[Desaparecen las esquinas:]

1. Pegar dos bordes opuestos: *Cilindro*. Si las columnas siguen siendo rectas, las filas se transforman en anillos. Quedan dos bordes.
2. Pegar dos bordes opuestos después de voltear (girar) uno de ellos: *Banda de Möbius*. Si las columnas siguen siendo rectas, las filas se transforman en bandas de Möbius. Queda un borde (!).

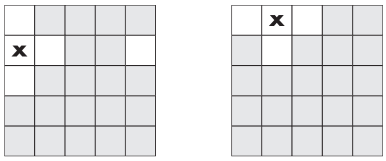
[Desaparecen también los bordes:]

3. Pegar dos a dos los bordes opuestos: *Toro*. Tanto las filas como las columnas son anillos.
4. Pegar dos bordes opuestos como en el Cilindro y los otros dos como en la Banda de Möbius: *Botella de Klein* (sólo construible en un espacio de más de tres dimensiones). Si las filas se transforman en anillos, las columnas se convierten en bandas de Möbius.
5. Pegar dos a dos los bordes opuestos como en la Banda de Möbius: *Gorro cruzado*[4] (sólo construible en un espacio de más de tres dimensiones). Tanto las filas como las columnas son bandas de Möbius.

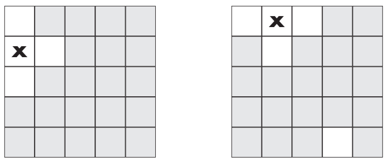


La selección de una casilla produce este efecto en Flip sobre Möbius

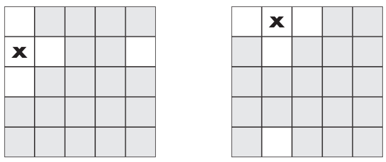
Para mayor claridad, en las siguientes tablas vemos los efectos que estas superficies tienen sobre la iluminación de algunas casillas del rectángulo en el juego de All Lights (o en el de Lights Out).



Cilindro

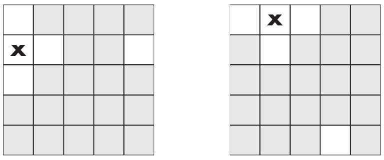


Banda de Möbius

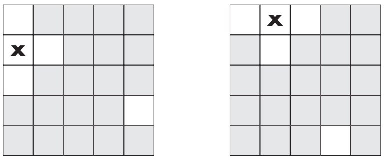


Toro

4 En inglés, *Cross-Cap*. En castellano, vendría a ser gorro cruzado, bonete cruzado, o cofia. Es un modelo del plano proyectivo.



Botella de Klein



Gorro cruzado

Jugando sobre un cilindro

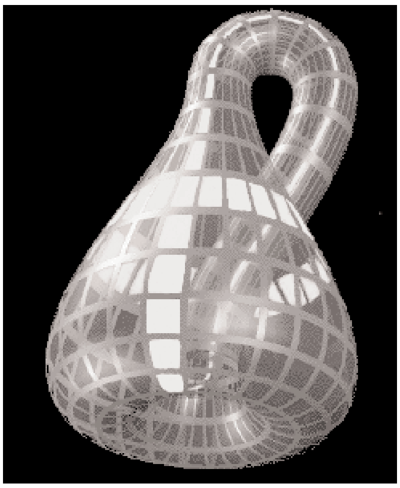
El sistema se genera esencialmente igual que sobre el plano, sin más que tener en cuenta la vecindad de la primera y última columna.

Jugando sobre una banda de Möbius, un toro, o una botella de Klein

El sistema generado duplica –en general[5]– su orden, pues ahora la última fila no se puede deducir de las anteriores. Así que las casillas de esta última fila se convierten en nuevas incógnitas. El sistema queda generado por las condiciones impuestas a las dos últimas filas.

a	*b*	*c*	*d*	*e*
f	*g*	*h*	*i*	*j*

s	**s**	**s**	**s**	**s**
s	**s**	**s**	**s**	**s**



Aunque no podemos construirla,
podemos jugar sobre una botella de Klein

Si jugamos sobre una banda de Möbius o una botella de Klein, el número de soluciones se incrementa espectacularmente debido a la coincidencia de cada columna con su opuesta.

5 Para rectángulos con menos de tres filas o columnas el orden del sistema puede, en ocasiones, reducirse.

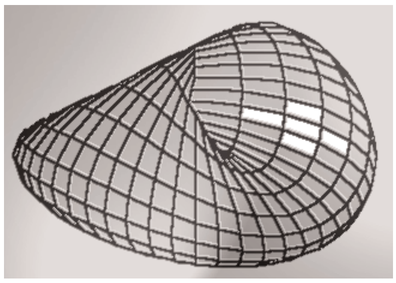
En el caso de Flip, es evidente que el juego no sufre ninguna modificación al elegir el toro (o el cilindro) como superficie. Si jugamos sobre una banda de Möbius o una botella de Klein, el número de soluciones se incrementa espectacularmente debido a la coincidencia de cada columna con su opuesta. Esto permite que cualquier valor dado a las casillas de la mitad de las columnas sea válido cuando exista solución (si el número de columnas es impar, la «mitad» se refiere al entero más próximo por defecto).

Jugando sobre un gorro cruzado

El sistema generado es –en general– de orden $2(F + C - 3)$, donde F y C indican el número de filas y columnas del rectángulo. Esto se debe a que ahora todas las casillas del borde del rectángulo, excepto dos esquinas que se pueden deducir, son incógnitas. El sistema queda generado por las condiciones impuestas a las dos últimas filas y a la primera y última columnas, exceptuando las dos esquinas mencionadas.

a	*b*	*c*	*d*	*e*
f				*g*
h				*i*
j				*k*
	l	*n*	*p*	

s				**s**
s				**s**
s				**s**
s	**s**	**s**	**s**	**s**
	s	**s**	**s**	



El crosscap también puede
servirnos de tablero de juego

En el caso de Flip, el número de soluciones se incrementa todavía más que cuando se elegía una banda de Möbius. Ahora también las filas opuestas coinciden por lo que también las casillas de estas filas pueden tomar cualquier valor.

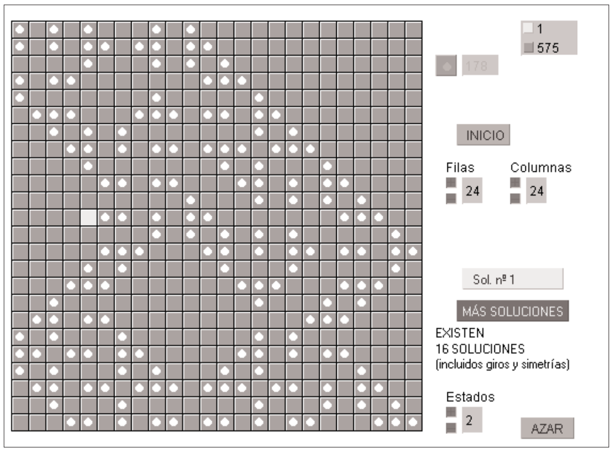
Usted no se cree una palabra mientras no lo compruebe (y hace muy bien)

Utilice un buscador de internet (google, yahoo,...) para localizar la dirección en donde se encuentran programas, *applets* de Java, que he diseñado para que se pueda proponer, solucionar y comprobar cualquier problema (entre 2 y 7 estados) de All Lights, Merlin Square, Lights Out, Flip de Watson, Flip y Rey hasta el orden 50, cota debida exclusivamente a las restricciones impuestas por el tamaño de la pantalla. En el buscador, basta escribir como criterio de búsqueda las palabras *Solucionar Lights Merlin Flip Rey*. Recomiendo descargar la página web en el disco duro para, tranquilamente, poder jugar con los programas sin estar conectado a la red. Cuando se eligen tableros grandes, resulta espectacular comprobar que la solución se muestra instantáneamente[6]. En el caso de existir más de una solución, se pueden ver todas (en realidad, he establecido un tope de mil millones: si alguien está interesado en ver también las siguientes, que contacte conmigo *cuando haya visto todas las soluciones que muestra el programa*).

El núcleo del programa correspondiente a Lights Out (con w estados posibles en cada casilla) se basa en los siguientes bucles, realizados sobre un rectángulo de M columnas en los que la matriz b toma valores entre 1 y w–1 en las casillas que hay que apagar y 0 en el resto. Su expresión en Java toma la forma expresada en el cuadro adjunto[7].

Se observará que el programa resuelve cualquier problema: ¡sólo tiene que aplicar un poquito de lógica!

```
// Cálculo de los coeficientes de las incógnitas a(k) extremos de la fila F

int F1=F-1; int F2=F-2; int N=M+1;
for (int k=1; k<N; k++) {
      a[F][1][k]=(-a[F2][1][k]-a[F1][1][k]-a[F1][2][k])%w;
      a[F][M][k]=(-a[F2][M][k]-a[F1][M][k]-a[F1][M-1][k])%w;
}

// Cálculo de los términos independientes a(M+1) extremos de la fila F

a[F][1][N]=(-a[F2][1][N]-a[F1][1][N]-a[F1][2][N]+b[F1][1])%w;
a[F][M][N]=(-a[F2][M][N]-a[F1][M][N]-a[F1][M-1][N]+b[F1][M])%w;

// Cálculo de coeficientes y términos independientes restantes de la fila F

for (int c=2; c<M; c++) {
      for (int k=2; k<N; k++) {
            a[F][c][k]=(-a[F2][c][k]-a[F1][c-1][k]-a[F1][c][k]-a[F1][c+1][k])%w;
      }
a[F][c][N]=(-a[F2][c][N]-a[F1][c-1][N]-a[F1][c][N]-a[F1][c+1][N]+b[F1][c])%w;
}
```



Una solución del programa a un difícil problema de Lights Out: apagar una sola luz

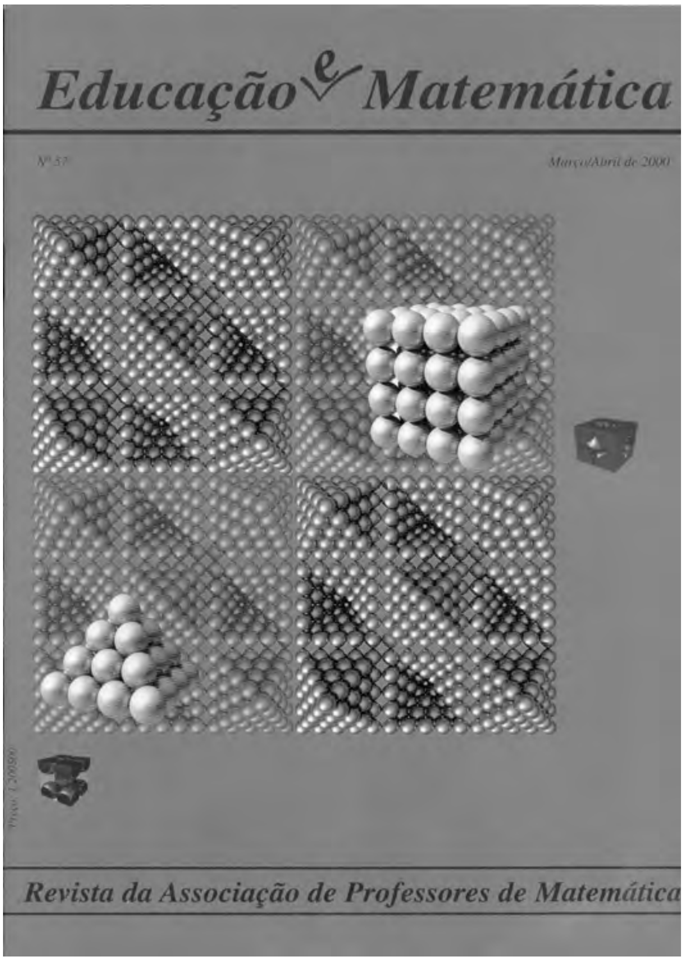
6 El botón «Azar» incluido en el programa que resuelve Lights Out (y similares) está pensado para establecer al azar únicamente posiciones iniciales resolubles. Si por el contrario optamos por fijar una posición inicial concreta, es posible (así nos lo hará saber el programa) que no exista solución.

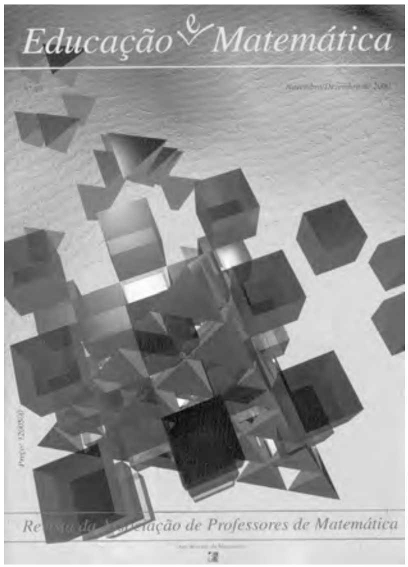
7 El símbolo % se reserva en Java para indicar el módulo.

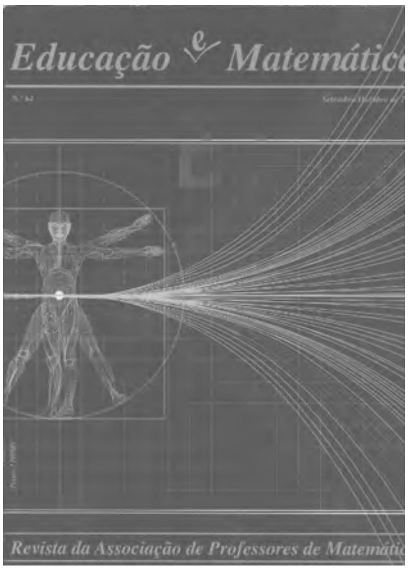
Bibliografía

PELLETIER, D. (1987): «Merlin's Magic Square», *The American Mathematical Monthly*, vol. 94, n.° 2, 143-150, The Mathematical Association of America, Washington.

Rafael Losada
IES Antonio Machado.
Madrid.
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»


Educação e Matemática
Março/Abril de 2000
Revista da Associação de Professores de Matemática


Educação e Matemática


Revista da Associação de Professores de Matemáti


Educação

SUMA 40

junio 2002, pp. 43-45

Una modesta contribución para evitar el caos

Joaquín Hernández Gómez

ARTÍCULOS

La escolarización obligatoria hasta los 16 años ha acarreado como consecuencia inmediata una homogeneización de los contenidos. Los que vivimos la marcha de nuestros estudiantes día a día vemos –y cada vez con más nitidez– las consecuencias negativas que esto acarrea. En este artículo, además de tratar este problema, se aporta una posible solución al mismo.

EN UN ARTICULO de lectura obligada para todos los responsables de la administración educativa, recientemente aparecido en *Epsilon*, revista de la sociedad Thales, Javier Pérez de la Universidad de Cádiz afirma que

> postular que las matemáticas que han de aprender hasta los quince años un futuro arquitecto, electricista, carpintero, ingeniero, fontanero, médico, albañil, relaciones públicas, profesor de idiomas, intérprete, camionero, matemático, historiador, novelista, abogado, etc., han de ser las mismas es, cuando menos, cuestionable. La unicidad curricular ha sido una consecuencia inmediata de la escolarización obligatoria; pero no es una consecuencia necesaria, se podría haber adoptado otras fórmulas, no sólo igualmente válidas, sino incluso socialmente más justas, tal vez y sólo tal vez, algo más caras.

No hace mucho tiempo, a comienzos del año pasado, Florencio Villarroya, a quien todos conocemos por su preparación, su experiencia y su cabeza bien organizada, apuntaba que

> pretender una escolarización con unos mínimos de matemáticas para casi toda la población, desde mi punto de vista, hace tender a cero el contenido de esos mínimos.

En diciembre de 1999, José Luis Andrés Yebra, de la Universidad Politécnica de Cataluña, afirmaba:

> Muchos educadores, y en particular la mayoría de los dedicados a la Didáctica de las Matemáticas, en su loable intento de hacerlas accesibles a un gran número de personas, establecen el principio de que todo el mundo puede hacer matemáticas. Quizás sea cierto, pero es imprescindible añadir que unos más que otros… En otros campos, como la música o el dibujo, la existencia de importantes diferencias innatas se acepta sin discusión, pero en matemáticas, no se quiere reconocer. La consecuencia de que algunos, con la mejor voluntad e intenciones, sostengan que todo el mundo puede hacer matemáticas es que otros intentan homogeneizar su enseñanza.

¿Por qué no se da una vuelta, alguna vez, algún responsable de la administración educativa por nuestras clases de

Matemáticas de 2.° y 3.° de ESO? Allí observará, como dice Javier Pérez que

> el profesor tiene que atender simultáneamente a discapacitados, alumnos con desórdenes emocionales, alumnos con graves problemas de índole social y familiar, alumnos con deficiente preparación previa, alumnos con comportamientos antisociales, alumnos con pocas aptitudes hacia las matemáticas, alumnos con aptitudes estándares, alumnos con aptitudes muy buenas o incluso excelentes y, por supuesto, alumnos en las intersecciones no vacías de los subgrupos anteriores.

No deja de ser curioso. La gente que defendemos una diversificación de contenidos mucho antes de las opciones A y B de 4.° de ESO son gente como José Luis Andrés Yebra o Javier Pérez, profesores de Universidad que sufren las consecuencias de la mala preparación de los buenos estudiantes, Florencio Villarroya, que lleva dando clase en institutos más de 25 años y sabe exactamente de qué va esto o quien escribe este artículo, que además de llevar desde 1978 en la Enseñanza Secundaria sin haber abandonado la tiza ninguno de todos esos años, llevo 13 años en la Universidad y compruebo cuál es la preparación en Matemáticas de los estudiantes supuestamente buenos de Secundaria, al margen de coordinar un concurso de Matemáticas en la Comunidad de Madrid que arrastra a más de 20.000 estudiantes de toda la comunidad y que aporta una muestra muy fidedigna del nivel real de los estudiantes de nuestra comunidad. Por el contrario, es entre los psicopedagogos que han pisado pocas veces –o ninguna– las aulas de la ESO, o algunos miembros de los Departamentos de Didáctica de las Matemáticas de algunas universidades, con nula relación directa con la enseñanza secundaria o, incluso, profesores de matemáticas anclados en los CPR –y sin ninguna intención, por su parte, de volver a la tiza– donde se encuentran fácilmente defensores de las mismas matemáticas para todos, hasta 4.° de ESO, eso sí, con «adaptaciones curriculares» (¿) (no se especifica ni cómo, ni cuántas, ni en qué momentos llevarlas a la práctica).

Este estado de cosas, que apunta Javier Pérez, empieza a llegar a oídos del Ministerio de Educación. Pero no se les ocurre otra cosa que empezar a pensar en «recorridos» diferentes. No sé si han reparado en que el que haya recorridos diferentes va a suponer de hecho la creación de guetos –que estarán en la enseñanza pública– frente a otros centros, que con toda probabilidad serán mayoría en la enseñanza privada y concertada, en los que abundarán los recorridos de tipo alto. ¿Cuántos recorridos A (el más alto) va a haber en algunos centros concertados de Madrid –no quiero dar nombres– y cuántos en algunos Institutos? ¿Y cuántos C va a haber en cada uno de ellos? Claro que también puede ser que sí que hayan reparado los responsables de educación en este problema. Y que esa sea, precisamente, la razón de su implantación.

¿Por qué no se deja que los responsables de cada centro, que son quienes mejor conocen a sus estudiantes, planteen otras soluciones?

Los que no tenemos ningún interés en desprestigiar más la enseñanza pública y además somos conscientes de que la situación actual es insostenible, planteamos otro tipo de soluciones. ¿Por qué no se deja que los responsables de cada centro, que son quienes mejor conocen a sus estudiantes, planteen otras soluciones? Aquí va una, muy concreta y detallada, estudiando sus ventajas e inconvenientes y planteando soluciones para éstos.

Casi todos los profesores estamos de acuerdo que es en las asignaturas instrumentales –Matemáticas, Lengua e Inglés– donde la gran heterogeneidad de que hemos hablado, existente en cada aula, hace casi imposible la atención, no de forma fraudulenta, a todos los estudiantes. Por ello, planteamos otra forma de organizar la docencia en los centros. La idea no es nueva. Ya en el informe Cockcroft, fruto de un trabajo serio y de años llevado a cabo en el Reino Unido a comienzos de los ochenta, se dice:

> Al decidir el modo de organizar los grupos de enseñanza de las matemáticas en una escuela, creemos que el requisito dominante debe ser el de lograr una organización que permita a los alumnos trabajar a un nivel y un ritmo adecuado para ellos... El modo más sencillo de lograr esta forma de organización consiste en impartir simultáneamente las clases de Matemáticas en los distintos grupos formados con los alumnos de cada curso.

Esto es exactamente lo que estoy diciendo. En Matemáticas, Lengua e Inglés, sobre todo en 2.° y 3.° de ESO, impartir de forma simultánea las clases de cada una de estas asignaturas en los distintos grupos de cada curso. Una vez que los cuatro profesores –pongamos por caso– que imparten Matemáticas en 3.° de ESO tienen a sus 110 alumnos, se formarán cuatro grupos –Azul, Verde, Rojo y Blanco para evitar malas interpretaciones– según el nivel de estos estudiantes. Obviamente, estos grupos son flexibles –dentro de un mismo año escolar los estudiantes pueden cambiar de grupo– y, naturalmente, la titulación es la misma para todos. Es claro que no tiene por que ser igual el número de estudiantes de cada grupo, en tanto que cuanto más bajo sea el nivel del mismo, es aconsejable que tenga menos estudiantes. Las ventajas creo que son claras: se evita el abatimiento de los menos capacitados y, por otra parte, se evita la desmotivación de los estudiantes con más capacidades o mejor predisposición para las matemáticas.

…se evita la desmotivación de los estudiantes con más capacidades o mejor predisposición para las matemáticas.

Naturalmente que esta distribución acarrea inconvenientes. Obviamente no está entre ellos el clásico «¿qué profesor da a los buenos y quién a los malos?». El que le toque. Desde hace muchos años, está implantada en los centros la famosa rueda a la hora de elegir cursos y, manteniendo esta rueda, no hay discriminación alguna. Sí que hay otros inconvenientes.

El que haya más ligaduras –así se dice en el argot– a la hora de elaborar los horarios hace que, naturalmente, se estropee el horario de todos los profesores del centro, no solamente el de los profesores de Matemáticas, Lengua e Inglés. Con esta nueva organización de la docencia serían, probablemente, muchos los profesores que entrarían muchos días a primera hora y saldrían esos días a última hora.

Además, los profesores de esas tres asignaturas, tendrían estudiantes de todos los grupos de un mismo curso, con lo que verían considerablemente aumentadas sus horas de asistencia a las sesiones de evaluación, sesiones que, probablemente, tendrían que hacerse en mucho más de dos o tres jornadas –dos o tres tardes hoy día– por la segura coincidencia y solapamiento de cursos y profesores.

¿Les pedimos a los profesores todo este esfuerzo suplementario para enderezar una situación de la que ellos no tienen culpa alguna? Obviamente sería muy arriesgado por parte de la Administración proceder así, en tanto que no está el horno para bollos. La idea que sugiero es que, aprovechando el descenso generalizado –por cuestiones de natalidad– de la población estudiantil, con la consiguiente angustia por parte del profesorado –«el año próximo me salen 12 horas. ¿Me desplazarán o me completarán con Biblioteca y Sociedad, Cultura y Religión?»– reducir linealmente en 3 horas el número de horas de docencia directa de cada profesor.

Con esta reducción, además de facilitar la elaboración de los horarios, se compensa el esfuerzo adicional de los profesores y se limita el malestar y/o angustia por ser desplazado.

¿Es esto muy caro? ¿Qué supone, en un centro de 40 profesores, que actualmente tienen de media unas 16 horas de docencia directa –no 17– bajar ésta a 14. 80 horas, 5 profesores. Menos de 20 millones de pesetas. ¿Que se estima que esto es mucho dinero de golpe? Procédase gradualmente. Invítese a los centros a que, de forma voluntaria, se adhieran a este proyecto. Aquellos centros que se comprometan a impartir simultáneamente las horas de Matemáticas, Lengua e Inglés en 2.° y 3.° de ESO, tendrán una reducción lineal de 3 horas en el número de horas de docencia directa de sus profesores. Probablemente no serían todos los centros del país los que lo hagan, aunque estoy convencido de que, una vez analizados los resultados de la experiencia, ésta se generalizaría.

Joaquín Hernández
IES San Juan Bautista. Madrid
Sociedades «Puig Adam», «Emma Castelnuovo» y «Thales»

Referencias citadas

ANDRÉS YEBRA, J.L. (1999): «Sobre las matemáticas en la enseñanza secundaria», *Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada*, n.° 14, Diciembre 1999.

PÉREZ FERNÁNDEZ, J.: «Las matemáticas en la enseñanza secundaria», *Epsilon*, n.° 48.

VILLARROYA, F. (2000): «Perspectivas sobre el bachillerato: pasado y futuro», *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol. 3, Enero-Abril 2000.

VV.AA.(1985): *Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*, MEC, Madrid.

XI JAEM

CANARIAS 2003

2·3·4 y 5 de Julio

Las JAEM de la comunicación

Lanzarote

Fuerteventura

Gran Canaria

Tenerife

La Palma

La Gomera

El Hierro

Visitas a Santa Cruz de Tenerife, Las Palmas de Gran Canaria y La Laguna (Patrimonio de la humanidad)

Convoca:

Federación Española de Profesores de Matemáticas

Organiza:

Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas

SUMA 40
junio 2002, pp. 47-58

Algunos modelos matemáticos combinatorios básicos

Sergio Alonso Rodríguez
Carlos González Martín
Antonio Sedeño Moda

ARTÍCULOS

En este trabajo se plantea la necesidad de motivar el estudio de modelos matemáticos considerando algunos casos básicos de naturaleza combinatoria de importancia en el mundo real. El estudio de los correspondientes problemas de optimización y la introducción y aplicación de métodos de resolución sencillos se toma como base para argumentar a favor de su inclusión, como alternativa válida para motivar la utilidad de las Matemáticas, en los últimos cursos de la enseñanza secundaria.

UN NÚMERO importante de problemáticas reales motivan el uso de las Matemáticas para formalizar modelos combinatorios y resolver, a través del desarrollo de los correspondientes algoritmos, los problemas de optimización inherentes. En muchos de estos casos se presentan las características de sencillez del planteamiento de los problemas, una notable facilidad para lograr el desarrollo de un modelo expresado matemáticamente y la disposición de, al menos, un método eficaz y susceptible de ser aplicado sólo con el prerrequisito de poseer conocimientos matemáticos elementales.

Por tanto, estas situaciones, aparte de su importancia como problemas del entorno social, resultan muy interesantes para motivar, formular y resolver problemas matemáticos, manejando eficientemente ciertas estructuras combinatorias sobre las que se incentiva el uso del cálculo y se pone de manifiesto la necesidad de utilización de herramientas computacionales. Estamos convencidos de que los correspondientes contenidos científicos y técnicos son muy importantes en los primeros cursos de las carreras universitarias de ciencias, economía, gestión, ingenierías… (así están reconocidos actualmente en muchas de ellas), y que, por extensión, el inicio de la impartición de los mismos debería acometerse en los últimos cursos de la enseñanza secundaria (desgraciadamente no es así en los actuales programas de bachillerato). Consideramos que la introducción al estudio de algunos de los problemas del tipo propuesto en este trabajo, constituiría una alternativa interesante para ayudar en la tarea de motivar la comprensión de contenidos de tipo cuantitativo, tan esenciales en las enseñanzas de bachillerato y universitaria.

Hay que indicar que el estudio de los problemas de optimización es una parte fundamental de una ciencia de reciente implantación conocida como Investigación Operativa. Dicha parte es denominada Programación Matemática y reserva un lugar de privilegio para el estudio de los problemas de optimización combinatoria (bajo títulos como Programación Combinatoria, Análisis de Redes, Teoría de Grafos…). Las situaciones problemáticas susceptibles de ser analizadas desde la Investigación Operativa aparecen frecuentemente en los campos de la Economía, Ciencias de la Gestión, Ingenierías, etc.

Por todo lo anterior, con el fin de contribuir a difundir la utilidad de los conocimientos básicos propios del análisis de los problemas de optimización y con el propósito de motivar el interés por formular y resolver problemas de naturaleza combinatoria, en este trabajo introducimos tres casos relevantes y sencillos, habituales dentro de los elementos básicos de cualquier asignatura universitaria de Programación Combinatoria. La secuencia seguida conlleva el planteamiento del problema, su formalización como un problema de tipo combinatorio, la introducción de un método sencillo de resolución, la aplicación de este método sobre un ejemplo y comentarios sobre la eficiencia del procedimiento de resolución utilizado.

Algunos problemas de tipo combinatorio

Supongamos que estamos ante una de las siguientes situaciones:

a) Una red de carreteras conecta los diferentes núcleos poblacionales de una región. Fijados dos de estos núcleos interesa determinar la ruta más corta para ir de uno al otro.

b) En una determinada región se quiere establecer una red terrestre de comunicaciones telefónicas que conecte los diferentes lugares en los que existe población. Interesa determinar la longitud mínima de cable necesario para llevar a cabo la conexión.

c) Una red de distribución de un determinado producto (por ejemplo, de abastecimiento de aguas), ofertado en un determinado lugar y demandado en otro preestablecido, tiene limitaciones en las conexiones existentes entre cada par de puntos. Interesa determinar la cantidad máxima de producto que puede circular por la red entre el punto de oferta y el punto de demanda.

Todos los casos anteriores tienen en común el carácter combinatorio del análisis de las posibles alternativas de solución. Entendemos que este carácter está presente cuando la solución al problema que se plantea se habrá de buscar entre un conjunto finito de alternativas. Las situaciones relacionadas se estudian dentro de la Investigación Operativa recibiendo los diferentes problemas las denominaciones: *problema de camino mínimo*, *problema de árbol generador mínimo* y *problema de flujo máximo*, respectivamente. Trataremos de estudiar más detalladamente estos problemas para proponer algún algoritmo que los resuelva e ilustrar su aplicación sobre un ejemplo.

Las situaciones problemáticas susceptibles de ser analizadas desde la Investigación Operativa aparecen frecuentemente en los campos de la Economía, Ciencias de la Gestión, Ingenierías, etc.

El concepto de red

Con frecuencia los problemas de tipo combinatorio se plantean sobre una estructura que se identifica como grafo o red. Un grafo resulta de la abstracción de un sistema de comunicaciones (telefónicas, por carreteras, aéreas, etc.) en el que existen una serie de lugares (denominados vértices, nodos, etc.) y un determinado número de conexiones (conocidas como aristas, arcos...) entre pares de esos lugares. Con carácter general, se admite que una red es un grafo para el que existen determinadas magnitudes asociadas a los vértices o a las conexiones. También es habitual que por las redes circule algún tipo de flujo. Ejemplos familiares son las redes de distribución y abastecimiento, las redes de comunicaciones, las redes de servicios (de información, sanitarios, bancarios...). Un ejemplo gráfico, en el que las aristas tienen asociadas distancias entre los nodos que conectan, es el que aparece en la figura 1.

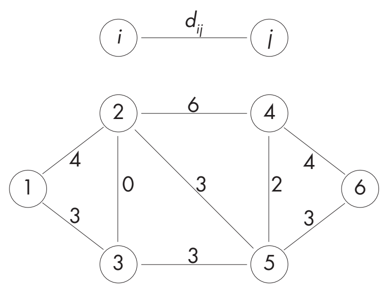


Figura 1

Problemas de caminos mínimos

Son problemas de la clase a la que pertenece el primero de los introducidos previamente (a). Podríamos entender, con carácter general, que estamos sobre un grafo que tiene asociadas determinadas cantidades (longitudes) a cada una de sus conexiones. Nos interesa determinar el camino de longitud total mínima (camino mínimo) entre dos vértices prefijados.

Ejemplo

En una determinada comarca existen 9 pueblos, numerados del 1 al 9. Los pueblos están conectados por una red de carreteras que tienen las longitudes (en kilómetros) que se especifican en la tabla 1.

Se ha de entender que entre los pares de pueblos para los que aparece el signo – no existen conexiones. La correspondiente red de carreteras se representa en la figura 2.

Un problema de camino mínimo sería el de determinar la forma de ir desde el pueblo número 1 al pueblo número 9 de manera que la distancia total recorrida sea mínima.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		6	6	3	–	–	–	–	–
2			1	–	3	–	–	–	–
3				2	–	4	3	–	–
4					–	–	4	–	–
5						3	–	5	–
6							3	3	5
7								–	8
8									1
9									

Tabla 1

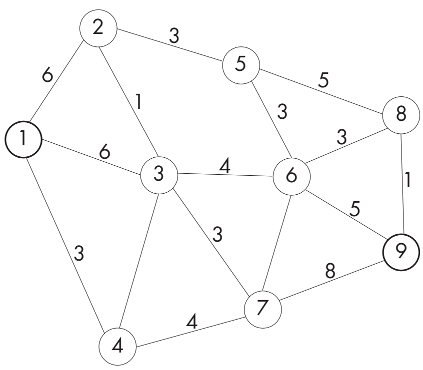


Figura 2

Un método para resolver problemas de caminos mínimos fue propuesto por Dijkstra (1959). Este método procede asignando a cada vértice unas etiquetas o marcas provisionales que, cuando se convierten en definitivas, establecen la distancia mínima respecto al vértice de partida.

Un método para resolver el anterior problema

Un método para resolver problemas de caminos mínimos fue propuesto por Dijkstra (1959). Este método procede asignando a cada vértice unas etiquetas o marcas provisionales que, cuando se convierten en definitivas, establecen la distancia mínima respecto al vértice de partida. El proceso acaba al asignar una etiqueta definitiva al vértice de llegada. Como uno de los vértices es etiquetado definitivamente en cada una de las etapas, el número necesario de éstas es igual, a lo sumo, al número de vértices.

Aplicación

Procedamos a la aplicación y exposición detallada del método de Dijkstra para el anterior ejemplo:

Etapa inicial

El vértice de partida, el 1, es etiquetado de forma definitiva, siendo esta etiqueta igual a 0 (distancia mínima entre el vértice 1 y él mismo). El resto de vértices reciben etiquetas provisionales que resultan de sumar la distancia de su conexión directa con el vértice 1 más la etiqueta definitiva de dicho vértice. Se habrá de entender que, cuando no exista conexión directa con el vértice etiquetado de forma definitiva en último lugar, se admite que la distancia correspondiente es igual a infinito (se simboliza por °).

Las etiquetas provisionales para los otros vértices las mostramos en la tabla siguiente:

nodo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
etiqueta	0	6	6	3	°	°	°	°	°

Tabla 2

Segunda etapa

Se convierte en definitiva la etiqueta provisional menor (la que corresponde al vértice 4 ya que su etiqueta es 3) y se procede a actualizar las etiquetas provisionales de cada uno de los vértices a los que podemos trasladarnos desde este nodo, el 4, excepto los que ya tengan etiquetas provisionales. La actualización se realiza calculando el mínimo entre el valor actual de la etiqueta y el que tendría si llegáramos a ese pueblo pasando por el nodo 4. La figura 3 esquematiza la etapa actual, y figuran junto a cada vértice su etiqueta.

Para esta etapa nos preguntamos si, por ejemplo, para llegar al vértice 3, ¿mantenemos el actual camino de valor 6 o atajamos por el nodo 4? Atajar por el nodo 4 significaría llegar a él y emplear el camino de 4 a 3, esto es 3 + 2 = 5.

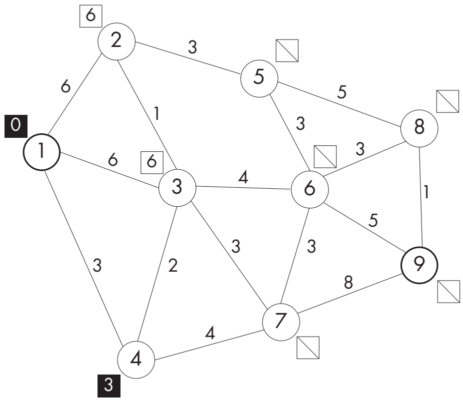


Figura 3

Naturalmente nos quedamos con esta última alternativa. La actualización, por tanto, calcula los mínimos siguientes:

etiqueta(3) = mínimo{etiqueta(3) = 6, etiqueta(4) + 2 = 3 + 2 = 5} = 5

etiqueta(7)=mínimo{etiqueta(7) = ° , etiqueta(4) + 4 = 3 + 4 = 7} = 7

La tabla de etiquetas sería la siguiente (el nodo 3 convertiría su etiqueta en definitiva):

nodo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
etiqueta	0	6	5	3	°	°	7	°	°

Tabla 3

Las etapas siguientes consistirían en repetir los cálculos anteriores. Dichos cálculos se ven favorecidos si los realizamos sobre la siguiente estructura de tabla en la que aparecen en cada fila las etiquetas asignadas a los vértices (uno por cada columna):

	nodos								
etapa	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	6	6	3	°	°	°	°	°
2	0	6	5	3	°	°	7	°	°
3	0	6	5	3	°	9	7	°	°
4	0	6	5	3	9	9	7	°	°
5	0	6	5	3	9	9	7	°	15
6	0	6	5	3	9	9	7	14	14
7	0	6	5	3	9	9	7	12	14
8	0	6	5	3	9	9	7	12	13
9	0	6	5	3	9	9	7	12	13

Tabla 4

Se observa que la longitud del camino mínimo que conecta 1 con 9 es igual a 13 y que las conexiones que lo componen son: 1-4-3-6-8-9.

Gráficamente:

Una vez elegido el vértice que hace definitiva su etiqueta, debemos explorar los nodos a los que podemos llegar desde él.

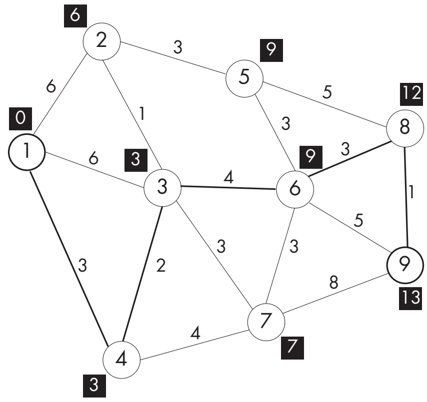


Figura 4

Comentarios respecto a la eficiencia del método

Ya se ha comentado que el número de etapas a contemplar es el número de vértices, puesto que, en cada una de ellas, una etiqueta provisional se vuelve definitiva. Una vez elegido el vértice que hace definitiva su etiqueta (recuérdese, aquel con menor valor de entre las provisionales), debemos explorar los nodos a los que podemos llegar desde él. Para cada uno de ellos con la etiqueta provisional intentaremos actualizar la etiqueta con el simple cálculo de un mínimo. Es decir, intentaremos descubrir posibles atajos.

Un esquema de este método para el cálculo del camino mínimo del vértice *i* al vértice *j* sería entonces el siguiente:

{Inicialicemos valores}
Poner etiqueta(*i*) a 0;
Poner el resto de las etiquetas a °
{Las siguientes etapas}
Mientras la etiqueta del nodo *j* no sea definitiva hacer
    Sea *k* la última etiqueta que se hizo definitiva
    Para todos los nodos *l* con etiqueta provisional accesibles desde *k* hacer
        Si etiqueta(*l*)>etiqueta(*k*) + valor de la arista (*k*, *l*) entonces
            etiqueta(*l*) = etiqueta(*k*) + valor de la arista (*k*, *l*)
    De entre todas las etiquetas provisionales, poner como definitiva aquella con menor valor

Esto es, si n es el número de vértices del grafo, para convertir cada una de las n etiquetas en definitivas, debemos explorar como máximo $n - 1$ posibles nodos. Es por lo que, el esfuerzo computacional necesario se dice que es de orden n^2. Este hecho se nota por $O(n^2)$.

Hay que destacar, por último, que una vez que una etiqueta de un vértice se sitúa como definitiva, su valor, que indica la distancia más corta desde el vértice origen hasta él, permanece inalterable hasta el final. Esta forma de actuar caracteriza a un tipo de métodos denominados devoradores que pueden resultar, como en el caso anterior, muy eficientes. De este tipo de métodos seguiremos hablando más adelante.

Problemas de árboles generadores mínimos

Son problemas pertenecientes al segundo grupo (b) introducido previamente. Se formulan también sobre un grafo en el que las magnitudes asociadas a las conexiones entre pares de nodos se corresponden, por ejemplo, con costes o distancias. Buscamos, para este grupo de problemas, la manera de conectar eficientemente todos los vértices. En otras palabras, para cualquier par de nodos, deberá de haber un camino que los una.

La estructura de conexiones buscada es la que se denomina *árbol generador* y que verifica el requisito de la conexión entre pares distintos de nodos a través de un único camino (en el grafo que se maneja no existen *bucles*, es decir conexiones que conectan un nodo consigo mismo). En la figura 5, el grafo inicial muestra las conexiones posibles a escoger, y los dos restantes dos opciones de elección de árboles generadores. Nótese que, si n es el número de nodos del grafo, las aristas necesarias para construir un árbol que los conecte son, exactamente, $n - 1$.

El problema combinatorio surge cuando debemos construir aquel árbol cuya suma de costes, el coste total, se minimice.

El problema combinatorio surge cuando debemos construir aquel árbol cuya suma de costes, el coste total, se minimice.

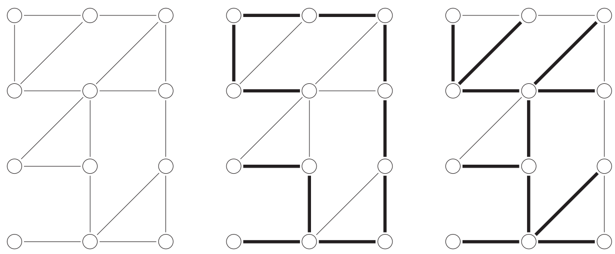


Figura 5

Ejemplo

En una determinada región existen 10 municipios a los que hay que suministrar gas tendiendo las correspondientes tuberías de abastecimiento. Las distancias entre las conexiones posibles se especifican (en kilómetros) en la siguiente tabla:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		5	3	4	–	–	–	–	–	–
2			3	–	4	–	–	–	–	–
3				3	–	2	3	–	–	–
4					–	–	4	2	–	–
5						5	–	–	6	–
6							1	–	3	6
7								3	–	4
8									–	4
9										3
10										

Tabla 5

Igual que en el ejemplo anterior, la aparición del símbolo – significa que no existe conexión posible. El problema que se plantea es hacer que llegue el gas a todos los municipios tendiendo la cantidad mínima de tubería. El grafo correspondiente a este problema es el que sigue.

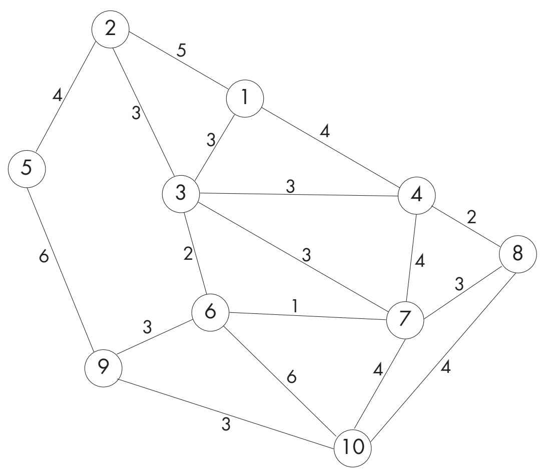


Figura 6

Métodos para resolver el ejemplo anterior

Para determinar árboles generadores mínimos de un grafo existen dos métodos considerados clásicos: el método de Kruskal (1956) y el método de Prim (1957). Al igual que en el problema anterior, estos métodos son del tipo devorador. Cada vez que incluye una arista en la solución, queda definitivamente en ella, con lo que ambos acaban en $n - 1$ pasos. La diferencia entre los métodos recae en la forma en la que se seleccionan las aristas.

Método de Prim

Éste método se caracteriza por expandir la conexión desde un conjunto de vértices. Partiendo, por ejemplo, del nodo 1, buscaremos aquel vértice, de entre los no conectados, más próximo. Elegido de esta forma, se le añade a los vértices conectados, y la arista que los une a la solución. Los pasos sucesivos eligen nuevos nodos, de entre los no conectados aún, más cercanos a algún nodo de entre los ya conectados. Esta estrategia acaba en $n - 1$ pasos asegurando la obtención de un árbol generador que, por la forma de elección de las aristas, es de mínimo coste.

En la serie de gráficos de la figura 7, mostramos la ejecución del método sobre el problema del ejemplo anterior. Sombreamos los nodos a medida que van siendo conectados, marcamos las aristas de la solución, y, de forma discontinua, las candidatas entre las que elegir. En la fila inferior a las imágenes, sumamos el peso de la solución que vamos construyendo.

Método de Kruskal

Este método ordena las conexiones del grafo en orden no decreciente de las magnitudes asociadas (en caso de empate, se ordena arbitrariamente). Siguiendo este orden, selecciona una conexión en cada etapa siempre que no forme ciclo con las ya seleccionadas previamente. Podemos ver el desarrollo gráfico de este proceso sobre el problema anterior en la figura 8.

El progreso gráfico de este método muestra significantes diferencias con respecto al anterior. Si bien en el primer caso era un árbol el que iba expandiendo sus conexiones a todos los nodos, en el caso del método de Kruskal son varios los subárboles que se forman, uniéndose en uno solo tarde o temprano. Precisamente, esta estructura ayuda a poder resolver de forma casi inmediata si una arista de la lista ordenada forma o no ciclo en la solución parcial que hemos construido. Se trata de ver si esa arista conecta nodos de subárboles distintos o en el mismo subárbol. En el primer caso la arista entrará en la solución mientras que en el segundo caso se asegura el ciclo.

Para determinar árboles generadores mínimos de un grafo existen dos métodos considerados clásicos: el método de Kruskal (1956) y el método de Prim (1957).

Comentarios respecto a la eficiencia de los métodos

Un esquema general del método de Prim es el siguiente:

> $M = \{1\}$
> Situaremos en T las aristas de la solución
> Mientras en T no haya $n - 1$ aristas hacer lo siguiente
>   Sea e la arista de menor coste que conecta un nodo de M con otro nodo, j, que no está en M
>   Añadir la arista e a T
>   Añadir el nodo j a M

Aun siendo un esquema devorador, observamos que su eficiencia depende más de los nodos que ha de conectar que del número de aristas que posea el grafo original. Sin embargo, la eficiencia del método de Kruskal, al visitar las aristas en orden no creciente de sus pesos, depende de este segundo parámetro. Un esquema simplificado del método de Kruskal es el siguiente,

> Situar en T las aristas de la solución
> Ordenar las aristas en orden no decreciente según su peso o coste
> Mientras en T no haya $n - 1$ aristas hacer lo siguiente
> Sea e la arista siguiente en la lista
> Si e no forma un ciclo en T añadir e a T

Por lo tanto, elegiremos el método de Prim cuando el número de nodos sea pequeño respecto al de aristas, y el método de Kruskal en el caso contrario.

Problemas de flujo máximo

Se formulan sobre una red dirigida en la que circula un determinado flujo y existe un punto de oferta (fuente) y un punto de demanda (sumidero). Las correspondientes conexiones tienen asociadas capacidades máximas y mínimas de flujo (en general estas últimas se pueden considerar iguales a cero). *El problema que se plantea es el de determinar el flujo máximo que puede circular por la red entre el punto de oferta y el punto de demanda.*

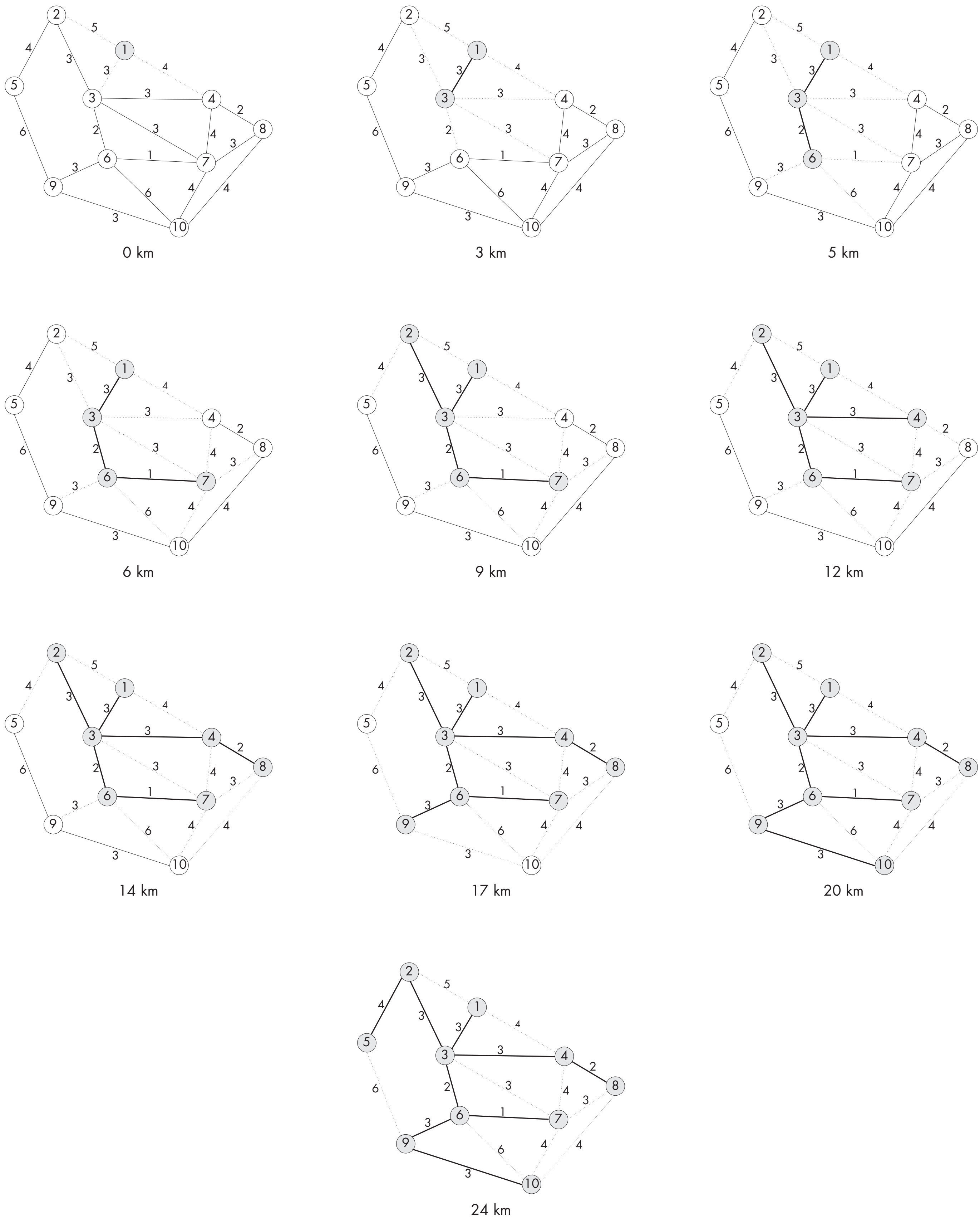


Figura 7

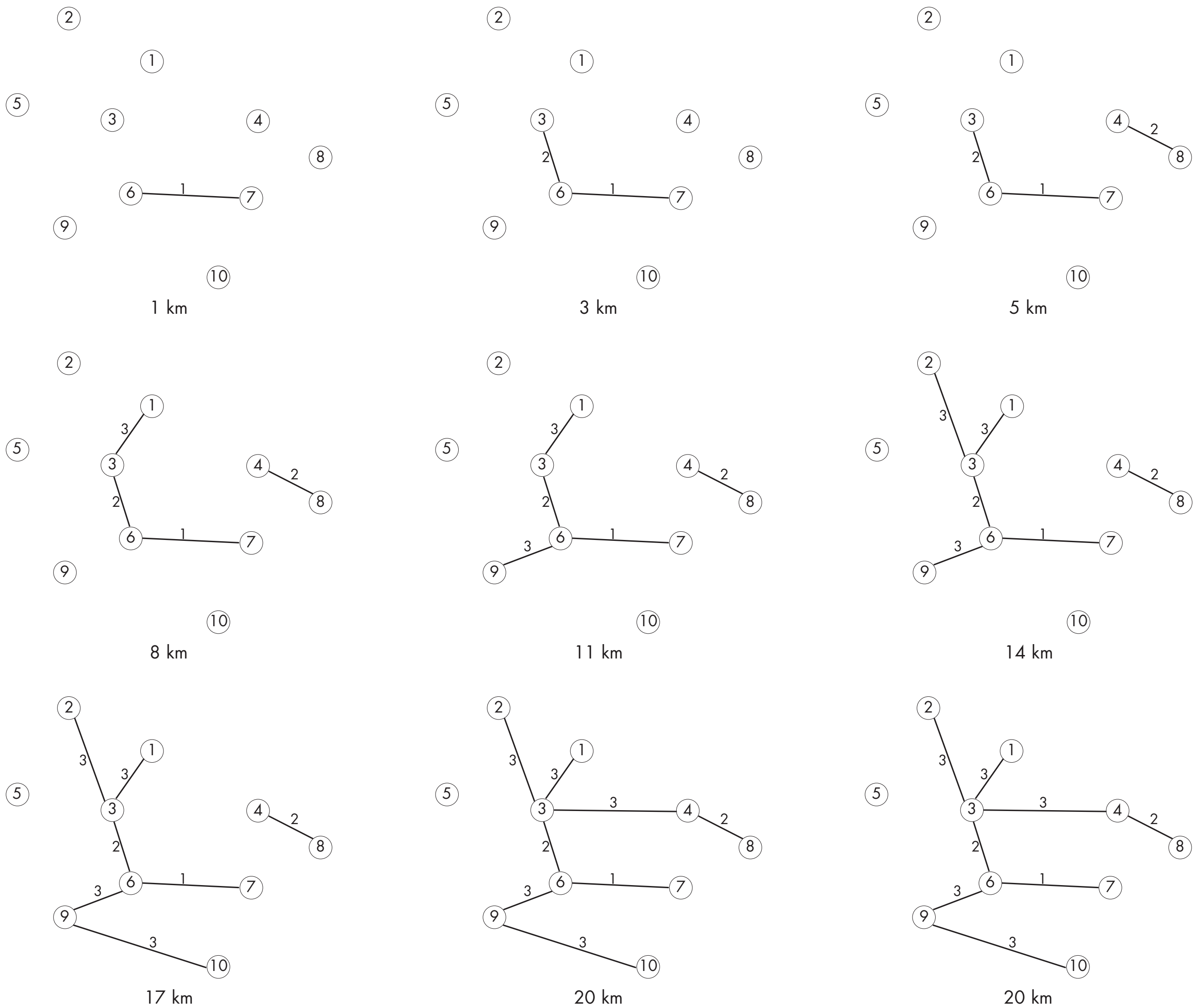


Figura 8

Ejemplo

Una red de distribución de aguas conecta dos depósitos. Uno de los depósitos está situado en una cota más alta y de él sale el agua hacia la red. El otro depósito está situado en una cota más baja y a él llega el agua a través de la red. La red también interconecta puntos intermedios (en los que ni se oferta ni se consume flujo) a través de conexiones dirigidas (arcos) que tienen asociadas determinadas capacidades máximas (medidas en metros cúbicos por segundo). Los datos que describen el problema aparecen en la tabla 6 y su correspondiente gráfica se muestra en la figura 9.

Se entiende en esta tabla que, en su caso, el vértice de partida de los diferentes arcos se identifica por filas, mientras que el vértice de llegada se identifica por columnas. Cuando aparece el signo – no existe arco entre los correspondientes vértices. Cuando aparece un número en una celda, éste representa la capacidad máxima del respectivo arco.

El problema que se plantea es el de determinar la cantidad máxima de agua que puede circular, a través de la red, entre los dos depósitos.

	1	2	3	4	5	6	7
1	–	10	8	12	–	–	–
2		–	7	–	9	–	–
3			–	–	10	8	–
4				–	–	8	–
5					–	11	13
6						–	20
7							–

Tabla 6

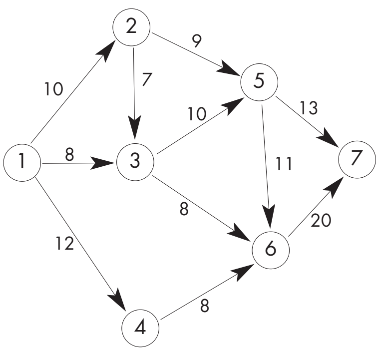


Figura 9

Un método para resolver el anterior problema

El primer método desarrollado para resolver el problema de flujo máximo es debido a Ford y Fulkerson (1956). Partiendo de un flujo factible (flujo actual), este método identifica, en cada etapa, un camino que conecta el vértice fuente con el vértice sumidero a través del cual se puede incrementar el flujo que circula actualmente entre ambos vértices. La seguridad de que no es posible encontrar uno de estos caminos y que, por tanto, se ha determinado el flujo máximo viene de la comprobación de un resultado que relaciona los conceptos de flujo y de corte.

Corte

Un corte está constituido por la partición del conjunto de vértices en dos subconjuntos disjuntos. Nos interesa considerar cortes tales que el vértice fuente (s) esté en uno de los conjuntos y el vértice sumidero (t) en el otro ($s - t$ cortes). La capacidad de un corte se define como la suma de las capacidades de los arcos de la red que conectan vértices que están en el conjunto que contiene a la fuente con vértices que están en el conjunto que contiene al sumidero.

El primer método desarrollad para resolver el problema de flujo máximo es debido a Ford y Fulkerson (1956). Partiendo de un flujo factible (flujo actual), este método identifica, en cada etapa, un camino que conecta el vértice fuente con el vértice sumidero a través del cual se puede incrementar el flujo que circula actualmente entre ambos vértices.

Ejemplo de corte

La figura siguiente representa una red cuyo conjunto de vértices es {1, 2, 3, 4, 5, 6} y el correspondiente conjunto de arcos viene dado por {(1, 2), (1, 3), (3, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 2), (5, 6)}. En dicha figura se ilustra un corte con $S = \{1, 2, 3\}$ y $\bar{S} = \{4, 5, 6\}$. El conjunto de arcos afectados por el corte es $[S, \bar{S}] = \{(3, 4), (3, 5), (4, 2), (5, 2)\}$. Si las capacidades de estos arcos son 4, 5, 3, 4, respectivamente, la capacidad del corte viene dada por $4 + 5 = 9$. Nótese, que en esta suma de capacidades no se tiene en cuenta los arcos con destino o llegada en los vértices del conjunto S.

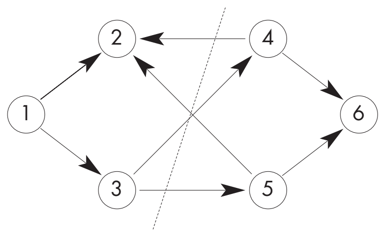


Figura 10

Es claro que la capacidad de un corte es una cota superior del flujo que puede circular por la red entre la fuente y el sumidero y es muy intuitivo el resultado conocido como *Teorema de Flujo Máximo Corte Mínimo* que indica que *el flujo máximo que circula por la red es igual a la capacidad del corte de capacidad mínima*.

Aplicación del método al anterior ejemplo

Es claro que el vértice 1 es la fuente y el vértice 7 el sumidero.

Etapa 1

Suponemos que el flujo que circula actualmente por cada uno de los arcos es igual a cero. Un camino que conecte 1 con 7 y permita aumentar el flujo actual es

$$1 \xrightarrow{10} 2 \xrightarrow{7} 3 \xrightarrow{10} 5 \xrightarrow{13} 7$$

(los arcos seleccionados son todos «hacia delante» y sobre ellos se coloca una cantidad que es igual a la diferencia entre su capacidad y la cantidad que circula). La mayor cantidad de flujo que se puede enviar por ese camino es igual a 7. Se fija esa cantidad como la que circula por cada uno de los arcos que constituyen el camino (figura 11).

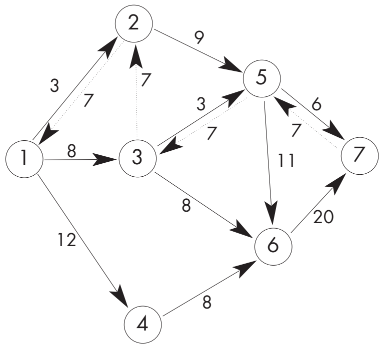


Figura 11

Se observa en la red anterior que, sobre los arcos seleccionados para construir el camino incremental, aparecen dos cantidades:

i) la diferencia entre su capacidad máxima y el flujo que circula actualmente;

ii) el flujo que circula en la actualidad (éste sobre un arco trazado en discontinuo y con sentido contrario del arco original).

Cuando alguna de estas cantidades es igual a cero, no aparece sobre la gráfica. El sentido contrario de los arcos que tienen asignada la cantidad de flujo (mayor que cero) que circula por su correspondiente arco original favorece, como veremos posteriormente, la selección de estos últimos como arcos «hacia detrás» dentro de un camino incremental. Se observa, por último, que los arcos actualmente saturados sólo están dibujados en discontinuo y en sentido contrario.

Etapa 2

El flujo que circula actualmente entre 1 y 7 es igual a 7. Procedamos a identificar un nuevo camino que incremente dicho flujo.

Uno de esos caminos podría ser:

$$1 \xrightarrow{3} 2 \xrightarrow{9} 5 \xrightarrow{6} 7$$

(de nuevo todos los arcos son «hacia delante» y sobre ellos se coloca una cantidad igual a la diferencia entre su capacidad máxima y la cantidad de flujo que circula actualmente). La mayor cantidad de flujo que puede circular por este camino (cuello de botella) es igual a 3. Se suma esta cantidad a todos los arcos que constituyen el camino y, con ello, se consigue que el flujo que circula actualmente entre 1 y 7 sea igual a 10 (ahora los arcos (1, 2) y (2, 3) están saturados). Se muestra gráficamente en la figura 12.

Etapa 3

Identificamos un camino que incremente el flujo de la siguiente manera. Elegimos el arco que conecta 1 con 3 ya

Cuando alguna de estas cantidades es igual a cero no aparece sobre la gráfica.

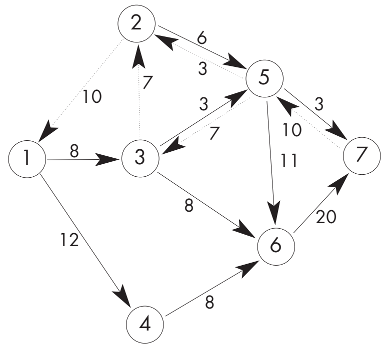


Figura 12

que es un arco hacia delante y el flujo que puede circular por él es igual a 8 (no podemos elegir el arco que conecta 1 con 2 ya que, aunque es un arco hacia delante, está saturado y, por tanto, el flujo que puede circular por él es igual a 0). Luego (y esto es una novedad) elegimos el arco que conecta 2 con 3 ya que es un arco «hacia detrás» y la cantidad de flujo que circula por él es positiva e igual a 7. Luego elegimos el arco que conecta 2 con 5 ya que es un arco «hacia delante» y el flujo que puede circular por él es igual a 6. Por último, elegimos el arco que conecta 5 con 7 ya que es un arco hacia delante y el flujo que puede circular por él es igual a 3. De esta forma, tenemos:

$$1 \xrightarrow{8} 3 \xrightarrow{7} 2 \xrightarrow{6} 5 \xrightarrow{3} 7$$

Como la menor cantidad asociada a los arcos seleccionados es igual a 3, el flujo que circula entre 1 y 7 se incrementa en esa cantidad y se distribuye sumando 3 a los arcos que van hacia delante y restando 3 a los arcos que van hacia detrás en el anterior camino. Por tanto, la cantidad de flujo que circula actualmente entre 1 y 7 es igual a 13 (se observa que ahora el arco (5, 7) también está saturado y el arco (1, 3) deja de estarlo). Se muestra gráficamente en la figura 13.

Etapa 4

Elegimos el camino

$$1 \xrightarrow{5} 3 \xrightarrow{3} 5 \xrightarrow{11} 6 \xrightarrow{20} 7$$

Está formado por arcos que van hacia

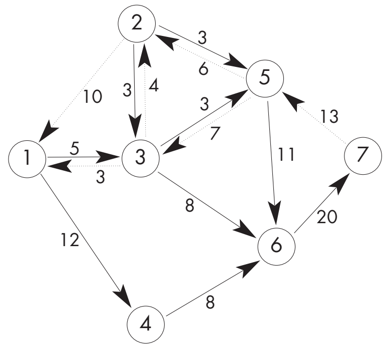


Figura 13

delante y el cuello de botella es igual a 3. Incrementamos esa cantidad al flujo que circula por los correspondientes arcos lo que hace igual a 16 el flujo que circula entre 1 y 7. Gráficamente:

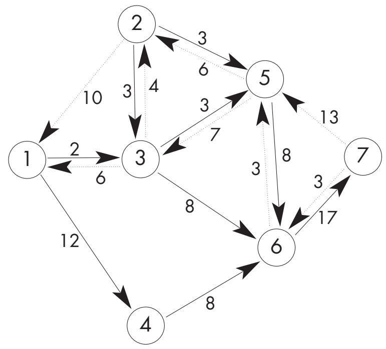


Figura 14

Etapa 5

Identificamos el camino

$$1 \xrightarrow{2} 3 \xrightarrow{8} 6 \xrightarrow{17} 7$$

El cuello de botella es igual a 2. Incrementamos esa cantidad al flujo que circula por los correspondientes arcos y conseguimos que sea igual a 18 el flujo que circula entre 1 y 7. Gráficamente:

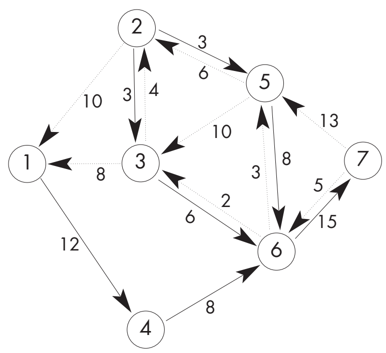


Figura 15

A partir de aquí no es posible encontrar un nuevo camino que incremente el flujo.

Etapa 6

Elegimos el camino

$$1 \xrightarrow{12} 4 \xrightarrow{8} 6 \xrightarrow{15} 7$$

Todos los arcos son «hacia delante» y el cuello de botella es igual a 8. Por tanto, incrementando en 8 unidades el flujo que actualmente circula por los correspondientes arcos, tenemos que el flujo que circula entre 1 y 7 es igual a 26. Gráficamente:

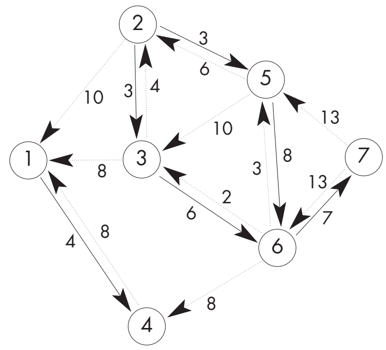


Figura 16

A partir de aquí no es posible encontrar un nuevo camino que incremente el flujo. Se postula entonces que el flujo máximo que circula entre 1 y 7 es igual a 26 y esto queda ratificado por la existencia de un corte de capacidad igual a 26 (según se ilustra en la figura 17, el formado por {1, 4} y {2, 3, 5, 6, 7}).

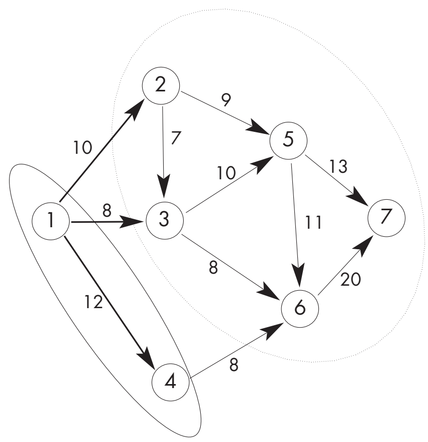


Figura 17

Las operaciones realizadas en las etapas anteriores se podrían resumir en el siguiente esquema algorítmico:

Inicialmente, los flujos que circulan sobre los arcos serán iguales a 0 ($x_{ij} = 0$)

Mientras exista un camino P de s a t que incremente el flujo,

Sea d la mínima cantidad de flujo que se puede enviar a través de P

Para todo arco (i, j) hacia delante en P hacer x_{ij} + d; para todo arco (i, j) hacia detrás en P hacer $x_{ij} - d$.

Comentarios sobre la eficiencia del método

El método anterior, a pesar de su sencillez, puede resultar no demasiado eficiente desde el punto de vista computacional si dicha eficiencia fuese establecida desde el análisis del caso peor, es decir contando las operaciones elementales (sumas, restas, comparaciones...) que pueden ser necesarias para resolver el problema particular más complicado.

El método de Ford y Fulkerson identifica en cada iteración un camino en la red y envía flujo por el mismo. Por lo tanto, el esfuerzo computacional en cada etapa coincide con el número de operaciones realizadas para identificar dicho camino. Desde la perspectiva del análisis del caso peor, puede ser necesario recorrer todos los arcos de la red. Denotando por m al número de arcos de la red, el número máximo de operaciones en una etapa es m. Ahora bien, tenemos que acotar el número de iteraciones que realiza el método. Para ello debemos acotar la cantidad de flujo que se puede enviar desde la fuente al sumidero. Recordemos, que cualquier $s - t$ corte nos da una cota superior de esa cantidad de flujo. Así, si consideramos el corte formado por el nodo fuente en un conjunto y el resto de los nodos en el otro, la capacidad del corte será la suma de los arcos que salen del nodo fuente. Supongamos que todas las capacidades de los arcos son menores o iguales que U, y que el número de nodos en la red es n. Entonces la suma de las capacidades de los arcos que salen del nodo fuente es menor o igual que nU. Como en cada iteración del método se envía al menos una unidad de flujo, el número de etapas es, a lo sumo, nU. Por lo tanto, el mayor número de operaciones que puede realizar el método es el producto de m y nU, lo que se denota por $O(nmU)$. Esta cantidad, dependiendo de U, clasifica el procedimiento anterior como pseudo-polinomial y puede que haga no demasiado eficiente su aplicación a distintos casos particulares. Sin embargo, es muy relevante su condición de primer método diseñado para la resolución del problema de flujo máximo y su manifiesta sencillez de aplicación. Hay que resaltar, por último, que las ideas básicas del anterior procedimiento, conjugadas con otras nuevas, han sustentado la aparición posterior de un número importante de métodos encaminados a mejorar el esfuerzo computacional.

La premisa fundamental del trabajo es la de defender la introducción del estudio de los casos desarrollados en los últimos cursos de Matemáticas en la enseñanza secundaria.

Conclusiones

En este trabajo se estudian modelos matemáticos combinatorios muy fáciles de formalizar a partir de distintas situaciones reales de interés económico y/o social. Presentamos métodos de resolución de los problemas de optimización combinatoria que aparecen en los modelos estudiados e ilustramos la aplicación de los mismos sobre distintos ejemplos. La premisa fundamental del trabajo es la de defender la introducción del estudio de los casos desarrollados en los últimos cursos de Matemáticas en la enseñanza secundaria. Esta defensa se fundamenta, entre otros factores, en la conexión que mantienen estos modelos con la realidad (por tanto, enfatizan la motivación, la utilidad y la comprensión de conceptos matemáticos), en la importancia del manejo de ciertas estructuras de carácter combinatorio y en la disposición de algoritmos de resolución sencillos y eficaces que, aunque basados en cálculos matemáticos poco complejos, sugieren la necesidad de uso de la herramienta de calcular imprescindible en el mundo del siglo XXI: el computador electrónico.

Sergio Alonso
Carlos González
Antonio Sedeño
Departamento de Estadística, Investigación Operativa y Computación.
Universidad de La Laguna

Bibliografía

AHUJA, R., T. MAGNANTI y J. B. ORLIN, (1993): *Network Flows*. Prentice-Hall.

CORMEN, T. H., C. E. LEISRSON y R. L. RIVEST (1990): *Introduction to Algorithms,* McGraw-Hill.

GRIMALDI, R. P. (1998): *Matemáticas Discreta y Combinatoria*.

SUMA 40
junio 2002, pp. 59-63

Reflexiones didácticas sobre la Historia de la Matemática

José Luis Lupiáñez Gómez

ARTÍCULOS

En el escrito que aquí presentamos, se describe el papel que desempeña la Historia de la Matemática en la enseñanza de esta disciplina, dónde reside el interés de llevar temas históricos al aula, qué es lo que puede suministrar una actividad de este tipo, y cómo puede llevarse a cabo dicha tarea.

DESDE HACE varias décadas, han sido numerosas las voces que se han levantado a favor del valor que posee la historia en la enseñanza de las Matemáticas, pero por lo general siempre han caído lejos del terreno práctico. Y la principal razón es que no es fácilmente aceptable ese valor y los beneficios que conlleva su empleo. Después de la reforma de la matemática moderna, y a partir de los años setenta, se ha intensificado el interés por estos aspectos históricos en educación Matemática. Schubring (1983) (en Sierra, 1997) señala algunas muestras de este renacimiento, como la fundación del grupo francés Inter-IREMs de Historia de las Matemáticas, la publicación en 1969 por el NCTM de la obra *Historical Topics for the Mathematical Classroom*, o la creación del Grupo Internacional de Estudio sobre las relaciones entre la Historia y la Pedagogía de las Matemáticas (HPM), entre otras.

En este documento realizamos algunas consideraciones con respecto al papel que juega la historia de las Matemáticas dentro del marco educativo, qué puede suministrar un trabajo que incluya temas de historia y cómo puede llevarse a cabo una tarea de este tipo.

Historias de la Historia de las Matemáticas

A pesar de que son varios los trabajos y proyectos que están impulsando el empleo de la historia dentro de la formación matemática de los estudiantes, aún quedan pendientes importantes discusiones que realizar. Para Fauvel (1991), una de las más profundas es la que habla de la división entre diferentes maneras de ver las Matemáticas que pueden estar contrapuestas y ser inconsistentes entre sí: aquellas que consisten en verdades eternas y resultados imperturbables, y aquellas otras que se han desarrollado a través del esfuerzo humano dentro de contextos sociales.

Si bien puede entenderse lo que el autor desea expresar, no parece demasiado acertada la forma de expresar la división pues puede parecer que no es exhaustiva; el hecho de que un resultado matemático sea visto por muchos como una verdad universalmente válida no significa necesariamente que no se estableciera bajo determinadas circunstancias sociales y mediante un arduo trabajo de especialistas. Un ejemplo de esto lo constituye el *Último* (también llamado *Magno*) *Teorema de Fermat*, finalmente demostrado en la década de los noventa.

Un fuerte impulso que favoreció los estudios sobre Historia a principios de siglo fue de carácter biológico, según el cual la génesis del conocimiento de cada niño sigue el mismo trazo que la de la raza humana (Sierra, 1997). Éste fue el pensamiento clave de Herbert Spencer, que llegó a influir notablemente en educación desde 1860: «La educación del niño ha de coincidir, tanto en modo como en disposición, con la educación del género humano considerado históricamente; o en otras palabras, la génesis del conocimiento a nivel individual debe seguir el mismo curso que la génesis del conocimiento en la especie» (Fauvel, 1991). Este punto de vista también puede encontrarse en los trabajos de Benchara Bradford en los primeros años del siglo XX y, de hecho, fue en esa época cuando alcanzó su máxima aceptación[1].

Pero, según las experiencias históricas que se fueron desarrollando durante este siglo, la perspectiva de Spencer y Bradford fue siendo desechada pues un cierto conocimiento de la Historia de la Matemática muestra que su curso es, en cualquier caso, mucho menos simple y lineal de lo que esos argumentos sostenían. Estas ideas tuvieron sus defensores y detractores, y podemos citar a Haeckel y Piaget entre los primeros, y a Torrence Deacon y Karl Popper entre los segundos. Este último defendía su postura argumentando, por ejemplo, que el lenguaje es una capacidad *a priori* para la especie humana, pero que por el contrario es *a posteriori* en el individuo.

Por otro lado, es importante también entender que un correcto uso de la Historia no es sencillo para los profesores pues carecen por lo general de una formación al respecto y que, por ende, tampoco es fácil para los estudiantes. La reflexión no puede limitarse a afirmar que usar la Historia en la enseñanza de las Matemáticas es *bueno*, sino que es necesario explicitar algunos de los beneficios que reporta ese uso. En la actualidad, pueden encontrarse numerosos trabajos sobre el papel que desempeña en la formación matemática de los estudiantes el que se desarrollen en el aula actividades relacionadas con la Historia de esta disciplina, y qué consecuencias pueden desprenderse de un trabajo de ese tipo. A continuación, se explicitarán algunas de esas consecuencias, y describiremos formas de acercar la Historia de la Matemática al aula.

En la actualidad, pueden encontrarse numerosos trabajos sobre el papel que desempeña en la formación matemática de los estudiantes el que se desarrollen en el aula actividades relacionadas con la Historia de esta disciplina…

1 Puede verse una descripción del pensamiento de Bradford obtenido de un número de *Mathematical Gazzete* de 1913, en Fauvel (1991).

¿Por qué emplear la Historia en Educación Matemática?

Para la gran mayoría de los estudiantes de Matemáticas, los conceptos que se enseñan están carentes de historia, y el hecho de que en la instrucción no aparece generalmente el proceso de creación matemática y que no se afrontan problemas de épocas pasadas, favorece ese pensamiento. A pesar de que cada vez son más los libros de texto en los que se relatan notas históricas de los tópicos que tratan, una escasa formación de los docentes relativa a cómo emplear estos materiales hace que no se aprovechen.

Los estudiantes ven las Matemáticas como un conocimiento cerrado que se encuentra en la mente del profesor, y que es él quien decide cuándo una respuesta es correcta o no, y esta situación es muy dañina para las Matemáticas, que son por naturaleza una materia acumulativa; la mayoría de lo que fue creado desde hace milenios, tanto en contenidos como en procesos, siguen siendo válidos hoy (Avital, 1995), si bien entendemos que lo que no es tan imperturbable es la forma de interpretar esos contenidos y procesos. Exponer a los estudiantes algunos de esos desarrollos tiene el potencial para animar la materia y para humanizarla ante ellos.

Avital señala cómo un conocimiento y comprensión del desarrollo histórico de las Matemáticas puede contribuir en cuatro áreas específicas de la investigación y el aprendizaje. Estas áreas son (Avital, 1995):

1. Obteniendo ideas acerca de las dificultades de aprendizaje de los estudiantes.
2. Suministrando modos de instrucción.
3. Incorporando propuestas y resolución de problemas en la instrucción.

4. Llamando la atención a factores emocionales y afectivos en la creación y aprendizaje de las Matemáticas.

Fauvel (1991), es más explícito al enunciar los campos en los que incide positivamente el trabajar la Historia de la Matemática durante la enseñanza de la disciplina. A pesar de que su clasificación es más explícita, puede verse como un desarrollo de la primera, por lo que nos detendremos en reflexionar en cada uno de los cuatro puntos de ésta.

Acerca de las dificultades de aprendizaje

En su obra *La Formation de l'Esprit Scientifique*, el físico y filósofo francés Gaston Bachelard introduce en 1938 la idea de *obstáculo* como aquel conocimiento que tiene su propio dominio de validez y que fuera de ese dominio es ineficaz y puede ser fuente de errores y dificultades (Bosch y otros, 1998).

…el físico y filósofo francés Gaston Bachelard introduce en 1938 la idea de obstáculo como aquel conocimiento que tiene su propio dominio de validez y que fuera de ese dominio es ineficaz y puede ser fuente de errores y dificultades…

El también francés Guy Brousseau trasladó esta noción a la Didáctica de la Matemática, en su *Teoría de Situaciones Didácticas*, y realizó la siguiente clasificación de obstáculos en este ámbito (Socas, 1997): *Ontogénicos* o *Psicogénicos*, que son debidos a las características propias del desarrollo del niño; *didácticos*: como resultado de alguna opción adoptada por el sistema educativo para llevar a cabo los procesos de enseñanza; y *epistemológicos*: intrínsecamente relacionados con el propio concepto, y pueden encontrarse en la historia de dichos conceptos, si bien eso no significa que se vayan a reproducir en el medio escolar. Según Bachelard, los obstáculos epistemológicos son constitutivos del desarrollo de la ciencia: todo conocimiento científico se construye «en contra» de un conocimiento anterior.

En relación con este último tipo de obstáculo, pueden encontrarse varios ejemplos de cómo las dificultades de aprendizaje de los estudiantes de Secundaria son similares a las que se encuentran en el desarrollo histórico. Una buena muestra puede encontrarse en un estudio conducido por el Weizmann Institute Science of Israel (Avital, 1995), en donde se argumenta que si el profesor conoce el desarrollo histórico de los números negativos, puede obtener información relevante para comprender las dificultades de comprensión de los estudiantes en este tópico.

En esta línea de trabajo se encuentra también el desarrollado con profesores de México en torno al concepto de función (Hitt, 1994). En esta investigación, se analizó la forma en la que los docentes entendían y empleaban dicho concepto, y de los resultados obtenidos, el autor destaca la concordancia existente entre algunos de los errores y dificultades que cometían los sujetos, y aquellas que se presentaron en el desarrollo histórico del concepto de función desde su nacimiento en la cultura mesopotámica.

Otro ejemplo significativo es el del uso de un sistema simbólico, que constituye uno de los mayores obstáculos en el aprendizaje del Álgebra en la escuela. Hoy en día conocemos el tortuoso sendero que constituyó el desarrollo histórico del simbolismo matemático desde el nacimiento de la disciplina, y las importantes aportaciones que a este respecto realizaron en distintos momentos civilizaciones como la babilónica y la sumeria, y matemáticos como Diofanto (250 d.C.), Al-Khwarizmi (825 d.C.), o Françoise Vieta (1540-1603), a quien nos referiremos posteriormente. Éste realizó una importante contribución al uso de letras para designar diferentes tipos de números, distinguiendo entre constantes y variables con consonantes para las primeras y vocales para las segundas. Más tarde, y con el trabajo de René Descartes (1596-1660), fue aceptado un sistema consistente de representación.

Conocer las dificultades históricas en la introducción de un sistema simbólico conveniente, podrá ayudar a los docentes a convencerse de que han de ser pacientes y ayudar a los estudiantes a asumir, por ejemplo, la diferencia entre coeficientes y variables. Meavilla (2000), por otro lado, señala cómo un conocimiento de los métodos no algebraicos para la resolución de problemas elementales que se emplearon en diferentes momentos históricos, puede iluminar al profesor de Matemáticas actual en su aula.

La Historia puede enseñarnos cómo enseñar

El tradicional esquema en las publicaciones de Matemáticas de «Definición, Teorema, Demostración, Corolario, etc.», se vuelve menos acertado cuando lo llevamos a nuestro método de enseñanza. Es muy frecuente que en los cursos de Matemáticas, e incluso en numerosos libros de texto, la presentación de un tópico comience con una generalización a la que siguen algunos ejemplos específicos. Una generalización que llega antes que los ejemplos a menudo nos desorienta, y la mayoría de esos conflictos pueden ser insalvables por los ejemplos siguientes.

Muchos desarrollos históricos llevan un sentido opuesto: van de ejemplos concretos a generalizaciones, como puede observarse en el trabajo de las civilizaciones babilónica y egipcia, por ejemplo. Y de manera similar a ese esquema, la instrucción que parta de ejemplos específicos hacia generalizaciones teóricas, podrá contribuir significativamente a la comprensión de los estudiantes. Podemos encontrar numerosas y significativas muestras de este esquema de trabajo en la obra de Arquímedes, por ejemplo. La necesidad de resolver problemas muy concretos, como la construcción de espejos cóncavos para repeler el ataque naval de Roma a Siracusa, o de la observación de fenómenos particulares, como al experimentar que el nivel de un fluido aumenta al introducir en él un sólido, desarrolló importantes generalizaciones y teorías matemáticas.

Rescatar problemas y cuestiones del pasado

Al estudiar las creencias generales que se poseen sobre la naturaleza de las Matemáticas, Buxton, en su obra *Do you panic About Maths?* (1991) (Socas, 1997), señala que es tradicional que se transmita de padres a hijos la idea de las Matemáticas como un ente cerrado e inmutable, del que el profesor dispone todo el conocimiento. Una presentación y un acercamiento a problemas que estuvieron abiertos durante muchos años, como el de *Los Cuatro Colores*, o que aún siguen sin resolverse, como la *Conjetura de Goldbach*, podrán romper esa imagen de la Matemática como un estamento casi sacro, en el que todo está concluido. Como señalamos antes, Fauvel afirmó que puede incluso darse la situación en la que a los alumnos les aliente y motive el hecho de que grandes matemáticos no han podido resolver determinados problemas (Fauvel, 1991).

Las Matemáticas tienen un marcado carácter humano

Las Matemáticas que se aprenden en la escuela, y la mayor parte de las que se estudian en estudios superiores tienen la reputación de ser ejercicios repetitivos absurdos, extraídos de una materia en la que poco intervino el esfuerzo humano. Algunas historias, como la del 5.° Postulado de Euclides, o la del Teorema Magno de Fermat, si son bien contadas, pueden llegar a los corazones de los estudiantes y hacerles ver cómo tuvieron que verse involucrados muchos profesionales durante mucho tiempo para sacar diferentes resultados adelante.

Por otro lado, y para romper la imagen de las Matemáticas como una materia aburrida y carente de emoción, se pueden relatar algunas biografías de matemáticos, que darán color a esta disciplina, como las de Galois, Abel o Srinivasa Ramanujan.

Es necesario realizar una importante y profunda distinción entre usar la Historia de la Matemática dentro de la enseñanza de las Matemáticas, y enseñar esa Historia como una materia en sí misma (Fauvel, 1991).

¿Cómo llevar la Historia al aula de Matemáticas?

Es necesario realizar una importante y profunda distinción entre usar la Historia de la Matemática dentro de la enseñanza de las Matemáticas, y enseñar esa Historia como una materia en sí misma (Fauvel, 1991). La mayoría de los especialistas que trabajan sobre la Historia de la Matemática, la consideran como un recurso para la enseñanza de la propia disciplina, y no como un nuevo objeto de estudio y de examen:

> Hay que señalar que en la educación secundaria el uso de la historia de las Matemáticas debe estar subordinado a su enseñanza, esto es, no puede tener un fin en sí mismo, ni por supuesto ser materia de examen. Cumpliendo estas condiciones la historia de las Matemáticas puede ayudar a restituir a las Matemáticas su dimensión cultural a menudo olvidada en su presentación escolar. (Sierra, 1997: 183).

En la obra *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (Rico, 1997), se aborda la problemática de la elaboración por parte del profesor de unidades didácticas que le permitan a éste llevar a cabo su tarea docente en el aula de Matemáticas. En la búsqueda de nuevos componentes que posibiliten el planificar un conocimiento práctico para la elaboración de esas unidades didácticas, se proponen otros *Organizadores del Curriculum*, definidos como «aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas» (Rico, 1997: 45).

Uno de los organizadores que se propone en ese trabajo es el *Desarrollo Histórico del Tópico* que se esté programando, y su finalidad es señalar algunos momentos a lo largo de la historia de la Matemática en los que dicho tópico tuvo un desarrollo especial o desempeñó algún papel de interés:

> Los alumnos se sienten especialmente interesados cuando se les proporciona información adecuada sobre la historia de las Matemáticas y los antecedentes de un contenido. [...] La revisión de algunas dificultades históricas en la construcción de un determinado concepto puede servir de ali-

ciente a los estudiantes para superar ellos mismos tales limitaciones. (Rico, 1997: 54).

Con este tipo de trabajos, no se pretende realizar un estudio exhaustivo del proceso de evolución del concepto matemático que se esté trabajando, sino reunir material del cual el profesor pueda extraer información para plantear tareas en el aula que apoyen y complementen la enseñanza de dicho concepto. Algunas formas en las que pueden emplearse esos materiales de historia en el aula de Matemáticas son las siguientes (Sierra, 1997):

1. Mencionar anécdotas del pasado.
2. Presentar introducciones históricas de los conceptos que son nuevos para los alumnos.
3. Fomentar en los alumnos la comprensión de problemas históricos cuya solución ha dado lugar a los distintos conceptos que aprenden en clase.
4. Impartir lecciones de historia de las Matemáticas.
5. Idear ejercicios usando textos matemáticos del pasado.
6. Fomentar la creación de pósters, exposiciones u otros proyectos con un tema histórico.
7. Realizar proyectos en torno a una actividad matemática local del pasado.
8. Usar ejemplos del pasado para ilustrar técnicas y métodos.
9. Explorar errores del pasado para ayudar a comprender y resolver dificultades de aprendizaje.
10. Idear aproximaciones pedagógicas al tópico de acuerdo a su desarrollo histórico.
11. Idear el orden y estructura de los temas dentro del programa de acuerdo con su desarrollo histórico.

No obstante, es importante señalar que para que el docente acerque a los estudiantes notas y problemas matemáticos que han sido importantes en el desarrollo histórico de la disciplina, han de ser formados en esos aspectos. Investigaciones con profesores en formación y en activo, han mostrado que ellos tienden a enseñar a sus estudiantes de la misma forma con la que ellos aprendieron, y esto nos lleva a analizar el desarrollo histórico de las Matemáticas buscando ideas de alto valor pedagógico (Avital, 1995). Hay que aislar problemas que se encuentren en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en los centros de Secundaria, y entonces señalar desarrollos en la historia de la Matemática que puedan ayudar al profesor a comprender mejor y enfrentarse a estos problemas.

…reunir material del cual el profesor pueda extraer información para plantear tareas en el aula que apoyen y complementen la enseñanza de dicho concepto.

La carencia de conocimiento acerca del desarrollo histórico de ciertos tópicos matemáticos por parte de los docentes es una realidad:

> Los profesores de Matemáticas tienen interés genérico por actividades para el aula, ejercicios y problemas, unidades didácticas elaboradas, pruebas de evaluación y, en general, por los nuevos materiales de orientación práctica. Manifiestan curiosidad por la historia y filosofía de la Matemática cuando se presentan de forma divulgativa; este interés decrece cuando los temas se presentan con cierto nivel de profundidad. (...) Los profesores de Matemáticas presentan acusadas carencias formativas en psicología, pedagogía, sociología de la educación epistemología, historia y didáctica de la Matemática, lo cual implica una desconexión entre su trabajo profesional y las bases de desarrollo correspondiente (Rico,1997: 17).

Si queremos cambiar la situación presente, tenemos que hacerlo enseñando a los profesores, enriqueciendo su instrucción mediante referencias apropiadas para el desarrollo histórico de las Matemáticas: esa es una tarea pendiente, y la cuestión que surgiría en ese caso es, por tanto, cómo lograr este objetivo.

José Luis Lupiáñez
Facultad de Ciencias de la Educación.
Universidad de Granada.
Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»

Referencias bibliográficas

AVITAL, S. (1995): «History of Mathematical Can Help Improve Instruction and Learning», en *Learn From The Masters*, MAA, Washington DF.

BOSCH, M., Y. CHEVALARD y J. GASCON (1998): *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*, SEP, México.

FAUVEL, J. (1991): «Using History in Mathematics Education», *For The Learning of Mathematics*, 11 (2), 3-6.

HITT, F. (1994): «Teacher's Difficulties with the Construction of Continous and Discontinous Functions», *Focus on Learning Problems in Mathematics*, Fall Edition, Vol. 19, n.° 4.

LUPIÁÑEZ, J.L. (2000): *Nuevos Acercamientos a la Historia de la Matemática a través de la Calculadora TI-92*, Universidad de Granada, Granada.

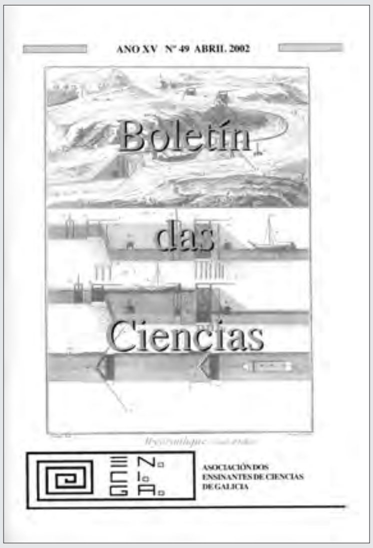
MEAVILLA, V. (2000): «Historia de las Matemáticas: métodos no algebraicos para la resolución de problemas», *Suma*, n.° 34, 81-85.

RICO, L. (Coord.) (1997); *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*, Horsori, Barcelona.

SIERRA, M. (1997): «Notas de Historia de las Matemáticas para el Currículo de Secundaria», en *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*, Horsori, Barcelona.

SOCAS, M. (1997): «Dificultades, Obstáculos y Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria», en *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*, Horsori, Barcelona.

PUBLICACIONES DE LAS SOCIEDADES



SUMA 40
junio 2002, pp. 65-68

Un ejemplo de utilizar en el área de Estadística las representaciones gráficas con ordenador

Justo Cabezas Corchero
Francisco Moreno Soto

ARTÍCULOS

En este artículo se reflexiona sobre la incorporacián de gráficos tridimensionales a la educación matemática en Bachillerato mediante el uso de un sistema de Cálculo Simbólico, y se presenta un ejemplo de aplicación. Al final del artículo se propone una posible línea de ampliación de la actividad descrita y se hace una última reflexión sobre las posibilidades que, para el aula, nos ofrecen los sistemas de cálculo simbólico.

LAS DIFERENTES EXPRESIONES de una situación matemática han sido siempre uno de los objetivos de la propia matemática. Una situación que admita expresión funcional se puede expresar también gráficamente, creando así una nueva relación entre la situación y su gráfica, que resulta ser una relación clara. De esta claridad se deriva su bondad como método de comunicación de la situación, refrendada por la amplia tradición y extensión de su uso.

Por ello, las representaciones gráficas de funciones tienen una importante presencia en los contenidos de la educación matemática, contenidos de los que nos interesan ahora dos aspectos fundamentales: la construcción y la interpretación de las gráficas. Ambos se admiten como formativos.

La interpretación de los gráficos de las funciones en el plano aporta una información sobre las mismas que es ampliamente utilizada en las clases de matemáticas, de ciencias de la naturaleza y de ciencias sociales. La construcción de gráficos se muestra como medio de estudio sencillo y eficaz en los niveles elementales de la educación. Pero en Bachillerato la incorporación del cálculo diferencial como procedimiento auxiliar de la representación comienza a ser un problema para los estudiantes que, aunque conocen los algoritmos necesarios para llevarla a cabo, a la hora de interpretar los valores obtenidos en los mismos y plasmar el resultado en unos ejes cartesianos suelen tener escaso éxito.

Las representaciones de funciones en el espacio, generalmente, se obvian en los niveles elementales y medios de la educación debido a la complicación de su estudio y trazado, acudiendo si acaso a un dibujo no realizado por el estudiante y su interpretación apenas es testimonial. La interpretación de gráficos de superficies, que parece un instrumento formativo adecuado a la edad de nuestros estudiantes de Bachillerato, está hoy aún ausente de los contenidos usuales del mismo.

Los ordenadores posibilitan la representación gráfica en dos y tres dimensiones con una facilidad impensable hace unos años, lo que permite soslayar los problemas citados anteriormente e incorporar estas representaciones a la educación matemática. Ello, además, puede proporcionar nuevos ambientes de estudio y aprendizaje muy fructíferos y se han publicado muchos trabajos en este sentido (Carrillo y Llamas, 1999). Han aparecido unas nuevas estrategias de exposición e investigación, al principio, como suele ocurrir, imitando las estrategias anteriores al uso del ordenador, hasta que luego se abren paso otras ideas, que superan la concepción del ordenador como mero medio (Pérez, 1998).

En este artículo iniciamos una propuesta de estudio facilitada por el ordenador, que se puede llevar al aula a niveles medios de la enseñanza de la matemática. En ella queremos mostrar un ejemplo de interpretación gráfica de una situación matemática a partir de su representación en el plano (con unas funciones cuya complejidad la hace imposible en estos niveles sin el ordenador) y de la consideración de un parámetro como variable, transformando una familia uniparamétrica de funciones en el plano en una superficie mediante alguna generalización (Cabezas y Roanes, 1999). En concreto, se trata de detenerse en la aproximación que ofrece la distribución normal para la t de Student según el número de grados de libertad n (en la representación de la superficie se utilizará n continua). El programa utilizado es DERIVE v.5 (puede verse Roanes Macías y Roanes Lozano, 1996 y Kutzler, 2000).

La función de densidad de la distribución t de Student con n grados de libertad es:

$$t_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \qquad [1]$$

A partir de n = 30 la distribución se aproxima lo suficiente a la normal como para que se use ésta en muchos cálculos.

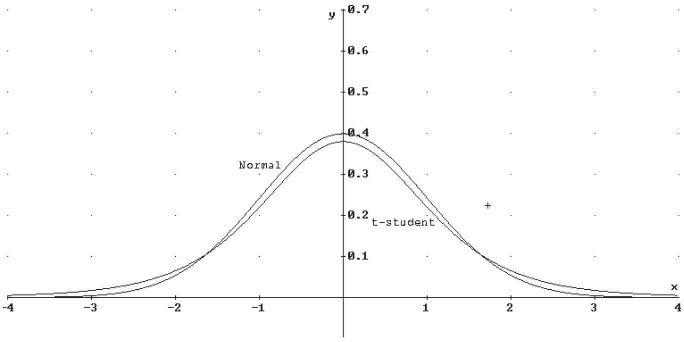
Vamos a estudiar de modo gráfico los errores producidos por esta aproximación. Supongamos n = 5. Aunque la función está implementada, la normal $N(0,1)$ se puede editar en DERIVE así:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad [2]$$

Para n = 5, la ecuación [1] sería:

$$\frac{1}{\sqrt{5\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{5+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{5}\right)^{-\frac{5+1}{2}}$$

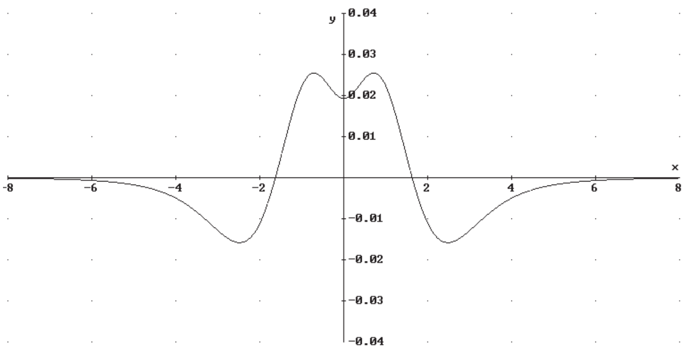
Podemos ver sus representaciones en la siguiente figura:



La diferencia entre los valores de la primera y la segunda función se obtienen editando la diferencia entre las expresiones [1] y [2]. Llamaremos a la función diferencia para muestra de tamaño n, $d_n(x)$.

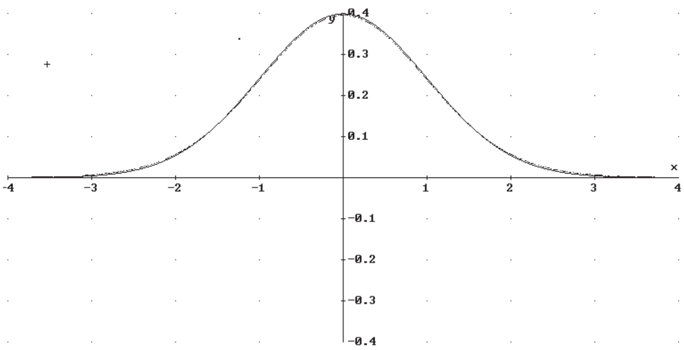
$$d_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

Por ejemplo, la gráfica de $d_5(x)$ es:

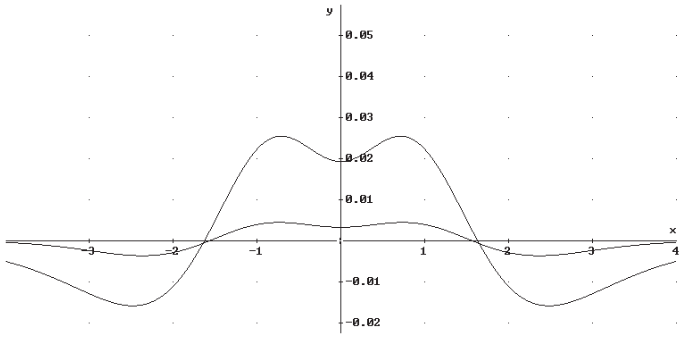


En este momento puede comentarse a los alumnos tanto las características de esta gráfica como la información que aporta.

Reiterando el proceso para n = 30 se obtienen las gráficas casi fundidas y por tanto las diferencias son mucho más pequeñas.



La gráfica de $d_{30}(x)$, comparada con la de $d_5(x)$ es:

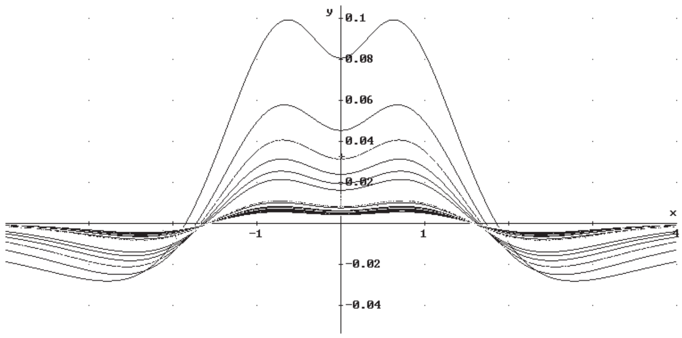


En cualquiera de estas gráficas se puede encontrar el error máximo (se puede derivar con Differentiate e igualar a cero para encontrar la abscisa del máximo mediante Solve y sustituir para encontrar la ordenada o, simplemente, aproximar la abcisa con Plot). Para $d_5(x)$ el error máximo es aproximadamente de 0,0255 en x = 0,711 y x = –0,711.

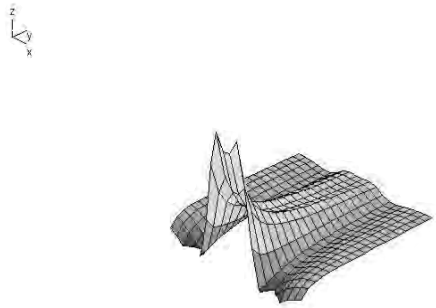
Puede interesar ver la evolución desde una hasta otra. Se puede hacer, por ejemplo, en el plano, representando la familia de funciones de $d_n(x)$ con n = 1,…,30, mediante la opción Vector que incorpora el sistema:

VECTOR (d(n), n, 1, 30, 1)

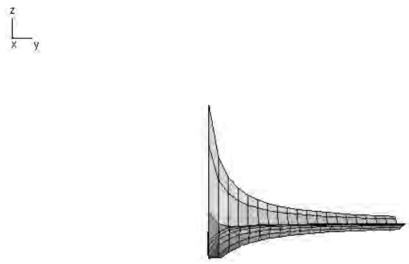
El resultado es:



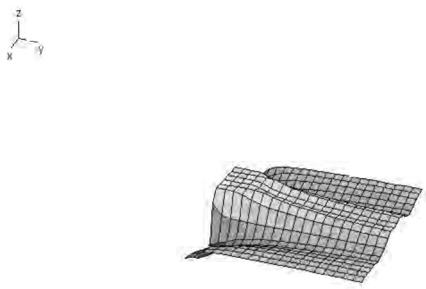
Esta familia de funciones también se puede estudiar como superficie. Basta editar la expresión diferencia de las expresiones [1] y [2]. La representación puede verse en la siguiente figura, donde se observa también la evolución de las gráficas de los errores al aumentar n, originando también otras lecturas y posibilidades de estudio.



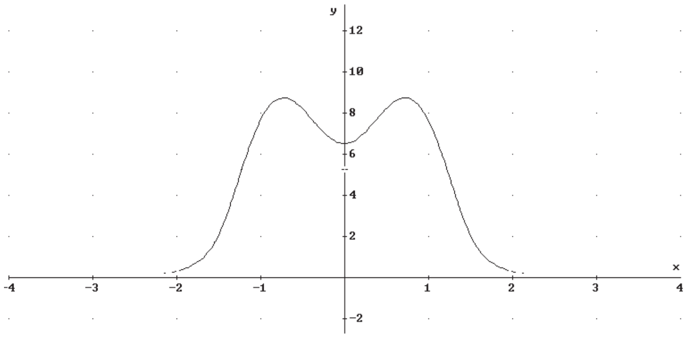
Por ejemplo, la evolución de los máximos y mínimos se puede ver moviendo convenientemente la gráfica:



O, por ejemplo, como las diferencias se expresan en el eje OZ, si deseamos hallar n tal que el error sea menor que k, basta cortar por el plano $z = k$. Las gráficas cercenadas tienen un error mayor. Para k = 0,015 resulta:



Una información más detallada se puede tener en el plano, pues basta representar el borde de la intersección anterior igualando la expresión a 0,015 y representándola en el plano. En la gráfica se puede calcular aproximadamente la solución, n = 9.



El modelo puede seguir dando frutos en la dirección que desee el profesor. Por ejemplo se puede estudiar la familia de funciones a la que pertenece la gráfica anterior. En todo caso la utilización de un sistema de cálculo simbólico para trabajar con familias uniparamétricas de funciones y su expresión como superficie es una posibilidad que se nos ofrece desde hace pocos años y sobre la que podemos construir algunas de nuestras clases.

Justo Cabezas
Universidad de Extremadura.
Sociedad Extremeña
de Educación Matemática
«Ventura Reyes Prosper»
Francisco Moreno
Universidad de Extremadura

Bibliografía

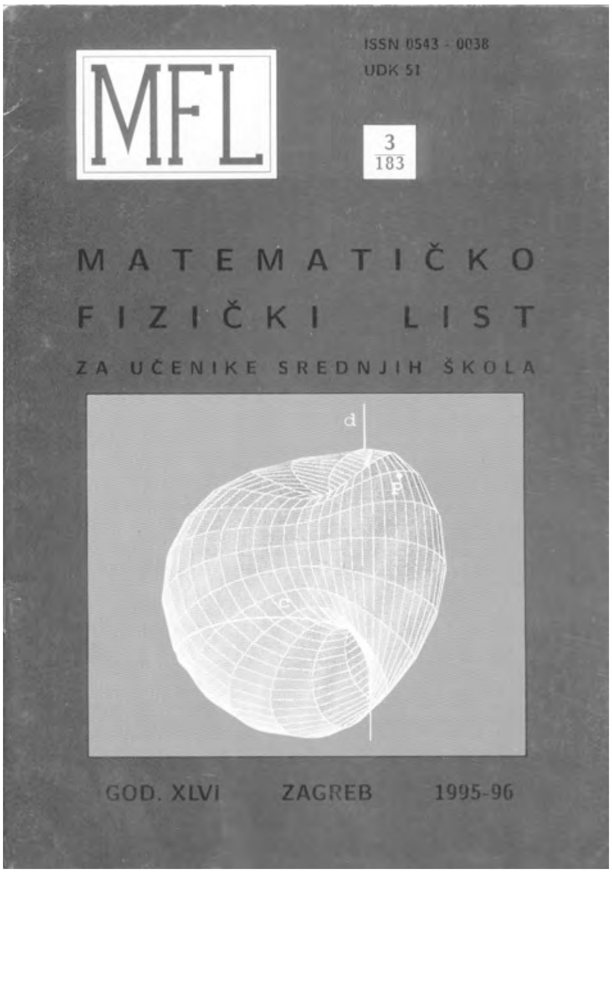
CABEZAS, J. y E. ROANES-LOZANO (1999): «Modificaciones curriculares posibilitadas por las nuevas tecnologías: aparición de contenidos», *Boletín de la Sociedad Puig Adam,* n.° 53, 20-31.

CARRILLO DE ALBORNOZ, A. y I. LLAMAS, (1999): «Trazado de curvas ilustres. Una propuesta con Cabri II», *Suma,* n.° 30

KUTZLER, B.: (2000): *Introduction to Derive 5*, Austria.

PÉREZ, J.: (1998). «Los sistemas de cálculo simbólico en la enseñanza de las matemáticas». *Actas del VIII Congreso de Educación Matemática*, Sevilla.

ROANES-MACÍAS, E. y E. ROANES-LOZANO (1996): *Primeros pasos en DERIVE y en Maple*, Facultad de Educación de la Universidad Complutense de Madrid.



SUMA 40
junio 2002, pp. 69-73

Los números imitan al espacio

José Javier Escribano Benito

ARTÍCULOS

En este trabajo nos proponemos abordar un problema clásico: la división de un segmento en media y extrema razón. Nuestro interés se centra en ilustrar, con un ejemplo sencillo, los sucesivos pasos a la hora de interpretar una magnitud: primero como una longitud, un área o un volumen; después como un segmento; y, por último, como un número. Evolución que refleja el proceso de creación de la geometría analítica. Por otro lado, estos tres periodos coinciden con las tres fases por las que pasa una disciplina matemática: ingenua, formal (en la que se perfecciona el cálculo simbólico) y una fase crítica (en la que se revisan los fundamentos).

INTRODUCCIÓN

> Los únicos objetivos de la ciencia abstracta o de la demostración son la cantidad y el número... el resto son sofisterías e ilusión. (Hume, *An Enquiry concerning Human Understanding*, 1758)

En este trabajo nos proponemos abordar un problema clásico: *la división de un segmento en media y extrema razón*. Mas allá de los aspectos didácticos del propio problema (números irracionales, sección áurea, etc.) nuestro interés se centra en ilustrar, con un ejemplo sencillo, los sucesivos pasos a la hora de interpretar una magnitud: primero como una longitud, un área o un volumen; después como un segmento; y, por último, como un número. Esta evolución refleja «el verdadero proceso de creación de la geometría analítica» (Etayo, 1988: 17). Por otro lado, estos tres periodos coinciden con las tres fases por las que, según la idea hilbertiana (Lorenzo, 1998: 118), pasa una disciplina matemática: ingenua, formal (en la que se perfecciona el cálculo simbólico) y una fase crítica (en la que se revisan los fundamentos).

Sección áurea de un segmento

> ...ella (la Divina proporción) es una sola y no más, y no es posible asignarle otras especies ni diferencias. Y dicha unidad es el supremo epíteto de Dios mismo. (Luca Pacioli, *De Divina Proportione*, 1509).

Se dice que un punto X divide a un segmento AB *en media y extrema razón*, cuando la parte mayor AX es la media proporcional entre el segmento total y la parte menor XB. Si tomamos $AB = p$, $AX = x$ y, por tanto, $XB = p - x$ el problema se reduce a resolver la ecuación:

$$\frac{p}{x} = \frac{x}{p-x} \quad o \quad x^2 + px = p^2$$

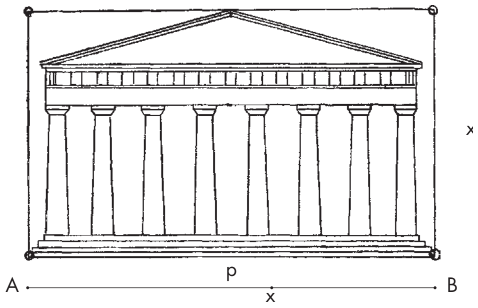


Figura 1. Partenón de Atenas

Álgebra geométrica

> ...no debemos atender a meras imágenes plausibles cuando se trata de los razonamientos que deben presentarse en nuestra doctrina geométrica. (Procolo).

El libro II de los *Elementos* (siglo III a. C.) está dedicado a lo que hoy se denomina álgebra geométrica[1], que servía «más o menos para los mismos fines que nuestra álgebra simbólica» (Boyer, 1992: 151). Pero los métodos del álgebra geométrica de los griegos distan mucho de nuestra geometría analítica; «más aún: en [el libro] II no hay ecuación alguna ni trasuntos algebraicos, sino la exposición de unos resultados deductivamente inconexos entre sí»[2]. Así, la proposición 6 del libro II equivale a la construcción de la ecuación cuadrática $x^2 + px = p^2$. Y la proposición 11, a la división de un segmento en media y extrema razón:

> Dividir una recta dada de manera que el rectángulo comprendido por la (recta) entera y uno de los segmentos sea igual al cuadrado del segmento restante (Euclides, 1991*a*: 284).

Aunque en este libro aparecen las longitudes y las áreas, es necesario esperar hasta el libro V para encontrar una noción general de magnitud como término de una relación de proporcionalidad. Euclides no define el concepto de magnitud y se limita a enumerar alguna de sus propiedades. Por ejemplo:

> *Definición 1*. Una magnitud es parte de una magnitud, la menor de la mayor, cuando mide a la mayor
>
> *Definición 3*. Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas.
>
> *Definición 4*. Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a la otra (Euclides, 1991*b*: 9-10).

Euclides deja claro que es posible definir una relación (un cociente) entre dos magnitudes homogéneas y (según la definición 4) arquimedianas aunque deja muchos puntos oscuros. Por ejemplo, la relación entre las magnitudes y los números (cuya teoría se expone en los libros VII-IX).

1 Denominación introducida por Zeuthen (*Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, 1886).

2 Vega en Euclides (1991*a*: 87).

El libro VI aplica la teoría de las proporciones a la geometría plana. En él encontramos la división en media y extrema razón que viene a ser una réplica de lo tratado en el libro II pero en un contexto diferente.

> *Definición 3*. Se dice que una recta ha sido cortada en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor como el [segmento] mayor es al menor
>
> *Proposición 30*. Dividir una recta finita dada *AB* en extrema y media razón
>
> Constrúyase a partir de *AB* el cuadrado $B\Gamma$ y aplíquese a $A\Gamma$ el paralelogramo $\Gamma\Delta$ igual a $B\Gamma$ y que exceda en la figura $A\Delta$ semejante a $B\Gamma$.
>
> Ahora bien, $B\Gamma$ es un cuadrado; entonces $A\Delta$ es también un cuadrado. Y como $B\Gamma$ es igual a $\Gamma\Delta$, quítese de ambos ΓE; entonces el (paralelogramo) restante *BZ* es igual al (paralelogramo) restante $A\Delta$. Pero son también equiángulos; entonces los lados que comprenden los ángulos iguales de los (paralelogramos) *BZ*, $A\Delta$ son inversamente proporcionales; entonces, como *ZE* es a $E\Delta$, así *AE* a *EB*. Pero *ZE* es igual a *AB* y $E\Delta$, a *AE*. Por tanto, como *BA* es a *AE*, así *AE* a *EB*. Pero *AB* es mayor que *AE*; así pues, *AE* es también mayor que *EB*.
>
> Por consiguiente se ha dividido la recta *AB* en extrema y media razón por *E* y su segmento mayor es *AE* (Euclides, 1991*b*: 56, 103-104).

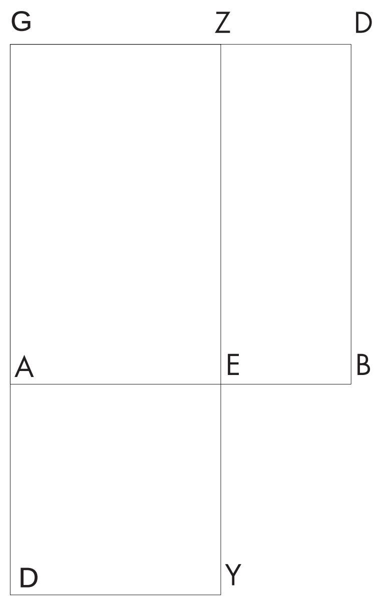


Figura 2.
División en extrema y media razón
(Euclides)

Aplicación del álgebra a la geometría

> Los números imitan el espacio, aunque son de naturaleza muy diferente. (Pascal, *Pensées*).

Debemos a Descartes (y simultáneamente a Fermat) la introducción de la *aplicación del álgebra a la geometría* o *geometría analítica*[3]. En el Libro I «De los problemas que se pueden construir sin emplear más que círculos y líneas rectas» de *La Géométrie* (1637), Descartes desarrolla procedimientos para efectuar las operaciones aritméticas de forma geométrica y establece un método «para construir todos los problemas de la geometría ordinaria [problemas planos] mostrando como se llega a las ecuaciones que sirven para resolver problemas». Entre éstos no se encuentra explícitamente el de la división áurea, pero sí la resolución de la ecuación cuadrática equivalente $z^2 = az + bb$:

> … construyo el triángulo rectángulo *MLN*, cuyo lado *LM* es igual a *b* (raíz cuadrada de la cantidad conocida *bb*) y el otro lado, *LN* es igual a *a*/2, esto es: la mitad de la otra cantidad conocida que estaba multiplicada por *z*, la cual he supuesto que es la línea desconocida. Seguidamente, prolongando *MN*, que es la base del triángulo, hasta *O*, de suerte que *NO* es igual a *NL*, la línea *OM* es *z*, la linea buscada. La cual se expresa de la siguiente forma:
>
> $$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$$
>
> (Descartes, 1981: 283-284).

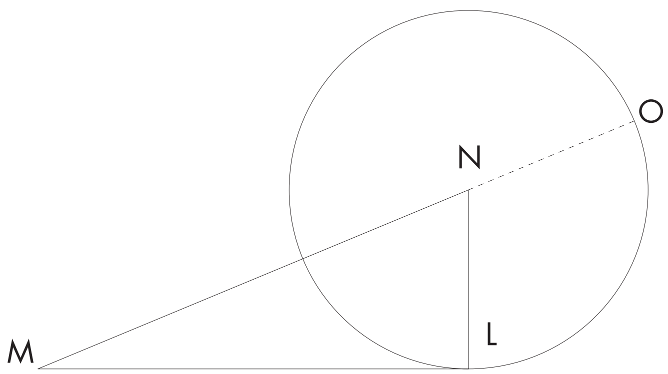


Figura 3. Ecuación $z^2 = az + b^2$ (Descartes)

Aunque las construcciones propuestas ya eran conocidas, el método de Descartes presenta un toque de genialidad: la introducción de un segmento unitario. Desde el *álgebra geométrica* de Eulides hasta el *álgebra especiosa* de Vieta, las magnitudes empleadas debían representar figuras geométricas y, por tanto, su dimensión no podía superar el número tres. Del mismo modo, todas las expresiones deben ser homogéneas ya que en otro caso dejan de ser inteligibles (la expresión $aa + b$, por ejemplo, representaba la imposible suma de una «superficie» y una «longitud»). La gran aportación de Descartes consiste en salvar estas limitaciones, considerando todas las magnitudes como segmentos:

> Así, si ha de extraerse la raíz cúbica de $aabb - b$, debemos considerar que la cantidad *aabb* está dividida una vez por la unidad y la cantidad *b* está multiplicada dos veces por la misma unidad. (Descartes, 1981: 281).

También hay que resaltar la importancia del cálculo simbólico, ausente en los *Elementos*, forjado a lo largo de los siglos y perfeccionado por Vieta, y que alcanza con Descartes prácticamente su notación actual:

> No es nada exagerado decir que, para el progreso humano, la introducción y difusión del cálculo literal, en sustitución del álgebra geométrica, ha sido una revolución comparable a la adopción de la máquina en lugar del trabajo manual (Radice, 1983: 58).

Como hemos podido observar, Descartes no alude a la solución negativa. Los números negativos llegaron a ser conocidos en Europa a través de los textos árabes, pero la mayor parte de los matemáticos de los siglos XVI y XVII se negaron a considerarlos como posibles raíces de una ecuación (Kline, 1985: 136). Descartes entendía que estas raíces eran *falsas*, aunque llegó a demostrar que una ecuación con raíces negativas podía ser transformada en otra con raíces positivas, y, por tanto, «podemos transformar las raíces falsas en raíces reales (positivas)».

La introducción sistemática de los signos en la *geometría pura* fue debida a Möbius (*Der barycentrische Calcul*, 1827). Unos años antes, Lazare Carnot, en su *Géométrie de Position* (1803), presentó un método, los sistemas correlativos, que permitía representar al mismo tiempo la magnitud y la posición de las figuras, sin utilizar los números negativos[4]. Para ilustrar el algoritmo de Carnot recurrimos a uno de los textos más clásicos de nuestra matemática: la *Geometría analítica-descriptiva* (1819), del coronel Mariano de Zorraquín.

Los pocos y confusos datos que se conocen de Zorraquín, nos evocan la figura de un prestigioso militar, que participó en la Guerra de la Independencia y que, al finalizar la misma, fue nombrado profesor de la Academia de Ingenieros del Ejército de Alcalá de Henares. Comprometido con la causa liberal, fue condenado a prisión en el restablecimiento del absolutismo en 1814. Al iniciarse el *Trienio Liberal* fue elegido diputado por Madrid y llegó a ser

3 Como es sabido Lacroix fue el primero en utilizar (Prólogo del *Traité de calcul*, 1797) el nombre geometría analítica en el sentido actual: «consiste en deducir las propiedades de la extensión del mínimo número posible de principios por procedimientos puramente analíticos». Los primeros que usaron el nombre de *geometría analítica* como título de un libro de texto fueron Lefrançais, en una edición de sus *Essais de géométrie* de 1804, y Biot en la edición de 1805 de sus *Essais de géométrie analytique* (Boyer, 1992: 602-603).

4 En una de sus obras más influyentes *Reflexiones sobre la metafísica del cálculo infinitesimal* (1797; 2ª ed, 1813), Carnot «afirmaba categóricamente que la noción de algo menor que nada era absurda. Los números negativos podían ser introducidos en el álgebra como entidades ficticias útiles para el cálculo. Sin embargo, no eran ciertamente cantidades y podían conducir a conclusiones erróneas» (Kline, 1985: 184).

nombrado Ministro de la Guerra el 24 de abril de 1823 en el gabinete que José María Calatrava formó en Sevilla, donde los liberales habían retenido a Fernando VII. Es posible, sin embargo, que no llegara a tomar posesión efectiva del ministerio, ya que se encontraba en Cataluña, como general jefe de Estado Mayor de la división de Espoz y Mina, donde falleció el 26 de mayo de 1823 en el curso de un ataque contra los absolutistas. En todo caso, su *Geometría analítica-descriptiva*, publicada en 1819, marca un hito de modernidad en la matemática española. Se trata de una geometría práctica, representativa del paradigma lagrangiano, que pretende representar el espacio (euclídeo) aunando los métodos de la geometría analítica y de la descriptiva.

Como era habitual en los textos de época, la Geometría de Zorraquín se presenta dividida en dos secciones: análisis determinada y análisis indeterminada. Esta división responde a la concepción, plenamente cartesiana, que Zorraquín tiene de la Aplicación del Álgebra a la Geometría. Considera nuestro autor que el método propio de la geometría que nos permite alcanzar un resultado «marchando de consecuencia en consecuencia» puede resultar penoso e incluso impracticable cuando las cuestiones no son elementales. Conviene, por tanto, utilizar el álgebra como una herramienta para facilitar y simplificar las investigaciones, y dar a las cuestiones y a sus resultados un carácter general, sin perder de vista que en toda expresión analítica hay siempre una construcción geométrica:

> Dos son los objetos de la geometría analítica: resolver las ecuaciones geométricas por el análisis e interpretar geométricamente o construir las fórmulas analíticas (Zorraquín, 1819: 4).

Entre los problemas propuestos en la primera parte está el que ahora nos ocupa: *Dividir la recta DB en media y extrema razón.*

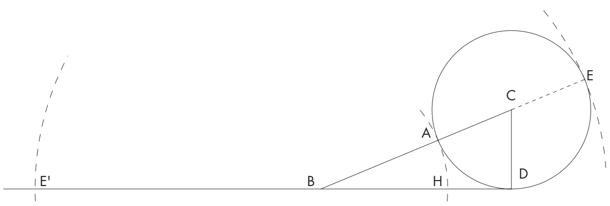


Figura 4. Sección áurea (Zorraquín)

La solución positiva es, como en el caso anterior *BH*, y se obtiene de *BA* = *BC* – *AC*.

La novedad radica, como ya hemos adelantado, en la introducción de la solución negativa siguiendo el algoritmo de Carnot:

> Siempre que el objeto de un Problema sea determinar la distancia de un punto desconocido al origen, debe suprimirse el signo de las soluciones negativas, y tomar las cantidades absolutas en sentido contrario al supuesto de la ecuación primitiva (Zorraquín, 1819: 42).

En el caso anterior la solución negativa será *BE'* donde *E'* se obtiene abatiendo *E* sobre *BD* en sentido contrario.

En 1872 Weirstrass, Cantor y Dedekind culminan la «aritmetización del análisis» con sus respectivas construcciones de los números reales. El concepto de número real se desliga así del de segmento de Descartes: la aritmética sustituye a la geometría en la fundamentación del análisis.

Los Fundamentos

> Así, pues, todo conocimiento humano comienza con intuiciones, de éstas se pasa a conceptos y termina con ideas. (Kant, *Kritik der reinen Vernunft*, 1781)

En 1872 Weirstrass, Cantor y Dedekind culminan la «aritmetización del análisis» con sus respectivas construcciones de los números reales. El concepto de número real se desliga así del de segmento de Descartes: la aritmética sustituye a la geometría en la fundamentación del análisis. De forma paralela, la difusión de las geometrías no euclideas y la expansión de la geometría proyectiva (donde desaparece la noción de métrica y, según Staud, la noción de número real) rompen con la idea kantiana de un espacio métrico euclideo dado *a priori*. La geometría se convierte en una ciencia pura, desligada de dependencias empíricas: «uno debería ser capaz –explicaba Hilbert– de decir siempre en lugar de puntos, líneas rectas y planos; mesas, sillas y jarras de cerveza».

Si admitimos la construcción de la geometría euclidea dada por Hilbert, es posible «introducir en la Geometría un cálculo con segmentos, en el cual las reglas dadas para números reales sean válidas sin modificación alguna» (Hilbert, 1996: 65)[5]. Y nuestro problema pasa, por tanto, a ser una simple cuestión numérica.

Sin embargo, nada nos impide dejar volar la imaginación («La esencia de la matemática es su libertad») y considerar, por ejemplo, como «plano» el conjunto de puntos interiores (contorno excluido) de una elipse dada. Llamando «pun-

5 Este cálculo se basa en el teorema de Pascal (otros autores lo denominan de Pappus) que, el geómetra alemán, demuestra sin utilizar los axiomas de continuidad.

tos» a todos los puntos interiores a dicha elipse y «rectas» a las cuerdas (excluidos los extremos) de la elipse. Podemos construir un modelo (Lobachewsky) que cumple las mismas propiedades que el plano euclideo, salvo el *Postulado del paralelismo* que ahora queda formulado del siguiente modo[6]:

Por un punto P exterior a una recta MN se pueden trazar dos paralelas a ella (MM´ y NN´) e infinitas no secantes.

Como medida del segmento *AB* se toma el logaritmo de la razón doble

$$\log (ABMN) = \log \left(\frac{AM}{AN} : \frac{BM}{BN} \right)$$

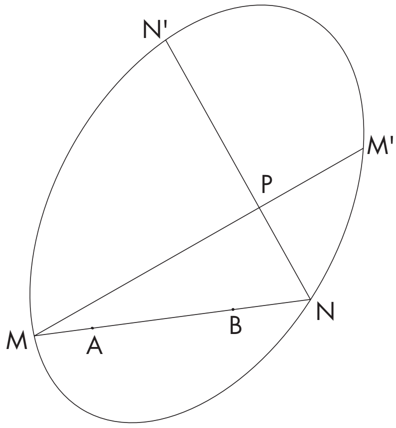


Figura 5. Plano interior a una cónica

De esta forma la proporción $\Phi = p/x$, que los matemáticos del Renacimiento denominaban «divina», porque –como Dios– «es siempre la misma y siempre invariable, y de ninguna manera puede cambiar ni de otro modo puede aprehenderla el intelecto» (Pacioli, 1991: 41-42), nos conduce ahora a dividir un segmento dado, *AB*, de forma diferente en función de la posición de sus extremos.

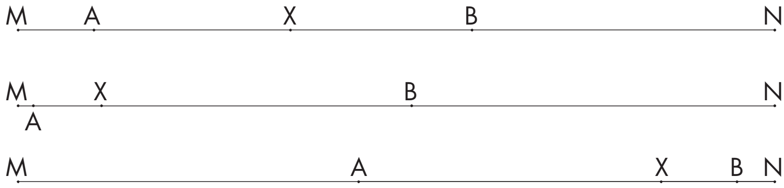


Figura 6. Media y extrema razón hiperbólica

Agradecimiento

Deseo expresar mi reconocimiento al Dr. Luis Español, profesor de la Universidad de La Rioja, por las sugerencias y los datos facilitados para la elaboración de este trabajo.

Bibliografía

BOYER, C. (1992): *Historia de la Matemática*, Alianza Universal, Madrid.

DESCARTES, R. (1981): *Discurso del método, Dióptrica, Meteoros y Geometría*, Alfaguara, Madrid. (Prólogo, traducción y notas de G. Quintás Alonso).

ETAYO MIQUEO, J. J. (1988): «Los caminos de la Geometría», en *Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (1988) Curso de Conferencias sobre Historia de la Matemática en los siglos XVII y XVIII*, Madrid, 11-29.

EUCLIDES (1991*a*): *Elementos. Libros I-IV*, Gredos, Madrid. (Introducción de L. Vegas, trad. y notas de M. L. Puertas Castaños).

EUCLIDES (1991*b*): *Elementos. Libros V-IX*, Gredos, Madrid. (Traducción y notas de M. L. Puertas Castaños).

HILBERT, D. (1996): *Fundamentos de la geometría*, CSIC, Madrid. (Traducido de la 7ª edición alemana, 1930, por F. Cebrián. Es una reimpresión de la obra publicada por el CSIC, en 1953 y esta precedida de una introducción de J. M. Sánchez Ron).

KLINE, M. (1985): *Matemáticas. La perdida de la certidumbre*, Siglo XXI, Madrid.

LORENZO, J. de (1998): *La matemática: de sus fundamentos y crisis*, Tecnos, Madrid.

PACIOLI, L. (1991): *La divina proporción*, Akal, Torrejón de Ardoz. (Introducción de A. M. González, traducción de J. Calatrava).

PUIG ADAM, P. (1978): *Curso de Geometría Métrica. Tomo II. Complementos*, Gómez Puig Ediciones, Madrid.

RADICE, L.L. (1983): *La matemática de Pitágoras a Newton*, Laia, Barcelona. (Traducido por J. Vivanco).

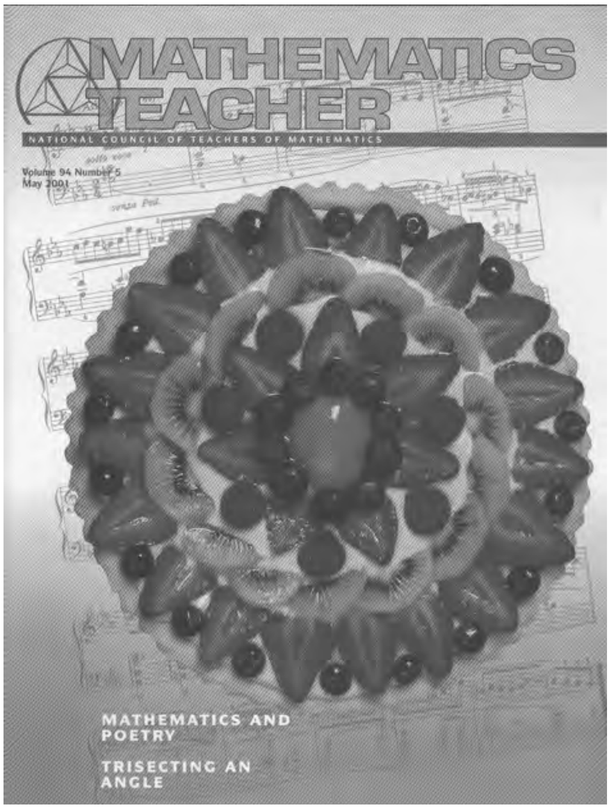
ZORRAQUÍN, M. (1819): *Geometría analítica-descriptiva*, Imprenta de Manuel Amigo, Alcalá.

6 Esta construcción puede verse, por ejemplo, en Puig Adam (1978)

José Javier Escribano
IES Valle del Cidacos.
Calahorra (La Rioja).
Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas

En el próximo n.° 40 (noviembre) aparecerá la convocatoria de la FESPM para la Dirección de SUMA


MATHEMATICS
TEACHER
NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS
Volume 94 Number 9
December 2001
• PROOF
• BLACK DOTS
• FUNCTIONS


MATHEMATICS
TEACHER
NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS
Volume 94 Number 5
May 2001
MATHEMATICS AND
POETRY
TRISECTING AN
ANGLE


MATHEMATICS
TEACHER
NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS
Volume 94 Number 1 • January 2001
Happy New Millennium!
• CURRICULA AND
GUINEA PIGS
• RESOURCES FOR
ENCOURAGING FEMALES

SUMA 40
junio 2002, pp. 75-85

Relojes de sol: un estudio analítico con ejemplos de la ciudad de Úbeda (Jaén)

Juan Ortega Moya

En este artículo se realiza un estudio geométrico-analítico de los relojes de sol, aportando unas notaciones y terminología que simplifican las complicaciones trigonométricas del mismo, y utilizando ejemplos concretos que se encuentran en la ciudad de Úbeda (Jaén).

ARTÍCULOS

CON LA IMPLANTACIÓN de la LOGSE, algunos centros educativos ofertan un «Taller de Astronomía» como materia optativa en el segundo ciclo de la ESO, ello ha motivado el interés de bastantes profesores por estudiar y configurar el contenido curricular de esta materia. Su fuerte carácter transversal permite abordarla desde áreas tan distintas como Matemáticas, Física y Química, Historia, Biología y Geología, Filosofía, Tecnología, Informática, etc. y favorece que los estudiantes asimilen todos estos conocimientos de forma globalizada y conexa al mundo que los rodea. Desde el entretenimiento en la fabricación y uso de instrumentos ópticos hasta la elaboración de modelos explicativos de los fenómenos astronómicos, pasando por los registros de la Historia, hay un vasto campo de actividades enormemente motivadoras para el alumnado, y por qué no decirlo, también para los profesores.

Nuestras experiencias más inmediatas con la Astronomía son, sin duda, las relacionadas con el ir y venir de los días y los ciclos estacionales y lunares. Es ineludible dirigir nuestro interés al Sol para buscar explicación a la variación de las sombras de los objetos, a los eclipses, a la alternancia de las estaciones, etc. Todos estos fenómenos han atraído la atención del hombre desde tiempos prehistóricos y, desde una explicación mítica inicial, se ha evolucionado hasta la explicación científica y racional que hoy se tiene de ellos. Por tanto, parece natural, por su carácter cotidiano, observar y estudiar con el más sencillo y primitivo de los instrumentos astronómicos, el *gnomon*, que en su forma más simple se reduce a una varilla vertical clavada en el suelo.

Para las Matemáticas, el estudio de los relojes de sol es de un interés incuestionable, tanto desde el punto de vista educativo como científico. Eratóstenes atribuyó el descubrimiento de las cónicas a la construcción de estos relojes y, en el siglo XVI, Francesco Maurolico, en su *Tratado de* *gnomónica*, demostró que la sombra de una varilla vertical describe una cónica, cuyo tipo depende de la latitud del lugar en que se encuentre (del Río Sánchez, 1994).

El estudio de los relojes de sol puede hacerse de forma descriptiva, sintética o analítica. En los niveles iniciales, lógicamente debe predominar el enfoque descriptivo, prestando atención únicamente a los aspectos cualitativos para, después, avanzar con observaciones cuantitativas y trigonométricas. El tratamiento geométrico-analítico no aparece ni siquiera en los manuales al uso, pero desde él se puede hacer un profundo análisis de estos instrumentos.

El objetivo del trabajo que se expone a continuación consiste en ofrecer una terminología, unas notaciones y unos ejemplos para mostrar una forma sencilla de describir analíticamente estas construcciones.

Elementos de Astronomía

La Tierra se traslada alrededor del Sol describiendo una trayectoria prácticamente elíptica, que conocemos con el nombre de *eclíptica*, con el Sol situado en uno de los focos de esta elipse. El desplazamiento de la Tierra por la eclíptica es lento, pues tarda 365,25 días en recorrerla.

Simultáneamente, la Tierra está girando sobre su propio eje, el cual se encuentra inclinado 66° 32' 30'' respecto al plano de la eclíptica, dando una revolución completa en un día.

Durante un solo día, las posiciones relativas del Sol y de la Tierra apenas sufren variación en el espacio, sin embargo, para un observador situado en la superficie terrestre, el movimiento de rotación de la Tierra da lugar a que el Sol parezca moverse girando a su alrededor.

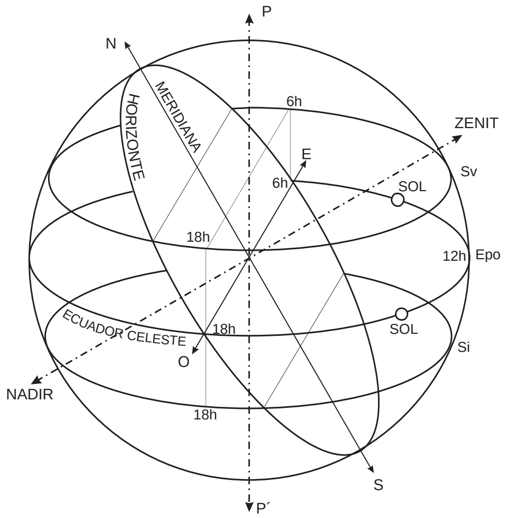


Figura 1

El estudio de los relojes de sol puede hacerse de forma descriptiva, sintética o analítica.

Prolongando los círculos, planos y ejes de referencia de la Tierra hasta los confines infinitos de la esfera celeste, la trayectoria aparente del Sol es siempre una circunferencia menor de la esfera celeste (figura 1), llamada *paralelo diurno*, de plano perpendicular al eje polar *PP'*. El centro del paralelo diurno está situado en el eje *PP'* pero se desplaza hacia arriba o hacia abajo del origen según la posición que tenga la Tierra en la eclíptica. En la figura 1 se han representado tres paralelos diurnos: el del solsticio de verano (Sv), el de los equinoccios (Epo) y el del solsticio de invierno (Si).

Por otro lado, dado que el tamaño de la Tierra es despreciable frente a las distancias astronómicas, el plano del horizonte, o plano tangente en un lugar fijado sobre la superficie terrestre, pasará por el centro de la esfera celeste y estará inclinado con respecto al ecuador celeste (prolongación del ecuador terrestre) un ángulo $\alpha = 90 - \varphi$, siendo φ la latitud geográfica del lugar considerado (figura 2). Por esta razón, el paralelo diurno formará también el mismo ángulo $\alpha = 90 - \varphi$ con el plano del horizonte.

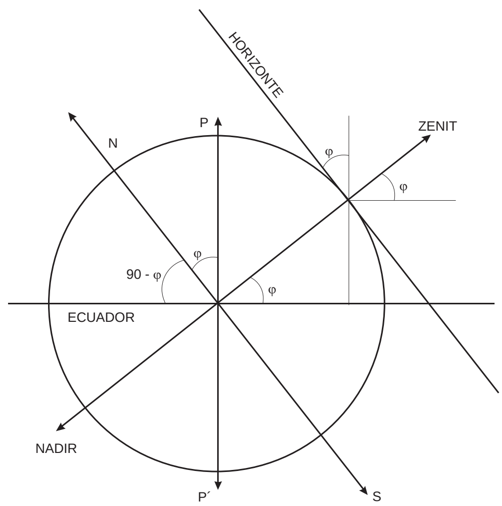


Figura 2

La división del paralelo diurno en 24 arcos iguales, de 15° cada uno, permite establecer la hora solar *t* en cualquier lugar de la Tierra.

Las figuras 1 y 2 se han representado para un lugar con una latitud igual que la de Úbeda, ciudad de la provincia de Jaén.

Notaciones, definiciones y proposiciones preliminares

El análisis matemático de los relojes de sol que aquí se va a exponer está basado enteramente en los conceptos de la geometría euclídea tridimensional; no obstante, con el fin de simplificar y abreviar los cálculos, se usará la siguiente terminología:

Definición 1: Dado un plano π por su ecuación implícita

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$$

y un punto P de coordenadas (x_p, y_p, z_p), se escribirá $\pi(P)$ para simbolizar la cantidad:

$$\pi(P) = A \cdot x_p + B \cdot y_p + C \cdot z_p + D$$

Proposición 1:

$$\pi(P) = 0 \Leftrightarrow P \in \pi$$

Definición 2: Dado un plano π por su ecuación implícita

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$$

y un vector $\vec{v}$ de coordenadas (v_1, v_2, v_3), se escribirá $\pi(\vec{v})$ para simbolizar la cantidad:

$$\pi(\vec{v}) = A \cdot v_1 + B \cdot v_2 + C \cdot v_3 = (A,B,C) \circ (v_1, v_2, v_3) = \vec{N} \circ \vec{v}$$

Proposición 2: Si $X = P_0 + \lambda \cdot \vec{v}$ es la ecuación paramétrica de una recta r cualquiera, no paralela al plano $\pi = 0$, entonces el punto P de intersección de r y π viene dado por

$$P = P_0 - \frac{\pi(P_0)}{\pi(\vec{v})} \cdot \vec{v}$$

Proposición 3: Sean S un punto fijo del espacio, $X = P_0 + \lambda \cdot \vec{r}$ una recta r dada y $\pi = 0$ un plano (figura 3), entonces la proyección de la recta r sobre π desde S es otra recta r^* (supuesto que exista), cuyos puntos X^* vienen dados por la expresión paramétrica siguiente:

$$X^* = P_0 + \lambda \cdot \vec{r} + \mu \cdot \vec{u}_0 + \lambda\mu \cdot \vec{r} \qquad [1]$$

siendo λ arbitrario, $\vec{u}_0 = \overrightarrow{SP}_0$ y

$$\mu = \mu(\lambda) = \frac{-\pi(P_0) - \lambda \cdot \pi(\vec{r})}{\pi(\vec{u}_0) + \lambda \cdot \pi(\vec{r})} \qquad [2]$$

y cuya dirección viene determinada por el vector

$$\vec{r}^* = \vec{u}_0 - \frac{\pi(\vec{u}_0)}{\pi(\vec{r})} \cdot \vec{r} \qquad [3]$$

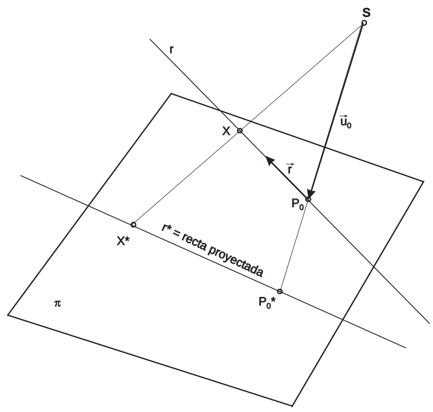


Figura 3

Demostración: Se tiene que

$$X^* = X + \mu \cdot \overrightarrow{SX} = X + \mu \cdot (X - S) = P_0 + \lambda \cdot \vec{r} + \mu \cdot (P_0 + \lambda \cdot \vec{r} - S) =$$
$$= P_0 + \lambda \cdot \vec{r} + \mu \cdot (P_0 - S) + \lambda\mu \cdot \vec{r} = P_0 + \lambda \cdot \vec{r} + \mu \cdot \overrightarrow{SP}_0 + \lambda\mu \cdot \vec{r}$$

Además, como $X^* \in \pi$, se cumplirá

$$\pi(X^*) = 0 = \pi(P_0 + \lambda \cdot \vec{r} + \mu \cdot \vec{u}_0 + \lambda\mu \cdot \vec{r}) =$$
$$= \pi(P_0) + \lambda \cdot \pi(\vec{r}) + \mu \cdot \pi(\vec{u}_0) + \lambda\mu \cdot \pi(\vec{r})$$

Finalmente, sean

$$X_1^* = P_0 + \lambda_1 \cdot \vec{r} + \mu_1 \cdot \vec{u}_0 + \lambda_1\mu_1 \cdot \vec{r}$$

$$X_2^* = P_0 + \lambda_2 \cdot \vec{r} + \mu_2 \cdot \vec{u}_0 + \lambda_2\mu_2 \cdot \vec{r}$$

dos puntos arbitrarios de r^*. Entonces, ambos determinan el vector:

$$\overrightarrow{X_1^* X_2^*} = X_2^* - X_1^* = (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \vec{r} + (\mu_2 - \mu_1) \cdot \vec{u}_0 + (\lambda_2\mu_2 - \lambda_1\mu_1) \cdot \vec{r} \qquad [4]$$

y de [2] se llega a:

$$\lambda_i \mu_i = \frac{-\pi(P_0) - \lambda_i \cdot \pi(\vec{r}) - \mu_i \cdot \pi(\vec{u}_0)}{\pi(\vec{r})} \qquad i = 1, 2$$

Sustituyendo en [4] obtenemos el vector:

$$\overrightarrow{X_1^* X_2^*} = (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \vec{r} + (\mu_2 - \mu_1) \cdot \vec{u}_0 + (\lambda_2\mu_2 - \lambda_1\mu_1) \cdot \vec{r} =$$
$$= (\mu_2 - \mu_1) \left[\vec{u}_0 - \frac{\pi(\vec{u}_0)}{\pi(\vec{r})} \cdot \vec{r} \right]$$

Definición 3: Dados dos puntos P y S, y dos planos $\neq_1$ y $\neq_2$, se escribirá $\neq_{12}(P, S)$ para designar el valor del determinante:

$$\text{p}_{12}(P,S) = \begin{vmatrix} p_1(P) & p_1(S) \\ p_2(P) & p_2(S) \end{vmatrix}$$

Definición 4: Dados dos vectores $\vec{r}$ y $\vec{u}$, y dos planos $\neq_1$ y $\neq_2$, se escribirá $\neq_{12}(\vec{r}, \vec{u})$ para designar el valor del determinante:

$$\text{p}_{12}(\vec{r},\vec{u}) = \begin{vmatrix} p_1(\vec{r}) & p_1(\vec{u}) \\ p_2(\vec{r}) & p_2(\vec{u}) \end{vmatrix}$$

Definición 5: Dados un punto P y un vector $\vec{r}$, y dos planos $\neq_1$ y $\neq_2$, se escribirá $\neq_{12}(P, \vec{r})$ para designar el valor del determinante:

$$\text{p}_{12}(P,\vec{r}) = \begin{vmatrix} p_1(P) & p_1(\vec{r}) \\ p_2(P) & p_2(\vec{r}) \end{vmatrix}$$

Proposición 4: El punto X^* de intersección de la recta r^*, obtenida proyectando r desde S sobre el plano $\neq_1$, con otro plano $\neq_2$, viene dado por la siguiente expresión:

$$X^* = P_0 + \frac{\text{p}_{12}(P_0, \vec{u}_0)}{\text{p}_{12}(\vec{u}_0, \vec{r})} \cdot \vec{r} + \frac{\text{p}_{12}(\vec{r}, P_0)}{\text{p}_{12}(\vec{u}_0, \vec{r})} \cdot \vec{u}_0 \qquad [5]$$

Demostración: En virtud de [1], X^* tendrá la expresión:

$$X^* = P_0 + l \cdot \vec{r} + m \cdot \vec{u}_0 + l\, m \cdot \vec{r}$$

o su equivalente:

$$X^* = P_0 + l \cdot (1 + m) \cdot \vec{r} + m \cdot \vec{u}_0$$

Sustituyendo a la vez en $\neq_1$ y $\neq_2$, llegamos al sistema:

$$\begin{cases} p_1(X^*) = 0 = p_1(P_0) + l \cdot p_1(\vec{r}) + m \cdot p_1(\vec{u}_0) + l\, m \cdot p_1(\vec{r}) = 0 \\ p_2(X^*) = 0 = p_2(P_0) + l \cdot p_2(\vec{r}) + m \cdot p_2(\vec{u}_0) + l\, m \cdot p_2(\vec{r}) = 0 \end{cases}$$

de donde se despejan λ y μ, y se calcula $(1 + \mu)$.

Relojes de sol de cuadrante horizontal

Estas piezas suelen colocarse en suelos o jardines con una finalidad de capricho u ornamental. Como se demostrará más adelante, su varilla ha de orientarse *paralela al eje polar de la Tierra*, ello requiere darle una inclinación respecto al plano horizontal igual a la latitud φ del lugar en el que se ubique el reloj (véase la figura 2).

La base del planteamiento geométrico para su estudio es la figura 4. En esta figura, se ha construido un sistema de referencia con el origen en el extremo O del gnomon. El plano XY es el plano del horizonte del lugar y R es la distancia del Sol al origen del sistema de referencia.

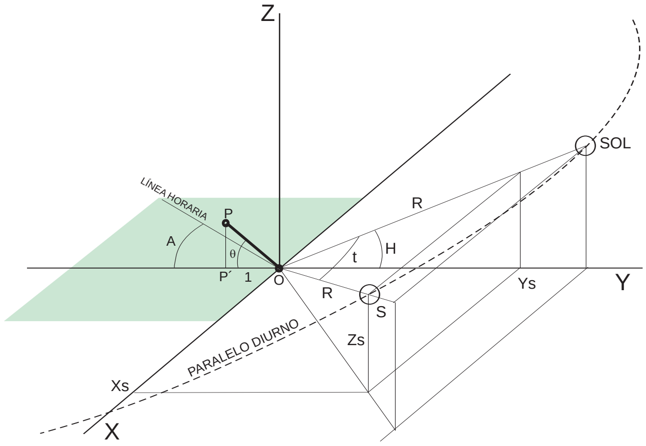


Figura 4. Cuadrante horizontal

Para simplificar el análisis se ha supuesto que el Sol se mueve de manera uniforme por el paralelo diurno correspondiente a los equinoccios (ver figura 1). Al final de este trabajo se indicará la forma de extender el estudio a cualquier paralelo diurno. Así mismo, la distancia Sol-Tierra, R, se considera constante en el transcurso de cada día. Estos supuestos no se dan en la realidad y son causantes del funcionamiento impreciso de los relojes solares.

El ángulo horario se nota con la letra t, y se supondrá medido a partir del instante en que el Sol culmina sobre el horizonte (Mediodía). La altura máxima del Sol sobre el horizonte se nota con la letra H, y en los equinoccios esta altura tiene el valor $H = 90 - \varphi$, como ya se ha dicho anteriormente.

En el sistema de referencia tomado, el plano del horizonte $\neq$ se confunde con el plano XY, cuya ecuación es:

$$\neq\!: z = 0$$

La sombra del gnomon en la hora t, denominada *línea horaria t*, se obtiene proyectando desde S la recta OP sobre el plano $\neq$, esta línea horaria forma un ángulo A con el semieje negativo de referencia OY, también llamado *ángulo horario t*. Dado que todas las líneas horarias pasan por la base del gnomon, el único requisito para construir un cuadrante horizontal será determinar el ángulo A en cada una de las horas de soleamiento.

Según la proposición 3, cualquier sombra tendrá la ecuación:

$$X^* = P_0 + \lambda \cdot \vec{r} + \mu \cdot \vec{u}_0 + \lambda \mu \cdot \vec{r}$$

y el vector de dirección:

$$\vec{r}^* = \vec{u}_0 - \frac{\pi(\vec{u}_0)}{\pi(\vec{r})} \cdot \vec{r}$$

En nuestro sistema de referencia, se tiene:

$$P_0 = O = (0, 0, 0);$$

$$\vec{r} = (x_r, y_r, z_r) = \vec{OP} = (0, -1, \ tg\theta);$$

$$\vec{u}_0 = \vec{SO} = (-x_s, -y_s, -z_s)$$

siendo

$$S = (x_S, y_S, z_S) = \\ = (R\,\mathrm{sen}t, \ R\cos t \cos H, \ R \cos t\, \mathrm{sen} H)$$

las coordenadas del Sol en la hora t. Utilizando estos datos, obtenemos:

$$\vec{r} = (0, -1, \ \mathrm{tg}\theta)$$

$$\vec{u}_0 = (-x_S, -y_S, -z_S) = \\ = (-R\mathrm{sen}t, -R\cos t \cos H, -R\cos t\,\mathrm{sen}H)$$

$$P_0 = (0, 0, 0)$$

$$\pi(\vec{r}) = \vec{N} \circ \vec{r} = (0, \ 0, \ 1) \circ (0, -1, \ \mathrm{tg}\theta) = \mathrm{tg}\theta$$

$$\pi(\vec{u}_0) = \vec{N} \circ \vec{u}_0 = -z_S$$

$$\vec{r}^* = \vec{u}_0 - \frac{\pi(\vec{u}_0)}{\pi(\vec{r})} \cdot \vec{r} \quad = (-x_S, -y_S, -z_S) + \frac{z_S}{\mathrm{tg}\theta} \cdot (0, -1, \mathrm{tg}\theta) =$$

$$= (-x_S, -y_S - \frac{z_s}{\mathrm{tg}\theta}, 0)$$

El ángulo A se determina inmediatamente a partir de lo anterior, llevado a la figura 5

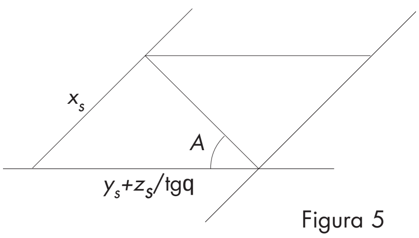


Figura 5

$$\mathrm{tg}\, A = \frac{x_s}{y_s + \frac{z_s}{tg\theta}} = \frac{\mathrm{tg}\, t}{\cos H + \frac{\mathrm{sen} H}{\mathrm{tg}\theta}} = \mathrm{tg}\, t \cdot \mathrm{sen}\varphi \qquad [6]$$

habiendo sustituido $H = 90 - \varphi$ y $\theta = \varphi$.

Consultando los mapas del Servicio Geográfico del Ejército se pueden establecer las coordenadas geográficas de la ciudad de Úbeda en 38° 00' 45" de latitud norte y 3° 22' 00" de longitud oeste.

Mediante la fórmula [6] se puede elaborar la tabla de ángulos de las líneas horarias para un cuadrante horizontal:

HORA(de la tarde)	0	1	2	3	4	5	6
t	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
Ángulos (*A*)	0°	9,4°	19,6°	31,6°	46,8°	66,5°	90°

No existe ningún cuadrante de este tipo en la ciudad de Úbeda, lo cual da la oportunidad para adornar con ellos alguna plaza o jardín de esta hermosa ciudad monumental.

Relojes de sol de cuadrante vertical

Son los más extendidos y es frecuente verlos adornando fachadas de ayuntamientos, iglesias, palacios, etc.

A veces, se construyen sobre piezas portátiles de mármol, cerámica, etc. para permitir orientar exactamente su varilla paralela al eje polar, en la dirección Norte-Sur. Así es el reloj ubicado sobre el remate de un contrafuerte cilíndrico en la portada sur de la iglesia de San Nicolás de Úbeda.

Es raro encontrar fachadas perfectamente orientadas al Sur. Lo normal es que formen un cierto ángulo α con la línea Este-Oeste, al que se suele llamar ángulo de azimut de la fachada.

Su análisis geométrico es similar al del cuadrante horizontal, pero ahora, el plano de proyección ≠ es la pared vertical en la que se fija el gnomon (figura 6), cuya ecuación viene dada por:

$$\neq: x \cdot \mathrm{tg}\alpha + y = 0$$

Reloj vertical.
Iglesia de San Nicolás de Úbeda (Jaén)

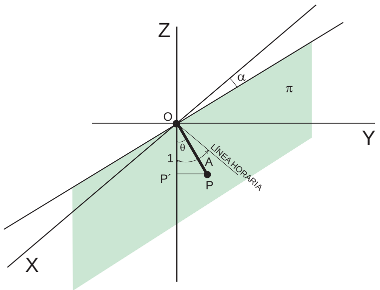


Figura 6.
Cuadrante vertical

El diseño del cuadrante vertical sólo requiere la determinación del ángulo A para cada línea horaria.

Como en el apartado anterior, cualquier sombra tendrá la ecuación:

$$X^* = P_0 + \lambda \cdot \vec{r} + \mu \cdot \vec{u}_0 + \lambda\mu \cdot \vec{r}$$

y el vector de dirección:

$$\vec{r}^* = \vec{u}_0 - \frac{\pi(\vec{u}_0)}{\pi(\vec{r})} \cdot \vec{r}$$

Con respecto a la referencia de la figura 6, se tiene:

$$P_0 = O = (0,\ 0,\ 0);$$

$$\vec{r} = (x_r,\ y_r,\ z_r) = \vec{OP} = (0,\ \mathrm{tg}\,\theta,\ -1);$$

$$\vec{u}_0 = \vec{SO} = (-x_s,\ -y_s,\ -z_s)$$

siendo

$$S = (x_s,\ y_s,\ z_s) = (R\,sen t,\quad R\cos t \cos H,\quad R\cos t\ sen H)$$

las coordenadas del Sol en la hora t. Utilizando estos datos, obtenemos:

$$\pi(\vec{r}) = \vec{N} \circ \vec{r} = (\mathrm{tg}\,\alpha,\ 1,\ 0) \circ (0,\ \mathrm{tg}\,\theta,\ -1) = \mathrm{tg}\,\theta$$

$$\pi(\vec{u}_0) = \vec{N} \circ \vec{u}_0 = -x_S \cdot \mathrm{tg}\,\alpha - y_s$$

$$\vec{r}^* = \left(-x_S,\ x_s \cdot \mathrm{tg}\,\alpha,\ -z_s - \frac{x_s \cdot \mathrm{tg}\,\alpha + y_s}{\mathrm{tg}\,\theta} \right)$$

$$\mathrm{tg}\,A = \frac{\sqrt{x_s^2 + x_s^2 \cdot \mathrm{tg}^2\alpha}}{z_s + \dfrac{x_s \cdot \mathrm{tg}\,\alpha + y_s}{\mathrm{tg}\,\theta}} \qquad [7]$$

Sustituyendo las coordenadas de S en [7] y reagrupando convenientemente, se llega a:

$$\mathrm{tg}\ \mathrm{A} = \frac{1}{M + N \cdot \mathrm{cotg}\ t}$$

Donde M y N son constantes dependientes de la ubicación del reloj y de la inclinación de la varilla:

$$\mathrm{M} = sen\,\alpha \cdot \cot g\theta$$

$$N = \cos\alpha \cdot (sen H + \cot g\theta \cdot \cos H)$$

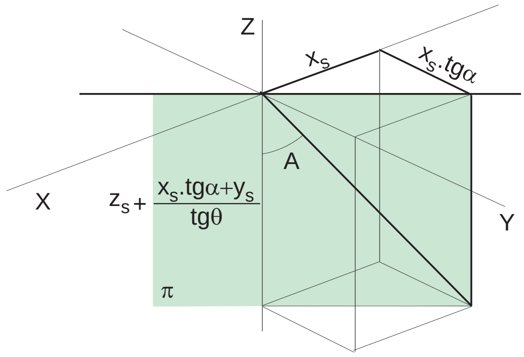
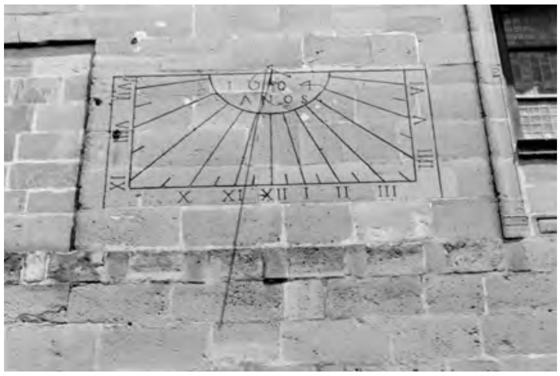


Figura 7. Cuadrante vertical declinante

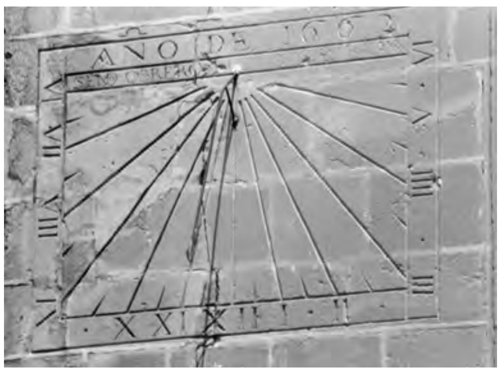
Si la pared vertical no tuviese declinación (α = 0) y la varilla se orientase con un ángulo θ = 90 – φ, entonces, asumiendo que H = 90 – φ, tendremos:

$$\mathrm{tg}\ A = \cos\varphi \cdot \mathrm{tg}\ t$$

Un ejemplo excelente de reloj declinante (α ≅ 6°)se encuentra en la pared sur del Ayuntamiento Viejo de Úbeda, y otro ejemplar, sin declinación, se halla en la Capilla del Salvador.



Reloj vertical declinante. Ayuntamiento Viejo. Úbeda



Reloj vertical. Capilla de El Salvador. Úbeda

Relojes de cuadrante occidental u oriental

Estas piezas se hallan ubicadas en los muros o fachadas orientadas al Oeste (relojes occidentales) o al Este (relojes orientales). Su varilla ha de colocarse paralela al plano del cuadrante para mantener la orientación paralela al eje polar *PP'*.

Ambos modelos pueden contemplarse en las paredes de las dos torres que flanquean la fachada principal del Hospital de Santiago de Úbeda (figura 8).

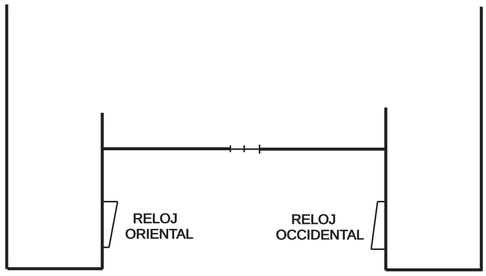
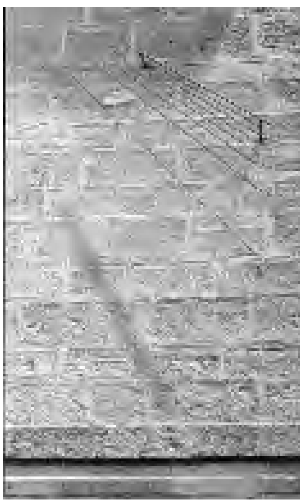


Figura 8. Relojes del Hospital de Santiago

La fachada principal de este monumento está orientada perfectamente al sur; sin embargo, al examinar los relojes se ve que las grapas que sujetan la varilla a la pared son de distinta longitud, lo que conlleva una cierta inclinación respecto a la meridiana local. Este ángulo de inclinación o azimut de fachada, como se suele llamar, se designará en el análisis con la letra griega β.



Reloj occidental.
Hospital de Santiago
Úbeda (Jaén)

Es probable que el diseñador de estos relojes supusiera que la fachada principal no se orientaba exactamente en la dirección norte-sur, por lo cual introdujo la desviación β para conseguir tal orientación.

Estudio del reloj occidental

Nos serviremos de la figura 9 para este propósito. En esta figura, se ha construido un sistema de referencia con el origen en el extremo O del gnomon. El plano *XY* es el plano del horizonte del lugar; *R* es la distancia del Sol al origen del sistema de referencia.

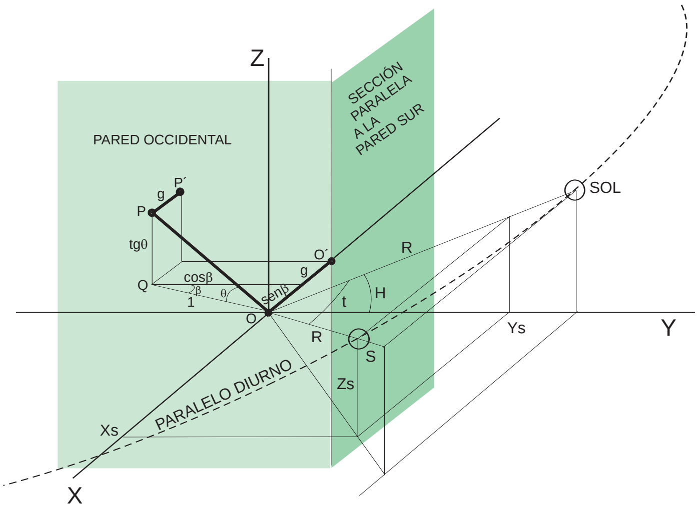


Figura 9. Reloj occidental

La pared occidental se llamará plano $\neq_1$, y en el sistema de referencia tomado tiene la ecuación:

$$\neq_1 : x + g + \mathrm{sen}\beta = 0$$

La sección paralela a la pared sur por la grapa O' se llamará plano $\neq_2$, y su ecuación es:

$$\neq_2 : y = 0$$

La sombra del gnomon se obtiene proyectando desde *S* la recta *OP* sobre el plano $\neq_1$. Por tanto, según la proposición 3, esta sombra tendrá la ecuación:

$$X^* = P_0 + l \cdot \vec{r} + m \cdot \vec{u}_0 + l\, m \cdot \vec{r}$$

para la cual se ha tomado:

$$P_0 = O; \quad \vec{r} = (x_r, y_r, z_r) = \vec{OP} = (-\,sen\mathbf{b}, -\cos\mathbf{b}, tg\mathbf{q});$$

$$\vec{u}_0 = \vec{SO} = (-\,x_s, -\,y_s, -\,z_s)$$

siendo

$$S = (x_s, y_s, z_s) = (R\,sent, \quad R\cos t\cos H, \quad R\cos t\,senH)$$

las coordenadas del Sol en la hora *t*.

La sombra de la varilla, proyectada sobre la pared occidental a las t horas es la *línea horaria t*, corta a la vertical que pasa por la grapa O´ en un punto X_t^* y forma un ángulo A con dicha vertical, también llamado ángulo horario t (ver figura 10).

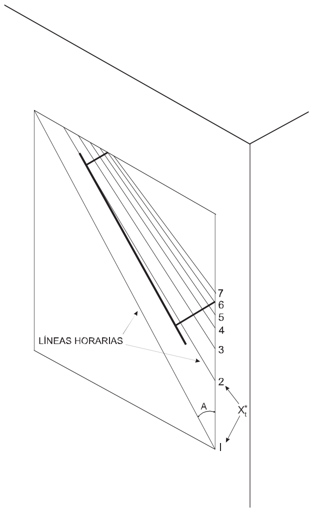


Figura 10

Una vez elegida la varilla y fijada por las grapas a la pared según un ángulo θ de inclinación, el diseño del reloj queda completamente definido calculando la distancia vertical de los puntos horarios respecto a la grapa O', la cual coincide con la coordenada z^* de los puntos horarios X_t^* y determina el lugar donde se marcan las lecturas de las horas; el otro dato necesario es el ángulo A de las líneas horarias, para t = 15°, 30°, 45°, etc. ya que con estos dos datos se podrán marcar sobre el cuadrante las líneas horarias y sus correspondientes lecturas. Con los datos de la figura 9, obtenemos:

$$\vec{r} = (-\,sen\beta,\ -\cos\beta,\ tg\theta)$$

$$\vec{u}_0 = (-x_s,\ -y_s,\ -z_s) = (-R\,sent,\ -R\cos t\cos H,\ -R\cos t\,senH)$$

$$P_0 = (0,0,0)$$

$$\pi_1(P_0) = 0 + \gamma + sen\beta = \gamma + sen\beta$$

$$\pi_1(\vec{r}) = \vec{N}_1 \circ \vec{r} = (1,0,0)\circ(-\,sen\beta,\ -\cos\beta,\ tg\theta) = -\,sen\beta$$

$$\pi_1(\vec{u}_0) = \vec{N}_1 \circ \vec{u}_0 = -\,Rsent$$

$$\pi_2(P_0) = 0$$

$$\pi_2(\vec{r}) = \vec{N}_2 \circ \vec{r} = (0,1,0)\circ(-\,sen\beta,\ -\cos\beta,\ tg\theta) = -\cos\beta$$

$$\pi_2(\vec{u}_0) = \vec{N}_2 \circ \vec{u}_0 = -\,R\cos t\cos H$$

$$\pi_{12}(P_0,\vec{u}_0) = \begin{vmatrix} \pi_1(P_0) & \pi_1(\vec{u}_0) \\ \pi_2(P_0) & \pi_2(\vec{u}_0) \end{vmatrix} = -\,R\cos t\cos H\cdot(\gamma + sen\beta)$$

$$\pi_{12}(\vec{r},P_0) = \begin{vmatrix} \pi_1(\vec{r}) & \pi_1(P_0) \\ \pi_2(\vec{r}) & \pi_2(P_0) \end{vmatrix} = \cos\beta\cdot(\gamma + sen\beta)$$

$$\pi_{12}(\vec{u}_0,\vec{r}) = \begin{vmatrix} \pi_1(\vec{u}_0) & \pi_1(\vec{r}) \\ \pi_2(\vec{u}_0) & \pi_2(\vec{r}) \end{vmatrix} = -\,R\cos t\cos Hsen\beta + Rsent\cos\beta$$

Sustituyendo en [5], la coordenada z^* de X^*_t valdrá:

$$z^* = \frac{-\,R\cos t\cos H\cdot(\gamma + sen\beta) - R\cos tsenH\cos\beta\cdot(\gamma + sen\beta)}{Rsent\cos\beta - R\cos t\cos Hsen\beta} =$$

$$= \frac{M}{N - tgt} \qquad [8]$$

Siendo M y N dos constantes dependientes de las características constructivas del reloj y del lugar de su ubicación:

$$M = \frac{(\gamma + sen\beta)}{\cos\beta}\cdot(\cos Htg\theta + \cos\beta senH) \qquad [9]$$

$$N = \cos H\,tg\beta \qquad [10]$$

La determinación de estas dos constantes nos permite situar de manera precisa las lecturas horarias sobre la vertical de la grapa O'. Una aproximación para el reloj occidental del Hospital de Santiago sería:

$$M \approx \frac{(0{,}10 + sen\,4°)}{\cos 4°}\cdot(\cos 52°\cdot tg38° + \cos 4°\cdot sen\,52°) =$$

$$= 0{,}2156234484$$

$$N \approx \cos 52°\cdot tg4° = 0{,}04305124421$$

Con estas constantes y la fórmula [8] se crea la tabla adjunta de distancias verticales a la grapa O' en cada hora.

HORA	1	2	3	4	5	6	7
t	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°
Distancia (cm)	–96	–40	–22	–13	–6	0	+5

Examinando las fórmulas [8], [9] y [10] se constata que la distancia de las líneas horarias a la grapa O' es fuertemente dependiente de la longitud de la grapa menor (g) y del ángulo de inclinación β. Otra observación de interés concierne a la simplificación que tiene lugar cuando β = 0; en cuyo caso, la varilla iría paralela a la pared y z^* sería:

$$z^* = \frac{-g}{\cos\varphi \cdot tg\,t}$$

Como se ha dicho, además de las distancias verticales a la grapa O', se precisa conocer el ángulo de inclinación A de cada línea horaria con la vertical. Dicho ángulo será el mismo que el formado por un vector de dirección de la sombra proyectada r^* con la vertical. Si se utiliza como vector de dirección de r^* el [3], se tendrá:

$$\cos A = \frac{\left|\vec{k} \circ \vec{r}^*\right|}{\left\|\vec{r}^*\right\|} = \frac{\left|\vec{k} \circ \vec{u}_0 - \dfrac{\pi_1(\vec{u}_0)}{\pi_1(\vec{r})} \cdot \vec{k} \circ \vec{r}\right|}{\left\|\vec{u}_0 - \dfrac{\pi_1(\vec{u}_0)}{\pi_1(\vec{r})} \cdot \vec{r}\right\|} =$$

$$= \frac{A_0 + A_1 \cdot tg\,t}{\sqrt{B_0 + B_1 \cdot tg\,t + B_2 \cdot tg^2 t}} \qquad [11]$$

Siendo A_0, A_1, B_0, B_1 y B_2 constantes dependientes de las características constructivas del reloj:

$$A_0 = sen\beta\, senH \cong sen4° \cdot sen52° = 0{,}0549688$$

$$A_1 = tg\theta \cong tg38° = 0{,}7812856$$

$$B_0 = sen^2\beta \cong sen^2 4° \cong 0$$

$$B_1 = 2sen\beta \cdot (senH\, tg\theta - \cos H \cos\beta) \cong 0$$

$$B_2 = \cos^2\beta + tg^2\theta \cong 1{,}6055412$$

Al igual que antes, mediante la fórmula [11] se puede elaborar la tabla de ángulos de las líneas horarias:

HORA	1	2	3	4	5	6	7
t	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°
Ángulos (A)	40°	46°	49°	50°	51°	52°	52,7°

También hay una versión simplificada de [11] cuando β = 0:

$$\cos A = sen\theta \Rightarrow A = 90° - \theta$$

El estudio del reloj oriental es en todo similar al del reloj occidental, por ello se omite su análisis.

Consideraciones finales

La generalización del estudio de los relojes de sol para un paralelo diurno cualquiera, que tenga cierta declinación δ respecto al ecuador, no presenta excesivas complicaciones. Para este fin, el sistema de referencia a adoptar sería el mismo que el utilizado en los apartados anteriores, pero la altitud máxima H del Sol sobre el horizonte dependerá de su declinación δ (figura 11):

$$H = 90 - \varphi \pm \delta$$

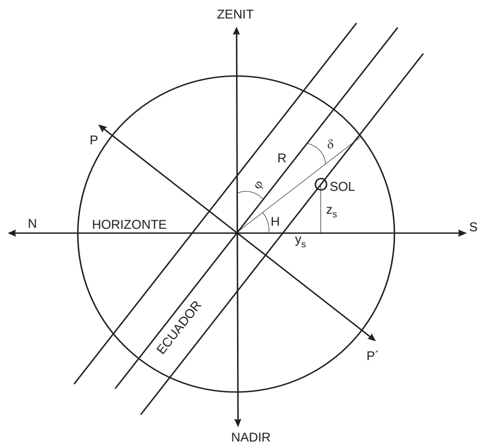


Figura 11

Las coordenadas del Sol en este sistema de referencia, en una hora dada t, tendrán las siguientes expresiones:

$$x_S = R \cdot \cos\delta \cdot sen\,t \qquad [12]$$

$$y_S = R \cdot \cos\delta \cdot \cos t \cdot sen\varphi + R \cdot sen\delta \cdot \cos\varphi \qquad [13]$$

$$z_S = R \cdot \cos\delta \cdot \cos t \cdot \cos\varphi - R \cdot sen\delta \cdot sen\varphi \qquad [14]$$

las cuales coinciden con las anteriormente utilizadas si δ = 0.

A modo de conclusión, seguidamente se aplica este planteamiento general para obtener algunos resultados importantes para la Gnomónica; tales son:

a) la *invariabilidad de las líneas horarias* de los relojes de sol, con independencia del día en el que sean observados, lo que constituye la razón de ser de la Gnomónica; y

b) las formas geométricas de las sombras arrojadas por las varillas verticales.

Invariabilidad de las líneas horarias

a) Relojes horizontales

Remitiéndonos a [6] y figura 5, las líneas horarias quedan determinadas mediante el ángulo *A* tal que

$$\text{tg } A = \frac{x_s}{y_s + \dfrac{z_s}{\text{tg}\,\theta}}$$

Sustituyendo [12], [13] y [14] en [6], se tiene:

$$\text{tg } A = \frac{R\cdot\cos\delta\cdot \text{sen}\, t}{R\cdot\cos\delta\cdot\cos t\cdot\text{sen}\varphi + R\cdot\text{sen}\delta\cdot\cos\varphi + \dfrac{R\cdot\cos\delta\cdot\cos t\cdot\cos\varphi - R\cdot\text{sen}\delta\cdot\text{sen}\varphi}{\text{tg}\theta}}$$

Si δ = 0, la expresión anterior se transforma en:

$$\text{tg } A = \frac{1}{\cot g\ t\cdot(\text{sen}\varphi + \cos\varphi\cdot\cot g\theta)} \qquad [15]$$

Si δ ↑ 0, se puede arreglar en la forma:

$$\text{tg } A = \frac{1}{\cot g\ t\cdot(\text{sen}\varphi + \cos\varphi\cdot\cot g\theta) + \cos ec\, t\cdot tg\delta\cdot(\cos\varphi - \text{sen}\varphi\cdot\cot g\theta)}$$

Por tanto, los ángulos [15] y [16] sólo son iguales si θ = φ. De ahí, se comprende la necesidad de colocar el gnomon del reloj horizontal con una inclinación igual a la latitud del lugar en el que vaya a ubicarse.

b) Relojes verticales

Volviendo a [7] y figura 7, las líneas horarias quedan determinadas mediante el ángulo *A* tal que

$$\text{tg } A = \frac{x_s\cdot\sec\alpha}{z_s + (x_s\cdot tg\alpha + y_s)\cdot\cot g\theta}$$

Sustituyendo [12], [13] y [14] en la expresión anterior y reagrupando sus términos, obtenemos:

$$\text{tg } A = \frac{1}{\text{sen}\alpha\cdot\cot g\theta + \cos\alpha\cdot\{\cot g\, t\cdot(\cos\varphi + \text{sen}\varphi\cdot\cot g\theta) + \cos ec\, t\cdot tg\delta\cdot(\cos\varphi\cdot\cot g\theta - \text{sen}\varphi)\}}$$

Para que los ángulos con δ = 0 y con δ ↑ 0 coincidan, ahora, se requiere que θ = 90 – φ, lo que implica que el gnomon debe inclinarse con la vertical un ángulo igual a la colatitud del lugar.

En definitiva, los resultados anteriores prueban que en ambos casos las varillas deben orientarse paralelamente al eje terrestre.

Forma de la sombra de una varilla vertical

Consideremos un sistema de referencia como el de la figura 4, con el gnomon *OP* dispuesto verticalmente. Proyectando desde el Sol el extremo *P* de la varilla, se obtiene la «sombra» *P** sobre el plano horizontal:

$$P^* = O + \lambda\cdot\vec{r} + \mu\,\vec{u} + \lambda\mu\,\vec{r}$$

Siendo:

$O = (0, 0, 0)$

$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = (0,0,1)$

$\vec{u} = \overrightarrow{SO} = (-x_s, -y_s, -z_s)$

λ = 1

≠ : $z = 0$

$$\mu = \mu(\lambda) = \frac{-\pi(O) - \lambda\cdot\pi(\vec{r})}{\pi(\vec{u}) + \lambda\cdot\pi(\vec{r})} =$$

$$= \frac{-0 - 1\cdot 1}{-z_s + 1\cdot 1} = \frac{1}{z_s - 1} \quad \text{según [2]}$$

Con esto, llegamos a las siguientes coordenadas para *P**:

$$x^* = \frac{x_s}{1 - z_s} \qquad [17]$$

$$y^* = \frac{y_s}{1 - z_s} \qquad [18]$$

$$z^* = 0$$

Sustituyendo [13] y [14] en [18], y despejando cos *t*:

$$\cos t = \frac{(1 + R\cdot\text{sen}\delta\cdot\text{sen}\varphi)\cdot y^* - R\cdot\text{sen}\delta\cdot\cos\varphi}{R\cdot\cos\delta\cdot(\text{sen}\varphi + y^*\cdot\cos\varphi)} = \frac{A\cdot y^* - B}{D} \qquad [19]$$

Análogamente, utilizando [12], [14] y [19] en [17]:

$$\text{sen}\, t = \frac{R\cdot\text{sen}\delta + \text{sen}\varphi}{R\cdot\cos\delta\cdot(\text{sen}\varphi + y^*\cdot\cos\varphi)}\cdot x^* = \frac{C}{D}\cdot x^*$$

Eliminamos el parámetro *t*, escribiendo:

$$1 = \text{sen}^2 t + \cos^2 t = \frac{C^2\cdot x^{*2}}{D^2} + \frac{A^2\cdot y^{*2} + B^2 - 2ABy^*}{D^2} = 1$$

Reagrupando términos y desarrollando D^2, tenemos la cónica:

$$C^2\cdot x^{*2} + (A^2 - R^2\cdot\cos^2\delta\cdot\cos^2\varphi)\cdot y^{*2} -$$

$$-2\cdot(AB + R^2\cdot\cos^2\delta\cdot\text{sen}\varphi\cdot\cos\varphi)\cdot y^* + (B^2 - R^2\cdot\cos^2\delta\cdot\text{sen}^2\varphi) = 0$$

cuyo género viene determinado por el signo del discriminante Δ:

$$\Delta = -4\cdot C^2\cdot(A^2 - R^2\cdot\cos^2\delta\cdot\cos^2\varphi) \qquad [20]$$

De [20] se deduce que el signo de Δ sólo depende del que tenga la expresión $A^2 - R^2 \cdot \cos^2\delta \cdot \cos^2\varphi$; por tanto, si esta expresión es positiva la cónica en cuestión será del género elipse, ello requerirá que se cumpla:

$$A^2 - R^2 \cdot \cos^2 \delta \cdot \cos^2 \varphi > 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cos\varphi < \frac{A}{R \cdot \cos\delta} = \frac{1 + R \cdot \operatorname{sen}\delta \cdot \operatorname{sen}\varphi}{R \cdot \cos\delta}$$

Teniendo en cuenta que R es muy grande y el rango de valores posibles para δ y φ, se llega, finalmente, a la conclusión de que la cónica anterior es una elipse cuando $\cot g\varphi < \operatorname{tg}\delta$, lo que implica que φ ha de ser mayor que 90 – δ, para cualquiera que sea el valor de δ. Es decir, la sombra del extremo de una varilla vertical es del género elipse en aquellos lugares cuya latitud supera los 66° 32’ 30´’. Por el contrario, la sombra de la varilla describirá una hipérbola si la latitud es inferior a este valor.

Juan Ortega
IES San Juan de la Cruz.
Úbeda (Jaén).
Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
«Thales»

Bibliografía

BALBUENA, L., D. DE LA COBA y L. CUTILLAS (1996): «La medida del tiempo a través del tiempo», *SUMA*, N.° 23, 33-38.

BROWN, Ll.A. (1983): «La longitud». en J.R. NEWMAN: *Sigma. El mundo de las Matemáticas*, Tomo II, Grijalbo. Barcelona, 58-96.

BUJÁN, D., Ana OTERO y Antón OTERO (1994): «A variabel sombra do sol», *SUMA*, N.° 17, 37-42

DOMÉNECH, J. (1991): *Trazado y construcción de relojes de sol*, Aguaclara, Alicante.

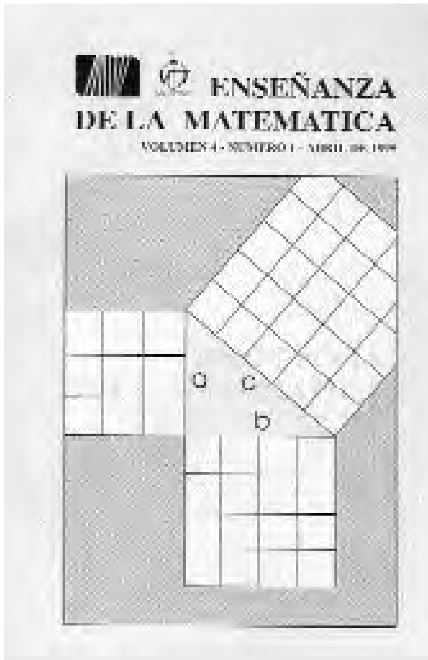
IZQUIERDO, F. (1969): *Geometría descriptiva*, Dossat, Madrid.

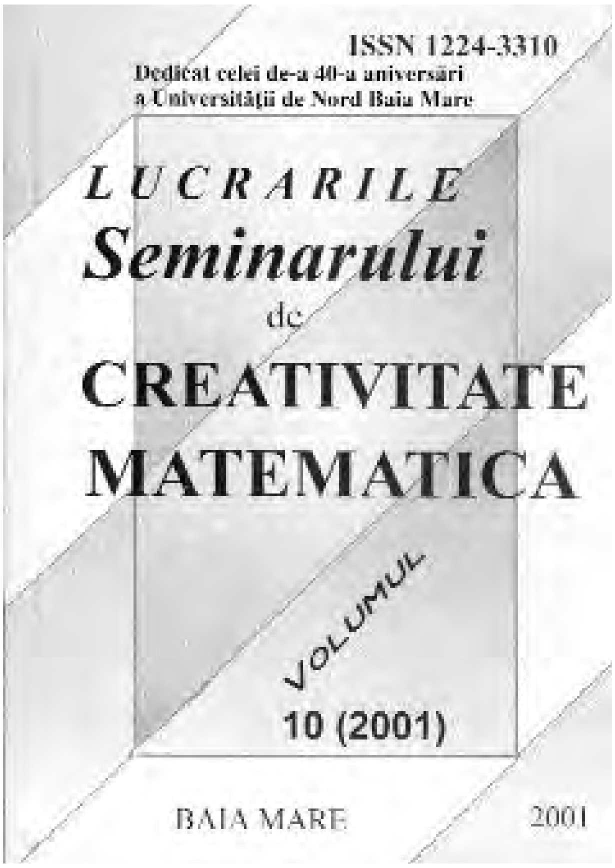
DEL RÍO, J. (1994): *Lugares Geométricos. Cónicas*, Síntesis, Madrid.

RIVAS, N. (1998): *Los cuadrantes solares de la ciudad de Úbeda*. Edita el autor.

SÁNCHEZ, J.L. (1998): «Matemáticas aplicadas a la Astronomía: tiempo que transcurre entre la salida y la puesta del Sol en los solsticios», *SUMA*, N.° 29, 35-41.

SERVICIO GEOGRÁFICO DEL EJÉRCITO (1991): *Mapa Militar de España. E 1:50.000 Hoja 20-36 (Úbeda)*, 4ª edición.





SUMA 40

junio 2002, pp. 87-90

Método de determinación de máximos y mínimos previo a la enseñanza del cálculo diferencial

Francisco Raúl Tomás Blanquer

IDEAS Y RECURSOS

En este artículo se obtiene un método de obtención de rectas tangentes a curvas polinómicas sin necesidad de conocer el cálculo de derivadas. Incluso no precisa conocimientos previos de trigonometría. El cálculo de máximos y mínimos es inmediato. El procedimiento que se presenta puede considerarse como una primera toma de contacto del estudiante, de manera inmediata, con los problemas con los que se va a encontrar posteriormente al estudiar el cálculo diferencial. Este método está pensado para incitar al alumno el interés por las derivadas.

UNA DE LAS PREOCUPACIONES de mi vida, como docente, es la de simplificar al máximo la exposición de temas de Matemáticas, hacerlos más asequibles al estudiante, que éste vea su utilidad desde el principio. Esto ya lo hice en la integración de funciones racionales. En el artículo que publiqué en la revista *Educación Matemática* (Tomás, 1995), propongo un método de descomposición más simple y rápido que los que existen. En muchos casos resulta mucho más efectivo que el método de Hermite.

En este trabajo me ocupo de presentar un procedimiento para calcular rectas tangentes, máximos y mínimos de funciones polinómicas sin necesidad de emplear el cálculo de derivadas. Como se verá a lo largo de este artículo, el estudiante tan sólo necesitará saber un poco de resolución de ecuaciones algebraicas, el triángulo de Tartaglia para desarrollar potencias de binomios y desenvolverse con cierta soltura tanto en la representación gráfica como en la representación algebraica de funciones polinómicas. Con todo esto, el principiante inmediatamente se ve inmerso de lleno en tales cuestiones, lo que le puede motivar en su profundización en el estudio de funciones no polinómicas.

En los actuales planes de estudio, los problemas de optimización en los que se usa el cálculo diferencial están enclavados en el Bachillerato. El abordaje de tales problemas es delicado y árido. Los estudiantes necesitan tener un considerable grado de abstracción que, en general, no poseen cuando se ponen en contacto con ellos por primera vez. El profesor dedica muchas clases enseñándoles a emplear las reglas de derivación. En muchas ocasiones realizan ejercicios abstractos, desprovistos de interés práctico. Esto produce una dejadez en el alumno que puede ser fatal a la hora de introducir los máximos y los mínimos con problemas interesantes. Cuando el estudiante se da cuenta de la utilidad del cálculo de derivadas, puede que ya sea tarde. El tema ya le desborda.

Sin embargo, el conocimiento de algunos de estos problemas puede resultar interesante, pues se podrían presentar en la vida no académica. Pongamos por caso el de un granjero que desea construir un corral de máxima superficie adosado a un muro con cierta longitud de valla.

En matemáticas, la resolución de estos problemas pasa generalmente por el cálculo de derivadas de funciones polinómicas que han de determinarse previamente. Se iguala la primera derivada a cero y se clasifican los posibles puntos singulares en máximos y mínimos.

También exponemos, con este trabajo, un procedimiento alternativo para resolver dichos problemas. Trataremos de presentar un método para determinar rectas tangentes a las gráficas de funciones polinómicas, sin hacer uso del cálculo diferencial. La optimización se logrará exigiendo la anulación del coeficiente de la x en la expresión algebraica de la recta para que su expresión gráfica sea horizontal, con lo que se obtienen ciertos valores que serán posibles máximos y mínimos. Para saber si son máximos o mínimos, se procederá tomando valores próximos a los obtenidos y comparándolos con ellos.

El método permite resolver casi de inmediato problemas de optimización con poco esfuerzo por parte del alumno. Luego, cuando se le introducen las derivadas, ya tiene cierta idea de la importancia de las mismas, pues se halla familiarizado con las cuestiones que va a estudiar con el nuevo procedimiento, no se le introducen de sorpresa. Las reglas de derivación no le van a resultar tan áridas, pues intuye que es una potente vía para tratar los problemas de optimización mucho más general.

Rectas tangentes a curvas polinómicas

Consideremos un sistema de ecuaciones formado por una ecuación de una función polinómica de segundo grado (parábola en la representación gráfica) y de una función polinómica de primer grado (recta).

$$y = ax^2 + bx + c$$
$$y = mx + n$$

Para que esta recta sea tangente a la parábola, el sistema formado por sus respectivas representaciones algebraicas debe tener solución y, además, doble, es decir el trinomio de segundo grado formado al igualar los segundos miembros del sistema tiene que ser un cuadrado perfecto:

$$ax^2 + b + c - mx - n = a(x - \alpha)^2$$

donde α es la solución doble.

Por tanto

$$ax^2 + b + c - a(x - \alpha^2) = mx + n = y$$

Trataremos de presentar un método para determinar rectas tangentes a las gráficas de funciones polinómicas, sin hacer uso del cálculo diferencial.

con lo que

$$ax^2 + bx + c - ax^2 + 2a\alpha x - a\alpha^2 = \\ = mx + n = y$$

Simplificando la expresión de la izquierda

$$(b + 2a\alpha)x + (c - a\alpha^2) = mx + n = y$$

y, por identificación de coeficientes indeterminados, obtenemos

$$m = b + 2a\alpha;\ n = c - a\alpha^2$$

con lo que conocemos la recta tangente en el punto de abscisa α.

A continuación expondremos dos ejemplos, en el primero el polinomio será mónico, no siéndolo en el segundo de ellos. Creemos que el profesor debe poner ejemplos con polinomios mónicos y no mónicos debido al gran protagonismo que tiene el coeficiente de la x de mayor grado.

Ejemplo 1

Hallar la expresión de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2 - 5x + 4$ en el punto de abscisa 3.

Como en este caso

$$a = 1;\ b = -5;\ c = 4;\ \alpha = 3;$$

por el resultado teórico que hemos obtenido anteriormente tendremos que la expresión algebraica de la recta tangente es $y = x - 5$.

Ejemplo 2

Hallar la expresión de la recta tangente a la gráfica de $y = 3x^2 - 10x + 14$ en el punto de abscisa 2.

En este caso

$$a = 3;\ b = -10;\ c = 14;\ \alpha = 2;$$

Con lo que la expresión de la recta tangente será $y = 2x + 2$.

Pasemos a continuación a intentar generalizar este cálculo para expresiones algebraicas de grado superior a 2. Consideremos la curva

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad [1]$$

Hemos de hallar una expresión polinómica de grado 2 cuya gráfica sea tangente a la gráfica de [1] en el punto de abscisa α.

Sea el trinomio

$$y = P_2(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$$

cuya gráfica no es preciso determinar para conseguir nuestro objetivo, pero para que ésta tenga un contacto de tercer orden con [1] debe verificarse

$$ax^3 + bx^2 + cx + d - (a_1x^2 + b_1x + c_1) = \\ = a(x - \alpha)^3$$

de donde

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = \\ = ax^3 + bx^2 + cx + d - a(x - \alpha)^3$$

con lo que

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = ax^3 + bx^2 + cx + d - \\ - ax^3 + 3a\alpha x^2 - 3a\alpha^2 x + a\alpha^3$$

Agrupando la expresión de la derecha

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = (b + 3a\alpha)x^2 + \\ + (c - 3a\alpha^2)x + (d + a\alpha^3)$$

Identificando los coeficientes hallaremos la expresión del polinomio $y = P_2(x)$ que es tangente en $x = \alpha$ a [1], bastará hallar su recta tangente en $x = \alpha$, por el procedimiento descrito anteriormente, pues ésta también es recta tangente en el citado punto a la gráfica de la curva [1].

Veamos dos ejemplos prácticos.

Ejemplo 3

Hallar la expresión de la recta tangente a la gráfica de $y_1 = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$ en el punto de abscisa 1.

Como en este caso

$$a_1 = 1;\ b_1 = -4;\ c_1 = 6;\ d_1 = -4;\ \alpha = 1; \\ b_1 - 3a_1\alpha = -1;\ c_1 - 3a_1\alpha^2 = 3; \\ d_1 + a_1\alpha^3 = -3;$$

Por tanto la curva tangente a la gráfica de

$$y_1 = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$$

es

$$y_2 = -x^2 + 3x - 3.$$

donde

$$a_2 = -1;\ b_2 = 3;\ c_2 = -3;\ \alpha = 1.$$

Y, procediendo como en los ejemplos 1 y 2, obtenemos

$$b_2 + 2a_2\alpha = 1;\ c_2 - a_2\alpha^2 = -2;$$

y, en consecuencia, la recta tangente será $y = x - 2$

...si sólo nos sale un extremo bastará elegir dos puntos, uno anterior y otro posterior al extremo, y obtener las imágenes de los mismos

Ejemplo 4

Hallar la expresión de la recta tangente a la gráfica de $y_1 = 2x^3 - 4x^2 + 6x - 4$ en el punto de abscisa 1.

En este caso

$$a_1 = 2;\ b_1 = -4;\ c_1 = 6;\ d_1 = -4;\ b_1 + 3a_1\alpha = 2; \\ c_1 - 3a_1\alpha^2 = 0;\ d_1 + a_1\alpha^3 = -2;$$

Por tanto la curva tangente a la gráfica de

$$y_1 = 2x^3 - 4x^2 + 6x - 4$$

es

$$y_2 = 2x^2 - 2$$

donde

$$a_2 = 2;\ b_2 = 0;\ c_2 = -2;\ \alpha = 1, \\ b_2 + 2a_2\alpha = 4;\ c_2 - a_2\alpha^2 = -4;$$

con lo que la recta tangente que obtenemos es $y = 4x - 4$.

De este modo se pueden determinar las rectas tangentes a cualquier curva polinómica. El procedimiento consistiría en ir calculando sucesivamente expresiones polinómicas de grado una unidad menor a la dada hasta conseguir la de primer grado, que será la recta tangente a la gráfica de todas ellas, y, en particular, a la inicial.

Máximos y mínimos

Fijándonos en la gráfica de las funciones polinómicas, sabemos que los máximos y mínimos que éstas alcanzan, cuando su dominio son todos los reales, coinciden con los puntos donde la recta tangente anula su pendiente. Esto quiere decir que la representación algebraica de la misma se reducirá a una constante. Por la propia definición de máximo y mínimo, tenemos que si sólo nos sale un extremo bastará elegir dos puntos, uno anterior y otro posterior al extremo, y obtener las imágenes de los mismos. Si estas imágenes son mayores que la del extremo en cuestión, tendremos un mínimo; en caso contrario, obtendríamos un máximo. Si nos salen varios extremos, procederemos de la misma manera. Los puntos que escogeremos, el anterior y el posterior, pertenecerán a un intervalo abierto, comprendido entre el extremo dado y otro extremo contiguo.

Un ejemplo aclarará esta idea: hallaremos los máximos y mínimos de la curva $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

Procedamos en primer lugar a determinar la recta tangente en $x = \alpha$:

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 1 - (x - \alpha)^3 = 3(\alpha - 1)x^2 - 3(\alpha^2 + 3)x + \alpha^3 + 1$$

Volvemos a aplicar el método al polinomio de segundo grado que nos ha salido:

$$3(\alpha-1)x^2 - 3(\alpha^2+3)x + \alpha^3 + 1 - 3(\alpha-1)(x-\alpha)^2 =$$
$$= (3\alpha^2 - 6\alpha - 9)x - 2\alpha^3 + 3\alpha^2 + 1$$

Para anular la pendiente de esta recta hemos de resolver la ecuación

$$3\alpha^2 - 6\alpha - 9 = 0$$

obtenemos como soluciones $\alpha_1 = 3$ y $\alpha_2 = -1$, que serán los posibles máximos o mínimos. Para α_1 obtenemos como valor en el eje de ordenadas $y_1 = -26$, y para α_2 obtenemos $y_2 = 6$. Sea el intervalo $(-1, 3)$. Escojamos el valor $\alpha^* = 2$, cuya imagen es $y^* = -21$. Como $y_1 < y^*$ tendremos que α_1 es un mínimo. Como $y^* < y_2$ tendremos que α_1 es un máximo.

Cabe decir, que como lo que buscamos en este trabajo es conseguir una motivación para los estudiantes que afronten el cálculo de derivadas, creemos que el profesor deberá proponer ejercicios con polinomios de grado menor o igual a 3, debido a que al anular el coeficiente de la x en la recta tangente a un polinomio de más de tercer grado, el alumno se encontrará con el problema de tener que hallar las raíces de un polinomio de grado mayor que dos, algo que podría resultar muy costoso y retrasaría, en demasía, estas intenciones motivadoras.

Resolvamos un problema de optimización en lo que aplicamos lo visto hasta ahora:

> Un granjero dispone de 60 metros de valla. Con ella y aprovechando un muro de piedra suficientemente largo que hay en su propiedad, quiere construir un corral rectangular adosado al muro, de la mayor superficie posible.

Tomemos como lados del rectángulo x e y, de manera que

$$2x + y = 60$$

La superficie será

$$S = x(60 - 2x) = -2x^2 + 60x$$

Por tanto $a = -2$, $b = 60$, $c = 0$, con lo que

$$m = b + 2a\alpha = 60 - 4\alpha \text{ y } n = c - a\alpha^2 = 2\alpha^2.$$

Luego la recta tangente que buscábamos es

$$y = (60 - 4\alpha)x + 2\alpha^2$$

Para encontrar los extremos habremos de resolver la ecuación $60 - 4\alpha = 0$, y obtenemos como solución $\alpha = 15$.

Escojamos el valor $\beta = 1$, cuya imagen es $y(\beta) = 58$.

La imagen de $\alpha = 15$ es $y(\alpha) = 450$.

Como $y(\beta) < y(\alpha)$ tenemos que $\alpha = 15$ es un máximo.

Veamos ahora un resumen de los pasos del algoritmo:

1.° Exigimos que el sistema formado por las expresiones algebraicas de una parábola y una recta tengan una solución doble en un punto de abscisa dado.

2.° Identificamos los coeficientes de ambos lados de la ecuación obtenida, consiguiendo así los parámetros de la recta tangente.

3.° Generalizamos este método para «parábolas» de grado superior.

4.° Este procedimiento nos conduce a resolver problemas de máximos y mínimos con curvas polinómicas.

La idea de este trabajo surgió resolviendo problemas de intersección de curvas polinómicas junto a estudiantes que me pidieron ayuda.

Comentarios finales

La introducción de máximos y mínimos siempre ha necesitado del conocimiento del cálculo diferencial. Conseguir llegar a su dominio es tarea bastante pesada, ya que el alumno no logra ver ninguna aplicación inmediata. Con este trabajo, intento que el alumno empiece por ver estas aplicaciones utilizando tan sólo algo que ya debe conocer, como es el dominio de las representaciones gráfica y algebraica de las funciones polinómicas.

La idea de este trabajo surgió resolviendo problemas de intersección de curvas polinómicas junto a estudiantes que me pidieron ayuda. Se sabe que intersecando rectas con parábolas obtenemos dos puntos de intersección como máximo. Si se aproximan estos dos puntos de intersección hasta confundirse en uno solo, la secante se convierte en una tangente. Esta idea no entraña ninguna dificultad para los alumnos al igual que el problema de encontrar los posibles máximos y mínimos, es decir, la anulación de la pendiente de la recta tangente anteriormente conseguida. La dificultad más grande que he tenido poniendo en práctica este método ha sido la de generalizar estas ideas primarias a «parábolas» de grado superior, la cual fue solventada con un par de ejemplos.

Al ser el algoritmo el mismo y repetitivo, tanto si la «parábola» es de segundo grado o de grado superior, por parte de los alumnos fue rápido y bastante fácil.

Francisco Raúl Tomás

SUMA 40
junio 2002, pp. 91-104

Experiencia didáctica en Matemáticas: construir y estudiar fractales

Juan C. Moreno-Marín

IDEAS Y RECURSOS

La introducción de los fractales lineales en las matemáticas de secundaria a través de una experiencia como ésta resulta sencillo y muy interesante. El diseño, la construcción y el estudio de figuras fractales planas constituyen el núcleo de la propuesta. En este trabajo se ordenan, describen y comentan muchas de las actividades realizadas con los estudiantes durante la experiencia.

UNA PARTE FUNDAMENTAL de la matemática, la geometría, estudia las propiedades de las formas y del espacio. En ella, la concepción geométrica más moderna, la geometría fractal se ha convertido en herramienta imprescindible para la descripción de objetos irregulares y el análisis de numerosos fenómenos complejos, aportando modelos matemáticos a muchas estructuras naturales.

Desarrollada a partir de la propuesta de B. Mandelbrot en los años setenta, los fractales lineales forman un grupo fundamental en esta geometría. Se describen mediante algoritmos de construcción o reglas de sustitución, que sólo cuando se aplican iterativamente a un objeto geométrico dan lugar al desarrollo de estructuras fractales. Un fractal lineal puede definirse con un conjunto de transformaciones lineales afines: reducciones, desplazamientos, rotaciones, reflexiones, y combinaciones de éstas.

Los fractales lineales son autosimilares, es decir, un pequeño fragmento cualquiera de ellos contiene una figura que, con el adecuado cambio de escala, es idéntica a la figura completa. Esto supone que cualquier parte de un fractal, por pequeña que sea, contiene toda la información relativa al mismo. Esa interrelación a distintas escalas se describe matemáticamente con el concepto de dimensión fractal.

Se presenta en este artículo una nueva propuesta para el aprendizaje de la geometría en la educación secundaria. Con esta experiencia se quiere contribuir a la enseñanza de las matemáticas, y en particular de la geometría, partiendo de motivaciones intuitivas y relaciones con lo concreto. Participando de muchas de las reflexiones renovadoras sobre la enseñanza de la geometría (Sánchez Vázquez, 1997; Figueiras, 2000), se propone aquí un conjunto amplio de actividades para el estudio de los fractales lineales, aportando ideas enriquecedoras con recursos didácticos al alcance de todos.

Esta propuesta quiere participar en el movimiento de recuperación de la enseñanza de la geometría, renovando su didáctica con motivaciones concretas mediante una aplicación de total actualidad. La incorporación de los fractales a las matemáticas escolares es muy interesante, pues combinando curiosidad, sencillez y belleza, permite enfocar la actividad en el aula como de búsqueda e investigación. Más aún, en la educación secundaria obligatoria por ser el momento en el que se inicia el desarrollo de la capacidad de formalizar y se hace posible algún grado significativo de abstracción.

Se pretende en este caso reforzar la introducción a la geometría utilizando las transformaciones lineales afines en el plano para definir formas fractales. La utilización de este tema novedoso contradice la concepción de las matemáticas como una ciencia completa desde hace tiempo.

Figura 1. Estudiantes de bachillerato posando con el resultado de su trabajo, un triángulo de Sierpinski

La experiencia de construir y estudiar fractales

Se trata de elaborar figuras planas de grandes dimensiones, hasta de 2 m^2, en las que utilizando la propiedad de similaridad –formadas por partes semejantes entre sí–, se ha conseguido representar un fractal conexo. Las figuras presentan una etapa intermedia en la formación del fractal, mientras que también son una representación de la figura límite o atractor del fractal, con una determinada resolución, y por lo tanto propiamente autosimilares.

Estas estructuras tan complejas aúnan la sencillez y precisión de quedar descritas matemáticamente mediante un pequeño número de transformaciones lineales, y la belleza del resultado cuando estas transformaciones se aplican numerosas veces sobre un objeto inicial. Los fractales existen sólo en su estado infinito, pero en la práctica nos conformamos con visualizarlos en alguna etapa finita de su construcción.

Los objetivos de esta experiencia son conocer las propiedades básicas de los fractales y utilizarlos para el trabajo matemático. Se introducen las transformaciones de forma práctica, por el movimiento de las figuras sobre el papel, y a partir de las figuras obtenidas se han podido desarrollar muchos contenidos geométricos y algebraicos propios del currículo de matemáticas de secundaria. Son numerosas las actividades y ejercicios interesantes, desde el cálculo numérico en los primeros cursos, a la expresión algebraica en los últimos. El número de elementos geométricos que constituyen la figura en cada etapa de la formación del fractal –vértices, lados, triángulos, cuadrados–, da lugar a sucesiones geométricas, y las características de estos elementos –longitudes de los lados y de las áreas– pueden expresarse algebraicamente. Se revisan los límites de estas sucesiones para un número muy grande de etapas y su relación con la dimensión fractal de cada figura.

La incorporación de los fractales a las matemáticas escolares es muy interesante, pues combinando curiosidad, sencillez y belleza, permite enfocar la actividad en el aula como de búsqueda e investigación.

Para la aplicación de esta propuesta se han preparado y utilizado numerosas actividades adaptables a diferentes niveles educativos. En su realización, estas actividades se secuencian en tres etapas que se exponen a continuación:

1.° Las transformaciones geométricas y el diseño de patrones.

2.° Taller de construcción de las figuras.

3.° Características de las figuras: expresiones algebraicas y representaciones gráficas.

Primera etapa. Las transformaciones geométricas y el diseño de patrones

La expresión matemática más sencilla de un fractal lineal corresponde a lo que Michael Barnsley (1993) introdujo con el nombre de sistemas de función iterada o IFS (*Iterated Function Systems*). Un IFS es un conjunto de transformaciones afines contractivas. Cada conjunto de estas transformaciones define una imagen fractal denominada atractor del IFS, que siempre existe y es única.

La transformación afín general en el plano se compone de una transformación lineal, que deforma el plano res-

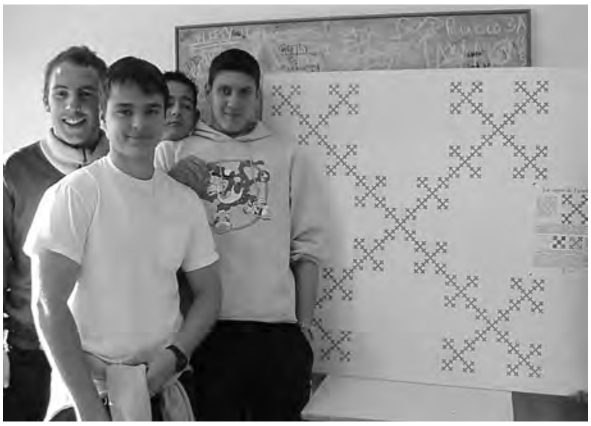


Figura 2. Las Aspas de Vicsek montadas
por los estudiantes de bachillerato

pecto al origen, y de una traslación. Una transformación se llama *contractiva* si reduce la distancia entre un par de puntos cualesquiera.

Una transformación lineal afín bidimensional W se representa algebraicamente como $W(x, y) = (ax + by + e, cx + dy + f)$, donde a, b, c, d, e y f son números reales. Esta transformación gira, desplaza y cambia la escala de un objeto en las direcciones X e Y del plano euclideo. En esta experiencia se utilizan las transformaciones afines más sencillas, las transformaciones de similaridad, que se caracterizan porque tanto el factor de escala como los ángulos de rotación son iguales para cualquier dirección en el plano, conservando los ángulos, además de transformar rectas en rectas.

Para el diseño de fractales con estas transformaciones, se buscaron como iniciadores o figuras de partida las formas planas más elementales que pudieran dividirse en copias reducidas de sí mismas, y produjeran una teselación del plano, seleccionando el triángulo y el rectángulo. Como además la variedad de fractales aumentaba con aquellos iniciadores que presentaran simetrías de giro que permitieran aplicar rotaciones a las figuras, se han elegido el cuadrado y el triángulo equilátero.

El generador es la figura que se obtiene al aplicar por primera vez las reglas de sustitución o algoritmo fractal sobre el iniciador, y describe las transformaciones que definen el fractal. Para el diseño de los generadores se han buscado las reglas de sustitución más sencillas. Se han utilizado hojas de papel con malla triangular y cuadrada para obtener generadores.

La malla es una herramienta geométrica cotidiana además de un valioso instrumento para la enseñanza y el aprendizaje en geometría.

La malla es una herramienta geométrica cotidiana además de un valioso instrumento para la enseñanza y el aprendizaje en geometría. En ella se seleccionan aquellas transformaciones que puedan representarse con algunos de sus elementos. El conjunto de transformaciones representado provoca la elección del tamaño del iniciador para que el resultado de la menor de las transformaciones coincida con un elemento de la malla.

Aprovechando que se pueden definir sobre la malla triángulos equiláteros o cuadrados subdivididos en otros semejantes, se seleccionan algunos de sus elementos que definirán las transformaciones de similaridad: las contracciones con factor de escala 2, 3 o 4, y las traslaciones se describen dividiendo el iniciador cuadrado o triangular en 2^2, 3^2 o 4^2 partes iguales. Otras transformaciones que fácilmente pueden incorporarse son las rotaciones de múltiplos de 90° sobre los cuadrados, o de 120°, 180° y 240° sobre los triángulos equiláteros. Al dividir un cuadrado en subcuadrados iguales de lados paralelos, o un triángulo equilátero en subtriángulos iguales, hay diferentes maneras de seleccionar un subconjunto de entre ellos que pueda definir un algoritmo fractal, pero las posibilidades se multiplican si extendemos la selección de elementos fuera del polígono original. La actividad que se les propone a los estudiantes es la del diseño de algoritmos fractales distintos con este tipo de transformaciones.

Si el generador del fractal es una figura conexa, de una sola pieza, la iteración posterior de esas mismas transformaciones da lugar a que la figura, en cualquier etapa que se represente, lo siga siendo. Mientras que si el generador es disconexo, las etapas posteriores también lo son y el fractal consiste en un conjunto cantoriano de puntos pulvurulento. En esta experiencia, y para alcanzar los objetivos que se pretenden, se han utilizado solamente formas conexas.

En la figura 3 se presentan algunos resultados de esta actividad de diseño, los iniciadores, generadores y la segunda etapa de formación de algunos de los fractales que posteriormente se han utilizado. En la parte superior se muestra la formación del fractal Belinda; en la segunda fila, la alfombra de Sierpinski; en la tercera, el copo de estrellas; y en la parte inferior las aspas de Vicsek. Muchos de los generadores, al no incluir rotaciones en sus transformaciones, se obtienen también eliminando algunas partes del iniciador, por lo que el algoritmo fractal se puede describir como un proceso de eliminación de área.

Una actividad en clase consiste en proponer a los estudiantes que describan de esta manera algunos de los algoritmos diseñados que se utilizarán en el taller, en particu-

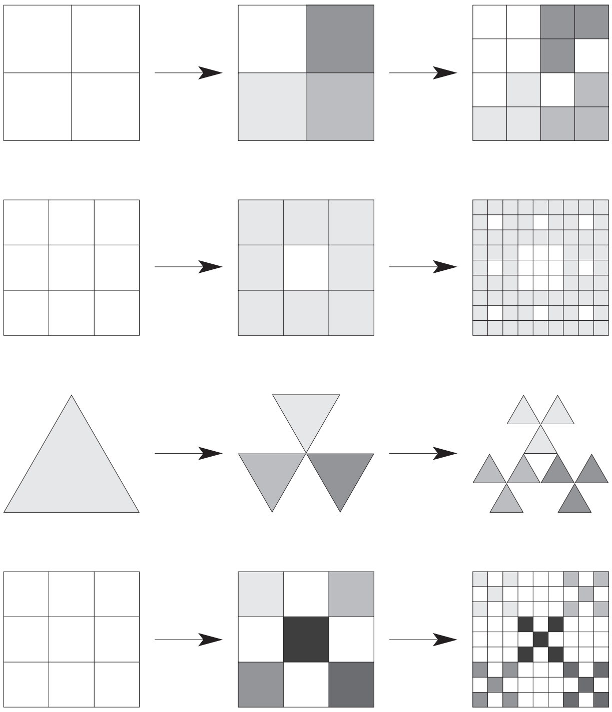


Figura 3. Diseño de cuatro algoritmos fractales

Figura 4. Estudiantes de la Universidad de Alicante durante la construcción de figuras fractales

Figura 5. Los estudiantes posan con algunas de las figuras realizadas

lar los de los fractales trisección, punta de flecha, triángulo de Sierpinski, aspas y alfombra, es decir, aquellos cuyas transformaciones consisten sólo en contracciones y traslaciones. La descripción de los generadores de fractales es conveniente como ejercicio de geometría y de rigor en la expresión. Se utiliza aquí la expresión verbal de las experiencias como uno de los contenidos procedimentales básicos de la geometría y de las matemáticas, porque incide de manera importante en el objetivo educativo general del uso adecuado del lenguaje y la mejora en el dominio de la expresión.

Se utiliza aquí la expresión verbal de las experiencias como uno de los contenidos procedimentales básicos de la geometría y de las matemáticas, porque incide de manera importante en el objetivo educativo general del uso adecuado del lenguaje y la mejora en el dominio de la expresión.

Definir correctamente el algoritmo de generación consiste básicamente en mencionar el número de transformaciones que lo componen y sus características: la relación de semejanza o factor de escala con el iniciador, y sus posiciones relativas respecto a él, su traslación y/o rotación. Con estos datos es suficiente en casos como el actual, en los que se utilizan transformaciones de similaridad, aunque no en general. La descripción de las transformaciones será a menudo oral, y a veces también escrita. En ambas los estudiantes aprenden a utilizar con precisión el lenguaje geométrico adecuado.

El teorema de la composición de Barnsley permite plantear otro problema: dada una forma geométrica L en el plano, buscar el conjunto de transformaciones, o IFS, para el cual L sea el atractor. El teorema dice que el IFS correspondiente a un atractor es el conjunto de transformaciones cuya composición de las imágenes de ese atractor bajo las transformaciones coincida consigo mismo.

Una vez que los estudiantes han diseñado generadores, en una nueva actividad se propone la realización del trabajo matemático en sentido inverso: se les presentan varios atractores fractales muy sencillos y se les pide que, interpretando sus características y utilizando el teorema, describan las transformaciones de similaridad que los han generado. Este ejercicio ya presenta algunos de los resultados que se obtienen con la construcción de las figuras, además de reforzar en los estudiantes la manera de describir correctamente las transformaciones geométricas. El modelo para realizarlo se presenta en la figura 6. Se trata de una actividad de reconocimiento, frente a la actividad anterior de diseñar generadores de fractales. El hecho de trabajar alternando actividades de reconocer y de diseñar transformaciones, no sólo es una garantía para la adquisición del conocimiento, sino que además equivale a practicar una evaluación constante dentro del mismo proceso de aprendizaje.

Los estudiantes de bachillerato, que ya tienen algunas nociones de cálculo matricial, y estudian en su primer curso la geometría analítica del plano, pueden llegar a describir las transformaciones lineales en su notación matricial. Se expresan como $W(P) = AP + t$, donde A es una matriz real bidimensional 2 x 2 y t es un vector columna 2 x 1.

Su representación matricial es:

$$W\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}e\\ f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ax + by + e\\ cx + dy + f\end{pmatrix}$$

Alternativamente A puede escribirse de la forma

$$A = \begin{pmatrix}r\cos(\phi) & -s\,\mathrm{sen}(\psi)\\ r\,\mathrm{sen}(\phi) & s\cos(\psi)\end{pmatrix}$$

donde (r, ϕ) y $(s, \psi + \pi/2)$ son las coordenadas polares de los puntos (a, c) y (b, d) en las que pueden reconocerse las componentes de la transformación: el escalado de parámetros r y s, la rotación de los ejes cartesianos, de ángulos ϕ y ψ, y la traslación dada por las coordenadas e y f (Barnsley, 1993).

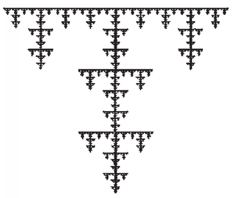
Como ejemplo consideremos el sistema compuesto por las tres transformaciones W_1, W_2, W_3 que definen el triángulo de Sierpinski, y cuyo código IFS se representa de la siguiente forma:

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
W_1	0,5	0	0	0,5	0	0
W_2	0,5	0	0	0,5	1	0
W_3	0,5	0	0	0,5	1/2	$\sqrt{3}/2$

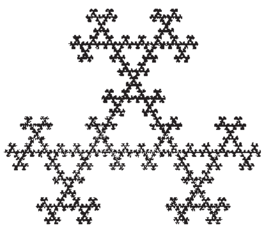
Está formado por tres copias de mitad de tamaño que su predecesora (coeficientes 0,5 en a y d), no hay giros (ceros en b y c), e incluye el desplazamiento a los vértices de un triángulo (coeficientes e y f). La transformación W_1 crea el triángulo de la izquierda, W_2 el de la derecha, y W_3 el superior del centro, resultando una manera muy compacta –con un código muy pequeño– de describir una figura tan detallada como el triángulo fractal.

Generación de fractales

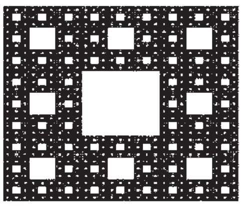
Explica cómo se ha generado cada una de las siguientes imágenes fractales. Para describir las transformaciones lineales te basta con obtener el número de copias, el factor de escala y las rotaciones si las hubiera.



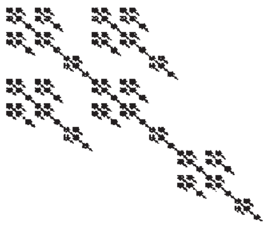
N.° transf.	Escala	Rotaciones



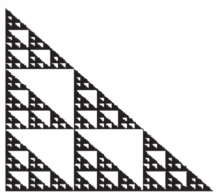
N.° transf.	Escala	Rotaciones



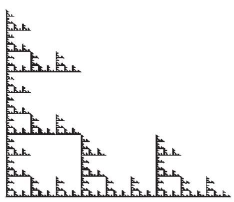
N.° transf.	Escala	Rotaciones



N.° transf.	Escala	Rotaciones



N.° transf.	Escala	Rotaciones



N.° transf.	Escala	Rotaciones

Figura 6. Modelo de la actividad de reconocimiento de algoritmos fractales

Segunda etapa. Construcción de las figuras

Taller de fractales

Se propone una actividad de taller, basada en la utilización de materiales geométricos muy sencillos. Con estos materiales se construyen modelos, es decir, realizaciones visibles que ponen de manifiesto las transformaciones y todas las propiedades geométricas de cada figura. Los modelos son el lenguaje de la geometría. La manipulación de los materiales es la ocasión para experimentar y después expresar propiedades geométricas, alcanzando los conceptos abstractos a partir de situaciones concretas.

En el aula, la tarea de construcción que parece conceptualmente compleja se ha traducido en un ejercicio manual nada complicado. Con los generadores definidos, la elaboración de las figuras en papel es inmediata. Para esta etapa práctica se utilizan las mallas de papel, donde se seleccionan los elementos que definen el generador. Sobre una hoja A4 de papel se forma la primera etapa, la segunda y hasta la tercera etapa de la figura fractal, con sólo seleccionar más elementos en la disposición adecuada. El rellenado de los elementos de la malla se ha hecho con pegatinas de color de forma triangular o cuadrada como las que se utilizan en actividades propias de educación infantil.

Esta hoja de papel será el objeto generador de las etapas siguientes con un proceso de multiplicación tan sencillo como su reproducción con fotocopias. La similaridad de estos fractales lineales hace que fotocopiando los patrones podamos montar las siguientes etapas del objeto, al mismo tiempo que la figura total aumenta su tamaño. Con tres copias del triángulo colocadas convenientemente obtenemos la etapa siguiente a doble tamaño que el patrón. Con nueve, una etapa más y otra vez duplicamos tamaño, y así hemos llegado a la etapa séptima de construcción del triángulo fractal. De forma parecida, con cinco copias del patrón de las aspas adecuadamente colocadas se obtiene la etapa siguiente y aumenta su tamaño al triple. Con veinticinco copias aumentamos una etapa más y volvemos a triplicar el tamaño, y en esta ocasión hemos llegado a la quinta etapa en la formación de las aspas fractales.

Una vez obtenidas en número y tamaño adecuado las copias necesarias de una determinada etapa de cada figura, la construcción termina con el recorte de estos patrones de papel, generalmente en hojas de tamaño A3, y su pegado en la posición precisa sobre el soporte definitivo, que a veces ha sido el cartón-pluma y otras veces delgadas planchas de conglomerado chapadas en blanco. Las figuras fractales siempre van acompañadas de una breve leyenda explicativa que describe el conjunto de transformaciones que la forman y muestra las primeras etapas de su formación.

En algunos casos se ha aprovechado que la fotocopiadora permite reducir el tamaño de las copias, con lo que se obtienen numerosas etapas de la formación de un fractal sin que el tamaño total de la figura crezca, o por lo menos sin que resulte desorbitado. Las posibilidades experimentales de este procedimiento en la construcción de figuras fractales es enorme.

Es conveniente realizar estas actividades de taller en otros momentos que no sean los de la clase de matemáticas, preferentemente en el taller de plástica o en el marco de cualquier actividad cultural, como ocurrió en nuestro IES. En este sentido se considera que la expresión plástica es un lenguaje idóneo para la geometría. Quedan sin duda las otras dos etapas de la experiencia con sus actividades para realizar en la clase de matemáticas, e incluso se necesita ayuda informática para la representación gráfica de las características de las figuras. Esto permite relacionar la geometría con otras materias presentando a las matemáticas como un conjunto de áreas de conocimiento estrechamente entrelazadas entre sí y con otras diversas.

…permite relacionar la geometría con otras materias presentando a las matemáticas como un conjunto de áreas de conocimiento estrechamente entrelazadas entre sí y con otras diversas.

Descripción de las figuras

El Triángulo de Sierpinski (figura 7)

Es una de las figuras obtenidas, que recibe su nombre del matemático polaco Waclaw Sierpinski, quien lo propuso en 1915 para poner de manifiesto características geométricas extrañas, en este caso para demostrar que una curva puede cruzarse consigo misma en todos sus puntos. El triángulo de Sierpinski queda definido por un conjunto de tres transformaciones, que sobre cualquier objeto lo reducen a la mitad de su tamaño y colocan las copias en los tres vértices de un triángulo equilátero. También se genera conectando los puntos medios de los tres lados de un triángulo equilátero, seleccionando sólo los tres subtriángulos que se forman en las esquinas, y suprimiendo la cuarta parte central del mismo. Repitiendo este proceso de construcción, quitando fragmentos cada vez más pequeños una y otra vez, infinitas veces, se obtiene este fractal tan conocido.

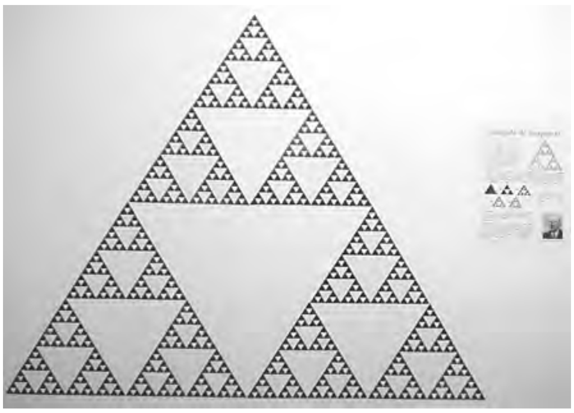


Figura 7. El triángulo de Sierpinski

La Punta de Flecha (figura 8)

Se describe con cinco transformaciones que reducen a un tercio de tamaño, y colocan las copias alineadas sobre dos rectas perpendiculares. La figura se obtiene descomponiendo un cuadrado en nueve subcuadrados iguales, dividiendo los lados en tres partes iguales y seleccionando sólo cinco subcuadrados dispuestos perpendicularmente, y eliminando los cuatro restantes.

Las Aspas de Vicsek *(figura 8)*

Es otro de los fractales construidos, que recibe su nombre de Tamás Vicsek, matemático húngaro que propuso esta configuración fractal. La figura está definida por cinco transformaciones geométricas que reducen el objeto a la tercera parte de su tamaño y colocan las copias en los cuatro vértices y en el centro de un cuadrado. Experimentalmente la hemos conseguido descomponiendo un cuadrado en nueve subcuadrados iguales, seleccionando sólo los cinco subcuadrados que se forman en las esquinas y el central, y suprimiendo los cuatro restantes.

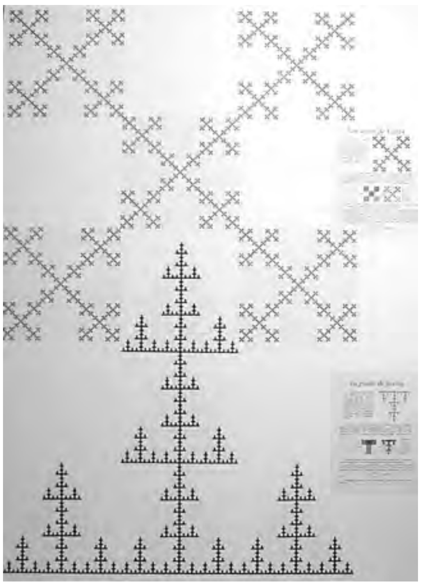


Figura 8. La punta de flecha
y las aspas de Vicsek

El copo de estrellas (figura 9)

Esta figura se obtiene con tres transformaciones lineales que reducen el objeto

La alfombra [de Sierpinski] se obtiene descomponiendo un cuadrado en nueve subcuadrados iguales, y seleccionando sólo los ocho subcuadrados exteriores.

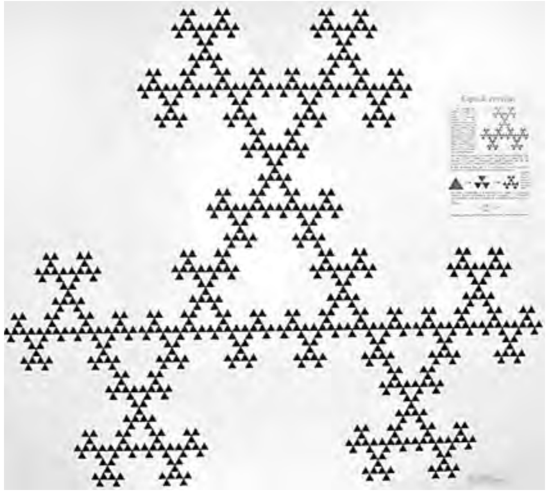


Figura 9. El Copo de Estrellas

a la mitad de su tamaño, colocan las copias en los vértices de un triángulo equilátero (hasta aquí como para el triángulo fractal), y las gira 180°.

La alfombra de Sierpinski (figura 10)

Se genera con ocho transformaciones que reducen la figura a un tercio de su tamaño y las coloca en todos los subcuadrados exteriores que resultan al dividir un cuadrado por los tercios de sus lados con segmentos paralelos a ellos. La alfombra se obtiene descomponiendo un cuadrado en nueve subcuadrados iguales, y seleccionando sólo los ocho subcuadrados exteriores.

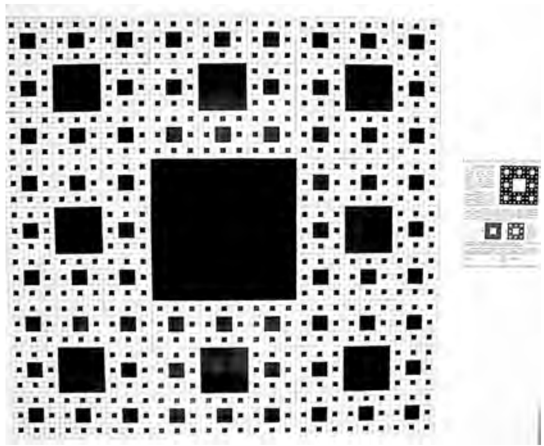


Figura 10. La alfombra de Sierpinski

Las Columnas (figura 11)

Se describen con tres transformaciones similares a las anteriores. Son reducciones a mitad de tamaño, traslaciones a los vértices de un triángulo rectángulo y rotación de 180°

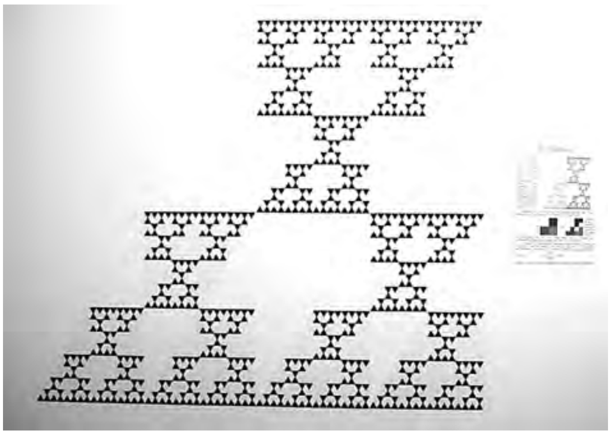


Figura 11. Las columnas

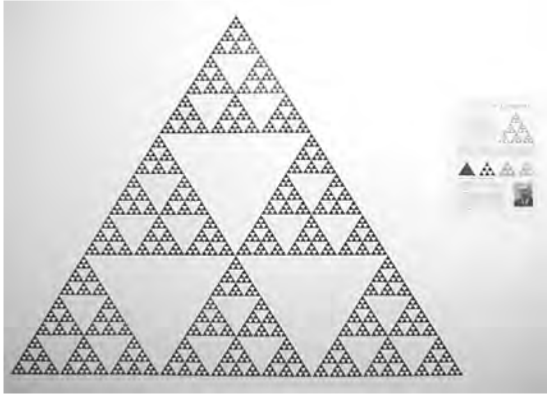


Figura 13. La trisección

de la copia colocada en el vértice superior. Este fractal se obtiene descomponiendo un cuadrado en cuatro subcuadrados iguales de mitad de tamaño, seleccionando tres de ellos y suprimiendo el cuarto. El subcuadrado superior sufre una rotación de 180°.

Belinda (figura 12)

Esta figura queda definida por tres transformaciones que reducen el objeto a mitad de tamaño, trasladan las copias a tres vértices consecutivos de un cuadrado, y gira 90° la copia del vértice superior. La figura se obtiene descomponiendo un cuadrado en cuatro subcuadrados iguales de mitad de tamaño y seleccionando sólo tres de ellos. El subcuadrado superior sufre además una rotación de 90° en sentido opuesto al de las agujas del reloj.

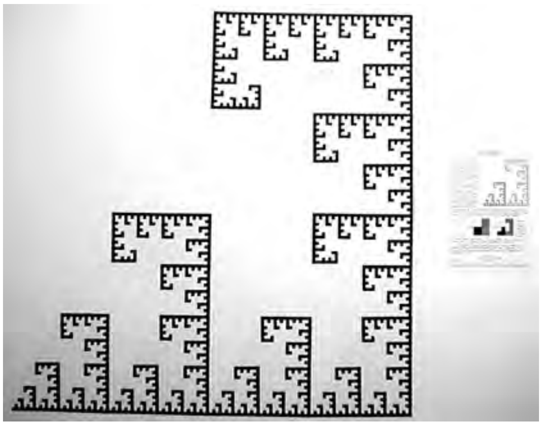


Figura 12. Belinda

La Trisección (figura 13)

Se genera con seis transformaciones, combinaciones de reducción a un tercio de tamaño y traslación de las copias a todos los subtriángulos externos, que resultan al dividir un triángulo equilátero por los tercios de sus lados con segmentos paralelos a los mismos. Se obtiene dividiendo el triángulo en nueve subtriángulos iguales y eliminando los tres interiores cuyos lados no coinciden con los del triángulo.

El trabajo geométrico sobre fractales, que habitualmente es bidimensional, conviene completarlo con la manipulación de algún objeto tridimensional que ayude a su comprensión.

Fractal tridimensional

El trabajo geométrico sobre fractales, que habitualmente es bidimensional, conviene completarlo con la manipulación de algún objeto tridimensional que ayude a su comprensión. El poliedro más simple es el tetraedro, y otro muy interesante el octaedro. Con un octaedro y cuatro tetraedros de la misma arista se forma un tetraedro de doble arista, y de esta manera se puede manipular el generador del tetraedro fractal de Sierpinski.

La regla de generación consiste en cortar un tetraedro regular con planos paralelos a las caras que pasen por los puntos medios de las aristas, seleccionando los cuatro nuevos tetraedros de mitad de tamaño formados en los vértices y eliminando el resto del sólido, un octaedro regular. Con este algoritmo se generan cuatro nuevos tetraedros, y aplicándoles de nuevo la regla a cada uno se obtienen 16 tetraedros, todos del mismo tamaño. La aplicación recursiva de esta regla, quitando octaedros cada vez más pequeños una y otra vez, da lugar a la forma fractal.

Muchos estudiantes habrán construido alguna vez un poliedro a partir de su desarrollo plano, y algunos de ellos un tetraedro. Resulta interesante que comprueben que puede obtenerse a partir de dos desarrollos distintos, en una investigación para buscar sobre la malla triangular todos los distintos tetra-diamantes, y entre ellos los dos que al plegarse forman el tetraedro (Bolt, 1998).

En la construcción del fractal se ha utilizado la malla triangular para recortar el desarrollo plano de un tetraedro cuyas aristas midan 2^n veces la arista de la celdilla unidad. Antes de doblar y pegar las pestañas del cuerpo geométrico se han marcado sobre sus caras, recubriendo con un adhesivo de color, los triángulos que permanecerán en ella hasta la etapa n de la generación del triángulo de Sierpinski. Se obtiene así una imagen de la pirámide fractal hasta esa etapa n de su formación, si se imagina que el papel blanco desaparece y sólo permanecen los pequeños tetraedros coloreados. Con aristas de 16 celdillas se obtiene la cuarta etapa de la formación del fractal, pero la colocación de cuatro de estos tetraedros da lugar a la etapa siguiente con un tetraedro de doble arista, como se muestra en la figura 14, y así sucesivamente.

Como todos los fractales lineales, el tetraedro de Sierpinski queda totalmente definido mediante un conjunto de transformaciones. Las cuatro transformaciones tridimensionales que reducen la figura a mitad de tamaño y colocan las copias en los vértices del tetraedro, que también se pueden expresar matricialmente constituyendo un IFS, en el que cada una se representa por una relación lineal entre las coordenadas euclideas de cada punto del espacio (x, y, z) con otras (x', y', z'):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j \\ k \\ l \end{pmatrix}$$

De esta manera, el tetraedro fractal queda descrito por los 12 x 4 = 48 parámetros de las cuatro transformaciones tridimensionales:

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
W_1	0,50	0	0	0	0,50	0	0	0	0,50	0,00	0,00	1,00
W_2	0,50	0	0	0	0,50	0	0	0	0,50	0,00	0,87	–0,50
W_3	0,50	0	0	0	0,50	0	0	0	0,50	–0,87	–0,50	–0,50
W_4	0,50	0	0	0	0,50	0	0	0	0,50	0,87	–0,50	–0,50

Con objetos como éste se pueden proponer numerosas actividades didácticas que muestran una dinámica interconexión entre geometría y álgebra, así como interesantes aspectos de la autosimilaridad.

Las figuras formadas nos permitirán utilizar su autosimilaridad y las regularidades que muestran para la búsqueda de reglas numéricas que evidencien las relaciones entre los modelos geométricos y los modelos numéricos.

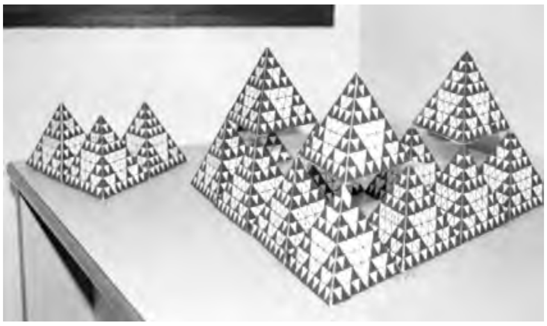


Figura 14. Tetraedros de Sierpinski en cartulina realizados por los estudiantes

Tercera etapa. Características de las figuras: expresiones algebraicas y representaciones gráficas

Pero esta experiencia didáctica no termina con la formación de algunas de las innumerables figuras distintas posibles. Si su diseño y construcción han resultado tareas interesantes y enriquecedoras, la utilidad posterior hace de los fractales lineales una herramienta formativa muy eficaz.

Las figuras formadas nos permitirán utilizar su autosimilaridad y las regularidades que muestran para la búsqueda de reglas numéricas que evidencien las relaciones entre los modelos geométricos y los modelos numéricos. Los resultados más significativos para estas figuras son las expresiones que se recogen en la tabla 1.

En primer lugar se determinan los parámetros r y s que describen estos modelos: r es el número de copias de la figura que conforman la etapa siguiente, y s es el factor de escala entre el elemento de una etapa y el de la siguiente.

Reconociendo la autosimilaridad de las figuras, y observando una parte lo más pequeña posible que contenga el generador, se cuenta el número de elementos que lo componen. Se hace el mismo recuento con una parte que contenga la segunda etapa y las siguientes de la construcción del fractal, comprobando la progresión geométrica que aparece en el número de elementos que forman estas figuras. En los primeros cursos de secundaria es conveniente

Figura en la etapa n	*Número de elementos r^n*	*Longitud del lado s^n*	*Perímetro*	*Área figura*	*Área eliminada*	*Dimensión fractal*
Triángulo de Sierpinski	3^n	2^{-n}	$\frac{3^{n+1}}{2^n}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^n$	$\frac{1}{4}\left[1+\sum_{1}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$	$d=\frac{\log 3}{\log 2}=1{,}585$
Trisección	6^n	3^{-n}	$\frac{6^n}{3^{n-1}}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^n$	$\frac{1}{3}\left[1+\sum_{1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$	$d=\frac{\log 6}{\log 3}=1{,}631$
Aspas de Vicsek	5^n	3^{-n}	$\frac{4\cdot 5^n}{3^n}$	$\left(\frac{5}{9}\right)^n$	$\frac{4}{9}\left[1+\sum_{1}^{n}\left(\frac{5}{9}\right)^n\right]$	$d=\frac{\log 5}{\log 3}=1{,}465$
Belinda	3^n	2^{-n}	$\frac{1+3^n}{2^{n-1}}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^n$	$\frac{1}{4}\left[1+\sum_{1}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$	$d=\frac{\log 3}{\log 2}=1{,}585$
Punta de flecha	5^n	3^{-n}	$\frac{2\left(1+5^n\right)}{3^n}$	$\left(\frac{5}{9}\right)^n$	$\frac{4}{9}\left[1+\sum_{1}^{n}\left(\frac{5}{9}\right)^n\right]$	$d=\frac{\log 5}{\log 3}=1{,}465$
Columnas	3^n	2^{-n}	$\frac{3^{n+1}}{2^n}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^n$	$\frac{1}{4}\left[1+\sum_{1}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$	$d=\frac{\log 3}{\log 2}=1{,}585$
Alfombra de Sierpinski	8^n	3^{-n}	$\frac{4}{5}\left(4+\frac{8^n}{3^n}\right)$	$\left(\frac{8}{9}\right)^n$	$\frac{1}{9}\left[1+\sum_{1}^{n}\left(\frac{8}{9}\right)^n\right]$	$d=\frac{\log 8}{\log 3}=1{,}893$
Copo de estrellas	3^n	2^{-n}	$\frac{3^{n+1}}{2^n}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^n$	$\frac{1}{4}\left[1+\sum_{1}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$	$d=\frac{\log 3}{\log 2}=1{,}585$

Tabla 1

recoger los resultados en una pequeña tabla que facilite la obtención de la regla general (Figueiras, 2000). El ejercicio de formalización que da lugar a estas expresiones no es trivial para los estudiantes de estos cursos, aunque resulte muy aconsejable.

En cada etapa, mientras que una potencia de r muestra el número de elementos que componen la figura, con el factor de escala s se expresa la longitud del lado de un elemento en función del lado de la figura inicial. Por tratarse de transformaciones contractivas, la longitud del lado será una potencia de base menor que la unidad. La combinación de ambos resultados permite obtener la expresión del perímetro de las figuras.

Consecuencia también de las reglas de construcción, del cambio de escala y del número de copias o elementos, aparece la secuencia de áreas para las diferentes etapas que puede expresarse mediante una ley potencial. Por simplicidad, es conveniente referirlas siempre al área del iniciador.

Pero si se interpreta la formación de las figuras como consecuencia de un proceso sencillo de eliminación de partes de la figura inicial, se obtiene el área que permanece en cada etapa, pudiendo generalizarse a la etapa n. Los resultados que se muestran en la tabla 1 mantienen la forma obtenida directamente en el proceso de eliminación para facilitar su interpretación. También se puede expresar porcentualmente la fracción del área inicial eliminada en cada iteración, y su acumulación.

Algunos estudiantes al acceder a secundaria aún confunden los conceptos de área y perímetro, con lo que el debate con estos modelos les ayuda a superar esa dificultad.

Algunos estudiantes al acceder a secundaria aún confunden los conceptos de área y perímetro, con lo que el debate con estos modelos les ayuda a superar esa dificultad. Una vez obtenidas las secuencias numéricas que describen el área y el perímetro de cada figura, su análisis debe permitir de manera sencilla la obtención de la regla potencial que las generan y su expresión algebraica. La ocasión es excelente para revisar el crecimiento producido por una dependencia potencial según sea la base de la potencia mayor o menor que la unidad.

Cuáles son el perímetro y el área del atractor, son cuestiones interesantes para sugerir la idea de límite de estas sucesiones. El estudio de las sucesiones, y el cálculo de su límite –cuando existe–, se aborda normalmente en el bachillerato desde un enfoque exclusivamente algebraico-analítico. En este trabajo se propone aprovechar la interpretación geométrica de las figuras fractales para analizar sucesiones geométricas y, en algún caso, calcular su límite. En estos ejemplos, a partir de una expresión recurrente se ha obtenido la fórmula explícita para la sucesión. La interpretación geométrica proporciona una aproximación más intuitiva al concepto de límite y permite establecer una conexión natural entre dos partes de la matemática que usualmente presentamos a nuestros estudiantes de manera disconexa: el análisis y la geometría (Cortés, 2000).

Pero además se puede estudiar en las figuras la evolución con las sucesivas iteraciones de estos conceptos geométricos comparando las razones geométricas, es decir, si se comparan algoritmos diferentes y se revisan los ritmos distintos con los que decrece el área, se reduce el lado, o crece el perímetro. Este resultado conectará con el valor de dimensión que asignemos a los fractales.

El estudio de los límites de las expresiones obtenidas para la etapa n-ésima, cuando n tiende a infinito, permite de manera intuitiva a los estudiantes de ESO y de manera formal a los de bachillerato, concluir que las figuras finales serán fractales de perímetro infinito y de área nula. En el límite, la suma de las áreas eliminadas se reduce a la suma infinita de los términos de una serie geométrica de razón menor que la unidad, con lo que la fracción eliminada es uno. Sin duda, estas dos conceptos no son idóneos para describir las figuras fractales.

En lugar de ellos, los fractales se caracterizan por su dimensión fractal d, generalización de la dimensión euclídea. A partir de la definición de medida de Hausdorff, que coincide con la longitud o el área para objetos euclideos de dimensión 1 o 2, se define la dimensión fractal o de Hausdorff-Besicovitch de un objeto como el valor de d para el que con valores inferiores a él la medida del objeto es ∞, y con valores superiores la medida es 0 (Mandelbrot, 1997).

La interpretación geométrica proporciona una aproximación más intuitiva al concepto de límite y permite establecer una conexión natural entre dos partes de la matemática que usualmente presentamos a nuestros estudiantes de manera disconexa: el análisis y la geometría.

Todas las figuras construidas tienen longitud o perímetro infinito (medida infinita cuando $d = 1$) y área nula (medida nula cuando $d = 2$), lo que determina que la dimensión de estos objetos es un valor no entero comprendido entre 1 y 2, siendo objetos intermedios entre las líneas y las superficies de la geometría clásica. Ocupan más espacio que una línea, pero menos que una superficie. La dimensión es además una medida de la irregularidad del fractal.

Como los fractales lineales son autosimilares, en ellos la dimensión fractal coincide con la dimensión de homotecia, mucho más sencilla, que se puede presentar a los estudiantes de bachillerato para analizar la dimensión fractal de nuestras figuras, como propone Figueiras (2000). Los parámetros r y s, de cada figura, mediante la definición de dimensión de homotecia como $d = \log s / \log r$, dan lugar a las dimensiones fractales obtenidas en la última columna de la tabla 1.

En el tetraedro de Sierpinski, donde $r = 2$ es el factor de escala, y $s = 4$ es el número de partes generadas, se obtiene

$$d = \frac{\log 4}{\log 2} = 2$$

por lo que tiene la misma dimensión que una superficie euclídea.

La tabla 2 muestra algunas de las relaciones numéricas que se encuentran el tetraedro de Sierpinski. Desde el número de tetraedros generados en cada etapa, sus vértices, aristas y superficie, hasta el volumen de la figura total serán elementos geométricos a estudiar, concluyendo que el tetraedro de Sierpinski es un objeto límite cuya área total permanece constante en todas las etapas de su generación –coincidente con el valor de $d = 2$–, pero con un volumen final nulo.

Para la interpretación de los resultados de ambas tablas se construyen algunas representaciones gráficas de las sucesiones obtenidas entendidas como funciones de variable entera. Con los estudiantes de ESO la actividad consiste en representar la evolución de las áreas, como aparecen en la figura 15, comparando las potencias de diferentes bases. También se representa el crecimiento de los perímetros de los distintos modelos fractales justificando su evolución con diferentes reglas potenciales.

La figura 15 presenta el área de las figuras obtenidas en diferentes etapas. Al igual que en la tabla 1, se normaliza a la unidad el área del iniciador. Los decrecimientos potenciales pueden compararse atendiendo a la base de cada potencia. Por otra parte, en la figura 16 se muestra el perímetro de las formas desarrolladas en sucesivas etapas. En todos los casos se normaliza a la unidad el lado del iniciador, con lo que resultan progresiones geométricas de razón mayor que la unidad. Los diferentes comportamientos son función de la razón de cada una de las sucesiones. Al buscar el perímetro y el área de la figura límite, estas

Iteración	Número de elementos	Número de aristas	Long. arista	Área	Octaedros eliminados	Volumen eliminado en la iteración	Volumen eliminado acumulado	Porcentaje acumulado
0	1	6	a	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	0	0	0	0
1	4	24	$a/2$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{24}a^3$	1/2	50,00
2	16	96	$a/4$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	4	$\frac{\sqrt{2}}{48}a^3$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}$	75,00
3	64	384	$a/8$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	16	$\frac{\sqrt{2}}{96}a^3$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}=\frac{7}{8}$	87,50
4	256	1536	$a/16$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	64	$\frac{\sqrt{2}}{192}a^3$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}=\frac{15}{16}$	93,75
n	4^n	$6 \cdot 4^n$	$a/2^n$	$4^n\frac{\left(\frac{a}{2^n}\right)^2\sqrt{3}}{4}$	4^{n-1}	$4^{n-1}\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{a}{2^n}\right)^3$	$f=\sum_{1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$\frac{2^n-1}{2^n}\cdot 100$

volumen eliminado acumulado: $V_n := \frac{\sqrt{2}}{3}a^3\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+2}}\right)$

Tabla 2. Tetaedro de Sierpinski

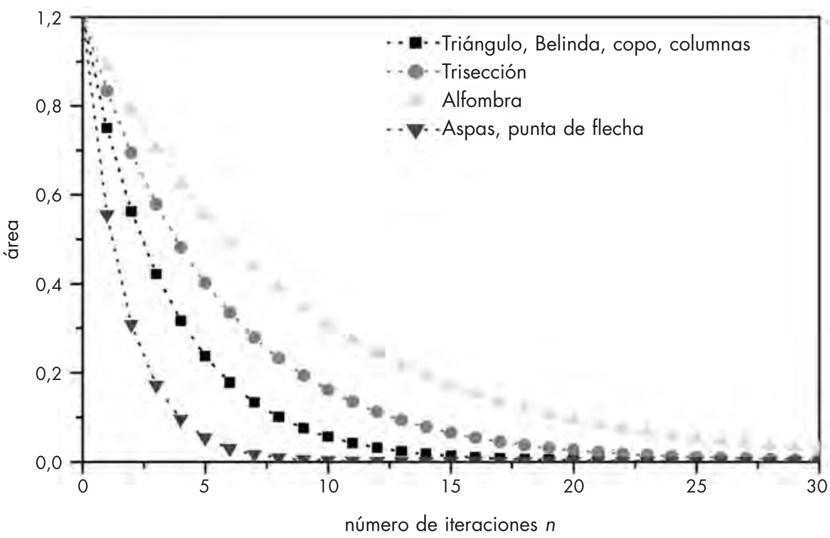


Figura 15. Evolución del área de las figuras

gráficas pueden favorecer la comprensión del concepto de límite de una sucesión.

Con estudiantes de bachillerato, con los que el análisis previo resulta muy pobre en contenidos, se propone como actividad la confección de la gráfica adecuada para conocer la relación potencial entre dos variables. Esta es la que aparece en la figura 17, donde se representan logarítmicamente el área y el perímetro respecto a la etapa de la figura, y donde las progresiones geométricas se muestran como dependencias lineales. Su análisis permite identificar el significado de la pendiente de cada recta e interpretar el orden relativo entre rectas. Aparecen dos pares de figuras con crecimientos del perímetro de la misma pendiente, que coinciden en la evolución de sus áreas.

Posteriormente se les pide que revisen la relación entre la dimensión fractal calculada para cada modelo y los crecimientos potenciales del perímetro, e incluso con la disminución del área, con lo que el debate sobre la irregularidad está garantizado. Se pueden aprovechar las representaciones gráficas para revisar las ideas de crecimiento y decrecimiento, continuidad y discreción, y límite de una sucesión geométrica.

La figura 18, de formato similar a la anterior, muestra la evolución de las características del tetraedro de Sierpinski en sus primeras etapas. Con un análisis parecido se deduce el crecimiento potencial del número de tetraedros que componen el objeto, y el decrecimiento de su volumen, que coincide con la longitud de la arista del elemento, ambos normalizados a la unidad en el iniciador. El área total de la estructura permanece invariable en cualquier etapa, mientras que el volumen eliminado crece rápidamente convergiendo asintóticamente al 100 %.

Diferentes entornos para su realización

La elaboración de estas figuras fractales de gran formato por los estudiantes de primer curso de bachillerato tecnológico, fue una de las actividades realizadas durante la *II Setmana de les Arts i les Ciències* que se celebró en el IES Leonardo da Vinci de Alicante para conmemorar el 2000 como Año Mundial de las Matemáticas. El hecho fue recogido

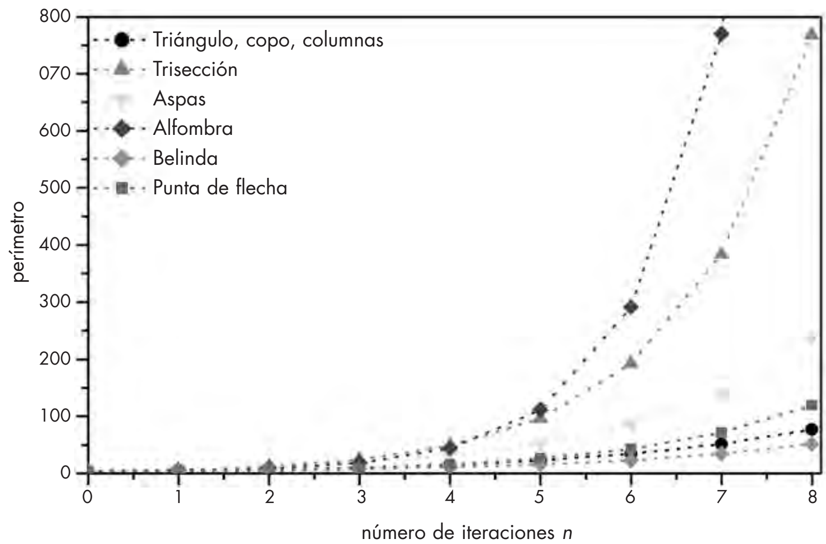


Figura 16. Evolución del perímetro de las figuras

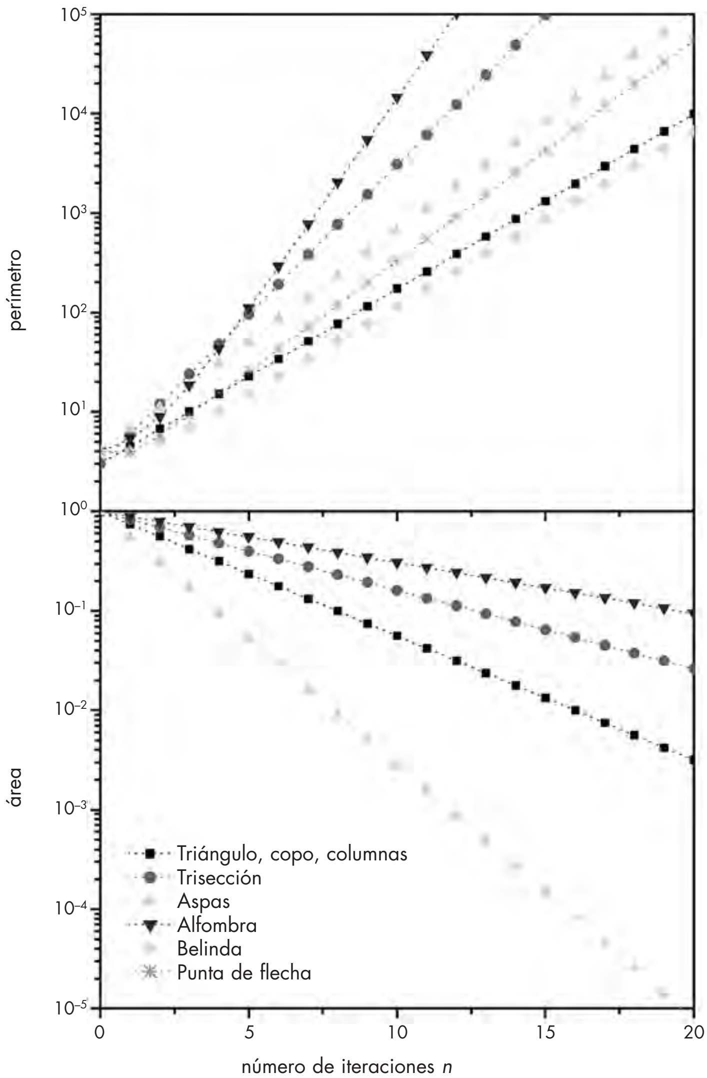


Figura 17. Representación logarítmica del perímetro y el área de las figuras

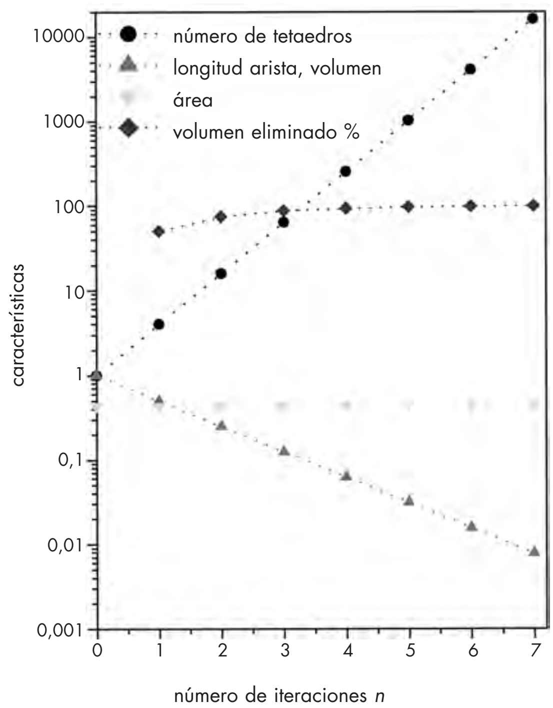


Figura 18. Evolución de las características del tetraedro de Sierpinski

en las páginas dedicadas a educación en la prensa regional, como aparece en la figura 19.

Los estudiantes universitarios también han desarrollado y estudiado estas figuras en uno de los talleres del curso de verano titulado *La Geometría Fractal*, que celebró la Universidad de Alicante en su sede de Cocentaina en julio de 2000, como muestran las figuras 4 y 5.

Por otra parte, algunas de estas figuras construidas en el aula fueron expuestas en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Alicante durante la celebración de las *IV Jornades d'Educació Matemática*, desarrolladas por la Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi», bajo el título conjunto de *Seis exposiciones de Centros de Secundaria* (figura 20).

Resumen

Como muchas veces se ha referido (Peitgen, Moreno-Marín) el estudio de los fractales es una herramienta muy interesante para el trabajo matemático en la enseñanza. En este artículo se muestran actividades muy variadas y fáciles de trasladar a la clase de matemáticas. Los distintos grados de dificultad, niveles de abstracción, y complejidad con que se pueden abordar estas tareas garantizan su versatilidad y sus posibilidades de aplicación en los distintos niveles educativos de la etapa secundaria.

La diversidad y las peculiaridades personales de los estudiantes, sus gustos y capacidades, se atienden en esta experiencia mediante actividades con diferentes grados posibles de implicación en las mismas, obteniendo unos resultados menos uniformes, pero más eficaces para cada uno de ellos.

Resulta especialmente interesante reforzar el trabajo en geometría durante los cursos de ESO, con la construcción y descripción de estas figuras. La actividad manual, junto con lo novedoso del tema despierta el interés de los estudiantes que, además de reforzar sus conocimientos geométricos y matemáticos, difícilmente olvidarán que estudiaron fractales en secundaria.


LA TIZA DEL AULA. EXPERIENCIAS Y PROPUESTAS EDUCATIVAS 3

Fractales en el IES Leonardo da Vinci

La tarea realizada en la clase

Figura 19. Hoja del diario *Información* de Alicante (12/04/2000)

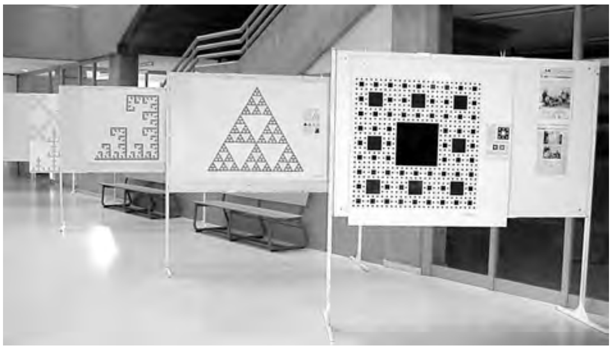


Figura 20. Exposición en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Alicante

Los distintos grados de dificultad, niveles de abstracción, y complejidad con que se pueden abordar estas tareas garantizan su versatilidad y sus posibilidades de aplicación en los distintos niveles educativos de la etapa secundaria.

Juan Carlos Moreno
IES Leonardo da Vinci
Alicante
Dpto. Física Aplicada,
Fac. Ciencias
Universidad de Alicante
Societat d'Educació
Matemàtica de la Comunitat
Valenciana «Al-Khwarizmi»

Referencias bibliográficas

BARNSLEY, M.F. (1993): *Fractals Everywhere*, Academic Press, Londres.

BOLT, B. (1998): ¿Qué es la geometría?, *Suma,* n.° 29, 5-16.

CORTÉS LÓPEZ, J.C. y J.A. ALEDO SÁNCHEZ (2000): «Cálculo geométrico del límite de sucesiones trigonométricas», *Suma*, n.° 34, 53-58.

FIGUEIRAS, L., M. MOLERO, A. SALVADOR, y N. ZUASTI (2000): «Una propuesta metodológica para la enseñanza de la Geometría a través de los fractales», *Suma*, n.° 35, 45-54.

MANDELBROT, B. (1977): *La Geometría Fractal de la Naturaleza,* Tusquets.

MORENO-MARÍN, J. C. (2001): *El Juego del Caos en la calculadora gráfica: Construcción de fractales, Enseñanza de las Ciencias* (en prensa).

PEITGEN, H.O., H. JÜRGENS y D. SAUPE (1992): *Fractals for the Classroom,* Springer-Verlag, Nueva York.

SÁNCHEZ VÁZQUEZ, G. (1997): «La enseñanza de la geometría en el momento actual y en el futuro inmediato», *Suma*, n.° 25, 17-22.

SUMA 40
junio 2002, pp. 105-107

En la deportación y en la galería de la muerte

Ángel Requena Fraile

La matemática no es una disciplina autónoma: está vinculada a las vivencias de los hombres, a sus pasiones y a sus reflexiones. La literatura nos ofrece una forma estimulante y rica de acercarnos a una materia descrita como de «fría belleza» para quitarle el primer calificativo y dejarla en todo su esplendor.
Es posible y sugerente dibujar con pinceladas o brochazos, cómo se ven las matemáticas y los matemáticos desde la literatura, en especial desde la novela y la poesía, en ejemplos concretos unidos por algún elemento común. Como muestra va este artículo. Quizá las situaciones son un poco extremas, pero sí muy descriptivas de hasta dónde pueden llegar las emociones que nos depara la matemática en la literatura.

MISCELÁNEA

POCAS VECES podremos encontrar huellas matemáticas en situaciones de tan extremo dramatismo como las expuestas por Arthur Koestler en su *Autobiografía*[1] y Victor Serge en la novela de su experiencia personal *Medianoche en el siglo*[2]. En el primer caso nos encontraremos en la antesala de la muerte, en una prisión de la Sevilla franquista. En el segundo conviviremos con los deportados de Stalin en las repúblicas asiáticas.

A. Koestler y V. Serge son dos grandes testigos de la grandeza y miserias del siglo que termina. Arrastrados por el temporal revolucionario no se conformaron con ser espectadores de su época, fueron parte activa en la transformación de un mundo.

Koestler

El húngaro Koestler abrazó con entusiasmo la militancia comunista para combatir el nazismo; su desengaño posterior le lleva en los primeros cuarenta a publicar uno de los mejores alegatos contra el estalinismo. A. Koestler, nacido en 1905 en Budapest es conocido en España como divulgador científico por su historia de la revolución astronómica de los siglos XVI y XVII (*Los sonámbulos* ha sido editada tanto íntegra como parcialmente). El texto que vamos a exponer pertenece al último volumen de su *Autobiografía*: *La escritura invisible*.

Consuelo matemático en una cárcel de Sevilla

A. Koestler como periodista asiste a la toma de Málaga por las tropas franquistas. La ciudad cae el 8 de febrero de 1937 y es detenido el día siguiente. Trasladado a Sevilla el

13 de febrero se dictó sentencia de muerte contra él. Tras noventa y cinco días en prisión es canjeado por un rehén del gobierno republicano. Leemos el escalofriante y casi místico documento:

> Cuando frente a la pared de aquella calle de Málaga, igualmente inerme e indefenso, volví la cabeza obedeciendo las órdenes del fotógrafo, reviví aquel trauma. Esto, junto con los otros acontecimientos del mismo día y de los tres días siguientes, en los que presencié ejecuciones en masa, por lo visto determino en mí un aflojamiento y un desplazamiento de las capas más profundas de mi psique, un ablandamiento de las resistencias y un reordenamiento de las estructuras que en forma transitoria quedaron abiertas a ese nuevo tipo de experiencias que estaba sufriendo.
>
> Lo experimenté por primera vez un día o dos después de mi traslado a la cárcel de Sevilla. Me hallaba de pie junto a la ventana de la celda número 40 y con un trozo de alambre que había sacado de mi colchón elástico garabateaba fórmulas matemáticas en la pared. La matemática, y particularmente la geometría analítica, había sido la afición favorita de mi juventud, que luego hube de descuidar por muchos años. Trataba de recordar cómo se deducía la fórmula de la hipérbola y encontraba dificultades, luego probé con la fórmula de la elipse y de la parábola y, con gran alegría, logré deducirla. Después intenté recordar la prueba de Euclides de que el número de los números primos es infinito.
>
> Números primos son aquellos, como 3, 17, etc., que no son divisibles más que por sí mismos y por la unidad. Uno bien podía imaginar que, conforme avanzamos por la escala numérica, los números primos serían cada vez más raros, en virtud de hallarse cada vez más productos de cantidades menores, y que por último se llegaría a un número, muy elevado, que sería el número primo máximo, el último numéricamente virgen. La prueba de Euclides demuestra sencilla y elegantemente que no es así y que, por más astronómicamente elevada que sea la cifra a la que se llegue, siempre encontraremos números que no son el producto de otros más pequeños, sino que se deben por así decirlo, a una concepción inmaculada. Desde que en la escuela conocí la demostración de Euclides, ésta siempre me llenó de profunda satisfacción, más de orden estético que intelectual. Pues bien, mientras trataba de recordar la demostración y garabateaba los símbolos en la pared, me sentí invadido por el mismo hechizo.
>
> Y entonces, por vez primera, comprendí de pronto el motivo de ese hechizo: los símbolos que escribía sobre la pared representaban uno de los raros casos en que se realiza una declaración significativa y comprensiva acerca de lo infinito por medios precisos y finitos. Lo infinito es una masa mística envuelta en una niebla, y sin embargo me era posible saber algo de lo infinito, sin perderme en ambigüedades engañosas. El significado de esto me inundó como una ola. Esa ola se había originado en una percepción interior verbal articulada que se había, empero, evaporado al punto, dejando en su onda sólo una esencia sin palabras, una fragancia de eternidad, un temblor de la flecha en el azul. Debo de haber permanecido allí algunos minutos, como transportado en un rapto y teniendo conciencia, aunque sin expresarlo con palabras, de que «esto es perfecto…, perfecto» hasta que me di cuenta de que por detrás de todo aquello estaba experimentando una ligera sensación de incomodidad mental, sí, había allí alguna circunstancia trivial que echaba a perder la perfección del momento. Luego caí en la cuenta de la naturaleza de aquella sensación de fastidio: por supuesto, me hallaba en la cárcel y tal vez a punto de ser fusilado. Pero inmediatamente replicó a esto un sentimiento cuya versión verbal sería: «¿Sí?, ¿y qué?, ¿eso es todo?» Réplica tan espontánea, fresca y divertida, como si aquel intruso sentimiento de fastidio no supusiera más que la pérdida del botón de la camisa. Luego floté de espaldas en un río de paz, bajo puentes de silencio. Aquel río no venía de ninguna parte ni fluía a ninguna parte; por último ya no hubo río y ya no hubo tampoco yo. El yo habla dejado de existir.[3]

Victor Serge nace por azar en Bruselas en 1890. Si a los doce años se le hubiera preguntado «¿Qué es la vida?» habría contestado: «pensarás, lucharás, tendrás hambre».

Serge

Victor Serge nace por azar en Bruselas en 1890. Si a los doce años se le hubiera preguntado «¿Qué es la vida?» habría contestado: «pensarás, lucharás, tendrás hambre». Serge fue muy leído durante la transición politica por su obra: *El año I de la revolución rusa*. Como pensador independiente se alineó con el troskismo, sufrió prisión y persecución. La presión de los intelectuales franceses de izquierda logra sacarle de la deportación antes de 1936, año en el que se intensificaría la represión en la URSS. Su experiencia de deportado le sirve como material para la estremecedora ficción de *Medianoche en el siglo*[4]. Las referencias a las matemáticas aparecen en distintos lugares, hemos entresacado las dos más significativas.

Cuadernos con errata

El hambre azotaba la Unión Soviética. Pero no sólo no llegaba el alimento a las repúblicas asiáticas, tampoco el material escolar. Por fin llegan cuadernos. La situación es tragicómica: los cuadernos tienen en portada al ministro que había caído en desgracia por desviacionista de derechas. Y no es el único problema: existe un error en la tabla de multiplicar. Veámoslo:

> —Uf, ya estaba esperando encontrarme un Bujarin en la página cuatro…
>
> Su mirada divertida se detuvo en la tabla de Pitágoras, precisamente en el lugar en el que flameaban discretamente los siguientes guarismos: 7x7 = 94. «Vea, vea, camarada Driabkin…» El otro, de primeras, no entendía por no saber a ciencia cierta cuántas eran siete por siete. Calculó pausadamente: tres por siete veintiuno, dos por veintiuno cuarenta y dos y siete cuarenta y nueve… ¿94? Mijail Ivanóvich dijo en tono sarcástico:

1 KOESTLER, A. *Autabiografía*. Alianza/Emecé, Madrid 1974.

2 SERGE, V. *Medianoche en el siglo*, Hiperión, Madrid 1976.

3 *Op. Cit.* pp. 69-71.

4 Poco después Koestler publicaría su ajuste de cuentas con el estalinismo con un título similar, *Oscuridad en la noche*.

—Típico sabotaje.

«Pero si con nosotros esto no tiene nada que ver. La papelería nos envía sus cuadernos de hace cuatro años… En cuanto a este sabotaje en la enseñanza de las matemáticas, camarada Driabkin, paso inmediatamente a redactar un parte al que espero tenga usted la amabilidad de dar curso. Somos nosotros los que pasamos a la ofensiva ¿entiende?»[5]

El pasaje tiene la curiosidad de la estrategia de cálculo de 7 x 7 (= 7 x 3 x 2 +7)

La ecuación del obrero

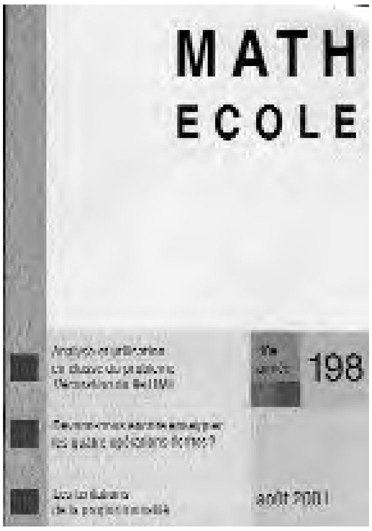
El álgebra tiene muchos usos. He aquí el realizado por el protagonista de la novela en una reunión del partido y que será la causa de su deportación:

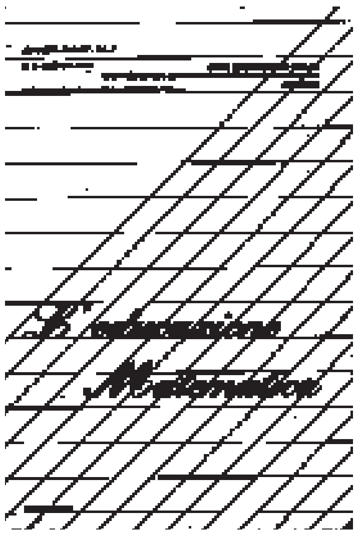
…«He aquí, camaradas, la ecuación de la vida de un obrero de nuestra fabrica: llamo *h* al tiempo de trabajo, *s* al salario, *a* al alquiler y afirmo que…». Primero se le escuchó con indulgencia y luego con clara irritación, pero su pensamiento perforaba el letargo del auditorio, su voz se henchía de pronto, las *x* se convertían en pesos de pan y en pesos de carne, en rublos y en kopecks y empezó a distinguirse en la tribuna, decorada con colgaduras de percalina roja, a un muchacho obstinado que balanceándose sobre sus piernas mantenía la cabeza hundida entre los hombros, a un individuo que, ante el busto negro y raquítico de Lenin, demostraba con álgebra, con Marx, con Lenin, con la Pravda de hacía dos días, con los mismísimos seis puntos enunciados por el camarada Stalin, que «el obrero de nuestra fabrica tiene hambre, queridos camaradas, y éste es el problema de los demás problemas –éste es el que toca al propio significado de la vida–. Hegel ha dicho…»[6].

En los tres ejemplos se ha puesto de manifiesto cómo la matemática puede aparecer inesperadamente con dramatismo o humor, como ayuda en la defensa de las ideas o como sorprendente consuelo.

5 *Op. Cit.* pp. 143.

6 *Op. Cit.* pp. 67.






Journal pour les enseignants de mathématiques
de la sixième à la seconde
Ouverture vers les sciences et les technologies
petit X
Activités mathématiques au collège
1993 - 1998
Hors-Série
UNIVERSITE JOSEPH FOURIER
édité par
irem
de Grenoble


Journal pour les enseignants de mathématiques
de la sixième à la seconde
Ouverture vers les sciences et les technologies
petit X
UNIVERSITE JOSEPH FOURIER
N° 53
1999 - 2000
édité par
irem
de Grenoble

SUMA 40
junio 2002, pp. 109-112

Οριςων

Miquel Albertí Palmer

En este artículo se da respuesta a una cuestión matemática de carácter personal:
¿Qué distancia me separa del horizonte y cómo cambia ésta al variar mi estatura ocular sobre el nivel del mar?

EL MAR estaba en calma. Las diminutas olas llegaban a la orilla en un susurro apenas perceptible. Muy tranquilo, sí, pero no tanto como ahora, retenido firmemente en la quietud absoluta de la imagen impresa que contemplo. Aunque era temprano, los pescadores de Lolak ya habían regresado y arreglaban las redes. Poco antes, de camino a la playa, me había topado con un grupo de mujeres cargadas con cestos enormes que sostenían perfectamente equilibrados sobre la cabeza. No habría conocido su contenido de no ser porque de uno de ellos sobresalía una gran cola triangular. Pero centrando mi atención en la faena de los hombres dirigí hacia ellos el objetivo de mi cámara. Recuerdo bien que para completar la instantánea quise incluir en ella la isla de Mololosing, satélite de la gran Sulawesi, que destacaba sobre el horizonte. Recuerdo también la nitidez con la que esta línea sutil se veía a la luz del amanecer, pero no me di cuenta de un detalle relacionado con la isla y el horizonte presentes en la fotografía hasta días después de haber abandonado aquellas tierras.

La isla de Mololosing sobre mi horizonte

MISCELÁNEA

El horizonte constituye el perfil del mundo visible, el lugar donde cielo y tierra se unen y separan a la vez, allí, a lo lejos, en los confines del planeta. Una línea que se acerca o aleja según la altitud de mis ojos sobre el océano y que siempre ha incitado en el observador unos deseos de aventura a menudo formulados en una pregunta silenciosa: ¿y más allá, qué hay? Pues, más océano, y más islas, y más horizontes y, si sigues, y sigues, después de dar una vuelta entera al planeta, llegarás de nuevo al mismo punto de partida, y... Pero, ¿de qué detalle estaba hablando? ¡Ah, sí! Si uno se fija bien en la foto (ojalá la calidad de la copia lo permita) podrá ver cómo la que podríamos llamar «línea de flotación» de la isla Mololosing (y que se inicia con su playa, a la izquierda de la isla) es un segmento que ocupa un fragmento del horizonte. Es decir, mi estatura ocular convertía en intervalo del horizonte la «línea de flotación» de Mololosing. Entonces conociendo la altura de mis ojos sobre el nivel del mar (mi estatura ocular) puedo calcular con facilidad la distancia a la que me hallo, no sólo de la isla, sino de mi horizonte. Me estoy planteando una cuestión matemática de tipo personal:

¿A qué distancia está mi horizonte?

No es tema de este trabajo discutir sobre el carácter del horizonte, sobre si realmente se ve, se intuye o se trata de un espejismo. Ni si la línea que llamamos así es realmente una línea (para ello habría que suponer una quietud en la superficie del mar que nunca podrá darse). En el tratamiento matemático que se va a dar se hará una abstracción de la realidad en los siguientes términos:

1. La Tierra es una esfera perfecta de radio R=6.370 km. cuya superficie carece de la menor arruga o defecto.
2. La luz que llega hasta nuestros ojos lo hace siguiendo una línea recta insensible a las alteraciones que diversos factores le ocasionarían en realidad, como por ejemplo la refracción[1].

Sea P el punto donde se hallan los ojos del observador, $h = PS$ su estatura ocular, O el centro del planeta y Q un punto del horizonte matemático visible desde P. Sea $x = OP = R+h$, y sea $H = PQ$ la distancia que nos separa del horizonte:

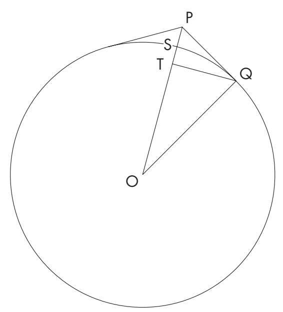


Figura 1

Pero, ¿qué es el horizonte? ¿Una recta? ¿Una curva?

Entonces el triángulo PQO es rectángulo en el punto Q porque H es un segmento tangente a la circunferencia terrestre. Luego:

$$OP^2 = OQ^2 + PQ^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = R^2 + H^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad H = \sqrt{x^2 - R^2}$$

Esta es la distancia que separa al observador de su horizonte en función de su distancia ocular x al centro del planeta. El dominio de definición de esta función es el conjunto $(-\infty, -R] \cup [R, +\infty)$. Se trata de la hipérbola de asíntotas $y = \pm x$ cuya ecuación general es

$$x^2 - y^2 - R^2 = 0$$

Para un observador ubicado justo a la orilla del mar y cuya estatura ocular sea h = 1,7 metros, es decir, $x = R+1{,}7$, se obtiene

$H(6370{,}0017) = 4653{,}816$ m = 4,654 km.

Pero, ¿qué es el horizonte? ¿Una recta? ¿Una curva? Evidentemente, nuestro horizonte es un arco de circunferencia puesto que se visualiza sobre una superficie esférica. Y es lo reducido de nuestro ángulo de visibilidad lo que nos impediría ver completa esa circunferencia «horizontal» de hallarnos en un pequeño islote en medio del océano. Para hallar el radio $r = r(x)$ de nuestro horizonte fijémonos en que los triángulos PQO y QTO de la figura anterior son semejantes. Luego:

$$\frac{r}{H} = \frac{R}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad r(x) = \frac{RH}{x} = R \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{R}{x}\right)^2}$$

El horizonte imaginario

Todo lo que se ha hecho hasta aquí tiene sentido para $x \in (-\infty, -R] \cup [R, +\infty)$ ¿Qué representaría tomar $x < R$? Puesto que $h = x - R$ representa la estatura ocular de un observador medida desde la superficie del planeta, un valor de x menor que R representaría una estatura

1 De hecho, la refracción terrestre nos permite ver el horizonte físico, un poco más lejano que este horizonte matemático del que estamos hablando.

ocular negativa, o sea, que el observador está boca abajo con la cabeza metida en el interior del planeta. En el mundo en que vivimos esto es casi imposible y de ser así uno no es que no vea el horizonte, es que no ve nada. Pero sí que resultaría factible en un planeta de fisonomía complementaria al nuestro. Imaginemos un universo denso de materia en el que se hubiera generado una ingente burbuja de aire. Los habitantes de esta Antitierra (nuestra Tierra vuelta como un calcetín) se pasearían por su superficie cóncava gracias a la fuerza gravitatoria centrífuga derivada de la masa universal que la encierra. Constituirían el firmamento visible desde un punto cualquiera de este antiplaneta los accidentes geográficos de sus antípodas: montañas, valles, ríos, mares, ciudades, etc. Todo flotando allá en lo alto. Desde un punto arbitrario del antiplaneta puede verse cualquier otro:

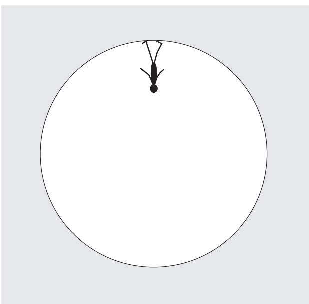


Figura 2

¿Qué significa horizonte ahora? Podemos aventurarnos a decir que se tratará del paralelo que define la estatura ocular de uno de sus habitantes. Antes echemos un vistazo a la función $H(x)$ y veamos qué sucede cuando x toma valores fuera del dominio de definición. Por ejemplo:

$$H(\pm R) = 0$$

$$H\left(\pm \frac{R}{2}\right) = \frac{R\sqrt{3}}{2}\, i$$

$$H(0) = Ri$$

¡Claro! De tanto imaginar aparecen los números imaginarios. Si representamos $H(x)$ en el plano complejo para $-R \le x \le R$ nos encontraremos con la circunferencia de centro en el origen y radio R, es decir, el propio antiplaneta. Precisamente esta circunferencia del plano complejo es la que llena el hueco existente entre las dos ramas de la hipérbola anterior:

Los habitantes de esta Antitierra (nuestra Tierra vuelta como un calcetín) se pasearían por su superficie cóncava gracias a la fuerza gravitatoria centrífuga derivada de la masa universal que la encierra.

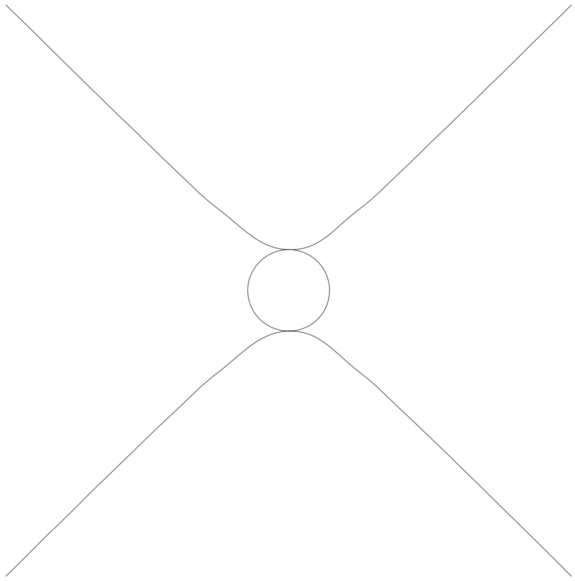


Figura 3
[En este gráfico (en el cual se omiten los ejes y cuyo origen se sitúa en el centro de la circunferencia, además de tomar $R = 1$), se ha representado la variable x sobre el eje de ordenadas]

Y el que llamaremos horizonte de un punto de estatura ocular $h < 0$ será el paralelo definido por esta misma estatura ocular. Cuando $h = -R$, esto es, cuando $x = 0$, su radio será el mismo radio R del planeta y su horizonte será el ecuador, pero visto desde dentro:

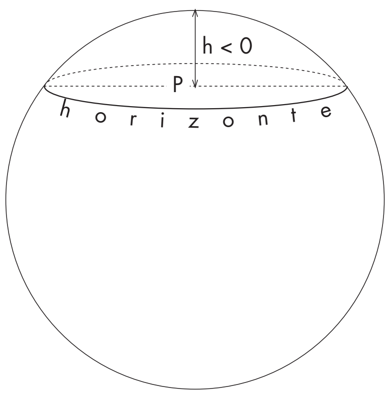


Figura 4

Horizontes lejanos

En el segundo apartado habíamos hallado $r(x)$, el radio del horizonte visible desde x. De su expresión se ve que $r \to R$ cuando $x \to \pm$ °. Esto implica que por muy alejados que estemos de un planeta nunca veremos completo su ecuador: el perfil del disco solar visible, aunque muy parecido, es algo menor que el ecuador del Sol.

En la figura siguiente se muestra la representación gráfica tridimensional (efectuada con el programa MapleV Release4) de la función que asocia a cada x la circunferencia de radio $r(x)$. Es decir, aquella que contiene el horizonte visible o imaginario desde cualquier x:

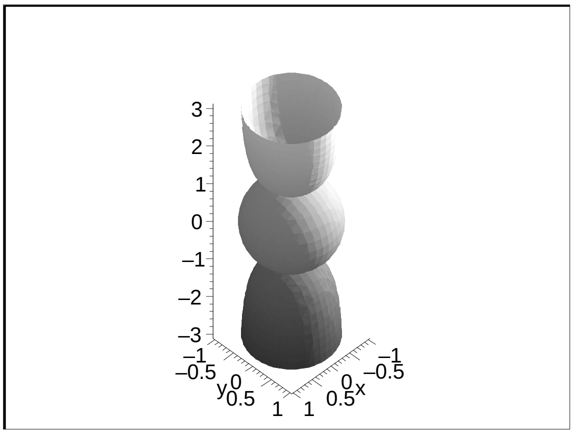


Figura 5
[Como antes, se ha tomado R = 1 y los valores de x se sitúan también en el eje vertical. El horizonte visible desde el infinito será el ecuador del planeta (el mismo que para x = 0)]

Se han representado sobre el eje vertical los valores de x para facilitar la comprensión del gráfico. Al efectuar en éste un corte por el punto x de dicho eje vertical mediante un plano perpendicular obtenemos una circunferencia de la que un arco será el horizonte visible desde x. La esfera intermedia entre ambos tubos infinitos (sendos cortes verticales en ella nos muestran los horizontes del antiplaneta) es también a la vez el propio antiplaneta o planeta «imaginario».

Epílogo

A la hora del crepúsculo regresé a la playa y la encontré vacía. Vacía de gente, pero plagada de pequeños cangrejos que emergían de la arena y recorrían a toda velocidad la distancia que mediaba entre el hueco abandonado y el de otro congénere que iban a ocupar. Igual que nosotros se habían mantenido ocultos durante las horas de la canícula. El mar seguía perezoso, más tranquilo si cabe. No se lo reproché, ¿quién es capaz de agitarse bajo el calor asfixiante que nos había atenazado a lo largo del día?

La línea del horizonte, mi horizonte, me pareció la misma que había visto por la mañana y que continuaba allí, lejos, sí, pero a igual lejanía. Al contraluz del atardecer la isla Mololosing era una mancha oscura, casi negra, cuyo perfil irregular creaba una extraña protuberancia en la línea de mi horizonte.

Ante la menguante bravura del disco solar que tras él se ocultaba me pregunté qué tierras serían las que ahora abrasaba. Un disco que ya no lo era, pues la refracción lo achataba transformándolo en una especie de elipse anaranjada, exprimiéndole las últimas gotas de jugo cálido. Iba a plantearme algunas cuestiones relacionadas con este fenómeno físico cuando un rumor interrumpió el silencio que me rodeaba. Un bote volvía de faenar. Varias personas sentadas en proa parecían compartir conmigo el espectáculo. Para ellas mi horizonte simplemente no existía. A mí el suyo me era del todo invisible. No quise dejar escapar la oportunidad de llevarme a casa una puesta de sol tan hermosa:

Atardecer en Lolak

Miquel Albertí
IES Pau Vila
Sabadell (Barcelona)
Federació dÉntitats
per l'Ensenyament de les
Matemàtiques a Catalunya

SUMA 40
junio 2002, pp. 113-117

Isoperímetros: Resolución del problema de los isoperímetros mediante la función cuadrática

Grupo Construir las Matemáticas*

TALLER DE PROBLEMAS

YA HEMOS PRESENTADO al problema isoperimétrico utilizando diferentes escenarios. Con el fondo de la Historia, lo presentamos desde su nacimiento y, por ahora, lo hemos dejado en el siglo XVII de la mano del Cálculo de Variaciones (en el próximo número de SUMA lo acercaremos hasta nuestros días). Con el fondo de una clase de Matemáticas, ha salido, también cogido de la mano, de la Geometría y del Álgebra. Hoy toca pasear por los jardines que las Funciones ofrecen; en particular con la función cuadrática resolveremos un caso particular.

Desde la antigüedad ha interesado encontrar la relación entre el perímetro y el área de las figuras planas. Así, Ptolomeo, en su *Almagesto*, escribe:

> Puesto que entre las figuras diferentes pero isoperimétricas, las que tienen más lados son más grandes, entre las figuras planas el círculo es la mayor y de entre los sólidos, la esfera.

Tratamos de reconstruir el histórico y clásico problema de los isoperímetros de forma que pueda ser entendido y tenga interés para nuestros alumnos y alumnas de Secundaria.

Esto nos va a permitir desarrollar el pensamiento matemático al buscar las soluciones, así como poner de manifiesto lo que de cultura matemática hay en el mundo real, para llegar a la conclusión de que hay Matemáticas en todo lo que nos rodea, ¡hasta en un cuadro! Comprobémoslo.

> Deseamos saber cuál es el mayor cuadro de forma rectangular que tiene 3 metros de perímetro.

Este es el enunciado del problema de los isoperímetros bajo el cual trabajaremos con nuestros estudiantes. Éstos, en su resolución, deben emplear heurísticos que les ayuden a desarrollar sus capacidades matemáticas y a sistematizar sus resultados y conclusiones parciales, despertando en ellos actitudes positivas hacia la investigación y gusto por el trabajo bien hecho.

* Los componentes del Grupo Construir las Matemáticas son Rafael Pérez, Isabel Berenguer, Luis Berenguer, Belén Cobo, M.ª Dolores Daza, Francisco Fernández, Miguel Pasadas y Ana M.ª Payá.

Comenzamos estableciendo una discusión entre el alumnado sobre los distintos cuadros que se pueden construir con un listón metálico de 3 metros de longitud, lo suficientemente fino y flexible, como para poder hacer las esquinas doblándolo.

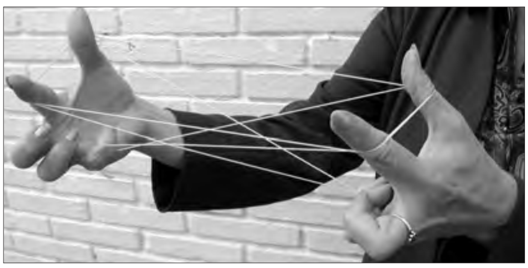
Siguiendo las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele[1], les planteamos la pregunta de si todos los cuadros son igual de grandes –es decir, tienen igual área– y muchos responden que sí, pero casi al mismo tiempo otros dicen que no, tras comprobarlo con dos o tres casos concretos. Esta situación nos permite disponer de un diagnóstico previo del grado de asimilación y conocimiento de la cuestión por parte del alumnado, y es el punto de arranque para analizar en profundidad el problema e intentar resolverlo.

Para continuar, podemos usar diversas estrategias matemáticas de simulación, como la de hacer el cuadro sobre el papel o sugerirles que utilicen un cordón o, bien, ayudarnos del programa Cabri-géomètre II, etc.

Con un cordón

La simulación del problema mediante un cordón, es similar al inicio de un juego muy popular, que consiste en anudar los extremos del mismo y sostenerlo tirante con los dedos índice y pulgar de ambas manos, a modo de un rectángulo, tal como nos indican las fotos adjuntas.

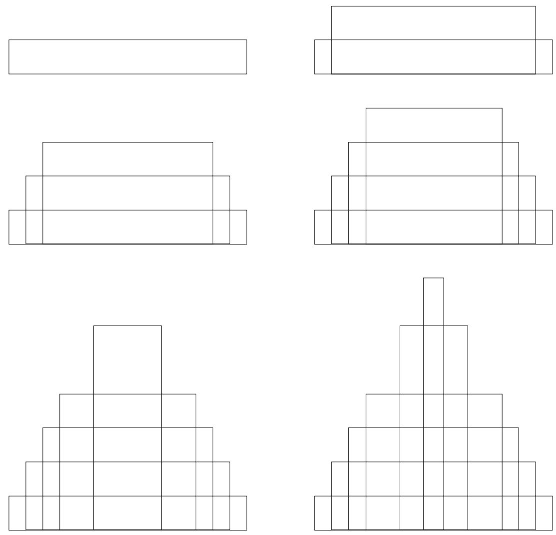
El juego continúa con la realización de diversas figuras con el cordón según nos muestra estas otras fotos.



Podemos comenzar, por ejemplo con los dedos índice y pulgar, de cada una de las manos, prácticamente unidos, y, a continuación, iríamos separándolos cada vez más.

Sobre un papel

La simulación sobre un papel, que ha sido anteriormente citada, quedaría reflejada en la siguiente serie de dibujos.



El estudiante utiliza sus conocimientos lógicos y construye algunos cuadros mediante los diversos procedimientos que hemos enunciado. En cualquier caso, necesita conocer la longitud de los lados del cuadro rectangular. Si es necesario, se les da una pista a aquellos que lo precisen; por ejemplo, se les dice que si la base la toman de 1 metro, la altura tendrá que ser necesariamente de 0,5 metros, de forma que los cuatro lados sumen 3 metros; el área del tablero así construido es de 0,5 m^2. Se les solicita que piensen en seis cuadros más, con otras dimensiones, y que tengan en cuenta que basta ir fijando la base y a partir de ahí calcular todo lo demás; y, por supuesto, que anoten sus cálculos.

Cuando los hayan hecho, se les pregunta sobre la forma de organizar toda esa información para poderla comparar mejor, observar regularidades y ayudarles en sus decisiones. En el caso de que tengan dificultades para hacerlo se les puede preguntar, ¿os facilitaría vuestro trabajo de investigación la construcción de una tabla? Esta pregunta se les hará en el caso de que nadie haya organizado la información usando este tipo de heurístico. Incluso en caso necesario, se les puede proponer una tabla en concreto; por ejemplo, que anoten en una fila la longitud de la base en forma ordenada y en la otra, el resultado del cálculo del valor de la superficie.

Base (en metros)		0,1		0,5		0,6		1	
Área (en m^2)		...		0,5		...		...	

Llegado a este punto, se les solicita que intenten hacer la tabla de otra forma. Tras sus sugerencias se establece un debate para poner de manifiesto distintos caminos de plantear y resolver el problema.

Una posible ficha o esquema de trabajo que proponemos a los alumnos y alumnas consiste en:

- Completa la tabla, con todos los datos que necesites.
- ¿Se repiten algunos de los valores del área?
- ¿Crees que sería más cómodo usar centímetros en vez de metros?
- Observa la tabla detenidamente y comprueba si se da alguna regularidad.
- ¿Estás en condiciones de decidir sobre las dimensiones del cuadro de mayor área? ¿Cuáles son?
- Para que tengas más seguridad en tu respuesta, comprueba con un valor mayor y otro menor, próximos al de la base que has calculado.
- Si necesitas más valores en la tabla puedes ayudarte de la calculadora, si lo estimas oportuno.
- ¿Te decides ya?

Con esta primera parte del esquema el estudiante aprende a organizar su información de forma correcta, observa regularidades, adecua las unidades de medida al contexto del problema, comprueba soluciones, maneja la calculadora…

Completemos la ficha, usando otra estrategia que nos permita confirmar que la decisión adoptada es la correcta.

- Construye una gráfica, representando sobre el eje de abscisas la variable «base» y sobre el eje de ordenadas la variable «Área». No olvides graduar los ejes de forma adecuada, para ello recuerda todo lo aprendido sobre esta cuestión.
- Si ya has construido la gráfica, obsérvala detenidamente.
- ¿A mayor base le corresponde mayor área? ¿Ocurre siempre?
- ¿La gráfica es ascendente? ¿Para qué valores de la base lo es?
- ¿A partir de qué valor de la base disminuye el área?
- Comprueba si aparece alguna regularidad.
- ¿Qué conclusiones obtienes?
- ¿Cuál es el mayor cuadro que tiene 3 metros de perímetro? ¿Es el mismo que obtuviste antes usando sólo la tabla?
- ¿Qué te aporta la gráfica?
- Escribe en tu cuaderno las reflexiones que te hayas ido haciendo en la lectura de la tabla y de la gráfica para reafirmar o modificar tu decisión sobre las dimensiones que debes darle al cuadro rectangular para que salga lo más grande posible.

Si profundizamos, para el segundo ciclo de la ESO, podemos ampliar la resolución del problema añadiendo a la organización de los datos en la tabla y a la visión intuitiva de la gráfica la potencia del lenguaje simbólico mediante la fórmula del área que nos da la expresión matemática de la función cuadrática de la que queremos calcular el máximo absoluto.

La ficha que sugerimos en esta segunda fase es la siguiente:

Rellenar la tabla siguiente:

Base (en m) = b			0,4						
Altura (en m) = $1,5–b$			1,1						
Área (en m^2) = $b(1,5–b)$ = $1,5b–b^2$			0,44						

Teniéndola en cuenta responde a las siguientes cuestiones:

- ¿Cuál es la variable independiente? ¿Podía haber sido otra?
- ¿Cuál es la variable dependiente?
- ¿Hay una relación funcional entre ellas?
- ¿De qué tipo?
- ¿Qué expresión matemática tiene esta función?
- Expresa cuál es el dominio.
- Con ayuda de tus conocimientos determina el vértice de la parábola.
- Representa la función.
- Determina el recorrido.
- ¿En qué intervalos es creciente?, ¿y decreciente?
- ¿Qué ocurre en el vértice?
- Debes estar en condiciones de decir cuáles son las dimensiones del cuadro de mayor área, sabiendo que su perímetro es de 3 metros.
- ¿Conocer la fórmula de la función te permite resolver el problema con más seguridad, precisión y economía de esfuerzo?

Con este esquema el alumnado aprende a valorar la importancia del uso de las fórmulas. Asimismo, el conocimiento del modelo matemático de la función cuadrática le permite, al aplicarlo en este caso, determinar con total precisión el máximo absoluto de la función y encontrar, finalmente, la solución del problema.

Construcción con Cabri II

La simulación del problema mediante un proceso constructivo puede realizarse a través del programa Cabrigéomètre II, tal como dijimos en un principio.

El problema de saber cuál es el mayor cuadro rectangular que tenga 3 metros de perímetro (longitud del listón), se reduce al de buscar el que tenga 1,5 metros de semiperímetro. Trazamos un segmento con esta nueva longitud y lo dividimos en dos partes, una será la base y la otra la altura del cuadro.

Con los dos trozos construimos un rectángulo, y medimos su área:

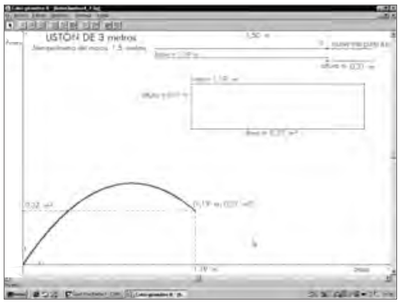
Llevamos las medidas de la base y la del área a un sistema de ejes de coordenadas, obtenemos un punto:

Si cortamos el listón por otro punto obtendremos una nueva situación:

Si lo hacemos por otro lugar, obtendremos otro rectángulo y un nuevo punto en el sistema de ejes coordenados:

Podemos hacerlo de muchas formas:

Si el punto P por donde cortemos el listón, lo sometemos a una animación, y activamos la traza del punto de la gráfica:



Va apareciendo la gráfica de la función.

Si nos situamos en la gráfica, más concretamente, en el máximo absoluto de la misma, tendremos la solución al problema. Se observa que la longitud de la base es de 0,75 y el área de 0,5625 (puede usarse una mayor precisión que la desarrollada en los gráficos). Estos resultados, como puede apreciarse, se corresponden con un cuadrado.

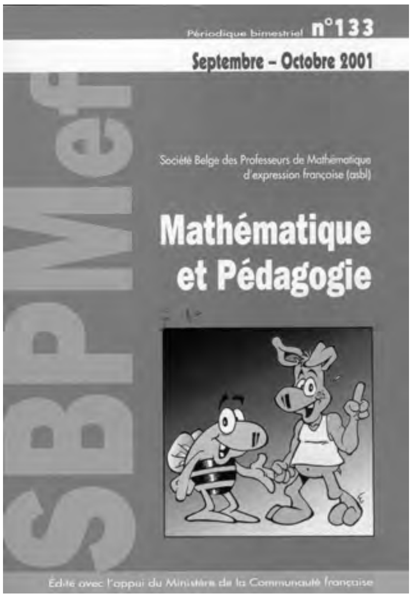
La ficha o esquema que, más concretamente, proponemos a los alumnos y alumnas para la realización de esta construcción es:

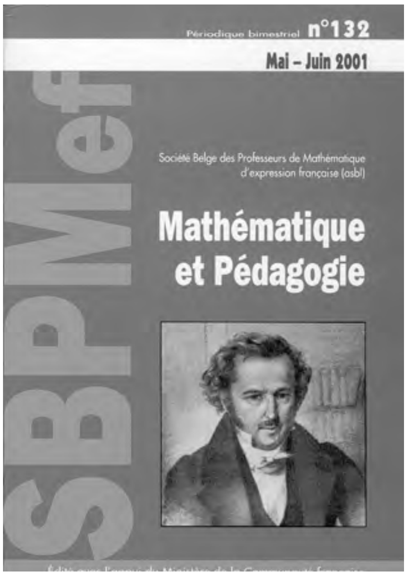
- Elige en *Opciones – Preferencias – Precisión mostrada y unidades*:
  Número de decimales - Longitud: 3.
  Unidades: Metro (m).
- Traza un segmento.
- Fija un extremo con el *Fijar/Liberar*.
- Mide dicho segmento, aparece una medida.
- Mueve el otro extremo del segmento hasta que aparezca la medida de 0,150 metros.
- Fija este otro extremo del segmento.
- Usa la escala de 1:10, para lo cual activa la calculadora, pincha en la medida de 0,150 metros, y multiplícala por 10, aparece la nueva medida de 1,5 metros (longitud del semiperímetro del marco).
  Con el ratón arrastra el resultado junto a la medida inicial y oculta ésta con *Ocultar/Mostrar*.
- Sitúa un punto sobre el segmento. Mediante *Etiqueta* asígnale la letra P.
- Comprueba con el ratón que puedes mover el punto P sobre dicho segmento.
- En *Modificar apariencia*, pincha en el punto más grueso y a continuación sitúate en P, aparece un pincel, pincha con él en dicho punto, harás que resalte bastante y así lo observarás con más facilidad.
- El segmento original ha quedado dividido en dos nuevos segmentos (son la base y la altura del marco). Mide ambos segmentos con *Distancia y longitud*, desde cada uno de los extremos hasta el punto P, aparecen dos nuevas medidas.
- Paralelamente y un poco más abajo, vas a construir separadamente la base y la altura del marco, para lo cual traza una semirrecta a la altura del extremo izquierdo del segmento y hacia la derecha, y realiza la *Transferencia de la medida*, sin escalar, del nuevo segmento situado a la izquierda sobre dicha semirrecta, oculta a continuación dicha semirrecta, te quedan dos puntos que los unes mediante un segmento, de esta manera acabas de construir la base del marco. Traza otra semirrecta, paralelamente y un poco más abajo, a la altura del extremo derecho del segmento inicial y hacia a la izquierda y procede de forma similar para el otro segmento obtienes la altura del marco.
- Mediante *Etiqueta*, ponles los nombres de base y altura respectivamente.
- Observa y comprueba qué ocurre al mover el punto P sobre el segmento inicial.
- Usando la escala anterior transforma las medidas de la base y altura en otras dos para que sean compatibles y se ajusten a nuestro problema (utiliza el mismo proceso, multiplica por 10).
- Para construir el marco procede, por ejemplo, así:
  Traza una semirrecta, y para que sea el borde superior del marco transfiere la medida correspondiente a la base, sobre el nuevo punto obtenido traza una semirrecta perpendicular a la anterior y lleva sobre ella la medida de la altura mediante la transferencia de medidas, sobre el nuevo punto recién obtenido traza una nueva semirrecta perpendicular a la anterior y transfiere la medida de la base, a partir del nuevo punto traza otra semirrecta perpendicular a la anterior y transfiere la medida de la altura. Mediante *Polígono* une los cuatro puntos, obtienes uno de los posibles marcos que se pueden construir.
- Oculta las semirrectas anteriores, para que se note bien dicho marco.
- Observa y comprueba lo que ocurre al mover el punto P.
- Mide las longitudes de la base y la altura del marco, y aplica la escala que se estableció al principio.
- Mide el área del polígono, en nuestro caso la del marco. Aplica doblemente la escala, es decir, multiplica por 100.
- Activa *Mostrar ejes*, y lleva el origen de coordenadas al extremo inferior izquierdo de la pantalla.
- El eje de abscisas será la base, y el de ordenadas, el área.
- Lleva las medidas del marco, mediante la transferencia de medidas, a los correspondientes ejes. Tendrás que escalar las medidas que lo precisen para que la gráfica que obtengas esté dentro de la visualización en pantalla.
- Oculta todas las medidas que no se ajusten a nuestro problema, y quédate con las que necesites para la compresión del mismo.
- Sobre los puntos que obtienes en los ejes traza perpendiculares a los mismos, y sitúa un punto en la intersección de ambas rectas, oculta dichas rectas, y traza segmentos discontinuos desde dicho punto a los ejes coordenados.
- Activa *Traza* para dicho punto, y *Animación* para el punto P (aparece un muelle, suéltalo. Prueba con diversas intensidades del mismo).
- Obtienes una gráfica. Analízala enumerando todas sus características y cuáles te ayudan a solventar el problema de forma razonada.

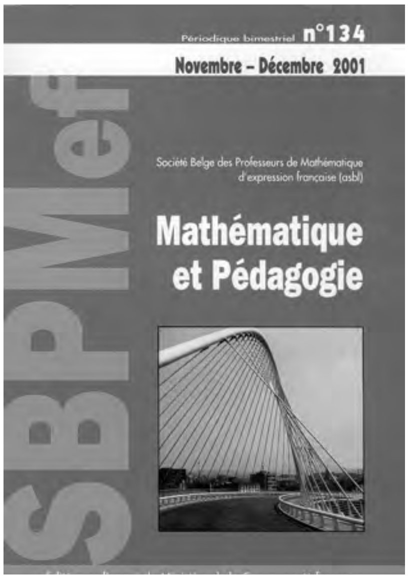
El alumnado debe reflexionar sobre lo realizado, y cómo este poderoso instrumento nos ayuda a la comprensión e investigación de determinados problemas. Las nuevas tecnologías, y programas como el utilizado, nos ayudan a comprender problemas históricos en una nueva dimensión educativa actual, con lo que los alumnos y alumnas se adentrarán en el conocimiento de dichos problemas con una atractiva perspectiva de cara al futuro, pudiendo a su vez generar nuevas situaciones problemáticas que es lo que en definitiva enriquece.

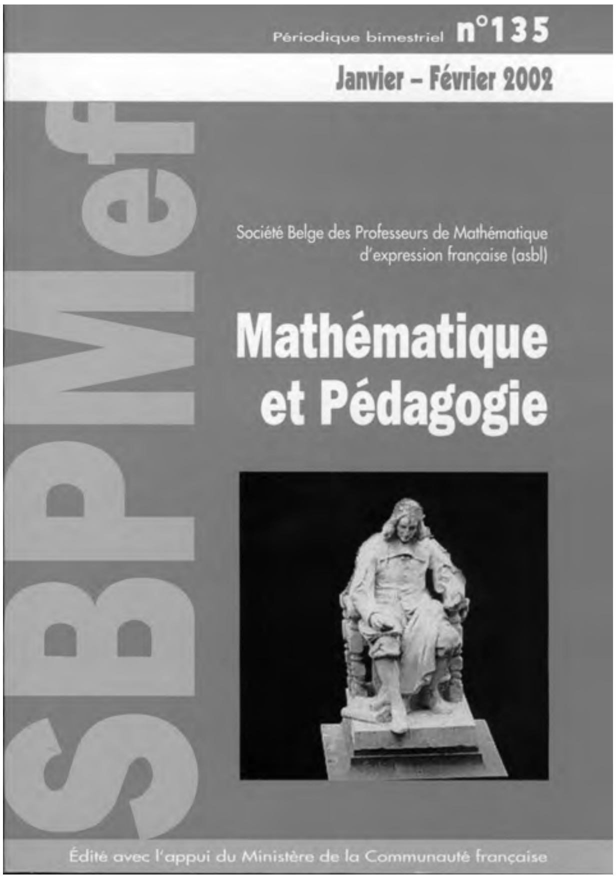
Notas

[1] Grupo Construir las Matemáticas: «Isoperímetros: Ficha didáctica en geometría. Métodos trigonométricos». Páginas 101-106. *Suma* n.° 36. Febrero 2001.


Périodique bimestriel n°133
Septembre – Octobre 2001
SBPMef
Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française (asbl)
Mathématique et Pédagogie
Édité avec l'appui du Ministère de la Communauté française


Périodique bimestriel n°132
Mai – Juin 2001
SBPMef
Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française (asbl)
Mathématique et Pédagogie


Périodique bimestriel n°134
Novembre – Décembre 2001
SBPMef
Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française (asbl)
Mathématique et Pédagogie


Périodique bimestriel n°135
Janvier – Février 2002
SBPMef
Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française (asbl)
Mathématique et Pédagogie
Édité avec l'appui du Ministère de la Communauté française

SUMA 40
junio 2002, pp. 119-122

Publicidad: prensa del corazón y otros temas

Fernando Corbalán

MATES Y MEDIOS

SE HAN PUBLICADO estos días de nuevo las estadísticas sobre el consumo de prensa en nuestro país: seguimos estando en 108 ejemplares por 1000 habitantes. Superamos ligeramente por arriba el nivel del subdesarrollo marcado por la UNESCO: 100 ejemplares. Y lejos, por supuesto, de los niveles de los países de nuestro entorno, que se suele decir ahora. Pero hay un elemento distorsionador. En esos países (Inglaterra, Alemania…) suben las estadísticas las tiradas de la prensa «amarilla», de los periódicos de cotilleos, suplidos aquí por las tiradas inmensas de las revistas del «corazón». A pesar de que suponen un capítulo importante de los medios, y por tanto de la conformación de la opinión pública, no siempre se tienen en cuenta, se les suele despreciar como poco importantes. Algo así ha pasado en esta sección… ¡hasta este momento!

Pasamos pues a ocuparnos de la publicidad en esas revistas del corazón. ¿También en ellos hay algo de matemáticas o se considera que dado el nivel cultural que se considera que tienen sus destinatarios y destinatarias –o al menos eso se diría que piensan los redactores dada la «profundidad» y «variedad» de los textos que en ellos aparece– no vale la pena ni mencionarlas porque no serán apreciadas? Pues al contrario de lo que fuera esperable es relativamente frecuente la presencia de datos porcentuales y referencias a presuntos estudios científicos en buena parte de los anuncios de productos de belleza. Vamos a ver algunos y a reflexionar sobre su fiabilidad así como el papel que se les asigna a las matemáticas en ellos.

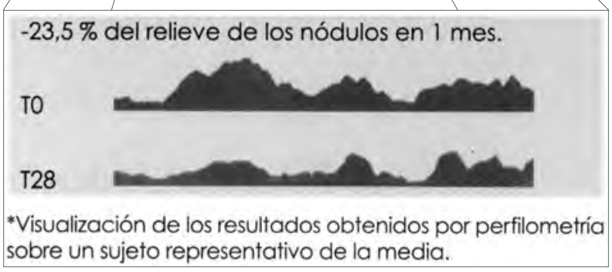
Un lenguaje, ¿incontrovertible o increíble?

Ya hemos hablado otras veces que según el Informe Cockroft la razón de que se estudie matemáticas en todos los países y en todos los niveles educativos proviene del hecho de que es un lenguaje «poderoso, conciso y sin ambigüedades». El tercer aspecto parece llevar asociado el hecho de indiscutible, de incontrovertible, y así parece haber calado en el inconsciente colectivo, sobre todo si va asociado a un general desconocimiento y soltura en el manejo de las matemáticas en el contexto de la vida real, lo que lleva aparejado una cierta sacralización de las informaciones dadas con datos numéricos, sobre todo si incluyen porcentajes.

En todos los casos los datos que se dan son apabullantes y muy precisos, a la vez que completamente etéreos, puesto que no se concreta nada respecto a lo que se refieren. Afirman que se consiguen unos resultados en apariencia espectaculares, pero no se sabe en qué consisten, a pesar de que utilizan una terminología estadística de una complicación no desdeñable. Veamos algunos ejemplos.

En el caso del Anuncio 1 es un «–23,5% del relieve de los nódulos de celulitis», de lo que se aporta una visualización sobre «un sujeto representativo de la media». En el anuncio 2, se asegura «en el 77% de los casos ACCIÓN ALISANTE reforzada» y «PÉRDIDA CENTIMÉTRICA probada*», llevando el asterisco a una llamada en letras minúsculas que afirma «pérdida centimétrica media del contorno del muslo de 0,5 cm pudiendo llegar hasta 2 cm». Llamo la atención que se acuña un término nuevo (pérdida centimétrica) que en mi modesta opinión se podría llamar «disminución» simplemente y si la media (¿de una muestra de qué tamaño?) es de 0,5 cm y hay algunos casos de 2 cm, y sólo afecta al 77% de los casos, ¿cuánta disminución hay en muchos otros?, ¿cuál era el perímetro inicial? ¿qué disminución porcentual supone? En fin, un tanto delicuescente todo.

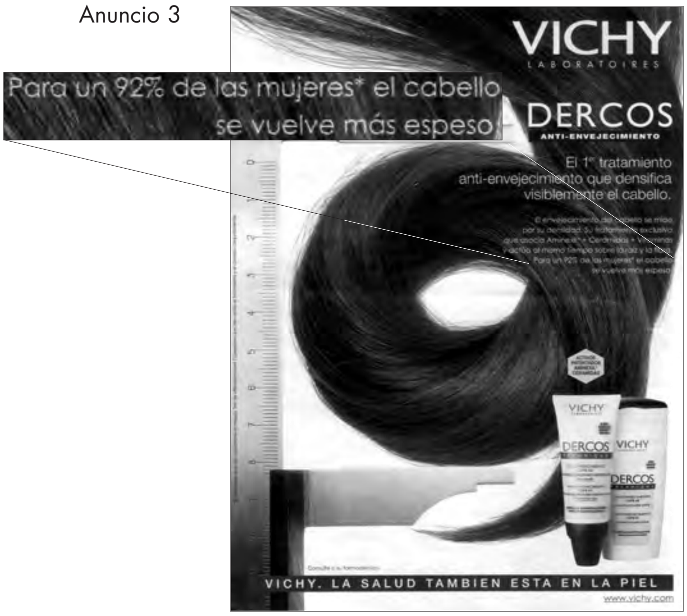
Anuncio 1



Anuncio 2
Como aclaración, en el lateral izquiedo puede leerse que hay una «Pérdida centimétrica media del contorno del muslo de 0,5 cm pudiendo llegar hasta 2 cm»

Y si eso pasa con conceptos ya acuñados, peor es con otros «novedosos». Porque el Anuncio 3 habla de un alto porcentaje (nada menos que del 92%) de mujeres a las que «el cabello se vuelve más espeso». ¿Cómo se mide eso de la «espesura»? Pero aún se pueden buscar parámetros más variados y sofisticados, y en el anuncio 4 se habla de «piel confortable», «piel más densa» y «tez más uniforme». Eso sí con unos porcentajes enormes y precisos de aumento de los mismos.

Anuncio 3



Anuncio 4

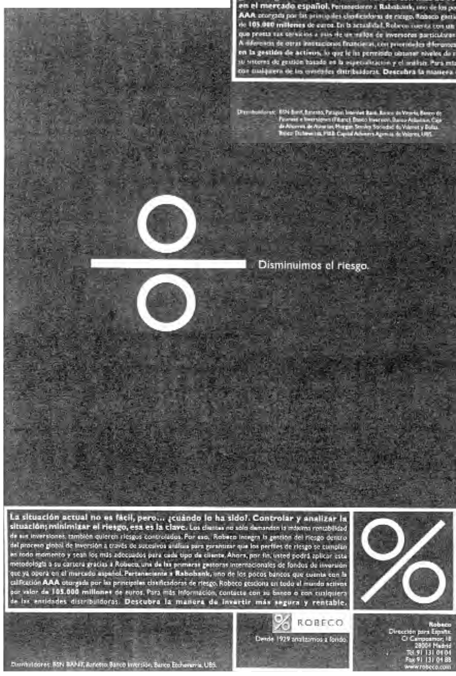
Son algunos ejemplos, pero la presencia de datos similares es muy frecuente en los anuncios de productos de belleza. Y el efecto debe ser importante (o al menos eso creen los publicistas –que lo usan una y otra vez– y los anunciantes que pagan la publicidad –puesto que aparece en todas las grandes marcas de cosmética–), por lo menos para los destinatarios (más bien destinatarias, al menos teóricamente) de las revistas del corazón, porque es de destacar que en los anuncios sobre productos de belleza que (también) aparecen en los periódicos y revistas «normales» (los de información general), sobre todo en los suplementos dominicales (los «colorines») nunca se ponen esas cifras milagrosas. ¿Se les supone mayor sentido crítico a los segmentos más «cultos»? ¿Más conocimiento matemático? ¿Mayor odio a las matemáticas? Se pueden seguir haciendo preguntas de parecido cariz y de tan difícil respuesta como la procedencia de los datos de los anuncios que comentamos. En todo caso, dejamos al curioso lector que escoja las preguntas a responder así como el sentido de las mismas.

Números racionales

Ya hemos hablado otras veces de que la forma habitual de aparecer en los medios es como decimales o porcentajes (lo que debería llevar a una dedicación de tiempo en la misma proporción en clase de matemáticas). Pero a veces aparecen también las fracciones. Y con guiños e imaginación (o creatividad si hablamos en términos del gremio) como para resultar aprovechables, en clase y como pautas de comportamiento.

Tenemos una campaña de introducción de nuevo producto de inversiones que aparece en el mercado y, cómo no, lo hace con el símbolo de la rentabilidad: el tanto por ciento (Anuncio 5). Al que poco después le da un pequeño giro, en el que aparece además un guiño mitad matemático –algo habitual cuando la publicidad se dirige a gente con capacidad de decisión, como ya hemos comentado en otras ocasiones– mitad fallido –puesto que 0/0 no sólo es igual a 0, sino también igual a cualquier otro número (Anuncio 6).

Anuncio 5



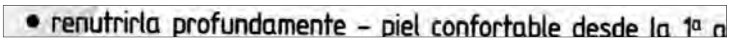
Anuncio 6

Una especie de axioma de los medios es que las fracciones no tienen que aparecer salvo causas de fuerza mayor (y entonces con todas sus letras, como recomienda por ejemplo el *Libro de estilo* de *El País*). Pero quizás las cosas están cambiando. O hay otro guiño de complicidad con un número fraccionario y de nuevo los que sabemos matemáticas y las apreciamos somos los que nos podemos (al menos según los publicistas) comprar coches caros. (Anuncio 7).

Anuncio 7

Persistencias

Sigue (después de la inefable campaña de la *ONCE* que ya tratamos en el n.° 35 de *Suma*) el horror a los suspensos en matemáticas: podría ser cualquier otra asignatura pero no, se trata de ésta (Anuncio 8).



Anuncio 8

Pero por suerte la oficina de turismo griega (no en vano es la cuna de nuestra matemática occidental) escoge una perspectiva más positiva (Anuncio 9).Y también las celebraciones del año Gaudí nos traen en la publicidad insospechadas (en la clases habituales) relaciones entre arte, naturaleza y geometría (Anuncio 10). Dos buenas oportunidades para trabajarlo en clase y/o en viajes de estudios.

Anuncio 9

Anuncio 10

SUMA 40

junio 2002, pp. 123-124

Juegos de lápiz y papel

Grupo Alquerque*

DENTRO DE LOS JUEGOS de estrategia ocupan un apartado interesante los juegos de lápiz y papel, que tienen la ventaja de no necesitar ningún tipo de preparación previa, ni materiales especiales y que pueden jugarse en cualquier momento y lugar (aunque sería deseable que no durante las clases de otra asignatura).

Estos juegos tienen una atracción especial para los alumnos, y además de jugar se debería forzar el estudio del juego, los tipos de notación que se pueden usar para representar las partidas y, sobre todo, las estrategias que hay que aplicar en su desarrollo. Aunque muchas veces las estrategias ganadoras, si las hay, no son fáciles de deducir, sí pueden estudiarse jugadas y disposiciones que favorecen las posibilidades de ganar.

Existen multitud de juegos de lápiz y papel, algunos de ellos ya conocidos por los alumnos fuera del aula, como el de los ceros y cruces (el tradicional *tres en raya*). Aquí presentamos una pequeña selección de ellos. Todos son juegos para dos jugadores, y lo normal es que cada uno de ellos lo haga con un lápiz de distinto color, para diferenciar los puntos o líneas trazadas por cada jugador.

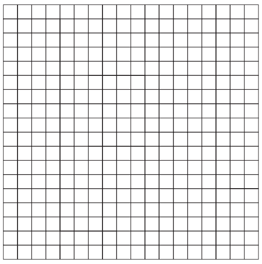
Cinco en línea

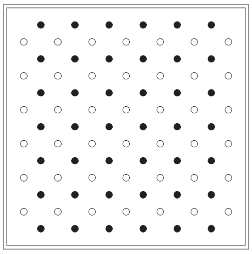
Es un juego muy antiguo que se llama también *las cinco estacas* o *los cinco botines*. En China se le conoce con el nombre de *Go-moku*. En Japón se le llama *Go-bang*, pues se juega sobre el *go-ban*, o tablero del Go (un damero de 18×18 con 200 fichas para cada jugador). Este juego también es conocido como *Pente* y puede ser jugado con fichas (o piedrecillas de cristal) sobre un tablero cuadriculado.

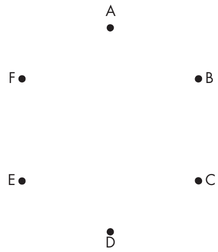
Se juega sobre papel cuadriculado donde se marca el terreno de juego trazando un cuadrado de 19×19 líneas, aunque no importa si es de 15×15 o de 13×13.

JUEGOS

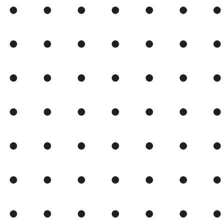
* Los componentes del Grupo Alquerque de Sevilla son Juan Antonio Hans Martín (C.C. Santa María de los Reyes), José Muñoz Santonja (IES Macarena), Antonio Fernández-Aliseda Redondo (IES Camas), José Blanco García (IES Alcalá del Río) y Josefa M.ª Aldana Pérez (C.C. Inmaculado Corazón de María —Portacelli—).


Cinco en línea


Bridg-it



Sim


Senderos

Reglas de juego:

1) Cada jugador escoge un símbolo identificativo para jugar (por ejemplo uno juega con «×» y otro con «o»).
2) El turno de comienzo se hace por sorteo.
3) Cada jugador, en su turno, dibuja su símbolo en una de las intersecciones del tablero (o bien en uno de los cuadros si se toma ese acuerdo).
4) Gana el jugador que primero consigue alinear horizontal, vertical o diagonalmente cinco marcas propias.

Bridg-it

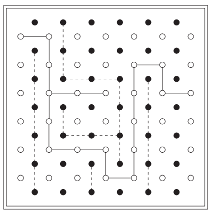
El *Bridg-it* fue inventado por un profesor de la Brown University (EE.UU.), David Gale, a finales de los años 50.

Es un juego de lápiz y papel para dos personas que deben jugar con sendos bolígrafos de distintos colores, construyendo inicialmente el «tablero» con igual cantidad de puntos de cada color y dispuestos de igual forma a como se ve en la figura (los círculos huecos serían de un color y los llenos de otro).

Reglas de juego:

1) Se sortea el orden de juego. A continuación se van alternando los movimientos de los jugadores.
2) Cada jugada consiste en unir con un trazo cualquier par de puntos, del color correspondiente al jugador, que sean adyacentes horizontal o verticalmente, pero no en diagonal.
3) No está permitido cruzar un trazo ya dibujado en el tablero.
4) El juego finaliza cuando uno de los jugadores consiga construir un camino que una dos lados opuestos del tablero a base de trazos de su color, proclamándose ganador de la partida.

Como ejemplo presentamos una partida en la que gana el jugador que ha dibujado los trazos continuos.



El Sim

Sobre el papel se dibujan puntos colocados de manera que sean vértices de un polígono (por ejemplo seis puntos para formar un hexágono).

La cantidad de puntos condiciona la duración de la partida.

Reglas de juego:

1) Se sortea el orden de salida.
2) Cada jugador juega con un lápiz de un color distinto y traza segmentos que unan dos puntos cualesquiera del tablero.
3) No se puede trazar un segmento sobre otro ya trazado.
4) Pierde el jugador que al trazar el segmento correspondiente a su turno forma un triángulo con tres lados del mismo color.

Senderos

Se juega sobre una retícula dibujada en el papel. La cantidad de puntos depende de la duración que se quiera dar al juego.

Reglas de juego:

1) Se sortea el orden de salida.
2) El primer jugador traza, donde quiera, un segmento que una dos puntos consecutivos del tablero en horizontal o en vertical, pero nunca en diagonal.
3) El otro jugador, y a partir de él cada uno en turno, dibuja un segmento que una dos puntos consecutivos del tablero en horizontal o en vertical, pero no en diagonal. Los segmentos se han de trazar a partir de uno de los dos extremos del camino ya dibujado.
4) Pierde la partida el jugador que al trazar su segmento cierra el camino.

SUMA 40
junio 2002, pp. 125-128

Los alumnos e Internet

Antonio Pérez Sanz, Mar Melero, Belén González, M.ª Mar Jiménez, Alejandro Garrido, Guillermo Pérez de Juan*

RECURSOS EN INTERNET

¿SE ACUERDAN USTEDES de las novelas por entregas de la prensa de hace un siglo? Difícilmente, pues la mayoría no habíamos nacido; pero todos hemos oído hablar de ellas. Pues algo parecido está pasando con la Ley de Calidad y el paquete de medidas educativas que las autoridades ministeriales están lanzando a la prensa por entregas: ayer fueron los decretos de mínimos, hoy los itinerarios, hace unas horas el cuerpo de catedráticos, ahora mismo la religión (católica por supuesto) en los centros, o los centros de niños y niñas separados (con el voto a favor de una insigne inspectora de Matemáticas en el Consejo Escolar del Estado).

La Sra. Ministra de Educación y su equipo de asesores se han manifestado como unos profundos admiradores de una película americana que causó furor hace ya unos cuantos años, *Regreso al pasado*, y que, como en el caso del MECD, tuvo segundas y terceras partes y hasta un regreso al futuro.

Analizando las medidas ministeriales, con un poco de calma y con visión de pasado, en lo que afectan a la enseñanza de las matemáticas, la historia se reduce a eso: regreso al pasado con unas pizcas de futuro.

En resumen: las matemáticas de los años setenta (o de los cincuenta), los mismos métodos de antaño (la letra –y los números– con sangre entra, en moderno, el principio pedagógico del esfuerzo) y..., eso sí, nuevas tecnologías aliñándolo todo y sobre todo INTERNET.

Como todavía estamos esperando el rayo que nos transporte al pasado, como en la película, en mi instituto se nos ha ocurrido aplicar de verdad, las nuevas tecnologías e Internet para ampliar la visión del mundo de las matemáticas de los alumnos de bachillerato.

Lo hemos hecho en dos frentes:

- La utilización de Internet como fuente de información y de recursos.
- Su uso como herramienta de expresión y de publicación de los trabajos de los alumnos.

Las dos ideas responden de lleno a la filosofía de esta sección: matemáticas e internet.

* Y los alumnos de 1.° A de Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud del IES Salvador Dalí de Madrid.

Por eso, la primera página web de esta reseña, será la elaborada por esos alumnos de 1.° de bachillerato de ciencias de la naturaleza y la salud. El tema, *Grandes constructores de la Ciencia*, que da título a la página, es lo suficientemente definitorio del contenido.

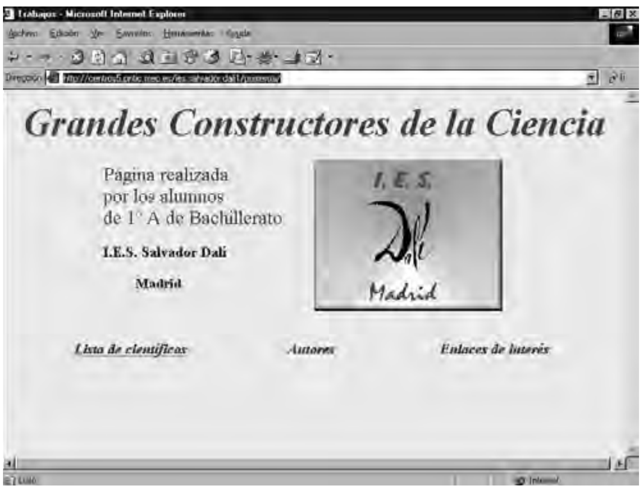
Quizás, alguien eche de menos a las primeras figuras de las matemáticas: Newton, Gauss, Euler, Arquímedes... No es casual. Sobre ellos ya habían realizados trabajos el curso pasado, esta vez en soporte escrito. Se trataba en esta ocasión de hacer la presentación en público de otra serie de personajes, importantes en la historia de la ciencia, pero de un rango ligeramente menor, para ponerlos al alcance de un público juvenil como ellos. La dirección es: http://centros5.pntic.mec.es/ies.salvador.dali1/primeroa/

Como muy bien dicen los alumnos en el encabezado de los autores:

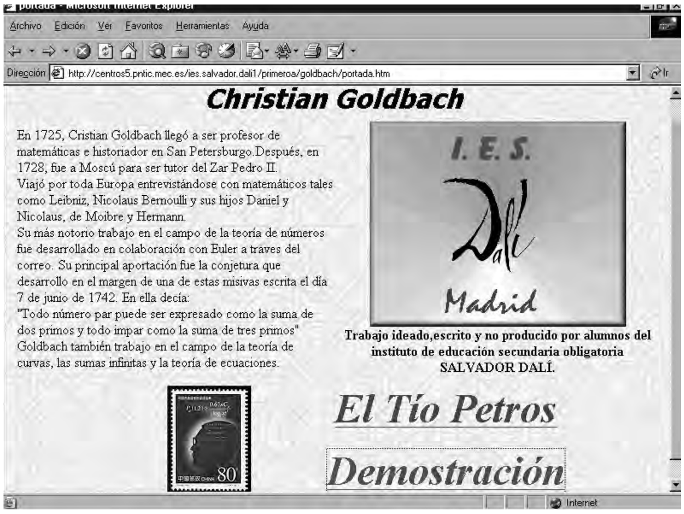
> Con esta página queremos rendir un homenaje a todas las personas que sin ser genios de primera fila, como Galileo, Newton o Gauss, hicieron avanzar la Ciencia con su dedicación a lo largo de los siglos.

Entre los personajes estudiados están: *Abel*, *Cantor*, Gay-Lussac, Ostvvald, Ampère, *Cardano*, *Goldbach*, *Pascal*, Aristarco, Coriolis, Hertz, Plank, Arrhenius, Coulomb, *Hilbert,* Ptolomeo, Avogadro, Curie, Huygens, Rutherford, Becquerel, *D'Alambert*, Joule, Thomson, Bohr, Faraday, *Lagrange*, Volta, Boltzmann, *Fermat*, *Leibnitz*, *Bolyai*, Feynman y Maxwell.

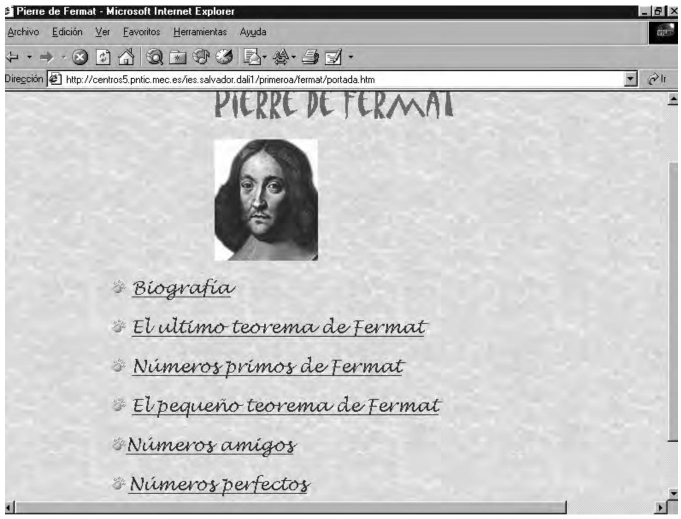
Como se puede observar no es una lista exclusiva de matemáticos, sin embargo los científicos relacionados con esta ciencia ocupan un papel determinante.



Los autores, los alumnos y alumnas de 1.° de bachillerato, han utilizado Internet para obtener toda la información, descubrir la obra y las aportaciones de cada uno de los científicos y han sintetizado y destacado los aspectos más destacados de su vida y su obra. Y en muchos casos no ha sido tarea fácil.



El diseño y la elaboración de las páginas web ha sido realizado por los propios alumnos en la clase de Tecnología de la Información.



Aconsejo a los lectores de SUMA que pierdan (o ganen) unos minutos explorando estas páginas, pues a pesar de los errores y pequeños fallos que sin duda encontrarán, también descubrirán, que no todos los alumnos LOGSE son como Rosa de España (que seguro que estudió la EGB y el BUP) y sobre todo, que siempre hemos de estar dispuestos a aprender de nuestros alumnos.

Y puestos a aprender de los alumnos, les hice la propuesta, a ese mismo grupo, de que escribiesen ellos la sección de Matemáticas e Internet de este número, es decir que seleccionasen las páginas de Matemáticas que considerasen más interesantes y que emitieses su opinión. Las sugerencias de páginas web que siguen se las tenéis que agradecer a ellos.

La opinión de los alumnos

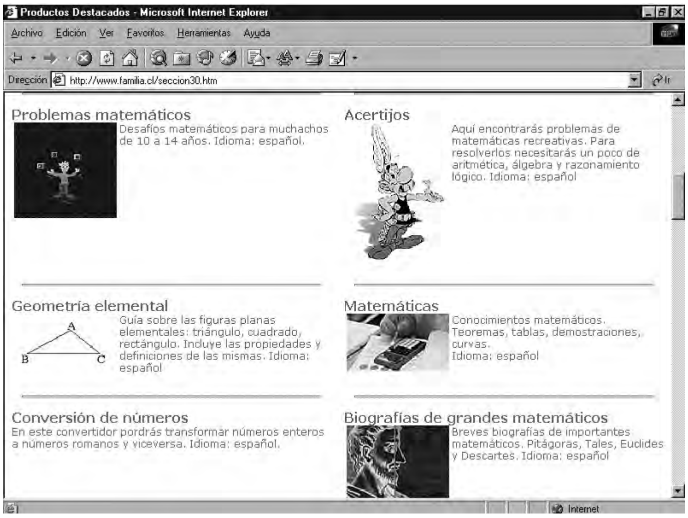
Mar Melero, alumna con una gran dosis de ingenio a la hora de abordar problemas no convencionales que exigen seleccionar y poner en práctica herramientas matemáticas diversas y nada tópicas, nos propone estas direcciones comentadas

- http://math2.org/math/es.tables.htm

Es una página de muchos temas matemáticos. Muy útil para estudiar ya que son tablas de fórmulas ordenadas por temas. Lo mejor que tiene es que cada fórmula viene con su demostración para que sea más fácil de entender. Además está muy claro y es muy fácil de usar y de encontrar cosas concretas.

- www.familia.cl/seccion30.htm

Es una página muy buena porque tiene ejercicios, explicaciones y biografías. Está pensada para estudiantes. Es muy fácil y se encuentran muy fácil las cosas. Tiene problemas resueltos y ejercicios que los haces y luego te mandan a tu e-mail la puntuación que has conseguido y las respuestas correctas.



- www.geocities.com/Athens/Acrópolis/4329/cumat.htm

Es una página muy entretenida sobre curiosidades matemáticas. Tiene varios problemas seguidos de su explicación. Es muy fácil de usar. Son problemas históricos y alguno de bastante dificultad para resolverlo, pero ninguno requiere un nivel muy elevado de matemáticas.

- www.matemáticas.net

Es una página muy completa en la que puedes hacer preguntas muy concretas y las respuestas te las mandan a tu e-mail. Tiene apuntes, exámenes y ejercicios de multitud de temas matemáticos de muchos niveles. Para estudiar viene muy bien porque también tiene esquemas y tablas. Además incluye programas de matemáticas para ordenador que puedes descargarte. Lo malo de esta página es que es un poco liosa.

- *http://rt000z8y.eresmas.net/matemat.htm#indice*

Página de problemas ingeniosos de matemáticas. Hay gran cantidad de ellos y la página es muy fácil de usar. Los problemas no son muy difíciles pero sí muy entretenidos.

Belén González y M.ª Mar Jiménez enfocaron sus búsquedas a páginas de Matemáticas para niños. Sus reflexiones sobre el papel de las Matemáticas y el potencial de Internet son antológicas, así que no he podido resistir la tentación de insertarlas íntegras:

Introducción a la matemática para «enanos»

> La ciencia más útil es aquella cuyo fruto es el más comunicable. (Leonardo Da Vinci).

Tal y como dijo el gran renacentista italiano Leonardo Da Vinci, ¿qué tipo de ciencia es aquella que no se puede divulgar? La ciencia ha de ser asequible para todos y no estar reducida a una.

Afortunadamente nos encontramos en la era de la información para una elite de entendidos. Así pues el verdadero mérito reside en la enseñanza, en la transmisión de conocimientos a los que no conocen dicha ciencia. Y los medios de comunicación, y este «flujo de ciencia» se extiende por casi todo el mundo (ojalá pudiésemos decir que a todo), y principalmente, sobre todo en los últimos años, debido a Internet.

Uniendo estas ideas, la divulgación científica y las facilidades que Internet proporciona para esta divulgación, podemos encontrar numerosos temas en los que instruirnos, como por ejemplo las Matemáticas.

Dentro del campo de las matemáticas en Internet se encuentran infinidad de páginas dedicadas exclusivamente a los niños. En ellas se les instruye a desenvolverse mejor en el mundo matemático de una forma interactiva. Así encontramos juegos de ingenio, operaciones, problemas, teoremas sencillos, e incluso historia de las Matemáticas explicada de forma adecuada para ellos.

Investigando este tipo de páginas nos encontramos con algunas muy curiosas y con otras no tanto…

- http://icarito.tercera.cl/enc_virtual/matemat/

Esta página muestra una enciclopedia para niños con muchos apartados, historia, geografía, deportes…también se aprecian apartados como personajes chilenos y castellano.

Dentro del apartado de las matemáticas nos encontramos con diversos temas como: los números, la suma, la resta, la multiplicación, la división, las fracciones, geometría, etc. donde introduce a los niños al gran mundo de las matemáticas de manera muy simple para que puedan comprenderlo.

Además hay algunos apartados más generales como la biografía de Isaac Newton, formas de resolver problemas, aprendizaje para medir el tiempo, y algunos juegos de ingenio (para niños).

Es una página muy sencilla pero muy completa a la vez, ya que trata de todos los temas de los que se les puede hablar a los niños.

- www.entrenamatematicas.com/new/free/menufree.asp

Esta página, como bien dice su nombre, ayuda a los niños a entrenar las matemáticas que están aprendiendo. En ella puedes descargarte programas en los que te proponen un cierto número de operaciones para que las resuelvas, o si bien no te hace falta tenerlo en tu ordenador, puedes realizar los ejercicios de manera directa desde Internet.

Estos ejercicios tratan de sumar cifras de uno o dos dígitos, restar o multiplicar, también es un nivel para niños que están aprendiendo a operar y les sirve como un pequeño examen.

Admiramos la utilidad de estos programas, pero por otro lado pueden fácilmente aburrir a los niños, ya que carecen de gráficos o animaciones que capten su interés.

- http://www.sesameworkshop.org/sesame/

Si de lo que estamos hablando es del aprendizaje de los niños, no podríamos olvidar Barrio Sésamo, que por supuesto también tiene presencia en la red. En su página se encuentran los característicos, y por todos recordados, personajes de la serie; Coco, el conde Draco, la Gallina Caponata, y otros muchos.

Quizá los contenidos de esta página sean bastante más sencillos que los de las anteriores, recordemos que Barrio Sésamo está dedicado a niños a partir de dos y tres años, pero a cambio la calidad de la web es muy superior; esto se aprecia en sus gráficos, animaciones, sonidos y su estética típica.

Como ejemplos de estos juegos y actividades, encontramos a Coco, quien nos enseña a contar, Elmo, que nos muestra las formas y la hora y, el que apreciamos en la imagen «busca los números» (¿Alguien se atreve? Están el 1, el 4, el 5, el 8 y el 9).

Alejandro Garrido y Guillermo Pérez no se andan por las ramas a la hora de sugerirnos una página de Matemáticas, y, si somos profesores, nos sugieren la de la Real Sociedad Matemática Española (www.rsme.es) y, cómo no, la de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (http://www.fespm.es.org/).

Mi enorme agradecimiento a todos ellos y al resto de alumnos y alumnas de este curso del IES Salvador Dalí de Madrid, que además saben... derivar cualquier función, calcular integrales, hallar el área bajo una curva, y quienes son los precursores y los padres del cálculo diferencial e integral y para qué sirve, por qué son importantes los logaritmos neperianos y quién los descubrió, quién fue Euler, lo que le debemos a Gauss, la habilidad de Fermat con los números, qué es el número de oro… y, sobre todo, saben apreciar la belleza de las Matemáticas. ¡Y son alumnos de la LOGSE!

SUMA 40

junio 2002, pp. 129-132

Un gran matemático

Carlos Usón Villalba
Ángel Ramírez Martínez

DESDE LA HISTORIA

EL NÚMERO 19 de la renovada revista *SIGMA* (septiembre de 2001), que anima desde Bilbao Santiago Fernández, incluye un artículo de Julián Aguirre: «Todo lo que siempre quisiste saber sobre ≠». Se trata de un atractivo paseo histórico por el problema de la cuadratura del círculo y los valores que las distintas civilizaciones han ido asignando a ese «número-letra», así como por los métodos empleados para obtenerlos. Por lo que al mundo árabe se refiere sólo aparecen las aproximaciones utilizadas por el inevitable al-Jwarizmi. Aprovechamos esta excusa para dedicar este artículo a un matemático que atrajo nuestro interés, en un primer momento, precisamente por su aproximación de ≠.

Nos estamos refiriendo a Ghiyath al-Din Jamshid al-Kashi, a quien ya hemos citado en otras ocasiones. Nació cerca de Isfahan (Irán), en la segunda mitad del siglo XIV. Hacía doscientos años que las invasiones mongolas habían destruido el califato de Bagdag y la actividad científica se había trasladado a Samarkanda que bajo el despotismo ilustrado de Ulugh Beg, nieto de Tamerlán, se convirtió en un centro intelectual de cuyo observatorio astronómico fue director al-Kashi. En una carta a su padre le escribía que

> …los entendidos se reúnen y los profesores que imparten clases de todas las ciencias están asequibles, y los estudiantes se afanan todos en el arte de las matemáticas.

Los intereses de al-Kashi no se limitaron a sus estudios sobre astronomía. Resaltaremos solamente que entre los temas que trató en los cuatro libros de su obra más importante, *La llave de la aritmética*, se encuentra una recopilación de lo mejor de la aritmética y el álgebra árabes, la primera exposición sistemática que se conoce sobre las fracciones decimales[1], el desarrollo de un método iterativo para obtener la raíz enésima de un número y problemas de medida relacionados con la arquitectura (en particular, la construcción de decoraciones con mocárabes). A su muerte, en 1429, Ulugh Beg alabó su obra:

> …el admirable mullah conocido entre los famosos del mundo, que había dominado y completado la ciencia de los antiguos, y que había resuelto las cuestiones más difíciles.

Un error menor que el grosor de un cabello

Al-Kashi siguió para su cálculo de ≠ (recogido en *Tratado sobre el círculo*, obra que terminó en 1424) el método de Arquímedes –aproximar la longitud de una circunferencia mediante polígonos regulares inscritos y circunscritos de un número de lados cada vez mayor– trabajando con un polígono de $3 \times 2^{28} = 805.306.368$ lados. Por más que la cifra impresione a nuestros alumnos y alumnas de Secundaria[2], el mérito teórico no está en la cantidad. Una vez encontrado un procedimiento iterativo para pasar de un perímetro al del polígono de un número doble de lados, el resto es posible si se dispone de una refinada habilidad calculística. El que utilizó al-Kashi se basa en un sorprendente resultado.

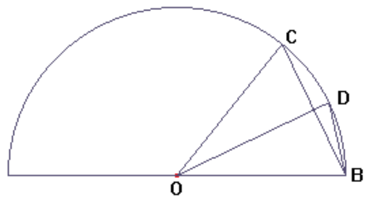


Figura 1

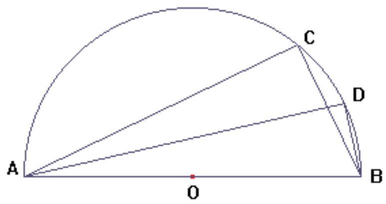


Figura 2

En la figura 1 están dibujados los lados de dos polígonos regulares inscritos en la circunferencia, de tal manera que uno de ellos (lado *DB*) tiene el doble de lados que el otro (lado *CB*). En general, suponemos que corresponden a los polígonos n–1 y n de una serie de polígonos regulares inscritos de $k2^n$ lados (para un valor de k inicial, fijo)[3]. Podemos designar entonces *CB* como l_{n-1} y *DB* como l_n. Youschkevitch enuncia la proposición empleada por al-Kashi en términos de una igualdad entre superficies (figura 3):

El rectángulo que tiene por lados el semidiámetro OA por una parte, y la suma del diámetro AB y de la cuerda AC (c_{n-1}) *por otra, tiene un área igual que el cuadrado construido sobre la cuerda AD* (c_n).

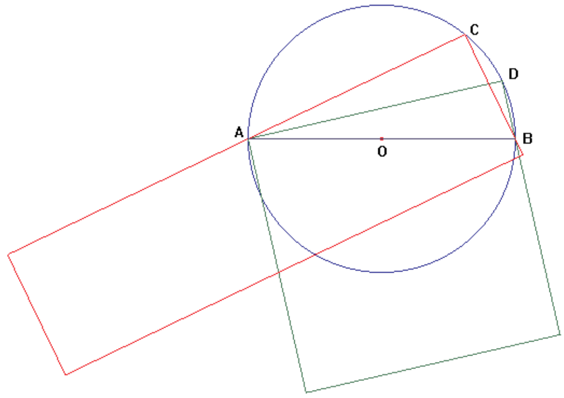


Figura 3

Así expresada, hemos tenido necesidad de algunas pruebas para empezar a convencernos empíricamente de su validez. La pregunta es la de siempre en estos casos: ¿cómo se le pudo ocurrir esto? Si se traslada el resultado a un contexto trigonométrico queda en la forma

$$\cos^2 \frac{a}{2} = \frac{1 + \cos a}{2}$$

que nos resulta muy familiar, como sin duda lo era para al-Kashi, pero que parece improbable como vía de acceso a la igualdad de áreas del enunciado.

En cualquier caso, el método iterativo buscado está servido. Puesto que (llamando d al diámetro)

$$\frac{1}{2} d(c_{n-1} + d) = (c_n)^2$$

conocida la cuerda c_{n-1} (*AC* en la figura 2) correspondiente al polígono n–1, se puede calcular la cuerda c_n (*AD*) correspondiente al polígono n. El teorema de Pitágoras permite obtener (triángulo *ADB*)

$$(l_n)^2 = d^2 - (c_n)^2$$

El resto es cálculo, pero guiado por un objetivo. Al-Kashi necesita el polígono número 29 de la serie porque, después de criticar la insuficiencia del valor de ≠ dado por al-Biruni (3,1417) y lo que él creía un error de Abu-l-Wafa, decide que

> la circunferencia de un círculo debe ser expresada en función del diámetro con una precisión tal que el error sobre la longitud de la circunferencia de un círculo cuyo diámetro sea igual a 600.000 veces el de la Tierra no sobrepase el espesor de un cabello.

Aunque operó en base sexagesimal, él mismo hizo la traslación a base 10. Nos sigue venciendo el encanto de la comparación entre las dos expresiones:

$$p = 3,08\ 29\ 44\ 00\ 47\ 25\ 53\ 07\ 25_{(60} =$$
$$= 3,14159265358979325_{(10}$$

Youschkevitch sugiere que en la literatura matemática árabe empezó a afirmarse la convicción de la irracionalidad de ≠. Algo de ello hay seguramente en el comentario del propio al-Kashi

> nadie puede conocer toda la verdad sobre esta cuestión excepto Allah.

Una técnica muy antigua

Entre los misterios nunca revelados en las clases de matemáticas –también es cierto que muy pocas veces reclaman alumnos y alumnas que lo sean– se encuentra el de cómo se calcularon los primeros valores de las funciones trigonométricas y de los logaritmos. La referencia a los desarrollos en serie no satisface la curiosidad histórica porque son muy tardíos[4]. Las calculadoras han hecho desaparecer los listados de columnas con seis o más decimales y quizás con ellas se haya ido también todo conato de curiosidad. La calculadora dota al seno de un ángulo o al logaritmo de un número de un tono aséptico y del carácter de indiscutible que acompaña sesgadamente a la ciencia y tecnología actuales. Aquí es imprescindible la Historia para democratizar la ciencia (en este caso las matemáticas) y contribuir a una didáctica humanista.

Dentro del mundo árabe, antes de al-Kashi calcularon sen 1° (por procedimientos distintos y sin alcanzar su altísimo grado de aproximación), entre otros, Abu-l-Wafa (s. X), y al-Biruni (s. XI). Abu-l-Wafa merece ser recordado en clase de primero de bachillerato por sus aportaciones personales en trigonometría y por su labor consciente de sistematización de esta materia, de forma similar a lo hecho para el álgebra por al-Khwarizmi. Si se decide efectuar la visita a la Historia que proponemos a continuación, deberemos resaltar el empleo del álgebra como instrumento de resolución de problemas en trigonometría. Pero antes de comenzarla recordaremos con un ejemplo una idea «moderna» de tradición muy antigua.

Hace quince años, en los viejos tiempos en los que parecía posible que las calculadoras ocuparan el escaño que en justicia les corresponde en las aulas, se puso de moda –estaba en el aire, si se prefiere– una propuesta de problema con calculadora científica. Puesto que la conocimos a través de Paco Hernán, empleamos sus palabras (Hernán, 1991)) para presentarla:

> Supongamos que escribo un número cualquiera en la calculadora y pulso sucesivamente, una y otra y muchas veces, la tecla coseno. ¿Qué ocurrirá?

Un análisis detallado de esta cómoda y eficaz manera de resolver la ecuación[5] $\cos x = x$ puede verse en Grupo Azarquiel y José Colera (1983). La pátina de modernidad que proporciona a los algoritmos iterativos su adaptación a la tecnología actual queda sorprendentemente puesta en cuestión si se estudia su devenir histórico. Hay noticia de su presencia hace 2000 años en China, aunque el primer escrito conservado que explica lo que los occidentales en el XIX llamarían «método de Horner» sea del siglo XIII (Chiu Chiu Sao). Métodos similares al empleado por al-Kashi en su cálculo de sen 1° fueron utilizados en occidente, 200 años después, por Viète y Kepler. Todo ello testimonia el ingenio heurístico del ser humano en su búsqueda de soluciones –en este caso en cuestiones relacionadas con álgebra y trigonometría– con antelación a la existencia de una teoría consolidada que, por otra parte, sólo puede llegar a desarrollarse con estas etapas previas.

Una ingeniosa estrategia

Los pasos seguidos por al-Kashi para su cálculo del valor de sen 1° fueron los siguientes:

1) Recurre a una igualdad ya conocida por los matemáticos árabes desde hacía trescientos años:

$$\mathrm{sen}3\alpha = 3\mathrm{sen}\alpha - 4\mathrm{sen}^3\alpha$$

para plantear

$$\mathrm{sen}3° = 3\mathrm{sen}1° - 4\mathrm{sen}^3 1°.$$

2) Calcula, por el método recogido en la obra de Abu-l-Wafa, el valor de sen 3° = 0,052335956.

3) Los dos pasos anteriores le llevan a plantear la ecuación (tomamos x = sen 1°)

$$x^3 - 0{,}75x + 0{,}013083989 = 0 \qquad (*)$$

que resolvió por un procedimiento iterativo. Los matemáticos árabes empleaban estas técnicas al menos desde el siglo XII. Obsérvese que todo esto puede interpretarse como la trisección algebraica de un ángulo de 3°.

Al-Kashi, al igual que en su aproximación del valor de ≠, realizó sus cálculos en sistema sexagesimal. Al pasar su resultado a base 10 se obtienen 18 cifras decimales exactas:

$$\mathrm{sen}\ 1° = 0{,}017452406437283571_{(10}$$

El interés de esta visita al Museo de la Historia en una clase de primero de Bachillerato nos parece fuera de toda duda. Hemos dado argumentos para justificarla, si no expresamente sí de forma implícita, en todos los artículos anteriores: valoración del ingenio no occidental, comprobación de que las matemáticas no son un producto acabado descendido desde el inmóvil olimpo platónico de las Ideas, admiración ante el esfuerzo desplegado por los seres humanos en la resolución de problemas y en la búsqueda de certezas. Pero nos basta en este caso con pensar en la sorpresa que puede producir en alumnos y alumnas acostumbrados a la resolución de ecuaciones por procedimientos «exactos» tipo «fórmula de la ecuación de 2.° grado». La ecuación de tercer grado de al-Kashi se adapta peor que cos $x = x$ a una calculadora científica normal, pero puede ser una buena excusa para explorar el funcionamiento de una calculadora gráfica, que permite trabajar a la vez con tablas de valores de dos funciones. En este caso, por ejemplo[6]

$$f(x) = x \quad \text{y} \quad g(x) = 1,\overline{3}x^3 + 0,0174453187.$$

Es cierto que al proponer el mismo algoritmo iterativo para las dos ecuaciones no estamos siendo estrictamente fieles a la Historia, pero esto es claramente un inconveniente menor.

No podemos dejar sin comentario el cálculo de sen 3° según el método de Abu-l-Wafa. Puesto que había obtenido las fórmulas para seno y coseno de la suma y diferencia de dos ángulos, llega a sen 12° como resultado de sen (72° – 60°). El valor de sen 60° era ya conocido por los hindúes, y para sen 72° recurre a una ingeniosa construcción geométrica[7] en un triángulo isósceles de ángulos 36°, 72° y 72° (un «pico» de la estrella pitagórica de cinco puntas). Una vez obtenido sen 12°, dos aplicaciones sucesivas de la fórmula del seno del ángulo mitad llevan a sen 3°.

Libros citados

GRUPO AZARQUIEL y J. COLERA (1983): *La calculadora de bolsillo como instrumento pedagógico*, ICE de la Universidad Autónoma de Madrid, Madrid.

GHEVERGHESE JOSEPH, G. (1996): *La cresta del pavo real,* Pirámide, Madrid.

HERNÁN, F. (1991): *Retrato de una profesión imaginada*, Proyecto Sur, Granada.

YOUSCHKEVITCH (1976): *Les mathématiques arabes (VIII-XV siècles)*, Librairie philosophique J. Vrin, Paris.

Notas

1 Propone, por tanto, que el sistema decimal posicional no sólo es válido para escribir y manejar números enteros sino también las fracciones de la unidad. Véase C. Usón y A. Ramírez: «¿Por qué seguir anclados en Egipto?», *Suma*, n.° 35.

2 La idea de Arquímedes para el cálculo de ≠ puede ser explotada didácticamente con excelentes resultados. Véase A. Ramírez y C. Usón: *Variaciones sobre un mismo tema*, Proyecto Sur, Granada, 1998.

3 En el dibujo hemos utilizado $k = 7$. La serie de al-Kashi es $3x2^n$ pero como se verá el razonamiento empleado es válido para cualquier valor de k (en rigor, claro, $k \geq 3$).

4 Aunque menos de lo que nuestra formación podría hacernos pensar. G. Gheverghese Joseph (1996) recoge desarrollos en serie del seno, coseno y arco tangente, realizados ¡¡¡por procedimientos geométricos!!! por los matemáticos de la región de Kerala, en la India, ¡¡¡en el siglo XIV!!!

5 La calculadora, claro, debe estar preparada para operar en radianes. Pero también da solución (incluso converge antes) si está en grados. ¿Por qué no es real la solución que se obtiene en este caso?

6 Para seguir el sencillo modelo de $x = \cos x$, despejamos x en (*):

$$0,75x = x^3 + 0,013083989$$

de donde resulta

$$x = 4/3\ x^3 + 0,0174453187.$$

7 Es inevitable seleccionar la información recogida en el artículo que puede ser consultada en los libros. Remitimos para esta construcción al texto de G. G. Joseph. Youschkevitch muestra otra similar, esta vez de al-Biruni, para resolver otra ecuación de tercer grado, planteada con la finalidad de calcular el lado de un polígono regular de nueve lados. Como la austera edición de este libro puede dificultar su localización, advertimos que se encuentra en la página 93 y figura 20 del apéndice de notas.

SUMA 40
junio 2002

Un informe muy citado

LAS MATEMÁTICAS SÍ CUENTAN
INFORME COCKCROFT
Ministerio de Educación y Ciencia
Madrid, 1985
ISBN 84-369-1260-8
386 páginas

Título original:
MATHEMATICS COUNTS

A mediados de los pasados años ochenta el Ministerio de Educación publicó la traducción de *Las matemáticas sí cuentan*, un libro con un título atractivo que muy pronto quedó oculto por su propio subtítulo: el *Informe Cockcroft*. Era una edición algo sorprendente porque se trataba de un informe oficial que, además, había sido elaborado en un contexto manifiestamente diferente al nuestro. Su redacción resultaba distante y a menudo parecía excesivamente aséptica. En definitiva, uno se encontraba con casi cuatrocientas páginas de texto abigarrado que no invitaba excesivamente a una lectura reposada.

RECENSIONES

La publicación del Informe en España coincidía con un momento en el que se producían algunos debates importantes acerca de la enseñanza de las matemáticas. Después de años de trabajo de muchos profesores y grupos de trabajo y de intercambio de ideas y propuestas en las cuatro primeras JAEM, coincidieron, entre otros hechos, el debate sobre el documento del ICMI titulado *Las matemáticas en primaria y secundaria en la década de los 90*, las primeras propuestas de reforma de la enseñanza secundaria y la cada vez mayor cantidad de información y documentación que recibíamos acerca de lo que se estaba haciendo en otros lugares. Todo esto nos llevó a algunos a leer aquel informe que, como decía al principio, parecía tan escasamente atractivo.

Y con la lectura empezamos a sorprendernos y a aprender cosas. Encontramos el resultado de un proyecto muy ambicioso, que trataba de analizar un buen número de las cuestiones que tienen alguna relevancia en la enseñanza de las matemáticas; que, a su vez, recogía el resultado de otros estudios previos o realizados expresamente para este mismo informe. La propia selección de las cuestiones que trata el libro podía resultar sorprendente, por los temas de los que se ocupa, por los que no incluye y, sobre todo, por la importancia que da a cada uno de ellos.

El Informe estaba elaborado desde un punto de vista y con intereses marcados por la situación del sistema educativo de Inglaterra y Gales de aquel momento. Se encontraban muchas referencias que no correspondían a la nuestra: el sistema de exámenes estatales, la estructura de la formación profesional, la organización y funcionamiento de los centros… no tenían, ni tienen, nada que ver con los que tenemos aquí. El análisis, las conclusiones y las recomendaciones que se hacen en relación con algunos aspectos están impregnados por estas diferencias y, por ello, no son directamente transferibles. Incluso algunos de los problemas que se planteaban estaban y están bastante alejados de los nuestros. Estas diferencias, lejos de disminuir el interés, supone tener la posibilidad de acercarse a una visión de la enseñanza de las matemáticas con los ojos de otra cultura educativa y otra tradición completamente diferentes.

Pero muchos de los problemas que plantea el informe y de las situaciones que se describen en él eran los mismos que los nuestros. Y en este sentido es en el que el libro tuvo un mayor impacto. Nos encontramos, quienes lo leímos, con algunas afirmaciones que suponían una confirmación de intuiciones y suposiciones sobre lo que supone la enseñanza de las matemáticas. Así, por ejemplo, era un alivio leer en un libro de esta naturaleza que:

> Las matemáticas son una asignatura difícil de enseñar y de aprender. (Punto 228)

Que, además va seguida de argumentos como su carácter jerarquizado, el diferente ritmo de aprendizaje, la propia dificultad que tiene la tarea de resolver problemas, etc. En cierto modo se encuentran en el informe muchas indicaciones que permiten asentar y dar rigor a algunas de las ideas que se tienen después de un cierto número de años de trabajo. Más adelante, en el punto 436 se puede encontrar otra afirmación que también encaja con la experiencia de todos los profesores:

> …se han hecho cada vez más patentes las diferencias de rendimiento que se aprecian en esta asignatura entre los alumnos de una edad determinada, así como el aumento de estas diferencias conforme aumenta la edad. En el apartado 342 llamamos la atención sobre la «diferencia de siete años» existente entre los niños de 11 años. Si la consideramos en función del trabajo escolar en los cursos de secundaria, llegaremos a la conclusión de que la comprensión matemática de algunos alumnos que pasan a la escuela secundaria a los 11 años es ya probablemente superior a la de otros que la dejan a los 16. Por otro lado, es probable que algunos no lleguen a alcanzar durante su escolarización la comprensión que poseen algunos compañeros suyos de 11 años.

La publicación del Informe en España coincidía con un momento en el que se producían algunos debates importantes acerca de la enseñanza de las matemáticas.

Pero la lectura del informe también hace tambalearse algunas de las ideas extendidas en algún momento sobre lo que es esencial en la enseñanza de las matemáticas. Así, por ejemplo, contrastaba la insistencia en el cálculo, cuando en los movimientos asociados a la innovación en España era un asunto poco menos que ignorado.

A lo largo de los años posteriores a su publicación, el Informe Cockcroft ha ido ganando influencia en la enseñanza de las Matemáticas, en el Reino Unido y fuera de él. En cierto modo se ha convertido en una fuente de autoridad y es, de hecho, una referencia obligada cuando se tratan los aspectos esenciales que envuelven la enseñanza de las matemáticas. Suele verse en las bibliografías de cursos universitarios y de publicaciones de carácter general sobre la enseñanza de las matemáticas. Algunas de sus afirmaciones se han convertido en el punto de partida de multitud de trabajos y documentos. Así se ha leído en muchas ocasiones el comienzo del punto 243:

Algunas de sus afirmaciones se han convertido en el punto de partida de multitud de trabajos y documentos.

> La enseñanza de las matemáticas en todos los niveles debe incluir:
>
> - exposición por parte del profesor;
> - discusión entre el profesor y los alumnos, y entre estos últimos;
> - trabajo práctico apropiado;
> - consolidación y práctica de las destrezas y rutinas básicas;

- resolución de problemas, incluyendo la aplicación de las matemáticas a las situaciones de la vida cotidiana;
- realización de trabajos de investigación.

Aunque el desarrollo tecnológico posterior ha transformado el debate, también se han visto apoyadas por el Informe, a mi juicio, algunas posturas en relación con el uso de calculadoras y ordenadores. En primer lugar, porque reconoce su importancia en la enseñanza de las matemáticas y las implicaciones sobre el modo de enseñar y sobre los contenidos: el orden en que se presentan, la mayor necesidad del cálculo mental, etc.

Ante los supuestos peligros del uso indiscriminado de las calculadoras afirma, en el punto 377:

> …las pruebas hoy disponibles indican la existencia de ventajas que compensan sobradamente los posibles inconvenientes. En cualquier caso, el conjunto de las investigaciones prueba de forma fehaciente que el uso de las calculadoras no ha producido ningún efecto adverso sobre la capacidad de cálculo básica.

La influencia del Informe Cockcroft se ha hecho notar también en las Administraciones educativas, estatal y autonómicas, cuyos documentos a veces han recogido ideas, orientaciones y decisiones tomadas de aquél de manera más o menos explícita. Si se tiene en cuenta que fue elaborado a partir de las condiciones de la enseñanza de las matemáticas en un sistema educativo diferente al nuestro en aspectos esenciales, resulta sorprendente la aplicación que se ha encontrado a sus afirmaciones.

Actualmente permanece abierta la discusión sobre bastantes de los puntos que trataba el informe. Se mantiene, pues, el interés de su lectura en relación con cuestiones tales como el tiempo que se ha de dedicar al aprendizaje de las matemáticas. En estos momentos en los que hay una preocupación considerable por la reducción en el tiempo dedicado a las matemáticas de la educación secundaria conviene recordar las afirmaciones que se hacen en los puntos 229 y 486:

> Las matemáticas son, además, una asignatura que obliga a trabajar y a practicar mucho, con independencia del nivel de conocimientos que se tenga.

La influencia del Informe Cockcroft se ha hecho notar también en las Administraciones educativas, estatal y autonómicas, cuyos documentos a veces han recogido ideas, orientaciones y decisiones tomadas de aquél de manera más o menos explícita.

> En los últimos años se ha reducido en la mayoría de las escuelas el tiempo semanal dedicado a la enseñanza de las matemáticas a medida que se introducían en el currículo áreas de estudio adicionales.

A causa de la estructura de funcionamiento de los centros de secundaria en el Reino Unido, el Informe dedica un considerable esfuerzo a delimitar cuestiones asociadas a las diferencias en el ritmo de aprendizaje de los alumnos y especialmente a las necesidades específicas de los alumnos de bajo rendimiento, tanto en los contenidos que deben aprender como en relación con la metodología que puede tener éxito con ellos. Es éste un asunto que para nosotros ha ido adquiriendo también progresivamente más importancia en los últimos años. El hecho de que la tradición inglesa separe a los alumnos de matemáticas por su rendimiento desde edades bastante tempranas obliga a los redactores del informe a referirse específicamente a las necesidades de cada grupo en relación con su aprendizaje. El capítulo 9, dedicado a las matemáticas en la enseñanza secundaria, dedica una serie de apartados a las medidas que han de adoptarse con alumnos de diferentes grados de rendimiento: alumnos de bajo rendimiento, de rendimiento muy bajo, alumnos a los que van dirigidos los exámenes «normales», alumnos de alto rendimiento y alumnos de muy alto rendimiento.

La importancia de la actitud en el aprendizaje y uso de las matemáticas es otro de los aspectos a los que el informe dedica una atención especial y sobre el que desde entonces hasta ahora ha ido creciendo el interés. La constatación de que la experiencia en el aprendizaje de las matemáticas no suele ser neutra en la medida en que los adultos se enfrentan con prevención a tareas que requieran su utilización. Al describir los estudios realizados para determinar las matemáticas que utilizan los adultos aparecen frases como las siguientes:

> Esta idea, aparentemente extendida entre los adultos, de las matemáticas como una materia intimidatoria, impregnó gran parte de la selección de la muestra; la mitad de las personas consideradas como apropiadas para su inclusión en la muestra se negó a participar. (Punto 16)

En la misma página, en el punto 20, se puede leer:

> La característica más notable del estudio fue, quizá, hasta qué punto la necesidad de emprender incluso una aparentemente simple y fácil tarea matemática, podía provocar sentimientos de ansiedad, impotencia, miedo e incluso culpabilidad en algunos de los entrevistados.

Esta forma de enfrentarse al uso de las matemáticas parece consecuencia de la influencia que tienen las actitudes de los alumnos a lo largo de su experiencia escolar con las matemáticas, generadas por diferentes factores asociados a los propios contenidos de aprendizaje:

> …el álgebra parece ser fuente de una gran confusión y de las actitudes negativas de muchos alumnos… Muchas otras materias, como las fracciones, los porcentajes, los gráficos, la trigonometría o el teorema de Pitágoras, recibieron asimismo comentarios desfavorables… (Punto 201)

De la revisión de estudios previos sobre las actitudes de los alumnos, el informe destaca, en el punto 205:

> ...unas actitudes fuertemente polarizadas, incluso entre los alumnos de la escuela primaria, que empiezan a desarrollarse sobre todo a partir de los 11 años; se derivan de las actitudes que manifiestan los profesores y, en cierto modo, también de los padres.

Esta última idea se desarrolla dos párrafos más abajo:

> Aun de modo inconsciente, los padres pueden ejercer una considerable influencia sobre la actitud de sus hijos ante las matemáticas... En algunos casos no les exigen lo suficiente («No te preocupes hijo, yo tampoco entendía las matemáticas cuando estaba en la escuela»), mientras que en otros esperan demasiado de ellos y... ejercen una presión que puede conducir directamente al fracaso y al rechazo de la asignatura.

En definitiva, se aprecia una cierta sensibilidad hacia la actitud con la que se enfrentan los estudiantes a su aprendizaje de las matemáticas, por considerarla elemento esencial para que efectivamente se aprenda y, sobre todo, se utilice posteriormente lo que se ha aprendido. Se dice en el punto 230:

> Sea cual sea el nivel de rendimiento de los alumnos, no debe permitirse que experimenten repetidos fracasos.

Sobre cómo se gestó el Informe

El Informe responde a un encargo del Ministerio de Educación británico, realizado como consecuencia de una preocupación creciente y un debate que ya se venía produciendo en el Reino Unido sobre la situación de la enseñanza de las Matemáticas. La comisión redactora del informe, presidida por W. H. Cockcroft, recibió el encargo de «estudiar la situación de la enseñanza de las matemáticas en los centros de primaria y secundaria en Inglaterra y Gales teniendo en cuenta, en particular las matemáticas exigidas en la enseñanza superior y postsecundaria, en el trabajo y en la vida adulta, y hacer recomendaciones». Con esta finalidad trabajó entre septiembre de 1978 y noviembre de 1981. Estaba formada por 22 personas de muy variadas procedencias, algunas de las cuales fueron sustituidas a lo largo del trabajo. Al revisar la relación de miembros de la Comisión, uno se encuentra con que estaba compuesta por igual número de miembros provenientes de la universidad, los centros docentes y las autoridades educativas locales o estatales, junto con algunos representantes de centros de investigación en enseñanza de las matemáticas, de las empresas, de las asociaciones profesionales y un estudiante de un centro de formación de profesores.

El objetivo que tiene marcado la Comisión es, sin duda, excesivamente ambicioso, principalmente porque debe terminar su trabajo en un tiempo razonable. De algunos de los temas que debe tratar tiene que recopilar la información disponible y estudiarla para sacar conclusiones; en otros casos hay poca información y se han de poner en marcha estudios específicos que le permitan analizar la situación con fundamento. A pesar de todo, el resultado es una revisión bastante completa en la selección de los temas que trata, aunque a veces uno desearía encontrar un poco más de lo que lee sobre determinadas cuestiones.

El Informe responde a un encargo del Ministerio de Educación británico, realizado como consecuencia de una preocupación creciente y un debate que ya se venía produciendo en el Reino Unido sobre la situación de la enseñanza de las Matemáticas.

El resultado del trabajo de la Comisión es un amplio informe concebido para muchos interlocutores diferentes. Las recomendaciones que incluye de vez en cuando se dirigen a los profesores, los jefes de los departamentos de matemáticas de los centros, los directores, los inspectores, las administraciones locales, la Administración Central, las universidades, los centros de investigación, los elaboradores de materiales escolares... En definitiva, todos cuantos pueden tomar alguna decisión acerca de la enseñanza de las matemáticas. Algunas muestras de estas recomendaciones son las siguientes:

> Consideramos que debe hacerse lo posible para fomentar la afiliación a las asociaciones profesionales de matemáticas, y que estas últimas habrían de esforzarse por desarrollar sus actividades de ámbito local. (Punto 730)
>
> Es esencial que se disponga de fondos suficientes para mantener las existencias adecuadas de libros y de equipo. (Punto 617)
>
> Recomendamos que, en un futuro próximo, se lleve a cabo una estimación global de las implicaciones educativas que se deducen de las pruebas de matemáticas realizadas hasta la fecha. (Punto 425)
>
> Consideramos que es imprescindible que se haga mucho más de lo que se está haciendo para mejorar la imagen de la enseñanza, en particular de las matemáticas. (Punto 640)

Estas recomendaciones son resultado del encargo que recibió la Comisión. Pero son también muestra del estilo del documento, que se mueve siempre dentro de los límites que marca su origen anglosajón, para lo bueno y para lo malo. Es, básicamente, un estilo pragmático, con muy pocas concesiones a la retórica, en el que no se tratan cuestiones sobre las que no haya alguna posibilidad de influir. Es significativo, en este sentido, que en ninguno de sus 810 puntos se cuestione la permanencia y estructura del sistema de exámenes, la estructura de los centros u otras cuestiones que para nosotros resultan tan diferentes. Se muestra ese estilo también en el laconismo y a veces contundencia de muchas de sus afirmaciones.

Los autores se obligan también, quizá debido al carácter de informe oficial que tiene el documento y, desde luego, por la heterogeneidad de la composición de la Comisión, a no tomar postura en cuestiones que no consideran suficientemente contrastadas, de modo que en algunos casos parece como si faltara una conclusión. Pero en algún caso parece como si hubieran necesitado salirse de esa postura prudente, Así, por ejemplo, cuando se refiere a la escasez de profesores de matemáticas y al modo de enfrentarse a ella, alude sin complejos a la *cuestión de las retribuciones adicionales de los profesores de matemáticas*, indicando las diferentes posturas que se han manifestado sobre el tema y tomando una posición inequívoca:

> Hemos debatido esta cuestión en profundidad y hemos llegado a la conclusión de que es imprescindible algún tipo de financiación adicional si queremos paliar la presente situación de grave escasez. (Punto 657)

En el excelente prólogo a la edición española, escrito por Joaquín Pérez Navarro, se revisan las primeras consecuencias que tuvo el Informe en el ámbito al que estaba dirigido y las reacciones de algunos colectivos. Probablemente su influencia fuera de ese ámbito ha ido creciendo desde entonces.

El contenido

El texto aparece organizado en tres grandes apartados y cinco apéndices. En el primer gran apartado se desarrolla el conjunto de razones que se suelen alegar para justificar la enseñanza de las matemáticas, con especial énfasis en su aplicación en diferentes ámbitos. A continuación, en la segunda parte, se revisa la presencia de las matemáticas en el sistema escolar, en general y en cada una de las etapas: en la enseñanza primaria, en la enseñanza secundaria anterior a los 16 años, en el *sixth form* (equivalente al bachillerato), así como el funcionamiento del sistema de exámenes. Por último, en la tercera parte, se repasan otros factores diferentes del propio proceso de enseñanza, principalmente la situación de los profesores, sus condiciones, su formación inicial y formación permanente, los medios para la enseñanza, la situación en otros países, etc.

En el excelente prólogo a la edición española, escrito por Joaquín Pérez Navarro, se revisan las primeras consecuencias que tuvo el Informe en el ámbito al que estaba dirigido y las reacciones de algunos colectivos.

Por qué y para qué enseñar matemáticas

El informe comienza enfrentándose a la tarea de determinar qué es lo que justifica una presencia tan notable de las matemáticas en el currículo escolar. En una primera fase revisa los tópicos al uso sobre lo que se suele considerar formativo de las matemáticas y las capacidades generales que aporta y enuncia lo que considera esencial en las matemáticas desde el punto de vista formativo: el hecho de que *proporcionan un medio de comunicación poderoso conciso y sin ambigüedades*. El valor del texto estriba no tanto en las razones que enumera, como en la importancia relativa que asigna a cada una de ellas. Así, relativiza sus posibilidades para desarrollar facultades de pensamiento lógico, precisión y visión espacial, en la medida en que dependen de forma determinante de la manera en que son enseñadas las matemáticas, llegando a afirmar que no constituyen una razón suficiente para estudiar matemáticas.

Pero, para alivio de muchos, el informe encuentra razones más que sobradas para enseñar matemáticas a todos los niños y jóvenes. El hecho de que, a diferencia de la lengua materna, se trate de un medio de comunicación que «no se adquiere de forma natural», requiere, además una importante dedicación escolar para mucha gente.

La utilidad para diferentes fines ha sido siempre una razón para enseñar matemáticas, e incluso para enseñar determinados contenidos de matemáticas. Se hace en el informe un recorrido muy detallado por diferentes ámbitos, tratando de detectar en qué medida se justifica la enseñanza de las matemáticas y, lo que resulta más ilustrativo, qué matemáticas se utilizan realmente en cada uno de ellos. Se analizan las necesidades matemáticas en la vida adulta, en el mundo laboral y en la enseñanza postsecundaria a partir de la información obtenida a través de muy diferentes vías, superpuestas a veces y complementarias en otras ocasiones. El resultado es de enorme interés, porque analiza sin complejos en qué medida son ciertos algunos tópicos sobre la utilidad de las matemáticas y llega a algunas conclusiones que chocan con opiniones muy extendidas.

El uso de las matemáticas en «la vida adulta», a juicio del Informe, es mucho más restringido de lo deseable, principalmente por la ansiedad que provoca en muchos adultos y por los problemas con algunas habilidades que tuvieron en general ocasión de aprender en su etapa escolar: incapacidad para entender los porcentajes, dificultades para la lectura de mapas y tablas, etc. En general, afirma el texto, tienen más éxito quienes son capaces de aplicar estrategias propias para enfrentarse a situaciones que requieren la utilización de las matemáticas. Cuando se enumeran las matemáticas que se consideran necesarias para la vida adulta resulta una lista relativamente escasa, que corresponde a contenidos que aquí aparecen incluidos en la Educación Primaria o en el primer curso de Secundaria salvo, quizá, la estimación. Todo ello se asocia al concepto de «competencia numérica», que incluye la familiaridad con los números y la apreciación y comprensión de la información que se presenta en términos matemáticos.

Más complejo resulta obtener conclusiones del estudio sobre las matemáticas necesarias en el mundo laboral, en la medida en que en cada uno de los ámbitos profesionales y en cada uno de los diferentes niveles de responsabilidad las necesidades son diferentes. A tenor de la descripción que hace el Informe, los empresarios del Reino Unido han mostrado en algún momento su preocupación por el nivel matemático de sus empleados. Esta preocupación se centra en algunos sectores laborales, principalmente el mundo comercial y los trabajos asociados a la técnica. Las diferencias entre el sistema laboral y de formación profesional británico y el nuestro dificultan el traslado de sus conclusiones. Es revelador, a pesar de todo, el sentido del informe cuando trata de buscar qué preparación matemática es la que hace que la gente haga mejor su trabajo. La revisión de las matemáticas necesarias, en general, en el ámbito laboral comienza diciendo que *casi todas las matemáticas que la gente joven necesita, cualquiera que sea su trabajo, se encuentran incluidas en el actual nivel O y en los programas del C.S.E. variante 1*, lo que viene a ser, muy aproximadamente, la Educación Secundaria Obligatoria. Sin embargo, lo que es más significativo, poco más adelante se pone de manifiesto que *hay importantes diferencias entre la manera de usar las matemáticas en el trabajo y la manera en que las mismas matemáticas se enseñan en el aula.*

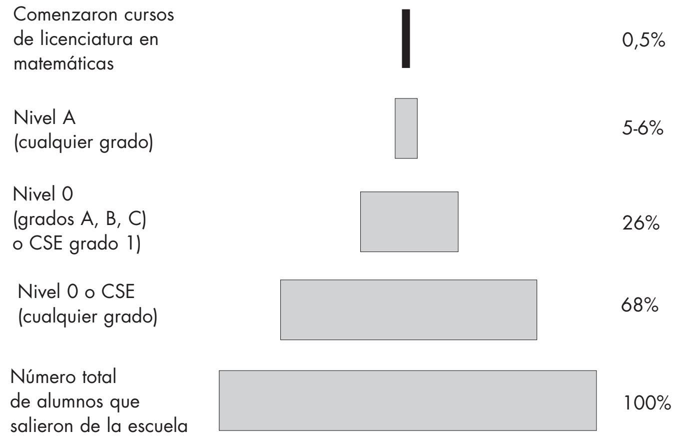
Las necesidades de la enseñanza postsecundaria y universitaria ocupan el capítulo siguiente. La complejidad de esta etapa educativa en Inglaterra y Gales es considerable, ya que coexisten el sistema universitario con centros de formación paralelos que, sin pertenecer a la Universidad, ofrecen formaciones a veces equivalentes, junto con algo parecido a la formación profesional de grado superior. El estudio de las necesidades y de la formación matemática con la que acceden los estudiantes a cada una de ellas da como resultado una gran variedad de situaciones, en general marcadas por el grado de formación que han recibido en los últimos cursos de secundaria, que puede haber sido muy diferente de unos alumnos a otros. En definitiva, el informe detecta más descontento respecto a lo que saben inicialmente sus alumnos en los centros que reciben estudiantes que han superado exámenes de nivel bajo o no han superado ninguno.

Resulta significativa la descripción de las actuaciones de los centros de enseñanza postsecundaria para enfrentarse a los problemas derivados de una baja formación inicial de sus alumnos en matemáticas. El informe describe, por ejemplo, cómo en determinados tipos de centros, ante la necesidad de una mayor formación de la que tienen sus alumnos, establecen cursos que pretenden compensarla, con denominaciones como «Competencia numérica».

Análisis de la situación de la enseñanza de las matemáticas en los diferentes niveles educativos

El sistema educativo británico nunca tuvo reparo en hacer público el porcentaje de alumnos que se prevé que superen cada uno de los niveles educativos. El nivel de matemáticas alcanzado por los estudiantes ingleses después de haber completado su formación general responde a las previsiones. Son estas previsiones las que no parecen concordar con lo que muchos piensan que debería ser. Se afirma en el punto 189:

> Sostenemos que existe un equívoco entre la opinión pública en general acerca del nivel de conocimientos de matemáticas que cabe esperar de los alumnos que salen de la escuela... [Las] cifras no resultan sorprendentes, sino que reflejan las proporciones de población escolar para las que se han concebido y creado los exámenes...



Más complejo resulta obtener conclusiones del estudio sobre las matemáticas necesarias en el mundo laboral…

Junto a estas afirmaciones, se constata que, en el momento de la redacción del Informe, se estaba produciendo una evolución favorable en las proporciones de alumnos que obtenían resultados positivos en los exámenes estatales. Son cifras, sin embargo, siempre menores que las que corresponden a los resultados en Lengua.

En este mismo capítulo 5, cuyo contenido es, a mi juicio, de mucho interés, se hace una revisión de algunos aspectos que han ido tomando importancia desde entonces: las actitudes, que ya he comentado, el rendimiento de las chicas en matemáticas, la enseñanza de las matemáticas en una lengua minoritaria, el galés, y la enseñanza a alumnos cuya lengua materna no es el inglés. Por último, pero no menos sustancioso, se trata bajo el epígrafe genérico de «La enseñanza de las matemáticas», un conjunto de cuestiones esenciales sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje y sobre algunos factores que intervienen. Algunas de las afirmaciones que se hacen en este apartado se han comentado al comienzo de esta reseña. La naturaleza del informe y sus destinatarios impidió, quizá, ir algo más lejos en algunos de estos puntos, sobre los que hay mucho más que pensar y decir, especialmente en lo que se refiere al papel de la comprensión, de la memoria y de las actividades rutinarias. Se extiende algo más, no mucho, sobre aspectos metodológicos, aunque partiendo de la afirmación que incluye en el punto 242:

> Somos conscientes de la existencia de profesores que desearían que señalásemos el método más idóneo para enseñar matemáticas, pero no consideramos que esto sea ni posible ni deseable. La enseñanza de un aspecto concreto de la asignatura debe ponerse en relación con el tema mismo y con la capacidad y experiencia del profesor y de los alumnos. Debido a la diferencia de personalidad y circunstancias, métodos que pueden resultar extremadamente eficientes con un profesor y un grupo de alumnos, acaso no lo sean tanto en otros casos

Comentario que viene seguido del conocido punto 243, que se desarrolla posteriormente en cada uno de sus apartados. Por último, el momento en el que se elabora el Informe lleva a referirse a algunas cuestiones que aquí y ahora tienen escaso interés: la adopción del sistema métrico decimal, las matemáticas modernas y el movimiento de «vuelta a los fundamentos», sobre el que se pronuncia de manera inusualmente tajante:

> No podemos en modo alguno apoyar o recomendar la adopción de tal planteamiento. (Punto 278)

Los capítulos 6, 9 y 11 se dedican a cada una de las etapas educativas, que coinciden casi exactamente con las nuestras actuales. Algunas de las consideraciones que se hacen en estos capítulos han sido ya comentadas. Es el caso de la influencia del sistema de exámenes, la atención a alumnos de muy diferentes grados de rendimiento o las actitudes. En las dos primeras etapas se proponen, además los contenidos que se consideran esenciales para todos los alumnos.

Los problemas derivados de la evaluación se desarrollan en otros dos capítulos. El primero de ellos, bajo el título de «Evaluación y continuidad», se refiere a los procedimientos de evaluación que utilizan los profesores y la necesidad de suavizar el paso de unos niveles a otros. No son fácilmente transferibles muchas de sus afirmaciones a sistemas educativos como el nuestro, principalmente por la práctica ausencia de repeticiones de curso en el sistema británico y la extraordinaria importancia que tiene allí el sistema de exámenes externos. Sin embargo se encuentra uno con algunas consideraciones que sí son válidas, aunque algunas de ellas son afirmaciones tópicas y ya muchas veces elegidas o escuchadas. El papel de la evaluación, la importancia del registro de las observaciones o la necesidad del intercambio de información entre profesores de distintos niveles son algunos de los temas tratados.

La lectura de las consideraciones sobre los exámenes externos, sin mucho interés hasta ahora para nosotros, parece ir siendo cada vez más conveniente, en la medida en que la tendencia parece ser aquí la implantación de pruebas al final de varios niveles, en unos casos con valor académico y en otros con carácter informativo. La influencia que estos exámenes tienen en el desarrollo de las actividades docentes es uno de los aspectos más importantes:

La lectura de las consideraciones sobre los exámenes externos, sin mucho interés hasta ahora para nosotros, parece ir siendo cada vez más conveniente, en la medida en que la tendencia parece ser aquí la implantación de pruebas al final de varios niveles, en unos casos con valor académico y en otros con carácter informativo.

> Es esencial que los programas para el examen a los 16 años y los propios ejercicios de examen no impongan limitaciones inapropiadas al trabajo en la escuela secundaria. No debe pedirse a los alumnos que preparen exámenes que no correspondan a su rendimiento, y tampoco los exámenes deben ser de tal naturaleza que minen la confianza de aquellos. (Punto 518)

Este último aspecto se trata posteriormente con detenimiento. Por ejemplo, en el punto 539 se afirma:

> …hay que considerar detenidamente los medios idóneos para evaluar a los alumnos de bajo rendimiento en matemáticas. El método actual de ejercicios escritos de duración limitada realizados al final del quinto curso, aunque se matice con la evaluación del profesor, no es necesariamente apropiado.

La necesidad de que estas pruebas respondan a lo que se quiere realmente evaluar es otro de los asuntos de interés..

> Es importante comprender que las pruebas estandarizadas solo miden algunos aspectos del rendimiento en matemática. (Punto 423)

Parece, pues, evidente que si la evaluación a los 16 años ha de reflejar el mayor número posible de aspectos del rendimiento en matemáticas, debe tomar en cuenta no solo aquellos aspectos que es posible examinar mediante ejercicios escritos, sino también los que se han de evaluar de alguna otra manera. (Punto 534)

Recursos para enseñar matemáticas: medios y profesores

Además de los recursos informáticos y las calculadoras, plantea el informe la necesidad de contar, para enseñar matemáticas, con determinados recursos materiales. Sin información precisa sobre cuáles eran los medios en los centros británicos en el momento de la redacción del Informe no es fácil valorar por qué se pone el énfasis en algunos de estos medios. Conviene resaltar, en todo caso, la importancia que se da a la existencia de aulas específicas para enseñar matemáticas en los centros de secundaria, en los que, además, estas aulas deben estar agrupadas. En cuanto a los materiales didácticos, no se dice nada que no se pueda leer en otros muchos lugares.

Los profesores ocupan la atención de los capítulos 13, 14 y 15. El primero de ellos se centra en la oferta de profesores de matemáticas que, en ese momento, en Gran Bretaña era escasa de manera preocupante. Parte de la constatación de que es esencial para una buena enseñanza de las matemáticas que haya profesores bien formados. En el punto 619 se cita un informe de la Royal Society:

> No hay un área de conocimiento en la que el profesor pueda influir en mayor medida sobre las actitudes y la comprensión de los alumnos que la de matemáticas.... Hay pues que afirmar que las matemáticas no solo han de enseñarse, sino que han de enseñarse bien.

Es precisamente por esto por lo que la escasa oferta de profesores resulta preocupante. Se tiende a *encomendar la enseñanza de las matemáticas a profesores que carecen de la formación necesaria*. En un momento en el que se produce una disminución del alumnado de secundaria ocurre a menudo que los profesores sobrantes de otras materias deben asumir las clases de matemáticas. Al revisar el nivel de titulación de los profesores de secundaria se describen estudios que muestran que *el 38 % de la enseñanza de las matemáticas en las escuelas secundarias corría (en 1977) a cargo de profesores cuya titulación para impartir la materia era «insatisfactoria»*. La situación en los centros de primaria e «intermedios» es quizá peor. Ante este panorama, se ofrecen algunas propuestas de medidas relacionadas con la mejora de la imagen de la enseñanza, el acercamiento a la enseñanza de las licenciaturas en matemáticas o la implantación de incentivos económicos. Es interesante destacar que cuando el informe va desgranando los problemas, uno va encontrado muchas afirmaciones que serían perfectamente aplicables a nuestro entorno.

La formación inicial que se describe corresponde a un sistema diferente y, por ello, las afirmaciones y propuestas que se hacen resultan algo lejanas. Se pueden leer, a pesar de todo, algunas frases más próximas:

> En nuestra opinión, la licenciatura en matemáticas no implica la capacidad de enseñarlas. (Punto 692)
>
> Creemos que existe una perentoria necesidad de revisar y evaluar los cursos de formación inicial que se imparten a todos los futuros profesores de matemáticas. (Punto 708)
>
> Estimamos que debe estudiarse la manera de enlazar con más firmeza la formación inicial y la iniciación. (Punto 712)

La lenta renovación de los profesores lleva a afirmar que la mejora en la enseñanza de las matemáticas pasa por un apoyo decidido al perfeccionamiento de los profesores. Los procedimientos de formación permanente que se describen en el informe son casi todos ellos familiares, aunque no lo eran tanto cuando se publicó el Informe en castellano. Así, por ejemplo, se defiende la oportunidad de reunirse con otros profesores y la conveniencia de fomentar la afiliación y participación en asociaciones de profesores de matemáticas. De otros modos de formación permanente se pueden leer en el informe los mismos comentarios que se han reiterado en otros muchos lugares.

…se trata de un documento de una gran riqueza y que, a pesar del tiempo transcurrido y de la distancia entre su situación y la nuestra, resulta ahora y aquí de lectura interesante y llena de sugerencias…

El Informe termina con una recopilación de cuestiones que no han tenido cabida en otros lugares. Se encuentran aquí, por ejemplo, algunas consideraciones sobre la enseñanza de la estadística, que parece tener problemas similares por todas partes. Hay, además, una brevísima revisión de la situación en algunos otros países. Su extensión y su redacción reflejan el problema principal del Informe: un análisis de la situación que no se cuestiona el mantenimiento de casi todos los parámetros en los que se mueve la enseñanza de las matemáticas en Inglaterra y Gales y, por tanto, sin demasiado interés por buscar fuera alternativas diferentes a las que ha producido allí su propia tradición.

Sin embargo, y como conclusión, se trata de un documento de una gran riqueza y que, a pesar del tiempo transcurrido y de la distancia entre su situación y la nuestra, resulta ahora y aquí de lectura interesante y llena de sugerencias para todos los que están próximos a la educación matemática.

Vicente Rivière

NÚMEROS PARES, IMPARES E IDIOTAS
Juan José Millás/ Antonio Fraguas 'Forges'
Alba
Barcelona, 2001

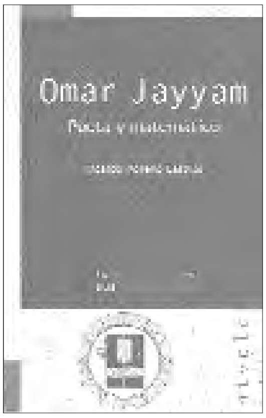
Que dos pesos pesados de la comunicación como Millás y Forges se junten y hagan un libro sobre asuntos relacionados con las matemáticas es reseñable y digno de mención en sí mismo, por su importancia potencial y por lo inhabitual del empeño por estos lares. Pero una vez que uno se adentra en el libro lo sería también con independencia de quienes fueran sus autores. Porque contiene un conjunto de relatos con una mirada surrealista y sicoanalítica del mejor Millás asociados con unas ilustraciones cálidas y mordaces como las que nos tiene acostumbrados el genio de Forges. Que consiguen hacernos mirar de otra forma, con perspectivas diferentes a esos amigos y compañeros inseparables de nuestro quehacer diario que son los números. Esos a los que Le Lionnais dedicaba su libro *Números destacados* como: «A los amigos de toda la vida, deliciosos y terroríficos, los números».

Y es que una mirada de gente no profesional de las matemáticas (incluso de personas no especialmente amantes de la mismas, al menos en su versión escolar, como son los autores), pero lúcidos diseccionadores del alma humana, hace que todos, y sobre todo los que estamos en contacto «laboral» con los números, nos enriquezcamos un poco más, al aportar ángulos nuevos de mirarlos. Y como muestra de la forma de cómo destacan aspectos nuevos de los números, ahí está la solidaridad de la dedicatoria inicial del 'Blasillo': «Estoy con los que suman y multiplican la solidaridad y no con los que la restan y dividen». Que hace estallar en definitiva esa creativiad que Koestler definía como «esos raros momentos en que 2 y 2 son 5».

Hay que comentar cómo está el mercado editorial de alejado de todo lo que tiene que ver con las matemáticas que incluso un libro como éste tuvo dificultades para aparecer, de forma que las editoriales habituales de los autores sólo lo querían editar en alguna colección juvenil o en otros formatos «marginales», lo que llevó a los autores a coeditarlo, como si fueran recien llegados al mundo de los libros. Esperemos que el gran éxito comercial que ha conseguido haga recapacitar a los gestores culturales sobre el tema. A lo que también contribuirá seguramente el Premio Príncipe de Asturias concedido a Enzesberger que, entre otras importantes contribuciones a la cultura, no hay que olvidar que es autor de otro libro de divulgación matemática ampliamente apreciado: *El demonio de los números*.

Para acabar señalar que es una pena un lapsus que se repite a lo largo de las páginas del libro. Se refieren repetidas veces al «Sistema métrico decimal» para indicar el sistema de números en que escribimos, en vez de cualquiera de las fórmulas usuales como «sistema decimal de numeración» u otras parecidas. Error fácilmente subsanable y que no empaña el placer que proporciona su lectura. No dudamos en recomendarlo a todos los colegas.

Fernando Corbalán



OMAR JAYYAM. POETA Y MATEMÁTICO
Ricardo Moreno Castillo
Editorial Nivola
Colección: La matemática en sus personajes, n.° 12
Madrid, 2002
ISBN: 84-95599-28-7
92 páginas

El autor ha elegido para comenzar el libro un poema *Rubáiyat*, de Jorge Luis Borges, en el que calca el nombre con el que se conocen los poemas de Omar Jayyam (O.J.), plural de la palabra persa «robaí», que significa una estrofa de cuatro versos dodecasílabos en la que libra el tercero y riman los otros tres.

Las intenciones del autor se recogen perfectamente en la breve introducción que realiza de la obra, donde no duda en calificar a O.J. como la figura medieval islámica más fascinante, y subraya la importancia de su obra matemática, en la que se encuentra la resolución sistemática de las ecuaciones cúbicas cortando cónicas. Es este aspecto, la forma de relacionar el álgebra y la geometría, el que resalta del autor, sin olvidar la obra poética. No hay que olvidar que O.J. es más famoso en occidente por su poesía que por sus obras matemáticas.

El primer capítulo se dedica en exclusiva a la ciencia árabe en general, haciendo un breve recorrido histórico por el mundo árabe, pasando por el inicio del Islam, y terminando a la muerte de al-Kasi, en el siglo XV.

El capítulo dos, titulado «Los precursores», establece los principios matemáticos que necesitará O.J. para su obra, y enumera a los autores árabes precedentes que ya los habían manejado en obras anteriores, para lo cual nos hace indicación expresa de los manuscritos y traducciones que se conservan, así como su ubicación actual.

El tercer capítulo «Vida y leyenda del poeta Omar Jayyam» comienza con la extracción de sus datos biográficos, de la leyenda que le rodea y el entorno social donde vivió. Inmediatamente resalta su obra poética *Rubaiyyat* con indicación del manuscrito del año 1461, a él atribuido, que conserva la Universidad de Oxford, pasando a continuación a transcribir tres estrofas de la obra, de la versión española aparecida en la editorial Hiperión, realizada por J. Munárriz y Z. Behnam. Como colofón, resalta distintas opiniones de célebres escritores que ensalzan esta obra de poesía.

El capítulo cuatro se dedica como expresa su título «Las fuentes griegas de Omar Jayyam», a explicar las proposiciones geométricas demostradas por los griegos, las cuales ya habían sido traducidas al árabe en esta época. La última frase de este capítulo lo resume perfectamente

> Y esto es todo lo que hay que saber para entender el Álgebra de Omar Jayyam.

El quinto capítulo trata de la obra algebraica de O. J. escrita hacia el año 1074, indicando las copias más antiguas y el archivo actual de las que se tiene conocimiento. A continuación se realiza el estudio sistemático de las catorce ecuaciones algebraicas de grado tres que resuelve pasando por la geometría. Sólo se resuelven éstas ya que O.J. reconoce que existen veinticinco tipos de ecuaciones de grado menor o igual que tres, de las cuales seis ya habían sido resueltas por algebristas anteriores a él y otras cinco son reducibles a éstas. Todas las figuras geométricas están muy bien trazadas y cuidadas en su presentación a color, para facilitar la comprensión de la resolución.

En el capítulo seis, a modo de ejemplo práctico de la obra de álgebra de O.J., se realiza la proposición de una cuestión geométrica, «Sobre la división de un cuarto de círculo», que se resuelve mediante una ecuación cúbica.

El último capítulo explica las aportaciones de O.J. en forma de comentarios, a los *Elementos* de Euclides. En primer lugar glosa la famosa controversia del quinto postulado, que tantos ríos de tinta ha hecho correr a lo largo de la Historia. Y en segundo término, nos habla sobre la Teoría de las Proporciones, dando lugar a un algoritmo precursor de las fracciones continuas que se desarrolló en el siglo XVIII.

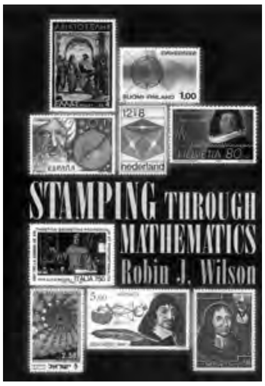
El libro finaliza invitando al lector a leer las obras matemáticas de O.J., que han sido espléndidamente traducidas al francés, y con las últimas palabras de O.J. en el libro *Comentarios sobre aspectos dudosos en los postulados del libro de Euclides*:

> Has de saber que hemos considerado en este opúsculo nociones extremadamente sutiles, y hemos hablado de ellas exhaustivamente, conforme a nuestro designio. Así, quien las medite y asimile, y se esfuerce en comprender lo que se basa en estas premisas, conocerá el arte de la geometría. Y cuando entienda sus principios a partir de la Filosofía Primera, la habrá asimilado intelectualmente. Alabado sea Dios en toda circunstancia, y benditos sean Mahoma (la mejor de Sus criaturas) y su familia buena y virtuosa. Con Dios nos basta, ¡que gran Protector es!

Es fácil reconocer a lo largo de la lectura del libro, que el autor es un docente dedicado a hacer entender las matemáticas a los alumnos de educación secundaria. Las explicaciones y demostraciones, se pueden seguir sin dificultad. Tenemos que reconocer la maestría de un profesor como Ricardo Moreno, que al mismo tiempo que explica Matemáticas elementales a los alumnos de un Instituto de Educación Secundaria, explica también conceptos matemáticos mas sutiles a los alumnos de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

Recomendamos la fácil lectura de este libro, que no necesita consultar ninguna otra obra para su comprensión, ya que explica sencilla y fácilmente, tanto la obra de Omar Jayyam como las obras precedentes de autores anteriores, ya sean griegos como árabes, que se necesitan para su seguimiento.

M.ª Carmen Escribano



STAMPING THROUGH MATHEMATICS
Robin J, Wilson
Springer-Verlag
New York, 2001
ISBN 0-387-98949-8
121 páginas

Toda la ciencia es física o coleccionismo de sellos.

Con esta frase y la reproducción de un sello soviético en el que aparece su autor, Ernest Rutherford, empieza este precioso libro sobre las matemáticas, su desarrollo y sus aplicaciones, que utiliza los sellos de correos como vehículo de presentación. Su autor, R. Wilson lleva colaborando desde 1984 en *The Mathematial Intelligencer*, con una columna periódica titulada «Stamp Corner», lo que le acredita como especialista en el tema.

El libro lo componen un total de 55 capítulos dedicados a los matemáticos más importantes, las contribuciones de diversas culturas, a partes de las propias matemáticas y de sus aplicaciones, o áreas como la navegación, el arte, etc., cuyo estudio ayudó al desarrollo de las matemáticas. Claro que no se relata una historia de las matemáticas al uso o se hace una introdución a las matemáticas convencional ya que hay temas para los que no existen sellos adecuados, mientras que hay otros (quizá no muy relevantes) de los que si existen imágenes interesantes.

Cada tópico se trata en una doble página: a la izquierda se puede leer un breve comentario sobre el tema que encabeza el capítulo mientras que a la derecha hay varias reproducciones ampliadas de sellos relacionados con él.

Sin duda que todo el que descubrió la filatelia matemática con las interesantísima guía de Las matemáticas en los sellos de correos, editada por la SMPM «Emma Castelnuovo», –tanto en su primera edición en blanco y negro como en su posterior reedición en color para el ICMI 8–, estará interesado por la apreciable ampliación que supone este texto, y sabrá sobreponerse a la desventaja que supone un texto en inglés.

Julio Sancho

NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, ICE de Universidad de Zaragoza, C./ Pedro Cerbuna 12, 50009 Zaragoza), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.
2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos en ningún caso serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.
3. Los gráficos, diagramas y figuras se enviarán en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. Así mismo, podrán incluirse fotografías. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.
4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de entre cinco y diez líneas, que no necesariamente tiene que coincidir con la Introducción al artículo. Debe ir escrito en hoja aparte. En ese mismo folio aparecerán los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede).
5. Si se usa procesador de texto, agradeceremos que además se envíe un disquette con el archivo de texto que contenga el artículo, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quiera incluir. La etiqueta del disquette debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda MS-Word (hasta versión 5.0) en Macintosh, o WordPerfect (hasta versión 5.1) en PC. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF.
6. En cualquier caso, tanto un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.
7. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.
8. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo.
9. La bibliografía se dispondrá al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:

   TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma,* n.° 20, 91-98.

   En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas,* Labor, Barcelona.

   En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2,* ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.
10. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: …supone un gran avance (Hernández, 1992).

    Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: …según Rico (1993).
11. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como —en caso afirmativo– la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

BOLETÍN DE SUSCRIPCIÓN

Tarifa

	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	21 €	10 €
Centros	30 €	10 €
Europa	38,5 €	13,5 €
América y resto del mundo	$50 USA	$17 USA

Fotocopiar y enviar a: Revista SUMA. ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Deseo suscribirme a la revista SUMA:
Nombre y apellidos:. . . . .
Dirección:. . . . . Tno.: . . . .
Población: . . . . CP: . . . .
Provincia/país . . . . CIF/NIF: . . . .

	Importe
☐ Suscripción a partir del n.º______ (3 números)	
☐ N.os sueltos:______________________	
Total	

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto).

☐ Transferencia bancaria (Ibercaja: 2085-0168-50-03-000415-98).

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista Suma. Firma y fecha:

☐ Giro postal dirigido a Revista Suma.

Nombre y apellidos: . . . .
Código Cuenta Cliente
Entidad ☐☐☐☐ Oficina ☐☐☐☐ DC ☐☐ Cuenta ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

Banco/Caja . . . .
Agencia n.º: . . . . Dirección: . . . .
Población: . . . . Provincia: . . . .

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que periódicamente les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (Fecha y firma):

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

FESPM