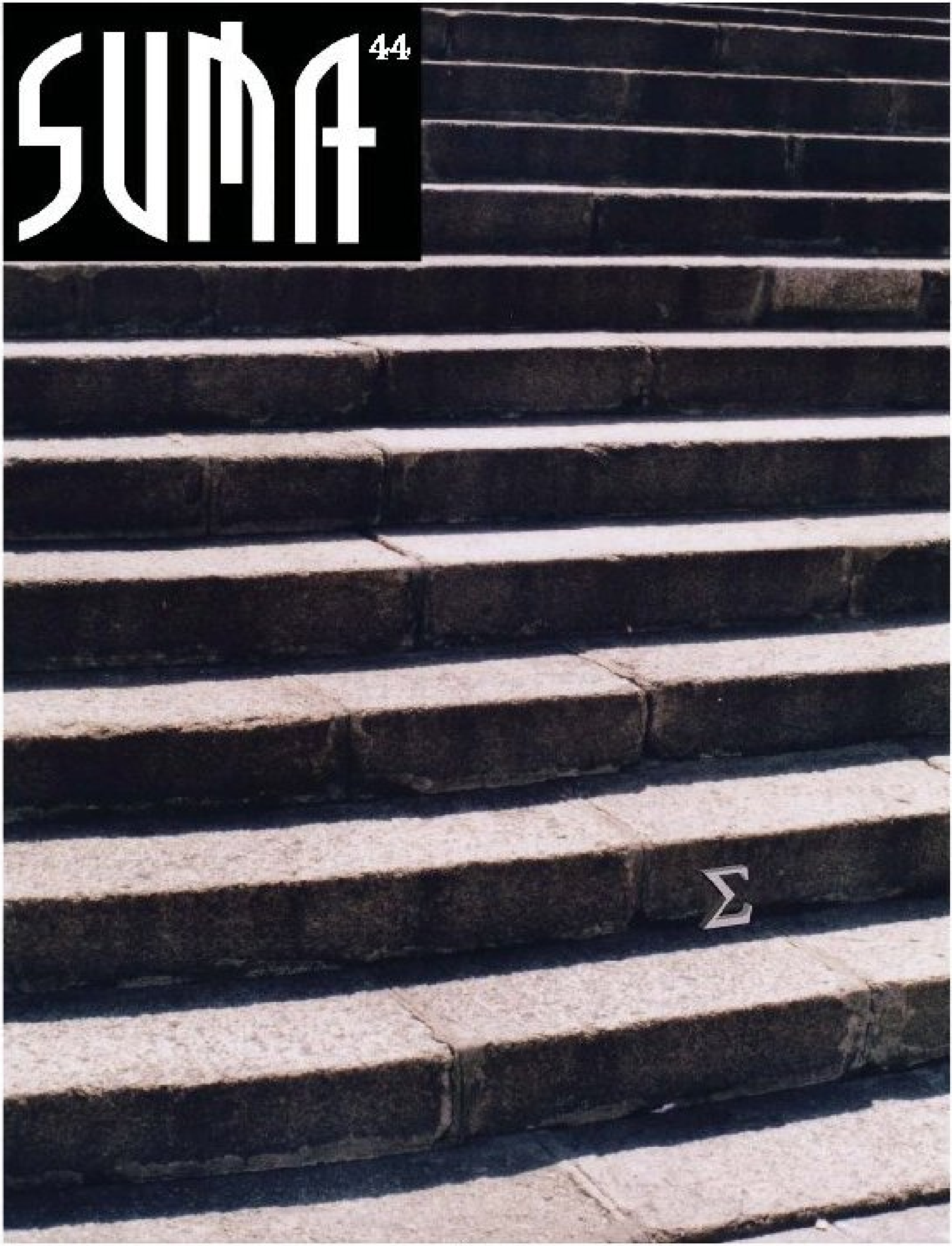
SUMA 44



SUMA. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las MATEMÁTICAS

MADRID · NOVIEMBRE 2003 · Nº 44 · ISSN 1130-488X

SUMA

Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las MATEMÁTICAS

44

Noviembre 2003

Edita
FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS (FESPM)

Diseño de la portada
Javier Alvariño
Diseño interior
Raquel Fraguas (NIVOLA)
Maquetación
A. Alamillo y F. Martín
Summaries
M. Manso de Zúñiga
P. Satrústegui
Revista Suma
Apdo. 19012
E-28080-Madrid
España
Fax:+(34) 912 911 879
Tirada: *6800 ejemplares*
Deposito legal: *Gr 752-1988*
ISSN: *1130-488X*

SUMA 44
Noviembre 2003

Un nuevo equipo de personas nos hemos hecho cargo de SUMA. El número 44 que ahora lees es el primero que se edita en esta nueva etapa, en Madrid, y como es lógico debemos empezar haciendo una breve presentación de nosotros mismos, de las personas que se han ofrecido a colaborar y de las líneas de trabajo que vamos a seguir.

Los nuevos directores, Inmaculada Fuentes y Francisco Martín, asumimos este reto con ilusión, con ganas de darle continuidad a un trabajo plenamente consolidado. No sería justo iniciar esta presentación sin antes manifestar nuestro reconocimiento a los cuatro directores anteriores: Rafael Pérez, que desde Granada fue su primer director y puso SUMA en marcha en sus inicios; Sixto Romero, que desde Huelva dio continuidad al proyecto y Julio Sancho y Emilio Palacián, que la dirigieron en estos últimos ocho años y han sido los protagonistas de la etapa de consolidación. Julio Sancho y Emilio Palacián, además han facilitado enormemente el traspaso, desde el momento mismo en que supieron que presentábamos una candidatura. Ambos, como por otra parte nos tenían acostumbrados en estos ocho años, nos han proporcionado toda la información necesaria para diseñar el proyecto, nos han dado ánimos, especialmente cuando empezamos a ser conscientes del ingente trabajo que esto suponía, nos han ayudado con sus consejos y su experiencia, evitándonos así algunos errores que como noveles en estas lides hubiéramos cometido. Este agradecimiento necesariamente ha de ser extensivo a José Javier Pola, anterior administrador, quien con cientos de horas de trabajo extra ha facilitado la migración de la compleja base de datos que permite que SUMA llegue a todos los socios de las Sociedades federadas y a todos los suscriptores.

Y en la lista de los agradecimientos debemos incluir a la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, editora de esta revista, por habernos dado su confianza para dirigirla.

Coincidiendo con esta renovación en la dirección, se ha renovado también la estructura organizativa de la revista. Comentaremos un poco estos cambios. Para empezar, se ha constituido un nuevo ***consejo editorial****. Es responsabilidad de este consejo, en nombre de la Federación, marcar y supervisar la línea que debe seguir la revista. El nuevo* ***consejo editorial*** *está constituido por: Florencio Villarroya, en calidad de*

Presidente de la FESPM; Ricardo Luengo, como responsable del Secretariado de Publicaciones; Emilio Palacián y Julio Sancho, como anteriores directores y nosotros mismos como codirectores actuales.

Para realizar la revista nos hemos rodeado de personas que con un derroche de entusiasmo han aceptado colaborar con nosotros. Presentaremos a todos ellos. El nuevo ***consejo de redacción*** *estará constituido por Carmen da Veiga, Charo Rivarés y Antonio Hernández, los tres profesores de secundaria de distintos institutos de Madrid; Santiago Gutiérrez, que lo fue hasta hace poco y actualmente está jubilado; Adolfo Quirós, profesor del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid y Margarita Marín, profesora de la Facultad de Educación de la Universidad de Castilla La Mancha. Todos ellos nos ayudarán tratando de hacer que la revista mantenga los estándares de calidad y de servicio al profesorado que ha tenido hasta ahora.*

Se integran también al trabajo en SUMA Cristina Torcal y Antonio Alamillo, que son los nuevos administradores y formando parte de nuestro equipo más directo comparten con nosotros las múltiples tareas que la revista genera. Los dos, desde el principio han asumido sus funciones con entusiasmo y con mucha capacidad de trabajo.

Queda pendiente únicamente la renovación del **consejo de asesores***. Para ello la Federación ha iniciado un proceso que pretendemos culmine en un seminario, que se celebrará un fin de semana en una fecha aún sin determinar y que servirá para unificar criterios y modelos para referenciar los artículos que se remiten a SUMA.*

Somos conscientes de que la calidad alcanzada por SUMA y su consolidación han sido fruto del esfuerzo de muchas personas. Por eso, al asumir la dirección, nuestro principal objetivos es garantizar dicha continuidad y que la revista siga cumpliendo las finalidades que en su momento justificaron su creación.

A la vez, pretendemos afrontar algunos cambios, abordándolos paulatinamente. Presentaremos algunos de ellos. En primer lugar habréis notado cambios externos. Hemos renovado la maqueta gráfica y ligeramente el logotipo, hemos aumentado un poco el tamaño de la tipografía y hemos hecho otros pequeños cambios formales. El tamaño, el número de páginas y otra serie de parámetros se mantienen idénticos. Quizás estos mismos cambios den una muestra de lo que pretendemos que sea nuestra etapa al frente de SUMA: habrá cierta renovación, pero mantendremos la esencia de lo que SUMA es, de manera que quien observe los cambios sienta sólo una suave evolución, sin saltos en el vacío.

Se han renovado también algunos aspectos de la estructura interna. Otros irán cambiando a lo largo del año 2004. Comentaremos algunos de estos cambios:

SUMA cumple una triple función en el ámbito de la Educación Matemática. Por una parte pretende, y de hecho es, un referente de las ideas, las investigaciones y los trabajos de innovación en Educación Matemática en España y, afortunadamente, cada vez más, transciende nuestras fronteras. SUMA, en este sentido, es y será fiel reflejo de lo que la Educación Matemática es en nuestro país y estará abierta a todos los que quieran remitirnos el fruto de su trabajo, sea este el resultado de un trabajo de investigación científica, un proyecto de innovación educativa o simplemente una experiencia, hecha en clase con los alumnos, de la que se piense que puede tener algún valor para los demás. En este sentido no nos cansaremos de insistir en que hay muchos profesores y profesoras que desarrollan diariamente su actividad de manera innovadora, sin darle *importancia ni trascendencia y creyendo que eso que hacen no merece la pena ser contado. Pensamos que están equivocados, que todos podemos aprender de su trabajo y los animamos a que lo cuenten; de manera directa, sin retórica, con brevedad, con convicción. SUMA será más útil si la investigación, la innovación y la narración de experiencias innovadoras aparecen en la justa proporción y que sea así es misión de todos.*

Una segunda función de SUMA es la de tener una personalidad propia como animadora del trabajo que desarrollamos entre todos en la educación. Creemos que esta función, en parte, se cumple con los artículos que se reciben y se publican, pero que para hacerlo con una línea propia era necesario que haya en la revista ciertas secciones fijas. De hecho, estas secciones son una continuidad de los rincones que hasta ahora se venían publicando. Las secciones se irán renovando frecuentemente, en la medida en que se pueda mostrar una nueva faceta de la educación matemática y con la única limitación de encontrar el autor o los autores que se puedan encargar de escribirla y le den contenido y calidad. Juntas todas estas secciones formarán lo que hemos denominado el **Poliedro***, distintas visiones de la educación matemática, desde distintos puntos de vista y a través, cada uno, de un prisma personal.*

Algunas de estas secciones ya existían desde hace tiempo. Así la redactada por Ángel Ramírez y Carlos Usón, en la que **Desde la Historia** *reflexionan en voz alta sobre la tarea de ser profesores. También continúa la sección titulada* **Juegos***, que escribe el Grupo Alquerque de Sevilla, presentando ideas siempre útiles para la clase. Fernando Corbalán sigue colaborando con una sección renovada; si antes nos hablaba de* mates y medios*, ahora buscará la* **Presencia Mediática** *de las matemáticas, a veces tan tópica y esclerotizada, ofreciéndonos ideas para la reflexión desde su visión de las matemáticas y de los medios de comunicación. Es tradicional en SUMA la publicación de recensiones de libros de interés. Hemos refundido en una nueva sección, que aparecerá bajo el título de* **Biblioteca,** *estas recensiones, junto con la reseña de los libros que se reciben. En paralelo a ella inauguramos otra nueva, que estará a cargo de Julio Sancho, ex director de SUMA, que en cada número presentará una revista de educación matemática. Esta nueva sección se llama* **Hemeroteca***. Claudi Alsina, profesor de la Universidad Politécnica de Barcelona se hace cargo de otra nueva sección que él mismo ha denominado* **El Clip***; un clip puede mantener juntos durante cierto tiempo papeles muy diversos sobre temas diferentes y no es una grapa. En esta sección intentará mirar, matemáticamente, aspectos curiosos, cotidianos y actuales, que nos permitan ver y hacer ver, relaciones transversales interesantes. Otra de las nuevas secciones se titulará* **Informales e Interactivas*****: Las matemáticas en los Centros de Ciencia****, estará a cargo de ella Jacinto Quevedo, director del Museo Elder de la Ciencia y la Tecnología de Las Palmas. En ella abordará la presencia de las matemáticas en los museos de la ciencia, no sólo españoles, dando ideas de cómo pueden ser aprovechadas las visitas con alumnos a estos Centros. La sección* **Hace…** *que escribe Ana Millán, doctora en historia de la matemática, investigadora en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Roma "La Sapienza" y profesora en la Universidad de Roma "Tor Vergara", recogerá las distintas celebraciones históricas que tengan lugar cada año; se inicia en este número con el 400 aniversario de François Viète. En* iMÁTgenes*, Miquel Albertí, frecuente colaborador de SUMA y profesor del I.E.S. Vallès de Sabadell (Barcelona), tiene un objetivo: observar cómo las matemáticas pueden resultar imprescindibles para comprender lo que vemos. Esta última sección cierra el abanico de las que se ofrecen en este número 44, pero, como indicábamos anteriormente, las caras que ofrezca este* Poliedro *irán variando con el tiempo. En el tintero se quedan, por ahora, dos de ellas, ambas vinculando las matemáticas con otros ámbitos del conocimiento, la naturaleza y el arte. Tiempo habrá de retomarlas.*

La tercera función de SUMA es la de ser el órgano de expresión de la Federación Española de Sociedades de Matemáticas y a ella responde la tercera gran división de la revista. Se recogerán en ella las actividades de la Federación, como son las Olimpiadas, las Jornadas sobre el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas y también los Seminarios, los encuentros y todas las actividades de la Federación.

En dos ámbitos querríamos profundizar. Uno de ellos es la presencia en la red. En cuanto nos sea posible abriremos una nueva página web de SUMA. En ella queremos ofrecer una versión digital de la revista, distinta de la que se publica en papel, que seguirá siendo la principal. Desde la página web se retomarán secciones, como la que hasta ahora ofrecía Antonio Pérez, sobre las matemáticas en la red. Se ofrecerán también los resúmenes de los artículos publicados en SUMA y sobre todo complementos a estos artículos. SUMA se seguirá publicando a una tinta, al menos por ahora, pero las imágenes en color se pondrán a disposición de los lectores en la página web. Muchos artículos de los que se presentan para su publicación son a veces excesivamente largos para el lector habitual de la revista. Pensamos sin embargo que se deberían publicar aunque fuera en una versión más reducida, ofreciendo la dirección de la página donde se puede descargar la versión completa, para aquellos que deseen profundizar en su lectura u obtener una información más exhaustiva sobre el asunto tratado. En la página web, por último, se podrán ofrecer e intercambiar las hojas de trabajo y otros recursos didácticos listos para ser utilizados con los alumnos, que actualmente acompañan algunos de los trabajos que se presentan para su publicación y que resulta difícil reproducir en SUMA, por cuestiones de formato y cabida.

El segundo de los ámbitos es la internacionalización. Queremos dar una visión internacional de lo que se hace en el ámbito de la educación matemática, especialmente en la dimensión europea y latinoamericana. Queremos que haya más artículos que nos traigan otras visiones y queremos acercarnos nosotros a lo que sucede fuera. En este sentido solicitamos a todos que contribuyan con sus ideas en este aspecto.

Para que SUMA se desarrolle en estos dos ámbitos y en otros serán necesarios más recursos, humanos y materiales. SUMA, no recibe subvenciones y se financia exclusivamente con la aportación de todos, a través de la Federación y de los suscriptores. Por ello queremos lanzar una campaña para que se suscriban los centros educativos. Te pedimos a ti lector habitual que compruebes si tu centro está suscrito a SUMA y, caso de que no lo esté, lo suscribas. Una mayor presencia de SUMA en los centros contribuirá a reforzar nuestro papel en la enseñanza de las matemáticas y quizás a llegar a otros profesores que ahora no nos conocen. Con un esfuerzo en este sentido todos nuestros nuevos proyectos serían abordables.

Estos son nuestros proyectos inmediatos. Para algunos pueden parecer ambiciosos y para otros escasos en iniciativa, pero nosotros creemos que ambas, la iniciativa y la ambición nos corresponden a todos globalmente. Recordad que somos dos profesores más que hemos asumido esta tarea y disculpadnos los errores que cometamos, ya que nuestro único activo es la ilusión. Queremos que seáis ambiciosos y exigentes con SUMA, y esa exigencia considerarla de algún modo autoexigencia de cada uno, porque SUMA, y esto no es un tópico, es de todos. Y queremos que toméis la iniciativa con sugerencias, con ideas, con alternativas, con vuestro apoyo. Para ello tenéis nuestra dirección de correo electrónico sumadireccion@fespm.org. *Y sin más preámbulos he aquí SUMA.* ■

SUMA 44
Noviembre 2003

Tiempo de cambios

Comienza con este número una nueva etapa en SUMA. Poco a poco, y especialmente en los últimos años, la revista ha ido consolidándose como el referente más importante en educación matemática con el que contamos en nuestro país. Los niveles de calidad y difusión que ha alcanzado eran difícilmente imaginables allá por 1988 cuando de la mano de Rafael Pérez iniciaba su andadura. Aquellos objetivos iniciales, que se recogían en el editorial del número 2 de la revista, en febrero de 1989, han sido plenamente alcanzados, como se puede constatar a poco que se observe la línea editorial que desde hace tiempo viene siguiendo. Evidentemente ello ha sido gracias al esfuerzo generoso de muchas personas: el equipo de Rafael Pérez, en Granada, que dirigió la revista durante los 4 primeros años; el de Sixto Romero, en Huelva, que tomó el testigo hace ahora 13 años, cuando la revista había alcanzado ya el número 9, y el de Emilio Palacián y Julio Sancho, que la han dirigido desde el número 20, en el otoño de 1995, hasta el anterior a éste. Creo que todos ellos son merecedores de nuestra felicitación por el magnífico trabajo desarrollado.

Es difícil mejorar algo cuando funciona tan bien. Probablemente piensen eso ahora Francisco Martín e Inmaculada Fuentes, al hacerse cargo de la dirección de SUMA. Sin embargo no nos cabe la menor duda de que serán capaces de lograrlo. A pesar de que Julio y Emilio han dejado muy alto el listón, seguro que Inma y Franchi conseguirán superarlo. Cuentan para ello con todo el respaldo de la Junta de Gobierno de la Federación y, por descontado, de su Comisión Ejecutiva.

La evolución de la revista ha ido en paralelo con la de la propia Federación. Cuando la revista veía la luz, la Federación solamente estaba constituida por las tres sociedades fundadoras: la Sociedad Aragonesa Pedro Sánchez Ciruelo, la Sociedad Canaria Isaac Newton y la Sociedad Andaluza Thales. Precisamente este año hemos celebrado el 25 aniversario de la sociedad canaria, por cuyo motivo, entre otros reconocimientos, ha recibido la medalla de oro de su comunidad. Enhorabuena.

La FESPM ha crecido mucho desde aquellos tiempos hasta ahora. En la actualidad está constituida por 19 sociedades, que cuentan en conjunto con cerca de seis mil socios, y ya tiene presencia en casi todo el estado español. Incluso en las pocas comunidades en las que no existen sociedades, ya se celebra la olimpiada matemática, con *lo que es de esperar que en breve también en esos lugares surjan nuevas sociedades. No debemos olvidar que la olimpiada, una de nuestras actividades más emblemáticas, ha sido el origen de muchas de las actuales sociedades.*

El cambio en la dirección de SUMA no es el único que ha tenido lugar en los órganos de gobierno de la federación. En la reunión de la Junta de Gobierno celebrada el pasado mes de julio en Canarias se ha procedido al relevo en la Secretaría de Relaciones con Iberoamérica y en la de Prensa. Luis Balbuena y Antonio Pérez, que venían desempeñando estos cargos hasta la fecha, han sido sustituidos por Sixto Romero e Ismael Roldán, respectivamente. Tanto Luis como Antonio han recibido la felicitación unánime de la junta por la excelente gestión que han realizado: la constitución de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática y la creación de nuestra página web son dos buenos ejemplos de sus respectivos trabajos.

Se ha producido también el relevo en la Secretaría General que yo venía ocupando desde las JAEM de Lugo, en septiembre de 1999. No fue posible hacerlo en Canarias, tal como estaba previsto, por ausencia de candidatos, por lo que la Junta tomó la decisión de prorrogar el plazo de presentación y retrasar la elección hasta la reunión que se celebró el 25 de octubre. Deseo éxito en sus funciones a Pep Sales, que en esa reunión ha sido elegido como nuevo Secretario General.

Es bueno que las sociedades crezcan y lo es mucho más que renueven sus órganos de gestión. Personalmente creo que es una de las condiciones indispensables para la buena salud democrática de cualquier organización. Contrasta esto sin embargo con lo que sucede en la mayoría de las asociaciones y también, no podía ser menos, en nuestras sociedades y en la propia federación. En su primer editorial, en el número 20 de la revista SUMA, Emilio y Julio se congratulaban por la gran cantidad de gente joven que habían visto participar en las JAEM de Madrid, por entonces recién celebradas, aunque lamentaban que la edad media de los ponentes no se correspondiera con ello. Animaban entonces a las nuevas generaciones a implicarse activamente en las tareas de las sociedades, en la presentación de ponencias y comunicaciones, ...

Esa reflexión, realizada en el otoño de 1995 mantiene toda su vigencia en el otoño de 2003. En las JAEM de Canarias he visto mucha gente joven, como también la he visto en las de Zaragoza y de Lugo. Cuando cada año la secretaría general recibe los listados de socios de todas las sociedades federadas observo su crecimiento, veo como se va integrando mucha gente joven a las mismas. Sin embargo, la presencia activa en el día a día de las sociedades, la asunción de responsabilidades en sus órganos directivos, la participación como ponentes o comunicadores en jornadas y congresos, ... , por parte de estas nuevas generaciones en general aún queda muy lejos de haberse conseguido. Han pasado 8 años y esas responsabilidades siguen siendo asumidas en casi todas nuestras sociedades por las mismas personas que lo hacían en 1995. Y con esto no estoy pidiendo su jubilación, ni mucho menos, pues todos somos necesarios: se trata simplemente de incorporar a más personas para que entre todos podamos hacer más cosas y hacerlas mejor. Es uno de los principales retos que nos quedan por delante.

José Luis Álvarez
Secretario General saliente de la
Federación Española de Sociedades de Matemáticas

SUMA 44
Noviembre 2003, pp. 9-11

En memoria de Paulo Abrantes

El día 14 del pasado mes de julio murió Paulo Abrantes. Justo un año atrás, en julio del 2002, canceló a última hora su viaje a Vilanova i la Geltrú en donde tenía lugar el 54 Encuentro de la CIEAEM: se le acababa de detectar el proceso canceroso que, a pesar de la valiente lucha con que lo afrontaron Paulo y su familia, fue agravándose hasta el triste final.

Paulo Abrantes se licenció en Matemáticas en la Facultad de Ciencias de Lisboa (1977), ciudad donde había nacido en 1953. A partir de 1982 trabajó en el Departamento de Educación de dicha Facultad, desde donde colaboró con otras universidades e instituciones portuguesas, brasileñas, holandesas y españolas, bien como profesor de cursos de postgrado en educación matemática, bien en el desarrollo de proyectos de investigación.

Los inicios profesionales de Paulo Abrantes fueron en la enseñanza secundaria -trabajó en ella durante 6 años-, lo que marcó profundamente su carrera. Se orientó a la formación continua del profesorado, enfocada como innovación curricular cuyos elementos sustantivos son el trabajo de los alumnos sobre proyectos –ese fue justamente el tema de su tesis doctoral en 1994- y sobre actividades de investigación matemática.

Por convicción y por carácter, Paulo Abrantes apostó siempre por el trabajo en equipo, donde jugaba con gran habilidad el papel de animador en las discusiones y en la búsqueda de soluciones de consenso. Los proyectos desarrollados en estos grupos de trabajo –siempre con docentes- han tenido y tienen una amplia repercusión en las aulas portuguesas. Conocemos bien el MAT$_{789}$ (para edades de 12 a 15 años), que fue presentado en España por primera vez en las V JAEM.

Preocupado por la educación matemática en su conjunto, Paulo Abrantes participó activamente en los movimientos

María Jesús Luelmo
CIEAEM
Sociedad Madrileña de P. M. "Emma Castelnuovo"

asociativos de su país. En 1986 fue socio fundador -el socio nº 2 como proclamaba él mismo, orgulloso- de la *Associaçao de Professores de Matemática* (APM), de la que fue presidente (1987-1988) y director de su revista *Educaçao e Matemática* (1994 a 1998). En períodos anteriores había trabajado también en la *Sociedad Portuguesa de Matemática* (SPM), que agrupa prioritariamente a investigadores y docentes universitarios.

Abrantes ha sido uno de los investigadores portugueses en educación matemática con mayor proyección internacional. Trabajó infatigablemente en la *Comisión Internacional para el Estudio y la Mejora de la Enseñanza de las Matemáticas* (CIEAEM), de la que fue Vicepresidente entre 1993 y 1999. Su empeño en fomentar el diálogo entre docentes e investigadores, en lograr una enseñanza matemática de calidad para todos, que forme ciudadanos más libres y críticos, encontraron un marco adecuado en los objetivos que tradicionalmente ha defendido la CIEAEM.

51º Encuentro de la CIEAEM

Este compromiso ético y profesional por una enseñanza de calidad llevó a Paulo Abrantes a aceptar responsabilidades públicas, primero como miembro del Consejo Nacional de Educación (1990-1993) y del Consejo Científico del Instituto de Innovación Educativa (1998-1999) y, posteriormente, llamado por el ministro socialista Marçal Grilo, como Director General del Departamento de Educación Básica (1999-2002). Desde ese puesto – que asumió con una gran ilusión- dejó su impronta en modificaciones de calado del currículo escolar, flexibilizando su organización y desarrollo y estableciendo medidas de compensación para el alumnado más desfavorecido.

Es difícil deslindar los aspectos profesionales de Paulo Abrantes de sus cualidades personales, ya que éstas marcaron su estilo de trabajo. Disfrutaba trabajando en equipo, facilitando que aflorara lo mejor de cada cuál, haciendo participar a los demás en los éxitos propios con generosidad. Su fino sentido del humor, su aguda comprensión de las personas y de las situaciones, le hacían pieza clave en cuantas reuniones participaba, siempre desde posiciones de discreción y de servicio al grupo. Por encima de todo, Paulo Abrantes era profundamente bueno y afable. Tengo la seguridad de no equivocarme si digo que conseguía establecer una relación empática con cuantas personas tuvieron la oportunidad de conocerle.

Paulo Abrantes hizo muchos amigos en España, a través de la CIEAEM, de los Departamentos de Educación matemática, participando en actividades organizadas por nuestra Federación. Creo recordar que la primera vez que contamos con su presencia fue en las V JAEM (Castellón, 1991), después en las VII (Madrid, 1995) y en las VIII (Salamanca, 1997). En Marzo del 2000 vino a Zamora, ya como representante del Ministerio de Educación portugués, a un encuentro de Sociedades matemáticas hispano-lusas celebrado con motivo del Año Mundial de las Matemáticas.

49º Encuentro de la CIEAEM

Tengo la seguridad de no equivocarme si digo que Paolo conseguía establecer una relación empática con cuantas personas tuvieron la oportunidad de conocerle.

Nunca olvidaré el 42 congreso de la CIEAEM en Szcykr. Allí, confinados en un hotel de los cárpatos polacos en plena naturaleza, se organizó una velada en la que cada grupo interpretaba canciones típicas de su país. Los portugueses comenzaron con *Grandola Vila Morena*, canción que fue contraseña de la *Revolución de los claveles*. Un grupo de españoles –Vicente Rivière, Fernando Corbalán, Sixto Romero, Lola Vidal, Luz Paz...- nos unimos a ellos. Aunque ya nos conocíamos de años atrás, allí comenzó verdaderamente nuestra amistad, compartiendo canciones, risas, ideas y trabajo.

Paulo Abrantes, gracias por tu generosidad. Nunca te olvidaremos. ■

Carta a Paulo Abrantes

Apreciado Paulo:

Nos has dejado, pero tu huella está presente en la comunidad educativa y en las escuelas donde has dejado amabilidad y emotividad, creatividad y conocimiento. Contigo he compartido conversaciones entrañables y enriquecedoras y con tu doctrina y ternura has provocado aportar una componente más de estimación por aprender, todos hemos aprendido de ti y continuaremos aprendiendo de ti. A tu lado hemos aprendido a amar no sólo al mundo de la enseñanza y de las matemáticas, sino también el grado de humanidad que hoy por hoy falta en muchos lugares y espacios de nuestra sociedad. Tu trabajo no ha sido en vano, tu espíritu joven y emprendedor te ha caracterizado como una persona realmente ejemplar.

Todavía recuerdo la brillantez de tus ojos cuando en las conversaciones y lecciones que nos dictaste nos comentabas como evolucionaban tus estudiantes, el proyecto MAT$_{789}$ entre otros; y la ilusión que nos transmitiste con alegría en el noble oficio de educar. También recuerdo cuando me hacías sugerencias en los inicios de mi carrera docente investigadora plasmando actividades en grupo, yo era un simple novato aprendiz de tus experiencias. Hoy el trabajo no ha sido en vano, en diversos lugares se han recogido tus acertadas y exitosas aportaciones.

No dudes, que a pesar de tu muerte, tu presencia estará vigente entre nosotros, tu espíritu ha de continuar manteniendo fuertemente la huella que año tras año has forjado en el mundo educativo y social.

Por los ratos que compartí contigo, puedo afirmar que tu figura se puede caracterizar como un hombre excelente y servicial, un hombre siempre dispuesto al diálogo, un hombre querido por todos, un hombre que no sabía decir no a nada, un hombre dedicado a la comunidad educativa, un hombre preocupado por recuperar las tradiciones olvidadas a menudo por el paso del tiempo, preocupado por la cultura y la innovación docente,....

No nos queda más que mostrar nuestro apoyo a tus familiares.

De ti, Paulo, siempre nos quedará tu obra y tus sabios consejos, hechos y trabajos que a pesar del paso del tiempo nunca se borrarán. ■

Joan Gómez i Urgellés
Presidente de la FEEMCAT

ALGUNAS PUBLICACIONES

ABRANTES, P. (2002: “Trabalho de Projecto na Escola e no Currículo”. en *Reorganização Curricular do Ensino Básico: Novas Áreas Curriculares*, 21-38. Lisboa: DEB.

ABRANTES, P. (2001): “Mathematical competence for all: options, implications and obstacles”. *Educational Studies in Mathematics*, vol 47(2), 125-143.

ABRANTES, P. (2001): “Revisiting the goals and the nature of mathematics for all in the context of a national curriculum”. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of PME-25,* vol 1, 25-40. Freudenthal Institute, Utrecht University, The Netherlands.

PORFÍRIO, J. & ABRANTES, P. (2000): “The Mathematics Curriculum: Training or Education?”, en A. Ahmed, J. M. Kraemer & H. Williams (Eds), *Cultural diversity in mathematics (education)*, 277-282. Chichester: Horwood Publishing.

ABRANTES, P. (1999): “Investigações em geometria na sala de aula”. en E.Veloso, H. Fonseca, J. Ponte & P. Abrantes (org.), *Ensino da Geometria no virar do milénio,* 51-62. Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

PORFÍRIO, J. & ABRANTES, P. (1999): “Teachers, research and curriculum innovation in mathemathics”. en François Jaquet (Ed.), *Relationships between classroom practice and research in mathematics education* (Actas do CIEAEM-50, Neuchatel 1998), 151-157.

ABRANTES, P. (1997): “El movimiento asociativo y la identidad profesional de los profesores de Matemáticas”. en *Epsilon* 38, 47-58.

ABRANTES, P. (1996): “El papel da la resolución de problemas en un contexto de innovación curricular”. en *Uno (Revista de Didáctica de las Matemáticas)* nº8, 7-18.

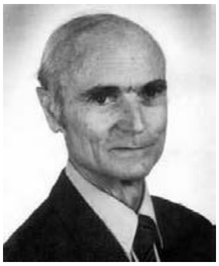
ABRANTES, P. (2001) *Reorganização Curricular do Ensino Básico: Princípios, Medidas e Implicações*. Lisboa: DEB.

ABRANTES, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999) *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: DEB.

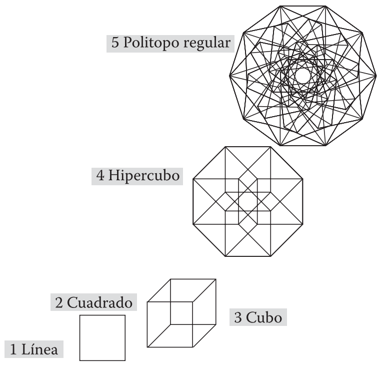
PONTE, J., MATOS, JM & ABRANTES, P. (1998) *Investigação em Educação Matemática: Implicações Curriculares*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

ABRANTES, P., Leal, L., Teixeira, P. & Veloso, E. (1997) MAT789 – *Inovação Curricular em Matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

H. M. S. Coxeter, poliedros en la cuarta dimensión



A los 93 años, edad que alcanzó según él mismo afirmaba gracias a su dieta vegetariana y a las cincuenta flexiones que hasta casi los 90 años realizaba diariamente, ha muerto el 31 de marzo de 2003, Harold Scott MacDonald Coxeter, mago de la geometría.



Qué mejor manera de recordarlo que reproduciendo aquí una experiencia propuesta por él a alumnos del Canadá, su país adoptivo. La hemos tomado de la página web *science.ca*, dedicada a mostrar las ciencias y los científicos del Canada a los alumnos y al público en general. El recuadro de la izquierda se puede fotocopiar, ampliándolo al 150% para que retome su original tamaño DIN A4 y puede ser usado así directamente con los alumnos.

> *"Soy muy afortunado, porque me pagan por hacer aquello que más me gusta"*
> *"Yo nunca me aburro"*
> Coxeter (1907-2003)

Coxeter dedicó su vida al estudio de la geometría. Varios son los libros suyos editados en español con los que podemos disfrutar. Generalizar pasando a la cuarta dimensión, a la quinta y sucesivas, es también un campo fértil para crear ideas matemáticamente interesantes en la mente de los alumnos. La geometría no sólo es Euclides, no sólo es Descartes. Hay mucho más que descubrir, hagamos que lo descubran. ■

Creación de figuras encanjando rombos de papel. Relación entre ángulos y formas.

por H.M.S. Coxeter

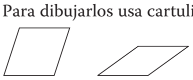
Punto de partida

Objetivo
Hacer teselas con forma de rombo y usarlas para hacer diversas figuras.

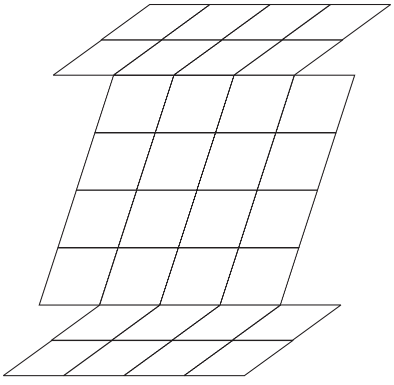
Se necesita:
- Papel o cartulina.
- Una regla.
- Un transportador de ángulos.
- Unas tijeras o un cúter.

Qué hay que hacer

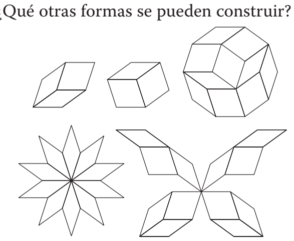
Un rombo es un cuadrado aplastado. Vamos a hacer mosaicos con rombos. Se deben preparar rombos de dos tipos, con todos los lados iguales. Unos rombos tendrá dos ángulos de 36º y otros dos de 144º. Los otros tendrán dos ángulos de 72º y dos de 108 grados. Es muy importante dibujarlos bien. Para ello debes usar el transportador de ángulos y medirlos de manera precisa cuando dibujes los rombos, de lo contrario no lograrás que encajen unos con otros para hacer figuras. Puedes usar el modelo de abajo como plantilla. Para dibujarlos usa cartulinas de colores.



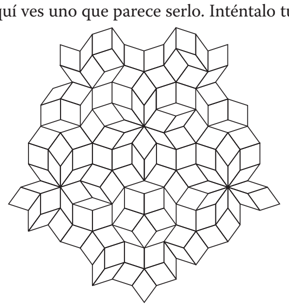
Traza y recorta varias docenas de estos rombos. También puedes fotocopiar la plantilla de abajo, en papel de colores y luego recortar las piezas. Después, ponlas sobre la mesa y muévelas para hacer modelos y formas; también puedes pegarlas sobre otra cartulina cuando hayas formado una figura que te guste.



Un rombo es una figura bidimensional o 2D, pero con éstos puedes hacer figuras que parecen cubos tridimensionales, 3D, proyectados sobre la superficie plana del papel. Experienta haciendo proyecciones de cubos 3D usando estos rombos 2D. ¿Cuántas se pueden hacer diferentes? ¿Qué otras formas se pueden construir?



Roger Penrose, un brillante matemático y físico inglés (nacido en 1931 y actualmente profesor en la Universidad de Oxford, en Inglaterra), comprobó que estas piezas pueden usarse para hacer mosaicos no periódicos que cubren el plano. Dicho de otra modo, se puede rellenar un área del plano con estas figuras formando un patrón que nunca se repite. Aquí ves uno que parece serlo. Inténtalo tú.



Si te gusta esto y te hace pensar y soñar con modelos y números, considera lo siguiente: ¡Todos los ángulos de los dos rombos anteriores son múltiplos de 36º! Es decir: 36×2=72; 36×3=108; 36×4=144; y estos son todos los ángulos de los que partimos. Si tu crees que esto es guay, podrías tener futuro en mates y geometría. ■

Francisco Martín Casalderrey
sumadireccion@fespm.org

SUMA 44
Noviembre 2003, pp.13-24

Triángulos y tetraedros fractales

En este artículo se proponen actividades para un trabajo de investigación en matemáticas de secundaria a través del estudio de familias de triángulos y tetraedros fractales de algoritmo lineal común. Se aportan muchas ideas y la experiencia de los recursos utilizados en este trabajo de investigación escolar en geometría. Los numerosos aspectos que se pueden tratar en estas familias de fractales permiten trabajar en este tema atendiendo muchos de los objetivos de la asignatura, graduando convenientemente su dificultad, y añadiendo conocimientos básicos de geometría fractal.

This article presents several activities to do research work on Maths at secondary education through the study of families of fractal triangles and tetrahedrons of common lineal algorithm. Plenty of ideas are put forward as well as the experience of the resources used in this research project on geometry at school level. The numerous aspects involved in these families of fractals allow us to work on this topic while we fulfil many of the objectives of the Maths subject. It allows us to progressively increase the difficulty of the exercises and to provide our students with some basic knowledge of fractal geometry.

En este artículo se proponen unas actividades orientadas a la investigación matemática en la enseñanza secundaria, utilizando estructuras fractales sencillas como recurso para el trabajo en geometría.

Cada vez se hace menos necesario presentar a los fractales matemáticos, esos objetos geométricos autosimilares, y por lo tanto invariantes a determinados cambios de escala. Su popularidad va en aumento en los últimos años y su estudio se va incorporando a las matemáticas más tradicionales. Actualmente la geometría fractal ya forma parte de los contenidos matemáticos del Bachillerato Artístico, y en la enseñanza superior suele aparecer como asignatura optativa en el segundo ciclo de la titulación universitaria de Matemáticas.

"Si vuelvo a batir palmas, ¿sabes lo que ocurrirá? Se iluminarán los números pares en todo el triángulo, y los impares seguirán oscuros. ¿Quieres que lo haga? Lo que Robert vio entonces fue una auténtica sorpresa. ¡Es una locura! Un dibujo. Triángulos dentro del triángulo, sólo que cabeza abajo."
Enzensberger, 1997

Su utilidad aportando modelos para numerosos fenómenos y objetos naturales es ya indiscutible.

La incorporación de los fractales lineales a las matemáticas en la etapa secundaria es adecuada por la sencillez de las transformaciones geométricas que los definen, y está especialmente indicada para desarrollar los contenidos de geometría, constituyendo además un elemento motivador para los estudiantes (Figueiras, 2000; Moreno-Marín, 2002).

Estudiando estos objetos se relacionan numerosos contenidos que tradicionalmente aparecen dispersos en las diferentes áreas de las matemáticas, y se pueden plantear tareas novedosas enmarcadas en actividades de investigación en el aula. Estas actividades implican necesariamente la aplicación del principio constructivista de utilizar todas las herramientas de conocimiento y análisis conocidas por los estudiantes, e incluso adquirirán nuevas, para aproximarse a una realidad concreta.

Juan Carlos Moreno Marín
I.E.S. Leonardo da Vinci, Alicante
Dpto. Física, Ingeniería de Sistemas y Teoría de la Señal
Universidad de Alicante
Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi".

Con estos fines se ha organizado esta propuesta didáctica, a través de un conjunto estructurado de actividades, para investigar con los estudiantes de ESO y Bachillerato los triángulos y tetraedros fractales. Son fractales lineales cuyo estudio resulta muy eficaz para alcanzar algunos de los objetivos de nuestra tarea docente, y nos permiten otra forma más activa de trabajar en geometría. Al mismo tiempo, es una manera de introducir ideas básicas de geometría fractal como la autosimilaridad y la dimensión.

Comenzando con el triángulo de Sierpinski como ejemplo de fractal lineal autosimilar, se desarrollan estas dos familias de fractales y se estudian las características geométricas de sus elementos. Con este trabajo no sólo se revisan las propiedades del triángulo, el tetraedro y el octaedro regulares, sino de sucesiones infinitas de ellos con diferentes escalas, comprobando su capacidad para rellenar el plano y el espacio, y obteniendo interesantes interconexiones entre modelos geométricos y modelos numéricos.

Con materiales muy sencillos, como hojas de malla triangular, enladrilladas, y pegatinas triangulares (habituales en educación infantil), se proponen una variedad de tareas que generan numerosas situaciones de aprendizaje en cualquiera de los niveles de enseñanza secundaria. La investigación puede avanzar por caminos muy diversos, suficientemente definidos en esta presentación, pero además con aspectos de dificultad y complejidad diferentes que facilita en cada nivel la necesaria atención a la diversidad de nuestros estudiantes.

Las posibilidades de trabajo matemático con estas figuras geométricas son innumerables. Durante el desarrollo de esta investigación se realizarán actividades manuales, como el dibujo, el plegado y la construcción de figuras; de observación espacial de formas y secciones tridimensionales con el reconocimiento de los algoritmos de generación; de recuento y tabulación de elementos y sus características geométricas, como aristas y caras; de búsqueda de sus regularidades e inferencia de expresiones algebraicas para estas relaciones numéricas; cambios de escala y proporciones en figuras geométricas; cálculo de perímetros, áreas y volúmenes, mediante sumas y límites de sucesiones aritméticas y geométricas; la representación gráfica de las relaciones funcionales obtenidas; hasta el cálculo de un concepto tan abstracto como la dimensión fractal de las figuras, provocando en los estudiantes la utilización de numerosos conocimientos, así como las destrezas necesarias para obtener los mejores resultados. El éxito de la misma es la incorporación de todos estos aspectos en un entorno nuevo en matemáticas como la geometría fractal, con la consecución de resultados realmente novedosos.

Los estudiantes añadirán a estas actividades la consulta de bibliografía relativa al tema acorde con su nivel educativo. Para ello se utilizan tanto artículos de conocidas revistas de divulgación científica, como algunas páginas en internet dedicadas a los fractales. Cuando los estudiantes inicien su tarea consultando la información imprescindible, es fácil que encuentren junto con descripciones sencillas de los fractales lineales, otras específicas del triángulo y el tetraedro de Sierpinski, pero difícilmente obtendrán referencias a otros elementos de estas familias fractales. Su trabajo de investigación les permitirá encontrar relaciones inesperadas.

Triángulos fractales

La finalidad de este estudio es conocer, construir y caracterizar los triángulos fractales desarrollados alrededor de un algoritmo lineal común. Este núcleo temático se abordará desde tres ámbitos matemáticos diferentes: la geometría fractal lineal, los lenguajes simbólicos y la aritmética modular. Estas distintas líneas de trabajo convergerán aportando resultados complementarios.

En esta presentación se han agrupado y resumido las actividades dedicadas a un mismo objetivo específico, de forma que su desarrollo, graduación y secuenciación supongan una manera de avanzar en la investigación que proponen. También se sugieren diferentes orientaciones que pueden realizar grupos distintos de estudiantes, para que sea posible adecuar la dificultad de las tareas, y resulte útil y eficaz para todos la puesta en común de sus resultados.

El interés se dirige a las descomposiciones de un triángulo equilátero mediante segmentos paralelos a sus lados. Al dividir los lados en k partes iguales, todos los pequeños triángulos equiláteros formados también son iguales, pudiéndose definir algoritmos fractales distintos al elegir cualquier subconjunto de estos. En particular se estudiarán los fractales cuyo algoritmo consista en seleccionar todos los subtriángulos que conserven la orientación del iniciador. Las estructuras se distinguen por su correspondiente valor del parámetro k,

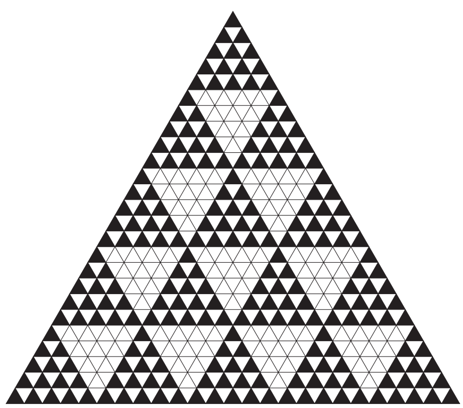


Figura 1. Segunda etapa del triángulo obtenido sobre una malla triangular con k=5 en el algoritmo.

siendo las más sencillas el triángulo de Sierpinski (k=2), la trisección (k=3) y la tetrasección (k=4).

En geometría plana resulta imprescindible comenzar con actividades de construcción gráfica para reconocer los objetos a estudiar. Así, utilizando como soporte hojas con malla de puntos y de trama triangular, se obtiene la apariencia de las primeras etapas de estas estructuras y se distinguen sus algoritmos de formación.

> *"El gran triángulo de los números es una cosa antiquísima, mucho más vieja que yo. Nuestro triángulo tiene por lo menos dos mil años. Creo que la idea se le ocurrió a algún chino. Pero hoy seguimos dándole vueltas, y seguimos hallando nuevos trucos que se pueden hacer con él.*
> *Si seguís así, pensó Robert para sus adentros, es posible que no acabéis nunca. Pero no lo dijo.*
> *Sin embargo, el diablo de los números le había entendido.*
> *-Sí, las matemáticas son una historia interminable -dijo-. Hurgas y hurgas y siempre encuentras cosas nuevas."*
> Enzensberger, 1997

El conocido triángulo de Sierpinski, se presenta con su regla de generación: Conecta los puntos medios de los tres lados de un triángulo equilátero y selecciona sólo los tres subtriángulos que se forman en las esquinas, suprimiendo la cuarta parte central del triángulo. Repitiendo este proceso, quitando fragmentos cada vez más pequeños una y otra vez, infinitas veces, se genera este fractal.

Utilizando la descripción anterior, se propone a los estudiantes que apliquen este procedimiento hasta en cuatro etapas consecutivas a un triángulo con lados de 16 unidades de longitud sobre la malla triangular, obteniéndose una figura con 81 pequeños triángulos que tienen que sombrear. Alternativamente, otros pueden obtener la trisección (k=3) sobre un triángulo de 18 unidades de lado, conectando los puntos que dividen los lados en tres partes iguales obteniendo nueve sub-triángulos, y de ellos seleccionando sólo los seis exteriores, aplicando este algoritmo en dos iteraciones sucesivas y sombreando esos triángulos. Todos los vértices de los 36 sub-triángulos resultantes coinciden con un punto de la malla.

Estas actividades y sus resultados gráficos permiten la presentación en clase de conceptos como el algoritmo geométrico, la autosimilaridad, el escalado, y la iteración, elementos imprescindibles para aproximarnos a la geometría fractal.

A partir de las figuras de esas primeras etapas, se les propone la búsqueda de otras estructuras insistiendo en que estos no son los únicos fractales posibles con un triángulo equilátero. Además de aumentar el valor de k, pronto utilizan las mismas particiones del triángulo, pero seleccionando otros subtriángulos, para definir nuevos algoritmos y representarlos tras dos o tres iteraciones. En la figura 1 se presenta la segunda etapa del triángulo cuando se ha utilizado k=5 sobre una malla triangular de 25 unidades de lado, y en la figura 2 aparece la tercera etapa del triángulo sobre la partición k=3, pero con un algoritmo distinto.

Pero los resultados de este trabajo manipulativo también se pueden utilizar para mejorar las capacidades descriptivas verbales, orales y escritas, en relación con la actividad matemática. Se pide a los estudiantes que describan los algoritmos fractales diseñados, de manera que cualquier compañero pueda obtener las mismas figuras a partir de estas explicaciones.

Con la variedad de formas que resultan, las siguientes actividades están dedicadas al estudio de sus características, y se orientan a la búsqueda de relaciones numéricas en los triángulos, a la inferencia de reglas generales, y a su expresión algebraica. La más sencilla consiste en el recuento del número de elementos sombreados en cada etapa, que permite reconocer el modelo y predecir el número de triángulos de las próximas etapas, identificando el factor constante entre etapas consecutivas, y generalizando a la etapa enésima la expresión del número de triángulos.

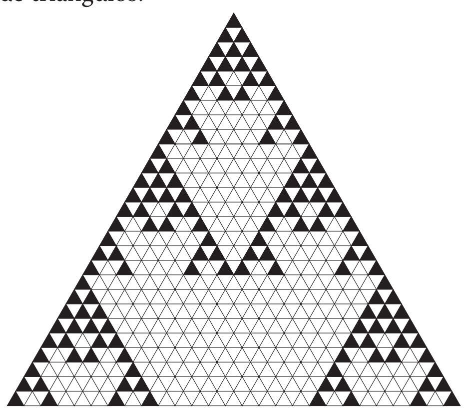


Figura 2. Tercera etapa de un triángulo fractal con el valor de k=3 donde sólo se seleccionan cinco triángulos. El diseño sugiere la superposición de triángulos incompletos a diferentes escalas

Atendiendo al área de las figuras, y partiendo del área del triángulo inicial, también se puede calcular el área sombreada en las primeras etapas, extendiendo el modelo para conocer el área total en las siguientes. El resultado se generalizará a la etapa enésima, discutiéndose qué ocurre con el área total de la figura límite fractal.

De la comparación de las expresiones del área con valores distintos de k en el algoritmo, se buscarán aquellos cuya área decrezca más rápidamente intentando justificarlo. Para ello, se calculan las fracciones del área total que se eliminan en cada iteración y los porcentajes acumulados que esta área representa. Los estudiantes pueden comprobar que la suma de las áreas de los sucesivos triángulos eliminados se reduce a la suma de una serie numérica de razón menor que la unidad, con lo que considerando infinitas etapas, la fracción eliminada es uno, y los triángulos fractales son figuras de área nula.
Algunos de estos resultados son muy conocidos para el triángulo de Sierpinski (Queralt, 1997) y para la trisección (Moreno-Marín, 2002). La obtención de estas expresiones algebraicas requiere en algunos casos un esfuerzo analítico importante.

Los sistemas-L

Otra línea de trabajo es una aproximación a los lenguajes formales como una de las formas más peculiares para la representación de fractales. En ellos, cada elemento geométrico constituye un signo o una palabra del lenguaje, que puede ser combinada con otras palabras mediante reglas, y que al ser aplicadas reiteradamente permiten obtener conjuntos fractales.

Una familia de estos lenguajes son los denominados sistemas-L o gramática de A. Lindenmayer, creados por este biólogo en 1968 para simular la formación de estructuras biológicas ramificadas y el crecimiento de organismos vivos. En los años 80 se incorporaron los sistemas-L a los programas por ordenador, produciendo modelos fractales de plantas y árboles. Sin embargo, los sistemas-L constituyen también una de las maneras más elegantes de representar fractales lineales como los triángulos.

Un sistema-L se define mediante un conjunto de símbolos que forman la cadena inicial o axioma, y el conjunto de reglas de sustitución ó producción. A partir de esta secuencia de símbolos, se obtiene la reescritura de la cadena aplicando las reglas de sustitución para cada elemento sucesivas veces. El axioma y las reglas de sustitución actúan como los genes, conteniendo la información que determina el crecimiento de la curva, y permitiendo con muy pocos datos generar figuras de gran complejidad.

Dado que estas cadenas no tienen ningún significado geométrico, para convertirlas en figuras se necesita su interpretación geométrica. La cadena que se obtiene en cada etapa de sustituciones se representa gráficamente con la interpretación de sus elementos y la elección de la escala adecuada, dando lugar a etapas consecutivas de formación de la figura fractal.

El sistema-L del contorno del triángulo de Sierpinski tiene como axioma el símbolo F, y las tres reglas de sustitución son:

$$\begin{cases} F \rightarrow F\text{ --F --F --ff} \\ F \rightarrow ff \\ - \rightarrow - \end{cases}$$

En las dos primeras etapas se obtienen las secuencias:

F – – F – – F – – f f ,
F––F––F––ff––F––F––F––ff––F––F––F––ff––ffff

Y la interpretación geométrica no puede ser otra que:

F: es un segmento recto hacia adelante,
f: representa el mismo desplazamiento que F pero sin dejar huella,
–: significa un giro de 60º en sentido antihorario.

En su representación gráfica deberá cuidarse que el tamaño del segmento se reduzca a la mitad en cada iteración. En caso contrario, al igual que las cadenas de símbolos, el tamaño del triángulo resulta cada vez mayor.

En esta línea de la investigación, la primera actividad que se propone es la utilización de este código, generando varias cadenas y representándolas gráficamente. Se hace uso de la trama (o la malla de puntos) triangular por ser el soporte idóneo para simplificar esta tarea. Lo fundamental de estos sistemas-L es comprender cómo las reglas de sustitución de caracteres ejercen sobre el axioma inicial el mismo efecto que las reglas geométricas previas para la generación del triángulo fractal.

A continuación se buscará la utilización de esta herramienta para la descripción de otros triángulos. Se les sugiere la tarea de adaptar las reglas de sustitución para obtener el triángulo trisección (k=3) y escribir sus primeras etapas. Aunque la complejidad impide que sea inmediata la generalización del procedimiento para cualquier valor de k, la posibilidad de hacerlo es perceptible.

Para aumentar la destreza en el manejo este lenguaje, se propone a los estudiantes una tarea inversa a la anterior: el desarrollo de los sistemas-L correspondientes a alguna de las curvas fractales más conocidas, como la curva de von Koch o copo de nieve, la curva de Hilbert, o la de Peano. Consiste en utilizar la representación gráfica de las primeras etapas de esta curvas, para reconocer las reglas de generación y codificarlas en este lenguaje simbólico. La actividad resulta muy creativa, y los estudiantes pronto se convierten en auténticos descifradores de algoritmos fractales y traductores al lenguaje simbólico a través de las reglas de sustitución.

Una actividad complementaria para conocer las posibilidades de estos sistemas consiste en el desarrollo y representación de algunos fractales que reproducen estructuras vegetales de ramificación de manera sorprendentemente eficaz, con apariencia realista a pesar del determinismo del modelo. Son sistemas-L compuestos de muy pocos elementos y por lo tanto muy fáciles de desarrollar, con resultados muy interesantes (Barrallo–Calonge, 1993).

Los fractales de Pascal

Otra nueva dirección de la investigación sobre estos objetos consiste en un trabajo numérico en el triángulo de Pascal o de Tartaglia. Así, de una manera totalmente distinta, a partir de la búsqueda de regularidades en la aritmética de los números enteros, se obtienen las regularidades geométricas que dan lugar a la misma familia de triángulos, ahora llamados fractales de Pascal (Stewart, 1990). El único material de trabajo necesario son hojas con un triángulo enladrillado en cuyas celdas se colocan los números del triángulo de Pascal, y trama triangular en algunos casos.

El triángulo de Pascal no necesita presentación entre los estudiantes de bachillerato, aunque sí entre los de ESO, con los que se introduce como: una disposición triangular de números en filas cuyos extremos izquierdo y derecho son todos iguales a 1, y donde cada número es la suma de los dos inmediatamente superiores. Son números importantes en matemáticas, que también aparecen como coeficientes de x^n en la expansión de $(1+x)^m$.

La tarea inicial consiste en completar las primeras filas del triángulo, aplicando esta regla de composición tan simple. Los números del triángulo de Pascal crecen muy rápidamente, pero para esta experiencia sólo necesitamos conocer la clasificación de esos números en pares e impares. Inmediatamente rellenan con la regla mencionada otro triángulo atendiendo solamente al criterio de par (con una P) o impar (con una I) y colorean las primeras ocho filas pintando de negro los ladrillos con número impar, y de blanco los de número par. Se pueden añadir más filas al triángulo colocando P e I en lugares de pares e impares.

Con este triángulo se les pide que expresen la regla para el pintado de ladrillos ó celdas basándose en el color de los dos inmediatamente anteriores (se pintarán de negro aquellas posiciones de los extremos y las que tengan encima colores distintos, es decir los números impares, y se dejarán en blanco las posiciones con las dos que están encima del mismo color, los números pares).

En la búsqueda de similitudes en la figura para identificar el modelo geométrico, deberán observar las primeras cuatro filas del triángulo, y compararlas con el resultado de las ocho y hasta de las dieciséis primeras filas. Rápidamente reconocen el parecido con las primeras etapas del triángulo de Sierpinski, comprobando que el número de filas para reproducir cada etapa del fractal crece con una sencilla regla geométrica. Conforme construyamos un triángulo de Pascal con un número cada vez más grande de filas, y lo sombreemos con la regla anterior, nos aproximaremos cada vez más al triángulo fractal. En la figura 3 se puede observar esa correspondencia en el sombreado de ambos triángulos.

Resulta más evidente esta relación al utilizar una trama triangular, considerando en ella sólo los triángulos con vértice hacia arriba, y colocando en ellos los números de Pascal. Si se recubren con un adhesivo de color aquellos con número impar, volverá a aparecer la estructura del triángulo de Sierpinski. Al aumentar el número de filas, el triángulo permanece con la misma apariencia, sólo que a una escala mayor, y por lo tanto, con un mayor detalle en su estructura, es decir, se van reproduciendo las sucesivas etapas del algoritmo que forma el triángulo fractal.

Obtenido el primer elemento de la familia de triángulos fractales, se amplia la experiencia reconociendo la clasificación de los enteros en pares e impares como una aplicación directa de la aritmética modular, la de módulo 2 (mod.2). En esta aritmética, fijado un número como módulo, se reemplazan los demás por sus restos en una división por el mismo. Utilizando esta regla sólo aparecen números menores que el módulo como resultados de sumas y multiplicaciones.

Para habituar a los estudiantes a la aritmética modular, resulta interesante practicar con ellos algunos cálculos numéricos con distintos módulos, y en particular que reconozcan el código binario (mod.2) los que han estudiado fundamentos informáticos, en el que todos los números pares son 0, y todos los impares son 1.

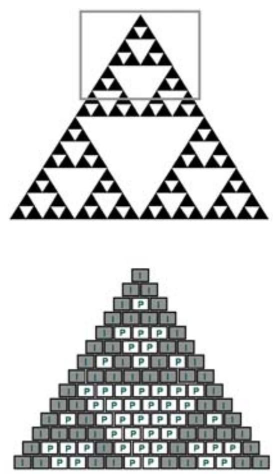


Figura 3. Cuarta etapa del tetraedro de Sierpinski (k=2) [arriba]. El marco selecciona el área cuya estructura coincide con las primeras catorce filas del triángulo de Pascal (mod.2) [abajo].

Aplicando ahora a las primeras nueve filas del triángulo de Pascal la aritmética mod.3, todos sus números deberán ser 0, 1 ó 2. Si orientamos a los estudiantes a sombrear las celdillas de negro si el número es 1 ó 2, y de blanco sólo cuando sea 0, reconocerán la primera etapa de la construcción de la trisección. Al continuar con la aritmética mod.3 y con esta regla de sombreado en las siguientes filas del triángulo, la figura reproduce el mismo modelo conteniendo los 36 pequeños triángulos de la segunda etapa de la trisección. Y así sucesivamente. La figura 4 muestra este resultado obtenido en clase, donde los estudiantes han colocado pegatinas sobre esas posiciones.

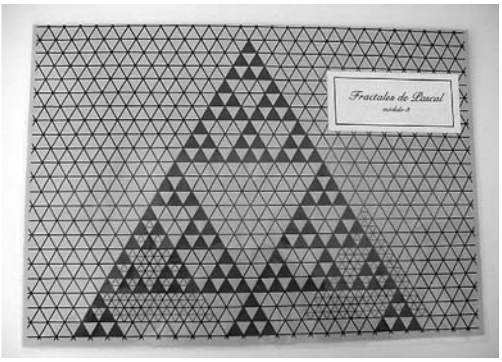


Figura 4. Las primeras veinte filas del triángulo de Pascal quedan de esta manera cuando se eliminan los múltiplos de tres (mod.3). La figura obtenida es la trisección.

Investigando triángulos numéricos formados con mod.4 o mod.5, se comprueba que con la utilización de estos módulos también aparecen los patrones de esta familia de triángulos, y aumentando el número de filas se confirma que los modelos geométricos continúan repitiéndose indefinidamente en filas sucesivas, generándose etapas más detalladas de la figura. Si estos modelos mantienen su estructura detallada en diferentes escalas, serán fractales.

Los estudiantes pronto concluyen que el módulo aritmético escogido coincide con el valor de k en la partición del triángulo por el método geométrico, y que las estructuras fractales aparecen sombreando todas las celdillas que no se correspondan con ceros para cada módulo (es decir, que no sean múltiplos exactos del módulo). La aparición de estos modelos que se repiten a distintas escalas es lo que asombraba a Robert en su séptima noche de aventuras con el diablo de los números en el libro de H.M. Enzensberger (1997).

Los resultados demuestran que no todos los módulos dan lugar a un patrón geométrico sencillo y autosimilar, aunque los estudiantes comprueban que todos los correspondientes a números primos presentan claramente esa regularidad. Esta característica puede interpretarse como una nueva diferencia añadida entre los números primos y compuestos, o al menos entre las aritméticas modulares que generan.

Tras estos resultados, puede dirigirse la investigación hacia la utilización de nuevas reglas para la obtención de otros diseños autosimilares. Aunque no se pretende llevar mucho mas allá este trabajo, aún hay muchos modos de explorar nuevas relaciones. Por ejemplo buscando regularidad y autosemejanza al sombrear sólo las celdillas cuyo número sea 1 en mod.k, o mejor aún, al utilizar un conjunto de colores para los distintos números posibles, como pueden ser blanco, azul, verde, rojo y negro, para 0, 1, 2, 3 y 4, en mod.5. También surgirán otras estructuras autosemejantes si en la regla de formación del triángulo de Pascal, sustituimos la suma de los dos números de arriba por su diferencia o la transformamos en la suma del doble del número de la izquierda y el de la derecha, u otra regla algebraica sencilla. Las variaciones son innumerables y los estudiantes más atrevidos buscan nuevos caminos con excelentes resultados.

Otro análisis en este estudio consiste en conocer las proporciones de números pares e impares en el triángulo de Pascal. En esta ocasión se propone una combinación de argumentos probabilísticos y geométricos para resolverlo.

Si entre los números enteros, los pares e impares aparecen con igual frecuencia, la probabilidad de que un número elegido al azar sea par o impar es ½, y se podría esperar que ocurriera igual entre los enteros que forman el triángulo de Pascal. Nuestros estudiantes están convencidos de ello, pero con el triángulo de Sierpinski se demuestra que no es así.

Definimos las probabilidades de obtener un número par o impar en el triángulo de Pascal como las proporciones de área de color blanco o negro en la figura obtenida en mod.2. Pero ya se ha probado que en triángulos con un número creciente de filas, la figura representa una etapa cada vez más avanzada de generación del fractal, por lo que las proporciones entre sus áreas blanca y negras convergerán a las proporciones correspondientes en el triángulo de Sierpinski. De esta manera se corresponden las probabilidades de par e impar en el triángulo con las proporciones de área blanca o negra en la figura límite fractal.

Para obtener esas proporciones en un triángulo cada vez mayor, los estudiantes tienen que contar las celdillas de cada color en las primeras 4, 8, 16, 32, ... filas del triángulo de Pascal, pero su recuento precisa de alguna estrategia pues su número crece rápidamente, recomendándose que aprovechen la autosimilaridad que presenta el triángulo.
Pero con la correspondencia anterior resulta más fácil calcular las áreas sombreadas utilizando la regla de formación del triángulo de Sierpinski. En la primera etapa sólo se coloca un triángulo blanco boca abajo de superficie ¼ del total. En la segunda etapa, con un triángulo blanco boca abajo dentro de cada uno negro, la superficie negra se ha limitado en cada uno a tres triángulos negros más pequeños de superficie 1/16 del

total. Así, calculando la evolución de las proporciones, se deduce el factor constante para pasar de una etapa a la siguiente. Los estudiantes generalizan para obtener las proporciones de cada color en la etapa enésima, proponiendo las expresiones de las áreas blanca y negra, y estudiar su comportamiento conforme el número n de etapas crece.

La figura 5 representa las fracciones del área total sombreada en los triángulos de Pascal y de Sierpinski conforme crece el número de filas, y en etapas sucesivas respectivamente. Además de adquirir la misma apariencia, ambas áreas relativas convergen, y se demuestra así que la parte negra de Sierpinski se corresponde con los números pares en Pascal. La variable independiente de la gráfica se justifica en el alto número de filas de Pascal necesarias para reproducir cada etapa, pues la apariencia de la etapa n del triángulo geométrico coincide con la de las $2^n + 1$ filas del numérico. Para la realización de este ejercicio los estudiantes utilizan progresiones aritméticas en el triángulo de Pascal y geométricas en el de Sierpinski.

Sólo falta extrapolar los resultados anteriores, conforme n aumenta sin límite para obtener la figura fractal, para responder a las preguntas: ¿qué ocurre con el área negra en el triángulo?, y por lo tanto ¿hay más números pares ó impares en el triángulo de Pascal? Cuando n crece, la superficie negra del triángulo de Sierpinski tiende a área nula, y la blanca tiende a recubrir la figura completa, lo que trasladado al triángulo de los números significa que en un triángulo muy grande casi todos los números son pares, y los impares aparecen con probabilidad cada vez menor, muy cercana a cero.

Tetraedros fractales

La segunda parte de este material de investigación escolar tiene como centro de interés el estudio de los tetraedros fractales, consecuencia de la ampliación a tres dimensiones de las figuras obtenidas anteriormente. Es el complemento adecuado del trabajo sobre los triángulos, aunque con la estructura y complejidad suficientes para tener entidad propia y proponer su realización independientemente. En la misma clase de matemáticas, se pueden formar equipos de estudiantes dedicados a cada una de las dos investigaciones por separado, pudiendo establecerse numerosas conexiones y paralelismos entre ellas.

Este trabajo se dirige a la familia de los tetraedros fractales, y aunque los algoritmos lineales suelen describirse como procedimientos de descomposición y de eliminación de partes de una figura, para su introducción en el aula es conveniente comenzar en sentido opuesto, es decir, componiendo figuras, tetraedros y octaedros de la misma arista.

Se inicia la tarea con actividades de confección manual y de observación espacial. Se utilizan fotocopias en cartulina del desarrollo plano de tetraedros y octaedros de la misma arista para que los estudiantes, doblando y pegando pestañas, construyan estos objetos geométricos. Gracias al número de alumnos por grupo se consigue la cantidad de figuras suficiente para comprobar, componiéndolas, cómo se llena un tetraedro de arista hasta cuatro veces mayor. La observación de estas construcciones ayuda a los estudiantes a analizar el proceso de descomposición del tetraedro, y a comprender los algoritmos fractales que se proponen.

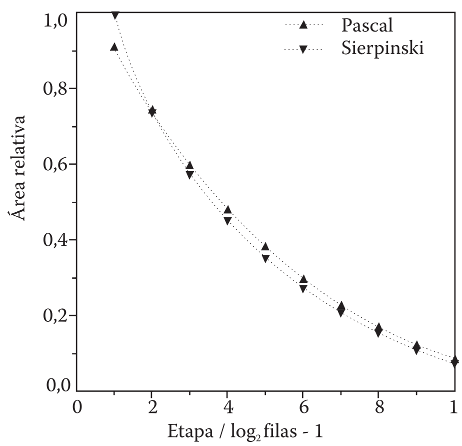


Figura 5. Área relativa del triángulo de Sierpinski (k=2) en etapas sucesivas, y proporción de números pares (mod.2) en el triángulo de Pascal respecto al número de filas.

El iniciador de estas figuras es siempre un tetraedro o pirámide triangular regular, y la estructura que nos permite diseñar generadores fractales se obtiene al cortarlo por planos paralelos a sus caras, que dividan sus aristas en un número determinado k de partes iguales. Como estas descomposiciones del tetraedro dan lugar a otros de menor tamaño, un subconjunto cualquiera de ellos constituye el generador de un fractal lineal. En este caso, se estudian sólo los algoritmos más sencillos, que seleccionan todos los tetraedros con la orientación del iniciador, formando una interesante familia.

El primer elemento y miembro más conocido de esta familia es el tetraedro de Sierpinski, el de k=2, cuyo algoritmo consiste en cortar el iniciador por planos paralelos a las caras que pasen por los puntos medios de las aristas, seleccionando los cuatro tetraedros de mitad de tamaño formados en los vértices y eliminando el resto del sólido, un octaedro de la misma arista. La segunda etapa de este fractal fue el motivo elegido para la edición de un sello conmemorativo de la celebración en Budapest del 2º Congreso Matemático Europeo en 1996, que se presenta en la figura 6.

Otro ejemplo de la popularidad de este fractal lo representa el espectacular tetraedro de papel de casi 6 metros de altura de la figura 7 que construyeron estudiantes de secundaria norteamericanos, del Anoka High School (Anoka, Minnesota), como parte de una unidad de matemáticas dedicada a la geometría fractal, coincidiendo con una reunión anual de la Sociedad Nacional de Profesores de Matemáticas (Kelley, 1999).

Figura 6. La segunda etapa de formación del tetraedro de Sierpinski es el motivo de este sello húngaro conmemorativo de un congreso matemático europeo.

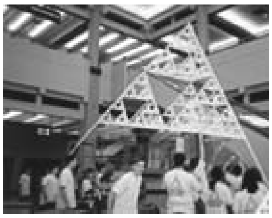


Figura 7. Estudiantes del Anoka High School montando un tetraedro de Sierpinski con motivo la reunión anual de la Sociedad Nacional de Profesores de Matemáticas estadounidense (NCTM's 75th Annual Meeting, 1997).

En las caras del tetraedro y en sus secciones, la partición presenta la estructura triangular de una malla, con triángulos de orientación igual y opuesta a esa cara. Es inmediato comprobar que los triángulos de igual orientación corresponden a caras de los pequeños tetraedros obtenidos, mientras que los orientados al revés pertenecen a los octaedros que también se han generado. Esta descomposición del iniciador produce un conjunto de tetraedros y octaedros todos con el mismo tamaño de la arista, la k-ésima parte de la inicial.

Se puede generalizar que cualquier sección paralela a una cara es un triángulo equilátero de lado a/k, 2a/k, ... a, de lados divididos en 1, 2, 3, ... k partes iguales respectivamente. Comenzando por un vértice, la primera sección paralela a la cara opuesta es un triángulo (1) perteneciente al tetraedro de igual vértice. La segunda sección contiene tres triángulos (en dos filas, 1+2) en orientación de la cara, que corresponden a tres tetraedros y un triángulo invertido (1) perteneciente a un octaedro; la tercera sección contiene seis triángulos (en tres filas, 1+2+3) en orientación directa, y tres orientados al revés (en dos filas 1+2). Las secciones reproducen las descomposiciones que se habían hecho del triángulo equilátero, y la progresión de ambas orientaciones crece con estas secuencias conforme aumenta el número de partes en la arista del tetraedro. En ellos, la alternancia de elementos hace que se mantenga esta correspondencia en la parte con forma tetraédrica, y sea la contraria en la parte troncal resultante. En esta descomposición del tetraedro es posible obtener un numero natural k–1 de secciones internas paralelas cada cara.

El conjunto de tetraedros y octaedros descrito no llena totalmente el iniciador, y a partir de k=3 aparecen entre los octaedros otros huecos con forma de tetraedros como los anteriores pero en posición invertida, con lo que se añade una nueva secuencia de figuras en el interior.

Para estudiar la descomposición, se incorporó en el desarrollo plano de tetraedros y octaedros una malla triangular fotocopiada. Se adecuaron las escalas de la malla para que utilizaran pegatinas triangulares de color y eligieran aristas de tamaños 8 y 9, que les permitía reproducir algunas etapas de la generación los primeros elementos de la familia fractal (k = 2 y 3). Estos objetos de cartulina permiten estudiar las propiedades descritas. En la figura 8 se observa la composición con quince elementos de la tercera etapa del tetraedro trisección (k=3), y en la figura 9 se muestra su descomposición presentando el hueco mencionado.

Algunas de las actividades que orientaban el trabajo se dedican a los algoritmos de formación y a su resultado:

- Antes de recortar el desarrollo plano de tetraedros cuyas aristas midan 2^n celdillas, y doblar y pegar las pestañas de esos cuerpos geométricos, se les sugiere que sombreen sobre sus

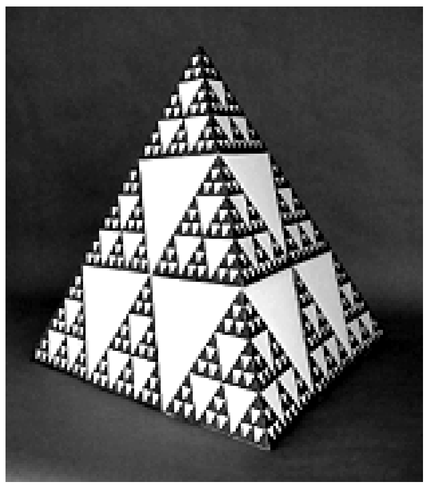


Figura 8. Modelo del tetraedro trisección (k=3) formado con once tetraedros y cuatro octaedros. Los triángulos de oscuros son las caras externas de los mil tetraedros de la tercera etapa de formación del fractal.

caras los triángulos que desaparecerán hasta la enésima etapa del triángulo de Sierpinski. Imaginando que sólo permanecen los tetraedros en blanco, se obtiene el fractal hasta esa etapa n de su formación. Otra opción consiste en recubrir con un adhesivo de color los triángulos que permanecerán en la figura. Si lo hacen con un color diferente en cada triángulo, resultan distintas las caras del tetraedro.

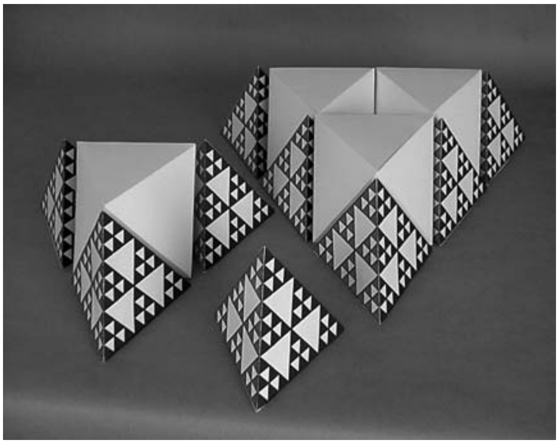


Figura 9. Secciones de un tetraedro trisección paralelas a la base y sus elementos: diez tetraedros en la etapa anterior y cuatro octaedros, cuya arista es la tercera parte de la de la figura completa. Entre los octaedros se observa el hueco de un tetraedro en posición invertida.

- Con el tetraedro de papel, considerando la primera etapa del fractal, o colocando adecuadamente cuatro de ellos, se pregunta a los estudiantes qué cuerpo geométrico constituye la parte eliminada en esa etapa, observando el número y forma de sus caras, el tamaño de sus aristas y el paralelismo entre caras. La figura 12 muestra esta composición de tetraedros y un octaedro central.

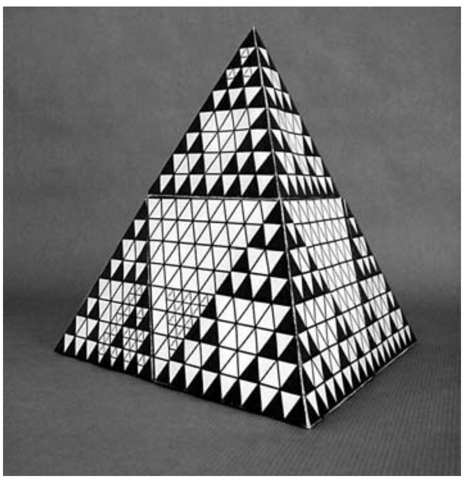


Figura 12. Modelo del tetraedro de Sierpinski (k=2) formado con cuatro tetraedros y un octaedro de cartulina. Los triángulos oscuros son las caras externas de los 44 tetraedros que constituyen la cuarta etapa de la formación del fractal.

- Una vez descrito el algoritmo de formación, se revisa su aplicación en sucesivas etapas, por ejemplo en cuanto al número de elementos que se generan, completando una tabla de valores, obteniendo el factor constante para pasar de una etapa a la siguiente y generalizando para expresar el número de tetraedros en la etapa n. Se describirá cómo va cambiando la figura cuando el proceso se repita indefinidamente.

De la observación y recuento se obtiene que, dependiendo del valor de k en el algoritmo, del tetraedro inicial de arista a surgen figuras de arista a/k cuyo número es:

Nº tetraedros	Nº octaedros	Nº tetraedros invertidos
$\frac{1}{2}\sum_{1}^{k}\left(k^2+k\right)$	$\frac{1}{2}\sum_{1}^{k}\left(k^2-k\right)$	$\frac{1}{2}\sum_{1}^{k}(k-1)(k-2)$

La figura 10 contiene el desarrollo plano del tetraedro que se ha utilizado en diferentes actividades escolares en todos los niveles educativos. Este material se presentó en la exposición La Geometría Fractal–IES Leonardo da Vinci, en la figura 11, organizada por la Sociedad de Educación Matemática de la Comunidad Valenciana Al-Khwarizmi en el marco del 2000 Año Mundial de las Matemáticas en Alicante.

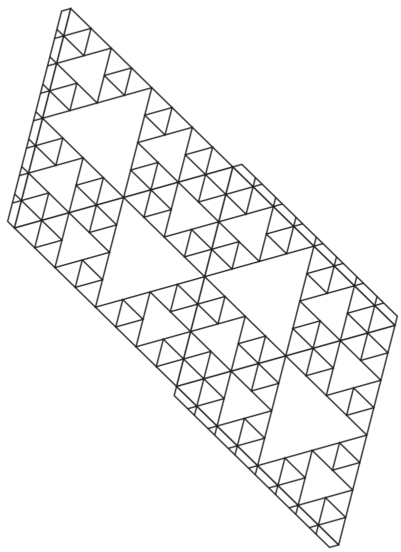


Figura 10. Hoja con el desarrollo plano del tetraedro que se entregaba a los alumnos de primaria para su construcción y estudio. Se adjuntaban pegatinas de color para colocar en las caras de la figura.

Otras cuestiones ayudan a los estudiantes a describir las características de los tetraedros:

- Se deduce la longitud de las aristas de los tetraedros que se generan en la primera etapa, en la segunda, en la tercera, ... y en la enésima etapa, así como su suma. También se hace recuento del número de caras, aristas y vértices que hay en los 16 (si k=2) ó 100 (si k=3) tetraedros resultantes en la segunda etapa del objeto, y se busca una expresión general para la enésima etapa.

Figura 11. La Geometría Fractal - IES Leonardo da Vinci, incluida en las Seis Exposiciones de Centros de Enseñanza del 2000 Año Mundial de las Matemáticas en Alicante (SEMCV Al-Khwarizmi).

- En otra actividad se estudia la evolución del área total y el volumen de las estructuras de tetraedros que se obtienen en etapas sucesivas. Como primer ejercicio los estudiantes buscarán en los libros y compararán las expresiones del área y del volumen del tetraedro y el octaedro regulares en función de la longitud de la arista. En esta comparación puede hacerse referencia también al cubo de igual arista.

$$Vol_{tetraedro} = a^3\frac{\sqrt{2}}{12}, \qquad Vol_{octaedro} = a^3\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Como las caras del tetraedro son triángulos equiláteros, les resulta inmediato obtener la superficie total de la figura en cada etapa. Comenzando con un tetraedro de arista a obtienen el área total de la figura en la segunda etapa, en la tercera, y en la cuarta. Y generalizan para obtener el área total en la enésima etapa de la pirámide fractal.

También calculan el volumen eliminado para obtener la primera etapa comparándolo con el volumen de los tetraedros que permanecen. Y conocidos el número y las aristas de los octaedros y tetraedros que se eliminarán en cada etapa, se pueden obtener los volúmenes eliminados (o alternativamente los volúmenes que permanecen de la figura) en las primeras etapas para compararlos entre sí.

Iteración	Número de elementos	Número de aristas	Long. arista	Área	Octaedros eliminados	Volumen eliminado	Fracción de volumen eliminado acumulado	Porcentaje acumulado
0	1	6	a	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	0	0	0	0
1	10	$6 \cdot 10$	a/3	$\frac{10}{3^2}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	4	$\frac{1}{3^4}4\sqrt{2}a^3$	$\frac{8}{13}$	61.5
2	10^2	$6 \cdot 10^2$	a/9	$\frac{10^2}{3^4}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$4 \cdot 10$	$\frac{10}{3^7}4\sqrt{2}a^3$	$\frac{8}{13}\cdot\left(1+\frac{5}{13}\right)$	85.2
3	10^3	$6 \cdot 10^3$	a/27	$\frac{10^3}{3^6}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$4 \cdot 10^2$	$\frac{10^2}{3^{10}}4\sqrt{2}a^3$	$\frac{8}{13}\cdot\left[1+\frac{5}{13}+\left(\frac{5}{13}\right)^2\right]$	94.3
4	10^4	$6 \cdot 10^4$	a/81	$\frac{10^4}{3^8}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$4 \cdot 10^3$	$\frac{10^3}{3^{13}}4\sqrt{2}a^3$	$\frac{8}{13}\cdot\left[1+\frac{5}{13}+\left(\frac{5}{13}\right)^2+\left(\frac{5}{13}\right)^3\right]$	97.8
n	10^n	$6 \cdot 10^n$	$a/3^n$	$\left(\frac{10}{9}\right)^n\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$4 \cdot 10^{n-1}$	$\frac{10^{n-1}}{3^{3n+1}}4\sqrt{2}a^3$	$\frac{8}{13}\cdot\sum_{n=1}^{n}\left(\frac{5}{13}\right)^{n-1}=1-\left(\frac{5}{13}\right)^n$	$\frac{13^n-5^n}{13^n}\cdot 100$

Tabla 1

Tabla 1. Expresiones algebraicas de las principales características estudiadas en etapas sucesivas del triángulo trisección o de k=3.

Como n aumenta sin límite para alcanzar la forma fractal, se revisa la evolución y el volumen final de la figura. Estos volúmenes eliminados forman una serie numérica de razón menor que uno, con lo que la fracción total eliminada es la unidad, y los tetraedros fractales son objetos con volumen final nulo.
Los principales resultados de las características del tetraedro de Sierpinski son muy conocidos (Moreno-Marín, 2002), por lo que en la tabla 1 se presentan los correspondientes a la trisección (k=3). Generalizar estos resultados a cualquier valor de k en el tetraedro no es siempre fácil, y las expresiones algebraicas de las mismas que se presentan en la tabla 2, cuando no sean deducidas, pueden utilizarse como punto de partida para su comprobación y análisis.

La medida y la dimensión fractal

Complementariamente a las actividades anteriores, otra orientación del trabajo se dirige a estudiar la medida y la dimensión fractal en estas dos familias de fractales, con algoritmos de patrón común.

De manera muy sencilla se propone abordar con los estudiantes de bachillerato los conceptos de medida y de dimensión de Haussdorf-Besicovitch. Introduciremos la medida en geometría como la manera adecuada de cuantificar el tamaño de un objeto.

Para los objetos euclídeos, la medida de aquellos de dimensión cero, como los puntos, es su cardinal; la medida de los de dimensión uno, como las líneas, es su longitud; la de los de dimensión dos, como las superficies, es su área; y la medida de los objetos tridimensionales, como los cuerpos sólidos, es su volumen. En general, en cualquier objeto la medida de dimensión menor a la suya tiene valor infinito y es cero la medida de dimensión mayor a la propia.

Como los objetos fractales tienen dimensión fraccionaria, sus medidas euclídeas suelen ser infinito ó cero. Y esto es lo que ocurre con la longitud total de las aristas y el área total en los triángulos, y también lo que sucede con el área total y el volumen de los tetraedros. Tanto los triángulos como los tetraedros fractales tienen reglas de generación por eliminación, con lo que su aplicación sucesiva nos llevará siempre a una medida euclídea final –área ó volumen respectivamente– nula.

Características del tetraedro fractal (k,n)	
Número de elementos	$\left(\frac{k^3+3k^2+2k}{6}\right)^n$
Número de aristas	$\frac{\left(k^3+3k^2+2k\right)^n}{6^{n-1}}$
Longitud de la arista	$\frac{a}{k^n}$
Área total	$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{k^3+3k^2+2k}{6}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{k^n}\right)^2$
Número de octaedros eliminados en la etapa *n*	$\left(\frac{k^3+3k^2+2k}{6}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{k^3-k}{6}\right)$
Fracción de volumen eliminado en cada etapa	$\frac{4k^3-4k}{5k^3+3k^2-2k}$

Tabla 2. Características generales de los tetraedros fractales en función de los parámetros k y n.

Para cuantificar la medida de nuestras figuras (caracterizadas por los parámetros n y k, propios de la etapa y de cada miembro de la familia fractal), se propone a los estudiantes calcular la fracción sobre su valor inicial, dado su carácter factorial para etapas sucesivas, razonando sus resultados.

En los triángulos, la fracción de área f_1 en la primera etapa depende del parámetro k y se expresa

$$f_1(k)=\frac{k+1}{2k}$$

y por lo tanto, a través de las sucesivas etapas, la medida –en este caso el área– queda expresada por

$$f_n(k)=\left(f_1(k)\right)^n=\left(\frac{k+1}{2k}\right)^n$$

Estas fracciones son menores que la unidad, por lo que su límite tiende a cero,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(k)=0$$

decreciendo asintóticamente hacia ½ conforme aumenta el valor de k. Esto significa que reglas más complejas de división del triángulo dan lugar a estructuras geométricas con menor área, más vacías. Lo cual se puede corroborar revisando la función derivada $f'_n(k)$ y obteniendo el

$$\lim_{n\to\infty} f_n(k)$$

En los tetraedros, la fracción de medida g(k) que permanece en la primera etapa es

$$g_1(k)=\frac{1}{6}\left(\frac{k^2+3k+2}{k^2}\right)$$

y de igual manera, el volumen de la enésima etapa queda expresado como $g_n(k)=(g_1(k))^n$. También en este caso el volumen tiende a desaparecer en etapas sucesivas,

$$\lim_{n\to\infty} g_n(k)=0$$

mientras que esta fracción decrece asintóticamente hacia 1/6 al aumentar el valor de k.

La representación gráfica de ambos resultados se presenta en la figura 13, permitiendo la discusión de los mismos y una interpretación común, comprobándose que valores mayores de k o reglas más complejas dan lugar a estructuras geométricas más vacías, con menor área o volumen.

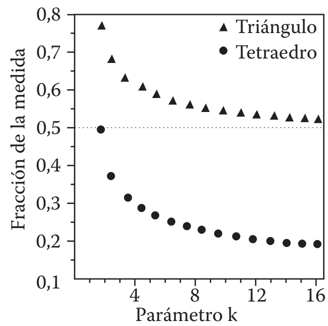


Figura 13. Evolución de la fracción constante de medida (área/volumen) en los triángulos y tetraedros fractales según el parámetro k.

Estos resultados confirman, como ya era conocido, que los triángulos son figuras bidimensionales de área final cero, y los tetraedros son tridimensionales de volumen final nulo, por lo que se hace necesaria otra caracterización diferente a su medida euclídea.

Aprovechando que este estudio se limita a fractales lineales exactamente autosimilares, proponemos a los estudiantes uno de los conceptos de dimensión fractal más sencillos, el de dimensión de autosimilaridad, como una forma de medir la irregularidad de estos objetos y al mismo tiempo, alternativamente a su dimensión euclídea, cuantificar cómo ocupan el espacio.

El cálculo de la dimensión fractal de estas figuras es inmediato al tratarse de fractales matemáticos autosimilares. Para cada una de ellas, siendo k el factor de escala entre los elementos de la figura en etapas consecutivas, y s el número de elementos en los que se descompone el de una etapa hacia la siguiente, se define su dimensión de autosimilaridad como d= *log* s/*log* k.

El primer trabajo con esta definición de dimensión fractal es calcular y justificar las dimensiones del triángulo y el tetraedro de Sierpinski: En el primero, el factor de escala k entre los lados de un triángulo en etapas sucesivas es 2, mientras que el número de partes generadas en cada iteración que podrán representar el conjunto completo es 3. Así, resulta d = log 3/log 2 = 1,585 . En el segundo, el factor de escala k entre las aristas de un tetraedro es 2, mientras que el número de partes s es 4 (de cada tetraedro se obtienen cuatro). Por lo tanto, resulta d = log 4 / log 2 = 2, con lo que el tetraedro fractal de Sierpinski tiene la misma dimensión que una superficie euclídea (resultado que conecta con el hecho de que su área total permanece constante en diferentes etapas).

Una actividad con mayor dificultad es la generalización de estos resultados para cualquier otro elemento de las familias fractales respectivas. En ambos casos el parámetro k es el factor de escala y de manera sencilla, mediante series numéricas elementales, se obtiene la expresión del número de elementos s en función de k. En la tabla 3 se muestran los primeros valores de dimensión y su expresión general para ambos grupos de fractales.

	Triángulos	Tetraedros
k	Dimensión d	
2	1.585	2.000
3	1.631	2.096
4	1.661	2.161
5	1.683	2.209
....	....	....
k	$d=\dfrac{\log\left(\dfrac{k^2+k}{2}\right)}{\log k}$	$d=\dfrac{\log\left(\dfrac{k^3+3k^2+2k}{6}\right)}{\log k}$

Tabla 3. Primeros valores y expresión general de la dimensión fractal según el parámetro k para ambos grupos de objetos.

La figura 14 reproduce estos resultados como una herramienta más que ayuda a su interpretación. Se comprueba así que la dimensión fractal de estos objetos crece asintóticamente al aumentar el grado de división del iniciador, convergiendo hacia sus dimensiones euclídeas. Las dimensiones de los triángulos fractales tienden a 2, mientras que los tetraedros adoptan dimensiones crecientes convergentes a 3. Aparentemente paradójico, aunque totalmente coherente, disminuye el valor de la medida euclidea –área y volumen respectivamente– al aumentar el valor de k, pero no ocurre igual con la dimensión fractal, sino lo contrario. Estamos comparando, en resumen, pocos elementos de tamaño mayor con más elementos aunque de menor tamaño. Estos últimos adquieren mayor dimensión, ocupan más el espacio. La discusión planteada en clase con la interpretación de estos resultados resulta muy interesante y enriquecedora.

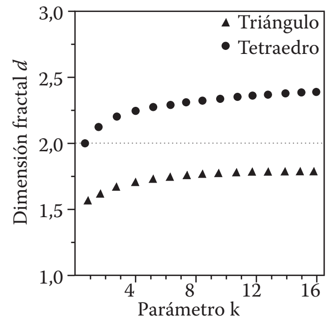


Figura 14. Dimensión fractal de los triángulos y tetraedros fractales según el parámetro k.

Conclusión

Se presentan en este artículo las interesantes cualidades de estos fractales para plantear con ellos un trabajo de investigación en las matemáticas de secundaria. A pesar de lo variado de los aspectos planteados, sin duda no quedan agotadas todas las posibilidades formativas de esta actividad, en la que se atienden los objetivos de la asignatura en esta etapa mediante un trabajo realmente interdisciplinar –entre las diferentes disciplinas que configuran las matemáticas–.

El desarrollo de este tipo de actividades es una de las mejores acciones formativas, pues la diversidad de tareas propuestas y la graduación de su dificultad en los diferentes ámbitos garantizan la obtención de buenos resultados a todos los estudiantes que se interesen por ellas, independientemente de sus capacidades, atendiendo de esta manera a las expectativas de éxito que todo estudiante tiene al comenzar una investigación. Estos resultados son necesarios en el aula para seguir contando con el interés de los estudiantes hacia nuestra asignatura, por lo que acudir a trabajos como este contribuirá a deshacer el tópico social, a veces totalmente falso, de rechazo a las matemáticas. ■

REFRENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARRALLO CALONGE, J. (1993): *Geometría fractal, Algorítmica y representación*, Ed. Anaya multimedia, Madrid.

ENZENSBERGER, H. M. (1997): *El Diablo de los números*, Ed. Siruela, Madrid.

FIGUEIRAS, L., M. MOLERO, A. SALVADOR y N. ZUASTI (2000): "Una propuesta metodológica para la enseñanza de la Geometría a través de los fractales", *SUMA*, nº 35, 45-54.

GUZMÁN OZAMIZ, M. (2002): *La experiencia de descubrir en Geometría*, Ed. Nivola, Madrid.

KELLEY, P. (1999): "Build a Sierpinski Pyramid", *Mathematics Teacher*, nº 92, 5.

MORENO-MARÍN, J.C. (2002): "Experiancia didáctica en Matemáticas: construir y estudiar fractales", *SUMA*, nº40, 91-104.

PEITGEN, H.O., H. JÜRGENS y D. SAUPE (1992): *Fractals for the classroom*, Springer-Verlag, Nueva York.

QUERALT LLOPIS, T. (1997): "Fractales en la ESO", *SUMA*, nº 24, 81-88.

STEWART, I. (1990): *Ingeniosos encuentros entre juegos y matemática*, Ed.Gedisa, Barcelona.

STEWART, I. (2001): *El laberinto mágico*, Crítica, Barcelona.

SUMA 44
Noviembre 2003, pp. 25-34

Efectos del *autismo temático* sobre el estudio de la Geometría en Secundaria*

I. Desaparición escolar de la razón de ser de la Geometría

En este trabajo, que consta de dos partes, se analizan algunas de las consecuencias didácticas provocadas por el "encierro en los temas" al que se ve abocada la enseñanza de las matemáticas en Secundaria. En la primera parte se describe el fenómeno del autismo temático relacionándolo con la separación escolar entre el ámbito de "lo matemático" y el ámbito de "lo pedagógico" entendido como el espacio de actuación del profesor. Se muestra cómo dicho fenómeno provoca la desaparición de las razones de ser (del "por qué" y el "para qué") del estudio escolar de la geometría. La segunda parte será publicada en SUMA 45.

The present work -which is being published in two parts- analyses some didactic consequences of the "confinement into themes" to which mathematics teaching at secondary school level seems to be doomed. This first part describes the phenomenon of "thematic autism" relating it to the school separation between the "mathematical" and the "pedagogical" field, this later being interpreted as the teacher's work space. It is shown how this phenomenon produces the disappearing of the raison d'être (the "why" and "what for") of the study of geometry at school. The second part will be published in SUMA 45.

En un trabajo muy poco difundido Yves Chevallard propone una *jerarquía de niveles de codeterminación* entre las formas de estructurar las cuestiones matemáticas a estudiar y las maneras de organizar el estudio de las mismas en la escuela, esto es, entre las Organizaciones Matemáticas (OM) escolares y las correspondientes Organizaciones Didácticas (OD)[1].

> El principio fundador de las didácticas, al menos en el sentido brousseauniano de la palabra, es que no sólo lo transmitido depende de la herramienta con la que se pretende conseguir su transmisión, sino que también (recíprocamente) las organizaciones "transmisoras", es decir didácticas, se configuran de manera estrechamente vinculada a la estructura dada de lo que hay que transmitir. En otros términos, las organizaciones didácticas, las OD como diré en adelante, dependen fuertemente de las organizaciones por enseñar - las OM, si se trata de organizaciones matemáticas (Chevallard, 2001).

Podemos esquematizar dicha jerarquía mediante una sucesión de niveles de estructuración de las citadas OM y OD, que van desde el más *genérico*, la sociedad, al más *específico*, una cuestión matemática concreta que se propone para ser estudiada.

Sociedad → Escuela → Disciplina → Área → Sector → Tema → Cuestión

Chevallard propone, además, un nivel que llama "pedagógico" entre los niveles "escolar" y "disciplinar". Aquí lo hemos eliminado por razones de simplicidad. Se postula que en cada uno de estos niveles se introducen restricciones particulares que ponen de manifiesto la determinación recíproca entre las OM y las OD: la estructuración de las OM en cada nivel de la jerarquía condiciona las formas posibles de organizar su estudio y, recíprocamente, la naturaleza y las funciones de los dispositivos didácticos existentes en cada nivel determinan, en

> *Yves Chevallard propone una jerarquía de niveles de codeterminación entre las formas de estructurar las cuestiones matemáticas a estudiar y las maneras de organizar el estudio de las mismas en la escuela.*

*Este trabajo ha sido realizado en el marco del proyecto BSO2000-0049 de la DGICYT. Una primera versión del mismo ha sido publicada en Gascón (2003). Agradezco al editor, Emilio Palacián, las facilidades que ha dado para que este texto pueda publicarse en SUMA.

Josep Gascón
Universitat Autònoma de Barcelona
Departament de Matemàtiques
gascon@mat.uab.es

gran parte, el tipo de las OM que será posible reconstruir (estudiar) en dicha institución escolar.

> Por ejemplo, la cuestión "¿Cuáles son las simetrías de un rectángulo no cuadrado?" se considera hoy en día, en la mayoría de los sistemas escolares en los que se estudia esta cuestión, como perteneciendo al tema de las "Simetrías de polígonos", que se incluye en el sector de las "Transformaciones del plano" que se incluye dentro del área de la Geometría, que pertenece a la disciplina Matemáticas.
> Puede ser que la jerarquía observada sea más o menos compleja. Pero lo que importa subrayar es que, si no se construye esta jerarquía, entonces la probabilidad de que se estudie esta cuestión en la escuela y en el aula es casi nula -lo que puede llegar a ser un problema serio de instrucción pública, como sucede por ejemplo con cuestiones como ¿puede el hachís crear dependencia fácilmente?, ¿el uso del preservativo protege bien del SIDA y de embarazos no deseados?, etc. (Chevallard, 2001).

Esta sucesión de niveles de organización es relativa no sólo a la cuestión o grupo de cuestiones consideradas, sino también al periodo histórico y a la institución escolar en la que nos situemos. Así, dada una cuestión matemática particular como, por ejemplo: *"¿Cómo resolver una ecuación polinómica?"*, la cadena de niveles de organización que permite el acceso al estudio de dicha cuestión en la Enseñanza Secundaria actual es muy diferente a la que posibilita su estudio en la Enseñanza Universitaria y ambas difieren profundamente de las que existían en dichas instituciones a mediados del siglo XX. En este trabajo nos situaremos en el ámbito de la Enseñanza Secundaria española actual, aunque algunos de los análisis que llevaremos a cabo puedan tener validez en otras instituciones escolares.

Si partimos de una cuestión matemática concreta que se estudia efectivamente en la Enseñanza Secundaria española actual, podemos asegurar que existe un tema en el que se sitúa dicha cuestión, un sector que contiene dicho tema y un área de las matemáticas de Secundaria de la que forma parte dicho sector. La existencia de dicha cadena constituye una condición mínima para que una cuestión matemática pueda existir en una institución escolar; pero el mero hecho de que una cuestión matemática pueda plantearse no garantiza la calidad de su estudio; ésta depende, entre otras cosas, de que dicha cuestión matemática provenga de ciertas cuestiones primarias planteadas en los niveles superiores de la jerarquía (más allá incluso del nivel disciplinar) y "conduzca a alguna parte", esto es, que no se trate de una cuestión "cerrada en sí misma" y, por tanto, "muerta" (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 118).

¿Sobre qué institución recae la responsabilidad de que las cuestiones (por ejemplo, matemáticas) que se proponen para ser estudiadas en la escuela cumplan estas condiciones? ¿Qué parte de dicha responsabilidad recae sobre el profesor? ¿Hasta qué punto puede el profesor, como tal, asumir dicha responsabilidad? En términos generales podemos afirmar que se trata de un problema que está fuera del alcance del profesor. Según Chevallard se observa un "abandono", por parte del profesor, de los niveles superiores de organización didáctica, desde el de la *sociedad* y la *escuela* hasta incluso el de los *sectores*, lo que provoca un retraimiento de su acción sobre el nivel de los *temas* (ya sea la resolución de problemas con regla y compás, la expresión analítica de rectas y planos en el espacio, el teorema de Pitágoras, los poliedros regulares o las funciones cuadráticas).

> *Este "encierro en los temas" constituye un fenómeno didáctico, el "autismo temático" del profesor, relacionado con el estatuto del oficio de profesor, considerado culturalmente como un oficio de bajo nivel.*

Este "encierro en los temas" constituye un fenómeno didáctico, el "*autismo temático*" del profesor, relacionado con el *estatuto del oficio de profesor*, considerado culturalmente como un oficio de bajo nivel. En este punto es importante subrayar que los fenómenos didácticos, al igual que los fenómenos sociales, económicos o lingüísticos, son independientes de la voluntad, de la formación y de la capacidad de los sujetos de la institución. Por lo tanto, el *autismo temático* como tal fenómeno didáctico, es un fenómeno al que *el profesor está sujeto* y sobre el que sólo puede incidir localmente y en un grado relativamente insignificante.

Si bien el abandono de los niveles superiores no es absoluto, ya que el profesor mantiene ciertas preocupaciones por las cuestiones que se refieren al nivel *disciplinar* e, incluso, a los niveles *escolar* y *social*, resulta que, como tal profesor, sólo puede expresar estas preocupaciones como meras "opiniones" personales o, a lo sumo, como una reivindicación política o sindical. En resumen, el profesor está abocado, *en su oficio de profesor, a no ir mucho más allá del nivel temático*, lo que acarreará importantes consecuencias didácticas.

> La consecuencia más impresionante de este aislamiento del profesor en la jerarquía de los niveles de determinación didáctica se encuentra en la desaparición de las **razones de ser** de las OM enseñadas en el nivel temático. (Chevallard, 2001)

Paralelamente asistimos a un *proceso de desescolarización* relacionado con la pérdida de sentido de las cuestiones que se estudian en la escuela (ya sean cuestiones matemáticas, lingüísticas, históricas o biológicas) porque éstas parecen surgir de *temas aislados* cuya justificación última está, presuntamente pero casi nunca explícitamente, en la disciplina en cuestión (en nuestro caso, las matemáticas):

> La dificultad de plantear el problema de las cuestiones "primarias" que hay que estudiar en la escuela -de las que surgen o deberían surgir las cuestiones "secundarias" y, en particular, las cuestiones disciplinarias- está evidentemente relacionada con la elección escolar, primordial, de una separación rigurosa del estudio entre una multiplicidad de disciplinas, que se presentan como los "transpuestos didácticos" más o menos deformados de los diferentes campos del conocimiento [...]. La evolución de la enseñanza de las matemáticas en Francia durante las últimas tres décadas me parece ser un claro ejemplo de este proceso progresivo de autismo disciplinar. (Chevallard, 2001).

Tenemos así, por una parte, que la inmensa mayoría de las cuestiones matemáticas que se proponen para ser estudiadas en la escuela surgen en el nivel *temático* y sólo están conectadas nominalmente a los niveles superiores de organización (sectores, áreas y disciplina) que son *transparentes e incuestionables*. Dado, además, que los temas matemáticos escolares no se estructuran propiamente como OM *locales*[2] y, por tanto, no llegan nunca a integrarse de manera funcional en OM *regionales* ni *globales*, resulta que muchas de las cuestiones matemáticas escolares no sólo están muy débilmente conectadas a los citados niveles superiores de organización sino que, además, aparecen como cuestiones bastante independientes entre sí.

La inmensa mayoría de las cuestiones matemáticas que se proponen para ser estudiadas en la escuela surgen en el nivel temático y sólo están conectadas nominalmente a los niveles superiores de organización: sectores, áreas y disciplina.

Resulta, en definitiva, que actualmente existen enormes dificultades para que las respectivas disciplinas escolares (en particular, las matemáticas) tomen en consideración (aspectos de) las cuestiones "primarias" que hay que estudiar en la escuela y que surgen en el nivel social. No sólo desaparecen las razones de ser de las cuestiones disciplinares que se estudian en la escuela sino que, en las sociedades occidentales, se está produciendo un *envejecimiento de las "razones de ser" de la propia escuela*. De acuerdo con Neil Postman:

> [...] sin un propósito trascendente y honoroso, la escolarización tocará a su fin y, puestos en ello, cuanto antes mejor. Dotada, en cambio, de un propósito de estas características, la escuela se convierte en la principal institución a través de la cual las generaciones jóvenes puedan encontrar razones para continuar educándose a lo largo de su vida (Postman, 1995, p. 11).

Antes de analizar los efectos de estos fenómenos sobre el estudio de la geometría en Secundaria, es necesario hacer dos precisiones:

(a) Ante todo, propongo hablar de autismo temático de la *institución escolar* en lugar de autismo temático *del profesor*. De hecho, antes de que el profesor se encierre en los temas, puede observarse como el currículo oficial que proponen las sucesivas reformas, los documentos de las administraciones educativas y los libros de texto aprobados por éstas consideran implícitamente que, más allá del nivel de organización de los temas, todo es *transparente e incuestionable*.

(b) En lo que sigue pretendo mostrar que, en Secundaria, no sólo ha desaparecido la razón de ser de las cuestiones que se estudian a nivel temático, sino también la razón de ser de las diversas "áreas" en las que se divide la matemática escolar. Me centraré en el caso de la geometría.

Escisión entre “lo pedagógico” y “lo matemático”

En la última reforma de la Educación Secundaria que ha tenido lugar en el estado español, encontramos que los documentos oficiales imponen como obligatorios en el *primer nivel de concreción*[3], sin ninguna justificación y, por tanto, sin dar pie a ninguna posibilidad de cuestionamiento, los dos niveles de organización que siguen al de la disciplina (y que, por tanto, llamaremos "áreas" y "sectores", respectivamente). Las áreas que marca el Diseño Curricular de matemáticas de la E.S.O. son las siguientes[4]:
(1) Aritmética y álgebra.
(2) Geometría.
(3) Funciones y gráficas.
(4) Estadística y Probabilidad.

En el Bachillerato se mantienen esencialmente las mismas “áreas” (o niveles de organización inmediatamente inferiores al nivel de organización global de todas las matemáticas), si bien aparecen dos nuevas: "Álgebra Lineal" y "Análisis"[5].

La subdivisión en "sectores" (o niveles de organización inmediatamente inferiores al de las "áreas") que se proponen para la Geometría de la ESO en los documentos curriculares depende ligeramente del curso que consideremos. En conjunto, aparecen los siguientes sectores en la Geometría[6]: Elementos y organización del plano; Elementos y organización del espacio; Magnitudes y medida; Traslaciones, giros y simetrías en el plano; La semejanza en el plano; y Relaciones métricas y trigonométricas en los triángulos rectángulos. La "Geometría" del Bachillerato[7] contiene los siguientes sectores: Trigonometría; Geometría analítica del plano; Lugares geométricos; El plano vectorial; Geometría analítica del espacio y El espacio vectorial.

Hay una profunda escisión entre temas y cuestiones por un lado y disciplina, áreas y sectores, por otro.

Dado que el primer nivel de concreción se impone obligatoriamente por ley, queda bien claro que la distribución de las matemáticas en *"áreas"*, y la de éstas en *"sectores"*, es incuestionable en las instituciones escolares. Los Departamentos Didácticos, responsables de diseñar el segundo nivel de concreción y los autores de libros de texto (así como el profesor en el aula) responsables de especificar y gestionar el tercer nivel de concreción, sólo tienen la posibilidad de elegir las *cuestiones matemáticas* que van a ser estudiadas por los alumnos y, de una manera absolutamente irrelevante respecto de los niveles superiores de la jerarquía, agrupar dichas cuestiones en ciertos *temas*.

Aparece así una profunda *escisión* entre temas y cuestiones por un lado y disciplina, áreas y sectores, por otro. Esta escisión está asociada:

(a) A la *transparencia* de la matemática como disciplina que proviene de la aceptación acrítica de un modelo epistemológico de las matemáticas, que es el dominante en las instituciones docentes de nivel universitario, y que reduce la "actividad matemática" a series del tipo *"definición-especulación-teorema-prueba"*. Esta epistemología reduccionista expulsa la "enseñanza de las matemáticas" fuera de las actividades genuinamente "matemáticas" (Gascón, 2002b).

(b) Al *mito pedagógico* dominante en la cultura escolar según el cual existiría un ámbito de lo "pedagógico" (en el sentido de "relativo a la enseñanza") que sería *independiente* de lo "matemático". Dado que los niveles superiores: [Disciplina → Área → Sector], son considerados de naturaleza "matemática", mientras que los inferiores: [Tema → Cuestión], se tienen por "lo relativo a la enseñanza", se sigue (de acuerdo con el citado mito) que la estructura de los primeros no tiene ninguna incidencia sobre la actividad matemática que el profesor y los alumnos llevarán a cabo conjuntamente en el aula. Se supone que la actividad matemática escolar puede describirse por completo en términos de las cuestiones matemáticas concretas que se estudian y de los temas en los que se agrupan dichas cuestiones, sin hacer ninguna mención a los niveles superiores de organización.

Esta escisión constituye la principal manifestación del *autismo temático* en Secundaria. No se trata de un fenómeno coyuntural puesto que hunde sus raíces en la propia estructura de la comunidad matemática que puede ser considerada actualmente como una *comunidad escindida* (Gascón, 1993). No es de extrañar, por tanto, que haya acarreado y siga acarreando importantes consecuencias didácticas.

Pero no hay que olvidar que, como se ha apuntado, existe asimismo una especie de *autismo disciplinar*, que se manifiesta en la dificultad de hacer surgir las *cuestiones matemáticas* de las *cuestiones primarias* que, como resultado del consenso social, se proponen para estudiar en la escuela. Este fenómeno, que no podemos desligar del anterior y que, a su vez, está relacionado con el *proceso de desescolarización* de las sociedades occidentales, provocará la escisión de los dos niveles más genéricos [Sociedad → Escuela] de la jerarquía de niveles de codeterminación didáctica y, posiblemente, reforzará los efectos del autismo temático.

Sociedad → Escuela → Disciplina → Área → Sector → Tema → Cuestión

Aunque estos fenómenos extienden su influencia a todas las áreas de la matemática escolar, en este trabajo nos centraremos en el análisis de su incidencia sobre la enseñanza, el aprendizaje y, en definitiva, el estudio de la geometría en la Enseñanza Secundaria.

Razón de ser de la geometría en la Enseñanza Secundaria actual

En realidad el sustantivo "geometría" (y el adjetivo "geométrico") son ambiguos puesto que no es posible caracterizar epistemológicamente lo "geométrico". Podemos referirnos, a lo sumo, a lo que en una determinada institución "es considerado como *geometría*" (Gascón, 2002a). Esta ambigüedad no es específica de la geometría sino que es compartida por todas las demás "áreas" en que tradicionalmente se ha dividido la "matemática" ("aritmética", "álgebra", "cálculo", "estadística" y "probabilidad").

En trabajos anteriores hemos caracterizado las "modelizaciones algebraicas" así como los indicadores del "grado de algebrización" de una OM cualquiera (Bolea, Bosch y Gascón, 1998a, 1998b, 2001a y 2001b; Gascón, 1999 y 2001b) y hemos mostrado que la existencia de un área de la matemática escolar que englobe los contenidos considerados como "algebraicos" es cuestionable. Dicho estudio pone de manifiesto, asimismo, que otras áreas tradicionales de la matemática escolar como, por ejemplo, la "aritmética" o la "geometría", también deben ser cuestionadas. El que se mantengan dichas áreas en el Diseño Curricular de la Enseñanza Secundaria española debe ser considerado como una prueba más del *carácter transparente e incuestionable de este nivel de estructuración* (las "áreas") de las matemáticas escolares.

Utilizando esta noción relativa de "geometría" analizaré a continuación la incidencia del autismo temático sobre la desaparición escolar de la razón de ser de la geometría. En un trabajo anterior (Gascón, 2002a) he mostrado que la presunta controversia entre la *geometría sintética* y la *geometría analítica* es, en última instancia, una falsa controversia fruto de un análisis epistemológico superficial. A pesar de la continuidad y hasta complementariedad que existe entre ambas, el hecho es que continúan estudiándose completamente separadas a lo largo de la Enseñanza Secundaria (sintética en la E.S.O. y analítica en el Bachillerato). La "tozudez" de este hecho, que se mantiene inalterable a lo largo de las últimas reformas educativas, parece dar a entender que no se trata de una separación accidental sino que responde a un fenómeno didáctico-matemático más profundo y que, por lo tanto, merece ser indagado.

En el trabajo citado se muestra que son precisamente las limitaciones de las *técnicas sintéticas* las que *dan sentido* (son las *razones de ser*) a las *técnicas analíticas*. En otros términos: las técnicas de la geometría analítica constituyen la *respuesta* a algunas de las limitaciones que presentan las técnicas sintéticas para resolver problemas genuinamente geométricos planteados sin utilizar coordenadas. Se trata de *problemas de construcción o de determinación de figuras geométricas* a partir de elementos (puntos, segmentos, ...) que mantienen entre sí relaciones que pueden describirse y manipularse más eficazmente con las técnicas analíticas.

También puede demostrarse, recíprocamente, que las técnicas analíticas requieren en muchas ocasiones, de manera casi imprescindible, el uso previo de ciertas técnicas sintéticas que son las que sugieren el diseño de la estrategia que se llevará a cabo posteriormente con las técnicas analíticas. Se cierra así el círculo de la complementariedad entre ambos tipos de técnicas.

Un ejemplo de este segundo aspecto de la complementariedad entre técnicas sintéticas y técnicas analíticas puede enunciarse en los siguientes términos: la eficacia para resolver ciertos tipos de problemas de geometría analítica (en términos de porcentaje de problemas correctamente planteados y resueltos) mejora de forma muy significativa si, en lugar de dedicar todo el periodo de entrenamiento al uso de técnicas analíticas, se utiliza una parte del mismo para que los alumnos aprendan a traducir los problemas de geometría analítica (dados en versión *cartesiana*) al ámbito de la geometría sintética (en versión *euclidiana*) y a resolver éstos mediante técnicas "puramente sintéticas" como, por ejemplo, con regla y compás (Gascón, 1989).

> *La eficacia para resolver ciertos tipos de problemas de geometría analítica mejora de forma muy significativa si se utiliza una parte del tiempo en traducir los problemas al ámbito de la geometría sintética y resolverlos, por ejemplo, con regla y compás.*

Así, ante un problema como el siguiente (que puede ser considerado como una versión *cartesiana particular*):

> *Escribir la ecuación de una circunferencia de radio* $\boldsymbol{R} = 3$ *que pase por el punto* $\boldsymbol{P} = (-3, 4)$ *y sea tangente a la recta* $\boldsymbol{r}$ *de ecuación* $2x - 3y = 1$.

Se propone la siguiente estrategia:

1º Enunciar una versión *euclidiana general* de dicho problema:

> *Dibujar con regla y compás una circunferencia de radio dado* ***R****, que pase por un punto dado* ***P*** *y sea tangente a una recta dada* ***r****.*

2º Resolver esta versión del problema mediante el *patrón de dos lugares geométricos*: para ello se empieza reduciendo el problema a la construcción de un punto que se denomina "punto clave" (en este caso el problema se reduce a construir el centro C de la circunferencia buscada); se continúa buscando dos lugares geométricos que contengan a dicho punto y que sean *construibles con regla y compás a partir de los datos* del problema (en este caso basta dibujar la circunferencia de centro **P** y radio **R** y el par de rectas paralelas a **r** a distancia **R**); se concluye construyendo los puntos comunes a ambos lugares geométricos, que son los posibles centros de la circunferencia buscada (Ver Gráfica 1).

3º Resolver la versión *analítica particular* inicial del problema utilizando un patrón de resolución inspirado en el *patrón de dos lugares geométricos* (Gascón, 1989, p. 74-78).

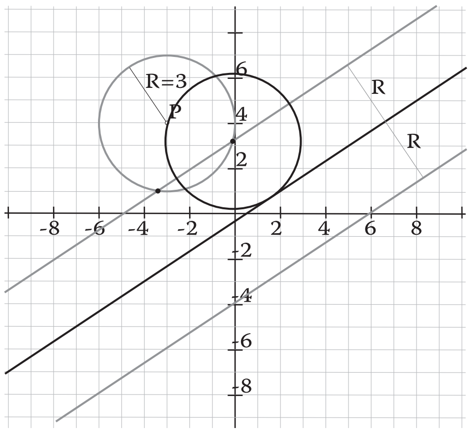


Gráfico 1

4º Esta estrategia puede completarse mediante la formulación de la versión *cartesiana general* de este problema (esto es, con parámetros):

*Buscar la ecuación de una circunferencia de radio **R** que pase por el punto **P** = (a, b) y sea tangente a la recta **r** de ecuación mx + ny = p.*

5º Y la consiguiente comparación entre los resultados que se obtienen al resolver este último problema y el "estudio sintético de casos" (hay que distinguir tantos "casos" como disposiciones geométricas "distintas" puedan originar las diferentes relaciones entre los datos) que debería realizarse en la resolución de la versión *euclidiana general*.

Para que una estrategia didáctica sea viable se requiere que sea compatible con un amplio conjunto de restricciones de todo tipo.

Por todo lo anterior, no tiene ningún tipo de justificación hacer aparecer las técnicas analíticas como por arte de magia, sin ningún tipo de continuidad con la problemática de la geometría sintética. Parece natural, por lo tanto, proponer una manera completamente diferente de iniciar el estudio de la geometría analítica en la Enseñanza Secundaria (Gascón, 2002a):

> En lugar de "dejar morir" la problemática que se estudia en la E.S.O., y crear una pseudoproblemática geométrica con ejercicios bastante formales para intentar justificar la utilización de las incipientes técnicas analíticas introducidas artificialmente como objetos de enseñanza, deberían retomarse en el Bachillerato algunos tipos de problemas geométricos que se abordaron en la E.S.O. Se podría empezar mostrando, en el Bachillerato, determinadas limitaciones de las técnicas sintéticas clásicas que pueden solventarse mediante el uso de técnicas analíticas. Para que esta práctica docente fuese eficaz sería preciso que se estableciese un nuevo dispositivo didáctico cuya función principal fuese la de *retomar aquellos problemas matemáticos* que habiéndose propuesto en la E.S.O. hubiesen quedado *sin resolver* por limitaciones de las técnicas matemáticas disponibles. Sólo así podría mostrarse la continuidad de la problemática geométrica y la complementariedad entre los diferentes tipos de técnicas geométricas (Ibid., p. 24).

El autismo temático debe ser considerado como un fenómeno que condiciona el conjunto de las cuestiones matemáticas que pueden ser estudiadas en la Enseñanza Secundaria.

Postulo que la existencia de una estrategia didáctica de este tipo constituye una condición imprescindible para hacer pervivir en el Bachillerato (y más allá) la problemática que surge de las *situaciones umbilicales*[8] de la geometría elemental, esto es, de las situaciones *ligadas a la determinación y construcción de figuras geométricas* y, en definitiva, para dar sentido al estudio de la geometría analítica en Secundaria. Pero, a pesar de la potencial necesidad y eficacia de esta estrategia, constatamos su ausencia absoluta en el actual Sistema de Enseñanza de las Matemáticas. ¿Cómo podemos explicar esta ausencia[9]?

Para que una estrategia didáctica (dirigida a reconstruir una OM en una institución docente determinada) sea *viable* se requiere que sea compatible con un amplio conjunto de restricciones de todo tipo: algunas de estas restricciones dependen de los sujetos de la institución (alumnos y profesores), pero otras como, por ejemplo, las que provienen del autismo temático, van más allá de la voluntad y de la formación de dichos sujetos. En el caso que nos ocupa, para explicar la *ausencia institucional de una tal estrategia didáctica* hay que tener en cuenta que:

(1) La "geometría analítica del plano" es considerada por el Diseño Curricular como un sector de la geometría del Bachillerato. Esto significa que la "geometría" es considerada como un "área" (o nivel de organización inmediatamente inferior al de la organización global de las matemáticas) y que el currículum sitúa la "geometría analítica del plano" en el nivel inmediatamente inferior al de las áreas.

(2) Las *razones de ser* de la geometría analítica del plano, esto es, las cuestiones a las que debería responder, surgen en *situaciones ligadas a la determinación y construcción de figuras geométricas* las cuales, a su vez, aparecen en otros sectores (como, por ejemplo: "Elementos y organización del plano") que el Diseño Curricular trata con técnicas sintéticas y que, además, sitúa en otro nivel escolar: la Enseñanza Secundaria Obligatoria.

En estas condiciones el autismo temático hace que sea muy difícil construir en Secundaria una cadena de niveles de organización que, partiendo del nivel disciplinar, desemboque en cuestiones que requieran la integración efectiva de técnicas geométricas analítico-sintéticas[10], por lo que es *altamente improbable que pueda accederse al estudio de este tipo de cuestiones*. Esta desconexión curricular de las respectivas problemáticas ha provocado una separación radical entre la geometría sintética y la geometría analítica y, en definitiva, la *desaparición escolar de las razones de ser de la geometría analítica*. Esta desaparición se materializa en que el Sistema de Enseñanza ignora por qué y para qué se estudia la geometría analítica en Secundaria, lo que constituye un efecto catastrófico del *autismo temático*.

La estructura y la dinámica interna de la matemática escolar están condicionadas por la escisión entre: por un lado las cuestiones matemáticas y los temas en que se agrupan y, por otro, los niveles superiores, las áreas, los sectores y la matemática como disciplina.

El autismo temático y el problema del currículo

Los análisis anteriores han mostrado bien a las claras hasta qué punto la estructura y la dinámica interna de la matemática escolar están condicionadas por la escisión entre: por un lado las *cuestiones* matemáticas que se estudian en la escuela y los *temas* en que se agrupan dichas cuestiones y, por otro, los niveles superiores de la organización matemática, las *áreas*, los *sectores* y la *matemática* como disciplina.

Aunque el análisis propuesto se refiere al caso de la geometría, es obvio que dicha escisión afecta a la matemática escolar en su conjunto. El *autismo temático* debe ser considerado, por tanto, como un fenómeno que condiciona el conjunto de las cuestiones matemáticas que pueden ser estudiadas en la Enseñanza Secundaria y, correlativamente, las posibles formas de estudiar dichas cuestiones. La consecuencia más importante del autismo temático es, como ya se ha dicho, la desaparición de las razones de ser de las Organizaciones Matemáticas (OM) que se proponen para ser estudiadas en la escuela.

Pero, además, dado que la mayoría de los trabajos de Didáctica de las Matemáticas asumen implícitamente el encierro en los temas, sus propuestas para modificar el currículo de matemáticas de la Enseñanza Secundaria no llegan a cuestionar la estructura de los sectores en que se divide cada una de las áreas ni, mucho menos, las áreas ("aritmética", "álgebra", "cálculo", "estadística" y "probabilidad") en que tradicionalmente se ha estructurado la matemática escolar. De esta manera el "sentido" que tiene el estudio escolar de las matemáticas en general y de cada una de sus áreas en particular (como, por ejemplo, el "por qué y para qué" estudiar geometría en la escuela) se da por supuesto cuando, en realidad, ha desaparecido.

Así pues, si denominamos *"problema del currículum de matemáticas"* al problema de diseñar con fundamentación didáctica, el currículo de matemáticas para cierta etapa educativa, entonces podemos decir que el autismo temático, al disminuir las posibilidades de cuestionar los niveles superiores de la organización matemático-didáctica, dificulta objetivamente la resolución de dicho problema porque impide recuperar las "razones de ser" de las OM que se acabarán enseñando.

> El punto de vista de la didáctica [de las matemáticas] propone que el *problema de la elaboración del currículo*, que tradicionalmente había sido considerado como un problema esencialmente psicopedagógico, tiene un *componente matemático esencial*. No se trata únicamente de un problema de secuenciar y temporalizar los contenidos del currículo, sino de realizar un trabajo matemático de reorganización de los elementos técnicos, tecnológicos y teóricos que componen cada obra [u organización matemática] en base a las cuestiones a las que ésta responde. Se trata, en definitiva, de una verdadera *reconstrucción creativa* de las obras que forman el currículo. (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 127).

Podemos proponer cambios o reformas del currículo más o menos radicales, incluso cambios muy bien justificados epistemológicamente, pero si únicamente pretendemos reformar el nivel de los temas, entonces será imposible *recuperar el sentido escolar del estudio de las matemáticas*. Esta recuperación requiere, al menos:

(1) Cuestionar y tener la posibilidad de modificar la estructura de toda la jerarquía de niveles de codeterminación, incluso más allá de la propia disciplina. En este punto queda claro que el diseño de un currículo de matemáticas es una responsabilidad que no puede ser asumida, en exclusiva, por la comuni-

dad científica; tiene que ser compartida por el consenso social a través de un acuerdo político.

(2) Tomar en cuenta las *transformaciones adaptativas* que sufren las Organizaciones Matemáticas en el seno de las instituciones escolares. Ésta si que debe ser considerada una responsabilidad exclusiva de la comunidad científica y, más concretamente, de la comunidad de investigadores en Didáctica de las Matemáticas.

> [...] aunque el hecho de que en la escuela se enseñe el Teorema de Pitágoras y no la elasticidad es el resultado de decisiones humanas; la forma concreta como aparece el Teorema de Pitágoras en el currículo actual es, a su vez, una consecuencia de las *leyes que rigen el desarrollo interno del currículo de matemáticas*. Resulta así que el currículo de matemáticas *no es arbitrario*, como tampoco lo es la manera en que se transforma la matemática en el seno de una institución escolar. (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 117).

Se trata, en general, de las restricciones transpositivas que rigen la difusión institucional de las Organizaciones Matemáticas, a fin de que éstas puedan ser estudiadas en la escuela.

¿Cuál es la naturaleza de esas "leyes" o, mejor, de esas "restricciones" y cuáles son las transformaciones que provocan en la matemática escolar? ¿Cómo se pueden tener en cuenta a la hora de diseñar el currículo de matemáticas? ¿Qué grado de conocimiento sobre las mismas tenemos en el estado actual de la didáctica de las matemáticas?

Podemos decir que, en general, se trata de las *restricciones transpositivas* que rigen la difusión institucional de las Organizaciones Matemáticas (OM), a fin de que éstas puedan ser estudiadas en la escuela (Chevallard, 1985). Estudiar una cuestión matemática en una institución escolar consiste en *estudiar una respuesta* (que tomará la forma de una OM) a dicha cuestión *que ha sido dada en otra institución* y que se tiene por válida. Para ello, dicha respuesta, debe ser *reconstruida*, esto es, *transportada* a la institución escolar desde la institución en la que se dio la respuesta original. En este proceso transpositivo la respuesta sufre transformaciones adaptativas más o menos importantes. De lo anterior se desprende que el *estudio escolar* también posee características específicas: el paso del estudio de una *cuestión matemática* al estudio de una *respuesta dada a dicha cuestión* en otra institución, provoca modificaciones en la noción misma de "estudio" (Chevallard, 1999). Por tanto, las "razones de ser" originarias que dieron sentido al estudio de una OM en determinada institución, no pueden transportarse mecánicamente a la escuela.

Describiré, a modo de ejemplo, una restricción institucional que pesa sobre el *estudio escolar de las cuestiones matemáticas* que está relacionada directamente con el *autismo temático* y que explica, en parte, las dificultades para dar sentido al estudio de la geometría analítica en secundaria:

Si para acceder al estudio de una cuestión matemática concreta se requiere que la cadena de niveles que debe desembocar en esa cuestión cruce varios *sectores* diferentes de un *área*, entonces el autismo temático provocará que dicha cadena sea muy difícil de establecer y esto impedirá (o hará muy poco probable) que dicha cuestión pueda ser estudiada efectivamente. El hecho de que la *separación radical* entre la geometría sintética y la geometría analítica, que comporta la *ausencia de cuestiones mixtas analítico-sintéticas*, se haya mantenido a lo largo de las últimas reformas curriculares, a pesar de que, objetivamente, dificulta la posibilidad de dar sentido al estudio de la geometría analítica en la Enseñanza Secundaria, muestra la fuerza de esta restricción.

Pero las restricciones que pesan sobre el *estudio escolar de las cuestiones matemáticas* no surgen únicamente en el nivel disciplinar. La cadena de niveles de codeterminación, que debe construirse necesariamente para permitir el acceso al estudio de una cuestión matemática concreta, se inicia en los niveles más genéricos de la jerarquía (Escuela y Sociedad). Aparecen, por tanto, nuevas restricciones relacionadas con el *autismo disciplinar*, esto es, con la dificultad de hacer surgir las cuestiones matemáticas escolares de las cuestiones que el consenso social ha propuesto para estudiar en la escuela. Esta dificultad, a su vez, no es independiente del *proceso de desescolarización* de las sociedades occidentales que se manifiesta por un envejecimiento de las "razones de ser" de la propia escuela y que también podríamos denominar *"autismo escolar"*.

Sociedad → Escuela → Disciplina → Área → Sector → Tema → Cuestión

Es muy difícil que el *estudio escolar de una cuestión disciplinar* (por ejemplo, matemática) mantenga su sentido en una sociedad en la que la escuela como tal está falta de propósito porque no existe una "razón" compartida y elevada que sea capaz de construir un futuro basado en ideales socialmente compartidos, prescribir reglas de conducta, proporcionar una fuente de autoridad y, sobre todo, conferir a la escuela un sentido de continuidad y propósito (Postman, 1995, pp. 17-18).

> Una razón, en el sentido en que empleo aquí el término, es algo distinto de una motivación. Dentro del contexto de la

> escolarización, la motivación se refiere a un acontecimiento físico temporal, en el que se despierta la curiosidad y se enfoca la atención. Sin embargo no hay que confundirla con la razón para asistir a una clase, escuchar a un profesor, pasar un examen, hacer los deberes y soportar la escuela aún sin estar motivado para todo ello (Ibid., p. 16).

Tenemos, en resumen, que el *autismo temático* es un fenómeno que afecta a la institución escolar en su conjunto y no sólo a los sujetos de la misma. En los Sistemas Escolares occidentales el autismo temático está actualmente muy reforzado por el *autismo disciplinar* y el *autismo escolar*. Su creciente y negativa incidencia sobre el *problema del currículo* se materializa en la desaparición no sólo de las razones de ser de las OM enseñadas en el nivel temático, sino incluso del sentido del estudio de las matemáticas y hasta del *"estudio"* como actividad humana. Mientras que el autismo temático está ligado a la representación institucional del saber matemático que se enseña y, en consecuencia, a lo que se entiende en la institución escolar por "enseñar y aprender matemáticas"[11], el autismo disciplinar y, sobre todo el escolar, tienen que ver con el papel que la sociedad adjudica a la escuela como institución. Por tanto, la solución del problema del currículo no sólo requiere cambiar el *modelo epistemológico* ingenuo que, como dice Brousseau (1987), está en la base de los *modelos docentes habituales*, sino también *reformular el contrato* que une a la escuela y a la sociedad respecto a una cuestión tan antigua como nuestra civilización: la *educación matemática*[12]. ■

NOTAS

1 Las nociones de OM y OD son centrales en el estado actual de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) en la que se sitúa este trabajo. Una introducción a la TAD se encuentra en Chevallard, Bosch y Gascón (1997) y en Chevallard (1999 y 2000).

2 Las nociones de OM *puntual, local, regional y global* se describen en Chevallard (1999). Aquí sólo añadiremos que éstas se sitúan, respectivamente, en los niveles de la *cuestión*, del *tema*, del *sector*, y del *área*. Así, aunque en Primaria y en Secundaria se estudian "temas", no puede decirse que en dichas instituciones se reconstruyan (estudien) efectivamente OM "locales" relativamente completas. En Fonseca y Gascón (2000) y en Bosch, Fonseca y Gascón (en prensa) se analizan los fenómenos ligados a la "incompletitud" de las organizaciones matemáticas locales que viven en las instituciones escolares.

3 "El primer nivel de concreción del Diseño Curricular incluye el enunciado de los Objetivos Generales del Ciclo, el establecimiento de las áreas curriculares y de los Objetivos Generales de cada una de ellas, así como la formulación de los Objetivos Terminales, de los Bloques de Contenidos y de las Orientaciones Didácticas, referido todo ello a las diferentes áreas curriculares consideradas" (Coll, 1986, p. 73) [La traducción del catalán es nuestra].

4 Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, (2001a).

5 Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, (2001b).

6 Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, (2001a).

7 Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, (2001b).

8 Las llamamos situaciones "umbilicales" por analogía a una de las acepciones de "ombligo": "raíz central y más larga de un árbol" (Institut d'Estudis Catalans, 1995). Ver Chevallard (1999, p. 251).

9 La Didáctica de las Matemáticas, como el resto de las disciplinas teórico-experimentales (cada cual en su ámbito), no puede renunciar a la ambición de *explicar porqué existe lo que existe y porqué no existe lo que no existe* en el ámbito de las instituciones didácticas. Sin esto, la didáctica sólo sería un catálogo perfectamente inútil de descripciones a posteriori.

10 Como, por ejemplo: "Dados tres segmentos, ¿en qué casos puede construirse un triángulo que los tenga como medianas? Y, en el caso en que sea posible, ¿cómo puede construirse el triángulo (o los triángulos) en cuestión con regla y compás? (Gascón, 2002a, pp. 22-24).

11 La relación entre el *modelo epistemológico de las matemáticas* dominante en una institución escolar y la manera de organizar las *prácticas docentes* en dicha institución, ha sido estudiada en Gascón (2001a).

12 Agradezco a Marianna Bosch los comentarios, críticas y sugerencias relativos a las primeras versiones de este trabajo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOLEA, P., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1998a): Le caractère problématique du processus d'algébrisation. Proportionnalité et grandeurs dans l'enseignement obligatoire, *Actes de la IXème école d'été de didactique des mathématiques, ARDM*, 153-159.

BOLEA, P., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1998b): The role of algebraization in the study of a mathematical organization, *Proceedings of the CERME 1*.

BOLEA, P., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (2001a): La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad. Re*cherches en Didactique des Mathématiques* 20(1) 7-40.

BOLEA, P., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (2001b): Cómo se construyen los problemas en Didáctica de las Matemáticas. *Educación Matemática* 13(3) 22-63.

BOSCH, M., COMPTA, A., GASCÓN, J., LAMARCA, J.M. y URBANEJA, P.M.G. (1996): *Matemáticas. 3º ESO,* Ed. Almadraba, Madrid.

BOSCH, M., FONSECA, C. y GASCÓN, J. (en prensa): Incompletitud de las Organizaciones Matemáticas Locales en las Instituciones Escolares, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (pendiente de publicación).

BROUSSEAU, G. (1987): Représentation et didactique du sens de la division, in G. Vergnaud, G. Brousseau et M Hulin (ed.), *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, Actes du colloque du Sèvres*, pp. 47-64, La pensée sauvage, Grenoble.

COLL, C. (1986): *Marc Curricular per a l'Ensenyament Obligatori*, Generalitat de Catalunya, Departament d'Ensenyament, Barcelona.

CHEVALLARD, Y. (1985): *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, Grenoble (2e éd. de 1991).

CHEVALLARD, Y. (1999): L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/2, 221-266.

CHEVALLARD, Y. (2000): La recherche en Didactique et la formation des professeurs: problematiques, concepts, problemes, *Actes de la Xème École d'Été de Didactique des Mathématiques*, Tome I, pp. 98-112, ARDM, Caen. (Houlgate, 18-25 août 1999).

CHEVALLARD, Y. (2001): Aspectos problemáticos de la formación docente, *XVI Jornadas del SI-IDM*, Huesca. Recuperable en http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997): *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, ICE/Horsori, Barcelona.

DE LA HAZA, C., MARQUÉS, M. y NORTES, A. (2002): *Matemàtiques (1r d'ESO)*, Grup Promotor Santillana, Madrid.

FONSECA, C. y GASCÓN, J. (2000): Reconstrucción de las organizaciones matemáticas en las organizaciones didácticas, *XIV Jornadas del SIIDM*, Cangas do Morrazo, abril del 2000. Recuperable en http://www.ugr.es/local/jgodino.htm

GASCÓN, J. (1989): *El aprendizaje de métodos de resolución de problemas de matemáticas*, Tesis doctoral, Departamento de Matemáticas, Universitat Autònoma de Barcelona.

GASCÓN, J. (1993): Una comunitat matemàtica escindida, *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 8, 111-117.

GASCÓN, J. (1997): Cambios en el contrato didáctico. El paso de estudiar matemática en secundaria a estudiar matemática en la universidad, *SUMA*, 26, 11-21.

GASCÓN, J. (1999): La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar, *Educación matemática*, 11/1, 77-88.

GASCÓN, J. (2001a): Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 4/2, 129-159.

GASCÓN, J. (2001b): Reconstrucción de la divisibilidad en la Enseñanza Secundaria. *Quadrante*, 10/2, 33-66.

GASCÓN, J. (2002a): Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados?, *Suma*, 39; 13-25.

GASCÓN, J. (2002b): El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la Didáctica de las Matemáticas, *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 5/3, 673-698.

GASCÓN J. (2003): Efectos del "autismo temático" sobre el estudio de la Geometría en Secundaria. En Palacián, E. (ed.) *Aspectos didácticos de matemáticas*, Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Zaragoza (en prensa), Zaragoza.

INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS (1995): *Diccionari de la llengua catalana*, Edicions, 62, Barcelona, Palma, Valencia.

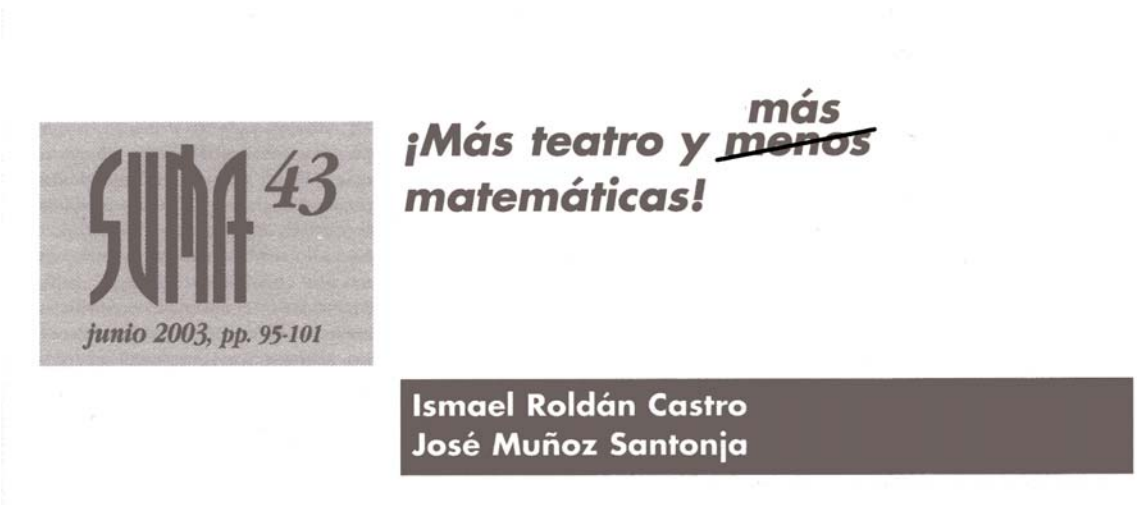
MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE, (2001a): *Enseñanza Secundaria Obligatoria. Enseñanzas mínimas*, Edita: Secretaría General Técnica, Subdirección General de Información y Publicaciones, Madrid. (Real Decreto 3473/2000 de 29 de diciembre).

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE, (2001b): *Bachillerato. Enseñanzas mínimas*, Edita: Secretaría General Técnica, Subdirección General de Información y Publicaciones, Madrid. (Real Decreto 3474/2000 de 29 de diciembre).

POSTMAN, N. (1999): *El fin de la educación,* EUMO-Octaedro, Barcelona.

Fe de erratas

En el número 43, el título del ártículo que firmaban Ismael Roldán Castro y José Muñoz Santonja apareció mal. Debería haber aparecido con la palabra **menos** tachada y encima la palabra **más**, tal como reproducimos ahora.



SUMA 44
Noviembre 2003, pp. 35-37

Gulliver y el cubismo

Se describe en este artículo una de las muchas ironías de la historia:un curioso encuentro -no muy raro- entre las matemáticas, la literatura y el arte.
El pensamiento utópico ha usado en muchas ocasiones de la matemática. En este caso ofrecemos la visión de uno de sus críticos, que lamentablemente no pudo ver que sus brillantes caricaturas dejaban de serlo: expresa la belleza mediante geometría elemental.

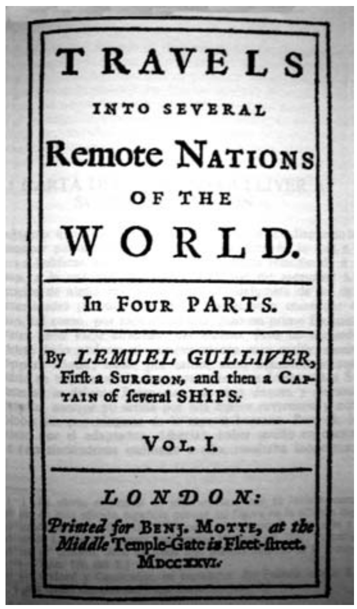
This paper describes one of the so many ironies in history: a funny meeting - not such an unusual one - among mathematics, literature and art.
Mathematics has often been made use of by Utopian Thought. We suggest here the point of view of one of its critics, who unfortunately didn't live up to see the general recognition that his witty caricatures were far more than that: beauty through elementary geometry.

Jonathan Swift –el sarcástico clérigo protestante en la católica Irlanda- ha pasado a ser conocido como imaginativo escritor de relatos para niños. *“Los viajes de Gulliver”* se clasifican por su carácter fantástico en el género de aventuras y se destinan a un público juvenil. Nada más alejado del impacto y dureza de la crítica social que Swift desarrolló en su época: pocos documentos más duros se pueden encontrar en la historia de la literatura que los salidos de su pluma.

Nadie puede permanecer impasible ante *“Una modesta proposición”*, el más ácido alegato de “solución final” para acabar con el problema irlandés. Toda la lógica aristotélico-euclídea, todo el razonamiento lógico-geométrico puesto al servicio de la eliminación más brutal realizable con total amoralidad y frialdad. Si no hubiéramos conocido los testimonios reales de los campos de exterminio no podríamos resistir tanto horror como esas “propuestas humildes”.

Pero Swift (Dublín 1667-Dublín 1745) como crítico de costumbres no podía sentirse ajeno a la gran revolución cultural de su época: la revolución científica. Como Galileo expresa con claridad, la matemática se ha convertido en la base de la filosofía natural: la geometría es la lengua del libro del universo, sin ella “deambulamos en un oscuro laberinto”.

Esta clarividencia galileana, de procedencia platónico-pitagórica, va a ser protagonista de esta historia. En efecto, Galileo en la conocida cita de *“Il Saggiatore”* expone cómo está escrito el libro de la naturaleza:


TRAVELS
INTO SEVERAL
Remote NATIONS
OF THE
WORLD.
In FOUR PARTS.
By LEMUEL GULLIVER,
First a SURGEON, and then a CAPTAIN of several SHIPS.
VOL. I.
LONDON:
Printed for BENJ. MOTTE, at the Middle Temple-Gate in Fleet-street.
MDCCXXVI.

Angel Requena Fraile
I.E.S. Atenea. San Sebastián de los Reyes (Madrid)

"La filosofía está escrita en ese grandioso libro que está continuamente abierto ante nuestros ojos (lo llamo universo) pero no se puede descifrar si antes no se comprende el lenguaje y se conocen los caracteres en que está escrito. Está escrito en lenguaje matemático, siendo sus caracteres triángulos, círculos y figuras geométricas. Sin estos medios es humanamente imposible comprender una palabra; sin ellos deambulamos vanamente por un oscuro laberinto".

Esta descripción reforzada por la obra de sus dos grandes contemporáneos Kepler y Descartes preparan el camino a Isaac Newton.

Asistimos a casi dos siglos –fines del XVI a fines del XVIII- de hegemonía de la matemática y la física matemática como modelo que impregnara toda creación intelectual. El espíritu de la matemática será dominante: se impone el "more geométrico".

El método de la matemática se extiende más allá de sus lindes. *"La Ética"* de Spinoza está demostrada al modo geométrico. El éxito de los *"Philósophiae naturalis principia mathematica"* newtoniano abre el camino a otros "principios" sobre materias diversas –incluso las religiosas- como los *"Theologiae christianae principia mathematica"* de John Craig. Hasta la cronología bíblica se incluye en los tratados matemáticos. La búsqueda de la "Characterística Universalis" de Leibniz expresa también un anhelo de verdad absoluta que no puede ser alcanzada sin matemáticas. Es la edad de oro de la "mathesis universalis" .

El éxito de los "Philósophiae naturalis principia mathematica" *newtoniano abre el camino a otros "principios" sobre materias diversas –incluso las religiosas- como los* "Theologiae christianae principia mathematica" *de John Craig.*

Los excesos matemáticos no podían pasar desapercibidos a un analista tan fino de la realidad social e intelectual como Swift. La embriaguez matemática tenía su nueva iglesia en la Royal Society fundada en 1660 y, tras el éxito de los Principia, vivía momentos de decadentes triunfos. Fruto de ese ambiente intelectual podemos emparentar lejanamente a Swift con las críticas del obispo Berkeley a un "matemático incrédulo" que recoge *"El Analista"*.

Un viaje a Laputa

En su tercer viaje, Gulliver llega a la isla volante de Laputa y allí se encuentra con una institución científico-matemática omnipresente: La Gran Academia (¡la Royal Society!). Swift toma elementos de las utopías renacentistas como la "Nueva Atlántida" de F. Bacon y hace visitar a Gulliver un gran centro de enloquecidas investigaciones.

Todo el tercer viaje es una hilarante e ingeniosa ironía sobre los excesos de confianza en la nueva ciencia matemático-experimental: la investigación del aprendizaje de fórmulas mediante obleas con escritura de tinta cefálica, que han de ser digeridas, es una muestra de la nueva didáctica. Ahora bien, Swift no ignora la ciencia de su época, su demoledora crítica –como la de Berkeley- va dirigida contra su sacralización.

Lo que en Galileo era la descripción del universo se ha convertido en Swift, fruto de la degeneración y exageración, en fuente de descripción de los seres humanos:

"Mis conocimientos matemáticos me servían de gran ayuda para aprender los términos y frases que usaban, tomados en gran parte de aquellas ciencias y de la música, en la que yo no era profano. Sus ideas aluden constantemente a líneas y figuras geométricas. **Si han de alabar la belleza de una mujer o un animal, la describen en términos de rombos, círculos, paralelogramos, elipses, etc.** O, si no, acudiendo a vocablos de arte musical, que no es menester repetir aquí"

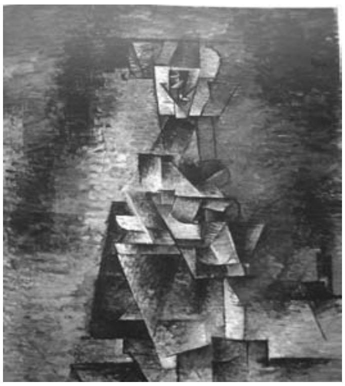
Pero la historia ironiza. La fantasía crítica del clérigo irlandés se hace realidad en el siglo XX. El arte rompe las cadenas del realismo estricto y gana su libertad. El artista deshace la luz y la forma. La búsqueda de la esencia lleva al arte a hacer posible la geometrización de la figura humana en sus formas más simples: ha nacido el cubismo.

¡ Basta de cubos !

Fue Matisse, en 1908 delante de una pintura de Brake, quien exclamó harto: *¡Más cubos, basta de cubismo!* El nuevo arte había sido bautizado por uno de sus detractores.

Triángulos, cuadrados, cubos… son los elementos para una reducción geométrica de las figuras. Ya no son sólo la lengua de Dios para el universo infinito galileano, también puede describir la belleza del ser humano. La contemplación de los desnudos femeninos de Picasso habrían obligado a Swift a llevar su sátira por otros derroteros.

Joven desnuda. Picasso, 1909.



Mujer desnuda. Picasso, 1910.

Tiro con arco. Erni, 1984.

Lo que realiza Pablo Ruiz es, en palabras de Apolinaire, "el asesinato" de la anatomía "con la ciencia y la técnica de un gran cirujano".

En efecto, Picasso se encierra para pintar (investigar) en Cadaqués, y de sus pinceles salen la ruptura de los planos de proyección y visiones inéditas de individuos, muchas veces sin apenas color o tonos fríos. Con estas pinturas, Gulliver podría haber comprendido mejor lo que los lunáticos que encontró en sus aventuras de Laputa querían decirle.

Corredor. Erni, 1967.

Pero no sólo el cubismo utilizará la geometrización del cuerpo y de las sensaciones, el artista suizo Hans Erni buscará también en las cónicas y en las cuádricas la estela de los atletas en su serie olímpica. Ya no será la propia figura sino su substrato y su movimiento la que necesita expresarse mediante superficies regladas, y sus modelos serán los que los griegos usaban como canon de belleza.

El interés de Erni por los avances de la ciencia le sitúa mucho más cerca de los excéntricos laputienses que del cuerdo Swift. Pero ambas visiones son necesarias: la síntesis de la Casa de la Sabiduría y del control público a través de inteligentes críticos permite a la ciencia dar sus mejores frutos. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ERNI, H. *Catalogo*. Comité olímpico internacional. Barcelona. 1992.

GALILEI, G. *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*. Editora Nacional. Madrid. 1976.

PICASSO, Pablo Ruiz. *Catalogo de la exposición antológica*. Ministerio de Cultura. Vitoria.1981.

SWIFT, J. *Obras selectas*. Ed. Swan. Madrid.1988.

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Comisión Ejecutiva

Presidente: **Florencio Villarroya Bullido**
Secretario General: **Josep Sales Rufí**
Vicepresidente: **Serapio García Cuesta**
Tesorera: **Claudia Lázaro**

Secretariados:
Prensa: **Ismael Roldán**
Revista SUMA: **Francisco Martín Casalderrey/Inmaculada Fuentes Gil**
Relaciones internacionales: **Carmen Azcárate/Sixto Romero**
Actividades: **Xavier Vilella Miró**
Publicaciones: **Ricardo Luengo González**

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidente: Joan Gómez y Urgellés
Apartado de Correos 1306. 43200 Reus (Tarragona)

Organización Española para la Coeducación Matemática "Ada Byron"
Presidenta: Mª Carmen Rodríguez
Almagro, 28. 28010 Madrid

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"
Presidente: Salvador Guerrero Hidalgo
Apartado 1160. 41080 Sevilla

Sociedad Aragonesa de Profesoresde Matemáticas "Pedro Sánchez Ciruelo"
Presidente: Florencio Villarroya Bullido
ICE Uni. de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009 Zaragoza

Sociedad Asturiana de Educación Matemática "Agustín de Pedrayes"
Presidente: José Joaquín Arrieta Gallastegui Apartado de Correos 830. 33400 Avilés (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "Isaac Newton"
Presidenta: Dolores de la Coba
Apartado de Correos 329. 38208 La Laguna (Tenerife)

Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas
Presidente: Constantino de la Fuente
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Víllalar, s/n. 09006 Burgos

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García Cuesta
Avda. España, 14, 54 planta. 02006 Albacete

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidente: Bienvenido Espinar Cepas
IES Francisco de Goya. C./ Caravaca, s/n. 30500 Molina de Segura (Murcia)

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Manuel Rodríguez Mayo
Apartado de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper"
Presidente: Ricardo Luengo González
Apartado 590. 06080 Badajoz

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas "Emma Castelnuovo"
Presidenta: Carmen da Veiga
C/ Limonero, 28, 28020 Madrid

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: Jesús Serna
CPR de Santander. C./ Peña Herbosa, 29. 39003 Santander

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidente: Luis Serrano Romero
Facultad de Educación y Humanidades Ctra. Alfonso XIII, s/n. 52005 Melilla

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas Tornamira" Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea Tornamira
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra.
31006 Pamplona

Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Despacho 305. Facultad de Educación. Universidad Complutense. 28040 Madrid

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas
Presidente: Javier Galarreta Espinosa
C.P.R. Avda. de la Paz, 9. 26004 Logroño

Sociedade Galega do Profesorado de EducaciónMatemática (AGAPEMA)
Presidente: Manuel Díaz Regueiro
Apartado 4188. 15080 A Coruña

Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi"
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departament de Didáctica de la Matemática. Apartado 22045. 46071 Valencia

SUMA 44
Noviembre 2003, pp. 39-44

Sonidos, fracciones, medias, potencias y funciones exponenciales

Tomando la música como punto de interés de los alumnos, el trabajo presenta una actividad de clase desarrollada con grupos de Educación Secundaria Obligatoria para Adultos, en el que se ponen de manifiesto determinados aspectos matemáticos de la producción de sonidos y de la escala (en realidad escalas) usadas en la música occidental. Con este pretexto, abarcando desde fracciones y sus expresiones decimales, hasta funciones exponenciales y sus representaciones gráficas, pasando por las potencias de exponente tanto natural como racional y sus propiedades, la manipulación algebraica y la investigación numérica, se analiza fundamentalmente la escala que Pitágoras elaboró, dentro del canon musical de la Grecia Clásica.

This essay is about a class activity carried out with groups of adults studying secondary education, taking music as the topic of interest for the students. Certain mathematical aspects of the production of sounds and of the scale (in fact, scales) used in western music are highlighted. With this pretext, and in the context of the musical canon of classical Greece, the scale that Pitagoras devised is analysed, covering from fractions and their decimal expressions, to exponential functions and their graphic representation, and going through the powers of both natural and rational exponent and their properties, algebraic manipulation and numeric research.

Desde que comencé a dar clases de Matemáticas en un Instituto, hace ya 13 años, lo más duro de mi docencia ha sido convencerme de que no todos los alumnos están enamorados de las Matemáticas. Es más, la mayoría de ellos, ni siquiera las consideran atractivas. ¿Cómo es posible? Es un peligro que corremos los Licenciados en Matemáticas que accedemos al mundo de la Enseñanza Secundaria. Después de una carrera fuertemente vocacional, acabé apreciando de tal forma la belleza de cada argumento de una demostración, necesitando justificar todo lo que afirmaba, se instaló en mi forma de ser el esquema deductivo definición-demostración-corolario hasta tal punto que llegé a creer que la Enseñanza de las Matemáticas se ajusta a este modelo. Más aún, que incluso la vida misma se ajusta a ese modelo. Pero no. Rotundamente no. Este problema inicial no hizo sino añadir dificultad a la ya de por sí difícil Didáctica de las Matemáticas. Si sumamos el hecho de que debido a mi formación en Matemática Pura (al menos entonces se llamaba así), siempre viví despreocupado de cualquier aplicación de las Matemáticas que se instalara en un edificio distinto del propio de éstas, se comprenderá mejor el escalofrío, mezcla de impotencia e incomprensión, que aún hoy en día me recorre cuando los alumnos de una clase se amotinan con el grito de guerra: ¡¡Y ésto para que sirve!!. Inocentemente, la primera vez que esto se produjo, pensé que los alumnos, en su desmedido afán por adquirir conocimiento y culturilla, pretendían ir más allá del estricto conocimiento matemático objeto de la lección a estudiar, para fundirlo con sus sólidos conocimientos científico-tecnológicos. Pero cuando constaté que el amotinamiento era periódico, con un periodo cuya longitud es la duración de cada tema, comprendí que en realidad, el grito de guerra era: ¡¡Para qué demonios queremos aprender fracciones, polinomios, trigonometría... si la mayoría de nosotros no vamos a estudiar ciencias y para comprar la botellona sólo hace falta a lo sumo, sumar y/o restar!! De nada me sirvió argumentar mi respuesta con una ingente cantidad de ejemplos de aplicación de las Matemáticas a la Física escolar, pues para ellos son dos bloques completamente diferentes. Mucho menos me sirvió intentar justificarles la necesidad de Ruffini para cuando el

> *Desde que comencé a dar clases de Matemáticas, lo más duro de mi docencia ha sido convencerme de que no todos los alumnos están enamorados de las Matemáticas. Es más, la mayoría de ellos, ni siquiera las consideran atractivas.*

Jesús Beato Sirvent
IES Bahía de Cádiz
Facultad de Ciencias, Universidad de Cádiz

futuro calculemos derivadas de funciones racionales aplicando la definición, pues para ellos no existe el futuro; el curso que viene está siempre muy lejos. Cuentan que Pitágoras, cuando alguno de los acusmáticos (iniciados en las Matemáticas, que tenían acceso a los resultados pero aún no a las demostraciones) le interrumpía con alguna pregunta sobre la utilidad práctica de las Matemáticas, le devolvía el doble de lo invertido al entrar a formar parte de la fraternidad pitagórica y lo invitaba a abandonar su Academia (también he leído esta anécdota como atribuida a los discípulos de Arquímedes).

Todo lo anterior no es sino una excusa para concluir que desde hace ya bastantes años, uno de mis puntos de interés en Didáctica de las Matemáticas es la creación de actividades dedicadas a descubrir variados usos de las Matemáticas en temas de interés para los alumnos. En este trabajo presento una actividad desarrollada durante el curso escolar 2001-2002 con alumnos de Educación Secundaria Obligatoria para Adultos en 4 sesiones de duración. La idea surgió de la lectura del capítulo dedicado a Pitágoras en el “Teorema del loro” (esta novela la tengo como libro de lectura obligatoria. Cada mes leemos algunos capítulos y los examino de su lectura). En este capítulo, muy de refilón, se aludía a que era Pitágoras el creador de una teoría matemática de la música. Aprovechando el momento, y ya que parecía ser un fuerte foco de interés para ellos, hicimos un visionado del fragmento del video “Donald en el país de las Matemáticas” (me gustaba más su título orginal: “Donald in Mathmagic’s Land”) en el que analiza la relación de Pitágoras con la música –por cierto, este fragmento contiene un error, al expresar la fracción correspondiente al intervalo de séptima-. Como los alumnos reclamaban más información, elaboré estas notas que les fueron entregadas para ser trabajadas en clase. Durante las cuatro sesiones estuve acompañado de un teclado electrónico en el que materializar los sonidos. Es sin duda el instrumento más apropiado para tal fin, por su disposición longitudinal y su didáctica disposición de los sonidos naturales y alterados. En la última sesión, los alumnos que lo desearon trajeron sus instrumentos y tras una breve descripción de los mismos, cada uno tocó alguna pieza. El contenido matemático del trabajo creo que es rico, abarcando desde fracciones y sus expresiones decimales, hasta funciones exponenciales y sus representaciones gráficas, pasando por las potencias de exponente tanto natural como racional y sus propiedades, la manipulación algebraica y la investigación numérica.

¿Cuántos sonidos distintos existen?

Esta es nuestra escala actual:

Do_1	Do_1# =Reb	Re_1	Re_1# =Mib	Mi_1	Fa_1	Fa_1# =Solb	Sol_1	Sol_1# =Lab	La_1	La_1# =Sib	Si_1	Do_2

Consta de 12 sonidos, desde Do hasta Si, que se repiten indefinidamente de forma periódica. La distancia entre cada sonido y el siguiente de esta tabla se llama semitono. Los sonidos Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si se llaman naturales y los intermedios, Do#=Reb, Re#=Mib, Fa#=Solb, Sol#=Lab, La#=Sib se denominan alterados. Hay dos tipos de alteraciones: las que añaden un semitono a una nota natural, que se denominan sostenidos y se representan por # y las que restan un semitono a la nota natural correspondiente, que se llaman bemoles y se representan por b. Dos semitonos consecutivos forman pues un tono. La distancia entre dos sonidos naturales se llama intervalo. Los intervalos se nombran contando el número de sonidos naturales que quedan dentro de ellos, incluidos los dos de los extremos.

Ejemplos:
[Do1, Mi1] Es un intervalo de tercera, o simplemente una tercera, ya que incluye tres sonidos naturales: Do, Re, Mi.
[Mi1, Sol1] Es un intervalo de tercera, o simplemente una tercera, ya que incluye tres sonidos naturales: Mi, Fa, Sol.
[Re1, La1] Es un intervalo de quinta, o simplemente una quinta, ya que incluye cinco sonidos naturales: Re, Mi, Fa, Sol, La, Si, Do.
[Do1, Do2] Es un intervalo de octava, o simplemente una octava. Es la unidad fundamental en la amplitud de intervalos. En todo este trabajo trataremos siempre con una amplitud máxima de dos octavas, esto es, para fijar ideas, con el intervalo [Do1, Do3].

No todos los intervalos, aún teniendo la misma amplitud, abarcan la misma cantidad de tonos.

Ejemplos:
[Do, Mi] Es una tercera que abarca 2 tonos.
[Mi, Sol] Es una tercera que abarca 1 + 1/2 tonos.
[Re, La] Es una quinta que abarca 3 + 1/2 tonos.

Ejercicio 1:
Indica la amplitud de cada uno de los siguientes intervalos y calcula cuántos tonos y/o semitonos abarca cada uno.

a) [Do, Sol]
b) [Do, La]
c) [Re, Si]
d) [Re, Do]
e) [Do, Re]
f) [Mi, Do]
g) [Do, Mi]
h) [Mi, Si]
i) [Fa, Do]

Ejercicio 2:
Escribe:

a) 3 intervalos de cuarta.
b) 3 intervalos de quinta.

c) 3 intervalos de sexta.
d) 3 intervalos de séptima.

Ejercicio 3:
Indica todos los intervalos de cuarta, dentro de las dos octavas en las que nos movemos, que abarquen 2 + 1/2 tonos y un intervalo de cuarta que no abarque 2 + 1/2.

Ejercicio 4:
Indica todos los intervalos de quinta, dentro de las dos octavas en las que nos movemos, que abarquen 3 + 1/2 tonos y un intervalo de quinta que no abarque 3 + 1/2.

Ejercicio 5:
¿Cuántos tonos y/o semitonos abarca un intervalo de octava?

Para los griegos, sólo existían cuatro sonidos armónicos: los sonidos naturales, las cuartas, las quintas y las octavas.

¿Qué relaciones existen entre los sonidos y los números?

Cómo veremos más adelante, fue Pitágoras el primero que interrogó a la naturaleza para tratar de conocer las relaciones numéricas que existían entre los sonidos. Para los griegos, sólo existían cuatro sonidos armónicos (es decir, sonidos cuya manifestación simultánea origina una sensación agradable a nuestro oído: los sonidos naturales, las cuartas, las quintas y las octavas). Al establecer la relación entre ciertas proporciones numéricas y los sonidos armónicos, Pitágoras inauguró una teoría matemática de la música. Las bases de esta teoría eran dos:

1. El sonido producido por la pulsación de una cuerda tensa depende de la longitud de la cuerda.
2. Los cuatro sonidos armónicos se originan por la pulsación de cuerdas igualmente tensas cuyas longitudes se disponen según ciertas proporciones matemáticas.

Estas proporciones a las que Pitágoras hace referencia en su segunda ley matemática de la música se expresan así:

Si un sonido se produce al pulsar una cuerda tensa de longitud l, entonces:

- La cuarta se produce al pulsar una cuerda tensa de longitud

$$\frac{12}{9}\mathrm{l} = \frac{4}{3}l$$

- La quinta se produce al pulsar una cuerda tensa de longitud

$$\frac{12}{8}\mathrm{l} = \frac{3}{2}l$$

-La octava se produce al pulsar una cuerda tensa de longitud

$$\frac{12}{6}\mathrm{l} = 2l$$

Nota: A partir de ahora, consideraremos que la longitud de la cuerda es la unidad y por tanto, las fracciones correspondientes a los sonidos armónicos son las recogidas en la siguiente tabla:

Sonido	Cuarta	Quinta	Octava
1	4/3	3/2	2

De esta forma, para obtener la proporción correspondiente a un intervalo, basta dividir las proporciones correspondientes a los sonidos que figuran en sus extremos.

¿Cuáles son las proporciones que producen el resto de los 12 sonidos?

La teoría matemática de la música iniciada por Pitágoras y continuada por los pitagóricos siguió avanzando en su estudio, fundamentalmente desarrollada por dos discípulos de Pitágoras que llegaron a fundar escuelas propias: Arquitas de Tarento y Aristógenes de Tarso. Pero hubo que esperar un poco más hasta que Platón consiguió calcular las proporciones que producían los sonidos naturales. Para este cálculo, Platón llevó a cabo el siguiente procedimiento:

1. Dividió la octava en dos cuartas y un tono, así:

[Do, Fa]-[Fa, Sol]-[Sol, Do]

Cada una de estas cuartas está formada por 2 + 1/2 tonos, luego son de la misma amplitud.

2. Dividió cada una de estas cuartas en tres subintervalos. Los dos primeros debían corresponder con un tono y el tercero con un semitono, luego debía ser menor (aunque no necesariamente la mitad).

3. Asignó a cada uno de los subintervalos correspondientes a un tono, la proporción 9/8.

4. De este modo, al subintervalo correspondiente al semitono en cada cuarta le correspondería la proporción:

$$\frac{4}{3}\bigg/\left(\frac{9}{8}\right)^2 = \frac{256}{243}$$

Ejercicio 6:
Justifica el punto (4) del procedimiento anterior seguido por Platón para calcular las proporciones de los sonidos naturales.

De este modo pudo completar la escala de proporciones correspondientes a los sonidos naturales, a saber:

Sonidos	Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
Proporciones	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2
Factor	9/8	9/8	256/243	9/8	9/8	9/8	256/243	

Nota: Observa que para obtener cada proporción basta multiplicar la proporción del sonido anterior por el factor indicado también en la columna anterior.

Esta escala pitagórica-platoniana de afinación se conoció como la “Escala del Timeo” pues apareció publicada por primera vez en el manual filosófico titulado “Timeo”, escrito por Platón. Los semitonos son muy pequeños con respecto a los tonos. Es muy apta para la música melódica pero no para la polifónica. Fue la típica división de la escala durante toda la Época Clásica y la Edad Media, hasta la llegada del Renacimiento.

Ejemplo: Con la escala del Timeo, se pueden calcular ya las proporciones correspondientes a cada intervalo. Para ello, basta dividir las proporciones correspondientes a ambos extremos del intervalo:

[Do, Fa] es una cuarta que abarca 2 + 1/2 tonos cuya proporción es:

$$\frac{4}{3}:1=\frac{4}{3}$$

[Sol, Do] es una cuarta que abarca 2 + 1/2 tonos cuya proporción es:

$$2:\frac{3}{2}=\frac{4}{3}$$

[Re, Fa] es una tercera que abarca 1 + 1/2 tonos cuya proporción es:

$$\frac{4}{3}:\frac{9}{8}=¿$$

La escala pitagórica-platoniana de afinación se conoció como la “Escala del Timeo” pues apareció publicada por primera vez en el manual filosófico titulado “Timeo”, escrito por Platón.

Ejercicio 7:
Completa la siguiente tabla en la que se te pide la denominación del intervalo, la cantidad de tonos y/o semitonos que abarca y la proporción que le corresponde:

Intervalo	Denominación	Tonos que abarca	Proporción
[Re, Mi]			
[Mi, Sol]			
[Fa, Si]			
[Do, Sol]			
[Fa, Do]			
[Mi, La]			
[Do, Si]			

Ejercicio 8:
En el ejercicio 2, escribiste todos los intervalos de cuarta que abarcaban tonos. Comprueba si a todos ellos les corresponde la misma proporción. Repite la misma cuestión con todos los intervalos de quinta que abarcaban tonos y que escribiste en el ejercicio 3.

Fué Pitágoras quién estableció la “Proporción musical”.

Ejercicio 9:
Completa la siguiente tabla, en la que calcularás la proporción que corresponde a cada sonido alterado. Para obtener cada proporción, solo tienes que multiplicar la proporción que le corresponde al sonido de la columna anterior por el factor correspondiente también a al columna anterior. Hay una excepción: la proporción correspondiente a Fa# se calcula dividiendo entre 256/243 la correspondiente a Sol. En todo caso, simplifica las fracciones.

Do	Do# =Reb	Re	Re# =Mib	Mi	Fa	Fa# =Solb	Sol	Sol# =Lab	La	La# =Sib	Si	Do
1		$\frac{9}{8}$		$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{27}{16}$		$\frac{243}{128}$	2
$\frac{256}{243}$		$\frac{256}{243}$					$\frac{256}{243}$		$\frac{256}{243}$			

Esta escala se conoce como “Sistema de afinación pitagórico”. El factor era denominado “limma” (resto) por los pitagóricos.

Ejercicio 10:
Cada una de las proporciones del sistema de afinación pitagórico es un cociente entre potencias de 2 y potencias de 3.
Escribe cada una de las proporciones del sistema de afinación pitagórico, como cociente de potencia de 3 y una potencia de 2.

¿Cómo obtuvo Pitágoras las relaciones numéricas entre los sonidos armónicos?

> "Se cuenta que Pitágoras pasó por azar delante de un taller donde unos herreros golpeaban el yunque. Se detuvo a escuchar el sonido cadencioso de los martillos, observando que el tono melodioso de tres de ellos era alterado por la disonancia de un cuarto. Sorprendido por el fenómeno, pidió prestados los martillos para realizar una experiencia científica, la primera de las que la historia haya dado cuenta. Pesó cuidadosamente los martillos y los colgó de cuatro cuerdas de modo que al quedar tirantes tuviesen la misma longitud. Haciendo vibrar las cuerdas, apreció que los sonidos se correspondían con los de los martillos al golpear en el yunque. Añadiendo un trozo de arcilla al martillo que producía la disonancia, puso el sonido emitido por la cuerda correspondiente en armonía con los otros. Como conocía los pesos de los martillos (que eran proporcionales a 12, 9, 8 y 6) dedujo la ley aritmética que rige los intervalos musicales: el martillo cuyo peso era 12 producía el tono, el de peso 9 la cuarta, el de peso 8 la quinta y el de peso 6 la octava, estableciendo la proporción: 12/9 = 8/6 , que fue llamada "proporción musical" pues contiene las relaciones entre los sonidos armónicos. Como buen científico experimental, Pitágoras repitió la experiencia empleando en vez de cuerdas de igual longitud y pesos distintos, pesos iguales para tensar cuerdas de distinta longitud, y observó que las que daban el tono, la cuarta, la quinta y la octava, tenían longitudes proporcionales a 12, 9, 8 y 6". (González, 2001)

Ejercicio 11:
Observa que las proporciones correspondientes a la cuarta, la quinta y la octava que figuran en la tabla de la página 41 se pueden escribir con los números 12, 9, 8, 6. Escríbelas:

a) 4/3 = ?
b) 3/2 = ?
c) 2 = ?

Aunque Pitágoras usó como proporciones para los sonidos armónicos (cuarta, quinta y octava) las expresadas con los números 12, 9, 8, 6, según hemos visto en el ejercicio 11, éstas se puede expresar como las más simples formadas con los números: 1, 2, 3, 4. En el ideario filosófico de Pitágoras, recogido en una especie de "mandamientos" llamados "Versos de Oro", los cuatro primeros números formaban la base de la creación de la naturaleza. A este conjunto de cuatro números, Pitágoras los llamba la "tetractys". El hecho de que la música también estuviese regida por la tetractys no hacía sino confirmar el pensamiento de Pitágoras: "los números gobiernan la música".

¿Existen más relaciones numéricas entre los distintos sonidos?

En general, una forma de relación numérica la constituyen las medias. Se trata de distintas formas de intercalar un número entre dos dados. De todos los tipos de medias existentes, nos detendremos ahora en dos: la media aritmética y la media armónica.

La media aritmética de dos números a y b es el número que se obtiene como resultado de las siguientes operaciones:

$$\frac{a+b}{2}$$

La media armónica de dos números a y b no nulos es el número que se obtiene como resultado de realizar las siguientes operaciones:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

Ejemplo:
Media aritmética de 2 y 4.

$$\frac{2+4}{2}=\frac{6}{2}=3$$

Media armónica de 2 y 4.

$$\frac{2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=\frac{2}{\frac{3}{4}}=\frac{8}{3}$$

La media aritmética divide a un intervalo en dos partes iguales. La media armónica divide a un intervalo en dos subintervalos de longitudes diferentes, de forma que siempre el de longitud menor es el que contiene al extremo menor.

Ejercicio 12:
Demuestra que la media armónica de dos números no nulos a y b también se puede calcular con la expresión:

$$\frac{2ab}{a+b}$$

Ejercicio 13:
Los números 12, 9, 8, 6 con los que Pitágoras descubrió las proporciones de los sonidos armónicos, cumplen varias relaciones numéricas. Descúbrelas.

Ejercicio 14:
Comprueba que la media aritmética divide a la octava en una quinta y una cuarta (de izquierda a derecha).

Ejercicio 15:
Comprueba que la media armónica divide a la octava en una cuarta y una quinta (de izquierda a derecha).

Nota: Los ejercicios 14 y 15 indican que la división natural de una octava en cuarta y quinta también atiende a ciertas relaciones numéricas entre las proporciones correspondientes.

¿Todos los instrumentos de cuerda afinan con las mismas proporciones?

No. La mayoría de los instrumentos de cuerda afinan con las proporciones pitagóricas que hemos hallado procedentes de la escala del Timeo. Hay dos excepciones notables: el piano y el arpa, que afinan en una escala irracional en el que todos los semitonos están igualmente distribuidos, a diferencia de la escala pitagórica en la que vimos que la limma era bastante más pequeña que la mitad de un tono. Esta escala se conoce como "afinación justa" y es la siguiente:

Do	Do# =Reb	Re	Re# =Mib	Mi	Fa	Fa# =Solb	Sol	Sol# =Lab	La	La# =Sib	Si	Do
1	$\sqrt[12]{2}$	$\sqrt[12]{2^2}$	$\sqrt[12]{2^3}$	$\sqrt[12]{2^4}$								2

Ejercicio 16:
Completa la tabla anterior, simplificando los radicales que en ella intervienen.
Ejercicio 17:
¿Por qué la raíz de índice 12 en la escala de afinación justa?

Ejercicio 18:
Reproduce la escala de afinación pitagórica, pero escribiendo en lugar de cada una de las proporciones, su expresión decimal, con dos cifras decimales obtenidas mediante redondeo.

Ejercicio 19:
Reproduce la escala de afinación justa, pero escribiendo en lugar de cada una de los factores, su expresión decimal, con dos cifras decimales obtenidas mediante redondeo.

Ejercicio 20:
Sobre papel milimetrado, representa en un diagrama de barras, los datos obtenidos en la tabla del ejercicio 18.

Ejercicio 21:
Sobre papel milimetrado, representa en un diagrama de barras, los datos obtenidos en la tabla del ejercicio 19. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GOLDÁRAZ, J.J. (1992): *Afinación y Temperamento en la Música Occidental*. Alianza Editorial, Madrid.

GONZÁLEZ, P.M. (2001): *Pitágoras. El filósofo del número*, Nívola, Madrid.

LIERN, V. (1988): "La música y sus materiales, una ayuda para la clase de Matemáticas", *SUMA* nº 14-15, 60-64.

SUMA 44
Noviembre 2003, pp. 45-52

Aspectos comparativos en la extensión del modelo de Van Hiele al concepto de aproximación local

En el contexto del modelo de Van Hiele, se ha llevado a cabo un estudio comparativo de dos colecciones de descriptores para el mismo concepto: El de aproximación local en su manifestación de la recta tangente a la gráfica de una curva en un punto. A partir de las visualizaciones que se obtienen de los mecanismos llamados "haz de secantes" y del "zoom", se concluye que, en efecto, el nivel de razonamiento es independiente de la forma de abordar el concepto, de ese mecanismo particular usado para acercarse al mismo.

In the context of van Hiele's model, a comparative survey of two descriptor collections has been carried out for the same concept: that of local approximation under the aspect of tangent straight line to a curve graph at a certain point. From the visualizations obtained from the so-called "secant beam" and "zoom" procedures, it can be concluded that, in fact, the level of reasoning is unrelated to the way of dealing with the concept, to that particular procedure used to approach it.

El modelo de *van Hiele* proporciona una descripción de los procesos de aprendizaje postulando la existencia de unos **niveles de pensamiento**, que no se identifican con destrezas de cálculos computacionales o habilidades de conocimientos académicos. En este trabajo los nombraremos como: Nivel 0 (*predescriptivo*), Nivel 1 (*de reconocimiento visual*), Nivel II (*de análisis*), Nivel III (*de clasificación y relación*) y Nivel IV (*de deducción formal*), aunque, como es sabido, de este último nivel es conocida la dificultad para su detección y su estudio sólo tiene un interés teórico (cfr. Van Hiele, 1986). Sin embargo, lo deseable es que los estudiantes alcancen el nivel III (como mínimo), en el que se puede considerar que, propiamente, se dan todos los elementos que garantizan la comprensión de un concepto.

La aplicación del modelo a un concepto matemático significa el establecimiento de una serie de descriptores para cada uno de los niveles, es decir, la descripción de unos comportamientos que permitan clasificar a cada estudiante en el nivel en que se encuentra. Tanto para obtenerlos como para comprobar que se ajustan a las exigencias del modelo, se suele utilizar como instrumento la entrevista (abierta o, como en nuestro caso, semi-estructurada y con carácter socrático, esto es, en la que se usan las propias respuestas para tratar de contribuir a que la entrevista sea en sí misma una experiencia de aprendizaje).

La extensión del modelo a un concepto propio del análisis matemático, fuera del ámbito de la geometría y de los primeros niveles educativos de la enseñanza, constituía un "problema abierto", que fue resuelto por Llorens (1996). En aquel trabajo se estudió la manifestación más geométrica y visual del concepto de aproximación local, esto es, el concepto de recta tangente a una curva en un punto, precisamente porque, dadas las

> *La extensión del modelo de Van Heile a un concepto propio del análisis matemático, fuera del ámbito de la geometría y de los primeros niveles educativos de la enseñanza, constituía un "problema abierto", que fue resuelto por Llorens (1996).*

Pedro Vicente Esteban Duarte
Universidad EAFIT, Medellín, Colombia.
José Luis Llorens Fuster
Universidad Politécnica de Valencia,Valencia, España.

características del modelo, no parecía oportuno -ni quizá viable- huir por completo del ámbito de lo geométrico y visual.

Por otra parte, en ese mismo trabajo se estableció la relación entre el modelo de Van Hiele y los postulados de Vinner relativos a las **dualidades conceptuales**: El posible conflicto entre el **concepto-imagen** -la estructura cognitiva que se asocia con el concepto, que incluye todas las imágenes mentales, propiedades y procesos asociados- y el **concepto-definición** -la fórmula con palabras usadas para especificar ese concepto- explica muy bien muchas de las dificultades en el proceso de aprendizaje de los conceptos básicos del Análisis Matemático, que se manifiestan en los primeros años de la enseñanza universitaria y en los últimos de la preuniversitaria. Ahora, en el contexto del modelo de Van Hiele, podemos asegurar (íb., p.15) que la existencia de conflictos entre la imagen y la definición de un concepto imposibilita el progreso hacia los niveles de razonamiento superiores (niveles III y IV).

El concepto de aproximación local es un "**concepto dinámico**", en el sentido de que requiere la noción de límite y, por tanto, es abstracto en sí mismo, no visualizable. Por lo mismo, su comprensión sólo puede darse a partir del nivel III de razonamiento. En particular, el concepto de recta tangente a una curva en un punto de su gráfica, tiene todas esas características.

Sin embargo, en la mayoría de las manifestaciones del concepto de aproximación local, es posible presentar "acercamientos" al mismo concepto que ayudan a comprender ese *dinamismo*. Eso es lo que llamamos *primera fase* del concepto. Si, además, esa "primera fase" tiene carácter visual y geométrico, con escasa o nula formalización y escasos conocimientos previos, tanto mejor porque de alguna manera estamos en condiciones óptimas para extender el modelo de Van Hiele. Así, en el trabajo mencionado, se usaba como aproximación visual a la definición de tangente la *magnificación* local de la gráfica. En el trabajo que presentamos se ha utilizado **otra aproximación visual**: La del límite del *haz de secantes*, que tiene la ventaja añadida de ser más parecida a la conocida "interpretación geométrica de la derivada" (que sólo puede hacerse cuando a su vez ya se ha definido la recta tangente), más cercana por tanto a lo que habitualmente se estudia en la introducción de ese concepto básico del Análisis.

El concepto de aproximación local es un "concepto dinámico", en el sentido de que requiere la noción de límite y, por tanto, es abstracto en sí mismo, no visualizable.

A este respecto conviene recordar que la definición de recta tangente a una circunferencia, que suele hacerse en los primeros años de la enseñanza primaria, es la *excepción estática* del concepto, en el sentido de que no requiere el paso al límite, pues en ese caso *la tangente es la recta que "toca" a la circunferencia en un punto*. Vinner (1982) ya había probado que esa imagen conceptual estática prevalecía, en muchos casos, aun cuando se hubiese estudiado el concepto de derivada y aun cuando el estudiante fuese capaz, en el contexto adecuado, de calcular la ecuación de la recta tangente a una función derivable en un punto de su dominio usando el concepto de derivada. Es decir que, a pesar de esas habilidades algebraicas, muchos estudiantes seguían pensando que la tangente es una recta que "toca" a la curva en un punto. A la luz de lo aportado por Llorens (1996 y 1997), ese comportamiento es casi inequívoco de no haber captado el dinamismo del concepto, afirmación equivalente a decir que su nivel de razonamiento en el concepto de aproximación local no pasa de los preliminares (I ó II) y, por tanto, no hay propiamente una comprensión del concepto ni una incorporación de esa *forma de razonamiento* que significa el concepto de límite.

En los trabajos mencionados se sugería la posibilidad de estudiar otra manifestación del concepto de aproximación local y, en consecuencia, establecer el oportuno estudio comparativo. La conjetura es que el nivel de razonamiento **en el concepto** debe ser el mismo, de modo que el contexto en el que se estudie debe ser más o menos indiferente. Ello es así por cuanto estamos hablando de una habilidad del pensamiento, de una forma de razonar, que parece independiente del aspecto concreto al que se aplique.

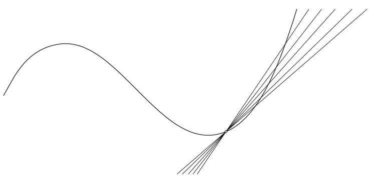
En el presente trabajo no sólo se aborda ese estudio comparativo sino que se da un paso más ya que el estudio se hace sin variar el concepto, cambiándose únicamente la forma de acercarse al mismo, es decir, modificamos el ambiente en el que se desarrolla lo que hemos llamado antes la **fase-1** del concepto. En esa fase se establece un mecanismo intuitivo que sirve al estudiante para elaborar sus propios razonamientos. Ciertamente, la segunda fase es la de la formalización algebraica de ese mecanismo, pero la primera es la auténtica fase *creativa* en el proceso de aprehensión de un concepto matemático. Señalemos, además, que esos mecanismos de aproximación al concepto siguen siendo "estáticos" en el sentido de que no pueden reproducir algo abstracto como el paso al límite. Sin embargo, gracias a la tecnología, la visualización contribuye a que podamos aproximarnos mucho al dinamismo intrínseco del concepto.

Tanto es así que cabía preguntarse por la influencia real de ese mecanismo por si, en lugar de facilitar la comprensión, la enmascaraba y la condicionaba. La obtención de resultados semejantes independientemente del mecanismo utilizado significa no sólo que los descriptores de los niveles son correctos sino que, en efecto, se corrobora una vez más la posibilidad de detectar dichos niveles, disponiendo ahora de dos formas diferentes.

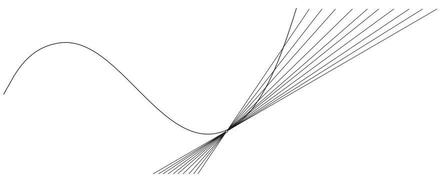
Así pues, en nuestro estudio comparamos la forma de razonamiento de los estudiantes a partir de lo que hemos denominado mecanismo del "haz de secantes" (que es, a su vez, una aportación del trabajo) respecto del mecanismo del "*zoom*" (ya utilizado por Llorens). Esta comparación se hace a partir de las entrevistas socráticas diseñadas con cada uno de los mecanismos y de los resultados estadísticos obtenidos en la aplicación de las pruebas escritas que se diseñaron teniendo como base los guiones de las entrevistas. Asimismo, se muestran resultados de la aplicación del mismo test que aparece en Vinner (1991), al concepto de recta tangente.

Visualizaciones para el concepto de tangente

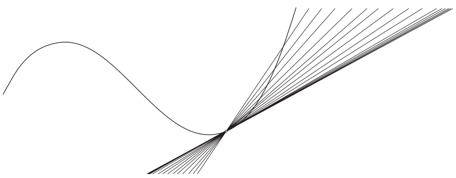
Lo que venimos llamando "*mecanismo del haz de secantes*" para la recta tangente a una curva en un punto de su gráfica, parte de la gráfica de una curva y de un punto fijo P sobre ella. Fijado otro punto de la curva, trazamos secantes que se apoyan en P y en puntos de la curva sucesivamente más próximos a P. Cuantas más secantes trazamos, más se aproximan entre sí y parecen converger en una recta, tal como se muestra en las siguientes ilustraciones:



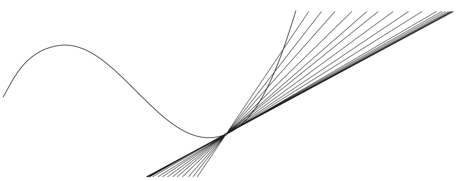
Gráfica 1



Gráfica 2

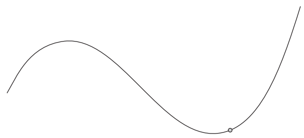


Gráfica 3

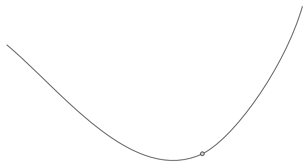


Gráfica 4

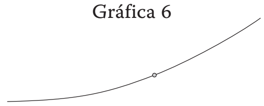
Cuando este proceso se **estabiliza** en una recta, la identificamos con la *recta tangente a la curva en el punto P*. Los conceptos previos requeridos para comprender este proceso son los de *curva*, *punto*, *recta*, *segmento* y "*puntos móviles que se deslizan sobre la curva para acercarse cada vez más al punto dado*", además de tener la capacidad de imaginar lo que significa la estabilización del proceso infinito del haz de secantes… Para la misma curva y el mismo punto, el mecanismo del "*zoom*" permite visualizar la recta tangente a una curva plana en un punto P como la recta a la que tiende la curva cuando se magnifica la gráfica de la curva en un entorno de P, tal como se muestra en las siguientes ilustraciones:



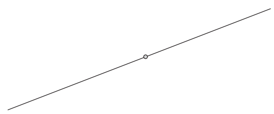
Gráfica 5



Gráfica 6



Gráfica 7



Gráfica 8

Los conceptos previos requeridos para comprender este proceso son los de *curva*, *punto*, *recta* y *segmento*, además de tener la capacidad de imaginar lo que significa magnificar indefinidamente una curva.

Principales características de los niveles de razonamiento

Para el concepto de aproximación local, en su manifestación de tangente a una curva plana a partir del mecanismo del "haz de secantes", las principales características de los Niveles de razonamiento estudiados son las siguientes: En el **Nivel 0**, el estudiante reconoce los elementos básicos del estudio (punto, recta y curva) con sus propiedades matemáticas elementales. En el **Nivel I**, relaciona esos elementos básicos: punto con recta, recta con curva y punto con curva. Además, se familiariza con el uso del mecanismo del haz de secantes. El ascenso del Nivel I al Nivel II se produce cuando entiende que el mecanismo puede estabilizarse. En el **Nivel II**, relaciona la estabilización del mecanismo con la tangente, entendiéndola como el final de un proceso *finito*. El ascenso del Nivel II al Nivel III se produce cuando entiende que la tangente es el final de un proceso *infinito*. Además, en el **Nivel III**, integra el concepto imagen con el concepto definición y es capaz de formular la definición de tangente a partir del mecanismo del "haz de secantes".

Usando el mecanismo del "zoom" los niveles se caracterizan de forma semejante (LLORENS,1996, p. 16). Los estudiantes que se encuentren en el nivel III de razonamiento, a partir del mecanismo con el cual trabajan, pueden analizar la existencia de la tangente en situaciones donde la curva presenta situaciones "irregulares" (en puntos de inflexión, en una línea recta o en el vértice de un ángulo), y son capaces de prever las limitaciones del mecanismo para encontrar la tangente en los casos donde la curva presenta un número indefinido de oscilaciones alrededor del punto especificado.

> *El alumno en el* Nivel I*, relaciona punto con recta, recta con curva y punto con curva; en el* Nivel II*, relaciona la estabilización del mecanismo con la tangente; en el* Nivel III*, integra el concepto imagen con el concepto definición.*

Al hacer distintas entrevistas con los guiones diseñados a partir de los mecanismos del "haz de secantes" y del "zoom", los estudiantes detectados en un Nivel III de razonamiento contestaban las preguntas en periodos de tiempo similares (de unos 20 a 30 minutos). Uno de nuestros intereses era poder determinar si los estudiantes que podían definir correctamente la tangente por un mecanismo, también lo podían hacer partiendo del otro mecanismo. Para comprobarlo, a los estudiantes detectados en el Nivel III, entrevistados con el guión del "haz de secantes", se les entrevistó después con el guión del "*zoom*" y viceversa, comprobándose que **todos** los entrevistados reconocieron la tangente obtenida por uno u otro mecanismo como la misma (y única) tangente a la curva en el punto.

Una prueba escrita

Como es sabido, la interacción entrevistador-alumno es la mejor manera para determinar el nivel de razonamiento de un estudiante. A partir de las entrevistas se puede captar el lenguaje empleado por el alumno y observar cómo evoluciona en su nivel de razonamiento, pero al pretender tratar otros aspectos se presentan algunos inconvenientes:

> *El ascenso del* Nivel II *al* Nivel III *se produce cuando entiende que la tangente es el final de un proceso* infinito.

a. **La cantidad de datos cualitativos:** Permite hacer un análisis pormenorizado de cada individuo, pero dificulta la traducción a datos numéricos.
b. **Reducido número de entrevistas efectuadas:** El hecho de realizar cada entrevista en condiciones especiales y su posterior análisis implica que el tiempo invertido para cada entrevista sea considerable; esto hace que el número de entrevistados sea reducido.
c. **Difícil generalización:** El número reducido de entrevistados no permite generalizar los resultados obtenidos a conjuntos amplios de estudiantes que tengan las mismas características de los estudiantes entrevistados.
d. **Subjetividad del proceso:** En el análisis de las entrevistas nos enfrentamos a la posible subjetividad en la toma de los datos y en el análisis de los resultados, pues el diálogo, los gestos y el tono de la voz pueden ser interpretados de distintas formas.

Para complementar el estudio efectuado mediante entrevistas socráticas, llevamos a cabo un segundo estudio experimental complementario con las siguientes características:

a. Que pueda realizarse en un gran número de individuos.
b. Que los datos obtenidos sean cuantitativos de tal forma que permitan el posterior tratamiento estadístico.
c. Que reproduzca la evolución en el razonamiento con respecto al concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente a una curva plana.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, se diseñó una prueba escrita teniendo como base el guión de entrevista obtenido a partir del mecanismo del "haz de secantes". Esta prueba y la del "*zoom*" se pasaron a grupos numerosos de estudiantes. Estos *test* son abiertos, de respuesta múltiple con cinco opciones de respuesta en cada pregunta. Las cuatro primeras opciones que se ofrecían fueron las respuestas más escuchadas a los estudiantes entrevistados previamente, es decir, las respuestas más habituales. De ellas, una se consideraba la "mejor", la que fue dada por los estudiantes clasificados en el Nivel III. La última opción de cada pregunta ("*Ninguna de las anteriores*") se dejó abierta con el fin de captar el lenguaje en aquellos estudiantes que tenían otra alternativa distinta de la ofrecida o la expresaban de manera equivalente (ello obliga a procesar los test uno por uno, siempre que se elija esa alternativa en la respuesta).

Otra característica de los *test* escritos es el carácter socrático que se procuró mantener en su planteamiento general, manifestado en la entrega de información que se hace en determinados momentos, más o menos coincidentes con los de las entrevistas, de modo que podemos decir que los *test* escritos, en muchos aspectos, son una transcripción de las entrevistas socráticas.

Las muestras

Los test del "haz de secantes" y del "zoom" se pasaron a estudiantes del último año de Bachillerato en colegios de la ciudad de **Medellín** (Colombia) y a estudiantes de los dos primeros años en la Universidad de EAFIT de la misma ciudad. En la siguiente tabla se detallan los distintos grupos de la muestra:

Muestra	**Test secantes**	**Test *zoom***	**Total**
Bachillerato	89	80	**169**
Cálculo Integral	57	49	**106**
Cálculo Diferencial	98	76	**174**
Cálculo en V. Variables	16	22	**38**
Clase de Visualización	25	30	**55**
Total	**285**	**257**	**542**

Los estudiantes universitarios estaban matriculados en carreras relacionadas con ingeniería o con ciencias administrativas.

Las respuestas obtenidas para cada test fueron codificadas con 0 ó 1, obteniéndose así un vector con 25 componentes para cada test de las secantes y un vector de 22 componentes para cada test del *zoom*.

Para determinar que era posible diferenciar conglomerados de estudiantes identificados con los Niveles del modelo, se empleó el algoritmo *K-medias* implementándolo directamente del programa SPSS (v. 8.0 para Windows). El algoritmo asigna cada caso al centro del conglomerado más próximo (de acuerdo con la distancia euclidea entre el vector y el centro del conglomerado calculado hasta ese momento). La localización del centro, en el caso de que hayamos seleccionado la opción de medias actualizadas, se actualiza después de analizar un nuevo dato. Se analizan todos los datos y el proceso se va repitiendo hasta que la solución converja de modo que se maximice la distancia entre los centros de los conglomerados.

Debido a que los niveles de razonamiento estudiados son tres, entonces seleccionamos este mismo número de conglomerados al implementar el algoritmo *K-medias*. Para iniciar la clasificación se requiere de unos centros iniciales, que fueron obtenidos de acuerdo con una primera preclasificación de las pruebas realizadas de aquellos test, a los que de acuerdo con nuestra experiencia, podíamos asignarle claramente un Nivel, que no sería definitivo, sino útil para encontrar los centros iniciales.

Aplicación del algoritmo para el test del haz de secantes

Para poder realizar esta preclasificación agrupamos las preguntas de los *test* en tres bloques: Bloque 1, desde la pregunta 1 a la 7; bloque 2, desde la pregunta 8 a la 16 y bloque 3, desde la pregunta 17 a la 25. Aplicamos el siguiente criterio de clasificación:

Criterio A	Bloque 3	Bloque 2	Bloque 1
Nivel III	≥5	≥6	≥3
Nivel II	<5	≥6	≥3
Nivel I	<2	<4	≤3

De acuerdo con este criterio, un test se considera en el Nivel III de razonamiento si coincide con el "patrón ideal" en 5 o más preguntas del bloque 3, en 6 o más preguntas del bloque 2 y en 3 o más preguntas del bloque 1. Conseguimos con este criterio clasificar 56 de los 285 test con los siguientes resultados: 7 de Nivel I, 25 de Nivel 2 y 24 de Nivel III. Calculamos el promedio de respuestas correctas para cada pregunta de acuerdo con el Nivel asignado y utilizamos estos promedios como centros iniciales.

Los resultados obtenidos al implementar el algoritmo y poner en correspondencia los conglomerados finales con los niveles de razonamiento estudiados son los siguientes: 89 test en el Nivel III, 66 en el Nivel II y 130 en el Nivel I. Estos resultados concuerdan con los obtenidos en las entrevistas socráticas, en las cuales los estudiantes clasificados en el Nivel III son pocos con relación a los otros dos niveles.

Aplicación del algoritmo para el test del zoom

La preclasificación inicial se obtuvo al agrupar las 22 preguntas del test en tres bloques: Bloque 1, desde la pregunta 1 a la 6, bloque 2, desde la pregunta 7 a la 15 y el bloque 3 desde la pregunta 16 a la 22, y aplicamos el siguiente criterio de clasificación (cfr. Llorens, 1996):

Criterio A	Bloque 3	Bloque 2	Bloque 1
Nivel III	≥4	≥5	≥3
Nivel II	<4	≥5	≥3
Nivel I	<2	<4	≤3

Al aplicarlo a la muestra recogida en Medellín, conseguimos clasificar 48 de los 257 test con los siguientes resultados: 13 de Nivel I, 21 de Nivel 2 y 14 de Nivel III. Procediendo como antes, obtuvimos finalmente 52 test en el Nivel III, 125 en el Nivel II y 80 en el Nivel I.

Robustez del análisis

Para comprobar que los resultados son robustos, se introducen pequeños cambios en los criterios iniciales. Si los resultados obtenidos al aplicar nuevamente el algoritmo de K-medias con los centros iniciales obtenidos a partir de la nueva clasificación son similares, concluimos que la existencia de los niveles identificados como los conglomerados de respuestas, es independiente de la preclasificación que se hace. Naturalmente, los criterios de clasificación no pueden ser “radicalmente” diferentes (porque eso no sería coherente con el análisis) pero sí que pueden introducirse pequeñas variaciones. Por ejemplo, en el test de las secantes se fija el siguiente:

Criterio B	Bloque 3	Bloque 2	Bloque 1
Nivel III	≥6	≥6	≥3
Nivel II	<6	≥6	≥3
Nivel I	<2	<5	≤3

Al aplicar el algoritmo con las mismas especificaciones anteriores y comparar los resultados obtenidos a partir de la aplicación de los criterios A y B, llegamos a la siguiente tabla:

Nivel	Criterio A	Criterio B
III	89	90
II	66	66
I	130	129

Observando cada caso, uno por uno, comprobamos que coinciden en 284 de los 285 casos. El vector en el que no coinciden, es clasificado por el Criterio A como de Nivel I y por el Criterio B como de Nivel III. Analizando este caso en detalle, de acuerdo con nuestra experiencia obtenida en las entrevistas, lo clasificamos en el Nivel I, corroborando de esa forma la similitud de los resultados obtenidos con cada uno de los criterios tratados. La estabilidad del análisis con el test del zoom ya era conocida (aunque la confirmamos de nuevo).

Así pues, la estabilidad del análisis estadístico confirma la existencia de tres esquemas diferenciados de respuestas, que se corresponden con los niveles de razonamiento cuya existencia postulamos. Además, confirma que los descriptores dados para detectar estos niveles de razonamiento, a partir de cada mecanismo, son adecuados y que pueden ser detectados mediante la aplicación de pruebas escritas.

Correspondencia de los descriptores del mecanismo del “haz de secantes” con los resultados obtenidos

Al observar qué preguntas del test del “haz de secantes” permiten detectar cada descriptor, se puede definir una variable y estudiar la media de esta variable por niveles asignados. Así, por ejemplo, el descriptor 3.3 puede ser discriminado si el alumno contesta “correctamente” las preguntas 20, 21 y 22. Definimos la variable M33 = (P20 + P21 + P22)/3. La tabla siguiente muestra algunos de los descriptores estudiados y su correspondiente variable:

Descriptor	Variable
1.1	M11=(P4+P5+P6)/3
2.1	M21=(P6+P7)/2
2.5	M25=(P10+P11+P12+P13+P14+P15+P16)/7
3.1	M31=(P17+P18+P19+P23)/4
3.3	M35=(P20+P21+P22)/3

La tabla siguiente muestra las medias de las variables así definidas, según los Niveles en que fueron clasificadas las encuestas a partir del Criterio A.

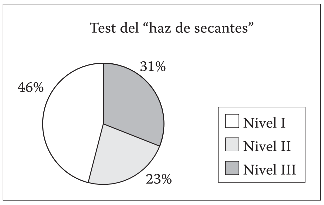
	M11	M21	M25	M31
Nivel 1	0,836	0,558	0,256	0,162
Nivel 2	0,742	0,530	0,329	0,356
Nivel 3	0,861	0,691	0,494	0,626

La información contenida en esta tabla corrobora nuestro aserto de que existe una clara relación entre los descriptores y los resultados obtenidos mediante el tratamiento estadístico del test de las secantes. Los estudiantes asignados al Nivel III tienen una media de aciertos mayor para cada descriptor y se diferencian claramente de los Niveles inferiores.

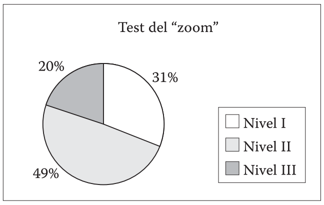
Análisis comparativo de los resultados

Para comparar los test frente a otras variables tales como la edad, el curso en el que estaban matriculados al momento de pasar las pruebas, la última vez que recordaba que le habían explicado el concepto de tangente, la derivada y su interpretación geométrica, la utilización de programas de cálculo simbólico, la influencia de la prueba en el cambio del concepto de tangente, etc., se incluyeron preguntas relacionadas con estos temas. Las conclusiones fueron las siguientes:

El test de las secantes facilita que un porcentaje mayor de estudiantes manifiesten el Nivel III de razonamiento.



Gráfica 9



Gráfica 10

Discriminación de los resultados:

De acuerdo con la edad. Los estudiantes entrevistados estaban en edades comprendidas entre los 16 y 22 años. El mayor porcentaje de estudiantes que está en el Nivel III, tiene una edad de 18 años, el 10% de ellos contestaron el test del "haz de secantes" y el 5% el test del "zoom". En este nivel, la siguiente edad con un porcentaje inferior es la de 17 años, seguida por la de 19 años, confirmándose que el *nivel de razonamiento mostrado por un alumno es independiente de su edad*.

De acuerdo con las materias que estaban cursando. Como era de esperar, los estudiantes que estaban viendo el curso de Cálculo Diferencial, el 20% para el test de las secantes y el 14% para el test del zoom, estaban en el Nivel III de los totales de estudiantes detectados en este Nivel. Para este mismo Nivel, el siguiente grupo de estudiantes con un mayor porcentaje fue el de los estudiantes de Bachillerato que comenzaban a estudiar el concepto de derivada de una función. Los estudiantes de los otros cursos –Cálculo Integral y Cálculo en Varias Variables– los porcentajes fueron menores, confirmando el hecho de que *el nivel de razonamiento, respecto de un concepto matemático, no depende del nivel de escolaridad en el cual se encuentra un estudiante.*

De acuerdo con la última vez que le explicaron el concepto de tangente. Del total de alumnos detectados en el Nivel III, el 22% de los que contestaron el test de las secantes y el 12% de los que contestaron el test del zoom, escogieron esta opción. Es decir, el hecho de estar estudiando el concepto de derivada de una función permite que los estudiantes a quienes se les aplicó el test de las secantes lleguen, en un mayor porcentaje, a un nivel superior de razonamiento. Por otra parte, los estudiantes parecen olvidar la relación derivada-tangente que se hace en cursos anteriores. Es notable el bajo porcentaje –en los dos test– del número de alumnos que respondieron la opción 3 en esta pregunta, que hace referencia al curso anterior en relación con la derivada.

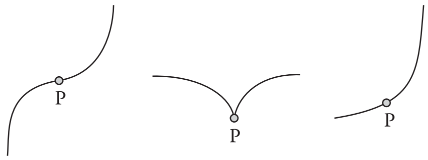
De acuerdo con el concepto de derivada y su interpretación geométrica. La opción 5 de esta pregunta era la siguiente: "He dado las dos cosas y sabría hallar la pendiente de la recta tangente a una función en un punto si conozco la derivada de la función en ese punto". De los estudiantes clasificados en el Nivel III, el 19% de los que contestaron el test de las secantes y el 16% de los que contestaron el test del zoom eligieron esta opción. Esta opción tiene que ver directamente con la formalización del concepto de tangente, pues comprenden el concepto de tangente y lo manifiestan de forma explícita.

De acuerdo con la utilización de programas de cálculo simbólico. En las respuestas a estas preguntas se hace evidente la escasa utilización de estos programas en algunos ámbitos y su escasa integración en los aspectos cotidianos de la enseñanza de los conceptos matemáticos. El 48% de los estudiantes que contestaron el test de las secantes y el 54% de los que respondieron el test del zoom dijeron no conocer ninguno de estos programas; de estos estudiantes el 10% y el 6% respectivamente estaban en Nivel III. El 21% en el test de las secantes y el 19% en el test del zoom, habían tenido prácticas ocasionales y de ellos la mitad y la tercera parte estaban en Nivel III. De este último resultado, se evidencia la importancia que tienen los programas de cálculo simbólico para la compresión de los conceptos matemáticos.

Impresión sobre el cambio de concepto. La pregunta que tenía que ver con esta parte se formuló de la siguiente manera: "¿Consideras que, como resultado de la prueba, ha cambiado en algo tu idea de lo que es la tangente a una curva en un punto?". La opción de respuesta que fue seleccionada mayoritariamente en los dos test fue la siguiente: "Sí, porque lo que antes pensaba me he dado cuenta que no es del todo correcto, no sirve para todas las situaciones". Para el test de las secantes la seleccionaron el 28% del total de la muestra y para el test del zoom el 32%, de ellos el 12% y el 7% estaban en Nivel III respectivamente. Esto muestra que *los test en sí mismos, son experiencias de aprendizaje* y esto es bien importante si se tiene en cuenta que los dos test fueron resueltos en periodos similares de tiempo (de 30 a 50 minutos).

Visualización y recta tangente

> "En la ilustración siguiente, se presentan tres curvas. Para cada una de ellas, se proponen tres afirmaciones. Señala la afirmación que crees correcta y sige la instrucción que aparece entre paréntesis:
>
> a) Es posible dibujar en P exactamente una tangente a la curva (dibújala).
>
> b) Es posible dibujar en P más de una tangente (especifica cuántas, una, dos, tres ó infinitas más. Dibújalas todas en caso de que el número sea finito y unas cuantas en el caso de que sea infinito).
>
> c) Es imposible dibujar en P una tangente a la curva.



Gráfica 11

¿Cuál es la definición de tangente que recuerdas de este curso o de cursos anteriores? Si no recuerdas la definición de tangente, trata de definirla por ti mismo". (Vinner, 1982; 1991, p.78-80).

El test diseñado por Vinner para estudiar el concepto de tangente en alumnos de primer año de universidad, cuya eficacia y validez parecen fuera de toda duda, nos pareció una prueba interesante para comparar los dos mecanismos objeto de nuestro estudio. Así pues, elegimos tres grupos de alumnos del curso de Cálculo Diferencial. A dos de estos grupos les dimos previamente una hora de clase usando el ordenador y el programa infromático Derive; en uno de ellos utilizamos la visualización que se obtiene a partir del mecanismo del "haz de secantes" y en el otro la visualización que se obtiene a partir del mecanismo del "zoom" para el concepto de tangente a una curva en un punto. Al tercer grupo no se le dio ninguna de estas dos visualizaciones. Al pasarles el test de Vinner, obtuvimos los siguientes resultados: En promedio, el 43% y el 60% de los estudiantes que se les dio la visualización a través del haz de secantes y del zoom, respectivamente, dibujaron correctamente la tangente a las tres curvas dadas. Mientras que sólo el 20%, en promedio, de los estudiantes que no tuvieron ningún entrenamiento, dibujaron correctamente la tangente a las tres curvas dadas.

El 50% de los alumnos a los se entrenó con las visualizaciones del "haz de secantes" y del "zoom", definieron correctamente la tangente a una curva, partiendo de los respectivos mecanismos. Los estudiantes a quienes no se les dio ninguna visualización, definieron la tangente a una curva en un punto como "la recta que toca (corta) a la curva en un solo punto", haciendo evidente el concepto-imagen de tangente a una circunferencia, comprobándose que la interpretación que se hace de la derivada en los cursos de análisis matemático no cambia el concepto imagen de tangente a una curva, haciendo evidente el hecho de la necesidad de buscar visualizaciones que ayuden a los alumnos a entender los conceptos matemáticos.

Conclusiones

Nuestro trabajo cumplió todos y cada uno de los pasos que permiten afirmar que se ha aplicado el modelo de Van Hiele a un concepto. El cambio de "mecanismo", de forma de aproximarse al concepto no iba a significar, como cabía esperar, una dificultad grave para cubrir ese objetivo. Así pues, se han dado los descriptores para los niveles de razonamiento 0, I, II y III obtenidos del diseño de una entrevista socrática y se han comprobado estadísticamente a partir de los datos recogidos de la aplicación de un test escrito que, en su esencia, guarda las principales características del guión de la entrevista.

> *La interpretación que se hace de la derivada en los cursos de análisis matemático no cambia el concepto imagen de tangente a una curva. Es evidente la necesidad de buscar visualizaciones que ayuden a los alumnos a entender los conceptos matemáticos.*

La visualización que se obtiene con del mecanismo del "haz de secantes", que es un proceso infinito, deja a los alumnos a las puertas de la formalización del concepto de tangente y del de derivada de una función en un punto, pues al encontrar el límite de las pendientes de la sucesión de secantes obtenidas a partir del mecanismo del "haz de secantes" se define la derivada de la función en ese punto.

Por lo demás, no existen diferencias relevantes entre las dos formas de abordar la primera fase del concepto, lo que constituye en sí mismo otro de los resultados principales obtenidos. La existencia de los niveles se refiere, de manera exclusiva, a la propia capacidad de razonamiento acerca del concepto y no a la forma en la que se introduzca éste o al método en el que se estudie. Otra cuestión, claro está, es favorecer las experiencias de aprendizaje que contribuyan a un progreso hacia el nivel III más generalizado. En ese contexto, se refuerza la conclusión de que ello es posible (y relativamente fácil gracias a la tecnología actual) usando la visualización. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ESTEBAN, P., LLORENS, J. L. (2000): "Aplicación del modelo de Van Hiele al concepto de recta tangente a través del 'Haz de Secantes'". *Matemáticas y Educación*, v. 3, n. 1 y 2, p.49-60.

LLORENS, J. L. (1996). "Aplicación del modelo de van Hiele al concepto de aproximación local". *SUMA*, nº. 22, 91-98.

LLORENS, J. L., PÉREZ CARRERAS, P. (1997). "An Extension of van Hiele's Model to the Study of Local Aproximation". *Int. J. Maht. Educ. Sci. Technol.* Vol. 28, nº. 5, 713-726.

VAN HIELE, P.M. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. Academic Press. New York.

VINNER, S. (1982). "Conflicts between definitions ans intuitions: The case of the tangent". *Proc. of PME6*. p. 24-28. Antwerp.

VINNER, S. (1991). "The Role of Definition in Teaching and Learning of Mathematics", en *Advanced Mathematical Thinking*, Cap. 5, pp. 65-81. Kluber Ac. Pub. New York.

SUMA 44

Noviembre 2003, pp. 53-64

El juego-rey y la ciencia de los números

El ajedrez puede constituir un excelente recurso didáctico en el aula de matemáticas. El presente trabajo trata sobre algunas de las conexiones que se pueden establecer entre estas dos disciplinas, y sobre la posibilidad de plantear problemas matemáticos tomando como soporte el tablero y las piezas de ajedrez. Los contenidos de los problemas son muy variados, manejando diversas cuestiones -algebraicas, combinatorias, geométricas, cálculo de probabilidades, de lógica, etc.-, que resultan especialmente motivadoras por el carácter lúdico y manipulativo que posee el juego de los 64 escaques.

Chess can be an excellent didactic resource in the Maths class. This piece of work is about some of the connections that can be established between these two disciplines, and about the possibility of setting out mathematical problems involving the use of the chessboard and the chess pieces. The contents of the problems are very varied. Students need to use concepts related to algebra, combinatorial analysis, geometry, calculation of probabilities, logic etc... These activities are especially motivating due to the playful and manipulative nature of chess.

Las relaciones entre el ajedrez y las matemáticas son muy diversas. Al ajedrez se le suele llamar el juego ciencia por lo que tiene de recreativo y de pseudocientífico. Stefan Zweig, en su obra *"El jugador de ajedrez"*, lo define como *"un pensamiento que no conduce a ninguna parte, una matemática que no establece nada, un arte que no deja tras de sí obra alguna, una arquitectura sin materia..."*.

Las únicas disciplinas intelectuales que producen con frecuencia niños prodigio, además de la música, son el ajedrez y las matemáticas.

El ajedrez es, sin lugar a dudas, el juego ideal para una mente matemática. Entre los matemáticos se suelen encontrar buenos ajedrecistas. *Euler*, *Gauss*, *Legendre* y *De Moivre* fueron grandes aficionados, y resolvieron problemas matemáticos basados en este juego. Por otro lado, no son pocos los ajedrecistas de elite que fueron amantes de las matemáticas. *Adolf Anderssen* (1818-1879), profesor de matemáticas en su ciudad natal, Breslau (Alemania), es el autor de dos partidas memorables: *"La Inmortal"*, jugada en 1851 contra Kieseritzky, y *"La Siempreviva"*, contra Dufresne en 1852. *Wilhelm Steinitz* (1836-1900), campeón del mundo entre 1866 y 1894, al que algunos comentaristas califican como el padre del ajedrez moderno, también fue profesor de matemáticas. *Emmanuel Lasker* (1868-1941), campeón del mundo de 1894 a 1921, estaba especialmente dotado para los números. Doctor en matemáticas por la universidad de Erlanguen (Alemania), crea el concepto de ideal primario en su tesis doctoral "Los módulos ideales", en 1902. *Max Euwe* (1901-1981), gran maestro holandés, campeón del mundo de 1935 a 1937, fue profesor de matemáticas y su estilo ajedrecístico se caracterizaba por la precisión matemática en el tratamiento de todas las fases del juego. *Mijail Botvinnik*, del que es famosa su frase *"El ajedrez es a las matemáticas lo que la música a la acústica"*, fue un gran maestro ruso campeón del mundo en tres ocasiones, entre 1948 y 1963. Como ejemplo actual, el gran maestro inglés *Nunn* es doctor en Topología Algebraica por la universidad de Oxford.

En el IES Diego Tortosa de Cieza (Murcia), en el que desarrollo mi labor docente, se ha introducido un Taller de Ajedrez como materia optativa en el cuarto curso de la ESO, tras la autorización por parte del MEC de un currículo propio.

Por otro lado, entre las materias optativas de la ESO se encuentra el Taller de Matemáticas. Esta asignatura no se concibe como una clase más de Matemáticas, ni de ampliación ni de recuperación de conocimientos; se trata más bien de trabajar los conceptos ya adquiridos dándoles una dimen-

José Ángel Ortega Dato
I.E.S. "Diego Tortosa"
Cieza (Murcia).
Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia.

sión práctica y prestando especial atención a los contenidos de carácter procedimental y actitudinal. El profesorado tiene gran libertad a la hora de seleccionar los contenidos a impartir, y de adecuarlos a las motivaciones, intereses y características de los alumnos que elijan esta materia. Entre los objetivos del Taller de Matemáticas destacan el desarrollar capacidades para la resolución de problemas, fomentar la imaginación y creatividad, poner de manifiesto el aspecto utilitario de las matemáticas, potenciar el trabajo en equipo, favorecer una actitud positiva hacia las matemáticas, y descubrir que se puede llegar a disfrutar "haciendo matemáticas".

Es fácil, pues, que surgiera la idea de relacionar estas dos materias, Taller de Matemáticas y Taller de Ajedrez, encuadradas ambas en el departamento de Matemáticas. De esta forma, en el Taller de Matemáticas, comenzamos a elaborar y recopilar problemas de contenido matemático tomando como base al ajedrez.

La introducción en el aula de materiales manipulativos suele ser en sí mismo un estímulo para los alumnos. En particular, el ajedrez puede constituir un recurso didáctico especialmente motivador en el aula de matemáticas por su carácter lúdico.

Conocimientos previos y materiales didácticos

Para abordar los problemas no es necesario tener conocimientos muy amplios sobre ajedrez, bastará que los alumnos conozcan el tablero y el movimiento de las piezas (gráfico 1).

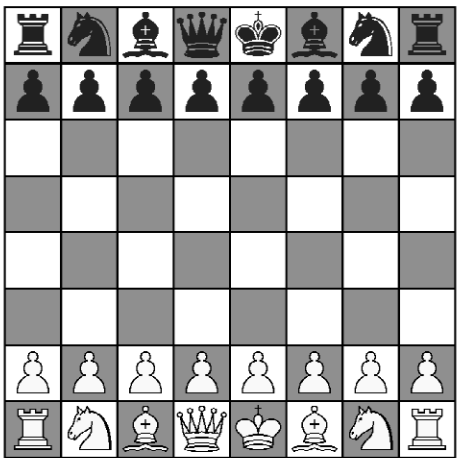


Gráfico 1

La resolución de los problemas se realiza fundamentalmente en trabajo en grupo. Los alumnos deberán manejar tableros y fichas de ajedrez, y también puede serles útil en algún momento la calculadora. Para explicar una cuestión a todos los alumnos se usa un tablero mural de ajedrez con fichas magnéticas. La dinámica de la clase suele ser la siguiente. Se reparte una fotocopia del problema por alumno, y otra extra para la respuesta del grupo. En primer lugar el problema se estudia individualmente, a continuación se produce un intercambio de opiniones entre los miembros del grupo para llegar a un consenso, y se redacta la solución del grupo. Finalmente hay una exposición de cada grupo, intentando llegar a una conclusión para toda la clase, valorando las distintas estrategias seguidas.

Resolución de problemas

Los problemas que se proponen son apropiados para los alumnos del segundo ciclo de la ESO, y pueden servir para reforzar conocimientos ya adquiridos e introducir otros nuevos.

Los contenidos son muy variados, tratándose cuestiones geométricas, algebraicas, combinatorias, de lógica, etc. Situándonos en el campo de la resolución de problemas, se pide el establecimiento de fórmulas, el paso a la generalización partiendo de situaciones concretas, el recuento sistemático de casos, eligiendo en cada situación la estrategia más adecuada.

Se potencian en los alumnos las capacidades de análisis de situaciones, creatividad, pensamiento lógico e imaginación. Por otro lado, al ser el ajedrez un juego, es mayor la participación y la motivación de los alumnos, eliminando el recelo hacia los problemas de contenido matemático.

Tendríamos que puntualizar que un *"problema"* no es un ejercicio; es decir, no se puede resolver de forma automática, sino que requiere una investigación previa para elegir la estrategia adecuada. Muchas veces no se sabe muy bien cómo comenzar, ni tampoco cómo seguir. De manera que resolver problemas es una actividad mental compleja, que requiere ciertos conocimientos y poner en escena una buena dosis de talento y creatividad, por esto, habitualmente habrá muchas formas de resolverlos, y también habrá varios métodos o estrategias en las que se podrá basar la resolución. Se requiere de un entrenamiento y, por lo tanto, el mejor método para llegar a ser un experto en resolución de problemas es el esfuerzo.

Tendríamos que puntualizar que un "problema" no es un ejercicio; es decir, no se puede resolver de forma automática, sino que requiere una investigación previa para elegir la estrategia adecuada.

Los problemas

La mayoría de los problemas que siguen constituyen una sucinta selección de los más interesantes que se encuentran en la literatura, completados con cuestiones que he elaborado teniendo presente que resultaran asequibles para los alumnos. También aparecen algunos "de mi propia cosecha", como resultado de la adaptación al ajedrez de problemas de todo tipo con contenido matemático.

Para comenzar, tres problemas históricos

Se conocen varios problemas clásicos en los que la ciencia de los números y el rey de los juegos parecen unirse con mayor fuerza. Tres de los más famosos son la *"Leyenda sobre la invención del ajedrez"*, el *"Problema de las ocho damas"*, y el *"Problema de Guarini"*. La primera de estas cuestiones está considerada como el primer problema de ajedrez de contenido matemático.

Leyenda sobre la invención del ajedrez

Existen varias historias que intentan explicar la invención del ajedrez que, según los estudiosos del tema, tuvo lugar en el lejano oriente, y más concretamente en la India hace más de 2000 años, donde se conocía con el nombre de *Chaturanga* (*"chatur"* = cuatro, *"anga"* = miembros), que hace alusión a las cuatro clases de fuerzas de que estaba compuesto el ejército hindú: infantería (los peones), caballería (los caballos), elefantes (las torres), y carros (los alfiles).

Una de las más conocidas es la leyenda del brahmán Sissa Ben Dahir, a quien se le atribuye su invención con el motivo de distraer a su soberano, Schirham rey de la India, de sus ansias bélicas. El monarca decide recompensarle por haber creado el considerado, sin lugar a dudas, mejor juego ideado por el hombre. Sissa pide un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, etc., y así hasta llegar a la última casilla (gráfico 2).

El rey se asombra de la escasa ambición de Sissa y pide a sus mas grandes sabios que realicen el cálculo para pagarle lo que solicita. Una vez obtenido el total, el sabio anuncia que la cantidad pedida es enorme, pues supera los 18 trillones de granos de trigo.

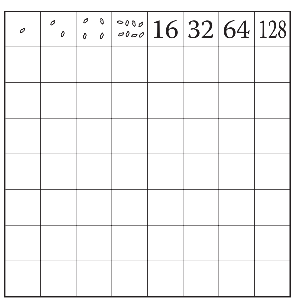


Gráfico 2

Este problema aparece en muchos libros de texto como introducción de las secuencias numéricas y, en particular, las progresiones geométricas.

La cantidad de granos de trigo es $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{63}$

Utilizando la fórmula de la suma de las progresiones geométricas se tiene:

$$S_{64} = a_1 \frac{r^{64}-1}{r-1} = 1\frac{2^{64}-1}{2-1} = 2^{64} - 1 = 18.446.774.073.709.551.615$$

Pero esto no es necesario, pues el cálculo se puede realizar de forma ingeniosa sumando una unidad:

$$1 + (1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{63}) = 2 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{63}$$

Y ahora:

$$2 + 2 = 2\,(1 + 1) = 2 \cdot 2 = 2^2$$
$$2 + 2 + 4 = 2^2 + 2^2 = 2^2\,(1 + 1) = 2^2 \cdot 2 = 2^3$$
$$2 + 2 + 4 + 8 = 2^3 + 2^3 = 2^3\,(1 + 1) = 2^3 \cdot 2 = 2^4$$

Entonces:

$$2 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{63} = 2^{64}$$

Luego la cantidad pedida es $2^{64} - 1$.

Un cálculo aproximado del número de granos de trigo se obtiene haciendo:

$$2^{64} = 2^4 \cdot 2^{60} = 16 \cdot (2^{10})^6 = 16 \cdot (1024)^6 \sim 16 \cdot (10^3)^6 = 1'6 \cdot 10^{19}$$

Pueden resultar cuestiones interesantes para los alumnos calcular el volumen y el peso del trigo, las dimensiones del granero necesario para almacenarlo, y el tiempo que se tardaría en contar uno a uno los granos de trigo (Ifrah, 1987).

Otra de las versiones de la leyenda nos cuenta que un matemático de la corte del rey Schirham, que era más generoso, realizó los cálculos suponiendo un tablero de infinitas casillas. Según él, la suma de los granos de trigo se puede calcular de la siguiente manera:

$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots = 1 + 2 \cdot (1 + 2 + 4 + 8 + \ldots) = 1 + 2 \cdot S$, de donde $S = -1$.

¿Será posible que Sissa tuviera al final que pagar un grano de trigo al rey?

Problema de las ocho damas

Otro tema clásico de conexión entre las matemáticas y el ajedrez es el "Problema de las ocho damas", formulado por el alemán Max Bezzel en 1848. Consiste en hallar todas las formas posibles de colocar en el tablero de ajedrez ocho damas, de manera que dominen todas las casillas y no se protejan mutuamente, es decir, sin que ninguna de ellas esté amenazada por otra. En el gráfico 3 se representa una de las soluciones.

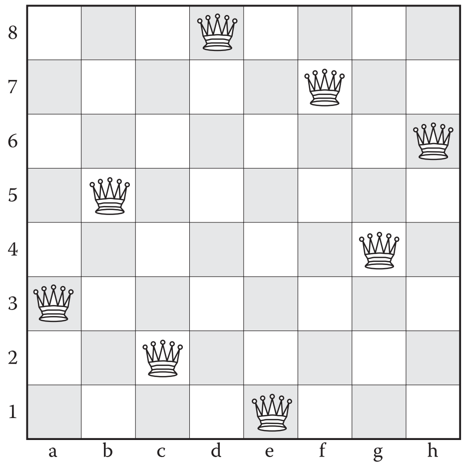


Gráfico 3

El problema fue estudiado por C. F. Gauss, el príncipe de los matemáticos, que halló 76 de las 92 soluciones posibles. Pero fue en 1850 un amigo suyo, el matemático ciego Franz Nauck, el primero en encontrar todas las coordinaciones posibles (Frabetti, 1995).

Siguiendo el consejo de Miguel de Guzmán (*"Empezar por lo fácil hace fácil lo difícil"*), el problema lo deben abordar los alumnos en tableros más pequeños: Situar 4 damas en un tablero de 4x4 casillas, situar 5 damas en uno 5x5, etc., teniendo siempre en cuenta que no puede haber dos damas en la misma fila, columna o diagonal. Es significativo que no exista ningún algoritmo que relacione el número de soluciones posibles con las dimensiones del tablero.

Las 92 soluciones en el tablero normal de 8x8 casillas se obtienen por giros y simetrías a partir de 12 soluciones básicas (gráfico 4).

Un procedimiento muy laborioso consiste en considerar que el movimiento de la dama es una combinación de torre y alfil. Partiendo del problema con el mismo enunciado pero para ocho torres, que es mucho más sencillo de resolver, basta considerar que el movimiento de la torre se produce por filas y columnas, entonces cada torre deberá estar en una columna distinta. La torre de la primera columna se puede situar en cualquiera de sus 8 casillas, la segunda torre se podrá situar en 7 casillas, y así sucesivamente hasta llegar a la octava torre que sólo dispone de una casilla. Luego el número total de coordinaciones es 8! = 40320. De éstas, tendremos que eliminar las 40228 coordinaciones en las que dos torres se encuentren en una misma diagonal (movimiento del alfil), para llegar a las 92 coordinaciones diferentes para las ocho damas.

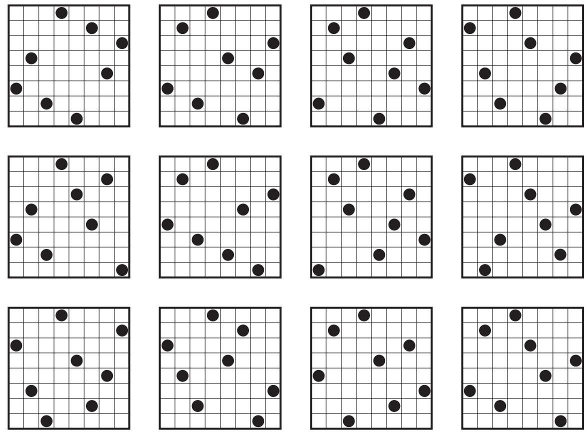


Gráfico 4

La búsqueda de las soluciones se puede realizar mediante un programa de ordenador. Asignando a cada dama el número de la fila que ocupa, y tomando las columnas de izquierda a derecha, cada posición se puede cifrar con un número de 8 dígitos. Por ejemplo, la posición del gráfico 3 se anotaría 35281746. La condición que debe cumplir una permutación para ser solución válida es que la diferencia entre dos cualesquiera de los dígitos no sea igual a su distancia, pues en caso contrario dos damas estarían en la misma diagonal. Por ejemplo, la permutación 46851372 no será válida pues el 5 y el 3 están a dos lugares de distancia y se diferencian en dos unidades (las damas situadas en la cuarta y sexta columnas estarían en la misma diagonal).

Una aplicación interesante del problema de las ocho damas a los algoritmos genéticos se desarrolla en el artículo reseñado en la bibliografía (Corzo, 2000).

Este problema se puede ampliar a cualquiera de las demás

> *El ajedrez es, sin lugar a dudas, el juego ideal para una mente matemática. Euler, Gauss, Legendre y De Moivre fueron grandes aficionados, y resolvieron problemas matemáticos basados en este juego. Por otro lado, no son pocos los ajedrecistas de elite que fueron amantes de las matemáticas.*

piezas, enunciando los problemas de coordinaciones de piezas idénticas (Bonsdorff, 1974):

"Hallar el máximo número de piezas iguales que se pueden colocar en un tablero de ciertas dimensiones, de modo que no se amenacen entre sí, y determinar todas las combinaciones posibles".

O también; "hallar el mínimo número de piezas de cierta clase que es necesario y suficiente para abarcar todas las casillas de un tablero de cierto orden".

E incluso el problema inverso: "¿Cuántas piezas iguales se pueden colocar como máximo en el tablero de forma que no dominen todas las casillas?".

Problema de Guarini
El siguiente problema fue propuesto por el italiano Guarini di Forli en el año 1512, por lo que es uno de los problemas más antiguos relacionados con el ajedrez.

En un tablero de ajedrez de dimensión 3x3 se colocan los dos caballos blancos en las esquinas inferiores y los dos caballos negros en las superiores (gráfico 5). Se trata de intercambiar las posiciones de los caballos blancos y negros en el mínimo número de movimientos, considerando que de forma alternativa se mueve un caballo negro y uno blanco siguiendo las reglas del ajedrez.
Manipulando los caballos en el tablero, los alumnos pueden

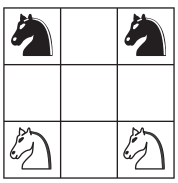


Gráfico 5

llegar a la solución. El objetivo se logra en 16 movimientos, haciendo girar los caballos alrededor del tablero en cuatro etapas (gráfico 6).
Este problema se puede transformar en otro isomorfo de

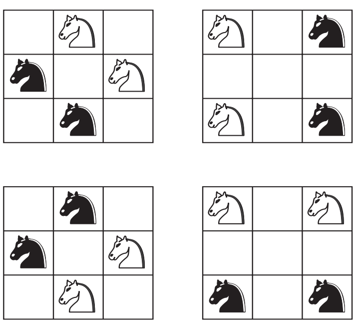


Gráfico 6

carácter topológico de teoría de grafos. Se traza un diagrama donde se representa por una línea recta cada uno de los posibles saltos de los caballos. "Desatascando" el grafo se llega rápidamente a la solución (Gardner, 1981).

Problemas sobre el tablero de ajedrez

Tomando como soporte el tablero de ajedrez se pueden plantear numerosos problemas. A continuación se exponen algunos de ellos.

Cuadrados en el tablero de ajedrez
¿Cuántos cuadrados existen en el tablero de ajedrez? (Fernández, 1991).

Considerando las casillas del tablero tendremos 64 cuadraditos, pero también se pueden construir cuadrados tomando de lado dos casillas del tablero (orden 2), tres casillas (orden 3), etc., y hasta ocho casillas de lado que constituiría el cuadrado del tablero completo (gráfico 7).

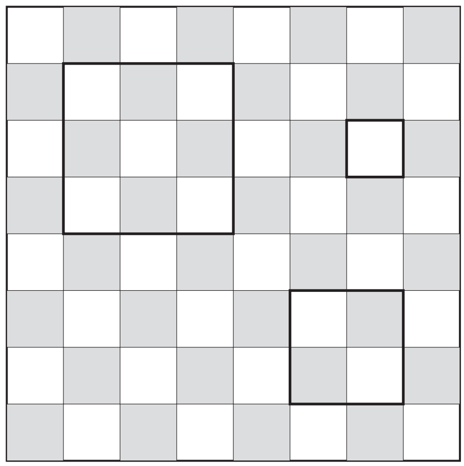


Gráfico 7

El cálculo del número de cuadrados que hay de cada orden se realiza mediante recuento sistemático y ordenado. La solución se recoge en la siguiente tabla:

Orden	1	2	3	4	5	6	7	8
Nº Cuadrados	64	49	36	25	16	9	4	1

El número total de cuadrados es:

$$1+4+9+16+25+36+49+64=\sum_{i=1}^{8} i^2 = 204$$

Los alumnos pueden llegar a la fórmula que relaciona el número de cuadrados según su orden:

NºCuadrados(orden) = (9 - orden)^2

Generalizando a un tablero de nxn casillas:

NºCuadrados(orden) = ((n+1) - orden)^2

Al calcular el número total de cuadrados para un tablero n·n llegamos a la fórmula de la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales, que se obtiene por inducción:

$$1+4+9+\ldots+n^2=\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Rectángulos en el tablero de ajedrez

También es posible hallar una fórmula que nos dé el número de rectángulos, de unas dimensiones determinadas, que existen en el tablero de ajedrez (gráfico 8).

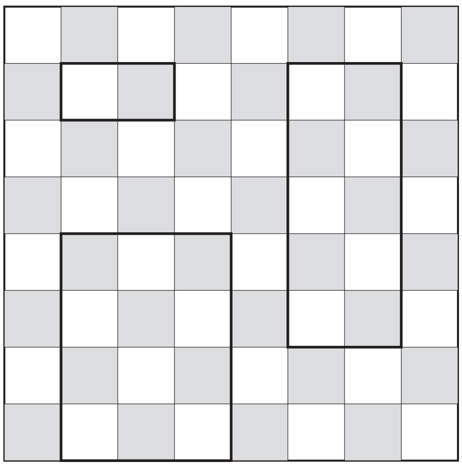


Gráfico 8

Para determinar un rectángulo basta con fijar una horizontal y una vertical de las líneas que dividen las casillas del tablero (Alayo, 1991). Como en el tablero normal de 8x8 casillas hay 9 líneas horizontales y 9 líneas verticales se obtienen: Nº rectángulos = $C_{9,2} \cdot C_{9,2}$ = 1296.

Entonces, el número de rectángulos (no-cuadrados) es: 1296-204 = 1092.

Para una base y altura determinadas, se obtiene:

Nº rectángulos de base b casillas y altura h casillas = (9 - b) · (9 - h)

Generalizando para un tablero de nxn casillas:

$$N\text{”rectÆngulos}=C_{n+1,2}\cdot C_{n+1,2}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Nº rectángulos (no-cuadrados) =

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n(3n+2)(n^2-1)}{12}$$

El problema de los diez peones

En un tablero de ajedrez de 4x4 casillas se han situado 10 peones de manera que en todas las filas, columnas y diagonales principales (diagonales de 4 casillas) hay un número par de peones (gráfico 9). Busca otras formas.

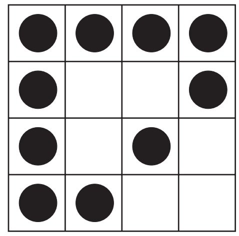


Gráfico 9

Tras la manipulación de los peones en el tablero, el alumno puede llegar a la siguiente conclusión: "Por filas y columnas los peones deben repartirse de la forma 2 + 2 + 2 + 4, luego siempre habrá una fila y una columna con 4 peones y las otras con 2 peones". De esta forma se obtienen, salvo giros y simetrías, doce posiciones diferentes.

Filas de piezas

Un niño juega con 19 piezas de ajedrez. ¿Cómo podrá situarlas en un tablero de 5x5 casillas para formar 7 filas de 5 piezas cada una?

Los alumnos se pueden animar a plantear y resolver problemas análogos variando las dimensiones del tablero, el número de piezas, de filas y de piezas por fila.

Paradoja geométrica

Cortando el tablero de ajedrez por las tres líneas de trazo grueso marcadas, se puede reagrupar los cuatro trozos resultantes en un rectángulo (gráfico 10).

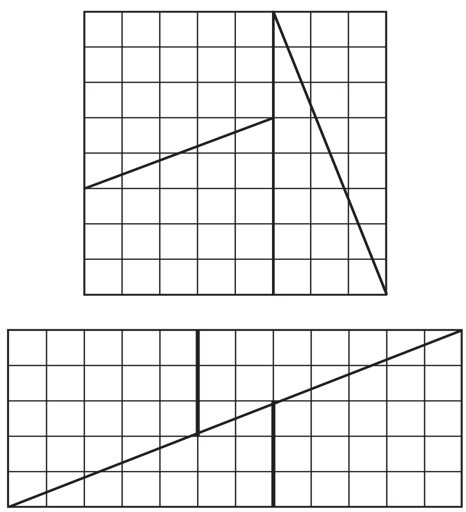


Gráfico 10

Pero, ¿qué es lo que ocurre? ¿Nos habéis hecho trampa?. El tablero de ajedrez tiene 64 casillas y el rectángulo obtenido 65. ¿Dónde está la casilla que sobra?

Si los cuatro trozos se reagrupan como en el gráfico 11 en vez de ganar una casilla, lo que ocurre es que se pierde, ya que la figura tiene sólo 63 casillas. ¿Dónde está el truco? (Frabetti, 1995).

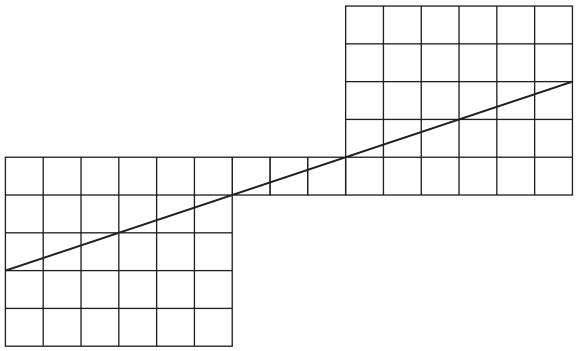


Gráfico 11

Dominó en el tablero de ajedrez
Desde luego que se puede recubrir un tablero de ajedrez con fichas de dominó, suponiendo que cada ficha ocupa dos cuadraditos del tablero. Pero ¿es posible recubrir el tablero de ajedrez si se suprimen las dos casillas de esquinas opuestas? (gráfico 12) ¿Qué casillas se pueden quitar para que sea posible recubrir todo el tablero? La coloración de las casillas del tablero da una solución inmediata (Frabetti, 1995).

De las cuestiones anteriores puede enunciarse un "juego". Dos jugadores disponen de fichas de dominó, se trata de rellenar un tablero de ajedrez de manera que el último que ponga una ficha gana, juegan alternativamente y no está permitido salir fuera del contorno del tablero ni poner una ficha encima de otra ya existente (Alayo, 1991). ¿Cuál es la estrategia ganadora?

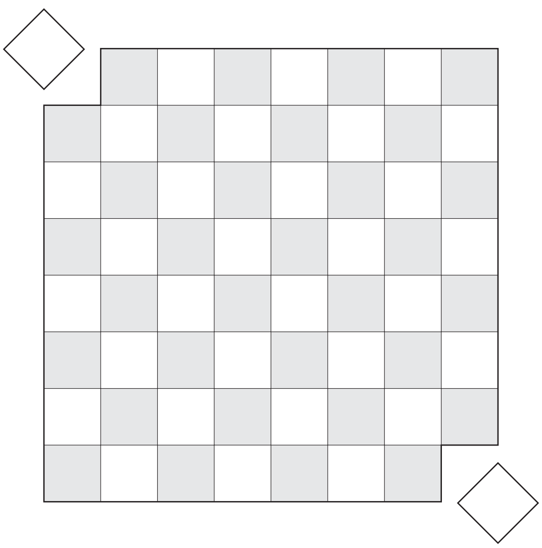


Gráfico 12

Problemas sobre el movimiento de las piezas

Los siguientes problemas se basan en el movimiento de las piezas sobre un tablero de ajedrez.

Valor de las piezas de ajedrez
Se pueden resolver las siguientes cuestiones para relacionar la movilidad propia de cada una de las piezas del ajedrez con el valor relativo que se le atribuye en una partida.

a) Calcular el número máximo de casillas que domina cada pieza de ajedrez. Es decir, en un tablero vacío elegir una casilla para situar la pieza y ver a cuántas casillas se puede mover como máximo (gráfico 13).

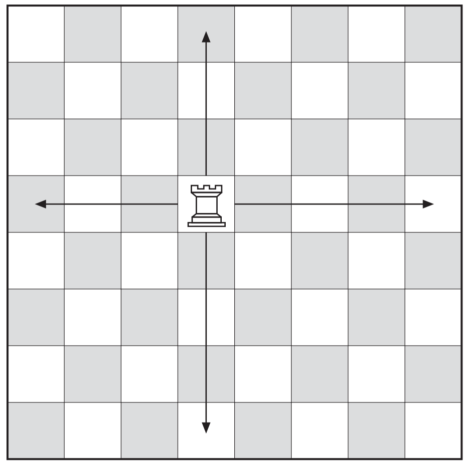


Gráfico 13

b) Relacionar el resultado obtenido en el apartado anterior con el valor que en el juego del ajedrez se le asigna a cada pieza (ver tabla).

Piezas	Nº puntos
Peón	1
Caballo	3
Alfil	3
Torre	5
Dama	10
Rey	No se le atribuye ningún valor

c) Con dos alfiles y dos caballos. ¿Cuál es el número máximo de casillas que se pueden dominar? ¿Y cuántas con una torre y dos alfiles?

El salto del caballo
¿Cuántos saltos de caballo distintos se pueden imaginar sobre el tablero de ajedrez?

La estrategia a seguir es contar sistemática y ordenadamente, teniendo en cuenta la simetría. Se realiza el recuento de los saltos de caballo desde los vértices del tablero, casillas laterales al lado del vértice, otras casillas laterales, casillas centrales, etc., llegándose a contabilizar 336 saltos distintos (gráfico 14). También se puede considerar un tablero de 2x3 casillas en el que hay 4 saltos de caballo, y como existen 84 tableros de estas dimensiones en el de 8x8 se llega a la solución.

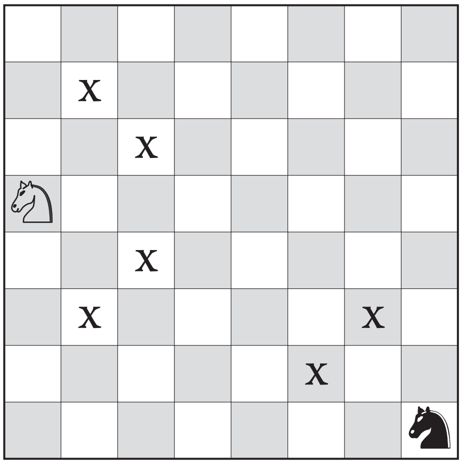


Gráfico 14

Los dos reyes
En un tablero de ajedrez se colocan los dos reyes, uno blanco y uno negro.

¿De cuántos modos diferentes pueden disponerse los reyes? (Frabetti, 1995).

¿Y si consideramos sólo las posiciones legales en ajedrez, es decir, aquellas en las que un rey no pueda capturar al otro? (gráfico 15).

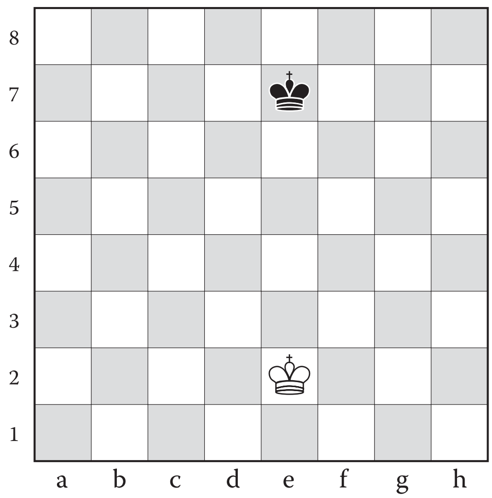


Gráfico 15

Localización de las casillas del tablero de ajedrez
Se propone a los alumnos que piensen un sistema para identificar cada casilla del tablero (Fernández, 1991).

Una de las respuestas más comunes será numerar las columnas y las filas del 1 al 8, de forma que cada casilla se denomina por su columna - fila. Con este código se pueden trabajar las coordenadas cartesianas. Por ejemplo, se elige una pieza determinada, se sitúa en una casilla cualquiera (x, y) y se identifican por sus coordenadas las casillas a las que se puede mover la pieza.

Otra forma sería numerar las filas del 1 al 8 y las columnas con letras en orden alfabético de "a" a "h" (gráfico 16), lo que lleva al sistema oficial de anotación de las jugadas en las competiciones de ajedrez, llamado *sistema algebraico*, que consiste en escribir la inicial de la pieza seguida de la columna y la fila a la que se mueve. Por ejemplo Dg4 significa que la Dama se sitúa en la casilla g4.

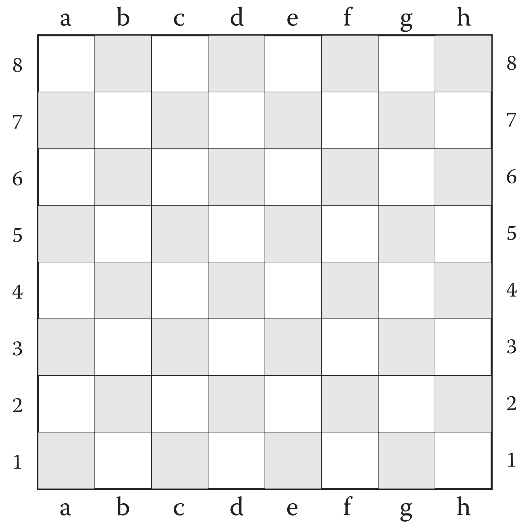


Gráfico 16

Poligrafías
Se denominan *poligrafías* a los recorridos de una pieza por todo el tablero de ajedrez sin pasar dos veces por la misma casilla (Frabetti, 1995). La poligrafía es *cerrada* si desde la casilla final con un movimiento más se alcanza la casilla inicial. Es *simétrica* si el dibujo del recorrido es simétrico respecto del eje vertical del tablero. Y es *con o sin cruces* según que en la trayectoria se produzcan cruces dentro de una casilla.

> *Desde luego que se puede recubrir un tablero de ajedrez con fichas de dominó, suponiendo que cada ficha ocupa dos cuadraditos del tablero. Pero ¿es posible recubrir el tablero de ajedrez si se suprimen las dos casillas de esquinas opuestas?*
> Frabetti

La casilla de salida de la pieza puede ser su casilla inicial al comienzo de la partida de ajedrez (*poligrafías ortodoxas*), o una casilla cualquiera.

En el caso del rey, se consiguen fácilmente poligrafías. La dificultad, y la belleza, puede aumentar si se pide que la poligrafía real sea cerrada y simétrica (gráfico 17).

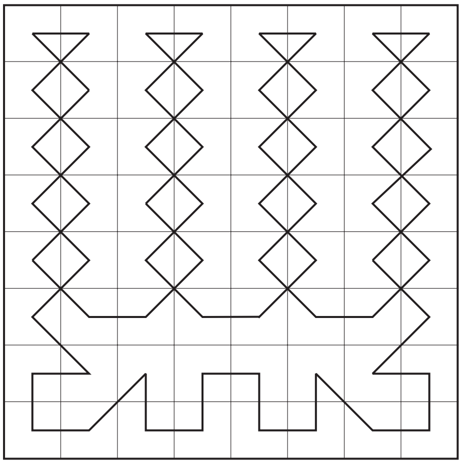


Gráfico 17

La dama, por su gran movilidad, hace que sus poligrafías sean más variadas y fáciles de hallar que las de rey. En el gráfico 18 se muestra una cerrada y simétrica respecto del centro del tablero. Además, todas las poligrafías de rey, torre o alfil también se pueden realizar con la dama.

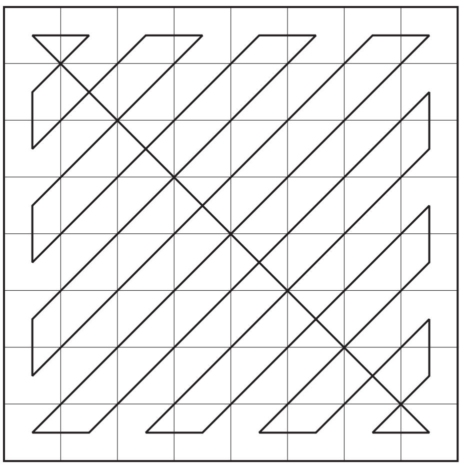


Gráfico 18

Las poligrafías de torre son triviales. En el gráfico 19 se representa una cerrada y simétrica respecto de los dos ejes.

En el caso del alfil, evidentemente sólo podemos pedirle que recorra las casillas de su color de origen. En el gráfico 20 se representa una poligrafía en la que el alfil parte de una esquina y termina en la otra, recorriendo todo el tablero en un mínimo de 17 movimientos.

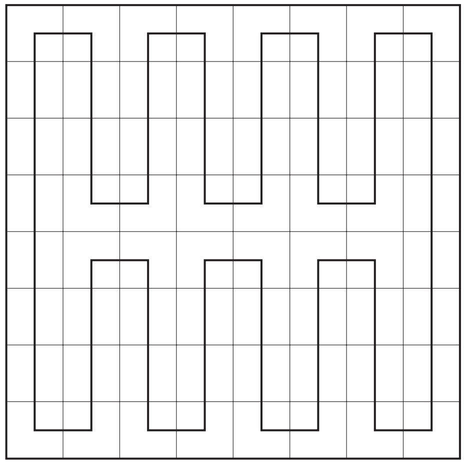


Gráfico 19

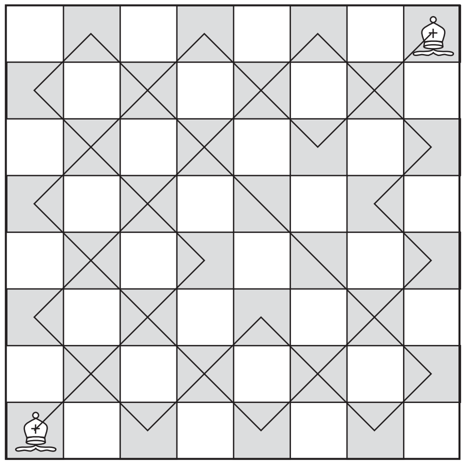


Gráfico 20

La dama, por su gran movilidad, hace que sus poligrafías sean más variadas y fáciles de hallar que las de rey. Además, todas las poligrafías de rey, torre o alfil también se pueden realizar con la dama.

Por último están las poligrafías de caballo que, según afirma la Enciclopedia de Diderot y D'Alembert, ya se conocían antiguamente en la India. En el siglo XVIII fueron objeto de estudio de matemáticos de la talla de Euler y De Moivre. En el gráfico 21 vemos, incompleta, una poligrafía hallada por De Moivre en 1722. Animamos al lector a deducir la pauta seguida y completar el recorrido (Frabetti, 1995).

También se pueden considerar poligrafías de caballo sobre tableros irregulares (Bolt, 1998).

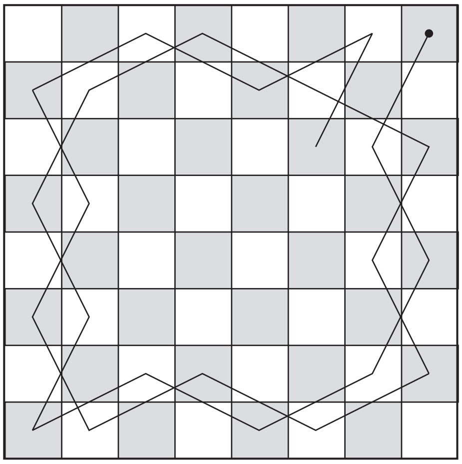


Gráfico 21

Al galope

Comenzando en la casilla marcada, y siguiendo a salto de caballo, descubrirá una cita y el nombre de su autor (gráfico 22).

DIOS	♘	BE	♘	♘	♘	AL
♘	♘	QUE	ES	FA	♘	♘
♘	ES	♘	TO	♘	EL	TI
♘	CON	BiÓ	♘	CA	**LA**	♘
CRI	MUN	♘	LEO.	♘	MÁ	♘
♘	♘	GA	EL	MA	♘	♘
DO.	♘	♘	♘	LI	♘	TE

Gráfico 22

Además el recorrido del caballo es una poligrafía sin cruces simétrica de longitud máxima en un tablero 7x7.

Otros problemas

El ajedrez es una fuente inagotable de problemas de contenido matemático. Se exponen a continuación algunos más donde el ajedrez sirve de excusa para plantear problemas de todo tipo.

Campeonato del mundo

En el campeonato del mundo de ajedrez han participado 101 grandes maestros. El torneo se ha disputado por el sistema de eliminatorias a una sola partida.

¿Cuántas partidas se jugaron en total antes de coronar al campeón definitivo?

El taller de matemáticas no se concibe como una clase más de Matemáticas, ni de ampliación ni de recuperación de conocimientos; se trata más bien de trabajar los conceptos ya adquiridos dándoles una dimensión práctica y prestando especial atención a los contenidos de carácter procedimental y actitudinal.

Peón envenenado

Es un juego para 2 jugadores. Disponemos 15 peones en fila india. El juego consiste en tomar en cada turno 1, o 2, o 3 peones. Pierde el que tome el último peón. ¿Cuál es la estrategia ganadora?

Un torneo de ajedrez

Siete chicos participan en un torneo de ajedrez por el sistema de liga a una vuelta, es decir, cada uno de ellos tiene que jugar una partida con todos los demás. ¿Cuántas partidas se jugarán en total? ¿Y en el caso de que el torneo se dispute a doble vuelta, jugando con cada contrincante una partida con piezas blancas y otra con negras?

Sumapiezas

Sabiendo que se trata de sumas horizontales y verticales, averiguar qué dígito del 0 al 5 le corresponde a cada pieza del ajedrez (gráfico 23).

♔	♝	♕	♟	♔	13
♕	♖	♕	♟	♟	21
♞	♝	♞	♟	♝	8
♖	♞	♕	♟	♞	12
♟	♖	♖	♟	♖	17
13	10	18	20	10	

Gráfico 23

Cuadrado mágico

Extraer de la caja 16 piezas de ajedrez: 4 alfiles, 4 caballos, 4 torres y 4 peones (dos de cada color). Situarlas en un tablero de 4x4 casillas de manera que:

a) En cada fila y en cada columna se encuentren las cuatro piezas distintas.

b) Ampliar la misma condición a las dos diagonales principales (de 4 casillas).

c) Añadir a las condiciones anteriores la de que cada pieza ocupe casilla de su color.

Una solución se refleja en el gráfico 24.

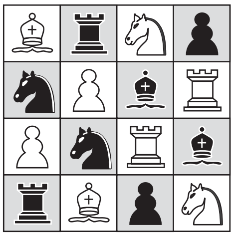


Gráfico 24

En un tablero de ajedrez se colocan los dos reyes, uno blanco y uno negro. ¿De cuántos modos diferentes pueden disponerse los reyes? ¿Y si consideramos sólo las posiciones legales en ajedrez, es decir, aquellas en las que un rey no pueda capturar al otro?
Frabetti

Problemas de probabilidad

Tomando como base el juego del ajedrez también se pueden plantear problemas dentro del campo de la probabilidad.

a) Tenemos todas las piezas del juego en su caja de madera, introducimos la mano sin mirar al interior y extraemos la primera pieza que nos tropezamos. Qué probabilidad hay de que la pieza extraída sea:
- i) De color negro.
- ii) Un caballo.
- iii) El rey blanco.
- iv) Cualquiera pero que no sea una torre.

b) En las condiciones de la cuestión anterior, sacamos dos piezas al mismo tiempo. Qué probabilidad hay de que sean:
- i) Del mismo color.
- ii) De distinto color.
- iii) Un alfil y una dama.
- iv) Cualesquiera que no sean peones.

c) Responder a las preguntas de la cuestión anterior, pero suponiendo que después de extraída la primera pieza, ésta se devuelve a la caja antes de extraer la segunda.

d) Lanzamos un dardo sobre el tablero de ajedrez. ¿Qué probabilidad tenemos de alcanzar una casilla negra? ¿Y una blanca?
e) El mismo dardo se lanza ahora dos veces sobre el tablero. ¿Qué probabilidad hay de introducirlo en dos casillas del mismo color? ¿Y de una misma columna?

f) Se tira una moneda sobre el tablero de ajedrez. ¿Qué probabilidad hay de que caiga justamente dentro de una casilla sin cortar sus bordes? Se toma como diámetro de la moneda la cuarta parte de la longitud de una de las 64 casillas. Representar gráficamente la función que nos da la probabilidad pedida dependiendo del diámetro de la moneda y suponiendo fijo el lado de la casilla.

g) Dos jugadores de ajedrez, A y B, juegan un torneo que se termina al ganar uno de ellos dos partidas. A tiene una probabilidad de ganar de 2/10, y B de 3/10, siendo la probabilidad de tablas 1/2. ¿Cuál es la probabilidad de que gane A el torneo?

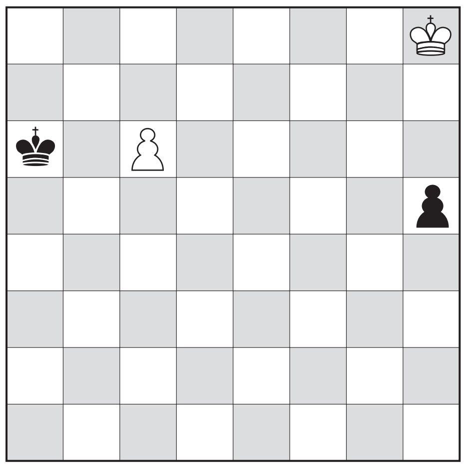


Gráfico 25
Juegan blancas y tablas

Geometría del tablero de ajedrez

Veamos para terminar un problema de ajedrez que se basa en la particular geometría del tablero.

En la posición del gráfico 25, perteneciente a un estudio de Richard Réti (Pachman, 1982), parece que las piezas blancas

están perdidas, porque aparentemente su rey no puede alcanzar al peón negro en su camino hacia la coronación, mientras que el peón blanco está a merced del rey contrario.
La solución es de una genial simplicidad y se basa en que en el tablero de ajedrez la menor distancia entre dos casillas no siempre es la línea recta. Para anotar las jugadas emplearemos el sistema algebraico.

Según la regla del cuadrado de coronación de un peón, las blancas tendrían que abandonar; aparentemente, su rey no puede alcanzar al peón de h5, y el peón blanco de c6 puede ser capturado con una única jugada del rey negro (Rb6). A pesar de ello, las blancas consiguen tablas en este sensacional final de juego: 1. Rg7, h4; 2. Rf6, Rb6; 3. Re5, Rxc6; 4. Rf4 y el cuadrado de coronación se ha alcanzado. La clave del problema es que al circular el rey por la diagonal se acerca al mismo tiempo a los dos peones. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALAYO, F.; FERNANDEZ, S.; BASARRATE, A.; FOUZ, F. (1991): "La resolución de problemas", *Sigma*, nº10, 2-89.

BOLT, B. (1998): "¿Qué es la geometría?", *SUMA*, nº 29, 5-16.

BONSDORFF, E.; FABEL, K.; RIIHIMAA, O. (1974): *"Ajedrez y Matemáticas"*, Martínez Roca, Colección Escaques nº 48, Barcelona.

CORBALÁN, F. y GAIRÍN, J. M. (1988): *"Problemas a mí"*, Edinumen, Madrid.

CORZO, R. Y PAREDES, F.J. (2000): "Algoritmos genéticos: la evolución como modelo matemático", *SUMA*, nº 35, 15-20.

FERNANDEZ, S. (1991): "El ajedrez, un recurso en el aula de Matemáticas", *SUMA*, nº 7, 53-60.

FRABETTI, C. (1995): *"El tablero mágico"*, Gedisa, Colección juegos nº 20, Barcelona.

GARDNER, M. (1972): *"Nuevos pasatiempos matemáticos"*, Alianza, Madrid.

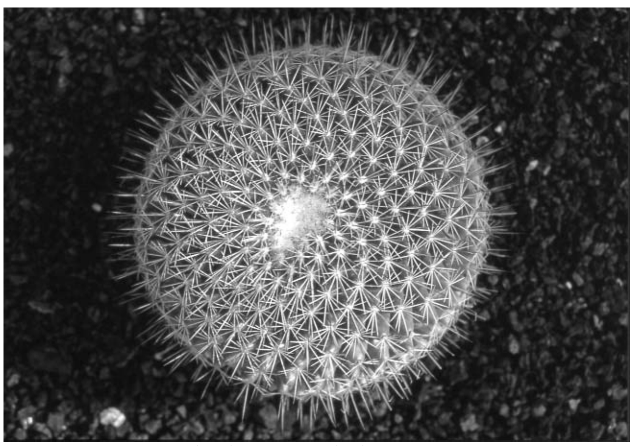
GARDNER, M. (1981): *"¡Ajá!"*, Labor, Barcelona.

IFRAH, G (1987): *"Las cifras. Historia de una gran invención"*, Alianza, Madrid.

PACHMAN, L. (1982): *"Práctica de los finales en el ajedrez"*, Martínez Roca, Colección Escaques, nº 69, Barcelona.

PERELMAN, Y. (1968): *"Matemáticas recreativas"*, Martínez Roca, Barcelona.

SEGARRA, L. (2001): *"Problemates"*, Graó, Barcelona.



Jardín de Cáctus. Isla de Lanzarote.
Foto FMC

SUMA 44

Noviembre 2003, pp. 65-70

Proporcionalidad. Razones internas y razones externas

Se analiza la resolución de problemas de proporcionalidad en 399 alumnos del nivel primario y medio. Se plantean problemas que incluyen razones externas (aquellas cuyos términos corresponden a distintas magnitudes) y problemas que incluyen razones internas (aquellas cuyos términos pertenecen a la misma magnitud). Se examina si el nivel de dificultad en la resolución es el mismo en ambos tipos de problemas y si los alumnos privilegian el uso de estrategias específicas en cada caso.

The solving process to proporcionality problems is analysed in 399 primary and secondary students. Two kinds of problems are set out: some including external reasons (those whose terms correspond to different magnitudes) and some others including internal ones (those whose terms belong to the same magnitude). It is examined whether the level of difficulty in their solving is the same in the two kinds of problems and whether students privilege the use of specific strategies in each case.

Nuestro interés es analizar los factores que influyen en el trabajo de los alumnos en tareas de proporcionalidad. Este tema es de gran importancia en el currículo escolar porque está relacionado con la mayoría de los contenidos de Matemáticas y con los de otras asignaturas como Física, Biología, Química, etc.

La necesidad de considerar las cantidades en relación unas con otras, más allá de abordarlas de modo absoluto constituye un problema para muchos alumnos y se torna un obstáculo para la comprensión de contenidos que deben aprenderse y que guardan relación con la noción de proporcionalidad.

La comprensión de esta noción y en consecuencia el éxito en la resolución de problemas de proporcionalidad está ligada a factores internos, como es el desarrollo cognitivo del sujeto, y a factores externos como, los números que constituyen las razones y las magnitudes que se comparan.

Con respecto al desarrollo cognitivo encontramos en los trabajos de Piaget una caracterización del mismo. Abordó el tema principalmente en sus estudios referidos a la probabilidad, las leyes físicas y las relaciones espaciales.

La noción de proporción, según Piaget, se encuentra en el nivel de las operaciones formales, es decir, que las operaciones no se realizan directamente sobre los objetos sino que se trata de operaciones de operaciones, *"(...) las proporciones, por ser relación de relaciones, requieren psicológicamente de la intervención de lo formal (por más concretas que ellas sean, desde el punto de vista lógico, en su contenido)"* (Piaget e Inhelder, 1974, págs. 166-167).

> *La necesidad de considerar las cantidades en relación unas con otras, más allá de abordarlas de modo absoluto constituye un problema para muchos alumnos y se torna un obstáculo para la comprensión de contenidos que deben aprenderse y que guardan relación con la noción de proporcionalidad.*

María Virginia Rapetti
Ciafic- Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (Conicet)
Buenos Aires, Argentina

La adquisición de la noción de proporcionalidad supone:

- El paso de una forma cualitativa (que permite la comprensión de la equivalencia de dos relaciones) a una cuantificación: "La construcción de las proporciones no es otra cosa que el paso de las correspondencias cualitativas entre dos encajes lógicos del mismo "tipo", a la igualdad entre dos encajes cualitativos del mismo orden (o valor métrico)" (Piaget, 1948, pág. 438).

- El descubrimiento de compensaciones. Éstas desde el punto de vista psicológico preceden a la construcción de las proporciones: "(...) la adquisición del esquema operatorio de las proporciones numéricas o métricas supone anticipaciones cualitativas bajo forma de compensaciones mediante equivalencia y proporciones lógicas" (Piaget; Inhelder, 1972, pág. 267).

- La intervención de la abstracción reflexiva a partir de la multiplicación: "(las proporciones) se obtienen por abstracción reflexiva a partir de la multiplicación en tanto que igualdad de relaciones multiplicativas (divisiones)" (Piaget; García ,1971, pág.69).

Con respecto a los factores externos, como las cantidades, podemos señalar el trabajo de Noelting (1980 a-b) cuyo objetivo es establecer si el desarrollo cognitivo es jerárquico y caracterizar, en ese caso, los distintos estadios en los que se divide. Para ello utilizó la mezcla de líquidos como única clase de contenido pero la presentó variando las relaciones cuantitativas entre las partes.

> *Fruedenthal (1978) en su fenomenología didáctica del concepto de razón, clasifica las razones en* internas *y* externas*. Las primeras son razones entre términos pertenecientes a un sistema, por ejemplo, dos longitudes, dos pesos; corresponden a la misma magnitud. Las razones externas son razones entre términos de distintos sistemas, por ejemplo, espacio y tiempo.*

Estas se describieron en veinticinco ítems y se estableció un orden de dificultad entre ellos. Por ejemplo, se observó que comparar una mezcla formada con 1 vaso de naranja y 2 de agua, con otra formada con 2 de naranja y 4 de agua, es más fácil que comparar una mezcla formada con 2 de naranja y 3 de agua con otra que contenga 3 de agua y 4 de naranja.

En su análisis Noelting utiliza otro elemento importante que es la clasificación de las razones según las magnitudes que se comparan. Fruedenthal (1978) en su fenomenología didáctica del concepto de razón, clasifica las razones en internas y externas. Las primeras son razones entre términos pertenecientes a un sistema, por ejemplo, dos longitudes, dos pesos, en otras palabras corresponden a la misma magnitud. Las razones externas son razones entre términos de distintos sistemas, por ejemplo, espacio y tiempo.

En nuestro trabajo llamaremos ***"problemas E"*** a los que contienen razones externas y ***"problemas I"*** a los que contienen razones internas. Nos proponemos estudiar cómo resuelven los alumnos estas clases de problemas y nos planteamos las siguientes preguntas:

- ¿El nivel de dificultad al resolver problemas "E" es el mismo que para resolver problemas "I"?
- ¿Existen estrategias específicas para resolver ambas clases de problemas?

Método e instrumento

La muestra de nuestro estudio estuvo compuesta por 399 alumnos de ambos sexos, pertenecientes a dos escuelas de la ciudad de Buenos Aires. Participaron: 62 alumnos de 4º grado (9 años), 76 de 5º grado (10 años), 58 de 6º grado (11 años), 69 de 7º grado (12 años), 69 de 1º año (13 años) y 65 de 2º año (14 años). Se utilizó una prueba formada por seis ejercicios. Cada alumno recibió un cuadernillo de seis hojas, una por cada problema. En cada hoja figura el enunciado del problema con una ilustración correspondiente y un lugar donde los alumnos debían consignar la respuesta y su justificación.

El orden de presentación de los problemas era diferente para evitar que una secuencia única influyera en el resultado. Cada ejercicio se evalúo con 1 si estaba bien resuelto y en caso contrario se le asignó 0. La evaluación fue colectiva.

Ejercicio I:

Juan tiene 91 ovejas en su campo de 7 hectáreas. Pedro tiene un campo de 4 hectáreas y 52 ovejas. En los dos campos crece el mismo tipo de pasto y las ovejas son de la misma clase.
¿Las ovejas de Juan tienen la misma cantidad de pasto para comer que las de Pedro?

Ejercicio II:

El micro que viaja de Buenos Aires a Mar del Plata tarda 5 horas para recorrer los 400 km que separan

ambas ciudades. El micro que viaja de Buenos Aires a Córdoba tarda 11 horas para recorrer 700 km.
¿Qué micro viaja a más velocidad?

Ejercicio III:

En un supermercado 200 kg del café marca X cuestan 1600 $ y el café marca Z, de la misma calidad, está de oferta: se venden 350 kg por 2000 $.
¿Es conveniente la oferta?

Ejercicio IV:

En 7º grado turno mañana hay 20 alumnos y en 7º turno tarde hay 32. De los alumnos de la mañana 15 aprobaron la prueba de matemática y de los de la tarde aprobaron 25.
¿Qué grado es mejor en matemática?

Ejercicio V:

Hay 2 bolsas. La primera tiene 5 bolillas con números pares y 5 con números impares. La segunda bolsa tiene 3 bolillas con números pares y 3 con números impares.
¿Cuál debería elegirse para tener mayor oportunidad de extraer, sin mirar, un número par?

Ejercicio VI:

En una jarra A se colocan 2 vasos de jugo de naranja y 4 de agua. En la jarra B se colocan 3 vasos de jugo de naranja y 6 vasos de agua. Todos los vasos tienen el mismo tamaño.
¿Cuál de las dos jarras tendrá jugo con más gusto a naranja?

En los tres primeros se comparan magnitudes diferentes, por ejemplo, en el ejercicio I el número de ovejas y la superficie de pasto, en el II el espacio y la velocidad. En los tres últimos se trata de la misma magnitud.

En nuestro trabajo llamaremos "problemas E" *a los que contienen razones externas y* "problemas I" *a los que contienen razones internas. Nos proponemos estudiar cómo resuelven los alumnos estas clases de problemas.*

Las relaciones cuantitativas consideradas son las que corresponden al estadio operatorio concreto (2A y 2B) y al estadio operatorio formal inferior (3A) mencionados en el trabajo de Noelting (1980 a-b)

Resultados obtenidos

Realizaremos el análisis de los resultados en dos etapas: en la primera consideraremos el éxito en la resolución de los problemas y en la segunda el análisis de las estrategias utilizadas.
a) Exito en la resolución de los problemas:

Problema	Respuestas correctas	%
I (ovejas-superficie)	198	49,6
II (espacio-tiempo)	239	59,9
III (peso-precio)	219	54,9
IV (alumnos aprobados)	43	10,8
V (probabilidad)	103	25,8
VI (mezcla de líquidos)	121	30,3

Tabla 1: Distribución de frecuencias de respuestas correctas en cada problema

Puede observarse la diferencia entre los porcentajes que corresponden a los tres primeros problemas y los que corresponden a los tres últimos. En los problemas "E" los porcentajes de respuestas correctas se encuentran aproximadamente entre el 50% y 60%. Los problemas "I" resultan más difíciles que los primeros ya que no superan el 30.3 %.

Como nuestro interés es comparar el trabajo de los alumnos en cada uno de esos tipos de problemas, asignamos a cada sujeto una doble puntuación que representamos con un par de números (a;b). El primero indica el número de problemas "E" bien resueltos y el segundo el de los problemas "I". Los posibles valores están comprendidos entre 0 y 3. Así por ejemplo el par (2; 3) significa que el sujeto resolvió bien dos problemas "E" y 3 problemas "I".

En la siguiente tabla presentamos la distribución de las frecuencias de aciertos en las dos categorías de problemas:

		Problema "I"					
		0	**1**	**2**	**3**	**Total**	**%**
Problema "E"	**0**	93	9	1	0	***103***	25,8
	1	49	16	2	0	***67***	16,8
	2	50	32	15	2	***99***	24,8
	3	34	44	34	18	***130***	32,6
	Total	***226***	***101***	***52***	***20***	***399***	
	%	56,6	25,3	13,0	5,0		

Tabla 2: Frecuencias de respuestas correctas en los problemas "E" y en los problemas "I".

Los porcentajes marginales para los problemas "I" muestran mayor variabilidad comparados con los porcentajes marginales de los problemas tipo "E". Más de la mitad de los sujetos

(56,6%) no ha resuelto bien ningún problema del tipo "I" y sólo el 5 % ha resuelto todos.

Las frecuencias 0 en las casillas (0;3) y (1;3) muestran que ningún alumno que no haya resuelto bien los problemas "E" resolvió bien los de tipo "I".

Para comparar el trabajo de los alumnos en uno y otro tipo de problemas se analizaron los porcentajes obtenidos en cada categoría de respuesta por pares de problemas.

Tipos de respuestas.	Frec.	%
Categoría 1: (3;0)	34	8,5
Categoría 2: (3;1) (2;0)	93	23,3
Categoría 3: (3;2) (2;1) (1;0)	115	28,8
Categoría 4: (3;3) (2;2) (1;1) (0;0)	142	35,6
Categoría 5: (0;1) (1;2) (2;3)	13	3,3
Categoría 6: (0;2) (1;3)	1	0,3
Categoría 7: (0;3)	0	0,0

Tabla 3: Distribución de frecuencias de las categorías de respuestas por pares de problemas

Las tres primeras categorías corresponden a los alumnos que contestan mejor los problemas "E" que los de tipo "I". Estos representan el 60.6%. Los que pertenecen a la categoría 4 son los que realizan de un modo similar ambos tipos de problemas y son el 35.6 %. Finalmente los que se desenvuelven mejor en los problemas de tipo "I" representan sólo el 3.6%.

Los distintos métodos utilizados por los alumnos para resolver los problemas los hemos clasificado en ocho estrategias: Equivalencia de fracciones, División, Comparación intuitiva, Regla de tres, Desarrollo en serie, Porcentaje, Estimación de una relación y "Por cada".

Esto indica, a nuestro entender, que los primeros son más fáciles que los segundos. La resolución de los problemas "E" es independiente de la de los problemas "I", $\chi^2 = 128.46$ $p<0,00$, gl.= 9.

Análisis de las estrategias utilizadas

En este punto consideraremos los distintos métodos utilizados por los alumnos para resolver los problemas. Para ellos los hemos clasificado en ocho estrategias que ejemplificamos a continuación:

Estrategia 1: "Equivalencia de fracciones"
Se transforman las fracciones en fracciones equivalentes y se las compara. Ejemplo: "Podrán comer lo mismo porque 91/7 = 52/4 , ya que ambas son iguales a 364/28". (Problema I)

Estrategia 2: "División"
El sujeto realiza una división entre cantidades de distintas magnitudes para comparar el valor que le corresponde a la unidad, en otras palabras compara las razones.
Ejemplo: "400 : 5 = 80; 700 : 11 = 63,6. Viaja más rápido a Mar del Plata porque a Córdoba va a 63 km/h". (Problema II)

Estrategia 3: "Comparación intuitiva"
Se establece una comparación entre las cantidades basada en una estimación aproximada, sin realizar un cálculo operatorio complejo.
Ejemplo: "Si es conveniente, porque es un poco más caro pero hay mucha más cantidad de café que en X " (Problema III)

Estrategia 4: "Regla de tres"
Se utilizan tres de los valores que intervienen para calcular el cuarto, mediante regla de tres, y luego se compara ese resultado con el cuarto valor que figura en el enunciado
Ejemplo: "Si quisiéramos comprar 350 kg es conveniente porque sino el café marca X saldría 2800$" (Problema III)

200 kg ......1600$
1 kg ....8 $
350 kg x

Estrategia 5: "Desarrollo en serie"
Consiste en desarrollar una secuencia de relaciones aditivas o multiplicativas que permite vincular la cantidad inicial de la primera razón con la que se desea alcanzar y extender dicha secuencia a la otra razón. Esta estrategia fue denominada "*building-up strategy* " por Hart (1981).
Ejemplo: "Si conviene, se ahorra 800$ que sería el valor de 100 kg de café marca X." (Problema III)

200 kg ......1600 $
100 kg ....800 $
50 kg ....400 $
150 kg ......1200 $
350 kg ......2000 $

Estrategia 6: "Porcentaje"
El sujeto calcula los porcentajes y luego los compara. Ejemplo: "Es mejor el grupo de la tarde porque pasó el 78,13% y en el turno de mañana pasó el 75%". (Problema IV)

Estrategia 7: "Estimación de una relación entre la parte y el todo o entre parte-parte"
El sujeto compara las cantidades con relaciones como "el doble", "el triple", etc.
Ejemplos: "Ambas tendrán el mismo gusto porque en las dos habrá 1/ 3 de naranja" (Problema VI)
"En el turno de mañana pasaron 15 - ¼ de la clase- mientras que en el de la tarde pasaron 25 y el cuarto de 32 es mayor que 7 -los que no pasaron-. De esta manera se puede ver que en proporción los de la tarde son mejores en matemáticas". (Problema IV)

Estrategia 8: "Por cada"
En cada razón se establece una relación parte-parte teniendo en cuenta una unidad para comparar. Ejemplo: "Tendrán igual sabor porque en la jarra A por 1 vaso de naranja hay 2 vasos de agua y en B también". (Problema VI)

Para evaluar la frecuencia del uso de estas estrategias se calculó el porcentaje de veces que éstas aparecen en las respuestas correctas de cada uno de los seis ejercicios. (Los totales de respuestas correctas se encuentran en la tabla 1)

Estrategia	I ovejas - superficie	II velocidad	III precio - peso	IV alumnos aprobados	V probabilidad	VI mezcla de líquidos
E1: Equivalencia de fracciones	2,5	1,7	1,8	20,9	1	10,9
E2: División	9,5	54,2	26,9	4,6	--	--
E3: Comparación Intuitiva	--	--	27,4	16,3	--	--
E4: Regla de tres	1,5	2,9	18,7	--	--	--
E5: Desarrollo en serie	1	1,4	13,2	--	--	--
E6: Porcentaje	--	--	0,9	25,6	10,7	4,2
E7: Estimación de una relación	--	26,1	11	32,6	27,2	70,6
E8: "por cada"	--	--	--	--	1	14,3
Otras	--	13,4	--	--	60,2	--

Tabla 4: Porcentaje de estrategias utilizadas en los distintos problemas

Los porcentajes muestran que el uso de las estrategias no es el mismo en todos los problemas. La *"equivalencia de fracciones"* es poco usada pero se recurre a ella en todas las clases de ejercicios.

La *"división"* se utiliza preferentemente en los problemas "E", es usada por el 95% de los sujetos en el ejemplo de las ovejas y por el 54,2% en el de la velocidad. El porcentaje del 95 % puede desdoblarse en dos: un 88% calculó el número de ovejas por hectárea y el 7% la porción de hectárea que le corresponde a cada oveja. Esto muestra una preferencia por dividir usando un dividendo mayor que el divisor.

La estrategia que denominamos *"desarrollo en serie"* y la de *"regla de tres"* son semejantes, podríamos interpretar la segunda como un caso particular y más breve de la primera. Ambas se usaron casi exclusivamente en el problema del café; para resolverlo el 13,2% de los alumnos utilizaron la primera y 18,7% la segunda.

En los problemas de probabilidad y de mezcla, se relacionan las partes entre si o la parte con el todo y se busca estimar una relación entre ellas. Así se dice que en ambas bolsas las probabilidades son iguales porque en las dos hay la misma cantidad de números pares e impares; esta afirmación se encontró en el 60,2% de las respuestas. En el ejemplo de las jarras, se explica que los vasos de agua son el doble de los de naranja o que los de naranja son la tercera parte del total (70,6%).

Se encontró que los problemas de tipo "E" resultan más fáciles que los de tipo "I" ya que, por una parte, los porcentajes de resolución son considerablemente mayores y, por otra, los alumnos que los resuelven bien no necesariamente resuelven bien los segundos.

Conclusión

Con el objetivo de analizar el trabajo de los alumnos en problemas de proporcionalidad hemos considerado dos tipos de factores, los internos (el desarrollo cognitivo) y los referidos al tipo de problema planteado. Con respecto al primero citamos la posición de J.Piaget y los trabajos de G.Noelting. Este estableció una secuencia de adquisición de la noción de proporción a propósito de la resolución de un problema único: la mezcla de líquidos y consideró las variaciones de las relaciones cuantitativas entre vasos con jugo de naranja y vasos con agua.

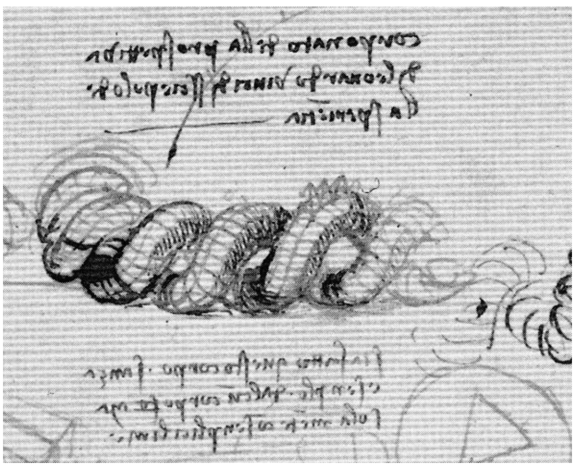
En nuestro trabajo por el contrario, hemos mantenido invariantes las relaciones cuantitativas y hemos variado las magnitudes en juego planteando distintos tipos de problemas: los que relacionan magnitudes diferentes (problemas "E") o los que se refieren a una magnitud única (problemas "I").

Se encontró que los primeros son más fáciles que los segundos ya que, por una parte, los porcentajes de resolución son considerablemente mayores y, por otra, los alumnos que los resuelven bien no necesariamente resuelven bien los segundos.
Con respecto al uso de estrategias se observó que, o bien se

trata de resolverlos en forma intuitiva buscando una relación entre las cantidades o bien, cuando esto no es posible, se recurre a técnicas como la división, la equivalencia de fracciones, el cálculo de porcentaje, la regla de tres, etc. Algunos de estos procedimientos son más empleados en algún ejercicio en particular, así la *"división"* para la comparación de magnitudes diferentes, el *"porcentaje"* para aquellos casos en que se compara la parte con el todo, etc. Estas observaciones muestran que el aprendizaje de la noción de proporción no es simple y requiere que el alumno se enfrente a una gama de situaciones diferentes en complejidad numérica y en el tipo de magnitudes relacionadas, para que alcance un conocimiento más acabado de esta noción. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

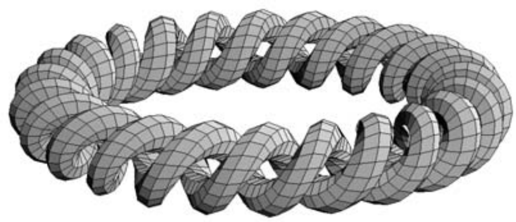
FREUDENTHAL, H. (1978): *Weeding and Sowing-Preface to a Science of Mathematical Education*, Dordrecht, D.Diedel.
HART, K. (1981): *Children's understanding of Mathematics: 11-16.* London, J.Murray Lid.
NOELTING, G. (1980,a): " The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part 1: Differentiation of stages", *Educational Studies in Mathematics, 11,* 2, 217-253.
NOELTING, G. (1980,b): " The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part 2: Problem-structure et succesive stages; Problem solving strategies and the mechanism of adaptative restructuring", *Educational Studies in Mathematics, 11,* 3, 331-363.
PIAGET, J. ; INHELDER, B. (1948): *La represéntation de l'espace chez l'enfant,* Paris, P.U.F
PIAGET, J.; INHELDER, B. (1972): *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*, Buenos Aires, Paidós.
PIAGET, J.; GARCIA, R. (1971): *Les explications cuasales*, Paris, P.U.F
PIAGET, J.; INHELDER, B. (1974): *La gènese de l'idée de hasard chez l'enfant*, Paris, P.U.F, 2º ed.



"Corpo nato della prospettiva di Leonardo Vinci discepolo della sperientia".

"sia fatto questo corpo sanza esemplo d'alcun corpo ma solamente con semplici linee".

Leonardo da Vinci (1452-1519)
Codice atlántcio (1490 ca.), folio 191, recto.



"Cuerpo nacido de la perspectiva de Leonardo Vinci discípulo de la experiencia".

"se ha hecho este cuerpo sin ejemplo de algun cuerpo, solamente con simples líneas".

Leonardo da Vinci (1452-1519)
Codice atlántcio (1490 ca.), folio 191, recto.
(Rehecho con *Mathematica por FMC, 2003).*

SUMA 44
Noviembre 2003, pp. 71-81

Conocimientos matemáticos de maestros en formación

Se presentan los resultados obtenidos en una prueba de conocimientos matemáticos aplicados a maestros en formación de distintas especialidades de la Universidad de Murcia, comparándolos con estudios anteriores y se analizan las respuestas, efectuando un estudio estadístico para conocer si las diferencias obtenidas por distintas variables de corte son significativas. De los resultados se desprende la necesidad de afianzar algunos contenidos matemáticos.

This article shows the result of a mathematical knowledge test given to trainee primary teachers of different specialities at Murcia University. They are compared to former surveys and their answers analysed through a statistical study, so that it can be seen if the differences obtained due to the cut variables are significant. From such results we can gather that some mathematical knowledge is in need of strengthening.

En el Curso 2001/02, (Hernández, Noda, Palarea, Socas, 2001) presentaron los resultados del *Estudio sobre habilidades básicas en Matemáticas de alumnos de Magisterio* llevando a cabo un estudio con 833 alumnos de siete universidades españolas, entre ellas la Universidad de Murcia. Para ello pidieron la colaboración de profesores del Área de Didáctica de las Matemáticas que pasaron el cuestionario a sus alumnos para después ser corregidos, analizados y totalizados por el equipo investigador.

Este curso 2002/03, en un ambicioso trabajo de investigación, hemos querido conocer si los resultados anteriores se mantenían o por el contrario se modificaban. Para comprobarlo, a principios de curso pasamos la misma prueba de conocimientos matemáticos a alumnos de 2º y 3º de las diplomaturas de maestro que en el primer cuatrimestre tenían una asignatura dependiente del Área de Didáctica de las Matemáticas. Los alumnos que respondieron a nuestros cuestionarios han sido de Primaria (2º y 3º), Educación Física (2º), Francés (2º), Inglés (2º) y de Educación Infantil (3º). El que sean alumnos de cursos superiores es debido a que las asignaturas troncales de Matemáticas y su didáctica se cursan en estos años de diplomatura en la Universidad de Murcia.

Pasamos la misma prueba de conocimientos matemáticos a alumnos de 2º y 3º de las diplomaturas de maestro que en el primer cuatrimestre tenían una asignatura dependiente del Área de Didáctica de las Matemáticas.

La prueba la componen 30 cuestiones numeradas, correspondientes a los contenidos siguientes: 1) Números y operaciones; 2) Medida; 3) Geometría; 4) Análisis de datos, estadística y probabilidad y 5) Álgebra. Y que en su presentación han sido mezclados intencionadamente. De las respuestas a cada cuestión señalamos la correcta.

La prueba se pasó en la primera semana de clase, en dos días diferentes para evitar el cansancio, a un total de 240 alumnos. Se consideran en este estudio como variables de corte: edad, género y especialidad de maestro. La edad se ha dicotomiza-

Andrés Nortes Checa. *anortes@um.es*
Tania Huedo Medina. *hmtania@um.es*
José Antonio López Pina. *jlpina@um.es*
Rosa Martínez Artero. *rosamart@um.es*
Universidad de Murcia

do en menos de 25 años y 25 o más, tomando esta edad como referente a la entrada en la universidad de mayores de 25 años.

Se analizan los resultados de la prueba de matemáticas, señalando los porcentajes de las respuestas a las distintas 30 cuestiones desglosadas en 49 items y los comparamos con los del *Estudio sobre habilidades básicas en Matemáticas de alumnos de Magisterio (EHBMM)*, analizando cualitativamente los errores que con más frecuencia se cometen en las cuestiones en las que el porcentaje "Bien" es inferior al 50%, completando con unos resultados estadísticos para conocer si las diferencias obtenidas por las variables de corte son significativas, aplicando para ello el paquete estadístico SYSTAT (versión 7.0). Por último, a la vista de los resultados, establecemos unas reflexiones finales.

Se analizan los resultados de la prueba señalando los porcentajes de las respuestas a las 30 cuestiones y se comparans con los del Estudio sobre habilidades básicas en Matemáticas de alumnos de Magisterio (EHBMM), (Hernández, 2001).

En nuestro trabajo nos hemos planteado los siguientes **objetivos**:

- Averiguar los conocimientos matemáticos de los alumnos de las diplomaturas de maestro.
- Analizar las respuestas dadas por los alumnos.
- Comparar los resultados con estudios anteriores.
- Obtener resultados globales por edad, género, especialidad y bloques de contenidos.
- Conocer si existen diferencias significativas en los resultados en función de las variables anteriores.

Resultados de la prueba

Números y operaciones

RESOLVER UN PROBLEMA ARITMÉTICO

27. *Un coche tiene un depósito de combustible de 35 litros de capacidad. El coche gasta 7,5 litros de combustible por cada 100 km recorridos. Se empieza un viaje de 250 km con el depósito lleno. ¿Cuánto combustible quedará en el depósito al final del viaje?*

a) 16,25 l *b) 17,65 l* *c) 18,75 l* *d) 23,75 l*

Resultados:

%N.C.	%Mal	%Bien	N	%Bien EHBMM
10,74	54,13	**35,13**	240	**36**

La casi totalidad de alumnos que contestan mal a esta pregunta anotan como respuesta c), respondiendo así a lo que gastará en lugar de a la pregunta, que era ¿cuánto quedará?

Este problema está incluido en la Prueba de Evaluación TIMSS (1996) realizada a 7.596 alumnos de 13-14 años (7º y 8º E.G.B.) de todo el mundo incluida España, siendo el porcentaje de aciertos el siguiente:

	7º	8º
España	30	25
Internacional	35	39

PROPORCIONALIDAD

4. *En una oficina, el Sr. Pérez va a trabajar 2 días a la semana, el Sr. Fuentes va a trabajar 4 días a la semana y el Sr. Espinosa va a trabajar 6 días a la semana. El coste total de iluminación de la oficina (los tres despachos), por semana, asciende a 2400 ptas. ¿Cuánto debe pagar cada uno de los tres señores?*

*El Sr. Pérez. . . . .**(400)***
*El Sr. Fuentes. . . . .**(800)***
*El Sr. Espinosa . . . .**(1200)***

Resultados:

%N.C.	%Mal	%Bien	N	%Bien EHBMM
14,46	41,74	**43,80**	240	**35**

Las respuestas (Sr. Pérez, Sr. Fuentes, Sr. Espinosa) erróneas son de lo más variado y aquí presentamos algunas de ellas: (600, 1600, 2400), (6,48, 13,68, 20,52), (40, 80, 120), (166, 932, 1098), (480, 560, 1440), (400, 200, 133), (2, 4, 6), (228,4, 456,8, 685,2), (500, 900, 1000), (685,7, 1372,4, 2057,1), (4800, 9600, 14400), (1200, 580, 400),...

La causa de estos resultados puede obedecer a múltiples cuestiones.

23. *Los anuncios siguientes aparecieron en un periódico de un país cuya moneda es el zed.*

Edificio A	*Edifico B*
Se alquilan oficinas *85-95 metros cuadrados* *475 zeds al mes* 100-120 metros cuadrados 800 zeds al mes	*Se alquilan oficinas* 35-260 metros cuadrados 90 zeds por metro cuadrado al año

*Si una empresa está interesada en alquilar durante un año una oficina de 110 metros cuadrados, ¿en qué edificio de oficinas, **A** o **B**, debe alquilar la oficina para conseguir el precio más bajo? Razona la respuesta. (**A**)*

Resultados:

%N.C.	%Mal	%Bien	N	%Bien EHBMM
15,70	31,82	**52,48**	240	**56**

Los resultados de la prueba TIMMS (1996) fueron:

	7º	8º
España	6	15
Internacional	14	20

PROPORCIONALIDAD Y PROBLEMA CON FRACCIONES

*11. ¿Cuántas piezas de tela de 3/4 m de longitud podemos obtener a partir de una pieza de 27 m de longitud? (**36**)*

Resultados:

%N.C.	%Mal	%Bien	N	%Bien EHBMM
30,99	36,78	**32,23**	240	**35**

Hay muchas respuestas erróneas distintas. Aquí presentamos algunas de ellas: 2,01; 3; 2,25; 18; 20; 20,25; 3,6; 34; 27; 9; 3/4; 1; 108; 81/4; 28,5; 4; 39; 22; ...

El motivo es muy variado, desde los cálculos mal realizados, hasta utilizar un procedimiento equivocado.

*30. Laura guarda 1/6 de su paga. Javi recibe 600 ptas. y guarda ¼ de ellas. ¿Cuánto deberá recibir Laura para guardar lo mismo que Javi? (**900**)*

Resultados:

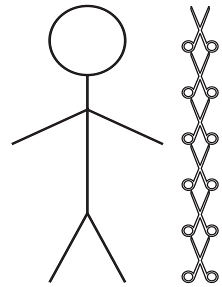
%N.C.	%Mal	%Bien	N	%Bien EHBMM
35,12	23,97	**40,91**	240	**28**

La respuesta correcta es 900, pero en las incorrectas aparece en varios casos 150, también 400 y en otras ocasiones 600. Hay alguna respuesta del tipo: 21; 800; faltan datos; ...

Los que responden 150 no resuelven la ecuación, los que indican 600 es la respuesta a lo que recibe Javi y las otras respuestas, ¿quién lo sabe?

PROPORCIONALIDAD Y ESTIMACIÓN

*18. Puedes ver la altura de **Mr. Short** medida con tijeras.*



*Mr. Short tiene un hermano Mr. Tall. Cuando medimos sus alturas con pilas, Mr Short mide 4 pilas y Mr. Tall mide 6 pilas. ¿Cuántas tijeras son necesarias para la altura de Mr. Tall? (**9**)*

Resultados:

%N.C.	%Mal	%Bien	N	%Bien EHBMM
7,438	25,620	**66,942**	240	**54**

TANTO POR CIENTO

5. Si el precio de una lata de guisantes sube de 60 a 75 ptas., ¿qué porcentaje de aumento ha habido en el precio?
*a) 15% b) 20% **c) 25%** d) 30%*

Resultados:

%N.C.	%Mal	%Bien	N	%Bien EHBMM
9,92	50,00	**40,08**	240	**40**

De las respuestas equivocadas la a) es la más repetida. Los alumnos confunden la subida de precio de 60 a 75 en valores absolutos con el aumento porcentual del 15% en valores relativos.

Los resultados en la Prueba TIMSS (1996) fueron:

	7º	8º
España	11	11
Internacional	23	29

*15. El precio de un abrigo es 15000 ptas.; si está rebajado en un 5% ¿cuánto costará? (**14.250 pts**)*

Resultados:

%N.C.	%Mal	%Bien	N	%Bien EHBMM
22,31	26,45	**51,24**	240	**65**

RESOLVER PROBLEMAS MAL DEFINIDOS

*10. Una señora cría durante 52 semanas una cabra y tres conejos. Compra 760 gramos de pienso para una semana. Si se comen todo el pienso menos 128 gramos ¿cuánto pienso le sobró al finalizar la semana? (**128**)*

Resultados:

%N.C.	%Mal	%Bien	N	%Bien EHBMM
14,05	26,45	**59,50**	240	**63**

*14. En el corral de Antonio hay gallinas y conejos. Si en total hay 116 patas ¿cuántas gallinas y conejos hay en dicho corral? (**Faltan datos**)*

Resultados:

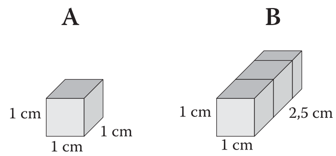
%N.C.	%Mal	%Bien	N	%Bien EHBMM
38,02	57,85	**4,13**	240	**6**

Este problema no se puede resolver por falta de datos, pero los alumnos que contestaron equivocadamente dan valores (gallinas, conejos) como los siguientes: (58, 29); (58, 4); (29, 29); (40, 20), (58, 58); (174, 0); (29, 17);...

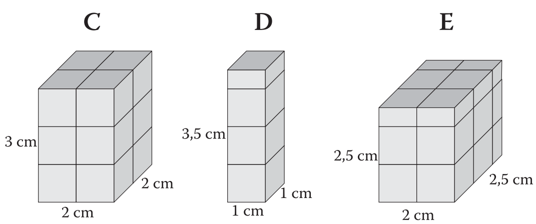
Medida

CÁLCULO DE VOLÚMENES

21. La cantidad de espacio ocupada por un bloque se llama volumen.
El volumen del bloque A mide 1 centímetro cúbico. El volumen del bloque B mide 2,5 centímetros cúbicos.



Calcular el volumen en centímetros cúbicos de cada bloque C, D y E.



*Volumen de **C** =(**12**) Volumen de **D** =(**3,5**) Volumen de **E** =(**12,5**)*

Resultados (1):

	%N.C.	%Mal	%Bien	N	%Bien EHBMM
C	21,49	20,66	**57,85**	240	**44**
D	18,59	6,20	**75,21**	242	**51**
E	24,79	35,95	**39,26**	242	**27**

La respuesta correcta de E es 12,5, pero responden erróneamente con los siguientes valores: 10; 2,5; 10,50; 5; 10; 13; 4,5; 6,10; 13; 1250; 13,75; 15;...

En el estudio Concepts in Secondary Mathematics and Science Proyect, CSMS (Hart, 1981), los resultados fueron:

	12 años	13 años	14 años
Volumen de C	56,2	57,0	68,1
Volumen de D	65,7	70,7	81,5
Volumen de E	14,2	18,7	27,9

ESTIMACIÓN

1. Un centímetro en este mapa representa 8 km en la realidad.

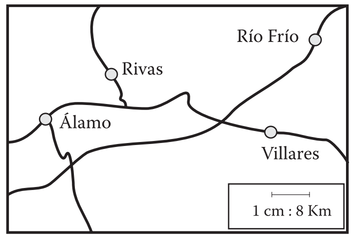


Gráfico reducido al 50%

Aproximadamente, ¿a qué distancia están Rivas y Villares en la realidad?

a) 4 km *b) 16 km* ***c) 35 km*** *d) 50 km*

Resultados:

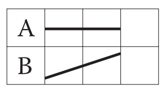
%N.C.	%Mal	%Bien	N	%Bien EHBMM
3,30	27,69	**69,01**	240	**67**

Los resultados en la Prueba TIMSS (1996) fueron:

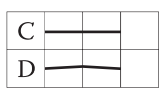
	7º	8º
España	53	62
Internacional	62	67

22. Las líneas A, B, C, D, son las líneas gruesas dibujadas a continuación. Para cada par marca con una X la respuesta que creas que es verdadera:

1a) ( ) La línea A es la más larga
***1b)** ( ) La línea B es la más larga*
1c) ( ) A y B tienen la misma longitud



2a) ( ) La línea C es la más larga
***2b**) ( ) La línea D es la más larga*
2c) ( ) C y D tienen la misma longitud



Resultados:

	%N.C.	%Mal	%Bien	N	%Bien EHBMM
22.1	2,48	49,17	**48,35**	240	**39**
22.2	5,78	20,25	**73,97**	240	**64**

Son dos líneas gruesas situadas sobre una cuadrícula y claramente observable que una es más larga que la otra. Sin embargo, el error que más se comete es señalar la respuesta "tienen la misma longitud".

Este enunciado pertenece al estudio "Concepts in Secondary Mathematics and Science Proyect, CSMS", recogido en Dickinson y otros (1991) y cuyos resultados fueron:

	12 años	13 años	14 años
La línea C es la más larga	42%	45%	52%
C y D son igual de largas	48%	48%	45%

26. Un polígono de 8 lados, está dibujado en un papel cuadriculado de 1 cm de lado.

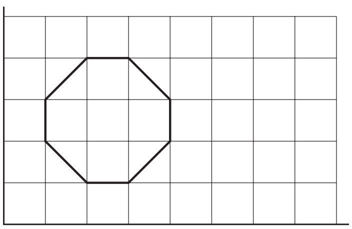


Gráfico reducido al 50%

¿Cuánto mide su perímetro? Rodea con un círculo la respuesta correcta.

a) 8 cm ***b) Más de 8 cm*** *c) menos de 8 cm*

Resultados:

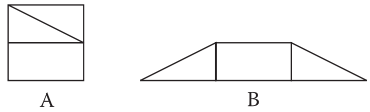
%N.C.	%Mal	%Bien	N	%Bien EHBMM
4,96	74,79	**20,25**	240	**18**

Estando dibujado el octógono sobre una cuadrícula como la indicada, la mayoría de errores se centran en decir que el perímetro mide 8 cm.

Este problema pertenece al estudio anterior CSMS, recogido en Dickson y otros (1991) en donde las respuestas fueron:

	12 años	13 años	14 años
8 cm	43,2%	43,2%	41,6%
Más de 8 cm	38,5%	36,7%	6,9%
Menos de 8 cm	13,6%	14,9%	9,1%

7. *Cortamos un cuadrado A en tres trozos y reunimos las piezas como indicamos en la figura B:*



Marca con una X la respuesta que creas que es la correcta, de cada uno de los apartados siguientes:

a) *1a) A tiene la mayor área* ***b)*** *1b) A tiene el perímetro mayor*

2a) B tiene la mayor área ***2b) B tiene el perímetro mayor***

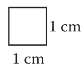
3a) A y B tienen igual área *3b) A y B tiene igual perímetro*

Resultados:

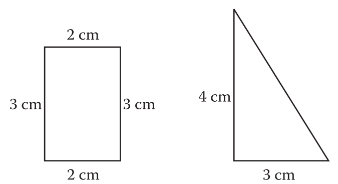
	%N.C.	%Mal	%Bien	N	%Bien EHBMM
a)	5,79	10,74	**83,41**	240	**84**
b)	10,74	24,38	**64,88**	240	**56**

CÁLCULO DE ÁREAS

28. El área de la siguiente figura mide 1 cm²



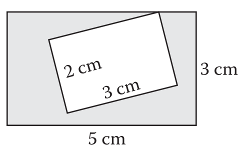
a) Calcula el área en centímetros cuadrados de las figuras A y B:



*a1) Área de **A** = **(6)***

*a2) Área de **B** = **(6)***

b) Calcula el área de la figura sombreada:



*Área sombreada =(**9**)*

Resultados:

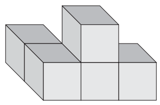
	%N.C.	%Mal	%Bien	N	%Bien EHBMM
a1	17,36	18,18	**64,46**	240	**53**
a2	23,55	25,62	**50,83**	240	**38**
b	23,97	27,69	**48,35**	240	**34**

Cuando el área sombreada es de 9 cm² el error más repetido es decir 15 cm², sin descontar la superficie del rectángulo interior. Otras respuestas no tienen explicación como: 6; 8; 36; 5; 2;...

Geometría

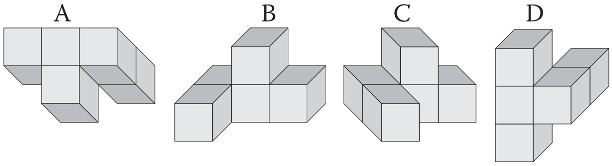
CAPACIDAD ESPACIAL

13. Vamos a girar esta figura a otra posición



¿Cuál de las siguientes figuras podría ser la figura anterior después de ser girada?

A B C D



Resultados:

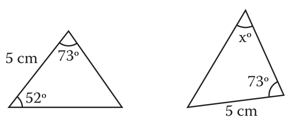
%N.C.	%Mal	%Bien	N	%Bien EHBMM
8,26	14,05	**77,69**	240	**50**

Los resultados en la Prueba TIMSS (1996) fueron:

	7º	8º
España	68	71
Internacional	65	68

CONOCIMIENTOS GEOMÉTRICOS

2. Estos triángulos son iguales. En el gráfico se dan las medidas de algunos de sus lados y ángulos. ¿Cuál es el valor de x?



a) 52º ***b) 55º*** *c) 65º d) 73º e) 75º*

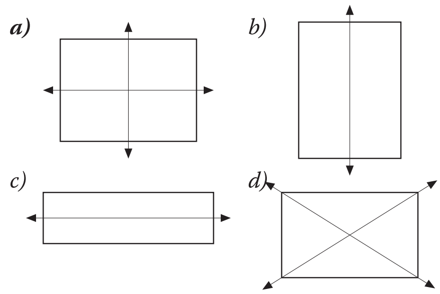
Resultados:

%N.C.	%Mal	%Bien	N	%Bien EHBMM
6,20	32,64	**61,16**	240	**50**

Los resultados en la Prueba TIMSS (1996) fueron:

	7º	8º
España	17	14
Internacional	28	36

8. ¿Qué figura muestra todos los ejes de simetría de un rectángulo?



Resultados:

%N.C.	%Mal	%Bien	N	%Bien EHBMM
10,33	28,93	**60,74**	240	**55**

Los resultados en la Prueba TIMSS (1996) fueron:

	7º	8º
España	47	51
Internacional	63	66

19. Un cuadrilátero es un paralelogramo si tiene:
a) Un par de lados paralelos
b) Una diagonal que es eje de simetría
c) Dos ángulos consecutivos iguales
d) Un par de lados consecutivos iguales
e) Dos pares de lados paralelos

Resultados:

%N.C.	%Mal	%Bien	N	%Bien EHBMM
16,53	23,14	**60,33**	240	**51**

Los resultados en la Prueba TIMSS (1996) fueron:

	7º	8º
España	39	40
Internacional	44	49

REPRESENTACIÓN DE PUNTOS EN EL PLANO

6. En una gráfica, una recta pasa por los puntos (3,2) y (4,4). ¿Cuál de los siguientes puntos está también en esa recta?
a) (1,1) b) (2,4) ***c) (5,6)*** *d) (6,3) e) (6,5)*

Resultados:

%N.C.	%Mal	%Bien	N	%Bien EHBMM
4,55	34,71	**60,74**	240	**60**

Los resultados en la Prueba TIMSS (1996) fueron:

	7º	8º
España	37	39
Internacional	38	41

Análisis de datos, estadística y probabilidad

LEER TABLAS Y RECONOCER CÓDIGOS

20. La tabla muestra el número de alumnos en 1º y 2º de la ESO en un Colegio

Curso	Número de alumnos
1º ESO	60
2º ESO	55

Si queremos representar el número de alumnos de cada curso en el pictograma de abajo, completa la fila del curso 2º ESO (Un O representa 10 alumnos):

Curso 1º ESO	OOOOOO
Curso 2º ESO	

Resultados:

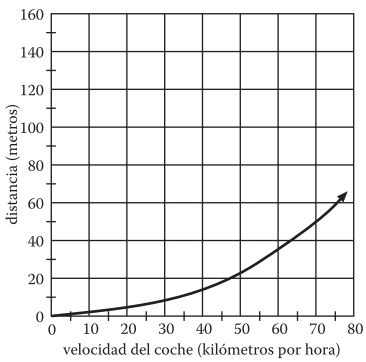
%N.C.	%Mal	%Bien	N	%Bien EHBMM
2,89	38,02	**59,09**	240	**57**

Los resultados en la Prueba TIMSS (1996) fueron:

	7º	8º
España	77	86
Internacional	79	81

INTERPRETAR GRÁFICAS

16. La gráfica muestra la distancia recorrida por un coche desde que se pisa el freno hasta que se para cuando va a distintas velocidades. Un coche que iba por la autopista paró 30 m después de haber pisado el freno. ¿A qué velocidad iba el coche, aproximadamente?



a) 48 km por hora
b) 55 km por hora
c) 70 km por hora
d) 160 km por hora

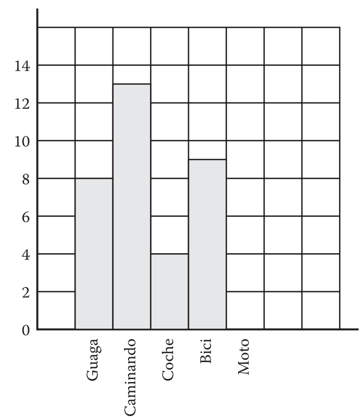
Resultados:

%N.C.	%Mal	%Bien	N	%Bien EHBMM
7,85	12,81	**79,34**	240	**71**

Los resultados en la Prueba TIMSS (1996) fueron:

	7º	8º
España	39	47
Internacional	52	59

3. Este es un diagrama para mostrar cómo van a la escuela los alumnos de la clase de 1ºB. Por ejemplo, 8 niños van en guagua y 13 caminando.



*¿Cuántos niños van en coche? (**4**)*
*¿Cuántos niños usan bicicleta para ir a la escuela? (**9**)*
Los otros 5 niños van en moto. Representa este dato sobre el diagrama.

Resultados:

	%N.C.	%Mal	%Bien	N	%Bien EHBMM
a)	0,83	0,41	**98,76**	240	**86**
b)	0,83	0,41	**98,76**	240	**89**
c)	0,83	1,24	**97,93**	240	**94**

24. Cada una de las seis caras de un cubo está pintada de rojo o azul. Al lanzar el cubo, la probabilidad de que quede una cara roja arriba es 2/3. ¿Cuántas caras son rojas?

*a) Una b) Dos c) Tres **d) Cuatro** e) Cinco*

Resultados:

%N.C.	%Mal	%Bien	N	%Bien EHBMM
12,81	34,30	**52,89**	240	**47**

Los resultados en la Prueba TIMSS (1996) fueron:

	7º	8º
España	24	34
Internacional	41	47

Álgebra

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

29. Juan tiene 5 sombreros menos que María y Clara tiene 3 veces más sombreros que Juan. Si María tiene n sombreros, ¿cuál de estas expresiones representa el número de sombreros que tiene Clara?

*a)5 - 3n   b) 3n   c) n – 5   d) 3n – 5   **e) 3(n - 5)***

Resultados:

%N.C.	%Mal	%Bien	N	%Bien EHBMM
17,35	12,81	**69,84**	240	**74**

Los resultados en la Prueba TIMSS (1996) fueron:

	7º	8º
España	46	61
Internacional	37	47

SIMPLIFICACIÓN

17. Escribe de forma más simplificada, reduciendo hasta donde sea posible:

*a) 2a + 5a = **7a***
*b) 2a + 5b = **2a + 5b***
*c) 2a + 5b + a = **3a + 5b***
*d) (a - b) + b = **a***
*e) 3a - (b+a) = **2a - b***
*f) a + 4 + a – 4 = **2a***
*g) 3a – b + a = **4a - b***
*h) (a + b) + (a – b) = **2a***

Resultados:

	%N.C.	%Mal	%Bien	N	%Bien EHBMM
a)	2,07	4,13	**93,80**	240	**83**
b)	23,55	14,88	**61,57**	240	**58**
c)	5,78	11,16	**83,06**	240	**76**
d)	14,87	22,73	**62,40**	240	**57**
e)	19,01	32,23	**48,76**	240	**49**
f)	8,68	7,85	**83,47**	240	**71**
g)	9,50	11,16	**79,34**	240	**78**
h)	20,25	26,03	**53,72**	240	**49**

En el apartado e) la respuesta correcta es 2a-b. De las incorrectas la más repetida es 4a-b, pero hay de todo. Como muestra: 2a; 3ab; b=2a; a=-b/4; 3ab-2b; 3ab+3a; -b-2 a; a=b/2; 3ab+3a;...

SUSTITUCIÓN FORMAL

*12. ¿Qué puedes decir acerca de **r,** si r = s + t y r + s + t = 30. **(r=15)***

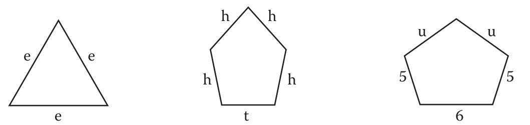
Resultados:

%N.C.	%Mal	%Bien	N	%Bien EHBMM
30,58	35,54	**33,88**	240	**32**

La respuesta es r=15 y hay respuestas incorrectas muy variadas como: 30; 0; s+t; 10; 20; 30-s-t;... siendo la más repetida la solución r=30.

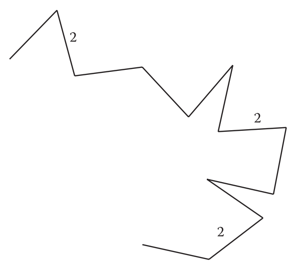
CÁLCULO PERÍMETROS

25. a) Calcula el perímetro de cada una de las siguientes figuras:



*a1) **P=(3e)***   *a2) **P=(4h+t)***   *a3) **P=(2u+16)***

b) Parte de la siguiente figura no está dibujada, hay n lados en total, todos de longitud 2:



P** = **(2n)

Resultados:

	%N.C.	%Mal	%Bien	N	%Bien EHBMM
a1)	13,22	9,09	**77,69**	240	**49**
a2)	16,53	7,44	**76,03**	240	**48**
a3)	17,77	12,40	**69,83**	240	**40**
b)	32,23	17,36	**50,41**	240	**32**

RECONOCIMIENTO IGUALDADES

9. ¿Cuáles de las siguientes igualdades son -siempre, nunca y algunas veces- verdaderas? Subraya la respuesta correcta.

a) A + B + C = C + A + B

*a1) **Siempre***   *a2) Nunca*   *a3) Algunas veces, cuando.......*

b) $L + M + N = L + P + N$
b1) Siempre b2) Nunca b3) ***Algunas veces, cuando...(M=P)***

Resultados:

	%N.C.	%Mal	%Bien	N	%Bien EHBMM
a)	2,48	3,31	**94,21**	240	**95**
b)	7,03	47,93	**45,04**	240	**28**

La respuesta en b) que obtiene más contestaciones es la que dice “nunca será igual” cuando la correcta es “algunas veces cuando M=P”.

Resultados por bloques de contenidos

En **Números y Operaciones** de las seis cuestiones planteadas (10 items), tan solo en 4 aparecen las respuestas bien por encima del 50%, alcanzando el 66,9% de aciertos en la correspondiente a proporcionalidad y estimación.

En **Medida** se plantearon 6 cuestiones (12 items) siendo los resultados mejores que en el bloque anterior, ya que en 8 de ellos el porcentaje de respuestas bien superó el 50%, llegando al 83,4% en el caso de superficies equivalentes.

En **Geometría** las 5 cuestiones (5 items) obtienen respuestas correctas en más del 50% de los casos, llegando al 77,7% en la cuestión de capacidad espacial.

En **Análisis de datos, Estadística y Probabilidad** han sido 4 cuestiones (6 items), superando en todos ellos el 50% de respuestas bien y alcanzando casi el 99% en la interpretación de un gráfico estadístico.

En **Álgebra**, de 5 cuestiones (16 items) sólo tres alcanzan puntuación por debajo del 50%. El porcentaje más bajo corresponde a un item de sustitución final con el 33,9% de aciertos.

Se han encontrado diferencias significativas en la prueba de contenidos matemáticos por género a favor de los alumnos varones.

El análisis detallado de todos los items lo hemos realizado con anterioridad, siendo el que menos aciertos alcanza el correspondiente a la cuestión 14, en la que la respuesta correcta es “faltan datos”. Los resultados de nuestro estudio, comparados globalmente con el de Hernández, Noda, Palarea y Socas (2001) son más altos en la mayoría de los items.

Resultados Estadísticos

Una vez corregida la Prueba se formó un fichero de datos de los 240 alumnos considerando como variables: edad, género, diplomatura de maestro y bloques de contenidos (NOP, MED, GEO, PROB, ALG), cuyos estadísticos son los siguientes:

1. General	Edad	Prueba
N.º de casos	240	240
Mínimo	18	10
Máximo	43	47
Media	21,383	30,367
Desv. tipica	3,897	8,185

2. Por género	Varón	Mujer
N.º de casos	68	172
Mínimo	15	10
Máximo	46	47
Media	32,044	29,703
Desv. tipica	7,585	8,339

3. Por especialidad	2º Prim.	2º E.Física	2º Francés	2º Inglés	3º Prim.	3º Infantil
N.º de casos	46	71	16	23	50	34
Mínimo	11	14	10	12	22	14
Máximo	46	46	31	46	45	47
Media	30,022	29,831	18,875	30,000	33,940	32,353
Desv. tipica	8,955	7,633	7,633	7,799	5,586	7,651

4. Por edad	Más de 25	Hasta 25
N.º de casos	31	209
Mínimo	14	10
Máximo	46	47
Media	31,226	30,239
Desv. tipica	7,911	8,236

5. Por bloques de contenidos	Números y Oper.	Medida	Geometría	Datos, Est. Prob.	Álgebra
N.º de casos	62	129	158	194	73
Mínimo	0	1	0	2	3
Máximo	10	12	5	6	16
Media	6,048	8,620	3,582	5,031	13,521
Desv. típica	2,052	2,362	1,196	0.904	2,399

Para ver si existen diferencias significativas entre grupos considerando las variables: género (varón, mujer), edad (< 25 años y 25 años o más), especialidad de maestro (2º Primaria, 2º E. Física, 2º Francés, 2º Inglés, 3º E. Primaria y 3º Infantil), se ha aplicado la t de Student y la F de Snedecor, según los casos, pudiendo aportar los siguientes resultados:

Se han encontrado diferencias significativas ($t=-4.636$, $p<0.05$) en la prueba de contenidos matemáticos por **género** a favor de los alumnos varones. No se han encontrado diferencias significativas por **edad** entre los alumnos de menos de 25 años y los de 25 años o más. En el análisis correspondiente a las **especialidades** se presentan diferencias muy significativas ($F=10.414$, $p<0.01$) de todas las especialidades en relación a 2º de Francés, que son las puntuaciones más bajas. En cuanto a los bloques de contenidos no hay diferencias significativas por **edad** (menos de 25 y 25 o más) en ninguno de los cinco bloques en que se ha dividido la prueba.

Por **género** (varón, mujer) sólo se encuentran diferencias significativas ($t=-2.012$, $p<0.05$) en la prueba de geometría a favor de los varones.

En cuanto a las **especialidades** (tipo) no se encuentran diferencias significativas entre los resultados obtenidos por los alumnos de las distintas diplomaturas ni en Números y operaciones, ni en Medida, ni en Álgebra. Sin embargo, aparecen diferencias muy significativas ($F=7.649$, $p<0.01$) en Geometría, de la especialidad de 2º de Francés con relación al resto, obteniendo calificaciones muy inferiores a los alumnos de las demás diplomaturas. En Probabilidad también hay diferencias muy significativas ($F=5.587$, $p<0.01$) en detrimento de los alumnos de 2º de Francés que obtienen calificaciones más bajas que el resto de sus compañeros.

En todos los bloques de contenidos los alumnos que obtienen mejores puntuaciones son los de 3º de Educación Primaria.

Por último, comparamos los estadísticos de la prueba de contenidos (1) con los obtenidos por (Hernández, Noda, Palarea, Socas, 2001) (2) en la tabla siguiente:

	(1)		*(2)*	
	Media	Des.típica	*Media*	*Des.típica*
Números y operaciones	6,0	2,1	*4,2*	*2,3*
Medida	8,6	2,4	*5,8*	*3,0*
Geometría	3,6	1,2	*3,0*	*1,3*
Estadística y Probabilidad	5,0	0,9	*4,4*	*1,3*
Álgebra	13,5	2,4	*9,1*	*4,1*

Concluimos el análisis de los resultados estadísticos, diciendo que hay diferencias significativas por género a favor de varores y entre especialidades, obteniendo los resultados más bajos en 2º Francés. Dentro de las especialidades aparecen diferencias muy significativas en Geometría y en Probabilidad de 2º de Francés respecto al resto de alumnos.

Reflexiones Finales

Analizada la prueba de contenidos matemáticos, no encontramos justificación a que alumnos de 2º y de 3º de las diplomaturas de magisterio, maestros en formación, que han cursado durante doce años asignaturas de matemáticas obtengan tan bajo porcentaje de aciertos al resolver un problema aritmético (nº 27) y esos resultados son muy parecidos, 35,13% en la prueba ahora realizada y 36% en el Estudio sobre habilidades en matemáticas de alumnos de magisterio (EHBMM) y semejante a los resultados obtenidos en la prueba TIMSS para alumnos de 13-14 años.

> *Las diferencias por* edad *no son significativas y sin embargo sí lo son por* especialidades *en el bloque de* Geometría *y en el de* Análisis de datos, estadística y probabilidad.

¿Cómo es posible que en un problema de proporcionalidad (nº 4) cuyos cálculos son elementales lo resuelva bien sólo el 43,8% (35% en EHBMM) con respuestas algunas tan distantes como (2, 4, 6) y (4.800, 9.600, 14.400)?

No encontramos justificación a que sólo el 32,23% (35% en EHBMM) responda bien a un sencillo problema de proporcionalidad (nº 11) y a otro (nº 30) con 40,91% (28%), lo que nos lleva a pensar que la proporcionalidad no se aprende bien en los niveles de enseñanza obligatoria o al menos no permanece en el bagaje matemático de los alumnos.

Tampoco tiene justificación no “dominar” los problemas de tanto por ciento (nº 5) en donde los alumnos confunden los valores absolutos con los valores relativos respondiendo bien sólo el 40% tanto en nuestra prueba como a nivel nacional.

Los alumnos de las diplomaturas de magisterio deberían enfrentarse con éxito a problemas mal definidos (nº 10), pero parece que no se atreven a decir que a un problema le faltan datos y contestan lo primero que se les ocurre tras leer el enunciado del problema. Eso lo demuestra el bajo resultado de respuestas correctas, el 4,13% (6% en EHBMM).

Pero hay un problema cuyos resultados nos alarman y es al calcular el perímetro de un octógono (nº 26) en donde tan solo un 20,25% (18% de respuestas correctas en EHBMM) señala la respuesta correcta, siempre por debajo de los porcentajes alcanzados por alumnos de 12, 13 y 14 años del proyecto CSMS, que están por encima del 35%.

Por último, indicar que en las sustituciones formales (nº 12) los alumnos quedan por debajo de la media con tan solo 33,88%, (32% en EHBMM).

Considerando las variables de corte, lo más destacable es que no se encuentran diferencias significativas por edad, aunque sí por género a favor del colectivo masculino y, en concreto, en el bloque de geometría. Es también en este bloque en donde se encuentran las diferencias más importantes entre las especialidades de magisterio, en detrimento de la especialidad de francés.

Los resultados globales por bloques de contenidos son superiores en la prueba analizada a los obtenidos a nivel nacional, teniendo a su vez menor dispersión.

Estos resultados deben completarse con la aplicación de otras pruebas de medición de los conocimientos matemáticos de los maestros en formación, porque van a ser los que dentro de unos pocos años se encargarán de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en los niveles básicos y es en estos niveles en donde los contenidos más sencillos deben de darse de forma clara e intuitiva, en donde se deben crear actitudes positivas hacia las matemáticas y evitar en todo momento la introducción de errores en conceptos matemáticos cuya eliminación es muy difícil y, a veces, perdura a lo largo de la vida adulta de los ciudadanos. Nuestra misión como profesores de maestros en formación es lograr que el currículo obligatorio cubra, al menos, todos los contenidos matemáticos que luego en el futuro necesitarán en su vida laboral.

A la vista de estos resultados sería importante establecer un debate serio y riguroso sobre qué contenidos explicar en las asignaturas de matemáticas de la enseñanza obligatoria, porque vemos que en algunos bloques hay lagunas de conocimientos como en el caso de proporcionalidad y en aplicaciones reales de los contenidos a problemas de la vida cotidiana. Nuestros alumnos, frecuentemente, saben muchas cosas en su contexto pero cuando tienen que aplicarlas a casos reales, fuera de los ejercicios y problemas de complementos de la teoría desarrollada, es donde cometen errores. Además, esos errores tienen mayor importancia al tratarse de una población que accede a una diplomatura de magisterio, que actualmente son maestros en formación y que serán maestros en ejercicio en los próximos años.

Si actualmente hay especialidades como Música, Educación Física e Idiomas, en donde el maestro termina con la titulación de especialista y de generalista, ¿por qué no haber una especialidad de Ciencias donde el maestro en formación conviva durante más tiempo con las matemáticas? Actualmente en los planes de estudios en Primaria existen alrededor de 20 créditos de Matemáticas y su didáctica, pero tan solo 4,5 créditos en las especialidades anteriores, y ambos diplomados están capacitados para enseñar matemáticas a niños entre 6 y 12 años. ¿Es bagaje matemático suficiente el que le ofertamos a los maestros en formación de estas especialidades?

> *En algunos bloques hay lagunas de conocimientos como es el caso de* proporcionalidad *y en* aplicaciones reales de los contenidos a problemas de la vida cotidiana.

Ahora que está en marcha el de proceso elaboración de nuevos planes de estudios, con las titulaciones europeas, es el momento de adoptar entre todos un planteamiento nuevo. Es necesario que los alumnos de las diplomaturas de maestros adquieran unos conocimientos en matemáticas y su didáctica que les permitan afrontar su futura etapa laboral y consigan en ella desarrollar su tarea positivamente, favoreciendo el proceso de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas en los niveles educativos en los que trabajen.

Agradecimiento
Queremos expresar nuestro agradecimiento a los doctores Hernández, Palarea y Socas del Departamento de Análisis Matemático (Área de Didáctica de la Matemática) de la Universidad de La Laguna por los datos aportados para la realización de este artículo. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

COCKCROFT (1985): *Las matemáticas sí cuentan,* MEC, Madrid.

DICKSON, L y otros (1991): *El aprendizaje de las matemáticas,* MEC-Labor, Madrid.

HART, K.M. (Ed.) (1981): *Children´s Understanding of Mathematics: 11-16,* John Murray, London.

HERNÁNDEZ, J., NODA, M.A., PALAREA, M. y SOCAS, M. (2001): *Estudio sobre habilidades en matemáticas de alumnos de magisterio,* Universidad de La Laguna, Tenerife.

LÓPEZ, J.A. y MORENO, M.L. (1996): "Tercer estudio internacional de Matemáticas y Ciencias (TIMSS)", *Revista de Educación* nº 311, 315-336.

MEC (1991a): Real Decreto 1007/1991 de 14 de junio de 1991 sobre Enseñanzas mínimas de Educación Secundaria Obligatoria, Edelvives, Madrid.

MEC (1991b): Real Decreto 1344/1991 de 6 de septiembre de 1991 sobre Currículo de Enseñanza Primaria, BOE, Madrid.

Informe de la reunión de la Junta de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas celebrada el 25 de Octubre de 2003

Nombramiento de Josep Sales como nuevo Secretario General, por un periodo de cuatro años. *Se presentó un único candidato a la Secretaría General de la Federación, Pep Sales, perteneciente a la FEEMCAT, de la que actualmente es también su secretario, y fue nombrado por unanimidad de los votos de las sociedades federadas.*

Candidatura de la Sociedad Castellano-Manchega para las XII JAEM. *Se confirmó la candidatura de la Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas para organizar las próximas Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, las XII, previsiblemente en el mes de julio de 2005, en Albacete.*

Se propone a las Sociedades FEEMCAT y Thales, como organizadoras de las dos siguientes ediciones de las JAEM. Sus juntas directivas tendrán que decidir si aceptan esta proposición.

Día Escolar de las Matemáticas*. Se recuerda que el día 12 de mayo de 2004 se celebra el DÍA ESCOLAR DE LAS MATEMÁTICAS, del que pronto recibiréis el folleto. La Sociedad Asturiana se encargará de celebrar un acto institucional en su Comunidad.*

La Sociedad Castellano-Manchega propuso como tema para el ***día escolar de 2005*** **las Matemáticas y el Quijote***, dado que se celebra el 4º centenario de la primera edición de la primera parte del Ingenioso Hidalgo don Quixote, de don Miguel de Cerbantes (como el escribía).*

Jornadas en Santiago de Compostela en Septiembre de 2004. *Se acordó participar en una Jornada que se celebrará en Santiago de Compostela en septiembre de 2004, organizada conjuntamente por AGAPEMA, FESPM, RSME y SEIEM y abiertas a todos sus socios. Además de algunas conferencias, están previstos tres grupos de Trabajo: 1 La convergencia europea en educación y las nuevas leyes educativas españolas LOU y LOCE. 2 Matemáticas en Secundaria y Universidad: razones y sinrazones de un desencuentro. 3 Formación inicial y continua en el profesorado de Primaria y Secundaria.*

Florencio Villarroya
Presidente

SUMA 44
Noviembre 2003, pp. 83-86

En el entorno del teorema Kou-Ku (I)

La nueva dirección de SUMA nos pregunta qué línea va a seguir "Desde la Historia". *Las líneas se hacen andando, que diría Machado, y esta respuesta es no sólo cierta en general sino obligada en nuestro caso para esta sección de la revista. No somos especialistas en historia de las matemáticas, sólo simples aficionados, y ello nos impide concretar mucho los contenidos.*
Sí somos especialistas -otra cosa es que seamos buenos especialistas- en animar tertulias sobre matemáticas para adolescentes y ello será, junto con lo que leamos y especulemos, la fuente de nuestra aportación a "Desde la Historia". Desde nuestro profundo convencimiento de que el quehacer didáctico es un arte más que una ciencia –y aquí nos resulta obligado el recuerdo de Paco Hernán–, y por tanto improgramable, nos dejaremos llevar también aquí de la intuición de cada momento: fiaremos a la motivación contenidos y digresiones, apasionamientos, descaros y concurrencias.
Lo que escribamos estará seguramente muy relacionado con las conexiones que nuestras clases nos motiven, de manera que lo más probable es que haya en los artículos una fuerte interdisciplinariedad, una mezcla de intereses personales sobre historia y de reflexiones sobre didáctica.
En cualquier caso intentaremos responder a la renovada confianza que SUMA nos ha mostrado y que sinceramente agradecemos. Por supuesto, nuestra dirección de correo está disponible para cualquier sugerencia, aportación o crítica que los lectores y lectoras de SUMA queráis hacer.

Entre los muchos puzzles que prueban la igualdad entre áreas que asegura el llamado teorema de Pitágoras, uno de nuestros favoritos es el que muestra la figura 1. Siempre creímos percibir un aura de antigüedad en esta prueba y así parecía desprenderse de nuestra primera referencia, una observación de Hugo Steinhaus (1986) en la que afirma que es de origen hindú, pero son mayoría quienes se la atribuyen –por ejemplo Roger B. Nelsen (2001)– al afamado inventor de pasatiempos matemáticos H. E. Dudeney (1857-1930), quien la habría publicado en 1917. Es posible, sin embargo, que se le hubiera adelantado en 1873 un tal Henry Perigal, corredor de bolsa en Londres[1]. La obsesión por la "gloria", incluso la ajena, hace siglos que persigue a los vivos[2].

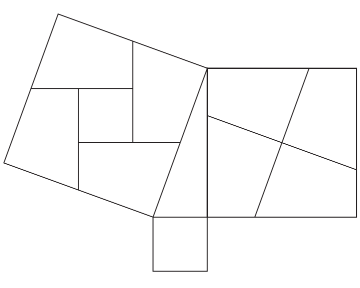


Fig. 1

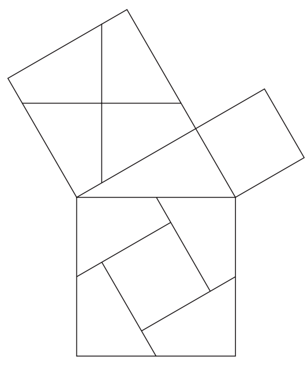


Fig. 2

Angel Ramírez Martínez
Carlos Usón Villalba
hitoria.suma@fesp.org

¡Mira!

A veces, en los textos hindúes antiguos, las figuras iban acompañadas sólo de un imperativo: ¡Mira! Pues bien: miremos la figura 1. Sí, el cuadrado sobre la hipotenusa se descompone en cinco cuadriláteros cuyas áreas equivalen a las de los otros dos cuadrados. Se supone que la construcción funcionará para cualquier triángulo rectángulo ... Cambiemos de triángulo y reconstruyamos el puzzle. Es imprescindible proponer este segundo paso en una clase de Secundaria, salvo que aceptemos sin remordimientos que todo quede en una vulgar comprobación. Cambiar el triángulo obliga a observar detenidamente el diseño del puzzle para captar sus claves y, para ello, puede ser interesante pasar a una posición como la de la figura 2.

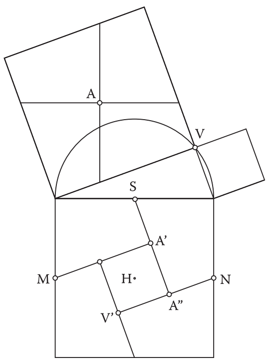


Fig. 3

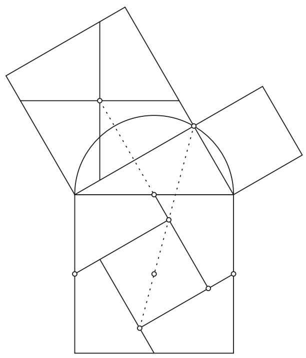


Fig. 4

Quizás ayude a intuir (Fig. 3) que A, S, A´, A´´ están alineados, así como los grupos de puntos M, H, N y V, A´, H, V´, coincidiendo S con el punto medio de la hipotenusa. La sucesión de conjeturas que elaboramos para un problema concreto está muy condicionada por el azar de las experiencias que vamos acumulando. Según cómo juguemos con CABRI (Fig. 4), desplazando V a lo largo de la semicircunferencia que circunscribe al triángulo, se afianzará el convencimiento de que esto es así para cualquier triángulo rectángulo. El estudio del puzzle parece casi terminado ... salvo que pongamos sobre la mesa la pregunta clave: ¿Cómo pudo llegar Dudeney –o Perigal– a construirlo? Quizás empezó encajando dos segmentos perpendiculares, de longitudes iguales a la de la hipotenusa, en el cuadrado del cateto grande de forma que su corte coincida con el centro de éste. Estas condiciones definen el diseño del puzzle y garantizan los alineamientos de puntos de las figuras 3 y 4. Pero precisan demasiado, de manera que permiten la duda sobre la existencia de otras posibilidades.

En realidad, la última condición no es necesaria, como muestran los dibujos de la figura 5. El punto A no tiene por qué coincidir con el centro del cuadrado. Para un mismo triángulo hay una banda horizontal y otra vertical en las que pueden situarse las "hipotenusas". Su intersección (Fig. 6) determina la zona permitida al punto A. Observaremos entonces que, en general, fallan dos de las alineaciones de la figura 3, y que los puntos S, M y N no tienen por qué coincidir con los puntos medios de los lados del cuadrado. Siguen sin embargo en la misma recta A, S, y A´, el alineamiento clave para el funcionamiento del puzzle, que sirve como prueba del teorema de Pitágoras porque los tres triángulos coloreados en la figura 7 son iguales, independientemente de la posición en la que se localice el punto A.

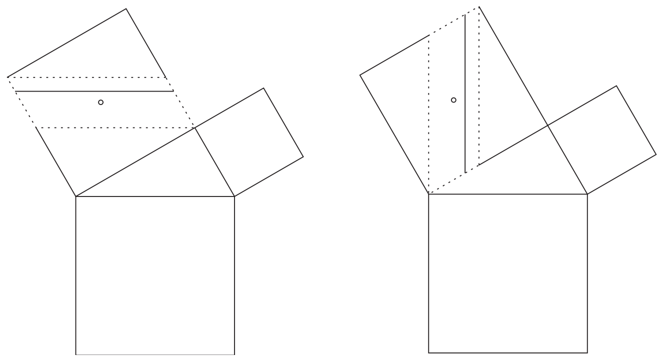


Fig. 5

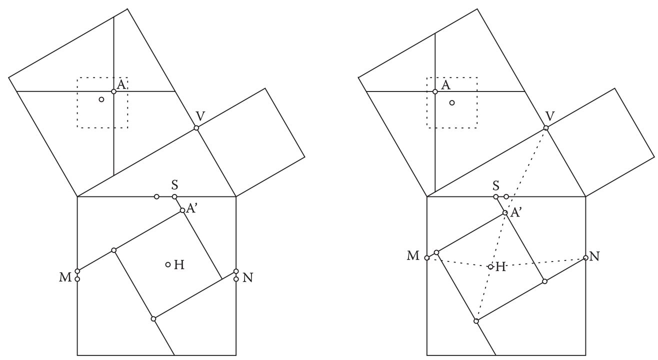


Fig. 6

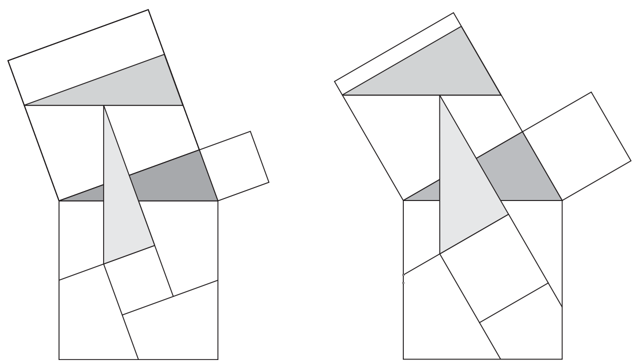


Fig. 7

Los casos límite (Fig. 8) suelen ser curiosos y muchas veces tienen interés didáctico. En el segundo podemos ver cómo se sitúan los vértices del cuadrado del cateto grande para completar el cuadrado de la hipotenusa, en un mnemotécnico giro de 90º de la serie 1234 que tiene validez general.

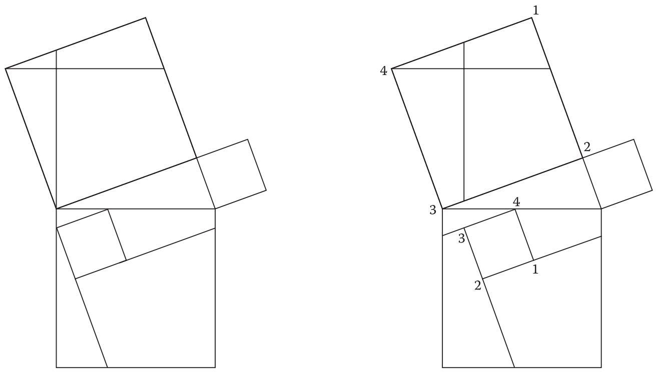


Fig. 8

Sugieren también que se puede empezar a construir el puzzle trasladando el cuadrado del cateto pequeño a cualquier posición en el interior del cuadrado de la hipotenusa (de c1 a c2) (Fig. 9) y construyendo sobre su lado un triángulo rectángulo congruente con el primero. A medida que c2 "recorre" el cuadrado en que ha sido alojado, el punto A "recorre" a su vez la zona cuadrada que vimos anteriormente. En la figura 10 puede observarse la igualdad entre JA y EK y, por tanto, entre JE y AK.

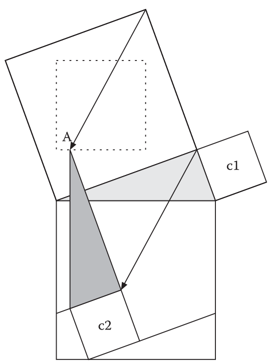


Fig. 9

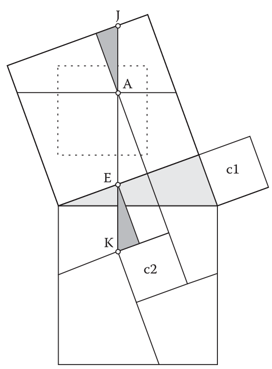


Fig. 10

El estudio comprensivo

Pasemos ahora a las figuras 11. Partimos de nuevo del puzzle de Dudeney – Perigal en el que vamos a hacer dos modificaciones. En la primera, a la que corresponde el itinerario A-B-C, borramos el cuadrado de la hipotenusa, ampliamos el cuadrado del cateto grande hasta que incluya el del pequeño, borramos uno de los segmentos de su interior y trasladamos el otro.

En la segunda –itinerario A-B´-C´-D´– borramos los segmentos del interior de los cuadrados del dibujo inicial y formamos otra vez el nuevo cuadrado de B, lo vaciamos a su vez y encajamos el cuadrado de la hipotenusa en su interior. Comparemos C y D´: en los dos hay cuatro triángulos iguales, por lo que el resto de sus correspondientes superficies deben ser también iguales. Es probablemente la prueba más sencilla y divulgada del teorema de Pitágoras. Viene recogida en el

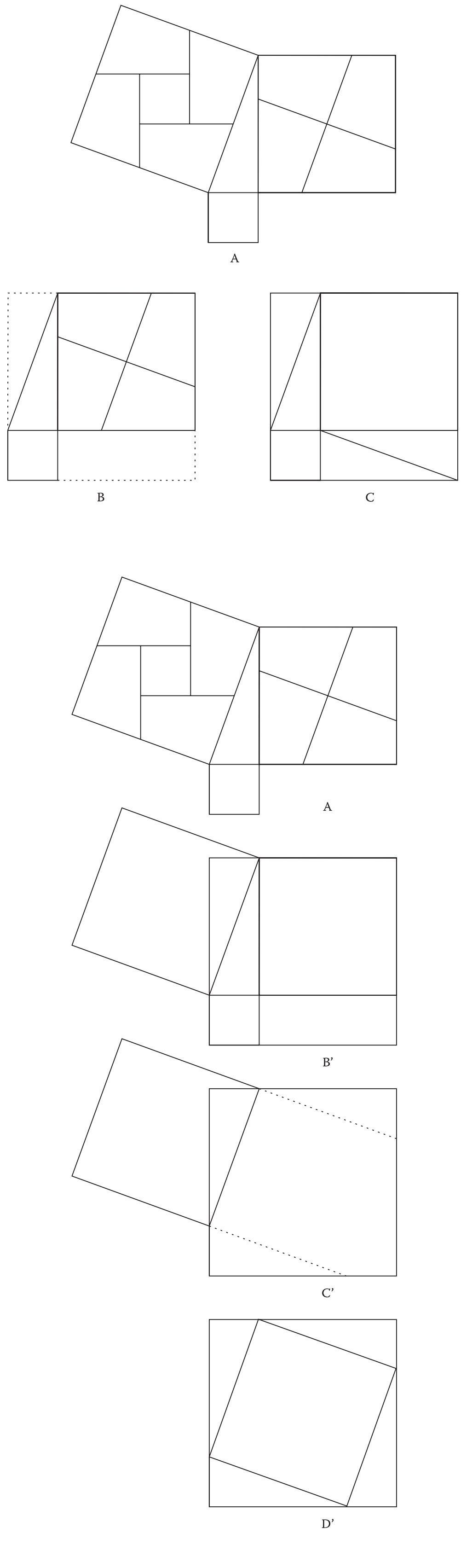


Fig. 11

comentario de Liu Hui (siglo III d. C.) al Chou Pei Suan Ching, una especie de enciclopedia aritmética, de autor anónimo, redactada entre los siglos V y III a. C. Los cuadrados construidos sobre los catetos tenían un color asignado, kou (rojo) y ku (azul), y esta pareja de colores daba nombre en China al teorema. La tradición pesaba más que los derechos de gloria del autor imperantes hoy día.

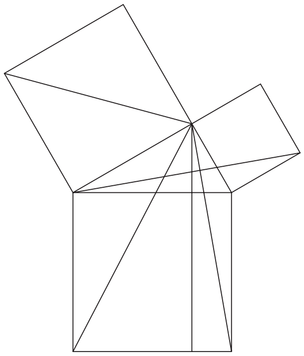


Fig. 12

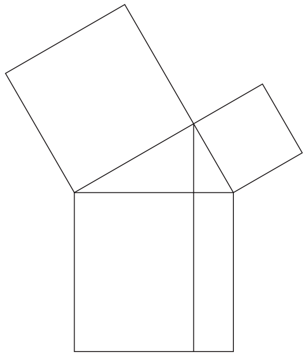


Fig. 13

De manera similar a lo que ocurre con el reto de la obtención de un número cada vez mayor de decimales de π –un problema igualmente inútil desde un punto de vista práctico–, la justificación del teorema kou-ku por un nuevo procedimiento no catalogado todavía parece continuar fascinando a los seres humanos. La afición al juego es síntoma de inteligencia y el teorema tiene además un fuerte atractivo. En Elisha Scott Loomis (1972) vienen recogidas más de 250 demostraciones.

Quizás sea menos popular que las anteriores –y si así es, no dejaría de ser sorprendente dada la importancia que se concede a su autor– la que aporta Euclides en los Elementos. Un matemático “serio” podría decir que ello es debido a que allí se desarrolla una auténtica demostración y no una mera comprobación “visual”, pero lo que probablemente sucede es que el estilo del texto –muy ajustado a las exigencias del dogma deductivista– lo hace muy seco para el lector o lectora. En realidad, no es imprescindible aburrir al presentar una argumentación lógicamente consistente. Imaginemos que Euclides hubiera eliminado de su dibujo (Fig. 12) cuatro líneas y hubiera acompañado la figura resultante (Fig. 13) con el “¡Mira!” hindú.

Es más fácil entonces asociar cada uno de los cuadrados de los catetos con los rectángulos correspondientes en que queda dividida la hipotenusa. Las cuatro líneas eliminadas son necesarias para demostrar que, efectivamente, esa asociación sugerida por la figura 13 es correcta. Si se conoce previamente esta idea básica –¡una hermosa idea!– es posible leer la pesada exposición de Euclides de forma comprensiva. Si no, la probabilidad de sentirse como un ciego guiado por un lazarillo es muy alta. Haced una prueba con alguien que no conozca esta demostración y pedidle que responda a la pregunta clave: ¿cómo se le pudo ocurrir esto a Euclides?

¡El estudio–lectura comprensivo! ¡Confesemos nuestra pereza cuando el camino de un texto de matemáticas aumenta su pendiente y nos exige rellenar las inevitables lagunas argumentales! El aprendizaje inteligente requiere de nuestra creatividad. Escuchemos a Trotski (1972):

> “En el estudio, cuando no se trata de una memorización mecánica, hay también un acto creador, pero de tipo inverso. Hacer el resumen de la obra de otro significa poner al descubierto el esqueleto lógico, despojándolo de pruebas, de ilustraciones y de digresiones.” ■

NOTAS

1 La duda sobre Dudeney o Perigal está tomada de www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml. Alexander Bogomolny ha recopilado en esta página 43 demostraciones del teorema de Pitágoras.

2 La lectura de Bertrand Russell (2003) es un buen ejercicio de higiene mental a propósito de este tema. El Russell logicista transformado en el Russell humanista: *“Ahora disfruto de la vida (...) En parte se debe a que he logrado prescindir de ciertos objetos de deseo –como la adquisición de conocimientos indudables sobre esto o sobre lo otro– que son absolutamente inalcanzables”.*

3 Al menos, así transcribe G. Gheverghese Joseph (1996) las palabras chinas “rojo” y “azul”.

4 Proposición 47, Libro I.

5 Además de en los *Elementos*, también se puede encontrar la demostración de Euclides en Davis y Hersh (1988).

REFRENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DAVIS y HERSH (1988): *Experiencia matemática*, Labor.

EUCLIDES (1991): *Elementos*, Gredos.

GHEVERGHESE JOSEPH, G. (1996): *La cresta del pavo real*, Pirámide.

NELSEN, R. B. (2001): *Demostraciones sin palabras*, Proyecto Sur.

RUSELL B. (2003): “La conquista de la felicidad”, *El País*.

SCOTT LOOMIS, E. (1972): *The Pythagorean proposition*, National Council of Teachers of Mathematics, Washington.

TROSTKI, L. (1972): *El joven Lenin*, Fondo de Cultura Económica.

SUMA 44
Noviembre 2003, pp. 87-90

Decimales con calculadora

Allá por el año 1996 se celebró en Sevilla el ICME 8, lo que permitió que un grupo de profesores sevillanos de Matemáticas nos conociésemos y descubriéramos nuestro interés común por los juegos.
Aquello que en un primer momento fue un simple intercambio de juegos y reglas, con un planteamiento de coleccionista, se enfocó, con el paso del tiempo, hacia su aprovechamiento didáctico en la clase de Matemáticas, como instrumento de popularización en nuestros centros y, posteriormente, fuera de ellos, sacando las Matemáticas a la calle.
Con motivo de la celebración en Granada en el año 1998 del Seminario organizado por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas sobre Recursos para el Aprendizaje en el aula de Matemáticas y coincidiendo con los entonces directores de la revista SUMA, Emilio Palacián y Julio Sancho, les propusimos la creación de una sección dedicada a juegos matemáticos y su utilización didáctica.
Esta propuesta fue acogida favorablemente y en el año 2000 apareció en el número 33 el primer artículo de una nueva sección llamada Juegos. La nueva dirección de la revista nos ha pedido que continuemos con esta sección, cosa que hemos aceptado gustosos.

Desde su aparición, la calculadora, ha ido incorporándose sin pausa en el mundo en el que nos desenvolvemos, sobretodo con el abaratamiento de sus modelos más básicos.

Aunque actualmente en algunas actividades está siendo desplazada por los ordenadores, siguen encontrándose como ayuda para la realización de cálculos por personas, que aunque es seguro que en su momento aprendieron los algoritmos clásicos de lápiz y papel, en la actualidad, en su vida cotidiana, por rapidez y seguridad, no recurren a ellos sino a la calculadora. No es extraño ir a comprar a algún pequeño comercio y ver que el quiosquero, el panadero o el vendedor de ultramarinos echan mano de ese artilugio para realizar las cuentas de nuestras compras.

A pesar de esa cotidianidad el uso de la calculadora (o máquinas que la superen) sigue sin llegar en gran medida al mundo educativo. Hay muchos profesores de matemáticas que siguen siendo enemigos acérrimos de su utilización en el aula. Así se da el contrasentido de que nuestros alumnos la usan para hacer cálculos en muchas asignaturas (Ciencias de la Naturaleza, Ciencias Sociales, Física y Química, Tecnología, etc.) y no en aquella donde deben aprender a calcular.

Existen muchos actividades atractivas y juegos que permiten trabajar contenidos de forma que los alumnos utilicen la calculadora de una manera racional, aprendan a manejarla y potencien las capacidades lógicas y de cálculo mental.

Grupo Alquerque de Sevilla
Constituido por:
Juan Antonio Hans Martín
José Muñoz Santonja
Antonio Fernádez-Aliseda Redondo
José Blanco García
juegos.suma@fespm.org

Esto conlleva que los alumnos no saben aprovechar realmente las posibilidades de ese aparato, pues nadie suele entretenerse en explicarles cómo sacar provecho real de él. Porque si hay una cosa evidente es que nuestros alumnos utilizan la calculadora para realizar sus cálculos cotidianos, ya que la mayoría cuenta con dicho aparato a su alcance, muchos de ellos ya operan directamente con los teléfonos móviles (igual que hubo una época en que proliferaron los relojes de pulsera con calculadora incorporada).

No es pretensión de este artículo hablar sobre las ventajas, o más bien necesidad, del uso de la calculadora en las clases de matemáticas. Para todo aquel que no esté convencido de este hecho aconsejamos la lectura de los *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática* del National Council of Teachers of Mathematics (NTSC) (versión española publicada por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática *Thales*) donde se aclarará la importancia de utilizar la calculadora dentro de la asignatura de matemáticas.

Existen muchas actividades atractivas (especialmente juegos de los que hablaremos aquí) que permiten trabajar contenidos de forma que los alumnos utilicen la calculadora de una manera racional, aprendan a manejarla y potencien las capacidades lógicas y de cálculo mental. En este artículo queremos presentar algunas de ellas y en los libros señalados en la bibliografía se pueden encontrar muchas más.

Encontrar la fracción:
Se presenta el número 0,7307692, indicando que es el resultado que hemos obtenido en la calculadora al dividir dos números enteros menores o iguales que 30.

Encontrar la fracción

Esta actividad es individual, aunque puede ser resuelta en pequeños grupos de trabajo. El planteamiento es muy simple, pero el proceso de resolución puede ser muy rico.

Se presenta el número 0,7307692, indicando que es el resultado que hemos obtenido en nuestra calculadora básica al dividir dos números enteros menores o iguales que 30. El objetivo es encontrar la fracción de números enteros cuya expresión decimal (truncada porque no cabe completa en la pantalla, es decir, eliminando el resto de decimales) corresponde con ese número.

Muchos alumnos suelen comenzar a probar indiscriminadamente divisiones entre enteros menores que 30. Es conveniente insistirles en que antes de comenzar a probar las 900 divisiones posibles, se debe planificar el trabajo y sobre todo estudiar cómo debe ser la fracción que da lugar a ese decimal. A los alumnos se les debe pedir que escriban en sus cuadernos el razonamiento que han seguido en la búsqueda de la solución.

En el desarrollo de esta actividad aparece la dificultad de relacionar unas operaciones numéricas con otras. Por más que insistimos en clase, los alumnos no tienen asimilado que la división es la operación contraria al producto, y que si

$$\frac{a}{b} = c$$

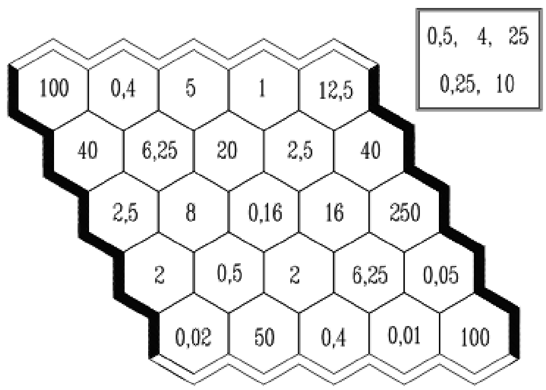
eso quiere decir que

$$a = b \cdot c$$

(algo sobre lo que hay que insistir incluso unas en bachillerato cuando aparecen los límites indeterminados).

Atraviesa el panal

Es un juego para dos jugadores. Se necesitan un tablero como el que aparece a continuación, una calculadora y un puñado de fichas de dos colores, uno para cada uno de los jugadores.



Como puede apreciarse el tablero hexagonal tiene dos extremos en negro (izquierda y derecha) y otros dos en blanco (arriba y abajo). Cada jugador elige una de esas parejas y su objetivo es unir mediante una línea poligonal de fichas (no necesariamente recta) los dos extremos que ha elegido.

La forma de jugar es la siguiente:

1) Por turno un jugador elige dos números (distintos) del recuadro superior y una operación, producto o división.

2) A continuación realiza la operación (con la calculadora si es necesario) y coloca la ficha en una casilla del panal donde aparezca el resultado de esa operación. Si el resultado obtenido no aparece en el panal o está ya esa casilla ocupada, el jugador pierde el turno.

> Atraviesa el panal*:*
> *Es un juego para dos jugadores. Cada jugador elige dos de los lados enfrentados del tablero y su objetivo es unir mediante una línea poligonal de fichas (no necesariamente recta) los dos extremos que ha elegido.*

3) Gana la partida el primero que consigue unir los dos extremos que ha elegido (ambos blancos o ambos negros) mediante una línea continua de fichas de su color. Si ninguno de los jugadores puede unir sus extremos, la partida se considera en tablas.

Para jugar a este juego es necesario tener en cuenta los siguientes aspectos:

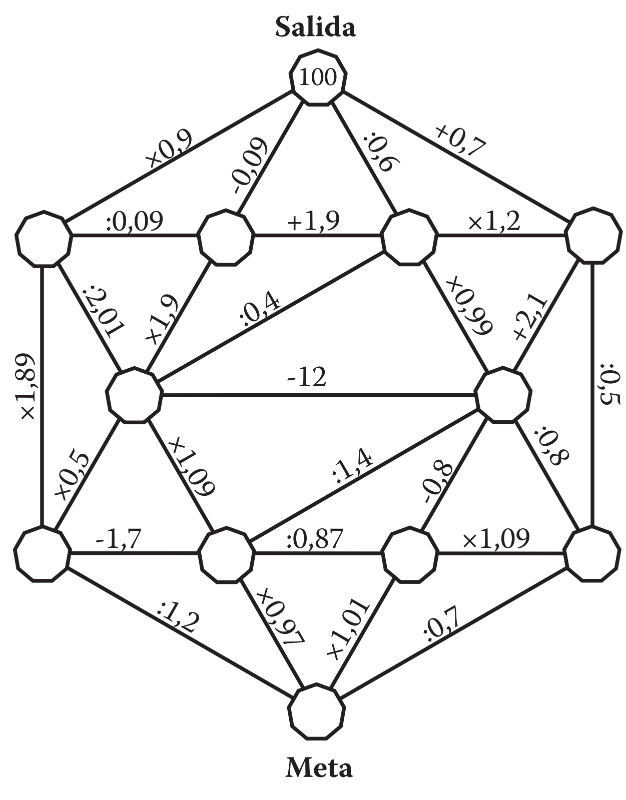
a) Hay resultados de operaciones que no figuran en el panal.
b) No es obligatorio colocar las fichas en una casilla adjunta a la que se ha colocado la anterior, ni es necesario comenzar a colocar fichas junto a uno de los extremos. Las fichas pueden situarse en el tablero de forma arbitraria.
c) La calculadora no puede utilizarse para realizar pruebas, es decir, sólo puede usarse después de haberse elegido los números y la operación a realizar, con el objetivo de comprobar la solución.
d) Aunque en la primera partida, los números suelen elegirse al azar y por su facilidad, tras varias partidas es usual que muchos alumnos realicen las operaciones mentalmente antes de elegir su tirada, con lo que se está potenciando este tipo de cálculo.
e) El tablero está preparado de forma que todos los números se obtienen con alguna operación de los cinco números elegidos, sin necesidad de repetir los números. Si se quieren simplificar los cálculos se puede permitir que los números que se eligen para realizar la operación sean repetidos.

Este juego está basado en un juego de tablero llamado HEX, que se juega sobre un tablero hexagonal (con las casillas vacías) y donde se colocan las fichas de dos colores con el objetivo ya indicado de unir los dos extremos que hayan correspondido a cada jugador. Ambos juegos tienen una estrategia ganadora, es decir, es posible jugar de forma que siempre se gane. Dejamos para la investigación de los lectores la búsqueda de esa estrategia ganadora.

La estructura de juego puede mantenerse modificando las operaciones y los números que figuran, tanto en el tablero como en la regleta rectangular. Así podemos adaptarlo para trabajar en Primaria, colocando sólo números naturales en la regleta y utilizando la suma y la resta para encontrar las soluciones que estarán sobre el tablero (como es lógico en este caso no se permitiría la calculadora). También podríamos colocar números convenientes de forma que su máximo común divisor o mínimo común múltiplo estuviesen en las casillas del tablero. O una regleta con polinomios y otra con números y, en las casillas, los valores numéricos de esas expresiones. La forma de jugar se mantiene en todos los casos, sólo se cambian los términos que aparecen en la regleta y las operaciones a realizar.

Laberinto decimal

El siguiente es un juego para realizar con toda la clase. Cada jugador dispondrá de una calculadora y un tablero como el de la figura.



El modo de jugar es el siguiente:

1) Se parte de la SALIDA tecleando el número 100 en la calculadora. Cada jugador recorre el tablero hasta llegar a la META con las siguientes reglas:
   a) En cada segmento que se recorre se realiza la operación indicada sobre el número que en ese momento se tenga en la calculadora. El alumno tiene que anotar la operación correspondiente y el número obtenido.
   b) No puede pasarse dos veces por el mismo segmento.

Laberinto decimal:
Es un juego para realizar con toda la clase. Cada jugador dispondrá de una calculadora y un tablero como el de la figura. Se parte de 100 y realizando las operaciones indicadas en cada segmento, sin retroceder, gana el que llega a META con el valor más alto.

   c) La dirección es siempre desde la SALIDA a la META y no se puede retroceder.

2) Gana el jugador que consigue llegar a la META con el valor más alto.

Una vez encontrado el camino, el alumno debe escribir en su cuaderno la expresión completa de las operaciones que ha realizado para llegar a su resultado, atendiendo especialmente al buen uso de la jerarquía de operaciones.

Después de las primeras partidas se puede modificar el objetivo del juego cambiándolo por los siguientes:

- Gana el jugador que consigue llegar al final con el menor valor.
- Gana el jugador que llega al final a un resultado lo más cercano posible al número original (100).
- Gana el jugador que obtiene el mayor valor al final después de haber pasado por todas las casillas.

Después de realizar dos o tres recorridos distintos se les puede pedir que intenten encontrar qué segmentos (es decir que operaciones) han influido en que los resultados sean mayores o menores.

Esta actividad es especialmente interesante porque rompe algunos esquemas erróneos que poseen los alumnos. En concreto nos referimos a la idea de que siempre que se multiplica se aumenta, y que al dividir disminuye el resultado.

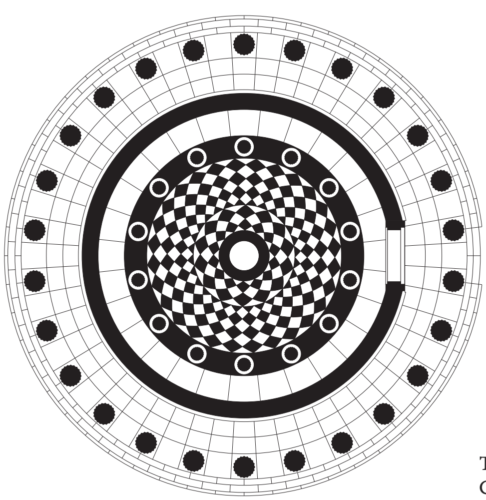
Si se trabaja con alumnos con dificultades, puede plantearse un objetivo más simple. Bastaría que el alumno hiciera un recorrido por el tablero, siguiendo las condiciones propuestas y que escribiera correctamente la lista de operaciones que dan lugar al resultado obtenido. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ÁLVAREZ ÁLVAREZ, A.(1995): *Uso de la calculadora en el aula*. M.E.C. y Narcea S.A., Madrid.

FERNÁNDEZ, S. y COLERA, J.(1995): *Calculadoras I y II*. Proyecto Sur, Granada.

N.C.T.M.(1993): ADDENDA SERIES nº 2. Edición en español de la S.A.E.M. THALES.



Tolos de Epidauro (Grecia), geometría del suelo.
Gráfico elaborado por FMC

SUMA 44
Noviembre 2003, pp. 91-98

iMÁTgenes 1, 2 y 3

Esta sección encontrará sus lectores más inmediatos entre las personas vinculadas al mundo académico y matemático, pero lo ideal sería que estas páginas pudieran llegar más allá. Tú, lector, podrías ser quien concretara el sentido educativo de la sección invitando a tus alumnos, familiares y amigos a relacionar lo que ven con las matemáticas. Por el nivel de matemáticas necesario no deberían preocuparse, ya que se restringirá al de la E.S.O. y el Bachillerato.
Todo lo que vemos son imágenes. Pensando en ellas buscamos en nuestro conocimiento modos de interpretarlas y entenderlas. Ahora se propone la reflexión sobre imágenes no con la intención de efectuar una descripción matemática gratuita de lo que se ve mediante la aplicación de conocimiento matemático, sino más bien al contrario: observar cómo las matemáticas pueden resultar imprescindibles para comprender lo que vemos. La idea es desvelar el trasfondo matemático subyacente en las imágenes, de ahí el título de la sección: imátgenes. Una iMATgen será una imagen portadora de matemáticas esenciales para su comprensión. Nada impide realizar un juego de palabras con un cariz biológico.
Puesto que ante una misma imagen dos personas pueden dar interpretaciones diferentes, una imagen puede admitir dos iMÁTgenes distintas. Por eso ofrecemos la posibilidad de participar en la sección mediante el correo electrónico: "imatgenes.suma@fespm.org". Cualquier comentario, sugerencia o ayuda será bien recibida. Muchas gracias. ¡Que lo veáis bien!

El pasado verano, durante una agradable velada en los jardines del Casino Taoro, sede de las últimas Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (J.A.E.M) celebradas en Canarias, la dirección de SUMA me propuso la realización de una sección para la revista. Recibí la propuesta con alegría, aunque reconozco que a la mañana siguiente, como suele ocurrir con lo que me agrada y halaga, dudé. ¿Y si hubiera sido un sueño?

Por eso, una vez terminadas las XI JAEM y confirmada la propuesta, la acepté encantado y es para mi un verdadero honor que le agradezco a la nueva dirección y, muy especialmente, a Emilio Palacián y a Julio Sancho, quienes han sumado mucho estos últimos años.

Tras estudiar varias temáticas posibles, acordamos con la nueva dirección de la revista optar por la que ahora se inicia y cuya idea original se remonta a un par de años atrás, cuando yo aún era profesor del Instituto de Educación Secundaria *Pau Vila*, en Sabadell. Allí, el Departamento de Matemáticas vio con buenos ojos la idea de colgar dos fotografías, una junto a la puerta del Departamento y otra, su réplica, en la página web del centro. Estas imágenes iban a relacionarse con las matemáticas de la forma que más tarde describiré. La iniciativa se vio interrumpida cuando fui desplazado forzosamente del centro. Ahora que va a resucitar agradezco a mis compañeros de entonces, Anna, Consuelo, Lluís, Quim y Rosa, la buena acogida que le dieron.

> *Toda imagen se ve según el ojo de quien la mira, pero algunas poseen tanta fuerza que obligan a una interpretación de carácter universal y única que remite al ámbito social, filosófico y humano.*

Aquella idea se tituló "iMATges". Destacando la sílaba "mat" incluída en la palabra catalana se pretendía dar a entender que todas las imágenes albergan matemáticas y que el asunto consistiría en enfatizar este aspecto. Para esta sección se pensaron diversas opciones (*El alimento del π-ojo* fue una de

Miquel Albertí
imatgenes.suma@fespm.org

ellas), pero al final se optó por la presente porque nos pareció más fácilmente adaptable a otras lenguas y la que mejor refleja el espíritu de la sección:

imágenes
imá genes
imátgenes
imátgenes
iMÁTgenes

Toda imagen se ve según el ojo de quien la mira, pero algunas poseen tanta fuerza que obligan a una interpretación de carácter universal y única que remite al ámbito social, filosófico y humano (un montón de cuerpos destrozados por una explosión). Otras se han convertido en iconos de la ciencia (un primer plano de un espermatozoide vigoroso) o del romanticismo (dos perfiles humanos al contraluz de un atardecer). El factor cultural afecta lo que observamos. La cultura matemática también. Afecta, pero no perjudica, todo lo contrario. La diversidad cultural puede ser un factor estupendo para estimular y generar nuevas perspectivas, para ver más y con mayor claridad. Siendo así, no sorprenderá que algunas de las imágenes a estudiar procedan de ámbitos sociales y culturales muy diversos.

El concepto de esta sección no se corresponde con el de la fotografía matemática. Tampoco pretende defender la idea de que toda imagen conlleva matemáticas. Como ya se dijo, el objetivo es darnos cuenta de que muchas de las cosas que vemos son como son, se ven como se ven o se perciben como se perciben gracias a las matemáticas. Eso sí, sin olvidar que una imagen se hace visible mediante la combinación de un proceso físico, como es la visión, con uno psicológico, como es la percepción. Algunas de las iMÁTgenes se basarán en uno o ambos procesos, mientras que otras se fundamentarán en cuestiones independientes de la visión y de la percepción.

Cada iMATgen se desarrollará en un artículo que empezará mostrando una fotografía, la imagen a tratar. Primero se describirá ésta con relación a los aspectos más alejados del ámbito matemático.A continuación, se desarrollará la metamorfosis de imagen a iMATgen.

Cada iMATgen se desarrollará en un artículo que empezará mostrando una fotografía, la imagen a tratar. Primero se describirá ésta con relación a los aspectos más alejados del ámbito matemático, como pueden ser su localización, contenido cultural y social a los que remite, etc. A continuación, se desarrollará la metamorfosis de imagen a iMATgen. Ésta será titulada, pero al final. Se pretende evitar así que el lector advierta desde el principio cuál va a ser el intríngulis matemático central y arrebatarle la posibilidad de realizar libremente sus propias cábalas.

Quiero dejar claro que las fotografías que aparecerán aquí no fueron tomadas con una intención predeterminada que facilitara su relación con las matemáticas. De hecho, muchas de ellas tienen ya bastantes años. En este sentido, las iMÁTgenes serán sinceras. Si en alguna ocasión esto no es así, prometo decirlo. Estás son las tres primeras iMÁTgenes:

iMATgen 1

iMATgen 3

iMATgen 2

El año 1992 sucedió algo extraordinario en Barcelona. Algo iniciado ya varios años antes, cuando la ciudad fue elegida sede de la vigesimoquinta Olimpiada. Pero lo extraordinario no fue la propia celebración de la Olimpiada, sino todo lo que la organización del acontecimiento provocó, tanto en la arquitectura de la ciudad como en quienes vivíamos en ella. Barcelona se transformó. Creció y miró más lejos, en muchas y diferentes direcciones. Su crecimiento, al contrario de lo que ha ocurrido en otros sitios, ha acentuado y destacado aún más sus hasta entonces rasgos más característicos. La ciudad se ha hecho mucho más diversa, humana y arquitectónicamente, y mucho más habitable que otras de tamaño similar.

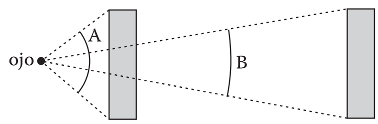
La fotografía muestra el *Passeig Marítim del Port Olímpic* (Paseo Marítimo del Puerto Olímpico) uno de los paseos que perfilan las ahora limpias playas de Barcelona. De hecho, la frase más oída en la última década ha sido que Barcelona se ha abierto definitivamente al mar. Es cierto. También lo es que hay quienes opinan que la transformación es solo de fachada y que obedece al eslogan: *Barcelona, posa't guapa!* (¡Barcelona, ponte bonita!) con el que se ha invitado a sus ciudadanos a la restauración de fachadas, edificios y espacios públicos. La iniciativa consiguió su objetivo y la ciudad está de muy buen ver.

Volviendo a la imagen veremos que muestra un fenómeno al que estamos muy acostumbrados y sobre el cual formular alguna pregunta puede parecer hasta una tontería. Pero como también quienes escucharon a Newton preguntar por primera vez por qué se caen las manzanas debieron tacharle de estúpido, voy a plantear la cuestión de todos modos: ¿Por qué las cosas más lejanas se ven más pequeñas? Es más, si se le formula la pregunta a un niño, ¿la considerará merecedora de alguna explicación? ¿No ha visto él las cosas siempre así, cuanto más lejos más y más pequeñitas, hasta que desaparecen?

Estamos tan acostumbrados a esta disminución del tamaño con la distancia que puede resultarnos difícil dar una respuesta inmediata a semejante pregunta. No es raro que al formulársela a alguien extraño al mundo de la física y de las matemáticas se sienta perplejo. "¡Es algo tan corriente que no necesita explicación!", o "toda la vida ha sido así" pueden ser algunas reacciones.

Pero desde el punto de vista matemático y físico sí que es necesaria una explicación, un porqué. Un porqué sin el cual no veríamos como vemos, sin el cual la imagen del paseo junto al mar no tiene sentido ni puede comprenderse del todo. Un porqué que determina la idea de la perspectiva: vemos así porque la luz viaja en línea recta.

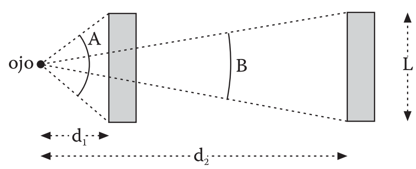
El tamaño aparente de un objeto viene determinado por el ángulo de visión que se forma en el ojo a partir de los rayos de luz rectilíneos procedentes de los extremos del objeto que estamos mirando. La figura muestra como este ángulo será menor cuanto más lejos se halle el objeto:



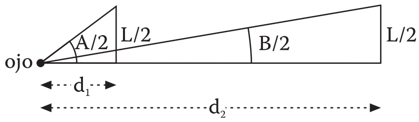
Incluso puede llegar a ser tan pequeño que se haga imperceptible al ojo. Entonces el objeto desaparece. Como también desaparece un objeto próximo pero muy pequeño si lo es tanto que el ángulo que lo abarca nos resulta imperceptible.

Desde la perspectiva matemática la cuestión fundamental es cuantificar esta disminución. Esto es algo fundamental en la imagen, sin esta perspectiva no se comprende lo que vemos: Conocer cómo disminuyen las cosas en la distancia resulta esencial para ver. Así es como la imagen se transforma en iMATgen.

Por ejemplo, situando dos objetos idénticos, uno a una distancia doble del otro, ¿se verán también uno el doble del otro? Sea L la longitud de dos objetos iguales, sean d_1 y d_2 las distancias que nos separan de ellos y sean A y B, como en el dibujo anterior, los ángulos de visión correspondientes a cada uno. Entonces:



Obtenemos dos triángulos rectángulos:



En estos triángulos: $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{L/2}{d_1}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{L/2}{d_2}$

Luego:

$$\boxed{\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B}{2}}=\frac{d_2}{d_1}}$$

Por tanto, no son los ángulos los que mantienen la misma proporción que la distancia, sino sus tangentes. En el caso mencionado en que $d_2=2\cdot d_1$, será:

$$B=2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)$$

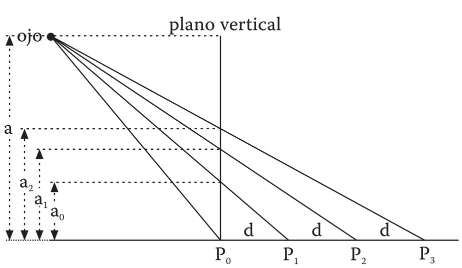
Si hacemos variable la proporción entre las distancias al ojo, $x=d_2/d_1$, hallamos cómo disminuye el ángulo de visión con relación a dicha proporción en general:

$$B=2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)$$

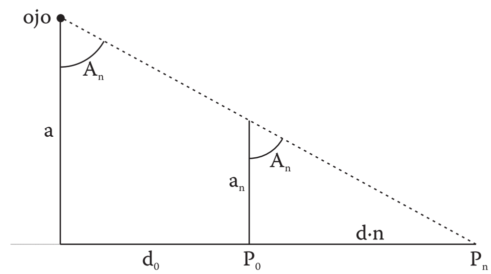
Para $A=\frac{\pi}{2}$, resulta: $B(x)=2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$

Pero aún hay otra razón por la que la imagen es iMATgen. Además de apreciarse cómo disminuyen de tamaño con la distancia diversos elementos presentes en la fotografía, se ve también como van ascendiendo hacia el horizonte que el punto de fuga en perspectiva determina. ¿Cómo es este ascenso?

Para cuantificarlo tomemos como referencia los puntos de luz P_0, P_1, P_2, P_3, ... alineados en el suelo. Son equidistantes. Sea d la distancia entre dos de ellos y sea a la altura de la visual, nuestro ojo, sobre el suelo. Entonces el ascenso sobre el plano vertical de la visual con el que los percibimos, es decir, el del propio papel de la fotografía si la imagen hubiera sido tomada con el objetivo realmente perpendicular al suelo, viene determinado por las sucesivas intersecciones de dicha vertical trazada por el primero de ellos, P_0:



Fijándonos en uno de los elementos:



Con relación a los dos triángulos semejantes que aparecen, podemos escribir:

$$\frac{a-a_n}{d_0}=\frac{a_n}{d\cdot n}\Leftrightarrow a_n=\frac{a\cdot d\cdot n}{d\cdot n+d_0}$$

El límite de esta sucesión es precisamente a, la estatura ocular del observador o, en su caso, la altura del punto de observación:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a\cdot d\cdot n}{n\cdot d+d_0}=\frac{a\cdot d}{d}=a$$

Pero por muy larga que fuera la hilera de luces nunca llegaríamos a ver este límite a causa de la curvatura de la superficie del planeta. Para $a=d_0=d=1$ metro:

$$\boxed{a_n=\frac{n}{n+1}}$$

Hallamos un contexto tangible excelente para visualizar (nunca mejor dicho) una de las sucesiones de números racionales más populares cuyo límite es la unidad. Un límite para el cual también vale el contexto, pues está a la altura del horizonte. De este modo, vemos la sucesión de farolillos, cada vez más lejanos, ascender cada vez más despacio. Una sucesión que, junto con el lema olímpico, inspira el título de esta primera iMATgen: ***¡Altius, lentius, longius!***

El atleta velocista sabe mucho de todo esto. Agazapado en los tacos del impulso, mira al suelo mientras espera el disparo. Desde ahí abajo la meta es un horizonte inalcanzable en un tiempo finito. Durante los instantes previos al disparo de salida se conjuran en su mente las bestias de sus pesadillas: las tortugas. Pesadas y torpes en la realidad de la vigilia, se ríen de él cuando no consigue alcanzarlas en el sueño. Un estallido le libera de estos pensamientos, se yergue de un latigazo del que no se siente responsable, una reacción al sobresalto. Desde su estatura la meta ya no es el horizonte. Se ha tornado alcanzable y corre hacia ella en un tiempo que desearía infinitesimal. ■

Qizá nos sintamos un poco intimidados por la mirada de la fotografía. la imagen muestra una construcción inusual en nuestro país y los de nuestro entorno, pero corriente en Nepal: una stupa. Este en concreto es uno de los más grandes y se halla en la localidad de Bodhnath, al este de Kathmandú. Los recortes de tela que penden de los cordeles que parten de su pináculo no son banderines de adorno, sino pañuelos en los que hay escritas plegarias y oraciones dirigidas a los dioses. El viento se encargará de recitarlas mientras los fieles esperan su cumplimiento girando y girando, en sentido contrario al de las agujas del reloj, alrededor del cuerpo orondo de la construcción.

Las stupas vienen a ser colinas artificiales destinadas a albergar reliquias de Buda, aunque ignoro si la de Bodhnath contiene alguna del *Iluminado*. "Esta es una estructura simbólica ... y constituye un diagrama artquitectónico del cosmos, intencionadamente orientado y diseñado de acuerdo a un elaborado sistema de relaciones proporcionales con significado místico" (Honour y Fleming, 1991). Sobre la base en forma de mandala se asienta la cúpula semiesférica. Encima de ésta se construye la aguja, de planta cuadrada, encima de ella la sombrilla y, finalmente, el pináculo. Cada uno de estos niveles se asocia con una significación mística y cosmogónica.

Los fieles no entran en las stupas. En Nepal la religión gira siempre en torno a un eje. El de Bodnath es inmenso, pero no hace falta acudir a la stupa, pues en sus alrededores y en muchas calles de los pueblos nepalíes hay hileras enteras de molinillos que a un toque del paseante iniciarán un giro veloz mediante el cual el mantra escrito en su superficie será recitado vuelta tras vuelta. También hay molinillos de mano portátiles cuya cabeza aloja un rollo de pergamino en el que están escritos los mantras. Sacudiéndolos con destreza se hace rotar su cabeza y los mantras son recitados.

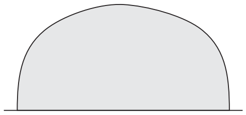
Pero no va a ser la rotación la que va a transformar en iMATgen esta imagen, sino otra cosa presente en la fotografía y que quizá no llame mucho la atención a primera vista. A la derecha aparece una escalera de mano apoyada en el cuerpo del Stupa. Justo cuando termina ésta, la ascensión continua por una escalera de peldaños tallada en la superfície oblonga. La imagen no permite ver lo que hay más arriba, pero no es difícil imaginarlo. Para llegar hasta los ojos que todo lo ven el camino se hace liso y llano. Para acceder al pináculo habría que tomar nuevamente una escalera de peldaños, esta vez encajados en la pared de piedra describiendo una curva sinuosa.

¿Para qué tanto cambio de escalera? ¿No habría valido con labrar peldaños desde la base hasta arriba? ¿O será acaso que a cada pendiente a superar le conviene una escalera determinada?

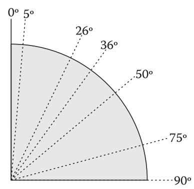
Cuando la pared de la stupa es muy empinada, como sucede cerca de su base, resulta prácticamente imposible tallar escalones. Sencillamente no hay espacio físico suficiente para nuestros pies y, aunque lo hubiera, la pendiente sería demasiado grande y se haría muy difícil mantener el equilibrio. La escalera de mano resuelve el problema porque su base se apoya lejos de la de la stupa. Luego sí, durante un tramo se pueden labrar escalones cuya pendiente se asemeja más a las escaleras convencionales. Para terminar, la pendiente se hace tan suave que con la superfície lisa, una rampa, es suficiente. Labrar escalones aquí arriba sería tan absurdo como hacerlo junto a la base, aunque mucho menos peligroso pues su altura llegaría a reducirse a la nada.

¿Qué opinan los arquitectos? Fundamentales en la comodidad y seguridad de cualquier escalera son las dimensiones de la huella y la contrahuella. La huella es la profundidad del peldaño sobre la que se apoya el pie, la contrahuella es la altura del peldaño. "La relación más favorable entre las medidas de la huella (H) y la contrahuella (CH) son $61cm \leq H+2CH \leq 63cm$" (Ching, 1998). Las características de una escalera se relacionan con el valor de la pendiente a superar. Así, "las rampas son aconsejables para pendientes que no superen los 5º; para un tramo de escalera corriente se aconsejan pendientes de entre 26º y 36º; por encima de 50º una escalera se considera incómoda e insegura; para pendientes superiores a 75º ya se aconsejan escalas o escalerillas" (Ching, op. cit.).

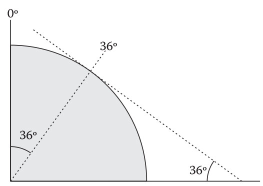
La stupa de Bodhnath no es una semiesfera pefecta. Aunque la fotografía no permite apreciarlo, su perfil es algo así:



La semiesfera sería un modelo ideal de la forma de la stupa. Quizá quienes lo construyeron quisieron darle forma semiesférica, quizá no. De todos modos, la relación entre el tipo de escalera y el perfil de una semiesfera puede visualizarse teniendo en cuenta que en matemáticas llamamos pendiente al valor de la tangente del ángulo que un segmento o recta forma con la horizontal o eje de abcisas, mientras que Ching valora la pendiente con el ángulo mismo. La figura siguiente muestra un cuadrante de círculo correspondiente a la sección de una semiesfera. Su perfil sería el de la stupa si ésta fuera perfectamente semiesférica.



Se ha tomado el origen de los ángulos en el eje vertical y su sentido positivo como el de las agujas del reloj porque así el punto de intersección de la recta con la circunferencia posee una pendiente matemática igual a la descrita por el arquitecto. Por ejemplo, la recta tangente a la circunferencia en el punto de intersección de ésta con la recta correspondiente a 36º forma a su vez un ángulo de 36º con la horizontal:

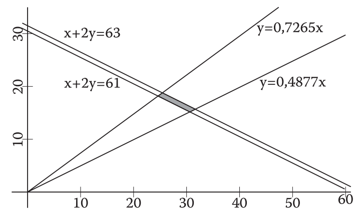


Resulta pues que la distribución de escaleras en cada tramo de la stupa se hace de acuerdo a las exigencias de la pendiente. El ascenso se inicia con una escalera de mano que permite salvar pendientes casi verticales. Le sigue después un tramo de escalones cuya altura o contrahuella disminuye con la ascensión. Finalmente, aunque invisible en la foto, una rampa cada vez más tendida conduce a los ojos del Buda.

Las condiciones arquitectónicas conducen al planteamiento de un sistema de inecuaciones que respondería a la pregunta de entre qué valores pueden variar las dimensiones de los peldaños de una escalera cómoda y segura:

$$\begin{cases} x, y \geq 0 \\ 61 \leq x + 2y \leq 63 \\ \operatorname{tg} 26'' \leq \dfrac{y}{x} \leq \operatorname{tg} 36'' \end{cases}$$

Este sistema se relaciona con un problema de Programación Lineal cuya función objetivo a minimizar, $f(x)=ax+by$ $(a,b>0)$, podría ser la del coste de construcción de la escalera. Muchas de ellas, no hablo ahora de las escaleras de la stupa, sino de las que hay por aquí, tienen huellas de madera y contrahuellas de cemento o baldosa, un rasgo que sin duda afecta al precio de su construcción. La región solución del anterior sistema de inecuaciones tiene cuatro vértices sobre los que recaerá la responsabilidad de este coste:



Región de valores para una escalera cómoda y segura.

Para $2a>b$, el vértice solución será (24,87 cm,18,07 cm); para $2a<b$, (30,88 cm,15,06 cm); para $2a=b$, cualquier punto del segmento que ambos vértices determinan.

Quienes construyeron la gran stupa en Bodhnath dispusieron también diferentes tipos de escalera de acuerdo con la pendiente a superar. Primero, en forma de escala o escalerilla; después, en forma de escalera corriente de peldaños; finalmente, acabaron con una rampa. Así se llega a los ojos del iluminado, al cielo.

En la década de los setenta se hizo muy famosa una canción que hablaba de una escalera que también ascendía al cielo. Sus primeros versos eran:

There's a lady who's sure all that glitters is gold
And she's buying a stairway to heaven.
And when she gets there she knows if the stories are closed
With a word she can get what she came for ...

Desconozco si Jimmy Page y Robert Plant se inspiraron en las stupas cuando la compusieron, pero el tema se desarrolla también en tres secciones principales. Empieza con los suaves arpegios de Jimmy Page a la guitarra acústica y la voz de Robert Plant. Luego se incorporan el bajo y la batería al tiempo que la guitarra acústica cede el protagonismo a la eléctrica de sonido adornado con pedal. El tema culmina con otro cambio de ritmo y de timbre, los de la distorsión en la eléctrica y la vocalización desgarrada, características ambas del que se llamaría más tarde *heavy* y *heavy metal*. ¿Qué mejor título para esta iMATgen que el de ***Stairway to heaven***? ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CHING, F.D.K. (1997): *Diccionario Visual de Aqruitectura*. Editorial Gustavo Gili. Barcelona.

HONOUR, H. y FLEMING, J. (1991): *A World History of Art*. Laurence King. London.

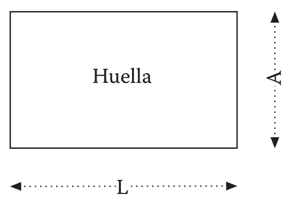
He aquí la huella de un hombre. El barro en el que quedó impresa no era casual. Entonces era la época de lluvias, periodo equivalente a nuestro otoño e invierno juntos. Esparcidos a su alrededor se ven algunos granos y cáscaras de arroz. El hombre sacudía con fuerza e insistencia un manojo de brotes de arroz contra un ingenio de madera para que los granos se desprendieran de sus tallos. Así, un montón de arroz medio descascarillado iba llenando poco a poco el fondo del ingenio. Junto a él, una mujer se encargaba de recogerlo y meterlo a puñados en una bandeja circular de rottan trenzado, la levantaba por encima de su cabeza hasta donde podía y, desde allí arriba, vertía su contenido sobre un saco abierto extendido en el suelo. De este modo alargaba la caída del cereal y facilitaba al viento su tarea. La mayoría de las cáscaras, mucho más ligeras, volaban hasta caer lejos del saco. El viento se llevaba lo que no importaba a nadie. En el saco quedaba el alimento básico de todo un continente.

La huella no impresiona (visualmente) por su tamaño. Pero hay algo en ella que llama mucho la atención. El día que mostré esta fotografía a mis alumnos de tercer curso de la E.S.O. reaccionaron diciendo que era de un gorila o de un simio. Yo les dije que no, que era la pisada de un hombre, y les pregunté por qué habían pensado que no era humana. Alguien respondió: “es muy ancha”. ¿Muy ancha? Si queréis podemos hacer una foto a una huella nuestra y luego ampliarla tanto como queramos. También será muy ancha, ¿no? Alguien replicó: “es mucho más ancha que larga”. ¿Seguro? ¿O quieres decir que es muy ancha para lo larga que es?

He aquí la huella de un hombre. La huella no impresiona, visualmente, por su tamaño. Pero hay algo en ella que llama mucho la atención.

Esto es lo que impresiona. Estoy seguro de que no hay hombre ni mujer en toda la península, para no irme más lejos, que podría, cuya huella sea comparable a ésta. Una huella mía, por ejemplo, se vería más fina y estilizada. La relación entre su longitud y anchura sería mucho menor que la de esta imagen. La huella impresiona por su proporción.

Midamos pues la huella y calculemos la proporción entre su longitud y anchura. Al efectuar la medición hay que tener en cuenta que la pisada no es del mismo tamaño que el pie y que parte del barro que perfila la forma del pie ha sido desplazado:

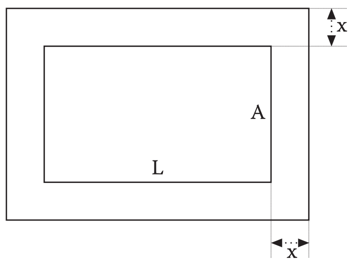


Quizá el cociente obtenido, L/A aproximadamete igual a 2,1, no nos diga mucho de entrada, pero si hacemos lo mismo con nuestro propio pie nos daremos cuenta de la diferencia. El valor del cociente L/A de la imagen será bastante menor que el nuestro. En mi caso, L/A=2,7. Es esa diferencia de proporción y no de tamaño la que transforma esta imagen en iMATgen.

El tema puede dar mucho de sí porque hay dos aspectos de la proporción involucrados aquí. Uno es el ya mencionado. El otro es que no importa que la fotografía sea de un tamaño u otro. El resultado del cociente L/A será siempre el mismo mientras la imagen sea consecuencia de una ampliación o reducción.

Mis alumnos de tercero de la E.S.O. también calcularon las proporciones de sus pies. Les encargué que en casa se midieran su longitud y anchura y trajeran los resultados a clase. Vieron que la proporción de la huella era mucho más pequeña, es decir, más ancha. También observaron que las de las chicas eran menores que las de los chicos. Incluso hubo una alumna cuya proporción era 3,14. Ella sí que caminaba con buen "πe". Cuando les pregunté cómo habían medido sus pies aparecieron cosas interesantes. La mayoría se midió el pie levantándolo del suelo y aplicándole a la planta una regla. Otros habían puesto la regla en el suelo y luego la habían pisado a lo largo y a lo ancho, buscando el mayor ancho posible. Pero hubo quien en lugar de efectuar una medida directa perfiló con lápiz la silueta de su pie sobre un folio y midió después el resultado. La acción de esta alumna me invitó a que planteara a toda la clase un problema que ahora repito de un modo más formal:

Al perfilar una figura, aunque poco, la estamos agrandando porque siempre queda una cierta separación entre la punta del lápiz o bolígrafo que perfila y el objeto perfilado. ¿Se conserva entonces la proporción entre su longitud y anchura?

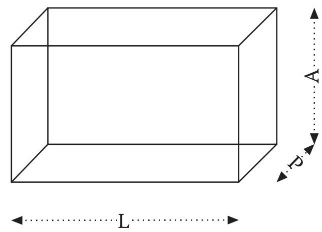


Entre el rectángulo original y su perfilado[1] se mantendrá la proporción de sus lados, es decir, serán semejantes si:

$$\frac{L}{A}=\frac{L+2x}{A+2x} \Leftrightarrow Lx=Ax \Leftrightarrow L=A \vee x=0$$

Las soluciones L=A y x=0 indican solamente dos posibilidades: o bien el rectángulo original es un cuadrado (L=A), o bien la perfilación del rectángulo no cuadrado debe tener amplitud nula (x=0), es inexistente. Este resultado vale tanto para el perfilado exterior (x>0), como se ha realizado aquí, como para el interior (x<0).

Podemos plantear también la cuestión en el caso de que el objeto sea tridimensional. Pasaríamos entonces de perfilar un objeto a envolverlo. En el caso bidimensional obtenemos un valor para la proporción como resultado de dividir dos números, la medida de la longitud y de la anchura. En tres dimensiones, tenemos tres magnitudes: longitud, anchura y altura. ¿Cómo adaptar entonces la idea de proporción al caso tridimensional? Y una vez conseguido esto, ¿conservará el envoltorio la proporción del objeto desnudo?



Con relación a cada cara bidimensional, en principio disponemos ahora de tres proporciones:

$$k_1=\frac{L}{P},\ k_2=\frac{P}{A},\ \ k_3=\frac{L}{A}$$

Pero solo en principio porque $k_3/k_1=k_2$. Por tanto, si en dos dimensiones bastaba con una proporción, en el caso tridimensional dos serán necesarias para decidir cuando dos prismas rectos rectangulares, dos cajas, son semejantes. Lo serán si lo son cada una de sus caras. Si en el caso bidimensional solamente el cuadrado conservaba su proporción mediante el perfilado, ahora será el cubo el único que lo hará tras ser envuelto.

Mis alumnos consideraron que el ser cuyo pie originó esta iMATgen era de otro mundo. Aquel hombre vive en un mundo que aquí, en occidente, llamamos diferente, pero que está en este mismo planeta. Un mundo donde todavía hoy gran parte de la población camina descalza, donde incluso hay gente que no se ha calzado nunca. Gente a quienes con los años se les han ido ensanchando los pies hasta el punto que muestra la fotografía. Viven en una región montañosa llamada Tana Toraja, en la isla de Sulawesi, Indonesia. Un lugar donde las mujeres y los hombres caminan sintiendo en sus pies el calor o frescor, la humedad o aspereza de la tierra que pisan. ¿Quién sabe si antes de lo que creemos las pisadas de sus hijos no se unirán a las que resuenan en nuestras aulas?

Una huella es un vacío. ***El vacío que habla*** será el título de esta iMATgen. Quien la escucha necesita hablar matemáticas para comprender bien lo que dice. ■

NOTA

1 Soy consciente de que a diferencia del perfilado interior, el perfilado exterior a lápiz o bolígrafo de un rectángulo no produce esquinas puntiagudas, sino que las suaviza en arcos de circunferencia. Así que, en realidad, el perfilado cambia la forma original, pero esto no lo voy a tener en cuenta aquí. Quizá vuelva sobre ello en una iMATgen futura.

SUMA 44
Noviembre 2003, pp. 99-100

Invitación a las hélices

En esta nueva sección de SUMA intentaremos mirar, matemáticamente, aspectos curiosos, cotidianos y actuales, que nos permitan ver y hacer ver, relaciones transversales interesantes, sin perder la alegría imprescindible en este tipo de intentos.
Un clip puede mantener juntos durante cierto tiempo papeles muy diversos sobre temas diferentes. Y no es una grapa. Ojalá las/os lectoras/es de SUMA puedan añadir a estos clips sus propias ideas y compartirlas con los demás.
Al final del clip se incluirá siempre alguna propuesta "para pensar un rato". Las/os lectoras/os se SUMA que deseen enviar sugerencias, comentarios o soluciones ingeniosas sobre el problema propuesto pueden hacerlo por e-mail a ***elclip.suma@fespm.org****.*
En el siguiente clip se harán referencias al material recibido.

Las hélices son curvas que tienen la suerte de estar en el espacio, enrolladas en cilindros o en conos y visibles tanto en la naturaleza como en las producciones humanas. Los que gusten usar de guía, los tratados de Thompson (1980), sobre forma y crecimiento, o los de T.A. Cook (1979), sobre las curvas de la vida, pronto quedaran fascinados por las espirales y hélices presentes en el universo, en caracolas del mar, plantas trepadoras, cuernos de cabras, etc. Las formas de las hélices son buenas para agarrarse y para auspiciar crecimiento. También las hélices pueden servir para sacar agua (invento de Arquímedes) o subir con pendiente constante (escalera de caracol), o asegurar el avance de barcos, helicópteros, etc.)

Las hélices forman parte también de los secretos de la vida, al estar presentes en las estructuras del ADN. Un gran reto científico actual es explicar en términos bioquímicos, y con objetivos genéticos, los misterios que se esconden tras esta geometría de las hélices con proteínas.

Pero lo que les propongo hoy es un breve recorrido por las hélices caseras actuales. El 2003 es el año internacional del diseño y por tanto una ocasión excelente para colocar en nuestra colección docente de formas geométricas, ejemplares clásicos que nos faltan o bien producciones de reciente invención. Veamos ejemplos diversos:

Las bombillas. Su forma es el icono de la idea feliz. Dos hélices constituyen su razón de ser. La de la rosca permite su ajuste seguro al portalámparas. La mini-hélice en tres tramos del interior, es lo que convierte electricidad en luz. Si la hélice se rompe, adiós bombilla. Hay mil diseños de lámparas de diseño, pero la bombilla sigue siendo el elemento central.

> *Las hélices son curvas que tienen la suerte de estar en el espacio, enrolladas en cilindros o en conos y visibles tanto en la naturaleza como en las producciones humanas.*

El calentador individual de bebidas. Diversas empresas producen artefactos para calentar bebidas en el propio vaso. Un enchufe a la corriente, una resistencia eléctrica que se calienta, un calor que se propaga a lo largo de la hélice sumergida... y un mango aislante para sobrevivir a la experiencia, hacen posible calentar a voluntad el contenido de un vaso. Inútil en la cocina y justificable en despachos donde se desee tomar un te caliente. Este aparatito es en el fondo, heredero de los viejos calentadores de agua para la ducha, aquellos que exigían una planificación horaria previa al acto de ducharse.

Los radiadores de la calefacción. En medio de tanto minimalismo también es reconfortante localizar ejemplos de maxima-

Claudi Alsina
elclip.suma@fespm.org.

lismo. Este es el caso de las trayectorias que conforman los radiadores de la calefacción doméstica: lo que interesa es el tránsito del agua caliente y la transmisión del calor a las estancias que se desean más cálidas. ¿Se acuerdan de las hélices incandescentes de las viajas estufas eléctricas, aquellas hélices que se ponían rojas y cuyo calor reflejaba la “parabólica” brillante de la época?

El Pop Up Sac. La empresa “Internas” produce un saco de forma cilíndrica, plegable a una forma casi plana y que se despliega y adquiere verticalidad fija gracias a la hélice-mueble de dos vueltas. Sirve para recoger hojas del jardín, guardar ropa sucia o las obras completas de Bourbaki.

Pinzas de tender ropa. Estos objetos emblemáticos del diseño han llegado a su perfecta madurez. Como los clips. La simetría de sus dos partes se conserva al abrir y cerrar gracias a esta humilde hélice central metálica con los dos sujetadores finales que fuerzan la máxima unión posible entre los laterales. Más simple y económico, imposible. Una alternativa ecológica a las secadoras. Sin embargo, la pinza versión ratonera está en desuso. Y no será por falta de ratas...

Escaleras de caracol. Siguen estando presentes en escaleras de lujo, integradas en halls de hoteles luminosos, con pasamanos de madera noble y escalones articulados alrededor de un eje central. También existe la versión biblioteca-particular, un gracioso mueble plegable de tres escalones.

Los muelles ocultos. Ajenas a todo protagonismo formal, pero con exquisita funcionalidad, las hélices metálicas de los muelles rinden constante homenaje a la Ley de Hooke. La proporcionalidad directa entre fuerza y deformación y el poder del metal por recuperar su forma hacen viable la presencia de hélices-muelle en las cerraduras, en los bolígrafos guiando la punta, en cierres automáticos de puertas, en amortiguadores de vehículos, en balanzas mecánicas, en cuellos de grapadoras,...

Los tornillos y berbiquíes. La brutalidad del martillo da sentido a los clavos. El movimiento helicoidal del berbiquí abre camino al tornillo, cuya hélice cónica se desplaza bajo la acción del destornillador. Si prefieren versión *tecno*, las taladradoras multiuso les evitaran esfuerzos.

Los sacacorchos. Sus coleccionistas siguen estando de enhorabuena. A sus formas tradicionales se han añadido numerosas innovaciones en materiales y decoraciones. Siguen en el mercado incorporados en navajas multiuso suizas para excursionistas gourmets o en la forma más tradicional de girador-abridor y elegantes brazos laterales para el descorche final.

Las roscas de las botellas. Sin estas hélices suaves de pocas vueltas, los licores, las gaseosas, los tamaños familiares de las colas, etc, dejarían de tener sentido. Solo esta hélice conduce bien a la del tapón... cuantas veces sea necesario. Tapones a presión, abstenerse.

Anímense a seguir la lista... y la colección. Hay muchas formas de diseño gratuitas. Las hélices siempre van ligadas a funcionalidades. Funciones que, como sabemos, solo ellas pueden ofrecer. La geometría puede no solo inspirar su uso, sino justificar su sentido.

Para pensar un rato

Tome un DIN A4, divida en tres partes iguales el lado mayor y trace los tres rectángulos asociados a dicha división. Dibuje las tres diagonales paralelas de los rectángulos Forme el cilindro correspondiente y tendrá una hélice. Tome tijeras y recorte ahora el cilindro a lo largo de la hélice. ¿Qué figura plana obtendrá? ¿Cuáles serán sus medidas? ■

PARA SABER MÁS

COOK, T.A.(1979): *The Curves of Life*, Dover Pub., New York.

MUNARI, B.(1983): *¿Cómo nacen los objetos?*, Ed. Gustavo Gili, Barcelona.

PADRÓS, E. et al. (2003): *Alehop! Dissenys, Enginys i Remeis*, Inst. Cultura Aj. Barcelona .

PETROSKI, H.(1994): *The Evolution of Useful Things*, Vintage Books, New York .

RABINOW, J. (1990): *Inventing for Fun and Profit*, San Fransciso Press. San Fransico.

THOMPSON, D'A. (1980): *Sobre el crecimiento y la forma*, Hermann Blume Ed., Madrid.

Google-imágenes: más de 9000 fotos buscando '*helix*' y más de 1700 en '*helice*'.

SUMA 44
Noviembre 2003, pp.101-105

Las matemáticas en el Museo Elder de la Ciencia y la Tecnología de Las Palmas

Esta nueva sección, **Informales e interactivas. Las matemáticas en los Centros de Ciencia,** *pretende presentar un espacio alternativo donde se pueden tocar, manipular, descubrir y aprender las matemáticas. Por supuesto, descubrimientos y aprendizajes "informales". No nos limitaremos a los Museos interactivos de Ciencia y Tecnología (los llamados Science Centres, SC), sino que también consideraremos los Planetarios, exposiciones temporales, itinerantes, carpas, actividades y exhibiciones, etc. que tengan contenidos matemáticos. En cada número de SUMA haremos hincapié en un aspecto significativo de estos nuevos centros. Trataremos de saber un poco más sobre sus características y objetivos básicos; la perspectiva histórica de su evolución; su papel y el de la divulgación científica, en general, en el siglo XXI.*
Intentaremos contar cómo se aprende en uno de estos centros, qué factores posibilitan el aprendizaje y cómo evaluar esos aprendizajes. ¿Aprenden o simplemente juegan y se divierten? ¿Dónde están los polinomios en el museo?.
En cada artículo presentaremos un museo, un centro, una exposición o una exhibición en particular, haciendo un recorrido general muy breve por sus instalaciones y otro, más detallado, por sus contenidos matemáticos. Por último, trataremos siempre de incluir elementos bibliográficos y accesos significativos a la Web.

Aparte de las aulas o talleres que puedan contener los Centros Educativos donde se realizan actividades de enseñanza y aprendizaje de las distintas materias científico-técnicas curriculares y en particular de las Matemáticas, y que van, casi en su totalidad, dedicadas a un sector de edad muy determinado, existen otros espacios, una nueva tipología de museo, los llamados Centros de Ciencia –Science Centres- espacios cuyas propuestas van dirigidas a amplios sectores de la población, que apuestan por una cultura científica y tecnológica basada en la comunicación inteligible y la participación, una cultura respetuosa con el distinto nivel de interés y formación de cada persona y preocupada más por motivar la búsqueda que por transmitir un mensaje cerrado, lugares donde se estimula el innato deseo de aprender, se abren horizontes y se despierta la curiosidad, espacios donde está "prohibido no tocar", o "no pensar", o "no sentir", o "no aprender",...; y donde las Matemáticas también están presentes ya sea en forma de exhibits interactivos, piezas singulares, esculturas alegóricas, espectáculos de Planetarios, ya sea en forma de exhibiciones y concursos, unas veces de manera más concreta y otras de forma multidisciplinar.

Todos los centros interactivos, quieren servir de puente, de traductor del lenguaje de los científicos a todos los ciudadanos, quieren hacer un acercamiento entre la ciencia y el visitante por medio de experiencias interactivas, demostraciones y otras formas de comunicación, que les permitan una mayor comprensión de los fenómenos que tienen lugar en la naturaleza, y un conocimiento de los aparatos (y su funcionamiento y evolución) propios de la tecnología.

> *"La Naturaleza no tiene la culpa de los planes de estudio previstos en escuelas y universidades"*
> ***Jorge Wagenberg***
> *Director del Museu de la Ciencia Fundación "La Caixa".*

Y estos nuevos Centros –unas veces llamados Museos de la Ciencia, Centros Interactivos de la Ciencia o Casas de las Ciencias, otras veces en forma de Planetarios, e incluso presentados en forma de exposiciones temporales, exposiciones

Jacinto Quevedo
museos.suma@fespm.org

itinerantes o carpas de la ciencia- se caracterizan -y esto los diferencia de los museos y las exposiciones clásicas- en que han evolucionado, han cambiado, han pasado de la vitrina al experimento, del "cuidado no toques" al "prohibido no tocar", de la etiqueta académica a la presentación de una información inteligible, del sentido único de la vista a poner en marcha casi todos los sentidos, de la preparación de respuestas a enfatizar la preparación de preguntas. En suma, tratan de favorecer lo que consideramos clave: la provisión de estímulos basados en los objetos y los fenómenos de la realidad para hacer posible la creación de una opinión tecno-científica.

Para enlazar con la frase con la que empezamos este artículo, diremos que en los sistemas educativos, la principal motivación para aprender es externa, se aprobará un examen, se conseguirá un título que ayudará a conseguir un trabajo, se evitará la regañina del padre, etc. Sin embargo, en un SC, la motivación es interna. El visitante va porque quiere y el elemento fundamental por el que toma la decisión de ir es la curiosidad.

En España, aparte de los pioneros *Museu de la Ciencia de la Caixa* (Barcelona) y la *Casa de las Ciencias* (La Coruña), existen centros de ciencia en Madrid, *Cosmocaixa*; Granada, *Parque de las Ciencias*; Valencia, *Museo de la Ciencia Príncipe Felipe*, dentro de la *Ciudad de las Ciencias y las Artes*, Murcia, *Museo de la Ciencia y el Agua*; La Laguna-Tenerife, *Museo de la Ciencia y el Cosmos*; San Sebastián, *Miramon Kuxcha-Espacio de la Ciencia*; La Coruña, *Domus* y *Acuario Finisterrae*; Málaga, *Principia*; Cuenca, *Museo de la Ciencia de Castilla La Mancha*; Valladolid, *Museo de la Ciencia*, Logroño, *Casa de las Ciencias* y Las Palmas de Gran Canaria, *Museo Elder de la Ciencia y la Tecnología*, del que soy director. Se deben incluir también los Planetarios de Pamplona, Castellón, Barcelona, Santander, entre otros. También hay exposiciones itinerantes y carpas de la ciencia, como por ejemplo las de la Fundación La Caixa.

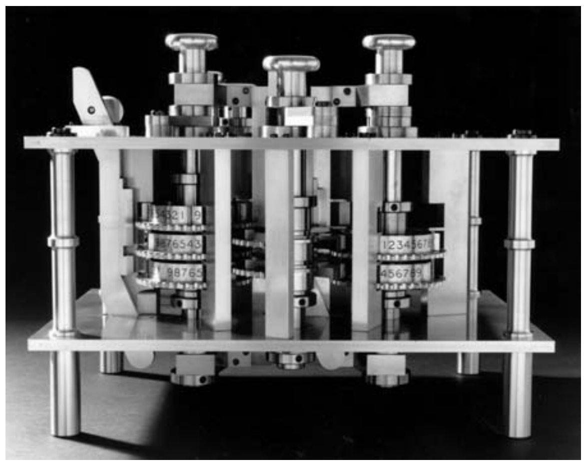
Museo Elder de la Ciencia y la Tecnología

El Museo Elder de la Ciencia y la Tecnología está ubicado en el Parque Santa Catalina de Las Palmas de Gran Canaria, donde abrió sus puertas en Diciembre de 1999. Está gestionado por una Fundación en la que es mayoritaria el Gobierno de Canarias. Con 6.800 m2 de superficie edificada y 4.600 m2 de superficie expositiva, está dispuesto en cuatro plantas con más de 200 exhibits, 150 de ellos interactivos y dos áreas de exposiciones temporales. La planta baja contiene la sala Tecnos dedicada a la tecnología presentada de forma interactiva (áreas de energía, transportes, espacio, producción industrial y nuevas tecnologías) y la sala Pirinola dirigida a los más pequeños. La planta primera contiene dos salas Xploratorium y Gaia llenas de contenidos interactivos de física y matemáticas y biología y medicina respectivamente, así como un Planetario, un Invernadero, un espacio exterior de meteorología y un Taller de Ciencias. Las plantas segunda y tercera contienen una sala de cine de gran formato (Cinemax´70) y salas de exposiciones temporales y monográficas. El Museo contiene elementos escultóricos singulares como un reloj de sol, la bola de agua, el motor Sulzer, la máquina audio-cinética de bolas, y la escultura de hilos, de la que hablaré más tarde, en su exterior y en los accesos.

Desde el museo se organizan múltiples actividades anuales: cursos, seminarios, conferencias, concursos, inauguraciones, actividades empresariales, etc. Semanalmente presenta sus actividades educativas al profesorado. Diariamente realiza distintas actividades que complementan la visita: proyección de películas de gran formato IMAX, espectáculos en el Planetario, talleres de prácticas científicas, y actividades en diferentes áreas del Museo. La media anual de visitantes es de 155.000 de los que casi 45.000 son escolares en horario lectivo.

Las matemáticas en el Museo Elder

Cuando desarrollé el proyecto del Museo Elder, visité y estudié los contenidos de múltiples Centros de la Ciencia, los que había en España y varios de Europa, América e incluso



Australia, y pude constatar que la mayoría de ellos tenían muy pocos exhibits relativos a las matemáticas. La Cité de París; el Museo Universitario de Historia Natural y de la Instrumentación Científica de Módena y Reggio Emilia, en Italia y el Experimentarium de Dinamarca, eran una excepción. También visité "virtualmente" decenas de Webs de Centros de la Ciencia y constaté lo mismo.

Conocía la exposición itinerante "Horizontes Matemáticos" de la Cité que estuvo en varios lugares de España a principios de los noventa, y algunas exposiciones realizadas por la

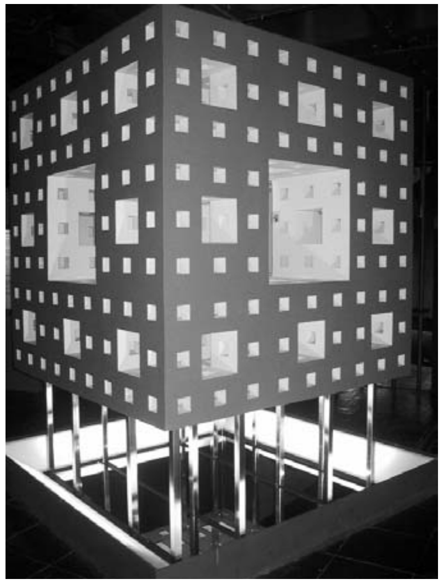
Fundación La Caixa que también itineraron por diversas ciudades españolas. Cuando se acercaba la inauguración del Museo Elder ya la Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas preparaba de la mano de Lola de la Coba una exposición itinerante para celebrar el año 2000 (Año Mundial de las Matemáticas).

Yo quería que el Museo Elder tuviera una cantidad de exhibits de matemáticas que, al menos, superara los contenidos de las exposiciones itinerantes conocidas y que tocara aspectos variados de geometría, topología, análisis, cálculo de probabilidades, estadística, problemas y juegos matemáticos. Y así lo hice, los contenidos presentados en la inauguración, más los de la primera exposición temporal titulada "Pero..., ¿esto son matemáticas?", que luego se convirtió en contenido permanente, conforman el grueso de la oferta matemática del Museo Elder. Fue de gran ayuda en todo el proceso el apoyo y colaboración de los profesores Luis Balbuena, Lola de la Coba, José Antonio Rupérez, Manuel García Déniz, Mariano Martínez, J.M. Pacheco, Florencio Brook y José Antonio Mora. La mayoría de los exhibits que se ofrecen han sido realizados íntegramente por el personal técnico del Museo.
En los cuadros de la páginas siguientes se incluye una relación de los contenidos matemáticos del Museo en cada planta.
Comentaré especialmente algunos de ellos:

Ventana al mar o como puede extinguirse un *exhibit.* Entre las instalaciones portuarias del muelle cercano al Museo, existe un depósito de agua en forma de un hiperboloide de una hoja. Cuando viajé a la India y visité la ciudad de Agra, desde una pared de un palacio y a través de un minúsculo espejo se podía observar el impresionante Taj Mahal. Se me ocurrió trasladar esa idea al Museo Elder y colocar hábilmente un pequeño espejo en una pared del Museo, desde donde poder observar aquella superficie reglada del Puerto. Todo fue perfecto, hasta que tres años después construyeron una inmenso edificio comercial entre el museo y el depósito, y. ¡adiós al hiperboloide!

Sumador de Babbage, que nunca vio Babbage..., ni Ada Byron. Visitando el Power Museum de Sidney, pude observar que poseían una pieza titulada "Prueba para el Ingenio de Diferencias nº2 de Babbage", al interesarme por tal pieza me enteré que el "Ingenio de diferencias nº2" y dicha pieza habían sido construidas en el Science Museum de Londres a partir de los diseños originales, para el bicentenario del nacimiento de Babbage. Nunca antes se había podido construir, ya que los propios planos de Babbage eran insuficientes. El investigador del Science Museum de Londres, Doron Swade, había sido el artífice de tal proeza, y dicha pieza era la máquina de cálculo, la precursora del actual ordenador. El propio Doron Swade construyó para nuestro Museo otra réplica, que ahora se expone en nuestra área de Nuevas Tecnologías acompañada de una original Pascalina, ábacos, tablas de logaritmos, reglas de cálculo, etc.

Cubo de Menger, en recuerdo de Luis A. Santaló. Para homenajear al insigne matemático Luis A. Santaló el Museo propuso realizar una escultura matemática como objeto permanente. Con el apoyo de varias Sociedades de Profesores de Matemáticas de España y la Sociedad Argentina de Matemáticas, se construyó durante más de un año un inmenso Cubo de Menger, el cual se presentó en la clausura de las XI JAEM con un juego de espejos en su base, iluminación espectacular y una cámara en su interior, con proyección en pantalla exterior, para poder observar los detalles de autosimilaridad de tal fractal.



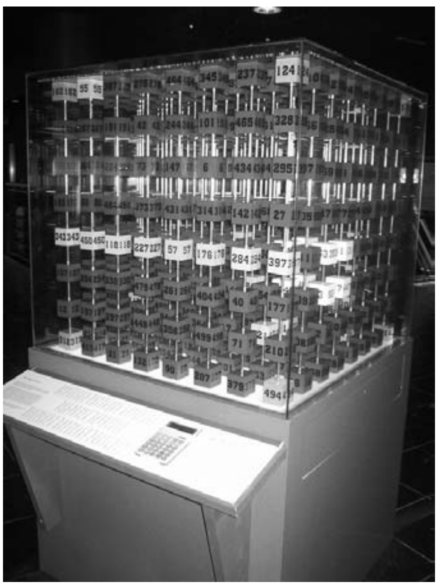
Para los acabados y encajes finales contratamos a un carpintero muy experimentado que había pasado más de 35 años construyendo muebles funcionales de todo tipo, un auténtico manitas. Cuando se terminó el trabajo, comentó que él tenía que estar ya acabado como carpintero ya que nunca le habían encargado algo tan complejo ¡e inútil!

Billar Elíptico con comportamiento sorprendente. Hugo Steinhaus en su obra "Instantáneas Matemáticas" da un sorprendente análisis del comportamiento de una bola en una mesa de billar elíptica, que ofrece tres alternativas:

1. Colocándola en un foco y disparándola (sin darle efecto) en cualquier dirección, la bola rebotará en la banda y caerá en el otro foco (en nuestro caso hay que adivinar donde está el foco ya que el otro es un agujero por donde debe caer la bola).
2. Si la bola no está colocada en un foco, dirigiéndola de manera que no pase entre ellos, continuaría moviéndose eternamente en una trayectoria poligonal tangente a una elipse más pequeña y con los mismos focos.
3. Si la bola se dispara entre los focos describiría una trayectoria poligonal que no se aproximaría a los focos más de lo que permitiría una hipérbola de estos mismos focos.

En nuestro caso esos comportamientos incluyen la caída de la bola al suelo y un largo recorrido por la sala, hasta chocar con otro exhibit o la pierna de algún apacible usuario.

Cubo y Cuadrado Mágicos, un Guinness merecido. El maestro canario Florencio Brook, que es un impenitente estudioso de los cuadrados mágicos y otros objetos matemáticos. Ya desde hace muchos años ha llevado su conocimiento por Jornadas, JAEM, etc y no le teme ni a las preguntas de barra de bar ni a las del más prestigioso congreso. Para nuestro Museo preparó un cuadrado mágico de 200x200, repleto de encantadoras propiedades (diagonales complementarias, múltiples subcuadrados mágicos, etc) que hay que descubrir. Además, creemos que tenemos el Guinness de cuadrados mágicos, ya que los 40.000 números no aguantan la paciencia de cualquiera.



PLANTA BAJA

Mural *El número mágico: un paseo por la historia de las proporciones y la perspectiva.*
Las máquinas ‘inteligentes’: *Ábacos, Pascalina, Sumador de Babbage, ...*
Direcciones Web

PLANTA PRIMERA

Urna de libros.
¡No me mates, por favor!
Ajedrez circular
Anamorfosis
Cubo mágico
Papiro de Rhind
Número de 10 dígitos
Omnipoliedro
Torres de Hanoi
Cubo de Menger
Puedo volar, Túnel de espejos, Pozo de espejos
¿Qué es un fractal?
Palillos y aceitunas
Cubos rodantes
Cuadrado mágico
Intruso entre platónicos
Selecciona tu poliedro
Hombres y sombreros

EXPOSICIONES TEMPORALES:

Pero..., ¿esto son matemáticas?: (Abr.-Dic. 2000)
Puzzles matemáticos: (May.-Oct. 2000)
Matemática 2000: (Dic. 2000-Feb. 2001)
Libros matemáticos del siglo XIX: (Dic. 00-Feb.01)
Juegos del mundo: (May.-Oct. 2001)
Corpus Aureum: (Feb.-May. 2002)
Geometría en los puertos: (May.-Oct. 2002)
Ordo Idearum: (Mar.-Abr. 2003)
Mat-Calados y formas canarias: (May.-Nov. 2003)
Polyhedra: (Jun.-Dic. 2003)

El cubo mágico de 8x8x8 casi vuelve locos a los técnicos del Museo cuando trataron de engarzar, sin caerse, los 512 dichosos cubitos y además intentar, a la vez, que los números de sus caras se vieran desde todos los lugares.

Superficie reglada de hilos, fuga visual desde un ascensor. Cuando se diseñó este exhibit, que iba a ser instalado en la trasera de los ascensores panorámicos del Museo, Alex, un alumno del Taller de un Instituto de Secundaria dirigido por el profesor Luis Balbuena, se empeño en enlazar los hilos desde una elipse, para que el efecto de visión al subir o bajar el ascensor fuese muy cinético. Y lo fue desde que construye-

Alicia y el bosque del olvido
Bloques deslizantes
Caballos y Damas
Superficies de área mínima
La llave y la cerradura
Euler y las cuatro escuelas
Intercambio de posiciones
Juego de la "L"
Viva la revolución
Botellas y gráficos
Billar elíptico
Elipse y jardinero
Cónicas de agua
Mesa de seis sectores: Máquina de Galton, Tangram, Soma, Dardos y Cometas, A primera vista, El cubo y la termita
Pósters matemáticos

PLANTA TERCERA

Superficie reglada de hilos
Ventana al mar
Esculturas poliédricas
Mural "Pioneros"
Taller de Ciencias: Taller de juegos matemáticos.

ACTIVIDADES ANUALES Y ESPECIALES:

Eventos de celebración del 2000, Año mundial de las matemáticas: Actos de clausura. Conferencias y exposiciones.
Celebración anual del Día Escolar de las Matemáticas. Cada 12 de Mayo: concurso de problemas, pinta-matemáticas, concurso de fotografía matemática, etc
Celebración de actividades: presentaciones, reuniones, etc. de la Sociedad Canaria "*Isaac Newton*" de Profesores de Matemáticas. Celebración de los actos del 25 aniversario.
Conferencias: Claudi Alsina, Luis Balbuena, Miguel de Guzmán, Juan Carlos Dalmasso, etc.
Clausura de las XI JAEM. Inauguración del Cubo de Menger como homenaje al Profesor Luis. A. Santaló y al profesorado argentino.

ron el cajón-maqueta previo, luego en la realidad es una de las piezas de más belleza del Museo.

Intercambio de posiciones: evolución de materiales. Este es el clásico problema de investigación operativa que trata de intercambiar dos vagones cumpliendo una serie de reglas bien definidas. El problema tiene un nivel de complejidad medio-alto, y esa complejidad ha hecho evolucionar los propios materiales del exhibit. Muchos usuarios, tras intentarlo varias veces sin éxito, acababan metiéndose algún vagón o la propia locomotora en el bolsillo, y adiós... Por supuesto que el módulo evolucionó colocándole una plancha de cristal encima y tres trozos de madera de colores al uso, haciendo uno de locomotora y los otros dos de vagones... y todo en orden.

Mural "Pioneros": La "Escuela de Atenas", globalizada. La obra del pintor Rafael Sanzio "La Escuela de Atenas" que se encuentra en los actuales Museos Vaticanos, jugó con el tiempo, con los personajes, los objetos e incluso con la perspectiva. Si no, qué pintan libros en las manos de Platón y Aristóteles, o Miguel Ángel colándose por el extremo derecho del cuadro.

Es esta nueva "Escuela de Atenas globalizada" aquí llamada "Mural Pioneros" de 14x3 metros, participan 140 pioneros de la ciencia y la técnica y más de 150 objetos, y todo ello interactivo desde dos puestos informáticos que nos aportan información y conexiones entre los personajes del mural. Reconozco que se me fue la mano con los matemáticos: hay más de 25; aunque muchos de ellos hicieron también contribuciones a otras áreas de la ciencia. Allí se encuentran desde Pitágoras y Euclides hasta Euler o Gödel. A los más curiosos les intriga qué hace Fibonnacci haciendo un montoncito de arena, la matrícula nº 1729 con Ramanujan o unos donuts con Wiles. ■

REFERENCIAS

La página Web del Museo Elder *http://www.museoelder.org* está organizada respecto a su plano de contenidos, "***información***", "***visita virtual***" y "***ayuda al aula***" son los más elaborados.

Desde "***información***" se puede acceder a informaciones breves en cualquier lugar del museo. Eldi, nuestro robot, estará atento a cualquier demanda.

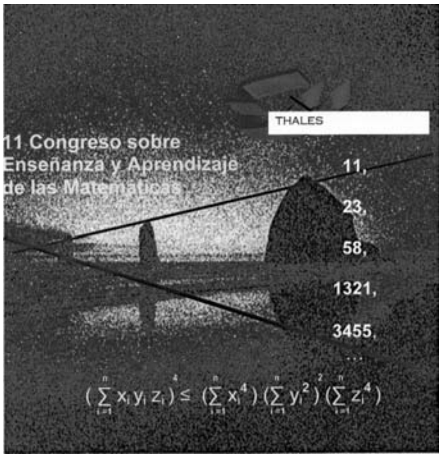
Desde "***visita virtual***" se puede acceder a todas las salas y espacios del museo, pudiendo ver los contenidos en detalle (fotos y textos).

Desde "***ayuda al aula***" se pueden adecuar las visitas al museo, respecto a niveles educativos, materias educativas e incluso a tópicos curriculares.

La página Web contiene otras potencialidades, como las ofertas de exposiciones temporales, las actividades programadas, la oferta especial de cine de gran formato, así como la presentación del proyecto Cubired que desarrolla un entorno novedoso para realizar actividades cooperativas. Por último: novedades, web-cam-reservas, etc son otros servicios disponibles.

XI Congreso sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (XI CEAM) Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"

Huelva 2 al 5 de abril de 2004



Teniendo como referencia los últimos encuentros de la SAEM Thales, celebrados en Cádiz (1983), Almería (1985), Huelva (1987), Málaga (1989), Granada (1991), Sevilla (1993), Córdoba (1995), Jaén (1998) y San Fernando (2000), se espera una asistencia de más de 500 personas, entre los socios de la SAEM Thales, los socios de la Federación Española de Profesores de Matemáticas, el profesorado de matemáticas de Iberoamérica y del mundo y las personas interesadas tanto en la reflexión sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, como en la política educativa, en aquellos temas en los que estén implicadas las Matemáticas. El Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas "Thales" pretende alcanzar, con su celebración, los siguientes objetivos:

- Consolidar los lazos científicos y culturales entre los profesionales de la docencia y la investigación.
- Coordinar esfuerzos de personas, grupos, movimientos de renovación pedagógica y Sociedades relacionadas con la Educación Matemática.
- Promover la investigación en el campo de la Educación Matemática.
- Analizar y reflexionar sobre el tipo de Matemáticas que deben enseñarse hoy.
- Fomentar el uso y la elaboración de materiales didácticos.
- Analizar la repercusión de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en la Educación Matemática.
- Mostrar a la Sociedad la cara lúdica, atractiva e interesante de las Matemáticas.
- Analizar las aportaciones que las diversas Culturas han ido haciendo a la construcción del contenido matemático a lo largo de la Historia.

Lugar y fechas de celebración. El Congreso se desarrollará en las instalaciones del Palacio de Congresos de la Casa Colón de Huelva, y en el IES SAFA Funcadia y tendrá lugar durante los días 2, 3, 4 y 5 de abril de 2004.

Hace diecisiete años se celebraron en Huelva las III Jornadas Andaluzas sobre Didácticas de las Matemáticas. En aquella ocasión nuestra sociedad contó con la presencia del Profesor Luis Antonio Santaló. Su conferencia titulada *La matemática y su enseñanza a fines del segundo milenio* puso el énfasis sobre la idea Schleriana del saber práctico frente a los saberes culto y de salvación, dado que en el mundo cambiante actual vivimos inmersos en una carrera eminentemente científico-tecnológica.

En esta ocasión, y tras su fallecimiento, queremos homenajear al profesor Santaló con la celebración de la décimo primera edición del Congreso Thales sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. No pretendemos un protagonismo unilateral para la SAEM "Thales" sino que este encuentro sea un medio para lograr, entre otras cosas, mejorar la Enseñanza y Aprendizaje de las matemáticas y motivar al profesorado de Matemáticas desde el fomento del intercambio, entre los grupos de trabajo, profesores, e investigadores, de las experiencias realizadas fuera y dentro del aula.

Para acceder al programa y obtener más información se puede acudir a la página web del XI Congreso sobre Enseñanza y Aprendizaje de las matemáticas:

http://www.uhu.es/11ceam ■

SUMA 44
Noviembre 2003, pp.107-111

Para desaparecer de la primera página

Cada cierto tiempo es conveniente pararse a pensar sobre el sentido de lo que hacemos para luchar contra la inercia, uno de los cánceres intelectuales que, si no se está muy vigilante, acaba pudriéndolo todo. Una veces se hace de forma voluntaria, pero las más (de nuevo el poder de la inercia) se afronta la tarea por circunstancias externas, incluso traumáticas, que nos obligan a cuestionar el devenir.
En el caso de una sección de SUMA dedicada a los medios de comunicación la reflexión ha tenido componentes de ambos factores: del deseo y la necesidad. De la constatación de estar en la línea del recientemente fallecido E. Said cuando escribe que he aprendido finalmente a preferir no estar del todo cierto *y del hecho de que un cambio en la dirección de la revista obligaba a repensarla en profundidad. De forma que aunque en el número anterior, llegado a término mi compromiso con la antigua dirección, me despedía de los lectores, ha acabado siendo un adios y un hola a la vez, porque respondiendo a la amable invitación de la nueva dirección sigo o recomienzo con una mirada matemática a los medios de comunicación.*
El resultado (provisional) de la reflexión puede formularse con el machadiano todo pasa y todo queda*. Continua la constatación de que sigue siendo necesario tener presentes a los medios, ya que contituyen un elemento social cuya importancia no solo permanece sino que incluso aumenta. Cambia el nombre de la sección, lo que indica que algo se mueve: sobre todo el punto de vista. En el anterior* Mates y medios *traté sobre todo de hacer ver la importancia de los medios y los posibles métodos de utilización en clase de matemáticas. A partir de ahora me interesaré más por detectar la presencia de las matemáticas dentro de los medios como excusa para plantear grandes o pequeños temas de reflexión. La sección se llamará* Presencia mediática.
En definitiva para intentar generar debate y/o polémica. En la que tendremos el eco de voces ajenas con los medios como puente, lo que nos permitirán ser un poco más abiertos, para no quedarnos en una contemplación colectiva de nuestro propio ombligo. Presencia por tanto de los medios, pero como excusa para la reflexión.

Es sabido que las primeras páginas de los periódicos o las noticias de apertura de los informativos de radio o televisión suelen estar llenas de desgracias, trufadas con frecuencia con otras en las que se exalta el 'patriotismo' de éxitos deportivos o artísticos (que vendrían a ser los recambios a los triunfos militares), mientras que en las páginas interiores están los temas 'normales', que interesan al conjunto de la sociedad pero no son chocantes. No hacen sino seguir el lugar común de los medios según el cual 'venden' más las noticias desagradables que las agradables. Por eso no es muy estimulante que las matemáticas aparezcan en primera página de un periódico de gran tirada.

Y eso es lo que pasó en *El País* del 21/07/03 (coincidente con lo aparecido en otros medios en fechas próximas) que trae en su primera página el titular '*La mayoría de los alumnos suspendió Matemáticas en la prueba de selectividad*', en la que aparecen cifras realmente fuertes, que comienzan con "*La mayoría de los estudiantes suspendió las asignaturas de Ciencias en la prueba de selectividad, sobre todo las Matemáticas*" y sigue con datos como una media de 3,8 en las pruebas de Matemáticas en las universidades catalanas o de 4,6 en el País Vasco. Bien es verdad que en verano no suele haber demasiadas noticias (porque buena parte de quienes las producen, los periodistas, están de vacaciones), pero a pesar de todo no deja de ser preocupante.


EL PAIS
DIARIO INDEPENDIENTE DE LA MAÑANA

Fernando Corbalán
medios.suma@fespm.org

Voy a dedicar este artículo a ver propuestas (mías o de los medios) para salir de la primera página ocasionalmente y tener una presencia razonable en páginas interiores. Con la esperanza, puesto que es un problema mayor, de contribuir a desencadenar un debate sobre los métodos de afrontarlo, que primero tendrá que ser personal, después dentro de nuestro

La mayoría de los alumnos suspendió Matemáticas en la prueba de selectividad

La mayoría de los estudiantes suspendió las asignaturas de Ciencias en la prueba de selectividad, sobre todo las Matemáticas. La alarma lanzada en un informe realizado en el Senado por expertos internacionales sobre la mala situación de la formación científica en España se confirma con resultados como un 3,8 de media sobre 10 en las pruebas de Matemáticas realizadas en las universidades catalanas, un 4,1 en la Politécnica de Madrid y un 4,6 en el País Vasco.

Tampoco corre mejor suerte la Física, en la que la nota media es un 4,6 en la Universidad Miguel Hernández de Alicante o la Química, en la que los alumnos catalanes obtuvieron un 4,43 de media. **Página 26**

ámbito (el de los profesor@s) para acabar desembocando en una discusión pública, porque, remedando la conocida frase (creo que de Unamuno referida a los militares), la enseñanza es demasiado importante para dejarla solo en manos de los profesionales del medio. Hay que empezar por la reflexión personal, que es la única forma de intervenir sin el síndrome del tertuliano radiofónico que se siente capacitado para opinar y hasta para pontificar sobre cualquier tema, pero sin que haya que dilatar en exceso los plazos temporales (por lo que será conveniente que se solapen las etapas descritas), porque cualquier intervención en la enseñanza requiere muchos años hasta que produce frutos. Y es urgente cambiar el rumbo si no queremos deteriorar más la situación.

Voy a dedicar este artículo a ver propuestas para salir de la primera página ocasionalmente y tener una presencia razonable en páginas interiores.

Está en juego la cultura científica de nuestra sociedad, que tradicionalmente le ha dado más importancia a otras disciplinas. En particular a la (mal) llamada *cultura humanística* y a la religión. Curiosamente cuando están encendidas todas las luces de alarma respecto a las carencias en la formación científica de base, en los resultados en las diferentes competiciones internacionales y en las evaluaciones comparativas de resultados, en la investigación científica básica y en I + D, lo que conlleva en su conjunto una dependencia tecnológica que no deja de manifestarse en variados campos de la actividad productiva, se intenta (o eso se dice desde las instancias oficiales) afrontar los males del sistema educativo con una potenciación de las asignaturas de *letras* (cuando una simple suma -que a pesar de las deficiencias de formación matemática están al alcance de todos- muestra que en toda la enseñanza obligatoria recibe un trato de favor respecto a las llamadas de *ciencias*) y con la obligatoriedad de la religión católica para todos (por elección directa o por obligación de cursar alternativamente una asignatura similar).

Dentro de esa cultura científica un papel importante tienen que jugarlo las matemáticas. Como dice Myriam Sarachik, presidenta de la Sociedad Americana de Física, ante la pregunta de si el siglo XXI será el de la biología (*El País*, 23/7/03):

> Es cierto que se está haciendo mucho trabajo interdisciplinar y hay muchas investigaciones fascinantes, pero los cimientos están en las ciencias fundamentales: física y matemáticas.

Es urgente cambiar el rumbo si no queremos deteriorar más la situación. Está en juego la cultura científica de nuestra sociedad, que tradicionalmente le ha dado más importancia a otras disciplinas.

Opinión que comparten también pensadores procedentes de otros campos, como el escritor y crítico G. Steiner (Premio Príncipe de Asturias de Comunicación y Humanidades 2001), que confiesa:

> Estoy convencido que hay tres grandes idiomas, la lengua, las matemáticas y la música. ('El País', 27/10/01).

O el historiador G. Jackson:

> Está fuera de toda cuestión que los idiomas y las matemáticas son los instrumentos básicos a través de los cuales aprendemos muchas otras materias específicas. En un plan de estudios básico, para todas las personas, y no fundamentalmente para futuros científicos, las prioridades deberían ser la aritmética, la lectura de gráficos y la estadística simple. También debería incluir una discreta introducción al álgebra para poder desarrollar el pensamiento y el razonamiento abstracto.

Temas de reflexión

Hay toda una gama de cuestiones que considero importantes sobre las que reflexionar. Yo propongo algunas y procuro

aportar reflexiones y sobre todo preguntas (creo que lo más importante -y más en la enseñanza- es tener preguntas, no respuestas).

1. Sobre las pruebas de selectividad. Creo que puesto que partimos de una noticia sobre las notas en esas pruebas es conveniente detenerse un poco en ellas. Se siente la tentación de echar balones fuera pensando que son poco apropiadas y que por eso dan malos resultados: que si fueran exámenes más adecuados aparecerían mejores resultados (aunque según la constatación de que todo es empeorable, quizás con unas pruebas adecuadas se encontraría que aún son peores que las que así se obtiene). Yo creo que no solo son malas porque miden matemáticas de poca calidad (llamémoslas 'algorítmicas' por entendernos), sino porque la existencia de esas pruebas condicionan el aprendizaje matemático en el Bachillerato (¡el objetivo fundamental del mismo es procurar superar esas pruebas!). Por eso creo urgente cambiar las pruebas, aunque esto sea poco popular entre profesores y alumnos, quizás incluso menos entre estos últimos. Y hacerlo potenciando dos aspectos no incompatibles (es decir que pueden ir juntos): tener en cuenta el trabajo anterior de los alumn@s más allá de la nota (teniendo en cuenta los trabajos de investigación y la destreza en resolución de problemas adquirida durante el bachillerato, en la línea que aconseja el ya antiguo pero válido en muchos aspectos *Informe Cockroft*) y hacer una apuesta decidida por la utilización en los exámenes de calculadoras programables y/o ordenadores personales (de forma que en los exámenes sea obligatorio -o al menos altamente recomendable- tenerlos y utilizarlos). Con ambas líneas se potenciaría una enseñanza y un aprendizaje más motivadores desde el punto de vista científico (y matemático en particular).

No matemos al mensajero y pongámonos manos a la obra. Está en juego la existencia de futuros (pero próximos) estudiantes de carreras técnicas y científicas y de profesionales competentes. Así llegamos al tema siguiente.

2. ¿Hacen falta *vocaciones* de matemáticos? En caso afirmativo, ¿cómo conseguirlas? Ya hace tiempo que comenzaron las Olimpiadas Matemáticas de final de Bachillerato para despertar y alumbrar jóvenes capaces de estudiar matemáticas. Parecía que ya no eran necesarias, porque había estudiantes suficientes, pero la caída en picado en los últimos años de las matrículas en las Facultades de Matemáticas (que de persistir harían imposible incluso la sustitución de los profesionales actuales) pone de nuevo en el candelero la urgente necesidad de promocionar estos estudios. Si, como parecen mostrar los hechos, entre nosotros se reproduce con unos años de retraso lo que pasa en la cabeza del imperio, en Estados Unidos, era esperable esta situación, detectada allí hace tiempo (y que por ejemplo ya comentó entre nosotros Peter Hilton en alguna de sus visitas). Lo que sí hay que saber es que en USA es un problema todavía sin resolver la consecución de suficientes científicos. Ellos suelen paliarlo con la 'importación de cerebros' de todo el mundo, algo que no parece muy a nuestro alcance.

> *Yo creo que las pruebas de selectividad no solo son malas porque miden matemáticas de poca calidad (llamémoslas 'algorítmicas' por entendernos), sino porque la existencia de esas pruebas condicionan el aprendizaje matemático en el Bachillerato.*

El hecho de que en los Estados Unidos no hayan resuelto el problema no quiere decir que sea irresoluble, pero tenemos que poner medios y ganas. Luego hablaremos de ello. Antes hay que reflexionar seriamente sobre qué podemos ofrecer a los jóvenes para que se decidan a estudiar una carrera científica (y Mates en particular). La ya citada Myriam Sarachik, cuando le preguntan: *"¿Qué diría a un joven estudiante para atraerle a la física?"* responde: *"Que es algo muy divertido, un reto, algo estupendo... La física es una carrera preciosa y puedes tener una vida muy interesante dedicándote a ella. Plantearte un objetivo difícil y lograrlo supone un placer enorme"*. Creo que es aplicable sin más que cambiar física por matemáticas.

Pero antes de avanzar hay que preguntarse con sinceridad cada uno de nosotros: ¿Compartimos la respuesta anterior sobre que ser matemáticos proporciona una vida interesante? Si la respuesta es negativa poco más hay que hacer, porque una de las miserias de la profesión de enseñante es que no se puede transmitir lo que uno no es; si es afirmativa de verdad (y como colectivo no se si se puede asegurar de antemano viendo la falta de aprecio social por las mates) hay que preguntarse: ¿hago esfuerzos reales por hacer que mis alumnos lo sientan? ¿Sigo planteándome la práctica diaria como un reto atractivo que afrontar cada día? Los profesores de matemáticas somos, sin duda, los profesionales científicos que más capacidad de influir tenemos en el conjunto de la sociedad, porque las matemáticas son, con diferencia, la materia científica con más horas en la enseñanza obligatoria, por la que pasa, para bien o para mal, la totalidad de la población. Sin ese requisito previo poca influencia positiva podremos ejercer en el alumnado, al que es obvio que no podremos ofrecerle ni fama ni dinero ni influencia social con las matemáticas: solo (aunque sea mucho) una apasionante aventura intelectual por delante.

Los profesores de matemáticas somos, sin duda, los profesionales científicos que más capacidad de influir tenemos en el conjunto de la sociedad, porque las matemáticas son, con diferencia, la materia científica con más horas en la enseñanza obligatoria.

3. ¿Qué matemáticas hay que ofrecer en cada nivel? ¿Cómo adecuarlas con el paso del tiempo? Hay que abrir un debate sereno y profundo pero no dilatado en el tiempo para arbitrar los medios para decidir y actualizar los temarios en todos los niveles. Y poner los medios para que el mayor porcentaje posible de alumn@s puedan cambiar su vida en el sentido que dice J. M. Sánchez Ron en su artículo '¡Vivan las matemáticas!' (*El País*, 27/9/03):

> Pocas disciplinas, técnicas o instrumentos pueden competir con las matemáticas a la hora de tomar conciencia de las habilidades intelectuales, cognitivas, que posee nuestra especie. Sostengo que las matemáticas dan lugar a experiencias inolvidables; experiencias, al alcance de cualquier inteligencia normal, como pueden ser (..[y aquí hay ejemplos de varios de los tópicos matemáticos que aparecen en los temarios]..) Nadie es igual después de haber pasado por semejantes experiencias; en cierto sentido le cambian a uno la vida.

Sin limitarse al papel instrumental, porque como señala C. Alsina ('Rigor matemático y ciudadanía', *La Vanguardia*, 14/9/03):

> Hay dos características esenciales de las matemáticas: su aplicabilidad y su rigor. La primera ha permitido el progreso científico y técnico. La segunda debería posibilitar el desarrollo de ideas y opiniones con mayor fundamento". Y dentro del segundo aspecto añade que "las matemáticas también deben servir a todos para desarrollar capacidades, para opinar reflexivamente, para poner más rigor en nuestros juicios y más razones objetivas en nuestras demandas. El punto clave de la democracia es la participación, el diálogo, el respeto... no la delegación de responsabilidades. Por ello el uso de las matemáticas también refuerza la verdadera cultura democrática.

Como vemos el abanico es amplio y hay que afrontarlo asumiendo que la presencia de la informática tiene que ser normal en la vida cotidiana de las aulas, lo que supone un nuevo factor para poner en cuestión de forma dinámica los contenidos y los procedimientos.

4. ¿Qué camino es el correcto, matemáticas más 'técnicas' o más 'creativas' (deductivas o inductivas)? Entre las múltiples disyuntivas aparece también el hecho de que si se quiere cambiar el rumbo de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas hay que tomar conciencia de que por lo menos en los niveles obligatorios no es posible limitarse al aspecto de aplicación de las matemáticas, limitarse a desarrollar algoritmos y aplicaciones a casos codificados (que será más fácil de adquirir con las NTIC). No hay que olvidar que cualquier añadido al programa tiene que llevar la supresión del mismo de contenidos que supongan en la actualidad, como mínimo, un tiempo equivalente. Es necesario introducir toda la creatividad posible a través de problemas, juegos, investigaciones, relaciones con la vida cotidiana, nexos con otras actividades humanas, ..., y primando todo lo relativo a la intuición matemática. No propongo que haya que hacer uno de los típicos movimientos de péndulo como lo fue la introducción de la matemática 'moderna' en los años setenta, sino que estos tópicos formen parte obligatoria de los programas.

1. Más horas de matemáticas en todos los cursos de la enseñanza obligatoria.

Propuestas

En cualquier caso pienso que no hay que ser fatalista y pensar que aquí vamos a seguir de forma determinista el camino yanqui, como ya ha pasado en buena medida con el *fast food* o las películas. Podemos torcer el rumbo, pero para eso hay que ser originales e innovadores. Algunos observadores dicen a nuestra sociedad le cuesta aceptar los cambios sociales, pero que, una vez interiorizados los lleva hasta sus últimas consecuencias. Sirvan como ejemplo la caída de la natalidad, como tendencia profunda y continuada, o el rechazo a la guerra como fenómeno reciente.

Allá van algunas cuantas propuestas, en cuyo impulso tienen que jugar un papel fundamental, además de cada uno de nosotros, las Sociedades de Profesores y la Federación. Teniendo en cuenta que, aunque parezca paradójico, las más *fáciles* de conseguir (aunque sean también complicadas) son aquellas en que quienes tienen que concederlas son *los otros*: cambios legislativos y similares. Que lo realmente difícil es cambiar nuestras conciencias y nuestras tendencias profundas de actuación. Esto nos debe llevar a dedicar mayores esfuerzos a estas últimas.

2. Quitar importancia a la matemática algorítmica.

En cada uno de los apartados (que no están necesariamente en orden de prelación ni temporal ni de importancia, y que de una forma un tanto insensata denomino *soluciones*) aporto también algunas de las dificultades más evidentes, aunque no las únicas.

Solución 1. Más horas de matemáticas en todos los cursos de la enseñanza obligatoria. Aportar propuestas de a qué otras materias hay que quitarlas (y una alternativa clara puede ser la religión, aunque supongo que hay muchos otros candidatos a 'quedárselas' y una resistencia feroz a que desaparezca). A esto abría que unir mayores inversiones en material y sobre todo en formación permanente. Con las dificultades de quién, cuándo y cómo tiene que hacerse y el trasfondo de su obligatoriedad, el tiempo que supone y control de su calidad.

3. Realizar más actividades sociales que pongan en contacto las matemáticas con la sociedad: sacar las matemáticas a la calle.

Solución 2. Quitar importancia a la matemática algorítmica, como ya he comentado. Aunque con ello se ponga en cuestión una de las razones de la presencia de las matemática en la enseñanza: su papel instrumental para el resto de las materias científicas.

Solución 3. Realizar más actividades sociales que pongan en contacto las matemáticas con la sociedad: sacar las matemáticas a la calle. Se trata de continuar y profundizar la tarea emprendida el año 2000. Sería del mayor interés involucrar en ello a las Comunidades Autónomas, incluso que rivalicen en el empeño en la popularización científica, que no se queden en los matemáticos autóctonos o las medidas tradicionales. Y hay que luchar contra la tendencia a suponer que eso se resuelve solo con grandes y aparentes Museos de la Ciencia, imprescindibles por otra parte. Tan importante por lo menos es la realización de muchas pequeñas actividades descentralizadas. Aunque eso exija la participación activa y entusiasta (y a veces desinteresada) de muchos más de nosotros.

Solución 4. Aunque esté incluida en el apartado anterior, intentar conseguir una presencia continua de las matemáticas en los medios de comunicación, verdaderos conformadores de la conciencia pública. Empeño difícil porque no depende solo ni fundamentalmente de nosotros. Para empezar, tendría que implicar la participación en el falso y prolongado debate sobre las Humanidades.

4. Intentar conseguir una presencia continua de las matemáticas en los medios de comunicación.

Solución 5. Lanzamiento de una campaña de reflexión y concienciación sobre nuestro importante papel social como profesores de matemáticas. Que aun asumiendo las dificultades y las reivindicaciones profesionales no ponga el acento solo en ellas, sino en la influencia en el futuro de nuestra sociedad. Esto creo que tendría que ser uno de los objetivos de la FSPME, incluyendo un gran esfuerzo en la detección, sistematización y difusión de los múltiples ejemplos que ya existen de ideas novedosas y realizaciones prácticas con éxito en la enseñanza de las matemáticas. Aquí tanto 'Suma' en su nueva etapa, como el Servicio de Publicaciones de la Federación tendrían que jugar un papel importante.

5. Lanzamiento de una campaña de reflexión y concienciación sobre nuestro importante papel social como profesores de matemáticas.

Todas estas *soluciones* se pueden resumir en dos, como los mandamientos. Por una parte más medios materiales y presencia externa. Por otra, más reflexión y autoestima internas. Quizás con ellas desaparecerá la presencia episódica de las matemáticas de las cabeceras de los medios de comunicación y tendrán una presencia más continuada y positiva entre las noticias menos destacadas. ■

Revista SUMA,
1988-2003

SUMA 44
Noviembre 2003, pp.113-115

Viète, Cremona y von Neumann

HACE 400 AÑOS, el 23 de febrero de 1603, murió en París François Viète, el autor de ***In artem analyticem isagoge*** (Introducción al arte analítico, 1591). Viète, que pertenecía a una familia de comerciantes de Fontenay-le-Comte, estudió derecho en la Universidad de Poitiers y desarrolló una notable carrera de abogado, y al final de su vida llegó a ser consejero del rey Enrique IV, el monarca que hizo superar a Francia el periodo sangriento de las guerras de religión. Entre los servicios a su país se incluye el haber encontrado la clave de un código secreto que usaban los españoles para enviar mensajes cifrados que contenía más de 500 caracteres: un ejemplo precoz de la legendaria capacidad de los matemáticos en estas tareas patrióticas, que se ha convertido en el arquetipo de la contribución de éstos al esfuerzo bélico, sobre todo en Gran Bretaña, durante la Segunda Guerra Mundial. Se cuenta que cuando Felipe II descubrió que los franceses leían sus mensajes, se lamentó con el Papa acusando a los franceses de haber hecho uso contra él de prácticas de brujería…

François Viète (1540-1610)

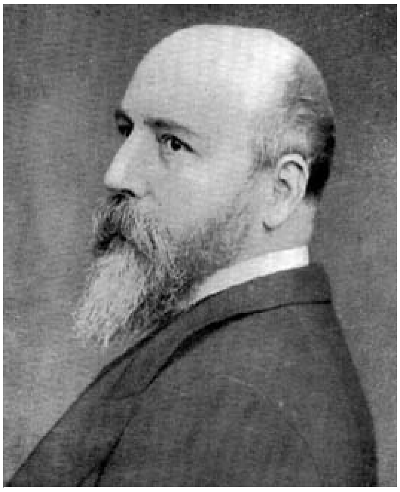
En su pequeño e influyente tratado Viète proponía una visión del álgebra como rama de las matemáticas de dignidad igual a la geometría. La geometría era considerada entre sus contemporáneos la ciencia de los teoremas y las demostraciones por excelencia, y su mejor expresión los *Elementos* de Euclides. Ahora bien, en los *Elementos* se presentaba, según la concepción clásica de matriz griega, el momento de «síntesis» en la actividad matemática, es decir, el proceso que desde los primeros principios llega a probar un nuevo resultado por vía deductiva. Pero en la resolución de problemas matemáticos desempeña un papel de importancia el procedimiento de exploración o de «análisis», que parte del supuesto de que esté dado aquello que se busca determinar y procede "hacia atrás" examinando lo que se puede deducir de ello. Según Viète, el álgebra era esencialmente la base del análisis y, efectivamente, hasta bien entrado el siglo XIX la palabra *análisis* será utilizada en matemáticas como sinónimo de la palabra de origen árabe *álgebra*.

El álgebra de Viète era, recordémoslo, una teoría de la resolución de ecuaciones algebraicas, según el enfoque introducido por el matemático de Bagdad al-Khwarizmi en el siglo IX. En el Renacimiento el álgebra se había ido transformando en una técnica de resolución de problemas de carácter general y abstracto. La contribución del estudioso francés permitió dar un gran paso adelante en esta dirección. Viète, por ejemplo, introdujo las letras no sólo para designar una o más incógnitas, sino también para los parámetros o cantidades dadas (vocales en el primer caso y consonantes en el segundo). Así, a partir de un instrumento desarrollado inicialmente para resolver problemas de matemática práctica, como la repartición de herencias, fue desarrollado un lenguaje simbólico extraordinariamente ágil y versátil, un temible competidor del lenguaje geométrico clásico.

La geometría clásica siguió siendo considerada durante mucho tiempo la lengua matemática por excelencia: las obras de los fundadores de la ciencia moderna, Galileo y Newton, utilizaban ampliamente la teoría de las proporciones. Poco a poco, sin embargo, se fue operando una "traducción" al lenguaje algebraico de la geometría: hasta el punto de que hoy en día es difícil afrontar la lectura de los *Elementos* sin su ayuda. La visión de Viète sobre la potencia del "arte analítica" se vio confirmada definitivamente, un siglo después, con el desarrollo del cálculo infinitesimal – la base de lo que hoy llamamos análisis matemático. Las técnicas infinitesimales habían sido exploradas ya en época griega, pero el lenguaje del álgebra hizo posible construir una "nueva matemática" extraordinariamente eficaz en la investigación de los fenómenos naturales.

Ana Millán
hace.suma@fespm.org

HACE **100** AÑOS, el 10 de junio de 1903, murió en Roma Luigi Cremona, geómetra de fama internacional e intelectual de primer plano en la época de la creación del Reino de Italia. Cremona inició su carrera profesional como profesor de instituto y ocupó después varias cátedras en las universidades de Bolonia, Milán y Roma. Su trayectoria es muy representativa del proceso de profesionalización de la actividad matemática durante la segunda mitad del siglo XIX. En esa época la tarea del matemático se configura como una mezcla de dedicación a la investigación y de interés por problemas culturales más amplios, relacionados con el proceso de modernización y de afirmación nacional. En el pasado, los matemáticos se ganaban la vida de muchas maneras: como médicos, abogados (como Viète), ingenieros, eclesiásticos o – mucho más modestamente – como profesores. La organización del estado democrático liberal moderno, que incluye un sistema de instrucción pública complejo y estructurado en varios niveles (elemental, universitario, técnico), confirió un nuevo valor a la cultura matemática y contribuyó a crear una profesión de matemático.



Luigi Cremona (1830-1903)

Cremona participó en el desarrollo de una comunidad matemática en Italia, tarea que consideraba como una responsabilidad patriótica y fundamental en la lucha contra el absolutismo y la reacción, representada por las monarquías austriaca (en el norte de Italia), borbónica (en el Sur) y el poder temporal del Papa en Roma. Así, colaboró con Francesco Brioschi en la dirección de la revista «Annali di matematica pura e applicata» y se empeñó intensamente en la construcción del sistema de instrucción nacional tras la unificación. En los años sesenta y setenta llevó adelante, por ejemplo, una batalla para reintroducir los *Elementos* de Euclides en la enseñanza media y propuso la introducción de la geometría proyectiva en la enseñanza técnica secundaria. Director de la Escuela de Ingenieros de Roma desde su fundación en 1873, se interesó por el desarrollo de las aplicaciones de la geometría a la actividad del ingeniero. En 1879 fue designado senador por méritos científicos y, en los años siguientes, desarrolló una activa vida pública como científico al servicio del estado. Fue director de la Biblioteca Nacional de Roma y llegó a ser designado ministro de Instrucción Pública.

En el pasado, los matemáticos se ganaban la vida de muchas maneras: como médicos, abogados, ingenieros, eclesiásticos o – mucho más modestamente – como profesores. El estado democrático liberal moderno, que incluye un sistema de instrucción pública complejo, confirió un nuevo valor a la cultura matemática y contribuyó a crear una profesión de matemático.

Su actividad gozó de amplio eco internacional, como demuestran las traducciones de sus obras a los principales idiomas europeos, así como la correspondencia que mantuvo con los protagonistas principales del mundo matemático de su época y con los matemáticos que, en países donde no existía hasta entonces una sólida tradición matemática, se esforzaban por desarrollar una comunidad matemática nacional. En las últimas décadas del siglo XIX se produjo una reorganización del mundo matemático internacional como una red de las comunidades matemáticas nacionales, fuertemente condicionada por la evolución política y cultural general pero que salvaguardaba, bajo una nueva forma, la idea bien asentada de una comunidad universal de los matemáticos.

Recordemos, para evocar la imagen internacional de Luigi Cremona y el ambiente matemático que se vivía en esa época —asociándolo a un intelectual español poco conocido al que debe mucho nuestra cultura científica—, algunas líneas que le escribía desde Zaragoza Zoel García Galdeano, fundador y director de la primera revista matemática española, «**El Progreso Matemático**», en una carta fechada el 2 de febrero de 1891:

> "Mi propósito al publicar el periódico es ver si algo puedo contribuir a divulgar los conocimientos matemáticos tan descuidados en España, donde otras ideas absorben la atención general, y como todo pensamiento naciente tiene que buscar apoyo en las simpatías de las almas nobles, hoy me atrevo a acudir a V. con una súplica que acaso le sorprenda por la grandísima distancia que nos separa, pues sería un honor inmenso para mí el que me permitiera V. colocar su nombre entre los colaboradores de mi periódico y no me atrevería a dirigirle tan exagerada petición si no confiara en que la bondad de su corazón y el entusiasmo por la ciencia debe igualar la superioridad que V. posee por su saber e ilustración universalmente reconocidos".

HACE 100 AÑOS, el 28 de diciembre de 1903 nació en Budapest János Neumann, mejor conocido por el nombre que adoptó cuando se trasladó a los Estados Unidos, John von Neumann. La vida y la actividad de von Neumann, científico extraordinariamente brillante, se entrelazan con la atormentada historia del siglo XX. Su formación estuvo marcada por la rica vida cultural de Hungría a principios de siglo, por la matemática alemana desarrollada en los grandes centros de Berlín y Gotinga y por las discusiones del Círculo de Viena. En su perfil como matemático se reconocen sin dificultad los rasgos característicos de la matemática húngara entre finales del siglo XIX y principios del XX, con su interés por la lógica y por la matemática combinatoria. Pero su figura científica lleva también el sello inconfundible del "cosmopolitismo" matemático del ambiente de Gotinga. ¿A qué nos referimos?


John Von Neumann (1903-1957)

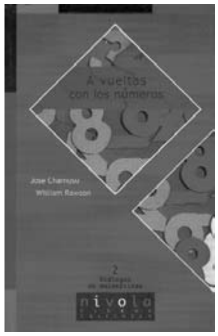
La Primera Guerra Mundial y la evolución política del periodo de entreguerras habían hecho entrar en crisis la idea de una red internacional de comunidades matemáticas nacionales antes de que ésta pudiera consolidarse. Gotinga, el centro de actividad matemática liderado por Felix Klein y David Hilbert, se convirtió en un lugar de encuentro científico más allá de cualquier tipo de pertenencia nacional, cultural o religiosa: la idea clásica de universalidad del saber matemático representaba el antídoto contra los venenos que circulaban por Europa. Esta propuesta – efímera en Alemania donde el avance del nazismo y el antisemitismo destruyeron la comunidad científica nacional – tuvo una enorme influencia en el siglo XX, pues contribuyó a conservar el ideal internacional de las matemáticas aun en la época de la Guerra fría.

Von Neumann fue una de las estrellas de la emigración científica europea a los Estados Unidos en los años treinta, uno de los muchos judíos que vivieron aquellos años "siempre con la maleta preparada", ocupándose de temas teóricos apasionantes (la fundación axiomática de la teoría de conjuntos, las matemáticas de la mecánica cuántica, el desarrollo de una teoría matemática para las ciencias sociales (la teoría de juegos), la arquitectura lógica de los ordenadores electrónicos) con la exigencia impelente de destacar lo más posible para sobrevivir. Fue, además, uno de los más afortunados. En 1933 fue nombrado profesor del Institute for Advanced Study de Princeton, una institución recién creada, gracias a una financiación privada, dedicada exclusivamente a la investigación científica. A partir de entonces, y sobre todo a partir del ataque de Pearl Harbor y la entrada de los Estados Unidos en la Segunda Guerra Mundial, eligió con gran decisión de qué parte estaba. En los años cuarenta y cincuenta, desde el Laboratorio de los Álamos a la Comisión de Energía Atómica, fue uno de los científicos más activos en los temas relacionados con la defensa de los Estados Unidos.

De la corte del príncipe – como Viète – a la batalla del siglo XIX contra "la reacción"– como Cremona – a las discusiones en las agencias del Gobierno estadounidense sobre la aplicación de la teoría de juegos a los posibles escenarios de la Guerra fría – como von Neumann; valgan estos tres ejemplos para recordar que los matemáticos, lejos de dedicarse sólo a la pura contemplación de ideas abstractas, se han encontrado a menudo en el ojo del huracán de las épocas que les ha tocado vivir, frente a las exigencias ineludibles de la acción en el mundo real. ■

Libros recibidos

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.
Seminario "Ramón Aller"
Coleccion Lemniscata, 1.
AGAPEMA
2003
ISBN 84-667-2637-3
112 PÁGINAS.

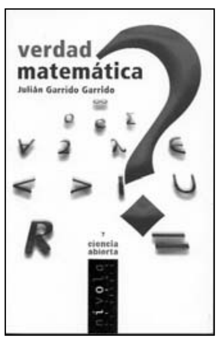


A VUELTAS CON LOS NÚMEROS.
José Chamoso y
William Rawson.
Diálogos de matemáticas, 2.
NIVOLA, libros y ediciones, S.L.
Madrid, 2003
ISBN 84-95599-58-9
228 PÁGINAS.

LAPLACE. EL MATEMÁTICO DE LOS CIELOS.
Javier Bergasa Liberal
La matemática en sus personajes, 16
NIVOLA, libros y ediciones, S.L.
Madrid, 2003
ISBN 84-95599-63-5
222 páginas.

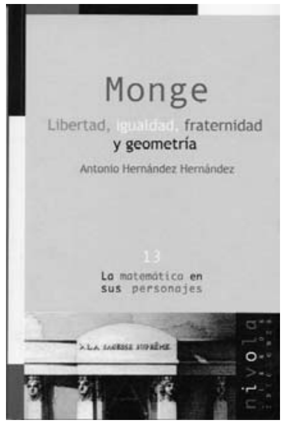
ACTAS DO CONGRESO I ENCONTROS DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA.
Antonio Hernández Hernández
AGAPEMA
2003
96 páginas.

MEMORIAS DE APRENDIZAJE.
André Weil.
Traducción de Aurora Bell.lloch
NIVOLA, libros y ediciones, S.L.
Ciencia abierta, 6.
Madrid, 2002
ISBN 84-95599-47-3
188 páginas.



VERDAD MATEMÁTICA.
Julián Garrido Garrido
Ciencia abierta, 7
NIVOLA, libros y ediciones, S.L.
Madrid, 2003
ISBN 84-95599-68-6
233 páginas.

SUMA 44
Noviembre 2003, pp.117-122



MONGE. LIBERTAD, IGUALDAD, FRATERNIDAD Y GEOMETRÍA.
Antonio Hernández Hernández

NIVOLA, libros y ediciones, S.L.
Madrid, 2002
ISBN 84-95599-31-7
158 PÁGINAS.

Si recorremos en Francia el tramo de la carretera nacional 74 al sur de Dijon, conocido como "la ruta de los grandes crudos de Borgoña", llegaremos a la encantadora ciudad de Beaune. Allí visitaremos sin duda el magnífico Hôtel Dieu, el antiguo hospital del siglo XV, una joya de la arquitectura flamígera con un muy característico tejado de vivos colores. Puede que visitemos también el Museo del vino de Borgoña, que ocupa el antiguo palacio ducal, y quizá paseemos por las tranquilas calles buscando dónde comprar un vino borgoñón interesante por un precio asequible (¡tarea nada fácil!). Es probable que nuestro paseo nos lleve a la plaza mayor, donde comprobaremos que existe al menos una ciudad en el mundo cuya plaza mayor lleva el nombre de un matemático. Se trata de la Place Monge de Beaune, ¡y hay incluso una estatua del homenajeado en el centro de la plaza!

Gaspard Monge, nacido en Beaune el 9 de mayo de 1746, es el personaje al que Nivola ha dedicado el volumen 13 de la colección *La matemática en sus personajes*. Quienes gustamos de las matemáticas debemos agradecer a los responsables de Nivola que hayan perseverado en el difícil empeño de publicar divulgación científica de calidad hasta alcanzar el, en esta ocasión afortunado, número 13.

En el caso de Monge, el encargado de presentarnos su vida y parte de su obra es Antonio Hernández, ingeniero de caminos, profesor de matemáticas y enamorado de la geometría, características las tres que afloran en diversos momentos a lo largo de las aproximadamente 150 páginas de este libro. Y el amor a la geometría aflora incluso apasionadamente, contribuyendo de manera esencial a la calidad del resultado.

En este *Monge: libertad, igualdad, fraternidad y geometría*, el autor ha optado por dedicar aproximadamente la mitad del libro a hablar de matemáticas. Y lo hace en lenguaje matemático. De hecho considero, y luego daré detalles, que al menos uno de los capítulos merece ser leído con papel y lápiz. Pero ahora, empecemos por el principio.

> *Los tres primeros capítulos del libro están dedicados a la vida de Gaspard Monge, y Antonio Hernández aprovecha para dar unas pinceladas del entorno social de la época.*

Adolfo Quirós Gracián
Departamento de Matemáticas,
Universidad Autónoma de Madrid,.

Los tres primeros capítulos del libro están dedicados a la vida de Gaspard Monge, y Antonio Hernández aprovecha para dar unas pinceladas del entorno social de la época. Por ejemplo, en el primer capítulo, *Los años más fecundos*, que cubre el periodo de aproximadamente 40 años desde su nacimiento en 1746 hasta el comienzo de la Revolución Francesa en 1789, nos señala que Monge fue alumno de la Escuela de Ingenieros Militares de Mézierès, donde después sería profesor. Pero como su origen familiar era modesto, no pudo ingresar en la primera sección, donde se formaban los futuros oficiales del ejercito encargados de dirigir los trabajos de fortificación, reservada con pocas excepciones a hijos de la nobleza. Tuvo que ingresar en la segunda sección, donde se formaban aparejadores y maestros de obras. Sólo tras resolver el llamado "problema de la enfilada", del que luego hablaremos, fue admitido en la primera sección. Puede que recordase esta experiencia cuando, siendo examinador de alumnos de marina, llegó a enfrentarse a un mariscal que pretendía favorecer a un candidato poco cualificado, pero que pertenecía a la nobleza. Y la discriminación a que le había sometido el Antiguo Régimen por sus orígenes humildes, influyó sin duda en que abrazase con entusiasmo los ideales de libertad, igualdad y fraternidad de la Revolución Francesa, que tan acertadamente ha recogido Antonio, junto a la geometría, en el título del libro.

A pesar de su carácter esencialmente biográfico, Antonio Hernández no olvida en estos tres capítulos comentar la actividad académica y científica de Monge, poniendo especial énfasis en su excelencia como profesor.

El segundo capítulo, *Ciudadano Gaspard Monge*, trata precisamente del periodo de aproximadamente 10 años (1789-1799) en el que Monge, absolutamente comprometido con la Revolución y miembro del club de los Jacobinos, participa con entusiasmo en la política y en la administración. En 1792 el Rey es destituido de sus funciones y la Asamblea Nacional nombra para sustituirle un Consejo Ejecutivo en el que Monge es nombrado Ministro de Marina, cargo que ocupó 8 meses, durante los que, como Jefe de Gobierno en funciones, tuvo que firmar la orden de ejecución de Luis XVI. Al abandonar el ministerio, el Comité de Salud Pública le encargo modernizar los métodos de fabricación de armas. Tras establecer una gran amistad con Napoleón y conquistar éste los Estados Pontificios, Monge fue nombrado Comisario de la República Francesa en Roma.. También acompañó a Napoleón en su expedición a Egipto.

Monge prestó también servicios públicos con trascendencia para la ciencia, como fueron su participación en los trabajos que acabaron llevando al establecimiento del Sistema Métrico Decimal, y el muy activo papel que desempeñó en la creación de la École Polytechnique, en la que fue profesor de geometría descriptiva y su segundo director.

El tercer capítulo, *Un amargo final*, recoge su actividad durante el Imperio Napoleónico, que otorgó a Monge diversos honores, y su caída en desgracia junto a Napoleón, que supuso su expulsión de la Academia y, a pesar de su enorme popularidad como profesor, de la Polytechnique. Gaspard Monge murió en Bruselas en 1818.

El capítulo 4, La pirámide triangular, el círculo de Monge y otras cuestiones geométricas*, recoge los trabajos de Monge sobre geometría "elemental" del plano y del espacio. Si además hace el esfuerzo de leerlo con lápiz, papel y si puede, como recomienda el autor, con un ordenador que tenga el programa CABRI, la recompensa será mayor.*

A pesar de su carácter esencialmente biográfico, Antonio Hernández no olvida en estos tres capítulos comentar la actividad académica y científica de Monge, poniendo especial énfasis en su excelencia como profesor. Pero creo que Antonio consigue transmitir que Monge alcanzó lo que muchos aspiramos a conseguir y pocos consiguen: destacar simultáneamente como investigador, como docente y como administrador.

Por lo que se refiere a su trabajo científico, la exposición de Antonio Hernández pone en evidencia dos características esenciales. Una es su enorme diversidad. Además de por las matemáticas, Monge mostró un interés no meramente accidental por problemas de química, en especial de metalurgia (a sus conocimientos en este campo se debió su cargo como responsable de armamento), y de física. Dentro de las matemáticas se dedicó fundamentalmente a la geometría y al estudio de las ecuaciones en derivadas parciales (motivadas éstas en gran medida por problemas geométricos). Pero Antonio Hernández tiene el buen gusto de recoger en un inciso llamado *La mano de cartas del Sr. Monge*, una memoria presentada por Monge a la Academia sobre una manera de barajar un mazo de cartas, poniendo de nuevo en evidencia la diversidad de sus intereses.

La segunda característica destacada del trabajo de Monge es que en muchos casos resolvía problemas prácticos. Esto parece lógico cuando se dedicaba a la metalurgia, pero es también el caso en sus trabajos geométricos: su solución como estudiante del *problema de la enfilada* ponía sobre firmes bases geométricas el problema de fortificar una posición de manera que quede protegida del fuego enemigo; la búsqueda de envolventes de curvas y superficies, problemas tratados en el capítulo 6 del libro que estamos comentando, tiene su origen en un problema clásico de balística, que resolvió Torricelli encontrando la llamada *parábola de seguridad*.

Pero con todo, Monge es conocido fundamentalmente por su enorme habilidad como geómetra, en particular en geometría de sólidos, y por su influencia en los planes de estudios de los ingenieros franceses (y sospecho que también de los españoles) a través de sus cursos y libros sobre geometría descriptiva y geometría analítica. A su trabajo en estos campos dedica Antonio Hernández la segunda mitad del libro.

El capítulo 4, *La pirámide triangular, el círculo de Monge y otras cuestiones geométricas*, recoge los trabajos de Monge sobre geometría "elemental" del plano y del espacio. Está ilustrado con numerosas figuras, pero no es lectura trivial. El lector no muy ducho en geometría (disciplina poco presente aun en los planes de estudio) descubrirá objetos fascinantes, como el *punto de Monge*, la *esfera de Monge* o el *círculo de Monge*, que reflejan propiedades geométricas que pueden parecer sorprendentes. Si además hace el esfuerzo de leerlo con lápiz, papel y si puede, como recomienda el autor, con un ordenador que tenga el programa CABRI, la recompensa será mayor.

El capítulo 5, La geometría descriptiva*, habla, además, de geometría proyectiva y de otros métodos de representación plana de figuras tridimensionales.*

El capítulo 5, *La geometría descriptiva*, habla, además, de geometría proyectiva y de otros métodos de representación plana de figuras tridimensionales. Es bastante más sencillo que el capítulo anterior, pero debo reconocer que me ha resultado muy interesante, puesto que confieso que nunca antes había prestado atención a la geometría descriptiva, ni siquiera a nivel elemental, quizá porque ahora esta disciplina se considere más parte del dibujo técnico que de las matemáticas. Si algún potencial lector está en la misma situación, la presentación que hace Antonio Hernández le servirá como una excelente introducción.

El capítulo 6, Monge y la geometría diferencial*, trata asuntos más elaborados que los dos anteriores.*

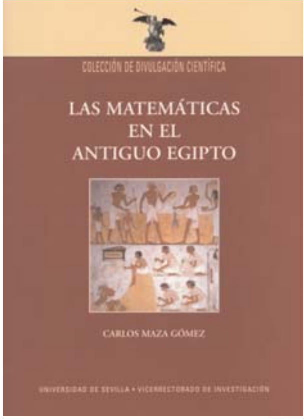
El capítulo 6, Monge y la geometría diferencial, trata asuntos más elaborados que los dos anteriores. Pero al contrario que en el capítulo 4, aquí el autor ha optado por no dar todos los detalles. Creo que ha hecho bien, ya que consigue describir ideas importantes como las de curvatura, envolventes o superficies regladas y desarrollables sin abrumar al lector con explicaciones técnicas (no olvidemos que no estamos ante un libro de texto).

En resumen, nos encontramos ante un libro cuya lectura agradará tanto a quienes se interesen por la historia de las matemáticas como a los aficionados a la geometría.

Antonio Hernández ha hecho un excelente trabajo, que no quedará empañado si señalo dos puntos que considero mejorables: creo que debería haber dedicado algunas líneas más al trabajo de Monge sobre ecuaciones en derivadas parciales, mencionando al menos las ecuaciones de Monge-Ampere, y quizá podría haber hecho alguna referencia a trabajos recientes relacionados con los intereses de Monge.

Mi otra objeción está más dirigida al diseño de la colección que a este libro concreto. Los incisos que aparecen en cuadros tienen un contenido interesante y que complementa muy bien el texto pero, en mi opinión, interrumpen en exceso la lectura, en especial los que ocupan varias páginas.

En resumen, nos encontramos ante un libro cuya lectura agradará tanto a quienes se interesen por la historia de las matemáticas como a los aficionados a la geometría. Creo además que la vida de Monge puede ilustrar (¡quizá en exceso!) que la dedicación a las matemáticas no es incompatible con otros intereses. Si yo fuese profesor de secundaría, recomendaría su lectura a los alumnos que, sintiéndose atraídos por las matemáticas, la consideran una actividad demasiado alejada del mundo. ■



LAS MATEMÁTICAS EN EL ANTIGUO EGIPTO.
Carlos Maza Gómez
Universidad de Sevilla. Vicerrectorado de Investigación.
Sevilla, 2003
ISBN 84-472-0776-5
272 PÁGINAS.

El interés por la cultura egipcia es relativamente reciente en nuestro país. Al amparo de unos restos arqueológicos duraderos, de una civilización cuyas claves han ido desentrañándose en el último siglo, con las posibilidades económicas que han permitido un turismo en Egipto, se ha ido desarrollando en nuestro país una labor divulgativa de escaso rigor por lo general. Sin embargo, desde hace algunos años la Egiptología como ciencia arqueológica y científica está cada vez más presente en distintos círculos universitarios (Barcelona, Madrid, Sevilla, etc), se organizan excavaciones que encuentran financiación privada, se descubren nuevos restos... El interés más evidente se ha centrado en los aspectos históricos y religiosos, pese a lo cual se abre paso paulatinamente una mayor atención hacia aspectos científicos, astronómicos, médicos y también matemáticos.

El estudio de las matemáticas egipcias se tropieza con un primer obstáculo: La escasez de documentos sobre esta ciencia que hayan podido conservarse.

Escasez de documentos
El estudio de las matemáticas egipcias se tropieza con un primer obstáculo: La escasez de documentos sobre esta ciencia que hayan podido conservarse. Es indudable que el papiro, en el que se escribían las obras importantes de naturaleza no religiosa, es un material muy perecedero ante el agua. Es por ello que se cuentan con los dedos de una mano los papiros de naturaleza matemática conservados (Rhind, Moscú, sobre todo), a lo que hay que unir otros materiales similares (el rollo de cuero). Finalmente, los *ostraca* son trozos de cerámica o ladrillo donde se escribían diversas cuentas y que luego se arrojaban a un vertedero, alguno de los cuales se ha encontrado (particularmente, en la aldea de Deir el Medinah).

Sin embargo, existen diversos documentos que pueden servir para entender las matemáticas utilizadas en aquella época, papiros administrativos y contables, estelas de piedra y otros restos que muestran el contexto económico que estaba en el origen de los procedimientos matemáticos construidos por los escribas egipcios.

Doble interpretación
Este creciente interés por la ciencia egipcia contrasta con la carencia de estudios amplios y rigurosos sobre la matemática egipcia en idioma castellano. La obra aquí reseñada responde a esta necesidad y trata de satisfacer el interés de matemáticos, egiptólogos, profesores de matemáticas y alumnos universitarios por aumentar el conocimiento sobre los elementos fundamentales de este segmento de la historia de la Matemática que, en general, es tratado con mucha superficialidad por las obras más generales de esta materia (Boyer, Colette, Klein, etc.).

Presentación del libro hecha por el propio autor:

Carlos Maza Gómez
Universidad de Sevilla.

Sin embargo, este libro está escrito a partir de obras clásicas sobre esta materia de autores tan prestigiosos como Peet, Gillings, Gillain, Robins y Shutle no pretendiendo ser una simple traslación o síntesis de estas obras previas. Actualmente no sólo se reúnen nuevos conocimientos no disponibles para estos autores sino que también ha cambiado el enfoque con que se analiza la matemática egipcia en la Antigüedad. Ello se concreta en dos interpretaciones que basan el estudio realizado:

El contexto.
Actualmente, se considera esencial la comprensión del contexto en que se desarrollan las matemáticas antiguas, fundamentalmente en su naturaleza económica y social, pero también en la propia estructura administrativa y religiosa que caracteriza a esta civilización. Las matemáticas anteriores a los griegos están en muy estrecha relación con las necesidades económicas derivadas del modelo social imperante. Por ello, para analizar el nacimiento de estas matemáticas resulta imprescindible un análisis paralelo de estas necesidades observando las relaciones entre ellas y los procedimientos que nacen entre los escribas egipcios.

A partir del interés por el contexto, la obra comienza por estudiar los tres marcos fundamentales donde nacen las necesidades que darán origen a las matemáticas. El marco geográfico, el marco administrativo y la estructura económica entonces existente.

Los procedimientos.
Los trabajos anteriores sobre matemáticas egipcias se han centrado en los resultados encontrados en los papiros, particularmente en el Rhind, el de mayor riqueza. Se ha querido determinar qué conocían exactamente, de qué recursos técnicos disponían, qué resultados manejaban. Pero actualmente y, con base a todo lo anterior, se hace necesario ahondar en la forma en que nacen estos conocimientos, cómo se construyen los procedimientos matemáticos que dan lugar a los resultados encontrados. Es, pues, una labor de epistemología genética enfocada desde un punto de vista social.

Los marcos
A partir del interés por el contexto, la obra comienza por estudiar los tres marcos fundamentales donde nacen las necesidades que darán origen a las matemáticas. En primer lugar, el marco geográfico permite comprender la naturaleza de una sociedad que se desarrolla al amparo de las inundaciones periódicas del río Nilo, crecidas que hacen de la agricultura el eje vertebrador de la economía. En segundo lugar, se da cuenta de un marco administrativo que incluye, como elemento esencial de la organización social, la figura del faraón y la evolución que su imagen tuvo, a lo largo de aquel tiempo histórico, entre el pueblo egipcio. Ello permite finalmente una mejor descripción y comprensión de la estructura económica entonces existente.

Hay que tener en cuenta que los estudios sobre la economía egipcia son relativamente recientes (apenas venticinco años) por lo que no se dispone de un modelo acabado sobre las relaciones que caracterizan dicha estructura. Sin embargo, se describe en esta obra los dos modelos hasta ahora estudiados, el redistributivo de Polanyi y las matizaciones que introduce Skemp sobre la existencia de una iniciativa privada complementaria a la actuación pública del faraón y su administración. Probablemente, este capítulo sea el más novedoso para los egiptólogos puesto que aún no se ha hecho ninguna revisión en castellano sobre estas cuestiones que son esenciales, sin embargo, para plantear el análisis de los contenidos matemáticos que integran los siguientes capítulos.

Trueque y fiscalidad
En coherencia con este enfoque del análisis, basado en la naturaleza económica de las necesidades que llevan a las matemáticas, el resto del libro no se estructura como habitualmente sobre la aritmética, geometría, álgebra, etc., sino sobre las actividades económicas que están en el nacimiento de las diversas ramas de la matemática.

Así, se examina en primer lugar la actividad de trueque de mercancías, característica de una sociedad que desconocía el uso de la moneda. Pese a no contar con ella sí se establecían valores equivalentes entre las distintas mercancías, sea en peso de oro o de plata, lo que obligaba a una traducción a estos pesos y a realizar las primeras operaciones aritméticas referentes a suma y resta. De todo ello se ofrecen, como en el resto del libro, amplios ejemplos tomados tanto de los papiros matemáticos como de otros restos arqueológicos de naturaleza económica e incluso literaria y religiosa.

El modelo redistributivo, que establecía lazos firmes entre el faraón y su pueblo con los templos como intermediarios, se basaba en una fiscalidad rigurosa sobre los productos agrícolas. Ello planteaba la necesidad de medir la extensión de los campos y determinar, en relación a su fertilidad (cercanía al río), la producción esperable. Todo ello conduce, por un lado, a la determinación de superficies, multiplicación o división de cantidades incluidas, así como la realización de las mismas operaciones para determinar esa producción de trigo, centeno o cualquier otro producto. Para este análisis se acude a distintos papiros administrativos y contables de los templos de la época, de los que se puede deducir criterios fiscales más complejos de lo que parece, así como formas de los campos (fundamentalmente trapezoidales o rectangulares, también circulares) cuyo cálculo se encuentra en distintos problemas del papiro Rhind.

El libro concluye con un capítulo dedicado al estudio de la base matemática del canon artístico utilizado presumiblemente por los egipcios en su pintura y escultura. Ello se refiere fundamentalmente a problemas de proporcionalidad geométrica de la representación de la figura humana.

Contabilidad y fracciones

Para que las medidas ganaran en exactitud se empleaban fracciones, con la significativa restricción de que fueran exclusivamente las de tipo unitario. En los cálculos contables (organización de trabajo, recuento de donaciones, gastos del templo, etc.) surgía un cálculo continuo sobre este tipo de fracciones. Ello conducía, sobre todo, a su suma, lo que plantea el problema de que la suma de dos fracciones unitarias debe resultar otra fracción del mismo tipo. A partir de los datos encontrados en el *rollo de cuero* se hace una completa reconstrucción de los procedimientos egipcios para realizar estos cálculos. En estrecha relación con estos problemas se analiza también la tabla del Recto del papiro Rhind, donde se muestra la descomposición en suma de fracciones unitarias de fracciones de la forma $2/n$ con n impar. El capítulo dedicado a esta materia es probablemente el más elaborado de todo el libro, no en vano se han dedicado muchos estudios previos a resolver las incógnitas planteadas por el Recto.

Pan y cerveza

A partir de los cereales de la época se elaboraban los alimentos básicos de la población, pan y cerveza. En este proceso se planteaban problemas de proporcionalidad directa que se reflejan en el papiro Rhind. Estos problemas muestran la relación (llamada 'pesu') que manejaban entre número de panes o jarras de cerveza y cantidad de grano empleado, relación que daba lugar a problemas muy variados cuando se pretendía cambiar esta relación, manteniendo la cantidad de grano o trasformar panes, o cuando se consideraba la posibilidad de cambiar panes de distinto 'pesu' entre sí.

Graneros, pirámides

Las construcciones más conocidas en el mundo egipcio son las pirámides. Su examen ha dado lugar a todo tipo de especulaciones en las que están implicados varios cálculos matemáticos como son los correspondientes a la pendiente de sus paredes y a su volumen, incluido el del tronco de pirámide. Sin embargo, los primeros rastros del cálculo de volúmenes se pueden encontrar, a un nivel más sencillo, en el tratamiento de los graneros donde se almacenaba el grano.

LAS MATEMÁTICAS EN EL ANTIGUO EGIPTO *ha conseguido el premio de la primera convocatoria sobre Obras de Divulgación Científica de la Universidad de Sevilla en el año 2003.*

Formas artísticas

El libro concluye con un capítulo dedicado al estudio de la base matemática del canon artístico utilizado presumiblemente por los egipcios en su pintura y escultura. Ello se refiere fundamentalmente a problemas de proporcionalidad geométrica de la representación de la figura humana. Se hace eco de la polémica entre Iversen y Robins sobre la naturaleza de este canon y su posible evolución en el tiempo para analizar las posibilidades de ambas interpretaciones mostrando en todo caso la forma en que surgió dicho tratamiento matemático a partir de una necesidad artística y religiosa.

El libro ha conseguido el premio de la primera convocatoria sobre Obras de Divulgación Científica de la Universidad de Sevilla en el año 2003. A invitación de la dirección de esta revista SUMA tengo la satisfacción de compartir con todos los compañeros profesionales de las matemáticas la labor que he realizado durante varios años sobre esta temática. Espero continuar, pese a las dificultades bibliográficas y de edición, trabajando sobre las matemáticas realizadas en otras culturas de la Antigüedad y de todo ello espero, en el futuro, poder informar a los lectores de la revista. ■

SUMA 44
Noviembre 2003, pp.123-127

Le bulletin vert de l'APMEP

La sección Hemeroteca *se dedicará a las revistas de didáctica de las matemáticas. Cada número estará orientado a presentar una revista y para ello repasaremos el contenido de uno de sus últimos números. Se tratará en primer lugar de dar a conocer la publicación y resaltar sus valores, de presentar a sus responsables y la estructura de la revista. Espero que esto nos de la oportunidad de analizar la línea que, con respecto a la enseñanza de las matemáticas, sostiene la publicación y lo que de la lectura de esa revista podemos aprender. Facilitaremos la información que haga posible al lector interesado acercarse a la publicación y adquirirla o consultarla.*

Me gustaría que los lectores participaseis en la elaboración de la sección y que contribuyeseis a darle vida. La colaboración puede ser de diferentes tipos:

- *Ofrecerse para hacer la presentación de una revista y, gustosamente, os cederíamos la palabra y el espacio para ello.*
- *Llamar nuestra atención sobre alguna publicación que hayamos pasado por alto y que sería interesante dar a conocer.*
- *Hacer una breve reseña de algún artículo, que se haya publicado en las revistas que leéis habitualmente y que os haya parecido interesante. Para ello dedicaremos una parte de la sección donde las publicaremos.*
- *Ofrecer a quién pueda estar interesado esas traducciones que se hacen para uso personal, no siempre del todo correctas y requerirían para su publicación —además de los permisos convenientes—, una corrección muchas veces profunda, pero que no por ello dejan de ser útiles y pueden ahorrar un gran esfuerzo a otras personas que tengan interés por el contenido del artículo.*

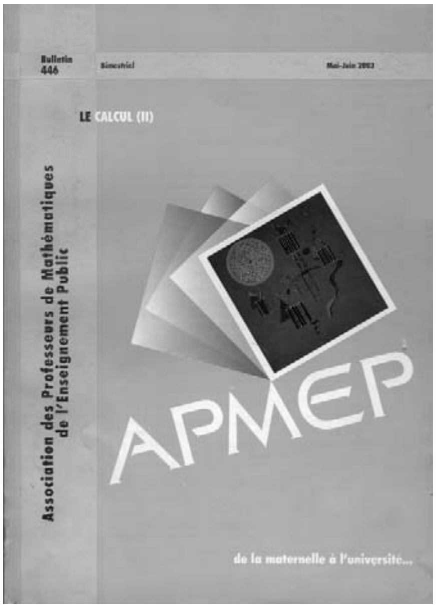
Podéis hacernos llegar vuestras colaboraciones, y cuantas sugerencias puedan enriquecer el contenido de la sección, a la siguiente dirección de correo electrónico: hemeroteca.suma@fespm.org.

Debo empezar esta primera reseña agradeciendo a Inmaculada y Francisco que no me hayan dejado pasar a un cómodo retiro después de estos últimos, e intensos, ocho años de vinculación con la revista. Me sedujo su idea de dedicarle un espacio a dar a conocer otras publicaciones periódicas sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y me pareció atractiva por varios motivos: creo que conocer otras publicaciones nos permitirá sentirnos más orgullosos de SUMA, ya que estoy seguro de que nuestra revista resiste sin inmutarse cualquier comparación; por otra parte, observar otras revistas puede ser una fuente de nuevas ideas que podemos incorporar para continuar mejorando la nuestra, lo que seguro que es posible. Además, la información sobre los contenidos de estas revistas puede que anime a leer más, a perderle el temor a otros idiomas, a seguir siempre buscando dónde aprender cosas nuevas,...

En la presentación de la sección hablaba de la posibilidad de compartir, a través de de la sección, traducciones de artículos escritos en otras lenguas. Me refería a esos artículos que nos han interesado de forma especial y tanto es así que hemos hecho una traducción para uso personal, si ánimo de que fuese a publicarse. Si alguien desea poner a disposición de los lectores alguna de estas traducciones, también lo deberá comunicar a través del correo electrónico que he indicado. Además, en ese caso, deberá mandarnos como documento adjunto el texto de la traducción, en el que deberá estar consignada la ficha bibliográfica completa del original. Más adelante, dentro de esta misma sección o, en la medida en que esté disponible, también en la página web—, se publicará la lista de artículos que hayan ofrecido los lectores y se concretará el procedimiento que deberán seguir quienes estén interesados en conseguir una copia electrónica de alguno de los mismos.

> *Observar otras revistas puede ser una fuente de nuevas ideas que podemos incorporar para continuar mejorando SUMA, lo que seguro que es posible.*

Julio Sancho Rocher
hemeroteca.suma@fespm.org



Título: **LE BULLETIN VERT DE L'APMEP**
Edita: ***Association des Professeurs de Mathematiques de l'Ensignement Public (APMEP)***
Periodicidad: ***Bimensual***
Lengua: ***Francés***
Dirección:
APMEP
26 rue Duméril
75013 Paris (Francia)
Página web: ***http://www.apmep.asso.fr/bulletin.htm***
Numero cometado: ***446, junio de 2003***
ISSN : ***0240-5709***

La APMEP

Vamos a dedicar este número a conocer la revista que publican nuestros compañeros franceses de la APMEP. Fundada en 1910, la Association des Professeurs de Mathematiques de l'Ensignement Public (APMEP), representa a unos 8.000 profesores de matemáticas desde la escuela infantil hasta la universidad. Es una organización independiente, tanto de los partidos políticos como de los sindicatos, que proporciona un marco para la expresión libre y la confrontación de ideas sobre la educación matemática, así como para impulsar acciones encaminadas a la autoformación. Los temas sobre los que muestra interés —y sobre los que interviene públicamente para defender sus puntos de vista— son, los contenidos de los programas, las competencias que se exige a los alumnos, los métodos de enseñanza y formación, los horarios y plantillas, la coordinación entre los diferentes ciclos y la valoración de las matemáticas como instrumento no selectivo de formación. Con lo que he descrito hasta este punto, prácticamente, podríamos estar ante una organización profesional mas, pero cuando dirigimos nuestra mirada hacia su punto de vista respecto a las matemáticas y su enseñanza es cuando es posible percibir que nos encontramos con una organización muy cercana a los planteamientos de la FESPM.

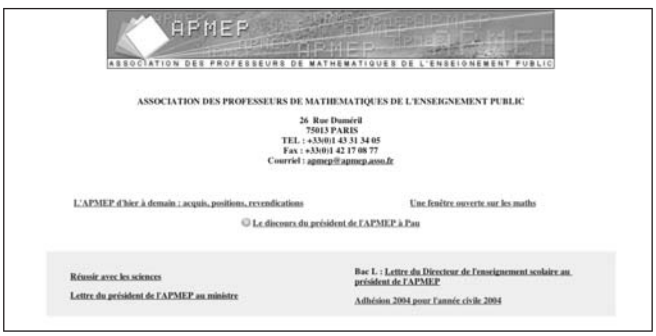
La APMEP cree que hay que conseguir que los alumnos sean capaces de desarrollar el gusto por las matemáticas y el placer en hacerlas, entendiendo que esto último consiste en:

- identificar y formular problemas,
- experimentar sobre ejemplos,
- conjeturar resultados,
- elaborar demostraciones,
- utilizar herramientas teóricas,
- controlar los resultados y su pertinencia,
- comunicar los resultados de una investigación, las soluciones,
- desarrollar simultáneamente: el trabajo individual y el colectivo, la capacidad para escuchar y también para debatir, la perseverancia, la imaginación, el espíritu crítico, la coherencia y el rigor…

Si alguien lo desea, en la página web de la APMEP (http://www.apmep.asso.fr/) se puede acceder a algunos documentos en los que ampliar la información sobre las posiciones y reivindicaciones de la asociación.

Le bulletin vert de l'APMEP

Cada dos meses la APMEP publica su boletín que es su principal instrumento de comunicación. El pasado mes de septiembre llegó a su número 447.



Además del *Bulletin* la APMEP punlica otra revista, PLOT, a la que espero prestar atención en otra ocasión.

La realización material de la revista es sobria pero efectiva ya que en ella prima la claridad a otras consideraciones. Las dimensiones de la revista son 17 x 24 cm y cada número tiene unas 150 páginas. En su interior aparece el texto a una sola columna, las imágenes en blanco y negro y tan sólo se usa el color verde en el título de los artículos y algunos elementos de la composición. En la portada, donde también predomina el color verde, aparece el tema al que se dedica el dossier de cada número y se ilustra siempre con el logotipo de la APMEP, en el que el último cuadrado de la serie que lo compone está relleno con un motivo artístico que tiene connotaciones matemáticas.

De los seis números de cada año uno se dedica a las *Journées nationales*, y en él se publican las conferencias y ponencias presentadas en ellas, así como los talleres que se han celebrado en el transcurso de las jornadas. Excepto en ese número especial, el contenido de la revista se organiza en cuatro secciones, de título suficientemente claro:

- Éditorial
- Dans nos classes
- Dossier
- Pour chercher et approfondir

Para hacernos idea de su contenido y del tipo de artículos que publica daremos un repaso al número 446 del mes de junio pasado.

Éditorial
El editorial de este número viene muy a propósito para presentar la línea de pensamiento que impregna tanto a la APMEP como a su revista. Tanto es así que he estado tentado de limitarme a traducirlo y dejar que los lectores se formasen su propia opinión. No obstante, trataré de resumirlo.

> *El autor del Editorial,* J.P. Baudulat, *expresa su deseo de que el resultado sea que los alumnos, al final, tengan la impresión no tanto de que se les ha enseñado sino mas bien de que se les ha contado bonitas historias.*

Con el título *Je n'enseigne pas, je raconte*, J. P. Bardulat —presidente de la APMEP en el momento de su publicación— hace un diagnóstico de los males de la educación matemática a principios del siglo XXI. Su discurso, tomado de las ideas escritas hace unos años por G. Walusinski, se enfrenta a las preguntas: ¿por qué estudiar matemáticas? …y ¿por qué enseñarlas?

Las matemáticas tienen un patrimonio, los conocimientos matemáticos, a través de los que nos hablan los matemáticos que vivieron hace años. Sin estudiantes de matemáticas, los matemáticos anteriores y su obra desaparecerían definitivamente. Aunque profesores y alumnos no vayamos a añadir nuevas páginas a ese patrimonio, no por ello nuestra labor deja de ser importante ya que gracias a ella el edificio de las matemáticas permanece nuevo y lleno de promesas.

Pero la situación es difícil ya que parece que casi nadie quiere ya ser profesor de matemáticas, ni investigador, ambos trabajos mal pagados, sobre todo si se les compara con los ingenieros o administradores de las empresas que ganan mucho más. Y poco a poco la situación va deteriorándose pues los alumnos no tienen quien les haga adquirir gusto por las matemáticas y acaban odiándolas. El resultado es que el edificio de las matemáticas va desmoronándose, como le ocurre a un monumento abandonado.

El autor apunta al menos dos causas para explicar esta situación tan desastrosa:
- el predominio del discurso utilitarista, y
- la presión para que la enseñanza produzca resultados evaluables.

El utilitarismo se obceca en ganar mañana pero descuida pensar más allá. Por ello desprecia la cultura que pretende ser una reflexión pausada sobre el pasado, presente y futuro. Por ello, el discurso utilitarista puede acabar matando la ciencia.

La necesidad de obtener resultados evaluables es la transposición a la escuela de la ideología del beneficio. ¿Con qué resultados? Para muchos alumnos convierte la enseñanza en una experiencia traumática, y casi siempre muy aburrida; abierta a la competición más que al mundo, olvida transmitir el gusto por la actividad matemática.

El editorial termina con un tono más optimista al afirmar que, juntos profesores y alumnos, podemos hacer algo para remediarlo. Poniendo los pies en el suelo, es decir, asumiendo que hay un programa y unos exámenes que preparar y que constriñen nuestra actividad en clase, aún es posible añadir multitud de ornamentos en la forma de nuevas nociones, bonitos resultados, …, que enriquezcan los conocimientos matemáticos y ayuden a incrementar el aprecio de los alumnos por las matemáticas. Así mismo se necesita la ayuda de los alumnos para hacer que las clases resulten vivas y abiertas al mundo. Finalmente, el autor expresa su deseo de que el resultado sea que los alumnos, al final, tengan la impresión no tanto de que se les ha enseñado sino mas bien de que se les ha contado bonitas historias.

A mi me parece la situación descrita en el editorial, que muestra una falta absoluta de vocación cultural, también es un retrato bastante ajustado de los males de las actuales propuestas curriculares —en particular la de matemáticas— en nuestro país. Además marca las grandes líneas que deberíamos tomar en consideración para hacerles frente.

Dans nos classes

Dentro de esta sección se agrupan un conjunto de artículos caracterizados por su utilidad práctica, pues o bien son el relato y análisis de experiencias concretas, o la propuesta de actividades para el aula, acompañadas de material directamente utilizable, o incluso producciones relevantes de alumnos. Aunque los editores animan a los autores a no extenderse demasiado en sus artículos, llama la atención la modestia y brevedad de alguno de los artículos, lo cual no quiere decir que sean irrelevantes sino todo lo contrario. Voy a poner un ejemplo: *Le français au secours des mathématiques ou sens des écritures mathematiques*, de Serge Petit es un artículo de una sola página en la que se muestra como el uso del lenguaje puede ayudar a resolver una dificultad para la comprensión de los números decimales: ¿cómo es posible que la mitad de 0,25 contenga, después de la coma, un número mayor (125) del que el que se supone que es su doble (25)? El autor explica como, en su conversación con un chico, la expresión de las veinticinco centésimas como doscientas cincuenta milésimas ayudó a dar sentido a la respuesta correcta. Espero que muchos compañeros y compañeras de profesión se animen a contarnos, con gracia y brevedad, experiencias de este tipo y dejen de pensar que se trata de naderías.

Dans nos classes *agrupa un conjunto de artículos caracterizados por su utilidad práctica, pues o bien son experiencias concretas, o la propuesta de actividades para el aula, acompañadas de material directamente utilizable, o incluso producciones relevantes de alumnos.*

En otros artículos de esta sección, podemos leer el elegante análisis de la variación de la *función cuadrado* hecha por un alumno (*Étude de la variation de la fonction carré*), la tercera parte de un artículo de actividades relacionadas con la medida de áreas mediante descomposición de las figuras —a la que acompaña material fotocopiable— (*A propos des aires*), el estudio de las propiedades del 'ovoide' (folium simple) desde distintas perpectivas (*«Ovoide» avec and sans Cabri*), una serie de actividades sobre la proporcionalidad relacionadas con un fenómeno natural, (*La proportionalité dans les nuages*), un conjunto de actividades geométricas relacionadas con la medida de los objetos celestes (*Un peu d'astronomie dans nos clases*), o un breve artículo de un criminólogo, en el que se proporciona un material que permite ver cómo el olvido de elementos indispensables puede hacer que las interpretaciones de datos numéricos resulten altamente tendenciosas (*Las peines et les nombre*). Creo que en ninguno de ellos he dejado de encontrar algún aspecto interesante, destacando todos ellos por la brevedad y el enfoque práctico lo que permite su utilización directa con los alumnos: de heho, yo ya estoy pensando en usar alguna de esas ideas con mis alumnos.

Dossier

Coincidiendo con la finalización del informe sobre la algorítmica, por *Commission de Rèflexion sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM)*, la revista dedicó su dossier en el número 445 y el de este número al *cálculo* en sus múltiples facetas. En el boletín que estamos analizado se publica la segunda parte del mencionado informe, en el que se sigue recorriendo las diferentes posibilidades de la algorítmica y se dan más de cuarenta ideas susceptibles de ser desarrolladas dentro de los programas del bachillerato (*Algorithmique au lycée*), un bonito artículo sobre las construcciones geométricas de los números y el problema de la inconmensurabilidad (*En mettant des segments bout à bout*), la descripción de una realización de una máquina retroproyectable para la factorización de grandes números (*Factorization des grands nombre: de fermat à la machine des frères Carissan*), o un resumen de la conferencia que dio Michèle Artigue, en el Colloque Inter.-Irem Premier Cicle (2002), sobre la evolución de la enseñanza del cálculo.

Me voy a detener un poco más en otro artículo de este dossier, *Le calcul c'est dépassé* (Ch. Daudin) que tiene un planteamiento claramente polémico y que creo que avanza una reflexión que deberíamos hacer en estos próximos años. Inicialmente, de una forma casi apriorística y como muchos de nosotros, el autor explica que aceptó que el uso de la calculadora no sólo liberaba de la tediosa enseñanza y aprendizaje del cálculo escrito, sino que además permitiría explorar con los alumnos nuevos campos y propiedades matemáticas. Su posición actual, que le lleva a prohibir el uso de la calculadora en clase, queda fundamentada a lo largo del artículo — la convicción de que es indispensable en el mundo actual la familiaridad con las propiedades de los números y que sobre éstas se construye el aprendizaje del cálculo literal es el motivo fundamental— y, además, enumera las competencias que se propone desarrollar con sus alumnos y cómo organiza sus clases en función de esos objetivos. Y a partir de aquí, el debate queda abierto… La presencia de este tipo de artículos, bien argumentados, aunque presenten ideas que estén contra la corriente principal del pensamiento imperante, es fundamental para potenciar el debate y avanzar en la mejora de la enseñanza de las matemáticas. Todo lo contrario que la formulación dogmática de soluciones a los problemas.

Pour chercher et approfondir
La última parte de la revista incluye, tanto artículos cuya aplicación didáctica no es inmediata —en este número *Constructions géométriques par intersections de coniques*—, como la presentación de recursos en Internet —aquí, *Publirem*—, o varias secciones fijas. Entre éstas últimas hay una dedicada a proponer y dar las soluciones a problemas escogidos por su originalidad y dirigidos a todo el que le guste afrontar retos (*Les problèmes de l'APMEP*): en ella, los encargados de la sección tratan de reflejar los diferentes métodos con que los lectores han conseguido resolver los problemas, las generalizaciones sugeridas, etc., además de proponer, de vez en cuando, nuevos problemas. Las otras secciones son las dedicadas a reseñar las nuevas publicaciones, tanto de la propia APMEP (*Les Brochures*) como de otros orígenes.

Página web
A través de la página web de la APMEP:

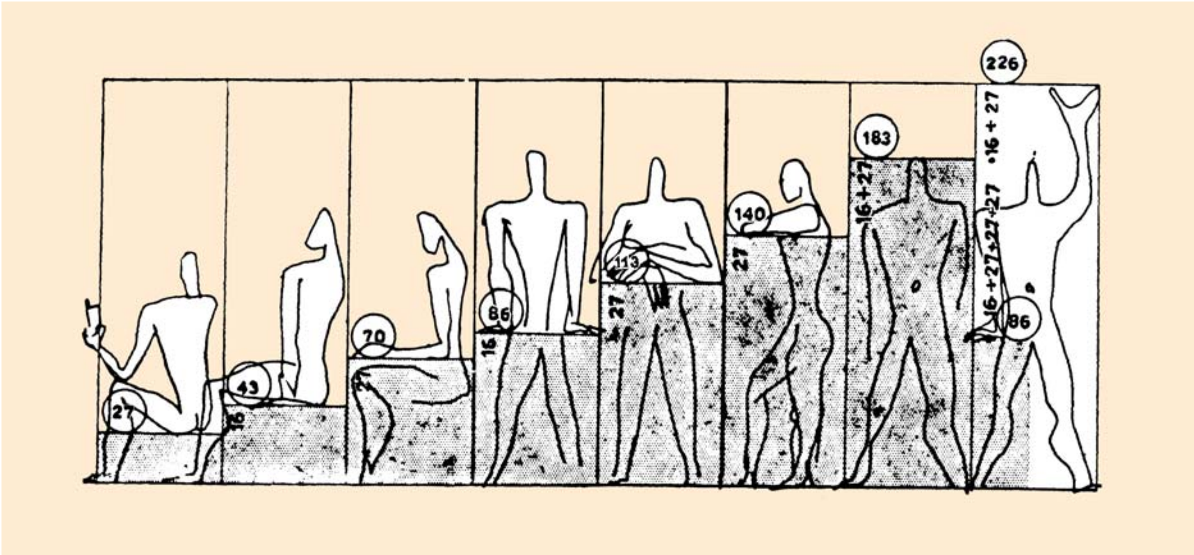
htpp://www.apmep.asso.fr

puede accederse a información sobre sus diferentes publicaciones, entre ellas del *Bulletin vert*. Una vez hemos llegado a la página que vemos en la imagen anterior, podremos acceder al índice de los últimos números publicados. Cada una de las entradas del índice tiene un enlace a una ficha del artículo en la que se incluye el resumen del mismo y una lista de palabras clave que permiten relacionarlo con otras fuentes que tratan temas similares. Cuando un artículo puede complementarse con algún tipo de material es posible descargárselo desde el índice del número en el que se publica dicho artículo. Así por ejemplo, en el número 447 del boletín aparece la segunda parte del artículo *Constructions geométriques par intersections de coniques,* y desde la página web es posible descargar un texto complementario de 27 páginas que proporciona información más detalladas de los aspectos tratados en los dos artículos de la serie. Esta interesante idea permite dejar fuera del texto principal materiales complementarios que pueden no ser del interés de todos los lectores de la revista.

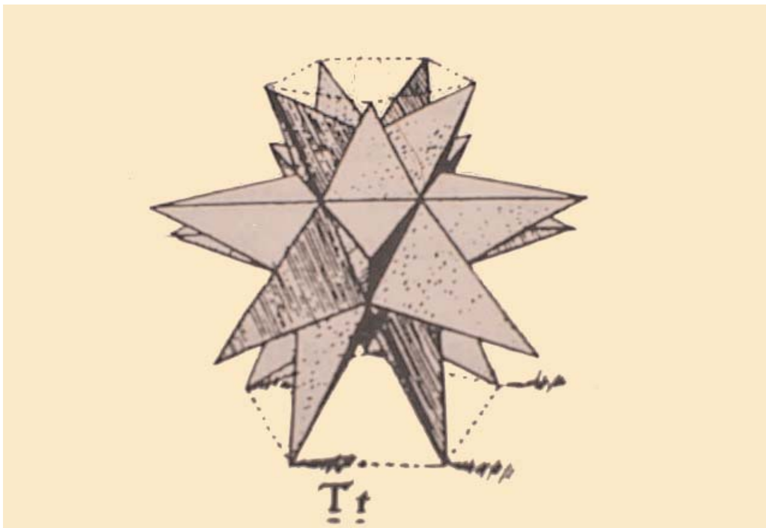
En realidad, cuando se accede a la información sobre un artículo del índice del *Bulletin vert*, el enlace nos lleva a la ficha que hay en *Publimath* sobre dicho artículo. Terminaré comentado en qué consiste este recurso que es accesible desde la página web de la APMEP. *Publimath*, es una base de datos bibliográficos sobre la enseñanza de las matemáticas, elaborada por la comisión Inter-IREM –APMEP. El objetivo que persigue es que, tanto profesores de matemáticas como investigadores en enseñanza de las matemáticas, puedan tener una información rápida sobre los documentos que existen en francés referidos a temas de su interés. En la actualidad hay ya más de 4.000 fichas y la información sigue incorporándose de forma continua, con la colaboración de todos los asociados y la supervisión de un consejo de expertos.

Me parece que se trata de un instrumento de trabajo de gran utilidad, que deberíamos tomar como modelo en la FESPM para poner en marcha algo parecido.

Finalmente, tengo que poner un único reparo. La información para adquirir la revista no me ha parecido muy clara. Podemos asociarnos a la APMEP para recibir la revista, bien a título individual o desde la institución en la que trabajamos (No me ha parecido que sea posible simplemente suscribirse a la revista). Desde la página Web nos podemos descargar los formularios de adhesión, pero en ellos se hace referencia a diversas modalidades sobre cuyas características he sido incapaz de encontrar información. Tan sólo puedo decir que el paquete completo, en el que se incluyen las dos revistas, supone 44 € (más 3 € para gastos de envío). ■



Modulor. Le Corbusier (Charles Edouard Jeanneret)

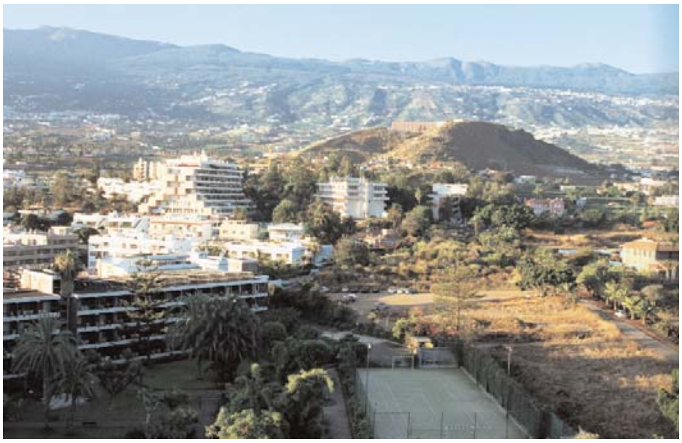


Gran dodecaedro estrellado. Kepler

Billete de 2000 liras de la Republica Italiana, dedicado a Galileo

SUMA 44
Noviembre 2003, pp.129-136

XI Jornadas sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas Canarias, 2, 3, 4 y 5 de julio de 2003



La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) convocó, una vez más, las ya veteranas JAEM y encomendó su organización a la Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas. De esta forma se dieron cita en Canarias 641 profesores, a los que hay que añadir 102 acompañantes, provenientes de todas las Comunidades Autónomas y además, una representación de profesores de otros países. En lo que sigue vamos a tratar de resumir los que fueron cuatro días de intenso y variado trabajo, precedidos de dos años de organización. Describiremos lo que nos parece más relevante con valoraciones sobre determinados aspectos. Para algunas de las actividades desarrolladas se elaboraron documentos específicos, además de los tradicionales con los resúmenes de las conferencias, las ponencias, comunicaciones, talleres y zocos, con los horarios, etc. Todo este material era parte del contenido de la maleta de documentación que se entregó el primer día, antes de la apertura.

Creemos que la fecha escogida fue la adecuada ya que el curso lectivo había terminado unos días antes y las vacaciones de verano permitieron que los organizadores pudieran resolver muchos temas de cierre de Jornadas (para ellos no terminan en el acto de clausura) y disfrutar del necesario y merecido descanso tras el esfuerzo realizado. Nos sigue pareciendo que la cuota de inscripción, a pesar de que se subió, es muy baja en el sentido de que el asistente se beneficia en mucho más de lo que aporta con su cuota gracias al trabajo y la capacidad de gestión de las personas que organizan. Una posible compensación de los asistentes a ese generoso esfuerzo podría ser un

Organizadas por la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas Isaac Newton*, las undécimas JAEM se celebraron los días 2 al 5 de julio, en el Puerto de la Cruz y en la ciudad de Las Palmas.*

Luis Balbuena Castellano
Presidente del Comité Organizador de las XI J.A.E.M.

mayor aporte económico en la inscripción para que, al menos, los organizadores no sufran la angustia de que, tal vez, los fondos económicos con los que cuentan puedan ser escasos y evitar estar temerosos de que no lleguen a cubrir los gastos imprescindibles.

Como es sabido, la Newton celebra su veinticinco aniversario el año 2003. Esa fue una de las razones por las que decidió solicitar la organización de las XI JAEM, convirtiéndolas en la actividad más importante de cuantas se han desarrollado para conmemorar la efeméride. Por tanto, su apoyo a la organización del evento ha sido total e incondicional. La solicitud de ayudas a instituciones y empresas ha contado con su aval, lo que ha agilizado las gestiones y facilitado las concesiones teniendo en cuenta que goza de un gran prestigio social, reconocido este año, además, con la concesión de la **Medalla de Oro de Canarias** con motivo del Día de la Comunidad (30 de mayo). Se ha contado, además, con su sede, equipos informáticos, teléfonos, fotocopiadora, etc. Incluso los componentes de su Junta Directiva han participado como miembros del Comité Organizador. En este apoyo decidido está una de las claves de la valoración positiva que hacemos de la organización.

La Cueva Pintada de Gáldar (Gran Canaria) es una de las pocas manifestaciones de pintura de la población aborigen de estas Islas. Es un dibujo colorista de figuras geométricas que teselan el plano y nos pareció que deberíamos utilizar un fragmento de la pintura para anunciar estas JAEM. De este fragmento se hizo una pegatina que, ampliamente distribuida sirvió, además, para dar a conocer este monumento prehispánico.

El Centro de Congresos del Puerto de la Cruz (Tenerife) fue la sede durante los días 2, 3 y 4 de julio. La sesión del día 5 se desarrolló en el Paraninfo de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria y en el Museo Elder de la Ciencia y la Tecnología de esa ciudad.

El Comité de Programa y el Comité Organizador

El Comité de Programa es designado por la Junta de Gobierno de la Federación. En esta ocasión fue presidido por Xavier Vilella Miró. Fueron sus vocales: Margarita Marín Rodríguez, Concepción García Severón, Emilio Palacián Gil, Manuel Pazos Crespo, Juan Antonio García Cruz y Luis Balbuena Castellano. Según el protocolo que se estableció en un Seminario de la Federación celebrado en Adeje (Tenerife), a este Comité se le asignaron, entre otras, las siguientes funciones:

Establecer los núcleos temáticos e indicar cuántos ponentes intervienen en cada uno, designar a los conferenciantes plenarios, leer las comunicaciones y garantizar que se ajusten al aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas aunque, preferentemente, a los objetivos establecidos para las jornadas, rechazándose en caso contrario. Valorar las propuestas de talleres y para el zoco matemático, aceptándolas o rechazándolas según estime en función de los criterios que estableció, etc.

Foto 2. Comité de programa

El Comité de Programa (CP) se reunió cuatro veces a lo largo de ese tiempo, en Adeje (Tenerife), noviembre de 2001, Torrejón de Ardoz (Madrid), enero de 2002, Madrid, junio de 2002, Adeje (Tenerife), mayo de 2003.

El Comité Organizador, por su parte, es nombrado por la Sociedad organizadora y, en esta ocasión, estuvo presidido por Luis Balbuena Castellano. Lo integraban: Pilar Acosta Sosa, José Luis Aguiar Benítez, Francisco Aguiar Clavijo, Dolores de la Coba García, Juan Cuenca Serrano, Sergio Darias Beautell, Carlos Duque Gómez, Juan Antonio García Cruz, Manuel García Déniz, Emma García Mora, Lourdes Hernández Pérez, Antonio Ramón Martín Adrián, Jesús Méndez Méndez, Francisco Padilla Díaz, José Manuel Padilla Díaz, Inés Plasencia Cruz, Francisco Puerta García, Asunción Reyes García-Talavera, José Antonio Rupérez Padrón, Arnulfo Santos Hernández, Carmen Tavío Alemán, Ana Trujillo La Roche y Fidela Velázquez Manuel.

Además, se contó con la ayuda de otros compañeros y compañeras que actuaron como coordinadores locales de las conferencias y de los núcleos temáticos. Ellos fueron: Ana Negrín Hernández, Juan Contreras Guerrero, Candelaria Espinel Febles, Pino Cruz Santana, Juan Cuenca Serrano, Enrique Freaza Déniz, Carmen Delia Clemente Rodríguez, Agustín Marrero Marrero, Horacio Arencibia Nuez, Ana Alicia Pérez Hernández, Isabel Santos Hernández, Asunción Reyes

García-Talavera, Carmen Etelia Martín Rijo, Genaro Padilla Díaz y Lucía Henríquez Rodríguez.

Por último, dentro de los apoyos recibidos hay que destacar el ofrecido por un grupo de estudiantes del Centro Superior de Educación de la Universidad de La Laguna que estuvo coordinado por Inés Plasencia Cruz. Se trata de: Cristina Álamo Sánchez, Verónica Álvarez Barroso, Elisa Álvarez Padrón, Carmen Nieves Álvarez Pérez, Víctor Castro Ramos, Patricio García González, Javier García Hernández, Sonia García Morín, Mª Mar González García, Iraida González González , Mª Begoña Hernández Romero, Cristina Marrero Alonso, Ana Leticia Martín Mallén, Sergio Pérez Baena, Ana Belén Pérez Estévez , Yurena Pérez Peña , Irma Práxedes Herrera y Dayana Ventura Pérez.

Según el citado protocolo, la principal función del Comité Organizador consiste en conseguir los medios necesarios para la organización y el desarrollo del programa científico propuesto por el Comité de Programa.

Pero además de esos aspectos estrictamente científicos, existen actividades que este Comité debe organizar, unas por mandato de la Federación, como la entrega del Premio Gonzalo Sánchez Vázquez, el homenaje al Profesorado Argentino o poner las condiciones para que la Federación y las Sociedades Federadas puedan exponer publicaciones u otros materiales de interés y otras, por decisiones tomadas por el propio Comité Organizador como la jornada de trabajo en Las Palmas, la negociación y solicitud de ayudas a instituciones y empresas, la homologación de los certificados, los regalos y su distribución, café, etc.

Contenidos

La estructura básica se compone de:

- **Conferencias Plenarias (5)**
- **Núcleos Temáticos (7). Cada uno de ellos se desarrolló en cuatro o seis ponencias haciendo un total de 34. (Problema: ¿cuántos fueron de cuatro y cuántos de seis ponencias?)**
- **Comunicaciones breves (102)**
- **Talleres (24), ocho de una hora y dieciseis de dos horas.**
- **Zoco Matemático (15 propuestas)**
- **Exposiciones**

Es evidente que para desarrollar todas las actividades es necesario contar con ayudas de entidades públicas y privadas. Entre las entidades colaboradoras destacamos:

Gobierno de Canarias, (Presidencia del Gobierno y Consejería de Educación Cultura y Deportes), Cabildo de Tenerife, Cajacanarias, Universidad de La Laguna, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Museo Elder de la Ciencia y la Tecnología de Las Palmas de Gran Canaria, Ayuntamiento de Adeje, Ayuntamiento de Gáldar, Ayuntamiento de Puerto de la Cruz, Instituto Canario de Estadística (ISTAC), Coro Carpe Diem, Centro de Profesores e Institutos así como el Colegio Las Delicias de Santa Cruz de Tenerife. También la compañía Fred Olsen, Editorial Santillana, Grupo Anaya, Ediciones SM, Casio, Texas Instruments, Proyecto Sur de Ediciones y la empresa Careca. En el Centro de Congresos recibimos una inestimable ayuda de su personal, en especial de Sonia Hernández Sosa, Alejandro Fuentes Arencibia y Jerónimo Morales Baute.

Foto 3. Traslado en barco.

Las XI JAEM contó de una página web que fue constantemente actualizada y una lista de distribución de e-mail. A través de esos medios se fue dando a conocer la estructura del evento, las personas que participarían como conferenciantes y ponentes de los Núcleos Temáticos, los resúmenes de las intervenciones, las sedes, la ficha de inscripción, etc.

En todas las salas en las que se desarrolló alguna intervención, se colocó un retroproyector, un ordenador, una pantalla y un

Foto 4. Debate final en un núcleo temático

cañón. Además se instalaron aquellos otros apoyos (proyector de diapositivas, casetes, televisión y vídeo, tableros, etc.) que fueran necesarios para el desarrollo de la exposición, previamente solicitados por los participantes.

En determinadas horas se realizó una retransmisión a través de internet, en tiempo real, de las actividades plenarias desarrolladas en el Centro de Congresos y de las ponencias presentadas en una de las salas, todo ello coordinado por Carlos Duque Gómez.

Entre las actividades complementarias desarrolladas en esos días, resaltamos:

La entrega del Premio Gonzalo Sánchez Vázquez que se desarrolló en el Paraninfo de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria según el programa que se había anunciado. La mesa estuvo presidida por el Presidente de la Federación Florencio Villarroya acompañado por el Secretario General de la Federación, José Luis Álvarez, la Presidenta de la Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas, Dolores de la Coba, y el Presidente de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, Salvador Guerrero. Una vez leída por el Secretario General el acta de concesión del premio al Profesor Antonio Aranda Plata y a la Profesora Adelina Flores Medina, se procedió a la lectura del laudatio de los premiados por parte de Antonio Pérez Jiménez y Pilar Cancio León, respectivamente. Una vez hecha la entrega del diploma acreditativo del Premio y de una escultura especialmente diseñada por Tamara Ramos, Profesora de la Escuela de Arte Fernando Estévez de Santa Cruz de Tenerife, tomaron la palabra los galardonados para agradecer el premio concedido.

No ha sido establecido aún un protocolo detallado para proceder con aquellas personas que han sido galardonadas con el Premio GSV. Esto supuso tener que consultar con la

Foto 5. Adelina Flores Medina y Antonio Aranda Plata.

Secretaría General de la Federación para tomar decisiones. Se preparó un díptico especial para informar a todos sobre quienes eran las personas premiadas y anunciar el día y hora de la entrega.

En el Comité Organizador se procuró dar solemnidad a este acto y al mismo tiempo calidez y, en nuestra valoración, entendemos que se consiguió.

Se preparará un borrador de protocolo para ser elevado a la Junta de Gobierno de la Federación con el fin de que ciertos aspectos de esta actividad estén definidos en la siguiente edición.

La Junta de Gobierno de la Federación acordó en su día, invitar en cada edición de las JAEM al Presidente o Presidenta de una Sociedad Iberoamericana de Educación Matemática. En esta ocasión fue invitada la **Presidenta de la Sociedad Argentina de Educación Matemática** (SOAREM), Profesora **Nelly Vázquez de Tapia**. También acudieron invitados por la Federación el Profesor Juan Carlos Dalmasso, Director de la Olimpiada Matemática de Argentina, el Profesor Richard Cabassut, de Francia y la Profesora Florinda Costa, de Portugal

Firma del acta de creación de la **Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM)** por parte de las siguientes sociedades:

Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM)
Sociedad Boliviana de Educación Matemática (SOBOEDMA)
Sociedade Brasileira de Educaçao Matemática (SBEM)
Sociedad Chilena de Educación Matemática (SOCHIEM)
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM)
Comité de Educación Matemática del Paraguay (CEMPA)
Sociedad Peruana de Educación Matemática (SOPEMAT)
Sociedad de Educación Matemática Uruguaya (SEMUR)

Durante esos días se celebraron reuniones en las que se tomaron importantes acuerdos, entre otros, la aprobación definitiva del Estatuto y del Reglamento de Régimen Interior por el que se regirá la FISEM, elección de la primera Junta de Gobierno y elaboración de un plan de trabajo para el futuro inmediato y a medio plazo.

Homenaje al Profesorado Argentino. En su día, Antonio Pérez Jiménez lo propuso a la Junta de Gobierno de la Federación que lo aceptó y creó una Comisión para realizar las gestiones. Estuvo formada inicialmente por Claudi Alsina, Luis Balbuena y Antonio Pérez Jiménez. Más tarde se incorporó José Luis Aguiar Benítez. El homenaje se celebró en el Museo Elder de la Ciencia y la Tecnología y se concretó en:
Descubrimiento de una escultura matemática en memoria de Luis Antonio Santaló a cargo de Jacinto Quevedo Sarmiento,

Director del Museo y promotor de la idea y Nelly Vázquez de Tapia.

Conferencia de Juan Carlos Dalmasso, Director de la Olimpiada Matemática Argentina titulada *"Los Hacedores"*, emocionado repaso de la obra de los profesores exiliados en aquella República destacando lo que significaron para las matemáticas que, de repetidora de teorías que inventaban otros pasó a crearlas.

Presentación a cargo de Antonio Pérez Jiménez del libro *"Entre Argentina y España: unas historias matemáticas para el recuerdo"*, coeditado por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y por la Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas.
Fue un gesto que contó con la aprobación de los asistentes pues con él se saldó una deuda histórica con este país que dio

Foto 6. Homenaje al profesorado argentino. Claudi Alsina presenta a Juan Carlos Dalmasso.

acogida a tantos profesores, como así lo recoge el libro publicado y que se entregó a todos los asistentes.

Exposiciones. Bajo el título: "Exposición didáctica dedicada a la Geometría Canaria", la conocida profesora Pilar Moreno presentó una colección de trabajos fotográficos en los que con la maestría que le caracteriza, plasmó la belleza de escenas y rincones de Canarias con las matemáticas como protagonista. Había, además una colección de posters dedicados a las "Matemáticas del plátano".

Teatro. Estuvo a cargo de José Muñoz e Ismael Roldán con el título "Más teatro y ~~menos~~ más matemáticas". Con unas insuperables dosis de ingenio, creatividad, buen humor y buen hacer, consiguieron deleitar a los asistentes y, sobre todo, poner de manifiesto las grandes posibilidades didácticas que posee el teatro.

Exhibición de silbo gomero. Fue realizada por D. Julio Hernández Santos y D. Alejandro Méndez Correa. Es un original tipo de lenguaje que se utilizó profusamente en la isla de La Gomera y que actualmente se trata de rescatar y mantener.

Muestra de folclore de las Islas. Estuvo a cargo del Grupo Folclórico del Centro Superior de Educación de la Universidad de La Laguna, dirigido por el Profesor Manuel Lorenzo Perera. Las explicaciones que precedían a cada pieza convirtieron la exhibición en un acto cultural de primer orden. Quedó patente también la labor de rescate que hace este prestigioso grupo de ciertos aires folclóricos que han estado a punto de desaparecer.

Actuación del coro Carpe Diem de la que destacamos el Teorema de Thales, estrenado a nivel mundial, en versión coral para cuatro voces, con motivo del Año Mundial de las Matemáticas.

Calado canario. Se hizo entrega, a cada asistente, de un regalo consistente en un calado canario (con el logotipo de las XI Jaem) elaborado artesanalmente en la Villa de La Orotava y donados por el Cabildo de Tenerife y por el Comité Organizador.

Grabados de Adeje. El Ayuntamiento de Adeje, que tanto ha colaborado en la organización de estas XI JAEM, estuvo presente regalando a los asistentes una carpeta que contenía unos artísticos grabados de rincones del municipio.

El Comité Organizador contó con un **Gabinete de Prensa** que dinamizó la actividad en los medios de comunicación desde varios meses antes de producirse. Convocó ruedas de prensa e intervino en emisoras de radio y televisión así como con noticias en la prensa escrita.

Con un mes aproximadamente de antelación a la fecha de inicio de las XI JAEM, cada inscrito hasta ese momento recibió en su domicilio un cuaderno con los resúmenes de todas las conferencias, ponencias de los núcleos temáticos, comunicaciones, talleres y zocos matemáticos. De esta forma cada asistente se podía ir construyendo el itinerario que desearía hacer durante las JAEM. El horario definitivo se anunció en la web con antelación suficiente.

Otros aspectos

Medios necesarios para el desarrollo del programa
Los podemos clasificar en:

a) Difusión. Una vez que el Comité de Programa concretó el contenido científico, se conectó con los conferenciantes e invitados a ser ponentes de los núcleos temáticos para conseguir su aceptación en las condiciones habituales: se cubren los gastos de traslado y manutención pero no se abona ninguna cantidad en metálico. Se les solicitó un resumen de su intervención para orientar a los asistentes. Todos aceptaron la invitación y solo una ponente renunció más tarde por problemas personales.

Todos los resúmenes fueron colocados en la página web al tiempo que se elaboró el primer anuncio que incluía los nombres y títulos de las participaciones. El Comité Organizador puso también los medios para que el Comité de Programa pudiera estudiar y seleccionar las comunicaciones, talleres y propuestas de zoco matemático que se presentaron.

b) Infraestructura. Se procuró habilitar los espacios suficientes para poder situar todas las actividades previstas. Solo algunos talleres solicitaron distribuciones especiales que fueron atendidas en su totalidad. Entendemos que se contó con salas suficientes que funcionaron con normalidad. Las distancias a recorrer para pasar de una sala a otra podían realizarse en menos de cinco minutos.

c) Medios técnics. Contamos con aparatos de todo tipo gracias a la colaboración de Centros de Profesores, de Institutos de Enseñanza Secundaria, el Proyecto Medusa de la Consejería de Educación Cultura y Deportes del Gobierno de Canarias y el Instituto Tecnológico de Canarias. De esta forma pudimos disponer de cañón y de retroproyector con pantalla en cada una de las salas. Atendimos también todas las solicitudes de otros medios tales como proyectores de diapositivas, televisión con video, etc. Para las posibles incidencias con los cañones y configuraciones, se contrataron a dos técnicos que resolvieron cuantas dificultades se presentaron.

d) Medios humanos. Se contó con un conjunto suficiente de voluntarias y voluntarios así como de un amplio equipo de profesores para coordinar, atender y controlar los horarios de todas las actividades que se desarrollaron.

Apoyo a las Sociedades Federadas

El Comité Organizador se dirigió a todas las Sociedades y a la Federación para recordarles este aspecto y para que realizaran las solicitudes de apoyos con tiempo suficiente. Fue nombrada una persona para dar respuesta y organizarlo. Se recibieron peticiones del Servicio de Publicaciones de la Federación, de la Sociedad andaluza Thales, de la Newton y de la Sociedad Ada Byron, que fueron atendidas debidamente.

Tiempo específico para el zoco

La solución que dimos a este aspecto consistió en prolongar los tiempos de los descansos a 45 minutos y hacerlos coincidir con la presencia de los autores en los zocos. El sistema permitió, además, contar con unos descansos más distendidos.

Homologación

Se realizó la gestión con la Administración educativa y nos fue concedida la homologación siempre que se cumplieran los requisitos habituales. Por eso se colocaron las listas para la recogida de firmas desplegadas sobre una mesa larga de manera que no era necesario estar pasando hojas para encontrar el lugar en el que firmar. Esto evitó las colas y permitió a los asistentes realizar el trámite sin mayores pérdidas de tiempo. El envío del correspondiente certificado a aquellos que cumplan los requisitos exigidos se hará próximamente.

Patrocinios y colaboraciones

La negociación de patrocinios fue larga en el tiempo y desigual en los resultados. Las instituciones del Gobierno directamente implicadas, contribuyeron con cantidades económicas y apoyos logísticos. También los Cabildos de Tenerife y Gran Canaria. En cuanto a las empresas hemos de destacar la aportación de Cajacanarias que desde siempre ha apoyado las actividades realizadas por la Sociedad Isaac Newton. Las editoriales hicieron aportaciones de cantidades variables y se les ofreció una hora para que pudieran presentar lo que deseasen. Solo la utilizaron tres (Casio, Anaya y Proyecto Sur de Ediciones) por lo que consideramos que esta decisión no estuvo acertada. Algunos patrocinadores que no utilizaron este tiempo, agradecieron el gesto pero argumentaron que la lejanía supondría un gasto en desplazamientos y estancias de personas y materiales que podría no compensar. Existe, finalmente, un conjunto amplio de personas, instituciones y empresas que ofrecieron su apoyo y colaboración desinteresada en diversos aspectos del programa y que han quedado explicitadas anteriormente.

Hemos de agradecer, de forma especial, el apoyo y la sensibilidad hacia esta actividad mostrada por el Viceconsejero de Educación D. Fernando Hernández Guarch. También ha sido importante la ayuda prestada por el Cabildo de Tenerife, agradeciendo de manera destacada la actitud de su Presidente, D. Ricardo Melchior.

Entre las empresas colaboradoras insistimos en hacer sobresalir a Caja Canarias por el decidido y decisivo apoyo que dio a estas JAEM. Hemos de resaltar también la actitud positiva de sus directivos para tratar de agilizar al máximo la liberación de la partida destinada a este fin. D. Alvaro Arvelo, D. Alfredo Orán, D. Alfredo Luaces, D. Antonio Pérez, a todos ellos nuestro agradecimiento.

De las Editoriales debemos destacar y agradecer de forma especial el apoyo del Grupo Anaya (D. Carlos Lamadrid) y de la Editorial SM (D. César Gómez).

El traslado a Gran Canaria no hubiera sido posible sin la generosa oferta que nos hizo la compañía Fred. Olsen.

La labor de solicitar ayudas bien económicas, bien logísticas, tiene un doble filo pues hay instituciones y empresas que se muestran muy propicias a participar en el proyecto y otras, como El Corte Inglés, por ejemplo, que mostró cierto “desdén” hacia este tipo de eventos... En cualquier caso, vistas en su conjunto, el balance es positivo porque hemos podido dar a conocer nuestra organización, sus actividades, sus objetivos y como el resultado final del evento también ha sido positivo, quedan justificas las ayudas prestadas, las gestiones realizadas y el tiempo dedicado a ello.

Evaluación

Estos son los resultados de la encuesta de evaluación (puntuaciones están comprendidas entre 1 y 5, inclusive):

	Media	Desviación típica
Objetivos:		
El programa y el diseño se ajustan a los objetivos	4,24	0,60
Los objetivos previstos se han alcanzado	4,18	0,60
Contenidos:		
Cantidad	4,00	0,89
Calidad	3,89	0,60
Novedad	3,30	0,90
Documentación y/o material entregado:		
Cantidad	4,52	0,71
Calidad	4,30	0,80
Utilidad	4,20	0,70
Nivel de ajuste de la actividad:		
Tiene aplicación en la práctica docente	4,20	0,70
Se puede aplicar a tu centro	3,88	0,88
Responde a las expectativas que tenías	3,88	0,92
Supondrá cambios en tu práctica docente	3,66	0,85
Nivel de organización		
Información sobre la actividad	4,80	0,70
Horario	4,00	0,84
Condiciones del lugar	4,50	0,83
Duración de la actividad	3,96	0,73
Coordinación:		
Control de la asistencia	4,38	0,44
Resuelve los problemas	4,57	0,58
Organización de los materiales y del aula	4,57	0,65

Además de estos datos cuantitativos nos ha llegado la felicitación de muchos de los asistentes que compensa sobradamente las pocas quejas recibidas por fallos en la organización o mala interpretación de las instrucciones y horarios facilitados.

Programa científico

Su elaboración es responsabilidad exclusiva del Comité de Programa. La valoración que podemos hacer desde el Comité Organizador es positiva por cuanto que las opiniones que escuchamos de los asistentes y los resultados de la encuesta que se pasó, así lo revelan. Los conferenciantes plenarios expusieron sus lecciones de reflexión en torno a aspectos diversos de la Educación Matemática. De los ponentes de los núcleos temáticos solo hubo una ponente que anunció su ausencia a última hora y que no fue posible sustituirla. La calidad de las ponencias estuvo garantizada porque se hizo una buena selección de ponentes.

Las opiniones sobre las comunicaciones, en general, fueron positivas pero en ocasiones el contenido de la misma no responde a las expectativas que se crean con el resumen o con el título. No obstante se considera buena la selección realizada por el Comité de Programa.

En cuanto a los talleres, la generalidad de los asistentes se mostró también muy bien impresionada por los contenidos desarrollados. La limitación de plazas en algunos talleres hace que no todos los interesados puedan asistir al taller elegido, pero esto es inevitable porque el cupo lo señalan los autores para que su trabajo sea eficaz. También recibimos opiniones positivas de los trabajos que estuvieron expuestos en el zoco matemático.

El equipo humano

El equipo que formaba el Comité Organizador representa la clave única para explicar el buen desarrollo de la actividad. Debemos distinguir tres niveles, a saber:

Nivel A. Está formado por las personas que más directamente estuvieron involucradas con las gestiones y decisiones desde el principio. Durante el curso 2002-03 dispusieron de un descuento horario concedido por la Consejería de Educación, que compensaba, en parte, la dedicación a la gestión de las XI JAEM.

Foto 7. Taller.

Nivel B. Son las personas que asistieron durante todo este tiempo a una reunión semanal de dos horas en la que se discutían los temas y las decisiones que tenían más trascendencia. En este nivel hay que incluir a los que fueron los coordinadores de las conferencias y núcleos temáticos ya que establecieron contacto con los conferenciantes y ponentes desde muchos meses antes para tratar de dar respuesta a las peticiones que hacían, especialmente de medios para su exposición.

Foto 8. El equipo humano.

Nivel C. Prestaron su apoyo en los últimos días y sobre todo durante el desarrollo de las JAEM. Destacan en este grupo las voluntarias y voluntarios que fueron coordinados y dirigidos por Inés Plasencia. La valoración que hay que hacer del trabajo desarrollado es muy positiva por cuanto que cada uno cumplió sobradamente en las misiones que tenía encomendadas, con total entrega, disciplina y generosidad de forma tal que todo se desarrolló según los planes previstos.

Coordinación

El hecho de que existiera un equipo de nivel A cuyos miembros estaban al tanto de todas las gestiones y decisiones, hizo que existiese una buena coordinación general, sobre todo, en los momentos de mayor actividad en los que es necesario dar respuesta rápida a muchas cuestiones y soluciones a problemas que se van presentando.

La presencia del Presidente del Comité Organizador en el Comité de Programa, actuando además de secretario del mismo, facilitó la relación entre ambos. Es, por lo tanto, una decisión que debe mantenerse en el futuro. También jugó un importante papel la presencia en el Comité de Programa del Presidente del Comité Organizador de las anteriores JAEM, toda vez que permitió evitar errores y ayudó a repetir aciertos.

Otras sugerencias

La cuota de inscripción estimamos que es insuficiente para cubrir mínimamente los gastos imprescindibles. Ello obliga a tener que gestionar muchas ayudas en instituciones y empresas. Aquellos que tienen interés por acudir a unas JAEM no dejan de hacerlo por la cuantía de la cuota de inscripción. En las XI JAEM estuvo establecida en 84 euros y sugerimos que se aumente. Los asistentes a unas JAEM deben ser conscientes de lo que reciben a cambio de esa cantidad; no solo la parte científica y los posibles servicios sino también los resultados del trabajo desinteresado y la gestión de muchos colegas durante muchos meses.

La fecha de realización de las XI JAEM nos ha parecido correcta principalmente porque si se hace al principio de curso, los organizadores tendrán que seguir trabajando y cuidando los detalles durante todo el verano y además, tendrán que hacer la liquidación y la memoria en época lectiva con lo que supone de desviación de su trabajo. En cualquier caso, la decisión final debe estar en manos, especialmente, de la Sociedad organizadora porque pueden existir condicionantes que aconsejen otras fechas.

Los miembros de la Junta de Gobierno acuden a las JAEM con el traslado y estancia cubiertos, lo que, en principio parece razonable al ser los responsables y animadores últimos de las JAEM. No por casualidad, los miembros de esta Junta suelen ser personas cualificadas en el campo de la Educación Matemática. Estas circunstancias parecen sugerir que, si no todos, la mayoría debería participar en las JAEM con alguna actividad en el caso de no ser ponente o tener alguna otra responsabilidad.

La Junta de Gobierno debe aprobar un protocolo de actuación con los que van a recibir el premio Gonzalo Sánchez Vázquez y con los que lo han recibido en ocasiones anteriores. A la vista de nuestra experiencia presentaremos un borrador a la Junta de Gobierno. ■

SUMA 44
Noviembre 2003, pp.137-141

XIV Olimpíada Matemática Nacional La Rioja, junio de 2003

Organización:
Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas *A prima*
Coordinación:
Natividad Anguiano García y **Javier Galarreta Espinosa**
Pruebas Individuales:
Rodolfo Larrea Tomás
Prueba por equipos:
Carmen Arnedo Franco, **Begoña Fernández Torroba**, **Milagros Hernández Cacho**, **Mónica Ruiz Ruiz**, **Carlos Usón Villalba** y **José Antonio Virto.**

La XIV Olimpíada Matemática Nacional para alumnos de segundo de Educación Secundaria Obligatoria, se ha llevado a cabo del 25 al 29 de junio de 2003 en La Rioja y ha sido convocada por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), y organizada por la Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas **A prima**.

A prima cuenta con aproximadamente 50 socias y socios de todos los niveles educativos, principalmente de Educación Secundaria, y fue creada en 1999 como consecuencia de la inquietud de varios profesores de Matemáticas y ante las expectativas que suponía la celebración en el 2000 del Año Mundial de las Matemáticas.

Una de las actividades que realizamos anualmente y empieza a tener tradición es el "Concurso Primavera de Matemáticas" que este curso pasado celebró su quinta edición. Este concurso afecta a ocho niveles educativos, desde 5º de Educación Primaria a 2º de Bachillerato y aproximadamente participan en él unos 4.000 alumnos riojanos en la fase local y 400 en la fase final regional. Los mejores clasificados en el nivel de segundo de Educación Secundaria participan en la Olimpíada Matemática Nacional representando a La Rioja.

Nuestra Sociedad asistió por primera vez a la XII Olimpíada Matemática Nacional de Viérnoles-Torrelavega (Cantabria) con una participación destacada de los alumnos. En esta edición, el equipo de colaboradores animó a las nuevas Sociedades a organizar futuras Olimpíadas Nacionales. **A prima** recogió la idea pero no fue hasta septiembre de 2002, cuando el coordinador del Comité Nacional de Olimpíadas de la FESPM, Pedro José Martínez, nos hizo una propuesta avalada por una serie de colaboraciones que han sido importantes para que se lleve a cabo.

Colaboraciones

En la reunión de socios de **A prima**, Natividad Anguiano y Javier Galarreta comenzamos como coordinadores de la XIV Olimpíada Matemática Nacional con la idea de ir buscando patrocinios y colaboraciones para más adelante, y con un grupo de compañeros, ir desarrollando tareas específicas.

Se empezó buscando la colaboración de la Consejería de Educación, Cultura y Deporte de La Rioja presentando el Proyecto que se había elaborado a tal efecto. En conversaciones mantenidas con esta institución se obtiene, por un lado, la Sede de la Olimpíada, fijándose ésta en la Residencia del I.E.S. La Laboral de Lardero (La Rioja), centro muy cercano a Logroño, y por otro, una ayuda económica que no fue suficiente para sufragar todos los gastos originados por el alojamiento y manutención en la citada Residencia.

La elección de este lugar ha sido un gran acierto ya que ha favorecido que la convivencia entre participantes y organizadores haya sido extraordinaria.

Para el desarrollo de las pruebas se optó por llevar a cabo la individual en Logroño y la prueba por equipos en Calahorra. Para ello nos pusimos en contacto con el Departamento de Matemáticas y Computación y con el Vicerrectorado de Estudiantes de la Universidad de La Rioja, de los que recibimos una espléndida acogida y gran apoyo, prorcionándonos espacio físico y material para desarrollar las pruebas, así como ayuda económica.

El Ayuntamiento de Logroño colaboró con una comida y con el uso de las instalaciones deportivas para un baño en una calurosa tarde. La Casa de las Ciencias de Logroño, dependiente del Ayuntamiento, también colaboró con la cesión de fotos de un concurso de fotografía matemática y dos telescopios de reciente adquisición.

El grupo de compañeros que gestionó las pruebas de Calahorra (Carmen Arnedo, Mª Begoña Fernández, Milagros Hernández, Mónica Ruiz, Carlos Usón y José Antonio Virto) consiguieron rápidamente el apoyo del Ayuntamiento de Calahorra que sufragó los desplazamientos, la comida y proporcionó personal para la preparación y ambientación de la prueba por equipos.

Con dos días ya medio organizados nos planteamos una tercera jornada completa en la que se conociera La Rioja Alta y, aunque no se consiguieron los apoyos de los Ayuntamientos de Haro y Santo Domingo de La Calzada, sí que colaboró muy bien el de Nájera, que nos ofreció una caldereta al aire libre y una visita guiada al Monasterio de Sta. María la Real y cubrió también parte de los gastos originados por los desplazamientos.

Los gastos extraordinarios que no fueron cubiertos con las colaboraciones ya mencionadas, se sufragaron en parte gracias a la ayuda de la Fundación Caja Rioja y las casas comerciales Casio-Flamagas y Ediciones SM que, además, enviaron diversos lotes de material para los participantes. También hemos contado con otras pequeñas ayudas para actividades concretas.

Evidentemente todos los fondos comentados no han podido cubrir los aproximadamente 25.000 euros que ha supuesto esta edición de la Olimpíada Matemática Nacional y por ello ha sido la propia Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) el principal patrocinador. Se han echado en falta diversas ayudas institucionales y de empresas a pesar de tratarse de una actividad de ámbito nacional que promocionaba La Rioja. Los objetivos y el programa así como la relación de participantes fueron ya recogidos en el número 42 de *SUMA*, páginas 135-136.

Difusión

El 21 de mayo, y ante todos los medios informativos de la provincia, a pesar de estar en vísperas de elecciones, se hizo la Rueda de Prensa que hacía público el cartel y las fechas de celebración de la Olimpíada así como el programa de actividades, con la presencia del Director General de Gestión Educativa y del Presidente de **A prima**. Se hizo hincapié, por parte del primero, en la importancia de iniciativas de este tipo y, por parte del segundo, en lo que iba a ser el desarrollo del programa de actividades. En días posteriores se emitieron entrevistas en radio y televisión y se publicaron diversas informaciones en la prensa.

Los carteles, diseñados por la alumna de la Escuela de Artes de Logroño Nuria Martínez Santamaría, fueron enviados a todas las sociedades de la federación. Cada una de ellas, a su vez, hicieron la distribución haciendolos llegar a los centros de sus respectivos ámbitos.

Ya en los días de desarrollo de la Olimpíada el despliegue de Medios fue enorme, con incesantes entrevistas en directo, imágenes de los chicos en las pruebas y varias informaciones en prensa. El Canal Sur de Andalucía grabó el desarrollo de la Olimpíada, imágenes que formarán parte de un documental de esta cadena.

Así mismo, en la página Web *A prima*, de dirección electrónica **http://platea.cnice.mecd.es/~jgalarre/olimpia.htm** se ha estado dando información puntual antes y después del evento.

Desarrollo del programa de actividades,

Los 58 alumnos y alumnas y los 25 profesores y profesoras que los acompañaron pudieron disfrutar de la calurosa acogida de las gentes riojanas. A lo largo de los cinco días de duración de la Olimpíada, además de realizar las pruebas específicas de Matemáticas, se llevaron a cabo actividades lúdico-recreativas, excursiones, visitas turísticas, baños en la piscina y proyecciones de cine. La agenda estaba muy apretada y por tanto son muchos los recuerdos.

Miércoles 25 de junio
Las diversas comitivas fueron llegando desde primera hora de la tarde a la Sede de la Olimpíada tomando posesión de las habitaciones y empezando a conocer a los compañeros. Después de la cena se procedió a realizar el Acto de bienvenida en el Salón de Actos con entrega del programa de la Olimpíada y diversas informaciones.

Durante los días de permanencia en la Residencia hubo una exposición de Fotografía Matemática en los aledaños del Salón de Actos.

Mientras que los chicos y chicas se disponían a descansar tras, en alguno de los casos, un largo viaje, el equipo organizador se reunía con los colaboradores y coordinadores.

Jueves 26 de junio
Sin madrugar mucho, y tras desayunar, nos desplazamos al edificio Científico - Tecnológico de la Universidad de La Rioja para la realización de las pruebas individuales que estuvieron distribuidas en dos sesiones de hora y cuarto con el correspondiente descanso para un ligero almuerzo.

El coordinador de la prueba individual, Rodolfo Larrea, había diseñado una primera prueba en la que había que desarrollar cuatro problemas de distinta índole y en el que se comprobó que los chicos no habían tenido el tiempo suficiente para poder completarlos. La segunda parte constaba de 18 cuestiones tipo test con 5 posibles respuestas y solo una de ellas correcta.

Mientras los chicos seguían comentando los distintos ejercicios, nos acercamos al Ayuntamiento de Logroño, donde nos dio la bienvenida la Concejala de Educación, en el Salón de Plenos, dando paso a una comida ofrecida por el propio Ayuntamiento en el complejo deportivo Las Norias. Precisamente se aprovechó la excelente tarde que hizo para disfrutar de la piscina y, sobre todo, del Taller de Juegos Matemáticos dirigido por Albert Violant.

Cruzamos el río Ebro hasta llegar al casco antiguo logroñés donde los chicos tuvieron sesión de cine y a continuación cena en una bocatería, mientras, los profesores conocían lugares típicos como el Espolón, la calle Portales, en la que se encuentra la catedral de La Redonda, terminando en la calle Laurel para degustar productos de la región.

Tras un día tan intenso nos llevó el autobús a la Residencia para un descanso bien merecido.

Viernes 27 de junio
Madrugando un poco más que la víspera, nos desplazamos a la Rioja Baja, para llevar a cabo una jornada inolvidable, en opinión de los alumnos.

En Calahorra esperaban a la comitiva olímpica en el Polideportivo España. Allí unos actores ataviados con trajes romanos, que nos hacían recordar la historia de la bimilenaria ciudad en la que nos encontrábamos, presentaron la prueba por equipos. Los chicos fueron desafiados con siete enigmas, a los que debían dar solución recorriendo la ciudad. Calahorra estaba engalanada también de época para la ocasión, gracias a la colaboración de la cofradía del Paso Viviente, que puso todos sus medios físicos y humanos a nuestra disposición.

Son de destacar los gráficos de las pruebas diseñados por Andrés Cordón Arnedo que fueron impresos en pergamino.

Los equipos estuvieron formados por cuatro o cinco personas de distintas comunidades estando repartidos los chicos y chicas proporcionalmente en ellos. El tiempo quedó también un poco corto pero la vistosidad y éxito de la prueba fue constatada por todo el mundo. En la comida ofrecida por el Ayuntamiento de Calahorra se hizo entrega de premios a los dos mejores equipos.

Tras el viaje en autobú,s en el que atravesamos diversas localidades de La Rioja Baja, llegamos a Enciso para poder visitar su Museo Paleontológico y un interesante yacimiento de huellas de dinosaurio.

Para premiar de alguna manera a los chicos por su gran trabajo y dentro de un espléndido ambiente, se celebró una fiesta en la Residencia dado que al día siguiente ya no tenían más pruebas de contenido matemático.

Se recogierond espués las cámaras fotográficas. Con ellas los participantes en grupos habían hecho fotografías con elementos matemáticos. Los grupos que se formaron fueron distintos el jueves y viernes, para fomentar de este modo la convivencia entre todos los chicos y chicas.

Sábado 28 de junio

Se dedicó el último día completo a la visita de La Rioja Alta estando por la mañana en el Museo del vino de Haro y Bodegas Bilbaínas de denominación de origen Rioja.

Comimos, invitados por el Ayuntamiento de Nájera, una caldereta -patatas con carne- al aire libre. Descansamos un rato, hicimos las fotos protocolarias de los grupos de las diversas comunidades y visitamos el Monasterio de Santa María la Real de Nájera, con una curiosa visión de la historia del reino de Nájera por parte de la guía.

Más tarde tuvimos una charla con coloquio sobre Astronomía en el centro de la Fundación Caja Rioja de Nájera con el título *Observar el cielo*, impartida por Víctor Lanchares. Esta actividad se completó por la noche, ya en la Residencia, con *Ver las estrellas* donde, con la colaboración de varios miembros de la Agrupación Astronómica Riojana y con dos telescopios prestados por la Casa de las Ciencias de Logroño, se realizó una observación del firmamento.

Domingo 29 de junio

Llegó el último día con mucha pena por parte de la mayoría de los participantes y, antes de dar comienzo a los últimos actos, se pudieron ver las fotografías seleccionadas en el Concurso y sobre todo las premiadas.

Nuestro compañero Pedro José Martínez nos ofreció una charla con el sugerente título: "Érase una vez las Matemáticas... ¡chim pum!" tras la cual se celebró el acto de entrega de obsequios y diplomas a todos los participantes y las menciones especiales a aquellos que destacaron en cada una de las pruebas.

Un grupo de alumnos, en representación de todos los demás, dijo unas palabras de agradecimiento justo antes del mediodía. A esa hora se procedió a la Clausura de la XIV Olimpíada Matemática Nacional. Tras las despedidas de algunas comitivas que debían realizar largo viaje de vuelta, siguió una comida de despedida con asistencia de aproximadamente 130 personas entre chicos y chicas, padres y profesorado.

Actas de las pruebas y premios

El Tribunal Calificador de la Prueba Individual, formado por los profesores Manuel Benito, Emilio Fernández, Rodolfo Larrea, Felix de Miguel y Carmen Santaolalla otorgó Mención Especial por la Primera Parte (desarrollo de cuatro problemas) a los alumnos Pedro Ciller (Castilla–La Mancha), Javier Goñi (País Vasco), Daniel López (Castilla–La Mancha), Adrián Moro (Castilla–León) y Andrés Palazuelos (Cantabria).

Por la Segunda Parte de la Prueba Individual, consistente en la resolución de 18 cuestiones con formato 'test' ,recibieron Mención Especial los alumnos Juan Ansuategui (Comunidad Valenciana), Omar Barco (La Rioja), José Luis Fernández (Castilla–La Mancha), Eduardo García–Junceda (Madrid), Javier Goñi (País Vasco) y Daniel López (Castilla–La Mancha).

Por otra parte, el Tribunal Calificador de la Prueba por Equipos determinó que el Segundo Premio correspondiera al equipo TT-VIR, formado por Mónica Blanco (Cantabria), Eduardo García–Junceda (Madrid), Adrián Moro (Castilla–León) y Francisco Román Noval (Asturias) y el Primer Premio al equipo Tiberio formado por Pedro Ciller (Castilla–La Mancha), Daniel García (La Rioja), Jesús Romero (Andalucía) y Sara Ruiz (Aragón).

Por último, el Jurado del Concurso de Fotografía Matemática, formado por los profesores Jesús Jiménez y Blanca Pascual decidió otorgar el Premio al mejor conjunto de fotografías al grupo formado por Juan Ansuategui (Comunidad Valenciana), Daniel Blanco (Galicia), Trinitario Casanova (Murcia), Mª Teresa Coronado (Andalucía) y Carmen Lucas (Murcia.), mientras que el Premio a la Mejor Fotografía correspondió al grupo formado por Mónica Blanco (Cantabria), Francisco Callejo (Andalucía), José Luis Fernández (Castilla-La Mancha) e Issam Kastite (Marruecos)

El objetivo de la Olimpíada Matemática Nacional no es la competición, ni premios especiales a los ganadores. El mero hecho de representar a su Comunidad Autónoma es suficiente satisfacción para los participantes. Por tanto, prácticamente todos se llevaron los mismos recuerdos: una mochila con un par de camisetas de la Fundación Caja Rioja y Consejo Regulador de la Denominación de Origen Rioja, carpetas de Ibercaja, bolígrafos, insignias (pins)... En la visita a las diferentes localidades riojanas fueron recibiendo material turístico ofrecido por los diversos Ayuntamientos y Oficinas de Turismo. En el Acto de Clausura, con el bien ganado Diploma, se repartió a todos un lote de libros de la editorial SM, una calculadora de la marca Casio y el cuaderno con todas las pruebas de la Olimpíada. ■

ICME 10, 4 al 11 de julio 2004
Copenhague (Dinamarca)

El 10º International Congress on Mathematical Education (congreso Internacional de Educación Matemática) ICME–10 tendrá lugar los días 4 al 11 de julio de 2004, en Copenhague (Dinamarca).

En esta décima edición se proponen 29 grupos de estudio (TSG) sobre temas relacionados conla educación matemática. Algunos títulos son: *Lenguaje y comunicación en educación matemática* (TSG 25); *Enfoques innovativos en la enseñanza de las matemáticas* (TSG 14); varios llevan como título *Investigación y desarrollo en la enseñanza y el aprendizaje de... números y aritmética* (TSG 8), *el álgebra* (TSG 9), *la geometría* (TSG 10), *probabilidad y estadística* (TSG 11), *el cálculo* (TSG 12); *tópicos avanzados de matemáticas* (TSG 13). Habrá también 24 grupos de debates, además de las habituales conferencias plenarias, las presentaciones mediante carteles, a los que hay que añadir las tardes temáticas (TA), talleres (WS) y grupos de experiencias (SEG).

La información correspondiente al último anuncio y a las actividades del ICME-10 está disponible en la red enla dirección: ***www.ICME-10.dk***. Se puede también solicitar información escribiendo a: *icme@congress-consult.com.* En la página *www.ICME-10.dk* se puede realizar la inscripcion en línea y reservar el alojamiento.

La fecha límite para la presentación de trabajos y propuestas de todos los grupos para su posterior estudio es el 1 de enero de 2004.
Las directrices para la presentación de propuestas, están disponibles en la página web del ICME.

NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, Apartado de Correos 19012, 28080 Madrid), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.

2. Los gráficos, diagramas, fotografías y figuras se enviarán impresos en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración. Indíquense los créditos de las fotografías y dibujos.

3. Se enviará también una copia del archivo de texto que contenga el artículo, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quieran incluir en soporte magnético (disco de tres pulgadas y cuarto con formato PC, CDRom o DVDRom). La etiqueta debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda Microsoft Word para Windows o RFT. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF. Para las fotografías se recomienda archivos TIF o BMP y con una definición mínima de 600x600 puntos por pulgada cuadrada.

4. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos no serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.

5. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de entre cinco y diez líneas, que no necesariamente tiene que coincidir con la introducción al artículo. De este resumen se remitirá también su traducción al inglés.

6. Los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede) y el resumen en castellano y en inglés deberán ir escritos en una misma hoja aparte.

7. Al menos un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.

8. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.

9. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo y se incluirán al final del texto.

10. La bibliografía se dispondrá también al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:
    TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma*, n.° 20, 91-98.
    En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
    GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas*, Labor, Barcelona.
    En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
    VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2*, ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

11. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ... supone un gran avance (Hernández, 1992). Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ... según Rico (1993).

12. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como -en caso afirmativo- la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido.

13. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

SUMA

Boletín de suscripción

Tarifas	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	25 €	10 €
Centros	40 €	15 €
Europa	50 €	20 €
Resto del mundo	$ 60 USA	$ 22 USA

Fotocopiar esta hoja y enviar:
por correo a: Revista SUMA. Apartado de correos 19012
E-28080 MADRID
por Fax al: 912 911 879
por correo-e a: suma_administracion@fespm.org

Deseo suscribirme a la revista SUMA:

Nombre y apellidos: NIF/CIF:

Dirección: Teléfono:

Población: CP:

Provincia: País:

Correo electrónico: Fax:

Importe (€)

☐ Suscripción a partir del año (3 números) ________

☐ N.os sueltos ________

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)

☐ Transferencia bancaria (CCC 2085-9981-38-0330066350 ó IBAN ES68 2085 9981 3803 3006 6350)

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista SUMA

☐ Giro postal dirigido a Revista SUMA

Fecha y firma:

Nombre y apellidos:

Código Cuenta Cliente: Entidad: Oficina: DC: Cuenta:

Banco/Caja:

Agencia n.º: Dirección:

Población: Provincia:

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (fecha y firma):

Σ

SUMA.

REVISTA SOBRE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS.

ISSN 1130-488X

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS