

SUMA⁵²



Directores

Inmaculada Fuentes Gil
Francisco Martín Casalderrey
sumadireccion@fespm.org

Administradores

Cristina Torcal Baz
Antonio Alamillo Sánchez
suma_administracion@fespm.org

Consejo de redacción

Santiago Gutiérrez
Antonio Hernández
Margarita Marín
Adolfo Quirós
María Rosario Rivarés
Carmen da Veiga

Consejo Editorial

Serapio García Cuesta
Presidente de la FESPM
Julio Sancho
Emilio Palacián
Ricardo Luengo

Edita

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE
SOCIEDADES DE PROFESORES
DE MATEMÁTICAS (FESPM)

Web

www.revistasuma.es

Diseño de la portada

Javier Alvarino y Jorge Alvarino (foto)

Diseño interior

Raquel Fraguas (NIVOLA)

Maquetación

A. Alamillo y F. Martín

Abstracts

M. Manso de Zúñiga y P. Satrustegui

Revista Suma

Apdo. 19012

E-28080-Madrid

España

Fax: +(34) 912 911 879

Tirada: 6700 ejemplares

Deposito legal: Gr 752-1988

ISSN: 1130-488X

Editorial

3-4

ARTÍCULOS

Aproximaciones de las raíces cuadradas

Joan Miralles de Imperial Llobet y Jordi Deulofeu Piquet

7-14

Una familia de juegos infinitos: caracterización del equilibrio

Juan Carlos Cortés López y Gema Calbo San Juan

15-22

Aplicación de la matemática borrosa a la gestión deportiva

Alfredo Juan Grau Grau

23-31

Los dineros en *El Quijote*

José Ángel Ortega Dato

33-40

Usos educativos del material *Thesaurus* para la enseñanza de las matemáticas

J.M.Diego, M.Fioravanti, M.J.González, R.P. Gallegos y M.J.Señas

41-50

Matemáticas y culturas:

Una relación pendiente de profundizar

Xavier Vilella Miró

51-61

Manifiesto en defensa de las maytemáticas

Ángel Ramírez

141

Una nueva demostración geométrico-algebraica del teorema llamado de Pitagóras

Josep Maria Lamarca

142

POLIEDRO

DESDE LA HISTORIA: En torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. Símbolo del anonimato científico (V)	<i>Carlos Usón y Ángel Ramírez</i>	65-72
JUEGOS: La magia del 9	<i>Grupo Alquerque de Sevilla</i>	73-76
iMATgenes: iMATgenes 25, 26, 27 y última iMATgen	<i>Miquel Albertí</i>	77-86
EL CLIP: <i>Un robot en casa: la lavadora</i>	<i>Claudi Alsina</i>	87-90
HACE...: Lobachevskiy: el Copérnico de la geometría	<i>Santiago Gutiérrez</i>	91-96
EN UN CUADRADO: Construyendo curvas con las manos	<i>Capi Corrales</i>	97-100
DE CABEZA: El problema de Arno Peters, un problema cartográfico	<i>Raúl Ibáñez</i>	101-109
BIBLIOTECA: Mi biblioteca particular. Escaparate.		
1 Fragmentos de un diario de clase.		
2 El país de las mates. 100 problemas de ingenio.		
3 Conexiones matemáticas.		
Pitágoras en Nivola		
<i>F. Corbalán (Coord.), Ángel Ramírez y Juan Pagola</i>		111-121
LITERATURA Y MATEMÁTICAS: Un Misterio en Cambridge	<i>Constantino de la Fuente Martínez</i>	123-127
CINEMATECA: <i>Proof y Numb3rs</i>	<i>José María Sorando Muzás</i>	129-134

ACTIVIDADES DE LA FESPM

XIII JAEM: Primer anuncio	135-138
Relación de Sociedades federadas	62
Normas de Publicación	143
Boletín de suscripción	144

Asesores

Claudi Aguadé Bruix
 Alberto Aizpún López
 José Manuel Arranz San José
 Carmen Azcárate Jiménez
 Javier Bergasa Liberal
 Mercedes Casals Coldecarrera
 Abilio Corchete González
 Juan Carlos Cortés López
 Carlos Duque Gómez
 Inmaculada Fernández Benito
 Constantino de la Fuente Martínez
 José María Gairín Sallán
 Horacio Gutiérrez Álvarez
 Fernando Hernández Guarch
 Luis López García
 Arturo Mandly Manso
 Ángel Marín Martínez
 Onofre Monzo del Olmo
 José A. Mora Sánchez
 Ricardo Moreno Castillo
 Miguel Ángel Moreno Redondo
 M.ª Jesús Palacios de Burgos
 Pascual Pérez Cuenca
 Rafael Pérez Gómez
 Joaquín Pérez Navarro
 Antonio Pérez Sanz
 Luis Puig Mosquera
 Tomás Queralta Llopis
 Encarnación Reyes Iglesias
 Ismael Roldán Castro
 Gabriel Sosa Felipe
 Juan Antonio Trevejo Alonso
 Ana M.ª Trujillo La Roche
 Carlos Usón Villalba

SUMA

*no se identifica necesariamente
 con las opiniones vertidas en las
 colaboraciones firmadas.*

Finaliza un curso y comienza otro nuevo. La función docente, y la discente, es periódica de periodo anual. Y todo se repite aunque nada sea exactamente igual. Las discusiones de todos los años vuelven: Las horas de matemáticas de la ESO no son suficientes; faltan materiales didácticos adecuados; qué matemáticas tenemos que enseñar y cuáles son capaces de aprender nuestros alumnos. En esencia, y mirando hacia atrás —sin ira, por supuesto— reflexionamos como cada año, preguntándonos qué nos deparará el nuevo curso, qué nuevos alumnos y alumnas tendremos, qué cambios habrá que afrontar en nuestra rutina para adaptarnos a ellos.

Las personas del equipo de dirección de SUMA emprendemos el último año de nuestro mandato. Si todo se desarrolla normalmente, en junio de 2007 saldrá el número 55, que será el último de los que coordinaremos. En el verano, durante las JAEM de Granada, se producirá el relevo y, de acuerdo con nuestra estructura federal, SUMA, pasará a ser dirigida por otros colegas y se editará desde algún otro lugar. En noviembre se abrirá la convocatoria para elegir la nueva dirección. Un equipo de personas ilusionadas se hará cargo de la revista, con nuevas ideas para continuarla y transformarla, como se ha hecho ya en todos los relevos anteriores.

En otro orden de cosas se celebrará en agosto en Madrid el CONGRESO INTERNACIONAL DE MATEMÁTICOS (ICM-2006). El horizonte internacional de las matemáticas en España, iniciado precisamente por nuestra Federación con la organización en 1996, en Sevilla, del OCTAVO CONGRESO

INTERNACIONAL DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA ICME-8, *se ensancha con este magno acontecimiento. Desde SUMA deseamos a los organizadores el mayor de los éxitos, en la seguridad de que el suyo será un poco el éxito de todos.*

Publicamos en este número el primer anuncio de las XIII JORNADAS SOBRE EL APRENDIZAJE Y LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS, que se celebrarán en Granada en julio de 2007, organizadas por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Desde que en 1981 tuvieron lugar las primeras, en Barcelona, han pasado muchos años. La historia del movimiento de la renovación didáctica de las matemáticas y, por tanto, la de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas es un poco la historia de estas Jornadas. Animamos a todos los lectores de SUMA a participar en esta nueva convocatoria y a consolidar lo que iniciamos hace ya 25 años. ■



Manuscrito de Pedro Puig Adam

APROXIMACIONES DE LAS RAÍCES CUADRADAS

J. Miralles de Imperial y J. Deulofeu

UNA FAMILIA DE JUEGOS INFINITOS:

CARACTERIZACIÓN DEL EQUILIBRIO

J.C. Cortés y G. Calbo

APLICACIÓN DE LA MATEMÁTICA BORROSA A LA GESTIÓN DEPORTIVA

A.J. Grau

LOS DINEROS EN *EL QUIJOTE*

J.Á. Ortega

USOS EDUCATIVOS DE *THESAURUS*

J.M. Diego, M. Fioravanti,

PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

M.J. González, R.P. Gallegos y M.J. Señas

MATEMÁTICAS Y CULTURAS:

UNA RELACIÓN PENDIENTE DE PROFUNDIZAR

Xavier Vilella Miró

La generalización del uso escolar de las calculadoras ha ayudado a aumentar la confusión de nuestros alumnos entre los números irracionales y sus aproximaciones racionales. La perspectiva histórica y su explotación didáctica pueden ser de gran ayuda para superar estas dificultades. En este artículo se presentan dos métodos de aproximación radicalmente distintos en múltiples aspectos.

The generalization of the scholastic use of the computers has helped to increase this confusion between the irrational numbers and their rational approaches. The historical perspective and its didactic operation can be helpful to surpass these difficulties. In this article two radically different methods of approach are showed.

El número π , por ejemplo. Pues yo no me había planteado nunca cómo... Sabes que es 3,14 pero no sabes de dónde viene. Figueiras (2002)

La cita anterior –transcripción textual de una conversación con una alumna de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Autónoma de Barcelona– nos permite comprobar cómo incluso entre los universitarios es habitual la identificación entre los números irracionales –en este caso π – y sus aproximaciones decimales –en este caso es 3,14.

En este artículo presentaremos algunos ejemplos que permitan ver cómo, a lo largo de la historia, se ha tratado el problema de las aproximaciones racionales de los números irracionales.

Con relación a este problema, estos elementos históricos pueden ayudar a los maestros y profesores en su esfuerzo por evitar las falsas creencias de los alumnos.

De los distintos métodos utilizados a lo largo de la Historia de la Matemática para aproximar irracionales cuadráticos hemos elegido dos especialmente relevantes: las aproximaciones babilónicas, unas de las más antiguas que se conocen, y la caracterización de los irracionales cuadráticos mediante las fracciones continuas ordinarias periódicas, que dieron sus primeros pasos con Bombelli y Cataldi, a caballo entre los siglos XVI y XVII. En ambos casos evitaremos caer en la ten-

tación de sugerir caminos de aplicación directa de estos conocimientos en las aulas de Secundaria o Bachillerato. Sólo pretendemos dar elementos al profesorado que le ayuden en su quehacer cotidiano. Para proporcionar estos elementos nos basamos en referencias históricas, que nos ayudan a comprender las dificultades conceptuales ligadas al desarrollo de las ideas, sin pretender inferir de estos datos explotaciones directas en el aula.

El uso de las calculadoras ha hecho desaparecer de la enseñanza de la Matemática el algoritmo tradicional de *calcular raíces cuadradas*. Apresurémonos a felicitarnos por este hecho, pero no por algunas de sus consecuencias; la falta de tratamiento del problema de las aproximaciones de un irracional puede reforzar todavía más las creencias de los estudiantes descritas al principio de esta introducción, que les lleva a la confusión entre un número irracional y sus aproximaciones.

Joan Miralles de Imperial Llobet

Universitat Pompeu Fabra.

Barcelona

Jordi Deulofeu Piquet

Universitat Autònoma de Barcelona.

Barcelona

Puede trabajarse el concepto de aproximación racional de un irracional utilizando cualquier número irracional, puesto que el concepto es el mismo en todos los casos. Sin embargo, los irracionales cuadráticos permiten gran número de algoritmos de aproximación racional, lo que permite en estos casos determinar aproximaciones, compararlas entre sí y deducir conclusiones –en una palabra, manipular el concepto de aproximación– con mucha mayor facilidad que si tratáramos otros irracionales bien conocidos por nuestros alumnos, como podrían ser los números π o e .

*El uso de las calculadoras ha
hecho desaparecer de la
enseñanza de la Matemática el
algoritmo tradicional de
calcular raíces cuadradas.*

Desgraciadamente, la inmensa mayoría de las ideas y de los procedimientos desarrollados en la Antigüedad se han perdido de manera irremisible. Citaremos un único ejemplo: en su libro *De la medida del círculo* (Ver Eecke, 1960), Arquímedes lleva a su máximo nivel de sofisticación el método de exhaustión de Eudoxo para determinar la acotación de π :

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

En este proceso, y sin más explicación, Arquímedes aproxima $\sqrt{3}$ con el valor

$$\sqrt{3} \approx \frac{1351}{780}$$

que coincide con $\sqrt{3}$ hasta las diezmillonésimas. ¿Cuántas ideas y construcciones habrá detrás de esta aproximación? ¿Cuántas ideas para su explotación didáctica podríamos obtener de sus métodos? Lo único que está claro es que esta precisión no se obtiene por casualidad, aunque desconocemos absolutamente los procedimientos por los que Arquímedes llegó a este resultado.

Las aproximaciones babilónicas

Se han encontrado cálculos de aproximaciones de raíces cuadradas en tablillas babilónicas de una antigüedad al menos de

la época de Hammurabi (1700 A.C.). Probablemente, estas operaciones nacieron de la necesidad de los cálculos trigonométricos relacionados con la elaboración de calendarios para prever los momentos óptimos de la siembra y de la cosecha (Kline, 1972). Esta teoría, sin embargo, no ha sido probada dado lo limitado de nuestro conocimiento de las civilizaciones mesopotámicas.

Su sistema de aproximaciones de los radicales consistía en hallar primero una aproximación por defecto y otra por exceso, para luego hacer la media aritmética de ambas aproximaciones. Veámoslo con un ejemplo traducido a nuestro lenguaje, ya que los babilonios utilizaban un complejo sistema de numeración mixto decimal y sexagesimal. Queremos calcular $\sqrt{13}$. Su parte entera es 3. Entonces, dado que $\sqrt{13}$ no es computable, tomaremos un rectángulo de área 13 y tal que uno de sus lados valga 3, aproximación por defecto de $\sqrt{13}$, y calcularemos el valor del otro lado, que obviamente será una aproximación por exceso:

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{13} \cdot \sqrt{13} = 13 \\ 3 \cdot \frac{13}{3} = 13 \end{array} \right\}$$

Tenemos ya una primera aproximación por defecto, 3, y una por exceso, 13/3. Haciendo la media de ambas obtendremos una nueva aproximación:

$$\frac{1}{2} \left(3 + \frac{13}{3} \right) = 3 + \frac{2}{3}$$

Elevando al cuadrado esta aproximación obtenemos

$$\left(3 + \frac{2}{3} \right)^2 = 13 + \frac{4}{9} > 13$$

Por tanto, si dividimos 13 entre la aproximación anterior obtendremos una aproximación de $\sqrt{13}$ por defecto:

$$\frac{13}{3 + \frac{2}{3}} = 3 + \frac{6}{11}$$

Hallaremos la siguiente aproximación haciendo la media aritmética entre las dos aproximaciones anteriores:

$$\frac{1}{2} \left(3 + \frac{2}{3} + 3 + \frac{6}{11} \right) = 3 + \frac{20}{33}$$

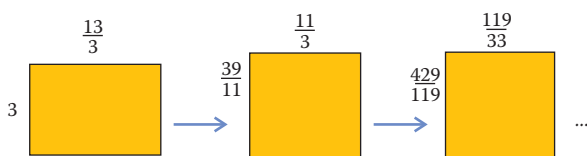
que, como podemos comprobar, es una aproximación por exceso. Continuando este proceso hallaríamos aproximaciones alternativamente por defecto y por exceso:

$$3, 3 + \frac{2}{3}, 3 + \frac{6}{11}, 3 + \frac{20}{33}, 3 + \frac{72}{119}, 3 + \frac{2378}{3927}, \\ 3 + \frac{8574}{14159}, 3 + \frac{33670100}{55602393}, \dots$$

En el Anexo presentamos un pequeño programa informático, elaborado con Maple, que nos da las aproximaciones babilónicas sucesivas de las raíces cuadradas junto con sus aproximaciones decimales. Tanto la elaboración de programas sencillos, como su utilización, pueden colaborar al aprendizaje de estos conceptos por la vía de la reflexión sobre los algoritmos y de la manipulación de los datos numéricos.

Desde el punto de vista geométrico, hallar la raíz cuadrada de un número equivale a determinar el lado de un cuadrado de área dada.

Es especialmente interesante analizar el proceso desde el punto de vista geométrico puesto que la interpretación del mismo es simple: hallar la raíz cuadrada de un número equivale a determinar el lado de un cuadrado de área dada. Así, en el caso de un cuadrado de área 13 se parte de un rectángulo de área 13 y de lados 3 (parte entera de $\sqrt{13}$) y $13/3$. Ahora basta con ir cuadrando progresivamente ese rectángulo, construyendo una familia de rectángulos de área A tales que las sucesivas diferencias entre sus lados sean cada vez menores:



Veamos ahora desde un punto de vista analítico que este proceso es válido en general, es decir, que su aplicación permite hallar aproximaciones sucesivas de cualquier irracional cuadrático de la forma $\sqrt{A}$; una demostración analítica es la siguiente, que dividiremos en tres pasos:

1. Si a es la parte entera de $\sqrt{A}$, entonces

$$\frac{a + \frac{A}{a}}{2}$$

es una aproximación por exceso. En efecto, tenemos que

$$\frac{a + \frac{A}{a}}{2} = \frac{A + a^2}{2a} = \frac{a}{2} + \frac{A}{2a} = a + \frac{A}{2a} - \frac{a}{2} = a + \frac{A - a^2}{2a}$$

Por tanto,

$$\left(\frac{A + a^2}{2a} \right)^2 = \left(a + \frac{A - a^2}{2a} \right)^2 = a^2 + (A - a^2) + \left(\frac{A - a^2}{2a} \right)^2 = \\ = A + \left(\frac{A - a^2}{2a} \right)^2 > A$$

2. Si p es una aproximación por exceso, entonces A/p , siguiente aproximación por defecto, es más fina que p (figura 1). Es decir, si

$$p = \sqrt{A} + k \quad \text{y} \quad p' = A/p = \sqrt{A} - k' \quad k, k' > 0$$

entonces $k > k'$.

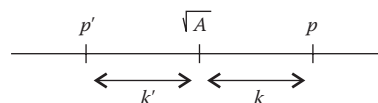


Figura 1. Dos aproximaciones sucesivas de $\sqrt{A}$

En efecto,

$$A = p \cdot p' = (\sqrt{A} + k) \cdot (\sqrt{A} - k') = A + (k - k') \cdot \sqrt{A} - kk'$$

por tanto

$$(k - k') \cdot \sqrt{A} = kk' > 0$$

y queda demostrado que $k > k'$.

3. Si p es una aproximación de $\sqrt{A}$ por exceso, y p' es la siguiente aproximación por defecto, entonces

$$\frac{p+p'}{2}$$

es una aproximación por exceso más fina que p . En efecto, sea

$$\left. \begin{aligned} p &= \sqrt{A} + k \\ p' &= \sqrt{A} - k' \end{aligned} \right\}$$

con $0 < k' < k$. Entonces es inmediato que

$$\frac{p+p'}{2} = \sqrt{A} + \frac{k-k'}{2} > \sqrt{A}$$

ya que $k - k' > 0$. Trivialmente la nueva aproximación por exceso

$$\frac{p+p'}{2}$$

es más fina que la anterior aproximación por exceso, p : Como $p < p'$,

$$\frac{p+p'}{2} < \frac{2p}{2} = p$$

Obsérvese que el método consiste en hallar la media aritmética de los dos lados para obtener un lado del rectángulo siguiente y, a continuación, determinar el otro lado de modo que ambos sean la media geométrica del área A .

Esta demostración puede presentarse también desde un punto de vista geométrico, como veremos a continuación. Pero antes recordemos la construcción geométrica de la raíz cuadrada que aparece en los *Elementos* de Euclides (Heath, 1956), aunque era ya conocida desde mucho antes. Se trata simplemente de construir una circunferencia de diámetro $A+1$ y trazar la perpendicular por el punto P (figura 2):

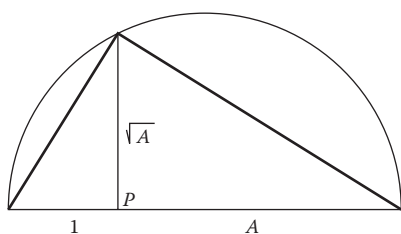


Figura 2. Construcción geométrica de $\sqrt{A}$

Veamos ahora la demostración geométrica:

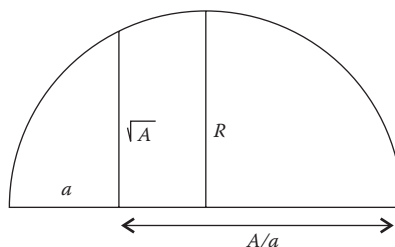


Figura 3. Construcción de $\sqrt{A}$ a partir de a

La figura 3 muestra la construcción de $\sqrt{A}$. El primer paso de la demostración es evidente, ya que

$$\frac{a + \frac{A}{a}}{2} = R > \sqrt{A}$$

El segundo paso consiste en ver que si p es una aproximación por exceso, entonces $p' = A/p$ es una aproximación por defecto más fina que p . Como antes, tenemos que demostrar que si $p = \sqrt{A} + k$ y $p' = \sqrt{A} - k'$, entonces $k > k'$.

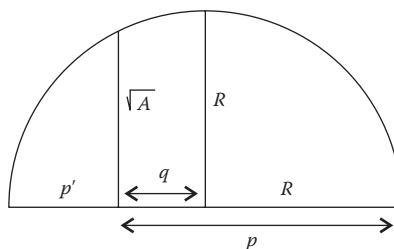


Figura 4. Demostración de $k > k'$

En la figura 4 vemos que

$$p' < \sqrt{A} < R < p.$$

Por tanto tendremos

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{A} - p' &< R - p' \\ p - \sqrt{A} &> p - R = q \end{aligned} \right\}$$

que nos lleva a

$$p - \sqrt{A} > \sqrt{A} - p'$$

que equivale a $k > k'$

El tercer paso de la demostración resulta inmediato ya que

$$\frac{p + p'}{2} = R > \sqrt{A}$$

y la validez general del proceso queda demostrada geométricamente.

Es interesante observar que la demostración geométrica es más clara, más corta y más fácil de validar que la algebraica. Además requiere niveles menores de abstracción. En pocas palabras: es mucho más convincente para nosotros y para nuestros alumnos.

Los historiadores, como Brezinski (1991), sitúan el nacimiento de las fracciones continuas en Bombelli (Bombelli, 1579) y, sobre todo, en Cataldi (Cataldi, 1613).

Si experimentamos un poco con las aproximaciones babilónicas veremos que la convergencia es muy rápida: con un número muy corto de iteraciones obtenemos aproximaciones muy buenas. El problema es que las fracciones que aparecen tienen denominadores –y numeradores– que crecen a gran velocidad. Ello nos lleva al concepto de aproximación óptima: dado un número irracional cualquiera α diremos que p/q es una *aproximación óptima* de α si no existe ninguna fracción con denominador menor o igual que q que aproxime α mejor que p/q :

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \left| \alpha - \frac{\bar{p}}{\bar{q}} \right| \quad \forall \bar{q} < q$$

Las aproximaciones babilónicas no son óptimas, tal como se verá con sólo compararlas con las obtenidas a partir de las fracciones continuas; en cambio, las aproximaciones por fracciones continuas que veremos a continuación siempre lo son (Olds, 1963).

Las aproximaciones irracionales por fracciones continuas

Los historiadores, como Brezinski (1991), sitúan el nacimiento de las fracciones continuas en Bombelli (Bombelli, 1579) y, sobre todo, en Cataldi (Cataldi, 1613). Bombelli utiliza por vez primera procedimientos algebraicos para aproximar raíces (Miralles de I., 2000), con lo que ello supone de simplificación mental. Pocos años después será Cataldi quien utilizará por primera vez una notación similar a la moderna para indicar las fracciones continuas, además de presentar algunas aplicaciones –puede seguirse un completo estudio del libro de Cataldi en Maracchia (1979)–. Sin embargo, tendremos que esperar a Euler (1748) para contemplar una teoría de las fracciones continuas en el contexto de la Teoría de Números, contexto en el que las fracciones continuas acabarán por caracterizar los números irracionales. Para una iniciación al estudio de las fracciones continuas se puede consultar Olds (1963).

Llamamos fracción continua unitaria ordinaria (a partir de ahora, fracción continua) a toda expresión de la forma:

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\dots}}}$$

donde $a_i = 1, 2, \dots$ son enteros no negativos. Es evidente que, mediante el algoritmo de Euclides, todo número racional positivo se expresa de manera única como fracción continua finita, y que toda fracción continua finita corresponde a un número racional. En consecuencia, todo número irracional se expresa como fracción continua infinita. Lo curioso del caso es que, como veremos, los irracionales cuadráticos se expresan como fracción continua periódica, lo que convierte la expresión en fracción continua de los números en una forma de caracterización de los mismos.

Vamos ahora a construir un algoritmo que nos permita conocer la fracción continua correspondiente a un irracional cuadrático. Para ello necesitaremos algunas definiciones:

Definición 1: Dado el número

$$\alpha = \frac{A + \sqrt{n}}{B}$$

donde A, B son enteros y n es entero positivo, diremos que α es *reducido* si verifica las siguientes condiciones: $\alpha > 1$ y

$$\alpha' = \frac{A - \sqrt{n}}{B}$$

verifica que $-1 < \alpha' < 0$.

Además, para asegurar que el proceso recursivo del algoritmo es finito, exigiremos que $n - A^2$ sea divisible por B . Ello no supone ninguna pérdida de generalidad ya que, en caso de no verificarse, bastará con poner:

$$\alpha = \frac{A + \sqrt{n}}{B} = \frac{AB + \sqrt{B^2 n}}{B^2} = \frac{A' + \sqrt{n'}}{B'}$$

Ahora tendremos que

$$n' - A'^2 = B^2 n - A^2 B^2 = B^2 (n - A^2)$$

es divisible por $B' = B^2$.

Definición 2: Llamaremos *transformado de α* , y lo indicaremos por α' , al número tal que

$$\alpha = p + \frac{1}{\alpha'}$$

donde p es la parte entera de α .

Definición 3: Llamaremos *coordenadas de α* al par (A, B) .

Bajo estas condiciones se puede demostrar (Miralles de I., 2000) que:

1. El transformado de α siempre tiene coordenadas enteras y verifican la restricción indicada.
2. El número de coordenadas que hacen que α sea reducido es finito.
3. Si α es reducido, entonces su transformado α' también lo es.

Estas consideraciones nos permiten asegurar la corrección del algoritmo que presentamos a continuación. Por ejemplo: queremos expresar $\sqrt{2}$ en fracción continua. Como $\sqrt{2}$ no es reducido, tomaremos $1 + \sqrt{2}$:

$$\alpha = 1 + \sqrt{2} = 2 + \frac{1}{\alpha_1} \rightarrow \frac{1}{\alpha_1} = \sqrt{2} - 1 \rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 1 + \sqrt{2}.$$

En este caso hemos obtenido α en un solo paso. Por tanto tenemos:

$$1 + \sqrt{2} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}$$

y ya hemos obtenido la expresión de $\sqrt{2}$ como fracción continua:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}$$

Veamos un ejemplo un poco más complejo: la expresión de $\sqrt{13}$ en fracción continua.

*Las aproximaciones
babilónicas no son óptimas
mientras que las
aproximaciones por
fracciones siempre lo son.*

Olds

Paso 1: tomaremos $\alpha = 3 + \sqrt{13}$, que es reducido. Su parte entera es 6.

Paso 2:

$$\begin{aligned} \alpha = 3 + \sqrt{13} &= 6 + \frac{1}{\alpha_1} \rightarrow \frac{1}{\alpha_1} = \sqrt{13} - 3 \rightarrow \\ \rightarrow \alpha_1 &= \frac{1}{\sqrt{13} - 3} = \frac{3 + \sqrt{13}}{4} \end{aligned}$$

Paso 3:

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \frac{3 + \sqrt{13}}{4} &= 1 + \frac{1}{\alpha_2} \rightarrow \frac{1}{\alpha_2} = \frac{\sqrt{13} - 1}{4} \rightarrow \\ \rightarrow \alpha_2 &= \frac{4}{\sqrt{13} - 1} = \frac{1 + \sqrt{13}}{3} \end{aligned}$$

Paso 4:

$$\begin{aligned} \alpha_2 = \frac{1 + \sqrt{13}}{3} &= 1 + \frac{1}{\alpha_3} \rightarrow \frac{1}{\alpha_3} = \frac{\sqrt{13} - 2}{3} \rightarrow \\ \rightarrow \alpha_3 &= \frac{3}{\sqrt{13} - 2} = \frac{2 + \sqrt{13}}{3} \end{aligned}$$

Paso 5:

$$\alpha_3 = \frac{2+\sqrt{13}}{3} = 1 + \frac{1}{\alpha_4} \rightarrow \frac{1}{\alpha_4} = \frac{\sqrt{13}-1}{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow \alpha_4 = \frac{3}{\sqrt{13}-1} = \frac{1+\sqrt{13}}{4}$$

Paso 6:

$$\alpha_4 = \frac{1+\sqrt{13}}{4} = 1 + \frac{1}{\alpha_5} \rightarrow \frac{1}{\alpha_5} = \frac{\sqrt{13}-3}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow \alpha_5 = \frac{4}{\sqrt{13}-3} = 3 + \sqrt{13} = \alpha$$

En consecuencia tendremos que:

$$\sqrt{13} = \alpha - 3 = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}$$

Las aproximaciones de los irracionales por fracciones continuas son todas óptimas, en el sentido que hemos definido más arriba. Es un interesante ejercicio el comparar las aproximaciones babilónicas con estas últimas: comprobamos inmediatamente que los denominadores ahora obtenidos son mucho menores que los anteriores. En el caso de $\sqrt{13}$, por ejemplo, ahora obtenemos lo siguiente:

$$3 + \frac{1}{2}, 3 + \frac{2}{3}, 3 + \frac{3}{5}, 3 + \frac{20}{33}, 3 + \frac{23}{38}, 3 + \frac{43}{71}, 3 + \frac{66}{109}, 3 + \frac{109}{180}, \dots$$

cuya simplicidad no tiene comparación con las aproximaciones de los babilonios, aunque la convergencia de éstas es mucho más lenta.

Si deseamos utilizar el programa Maple para determinar fracciones continuas basta con cargar el paquete numtheory y utilizar la instrucción cfrac. La sintaxis es la siguiente: para obtener las 6 primeras fracciones de $\sqrt{13}$ escribiremos

`cfrac(sqrt(13),6)`

Comentario final

Conviene hacer notar que, en este aspecto como en tantos otros, los obstáculos del aprendizaje se corresponden con obstáculos de tipo epistemológico. Nuestros alumnos aceptan sin rechistar expresiones como $\sqrt{2}$ es 1,4 o π es 3,14, pero se revolverán en sus pupitres si decimos π es 3, porque 3 es un número y π es otro número distinto mientras que cuesta mucho más pensar que 3,14 es un número tan respetable como 3, o como π . El uso acrítico de las calculadoras puede contribuir a agravar este problema: cuando utilizamos una calculadora para calcular un irracional la respuesta es un racional, y al no ver los procesos lógicos se tiende a ver la respuesta como la solución, y no como una aproximación. Un camino de superación de estos obstáculos puede ser la utilización de distintos métodos para la determinación de aproximaciones de números irracionales, lo cual nos permitirá distinguir el número de sus distintas aproximaciones.

La generalización del uso de calculadoras ha supuesto la desaparición escolar de los antiguos algoritmos de cálculo de raíces cuadradas a pesar de que el concepto de raíz cuadrada y de sus aproximaciones sea necesario para la educación matemática.

La generalización del uso de calculadoras ha supuesto la desaparición escolar de los antiguos algoritmos de cálculo de raíces cuadradas, lo que supone una liberación para la mayoría de los escolares. Sin embargo, el concepto de raíz cuadrada y de sus aproximaciones es necesario para la educación matemática, con independencia de su cálculo, y en el presente artículo hemos mostrado elementos para la profundización de dicho concepto.

El trabajo que hemos expuesto permite introducir el concepto de aproximación en distintos niveles didácticos: un primer nivel consiste en conocerlo y aplicarlo para determinar aproximaciones de raíces cuadradas. En un segundo nivel se trata de relacionar el concepto de raíz cuadrada con elementos de la geometría, en el caso de aquellos métodos que tengan significado geométrico. En un tercer nivel se pueden utilizar procedimientos analíticos para demostrar la corrección general de cada método de aproximación. Estos niveles se relacionan con los distintos niveles de rigor deductivo, lo que nos permite trabajar el cálculo de aproximaciones de raíces cuadradas con alumnos de distintas edades.

Anexo: Programa de Maple para las aproximaciones babilónicas

El programa es el siguiente:

<pre>apbab:=proc(n,r) local s,t,e,m,g,f,k,ap,ep,lista,lista2; lista:=NULL;k:=0;lista2:=NULL;</pre>	→	Declaración de variables
<pre>s:=sqrt(n);t:=evalf(s);e:=floor(t);f:=e; m:=(n+e^2)/(2*e)-f; ap:=sqrt(n)-f-m;ep:=evalf(ap,20); lista:=lista,m;lista2:=lista2,ep;</pre>	→	Determinación de la primera aproximación
<pre>while k<r-1 do g:=n/(m+f)-f;ap:=sqrt(n)-f-g;ep:=evalf(ap,20); lista:=lista,g;lista2:=lista2,ep;k:=k+1; if k<r-1 then m:=(m+g)/2;ap:=sqrt(n)-f-m;ep:=evalf(ap,20); lista:=lista,m;lista2:=lista2,ep;k:=k+1;fi;od;</pre>	→	Determinación de las demás aproximaciones
<pre>print(lista); print('error, con 20 decimales:'); print(lista2); end;</pre>	→	Output

Por ejemplo, el *output* que resulta de introducir *apbab(13,5)* es:

> **apbab(13,5);**

```

      20    72    2378
2/3, 6/11, —, —, —
      33   119  3927
```

error, con 20 decimales:

-.0611153912026773736, .0600967300094438386, -.0005093305966167675, 0005092586572666040, -.359696750817 10⁻⁷ ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- | | |
|--|--|
| BOMBELLI, R. (1579): <i>L'Algebra parte maggiore dell'aritmetica divisa in tre libri</i> , 2ª edición, Bologna. | KLINE, M. (1972): <i>El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días</i> , I. Alianza Universidad, Madrid. |
| BREZINSKI, C. (1991): <i>History of continued fractions and Padé approximants</i> , Springer-Verlag, Berlin. | MARACCHIA, S. (1979): <i>Da Cardano a Galois. Momenti di storia dell'Algebra</i> , Feltrinelli, Milano. |
| CATALDI, P.A. (1613): <i>Trattato del modo brevissimo di trovare la radice...</i> , B. Cocchi, Bologna. | MIRALLES DE I., J. (2000): <i>Sobre l'evolució històrica del concepte de nombre. Impacte didàctic i algunes propostes concretes</i> , tesis doctoral UAB, Barcelona. |
| HEATH, T. (1956): <i>The thirteen books of Euclid's Elements</i> (3 vol.), Dover Publications, New York. | OLDS, C.D. (1963): <i>Continued fractions</i> , Mathematical Association of America, Yale. |
| EULER, L. (1748): <i>Introductio in analysin infinitorum</i> , Lausanne, Traducción inglesa: (1988) <i>Introduction to analysis of infinite</i> , Springer-Verlag, New York. | VER EECKE, P. (1960): <i>Les oeuvres complètes d'Archimède</i> , Vaillant-Carmanne, Paris. |
| FIGUEIRAS, L. (2002): <i>Historia, matemáticas y realidad. El caso de la medida en la formación matemática de futuros maestros</i> , tesis doctoral UAB, Barcelona. | |

Una familia de juegos infinitos: caracterización del equilibrio

En este artículo se estudia una familia de juegos infinitos y se caracteriza, en dos sentidos diferentes, cuándo se da el equilibrio. El trabajo está escrito para ser aprovechado directamente en el aula, por eso se realiza el estudio desde casos sencillos y particulares y se conduce al lector hacia una primera generalización. Obtenida la primera solución general, se discute su aplicabilidad real y se propone otra generalización, diferente a la primera, en consonancia con la realidad. Esta segunda generalización requiere de la introducción del concepto de apuesta y de la caracterización general de juego justo o equilibrado.

In this article we study a family of infinite games and its equilibrium characterization, in two different senses. The work is written to be taken advantage directly in the classroom, because the study is realized from simple and particular cases and one leads the reader towards the first generalization. Once obtained the first general solution, its application is discussed and one proposes another generalization, differently from the first one, in agreement with the reality up. This second generalization requires the introduction of the concept of bet and of the general characterization of just or balanced game.

Los juegos han formado parte de la vida del hombre desde tiempos inmemoriales. Esto ha sido así porque el hombre se ha sentido atraído y fascinado tanto por la componente lúdica como por el desafío intelectual que siempre posee cualquier tipo de juego. Si buscamos los juegos en nuestras horas de ocio, entonces, ¿por qué ignorar (e incluso despreciar) los juegos en la vida académica? Tal vez algunos docentes estarán pensando que esto es exagerado, pero repasemos nuestras programaciones (fuera de asignaturas singulares como Taller de Matemáticas). ¿Cuántas de ellas contienen siquiera un epígrafe dedicado al estudio de juegos? ¿Y al estudio de su equilibrio o equidad? Al menos las unidades didácticas de azar y probabilidad deberían detenerse a realizar dicho estudio para juegos sencillos.

*El hombre se ha sentido atraído
y fascinado tanto por la
componente lúdica como por el
desafío intelectual que siempre
posee cualquier tipo de juego.*

El objetivo de este trabajo es, utilizando matemáticas elementales propias de un curso de bachillerato, analizar la equidad

de una familia de juegos caracterizados por las siguientes reglas:

R1: Tratarse de juegos que en principio pueden durar un tiempo infinito y consistentes en alcanzar un objetivo común para todos los participantes, que una vez alcanzado por un jugador se produce el fin del juego.

R2: Los jugadores (en un número finito, pero arbitrario) participan según un cierto orden preestablecido.

R3: El resultado de la participación del jugador i -ésimo no influye en el resultado del resto de los jugadores.

Ejemplos de este tipo de juegos son muy variados. El más sencillo es el torneo consistente en hacer blanco en una diana, a la cual, por turno, lanzan los participantes. Hay muchos más juegos identificables directamente con estas reglas, y otros, como por ejemplo el parchís, que en una de sus fases puede

Juan Carlos Cortés López

Universidad politécnica de Valencia
Valencia

Gema Calbo Sanjuán

IES Els Evols
Lalcúdia. Valencia

convertirse en un juego de la familia que acabamos de describir. En efecto, si jugando con un dado cúbico, los cuatro (o menos) jugadores del parchís se sitúan con su última ficha en alguna de las cinco últimas casillas de la llegada, entonces comienza un juego como el descrito bajo las reglas R1-R3, donde, si no consideramos el privilegio que puede suponer poseer un turno por delante de otro rival, todos los jugadores tienen la misma probabilidad de ganar: 1/6. Obsérvese que en el caso del lanzamiento a la diana, las probabilidades de acierto de cada jugador no tienen por qué ser iguales ya que dependen de la destreza de cada competidor. Además el turno establecido a priori también puede arrojar ventajas. Estas casuísticas y otras serán estudiadas en este trabajo, para caracterizar cuándo un juego regido por las reglas anteriores es equilibrado, y cómo podemos introducir las condiciones deseables de equilibrio mediante la posibilidad de apostar cantidades diferentes.

Lo que sigue aborda el estudio mencionado y está escrito de forma que pueda ser aprovechado en el aula. En este sentido, primero analizaremos algunos casos sencillos y posteriormente motivaremos y resolveremos diferentes generalizaciones del problema. La primera generalización será puramente matemática y en ese sentido es muy natural. Llevada al aula proporciona una situación donde poner en práctica el proceso de generalización. El análisis de su validez práctica debe arrojar una interesante discusión, que conduzca a una generalización diferente y más realista. Para terminar, y con el objeto de proporcionar una metodología de implantación en aula de las ideas desarrolladas, y dado que en muchas situaciones puede no resultar adecuado utilizar la idea de apuesta, hemos ideado un estudio de equilibrio basado en un juego que se desarrolla con dados platónicos.

Estudio de los primeros casos particulares

Para fijar ideas, consideremos el caso particular en que dos jugadores, A y B , lanzan a un blanco según el orden establecido (regla R2): $A - B - A - B - A - \dots$, i.e., primero lanza A , y si falla, luego lanzará B (en caso contrario, el juego habrá acabado y el ganador será A), si falla, después lanzará A (en otro caso, se habrá acabado el juego, siendo B el vencedor), y así sucesivamente. Teóricamente, si ambos jugadores van fallando, el juego puede continuar indefinidamente (regla R1). Si denotamos por $p_A \in (0, 1)$, ($q_A = 1 - p_A$) y q_B las probabilidades de que A acierte (falle) y B falle en un lanzamiento, respectivamente, y por $P(A)$ la probabilidad de que A gane el juego, entonces utilizando la propiedad de aditividad de las probabilidades de la unión de sucesos disjuntos, así como la independencia de cada uno de los sucesos descriptores (al no influir el resultado del lanzamiento de un jugador en el resultado del lanzamiento de otro jugador, i.e., se satisface la regla R3), se tiene

$$P(A) = \underbrace{p_A}_{(1)} + \underbrace{q_A q_B p_A}_{(2)} + \underbrace{(q_A q_B)^2 p_A}_{(3)} + \dots \quad (1)$$

obsérvese que en la expresión anterior:

- (1): indica que A acierta en su primer lanzamiento y el juego se acaba.
- (2): indica que A y B fallan en su primer lanzamiento y A acierta en su segundo lanzamiento, con lo que se concluye el juego.
- (3): indica que ambos jugadores fallan en las dos primeras rondas y en su tercer lanzamiento A acierta, finalizando el juego.

$P(A)$ puede calcularse desde (1), al tratarse de una progresión geométrica de razón $q_A q_B \in (0, 1)$ y semilla p_A

$$P(A) = \frac{p_A}{1 - q_A q_B} \quad (2)$$

Para calcular la probabilidad $P(B)$, de que B gane el juego, no es necesario plantear y sumar la correspondiente serie geométrica, a saber,

$$P(B) = q_A p_B + q_A q_B q_A p_B + (q_A q_B)^2 q_A p_B + \dots \quad (3)$$

ya que, como (en tiempo infinito) alguno de ambos jugadores debe ganar, se cumplirá

$$P(B) = 1 - P(A) \quad (4)$$

sustituyendo (2) en (4), y simplificando

$$P(B) = \frac{q_A p_B}{1 - q_A q_B} \quad (5)$$

tal y como puede comprobarse sumando la serie geométrica de razón $q_A q_B$ y término inicial $q_A p_B$, dada en (3).

Dado que A es quien empieza la ronda, a priori, la intuición nos indica que A tendrá ventaja sobre B . ¿O no? Pero la intuición también nos indica que si A es peor tirador que B , puede que no haya tal ventaja. ¿Cuánto mejor jugador debe ser B para que este juego sea justo, i.e., para que ambos tengan la misma probabilidad de ganar?

Es claro por (4) que basta exigir que $P(A) = 0,5$, por lo que de (2) se tiene

$$P(A) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{p_A}{1 - q_A q_B} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow p_B - p_A = p_B p_A \quad (6)$$

Obsérvese que la última relación está en consonancia con nuestro sentido común: se debe cumplir que $p_B > p_A$ (en caso contrario llegaríamos a un absurdo, al obtener probabilidades negativas). Finalmente de (6) se concluye

$$p_B = \frac{p_A}{1 - p_A} \quad (7)$$

Si asociamos a (7) la función

$$f(x) = \frac{x}{1-x}$$

sobre el dominio $x \in (0, 1)$, obtendremos algunas conclusiones más. En efecto, como

$$f(0) = 0; f'(x) = (1-x)^{-2} > 0; \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

para que $p_B \in (0, 1)$, se debe tener que $p_A \in (0, 1/2)$ (véase figura 1).

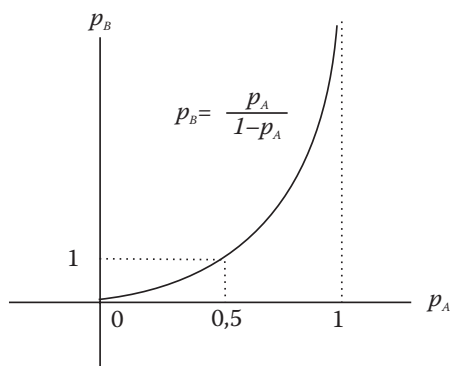


Figura 1. El problema para dos jugadores

Resumiendo, para que este juego de dos jugadores sea justo, debemos establecer el orden $A - B - A - B - A - \dots$, siendo A el peor tirador, pero además las probabilidades p_A y p_B de acierto de ambos jugadores deben seguir la siguiente relación

$$p_B = \frac{p_A}{1 - p_A} \quad \text{siendo} \quad p_A \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad (9)$$

En la tabla 1 se han generado valores racionales, según la relación (9).

p_A	p_B
$1/10=9/90$	$1/9=10/90$
$2/10=4/20$	$1/4=5/20$
$3/10=21/70$	$3/7=30/70$
$4/10=12/30$	$2/3=20/30$

Tabla 1. Algunos valores de p_A y p_B

Analicemos ahora el caso en que el juego se desarrolla con tres jugadores A, B y C , según el orden $A-B-C-A-B-C-A-\dots$

Utilizando la correspondiente notación introducida en el caso de dos jugadores se tiene

$$\begin{aligned} P(A) &= p_A + q_A q_B q_C p_A + (q_A q_B q_C)^2 p_A + \dots = \\ &= \frac{p_A}{1 - q_A q_B q_C} \quad (10) \end{aligned}$$

Para proceder al cálculo de $P(B)$ no es necesario plantear la serie geométrica correspondiente

$$P(B) = q_A p_B + q_A q_B q_C q_A p_B + (q_A q_B q_C)^2 q_A p_B + \dots$$

ya que B ganará cuando A haya fallado en su primer lanzamiento (lo cual sucede con probabilidad q_A), y una vez esto ha sucedido, el problema es el mismo que el resuelto para A , i.e., es como si empezase el juego y fuese B el primero en lanzar, con lo que su probabilidad de ganar será la misma que la hallada en (10), pero sustituyendo p_A por p_B , es decir,

$$P(B) = q_A \frac{p_B}{1 - q_A q_B q_C} = \frac{q_A p_B}{1 - q_A q_B q_C} \quad (11)$$

Finalmente, como es seguro que alguno de los tres jugadores ganará,

$$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = \frac{q_A q_B q_C}{1 - q_A q_B q_C} \quad (12)$$

Para que el juego sea justo los tres jugadores deben tener la misma probabilidad de ganar (y de perder) y debe valer $1/3$. Para que esto se satisfaga hay que exigir de (10) y (11)

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_A}{1 - q_A q_B q_C} &= \frac{1}{3} \\ \frac{q_A p_B}{1 - q_A q_B q_C} &= \frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

pues así, se tendrá también que $P(C) = 1/3$.

De (13) se deduce

$$\left. \begin{aligned} 3p_A &= 1 - q_A q_B q_C \\ 3q_A p_B &= 1 - q_A q_B q_C \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow 3p_A = 3q_A p_B \Rightarrow p_B = \frac{p_A}{1 - p_A} \quad (14)$$

como era lógico esperar: para que el juego sea justo para tres jugadores, en primer lugar debe serlo comparando el primer jugador con el segundo, y se ha visto antes que se debe cumplir (7), que es precisamente la condición deducida en (14). Un razonamiento intuitivo análogo nos conduce a que

$$p_C = \frac{p_B}{1 - p_B} \quad (15)$$

para que el juego sea justo entre los jugadores B y C (y por transitividad entre los tres jugadores A , B y C). La condición (15) se deduce matemáticamente de igualar (11) y (12). También de (14) y (15) se tiene la relación entre las probabilidades de acierto de A y C :

$$p_C = \frac{p_A}{1 - 2p_A} \quad (16)$$

Como veremos más adelante, el factor 2 en (16) puede relacionarse con el orden relativo entre los jugadores A y C establecido en los turnos de tiro.

Como en el caso de dos jugadores, todavía debemos de añadir algunas condiciones más para que todas las deducciones anteriores tengan un sentido matemático correcto. Sin embargo, primero observemos que como en el caso de dos jugadores, el turno $A - B - C$ debe estar dado por el orden de peor jugador a mejor jugador, tal y como nos indica no sólo la intuición, sino también (14) y (15). En efecto, veámoslo desde (15), por ejemplo:

$$\begin{aligned} p_C &= \frac{p_B}{1 - p_B} \Rightarrow p_B = (1 - p_B) p_C \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{q_B = 1 - p_B \in]0, 1[\} \Rightarrow p_B < p_C \quad (17) \end{aligned}$$

Falta por determinar los intervalos permitidos para la variación de p_A y p_B , para que estén bien definidas las relaciones (14) y (15). Por el mismo razonamiento que en el caso de dos jugadores

$$\text{si } p_B \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow p_C \in (0, 1) \quad (18)$$

y apoyándonos en (7) se tendrá

$$\text{si } p_A \in \left(0, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow p_B \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad (19)$$

Resumiendo, para el caso de tres jugadores A , B y C , el turno debe ordenarse de peor a mejor jugador, digamos, $A-B-C$, teniendo las probabilidades p_A , p_B y p_C de acierto de cada jugador la siguiente relación

$$\begin{aligned} p_B &= \frac{p_A}{1 - p_A}, p_C = \frac{p_B}{1 - p_B} \quad \text{donde} \\ p_A &\in \left(0, \frac{1}{3}\right), p_B \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ y } p_C \in (0, 1) \quad (20) \end{aligned}$$

En la tabla 2 se han generado distintos valores racionales según las condiciones dadas en (20).

p_A	p_B	p_C
$1/10=36/360$	$1/9=40/360$	$1/8=45/360$
$2/10=12/60$	$1/4=15/60$	$1/3=20/60$
$3/10=42/140$	$3/7=60/140$	$3/4=105/140$

Tabla 2. Algunos valores de p_A , p_B y p_C

El caso general

Abordamos ahora el caso general del problema introducido, es decir, un torneo de N jugadores $A_1, A_2, \dots, A_N$ que compiten (según el orden $A_1 - A_2 \dots - A_N - A_1 \dots$) por hacer blanco en una diana, siendo $p_1, p_2, \dots, p_N$ las probabilidades respectivas de acertar en un lanzamiento cualquiera ($q_i = 1 - p_i$ será

entonces la probabilidad de fallar un lanzamiento para cada jugador A_i con $1 \leq i \leq N$). Como antes denotaremos por $P(A_i)$ $1 \leq i \leq N$, la probabilidad de que gane el jugador A_i . A continuación estudiaremos bajo qué condiciones el juego así planteado es equilibrado. El análisis que sigue es una extensión del realizado antes para $N = 2$ y $N = 3$. Si denotamos por

$$r = q_1 \cdot \dots \cdot q_N = \prod_{i=1}^N q_i \quad (21)$$

entonces

$$\left. \begin{aligned} P(A_1) &= p_1 + r p_1 + r^2 p_1 + \dots = \frac{p_1}{1-r} \\ P(A_2) &= q_1 \frac{p_2}{1-r} \\ P(A_3) &= q_1 q_2 \frac{p_3}{1-r} \\ \vdots &\quad \quad \quad \vdots \\ P(A_N) &= q_1 \cdot \dots \cdot q_{N-1} \frac{p_N}{1-r} \end{aligned} \right\}$$

es decir,

$$P(A_i) = \frac{p_i}{1-r} \prod_{j=1}^{i-1} q_j, \quad 1 \leq i \leq N \quad (22)$$

Para que el juego sea justo,

$$P(A_i) = \frac{1}{N}, \quad \forall i: 1 \leq i \leq N \quad (23)$$

Imponiendo la condición (23) en (22) se tiene

$$P(A_i) = \frac{p_i}{1-r} \prod_{j=1}^{i-1} q_j = \frac{p_{i+1}}{1-r} \prod_{j=1}^i q_j = P(A_{i+1}), \quad 1 \leq i \leq N-1$$

y simplificando (y trasladando una unidad el índice)

$$p_i = \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} = \frac{p_{i-1}}{1-p_{i-1}}, \quad \forall i: 2 \leq i \leq N \quad (24)$$

que corresponde para $N = 2$ a la relación (7) y para $N = 3$ a las relaciones (14) y (15). Obsérvese que como en (16) podemos establecer la expresión que relaciona p_i y p_1 ,

$$\begin{aligned} p_i &\stackrel{(24)}{=} \frac{p_{i-1}}{1-p_{i-1}} = \frac{\frac{p_{i-2}}{1-p_{i-2}}}{1-\frac{p_{i-2}}{1-p_{i-2}}} = \frac{p_{i-2}}{1-2p_{i-2}} \stackrel{(24)}{=} \frac{\frac{p_{i-3}}{1-p_{i-3}}}{1-2\frac{p_{i-3}}{1-p_{i-3}}} = \\ &= \frac{p_{i-3}}{1-3p_{i-3}} = \dots = \frac{p_1}{1-(i-1)p_1} \end{aligned}$$

Para $N = 2$ e $i = 3$, esta última expresión equivale a (16). Por lo tanto, existe una expresión sencilla entre la relación que deben seguir las probabilidades de hacer diana en un lanzamiento concreto del jugador que tira en la i -ésima posición y el que tira en primer lugar (que es el peor jugador). Y en general, también se puede establecer dicha relación entre dos jugadores cualesquiera del torneo.

Por un argumento análogo al realizado para deducir los intervalos de variación de p_A , p_B y p_C en (18) y (19) se tiene

$$\begin{aligned} \text{si } p_1 \in \left(0, \frac{1}{N}\right) &\Rightarrow p_2 \in \left(0, \frac{1}{N-1}\right) \Rightarrow \dots \Rightarrow \\ \Rightarrow p_i \in \left(0, \frac{1}{N-i+1}\right) &\Rightarrow \dots \Rightarrow p_N \in (0,1) \quad (25) \end{aligned}$$

Nadie jugaría con un jugador claramente mejor si, a cambio, no ve compensado el riesgo de perder su apuesta con una atractiva cantidad de dinero mayor que la que arriesga.

Una generalización distinta, pero más realista

El estudio realizado hasta el momento tiene un sabor muy matemático, y en ese sentido creemos que tiene su interés, pero es poco práctico desde el punto de vista de la realidad. En efecto, si queremos que un juego como el descrito sea justo, no podemos preestablecer las probabilidades que deben tener los lanzadores para poder jugar, porque su *puntería* es una cualidad que nos viene dada por la pericia de cada jugador, por lo que no es realista suponer que las condiciones (24) junto a (25) las vayan a cumplir los participantes asistentes a la convocatoria de un torneo que pretendemos sea equilibrado. ¿Cómo adaptarnos a esta nueva situación?

La respuesta natural la encontramos introduciendo el concepto de apuesta. En efecto, asignadas las probabilidades p_i con $1 \leq i \leq N$ (a partir de los datos históricos de los torneos

donde ha participado cada jugador) éstas se deben ponderar con una cierta cantidad d_i , $1 \leq i \leq N$, que apostará cada jugador para compensar sus diferencias de puntería (nadie jugaría con un jugador claramente mejor si, a cambio, no ve compensado el riesgo de perder su apuesta con una atractiva cantidad de dinero mayor que la que arriesga). Quien tenga más puntería debería apostar más (es decir, arriesgar más) al tener a priori mayores posibilidades de ganar. Pero, ¿cuál debe ser el valor de d_i , en cada caso, para que el juego sea justo? Obsérvese que este enfoque sí es realista, porque la cantidad d_i está a nuestro servicio y la podemos elegir antes de comenzar el torneo.

Antes de realizar el estudio, recordemos algunos resultados que utilizaremos posteriormente (véase pág. 17, Cortés, 2001).

Consideremos un juego de apuestas donde sólo se pueden dar los siguientes sucesos: $A_1, A_2, \dots, A_N$ disjuntos dos a dos (es decir $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i, j: 1 \leq i, j \leq N$ o lo que es equivalente, ningún par de estos sucesos puede darse simultáneamente), cada uno de los cuales se produce con probabilidad $P(A_i)$ para $1 \leq i \leq N$ de modo que

$$\sum_{i=1}^N P(A_i) = 1$$

y supongamos que vinculados a cada una de estas ocurrencias A_i , la banca realiza los correspondientes pagos/cobros d_i para $1 \leq i \leq N$, respectivamente. Desde la perspectiva del jugador que apuesta,

$$d_i = \begin{cases} > 0 & \text{si el jugador recibe } d_i \text{ euros al producirse el suceso } A_i \\ = 0 & \text{si el jugador no recibe nada al producirse el suceso } A_i \\ < 0 & \text{si el jugador paga } d_i \text{ euros al producirse el suceso } A_i \end{cases} \quad (26)$$

entonces, la variable aleatoria discreta X que representa la ganancia/pérdida del jugador que apuesta tiene como media

$$E(X) = \sum_{i=1}^N d_i p_i \quad (27)$$

y puede interpretarse como la ganancia/pérdida esperada al apostar en el juego. Así, se tienen las siguientes posibilidades:

$$E(X) \text{ es } \begin{cases} = 0 & \Rightarrow \text{El juego es justo o equilibrado} \\ \neq 0 & \Rightarrow \text{El juego es injusto } \begin{cases} > 0 & \Rightarrow \text{Favorece al jugador} \\ < 0 & \Rightarrow \text{Favorece a la banca} \end{cases} \end{cases} \quad (28)$$

Adaptemos estos resultados a nuestro problema. Denotemos por D el montante total de las apuestas (que se fijará al principio de la competición, como suele hacerse habitualmente)

$$D = \sum_{i=1}^N d_i \quad (29)$$

entonces si G_i , $1 \leq i \leq N$ representa la ganancia/pérdida del jugador i -ésimo para que el juego sea justo se deberá cumplir

$$\begin{aligned} 0 &= E[G_i] = (\text{ganancia}(A_i)) \text{Probab}(\text{ganar } A_i) + \\ &\quad + (\text{pérdida}(A_i)) \text{Probab}(\text{perder } A_i) = \\ &= \left(\sum_{j=1}^N d_j \right) P(A_i) - d_i (1 - P(A_i)) = D P(A_i) - d_i \end{aligned}$$

despejando y sustituyendo el valor $P(A_i)$ calculado en (22), se tiene

$$d_i = D \frac{p_i}{1-r} \quad (30)$$

donde r está dado por (21).

En general, para el jugador i -ésimo se tiene que para que el juego sea justo

$$\begin{aligned} 0 &= E[G_i] = \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N d_j \right) P(A_i) - d_i (1 - P(A_i)) = \\ &= \left(\sum_{j=1}^N d_j \right) P(A_i) - d_i = D P(A_i) - d_i \end{aligned}$$

de donde utilizando (22), se tiene

$$d_i = D \frac{p_i}{1-r} \prod_{j=1}^{i-1} q_j, \quad 1 \leq i \leq N \quad (31)$$

siendo

$$r = \prod_{i=1}^N q_i, \quad q_i = 1 - p_i \quad (32)$$

Por lo tanto, (31) – (32) caracterizan cuándo el juego es equilibrado. Obsérvese que ahora los valores p_i , $1 \leq i \leq N$, no están

sujetos a ninguna restricción tipo del (25), por lo que la generalización realizada en este apartado no abarca la desarrollada en el epígrafe anterior, es decir, es matemáticamente diferente, porque no se obtiene aquella como un caso particular de ésta, pero sí es más rica al ser más realista desde el punto de vista práctico.

Una metodología de actuación en el aula

Muy amablemente, los asesores de la revista que revisaron este trabajo nos aconsejaron, de cara a la introducción en el aula de las ideas antes expuestas, que pensáramos una metodología de actuación que evitara la utilización del juego de las dianas y el uso de apuestas en efectivo.

Gracias a esta iniciativa de los asesores pensamos que deberíamos utilizar un material que realísticamente estuviera disponible en cualquier centro educativo y que, además, la obtención de cualquier resultado no dependiera de la pericia de cada jugador, como ocurre en el caso de las dianas.

Aunque se nos ocurrieron diferentes versiones de juegos, casi todos ellos estaban basados en el uso de dados y monedas, y ello nos ha conducido a presentar una forma constructiva de proponer el problema a nuestros alumnos, que describimos a continuación.

Por simplicidad, explicaremos el juego para dos jugadores A y B , pero al igual que el estudio realizado con anterioridad, puede extenderse a más jugadores. El juego consiste en alcanzar un objetivo: gana quien consiga antes un número, por ejemplo, el 6, al lanzar un dado cúbico. Si proponemos este juego a nuestros alumnos, seguramente, después de que practiquen un rato y vayan anotando quién gana más veces, pronto observarán que el primero en lanzar tiene ventaja. De hecho, si les invitamos a que realicen el estudio aprovechando las ideas anteriores, como ahora $p_A = p_B = 1/6$ según (2) y (4):

$$P(A) = \frac{\frac{1}{6}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{6}{11} > \frac{5}{11} = P(B)$$

por lo que, siguiendo el razonamiento expuesto en la segunda sección, para que el juego sea justo, según (9) se debe satisfacer

$$p_B = \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{1}{5} \quad \text{siendo} \quad p_A = \frac{1}{6} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

¿Podemos introducir un resultado sobre el dado cúbico que equilibre el juego para el jugador B cuando A gana al obtener un 6 (o cualquier otro número de los seis)? No parece viable (y luego justificaremos que así es cuando, sobre un dado cúbico, A apuesta a un único número). Para evitar la introducción de apuestas podemos sugerir que cambien de tipo de dado (en el mercado del material educativo se pueden adquirir multitud de tipos de dados). Conduciremos así a nuestros alumnos a una interesante pregunta, que les llevará de forma natural a responder cuestiones relativas a la Teoría de Números, más concretamente a la divisibilidad. Invitemos a considerar diferentes tipos de dados, de los que podamos disponer en el centro (tetraédricos, octaédricos, ...) y propugnemos un análisis análogo al anterior. Como paso final, si se dan las condiciones oportunas de asimilación del problema, algunos alumnos pueden llegar a considerar, guiados por nosotros, el caso general: un dado con m caras, de modo que el jugador A gana si obtiene por primera vez alguna de las $a \leq m$ caras y el jugador B gana si por primera vez consigue alguna de las $b \leq m$ caras en su turno. La condición de equilibrio del juego, está dada por (9), y en este caso es

$$p_B = \frac{\frac{a}{m}}{1 - \frac{a}{m}} = \frac{a}{m-a} \quad \text{siendo} \quad p_A = \frac{a}{m} \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad (33)$$

Tendremos que tener en cuenta la restricción

$$0 < a < \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$$

siendo $\lceil \cdot \rceil$ la parte entera y a un número entero. Como buscamos introducir una apuesta para B (basada no en dinero sino en un subconjunto de caras del dado de entre las m caras) y claramente $p_B = b/m$, según (33) se debe satisfacer que

$$\frac{b}{m} = \frac{a}{m-a} \Rightarrow b = \frac{m \cdot a}{m-a} \quad \text{siendo} \\ b \in (0, m) \text{ y } 0 < a < \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil \text{ enteros} \quad (34)$$

La respuesta a esta cuestión de Teoría de Números puede hacerse en el aula a través de una estrategia de ensayo y error, recopilando ordenadamente los resultados en una tabla (véase tabla 3). Por ejemplo, si fijamos $m = 20$ (dado icosaédrico), si el jugador A apuesta a obtener $a = 4$ números de sus 20 caras, y el jugador B a obtener $b = 5$ números de sus caras (los cuales pueden incluso coincidir con los de A , porque las tiradas arrojan resultados independientes), el juego será equilibrado, pues en este caso:

$$p_A = \frac{4}{20}, \quad p_B = \frac{5}{20}$$

y se satisfacen las condiciones dadas en (34). Curiosamente, mientras los dados tetraédrico y octaédrico no admiten un juego justo de estas características, el dodecaédrico admite dos posibles soluciones. Los otros dos dados platónicos únicamente proporcionan una solución.

El estudio de un juego y su equilibrio requerirá el uso conjugado de herramientas de Probabilidad, Análisis, Álgebra, etc.

N.º caras del lado <i>m</i>	N.º caras a las que apuesta <i>A</i>	N.º caras a las que apuesta <i>B</i>
4	No puede haber un juego justo	
6	2	3
8	No puede haber un juego justo	
12	3 (4)	4 (6)
20	4	5

Tabla 3. Construcción en el aula de juegos justos a través de dados

Conclusiones

Este trabajo pretende aportar el estudio y caracterización del equilibrio de una familia de juegos regidos por las reglas R1-R3. El artículo está escrito para ser aprovechado en el aula, ya que en él se afronta el problema desde sencillos casos particulares hasta la generalización, realizándose ésta desde diferentes perspectivas. La primera, más natural desde el punto de vista matemático, debería servir para discutir su validez en la práctica y conducir de forma natural a buscar otro tipo de enfoque, que también generalice el problema y se adapte a la realidad, surgiendo así la segunda generalización.

Las matemáticas que se requieren para abordar el problema son las propias de un curso de bachillerato y muestran el carácter intertemático, dentro de la propia Matemática, cuando se desea estudiar problemas cercanos a la realidad. En este caso, el estudio de un juego y su equilibrio requerirá el uso conjugado de herramientas de Probabilidad, Análisis (suma de series geométricas, comportamiento de funciones a partir de sus gráficas), Álgebra (resolución de ecuaciones, sistemas, inecuaciones), etc. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BELL, R. y CORNELIUS, M. (1990): *Juegos con Tablero y Fichas*, Ed. Labor, Barcelona.

CORTÉS LÓPEZ, J.C. y CALBO SANJUÁN, G. (2001): *Métodos Estadísticos (volumen III)*, Ed. Popular Libros, Albacete.

Aplicación de la matemática borrosa a la gestión deportiva

En estas últimas décadas la gestión de las actividades relacionadas con el deporte ha tomado un papel relevante para las instituciones deportivas. La matemática borrosa, aporta un conjunto de algoritmos que permiten establecer la idoneidad del deportista, el cual ha de reunir ciertas cualidades que lo hagan adecuado para la posición o posiciones que debe ocupar en un determinado equipo. Bajo estos preceptos, hay que resaltar que la Teoría de Conjuntos Borrosos no es un segmento de la Matemática emergente en nuestros días si no que, tiene sus inicios en la década de los años 20, siendo en la de los 50, donde sentó sus bases.

In the latter decades the management of the activities related to sport has taken a relevant role for the sports institutions. The blurred mathematics, contributes a set of algorithms that allow to establish the suitability of the sportsman, who has to assemble certain qualities that make him suitable for the position or positions which he must occupy in a certain team. Under these rules, it is necessary to highlight the fact that the Theory of Blurred Sets is not a segment of the emergent Mathematics in our days but, it has its beginnings in the decade of the 20s, being in that of the 50s, when it sat its bases.

En estas últimas décadas la gestión de las actividades relacionadas con el deporte ha tomado un papel relevante para las instituciones deportivas, dado el creciente interés mostrado por la sociedad en general (sobre el fichaje de sus deportistas) y los medios de comunicación en particular. Frecuentemente las cantidades pagadas pueden producir verdaderos escalofríos, los cuales pueden llegar a agudizarse al pensar que quizás el candidato elegido no dará el rendimiento suficiente para compensar los costes asociados a su contratación. A la luz de este razonamiento, la matemática borrosa aporta un conjunto de algoritmos que permiten establecer en gran medida la idoneidad del deportista, el cual ha de reunir ciertas cualidades que lo hagan adecuado para la posición o posiciones que debe ocupar en un determinado equipo.

Metodología general

El procedimiento que se propone es sencillo, y permite ser aplicado de manera inmediata en infinidad de situaciones. Este método se sustenta en cuatro fases:

1. Establecer el *perfil idóneo* de cada posición en el equipo.
2. Buscar para cada una de estas posiciones los deportistas susceptibles de ocuparlas, los cuales previamente pueden ser sometidos a una serie de exigencias anteriormente preestablecidas. Así, se dispondrá de diversos candidatos para cada posición a cubrir.

3. Realizar las pruebas convenientes para obtener el perfil concreto de cada deportista. Ello estará en función del perfil concreto de cada uno de los deportistas que optan a cada una de las posiciones del equipo.

4. Determinar el grado de cercanía entre los perfiles idóneos para cada posición y los de cada candidato. El sujeto que se encuentre más próximo al ideal buscado para cada posición será el más adecuado para prestar sus servicios en el futuro Club. Cuanto más lejos se halla el perfil del deportista del perfil *idóneo*, menos conveniente resultará ser desde una perspectiva técnica. De ahí que la colaboración de aquellas personas expertas en la materia tenga un peso relativo relevante en todo el proceso. Son los llamados *expertos* y son los que conocen bien a fondo las cualidades de cada deportista.

Los descriptores de las cualidades que permiten decidir la adquisición de los servicios de un deportista por parte de un Club Deportivo, entre otros, podrían ser:

Alfredo Juan Grau Grau
 IES La Milagrosa. Cullera. Valencia

- Aspectos psico-sociales: actitud ganadora, nivel de disciplina, capacidad de liderazgo, nivel intelectual y cultural, fortaleza mental, facilidad de adaptación a la cultura y clima del país, fidelidad al club, etc.
- Aspecto físicos: resistencia al dolor, velocidad media, potencia muscular, nivel de aceleración, fuerza y contundencia, propensión a contraer enfermedades, nivel de recuperación después del esfuerzo, rapidez en la aparición del cansancio, etc.
- Aspectos técnicos: posiciones atacantes (velocidad con y sin balón, potencia de tiro con pierna izquierda y derecha, visión de juego, etc.), posiciones defensivas (contundencia en la defensa, protección del balón, carácter resolutivo, etc.) y posiciones mixtas (manera de centrar con pierna derecha o izquierda, potencial de cabeza, trabajo en equipo, transmisión de tranquilidad, etc.)

Seguidamente resulta imperante el establecimiento del *perfil idóneo* de un deportista, y para ello se recurre a la Teoría de los Subconjuntos Borrosos. El número de cualidades exigidas es igual a n (número finito), las cuales formarán un conjunto llamado E :

$$E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \quad [1]$$

Cuando se tienen establecidas las cualidades inherentes a la actividad a desarrollar por el deportista, se solicita la opinión de varios expertos para que indiquen el nivel óptimo que debería poseer el *deportista idóneo*. Así pues, para las cualidades $e_1, e_2, \dots, e_n$, se establecen unos niveles $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ respectivamente, es decir $\mu_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \dots, n$. De manera que, el descriptor del deportista idóneo puede ser representado mediante el subconjunto borroso $D = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$, y disponiendo sobre la mesa del conjunto de m candidatos en posesión de las cualidades requeridas, se inicia una de las tareas clave para el éxito del proceso, que consiste en asignar a cada uno de ellos los niveles para cada una de las cualidades mediante P_j . A estos efectos, los expertos han de tener amplio conocimiento de las aptitudes del deportista objeto de análisis, obteniéndose así un subconjunto borroso con tales características. La matriz de cualidades sería:

	e_1	e_2	e_3	...	e_{n-1}	e_n
$\underline{D} =$	μ_1	μ_2	μ_3	...	μ_{n-1}	μ_n
$\underline{D} =$	$\mu_1^{(j)}$	$\mu_2^{(j)}$	$\mu_3^{(j)}$	...	$\mu_{n-1}^{(j)}$	$\mu_n^{(j)}$

en donde $\mu_i^{(j)} \in [0, 1]$ representa el nivel de la cualidad i , $i = 1, 2, \dots, n$, poseída por el deportista candidato j , $j = 1, 2, \dots, m$.

La distancia de Hamming

El siguiente paso va a permitir una primera aproximación al proceso óptimo de decisión. Ahora se determina un orden de prelación entre los deportistas candidatos; desde el más idóneo hasta el menos deseable. Esto será posible gracias al concepto de *distancia* o grado de *alejamiento* existente entre el perfil idóneo y el que describe a cada uno de los deportistas susceptibles de ocupar un puesto.

Esta idea que gira en torno al concepto de distancia se puede cuantificar según las aportaciones de Kaufmann y Gil Aluja (82, 87 y 93) mediante la *distancia relativa de Hamming*, la cual penaliza tanto al jugador que no llega al nivel exigido como al que posee niveles superiores a los demandados, y cuya expresión analítica propone:

$$\delta(D, P_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\mu_i - \mu_i^{(j)}| \quad [2]$$

Si consideramos los jugadores P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5 una vez halladas las distancias entre el perfil idóneo y los perfiles de cada uno nos encontramos en disposición de establecer un orden. Aquél que exprese un grado de alejamiento *menor* con respecto al *idóneo* será el candidato más cercano al óptimo. Así se optaría por conseguir los servicios del jugador P_2 ; de no poder ser, los de P_4 , y así sucesivamente, a saber:

$$\delta(D_z, P_2) < \delta(D_z, P_4) < \delta(D_z, P_1) < \delta(D_z, P_5) < \delta(D_z, P_3) \quad [3]$$

Dado que las cualidades pueden tener una importancia relativa distinta, cabe introducir la posibilidad de asignarles unos pesos distintos a cada una de ellas, dentro del intervalo $[0,1]$. Estos coeficientes vienen determinados por ω_i , $i = 1, 2, \dots, n$, y será el equipo técnico quien valorará esos pesos. Siendo: $v_1 = \omega_1 / \sum \omega_i$, $v_2 = \omega_2 / \sum \omega_i$, ..., $v_n = \omega_n / \sum \omega_i$, la distancia de Hamming será sustituida por la nueva expresión:

$$\pi(D_z, P_j) = \sum_{i=1}^n v_i |\mu_i - \mu_i^{(j)}| \quad [4]$$

donde $j = 1, 2, \dots, m$, y además se volvería a acometer la operación descrita en [3].

Aportaciones del coeficiente de adecuación

Hasta ahora subyace el razonamiento que implica sancionar de la misma manera no llegar al nivel exigido en cada cualidad, como sobrepasarla. En contraposición, en muchos casos sí es conveniente penalizar cuando para una cualidad no se alcanza el nivel requerido (no recompensando ni castigando cuando se supera). Con el afán de poder acercarse a este últi-

mo postulado surge el llamado *coeficiente de adecuación*. Se construye para cualquier deportista P_j , $j = 1, 2, \dots, m$, a un puesto del equipo D , cuando se exigen las características e_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Se representa por $\mu_i^{(d)}$ y formula los siguientes supuestos:

Si $\mu_i^{(j)} \geq \mu_i^{(d)}$, $i = e_1, e_2, \dots, e_n$, $j = P_1, P_2, \dots, P_n$, entonces se hará:
 $k_i(j \rightarrow d) = 1$ [5]

Si $\mu_i^{(j)} < \mu_i^{(d)}$, $i = e_1, e_2, \dots, e_n$, $j = P_1, P_2, \dots, P_n$, se asumirá que
 $k_i(j \rightarrow d) = 1 - \mu_i^{(d)} + \mu_i^{(j)}$ [5]

Se describe el coeficiente de adecuación $k(j \rightarrow d)$ referente a un deportista P_j , como:

$$k(j \rightarrow d) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i(j \rightarrow d) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [1 \wedge (1 - \mu_i^{(d)} \mu_i^{(j)})] \quad [6]$$

Cabe recordar que $j = P_1, P_2, \dots, P_m$, y que la jerarquía de prelación es contraria con la expuesta en [3], es decir ahora de mayor a menor.

Índice de máximas facultades. Índice de máximo y mínimo nivel

Existe paralelamente a estas conjeturas otra concepción distinta que penaliza progresivamente el alejamiento de la posición de *máximas facultades* en todas y cada una de las cualidades. Esto implica considerar que el perfil idóneo fuera el de un deportista superdotado que posee todas las propiedades del nivel más alto. El nuevo subconjunto borroso y distancia de Hamming vendrán dados respectivamente por:

	e_1	e_2	e_3	...	e_{n-1}	e_n
$\underline{D} =$	μ_1	μ_2	μ_3	...	μ_{n-1}	μ_n

$$\eta(\underline{D}_Z, P_j) = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n (1 - \mu_i^{(j)}) \right] \quad [7]$$

Por otra parte, no siempre los expertos aceptan que para todas las cualidades, el excedente de capacidad del deportista sobre el nivel exigido deba ser castigado (tesis de Hamming). Por ello, resulta prioritario considerar tan bueno si se llega a dicho nivel como si se sobrepasa, pudiendo utilizar el coeficiente de adecuación sin reservas añadidas. Esto introduce la consideración no sólo del máximo nivel sino también de un mínimo nivel. Tomando nuevamente las cualidades e_i , $i = 1, 2, \dots, m$, y considerando un grupo de I aspirantes, y recabadas las informaciones sobre el descriptor del *jugador idóneo*, los subconjuntos borrosos serán los que a continuación se describen:

	e_1	e_2	e_3	...	e_{n-1}	e_n
$\underline{I} =$	$\mu_I(e_1)$	$\mu_I(e_2)$	$\mu_I(e_3)$	...	$\mu_I(e_{n-1})$	$\mu_I(e_n)$
$\underline{D} =$	$\mu_{P_r}(e_1)$	$\mu_{P_r}(e_2)$	$\mu_{P_r}(e_3)$	...	$\mu_{P_r}(e_{n-1})$	$\mu_{P_r}(e_n)$

en donde $r = 1, 2, \dots, m$, y además se supone que las m cualidades, $u = a, b, \dots, p$, precisan estos requisitos. Intuitivamente $(a, b, \dots, p) \in [0, 1]$. Para el resto de cualidades $v = c, d, \dots, s$ ($Cual. u + Cual. v = m$), así cuando un deportista no llega al nivel exigido en el perfil idóneo es penalizado. En cambio, cuando sobrepasa dicho nivel no sufre penalización alguna, pero tampoco es primado. Obtendremos de esta forma dos expresiones, una primera cercana a aquellas características más descriptivas de las cualidades deseadas aplicando así la distancia relativa de Hamming y el segundo grupo que se identifica con un índice de alejamiento del perfil idóneo. Tendremos así las siguientes ecuaciones:

$$\varphi(I, P_r) = \frac{1}{Cual. u} \sum_{u=a}^p |\mu_I(E_u) - \mu_{P_r}(E_u)| \quad [8.a]$$

$$\zeta(I, P_r) = \frac{1}{Cual. v} \sum_{v=c}^s \{0 \vee [\mu_I(E_v) - \mu_{P_r}(E_v)]\} \quad [8.b]$$

Cabe destacar, que integrando estas dos expresiones en una se obtiene el *índice de máximo y mínimo nivel*, y tomaremos el mismo orden que en [3]:

$$\sigma(I, P_r) = \frac{[\varphi(I, P_r) + \zeta(I, P_r)]}{Cual. u + Cual. v} \quad \text{donde } Cual. u + Cual. v = m \quad [9]$$

Supuesto 1: Fichaje de un extremo izquierda (EI)

Apliquemos un caso práctico que paulatinamente irá realizando los cálculos matemáticos descritos. Supóngase que se trata de cubrir la posición de *extremo izquierda* en un equipo de fútbol. Según los expertos, este puesto ha de cumplir seis cualidades $(a, b, \dots, f)$, cuyo conjunto borroso se determina con la matriz 1 (siguiente página).

Notación matriz:

a =buena complexión física

b =depurada técnica

c =juego de cabeza

d =buen regate

e =dureza en el juego

f =visión conjunta del juego

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>perfiles</i>
$\underline{D}_{EI}$	$\mu_a=0,5$	$\mu_b=1$	$\mu_c=0,8$	$\mu_d=1$	$\mu_e=0,3$	$\mu_f=1$	<i>dep. idóneo</i>
$\underline{A}$	$\mu_a^{(A)}=0,7$	$\mu_b^{(A)}=0,8$	$\mu_c^{(A)}=0,4$	$\mu_d^{(A)}=0,9$	$\mu_e^{(A)}=0,8$	$\mu_f^{(A)}=0,5$	<i>Candidato A</i>
$\underline{B}$	$\mu_a^{(B)}=0,4$	$\mu_b^{(B)}=0,9$	$\mu_c^{(B)}=0,6$	$\mu_d^{(B)}=0,7$	$\mu_e^{(B)}=0,2$	$\mu_f^{(B)}=0,9$	<i>Candidato B</i>
$\underline{C}$	$\mu_a^{(C)}=0,8$	$\mu_b^{(C)}=1$	$\mu_c^{(C)}=0,9$	$\mu_d^{(C)}=0,6$	$\mu_e^{(C)}=0,9$	$\mu_f^{(C)}=0,7$	<i>Candidato C</i>

Matriz 1

$\underline{D}_{EI}$ =Perfil idóneo.

$\underline{A}$, $\underline{B}$ y $\underline{C}$ =Perfiles propios de los tres jugadores.

Aplicando la distancia de Hamming propuesta en [4], y suponiendo los pesos: $\omega_a=0,2$, $\omega_b=1$, $\omega_c=0,6$, $\omega_d=0,9$, $\omega_e=0,3$ y $\omega_f=0,8$ ($\sum \omega_i=3,8$); las puntuaciones para los deportistas *A*, *B* y *C*, considerando $\nu_a=0,05$, $\nu_b=0,26$, $\nu_c=0,15$, $\nu_d=0,24$, $\nu_e=0,8$ y $\nu_f=0,21$, serían:

$$\pi(\underline{D}_{EI}, \underline{A}) = 0,05 |0,5 - 0,7| + 0,26 |1 - 0,8| + 0,15 |0,8 - 0,4| + 0,24 |1 - 0,9| + 0,08 |0,3 - 0,8| + 0,21 |1 - 0,5| = 0,29$$

Para abreviar se facilita que

$$\pi(\underline{D}_{EI}, \underline{B}) = 0,16$$

$$\pi(\underline{D}_{EI}, \underline{C}) = 0,22$$

con lo cual,

$$\pi(\underline{D}_{EI}, \underline{B}) < \pi(\underline{D}_{EI}, \underline{C}) < \pi(\underline{D}_{EI}, \underline{A})$$

conduce a decantarse por el jugador *B*, ya que es el más cercano al *perfil idóneo*. En este caso se castiga igualmente al jugador que no llega al citado perfil, como al que lo sobrepasa.

Aprovechando el recurso del coeficiente de adecuación, que permite sancionar no alcanzar el nivel deseado pero ni se premia ni se castiga el sobrepasarlo, y utilizando las relaciones [5] y [6], se obtendrán los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} k_a(A \rightarrow D_{EI}) &= 1 \wedge (1 - 0,5 + 0,7) = 1 \\ k_b(A \rightarrow D_{EI}) &= 1 \wedge (1 - 1 + 0,8) = 0,8 \\ k_c(A \rightarrow D_{EI}) &= 1 \wedge (1 - 0,8 + 0,4) = 0,6 \\ k_d(A \rightarrow D_{EI}) &= 1 \wedge (1 - 0,5 + 0,7) = 0,9 \\ k_e(A \rightarrow D_{EI}) &= 1 \wedge (1 - 0,5 + 0,7) = 1 \\ k_f(A \rightarrow D_{EI}) &= 1 \wedge (1 - 0,5 + 0,7) = 0,5 \end{aligned}$$

De igual modo, se calculan estos previos para los jugadores *B* y *C*, y prosiguiendo se tendrá:

$$\begin{aligned} k(A \rightarrow D_{EI}) &= 1/6(1 + 0,8 + 0,6 + 0,9 + 1 + 0,5) = 0,48 \\ k(B \rightarrow D_{EI}) &= 0,51 \\ k(C \rightarrow D_{EI}) &= 0,53 \end{aligned}$$

Bajo este criterio es el jugador *C* el que resultaría más interesante.

Recordemos que adicionalmente se propuso otro supuesto de exigencia de máximas facultades que penalizaba el alejamiento de la posición de máximas cualidades, con respecto a la unidad. Realizando nuevamente los cálculos pertinentes en base a la ecuación [7], se tendría que:

$$\eta(\underline{D}_{EI}, \underline{A}) = \frac{1}{6}(1 - 0,7 + 1 - 0,8 + 1 - 0,4 + 1 - 0,9 + 1 - 0,8 + 1 - 0,5) = 0,32$$

$$\eta(\underline{D}_{EI}, \underline{B}) = 0,38$$

$$\eta(\underline{D}_{EI}, \underline{C}) = 0,18$$

Así pues, según el orden:

$$\eta(\underline{D}_{EI}, \underline{C}) < \eta(\underline{D}_{EI}, \underline{A}) < \eta(\underline{D}_{EI}, \underline{B})$$

de nuevo el jugador idóneo es el *C*.

Se complementan estos resultados calculando también los índices de máximo y mínimo nivel, respectivamente. La ecuación [8.a] agrupa las tres primeras cualidades (*Cual. u* = buena compleción física, depurada técnica y juego de cabeza) y no conviene sobrepasar el nivel óptimo. Por el contrario la ecuación [8.b] indica que es indiferente que el jugador sobrepase los niveles exigidos para las restantes cualidades (*Cual. v* = buen regate, dureza en el juego y visión conjunta del juego). Llevando todo esto a la práctica, se analiza para el jugador *A* que:

$$\varphi_a(\underline{D}_{EI}, \underline{A}) = |0,5 - 0,7| = 0,2$$

$$\varphi_b(D_{El}, A) = |1 - 0,8| = 0,2$$

$$\varphi_c(D_{El}, A) = |0,8 - 0,4| = 0,4$$

se corresponden con la cualidades del primer grupo y

$$\zeta_c(D_{El}, A) = 0 \vee (1 - 0,9) = 0,1$$

$$\zeta_e(D_{El}, A) = 0 \vee (0,3 - 0,8) = 0$$

$$\zeta_f(D_{El}, A) = 0 \vee (1 - 0,5) = 0,5$$

con las del segundo. Idénticamente esto se repite para los jugadores B y C ; y sustituyendo sus valores en [9] se obtiene el índice de máximo y mínimo nivel, es decir:

$$\sigma(D_{El}, A) = \frac{1}{6}(0,2 + 0,2 + 0,4 + 0,1 + 0 + 0,5) = 0,23$$

$$\sigma(D_{El}, B) = 0,15$$

$$\sigma(D_{El}, C) = 0,18$$

Estos valores numéricos conducen a opinar que el jugador idóneo es el B .

Asignación óptima de un conjunto de candidatos a los distintos puestos vacantes

Hasta el momento disponíamos de un puesto a cubrir y varios candidatos. En este apartado abordaremos la posibilidad de atribuir distintos puestos entre todos los candidatos disponibles.

Partimos de la base de que existen un número limitado de puestos del equipo a cubrir m , por un número también limitado de deportistas que optan por un puesto en el equipo titular r , en donde $m \leq r$. Es evidente que un número igual a $r - m \geq 0$ constituirán los deportistas *suplentes* del equipo. También será necesario considerar un número (también limitado) n de cualidades.

Hemos definido así tres conjuntos de elementos de naturaleza bien diferenciada:

$$T = \{t_j / j = 1, 2, \dots, m\} \quad [10]$$

que comprende los m puestos a ocupar:

$$P = \{p_i / i = 1, 2, \dots, r\} \quad [11]$$

pertenecientes a todos los candidatos que postulan por las plazas:

$$E = \{e_h / h = 1, 2, \dots, n\} \quad [12]$$

E recoge el conjunto de cualidades y características exigidas en la asignación, y a partir de los tres conjuntos descritos iniciamos así el proceso con la descripción de los *perfiles idóneos* de cada una de las posiciones del equipo, utilizando como descriptores m subconjuntos borrosos, tales como:

	e_1	e_2	e_3	...	e_{n-1}	e_n
$t_j =$	$\mu_1^{(j)}$	$\mu_2^{(j)}$	$\mu_3^{(j)}$	...	$\mu_{n-1}^{(j)}$	$\mu_n^{(j)}$

donde $\mu_h^{(j)} \in [0,1]$, $h = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$

Describimos seguidamente cada uno de los r deportistas que aspiran a la titularidad mediante los subconjuntos borrosos, así como las n cualidades. Presentamos así, los r subconjuntos borrosos siguientes:

	e_1	e_2	e_3	...	e_{n-1}	e_n
$p_i =$	$\mu_1^{(i)}$	$\mu_2^{(i)}$	$\mu_3^{(i)}$	...	$\mu_{n-1}^{(i)}$	$\mu_n^{(i)}$

donde $\mu_h^{(i)} \in [0,1]$, $h = 1, 2, \dots, n$, $i = 1, 2, \dots, r$

El procedimiento para detallar el acercamiento o alejamiento de cada uno de los candidatos con respecto a los puestos descritos, se llevará a cabo con la: distancia de Hamming, coeficiente de adecuación, índices de máximas facultades y máximo y mínimo nivel, con la salvedad de que ahora disponemos de m puestos a cubrir.

Veamos a continuación cómo se describen todos estos procedimientos:

a. Utilización de la distancia de Hamming

Implicaba penalizar tanto al jugador que no llegaba a las cualidades exigidas como al que las sobrepasaba. Podemos considerar que todas las cualidades tienen el mismo interés o por el contrario adjudicarles un *grado* o *peso* de importancia relativa en el segmento $[0, 1]$, es decir:

$$W_h^{(j)} \in [0, 1], j = 1, 2, \dots, m, h = 1, 2, \dots, n$$

Hallaremos los pesos $V_h^{(j)}$ que satisfagan²:

$$V_h^{(j)} = \frac{W_h^{(j)}}{\sum_{h=1}^n W_h^{(j)}}, j = 1, 2, \dots, m, h = 1, 2, \dots, n \quad [13]$$

Ya calculados los $h \times j$ pesos aplicamos la distancia de Hamming a partir de la siguiente fórmula, así como la obtención de la respectiva matriz de valores:

$$\varphi(t_j, p_i) = \sum_{h=1}^n v_h^{(j)} |\mu_h^{(j)} - \mu_h^{(i)}|, i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, m \quad [14]$$

$$[D] = \begin{matrix} & \begin{matrix} p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_{r-1} & p_r \end{matrix} \\ \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_m \end{matrix} & \begin{pmatrix} \varphi(t_1, p_1) & \varphi(t_1, p_2) & \varphi(t_1, p_3) & \dots & \varphi(t_1, p_{r-1}) & \varphi(t_1, p_r) \\ \varphi(t_2, p_1) & \varphi(t_2, p_2) & \varphi(t_2, p_3) & \dots & \varphi(t_2, p_{r-1}) & \varphi(t_2, p_r) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varphi(t_m, p_1) & \varphi(t_m, p_2) & \varphi(t_m, p_3) & \dots & \varphi(t_m, p_{r-1}) & \varphi(t_m, p_r) \end{pmatrix} \end{matrix} \quad [15]$$

b. Utilización del coeficiente de adecuación

Penalizamos cuando en una cualidad el nivel poseído por un candidato es inferior al exigido en el perfil idóneo de la posición descrita, pero no se penaliza ni bonifica, si sobrepasa el nivel exigido (es negativo no llegar y consideramos igualmente favorable llegar o superarlo).

Siguiendo en la misma línea de adjudicar niveles a las distintas cualidades, para $W_h^{(j)}$, con $j = 1, 2, \dots, m, h = 1, 2, \dots, n$, se obtienen los pesos $V_h^{(j)}$, con $j = 1, 2, \dots, m, h = 1, 2, \dots, n$ para la correspondiente ponderación convexa, y obtenemos así el procedimiento:

$$\lambda(t_j, p_i) = \sum_{h=1}^n V_h^{(j)} \left[1 \wedge (1 - \mu_h^{(j)} + \mu_h^{(i)}) \right], i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, m \quad [16]$$

La correspondiente matriz de valores adoptará la siguiente estructura:

$$[K] = \begin{matrix} & \begin{matrix} p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_{r-1} & p_r \end{matrix} \\ \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_m \end{matrix} & \begin{pmatrix} \lambda(t_1, p_1) & \lambda(t_1, p_2) & \lambda(t_1, p_3) & \dots & \lambda(t_1, p_{r-1}) & \lambda(t_1, p_r) \\ \lambda(t_2, p_1) & \lambda(t_2, p_2) & \lambda(t_2, p_3) & \dots & \lambda(t_2, p_{r-1}) & \lambda(t_2, p_r) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda(t_m, p_1) & \lambda(t_m, p_2) & \lambda(t_m, p_3) & \dots & \lambda(t_m, p_{r-1}) & \lambda(t_m, p_r) \end{pmatrix} \end{matrix} \quad [17]$$

La aplicabilidad de las matrices $[D]$ o $[K]$ nos permitirá abordar una gran diversidad de posibilidades para dar solución a situaciones que la actividad deportiva pueda plantearnos. El uso de la tercera hipótesis (índices de máximo y mínimo nivel) vamos a pasarla por alto, puesto que su desarrollo es similar al descrito. La utilización de un método u otro dependerá única y exclusivamente del grado de adecuación de las hipótesis a la percepción que el sujeto decisor tenga de la realidad y necesidades de cada momento.

Existe una amplia variedad de metodologías³ empíricas para poner en práctica nuestras pretensiones. En el caso que nos ocupa vamos a centrarnos en un método muy concreto que consiste en la eliminación consecutiva de filas y columnas.

Algoritmo de asignación por eliminación de filas y columnas

Para llevarlo a la práctica tendremos que seguir las siguientes etapas:

1. Partimos eligiendo cualquiera de los conjuntos borrosos

$$[D] \text{ o } [K]$$

y buscamos el elemento con el valor más elevado.

2. El elemento seleccionado se corresponde con una fila y columna concreta. El punto de cruce se corresponde con el candidato idóneo para ocupar el puesto en cuestión.

3. Eliminamos la fila y columna de la etapa anterior, correspondiente al deportista seleccionado y posición en el equipo, quedando así una relación borrosa de orden inferior.

4. A partir del conjunto borroso, resultante de eliminar una fila y una columna, volvemos a repetir todo el proceso anterior buscando como siempre el mayor valor.

5. Se repite este procedimiento hasta agotar toda la relación borrosa. Si el número de deportistas fuera superior al número de puestos a cubrir, los que no resultaran seleccionados pasarían a formar parte del grupo de jugadores *suplentes*.

Con la finalidad de comprobar la sencillez de esta metodología veamos un ejemplo práctico de gran utilidad.

Supuesto 2: cubrir tres posiciones con cinco jugadores

Supongamos que se nos plantea el problema de asignación de cinco jugadores de fútbol ($p_1, p_2, p_3, \dots, p_5$) a tres posiciones en el equipo (t_4, t_6 y t_{10}). Limitamos a ocho el número de cualidades ($e_1, e_2, e_3, \dots, e_8$). Los descriptores de los perfiles ideales⁴ vendrán dados por la siguiente matriz:

$$[T] = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ \begin{matrix} t_4 \\ t_6 \\ t_{10} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,8 & 0,9 & 0,4 & 0,7 & 0,6 & 0,1 & 0,5 & 0,8 \\ 0,6 & 0,7 & 0,9 & 1 & 0,7 & 0,6 & 0,9 & 0,6 \\ 0,9 & 1 & 0,7 & 0,8 & 0,9 & 1 & 0,6 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Los cinco jugadores de que se disponen para cubrir los tres puestos descritos en la matriz anterior pueden ser detallados por los subconjuntos borrosos también proporcionados en la siguiente matriz:

$$[P_j] = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,6 & 0,9 & 1 & 0,8 & 0,7 & 0,7 & 0,9 & 1 \\ 0,7 & 0,8 & 0,6 & 0,9 & 1 & 0,8 & 0,9 & 0,8 \\ 0,4 & 1 & 0,7 & 0,9 & 1 & 0,8 & 0,6 & 0,7 \\ 0,9 & 0,7 & 0,6 & 0,8 & 0,7 & 0,6 & 1 & 1 \\ 1 & 0,6 & 0,8 & 1 & 0,9 & 0,4 & 0,8 & 0,7 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Para obtener resultados, y así tomar decisiones óptimas, tanto podríamos aplicar el procedimiento que propone Hamming como el del coeficiente de adecuación, para calcular las distancias que se producen entre los perfiles de los jugadores con respecto al idóneo. Para no alargar excesivamente esta cuestión nos decantamos por el segundo método y además ponderando las cualidades⁵.

En primer lugar hagamos el cálculo de los pesos mediante la expresión [13] y posteriormente las operaciones necesarias para hallar los primeros elementos de la relación borrosa $[K]$, es decir:

$$[V_h^{(j)}] = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ \begin{matrix} t_4 \\ t_6 \\ t_{10} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,14 & 0,16 & 0,07 & 0,12 & 0,11 & 0,18 & 0,09 & 0,14 \\ 0,10 & 0,12 & 0,15 & 0,17 & 0,12 & 0,10 & 0,15 & 0,10 \\ 0,13 & 0,14 & 0,10 & 0,12 & 0,13 & 0,14 & 0,09 & 0,14 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Finalmente obtenemos la siguiente relación borrosa⁶ aplicando la expresión [17]:

$$[K] = \begin{matrix} & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \\ \begin{matrix} t_4 \\ t_6 \\ t_{10} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,919 & 0,935 & 0,895 & 0,800 & 0,833 \\ \boxed{0,967} & 0,938 & 0,888 & 0,872 & 0,938 \\ 0,877 & 0,880 & 0,862 & 0,732 & 0,812 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Escogemos la cifra más elevada y se corresponde con (t_6, p_1) con un valor

$$\lambda(t_6, p_1) = 0,967$$

Se asigna de esta manera el deportista p_1 a la posición t_6 . Al eliminar la fila t_6 y la columna p_1 resulta una nueva relación borrosa, a saber:

$$[K] = \begin{matrix} & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \\ \begin{matrix} t_4 \\ t_{10} \end{matrix} & \begin{pmatrix} \boxed{0,935} & 0,895 & 0,800 & 0,833 \\ 0,880 & 0,862 & 0,732 & 0,812 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Ahora procede eliminar la posición (t_4, p_2), con un valor observado

$$\lambda(t_4, p_2) = 0,935$$

Seguidamente será el jugador p_2 el que ocupará la posición t_4 . Al eliminar columna y fila primeras el subconjunto borroso se reduce a la siguiente expresión:

$$[K] = \begin{matrix} & p_3 & p_4 & p_5 \\ t_{10} & \begin{pmatrix} \boxed{0,862} & 0,732 & 0,812 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Será el jugador p_3 el que ocupará la posición t_{10} , con un valor

$$\lambda(t_{10}, p_3) = 0,862$$

Una vez adjudicadas las posiciones se aprecia que los deportistas p_4 y p_5 quedarán como suplentes.

Tratamiento de los jugadores polivalentes

En este apartado abordaremos la posibilidad de identificar si de entre los distintos jugadores, se puede discriminar aquellos candidatos que disponen de la capacidad de desarrollar varias posturas en el campo de juego. Lo que denominaremos a partir de ahora como *jugadores idóneos polivalentes*; y por sus implicaciones económico-financieras y técnicas estarán en el ojo del huracán y será de vital importancia desarrollar todos los procedimientos que nos permitan localizarlos.

La metodología que vamos a implementar se identifica con el concepto de coeficiente de adecuación⁷ que tan asiduamente hemos utilizado. La base de este método consiste en construir un subconjunto borroso que describa al deportista idóneo polivalente, tomando el mayor nivel entre los fijados en los perfiles de cada posición.

Si consideramos como nivel de cualidad E_i , en el perfil idóneo polivalente:

$$\mu_i^{\max} = \mu_i^1 \cup \mu_i^2 \cup \dots \cup \mu_i^q$$

Bajo esta perspectiva, solo se castigará a los perfiles que superen a $\mu_i^{\max}$, pero no cuando el citado nivel se halle entre los idóneos de cada posición y el idóneo de polivalencia, es decir en los tramos:

$$\mu_i^{\max} - \mu_i^1, \mu_i^{\max} - \mu_i^2, \dots, \mu_i^{\max} - \mu_i^q$$

Se describe mediante una matriz las posiciones susceptibles de ser ocupadas por el deportista elegido:

$$[T] = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & \dots & e_{n-1} & e_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mu_1^1 & \mu_2^1 & \mu_3^1 & \dots & \mu_{n-1}^1 & \mu_n^1 \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \mu_3^2 & \dots & \mu_{n-1}^2 & \mu_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_1^m & \mu_2^m & \mu_3^m & \dots & \mu_{n-1}^m & \mu_n^m \end{matrix} & \begin{matrix} \mu_1^1 & \mu_2^1 & \mu_3^1 & \dots & \mu_{n-1}^1 & \mu_n^1 \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \mu_3^2 & \dots & \mu_{n-1}^2 & \mu_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_1^m & \mu_2^m & \mu_3^m & \dots & \mu_{n-1}^m & \mu_n^m \end{matrix} \end{matrix} \quad [18]$$

El *perfil idóneo polivalente* será en su caso:

$$T_{1,2,\dots,q} = \begin{pmatrix} \mu_1^{\max} & \mu_2^{\max} & \mu_3^{\max} & \dots & \mu_{n-1}^{\max} & \mu_n^{\max} \end{pmatrix} \quad [19]$$

Si disponemos de m deportistas cuyos descriptores vienen dados por:

	e_1	e_2	e_3	$\dots$	e_{n-1}	e_n
$D =$	$\mu_1^{(j)}$	$\mu_2^{(j)}$	$\mu_3^{(j)}$	$\dots$	$\mu_{n-1}^{(j)}$	$\mu_n^{(j)}$

[20]

Con $j = 1, 2, \dots, n$

Utilizando el coeficiente de adecuación ya definido anteriormente en la relación matemática:

$$k(j \rightarrow d) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[1 \wedge (1 - \mu_i^{\max} + \mu_i^{(j)}) \right], j = P_1, P_2, \dots, P_m$$

Supuesto 3: Identificación de jugadores polivalentes

Consideraremos nuevamente las tres posiciones (t_4 , t_6 y t_{10}) ilustradas en el supuesto 2 con sus respectivas ocho cualidades (e_1 , e_2 , ..., e_8), obteniéndose el subconjunto borroso mediante la matriz descrita en [18]:

$$[T] = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} t_4 \\ t_6 \\ t_{10} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,8 & 0,9 & 0,4 & 0,7 & 0,6 & 0,1 & 0,5 & 0,8 \\ 0,6 & 0,7 & 0,9 & 0,1 & 0,7 & 0,6 & 0,9 & 0,6 \\ 0,9 & 0,1 & 0,7 & 0,8 & 0,9 & 0,1 & 0,6 & 0,1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

El *perfil idóneo polivalente* es ahora según la matriz [19]:

$$T_{4,6,10} = \begin{pmatrix} 0,9 & 1 & 0,9 & 1 & 0,9 & 1 & 0,9 & 1 \end{pmatrix}$$

Los perfiles de cada uno de los cinco jugadores susceptibles de ocupar la plaza polivalente(recordemos que en función de la relación [20]) eran:

$$[P_j] = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,6 & 0,9 & 1 & 0,8 & 0,7 & 0,7 & 0,9 & 1 \\ 0,7 & 0,8 & 0,6 & 0,9 & 1 & 0,8 & 0,9 & 0,8 \\ 0,4 & 1 & 0,7 & 0,9 & 1 & 0,8 & 0,6 & 0,7 \\ 0,9 & 0,7 & 0,6 & 0,8 & 0,7 & 0,6 & 1 & 1 \\ 1 & 0,6 & 0,8 & 1 & 0,9 & 0,4 & 0,8 & 0,7 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

A la luz de toda la información proporcionada obtenemos los pertinentes coeficientes de adecuación:

$$k(P_1 \rightarrow T_{4,6,10}) = 1/8(0,7+0,9+1+0,8+0,8+0,7+1+1) = 0,88$$

$$k(P_2 \rightarrow T_{4,6,10}) = 1/8(0,8+0,8+0,7+0,9+1+0,8+1+0,8) = 0,86$$

$$k(P_3 \rightarrow T_{4,6,10}) = 1/8(0,5+1+0,8+0,9+1+0,8+0,7+0,7) = 0,81$$

$$k(P_4 \rightarrow T_{4,6,10}) = 1/8(1+0,7+0,7+0,8+0,8+0,6+1+0,1) = 0,73$$

$$k(P_5 \rightarrow T_{4,6,10}) = 1/8(1+0,6+0,9+1+1+0,4+0,9+0,7) = 0,83$$

El orden a considerar las hipótesis aceptadas es:

$$k(P_1 \rightarrow T_{4,6,10}) > k(P_2 \rightarrow T_{4,6,10}) > k(P_5 \rightarrow T_{4,6,10}) > k(P_3 \rightarrow T_{4,6,10}) > k(P_4 \rightarrow T_{4,6,10})$$

Es evidente que el jugador que más se acerca al candidato polivalente es el P_1 , siguiéndole muy de cerca el P_2 . El orden preferente queda descrito.

Conclusiones finales

A modo de conclusión, se puede afirmar que de una forma sencilla se ha abierto un camino para dar solución a un problema de candente interés que la práctica del deporte reclama insistentemente. Aunque no se trata de la panacea, sí puede proporcionar una eficaz ayuda en la toma de decisiones sobre el fichaje de un deportista; y dada la flexibilidad de estos instrumentos se pueden cubrir infinidad de necesidades. ■

NOTAS

- 1 El grado o nivel de cada cualidad se cuantificará según la escala semántica endecadaria aplicada en los trabajos de los profesores Kaufmann y Gil Aluja, desarrollados en el campo de la matemática borrosa, especificándose de la siguiente forma: [1] perfecto, [0,9] muy bueno, [0,8] bueno, [0,7] bastante bueno, [0,6] más bien bueno, [0,5] regular, [0,4] más bien malo, [0,3] bastante malo, [0,2] malo, [0,1] muy malo, [0] pésimo.
- 2 Recuérdese que la suma de todos los pesos ha de ser igual a la unidad.
- 3 Citemos algunas: 1. Algoritmo de asignación por eliminación de filas y columnas. 2. El algoritmo húngaro de asignación, 3. Algoritmo *branch and bound*, etc.
- 4 Recuérdese que estos perfiles son graduados mediante las opiniones de *expertos* en el tema que nos ocupa.

- 5 Es decir, la expresión matemática a aplicar sería:

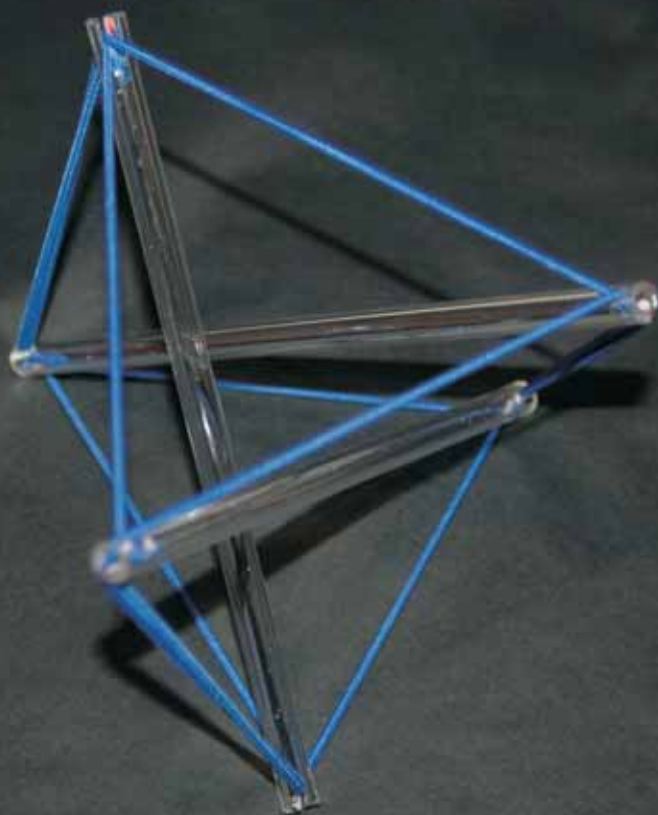
$$\lambda(t_j, p_i) = \sum_{h=1}^8 V_h^{(j)} \left[1 \wedge (1 - \mu_h^{(j)} + \mu_h^{(i)}) \right]$$

tomando en consideración que $i = 1, 2, 3, 4, 5$, y $j = 4, 6, 10$.

- 6 Hemos creído conveniente agregar un decimal adicional en esta matriz, puesto que con solo dos decimales, varias cifras eran coincidentes. Los cálculos para esta matriz se han hecho con una hoja de cálculo Excel.
- 7 Alternativamente también se puede realizar este estudio por cualquiera del resto de metodologías expuestas a lo largo del artículo como son: distancia de Hamming, índices de máximo y mínimo nivel, etc., en función del planteamiento y exigencias que se persigan.

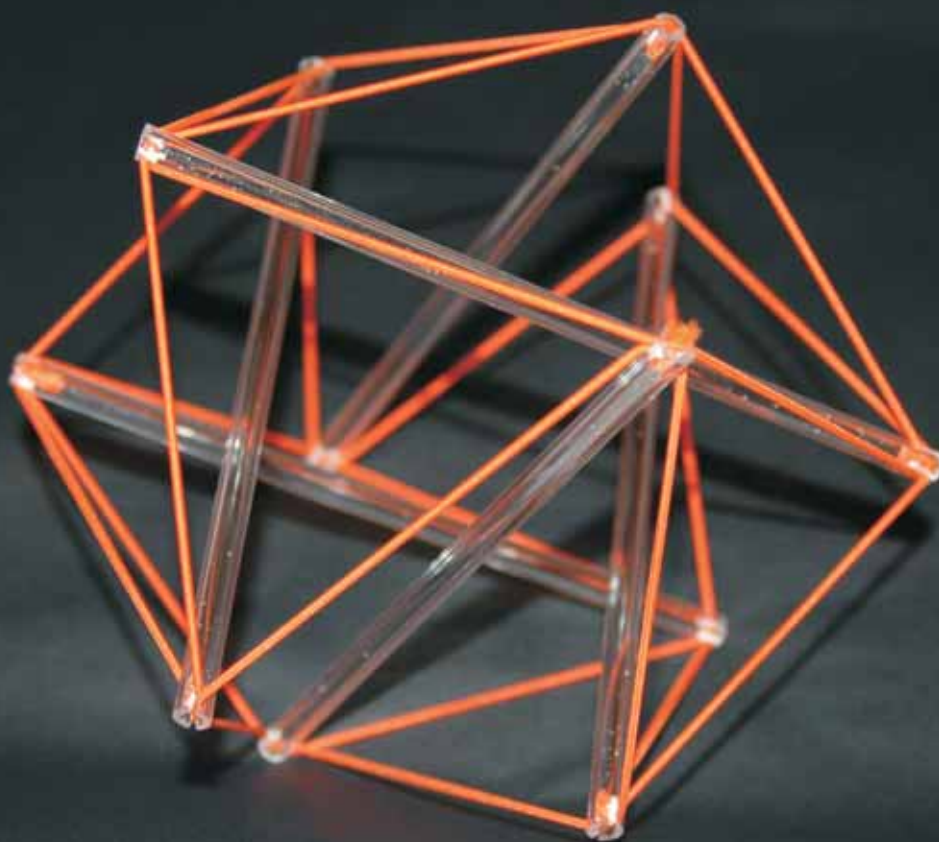
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- GIL ALUJA, J. (2002): "El coneixement en l'incertesa", trabajo publicado en el libro recopilador de la Jornada Académica en recuerdo del profesor Carles Cassú Mellado: *El tractament científic de l'incertesa*, 21-33, Universitat de Girona, Girona.
- GIL ALUJA, J. (1998): *Investment in uncertainty*, Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrecht, London.
- GIL ALUJA, J. (1996): *La Gestión Interactiva de los Recursos Humanos en la Incertidumbre*, CEURA, Madrid, 170-172.
- GIL ALUJA, J. (1998): *The interactive management of human resources in uncertainty*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- GIL ALUJA, J. (1985): *Selección de personal: El problema de la polivalencia y el de la uniformidad*, CEURA, Madrid.
- GIL LAFUENTE, J. (2002): "El Mejor Sistema de Designación Arbitral: el Algoritmo Húngaro", *Congreso Internacional A.C.S.E.G. 2002*, Boulogne-Sur-Mer (Francia), 167-180.
- KAUFMANN, A. (1982): *Introducción a la teoría de los subconjuntos borrosos*, CECSA.
- KAUFMANN, A. y GIL ALUJA, J. (1993): *Técnicas especiales para la gestión de expertos*, Milladoiro, Santiago de Compostela.
- KAUFMANN, A. y GIL ALUJA, J. (1987): *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*, Hispano Europea.



Tensegridades

Objetos y Fotos FMC



Año 2005, ya saben, Año Quijote. Son muchas las facetas de esta novela universal que pueden ser objeto de estudio y, por supuesto, las matemáticas también afloran en la obra. Se propone a continuación un recorrido por las monedas que aparecen en el Quijote. Para conocer el sistema monetario de los siglos XVI y XVII, mucho más complejo que el actual, con monedas de oro, plata y vellón, se entresacan fragmentos del Quijote, y también algunas reseñas sobre la apasionante biografía de su autor Miguel de Cervantes.

Year 2005, you know, Quijote Year. There are lots of aspects in that universal novel that can be study aim and, of course, mathematics also appears in the narrative. To know the monetary system of sixteenth and seventeenth century, much more complex than actual one, with gold, silver and vellón coins, we pick out fragments of the Quijote, and also some reviews of the wonderful biography of its author Miguel de Cervantes.

Con motivo del IV Centenario de la publicación de la primera parte de *El ingenioso hidalgo don Quijote de la Mancha*, le invito, desocupado lector, a realizar un recuento de las monedas que corrían en aquella época y que vienen recogidas en esta novela inmortal.

*Poderoso caballero
es don dinero.*

Francisco de Quevedo

Traigo a colación este empeño, pues leyendo la obra cumbre de la literatura en lengua castellana (que, he de confesar, yo no había leído hasta ahora) sorprende la cantidad de monedas que circulaban en los siglos XVI y XVII. Actualmente, que acaba de desaparecer nuestra querida peseta —que todos añoramos— y sólo llevamos en el bolsillo monedas y billetes de euro, o de sus fracciones y múltiplos, nos sorprendería el verdadero guirigay que existía en los tiempos en que el *Caballero de la Triste Figura* cabalgaba por los polvorientos caminos de España. Ducados y escudos de oro, reales de plata, maravedís, blancas, cornados, cuatrines, ardites, pesos ensayados, sueldos, y otras muchas monedas se usaban en los intercambios comerciales. En la historia de Don Quijote aparecen todas ellas, puesto que la novela muestra, en muchos de sus pasajes, la vida cotidiana de la época.

En aquellos tiempos el sistema monetario estaba constituido, a grandes rasgos, alrededor de tres tipos básicos de monedas. La moneda de vellón (de cobre con un bajo, y decreciente, contenido en plata), que quedará ligada a las transacciones de la vida diaria, las monedas de plata de ley elevada y, finalmente, las monedas de oro, presentes sobre todo en operaciones mercantiles de alto nivel.



Billete de una peseta con Don Quijote, 1951

José Ángel Ortega Dato
IES Diego Tortosa
Cieza. Murcia

Monedas de oro: ducados y escudos

Los Reyes Católicos intentaron, con la conocida como Pragmática de Medina del Campo (1497), poner un poco de orden en el desbarajuste monetario peninsular, a partir del modelo aportado por la economía más fuerte: la de la Corona de Castilla (cada uno de los reinos no castellanos continuó teniendo sus monedas). Con esta intención acuñaron una nueva moneda de oro denominada *excelente de la granada* (en honor a la reciente toma de Granada), aunque terminó llamándose ducado.

Los ducados tenían una ley de 23,75 quilates, es decir, una finura del 98,96%. Equivalían a 375 maravedís y se fabricaron piezas de medio ducado, cinco, diez, veinte y cincuenta.

Con el fin de hacernos una idea del valor adquisitivo en ese tiempo, el salario de don Rodrigo de Cervantes, padre del autor del Quijote, era de unos 100 ducados. Don Rodrigo ejercía de cirujano —*hombre que hace ligaduras y cura otras enfermedades, que va decir de esto a médico la mitad del justo precio*, en palabras del propio Cervantes en *El juez de los divorcios*— (Rey, 1995). Un médico ganaba 300 ducados, mientras que un barbero 20.000 maravedís, que equivalen a 53 ducados (Balbuena, 2004). En el mercado un buey se podía comprar por unos 15 ducados, una ternera por 5 ducados y un puerco por 4 ducados¹.

Miguel de Cervantes y Saavedra se desposó en 1584 con Catalina de Salazar y Palacios, una doncella de 19 años vecina de Esquivias (Toledo), que acababa de quedar huérfana de padre. En realidad fue un matrimonio de conveniencia, tratando de encontrar una estabilidad económica de la que no gozó en toda su vida. El negocio, sin embargo, no sale muy bien, porque, mientras la dote percibida fue de 596 ducados y una casa, tras fallecer la suegra y abrir el testamento, se descubre que existían unas deudas que ascendían a 541 ducados (Alvar, 2005).



Moneda de 50 excelentes
de los Reyes Católicos

Los ducados se nombran en seis ocasiones en la primera parte del Quijote y doce veces en la segunda parte. La menor canti-

dad aparece en boca de Sancho Panza en la segunda parte, capítulo veintiocho (en adelante, II, XXVIII):

Quando yo servía respondió Sancho a Tomé Carrasco, el padre del bachiller Sansón Carrasco, que vuesa merced bien conoce, dos ducados ganaba cada mes, amén de la comida; con vuesa merced no sé lo que puedo ganar, puesto que sé que tiene más trabajo el escudero del caballero andante que el que sirve a un labrador.

La mayor cantidad de ducados se nombran cuando el cautivo cuenta su vida (I, XXXIV), y su padre reparte la hacienda entre los tres hijos que, siguiendo el refrán *Iglesia, o mar, o casa real*, eligen dedicarse uno al sacerdocio, otro a ser marino, y el tercero a servir al rey en el ejército:

Así como acabamos de concordarnos y escoger nuestros ejercicios, mi padre nos abrazó a todos, y con la brevedad que dijo, puso por obra cuanto nos había prometido; y dando a cada uno su parte, que, a lo que se me acuerda, fueron cada uno tres mil ducados, en dineros, porque nuestro tío compró toda la hacienda, y la pagó de contado, porque no saliese del tronco de la casa, en un mismo día nos despedimos todos tres de nuestro buen padre.

Y, cuando Don Quijote da la libertad a muchos desdichados que mal de su grado llevaban donde no quisieran ir, es decir, unos presos que llevaban encadenados a cumplir su pena en galeras, esta es la conversación que mantienen (I, XXII):

— Yo voy por cinco años a las señoras gurapas, por faltarme diez ducados.

— Yo daré veinte de muy buena gana dijo Don Quijote, por libraros desa pesadumbre.

— Eso me parece respondió el galeote, como quien tiene dineros en mitad del golfo, y se está muriendo de hambre, sin tener adonde comprar lo que ha menester: dígolo, porque si a su tiempo tuviera yo esos veinte ducados que vuestra merced ahora me ofrece, hubiera untado con ellos la péndola del escribano, y avivado el ingenio del procurador, de manera que hoy me viera en mitad de la plaza de Zocodover de Toledo, y no en este camino atraillado como galgo; pero Dios es grande: paciencia y basta.

El emperador Carlos V, en 1535, introdujo una nueva moneda de oro de menos peso y ley (3,4 gramos y 22 quilates, lo que representa un 91,67% de oro), con la finalidad de igualar la moneda de oro castellana con la de otros países y evitar su fuga al exterior. El escudo sustituye a partir de entonces al ducado, que pasa a ser moneda de cuenta imaginaria². Inicialmente equivalía a 350 maravedís, pero su valor fue cambiando a lo largo de la época moderna, teniendo una paridad de 400 maravedís en 1566 y, desde 1609, de 440 maravedís.



Cuerda de presos. Grabado de Doré

A menudo, la nueva unidad se utilizaba en monedas de dos y de cuatro escudos. El doble escudo se denomina popularmente doblón o dobla. Son los doblones los que hicieron famoso el sistema de pagos de la monarquía hispánica. De mayor valor es el doble doblón, es decir, el doblón de a cuatro.

Prosiguiendo con la biografía de Cervantes, tras la batalla de Lepanto, librada el siete de octubre de 1571 a las órdenes de don Juan de Austria, pasó cuatro años como soldado a lo largo de Italia y el Mediterráneo. El veintiséis de septiembre de 1575, de regreso a España en la galera Sol, ésta fue apresada por los corsarios berberiscos. En ella viajaban, entre otros, Miguel de Cervantes y su hermano Rodrigo, que fueron llevados a Argel, donde pasarían encarcelados cinco penosos años. Las experiencias de este cautiverio se relatan en el Quijote (I, XL):

Con esto entretenía la vida, encerrado en una prisión o casa que los turcos llaman baño, donde encierran los cautivos cristianos.

Cervantes no fue ejecutado porque llevaba cartas de recomendación del propio don Juan de Austria (Rey, 1995), por lo que lo consideraron persona de alto valor y pidieron por su rescate 500 escudos:

Yo pues, era uno de los de rescate (...). Pusiéronme una cadena, más por señal de rescate que por guardarme con ella; y así, pasaba la vida en aquel baño, con otros muchos caballeros y gente principal, señalados y tenidos por de rescate. Y, aunque el hambre y desnudez pudiera fatigarnos a

veces, y aun casi siempre, ninguna cosa nos fatigaba tanto como oír y ver, a cada paso, las jamás vistas ni oídas crueldades que mi amo usaba con los cristianos.



8 escudos de Felipe III, 1613

Los escudos se nombran en el Quijote unas 32 veces. En la novela *El curioso impertinente*, que se intercala en el Quijote (I, XXXIII), aparece una cantidad de escudos capaz de tentar a una mujer:

— Bien está dijo Anselmo. Hasta aquí ha resistido Camila a las palabras; es menester ver cómo resiste a las obras: yo os daré mañana dos mil escudos de oro para que se los ofrezcáis y aun se los deis, y otros tantos para que compréis joyas con que cebarla, que las mujeres suelen ser aficionadas, y más si son hermosas, por más castas que sean, a esto de traerse bien y andar galanas; y si ella resiste a esta tentación, yo quedaré satisfecho, y no os daré más pesadumbre.

En varias ocasiones a lo largo de la obra, surge esta moneda en sitios inesperados, como en el capítulo en el que Don Quijote y Sancho deambulan por Sierra Morena (I, XXIII):

En esto alzó los ojos, y vio que su amo estaba parado, procurando con la punta del lanzón alzar no sé qué bulto que estaba caído en el suelo, por lo cual se dio prisa a llegar a ayudarle si fuera menester; y cuando llegó fue a tiempo que alzaba con la punta del lanzón un cojín y una maleta asida a él, medio podridos, o podridos del todo y deshechos; mas pesaban tanto que fue necesario que Sancho se apease a tomarlos; y mandóle su amo que viese lo que en la maleta venía. Hízolo con mucha presteza Sancho; y aunque la maleta venía cerrada con una cadena y su candado, por lo roto y podrido della vio lo que en ella había, que eran cuatro camisas de delgada holanda, y otras cosas de lienzo, no menos curiosas que limpias, y en un pañizuelo halló un buen montoncillo de escudos de oro, y así como los vio dijo:

— ¡Bendito sea todo el cielo, que nos ha deparado una aventura que sea de provecho!

La mayor cantidad de escudos aparece en el relato del cautivo (I, XLI), cuando se refiere a la enorme riqueza de Zoraida, la mora que le ayuda a escapar, que pasa por ser el personaje más rico de la novela. Aquí también salen los doblones o doblas:

Demasiada cosa sería decir yo agora la mucha hermosura, la gentileza, el gallardo y rico adorno con que mi querida Zoraida se mostró a mis ojos (...). En las gargantas de sus pies, que descubiertas a su usanza traía, traía dos carcajes (que así llaman las manillas o ajorcas de los pies en morisco) de purísimo oro, con tantos diamantes engastados, que ella me dijo después que su padre los estimaba en diez mil doblas, (...). Y el padre de Zoraida tenía fama de tener muchas y de las mejores que en Argel había, y de tener asimismo más de dos cientos mil escudos españoles, de todo lo cual era señora ésta que ahora lo es mía.

Y, en la conversación que mantienen los escuderos de Don Quijote y del Caballero del Bosque (II, XIII), expresa Sancho Panza su desengaño de esta manera:

— Y para volvernos a ver ruego yo a Dios me saque de pecado mortal, que lo mesmo será si me saca deste peligroso oficio de escudero, en el cual he incurrido segunda vez, cebado y engañado en una bolsa con cien ducados que me hallé un día en el corazón de Sierra Morena, y el diablo me pone ante los ojos aquí, allí, acá no, sino acullá, un talego de doblones, que me parece que a cada paso le toco la mano, y me abrazo a él, y lo llevo a mi casa, y echo censos, y fundo rentas, y vivo como un príncipe; y el rato que en esto pienso se me hacen fáciles y llevaderos cuantos trabajos padezco con este mentecato de mi amo, de quien sé que tiene más de loco que de caballero.

Monedas de plata: los reales

Para la moneda de plata, la unidad que se toma en las disposiciones monetarias de 1497 es el real que, con una finura del 93,06%, establece su cambio en 34 maravedís³. En esta época ya aparecen los submúltiplos de medio, cuarto (llamado cuartillo) y octavo. Mas tarde, es Carlos V quien da orden de acuñar los múltiplos de dos (real de a dos), cuatro (real de a cuatro), y ocho (real de a ocho). En el reinado de Felipe II, el real de a ocho, el peso, es la moneda española por excelencia, con un valor de 272 maravedís. Esta moneda dio lugar posteriormente al duro⁴.

Los reales se usaban diariamente para pagar todo tipo de artículos (Balbuena, 2004). En 1572 una arroba⁵ de aceite costaba 12 reales, y una de vino 5 reales; una gallina 2 reales, y un colchón de lana unos 28 reales. Mientras que en 1600 un albañil tenía un jornal diario de 5 reales, y un peón de 2 reales⁶.

Los reales se nombran en la obra más de sesenta veces. Por ejemplo, en el episodio en el que Don Quijote, después de ser armado caballero, rescata a un criado al que su amo, un rudo labrador, le está aplicando unos terribles azotes (I, IV):

El labrador bajó la cabeza y, sin responder palabra, desató a su criado, al cual preguntó Don Quijote que cuánto le debía su amo. Él dijo que nueve meses, a siete reales cada mes. Hizo la cuenta Don Quijote y halló que montaban

setenta y tres reales, y díjole al labrador que al momento los desembolsase si no quería morir por ello. Respondió el medroso villano que para el paso en que estaba y juramento que había hecho (y aún no había jurado nada) que no eran tantos; porque se le habían de descontar y recibir en cuenta tres pares de zapatos que le había dado y un real de dos sangrías que le habían hecho estando enfermo.

— Bien está todo esto replicó Don Quijote, pero quédense los zapatos y las sangrías por los azotes que, sin culpa, le habéis dado (...).

— El daño está, señor caballero, en que no tengo aquí dineros; véngase Andrés conmigo a mi casa, que yo se los pagaré un real sobre otro⁷.

Don Quijote hace mal la cuenta, con diez reales a favor del chico, quizás en su afán de favorecer al débil.



Azotes del labrador. Grabado de Doré

En uno de los episodios del regreso definitivo de Don Quijote a su aldea (II, LXXI), se relata los azotes que se da Sancho para liberar a Dulcinea de cierto hechizo del que era víctima. Resultan asombrosas las operaciones de cálculo mental, y de manera exacta, que realiza Sancho con los reales, y más aún teniendo en cuenta que era analfabeto:

— Dígame vuesa merced: ¿cuánto me dará por cada azote que me diere?

— Si yo te hubiera de pagar Sancho, respondió Don Quijote, conforme lo que merece la grandeza y calidad deste remedio, el tesoro de Venecia, las minas del Potosí fueran

poco para pagarte; toma tu el tiento a lo que llevas mío, y pon el precio a cada azote.

— Ellos respondió Sancho, son tres mil y trescientos y tantos; dellos me he dado hasta cinco: quedan los demás; entren entre los tantos estos cinco, y vengamos a los tres mil y trescientos, que a cuartillo cada uno, que no llevaré menos si todo el mundo me lo mandase, montan tres mil y trescientos cuartillos, que son los tres mil, mil y quinientos medios reales, que hacen setecientos y cincuenta reales; y los trescientos hacen ciento y cincuenta medios reales, que vienen a hacer setenta y cinco reales, que, juntándose a los setecientos y cincuenta, son por todos ochocientos y veinte y cinco reales. Estos desfalcaré yo de los que tengo de vuesa merced, y entraré en mi casa rico y contento, aunque bien azotado; por que no se toman truchas..., y no digo más.

Pero cuando Sancho llevaba dados unos cuantos azotes, se las ingenió para doblar el precio:

Hasta seis u ocho se habría dado Sancho, cuando le pareció ser pesada la burla y muy barato el precio della, y, deteniéndose un poco, dijo a su amo que se llamaba a engaño, porque merecía cada azote de aquéllos ser pagado a medio real, no que a cuartillo.

— Prosigue, Sancho amigo, y no desmayes le dijo Don Quijote, que yo doblo la parada del precio.

— Dese modo dijo Sancho, ¡a la mano de Dios, y lluevan azotes!

Pero el socarrón dejó de dárselos en las espaldas, y daba en los árboles, con unos suspiros de cuando en cuando, que parecía que con cada uno dellos se le arrancaba el alma.



Real de a 8 de Felipe II, 1589

Los reales de a ocho aparecen en la primera salida de Don Quijote, cuando llegó fatigado y hambriento a una venta (que a él le parecía castillo) y se aprestó a comer (I, II):

A dicha acertó a ser viernes aquel día, y no había en toda la venta sino unas raciones de un pescado que en Castilla llaman abadejo, y en Andalucía bacalao, y en otras partes curadillo, y en otras truchuela. Preguntáronle si por ventura comería su merced truchuela, que no había otro pescado que darle a comer.

— Como haya muchas truchuelas respondió Don Quijote, podrán servir de una trucha; porque eso se me da que me den ocho reales en sencillo, que una pieza de a ocho. Cuando más que podría ser que fuesen truchuelas como la ternera, que es mejor que la vaca, y el cabrito que el cabrón. Pero, sea lo que fuere, venga luego, que el trabajo y peso de las armas no se puede llevar sin el gobierno de las tripas.

Y los reales de a cuatro en el episodio, ya comentado anteriormente, en el que Don Quijote se tropieza con una cuerda de presos camino de las galeras, cuando uno de ellos cuenta su desdicha (I, XXII):

— Así es, dijo el buen viejo; y en verdad, señor, que en lo de hechicero que no tuve culpa; en lo de alcahuete no lo pude negar, pero nunca pensé que hacía mal en ello, que toda mi intención era que todo el mundo se holgase, y viviese en paz y quietud, sin pendencias ni penas; pero no me aproveché nada ese buen deseo para dejar de ir adonde no espero volver, según me cargan los años y un mal de orina que llevo, que no me deja reposar un rato: y aquí tornó a su llanto como de primero; y túvole Sancho tanta compasión, que sacó un real de a cuatro del seno, y se lo dio de limosna.

Monedas de vellón: maravedís, blancas, cornados, cuatrines y ardites

En cuanto a las monedas de vellón⁸, lo que hoy en día llamaríamos calderilla⁹, el maravedí¹⁰ es la de uso más extendido, sirviendo como unidad de cuenta de todas las monedas. Así, el excelente o ducado equivalía a 375 maravedís, el escudo a 440, y el real a 34.

Los maravedís aparecen en la obra sólo trece veces. El mismo Don Quijote nos habla del origen de la palabra maravedí (II, LXVII):

(...) y este nombre albogues es morisco, como lo son todos aquellos que en nuestra lengua castellana comienzan en al, conviene a saber: almohaza, almorzar, alfombra, alguacil, alhucema, almacén, alcancía y otros semejantes, que deben ser poco más; y sólo tres tiene nuestra lengua que son moriscos y acaban en i, y son: borceguí, zaquizamí y maravedí; alhelí y alfaquí, tanto por el al primero como el i en que acaban son conocidos por arábigos.

Conocemos el precio de venta de la primera parte del Quijote por la tasa que era preceptivo incluir al principio del libro. La firma un tal Juan Gallo de Andrada en su calidad de escribano de Cámara del Rey Felipe III, y lleva fecha del veinte de diciembre de 1604. La obra se vendió *en papel* (esto es, como era costumbre, sin encuadernar):

(...) tasaron cada pliego del dicho libro a tres maravedís y medio, el cual tiene ochenta y tres pliegos, que al dicho precio, monta el dicho libro doscientos y noventa maravedís y medio, en que se ha de vender en papel.



Portada de la primera edición del Quijote, 1605

Las pequeñas compras se realizaban en maravedís. En 1571 un huevo podía costar unos 3 maravedís, una libra¹¹ de carne-ro 20 maravedís, y un celemín¹² de sal 48 maravedís (Balbueña, 2004).

La misma Teresa Panza, esposa de Sancho, en su carta a la duquesa (II, LII), nos orienta sobre el valor adquisitivo de la época:

— Yo, señora de mi alma, estoy determinada, con licencia de vuesa merced, de meter este buen día en mi casa, yéndome a la corte a tenderme en un coche, para quebrar los ojos a mil envidiosos que ya tengo; y así, suplico a vuesa excelencia mande a mi marido me envíe algún dinerillo, y que se algo qué; porque en la corte son los gastos grandes: que el pan vale a real, y la carne, la libra, a treinta maravedís, que es un juicio.

Los maravedís se acuñaron en piezas de 2, 4 y 8. Al doble maravedí se le denomina ochavo, y al cuádruple se le llama cuarto. De estas monedas nacen varias expresiones populares y refranes; como el que dice que *el que nace para ochavo no*

puede llegar a cuarto, que indica la dificultad de medrar desde una cuna pobre. A la hora de pagar decimos *aquí tienes los cuartos*, y para expresar que algo tiene poco valor *esto no vale ni cuatro cuartos*. El dicho popular *la España del chavico*, indica la pobreza de ciertas regiones de nuestro país, y se dice *no tengo ni un chavo* para mostrar que se está en la miseria.

En el primer capítulo del Quijote, cuando el hidalgo está preparando su primera salida, describe de esta forma a su caballo Rocinante:

Fue luego a ver a su rocín, y aunque tenía más cuartos que un real, y más tachas que el caballo de Gonela, que tantum pelli et ossa fuit, le pareció que ni el Bucéfalo de Alejandro, ni Babieca el del Cid, con él se igualaban.

Aquí, Cervantes hace un juego de palabras, porque por un lado dice que el caballo estaba mal de salud, pues cuartos es una enfermedad de los caballos, y, por otro, se refiere a que en un real hay muchas monedas de cuartos¹³.

En la entrada definitiva de Don Quijote a su aldea (II, LXXIII), Sancho desbarata el mal agüero comprando una jaula de grillos a unos muchachos por muy poco dinero:

Sacó Sancho cuatro cuartos de la faltriquera, y dióselos al muchacho por la jaula, y púsosela en las manos a Don Quijote.



Cuarto (4 maravedís) de Carlos V, 1516

La blanca fue la moneda de menor valor acuñada por los Reyes Católicos en 1497. Sólo equivalía a medio maravedí, por lo que se empezó a usar la expresión popular *estar sin blanca*, que ha llegado hasta nuestros días con el sentido de quedarse sin dinero. En el capítulo donde se cuenta la graciosa manera que tuvo Don Quijote en armarse caballero (I, III), el ventero le interpela:

Preguntóle si traía dineros; respondió Don Quijote que no traía blanca, porque él nunca había leído en las historias de los caballeros andantes que ninguno los hubiese traído.

El leal escudero Sancho se expresa de la siguiente manera al abandonar la ínsula Barataria (II, LIII):

— Vuestras mercedes se queden con Dios, y digan al duque mi señor que, desnude nació, desnudo me hallo: ni pierdo ni gano; quiero decir, que sin blanca entré en este gobierno y sin ella salgo, bien al revés de cómo suelen salir los gobernadores de otras ínsulas.

Y en la disertación de Don Quijote en Sierra Morena (II, XXVI), dice refiriéndose a un alfiler grueso, que en aquel tiempo costaba una blanca:

— Si Roldán fue tan buen caballero y tan valiente como todos dicen, ¿qué maravilla, pues, al fin era encantado, y no le podía matar nadie si no era metiéndole un alfiler de a blanca por la punta del pie, y él traía siempre los zapatos con siete suelas de hierro?

Durante el siglo XVII, con los problemas económicos del ocaso del imperio español, las monedas de vellón sufren una depreciación galopante, fabricándose cada vez con más cobre y menor cantidad de plata. Se suele decir que en el siglo del Quijote el imperio español naufraga en el *piélago del vellón*. El vellón, que era utilizado secularmente para pagar picos de las cuentas, se hace ahora más presente que nunca. Es entonces cuando surgen monedas de cobre de ínfimo valor como el cornado¹⁴, el cuatrín¹⁵ y el ardite¹⁶.

*Los niños la manosean, los
mozos la leen, los hombres la
entienden y los viejos la
celebran.*

Miguel de Cervantes

Los cornados aparecen sólo una vez en la obra, en el capítulo (I, XVII), cuando Don Quijote sale de la venta sin pagar, y Sancho pretende hacer lo mismo, lo que a la postre le cuesta ser manteado por unos rufianes:

Amohinóse mucho desto el ventero, y amenazóle que si no le pagaba, que lo cobraría de modo que le pesase. A lo cual Sancho respondió que, por la ley de caballería que su amo había recibido, no pagaría un solo cornado aunque le costase la vida.

El cuatrín también se nombra una sola vez: cuando Don Quijote discute con el autor de un libro sobre la conveniencia de editarlo él mismo (II, LXII):

—Pues ¿qué? dijo el autor. ¿Quiere vuestra merced que se lo dé a un librero, que me dé por el privilegio tres maravedís, y aún piensa que me hace merced en dármeles? Yo no imprimo mis libros para alcanzar fama en el mundo, que ya en él soy conocido por mis obras; provecho quiero, que sin él, no vale un cuatrín la buena fama.

Los ardites salen un total de doce veces en la obra, siempre aludiendo a algo de escaso valor o sin importancia. Como en el Prólogo al lector de la segunda parte del Quijote, publicada en 1615, que Cervantes aprovecha para responder con fina ironía a los insultos e injurias que contra él había dirigido un tal Avellaneda en su continuación apócrifa del Quijote:

Dile también que de la amenaza que me hace que me ha de quitar la ganancia con su libro, no se me da un ardite, que, acomodándome al entremés famoso de la Perendenga, le respondo que me viva el veinte y cuatro mi señor y Cristo con todos.

Y en De la respuesta que dio Don Quijote a su reprensor, con otros graves y graciosos sucesos (II, XXXII), nuestro hidalgo se expresa de la siguiente forma:

— Si me tuvieran por tonto los caballeros, los magníficos, los generosos, los altamente nacidos, tuviéralo por afrenta irreparable; pero de que me tengan por sandio los estudiantes, que nunca entraron ni pisaron las sendas de la caballería, no se me da un ardite: caballero soy y caballero he de morir, si place al Altísimo.



Manteo de Sancho Panza. Grabado de Doré

Para concluir, qué mejor que con unas palabras del propio Cervantes animando a la lectura de su legendaria novela: *Los niños la manosean, los mozos la leen, los hombres la entienden y los viejos la celebran.* ■

Monedas en el Quijote			
Metal	Monedas	Cambio a maravedís	Piezas (múltiplos y submúltiplos)
Oro	Ducado	375	1/2, 1, 5, 10, 20, 50 ducados
	Escudo	350 en 1537 400 en 1566 440 en 1609	Doblón (doble escudo o dobla) Doblones de a cuatro (doble doblón)
Plata	Real	34	1/2, 1/4 (Cuartillo), 1/8, 1, 2 (Real de a dos), 4 (Real de a cuatro), 8 (Real de a ocho)
Vellón (cobre y plata)	Maravedí	1	2 (Ochavo), 4 (Cuarto) y 8
	Blanca (1/2 maravedí), Cornado (1/6 maravedí), Cuatrín y Ardite		

NOTAS

- 1 Según consta en el Presupuesto de Gastos de la Comunidad de El Escorial de 1572.
- 2 Moneda de cuenta: concepto económico que se aplica para garantizar la estabilidad de las transacciones comerciales. Moneda imaginaria: en realidad, la moneda ha dejado de existir físicamente, pero se sigue usando para algunos contratos y cambios.
- 3 El real mantiene el cambio a 34 maravedís a lo largo del siglo XVI y sólo experimenta cambios en 1642 (45 maravedís) y en 1686 (64 maravedís).
- 4 Los reales y los duros se siguieron utilizando, hasta que en el siglo XX tuvieron una equivalencia de 25 céntimos de peseta y de 5 pesetas, respectivamente.
- 5 Arroba: unidad de capacidad; la arroba de aceite equivalía a 12,563 litros, y la de vino, a 16,133 litros. También se utilizaba como unidad de peso, equivalente a 11,502 kilos. Para representarla se usaba el símbolo @, que ahora se emplea en el correo electrónico.
- 6 Según aparece en una carta del P. Fr. Antonio Villacastín dirigida al Prior de El Escorial, fechada el 1 de diciembre de 1600.
- 7 La expresión *un real sobre otro* se ha seguido usando para indicar un pago al contado.
- 8 Monedas de vellón: monedas acuñadas con liga, en proporciones variables, de plata y cobre, y sólo de cobre desde el reinado de Felipe V.
- 9 Calderilla: nombre genérico aplicado a todas las monedas de poco valor.
- 10 Maravedí: (del árabe murabiti, perteneciente o relativo a los almorávides). Es una de las monedas más antiguas de España, que circuló hasta 1854. Los Reyes Católicos lo establecieron, acuñada en vellón, como parte de su sistema monetario. Efectiva unas veces y otras imaginaria, ha tenido diferentes valores y calificativos. El que últimamente corrió era de cobre y valía la trigésima cuarta parte del real de vellón. Se han dado a este nombre hasta tres plurales diferentes, a saber: maravedís, maravedises y maravedíes. El tercero apenas tiene ya uso.
- 11 Libra: medida de peso que equivale a 460 gramos.
- 12 Celemin: medida de capacidad equivalente aproximadamente a 4,625 litros.
- 13 Un real equivale a 34 maravedís, es decir, a ocho cuartos y medio.
- 14 Cornado: moneda de cobre o vellón con la cabeza del rey coronado (de ahí su nombre), equivalente a la sexta parte de un maravedí.
- 15 Cuatrín: moneda de pequeño valor que corría antiguamente en España.
- 16 Ardite: moneda de vellón de poco valor acuñada en Cataluña entre los siglos XVI y XVIII. / Cosa insignificante, de poco o ningún valor: dárselo o no dársele a uno un ardite / no estimarse en un ardite / no importar o no valer una cosa un ardite.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALVAR, A. (2005): "El Cervantes más humano", *El País Semanal*, n.º 1480, 58-67. Madrid.
- BALBUENA, L. (2004): *Cervantes, Don Quijote y las Matemáticas*, Universidad de La Laguna, Tenerife.
- BALBUENA, L. y GARCÍA, J. E. (2004): *Don Quijote y las Matemáticas*, FESPM, Madrid.
- CERVANTES, M. DE (1605): *El ingenioso hidalgo Don Quijote de la Mancha*, Edición del Instituto Cervantes (1605-2005), dirigida por Francisco Rico. Círculo de Lectores. Barcelona.
- HERNÁNDEZ, B. (1998): *Monedas y Medidas en El ingenioso hidalgo Don Quijote de la Mancha*, Crítica, Barcelona.
- HERNÁNDEZ, J. (1996): *Historia monetaria y financiera de España*, Síntesis, Madrid.
- REY, A. y SEVILLA, F. (1995): *Cervantes. Vida y literatura*, Alianza, Madrid.

Usos educativos del material *Thesaurus* para la enseñanza de las matemáticas

En este artículo analizamos los tipos de tareas que se pueden realizar con Thesaurus, un diccionario multimedia de matemáticas en red, utilizando el aula de informática para la clase de matemáticas en la ESO. Asimismo valoramos su influencia en el desarrollo de competencias matemáticas. El estudio se centra en el diseño y puesta en práctica de unidades didácticas de geometría con Thesaurus y en el análisis de los resultados de pruebas piloto realizadas por distintos grupos de alumnos.

We analyse the types of task which can be carried out with Thesaurus, a web based mathematics multimedia dictionary, in the computer room for mathematics classes in the Spanish compulsory secondary education. We also test Thesaurus influence in the development of mathematical competences. Our research is focused on the design and classroom experience of geometrical teaching units with Thesaurus and on the results of trials made by different groups of students.

Nuestros currículos recientes en la etapa secundaria promueven el uso de tecnología para el aprendizaje de las matemáticas. Las implicaciones son profundas y la investigación va desarrollando marcos teóricos que tratan de explicar causas y efectos a todos los niveles (curricular, psicológico, social, administrativo, etc.).

Por otro lado, la preparación matemática de los alumnos está siendo cuestionada no sólo por los resultados de las evaluaciones externas (como el Informe PISA), sino también en otros foros internos donde las sucesivas contra-reformas educativas son indicadores de que el sistema no está dando los resultados deseados.

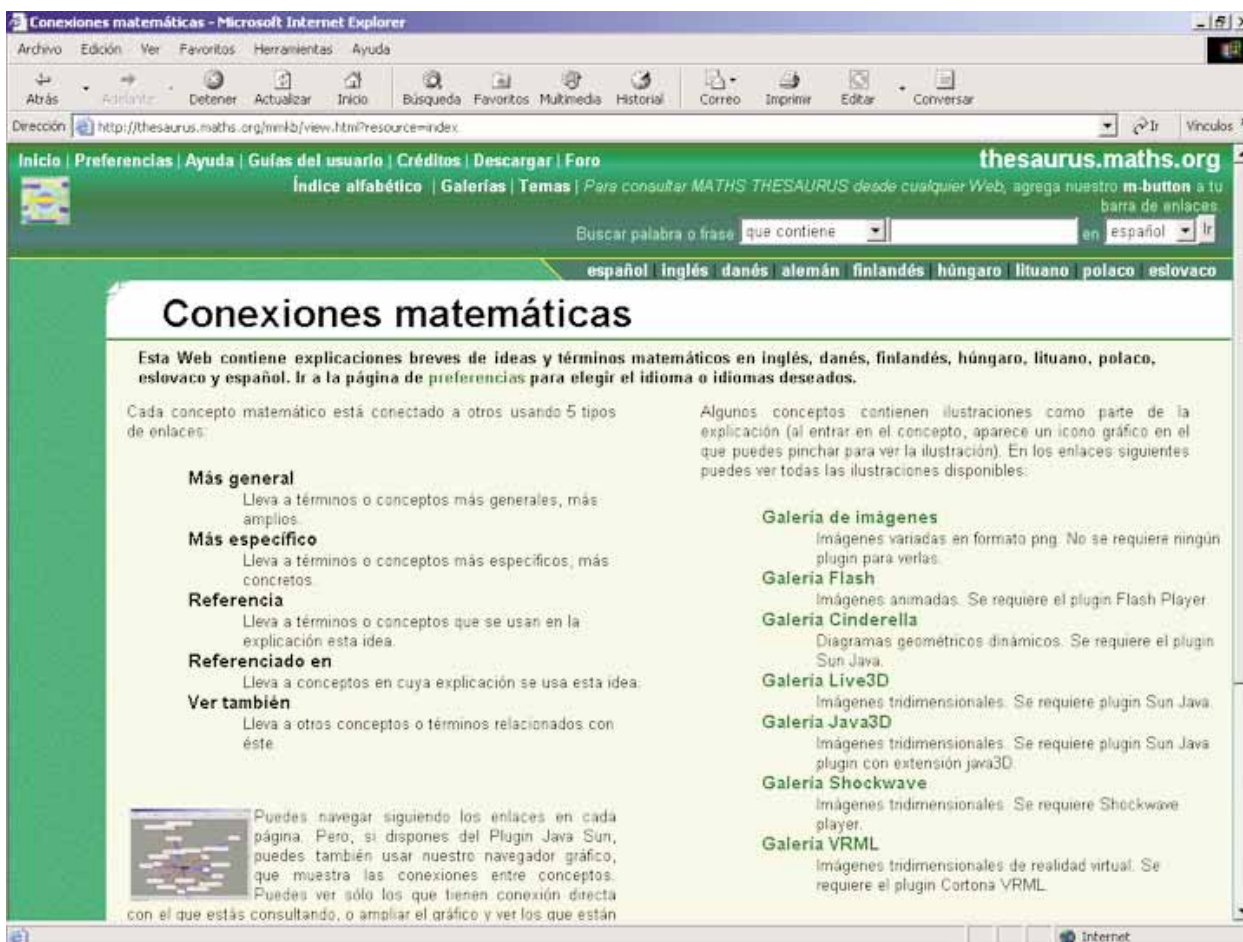
Consideramos que el uso de tecnología puede actuar como canal que aglutina y potencia el desarrollo de competencias.

Está claro que lo que esperamos que los alumnos sepan de matemáticas no se reduce a la repetición de procedimientos rutinarios. El conocimiento matemático *ampliado*, que se viene estructurando a través de la idea de *competencia* (Niss 2003; OECD 2004), incluye saber plantear y resolver proble-

mas, razonar, modelar, manejar el formalismo del lenguaje matemático, utilizar distintas representaciones, etc., aspectos que requieren la implicación del alumno en el quehacer matemático y que, por tanto, necesitan que ese quehacer se lleve a cabo en la práctica del aula.

En la confluencia de estos ejes situamos nuestro trabajo: consideramos que el uso de tecnología puede actuar como canal que aglutina y potencia el desarrollo de competencias. Partiendo de un modelo de currículo matemático basado en contenidos y de metodologías que podríamos llamar tradicionales, la introducción progresiva de elementos tecnológicos permite reconducir los objetivos y los métodos hacia modelos de enseñanza/aprendizaje basados en competencias.

J. M. Diego
 Universidad de Cantabria. Santander
M. Fioravanti
 Universidad de Cantabria. Santander
M. J. González
 Universidad de Cantabria. Santander
R. P. Gallegos
 Colegio Jardín de África. Santander
M. J. Señas
 Colegio Jardín de África. Santander



Bajo este planteamiento, hemos estructurado el artículo de la siguiente forma: en primer lugar describimos el material educativo Thesaurus, con el propósito de identificar usos educativos del mismo encaminados al desarrollo de competencias matemáticas; Hemos clasificado tipos de tareas a las que se adapta el material y hemos identificado estrategias de resolución que los alumnos han desarrollado, en las que se pone de manifiesto el desarrollo de algunas competencias matemáticas. Para ello, hemos llevado a cabo distintas experiencias de uso del material en aulas de secundaria que describimos. A partir de las observaciones realizadas en dichas experiencias, relatamos algunos aspectos relacionados con el aprovechamiento didáctico del recurso Thesaurus y con su incidencia en la metodología y la atención a la diversidad. Consideramos que este estudio es un primer paso en una línea de trabajo a la que pretendemos dar continuidad para analizar la validez de las prácticas con tecnología encaminadas al desarrollo de competencias.

Descripción del material Thesaurus

Thesaurus es una base de datos multilingüe de acceso libreⁱⁱ que contiene más de 4.000 conceptos matemáticos con más de

14.000 conexiones entre ellos y con miles de ejemplos interactivos. En la actualidad cuenta con términos en nueve idiomas, entre ellos el castellano. La iniciativa original de desarrollar este proyecto nació en 2001 de la colaboración entre la Facultad de Educación y la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Cambridge (UK) como un subproyecto de una empresa de mayor envergadura: Millennium Mathematics Project (MMP), que tiene por finalidad impulsar y apoyar la educación en matemáticas a través del uso de nuevas tecnologías, fundamentalmente vía Web.

El uso más inmediato de Thesaurus es como glosario de consulta de términos. Pero el hecho de que incorpore ejemplos que utilizan una amplia variedad de representaciones, en muchos casos representaciones gráficas dinámicas, interactivas o animadas y que proporcione una visión explícita de los vínculos entre conceptos a través de grafos de conexiones y de columnas de relaciones que contienen distintos tipos de enlaces, hace que se puedan identificar una variedad de usos educativos de este material dependiendo del tipo de tareas que se diseñen.

Dado que el diccionario es un recurso de uso escolar habitual (aunque no en matemáticas) hemos utilizado este punto de

partida como base para el desarrollo posterior de tareas que ponen en juego posibilidades más sofisticadas del recurso, es decir, tareas que requieren el intercambio de información entre sistemas de representación, o que necesitan que se interprete el lenguaje matemático con rigor, o que se aplique una definición o propiedad a un ejemplo no trivial, o que se siga un determinado razonamiento a partir de la manipulación de una representación dinámica.

En definitiva, la incorporación de Thesaurus no supone una ruptura fuerte con un modo de enseñanza tradicional. Por ello, tanto los profesores como los alumnos manifiestan una confianza inicial en su uso. Sin embargo, incorpora elementos novedosos que permiten proponer una variedad de tareas que, progresivamente, pueden condicionar los modos de resolver problemas y, en consecuencia, influir en el desarrollo de competencias. Presentamos un análisis de estas tareas.

La idea de competencia descrita en el Proyecto PISA (OECD, 2004; Rico, 2004) se manifiesta a través de la capacidad de los alumnos para emplear el conocimiento en la práctica al resolver tareas matemáticas en contexto.

Tareas y competencias matemáticas

La idea de competencia descrita en el Proyecto PISA (OECD, 2004; Rico, 2004) se manifiesta a través de la capacidad de los alumnos para emplear el conocimiento en la práctica al resolver tareas matemáticas en contexto. Este estrecho vínculo entre las tareas y las competencias está condicionado por el contenido matemático que se trate (Lupiáñez et al, 2005) y por las características del entorno en que tenga lugar el aprendizaje (Cobo y Fortuny, 2005). En particular, es destacable la influencia de la tecnología que se utilice, es decir, del conjunto de instrumentos que forman parte de las prácticas y que condicionan los modos de conocer. Pero para que una tecnología actúe como un instrumento es necesario que el alumno combine, de forma cíclica, fases en las que se adapta al material y desarrolla usos externos sobre el mismo, y fases en las que desarrolla estructuras cognitivas, esquemas de utilización, que le permiten controlar los usos externos anteriores y, con ello, modificar las formas de pensar y de resolver las tareas matemáticas (Guin et al, 2004).

Por ello, en nuestro propósito de valorar la influencia de Thesaurus hemos realizado una clasificación de los tipos de tare-

as matemáticas que se pueden llevar a cabo con este recurso teniendo en cuenta los usos externos del material que los alumnos han manifestado al resolver problemas (en las distintas experiencias que describimos). Asimismo hemos interpretado las acciones de los alumnos ante la resolución de dichos problemas en términos de competencias matemáticas. En esta interpretación hemos tenido en cuenta las características del entorno de aprendizaje en que se han llevado a cabo las experiencias y la relación de las prácticas propuestas con otras prácticas anteriores realizadas por los alumnos.

Los problemas que hemos utilizado como referencia para describir los tipos de tareas a realizar con Thesaurus han sido de contenido geométrico y tienen cabida en el actual currículo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria. Es importante observar que las tareas que vamos a describir involucran siempre más de una competencia y que los problemas que hemos planteado a los alumnos conllevan la realización de una o más de dichas tareas.

Los tipos de tareas que hemos identificado hasta el momento se resumen en la tabla 1. Después explicamos con más detalle, y a través de ejemplos concretos, los distintos tipos de tareas, así como los usos de Thesaurus que los alumnos han llevado a cabo y las competencias que consideramos involucradas. En esta descripción mencionaremos las estrategias seguidas por los alumnos.

Tareas Thesaurus:

1. Poner nombre a objetos familiares mostrados mediante alguna representación gráfica.
2. Relacionar conceptos distintos a través de sus propiedades.
3. Aplicar una fórmula, concepto o propiedad inusual a una situación conocida.
4. Aplicar una fórmula, concepto o propiedad a una situación desconocida.
5. Descubrir un concepto o propiedad nueva (y su denominación).

Tabla 1

Tareas tipo 1

En estas tareas los alumnos han de buscar un nombre técnico para referirse a conceptos cuya representación gráfica es de uso habitual en alguno de los contextos de los alumnos. Para resolverlas con éxito han de recorrer el camino de ida y vuelta entre la representación gráfica y las propiedades que aparecen en los distintos niveles de las definiciones en Thesaurus.

Ejemplo 2. Propiedades de cuadriláteros

1. ¿Qué características tienen en común los paralelogramos y los rectángulos?
2. ¿En qué se diferencian los rectángulos de otros paralelogramos?

Para resolver este problema la mayoría de los alumnos han buscado las dos definiciones implicadas a partir de los nombres y han comparado, una a una, las listas de propiedades que vienen en ellas. De esta forma, Thesaurus ha ayudado a expresar con un lenguaje riguroso y en términos de propiedades geométricas las características comunes/diferentes de paralelogramos y de rectángulos. No obstante, no todas las propiedades enunciadas en Thesaurus son directamente comparables, de forma que para resolver con éxito esta tarea es necesario deducir unas propiedades a partir de otras (por ejemplo, deducir que el paralelogramo tiene lados opuestos iguales sabiendo que son paralelos), interpretar el significado de algunas propiedades (por ejemplo, tener simetría rotacional de orden 2) y, para ello, manejar distintos sistemas de representación. Este tipo de estrategia ha dificultado el resolver correctamente la segunda pregunta y ha ignorado la jerarquía entre las figuras presentadas.

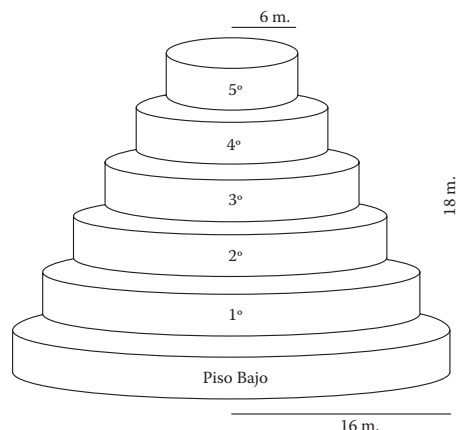
Otros alumnos, aunque en un pequeño porcentaje, han interpretado el problema en términos lógicos y, dado que Thesaurus afirma que *Un rectángulo es un paralelogramo con ángulos...* han respondido conjuntamente a las dos preguntas observando la inclusión de los rectángulos en los paralelogramos.

Por ello consideramos que se han puesto de manifiesto fundamentalmente las competencias Pensar y Razonar, Argumentar, Comunicar, y Representar en el nivel correspondiente al cluster de Reflexión.

Tareas tipo 3

En estas tareas los alumnos han de resolver cuestiones elementales en situaciones familiares pero que se encuentran condicionadas por la necesidad de recordar con precisión una fórmula, concepto o propiedad que reconocen y han estudiado, pero que no forma parte de los conocimientos de uso habitual. En este caso, cualquiera de las herramientas de Thesaurus permite localizar el conocimiento deseado de forma rápida. El hecho de contar con descripciones precisas de lo que se busca permite reconducir estrategias erróneas en la resolución de los problemas.

Ejemplo 3. Edificio acristalado:



Un arquitecto presenta un proyecto de un edificio de 6 pisos que tiene la forma de la figura.

Si la superficie lateral de cada piso lleva un cristal especial, ¿cuántos metros cuadrados (m^2) de dicho cristal se usarán en el tercer piso?

Los pasos que han seguido mayoritariamente los alumnos para resolver esta tarea son los siguientes:

1. Reconocer en el dibujo los cilindros que forman cada piso y buscar en Thesaurus la fórmula del área lateral del cilindro.
2. Deducir de los datos de la figura el radio y la altura del tercer piso.
3. Aplicar la fórmula y completar los cálculos.

El primer paso ejercita el reconocimiento de figuras geométricas simples en una situación del mundo real e identifica la existencia de una fórmula que resuelve el problema, aspectos que forman parte de las competencias de Modelar y de Representar. El segundo paso corresponde a la competencia de Pensar y Razonar en un nivel medio según los cluster que estamos manejando. El último paso involucra la competencia de Usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones.

Para la resolución de este problema los alumnos han seguido básicamente una estrategia única. Un alto porcentaje de alumnos dicen haber necesitado Thesaurus para consultar la fórmula que no recordaban, razón por la cual no hubieran resuelto el problema sin ayuda (Thesaurus, libro, profesor).

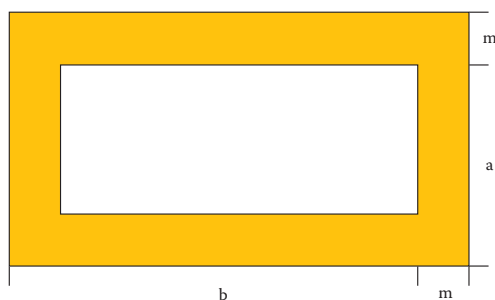
La ayuda de Thesaurus se ha considerado efectiva por la sencillez de la búsqueda (frente a un libro de texto) y por la desinhibición al consultar algo que ya deberían saber.

Tareas tipo 4

En estas tareas los alumnos se enfrentan a cuestiones que posiblemente resuelvan con pericia en contextos familiares para ellos, es decir, en situaciones que han trabajado previamente, pero ahora han de interpretarlas en una situación novedosa o que presenta alguna peculiaridad. Es necesario coordinar distintos significados de los conceptos que aparecen para poder resolverlas con éxito. La situación suele evocar en el alumno el recuerdo del ámbito de conocimiento matemático necesario para resolverla, de modo que Thesaurus le permite un acceso rápido a dicho dominio. Además le ofrece, a través de los distintos niveles de las definiciones, significados variados sobre cada concepto; y a través del grafo de conexiones y sus tipos de enlaces, le proporciona una visión de las relaciones entre conceptos. Con estos elementos, el alumno necesitará realizar una selección correcta de los significados útiles al problema. Son ejemplos de estas tareas algunas fases de los problemas en los que hay que modelar una situación.

Ejemplo 4. Marco de fotos

El ancho de un marco mide lo mismo, m , en horizontal y en vertical.
¿Son semejantes el rectángulo completo y el rectángulo en el que se coloca la fotografía?



Para resolver este problema la mayoría de los alumnos han consultado en Thesaurus algún concepto relacionado con la semejanza, hasta encontrar algún criterio operativo en las definiciones. Han consultado las imágenes gráficas correspondientes, pero las han desechado por no contener figuras directamente equiparables a las del problema. Después, mayoritariamente han intentado comprobar la proporcionalidad de los lados, pero la dificultad que les ha supuesto el no disponer de datos numéricos, ha hecho que varios alumnos intentasen aplicar un criterio geométrico mencionado en la definición de polígonos semejantes en Thesaurus: *al colocarlos encajados, las diagonales desde el vértice común coinciden*. Este criterio, desconocido para los alumnos, ha generado la duda sobre lo que significa colocar a los polígonos encajados, término que algunos alumnos han tratado de localizar en el diccionario.

Los alumnos han ejercitado las competencias de Pensar y Razonar, Argumentar, Comunicar, Representar y Utilizar lenguaje, ya que han necesitado emplear el concepto de semejanza en una situación no usual, han seleccionado el criterio de semejanza que les permitiese finalizar con éxito y argumentando su respuesta, han manipulado distintas representaciones de la noción de semejanza y han utilizado el lenguaje simbólico, todo ello en el nivel correspondiente al cluster de Reflexión.

Tareas tipo 5

En estas tareas los alumnos han de llevar a cabo estrategias que les lleven a descubrir propiedades o conceptos que no conocen de antemano. Encontrar la denominación exacta de un concepto o propiedad exige a los alumnos manipular con rigor el lenguaje matemático. Dado que Thesaurus ofrece relaciones que muestran el dominio completo al que pertenece un concepto, permite acercarse a él a través de un proceso de búsqueda en el que se pueden combinar elementos gráficos y texto escrito. Por ello, además del descubrimiento de un nombre nuevo, es fundamental el proceso seguido para obtenerlo. En este proceso Thesaurus sirve como soporte de confianza dado que el alumno está seguro de que la respuesta a su tarea se encuentra en Thesaurus. Entran dentro de este apartado las tareas para las cuales es importante contar con construcciones manipulables de geometría dinámica. Thesaurus dedica una galería a estas construcciones, que se encuentran enlazadas a sus correspondientes definiciones.

Ejemplo 5. Teorema de Varignon^v

Completa las afirmaciones siguientes y responde a las preguntas:

- Al unir los puntos medios de los lados de una cometa se obtiene un _____.
- Busca otros cuadriláteros cuyos puntos medios determinen el mismo tipo de cuadrilátero que la cometa.
- Las diagonales de la cometa y de los cuadriláteros que hayas obtenido en el apartado (b) tienen una propiedad común. Indica cuál es esa propiedad y localiza en Thesaurus el nombre que se da a los cuadriláteros de ese tipo.

Establece ahora un resultado general:

Al unir los puntos medios de los lados de un cuadrilátero _____ se forma un _____. Trata de justificarlo.

Para resolver este problema, los alumnos han buscado información relativa al Teorema de Varignon y han experimentado

con las galerías que contienen representaciones dinámicas de utilidad para este problema. También han buscado algunas definiciones básicas –cometa–. A partir del manejo de las representaciones dinámicas, han realizado conjeturas (las diagonales se cortan perpendicularmente), y las han validado buscando términos en Thesaurus que pudiesen contener directamente el enunciado de su conjetura (cuadrilátero orto-diagonal). Para ello, han usado con profusión la columna de relaciones y, ocasionalmente, el grafo de conexiones. Ante la demanda de justificación que les pedía el problema, no han realizado demostraciones matemáticas formales que apoyasen la validez de sus hallazgos, aunque en algunos casos han tratado de utilizar definiciones y propiedades de Thesaurus como apoyo a sus argumentaciones informales.

Consideramos que ante estas tareas los alumnos han ejercitado fundamentalmente las competencias de Pensar y Razonar, Argumentar, Representar y Utilizar lenguaje, en niveles que corresponden al cluster de Reflexión.

Experiencias realizadas

Hemos llevado a cabo dos tipos de experiencias distintas:

a) Pruebas piloto: Durante periodos aislados de entre 1 y 2 horas de duración, un total de 50 alumnos de 4º ESO, Opción B, de tres centros distintos han resuelto cuestionarios de preguntas aisladas sobre temas conocidos. Las características de este tipo de experiencia han sido las siguientes:

- Se han desarrollado en el aula de Informática del centro, con uno o dos alumnos por ordenador.
- En el momento de iniciar la prueba los alumnos desconocían Thesaurus y eran informados brevemente (durante unos 15 minutos) de sus características técnicas. A partir de ese momento se les entregaban las hojas de trabajo con todos los ejercicios que debían resolver. Estas resoluciones se recogían al final del periodo de tiempo marcado y se resolvían de forma anónima.

El uso de Thesaurus propicia la constitución de un entorno de aprendizaje rico y estimulante.

- Han estado presentes sus profesores, además de otros miembros del equipo para garantizar una respuesta rápida a sus dudas sobre los enunciados de las preguntas o para resolver problemas de tipo informático.
- Se ha dejado libertad a los alumnos para que hablasen cuando lo desearan entre sí o con los profesores.

b) Unidad Didáctica^{vi}: Con el propósito de obtener datos sobre los usos de Thesaurus que se desarrollan al cursar una

The screenshot shows the Thesaurus.maths.org website. The main content area is titled 'Cardioid' and describes a dynamic geometric diagram in Cinderella. It includes a search bar at the top with 'español' selected. Below the title, there is a definition of a cardioid: 'Una epicicloide con un hueco. Es la curva que describe un punto de una circunferencia rodante cuando gira externamente, sin deslizamiento, sobre otra circunferencia fija del mismo radio. Su ecuación en coordenadas polares es: $r = 2a(1 - \cos \theta)$ '. To the right of the definition is a diagram of a cardioid curve. Below the definition, there is a section titled 'Relaciones' (Relations) which lists: 'Más general: (en) Cuspid of a circle, (en) Epicycloid, (en) Limaçon, (en) Sinusoidal spiral'. At the bottom, there is a section titled 'Referenciado en' (Referenced in) which lists: '(en) Parabola, (en) Polar graphs'.

unidad didáctica completa, los alumnos de 2º de ESO han trabajado *La proporcionalidad geométrica* durante un mes, en una experiencia con las siguientes características:

- Los alumnos han trabajado en el aula de Informática dos días a la semana, dos alumnos por ordenador, con su profesor habitual.
- Se les han entregado hojas de trabajo que inicialmente contenían tareas muy dirigidas, pero que progresivamente incluyeron tareas para que cada alumno investigara y llegara a conclusiones por sí mismo.
- Al finalizar cada sesión se han comparado los resultados y los procedimientos empleados por los alumnos en la resolución de los ejercicios y se han sacado las conclusiones pertinentes.
- La evaluación del tema se ha realizado a través de un examen.

Esta experiencia se realizó también con un grupo de matemáticas de 4º de ESO, opción A, en vista de la positiva actitud que manifestaron los alumnos con mayores dificultades en matemáticas en el grupo de 2º de ESO.

El diseño de tareas adaptadas a cada una de las herramientas de Thesaurus es fundamental si se desean incorporar a la cultura escolar de los alumnos.

Algunas observaciones extraídas de las Experiencias

Sobre el aprovechamiento didáctico de los recursos

Al inicio de la experimentación considerábamos que el grafo de conexiones constituía uno de los mayores atractivos de Thesaurus al proporcionar una visión explícita de la estructura de un tema mediante distintos tipos de vínculos entre conceptos. Además de su utilidad para guiar determinados procesos de búsqueda, considerábamos que ayudaría a la resolución de tareas que demandan directamente relacionar conceptos, por ejemplo, la realización de un mapa conceptual. No obstante, durante las experimentaciones hemos observado que los alumnos utilizan con escasa frecuencia el grafo de conexiones. Al no formar parte de sus instrumentos de uso habituales, no lo utilizan de forma espontánea y, aún en los casos en los que el profesor les sugiere su uso, no lo utilizan

de forma productiva. Por ejemplo, al demandarles que realicen un mapa conceptual con las figuras que hemos mostrado en las tareas tipo 1, los alumnos no siguen una estructura lógica clara y no consiguen un aprovechamiento satisfactorio de la información que el grafo contiene: mayoritariamente realizan clasificaciones de los polígonos en forma de partición (por ejemplo, no reconocen que el cuadrado sea rombo ni rectángulo), mientras que el grafo de Thesaurus les presenta una estructura jerárquica.

Respecto del uso de las *galerías de imágenes* podríamos decir algo similar. La variedad de imágenes que aparecen sobre algunos conceptos, combinada con el texto de las definiciones y el lenguaje matemático en que se expresan las propiedades, proporciona un entorno propicio para intercambiar información entre sistemas de representación. Por ello, cuando realizábamos la presentación inicial del material a los alumnos, resolvíamos algunos problemas-modelo que se apoyaban en el uso de las imágenes. Esto propició que, en un primer momento, los alumnos tendiesen a buscar ante todo imágenes asociadas a cada problema, sin pensar si era necesario o no, o si era fácil o complicado encontrarlas. De esta forma, la mayoría de los alumnos utilizó, al principio, las galerías de imágenes como *diccionarios gráficos* con la dificultad que conlleva el hecho de que en Thesaurus no hay una clasificación lógica de las imágenes. Posteriormente, las galerías se usaron con menos frecuencia de la esperada. Los alumnos continuaron su trabajo buscando las definiciones vía texto o a través de la columna de relaciones, de modo que el intercambio de información entre sistemas de representación apoyado por Thesaurus fue más bien caótico, poco reglado y poco consciente. No obstante, se ha observado que aquellos alumnos con mayores dificultades de aprendizaje han utilizado las imágenes con mayor frecuencia, y que este elemento de apoyo les ha conducido al éxito en numerosas ocasiones.

Observamos, por tanto, que ha dominado el uso de Thesaurus como diccionario, a través de la búsqueda de nombres. Este uso permite introducirlo en el aula de forma natural, sin que suponga una gran ruptura respecto de las prácticas matemáticas habituales, aunque luego hay que hacer un esfuerzo para conseguir que los alumnos utilicen otras herramientas contenidas en Thesaurus a las que reconocemos un alto potencial educativo pero que no se usan de forma espontánea.

Sobre la metodología y la atención a la diversidad

Desde el punto de vista de los cambios que Thesaurus ha producido en las prácticas en el aula y ante las tareas que nosotros hemos diseñado hemos observado que los alumnos que habitualmente en las clases tradicionales mostraban dificultades de atención y/o de comprensión fueron capaces de participar y de obtener resultados por sí mismos, lo cual les dio una mayor seguridad y deseo de continuar con el tra-



bajo. De hecho, algunos de estos alumnos utilizaron Thesaurus desde su domicilio en un intento por resolver las tareas propuestas. Mostraron un gran interés por algo en lo que ellos se sentían capaces de participar y que les proporcionaba resultados inmediatos y satisfactorios. Los alumnos con buenos resultados en Matemáticas también valoraron positivamente el material, como un libro de consulta cómodo, mientras que los alumnos *intermedios* fueron los que manifestaron una mayor apatía ante el uso de Thesaurus. En todos los casos, se desarrollaron de forma espontánea frecuentes interacciones entre los grupos de alumnos, lo que permitió superar algunas dificultades matemáticas durante la resolución de problemas.

Por otro lado, el trabajo individualizado ha propiciado que los alumnos no tuviesen miedo a resolver un problema: sabían que si estaba mal no iba a ser conocido por el resto, lo que fomentaba que continuasen buscando e intentando resolver las dificultades.

Respecto del ritmo de trabajo, el uso de Thesaurus ha permitido flexibilizarlo. El profesor tenía la posibilidad de elaborar o reelaborar material de trabajo según los grupos de alumnos, adaptando así las actividades a distintos niveles de consecución de objetivos: durante el desarrollo de la unidad didáctica, los alumnos con mayor ritmo de aprendizaje trabajaban actividades de ampliación mientras que los de ritmo lento trabajaban actividades de refuerzo, sin que ninguno saliera perjudicado.

Los alumnos rellenaron una encuesta de satisfacción en la que debían valorar tanto aspectos técnicos (facilidad de uso,...) como relativos al aprendizaje (las galerías gráficas te han ayudado,...). En todos los casos la experiencia ha sido valorada muy positivamente y los alumnos manifestaron su disposición a continuar trabajando con Thesaurus los temas siguientes.

Situaciones evitables y recomendaciones ante el diseño de tareas

En el diseño de actividades con Thesaurus hemos constatado la escasa efectividad de las actividades excesivamente guiadas, así como de las tareas completamente abiertas. Por ello consideramos que debe buscarse un equilibrio entre la fluidez del trabajo del alumno y el estímulo de la búsqueda, la imaginación y el pensamiento. Una sugerencia que nos ha resultado útil es iniciar la actividad con cuestiones que se pueden resolver mediante búsquedas sencillas en Thesaurus y deducciones inmediatas, en el cluster de Reproducción. De este modo los alumnos ganan confianza para intentar, a continuación, la resolución de problemas de los clusters de Conexiones y Reflexión. En estos casos ha sido indispensable la intervención del profesor. Éste ha aportado de forma habitual sugerencias a los alumnos que se encontraban ante situaciones que no podían resolver solos. Ha sido frecuente que los alumnos necesitasen el refuerzo de la opinión del profesor ante estrategias válidas, por no tener seguridad de que el camino seguido en Thesaurus o la interpretación que estaban realizando de lo que leían era la correcta. En ese sentido consideramos que el papel del profesor consiste en acompañar al alumno frente al nuevo 'agente' Thesaurus. Las intervenciones de tipo magistral han sido escasas y poco eficaces por no existir un ritmo común a todo el grupo clase.

La introducción de conceptos nuevos mediante tareas con Thesaurus ha necesitado que éstos fuesen fáciles de encontrar y que las tareas propuestas indicasen con claridad en su enunciado algún modo de comenzar a usar Thesaurus. Por el contrario, si los alumnos conocían la terminología básica de un tema, iniciaban de forma espontánea algunas estrategias que, aunque poco sistemáticas en sus momentos iniciales, servían para establecer búsquedas y relaciones que permitían finalizar con éxito.

El hecho de acompañar los enunciados de las tareas con algunas figuras o imágenes también ha condicionado las estrategias a seguir. En particular, consideramos que las figuras geométricas que forman parte de un enunciado deben presentarse, dentro de lo posible, con la mayor generalidad que corresponda a la tarea planteada. De lo contrario, como se ha visto durante las experiencias, figuras concretas han condicionado las búsquedas en Thesaurus y han guiado estrategias adaptadas a un dibujo que no permitía dar respuesta a la cuestión general planteada (y de difícil justificación ante el alumno).

Conclusión

A través de nuestras experiencias hemos constatado que el uso de Thesaurus propicia la constitución de un entorno de aprendizaje rico y estimulante. Partiendo de unas prácticas escolares habituales y de unas tareas matemáticas familiares, permite incorporar progresivamente elementos nuevos que son influyentes desde el punto de vista del desarrollo de competencias.

No obstante, las potencialidades que a priori identificamos en el material y su facilidad de uso no garantizan que los alumnos obtengan un aprovechamiento espontáneo. Por ello, el diseño de tareas adaptadas a cada una de las herramientas de

Thesaurus es fundamental si se desean incorporar a la cultura escolar de los alumnos y a sus prácticas los nuevos elementos que este material aporta.

Apoyándonos en el marco de competencias PISA, hemos descrito cinco tipos de tareas y las hemos ejemplificado mediante problemas que los alumnos han resuelto, con ayuda de Thesaurus, ejercitando distintas competencias matemáticas. En ellas, los alumnos han recorrido el camino de ida y vuelta entre las galerías gráficas y la interpretación de texto para nombrar figuras o descubrir propiedades desconocidas; han empleado la columna de relaciones y el grafo de conexiones para clasificar objetos matemáticos según distintos criterios; han localizado temas genéricos, a partir de los cuales han encontrado la propiedad conocida pero olvidada que les ha permitido resolver un problema; han utilizado los enlaces del grafo de conexiones para coordinar o seleccionar los significados útiles a un problema; han interpretado el lenguaje matemático de los distintos niveles de las definiciones para encontrar la denominación exacta de un concepto o propiedad.

De esta forma, hemos iniciado un trabajo encaminado a valorar la validez de Thesaurus para activar el conocimiento del alumno en situaciones prácticas y para desarrollar distintas competencias matemáticas. ■

NOTAS

i Adoptaremos el listado de competencias utilizado en el diseño y evaluación de los tests de matemáticas de PISA 2000, que puede encontrarse en (Rico, 2004):

1. Pensar y razonar
2. Argumentar
3. Comunicar
4. Modelar
5. Plantear y resolver problemas
6. Representar
7. Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones.

ii <http://thesaurus.maths.org/>

La versión española de Maths Thesaurus es un proyecto desarrollado en la Universidad de Cantabria y está parcialmente subvencionado por el Gobierno de Cantabria.

iii Thesaurus es un material en desarrollo que progresivamente se va adaptando a las necesidades de cada idioma. Actualmente se

han incorporado determinados nombres de uso común en castellano (trapezoide, romboide) que inicialmente no existían dado que la versión contenía sólo la traducción de términos habituales en inglés.

iv PISA asume que ante una tarea matemática se pueden poner en juego varias competencias, aunque con distinta profundidad. Por ello organiza las competencias en tres cluster (o grupos de competencia): Reproducción, Conexiones y Reflexión. La idea de cluster conjuga información, por un lado, sobre las características de las tareas y, por otro lado, sobre el tipo de demandas cognitivas que se requieren para resolverlas (OECD 04).

v En la prueba pasada a los alumnos, estas preguntas a, b y c iban precedidas y seguidas de otras, todas ellas relacionadas con el Teorema de Varignon.

vi Hemos desarrollado una serie de Unidades Didácticas basadas en el uso de Thesaurus que pueden solicitarse a cualquiera de los autores de este trabajo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

COBO, P. y FORTUNY, J.M. (2005): "El sistema tutorial AgentGeom y su contribución a la mejora de las competencias de los alumnos en la resolución de problemas de matemáticas". *Actas del IX SEIEM*, Córdoba, <http://blues.uab.es/%7Eipdmc/tecnologia/tecnologia.htm>

GUIN, D., RUTHVEN, K. y TROUCHE, L. (Eds.) (2004): *The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

NISS, M. (2003): "Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: The Danish KOM Project", *3rd Mediterranean Conference On Mathematical Education*, A. Gagatsis & S. Papastavridis (Eds.), Athens.

LUPIÁÑEZ, J. L., RICO, L., GÓMEZ P. y MARÍN, A. (2005): "Análisis cognitivo en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria", *CD-Rom del V CIBEM Congreso Ibero-Americano de Educação Matemática*, Oporto, Portugal.

OECD (2004): *Marcos teóricos de PISA 2003: la medida de los conocimientos y destrezas en matemáticas, lectura, ciencias y resolución de problemas*, Ministerio de Educación y Ciencia, Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo, Madrid.

RICO, L. (2004): "La evaluación de Matemáticas en el Proyecto PISA", *Aproximación a un modelo de evaluación: el Proyecto PISA 2000*, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo, Madrid.

Matemáticas y culturas: Una relación pendiente de profundizar¹

Día a día aumenta en nuestras aulas el número de alumnos de culturas diferentes. Este cambio social repercute en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La diversidad cultural no se acaba cuando podemos comunicarnos usando la misma lengua, ni resulta del todo cierto que la educación matemática sea tan universal. Tenemos un problema, la relación entre culturas y matemáticas está esperando que profundicemos en ella. De todo ello se habla en este artículo y se muestran ejemplos y materiales extraídos de distintas aulas y profesores. Finalmente, se apuntan algunas líneas de trabajo para profundizar en el tema.

As days go by a growing number of students with a different cultural background can be found in our classes. This social change not only affects the teaching methods but also the learning of maths. Speaking the same language does not involve sharing a common background, as mathematical training is not necessarily universal. We do have a problem, the relation between cultures and maths calls for greater depth. This is dealt with in this article, where examples and materials from different classes and teachers are shown. Finally, some working lines are hinted for further deepening.

El título de este artículo refleja mi opinión sobre el tema. Pienso que es preciso profundizar en la relación entre Cultura y Matemáticas, y no pretendo en absoluto decir la última palabra. Sólo deseo aportar algunos elementos de reflexión basados, eso sí, en la práctica de educación matemática de algunos centros de Primaria y Secundaria de Cataluña. El plural en el título *Culturas* responde al deseo de poner el énfasis en un hecho habitual en nuestra sociedad globalizada actual: nuestras aulas están llenas de culturas diversas, más allá de las que llamamos *inmigradas*. Sostengo que la diversidad de culturas es grande, aún sin considerar a los alumnos venidos de otros países. Por suerte, desde el franquismo hasta la actualidad, nuestra sociedad se ha abierto considerablemente y ahora también los alumnos nacidos en nuestro país son muy diversos. Consecuentemente con estas ideas de partida:

- comenzaré por intentar mostrar que, realmente, tenemos un problema;
- que este problema tiene relación con las matemáticas y las culturas;
- que se detecta tanto en la enseñanza de las matemáticas como en su aprendizaje;
- acabando con unas pinceladas sobre posibles caminos de solución.

Mi aportación se basa en el hecho de ser profesor de matemáticas en un instituto y haber investigado específicamente sobre este tema: la relación entre Matemáticas y Cultura. Soy

profesor de matemáticas del IES Vilatzara de Vilassar de Mar, cerca de Barcelona; soy miembro del grupo de trabajo Multiculturalitat y Matemàtiques (MUMA) desde 1997; llevé a cabo el proyecto de investigación en Educación Matemática que lleva por título *Mejorar la atención a la diversidad multicultural desde el área de matemáticas*; he participado en el libro² de Kluwer Academic Editions *Transitions Between Contexts of Mathematical Practices*, del que son editoras Guida de Abreu, Alan J. Bishop y Norma C. Presmeg; finalmente, he publicado trabajos y artículos diversos sobre la práctica del profesorado en aulas multiculturales.

Desde el franquismo hasta la actualidad, nuestra sociedad se ha abierto considerablemente y ahora también los alumnos nacidos en nuestro país son muy diversos.

Xavier Vilella Miró
 IES Vilatzara.
 Vilassar de Mar. Barcelona

¿Tenemos un problema?

Comencemos estableciendo si realmente tenemos o no un problema. Presento las respuestas de diferentes profesores a la pregunta directa *¿tenemos un problema?*

- Sí (todos de acuerdo): un problema de comunicación.
- *¿Sólo de comunicación?*
- *Profesor 1:* Sí, una vez superada la barrera lingüística, desaparece el problema.
- *¿Y en Matemáticas?*
- *Profesor 2:* Mucho más fácil que en otras materias: las matemáticas son universales, se trabaja con símbolos internacionales, no se utiliza mucho el lenguaje.

¿Símbolos internacionales?

Los guarismos de una alumna paquistaní son los de la columna de la derecha:

1	2
2	2
3	13
4	8
5	12
6	14
7	7
8	6
9	20
10	22
11	

La conversación en la clase entre la maestra y la alumna fue la siguiente:

- *Zaima:* Profe, tu ocho es mi cuatro.
- *Profesora:* ¿Cómo puede ser, Zaima?
- *Zaima:* En mi país, tu ocho es mi cuatro, de verdad.

Y era verdad.

Dos y dos hacen cuatro, sí, pero...

Parece que los símbolos de los que hablaba aquel profesor no son tan universales. ¿Y las operaciones? ¿Sumar? ¿Restar? ¿Las tablas?

Los algoritmos que usamos habitualmente son uno de los temas que sirven a algunos profesores de Educación Compensatoria para establecer el llamado *nivel matemático* de un alumno que llega a un centro desde otro país.

Con muy buena voluntad, y mejor intención, preparan unas pruebas de entrada para determinar cómo enfocar su aprendizaje de matemáticas en el centro receptor.

COLLOCA I CALCULA ضَعِّقْ وَحَسِّبْ

$$210 - 25 = \quad \quad \quad 56 + 320 + 9 + 70 =$$

CALCULA احْسِبْ

$$\begin{array}{r} 573 \\ 189 \\ + 267 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 422 \\ - 105 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 501 \\ - 128 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 932 \\ \times 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 125 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$$

Aquí está una de ellas. Si pensamos que las matemáticas no tienen ninguna relación con las culturas, más allá de entendernos en clase cuando hablamos, esta sencilla prueba debería servir, por qué no, para establecer si un alumno recién llegado sabe o no sabe hacer una u otra cosa.

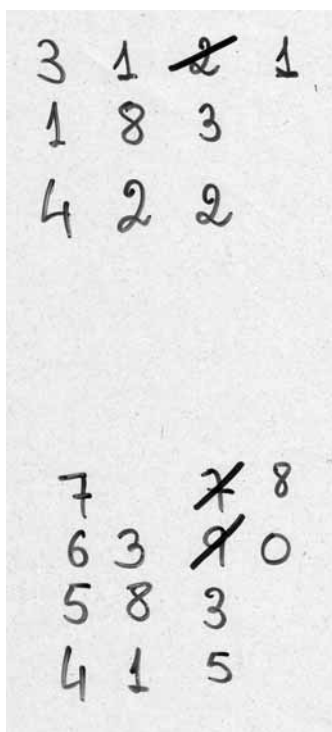
Pero... tenemos un problema

Mohamed llega a una escuela con 10 años, proviene de una zona pobre de Marruecos. Se le pasa la prueba de *nivel matemático*: los resultados muestran claramente que no sabe ni sumar, ni restar, ni las tablas.

Por tanto, se toma la decisión de que asista regularmente al aula de educación especial del centro, en la que se pasará un curso entero intentando aprender estas cosas.

A final de curso, cambia de escuela. La maestra que lo recibe en este otro centro es sensible a la relación entre matemáticas y culturas, y le hace sentir seguro. Quiere *saber cómo trabaja el alumno*, no solamente enseñarle a trabajar. Y el alumno opera ante ella libremente.

Observad atentamente estas dos operaciones hechas por Mohamed: la primera es una resta, y la segunda una suma.



Evidentemente, las operaciones son las mismas en Marruecos que en Cataluña, pero este alumno se pasó un curso entero yendo al aula de educación especial, a aprender aquello que ya sabía hacer.

La maestra intentó averiguar alguna cosa más:

- *Maestra*: ¿Cuánto hace que lo sabías hacer así?
- *Mohamed*: Mucho, lo aprendí hace años en Marruecos.
- *Maestra*: ¿Y por qué no lo hacías así?
- *Mohamed*: Los otros lo hacían diferente, he de aprender como los otros.
- *Maestra*: ¿Siempre rectificas y tachas el 2?
- *Mohamed*: No, ahora sí, porque hace un año que no practico...

El padre de Mohamed es un buen mecánico que trabaja sin papeles. El cambio de escuela fue obligado por el trabajo del padre y el cambio de residencia, y el hijo había recibido órdenes estrictas de su padre de no saber nada, no contestar nada, dada su precaria situación legal. Mohamed pasaba por saber mucho menos de lo que realmente sabía.

La diferencia invisible

Parece que con los alumnos inmigrados tenemos un problema, y que no es únicamente de comunicación. Pero, ¿sólo con los alumnos inmigrados?

Sin entrar en detalles sobre la pregunta que lanza el profesor en esta clase, aquí tenéis unas secuencias recogidas en diferentes aulas de 1.º de ESO³:

- *Profesor*: ¿Cuál es la distancia más corta entre dos puntos?
- *Alumno 1*: La línea recta.
- *Alumno 2*: No, no es la recta, depende, no siempre se puede...
- *Profesor*: ¿Depende? ¿De qué depende?
- *Alumno 2*: De las calles.
- *Profesor*: ¿De las calles?
- *Alumno 2*: Si son rectas o torcidas.
- *Profesor*: ¿Si son rectas o torcidas las calles?
- *Alumno 2*: Si las calles son rectas, has de ir haciendo cuatros...

No podemos entender de qué habla este alumno porque nos falta un dato: es el hijo de un taxista de Barcelona. Su concepción de la línea recta es muy estricta, y pone en marcha su experiencia personal para mantener una opinión divergente en medio de un grupo y delante de un profesor que no le entienden. Si el profesor no se interesa por escucharle, la diferencia no se hubiese hecho visible.

La contextualización

Otro diálogo con el mismo detonante:

- *Profesor*: ¿Cuál es la distancia más corta entre dos puntos, por ejemplo Barcelona y Nueva York?
- *Alumno 1*: La línea recta.
- *Alumno 2*: Siguiendo el paralelo.
- *Alumno 3*: Cuando yo viajé a Nueva York, desde el avión vimos los hielos de Canadá. No se va recto...
- *Profesor*: ¿Qué relación ves entre los hielos de Canadá y la distancia más corta?
- *Alumno 3*: Es más corto pasando por encima de Canadá que siguiendo el paralelo, en el avión nos lo explicaron con un mapa.
- *Profesor*: Coge un globo de la Tierra y explícalo a los compañeros.

Para un profesor de matemáticas es un regalo esta intervención, pero la podrá aprovechar siempre y cuando esté dispuesto a admitir que los alumnos de 12 años pueden entender alguna cosa de la geometría de la esfera. A veces, y esto lo afirmo rotundamente, aunque no es el tema de el presente artículo, es preciso subir el nivel de las matemáticas que enseñamos para atender correctamente la diversidad del aula.

Subir el nivel no quiere decir enseñar más temas ni que sean más complicados, claro está. Me refiero al necesario reto próximo que debe plantearse al alumnado. Pero no es el tema de hoy.

Todavía un diálogo más:

- *Profesor*: ¿Cuál es la distancia más corta entre dos puntos?
- *Alumno*: ¿Qué puntos?
- *Profesor*: Dos puntos cualesquiera.
- *Alumno*: ¡Necesito saber los puntos!

Este alumno, ya lo veis, necesita saber los puntos, no puede resolver el problema de forma abstracta. Le resulta necesario conocer alguna referencia al contexto, al entorno, a aquello concreto que le sirva de referencia.

Ya podemos extraer unas *primeras conclusiones*:

- Tenemos un problema (¿un reto?).
- Es un problema complejo.
- Afecta a muchos alumnos, no sólo a los inmigrados.

¿País rico o país pobre?

Pero aún hay más. A menudo se asocia la atención a la diversidad a la emigración que proviene de países pobres. De alguna manera, hay un sesgo en la consideración de *diverso*, y se prescinde parcialmente de considerar *diverso* a un alumno que proviene de un país rico. ¿Esto es del todo cierto?

Aquí tenéis otra página de aquella prueba inicial para alumnos recién llegados. Fijaos en las cajas de dividir que a nosotros nos son tan familiares...

Un alumno de 13 años llega a un instituto del área metropolitana de Barcelona, hace 7 meses, procedente de los EEUU, pasando por Perú. Divide de esta manera:

De un dígito

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 14} \\ \underline{4} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \overline{) 16} \\ \underline{16} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \overline{) 14} \\ \underline{14} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \overline{) 24} \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

De dos dígitos

$$\begin{array}{r} 12 \overline{) 24} \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \overline{) 64} \\ \underline{64} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 38 \overline{) 76} \\ \underline{76} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 43 \overline{) 86} \\ \underline{86} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 55 \overline{) 110} \\ \underline{110} \\ 0 \end{array}$$

Parece, por tanto, que tampoco los algoritmos, o la formalización de los mecanismos de las operaciones, son compartidos entre los países del primer mundo. Posiblemente este alumno de los EEUU tendría problemas para realizar las divisiones de la *prueba de nivel* anterior ¡...y no será necesariamente porque no sepa dividir! Quizás, viniendo de un país rico, no necesitando esconder nada, tendrá la oportunidad de dar a conocer a su profesorado que ya sabe dividir, pero de otra manera.

Unidades diferentes, ¿relaciones diferentes?

Otra página de la prueba inicial de nivel matemático. Incluye cambios de unidades... de nuestras unidades, claro está.

$$4 \times 3 = \dots \quad 15 \times 2 = \dots$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 67 \\ \times 8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 275 \\ \times 15 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 349 \\ \times 36 \\ \hline \end{array}$$

$$9 : 3 = \dots \quad 25 : 5 = \dots \quad 42 : 7 = \dots \quad 150 : 3 = \dots$$

$$155 \overline{) 5}$$

$$239 \overline{) 7}$$

$$4778 \overline{) 62}$$

COMPLETA تمة

$$\begin{array}{r} 953 \\ - 390 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1538 \\ - 609 \\ \hline \end{array}$$

$$8 \times \square = 72$$

$$7 \times \square = 49$$

CALCULA احسب

$$\begin{array}{r} 203 \\ \times 36 \\ \hline \end{array}$$

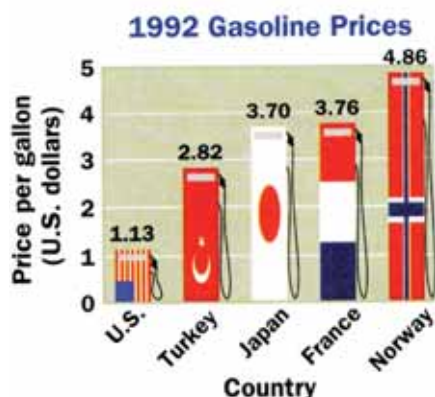
$$5492 \overline{) 27}$$

$$\begin{array}{r} 542 \\ \times 702 \\ \hline \end{array}$$

$$15 \text{ Km} = \square \text{ m}$$

$$25 \text{ m} = \square \text{ cm}$$

El hecho es que los alumnos procedentes de países de cultura anglosajona (original o importada) utilizan —no en exclusiva— otras unidades de medida, como ya sabemos.



Esta diferencia cultural no sólo influye en las unidades empleadas, sino también en algunas relaciones que son habituales en nuestro entorno: por ejemplo, en nuestro país, la cantidad de litros de gasolina que gasta un coche al recorrer 100 km. es un estándar de referencia para comparar vehículos diferentes. En los libros de introducción al álgebra de EEUU que he podido consultar, su estándar es otro: los km. que puede recorrer un vehículo con 1 galón de gasolina.

Las repercusiones de trabajar con unidades diferentes son múltiples. Por ejemplo, en un problema procedente de una Introducción al Álgebra de EEUU, se señala la fórmula del espacio recorrido 16 t^2 pies, que, de entrada, no nos dice mucho, hasta que la transformamos en la conocida mitad de $9,8 \text{ t}^2$ metros.

Matemáticas y culturas

Ahora podemos formular algunas hipótesis de trabajo referidas a las Matemáticas y las culturas:

- La universalidad de las matemáticas no es uniforme ni homogeneidad.
- Cada cultura desarrolla unas matemáticas ligadas: al contexto, a la realidad, a las necesidades y a los problemas que han de resolver.

Justamente por esto las matemáticas son tan importantes y tan útiles en todas partes, por su relación con la cultura, porque las matemáticas son parte de las culturas de los diferentes pueblos del mundo.

Quizás si nuestro currículum de matemáticas se acercase más a las 6 actividades matemáticas que Bishop⁴ ha identificado en todas las culturas, podríamos conseguir un mejor aprendizaje por parte de todo el alumnado:

- Contar, cuantificar el entorno.
- Localizar un lugar en relación a otros.
- Medir con más o menos precisión.
- Diseñar, desde la dimensión estética de toda cultura.
- Jugar, con el establecimiento de normas y reglas de inferencia.
- Explicar, como conexión entre el razonamiento y la estructura lingüística.

Actitudes del profesorado

Ante toda esta problemática, ¿cuáles son las actitudes del profesorado? Os presento algunas respuestas ante la diversidad cultural en sus aulas⁵:

La pregunta era: ¿Es preciso asumir el reto de la diversidad cultural en nuestras aulas?

- P_1 : El tema está de moda. Ahora todo el mundo se apunta a ser intercultural, pero sólo son un 2% de la población. ¡No hay para tanto!
- P_2 : A mí, antes, me preocupaba mucho cómo actuar en una clase multicultural, pero ahora lo tengo claro: se ha de normalizar la situación de los alumnos que vienen de fuera. Se les ha de tratar a todos por igual, sin señalar ninguna diferencia. Señalando la diferencia es más fácil caer en un trato discriminatorio.
- P_3 : Quizás hemos de hacer adaptaciones en sociales, pero en matemáticas...

Estas opiniones son un reflejo de diferentes actitudes negativas, la mayoría de las veces debidas al desconocimiento y a la angustia de no saber exactamente qué hacer.

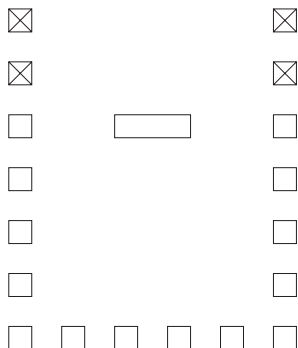
Cada uno a su mesa...

Veremos ahora cómo alguna de ellas se transforma en hechos, en decisiones, en el aula. Aquí tenéis un esquema de la situación de las mesas en la clase de un profesor angustiado (de los que han respondido anteriormente).

Ya habréis adivinado que las mesas marcadas con una cruz son las de los alumnos inmigrados de países pobres. No sabía cómo afrontar el reto de la diversidad en clase de matemáticas y ha optado por esconder el problema.

Parece ser que la formación del profesorado no consigue situar dos cosas que servirían para afrontar el reto:

- Cuáles son las claves culturales de las matemáticas.
- Cuál es su influencia en el aprendizaje, en general, y en el aprendizaje de las matemáticas, en particular.



La pizarra, a la espalda del profesor que, habitualmente, mira al grupo

Expectativas y competencia matemática

A continuación os presento la transcripción de una secuencia de clase de matemáticas de un centro de secundaria de Barcelona⁶. Están trabajando un problema de proporciones, a partir de la receta de un pastel. La transcripción es casi literal, y creo que ilustra cómo pueden influir las expectativas del profesor en el desarrollo de una clase de matemáticas con alumnos culturalmente diversos:

- *Profesor*: ¿Cómo va? ¿Necesitáis más tiempo para hacer el problema?
- *Mourad*: Yo creo que el problema se puede hacer de muchas maneras.
- *Profesor*: ¿Lo has hecho por lo menos de una manera?
- *Mourad*: Bueno, aún no lo he acabado, me falta repararlo.
- *Profesor*: Mourad, si lo necesitas, pídele ayuda a los compañeros y recuerda que tienes que anotar todo bien en el cuaderno.

Esta es la primera parte: podemos notar una connotación negativa en la frase dirigida a Mourad (dado que a otros compañeros no les recuerda que pueden pedir ayuda) y en la advertencia final.

- *Eduard*: ¿Qué hacemos? ¿Esperamos un poco?
- *Albert*: Nosotros ya lo tenemos casi hecho, profe. Con Roger lo hemos pensado.
- *Profesor*: Vale (a Albert), acábalo.
- *Profesor*: Muy bien. Como queda poco tiempo, vamos a empezar. Empieza a explicarlo el grupo de ella (Cristina) y luego el grupo de él (Albert) añade lo que haga falta. A lo mejor Cristina se despista en alguna cosa y Albert puede completar la explicación dada por ella.

La misma actitud aparece de nuevo al dirigirse a Ramia:

- *Profesor*: Muy bien. Cristina, ¿de cuántas maneras has resuelto el problema?
- *Cristina*: De dos.
- *Eduard*: ¿Cómo lo has hecho?
- *Cristina*: Primero hemos hecho el problema como si fuera de verdad, como si tuviéramos que hacer el pastel de verdad.
- *Ramia*: Se me ha ocurrido a mí.
- *Profesor*: ¿Como si fuera de verdad?
- *Ramia*: Sí, teniendo cuidado con los decimales.
- *Profesor*: ¿Qué significa tener cuidado?
- *Cristina*: Vigilar que no salgan decimales periódicos.
- *Ramia*: Significa no equivocarse.

Al profesor le parece que las dos chicas están hablando a la vez y quiere poner un poco de orden...

- *Profesor*: A ver, si queréis hablar las dos, mejor será que nos organicemos...
- *Profesor*: Tú, Ramia, vas explicando cada paso de lo que habéis hecho, explicas el resultado de cada ingrediente, sin equivocarte, y tú, Cristina, nos cuentas con detalle por qué lo has hecho de tal o cual modo. ¿De acuerdo?
- *Ramia*: De acuerdo.

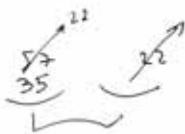
Parece claro que las peticiones a Cristina y a Albert son *diferentes* de las de Ramia y Mourad. A Cristina y a Albert se les piden ideas, creatividad, argumentaciones, corregir las intervenciones de otros compañeros y compañeras; a Ramia se le piden resultados, y que Cristina argumente, porque *queda poco tiempo*...

Por otro lado, la *competencia matemática* de Mourad es puesta en duda (*¿Lo has hecho al menos de una manera?*) y se le recuerda que ha de trabajar limpio y ordenado en el cuaderno.

Este tema de la competencia matemática de un alumno procedente de un país pobre aparece reiterativamente y os mostraré otro ejemplo. Son unos ejercicios realizados por un alumno saharauí. Este alumno llegó 3 meses antes a Cataluña sin saber ni una palabra de catalán ni francés, usando un castellano muy rudimentario y... sordo en un 100% de un oído y un 90% del otro. El consejo inicial que se le dio al profesor fue que le pusiera ejercicios mecánicos muy básicos, las cuatro operaciones, cosas así. Como en clase se estaba trabajando la resolución de la ecuación de primer grado, el alumno va observando – sin oír – la pizarra, y al cabo de poco tiempo ya está resolviendo ejercicios introductorios al álgebra con más acierto que muchos otros compañeros catalanes de la misma clase.

Exercici 161: Troba el valor d' x aquestes equacions, anotant els passos que segueixes igual que a l'exemple anterior (alguns resultats no són nombres enters).

a) $x + x + x + 2 = x + 10$ $x = 4$ Ko
 b) $x + x + 73 = x + 95$ $x = 22$ Ko
 c) $x + x + x + x + x + 6 = x + 42$ $x = 9$ Ko
 d) $x + 12 = x + x + x + 3$ $x = 9$ Ko
 e) $x + x + x + 2 = x + x + x + 3$ $x = 1$ Ko
 f) $x + x + 13 = x + x + x + 1$ $x = 6$ Ko
 g) $x + x + x + 21 = x + 30$ $x = 4.5$ Ko
 h) $x + 57 = x + x + x + 22 \rightarrow 35 = x + x \rightarrow x = \frac{35}{2} = 17.5$ 2.5
 i) $x + x + x + 90 = x + x + x + x + 45$ 22.5
 j) $x + x + x + x + x + x + 30 = x + x + x + 32$ 5.5



Mohamed en clase

Algunas conclusiones

No solamente de esta secuencia que he mostrado, pero también de esta secuencia, podemos extraer algunas conclusiones:

- Referente a las expectativas del profesor y de los compañeros: no se pide lo mismo a todos los alumnos, ni por parte del profesor ni de los otros alumnos.
- Referente al uso de contextos: no se aprovecha el planteamiento de diversidad de contextos: especialmente, el escolar y el cotidiano. Y estos contextos, cuando se tienen en cuenta, se adjudican arbitrariamente a diferentes alumnos: el contexto escolar a los alumnos de casa y el cotidiano a los de fuera.
- Referente a usar la identidad cultural para clasificar alumnos: el modelo del buen alumno no es el mismo para todos los alumnos: la identidad cultural aparece como elemento diferenciador en la interpretación de las obligaciones de los alumnos en el aula de matemáticas.

Contextualización

Cuando hablamos de contextualización de la actividad matemática deberíamos ponernos de acuerdo en lo que queremos decir. Sin entrar ahora en este polémico asunto⁷, sí que quiero presentar un ejemplo de lo que no es contextualizar. El ejemplo está extraído de las *Orientaciones y propuestas para pautar el proceso de escolarización durante el período de acogida de alumnos inmigrantes*.

Un artesano de Rabat cobra 300 ptas. por cada tetera elaborada. Un comerciante se las compra y las vende a 1425 ptas. en una tienda de París. Si los gastos de viaje y transporte suponen 375 ptas. por cada tetera, ¿cuánto gana en cada pieza? ¿Cuántas ha de vender en una semana para ganar aproximadamente 15.000 ptas.?

¿No os suena de lejos a Simbad, a los cuentos orientales, pero sin ninguno de los encantos que tenían aquellas historias? Lo cierto es que para un alumno que viene de Tánger o de un bidonville de las afueras de Casablanca, este enunciado le es tan lejano como para un alumno catalán. Las dificultades para resolver este problema no disminuyen en absoluto por el hecho de hablar de teteras. Esto no es contextualizar.

Lo que debíamos plantearnos es qué *nivel matemático* evaluamos con este tipo de problemas, dado que la principal dificultad es, para empezar, comprender lo que te dan y lo que te piden, en medio de tanta compra-venta de teteras y viajes...

Efectos en el profesorado

Y los efectos que esta situación tiene en parte del profesorado son preocupantes:

- a menudo empezamos por sufrir y angustiarnos;
- seguimos por negar el problema;
- a continuación pasamos a justificarlo;
- y acabamos por intervenir: como podemos, como sabemos. A veces, influenciando negativa e inconscientemente el aprendizaje de algunos de los alumnos. Otras, buscando soluciones.

Actitudes del alumnado

¿Y el alumnado? ¿Qué piensa de todo esto? ¿Hay conflicto cultural? Si lo hay, ¿tiene relación con las matemáticas?

Ante las dos fotografías siguientes, formulamos una pregunta a un alumno marroquí⁸:

- *Profesor:* ¿Qué persona sabe más matemáticas?
- *Alumno:* Éste (Señala al hombre occidental).
- *Profesor:* ¿Por qué?
- *Alumno:* Este hombre es de un país rico.



Parece pues que hay un conflicto cultural. La ingenua respuesta de Sajid nos lo confirma:

- *Profesor:* ¿No te gusta venir a clase, Sajid?
- *Sahid:* Sí que me gusta.
- *Profesor:* Entonces, ¿por qué no trabajas?
- *Sahid:* Paquistán pegar, Paquistán estudiar. Aquí no pegar...

¿Qué hacemos, pues?

Llegados a este punto, podemos empezar a pensar qué podemos hacer ante el reto de la diversidad cultural en nuestras aulas. Muchos profesores y profesoras de matemáticas ya han asumido el reto. Están trabajando tomando en consideración las diferencias culturales en clase de matemáticas, no niegan ni justifican el problema, ni lo esconden⁹. De su práctica podemos extraer algunas líneas de actuación que han mostrado eficacia, que van en el camino de enseñar matemáticas a todos. Aunque cada una de ellas merecería más atención que la que aquí se le dedica, dado el espacio disponible, se trata de dar un listado esquemático de acciones positivas.

Si el problema es complejo, hemos de afrontarlo desde perspectivas diferentes¹⁰:

Desde el planteamiento de las actividades de clase

- Éstas debieran de ser ricas y colaborativas, abiertas y superponiendo planteamientos. La idea de actividad rica.

Desde el currículum

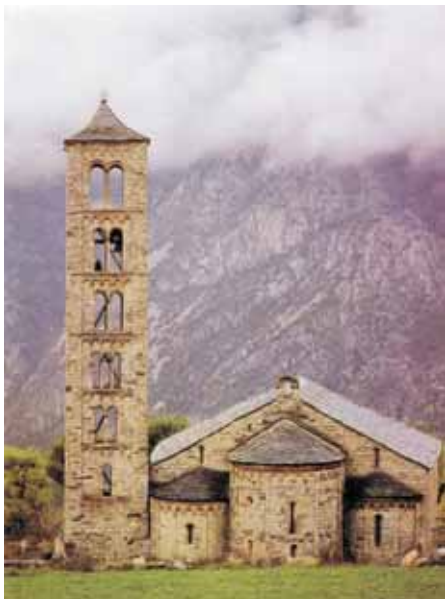
- Partir de lo que los alumnos ya saben, buscando siempre la relación entre temas diferentes de matemáticas, tomando en consideración la historia de las matemáticas, cómo aparecieron los diferentes conocimientos matemáticos y estudiando si un proceso similar nos puede servir para el aprendizaje de nuestros alumnos.
- Contextualizar las actividades.

Intervenir desde el currículum quiere decir hacerlo desde las decisiones que tomamos todos los profesores de matemáticas cada curso, cuando escogemos los contenidos concretos que vamos a dar y el tiempo que destinaremos a cada tema, cuando establecemos la manera en que desarrollaremos las sesiones. Algunas opiniones de grandes educadores insisten en la importancia de decidir correctamente a qué destinamos el tiempo de la enseñanza de las matemáticas. Un ejemplo (fijaos, al acabar de leerlo, en el año en que se escribió y quién lo dijo):

Se suele usar el cálculo mental únicamente en el campo estrecho de las operaciones contenidas en las tablas aritméticas. A veces todo el cálculo mental consiste en el aprendizaje mecánico de las tablas, y el verdadero cálculo está lejos de estos automatismos. El cálculo mental en su base ha de representar la posesión mental del campo de los números, lo que equivale a la posesión de una fórmula simbólica del mundo, parecido a la posesión del mundo mediante el lenguaje. Por aquí se ligan el aspecto funcional numérico y el aspecto funcional lógico. Poseer el campo de los números es poseer un instrumento del pensamiento de una importancia excepcional.

De los mecanismos de las operaciones diré de una manera tajante que en la enseñanza primaria y buena parte de la secundaria no debería de preocuparnos en absoluto. Este es el eterno error: la aplicación de los métodos adultos propios de la lógica formal a los procesos mentales de los niños que tienen unas premisas absolutamente diversas de las del adulto... es absurdo querer comenzar las operaciones mostrando su mecanismo tan complicado... En aritmética lo que hay que hacer es enseñar a operar, es decir, a conocer y aplicar las operaciones.

Alexandre Galí, 1935, *La prova de Burt y l'ensenyament de l'aritmética*.



Taul



Templo de Niger

Desde la gestión del aula

- Organizando la participación de los alumnos.
- Fomentando el trabajo colaborativo.

Una clave es la *participación* porque de esta manera aparecen las diferentes maneras de hacer matemáticas de todos los alumnos. Así la diferencia se hace visible y tenemos la oportunidad de enriquecer el debate con las aportaciones de todos para un objetivo común, para resolver un problema de matemáticas. La invisibilidad de la diferencia, el silencio de aquel alumno concreto, se puede acabar con la participación, legitimando la práctica matemática divergente, intuitiva, arriesgada. Dando paso a diferentes formas de hacer y trabajar las matemáticas que nos lleven a las soluciones. Esto enriquece a todos los alumnos, de todas las culturas.



Usando tecnología

Ante un nuevo programa informático, todos los alumnos empiezan de cero, pueden tener las mismas oportunidades de mostrar su aprendizaje. La utilización de las TIC es conveniente para todos, aumentarán las posibilidades de encontrar salidas profesionales y ganarán en adaptabilidad. Aquí tenéis unas palabras de Peter Hilton, pronunciadas en el TIEM98 (*Trimestre Intensiu d'Educació Matemàtica*, celebrado en 1998 en la UAB):

La elección de los temas del currículum escolar es mucho menos importante que la manera como éstas sean tratadas.

En nuestra era tecnológica es muy importante que la gente sea capaz de razonar lógicamente y que tenga buen criterio, y es muy superfluo que sea capaz de calcular rápida y cuidadosamente.

Aprender de la experiencia

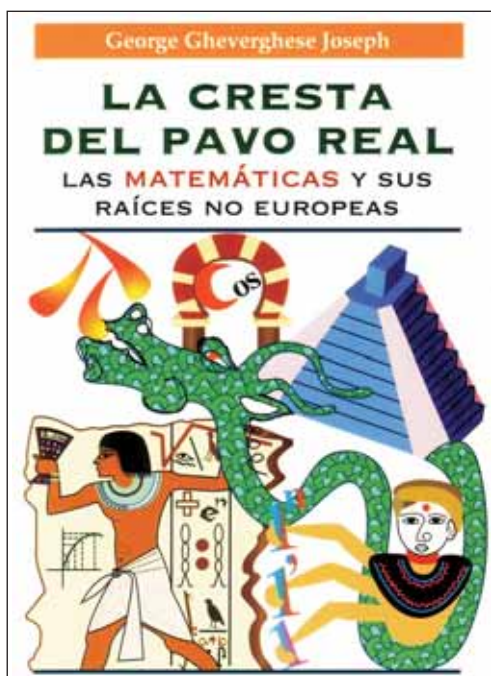
- De los que llevan muchos años trabajando con la diversidad, como por ejemplo las/los parvulistas, y las maestras de primaria, especialmente de los primeros cursos.

- De quienes se encuentran la diversidad cada día, como el profesorado que trabaja en centros marcadamente multiculturales.

Colaboración entre el profesorado

La soledad no es nunca un buen ambiente para la resolución de conflictos. Los retos se afrontan mucho mejor, con más posibilidades de éxito si trabajamos en equipo, si colaboramos unos con otros. Por tanto propongo:

- Trabajar en colaboración con otros profesores.
- Formar grupos estables de trabajo.
- Asociarnos a entidades y fomentar el asociacionismo.
- Asistir a jornadas, congresos, encuentros, intercambios, escuelas de verano y pedir que en ellas se hable de este tema.



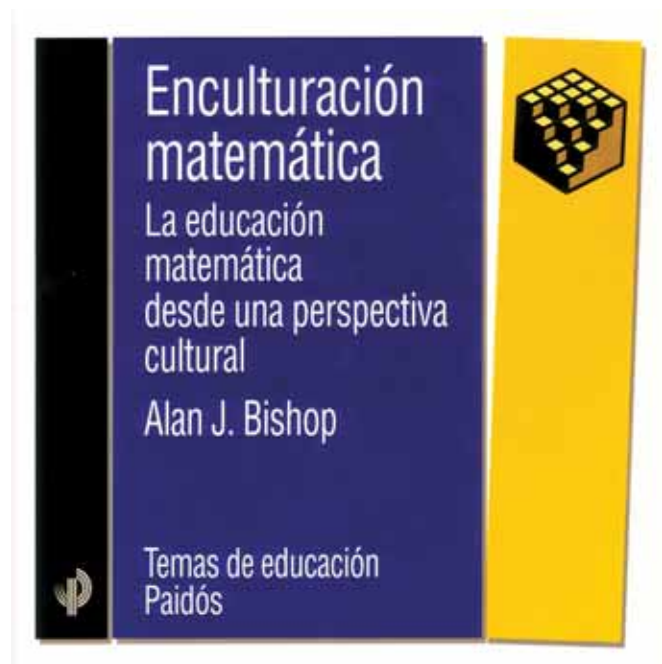
Aprender sobre este nuevo tema

La formación para nuestro trabajo de educadores matemáticos implica aprender toda la vida, por lo que propongo:

- Leer libros y escuchar conferencias, como las de Manuel Delgado;

- Profundizar en la relación entre Matemáticas y Culturas, como podremos hacer leyendo a Alan J. Bishop, a C. Saslavsky, a d'Ambrosio;
- Siguiendo las investigaciones y doctorados sobre el tema, como el de Núria Planas dirigido por Núria Gorgorió.

Afortunadamente, hay actualmente un sector creciente de la investigación y la innovación en educación matemática que trabaja estos temas.



Lo conseguiremos?

Las preguntas que nos podemos hacer son:

¿Lo conseguiremos? ¿Podremos cambiar el paradigma?
¿Podremos admitir que las matemáticas son un producto cultural y no un filtro social?

¿Seremos capaces de adaptarnos, nosotros, a la diversidad de los alumnos?

Siguiendo a Manuel Delgado: dado que los principios que fundamentan nuestra convivencia se basan en la *igualdad*, ¿podremos adaptarnos a nuestros valores? ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABREU, G. de (1997): "Relationships between macro and micro sociocultural contexts: implications for the study of interactions in the mathematics classroom", Presentado al CIEA EMOS49, Setúbal, Portugal.
- BISHOP, A.J. (1985): "The social construction of meaning – a significant development for mathematics education", *For the Learning of Mathematics*, 5, 1, 24-28.
- BISHOP, A.J. (1991): *Mathematics education in it's cultural context*, In Harrios M., School mathematics on work, Falmer press, London.
- BISHOP, A.J. (1991): *Teaching Mathematics to Ethnic Minority Pupils in Secondary Schools*, D. Pimm and E. Love, (ed), Teaching and Learning School Mathematics, Britain, Hodder and Stoughton.
- BISHOP, A.J. (1994): *Cultural conflicts in Mathematics Education: Developing a Research Agenda*, *Learning of Mathematics* 14, 2.
- BISHOP, A.J. (1999): *Enculturación Matemática – La educación matemática desde una perspectiva cultural*, Temas de Educación, Paidós, Barcelona.
- CARRAHER, T.N., CARRAHER, D.W. y SCHLIEMANN, A.D. (1985): "Mathematics in the streets and in schools", *British Journal of Developmental Psychology*, 3, 21-29.
- D'AMBROSIO, U. (1990): *The role of mathematics in building a just society*, *For the learning of mathematics*, 10(3): 20-23.
- FREUDENTHAL, H. (1983): *Didactical phenomenology of Mathematical Structures*, D. Reidel Pub, Co. Dordrecht.
- GHEVERGHESE, G. (1996): *La cresta del pavo real*, Pirámide, Madrid.
- GERDES, P. (1993): *L'ethnomathématique comme nouveau domaine de recherche en Afrique*, Ed. Instituto Superior Pedagógico, Maputo.
- GORGORIÓ, N., PLANAS, N., VILELLA, X., FONTDEVILA, M. (1998): "Multiculturalidad y Matemáticas: inicio de un proyecto", *Actas del 1 ISEm*, International Conference on Ethnomathematics. Granada, septiembre del 1998.
- JULIANO, D. (1993): *Educación Intercultural: Escuela y minorías étnicas*, Col. Horizontes, Eudema, Universidad Complutense, Madrid.
- LAVE, J. (1988): *Cognition in practice: Mind, mathematics and culture in everyday life*, Cambridge University Press, Cambridge.
- NUNES, T. (1992): *Ethnomathematics and Everyday Cognition*, In D. A. Grouws, (ed), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan Pub. Co., New York.
- NUNES, T. (1993): "The socio-cultural context of mathematics thinking: Research findings and educational implications", In Bishop A. et al, *Significant influencias on childrens learning of mathematics. Science & technology education*, Doc. 47, UNESCO, Paris.
- PLANAS, NÚRIA (2003): "Medidas de apoyo pedagógico, didáctico y organizativo ante el fenómeno de fracaso escolar en alumnos minoritarios", *SUMA*, n.º 42, pp.23-36.
- PLANAS, N.(2003): "Matemáticas: ¿materia escolar ? ¿Vivència personal?", *GUIX Elements d'acció educativa*, n.º 299, pp. 53-61.
- POWELL, A.B., FRANKENSTEIN, M. (1997): *Ethnomathematics: Challenging Eurocentrism in Mathematics Education*, Ed. State University of New York Press, New York.
- PRESMEG, N. (1997): "Ethnomathematics in Teachers Education", *Journal of Mathematics Teachers Education* (pendiente publicación).
- SAXE, G.B. (1999): *Culture and cognitive developement: Studies in mathematics understanding*, Hillsdale.
- Subdirecció General d'Ordenació Curricular (1995): *Educació intercultural. Orientacions per al desplegament del currículum*, Servei de Difusió i Pub., Dep. d'Ensenyament, Generalitat de Catalunya.
- VILELLA, X.; PLANAS, N.; GORGORIÓ, N.(1999): "¿Cómo afrontar las diversidades en la clase de matemáticas?" IX JAEM (Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas), CEFOCOP de Lugo: Actas de las IX JAEM, pp. 492-497, Lugo.
- VILELLA, X. (1998): "Millorar l'atenció a la diversitat multicultural desde l'àrea de matemàtiques: elaboració d'unes pautes que aprofitin la potencialitat de tots y totes", *Memoria del proyecto de investigación de la licencia de estudios*, Departament d'Ensenyament, Generalitat de Catalunya.
- ZASLAVSKY, C. (1994): *Africa Counts and Ethnomathematics*, *For de Learning of Mathematics* 14, 2.

NOTAS

- Artículo basado en la conferencia "Matemáticas y culturas: Una relación pendiente de profundizar", dictada en la Jornada de la Societat Catalana de Matemàtiques, Institut d'Estudis Catalans, el 8 de mayo de 2004. Acto asociado al Forum Universal de Las Culturas, Barcelona 2004.
- Transitions Between Contexts of Mathematical Practices*, editado por Guida de Abreu, Alan J. Bishop y Norma C. Presmeg en *Mathematics Education Library*. Kluwer Academic Editions. Dordrecht, Netherlands, 2002.
- VILELLA, X.; PLANAS, N.; GORGORIÓ, N.(1999): "¿Cómo afrontar las diversidades en la clase de matemáticas?" IX JAEM (Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas), CEFOCOP de Lugo: Actas de las IX JAEM, pp. 492-497, Lugo.
- BISHOP, A.J. (1999): *Enculturación Matemática – La educación matemática desde una perspectiva cultural*, Temas de Educación, Paidós, Barcelona.
- PLANAS, N.; VILELLA, X.; GORGORIÓ, N.; FONTDEVILA, M.(1999): "Fiayaz en la clase de matemáticas: ambiente de resolución de problemas en un aula multicultural" *SUMA*, n.º 30, pp. 65-75.
- PLANAS, N. : "Análisis discursivo de interacciones sociales en un aula de matemáticas multiétnica". *Revista de Educación*, n.º 334, pp. 55-75. Año 2004.
- Se puede consultar mi opinión al respecto (junto al Grup Vilatzara) en el primer capítulo del libro "¿Es posible viajar con las matemáticas?", que inicia la colección Matemáticas y entorno, del servicio de publicaciones de la FESPM (Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas), editor Ricardo Luengo.
- PLANAS, N.; VILELLA, X.; GORGORIÓ, N.; FONTDEVILA, M.(1999): "Fiayaz en la clase de matemáticas: ambiente de resolución de problemas en un aula multicultural" *SUMA*, n.º 30, pp. 65-75.
- PLANAS, N. (2003): "Medidas de apoyo pedagógico, didáctico y organizativo ante el fenómeno de fracaso escolar en alumnos minoritarios", *SUMA*, n.º 42, pp. 23-36.
- VILELLA, X.; PLANAS, N.; GORGORIÓ, N. (1999): "¿Cómo afrontar las diversidades en la clase de matemáticas?" IX JAEM (Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas). CEFOCOP de Lugo: Actas de las IX JAEM, pp. 492-497, Lugo.

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Comisión Ejecutiva

Presidente: Serapio García Cuesta
Secretario General: Josep Sales Rufí
Vicepresidente: Mabuel Torralbo Rodríguez
Tesorera: Claudia Lázaro

Secretariados:

Prensa: María Peñas Troyano
Revista SUMA: Francisco Martín Casalderrey/Inmaculada Fuentes Gil
Relaciones internacionales: Sixto Romero
Publicaciones: Ricardo Luengo González
Actividades y formación del profesorado: Salvador Guerrero Hidalgo
Actividades con alumnos: Floreal Gracia Alcaine/Esther López Herranz

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya

Presidenta: Pili Royo Regueiro
Apdo. de Correos 835. 17080 Girona

Organización Española para la Coeducación Matemática *Ada Byron*

Presidenta: M.ª Carmen Rodríguez
Almagro, 28. 28010 Madrid

Sociedad Andaluza de Educación Matemática *Thales*

Presidente: Manuel Torralbo Rodríguez
Facultad Matemáticas. Apdo. de Correos 1160. 41080 Sevilla

Sociedad Aragonesa *Pedro Sánchez Ciruelo* de Profesores de Matemáticas

Presidenta: Ana Pola Gracia
ICE Universidad de Zaragoza. C/ Pedro Cerbuna, 12. 50009 Zaragoza

Sociedad Asturiana de Educación Matemática *Agustín de Pedrayes*

Presidente: José Joaquín Arrieta Gallastegui
Apdo. de Correos 830. 33400 Avilés (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas *Isaac Newton*

Presidenta: Lucía Henríquez Rodríguez
Apdo. de Correos 329. 38208 La Laguna (Tenerife)

Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática *Miguel de Guzmán*

Presidente: Antonio Arroyo
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Villalar, s/n. 09006 Burgos

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas

Presidente: Serapio García Cuesta
Avda. España, 14, 5ª planta. 02006 Albacete

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia

Presidente: Bienvenido Espinar Cepas
CPR Murcia II. Calle Reina Sofía n.º1. 30007 Murcia

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)

Coordinador: Manuel Rodríguez Mayo
Apdo. de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Extremeña de Educación Matemática *Ventura Reyes Prósper*

Presidente: Ricardo Luengo González
Apdo. de Correos 590. 06080 Badajoz

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*

Presidente: Juan A. Martínez Calvete
C/ Limonero, 28. 28020 Madrid

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria

Presidenta: Begoña Martínez Barrera
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

Sociedad Melillense de Educación Matemática

Presidente: Luis Serrano Romero
Facultad de Educación y Humanidades. Ctra. Alfonso XIII, s/n. 52005 Melilla

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas *Tornamira* *Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea* *Tornamira*

Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.
Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra. 31006 Pamplona

Sociedad *Puig Adam* de Profesores de Matemáticas

Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Facultad de Educación. (Sec. Deptal. Álgebra). Despacho 3005.
C/ Rector Rollo Villanova, s/n. 28040 Madrid

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas *A prima*

Presidente: Javier Galarreta Espinosa
CPR. Avda. de la Paz, 9. 26004 Logroño

Sociedade Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)

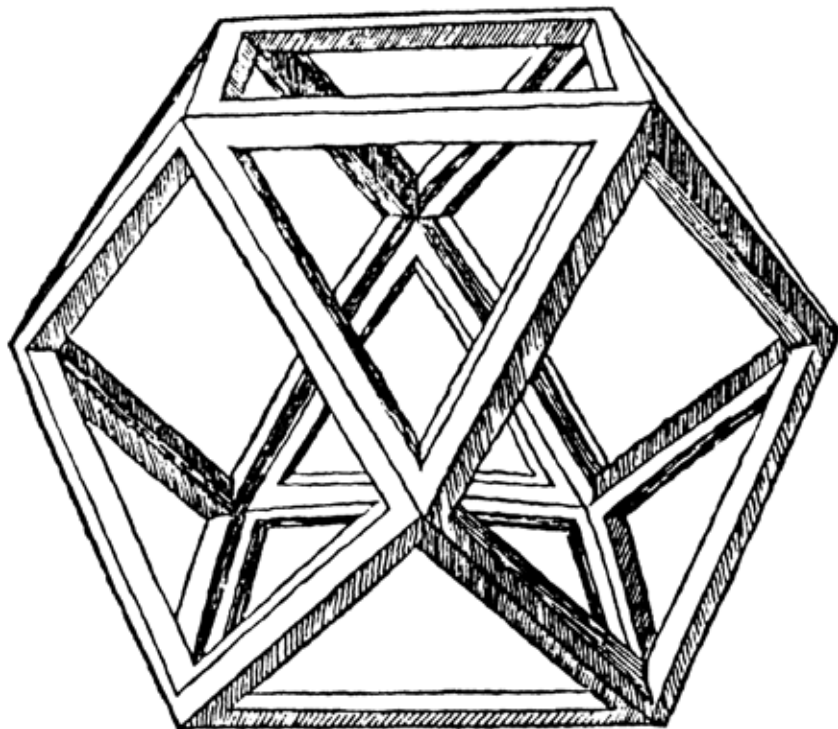
Presidente: Manuel Díaz Regueiro
C/ García Abad, 3, 1ºB. 27004 Lugo

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana *Al-Khwarizmi*

Presidente: Luis Puig Espinosa
Departamento Didáctica de la Matemática. Apdo. 22045. 46071 Valencia

Societat Balear de Matemàtiques *Xeix*

Presidente: Albert Violant i Holz
C/ Martí Rubí 37/alts. 07141 Sa Cabaneta (Marratxí). Islas Baleares



Dibujo de Leonardo da Vinci para *La divina proporción* de Luca Pacioli

poliedro

DESDE LA HISTORIA

JUEGOS

¡MÁTGENES

EL CLIP

HACE...

EN UN CUADRADO

DE CABEZA

BIBLIOTECA

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

CINEMATeCA

Carlos Usón y Ángel Ramírez

Grupo Alquerque de Sevilla

Miquel Albertí

Claudi Alsina

Santiago Gutiérrez

Capi Corrales

Antonio Pérez

F. Corbalán. Á. Ramírez

Juan Pagola

Constantino de la Fuente

José María Sorando

En torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. Símbolo del anonimato científico (V)

Algunas pinceladas sobre combinatoria y didáctica

En esta visión comparativa de las aportaciones de Pascal tanto desde un punto de vista histórico como didáctico hemos ido desgranado las numerosas contribuciones y usos que, desde distintos enfoques y países, se han hecho de esta herramienta matemática. Habíamos hablado de cómo, en los umbrales del siglo XIV, Ibn al-Banna enunciaba en el Magreb la fórmula que permite calcular el número de combinaciones de un orden cualquiera sin necesidad de recurrir al Triángulo, y como, en Irán, al-Farisi, utilizaba el Triángulo para determinar los órdenes numéricos y desarrollar una expresión combinatoria general de los números figurados. Al tiempo que, en China, Chin Chiu Shao realizaba un estudio en profundidad de sus propiedades y Chu Shih Chieh lo utilizaba para resolver ecuaciones de orden superior. Más tarde serían, al-Kashi (siglo XV), Pedro Apiano (1527), Michael Stifel (1544), Tartaglia (1556), Stevin (1625) o Herigone (1634) quienes, con sus aportaciones, contribuirían a convertirlo en ejemplo vivo¹ de la construcción colectiva de los conceptos matemáticos, en particular, y de la ciencia en general.

En el artículo anterior habíamos relatado la forma en que Pascal describe el Triángulo Aritmético sin necesidad de incorporar a su discurso ni el análisis combinatorio ni los órdenes numéricos. En este veremos cómo se ocupa posteriormente de ambos temas. Didácticamente nos habíamos acercado a él a través del álgebra y de los recuentos, y lo habíamos analizado, ya no como herramienta sino como objeto matemático independiente. Ahora bien, puesto que hace tiempo que hemos

incorporado a nuestro discurso la aparición histórica de la Combinatoria, es el momento de abordarla también desde la didáctica. Para ello partiremos del siguiente problema que relata un episodio oscuro², de la mitología griega.



El Triángulo que algunos llaman de Pascal

Carlos Usón Villalba
Ángel Ramírez Martínez
historia.suma@fespm.org

La tupida tela de Ariadna

¿Cómo no pudo imaginar Teseo que Ariadna no se daría por vencida? ¿Cuán ciego estaba como para no imaginar que si la fe mueve montañas el amor las aplana?

Tras un violento despertar en las playas de Naxos, Ariadna fue consciente de que Teseo la había abandonado a su suerte. Despechada y herida en lo más profundo de su ser decidió tomar venganza.

El barco de Teseo parecía estar dotado de vida propia. Incapaz de mantener el rumbo, su proa apuntaba indistintamente hacia el Este o el Oeste al capricho de un viento suave y en apariencia inofensivo. Perdidos e indefensos decidieron tomar puerto sin saber si eran los dioses o la magia la que les había hecho recalar en tan singular ensenada. Mientras buscaban alimentos Teseo parecía guiado por una fuerza extraña. Sordo a cualquier consejo atravesó la entrada de una cueva con la sensación de ser empujado a ella por su propio destino. Una luz acidulada atraía sus pasos como si aquella persuasión irracional le arrastrara hacia su interior desde la nada.

A su espalda, un destello fugaz y tenue, casi instantáneo, detuvo en seco sus pasos. Al girarse, a poco más de dos centímetros de su espada, el tenaz trabajo de Ariadna esperaba silencioso y tenso para darle su último abrazo.

Repujado de finísimas motas de polvo, un extraño reflejo le permitió percibir la perfección en toda su plenitud. Perlada de un misticismo fascinante, aquella estrella de mil perfiles distintos parecía haber diseñado el infinito entre sus ramas.

Extasiado, no pudo percatarse de la presencia del artrópodo cortando su retirada. Impedido su acero ante tal belleza, incapaz de asestar el mandoble definitivo que le permitiera atravesar la tela, sometió al criterio de la adversidad sus últimos pensamientos.

Pero Ariadna lo amaba y su presencia curó en seco la herida del abandono, disipando en un instante aquella ira que había alimentado su sed de venganza. La belleza en estado puro de aquel taimado subterfugio había sometido al soldado, al que no habían podido vencer en mil batallas. Sensible a la transmutación del guerrero, sus propias palabras le sacaron de un total ensimismamiento: *Tienes una sola oportunidad de salir con vida del envite* —le increpó— *¿Cuántas líneas, triángulos, cuadriláteros, pentágonos... contiene esta trampa?*

Más tarde, la leyenda describiría a una Ariadna desesperada rendida al amor de Dionisos con quien tendría cuatro hijos: Toante, Estásfilo, Enopión y Pepareto. Y, uno de los primeros capítulos de violencia de género, tan lamentablemente habitual en nuestros días, presentaría a Ariadna muerta a manos de Artemís por orden de Dionisos.

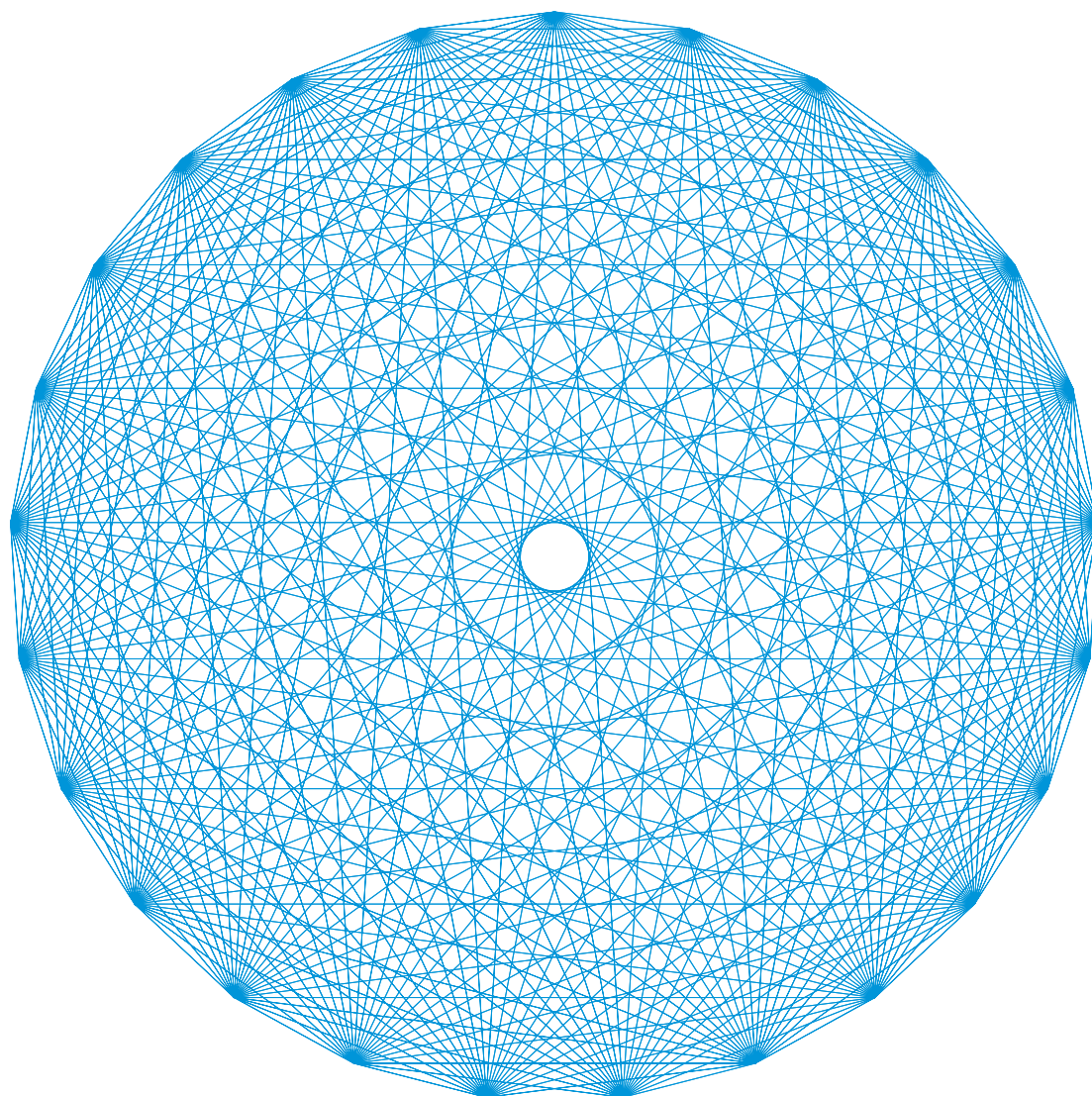
Mil finales para una historia a la que debes dar argumento.

Matrículas de coches

Si al salir a la calle nos fijamos en la primera matrícula que veamos ¿qué es más probable que tenga repetida alguna de sus cifras o que todas sean diferentes?

La tupida tela de Ariadna abre la posibilidad de acercarse a la fórmula de las combinaciones de n elementos tomados de p en p de forma absolutamente natural: Si de cada uno de los 25 puntos parten 24 hilos, el número total de hilos debería ser 25×24 . Algunos alumnos y alumnas reconocen rápidamente que cada uno de los hilos se ha contado dos veces al realizar el producto, otros necesitan que se ponga en duda su conclu-

sión para darse cuenta de este detalle. Casi ninguno apuesta por reducir el problema a otro más sencillo. Sin embargo los hay que proceden a obtener el resultado como suma de 24, que son los hilos que parten del primer punto, más 23, más 22, y así sucesivamente hasta llegar a 1. Esa técnica permite abordar la suma de $1+2+3+\dots+n$ y, de forma general, la de los n primeros términos de una progresión aritmética³.



La tupida tela de Ariadna

La segunda propuesta permite adentrarse con naturalidad en las VR_n^k y las V_n^k .

La importancia del orden y la repetición surgen con naturalidad. La misma que para ellos tiene la pregunta planteada en forma probabilística. Es un excelente momento para que anoten diez matrículas de otros tantos coches elegidos al azar, para definir la probabilidad de forma empírica con los más de doscientos datos con los que vamos a contar, para contrastar ese resultado con el que se obtiene de forma deductiva aplicando la fórmula de Laplace (1749 - 1827) y para acercarse al teorema de Bernouilli (1654-1705) e ir viendo como, a partir de los datos experimentales, la probabilidad fluctúa desde valores muy diversos y poco fiables si se toman los diez datos que aporta cada uno de los alumnos y como, sin embargo, va estabilizándose a medida que vamos acumulando los resultados de todos ellos.

Llegados a este punto, han aparecido en clase casi todas las fórmulas combinatorias y hemos dado un generoso impulso a algunos importantes conceptos probabilísticos. El problema de *Alisenda y Melquiades*, que solemos plantear antes que el de las matrículas, nos sirve para enlazar todo ello con el Triángulo Aritmético y, acto seguido, *Bajo la atenta mirada de Alá* nos permite adentrarnos en el inagotable mundo de las propiedades que encierra y de las que ya hablamos en el artículo anterior.

Pascal y la combinatoria

Antes de seguir con la didáctica resulta conveniente analizar un par de tratados del filósofo francés para tener una idea exacta de sus aportaciones a la Combinatoria. En *Uso del Triángulo Aritmético para las combinaciones* —un subcapítulo

lo, el II, de aquel que titula: *Diversos usos del Triángulo Aritmético cuyo generador es la unidad*— Pascal se centra en ellas de forma tangencial. Allí, después de definir las tal como lo hace hoy cualquier libro de texto y enunciar algunos lemas⁴, recupera una de las propiedades⁵ que ya había expuesto con anterioridad al enunciar las relaciones numéricas del Triángulo. De esta forma identifica las combinaciones con sus términos y anuncia un capítulo especial sobre las mismas, que tardará en aparecer un tiempo, y que tituló, sin más, *Combinaciones*. En ese amplio paréntesis, hizo uso del Triángulo para escribir sobre repartos de apuestas entre dos jugadores⁶, potencias, órdenes numéricos⁷, números factoriales y desarrollo de potencias del binomio. Temas a los que hay que añadir el estudio específico de la suma de potencias de los términos de una progresión aritmética. Un análisis que utiliza para conectar con una de sus grandes preocupaciones: los indivisibles. De todo ello iremos hablando más adelante pero ahora nos gustaría regresar a ese capítulo que, como ya dijimos, titula *Combinaciones* y estudiar sus aportaciones a este campo de la aritmética.

Combinaciones

En él, tras recordar todo lo que había dicho sobre ellas en *Uso del Triángulo Aritmético para las combinaciones*, traduce a expresiones combinatorias muchas de las propiedades que ya había reseñado al estudiar la disposición de los términos⁸ y los órdenes numéricos⁹. En cualquier caso el camino hacia el conocimiento que tenemos de él en estos momentos, es firme. Una vez establecidas las relaciones existentes entre los términos que lo componen e identificados estos con las Combinaciones, no nos quedaría otra cosa que expresar su cálculo como productos y cocientes de números consecutivos, y a ello dedica Pascal el capítulo *De numerorum continuorum producti*.

Allí, tras denominar *producto de números continuos* a lo que hoy denotamos con $n!$ y definir como *productos de segunda, tercera, cuarta... especie* a los que se pueden expresar como resultado de multiplicar dos, tres, cuatro, ... números consecutivos, recoge alguna de las propiedades que va descubriendo y expresa la emoción que le suscitan los resultados que obtiene y sus múltiples conexiones: *...adeo stricta connexione sibi mutuo cohaerent veritates!*

En el *Tratado de los órdenes numéricos*, Pascal había propuesto ya el cálculo del número de rangos 5 y 3 como

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

para pasar después a enunciar la conocida fórmula:

$$\frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1}$$

Pero es en *De numerorum continuorum productis* donde expresa las propiedades que, a su juicio, los caracteriza y que, traducidas al simbolismo que hoy nos es familiar, quedarían así:

1. $\forall n$ y $m \in \mathbb{N}$, $n < m$ se cumple:

$$\frac{(n-1)!}{m(m+1)\dots(m+n-2)} = \frac{(m-1)!}{n(n+1)\dots(n+m-2)}$$

2. $\forall n$ y $m \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$\frac{(n+1)\dots(n+m)}{m!} \in \mathbb{N}$$

y es el número figurado $F_{n+m, m}$

Resulta sorprendente cómo la falta de una notación simbólica dificulta la exposición de las propiedades que el filósofo francés enuncia todavía en forma retórica.

3. $\forall n$ y $m \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$\frac{(n+1)\dots(n+m)}{F_{n+m, n}} = n!$$

4. $\forall n$ y $m \in \mathbb{N}$ se cumple: $n!$ divide a $m!$

5. $\forall n$ y $m \in \mathbb{N}$ se cumple: $k!$ divide a $(n+1)\dots(n+m) \forall k \leq m$

6. $\forall n$ y $m \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$\frac{n(n+1)\dots(n+m)}{(n+1)\dots(n+m+1)} = \frac{n}{n+m+1}$$

7. El menor producto de m números naturales consecutivos es $m!$

Resulta sorprendente cómo la falta de una notación con un elevado poder simbólico dificulta la exposición de las propiedades que, aunque nosotros hayamos optado por adaptarlas a los usos actuales, el filósofo francés enuncia todavía en forma retórica. Pero, más significativo aún resulta, desde un punto de vista didáctico, el exordio en el que explica cómo ha llegado a la fórmula general a partir de las conclusiones particulares que ha ido obteniendo. Un método inductivo negado en clase, a pesar

de su potencia como generador de resultados que subraya el mismo Pascal. Ahora bien, la perversión, con serlo, no radica en negar el método sino la posibilidad de búsqueda y, con ella, la consiguiente privación del placer del descubrimiento, ese que emocionaba a Pascal, unos párrafos antes.

En cualquier caso estas propiedades nos parecen interesantes desde muchos puntos de vista. Son tan elementales que sorprenden por ello y por haber sido enunciadas por Pascal, al que consideramos con justicia un excelente filósofo y un buen científico. Pero son interesantes precisamente porque su simplicidad refleja el pulso vital de quien las descubre, de quien, avanzando lentamente por un terreno sin explorar, siente la necesidad de fijar hitos en su camino con hallazgos que después le resultan elementales.

Ahora bien, esa apariencia de sencillez queda acentuada en la actualidad por el uso de una notación tan poderosa que, en muchos casos, contiene en sí misma la demostración de la propiedad que enuncia. No es lo mismo la farragosa dialéctica expositiva con que Pascal enuncia la primera propiedad: *Dados dos números cualesquiera, el producto de todos los números naturales que preceden al primero es al producto de un número igual de factores comenzando por el segundo, como el producto de todos los números naturales que preceden al segundo, es al producto de un número igual de factores comenzando por el segundo*, que formular, como se hace actualmente,

$$\frac{(n-1)!}{m(m+1)\dots(m+n)} = \frac{(m-1)!}{n(n+1)\dots(n+m)}$$

Una expresión que contiene de forma evidente la tautología $(n+m)! = (n+m)!$ sin más que equiparar medios y extremos.

La conquista de un simbolismo capaz de expresar de forma sintética la esencia misma de aquello a lo que hace referencia ha constituido un largo proceso, del que ahora nos beneficiamos pero del que no queda en nuestras aulas huella alguna, hasta el punto de que, muchas veces, el alumnado vive la notación simbólica más como una tortura que como un alivio. Y es que, en el aula, como en el desarrollo histórico, es imposible saltarse los pasos intermedios. Es necesario que nuestras alumnas y alumnos utilicen un álgebra retórica antes de institucionalizar la simbólica. Es preciso sentir la necesidad de una formulación sintética antes de que ese modelo se convierta en pauta para una imposición irracional completamente alejada de sus necesidades. La construcción del lenguaje algebraico es una conquista lenta que debería recorrer transversalmente todo el currículum de matemáticas. La historia, una vez más, nos muestra cómo las dificultades epistemológicas tienen carácter propio pero, al mismo tiempo, nos enseña también cómo superarlas desde la paciencia de un trabajo específico y continuado. Esa misma lenta persistencia con la que ha ido avanzando la ciencia.

Como ya señalamos en otro artículo, aprender por pura memorización un resultado final, tan alejado de su razón última y del proceso creativo de quienes lo ingeniaran, en ocasiones tras siglos de pasos intermedios y refinamientos sucesivos, no tiene otro sentido que adiestrar en la disciplina de la obediencia ciega a normas incomprensibles y preestablecidas.

Pascal y las potencias

Llegados a este punto merece la pena analizar la aportación del filósofo francés en este terreno al que dedica una más que limitada, aunque tremendamente significativa atención, en un capítulo titulado: *Potestatum numericarum summa* que, a renglón seguido, se convierte en *Ad summam postetatum cujuslibet progressionis inveniendam unica ac generalis methodus*. En él propone un método general para el cálculo de la suma de las potencias de una progresión aritmética. Cómo es habitual en su discurso, comienza con un ejemplo: la suma de $5^3+8^3+11^3+14^3$, para lo que se apoya en el cálculo de 17^4 que expresa como $A^4+12\cdot A^3+54\cdot A^2+108A+81$, haciendo uso del desarrollo del binomio $(A+3)^4$. Dado que, aplicando esa fórmula, $17^4=14^4+12\cdot 14^3+54\cdot 14^2+108\cdot 14+81$, podemos restar $108\cdot(5+8+11+14)+54\cdot(5^2+8^2+11^2+14^2)+5^4+4\cdot 3^4$ a 83.521, que es el valor de 17^4 , y dividir entre doce el resultado de la resta para obtener la suma buscada: $5^3+8^3+11^3+14^3$.

Estas propiedades nos parecen interesantes desde muchos puntos de vista. Son tan elementales que sorprenden por ello y por haber sido enunciadas por Pascal, al que consideramos con justicia un excelente filósofo y un buen científico.

El método, de fácil aplicación, según valora el propio el autor, queda demostrado por él mismo como sigue¹⁰:

$$\begin{aligned} 17^4 &= (17^4-14^4) + (14^4-11^4) + (11^4-8^4) + (8^4-5^4) + 5^4 = \\ &= (12\cdot 14^3+54\cdot 14^2+108\cdot 14+81) + \\ &\quad + (12\cdot 11^3+54\cdot 11^2+108\cdot 11+81) + \\ &\quad + (12\cdot 8^3+54\cdot 8^2+108\cdot 8+81) + \\ &\quad + (12\cdot 5^3+54\cdot 5^2+108\cdot 5+81)+5^4= \\ &= 12\cdot(5^3+8^3+11^3+14^3)+ \\ &\quad + 54\cdot(5^2+8^2+11^2+14^2)+ \\ &\quad + 108\cdot(5+8+11+14)+ \\ &\quad + 4\cdot 81+5^4 \end{aligned}$$

con lo que, efectivamente queda demostrado el ejemplo. Nada dice de cómo se obtienen 12, 54 y 108 que, evidentemente son:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 3, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 3^2 \text{ y } \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot 3^3$$

En este claro proceso inductivo, Pascal procede ahora a dar un enunciado general, que es traslación directa del que describe en el ejemplo, y que le sirve para formular con posterioridad una aplicación particular. Concretamente, a la suma de la sucesión de las potencias de los números naturales. Un resultado que le es de gran interés para la determinación de áreas de figuras curvilíneas *como podrán percibir al primer vistazo todas aquellas personas que estén familiarizadas con el tema de los indivisibles*, razón última de su estudio.

Pascal no aborda en este capítulo el cálculo del término general ni de la suma de una progresión aritmética de orden k . Y sin embargo hace referencia a él en el opúsculo titulado: *Uso del triángulo aritmético para los órdenes numéricos*. Es esta una materia, que queda excluida de los temarios actuales, aunque se aborde de forma tangencial e incompleta en los ejercicios de cálculo del término general de una sucesión. En ellos se universaliza un procedimiento que llevaría fácilmente a la obtención de una fórmula global, pero nunca hemos visto que fuera del interés de nadie, a pesar de la obsesión algebraica de nuestros temarios. Así, en un procedimiento aplicable a un caso cualquiera, se presupone como término general de la sucesión aritmética de orden dos¹¹: $a_1, a_2, a_3 \dots$ un polinomio de segundo grado: an^2+bn+c , que exige resolver el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} a+b+c=a_1 \\ 4a+2b+c=a_2 \\ 9a+3b+c=a_3 \end{array} \right\}$$

del que se obtiene como respuesta:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{a_3 - 2a_2 + a_1}{2} \\ b = \frac{8a_2 - 5a_1 - 3a_3}{2} \\ c = 3a_1 - 3a_2 + a_3 \end{array} \right.$$

y como término general:

$$a_n = \frac{a_3 - 2a_2 + a_1}{2} n^2 + \frac{8a_2 - 5a_1 - 3a_3}{2} n + (3a_1 - 3a_2 + a_3)$$

Hay que reconocer que la expresión no es bonita¹² pero, haciendo las transformaciones:

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= d_1 \\ x_3 - x_2 &= d_2 \\ d_2 - d_1 &= d \end{aligned}$$

aparece esta otra:

$$a_n = \frac{d}{2} n^2 + (d_1 - \frac{3}{2}d)n + (a_1 - d_1 + d)$$

que ya sólo depende de a_1, d_1 y d .

Como alternativa, hace ya algunos años, Ivan Ruiz¹³ (entonces alumno de Primero de BUP y hoy frutero) obtuvo el término general de una progresión aritmética de orden k cualquiera, a partir del estudio de una sucesión concreta de segundo orden. Unos pocos años más tarde, sería Javier Eced Cerdán (entonces alumno de 3º de ESO) quien, a la vista de la sucesión de números triangulares y piramidales en el Triángulo Aritmético, indujo que la sucesión de las sumas parciales de los términos de una progresión aritmética de orden k era una progresión aritmética de orden $k+1$ ¹⁴. Con lo que resolvía de paso el problema de encontrar la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética de orden k como término general de una aritmética de orden $k+1$ afectada de algunas condiciones respecto de los primeros términos¹⁵. Obteniendo las siguientes fórmulas para el término general (a_n) y la suma (S_n) de una progresión aritmética de orden k cualquiera:

$$a_n = a_1 + d_1^1(n-1) + d_1^2 \frac{(n-1)(n-2)}{2!} + \dots + d_1^k \frac{(n-1)\dots(n-k)}{k!}$$

que equivale a:

$$a_n = \binom{n-1}{0} a_1 + d_1^1 \binom{n-1}{1} + d_1^2 \binom{n-1}{2} + \dots + d_1^k \binom{n-1}{k}$$

y para la suma:

$$S_n = a_1 \cdot n + d_1^1 \frac{n \cdot (n-1)}{2!} + \dots + d_1^{k-1} \frac{(n)\dots(n-k+1)}{k!} + d_1^k \frac{(n)\dots(n-k)}{(k+1)!}$$

que podemos expresar como:

$$S_n = \binom{n}{1} a_1 + d_1^1 \binom{n}{2} + \dots + d_1^{k-1} \binom{n}{k} + d_1^k \binom{n}{k+1}$$

con

$$d_1^i = d_2^{i-1} - d_1^{i-1} \quad \forall i=1, \dots, k; \quad d_1^k = d; \quad d_1^0 = a_1$$

Aplicando estas fórmulas al problema planteado por Pascal y teniendo en cuenta que si partimos de una progresión aritmética de orden uno y diferencia d , los cuadrados constituyen una progresión aritmética de orden dos, de diferencia $2d^2$, los cubos de orden tres, y diferencia $6d^3$, etc. el problema de

Pascal se resuelve de forma inmediata sin necesidad de aquellos tediosos pasos intermedios que proponía el filósofo francés y que, como método aritmético, resultaba escasamente eficaz al tener que calcular todas las potencias y sumas anteriores a las de la adición buscada. Y es que, aunque tras ellos se intuya el espíritu aplicado de quien ve en los métodos iterativos un modelo fácilmente automatizable, la preocupación de Pascal estaba centrada, en esos momentos, en el cálculo de áreas curvilíneas *de todos los géneros de parábolas y de la medida de una infinidad de otras magnitudes*, como recoge en la conclusión del capítulo *Potestatum numericarum summa* al que venimos haciendo referencia.

Acerca del Pascal matemático

El verdadero peso de Pascal dentro de las Matemáticas va más allá del Triángulo que lleva su nombre y que muy bien pudiera denominarse de Ibn al-Banna, Al-Farisi, Chin Chiu Shao, Chu Shih Chieh, Tartaglia, al-Kashi, Stevin, Herigone, Pedro Apiano, Stifel, Bhaskara, Levi ben Gerson, Pingala, Halayudha... y tantos otros pero que, sin duda, sería mucho mejor nombrar, tal como se hiciera históricamente e hizo el propio Pascal: *Triángulo Aritmético* porque esa denominación recoge el verdadero sentido de lo que realmente fue: un paradigma de la creación científica como empresa intemporal de todo un colectivo de pensadores y pensadoras.

En realidad, el mérito matemático de Pascal se encuentra diseminado en varias disciplinas: cálculo de probabilidades, cálculo infinitesimal y, sobre todo y enlazado con esta última, geometría, a la que dedicó sus mejores atenciones. Ya en 1640 presentó una generalización al trabajo de Desargues que hoy luce con justicia su apellido. Un teorema precioso que dice así: *Dados cualesquiera seis puntos de una cónica, la prolongación, fuera de ella, de los lados del hexágono hace que sus tres pares de lados opuestos se corten en una misma recta*. Un importante paso hacia la geometría proyectiva que culminaría en Poncelet, que fue aplaudido por Desargues, Roberval, Mersenne y el mismísimo Leibniz y al que Pascal trató con orgullosa indiferencia.

Otra importantísima aportación, en este terreno, fue el estudio de la cicloide¹⁶. Este trabajo, al que incorpora el uso de las propiedades obtenidas en el análisis del Triángulo Aritmético, lo colocó a las puertas del cálculo diferencial que posteriormente desarrollarían Newton y Leibniz. Voltaire se estremeció ante este abandono voluntario de la investigación científica por parte de Pascal en vísperas de un gran descubrimiento pero... las verdades matemáticas no satisfacían a este hombre atribulado y enfermo cuya mayor preocupación estaba en el más allá, ni ofrecían consuelo a sus etapas de agobio en el más acá.

En cualquier caso es obligado señalar, en coherencia con nuestra adhesión a las tesis de Feyerabend, que este capítulo



es uno de los menos gloriosos de su trayectoria personal. En lugar de publicar sus resultados, o enviarlos a la Academia de Ciencias de París como era habitual en él, se dejó convencer para organizar un concurso que tenía a la cicloide como objeto. A él se presentaron científicos de la talla de Lalouvière, Wren, Wallis o Huyghens, sin que ninguno alcanzase el nivel que aportaba la solución de Pascal quien, en lugar de optar por la discreción, dada la vía de concurso público que había elegido, reclamó para sí triunfo y premio, cosechando de paso la animadversión de los participantes que se sintieron, como no podía ser de otro modo, engañados y vilipendiados.

Sin embargo, al margen del estudio del Triángulo, no podemos acabar esta brevísima reseña de su trabajo matemático sin añadir algunos tratados a los que todavía no habíamos hecho referencia anteriormente y que en su *Epístola a la muy ilustre Academia de Ciencias de París*, el propio Pascal enumera en 1654 como: *En torno a las potencias numéricas, De los números múltiplos de otros, De los números mágicamente mágicos, Generalización del Apolonio francés, Los contactos esféricos, Los contactos cónicos, Los lugares planos, Obra completa de las cónicas y Un método de perspectiva*, al margen claro está de *La geometría del azar* a la que nos referiremos en otro momento. ■

NOTAS

¹ Vivo sí, al menos en nuestras aulas donde continúa generando a su alrededor un sinfín de resultados matemáticos.

² Puesto que desconocemos si la tradición occidental ha descrito el paréntesis mitológico que va desde que Ariadna es abandonada por Teseo hasta su relación con Dionisos.

³ En este caso suele ser preferible aparcarse el tema de las progresiones hasta que se haya generalizado la fórmula de las C_n^k , tras un breve proceso inductivo que no suele presentar mayores dificultades que las que resuelve una goma para explicar cómo se forma un triángulo a partir de una recta o un cuadrilátero a partir del polígono de tres lados.

⁴ Como por ejemplo:

$$\text{No existe } C_n^m \text{ si } m > n;$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1; C_n^1 = n$$

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$$

$$\binom{n}{m} = C_n^m \text{ con } n \text{ y } m = 0, 1, 2, \dots$$

⁵ $C_n^0 + C_{n+1}^1 + \dots + C_{n+m}^m = C_{n+m+1}^m$

⁶ Posiblemente una de las razones de ser de su estudio, a tenor de las cartas que cruza con Fermat sobre el tema.

⁷ Que, como ya señalamos en otro capítulo, no es otra cosa que la descomposición del Triángulo, según sus filas, en unidades, números naturales, triangulares, piramidales, etc. A ellos dedicaremos el siguiente artículo.

⁸ Véase el artículo anterior: *En torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. Un universo nacido de la nada* (IV).

⁹ Concretamente, expresadas de forma sintética:

$$C_{n+m}^m = C_{n+m}^n; C_{n+1}^n = C_{n+1}^1 = n+1; \frac{C_{n+m-1}^n}{C_{n+m-1}^{m-1}} = \frac{m}{n}; \frac{C_{n+1}^k}{C_n^k} = \frac{n+1}{n+1-k} \text{ con } k < n < n+1$$

$$\frac{C_{n+1}^k}{C_n^{k+1}} = \frac{k+1}{n-k} \text{ con } k < k+1 < n$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^{n+1} = 2(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^{n-1})$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2 \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^k C_i^i$$

¹⁰ La demostración de Pascal es algo menos sintética que la que incluimos como tal.

¹¹ Denominamos progresión aritmética de orden 1 a una sucesión de números cuya diferencia entre dos términos consecutivos es constante. Cuando estas diferencias conforman una progresión aritmética de orden 1 diremos que la progresión aritmética tiene orden 2 y así sucesivamente. Pascal, haciendo referencia a las filas y columnas del Triángulo Aritmético los denominará órdenes numéricos. A ellos dedicaremos el siguiente artículo.

¹² El gusto de las matemáticas por una regularidad simplista ha hecho de ese criterio estética.

¹³ Á. Ramírez y C. Usón [1998]

¹⁴ Si la sucesión es $a_1, a_2, a_3, \dots$, an y consideramos $S_1=0, S_2=a_1; S_2=a_1+a_2$; etc. tenemos que $S_3-S_2=a_2; S_2-S_1=a_1$; y como consecuencia $\{S_n\}$ es una p. a. de orden $k+1$ porque sus diferencias constituyen una progresión de orden k .

¹⁵ En otro momento Beatriz Díaz Rabasa (4º de ESO) y otras compañeras eliminaron esas condiciones iniciales calculando a_{n+1} .

¹⁶ Según su hermana Gilberta, Pascal se ocupó de este problema para distraer un dolor de muelas. Sobre el uso curativo de las matemáticas, que sepamos, no ha escrito nadie todavía, sobre los deterioros mentales que se le adjudican han corrido sin embargo ríos de tinta... señor, señor, ¡lo que hace la mala prensa!

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Añadiremos a las ya citadas en los artículos anteriores:

RAMÍREZ, Á. y USÓN, C. (1998): *Variaciones sobre un mismo tema*. Editorial Proyecto Sur. Granada

Siempre que utilizamos en clase algunos recursos como juegos, pasatiempos, vídeos, prensa, historia de la matemática, materiales para manipular, etc. pretendemos interesar a los alumnos en la materia. Uno de los recursos con los que se puede conseguir este objetivo es la magia.

Muchos trucos de magia se fundamentan en conceptos matemáticos, por ejemplo reglas numéricas, combinaciones de orden, misteriosas reparticiones geométricas, aplicaciones topológicas sencillas, etc. Por ello, esos trucos pueden ser utilizados en clase, ya que abarcan parte del temario que tenemos que desarrollar.

Muchos trucos de magia se fundamentan en conceptos matemáticos: Reglas numéricas, combinaciones de orden, misteriosas reparticiones geométricas, aplicaciones topológicas sencillas...

Utilizar los trucos de magia tiene una serie de ventajas. Por un lado, motiva poderosamente a los alumnos ya que cuando se les hace un truco, inmediatamente muestran interés por conocer cómo puede hacerse. Gracias a lo anterior, y si nuestros alumnos lo permiten, podemos profundizar en las propiedades matemáticas que fundamentan la explicación del truco. Puede servir además para que los alumnos investiguen en esa línea y se inventen trucos parecidos. Cualquier truco de magia favorece, además, el cálculo mental, algo que cada vez es más difícil de conseguir. Por otro lado, el descubrir que en una actividad tan lúdica, y a simple vista tan alejada de la ciencia como es la magia, existe relación con las matemáticas, refuerza la idea de que la matemática está mucho más presente en el mundo cotidiano que nos rodea de lo que los alumnos creen.

En este artículo mostramos algunos trucos basados en un contenido matemático tradicional en nuestras clases, la divisibilidad por 9. Vamos a presentar los trucos, explicar cómo se ejecutan por parte del mago y desarrollar todo el contenido algebraico que fundamenta su realización. De esa forma el profesor que quiera utilizarlos puede decidir el grado de profundización con que los tratará en sus clases, según los alumnos que tenga.

Divisibilidad por 9

Restar un múltiplo de 9

El mago le pide a un espectador que realice las siguientes acciones:

- Piense un número de dos cifras.
- Multiplique el número anterior por diez.
- Elija un múltiplo de nueve cualquiera que sea menor que 90.

Grupo Alquerque de Sevilla

Constituido por:

Juan Antonio Hans Martín. C.C. Santa María de los Reyes.

José Muñoz Santonja. IES Macarena.

Antonio Fernández-Aliseda Redondo. IES Camas.

juegos.suma@fespm.org

- d) Reste ese múltiplo del resultado de multiplicar por 10 el número pensado.
- e) Por último le indica al mago el resultado de la diferencia y el mago enseguida descubre cuál era el número inicial.

Para hallar ese número lo único que debe hacer el mago es quitar la cifra de las unidades y sumársela al número que queda.

Lo asombroso de este truco es que el múltiplo de 9, que de forma aleatoria elige el espectador y que el mago no llega a conocer nunca, es innecesario para descubrir el número pensado inicialmente.

Por ejemplo, si el espectador piensa en el número 43 y después elige como múltiplo de 9 el 72, la operación realizada da como resultado 358. Si ahora quitamos la última cifra y se la sumamos a lo que queda $35 + 8 = 43$ nos da el número original.

$$430 - 72 = 358 \rightarrow 35 + 8 = 43$$

Como hemos dicho, este proceso es independiente del múltiplo de 9 que se utilice (puede probarse en el caso anterior con otros múltiplos). Vamos a ver por qué.

La explicación es fácil. Si x es el número pensado, se multiplica por 10 y se le resta $9a$ (siendo $a < 10$); lo que se ha hecho es $10x - 9a$; si sumamos y restamos a obtendremos

$$10x - 9a - a + a = 10x - 10a + a = 10(x - a) + a$$

Si quitamos la última cifra del número (que a la fuerza debe ser a) y consideramos las dos primeras como un número de dos cifras, es como si dividiésemos entre 10, por lo que nos quedaría $x - a$. Luego si ahora le sumamos a nos queda el número inicial x .

Puede darse el caso de que el número que se le dice al mago sea sólo de dos cifras en lugar de tres (eso ocurre si el número que piensa el espectador es menor que 19 y le resta un múltiplo de 9 grande), entonces, siguiendo la explicación anterior, basta sumar las dos cifras.

La cifra tachada

Un espectador piensa un número de cuatro cifras y calcula la suma de esas cuatro cifras. A continuación le resta al número

pensado el valor de la suma. Luego tacha una de las cifras (que no sea un cero) del resultado de la resta y le dice al mago las cifras restantes en el orden que quiera. Inmediatamente el mago indica cuál ha sido la cifra tachada.

65X2

La justificación de este truco se basa en la divisibilidad por 9. Si a un número cualquiera se le resta la suma de sus cifras, el resultado siempre es un múltiplo de 9. La demostración es inmediata.

Si consideramos el número

$$abcd = 1000a + 100b + 10c + d$$

la operación que hacemos es

$$(1000a + 100b + 10c + d) - (a + b + c + d) = 999a + 99b + 9c$$

Por lo tanto, si se tacha una de las cifras de ese número, el mago sólo debe sumar mentalmente las cifras que se le van diciendo y cuando lo tenga, basta con buscar qué cantidad falta para que esa suma sea múltiplo de 9. Esa cantidad es la cifra tachada.

Por ejemplo, si se ha pensado el 5293 se realiza la operación $5293 - 19 = 5274$, si ahora tachamos el 7 y sumamos las demás cifras $5 + 2 + 4 = 11$ nos faltan 7 unidades para el siguiente múltiplo de 9, luego ese es el número tachado.

Podría darse el caso de que al sumar las cifras resultantes nos saliese directamente múltiplo de 9, entonces la cifra tachada tendría que ser un 9 (otra posibilidad sería el 0, pero eso lo hemos descartado).

Este truco puede presentarse también de otra forma. Se le pide al espectador que piense un número de cuatro cifras donde no sean todas iguales, a continuación debe reordenar de distinta manera las cifras para obtener otro número, y restar los dos números. Con la diferencia hace lo mismo que en el caso anterior.

Es decir, si parte de 5293 podría escribir el 2539 y al efectuar la diferencia obtendríamos $5293 - 2539 = 2754$, que vuelve a ser múltiplo de 9.

El resultado 1089

Hay una curiosidad numérica clásica, fácil de encontrar en muchos libros de matemática recreativa, que es conseguir el número 1089. Tanto al final como en sus pasos intermedios puede servir como un buen truco de magia y para trabajar en clase conceptos algebraicos. Tan aficionados como a veces somos a los ejercicios en los que queremos encontrar un número de tres cifras que al cambiar las unidades y las centenas entre sí la diferencia tiene un cierto valor, veremos que aquí podemos trabajar lo mismo de una forma más atractiva, igual que hemos visto en el caso anterior.

1089

Un espectador elige un número de tres cifras que no sea capicúa, cambia entre sí la primera y última cifra y resta el mayor menos el menor de los dos números obtenidos. Si el espectador le indica al mago la primera o última cifra, éste puede saber inmediatamente cuál es el resultado de la diferencia.

Si por ejemplo piensa en el 429, debe realizar la resta

$$924 - 429 = 495$$

El resultado de esa resta es un múltiplo de 9 (por las razones vistas en el apartado anterior) con la característica de que la cifra de las decenas es siempre 9 y la suma de las unidades y las centenas es también 9.

Veámoslo algebraicamente. Si se piensa en el número abc (supongamos que $a > c$) entonces

$$\begin{aligned} abc - cba &= (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = \\ &= 99a - 99c = 99(a - c) \end{aligned}$$

Supongamos que $a - c = x$.

Vamos a demostrar que $99x$ es un número de tres cifras, donde la cifra de las decenas es 9 y la suma de las unidades y las centenas también es 9.

$$\begin{aligned} 99x &= 100x - x = 100(x - 1) + 100 - x = \\ &= 100(x - 1) + 90 + 10 - x \end{aligned}$$

En esta expresión la cifra de las centenas es $x - 1$, la de las unidades $10 - x$ (luego su suma da 9) y la de las decenas es 9.

Podemos seguir con el truco. Si al número que se ha obtenido al restar los dos números originales se le vuelve a cambiar la primera y última cifra y se suman los dos últimos números, siempre se obtiene como resultado 1089.

A partir de lo anterior podemos demostrarlo rápidamente:

$$\begin{aligned} [100(x - 1) + 90 + 10 - x] + [100(10 - x) + 90 + x - 1] &= \\ = 100(x - 1 + 10 - x) + 180 + 10 - x + x - 1 &= \\ = 900 + 180 + 9 = 1089 \end{aligned}$$

Los cuatro ases

Dentro de la magia los trucos con cartas suelen ser muy atractivos, no en vano dan lugar a una disciplina particular, la cartomagia. Entre los trucos matemáticos son también muy interesantes, pues aunque estemos trabajando con números (ya que contamos y ordenamos constantemente) no es tan evidente que los sostiene un fundamento matemático.



Para el primer truco el mago debe tener preparadas las cartas como indicaremos más adelante y realizar las siguientes acciones.

El mago saca cuatro voluntarios y les indica que piensen un número entre el 10 y el 20 (menor que este último). Le pide el número pensado al primer espectador y va colocando tantas cartas del mazo como ese número indique, una a una, sobre

un montón en la mesa. Al acabar se da cuenta de que no va a tener cartas para todos, entonces le pide al espectador que sume las cifras de su número y retira del montón de la mesa tantas cartas como la suma, colocándolas una a una sobre el mazo que tiene en la mano. La última carta que quedaba en el montón de la mesa se la entrega, sin que se vea, al espectador y el montón que quedaba sobre la mesa lo vuelve a colocar sobre el mazo.

Repite la misma operación con los otros tres espectadores y al acabar, los voluntarios del público muestran sus cartas y resulta que tienen los cuatro ases de la baraja.

El truco se basa en cómo tenemos preparadas las cartas y en lo que vimos antes de que si a un número le restamos la suma de sus cifras, el resultado es siempre un múltiplo de 9. Como hemos elegido números menores que 20, el resultado de la resta es siempre 9. Es decir, nosotros vamos a entregar siempre la novena carta desde el principio del mazo, independientemente del número que haya elegido el espectador. Por lo tanto, sólo tenemos que preparar las cartas, antes de comenzar, de forma que los cuatro ases ocupen los lugares 9, 10, 11 y 12 desde el principio del mazo.

Los dos montones

Se entrega una baraja francesa de póquer o una baraja española con ochos y nueves (de forma que haya por lo menos 48 cartas) a un espectador, se le pide que baraje a placer y que realice las siguientes acciones:

- Divida el mazo en dos montones de aproximadamente la misma cantidad de cartas (no es necesario que sean exactamente la misma cantidad).
- Elija uno de los dos montones y cuente de forma secreta el número de cartas de ese montón.
- A continuación sume las dos cifras del número de cartas y retire del montón elegido tantas cartas como indique esa suma realizada, colocándolas sobre el otro montón.
- Después, tome la primera carta del montón que tiene en la mano y la mire para recordarla más tarde.
- Coloque la carta que ha visto sobre el mazo de la mesa y encima de todo el montón que aún le queda en la mano.
- Por último entregue el mazo al mago que enseguida descubre cuál era la carta que el espectador había mirado.

El truco se vuelve a basar en la divisibilidad de 9. Como en cada montón hay alrededor de 25 cartas, si le quitamos tantas como la suma de las cifras, nos queda el anterior múltiplo de 9. Es decir, al acabar el paso c) siempre nos quedará en la mano un total de 18 cartas. Por lo que cuando le entreguen el mazo basta que cuente hasta la carta 18 para hallar la carta buscada.

También se puede completar el truco escribiendo una frase que tenga 18 letras como por ejemplo "El gran Mago Santonji" y pedirle al espectador o a otra persona que deletree la frase mientras va apartando cartas del mazo. La última carta quitada será la buscada. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BOLT, B. (2001): "La magia de las matemáticas", *SUMA*, n.º 36, pp. 5-15.
- BRACHO, R. (1999): *Actividades recreativas para la clase de Matemáticas*, Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía, Delegación Provincial de Córdoba.
- GARDNER, M. (1992): *Magia inteligente*, Zugarto ediciones, Madrid.
- LANDER, I. (1989): *Magia Matemática*, Labor, Barcelona.
- MUÑOZ, J.; HANS, J. A. y FERNÁNDEZ-ALISEDA, A. (2003): "La magia también se nutre de matemáticas", en *Actas de las X*

Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, pp. 801-805, Zaragoza.

MUÑOZ, J., HANS, A. y FERNÁNDEZ-ALISEDA, A. (2003): "Matemáticas y magia", en *Actas de III Jornadas Provinciales de Matemáticas*, pp. 113-128, Madrid.

MUÑOZ SANTONJA, J. (2003): *Ernesto el aprendiz de matemago*, Nivola, Madrid.

PERELMAN, Y. (1983): *Problemas y experimentos recreativos*, Mir, Moscú.

Su mirada recorrió los lomos del estante inferior y se detuvo en un título que le llamó la atención. Lo liberó de la hilera que lo aprisionaba y lo abrió al azar. Al menos eso era lo que pretendía, aunque el libro se abrió por una página señalada con un pliegue en la esquina superior. Quien lo practicó quería señalar un punto con una indicación perenne. Seguro que era cosa de su abuelo, fallecido hacía ya unos cuantos años. Fue precisamente el recuerdo de su muerte lo que le animó a entrar en la biblioteca. No sabía porqué, pero de repente le había venido a la mente la imagen del anciano leyendo ensimismado en aquel sillón antiguo, rodeado de incontables volúmenes, páginas, frases, palabras, letras.

Pasados los años, más maduro y no ya tan 'de Ciencias' como hasta entonces le habían calificado y él mismo se había considerado, se sentía impelido a imitar a su abuelo. Sentía el ansia de leer, pero no sabía qué. Así que se decidió a empezar la lectura de aquella página estigmatizada. Los textos impresos en cada una de las páginas que le ofrecía el libro estaban escritos en idiomas distintos. La página par, la de la izquierda, estaba escrita en inglés; la página impar, la de la derecha, en castellano. Era la esquina superior de ésta última la que estaba doblada. Ambos eran textos breves, con sus títulos destacando unos centímetros por encima de ellos:

FULL OF LIFE NOW

LLENO DE VIDA AHORA

Leyó despacio, saboreando el significado de cada palabra y deteniéndose en los puntos al final de cada frase. No eran muchas, siete tan sólo, que la edición había dilatado hasta ocupar el equivalente a doce líneas. Terminada la lectura se quedó ensimismado sin ser consciente de que estaba llorando. No podía quitarse de la cabeza la última frase del poema:

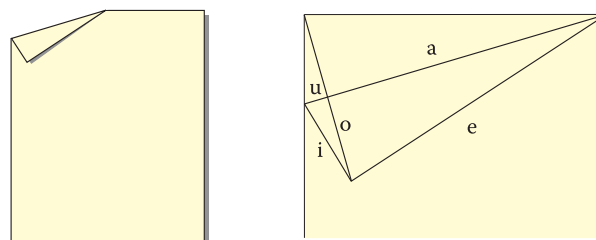
Be it as if I were with you.
(Be not too certain but I am now with you.)

Sé tan feliz como si yo estuviera a tu lado.
(No estés demasiado seguro de que no esté contigo.)

¿Eran las palabras del autor o las de su abuelo? ¿Eran las de Borges, el traductor? Eran las de todos, las de él, lector, también. Y era él, el lector, quien hacía hablar a quien las había escrito. El poema los reunía a ambos, autor y lector. El autor le proclamaba su amistad a través del tiempo y el espacio, aún sin conocerse. ¿Era ese el mensaje que quiso enviarle su abuelo? No se le ocurría canto a la amistad más bello. Jamás lo olvidaría. Y para dar fe de ello se dispuso a hacer otra señal doblando la esquina inferior de la página.

Cuando hubo acabado el dobladillo se fijó en un detalle. Él había plegado la esquina hacia adelante. En cambio, la esquina superior estaba plegada hacia atrás. Siguiendo la dirección imaginaria señalada por aquel vértice oculto, dio la vuelta a la hoja.

Detrás no encontró ningún texto impreso, pero sí algo manuscrito a lápiz. La pestaña doblada estaba perfilada a lápiz sobre aquella página par, al dorso del poema. Deshizo el doble y vio que el pliegue rectilíneo dejado en el papel también estaba resaltado a lápiz trazando el eje de simetría de los dos triángulos rectángulos, el original y el copiado. Y además, también los vértices rectos de uno y otro estaban unidos con un segmento. Junto a cada línea de la figura resultante había escrita una letra: a, e, i, o, u. Todo eso se recogía después en una serie de símbolos y expresiones abstractas que le resultaban familiares:



Miquel Albertí Palmer

imatgenes.suma@fespim.org

$$T(a, e, i) \sim T(e, a - u, o) \Rightarrow \frac{a - u}{e} = \frac{e}{a} \Rightarrow a^2 = e^2 + au$$

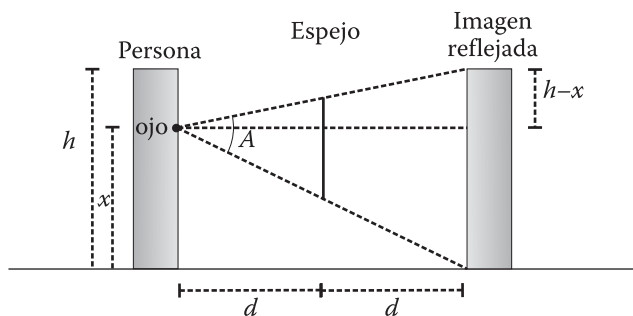
$$T(i, o, u) \sim T(a, e, i) \Rightarrow \frac{i}{u} = \frac{a}{i} \Rightarrow i^2 = a \cdot u \Rightarrow a^2 = e^2 + i^2$$

¡Su abuelo había demostrado el teorema de Pitágoras con el pliegue de un papel! Doblando la esquina se creaba un triángulo rectángulo y el segmento que unía el vértice de la página con el vértice del ángulo recto del triángulo copiado en ella determinaba tres triángulos rectángulos semejantes. Bastaba aplicar la proporcionalidad de Tales para llegar al teorema más grande de las Matemáticas. ¡Qué regalo! Su abuelo, a quien todos aquellos que le conocían habían considerado un verdadero hombre 'de Letras' incapacitado para los números le acababa de dar toda una lección. Ya no tenía ninguna duda de quien era el autor de esa demostración. A nadie del ámbito científico se le habría ocurrido jamás nombrar aquellos segmentos con las cinco vocales. ¿Por qué no se le ocurrió una idea tan sencilla a él, el primer aspirante a científico de la familia? Aquella frase volvió a su mente:

SOBRE LA iMATGEN 22, en la que hablé de espejos de cuerpo y de rostro entero, un lector propone una cuestión interesante: ¿es ciertamente la mitad de la estatura la medida que debe tener un espejo de cuerpo entero o corregirse teniendo en cuenta la disminución del tamaño aparente de las cosas con la distancia?

Pienso que no hay lugar para la discusión porque precisamente se tomaron las visuales (véase la iMATgen 22 en SUMA 51) dirigidas desde el ojo de quien se mira en el espejo hacia su imagen reflejada, de modo que esas visuales representan ya la manera en que el reflejo es percibido por el sujeto y, por tanto, la disminución del tamaño en la distancia ya está considerada en el ángulo determinado por esas visuales.

Ese ángulo A no será la mitad del ángulo con el que se abarca la estatura completa del individuo. Su valor exacto puede calcularse conociendo h (estatura del sujeto), x (estatura ocular) y d (distancia a la que éste se sitúa del espejo):



Sé tan feliz como si yo estuviera a tu lado.
(No estés demasiado seguro de que no esté contigo.)

¿Era Pitágoras quien le hablaba ahora? ¿Era Tales? La lectura del poema había revivido a Walt Whitman y a su abuelo y en aquella demostración revivían también ('llenos de vida ahora') Tales y Pitágoras. El consejo que tantas veces le dio su abuelo y que él nunca atendió hasta hoy se le revelaba con más fuerza que nunca: 'lee más, calcula menos'. Su abuelo era sabio. Reuniendo a Walt Whitman y a Pitágoras en el anverso y reverso de la hoja de un libro, el bosque del conocimiento, había transformado en poema el teorema. Todo un canto a la amistad de dos campos que hasta hoy él consideraba antagónicos. ■

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

WHITMAN, Walt (1991): *Hojas de Hierba*. Traducción del original de 1855 a cargo de Jorge Luis Borges. Editorial Lumen. Barcelona.

$$A = \arctan \left(\frac{x}{2d} \right) + \arctan \left(\frac{h-x}{2d} \right) = \arctan \left(\frac{2hd}{4d^2 - x(h-x)} \right)$$

Pero ésta es una modelización geométrica muy simplificada de la realidad. Si consideramos como parte del cuerpo entero la punta de los pies, cabe preguntarse cuánto cambiaría la situación si sus puntas se adelantaran una distancia p por delante de la vertical de la visual. En tal caso el ángulo A no sería suficiente y necesitamos un espejo algo mayor que la mitad de nuestra estatura. El lector sabrá averiguar cuánto.

En la iMATgen 23 nos planteamos cuánto sobraba del mantel que cubría una mesa. Sin un análisis físico de la situación que tenga en cuenta la flexibilidad de la tela con la que está fabricado el mantel y la forma en que lo domina la fuerza de la gravedad no podemos comprender el problema en toda su amplitud. El de la Física es un aspecto que siempre hay que considerar al relacionar las Matemáticas con la realidad o estudiar fenómenos reales.

¿Qué sucede si dejamos caer un mantel circular encima de un palo vertical de modo que el extremo de éste coincida con el centro de aquel? ¿Se generan dos, cuatro o seis pliegues? ¿Hasta qué punto eso depende del radio del mantel? Y, en el caso general, ¿cuál sería la relación entre el número par de pliegues y la proporción entre los diámetros del mantel y de la mesa que cubre?

La iMATgen 24 nos llevó a una playa cuyo perfil puede modelizarse matemáticamente como una curva fractal. A continuación voy a hablar de otro perfil del mar. El que determinan el agua y el aire que flota encima de ella. ■



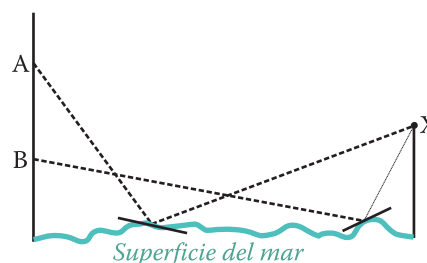
Seis barcos, cuatro veleros y dos yates, atracados en un muelle del *Port Vell* de Barcelona. Paseando por la pasarela de madera que se adentra en el mar me quedé prendado por las formas caprichosas de los reflejos de esos mástiles, burdas y obenques sobre la superficie del agua ligeramente agitada. Una algarabía de líneas virtuales que el oleaje transforma en cada instante.

¿Puede el reflejo de un segmento continuo y rectilíneo como es un mástil romperse en pedazos? ¿Pueden estos cruzarse entre sí o con los de otros mástiles? ¿Cuál es la causa de algún reflejo circular? ¿Se corresponden los extremos de las líneas de la parte inferior de la fotografía con los extremos de los mástiles? ¿Cómo comprender la imagen sin entender todo eso? Estamos tan acostumbrados a ver la superficie del agua en calma como un espejo que es muy probable que basemos en este esquema la interpretación de la imagen. En esa situación la reflexión es una función continua, derivable y biyectiva en la que cada punto del original se corresponde con uno de su reflejo. Pero este esquema no explica reflejos como los de la fotografía.

Un punto P , el punto Q de la superficie que lo refleja y el punto R desde el que se ve el reflejo determinan un plano que llamaré *plano de reflexión*. Si el mar no está demasiado agitado como sucede aquí, la intersección del plano de reflexión de un punto del mástil con la superficie del agua será una línea ondulada continua y derivable compuesta por una serie de concavidades y convexidades que actúan como pequeños espejos cóncavos y convexos.

Sin ningún tipo de oleaje, el mar es un espejo y el mástil reflejado se verá invertido, boca abajo. Sin embargo, las concavidades y convexidades del oleaje dan lugar a situaciones como la representada en la figura siguiente. La reflexión percibida

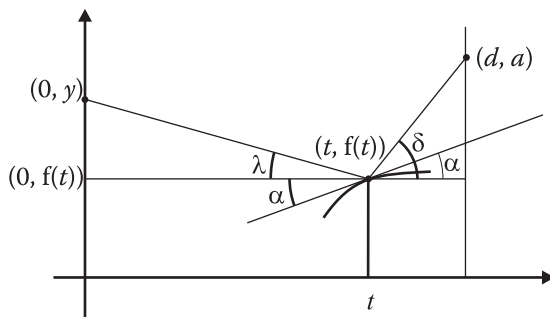
por el observador en X no será una imagen virtual invertida del segmento AB , sino directa:



Además, los reflejos de espejos cóncavos y convexos dilatan y contraen lo que reflejan, por lo que partes del mástil se percibirán más extensas que otras aún cuando tengan la misma longitud. También es posible que diferentes reflejos de un mismo punto converjan en la misma posición del ojo del observador, por lo que, además de romperse la continuidad y el orden, se rompe también la correspondencia biunívoca entre cada punto y su reflejo. Y si tenemos en cuenta que, en realidad, los valles y crestas de la figura anterior no son sólo concavidades y convexidades de una curva bidimensional sino de una superficie tridimensional, nos daremos cuenta de que sus reflejos no sólo se sucederán longitudinalmente, también transversalmente. De ahí que el plano de reflexión no sea siempre vertical, sino que puede estar inclinado. Esto hará que un punto o fragmento del mástil sea transformado en un arco transversal o, incluso, un anillo. He ahí la causa de los zigzagueos a izquierda y derecha en los reflejos de la imagen.

Sea XY un sistema de coordenadas en el plano de reflexión de un mástil situado en un intervalo positivo del eje de ordenadas. Supongamos que el ojo del observador está en el punto (d, a) , es decir, a una distancia $d > 0$ del mástil y a una altura

$a > 0$ sobre el nivel del mar representado en el intervalo $[0, d]$ del eje de abscisas. Supongamos que el oleaje es una función continua y derivable $(t, f(t))$ para $t \in [0, d]$. Entonces el ángulo de incidencia del rayo de luz que sale de un punto $(0, y)$ del mástil sobre la curva $(t, f(t))$ será igual al ángulo de reflexión dirigido hacia el ojo del observador. Ambos ángulos se forman sobre la tangente a la curva en el punto $(t, f(t))$ correspondiente:



En tales condiciones podemos afirmar que: $\alpha + \lambda = \delta - \alpha$. Por tanto, $2\alpha = \delta - \lambda$. Además, $\text{tg}(\alpha) = f'(t)$. Gracias al cálculo trigonométrico:

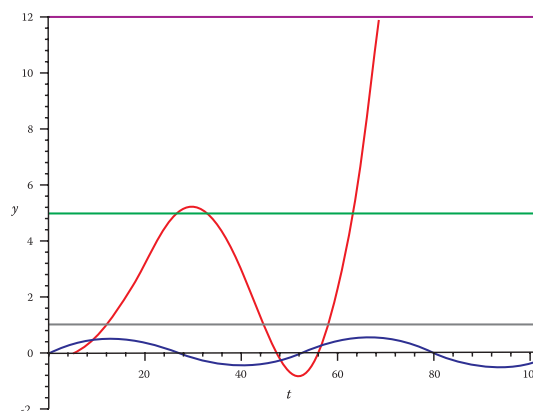
$$\text{tg}(\lambda) = \frac{y - f(t)}{t} \quad \text{y} \quad \text{tg}(\delta) = \frac{a - f(t)}{d - t}$$

Siendo $P(0, y(t, a))$ el punto del eje de ordenadas cuyo reflejo por el punto $Q(t) = (t, f(t))$ del oleaje es visible desde $R = (d, a)$ y utilizando las igualdades trigonométricas que relacionan la tangente de una suma de ángulos con las tangentes de cada uno de ellos, podemos escribir:

$$y(t, a) = f(t) + t \cdot \frac{(1 - f'(t)^2)(a - f(t)) - 2f'(t)(d - t)}{2f'(t)(a - f(t)) + (1 - f'(t)^2)(d - t)}$$

Así sabemos qué puntos del mástil corresponden a los reflejos percibidos desde nuestra posición. Imaginemos un mástil de 11m. erguido sobre una embarcación cuya cubierta se encuentra 1m. por encima del nivel del mar y que se observa

desde $d = 100\text{m.}$ y a una altura $a = 5\text{m.}$ La superficie del agua se agita según $f(t) = 0.5\sin(0.12t)$, $t \in [0, d]$. Todo esto se representa en la figura siguiente junto con la función $y(t, a = 0.05)$ correspondiente. La línea magenta corresponde al extremo del mástil; la línea verde a la altura de los ojos del observador; la línea gris es la altura de la cubierta del velero sobre el que está fijado el mástil; la curva azul es el oleaje; la roja, es $y(t, a = 5)$:



Los reflejos visibles del mástil se reducen a la parte de $y(t, a = 5)$ que queda por encima del nivel 1, o sea, los intervalos $[12, 44]$ y $[57, 68]$, aproximadamente. En el primero, el recorrido de $y(t)$ va desde 1m., la base del mástil sobre el barco, hasta un valor máximo (5.4m. aprox.) en $t = 31$, para decrecer después y volver al nivel 1m. Esto significa que el reflejo visible será continuo en este intervalo, pero constituido por la conexión de dos reflejos distorsionados del mismo fragmento del mástil (sus $5.4 - 1 = 4.4$ m inferiores): el primero, invertido; el segundo, directo; aquel más extenso que éste último. Más allá, en el intervalo $[57, 68]$ el reflejo abarca el mástil entero.

Una brisa agita levemente la superficie del mar en un suave (derivable) oleaje aparentemente inofensivo que, sin embargo, retuerce, contrae, estira y rompe lo que de continuo y rectilíneo hay en la realidad que refleja. Todo enredado en un galimatías de **Segmentos a la deriva.** ■





Había quedado ahí, justo delante del café *Zurich*, en la *Plaça de Catalunya*, con un grupo de alumnos de primer curso de bachillerato y con un profesor que los acompañaría desde Sabadell. Les esperaba para asistir a una charla-taller organizada por la UB sobre *Estadísticas curiosas*. Pero lo más curioso fue lo que vi esta mañana, ahí, de pie, junto al bar más popular de toda Barcelona.

Llegué pronto, pero no me senté para tomar nada en la terraza. En lugar de eso pasé la mirada por las portadas de los periódicos del quiosco, pero tampoco compré ninguno. En el metro ya me había hecho con un ejemplar de un periódico gratuito. El café *Zurich* no es el de antes aunque se llame como se llamaba. Hace unos años derribaron casi por completo esa manzana de casas para construir en ella un centro comercial: *El Triangle*. Su nombre deriva de la forma de la planta de esa manzana, pero no será este el motivo de mi interés por la imagen. Lo único que se mantuvo, lo único que se reconstruyó, si es que puede decirse así, fue el café *Zurich*. Además de conservar algunos detalles arquitectónicos y decorativos, también se han mantenido en el café los camareros y su clientela, siem-

pre la misma y siempre cambiante como el oleaje. Se supone que mucho de lo que hay ahora es lo mismo que había antes, y es verdad porque lo fundamental de ese lugar es la gente y no su arquitectura.

Pocos serán quienes viviendo o habiendo visitado Barcelona no se hayan citado alguna vez en el café *Zurich*. ¿Cuántas veces habré quedado allí con alguien? Como la cita que tenía esa mañana de octubre del año pasado. Al cabo de un rato de sentirme aburrido y de deambular como un felino enjaulado escudriñando los rostros que emergían del metro esperando reconocer a alguien, acabé por descansar la espalda sobre la baranda de las escaleras de acceso al metro. Entonces levanté la vista, contemplé las nubes que pasaban perezosas y me quedé contemplando esa fachada blanca que se levanta encima del *Zurich*.

Me pregunté también cuántas veces habría estado ahí dentro, en la *FNAC*, buscando libros y discos que llevarme a casa. Ahí compré *Los Diez Libros de Arquitectura*, de Vitruvio, y *Canto*, una joya sonora de *Charles Lloyd*. Y fue en ese momento que

vi lo que va a constituir el tema de esta iMATgen. Dos columnas de ventanales alargados se abren en la fachada. Los de la izquierda formados por siete cristales, los de la derecha por cinco. Por tanto, aunque no sepamos cuáles son sus longitudes con exactitud, podemos conocer su proporción mediante la cantidad de cristales que los forman, es decir, 7:5. Mi sorpresa fue grande cuando quise tomar como unidad de longitud las losetas que embaldosan la fachada.

Los ventanales de la izquierda tienen una longitud de diez losetas; los de la derecha, siete. El observador tiende a pensar que esas losetas y todas las que teselan la fachada son iguales, pero no es así. A simple vista se aprecia que las dos losetas intermedias entre las dos columnas de ventanas son un poco más anchas que las demás. En cambio, las adosadas a las ventanas sí que parecen idénticas, tanto como sus cristales.

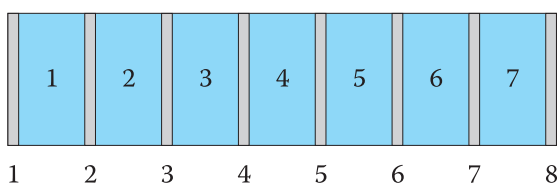
Entonces, y puesto que las ventanas de la izquierda tienen una longitud de diez losetas y las de la derecha siete, podemos concluir que la proporción de longitudes, tomando como unidad de medida una loseta, será 10:7. Uno espera que las dos proporciones obtenidas para los mismos elementos sean la misma. Es decir, que la proporción entre el número de cristales de las ventanas de cada lado y la proporción entre la cantidad de losetas junto a ellas coincidan. Sin embargo, y aunque por poco, no es así:

$$\frac{10}{7} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow 50 = 49$$

La diferencia está en:

$$\frac{10}{7} - \frac{7}{5} = \frac{50 - 49}{35} = \frac{1}{35}$$

Esta pequeña fracción nos dice que los cristales de cada ventana y las losetas junto a ellos no pueden ser iguales todos a la vez. Si los cristales son iguales, las losetas son distintas. Y al contrario, si éstas son iguales, aquellos son diferentes. Si fuesen diferentes las losetas y cada una de las que flanquean el ventanal derecho tuviese una longitud de 35cm, las del ventanal izquierdo medirían 36cm, ya que $(36-35)/35=1/35$. Si los cristales fuesen los distintos y cada uno de los de la derecha midiese 70cm, los de la izquierda medirían 72cm, ya que $(72-70)/70=1/35$. En ambos casos obtenemos resultados de uno y dos centímetros difíciles de percibir visualmente. Podríamos sospechar que, tal vez, la cuestión estuviese en los marcos. Los cristales de las ventanas los tienen; las losetas, no. La ventana de siete cristales tiene ocho; la de cinco tiene seis.



Llamando x a la longitud del cristal e y a la longitud del marco, la longitud del ventanal izquierdo sería $7x+8y$, y, la del derecho, $5x+6y$. Para que las proporciones continúen conservándose:

$$\frac{7x+8y}{10} = \frac{5x+6y}{7} \Leftrightarrow 49x+56y=50x+60y \Leftrightarrow 0=x+4y$$

Imposible, ya que tanto x como y deben ser valores estrictamente positivos. Luego no hay medidas reales posibles para x ni para y que permitan dicha proporción y nos quedamos con la conclusión anterior: una de dos, o bien los cristales de cada ventanal son distintos, o bien son distintas las losetas blancas que los rodean. En las condiciones reales y prácticas de las dimensiones de la fachada esta diferencia de sólo $1/35$ es inapreciable a simple vista. Sólo la reflexión matemática la detecta.

Las sorpresas no acaban aquí. En la parte que queda oculta en la fotografía, a la izquierda de esta fachada, pero correspondiente también al mismo edificio, hay otros ventanales de cuatro cristales flanqueados por seis losetas blancas. Esto da una ratio de 6:4. Igual que antes, sus cristales y losetas parecen iguales al resto de los elementos de la fachada, pero tampoco ahora es así:

$$\frac{6}{4} - \frac{10}{7} = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}$$

$$\frac{6}{4} - \frac{7}{5} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

En este caso las diferencias no son tan pequeñas, $1/14$ y $1/10$, pero, pese a todo, también son difíciles de apreciar visualmente desde la distancia.

Para elaborar esta iMATgen he vivido algo que siempre ha caracterizado al desarrollo de conocimiento matemático: no tener prisa y disponer de tiempo para reflexionar. Ya había estado en ese lugar muchas veces antes, pero nunca había tenido o no me había tomado el tiempo necesario para contemplar con calma esa fachada. Es la actitud del extranjero, propia del visitante recién llegado que se fija en todo porque lo que ve le parece distinto de lo que ya conoce. Lamento ahora no haberme fijado más en la fachada anterior a ésta. ¿Contenía algún secreto? ¿Eran antes tan caprichosos los arquitectos como parecen serlo hoy?

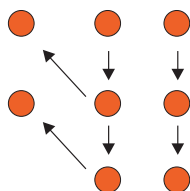
No me importó que mi colega y nuestros alumnos llegaran con bastante retraso. Se disculparon, pero yo les aseguré que no me había importado lo más mínimo esperarles. Mientras nos encaminábamos hacia la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Barcelona yo continuaba reflexionando *Sobre el café Zurich*. ■



Varios agujeros separados por una sombra vertical cuya distribución recuerda la de los puntos de una ficha del *Dominó*. Los de la izquierda ribeteados de óxido, los de la derecha contrastantes sobre un fondo claro. ¿En una mesa, en una pared, en una puerta metálica? Son perforaciones ornamentales practicadas en la chapa metálica de una farola de diseño vanguardista. Las que están a la izquierda de la separación vertical realizadas en una parte de la chapa sin pintar, por eso el óxido a su alrededor; las otras, a la derecha, realizadas en la parte pintada, con perfiles más limpios.

A mis alumnos les pregunté qué les sugería la fotografía. Entre sus respuestas había manchas, círculos y fichas de *Dominó*, pero nadie me habló de que, fuesen lo que fuesen, eran ocho. Cuando les hice esta observación algunos se rieron. Les pareció algo tan simple y obvio que ni siquiera habían considerado oportuno mencionarlo. ¿Puede alguien contemplar esta fotografía sin evocar mentalmente números como el dos, el tres, el seis y, sobretodo, el ocho? ¿Cómo se concreta este ocho que mis alumnos tacharon de evidente? En esto consiste comprender la imagen.

Una alumna, reflexionando más sobre la fotografía, dibujó lo siguiente:



La iMATgen se fragua al preguntarnos cómo concebimos estas ocho unidades. ¿Qué interpretación podemos deducir de la 'lectura' que hizo esa alumna a partir de su gráfico? De entrada, se diría que leyó de derecha a izquierda. A partir de ahí, veo dos posibles o muy probables interpretaciones. Una, que obtuviese el ocho como tres veces dos agujeros horizontales (h) de la derecha (d) más otros dos agujeros verticales (v) de la izquierda (i): $8=2dh+3+2iv$. La otra, que considerara la parte derecha como dos columnas de tres unidades cada una y, por tanto, el ocho surgiese como: $8=3dv+2iv$. Matemáticamente, ambas opciones son equivalentes, y no sólo entre ellas, también son equivalentes a muchas otras. Todo depende de cómo efectuemos las asociaciones, ya sea leyendo la imagen de izquierda a derecha ($\rightarrow$) o de derecha a izquierda ($\leftarrow$), agrupando agujeros vertical (v) u horizontalmente (h) y teniendo muy en cuenta la separación vertical y los fondos de distinta textura que determinan dos grupos, el de la izquierda (i) y el de la derecha (d).

La separación vertical es tan clara que de ella se derivan las interpretaciones más plausibles para las seis unidades o agujeros de la derecha:

$$6d = \begin{cases} 2h \cdot 3 \\ 3v \cdot 2 \end{cases}$$

Otras interpretaciones para estas seis unidades son de más difícil justificación psicológica porque distinguen cosas que no se ven distintas, como por ejemplo: $1+5$. Éstas son interpretaciones a 'posteriori' que no hay que denostar, sino potenciar desde la perspectiva de la educación matemática, ya que en un problema matemático estos sinónimos pueden ser de gran utilidad.

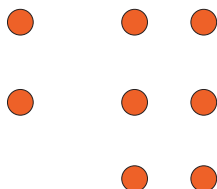
Las interpretaciones más plausibles para los dos agujeros de la parte izquierda son:

$$2i = \begin{array}{|l} 2\nu \\ (3-1)\nu \end{array}$$

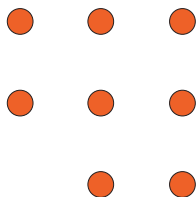
Este último caso es diferente. El $2i$ no aparece como resultado de la suma o cómputo de lo que hay, sino de lo que falta. Es la diferencia entre un 'todo' inferido por la forma de lo presente, un todo más extenso del que el presente se constituye en una parte o fragmento.

Pero el ocho no se genera mientras no seamos capaces de ver la imagen entera como un 'todo' aún mayor, olvidándonos de la barra de separación. Es al identificar rasgos comunes a ambos lados de la separación que la suma del 2 y el 6 cobra sentido en una unidad mayor y se crea el ocho. Teniendo en cuenta que podemos leerlo en uno u otro sentido, tanto de derecha a izquierda como de izquierda a derecha, y que podemos combinar estas dos posibilidades con las dos para el $6d$ y con las otras dos del $2i$, tenemos hasta $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ posibilidades como las más plausibles para la interpretación del ocho.

La cosa no acaba aquí. Una vez visto el ocho como un todo y nos hemos liberado de la separación vertical lo que llama la atención es la forma configurada por esos ocho agujeros:



Ahora se hace evidente la ausencia de una unidad con la que completar ese ocho en otro 'todo' nuevo y más amplio, tanto figurativa como cuantitativamente: $3h \cdot 3v - 1$ ó $3v \cdot 3h - 1$. Así se crea el ocho como diferencia: $8 = 9 - 1$, lo que facilita aún otra interpretación ligeramente distinta basada en la homogeneidad figurativa que perfecciona esa distribución rectangular en una cuadrada por lo que $8 = 3^2 - 1$:



Las posibilidades se multiplican. Al leer hacia la derecha el primer 2 es vertical, cosa que no ocurre al leer en sentido opuesto, donde podemos optar entre ver tres grupos de dos

unidades horizontales o dos grupos de tres verticales. De cualquier modo, se pone de manifiesto la relación entre los procesos de percepción visual y de lectura con las propiedades asociativa y conmutativa de la suma y del producto de números naturales. Matemáticamente, muchas más interpretaciones del 8 podrían sumarse a éstas, como $2+1+5$ o $4+1+3$, pero no resultarían tan coherentes con la imagen. ¿Son las anteriores equivalencias algebraicas transferibles al ámbito psicológico? ¿Concebimos las cosas así, de la manera en que matemáticamente se relacionan esos números enteros? ¿Es más inmediato percibir los 8 agujeros como $2+3 \cdot 2$ que como $3 \cdot 3 - 1$? ¿Se percibe antes lo que hay que lo que falta? Depende del intérprete y, al mismo tiempo, una posibilidad no excluye la otra. La educación matemática debe barajar todas las posibilidades fomentando la interpretación múltiple.

La última de las interpretaciones anteriores incita al matemático a preguntarse si el ocho se relaciona siempre de ese modo con los cuadrados de los números naturales:

$$\begin{aligned} 3^2 - 1 &= 8 = 1 \cdot 8 \\ 4^2 - 1 &= 15 = 3 \cdot 5 \\ 5^2 - 1 &= 24 = 3 \cdot 8 \\ 6^2 - 1 &= 35 = 5 \cdot 7 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Parece que si se resta una unidad del cuadrado de un impar, el resultado es múltiplo de ocho; y que si se resta del cuadrado de un par, se obtiene un producto de impares consecutivos. De hecho, los productos de pares consecutivos se ocultan en los múltiplos de ocho: $8 = 2 \cdot 4$, $24 = 4 \cdot 6$, $48 = 6 \cdot 8$, $80 = 8 \cdot 10$, etc. Llegamos a una conjetura:

Si $n \in \mathbb{N}$ es impar, $n^2 - 1$ es múltiplo de 8 y producto de dos pares consecutivos.
Si $n \in \mathbb{N}$ es par, $n^2 - 1$ es producto de dos impares consecutivos.

En efecto, si n es par: $n = 2 \cdot k$ ($k \in \mathbb{N}$) y entonces tenemos $n^2 - 1 = 4k^2 - 1 = (2k+1) \cdot (2k-1)$. Luego n es producto de dos impares consecutivos. Si n es impar, $n = 2k - 1$ ($k \in \mathbb{N}$) y entonces $n^2 - 1 = (2k-1)^2 - 1 = 4 \cdot k \cdot (k-1)$. Pero $k-1$ y k son consecutivos, por lo que uno de ellos es par. Luego $k \cdot (k-1)$ es par y por tanto $4 \cdot k \cdot (k-1) = n^2 - 1$ es múltiplo de 8. La conjetura se ha hecho teorema.

Habrán quienes vean en esta iMATgen una aplicación de las propiedades asociativa y conmutativa de la suma de números enteros y consideren que son estas propiedades las que justifican el ocho. Yo opino lo contrario. Estas propiedades no son la causa, sino el efecto de nuestra interpretación de la realidad. Es a partir de la manera en que aprehendemos esos agujeros de la que se derivan las propiedades que dan lugar a fenómenos que necesitamos considerar iguales, independientes del orden en que se agrupan sus partes. No son las Matemáticas las que explican la imagen, es la imagen la que explica las Matemáticas. Una auténtica **Anti iMATgen del ocho**. ■



Sentado en la mesa de un bar del *Barrio Alto* lisboeta repaso mentalmente la jornada. He empezado tomando un tranvía para subir a la *Alfama* y perderme por sus calles viejas de fachadas desvencijadas, portones carcomidos, ancianas acarreado cestas medio vacías y gatos sentados en los alféizares imitando a sus amas en la contemplación del exterior. Tras un breve encuentro con un pavo real en los jardines del castillo de *San Jorge* he deshecho a pie el camino recorrido para bajar hasta la plaza del *Comercio*. Allí he tomado la fotografía.

En Lisboa se han ambientado novelas y películas. En *El invierno en Lisboa* Antonio Muñoz Molina narra el final de Santiago Biralbo, pianista de jazz; en *En la ciudad blanca* acaba la relación entre su protagonista, un marinero (Bruno Ganz), y su mujer. Aunque, bien pensado, tal vez su relación no acabase allí, sino que quizá fuese precisamente allí, en Lisboa, donde verdaderamente comenzó a ser sincera.

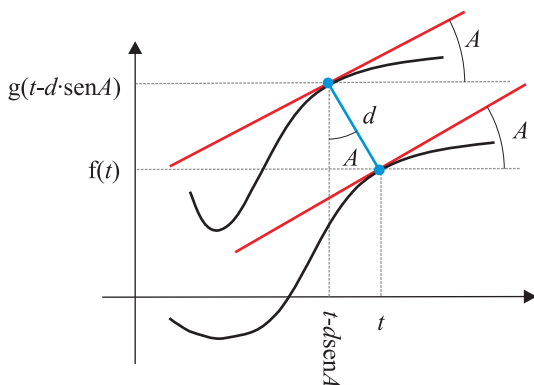
Sólo he visitado una vez Lisboa y pese a los elogios que le dedican algunos amigos míos, quienes valoran su melancolía y decadencia, a mi me pareció triste, vacía, el punto final de un trayecto, el 'se acabó' de una novela, de una película, el adiós de Europa. La imagen ilustra esa idea. Varios transeúntes regresando a casa tras una jornada de trabajo. Los últimos pasajeros del último autobús, recién apeados en la última parada, atravesando la plaza vacía de la estación. Lisboa es así, abierta a las aguas dulces del Tago y a la mar salada del Atlántico, pero también cerrada sobre sí misma, sobre su pasado glorioso de calles estrechas y sinuosas, colina arriba, colina abajo. Ahí reside la Lisboa que atrae al viajero, en las huellas perennes de una gloria exagerada, moviéndose al ritmo de las curvas de los tranvías.

Donde estoy empieza a sonar, suave pero inexorable, una guitarra eléctrica. Reconozco ese sonido, esas notas, esa voz que abre el tema:

*This is the end,
Beautiful friend
This is the end,
My only friend, The end ...*

Canta Jim Morrison. El paralelismo con lo que siento es genial, pero hubiese preferido otra cosa para animarme un poco. Mientras dura la canción no puedo quitarme de la cabeza la imagen de unos raíles avanzando hacia un horizonte desconocido. El convoy traza curvas vertiginosas a izquierda y derecha mientras sube y baja como un tobogán. Mis ojos puestos en las dos líneas metálicas relucientes en el suelo. Su final no llega. Acabado el tema mis pensamientos vuelven donde estaban para preguntarme cómo comprender la imagen sin saber cuál es la naturaleza de esas curvas paralelas. ¿Qué las asemeja o distingue de un par de rectas paralelas? *This is the end, my friend*. En efecto, este es el final de la *Sección*, amigo lector, la última parada, la última iMATgen. No quiero abandonarla sin antes cantar al paralelismo que delimita la calzada de cualquier camino y del que algunos detalles anticipé en otras iMATgenes sin dar explicaciones.

Primero estudiemos el caso correspondiente a una curva funcional $(t, f(t))$ en el plano XY . ¿Cómo se relaciona con su paralela a una distancia d ? La normal en cada punto a la curva original debe ser también normal a la paralela y todos los segmentos que dichas normales comunes determinan deben tener la misma longitud. El *quid* de la cuestión está en la pendiente en cada punto:



Las pendientes en puntos homólogos de ambas curvas deben ser iguales. Luego:

$$f'(t) = g'(t-d\sin A)$$

Además, como se puede apreciar en la figura anterior: $g(t-d\sin A) = f(t) + d\cos A$. Teniendo esto en cuenta y también que $\tan A = f'(t)$, esas igualdades proporcionan una parametrización $(x(t), y(t))$ de la paralela a $(t, f(t))$ a una distancia d :

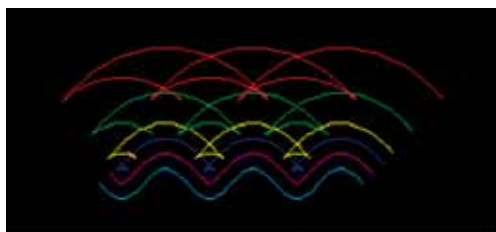
$$x(t) = t - d \sin A = t - \frac{d \cdot f'(t)}{\sqrt{1 + f'(t)^2}}$$

$$y(t) = f(t) + d \cos A = f(t) + \frac{d}{\sqrt{1 + f'(t)^2}}$$

En una curva expresada en forma paramétrica, $(u(t), v(t))$, la pendiente en cada punto vale $\tan A = v'(t)/u'(t)$. Su paralela $(x_d(t), y_d(t))$ a distancia d será:

$$\begin{cases} x_d(t) = u(t) + d \cdot \sin\left(\arctg \frac{v'(t)}{u'(t)}\right) \\ y_d(t) = v(t) - d \cdot \cos\left(\arctg \frac{v'(t)}{u'(t)}\right) \end{cases}$$

Véanse varias paralelas a la gráfica de $f(t) = \sin t$ para diferentes distancias: $d=0$ (aguamarina), $d=1$ (lila), $d=2$ (azul), $d=3$ (amarillo), $d=5$ (verde) y $d=8$ (rojo):



¡Las paralelas pueden cortarse unas a otras y también a sí mismas! No sucedía esto con las rectas paralelas. Precisamente en

ellas el hecho de no tocarse nunca constituía un aspecto tan fundamental que era usado como sinónimo de paralelismo. Así lo recoge el diccionario: 'paralelo,la: Aplíquese a las líneas o planos equidistantes entre sí y que por más que se prolonguen no pueden encontrarse' (DRAE, 1992, p.1527). Esta definición es válida para las líneas rectas, pero insuficiente para líneas curvas y superficies que no sean planas. Otra cosa que queda clara en la figura anterior es la esencia circular del paralelismo. Las curvas paralelas están hechas de arcos que comparten los mismos centros.

Los raíles del tranvía de la imagen no se cruzarán como los de la figura, aunque teóricamente podrían hacerlo para desespero y riesgo de sus pasajeros, quienes percibirían fuertes sacudidas en las esquinas y vaivenes que se crearían. Esa posibilidad queda pues reservada a las **Curvas heterónimas** de los bordes de un camino.

Lisboa es un lugar donde terminan los caminos, pero en el que, sin embargo, justo antes del fin, los caminos se rebelan contra su destino retorciéndose en curvas y nudos. Es su último intento de posponer el trance. Mientras dura esa demora el visitante que recorre esos caminos crea sus propios paralelismos para aliviar el cansancio, la soledad y la tristeza que sucede a la llegada a la meta, antesala de lo irremediable. No hablo de absurdos, sino de realidades dignas de los más grandes poetas y filósofos. Fue precisamente *Alberto Caeiro*, heterónimo de Fernando Pessoa, quien arremetió contra quienes pretenden aprehender la realidad con los números. Tal vez la tristeza de esta despedida no esté en la despedida misma, sino en la cruda certeza del poema de *Caeiro* sobre imágenes y números¹.

*Una hilera de árboles a lo lejos, allá en la ladera.
Pero, ¿qué es una hilera de árboles? Árboles, solamente.
Hilera y el plural árboles no son cosas, son nombres.
¡Tristes de las almas humanas que todo lo ordenan
y trazan líneas entre cosa y cosa
y colocan letreros para nombrar árboles absolutamente reales
y dibujan paralelos de latitud y longitud
sobre la propia tierra inocente, más verde y florida que todo eso!*

NOTA

¹ *Um renque de árvores lá longe, lá para a encosta. / Mas o que é um renque de árvores? Há árvores apenas. / Renque e o plural árvores não são cousas, são nomes. / Tristes das almas humanas, que põem tudo em ordem, / Que traçam linhas de cousa a cousa, / Que põem letreros com nomes nas árvores absolutamente reais, / E desenhavam paralelos de latitude e longitude / Sobre a própria terra inocente e mais verde e florida do que isso!* Fernando Pessoa en palabras y en imágenes. Segunda edición del número doble 7 y 8 de la revista Poesía. Ediciones Siruela. Madrid 1995.

Aunque ustedes sean ecológicamente correctos/as no me puedo imaginar a ningún lector/a de SUMA acudiendo con jabón, palas de madera y una tina de mimbre repleta de ropa sucia a las orillas de un río para hacer la colada. Los parientes lejanos de todos/as los/as lectores/as de SUMA sí que lo hicieron. ¿Por qué se ha roto esta bonita tradición de lavado natural? La respuesta es muy simple: o no hay río cercano, o si lo hay su caudal ensuciaría la ropa o si hay río cristalino no hay tiempo (como en clase para acabar el programa). La presencia de agua corriente en casa y lavadero cerámico tampoco parece seducir a los usuarios actuales... Afortunadamente las lavadoras nos han resuelto el problema.

Lo que les propongo en este clip es que aprovechen también las lavadoras que son robots, omnipresentes en los hogares actuales, para plantear temas de matemática cotidiana.

Del lavado fluvial al programable

Para aliviar el cansancio del lavado a partir del siglo XVIII (Henry Siedger 1782) se fueron inventando máquinas para lavar y escurrir la ropa siempre en base a aplicar la fuerza humana para accionar manivelas, rodillos, etc. El agua caliente (vía gas o carbón) aparece usada en lavado hacia finales del



Claudi Alsina
elclip.suma@fespm.org

siglo XIX y en 1888, Nikola Tesla aplica un pequeño motor eléctrico.

La fecha oficial de nacimiento de la lavadora como electrodoméstico es 1901 cuando el americano Alva Fisher introduce un tambor que gira con balanceo impulsado por un motor eléctrico. Este tipo de lavadoras no empezó a ser asequible y popular hasta después de los años cuarenta. Hoy la sofisticación de las lavadoras puede ser notable, como veremos a continuación, mucho más allá del lavado-aclarado-centrifugado.

Enfréntese al libro de instrucciones

Una buena parte de las instrucciones son de sentido común (no ponga ropa con móviles, enchufe la máquina, cierre la puerta...). Pero otras son de mayor complejidad. No se trata de ser mecánicos para arreglar el tambor, las correas, el motor, el dosificador, etc. pero sí de ser usuarios capaces de hacer funcionar la lavadora con un mínimo de dignidad.

Vaya directamente al panel de mandos. Un sinfín de teclas y pilotos chivatos se ponen al servicio de nuestra sonata lavandera, pero nosotros, más allá de la simple utilización, deseamos entender del folleto de 60 páginas las *informaciones cuantitativas* esenciales. Le resumo aquí algunas:

También puede hacer *organigramas* con los diferentes *algoritmos* para lavados diversos (ropa mezclada, tejidos delicados, almidonado...) o analizar los *símbolos* de lavado, secado y planchado de las instrucciones de limpieza de ropa.

La *geometría* de la lavadora (*prisma* 60 cm × 59,5 cm × 85 cm) con los *giros* del tambor también puede ser mencionada. Ni que decir tiene que el secado tradicional de la ropa lleva a disponer ésta en alambres con pinzas de tender, un diseño anónimo óptimo, de dos piezas simétricas articuladas mediante una hélice... y el movimiento de las sábanas sirve para evaluar intensidades del viento.

Lógica Borrosa para el lavado

Cuando en los años setenta L. Zadeh introdujo la idea de *fuzzy set* (conjunto borroso) seguramente no sospechó que su teoría acabaría siendo marca de calidad tecnológica (FUZZY LOGIC) en electrodomésticos, sistemas de frenado de metro, cámaras fotográficas, etc.

La idea de conjunto borroso es simple y atractiva: los conjuntos clásicos se pueden representar por su función característica con valores 1 (para los elementos que pertenecen) y 0 (para los que no pertenecen) pero en conjuntos borrosos la representación es mediante una función que toma valores en

Informaciones cuantitativas de lavadora

1, 0	En teclas de conexión/desconexión
30°–95°	Temperaturas de programas
0–1400	Revoluciones de centrifugado
I, II, III, IV	Grados de dureza del agua (ajuste de escala) expresado en mmol/l o en °d alemanes
[0,1]	Graduación automática para dosificar suavizante, etc.
0 kg – 5 kg	Pesos de cargas de ropa
0 min – 30 min	Tiempo de la protección antiarrugas
0 h – 2h	Tiempo dedicado a diferentes programas
1 bar – 10 bares	Presión del agua de abastecimiento
230V 50H	Corriente monofasica
30mA	Característica del diferencial
xKwh	Consumo eléctrico
35 l – 75 l	Consumo de agua
1600 Newtons	De carga máxima en suelo
...	

el intervalo $[0,1]$, asignándose pues valores de pertenencia a sus elementos. Si en lógica clásica todo es blanco o negro en lógica borrosa hay infinitos colores intermedios. De Hamlet (*ser o no ser*) a Campoamor (*según el color del cristal con que se mira*). Las lavadoras con *Fuzzy Logic* incorporan un mecanismo que evalúa el grado de la suciedad y de la grasa de la ropa depositada y en función de dicho grado se autoregula el tiempo del programa de lavado, la cantidad de detergente y de agua, etc. Para precisar, si miramos solo el grado de suciedad, partiendo de una base de 10 minutos de lavado si la suciedad tuviese grado 1 se añadirían 2 minutos a los 10, con grado $\frac{1}{2}$ se añadiría solo 1 minuto, etc. Cada concepto tiene un modelo lineal y luego se ponderan los diferentes resultados.

La lavadora paritaria

El 8 de Marzo de 2005, Europa Press difundió a bombo y platillo la próxima presentación para el *Día del Padre* de la *primera lavadora paritaria*. El invento consiste en una lavadora normal a la cual se ha incorporado un sistema informático (llamado *te toca*) gracias al cual sólo puede ponerse en marcha la lavadora si cada vez se identifica una impronta digital diferente, forzando pues una colaboración matrimonial en esta labor de limpieza. Quiero presuponer que el sistema tiene codificadas las dos huellas digitales pertinentes y no simplemente *la diferencia* pues en

este caso, maridos recalcitrantes acudirían con flores a vecinas o con juguetes a sus hijos para lograr escabullirse de la tarea. ¿Qué ocurre cuando uno se va de viaje? ¿Y si hay separación?

Aunque *la identificación de huellas sea un bonito problema geométrico-computacional* el usar la tecnología para imponer lo que por acuerdo verbal no fue posible parece cuanto menos pintoresco. Las lavadoras ya pueden ponerse en marcha con un móvil vía Internet (como la calefacción) y muchas incorporan ya el secado. Nuestro primer robot casero, la lavadora, merece también nuestra atención. Con sólo matemáticas no se podría lavar la ropa, pero hoy, sin ellas, tampoco.

Para pensar un rato

En el caso de la lavadora le propongo que se plantee (y resuelva) la evaluación del coste del lavado de 5 kg de ropa de color a 60°C y 1400 revoluciones de centrifugado con un consumo de 0,95 kWh (1 hora 58 minutos) y 52 l de agua. Tome de referencia los últimos recibos de agua y electricidad. Complique el modelo: gasto de detergente, gasto de suavizante, amortización de la lavadora...

¿Qué otras cuestiones matemáticas relativas a electrodomésticos se plantea? Las sugerencias que quiera compartir... a elclip.suma@fespsm.org. ■





PARA SABER MÁS

Sobre diseño

TASCHEN, B. (2005). *1000 objetos extraordinarios*.

HESRETT, J. (2005). *Diseño en la Vida Cotidiana*. Barcelona, Ed. Gustavo Gili.

ALSINA, C. (2004). *Geometría Cotidiana. Placeres y sorpresas del diseño*, Barcelona, Ed. Rubes.

En Internet

http://www.enwikipedia.org/wiki/washing_machine#History

<http://www.solociencia.com>

<http://www.bookrgs.com/sciences/sciencehistory/washing-machine-woi.html>

<http://www.fut.es/~vne#CC06.htm>

SUMA Revista sobre
la enseñanza y
el aprendizaje de las
MATEMÁTICAS

www.revistasuma.es

Apartado de Correos 19012

28080-MADRID (España)

Fax: (+34) 911 912 879

Dirección: direccion@revistasuma.es

Administración: administracion@revistasuma.es

Normas de publicación en página 143.

Boletín de suscripción en página 144.

Lobachevskiy: El Copérnico de la geometría

HACE 150 años, el 12 de febrero de 1856 del calendario juliano, moría en la ciudad rusa de Kazán, a la edad de 63 años, Nikolai Ivanovich Lobachevskiy. Escasamente reconocido en vida, a su muerte, sin embargo, llegó a ser considerado como el *Copérnico de la Geometría*, según la propuesta del matemático Clifford (1845–1879).

¿A qué fue debido tan extraordinario título a su favor?

Su vida

Poco se sabe de la vida de Nikolai Ivanovich Lobachevskiy. Nació el 1 de diciembre de 1792 en la localidad rusa de Nizhniy -Novgorod, actualmente Gorki. Su padre, Iván M. Lobacheskiy trabajaba como funcionario en una oficina dedicada a la inspección de tierras, su madre Praskovia Aleksándova, persona inteligente y de carácter enérgico, se había dedicado enteramente a su familia, especialmente a los tres hijos del matrimonio.



Busto de Lobachevskiy, en Moscú

Nikolai Lobachevskiy era el tercero de los hermanos y solo tenía cinco años cuando fue abandonado por su padre, decidiendo la madre regresar con sus hijos a casa de los abuelos. Dos años después, en 1800, falleció el padre de Nikolai y ese mismo año su madre se trasladaría a la ciudad de Kazán, que ofrecía mejores y mayores posibilidades para el desarrollo intelectual y profesional de sus hijos. Precisamente, en 1800, se inauguraba un centro educativo de nivel superior, el Gimnasium, único centro oficial no religioso de Kazán. En noviembre de 1802 Praskovia Aleksándova solicitó y obtuvo la admisión de sus hijos en el Gimnasium, no sin antes haber superado éstos unos severos exámenes.

Santiago Gutiérrez
hace.suma@fespm.org

En el Gimnasium, Nicolai tuvo la suerte de encontrar al joven y entusiasta profesor de matemáticas Kartashevski, que utilizaba para la preparación de sus clases obras de matemáticos célebres de la época, y en especial los *Eléments de géométrie*, del matemático francés Legendre (1752-1833), publicado en el año 1794. Este autor habría de ejercer una gran influencia en los escritos geométricos de Lobachevskiy.

Cuando aún no había cumplido los quince años, en 1807, Nikolai Lobachevskiy, acababa sus estudios brillantemente en el Gimnasium y podía ya leer entonces escritos científicos en francés, alemán y latín. A continuación, comenzaba sus estudios en la recién inaugurada universidad de Kazán, fundada en 1804, bajo el impulso del emperador Alejandro I, pero que no había iniciado sus actividades hasta el año siguiente.

En el año 1808, se incorporaba a la cátedra de matemáticas de la universidad el profesor alemán M.F. Bartels (1769-1833), que además de buen matemático era un excelente pedagogo. Bartels era aquel célebre joven profesor en prácticas al que el maestro Büttner había confiado el aprendizaje del niño de diez años F. Gauss en la escuela de Brunswick. No sería de extrañar que Bartels conociera el interés de Gauss por la cuestión del quinto postulado de Euclides y de alguna manera transmitiera este interés en sus clases al propio Lobachevski.

El año 1811, Lobachevskiy recibía el título de Licenciado en Física y Matemáticas. Con la mayoría de notas sobresalientes, y sin haber cumplido aún los 19 años, era invitado a quedarse en la propia Universidad de Kazán.

El año 1811, Lobachevskiy recibía el título de Licenciado en Física y Matemáticas. Con la mayoría de notas sobresalientes, y sin haber cumplido aún los 19 años, era invitado a quedarse en la propia Universidad de Kazán. Con 21 años, recibía el nombramiento de profesor adjunto de Física y Matemáticas, al tiempo que el profesor Bartels era elegido decano de su facultad.

Con este nombramiento, Lobachevskiy se veía obligado a impartir cursos y conferencias sobre materias tan variadas

como Aritmética, Teoría de Números, Álgebra, Geometría, Trigonometría, y Cálculo, y ello tanto a sus alumnos como a maestros y funcionarios. En julio de 1816, a la edad de 24 años, por petición expresa del profesor Bartels, fue nombrado profesor extraordinario de la Universidad. Una de las primeras tareas que se le encomendaron fue la de ordenar la biblioteca central de la Universidad (1819), que disponía de miles de libros, entre manuscritos y códices, pero muy desordenados.

El deterioro de la vida intelectual en el Imperio Ruso llevaría al profesor Bartels, en el año 1820, a aceptar una oferta de la Universidad de Dorpat. De este modo, quedaba vacante el puesto de Decano de la Facultad de Física y Matemática y para cubrirlo era nombrado Lobachevskiy, a pesar de ser sólo profesor extraordinario. Lobachevskiy se convirtió así en el personaje central de su Facultad. A partir de este momento:

- se le nombró miembro del comité de construcción de los edificios universitarios, labor que consistía en poner en marcha las diversas construcciones que se erigieron por esa época en la Universidad.
- organizó el laboratorio de Física.
- participó en el proyecto de construcción de un observatorio astronómico, que posteriormente él mismo utilizaría.
- fue nombrado redactor de una revista surgida en la Universidad y que posteriormente se denominó *Memorias de la Universidad de Kazán*.
- formó parte del comité encargado de dirigir la actividad docente de todos los centros educativos del distrito de Kazán.

En 1822 es nombrado catedrático de la Universidad. A pesar de tantas tareas administrativas Lobachevskiy siguió con sus matemáticas, impartiendo clases, estudiando, investigando, escribiendo, etc.

El año 1827, cuando aún no había cumplido los 34 años, era elegido rector de la Universidad de Kazán, cargo que ocuparía de manera ininterrumpida durante 19 años. Tan prolongada etapa como rector da idea del buen trabajo que realizó así como de la aceptación que disfrutó tanto por parte de los profesores como de los alumnos.

A punto de cumplir los 40 años, el año 1832, Lobachevskiy contrajo matrimonio con Varvara A. Moiséeva, mujer bastante más joven que él, perteneciente a una acomodada familia de Kazán, y con la que tuvo siete hijos.

El año 1846, cuando llevaba 30 años de servicio como profesor Lobachevskiy, al parecer, se vio obligado a jubilarse y dejar la Universidad. Coincidiendo con ello, cae gravemente enferma su mujer. Poco después su hijo mayor, el preferido, muere de tuberculosis.

Esta serie de desgracias, unidas al hecho de que estaba quedándose ciego, debido a una precoz esclerosis, debilitaron sensiblemente su salud, y, abandonado por los compañeros y colegas, incomprendido y enfermo, Lobachevskiy falleció en Kazán el 12 de febrero de 1856.

Su obra no geométrica

A pesar de haber dedicado gran parte de sus energías a tareas administrativas de la Universidad, Lobachevskiy no dejó de investigar en los más diversos campos de la matemática. Resultado de ello son trabajos como los siguientes:

- *Acerca de la convergencia de las series trigonométricas*, 1834.
- *El álgebra o el cálculo de los finitos*, 1834.
- *Sur la probabilité des resultats moyens, tirés des observations répétées*, 1842.
- *Acerca de los valores de algunas integrales definidas*, 1852.

En una memoria sobre la convergencia de las series geométricas define así el concepto de función: Como función de una variable se entiende una magnitud cuyo valor depende de esa variable. Es la primera vez en la historia de las matemáticas que aparece definida la idea de función sin necesidad de relacionarla con fórmulas o gráficas, como hasta entonces se hacía.

De todos estos trabajos es su *Álgebra* el texto por el que era más conocido en vida. Seguramente lo había escrito inspirado en los textos de los matemáticos más importantes del momento, que había leído por sugerencia del profesor Bartels, entre ellos la *Teoría de números* de Legendre y las *Disquisiciones aritméticas* de Gauss.

En una memoria sobre la convergencia de las series geométricas define así el concepto de función:

Como función de una variable se entiende una magnitud cuyo valor depende de esa variable

Es la primera vez en la historia de las matemáticas que aparece definida la idea de función sin necesidad de relacionarla con fórmulas o gráficas, como hasta entonces se hacía.

Sin embargo, no fue por sus escritos de Álgebra por lo que pasó a la historia Lobachevskiy. Son sus trabajos sobre Geometría los que hoy nos llevan a recordar su figura.



Sello emitido por Rusia en 1951, formando parte de una serie dedicada a sabios rusos

Su obra geométrica

Sus primeros escritos sobre esta materia son unos apuntes de clase titulados simplemente Geometría, que redactó en el verano de 1823, con la idea de ser publicados por la Universidad, a lo que ésta se negó por considerarlo poco ortodoxo. Y, en efecto, inspirado en las ideas de Legendre (*Elementos de Geometría*), Lobachevskiy ordenaba su exposición de la Geometría de modo excesivamente nuevo para la época en aquella pequeña Universidad de Kazán. Enfocaba el estudio de la geometría desde tres puntos de vista: medida de longitudes, medida de áreas y cálculo de volúmenes.

Construía los cinco primeros capítulos sin utilizar el quinto postulado de Euclides. Por primera vez en la historia se hacía esto de forma consciente. Lobachevskiy se daba cuenta de que la medida de los segmentos y de los ángulos no depende del quinto postulado, mientras que sí lo hace la medida de las áreas, razón por la cual retrasa lo más posible el cálculo de las áreas de figuras.

Sobre el quinto postulado de Euclides, afirmaba en estos pequeños apuntes que:

[...] no se ha descubierto hasta ahora ninguna demostración rigurosa de su verdad.

Después de ver rechazada la publicación de su Geometría, continuó Lobachevskiy investigando sobre el postulado de las paralelas, pero tomándolo en el sentido contrario, es decir, suponiendo que:

Por un punto P , exterior a una recta AB , pasa más de una paralela a AB , en el plano determinado por P y AB .

El quinto postulado y el problema de las paralelas

Para darse cuenta de la importancia del trabajo realizado por Lobachevskiy, conviene echar la mirada atrás y ver el camino recorrido.

En los *Elementos*, establece Euclides (ca. 300 a.C.), además de 23 definiciones y 9 nociones comunes, tan solo 5 postulados, y sobre este material construye todo el edificio de su Geometría que ocupará buena parte de los Elementos.

Los postulados dicen así:

Se pide:

1. Que de cualquier punto se pueda conducir una recta a todo otro punto.
2. Y que, toda recta limitada, se pueda prolongar indefinidamente por derecho (en su misma dirección).
3. Y que, con cualquier centro y cualquier distancia, se pueda describir un círculo.
4. Y que todos los ángulos rectos sean iguales entre sí.
5. Y que si una recta, cortando a otras dos, forma los ángulos internos a una misma parte, menores de dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán de la parte en que son los dos ángulos menores de dos rectos.

Ni que decir tiene que sorprendió a los matemáticos de todas las épocas, y aún nos sigue sorprendiendo hoy, la extensión y complejidad del quinto postulado si se compara con la brevedad y simplicidad de los otros cuatro. Este hecho dio lugar a múltiples intentos, a lo largo de la historia, de demostrar que este quinto postulado no era necesario como tal sino que se podría deducir de los otros.

Estos intentos se basaron en distintas estrategias, según la época. Básicamente, se pueden considerar las tres siguientes:

A. Sustituir el quinto postulado por otro equivalente pero más evidente y tratar de demostrar este otro a partir de los cuatro primeros

Este fue el primer intento conocido y ya lo había utilizado Proclo (411–485), comentarista de Euclides. Otros matemáticos eminentes intentaron algo parecido, como Legendre, Gauss, Wallis... pero el que cobró más fama y popularidad es el de Playfair (1795):

Por un punto exterior a una recta dada pasa una única recta paralela a ella.

Este enunciado, por su sencillez, se impuso de tal forma que sirvió de base, como se verá, para la creación de las geometrías no euclidianas.

Una segunda estrategia consistió en atacar el problema de frente, esto es:

B. Tratar de deducir el quinto postulado directamente a partir de los otros cuatro

Las demostraciones a que condujeron semejantes esfuerzos o fueron infructuosas, y no llegaron a su fin, o, si llegaron hasta un aparente final, adolecían de ciertos fallos que más temprano que tarde fueron saliendo a la luz.

A comienzos del siglo XVIII, aparece una nueva estrategia:

C. Demostrar la independencia del quinto postulado respecto de los anteriores por reducción al absurdo

Tal estrategia consistía en sustituir el contenido del quinto postulado por otro que diga lo contrario. Si se llegase a contradicción por este camino sería prueba evidente de que el quinto postulado, en su versión euclídea o en cualquier otra equivalente, depende realmente de los otros y podría por tanto abandonar su puesto como postulado para pasar al de proposición o teorema.

Con semejante estrategia abordaron el problema Saccheri, Lambert, Schweikart y Taurinus.

Estos matemáticos comenzaron por cambiar radicalmente el objetivo. En lugar de intentar demostrar que el quinto postulado es consecuencia de los otros, se proponían demostrar que es realmente independiente, o lo que es lo mismo, que las contradicciones aparecerían si se sustituía por el contrario.

Efectivamente, el primero de los citados y más interesante, el jesuita Saccheri (1667-1733), lleva a cabo su discurso, resultado de negar la afirmación del quinto postulado, y desarrolla su geometría en un librito con más de treinta proposiciones, deducidas con todo rigor a partir de su hipótesis. Al final, escribe:

Al fin he descubierto, en la hipótesis... una falsedad evidente, ya que necesariamente lleva a tener que admitir la existencia de dos rectas que, en el mismo punto (el de intersección) y en el mismo plano, tienen una perpendicular común.

Y esto,

[...] repugna a la naturaleza de la línea recta.

La geometría de Lobachevskiy

Después de ver rechazada la publicación, por parte de la Universidad, de su *Geometría*, continuó Lobachevskiy investigando sobre el postulado de las paralelas, a partir del enunciado de Playfair, pero tomándolo en el sentido contrario, es decir, suponiendo que:

Por un punto P , exterior a una recta AB , pasa más de una paralela a AB , en el plano determinado por P y AB .

Proposición tras proposición, construye así una extraña geometría, exenta de contradicciones si bien tan rara que él mismo denominó *Geometría imaginaria*.

Estamos en el año 1826. El día 11 de febrero, Lobachevskiy presenta su trabajo a los asistentes a una sesión de la facultad, con la siguiente carta de presentación:

Tengo el honor de presentar bajo el título de *Breve exposición de los principios de la geometría, con una demostración rigurosa del teorema de las paralelas*, un trabajo del que soy autor.

Deseo conocer la opinión de mis compañeros sobre él, y, si es favorable, solicito humildemente la publicación de mi trabajo en las memorias de la sección de Física y Matemáticas. He preferido escribir el trabajo en francés porque en ese idioma, ahora común a los hombres de ciencia, se ha contemplado editar las memorias.

Este trabajo no llegó a publicarse, sin embargo sabemos de su contenido gracias al artículo que el propio Lobachevskiy publicó, en la revista *El mensajero de Kazán*, con el título "Acerca de los principios de geometría", que incluía como parte importante su "Breve exposición..."

Podemos decir, en consecuencia, que el día 11 de febrero de 1826 nace, en la Universidad de Kazán, la geometría no euclidiana, ya que antes de esa fecha nadie había dado a conocer al mundo científico ningún escrito que desarrollara rigurosamente tal geometría y la admitiera como verdad matemática con todas sus consecuencias.

Lobachevskiy ganó a todos sus contemporáneos en dos aspectos, por una parte publicó su Geometría antes que ningún otro, y por otro lado tuvo el valor de enfrentarse a cuantos le criticaron y defender con tesón sus ideas en sucesivos escritos frente a todos ellos.

Es verdad que Sacheri y otros, como se ha citado, anduvieron cerca del descubrimiento, pero no supieron aceptar sus últimas conclusiones. Por su parte, Gauss sí había llegado, probablemente, lo bastante lejos como para poder reclamar la primogenitura del hallazgo, pero no publicó nada por miedo a mermar el prestigio de que gozaba entre sus contemporáneos, o, tal vez, por falta de seguridad en la validez de sus resultados. También J. Bolyai construyó un edificio semejante y por las mismas fechas, pero no lo publicó hasta 1832 y como opúsculo a un libro de su padre.

Lobachevskiy ganó a todos sus contemporáneos en dos aspectos, por una parte publicó su *Geometría* antes que ningún otro, y por otro lado tuvo el valor de enfrentarse a cuantos le criticaron y defender con tesón sus ideas en sucesivos escritos frente a todos ellos.

¿De dónde sacó Lobachevskiy tanta fuerza? Aparte de su indomable espíritu, hay que ver en su punto de vista una razón para llevar adelante semejante proyecto. Así, Saccheri, no se apartó

nunca del punto de vista euclidiano, seguía pensando en la recta como el objeto verificable en nuestro mundo cotidiano. Lobachevskiy, fue consecuente desde el comienzo, esto es, si se parte de que en el plano, por un punto exterior a una recta pasa más de una paralela a ella, esa recta y esas paralelas se desgajan ya del mundo de Euclides para convertirse en entes abstractos. Lobachevskiy revoluciona la geometría en tanto que hasta entonces era verificable en referencia a la Tierra que pisamos, mientras que él propone como referencia la lógica interna del sistema. Carece de sentido por tanto decir, en esta línea de trabajo, que un postulado, una conclusión o un teorema *repugnan a la naturaleza*. Con razón Clifford propuso considerarlo como el *Copérnico de la Geometría*.

En adelante, Lobachevskiy continuó sus investigaciones sobre los fundamentos de la Geometría que fue publicando en sucesivos artículos en la revista *Mensajero de Kazán*, bajo el título *Sobre los principios elementales de la Geometría*. Siguió en 1835 con su *Geometría imaginaria*. De 1836 a 1838 en los

Trabajos de los científicos de Kazán publicó *Aplicaciones de la Geometría imaginaria a algunas integrales*, y varios artículos bajo el título *Nuevos elementos de la Geometría, con una teoría completa de las líneas paralelas*.

En los últimos años de su vida, ya ciego, dictó una exposición completa de su Geometría con el título de *Pangeometría*, que fue publicada en ruso y en francés en 1855, solo un año antes de su muerte.

Los trabajos de Lobachevskiy (probablemente la *Geometría imaginaria*) llegaron a conocimiento de Gauss, quien se expresó en términos sumamente elogiosos, hasta el punto de quedar

deseoso de leer más de este ingenioso matemático

y le propuso en 1842 para ser nombrado miembro correspondiente de la Sociedad de Científicos de Gotinga, cosa que al parecer no llegó a saber nunca. ■



Sello emitido por Rusia en 1956, al cumplirse el centenario de la muerte de Lobachevskiy



Para Marisol Rodríguez Abascal

El principal defecto de muchos sabios es que no se entretienen más que con discursos vagos y resobados, mientras que hay muchas posibilidades de ejercitar su talento con objetos sólidos y reales, para provecho del público.

Leibniz

Toda persona que se dedica a enseñar sabe que la única manera de aprender algo es haciéndolo. Se aprende a montar en bicicleta montándola, como se aprende a escribir escribiendo; lo mismo ocurre con las matemáticas. No se trata de primero aprender matemáticas y luego ponerlas en práctica: se trata de aprender matemáticas practicándolas. Pero no es fácil encontrar un contexto en el que ejercitarnos en las matemáticas.

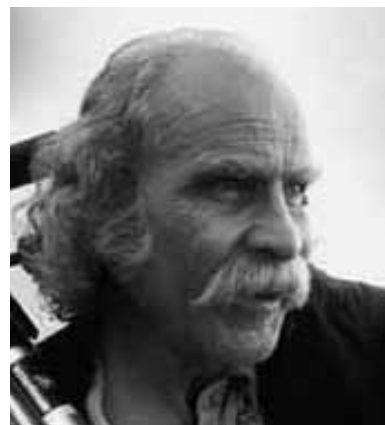
Si el sentido original de la palabra matemáticas es algo que puede aprenderse, que puede entenderse, parece que en sus más de veinticinco siglos de historia las matemáticas han recorrido un largo camino que les ha alejado bastante de su punto de partida. O al menos eso se considera a nivel social, y de ese sentir participan de forma mayoritaria nuestros alumnos.

Pero, por otra parte, las matemáticas constituyen la única asignatura que se estudia en todos los países del mundo y en todos los niveles educativos. Y supone un pilar básico de la enseñanza en todos ellos. La causa fundamental de esa universal presencia hay que buscarla en que las matemáticas constituyen un idioma poderoso, conciso y sin ambigüedades.

La utilización de un idioma requiere de unos conocimientos mínimos para poder desarrollarse, por supuesto. Pero, sobre todo, se necesitan situaciones que inviten a comunicarse por medio de ese idioma.

Fernando Corbalán, *Juegos Matemáticos para Secundaria y Bachillerato*, Síntesis, 1994.

Eso, precisamente, encontramos en la obra de Adolfo Schlosser: un contexto en el que hacer matemáticas y una situación en la que las matemáticas eran necesarias para poder comunicarnos.

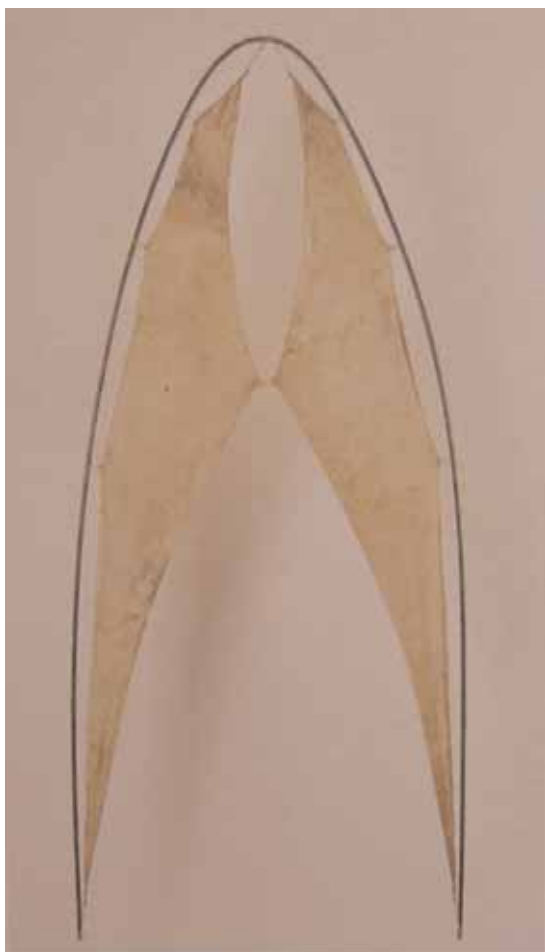


Adolfo Schlosser

Capi Corrales Rodrigáñez
enunciadrado.suma@fespm.org

Era una mañana fría y luminosa de marzo, uno de esos domingos en que apetece salir y aprovechar que los museos nacionales son gratis. Visité la exposición antológica de la obra de Schlosser en el Reina Sofía con dos amigas matemáticas, Lidia Vivas y Carmen Calvo. Íbamos por las salas como flautistas de Hammelin; la gente nos seguía, atraída por nuestro entusiasmo, intentando entender las mil maneras de hacer matemáticas a partir de las piezas de Schlosser que según, se nos iban ocurriendo, comentábamos en voz alta, con frecuencia quitándonos la palabra las unas a las otras.

De todas las posibilidades que se ofrecían ante nuestros ojos —y manos—, lo que más nos atrajo es la idea de construir curvas con tripas de cerdo y ramas de rosal. Nos acercamos a una de las piezas, *El barómetro* (1976), una parábola perfecta¹.



El barómetro (1976)

¿Por qué se llama así?, es la primera pregunta que viene a la mente matemática. *Barómetro*. Según el diccionario María Moliner, se trata de un instrumento que sirve para medir la

presión atmosférica e, indirectamente, la altura de un lugar. Un instrumento científico. Hagamos, pues ciencia.

- ¿Dónde podemos reconocer el trazo de la presión atmosférica en esta pieza? La presión atmosférica varía con la humedad y temperatura y estas, a su vez, alteran la presión que la piel de cerdo ejerce sobre la rama del rosal y la que la rama ejerce sobre la piel.
- ¿Qué efectos tiene la variación de temperatura sobre la madera, sobre el cuero?
- ¿Cómo hace cambiar la resistencia de un material el grado de humedad que guarde?

Sigamos haciendo ciencia, incluyendo en nuestro hacer algo de matemáticas.

- ¿Qué pasaría si las dos piezas de piel no tuviesen la misma forma?
- ¿Qué pasaría si las dos piezas tuviesen la misma forma, pero estuviesen hechas con materiales distintos?
- ¿Qué pasaría si las dos piezas, teniendo la misma forma y estando hechas con el mismo material, no estuviesen colocadas simétricamente, si las distancias a las que están cosidas a la rama fuesen desiguales?

Llevamos a cabo los experimentos y estudiamos las curvas que la rama va dibujando en cada una de las situaciones. Cuándo las reconocemos, cuando no, cuando son simétricas, cuándo no, cuándo sabemos describirlas con precisión, cuándo no.

De todas las posibilidades que se ofrecían ante nuestros ojos —y manos—, lo que más nos atrajo es la idea de construir curvas con tripas de cerdo y ramas de rosal.

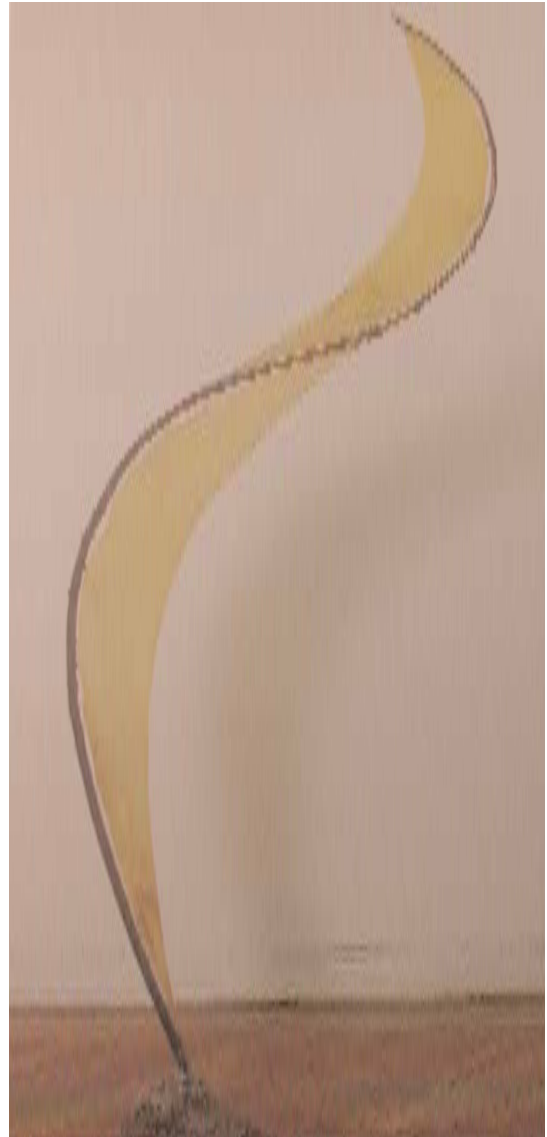
Volvemos a mirar la pieza de Schlosser. Dan ganas de tumbarse en ella. De hecho, si tuviese la punta un poco levantada, podría utilizarse como trineo para deslizarse por la nieve, la hierba o la arena. ¿Cómo levantarle la punta? Necesitamos más presión, tensión hacia arriba. Podríamos atar una cuerda al vértice y tirar para arriba, pero eso es una solución bastante chapuza. Pensemos como constructores de curvas, como matemáticos, con elegancia. ¿Qué solución se nos ocurre? La del propio Schlosser en *Trineo* (1976), claro. Romper la ten-

sión que la rama ejerce sobre la superficie de la piel con una costura perpendicular al eje de la parábola.

Buscamos por las salas, y encontramos una elegantísima, *Pequod* (1990).



Trineo (1976)

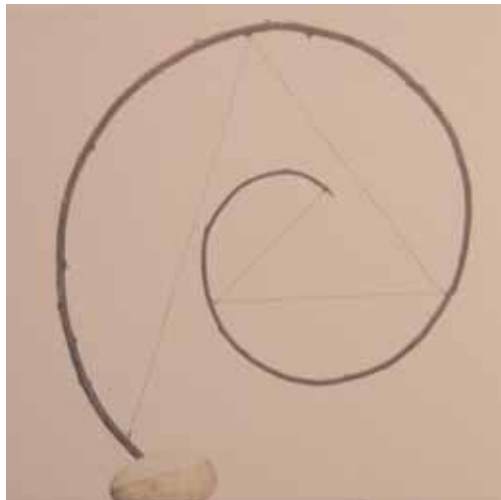


Pequod (1990)

Más ciencia, más matemáticas.

- ¿Qué pasaría si la piel no estuviese cosida a la rama en puntos simétricos respecto al eje vertical?
- ¿Qué pasaría si la costura no fuese perpendicular al eje, sino que estuviera sobre el propio eje?
- ¿Qué pasaría si la costura cortase al eje en un ángulo de 45 grados?
- Seguimos jugando,
- ¿Cómo conseguiríamos otras curvas?
- ¿Cómo se la describiríamos a alguien que no la ha visto?
- ¿Podríamos hacerlo sin matemáticas?
- ¿Cómo se la describiríamos a alguien que sin haberla visto tiene que reproducirla con la mayor exactitud posible? ¿Podríamos hacerlo sin matemáticas?
- ¿Cómo conseguiríamos una espiral?
- ¿Qué tipo de espiral?
- ¿Cómo ilustraríamos los distintos tipos de espiral?

Estudiamos dos de las que construyó Schlosser, *sin título* (1989), hecha con rama y cordel, y *el holandés errante* (1993), hecha con tripa de cerdo y una rama.



Sin título (1989)



El holandés errante (1993)

- ¿Qué distancia hay, sobre la rama, entre los puntos en los que está fijado el cordel?
- ¿Qué longitud tienen los distintos segmentos de cordel?
- ¿Guardan entre sí alguna proporción los números que miden las distancias entre los puntos sobre la rama?
- ¿Guardan entre sí alguna proporción los números que miden las longitudes de los distintos segmentos del cordel?
- ¿Hay alguna relación entre la serie de números que miden las distancias entre los puntos sobre la rama y la serie de números que miden las longitudes de los distintos segmentos del cordel?
- ¿Cómo describirías este tipo de espiral?
- ¿Cómo construirías distintas espirales de este tipo?

- ¿Qué forma tiene la pieza de piel de cerdo?
- ¿Podría conseguirse una espiral con una pieza que no tuviese costuras?
- ¿Qué otras formas se te ocurren que darían lugar a espirales?
- ¿Qué distancia hay, sobre la rama, entre los puntos en los que está fijado el cordel?
- ¿Qué pasaría si variamos estas distancias?

Salgamos a los campos y parques, cojamos ramas caídas de los árboles, busquemos retales, gomas, cordeles... volvamos al aula y posemos las ideas matemáticas sobre ellos. ■

El mundo que habitamos es un
complejo de estructuras que
son aglutinantes y están
aglutinadas

*Juan Navarro Baldeweg,
"Espirales, velero, ala, ojo", en
Adolfo Schlosser 1939-2004,
catálogo de la exposición en el
MNCA Reina Sofía
(7 de febrero - 16 de mayo 2006)*

Si el sol se posa sobre el ojo, la
piel se tensa, se arruga. Si un
pájaro se posa en una rama, la
arquea. Y si una idea lo hace
sobre una árbol, no lo arquea.
lo tuerce, lo arranca. ¿Y qué
queda el árbol? Lo que se ve,...
la idea.

Adolfo Schlosser

NOTA

¹ Agradecemos a la dirección del MNCA Reina Sofía que nos facilitase el permiso para entrar libremente en las salas dedicadas a Schlosser y llevar a cabo este estudio, a Amparo Gámir que nos regalase el catálogo de la exposición y al amigo invisible que nos consiguió reproducciones adecuadas de las fotografías de las piezas.

El problema de Arno Peters, un problema cartográfico

*¿A qué se parece la Tierra sobre todo?
[...]: a un ser unicelular*

Lewis Thomas.
The Lives of a Cell,
1974

Se acerca el verano y con él las vacaciones y los viajes a los sitios más dispares del planeta. Viajemos cerca o lejos, en coche, en tren o en avión, hay un objeto que no puede faltar en nuestro equipaje: un buen mapa.

Desde los tiempos de Ptolomeo y aún antes, los geógrafos, cartógrafos y matemáticos se han empeñado en la dura tarea de crear mapas cada vez más precisos de nuestro planeta o de alguna de sus partes. Es otro de los sueños de la Humanidad: conseguir el mapa perfecto.

Para ayudarnos a elegir el mapa más correcto, contamos en este número con la impagable ayuda de un especialista en geometría y en cartografía, Raúl Ibáñez Torres, profesor de la Universidad del País Vasco y divulgador incansable de las Matemáticas, en libros, artículos, conferencias, exposiciones y hasta programas de radio. No es un accidente casual que sea el presidente de la Comisión de divulgación de la RSME y el presidente y el motor, de cuatro o cinco tiempos, del portal de divulgación matemática más popular en castellano DivulgaMAT (<http://www.divulgamat.net>).

Pronto podremos gozar de sus desvelos por acercar las matemáticas a todos los públicos, pues es el comisario de las exposiciones *¿Por qué las Matemáticas...?*, *Arte fractal: belleza y matemáticas* y *Demoscene: Matemáticas en movimiento* que se llevarán a cabo, con motivo del ICM 2006, en el Centro Cultural Conde Duque de Madrid desde el 17 de agosto al 29 de octubre próximos.

Antonio Pérez Sanz

Presentación de los problemas

Cuando Antonio Pérez me llamó para sugerirme que escribiera un pequeño texto sobre algún problema geométrico para esta sección de la revista SUMA, me encontraba yo releando algunas partes del libro de Arno Peters *La nueva cartografía*. Esta es una lectura que suelo practicar cuando voy a impartir una conferencia sobre mapas, o cuando en Internet, en la prensa o en algún otro medio de comunicación vuelven a atacar con titulares como *El mapa del futuro, por un mundo más solidario* o frases como *Comprometido* [Peters] *siempre con la causa de la justicia, tomó el camino de la cartografía para restituir una imagen del mundo en la que cada pueblo tenga el lugar que le corresponde, tanto geográfica como políticamente*. Momento que suelo aprovechar para explicar que los argumentos falaces y supuestamente solidarios de Peters

Lejos de ser el mapa de Peters y sus argumentos realmente solidarios, se aprovechó del desconocimiento general de cartografía, para engañar y conseguir que su mapa fuera declarado el único mapa solidario.

Raúl Ibáñez Torres,
Universidad del País Vasco
Presidente de DivulgaMAT y de la
Comisión de divulgación de la RSME.
raul.ibanez@ehu.es

no eran más que una manera, a la postre exitosa para sus objetivos personales, de vender su mapa; y por vender entiéndase no solamente el obtener un beneficio económico, sino conseguir pasar a la Historia como el autor de un mapa reconocido internacionalmente. Lejos de ser su mapa y sus argumentos realmente solidarios, se aprovechó de la buena fe de las personas y de la solidaridad de estas, así como de su desconocimiento de unas mínimas nociones de cartografía, para engañarles y conseguir que su mapa fuera declarado “el único mapa solidario”, y lo que es peor desde un punto de vista matemático y cartográfico, “el único mapa correcto”.

De una forma esquemática su falaz argumento es el siguiente: antes sólo estaba el mapa de Mercator, que es un mapa insolidario y erróneo, mientras que su nuevo mapa es un mapa solidario y la única alternativa correcta al mapa de Mercator. Se escuchan frases como *el mapa de Peters corrige los errores del de Mercator [...] es más riguroso desde el punto de vista científico*. Sin embargo, cuando empiezas explicando a la gente que durante los últimos cuatrocientos años se han diseñado más de 250 tipos diferentes de mapas y que cada uno tiene sus propias propiedades (incluso que muchos de ellos comparten propiedades con el mapa de Gall-Peters¹), y que además no existen mapas correctos, todos tienen que sacrificar algunas propiedades para preservar otras, esto hace que las personas empiecen a cuestionarse la veracidad de lo que les habían contado.

Tras mi conversación con Antonio empecé a pensar en problemas de tipo geométrico que podían ser de interés para una sección como esta. Problemas clásicos de geometría diferencial, que es el área en la que trabajo. Sin embargo, yo seguía releendo el libro de Peters al mismo tiempo que trabajaba algunas ideas para el artículo. En ello estaba cuando llegué a uno de mis párrafos preferidos, la demostración que hace Arno Peters de que *la proyección de Mercator no preserva los ángulos*, pero no se queda ahí ya que incluso unos párrafos más adelante llega a afirmar que ningún mapa puede preservar los ángulos (por lo tanto, es una propiedad que no debe de preocuparnos). Veamos su argumento:

Examinemos ahora mediante algunos ejemplos si realmente concuerdan el modelo original (la superficie terrestre, el globo) y la red de coordenadas geográficas (la del mapa de Mercator):

- La línea de mínima curvatura entre Ciudad del Cabo y El Cairo, así como la que va desde el archipiélago de Nueva Liberia hasta el Cairo, se encuentran en esa ciudad formando un ángulo, tanto en el mapa como en el globo terrestre. En el globo terrestre, ambas líneas de insignificante curvatura (grandes círculos) forman un ángulo de 170 grados; en el mapa de Mercator, las mismas líneas de mínima curvatura (que aparecen rectas) forman un ángulo de 135 grados.
- La línea de mínima curvatura entre Reikiavik (Islandia) y Nueva York corta la también línea de mínima curvatura entre Río de Janeiro y Nueva York, formando un ángulo de 120 grados en el globo terrestre y de 105 grados en el mapa de Mercator.

- Las líneas de mínima curvatura entre España e Islandia y entre Islandia y Alaska se encuentran en Islandia, de manera que el ángulo en el globo es de 170 grados, y en la proyección de Mercator de 105 grados.

...

En consecuencia, el ángulo formado por dos líneas de mínima curvatura entre tres lugares cualesquiera de la proyección de Mercator no concuerda con el ángulo real que las mismas líneas configuran en la superficie de la Tierra. Por lo tanto, la proyección de Mercator carece de fidelidad angular.

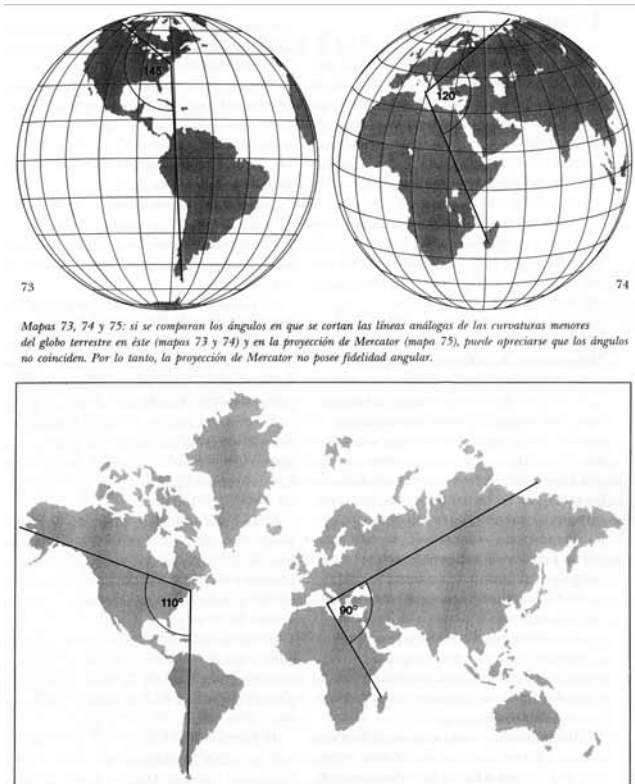


Figura 1: Imágenes del libro *La nueva cartografía* (pág. 65)

Entonces, pensé que el problema de estudiar si el argumento de Peters es correcto o no es un problema muy interesante y apropiado para esta sección. Por una parte, es un problema que se enmarca dentro del problema clásico y más general, que ha atormentado a matemáticos y cartógrafos a lo largo de la Historia: ¿cómo dibujar correctamente un mapa de la Tierra? Este es además un tema multidisciplinar muy interesante para utilizar en el aula, relacionado con cuestiones históricas, matemáticas y científicas, filosóficas, artísticas... y además puede adaptarse a varios niveles de reflexión: ESO, bachillerato o universidad. Por otra parte, este problema refleja un aspecto importante dentro de la propia actividad de la

investigación matemática, en el que no solemos incidir demasiado en nuestras clases, la revisión de una demostración, ya sea esta propia o de otro matemático. ¿La demostración que tenemos delante es correcta? ¿Estará utilizando algún argumento falaz? ¿Tendrá algún error en su desarrollo? ¿Se estará asumiendo como correcto algo que no lo es? La prueba de un resultado matemático o de un problema (por ejemplo, un ejercicio de clase) necesita de sucesivas lecturas para su comprobación, primero por parte del matemático que la ha escrito y luego de sus colegas para verificarla (o si pensamos en un problema de clase, primero la revisará el propio estudiante y posteriormente la corregirá el profesor). En la investigación matemática la comprobación de si una demostración no contiene errores es una tarea imprescindible, tanto para la comunidad científica que tiene necesidad de asegurarse de que el argumento de la demostración es correcto, como para el propio matemático, quien puede apoyarse en las conclusiones de su revisión para tratar de desarrollar una nueva prueba en caso de encontrar algún error o que, en caso de no ser así, puede seguir avanzando en los argumentos matemáticos para llegar más lejos. En ocasiones el avance de nuestra ciencia pasa por probar la falsedad de un argumento o resultado considerado verdadero hasta ese momento.

Problema 1: ¿Cómo dibujar correctamente un mapa de la Tierra?

Problema 2: ¿Es correcta la demostración de Peters sobre la no conformalidad de la proyección de Mercator?

Mis argumentos me parecieron interesantes y me dejé convencer para plantear los siguientes problemas en este artículo:

Problema 1: ¿Cómo dibujar correctamente un mapa de la Tierra?

Problema 2: ¿Es correcta la demostración de Peters sobre la no conformalidad de la proyección de Mercator?

Pero me gustaría volver al libro *La nueva cartografía*, de A. Peters, para terminar esta presentación. Aunque es un libro de lectura poco aconsejable para el público en general, sí es una lectura que recomiendo para profesores y otras personas interesadas en estos temas. Es una lectura inquietante por la historia que tiene detrás, pero a su vez motivadora, ya que acabamos teniendo un mayor conocimiento del tema al descubrir los argumentos falaces, observar las omisiones, cómo se manipula la información histórica, en qué lugar se pone a la matemática en relación a la cartografía, cómo los titulares no suelen corresponderse con lo que luego dice el texto, cómo

se enmascaran mentiras con argumentos aparentemente lógicos, con nomenclaturas engañosas, mostrando solo parte de la información, etc. Un ejemplo: cuando se citan las propiedades del mapa de Peters se menciona que tiene Fidelidad de Superficie (propiedad 1) y más adelante Fidelidad de Escala (propiedad 4), pero luego en la explicación habla de que realmente se refiere en ambos casos a la Fidelidad de Superficie, ya que la Fidelidad de Escala es imposible de obtener para ningún mapa.

Problema 1: ¿Cómo dibujar correctamente un mapa de la Tierra?

Con el objetivo de simplificar el estudio de los problemas considerados, pensaremos en la Tierra como una esfera de radio 1 y utilizaremos sencillos argumentos de geometría clásica en nuestro estudio (estos llevados al límite se convertirán en argumentos de geometría diferencial, que es el área de las matemáticas en el que se desarrolla realmente el estudio planteado).

Una cuestión previa sería: **¿qué significa correctamente?** Cuando utilizamos un mapa, estamos interesados en poder medir el área de un terreno, en elegir un rumbo para navegar, en tomar el camino más corto entre nuestro lugar de origen y nuestro destino, y medir la distancia entre ellos, en que las formas de los territorios se mantengan si estamos analizando distribuciones geográficas (niveles de vida, contaminación, población...), etc. En concreto, estamos interesados en que las proyecciones de la esfera en el plano que utilizamos para realizar los mapas preserven conceptos métricos como: las distancias, los caminos más cortos entre dos puntos (las geodésicas), las longitudes de los caminos, las direcciones (es decir, los ángulos), las áreas, las formas...

Proyecciones que preservan las distancias

La propiedad de que se preserven las distancias es, sin lugar a dudas, la propiedad más importante, ya que si tenemos una proyección de la esfera en el plano que preserve las distancias (llamada isometría²) también preservará las demás propiedades mencionadas: geodésicas (los caminos más cortos), áreas, ángulos...

Distancias $\Rightarrow$ Caminos más cortos (geodésicas)

Supongamos que tenemos una proyección de la esfera en el plano que preserve las distancias y veamos que también preservará los caminos más cortos entre cualesquiera dos puntos. Si nuestra proyección no preservase los caminos más cortos, entonces existirían dos puntos *A* y *B* sobre la esfera y otro

punto C sobre el camino más corto entre los anteriores, que como sabemos es el círculo máximo que los une, tal que la imagen de C en el plano, C' , no está en la recta que une las imágenes, A' y B' , de los puntos A y B respectivamente (véase la figura 2). En consecuencia, tenemos la siguiente situación. Por un lado, la distancia entre los puntos A' y B' (que denotamos $A'B'$) es igual a la distancia AB , puesto que la proyección preserva las distancias, y esta a su vez es igual a la suma de las distancias AC y CB , por estar C sobre el camino más corto. Sin embargo, como C' no está en la recta que une A' y B' , entonces la suma de las distancias $A'C'$ y $C'B'$, que por preservarse las distancias es igual a la suma de las distancias AC y CB , es estrictamente mayor que la distancia $A'B'$, obteniéndose así una contradicción.



Figura 2

$$AC+CB=AB=A'B' < A'C'+C'B'=AC+CB$$

Distancias $\Leftrightarrow$ Longitudes de curvas

Por el párrafo anterior, una aplicación que preserve las distancias, también preserva los caminos más cortos y en consecuencia, preservará las longitudes de las curvas. La razón es que toda curva de la esfera puede ser aproximada mediante un número finito (suficientemente grande) de arcos de círculos máximos, luego aproximamos su longitud mediante la suma de las longitudes de estos (que son las distancias entre los puntos extremos), de igual forma la curva imagen se aproxima por las rectas imagen de los arcos anteriores y su longitud por la suma de las longitudes de estos segmentos (véase la figura 3). El recíproco también es cierto porque la distancia entre dos puntos es el ínfimo de las longitudes de las curvas que los unen, o equivalentemente, la longitud del camino más corto entre ellos, la curva geodésica.

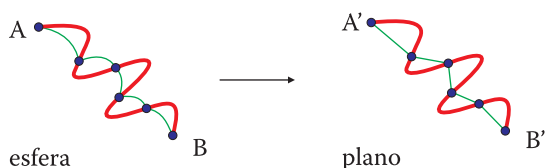


Figura 3

Distancias $\Rightarrow$ Ángulos

Dados dos círculos máximos de la esfera que se cortan en un punto, si tomamos una circunferencia centrada en dicho punto, de radio suficientemente pequeño, entonces podemos considerar que el ángulo θ entre los dos círculos máximos (que es el ángulo entre sus vectores tangentes) es el cociente entre la longitud del arco de circunferencia determinado por los dos círculos máximos y 2π veces el radio (véase la figura 4). Es decir, podemos aproximar la medida de los ángulos mediante medidas de longitudes.

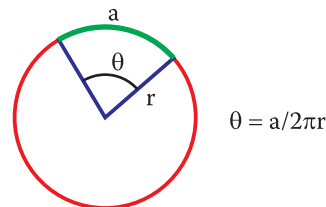


Figura 4

$$\theta = a/2\pi r$$

Por lo tanto, si tomamos la imagen mediante una aplicación que preserve las distancias, obtenemos dos rectas y una circunferencia centrada en el punto de corte. Por preservarse las distancias y ser la fórmula de la figura 4 válida para el plano, se deduce que dicha proyección preserva el ángulo. Este mismo argumento es válido para el ángulo entre dos curvas cualesquiera de la esfera que se corten en un punto, sin más que utilizar los círculos máximos que pasan por el punto de corte y con vectores tangentes iguales en dicho punto a los de las curvas. Es decir, si tenemos una proyección que preserve las distancias y dadas dos curvas sobre la esfera que se cortan en un punto formando un cierto ángulo, éste coincide con el ángulo que forman las dos curvas sobre el plano que son las imágenes de las curvas dadas sobre la esfera.

Distancias $\Rightarrow$ Áreas

La idea de esta afirmación reside en que dada una región acotada de la esfera la podemos cubrir con una familia finita (suficientemente grande) de regiones delimitadas por meridianos y paralelos, que podemos considerar regiones rectangulares (cuando el número sea suficientemente grande y por tanto estas regiones suficientemente pequeñas) y el área es la suma de las áreas de estos rectángulos (base por altura). En el plano obtendremos la región imagen, cubierta por la familia de rectángulos imágenes, y como la aplicación preserva las distancias, tendrá el mismo área.

Sin embargo, la preservación de geodésicas, áreas o ángulos son propiedades que cada una de ellas por sí misma no implica que se preserven las demás propiedades, como observaremos en los tres ejemplos de mapamundis que a continuación se describen.

Proyecciones que preservan las áreas (proyección de Arquímedes o cilíndrica isoareal de Lambert)

Se conoce como la aplicación de Arquímedes aquella entre la esfera y un cilindro tangente a la misma, tal que la imagen de un punto cualquiera A de la esfera es el punto A' del cilindro que es la intersección de este con la recta que pasa por A y corta perpendicularmente al eje del cilindro, como muestra la figura 5.

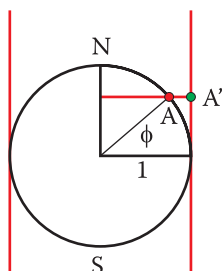


Figura 5: Proyección de Arquímedes

Si consideramos que la Tierra es nuestra esfera unidad y que el cilindro es el tangente a la esfera en el ecuador (por lo tanto, su eje pasa por los polos norte y sur), entonces una vez obtenida la imagen de la esfera en el cilindro, se despliega este en el plano. Este mapamundi, véase la figura 6, fue diseñado por J. H. Lambert en 1772.

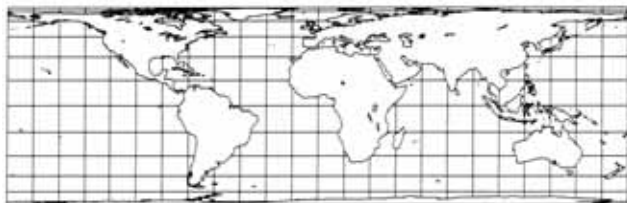


Figura 6: Mapa realizado a partir de la proyección cilíndrica isoareal de Lambert (1772)

Algunas propiedades del mapa basado en la proyección cilíndrica isoareal de Lambert:

- es de forma rectangular, como todas las proyecciones cilíndricas;
- los meridianos y los paralelos son rectas que se intersecan ortogonalmente;
- preserva las áreas, pero no preserva ni los ángulos ni las geodésicas;
- la distorsión en las formas, ángulos y distancias, es muy pequeña cerca del ecuador (más aún, la escala es real en el ecuador), pero mayor según nos acercamos a los polos.

Teniendo en cuenta el comentario del apartado anterior relativo a las áreas, para demostrar que la aplicación de Arquímedes preserva el área, es suficiente probarlo para regiones *rectangulares* (suficientemente pequeñas) cuyos lados son meridianos y paralelos. Como se muestra en la figura 7, dado un punto sobre la esfera de latitud ϕ , la imagen de un meridiano (suficientemente pequeño) de longitud l es un segmento de recta en el cilindro, de longitud $l' = l \cos \phi$, mientras que la imagen de un paralelo (suficientemente pequeño) de longitud k es un arco de circunferencia en el cilindro de longitud $k' = k / \cos \phi$. Por lo tanto, dado un pequeño *rectángulo* de base k y altura l sobre la esfera, luego de área $l \cdot k$, se transforma en un *rectángulo* de base $k' = k / \cos \phi$ y altura $l' = l \cos \phi$, cuyo área será también $l \cdot k$. En conclusión, la proyección de Arquímedes es una aplicación que preserva el área.

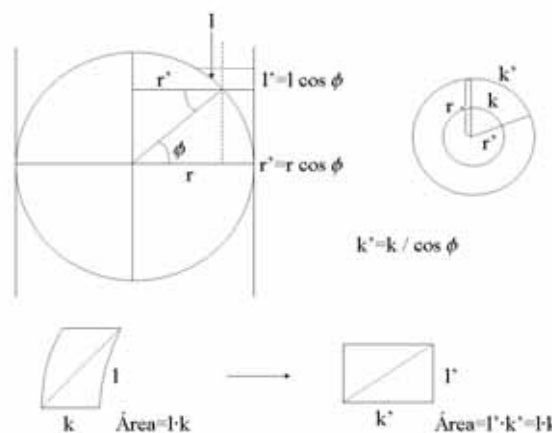


Figura 7: La proyección de Arquímedes es isoareal

Sin embargo, en este mapa de Lambert no se preservan los ángulos. Volviendo a la figura 7, vemos que por la distorsión que se produce en los meridianos (se contraen) y en los paralelos (se dilatan), el ángulo entre la base y la diagonal del rectángulo sobre la esfera es mayor que el mismo ángulo pero del rectángulo imagen sobre el plano. Aunque el ángulo entre los meridianos y los paralelos sí es preservado. En general, del comentario anterior podemos extraer la conclusión de que para que se preserven los ángulos tienen que ocurrir dos cosas:

- que se preserven los ángulos entre los meridianos y los paralelos (que son ángulos rectos, es decir, de 90 grados);
- que la distorsión en la dirección de los meridianos μ sea igual a la distorsión en la dirección de los paralelos λ .

Si se cumplen ambas propiedades podemos concluir además que la distorsión en cualquier dirección es siempre la misma. En particular, para la proyección cilíndrica isoareal de Lambert hemos visto que $\mu = \cos \phi$ y $\lambda = 1 / \cos \phi$. Finalmente, es obvio que esta aplicación no preserva la geodésicas, solamente los meridianos y el ecuador.

La propiedad de preservación de las áreas es normalmente la propiedad prioritaria para mapas con información basada en áreas de territorios y también en mapas de interés general, ya que los mapas son un instrumento para transmitir información *de un vistazo*, de forma más rápida y precisa que una tabla de números. En general, nos encontramos este tipo de mapas en divulgación científica, en la educación o en los medios de comunicación, aunque desafortunadamente en muchas ocasiones se utilizan los mapas sin ningún criterio objetivo. Además, sería también deseable que la deformación en las formas fuese la menor posible. En la actualidad la proyección utilizada por el National Geographic (hasta hace poco fue la proyección de Mercator) para crear sus mapas temáticos de la Tierra es la proyección de Winkel-Tripel, que tiene una distorsión moderada en el área y en la forma, excepto en los polos. Otras proyecciones isoareales son la cónica isoareal de Albers, la de Mollweide, la ortográfica de Gall-Peters, la de Eckert IV, la proyección azimutal isoareal de Lambert o la proyección sinusoidal (o de Sanson-Flamsteed).

Proyecciones que preservan las geodésicas (proyección central o gnómica)

Consideramos una esfera y un plano tangente a ella, entonces la imagen de un punto A de la esfera mediante la aplicación central o gnómica, es el punto A' del plano que se obtiene al intersectar éste con la recta que pasa por A y el centro de la esfera (figura 8).

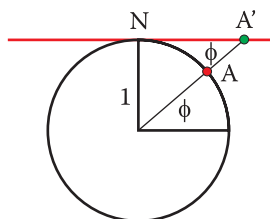


Figura 8: Proyección central

En la figura 9 podemos ver un mapa realizado haciendo uso de la proyección central (en su versión ecuatorial).

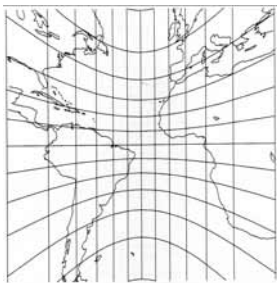


Figura 9: Mapa realizado con una de las proyecciones centrales ecuatoriales

Algunas propiedades:

- i) su imagen es circular y solamente cubre una parte de uno de los hemisferios;
- ii) la distorsión de meridianos y paralelos es $\mu = 1 / \sin^2 \phi$; $\lambda = 1 / \sin \phi$;
- iii) esta proyección preserva las geodésicas, pero no distancias, ángulos o áreas;
- iv) la distorsión de áreas, formas y ángulos, aunque menor cerca del centro, el punto de tangencia, es muy pronunciada según nos alejamos de dicho punto.

Teniendo en cuenta que las geodésicas de la esfera son los círculos máximos y que estos se obtienen como la intersección de la esfera con un plano que pasa por el centro de la misma, es trivial observar que la imagen de un círculo máximo mediante la proyección central es la recta intersección del plano que genera el círculo máximo y el plano de tangencia (ver figura 10). En consecuencia, nuestra aplicación envía geodésicas de la esfera (círculos máximos) en geodésicas del plano (rectas). Además, esta es la única carta que satisface esta propiedad.

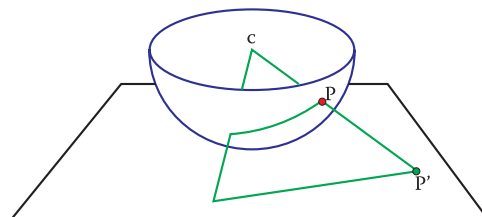


Figura 10: La proyección central preserva las geodésicas

Esta proyección es claramente útil en navegación, aérea o marítima, y suele usarse en combinación con la proyección de Mercator. También, es útil en meteorología o cristalografía. La proyección central ha sido utilizada para diseñar mapas tipo estrella y también mapas sobre superficies poliédricas.

Proyecciones que preservan los ángulos (proyección de Mercator)

El estudio realizado sobre la proyección de Lambert nos muestra que esta proyección cilíndrica no preserva los ángulos debido a que la distorsión que se produce en los meridianos $\cos \phi$ no es igual a la que se produce en los paralelos $1/\cos \phi$. Esta misma discusión nos da una idea de cómo construir una representación conforme (es decir, que preserva los ángulos), “estirando” el mapa de Lambert (figura 6) en la dirección norte-sur de forma que la distorsión en los meridianos pase a ser $1/\cos \phi$. El mapa isogonal que se genera con esta técnica es el mapa de Mercator (véase la figura 11). El mapa de Mercator es sin lugar a dudas el mapa más familiar para todos nosotros e incluso

podemos decir que ha sido *el mapa* durante prácticamente cuatro siglos. Este fue diseñado por el cartógrafo flamenco Gerhardus Mercator, 1512-1594, y publicado en 1569 bajo el título “Una nueva disposición de los meridianos con referencia a los paralelos”. El mérito de Mercator fue construir un mapa útil en la navegación marítima (en parte heredero de los antiguos portulanos) donde los instrumentos utilizados eran el compás, el semicírculo graduado, la regla y, por supuesto, la brújula. No hemos de olvidar que era una época de grandes viajes, de descubrimientos, y los navegantes y viajeros necesitaban mapas para sus desplazamientos. Los mapas medievales, realizados por los propios navegantes y por otras gentes sin formación matemática, ni científica, no tenían ninguna utilidad en lo que se refiere a la navegación y, en general, para realizar ningún tipo de medición sobre ellos. Como consecuencia, en muchas ocasiones los barcos llegaban a zonas muy alejadas del destino marcado o incluso a lugares desconocidos.

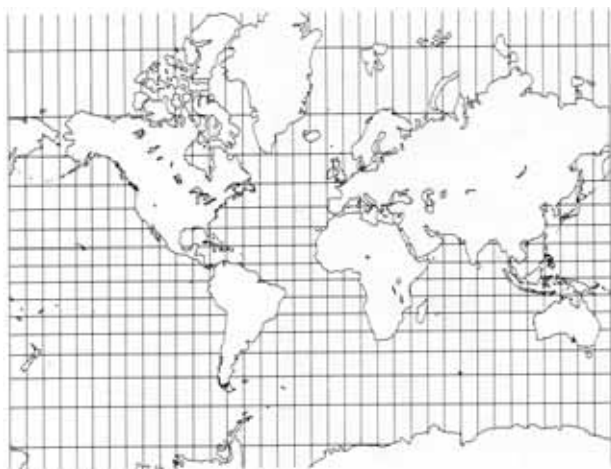


Figura 11. Mapa de Mercator

Sin embargo, Mercator, Ortelius y otros cartógrafos de la época tenían cierta formación científica, matemática y astronómica, y dieron paso a lo que se ha dado en llamar *la nueva cartografía*³. Mercator además de cartógrafo, tenía un negocio en el que se dedicaba a realizar trabajos de campo, a fabricar instrumentos, a producir globos y mapas y, por supuesto, a venderlos. Por lo tanto, su interés por producir un buen mapa para la navegación no era sólo científico, sino también comercial. Como ya hemos comentado, la solución de Mercator al problema de construir un mapa útil para los navegantes fue construir una *rejilla* de meridianos y paralelos representados por rectas, para posteriormente espaciar los paralelos para compensar la distorsión que se produce en los meridianos y obtener así que la distorsión en meridianos y paralelos es la misma. Una idea intuitiva de esta proyección es la siguiente: imaginemos que nuestra esfera/tierra es un balón contenido en un cilindro tangente a la

esfera en el ecuador, entonces empezamos a dar aire al balón y este se va aplastando contra el cilindro, así vamos obteniendo la imagen de la esfera sobre el cilindro.

Pero volvamos al mapa de Mercator y sus propiedades:

- i) es un mapa de forma rectangular;
- ii) los meridianos y los paralelos son rectas que se cortan en ángulo recto;
- iii) es una aplicación conforme, por su propia construcción, que no preserva distancias, áreas, geodésicas o formas;
- iv) las loxodrómicas o líneas de rumbo fijo se transforman en rectas (en la figura 12 se muestran las imágenes de algunos círculos máximos y loxodrómicas);
- v) la distorsión de áreas, formas y distancias es pequeña cerca del ecuador (la escala es real en el ecuador), pero muy fuerte según nos acercamos a los polos. Esta propiedad la hace muy conveniente para regiones cercanas al ecuador;
- vi) la proyección de Mercator es la base de la UTM. (mapa Universal Transverso de Mercator), que es el sistema de mapas que se utilizan en todo el mundo para la realización de los mapas de nuestro entorno.



Figura 12: Loxodrómica versus geodésica para el mapa de Mercator

Como se afirma en la propiedad iv) las curvas de rumbo fijo de la esfera se transforman en rectas en el plano de Mercator. Por consiguiente, si un navegante quiere ir de un punto A a un punto B de la Tierra, sólo necesita trazar en el plano la recta que une ambos puntos y tomar el rumbo marcado por la misma. Sin embargo, las loxodrómicas no son geodésicas y por lo tanto, no nos dan el camino más corto entre esos dos puntos, aunque sí el más sencillo de seguir, por ser de rumbo constante. Cualquier otra curva entre esos puntos requiere de continuos cambios de rumbo. Normalmente en la navegación se toma una solución intermedia:

- a) trazar una geodésica (recta) en un mapa central (o azimutal equidistante);
- b) romper la geodésica en fragmentos;
- c) trasladar los extremos de los fragmentos al mapa de

Mercator y unirlos mediante rectas (las loxodrómicas de rumbo constante).



Figura 13: Utilización mixta del mapa de Mercator

Para realizar su travesía del Atlántico, en 1927, el aviador Charles Lindbergh decidió cambiar de rumbo cada 1000 kilómetros y seguir una sucesión de curvas loxodrómicas que se aproxima al círculo máximo ideal.

Proyecciones que preservan ángulos y áreas

Volvamos al tema central de este artículo, ¿existen mapas correctos? ¿cómo construir correctamente un mapa de la tierra? En una primera aproximación a este problema hemos visto que no es suficiente que la proyección preserve una de las propiedades métricas (áreas, ángulos o geodésicas), sino que se hace necesaria más información para poder asegurar que la proyección es isométrica, es decir, que *representa correctamente la superficie terrestre*. Por este motivo iniciamos esta sección con el estudio de proyecciones de la esfera en el plano que preserven a un mismo tiempo dos de las propiedades métricas que estamos considerando.

En primer lugar, consideremos una proyección de la esfera en el plano para la que se mantienen los ángulos y las áreas. Por lo comentado en un apartado anterior, si la proyección es conforme entonces la distorsión no varía con la dirección, y en particular, la distorsión que se produce en los meridianos μ es igual a la que se produce en los paralelos λ . En esa misma sección hemos observado que si la proyección es isareal, entonces $\mu=1/\lambda$. Ahora, teniendo en cuenta ambas propiedades se concluye que $\mu=\lambda=1$, es decir, la aplicación que preserva ángulos y áreas no produce ninguna distorsión, es una isometría. Luego, un método para la construcción de mapas correctos de la esfera-tierra podría ser el diseño de mapas que preserven ángulos y áreas al mismo tiempo. Lo cual no es ninguna trivialidad, ya que al ser isometría preservaría todas las propiedades métricas, ángulos y áreas,

pero también geodésicas, formas, longitudes de las curvas y distancias.

Proyecciones que preservan ángulos y geodésicas

Continuemos con nuestro estudio y consideremos ahora una proyección de la esfera en el plano que conserve los ángulos y las geodésicas. En tal caso, tomemos un triángulo geodésico en la esfera formado por un arco de círculo máximo entre el norte y el ecuador, otro arco similar formando un ángulo de 90° con el anterior y el arco del ecuador que conecta los dos anteriores, que forma con cada uno de ellos un ángulo de 90° , como muestra la figura 14.

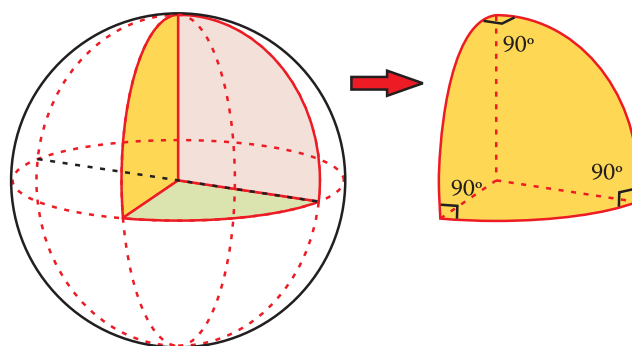


Figura 14: Un triángulo geodésico sobre la esfera

Entonces, la imagen de dicho triángulo geodésico de la esfera será un triángulo sobre el plano (ya que se preservan las geodésicas) con ángulos de 90° (ya que se preservan los ángulos), pero esto es absurdo porque, como bien sabemos de la geometría clásica, la suma de los ángulos de un triángulo en el plano es de 180° y no de 270° . Por lo tanto, no existen proyecciones de la esfera en el plano que preserven a un mismo tiempo los ángulos y las geodésicas. Pero esto tiene una consecuencia muy importante, ya que nos permite concluir que no existen isometrías de la esfera en el plano, es decir,

NO EXISTEN MAPAS PERFECTOS

todos los mapas son falaces en algún sentido. Este resultado es realmente local, el mismo argumento nos lleva a que no es posible construir isometrías locales de la esfera en el plano, es decir, tampoco es posible construir mapas perfectos de una parte pequeña de la Tierra.

Aunque a lo largo de la historia los cartógrafos no pudieron construir mapas ideales de la tierra, tampoco pudieron demostrar que no fuese posible, hasta que Leonhard Euler (1707-1783) lo probó en su trabajo *De repraesentatione superficiei sphaericae super plano*. Un par de experimentos que ponen de manifiesto el resultado de Euler son los siguientes.

Consideremos una pelota de plástico, cortémosla por la mitad e intentemos colocarla completamente plana sobre la mesa. Podemos comprobar que en nuestro intento de aplanar la pelota, esta se deformará o se rasgará, modificándose así las distancias entre los diferentes puntos de la superficie. Incluso si realizamos algunos cortes radiales para facilitar el aplanamiento seguiremos teniendo el mismo problema. Lo mismo ocurre en sentido contrario: al pegar un sello de grandes dimensiones en la naranja, se formará un gran número de pliegues.

El resultado de Euler pone de manifiesto que lo importante a la hora de utilizar mapas, realizados con diferentes proyecciones, de diferentes regiones de la tierra o también mapamundis, es considerar para cada situación concreta los mapas que se ajusten lo más posible a nuestras necesidades. A la hora de utilizar un mapa en nuestro trabajo o en nuestra vida cotidiana no debemos dejarnos guiar por la fama de un mapa, su nombre o por ser el mapa oficial de alguna agencia interna-

cional, sino que la elección debe ser consecuencia de una reflexión inicial sobre las propiedades que necesitamos que se preserven en el mapa y una posterior elección dentro de la gran variedad de mapas existentes.

Problema 2: ¿Es correcta la demostración de Peters sobre la no conformalidad de la proyección de Mercator?

Si lo comentado hasta el momento es correcto eso querría decir que el argumento de Peters sobre la no conformalidad de la proyección de Mercator debe de ser erróneo. ¿Es realmente erróneo? ¿Dónde está el fallo en el argumento? Este es un problema que queda para que lo penséis y disfrutéis del mismo. Para cualquier consulta o para comentar el problema podéis contar conmigo. Hasta pronto. ■

NOTAS

¹ La proyección de Peters es esencialmente idéntica a la proyección (isoareal) ortográfica de Gall, publicada por el pastor J. Gall en 1855 en la *Scottish Geographical Magazine*.

² Este concepto coincide con el que Arno Peters llama *fidelidad de escala*.

³ Obsérvese que este es precisamente el nombre que utiliza Arno Peters para su libro.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Libros y artículos

- FEEMAN, Timothy G. (2002): "Portraits of the Earth, A Mathematician Looks at Maps", *Mathematical World* 18, AMS.
- IBÁÑEZ, Raúl (2005): "Lo que Euler le dijo al cartógrafo", *Revista de Matemáticas SIGMA*, n° 27, 81-106.
- Pearson, Frederick (1990): *Map projections: Theory and Applications*, CRC Press.
- PETERS, Arno (1992): *La nueva cartografía*, Vicens Vives.
- SNYDER, John P. y VOXLAND, Philip M. (1989): "An album of map projections", *U. S. Geological Survey, Professional Paper* 1453.
- SNYDER, John P. (1983): "Map projections: A Working Manual", *U. S. Geological Survey, Professional Paper* 1395.

SNYDER, John P. (1993): *Flattening the Earth, Two Thousand Years of Map Projections*, The University of Chicago Press.

Páginas web

- C. A. Furuti, Universidad de Campiñas, Brasil.
<http://www.progonos.com/furuti/MapProj/CarlIndex/cartIndex.html>
- J. C. Polking, Mapping the Sphere, Rice University.
<http://math.rice.edu/~polking/cartography/>
- <http://www.3dsoftware.com/Cartography/>
- Map Projections by Paul B. Anderson
http://www.ilstu.edu/microcam/map_projections/index.html

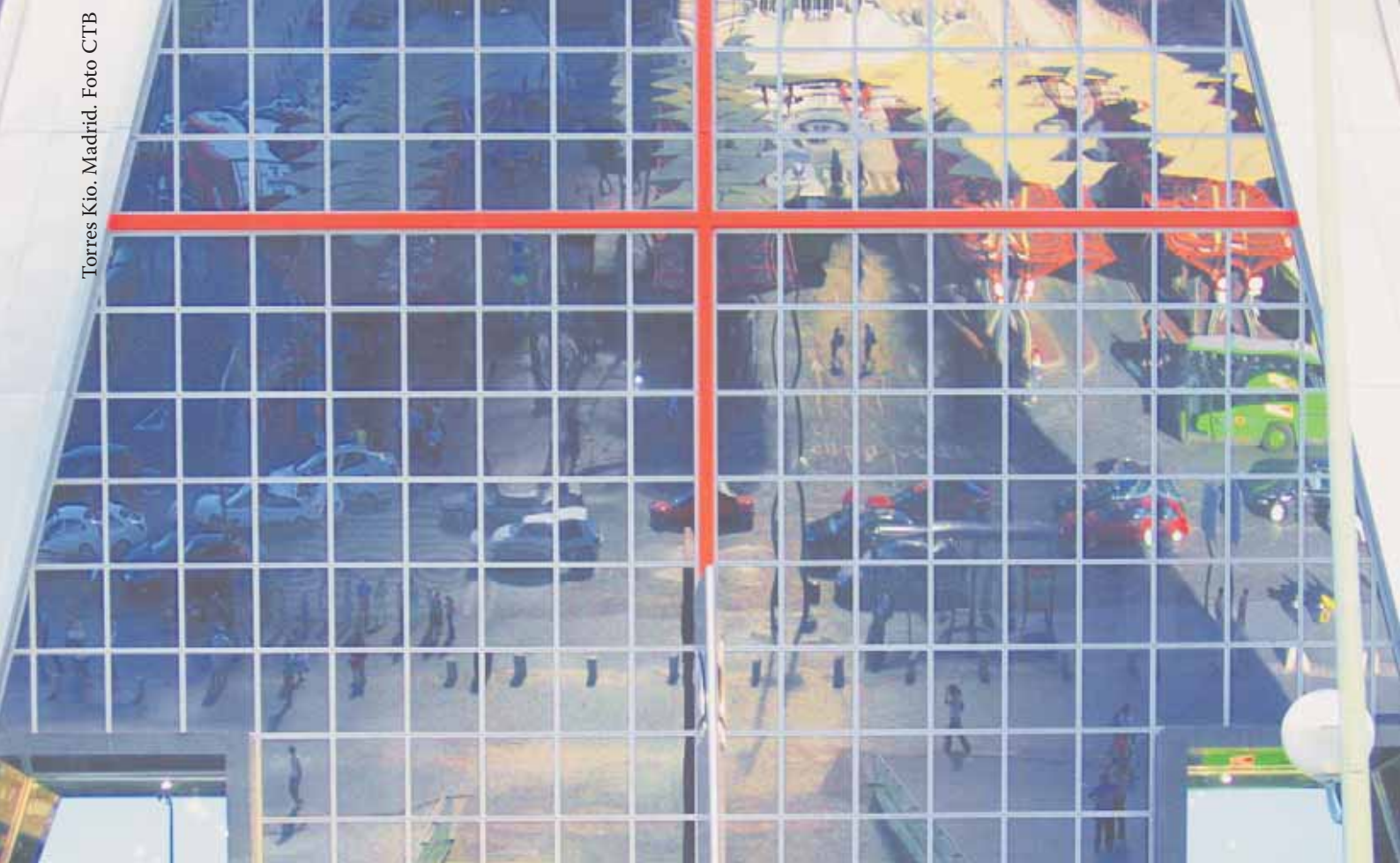


Mapa del mundo con la proyección de Gall-Peters

Kursaal. San Sebastián. Foto CTB



Torres Kio. Madrid. Foto CTB



Mi biblioteca particular

Ángel Ramírez Martínez

Destaca algunos libros de matemáticas o de su enseñanza que a lo largo de tu vida te hayan influido de forma especial. Cita algún párrafo que nos permita apreciar su sentido y nos induzca a leerlos.

Mi primera reacción ha sido pensar que no leo ni he leído tantos libros de o sobre las matemáticas. Paseo por casa, reviso las estanterías, abro el baúl de los recuerdos... ¡Menos mal!, hay de sobra para contestar a la encuesta de Fernando. Tengo incluso problemas para decidir cuáles selecciono. Y ya que he ido al baúl de maras, elegiré algunos que empiezan a ser clásicos.

Mientras enciendo el ordenador pienso en el trabajo en el Instituto. ¡Cuántas ideas y cuánto apasionamiento didáctico, mío (como lector) o de los autores duerme entre sus páginas, sometido al olvido por los insistentes ataques a la creatividad (la mía y la de mis alumnos y alumnas) que sufrimos a diario!

I

¿Qué quiere decir *libros de matemáticas*? Los que se incluyen en este apartado, si utilizamos el sentido más tradicional de



Fernando Corbalán (coordinador de la sección)
medios.suma@fespm.org

esta expresión, suelen ser un ladrillo. Hoy los miro con cierta ternura pero he leído muy poquita de esta literatura. Uno se pregunta si, como indicaba Feyerabend en uno de sus arrebatos contra los especialistas, *los autores serán siquiera capaces de volver a hablar algún día normalmente*.

SPIVAK, M. (1970): *Cálculus*. Ed. Reverté. Barcelona.
(Reeditado varias veces)

Guardo sin embargo especial cariño por *el Spivak*. Por fin un libro que explicaba el porqué de los conceptos, la necesidad de las hipótesis de un teorema; un libro que definía los conceptos y enunciaba los teoremas después de haber explicado previamente su necesidad y lo que ocurre si no se eligen adecuadamente las hipótesis. Y, además, con sentido del humor. Un humor gremial, claro. La nota al pie de la página 336, advierte:

La integral se definió como el límite cuando Δx_i tendía a 0 de las sumas $\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i$. El hecho de que el límite se obtenga cambiando Σ por $\int$, $f(x_i)$ por $f(x)$, y Δx_i por dx encanta a muchas personas.

FIELKER, David (1987): *Rompiendo las cadenas de Euclides*, MEC, Madrid.¹



Euclides lo demuestra todo deductivamente. Te guía como un lazarillo a un ciego. Por eso puede resultar aburrido (Voltaire: *La mejor forma de aburrir es contarle todo*). Fielker, por el contrario, sugiere mucho y enseña sólo lo suficiente. Es excitante e innovador. Los objetos geométricos disponen en sus artículos de una libertad inusitada. Todo es posible. Todo es posible, desde luego, porque nada está prefijado de antemano. ¿Una cita? En el artículo “Parasoles” advierte:

¿Podíamos concebir un polígono regular, por ejemplo, de 2,5 lados? Forma parte de la esencia de las matemáticas tomar en serio preguntas como esta.

GRUPO CERO (1983): *Es posible*, ICE de la Universidad de Valencia.



Profesor: 120°. Un bonito ángulo, ¿no?

Silencio

Profesor: ¿No notáis algo muy distinto entre 120° y, por ejemplo, 121°?

Un alumno: Que difieren en un grado.

Profesor (*Adentrándose en la jungla*):

¿No notáis algo que distinga 60° de 63°?

Es posible.

Grupo Cero, 1983

Adentrándose en la jungla: esta frase podría resumir este libro. El profesor se adentra en la jungla en lugar de observarla y juzgarla cómodamente desde su refugio. Además de posible, es divertido y vitalizador.

La vitalidad de una clase de matemáticas está en que los alumnos actúen como matemáticos. Pero eso es imposible si el profesor se limita a aceptar el credo de que los profesores son los que las enseñan.

Un canto a la improvisación y a disfrutar con lo inesperado. Al menos, así sentí yo este libro en muchas de las visitas que le hice. La invitación, además, tenía en ocasiones un encantador tono romántico.

II

Si embargo, unos años más tarde, en el entorno del 90, Paco Hernán dejó claro en una conferencia en el ICE de Zaragoza que *ya no era posible*. Mi experiencia —y la de Carlos Usón, con quien compartía ilusiones— siguió diciendo que sí, que sí que lo era; la frase de Paco permaneció guardada como una peligrosa advertencia. ¿Y ahora? Ahora, después de otros dieciséis años, creo que en este momento no es posible.

Lo es ocasionalmente y con algunos alumnos, alumnas o grupos —hoy mismo, sin ir más lejos, la clase de 1º ESO ha sido fascinante—, pero no en general, porque las circunstancias sociales han cambiado mucho.

¿Qué ha pasado? Creo que nunca reflexionamos sobre lo que era, desde un punto de vista filosófico, la Resolución de Problemas. Desde luego fue —es— una excelente propuesta: la enseñanza de las matemáticas debe hacerse en un contexto de resolución de problemas. Pero su análisis de los procesos de enseñanza-aprendizaje era un análisis internalista que no tenía en cuenta las orteguianas circunstancias que, como a todo el mundo, acompañan a alumnos y alumnas, a padres y madres. Se suponían estudiantes abstractos, y la segura existencia de dificultades derivadas de las condiciones particula-

Ya no es posible.

Paco Hernán,
años noventa.

res se solventaba recurriendo a la libertad: cada cual llega a donde puede y/o quiere. En el momento en que la evolución de la sociedad ha incrementado la carga de condicionantes previos negativos, y además los ha generalizado, las propuestas elaboradas a partir de un análisis que ha hecho abstracción de la vida, fracasan. Cualquier problema tiene un cierto atractivo que es consecuencia de su fuerza interna y de la trama en que se va a jugar la partida de su resolución, pero incluso el mejor enunciado del mundo sólo puede ser propuesto a personas que les interese el juego. No hay que perder de vista, además, que las personas adultas e inteligentes eligen sus juegos; pueden no tener ningún interés en construir el polígono de 2'5 lados, y prefieren dedicar sus energías, por ejemplo, al análisis de los mecanismos de control social o a la literatura

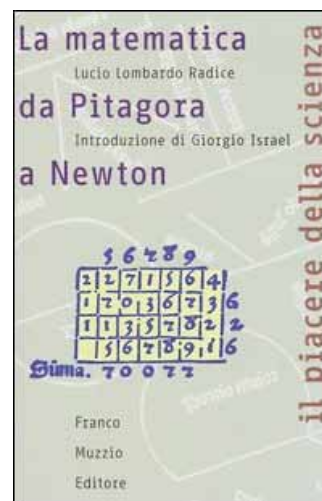
rusa del s. XIX. ¿Hay algún motivo para que a los adolescentes les ocurra algo distinto?

¿Se deduce de lo anterior un “*aleluya, hasta quien se lo creía reconoce por fin que estaba equivocado*”? De ninguna manera. Sigo creyendo en la Resolución de Problemas; ¿cómo, si no, puede alguien aprender matemáticas? Y, desde luego, detesto las comidas mediocres preparadas para que todo el mundo pueda digerirlas. Le estropearé a Fernando su sección si me extendo más sobre este tema, así que me limitaré a decir que me parece urgente repensarlo todo. Hay que tener en cuenta los condicionantes sociales en los que nos movemos, y hay que hacerlo, por supuesto, desde un punto de vista progresista tanto en lo social como en lo meramente didáctico.

Lecturas ajenas —o no tan ajenas— a las matemáticas en que éstas jueguen un papel destacado.

Nunca me ha motivado para leer una novela el que sus protagonistas o el desarrollo de su trama tuvieran algo que ver con las matemáticas, así que aprovecharé este apartado para incluir aquí algunos libros de historia y filosofía de las matemáticas.

LOMBARDO RADICE, Lucio(1983): *La matemática, de Pitágoras a Newton*. Laia. Barcelona.



Este pequeño gran libro (escrito en 1971) está ya agotado y Laia desapareció como empresa editorial hace tiempo. Además, está superado en algunas cosas. Pero le debo mucho y, decididamente, he optado por el afecto antes que por el interés actual al seleccionar los libros. Le debo mucho a este párrafo, que he insertado varias veces en otros artículos:

No es nada exagerado decir que, para el progreso humano, la introducción y difusión del cálculo literal, en sustitución del álgebra geométrica, ha sido una revolución comparable a la adopción de la máquina en lugar del trabajo manual. La comparación es válida en todos los aspectos: también en el de que el trabajo manual es superior al trabajo a máquina.

La belleza, la fantasía, la originalidad y la individualidad de cada pieza es lo que le falta a la producción mecánica en serie. Así, por ejemplo, la demostración de Euclides que hemos expuesto antes, acerca del binomio $a+b$, nos parece incomparablemente más bonita, más viva, más sugestiva que la *vuelta de manivela* algebraica que nos permite llegar en diez segundos al mismo resultado. Aún así, lo mismo que no se nos ocurre destrozarnos los telares mecánicos para volver a la lanzadera y al huso, tampoco rechazaremos la *logística speciosa* por amor a la belleza del álgebra geométrica.

Trataremos, de todos modos, de conservar en nosotros, aunque usemos los nuevos instrumentos, el espíritu del viejo Euclides, la imaginación geométrica de los antiguos griegos, que será esencial para nosotros cuando no se trate de aplicar unas reglas sino de descubrir y crear otras nuevas.

La Historia fue en mi caso un antídoto contra el platonismo, el estructuralismo y el formalismo. Entiendo la historia de mi trabajo profesional como una revuelta permanente contra el bourbakismo en el que me educó la Universidad.

YOUSCHKEVITCH, Adolf P. (1976) : *Les mathématiques arabes (VIII^e-XV^e siècles)*, Librairie philosophique J. Vrin, Paris

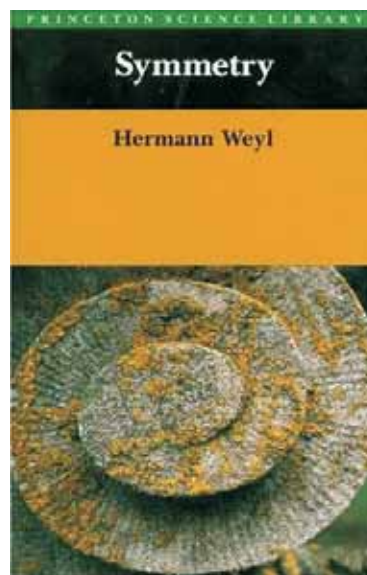
Un libro duro por su exposición pero deslumbrante por su contenido. La cantidad y variedad de la producción matemática árabe me hizo descubrir el enorme sesgo eurocéntrico de las matemáticas y de la historia de las matemáticas que había estudiado.



LAKATOS, Imre (1978): *Pruebas y refutaciones*, Alianza Universidad, Madrid, (Reeditado varias veces)

Desde la conjetura de Descartes-Euler sobre el número de caras, vértices y aristas de un poliedro hasta la forma actual. Una teatralización en la que alumnos ideales de una clase ideal discuten empleando argumentos de matemáticos del s. XIX no siempre coincidentes en el tiempo. El tema es, por tanto, el nacimiento de la Topología, sí, pero, sobre todo, como explica el subtítulo del libro, *la lógica del descubrimiento matemático*. Un apoyo filosófico fuerte para practicar la Resolución de Problemas en clase.

Un libro fascinante al que sólo se puede poner, de nuevo, el *pero* de un crudo internalismo.



Weyl, Hermann (1976): *La simetría*, Ed. Promoción cultural, Barcelona

Weyl supuso la apertura a la vida, al arte, a la geometría del mudéjar... ¿Por qué no empezaron las clases de la facultad sobre teoría de grupos con este libro?

¿Puedes aportar alguna cita de tus lecturas que tenga que ver con las matemáticas y que hayas incorporado a tus referencias vitales?

Por supuesto, hay muchas, pero me quedaría con una de Al-Gazzali en *El salvador del error* (traducción al español: Algazel (1989): *Confesiones*, Alianza, 1989.

De las Matemáticas se derivan dos males. Uno consiste en que aquel que las considera atentamente se maravilla de su exactitud y de la evidencia de sus demostraciones y por tal motivo considera positiva su fe en la Filosofía.

Al-Gazzali (1058-1111) se me antoja más un moralista —en sentido negativo— que un filósofo, pero el comienzo de este libro es un hermoso canto al libre pensamiento que, a él, le conduce a la mística por desconfianza en los sentidos y la razón. Las matemáticas deslumbran y son por tanto un apoyo al racionalismo filosófico.

Me ha costado incorporar la advertencia de Al-Gazzali a mi línea de pensamiento habitual, pero creo que sí que hay que tomarla en serio. Además del conocimiento racional, matemático o no, necesitamos conocimiento poético. A veces tengo la sensación, sobre todo después de la borrachera de platonismo a que nos entregamos en el 2000, de una valoración excesiva de las matemáticas. No encuentro ningún argumento a favor de dar más importancia al teorema de Pitágoras que a estos versos de Miguel Labordeta:

He de caminar
y aún no sé
el nombre de la noche.

He de vivir
y aún no sé
si la aventura
es un pretexto voraz
o una rosa lastimada.

No veo ningún argumento para valorar mejor a un o una adolescente que vibre más con Pitágoras que con este poema. Pero, desde luego, el sistema educativo así lo hace.

Señala alguna afirmación chocante referida a las matemáticas en tus lecturas.

Elijo una que más que chocante me resultó inesperada. Hojeando hace poco unas notas de Engels de la época en que redactaba el *Anti-Dühring* [ENGELS, F. y MARX, C. (1976): *La génesis del Anti-Dühring*. Ed. R. Torres. Barcelona] encuentro una correcta explicación de la diferencial de x^3 . Es larga, así que selecciono unos fragmentos:

Así, por ejemplo, la diferencial de x^3 es $3x^2dx$, donde $3x^2dx^2$ y dx^3 son desdeniados. Si nos imaginamos esto en una forma geométrica, tenemos un cubo de lado x , cuyo largo es aumentado con la magnitud infinitamente pequeña dx .

[...]Imagina Engels un cubo *real* formado por moléculas y sigue:

La longitud x de los lados del cubo ha aumentado en una cantidad igual al diámetro de una molécula, dx . El volumen del cubo, x^3 , ha sido aumentado por la diferencia entre x^3 y $x^3+3x^2dx+3xdx^2+dx^3$, donde dx^3 , una molécula, y $3xdx^2$, tres filas de largo $x+dx$, consistentes meramente en moléculas dispuestas linealmente, pueden ser desdeniadas con el mismo derecho que en las matemáticas. El resultado es el mismo: el aumento de la masa del cubo es de $3x^2dx$.²



El último libro destacable que he leído sobre matemáticas

La verdad es que leo muy pocos. Y no es por falta de ganas, pero cuando llega el tiempo libre termino cayendo en la tentación de las aficiones a las que no puedo dedicarme durante el curso. Acabo de empezar, para una reseña, Antonio J. MORENO BERDEJO (2004): *Ideología y educación matemática*, Octaedro, Barcelona.

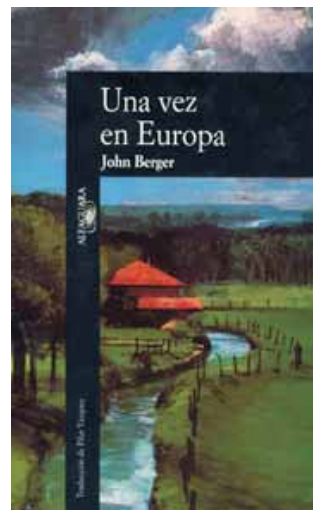
Un tema tabú desde el enfoque de nuestra purista educación universitaria y, me temo, tabú también para muchos colegas de Secundaria. Como digo, acabo de empezar, así que lo presentaré con el primer párrafo:

Durante un viaje descubrí en el dintel de una puerta de lo que, en otro tiempo, había sido una escuela la inscripción: *La educación de los pueblos acaba con sus pasiones*. La idea de educación como estado pasivo, en oposición a la acción, y transformada en objetivo de la enseñanza me hizo pensar que detrás de la "apariencia" del diseño educativo se ocultaba algo más importante: ideología.

Mi último libro no matemático destacable.

Me ha impresionado John Berger: *Una vez en Europa* (Santillana. Madrid, 2001). Aburrido ya de narraciones que miran sólo al ombligo particular de quien escribe o de su personaje, llegué a creer que se había olvidado definitivamente aquella ambición globalizadora de los novelistas del XIX. Berger transita de lo individual a lo general creando un grandioso cuadro dialéctico de los cambios en la Europa campesina del s. XX.

Le agradezco a Jean Ziegler: *Los nuevos amos del mundo* (Destino. Barcelona, 2003) que me haya dado claves para conocer mejor el mundo en que vivo, y a Emilio P. Gómez: *Sílabas blancas* (Lola Editorial. Zaragoza, 2005) la delicada sensibilidad de sus últimos poemas. ■



NOTAS

¹ Las publicaciones de esta colección “Documentos y propuestas de trabajo” no se vendían. Se mandaron a los CEPs donde se les hizo, por lo general, muy poco caso. Si todavía pilláis algún ejemplar en alguno, no lo dudéis, mangadlo. Llevará mejor vida con vosotros.

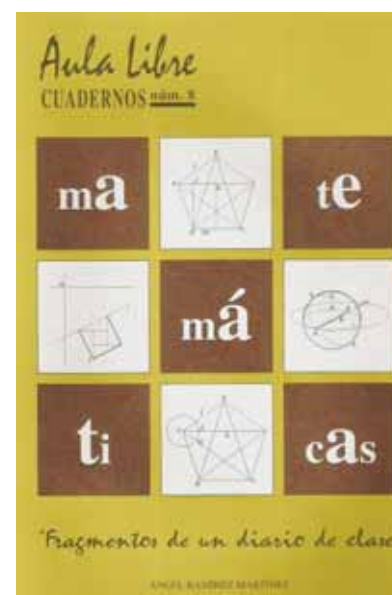
² $3xdx^2$ son más bien tres filas de moléculas de largo x , no $x+dx$. No sé si el error es achacable a Engels o a la edición.

Escaparate: 1 Fragmentos de un diario de clase

FRAGMENTOS DE UN DIARIO DE CLASE

Ángel Ramírez

Cuadernos de Aula Libre
Fraga, 2004



Es empeño vano reseñar todas las publicaciones, incluso limitándose al limitado terreno, en apariencia, de los libros de didáctica. Y más si se pretende seguir las últimas novedades en el tiempo. Por eso se escapan a veces en las reseñas libros que tienen una distribución marginal (o más marginal de lo habitual), pero que merecen ser conocidos y se corre el riesgo de no serlo por puro desconocimiento. Entre esos está *Fragmentos de un diario de clase*, de Ángel Ramírez, que constituye el n.º 8 de los *Cuadernos de Aula libre* [y de los que doy la dirección para quien estuviera interesado: *Aula Libre*. Apartado de Correos n.º 88. 22520 Fraga (Huesca)]. Los que conocemos a Ángel Ramírez (y así sucede con todos los lectores de SUMA por su coautoría de 'Desde la historia' y por otros artículos) sabemos que es una fuente de placer intelectual y humano. Su conversación, sus ideas, su práctica educativa diaria y también sus escritos, con un magnífico estilo, trufados de reflexiones, referencias y citas (de M. Labordeta, Lenin, Freire o Pardeza, entre otros) son siempre sorprendentes y con frecuencia iluminan la realidad con puntos de vista insólitos y esclarecedores.

De todo eso participa el libro que reseñamos, que añade a todo lo anterior el aroma de las clases vivas y provechosas, en las que se respira el pensamiento libre y constructivo, la 'anarquía entendida como responsabilidad', expresión que Ángel toma prestada de un jugador de fútbol y que tan bien expresa su propuesta. Ejemplificada en temas varios ("Almudévar no es un nombre de tango", "El ángel de los números", "El irresistible encanto de la artesanía", "¡Veo el sen 2x!...", algunos ya publicados en revistas o periódicos, pero que merecen una nueva lectura reposada. Todos aquellos que ya disfrutaron con *Variaciones sobre un mismo tema*, de Ángel Ramírez y Carlos Usón, Proyecto Sur, tienen la posibilidad de prolongar su goce; y quienes no lo hicieron, de empezar una venturosa relación de lectura. Para los que piensen que todo lo anterior constituye simplemente las alabanzas del amigo del autor, nada mejor que sumergirse en las páginas del folleto para desmentirlo. ■

Fernando Corbalán
medios.suma@fespm.org

Escaparate:

2 El país de las mates. 100 problemas de ingenio



EL PAÍS DE LAS MATES. 100 PROBLEMAS DE INGENIO.

VOLÚMENES 1, 2, 3 Y 4

M. Capó Dolz

El rompecabezas

ISBN: 84-934325-3-9, 84-934325-4-7, 84-934325-5-5 y 84-934751-2-2

Madrid, 2005-2006

144 pp., 144 pp., 176 pp. y 192 pp.

Entre mayo de 2005 y enero de 2006 han aparecido cuatro tomos de esta colección, que ignoro si está previsto que continúe. Con ella se ponen a disposición de cualquier profesor, que quiera ofrecer problemas *diferentes* a sus alumnos, una amplia gama de posibilidades. En efecto, en cada uno de ellos hay, 100 problemas diferentes, con lo que en total hay nada menos que 400, con una redacción próxima y figuras y esquemas *jóvenes* cuando hace falta. A continuación se proponen *pistas* para algunos de esos problemas, que permiten avanzar en la reflexión. Y por fin, se da en la tercera parte, la solución detallada de todos ellos.

De esa forma se obtiene una amplia colección con 400 propuestas que recorren todas las ramas de las matemáticas elementales y un variado muestrario de los diferentes tipos de

problemas recreativos. Nadie podrá ya decir que le gustaría proponer cosas novedosas a sus alumnos, pero que su repertorio se le acaba. Es obvio que la mayoría de los problemas resultan conocidos para quien esté actualizado en la bibliografía, pero también aparecen algunas novedades y una visión diferente sobre otras. Supone por parte del autor un loable esfuerzo ofrecer tal cantidad de posibilidades didácticas.

Todos los lectores encontrarán problemas para añadir a su repertorio personal y los *novatos* una disculpa para iniciarlo. La editorial hace una apuesta al presentar en una sola tacada cuatro libros de una misma serie. Le deseamos éxito, ya que además de para profesores, esta colección puede ser de utilidad para los jóvenes interesados en el mundo de la recreación matemática. ■

Escaparate:

3 Conexiones matemáticas

CONEXIONES MATEMÁTICAS. MOTIVACIÓN DEL ALUMNO Y COMPETENCIA MATEMÁTICA

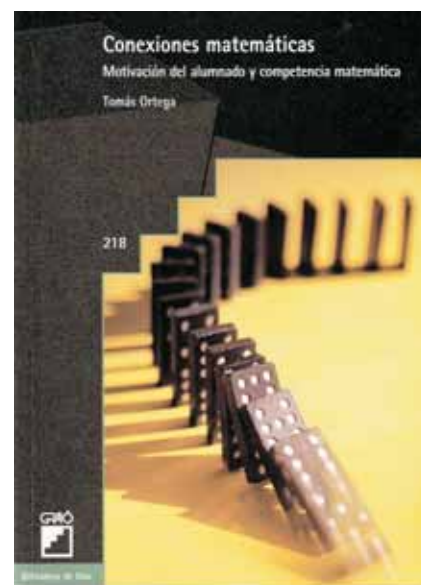
Tomás Ortega

Graó

ISBN: 84-7827-415-4

Barcelona, 2005

213 páginas.



Un empeño de primera magnitud es proporcionar el engarce entre las matemáticas escolares y la realidad, que, como demuestran los informes internacionales, tiene en nuestro país un largo camino aún por recorrer. Tomás Ortega en este libro propone hacerlo aprovechando la realidad cambiante que reflejan los medios, explotando las facilidades que suponen la informática y con una perspectiva constructivista en el marco del trabajo en pequeños grupos.

Hay dieciséis capítulos, cada uno con múltiples tareas, algunas conocidas y otras originales, mediante las cuales, partiendo de situaciones próximas y conectables con la vida de los alumnos, puedan éstos ir construyendo sus propias matemáticas. Entre los variados temas que componen el libro (alguno de los cuales son el ruido, las escalas y los mapas, el ciclismo, los terremotos, la catástrofe del *Prestige*, gráficos no cartesia-

nos, las matemáticas de los puentes, los deportes, la apuestas legales o la forma de las curvas de las carreteras y autopistas) se pueden obtener actividades para cualquier nivel de secundaria y de bachillerato. El libro proporciona por tanto un amplio muestrario de lo que supone la matematización del mundo, cuya detección por parte del alumnado (única manera de poder aplicar en su vida futura sus conocimientos matemáticos) tendría que suponer uno de los objetivos de la educación matemática en secundaria. Es conveniente acabar de elaborar las tareas propuestas antes de presentarlas a los alumnos, para enraizarlas más en su realidad próxima (en el libro, en general, no se aportan las *soluciones*), lo cual constituye un acicate para reflexionar sobre nuestra práctica educativa y nuestra aportación a la construcción del conocimiento matemático de nuestros alumnos. ■

Pitágoras en Nivola



PITÁGORAS, EL FILÓSOFO DEL NÚMERO

Pedro Miguel González Urbaneja

Nivola

La matemática en sus personajes

Tres Cantos, 2001

ISBN: 84-95599-08-2

246 páginas

En *From Religion to Philosophy*, Francis M. Cornford, siguiendo a Diógenes Laercio, que formula una idea que el mundo griego ya había adivinado, distingue dos tendencias dentro de los orígenes del pensamiento filosófico que recorrerán toda la historia de la filosofía: la *científica* y la *mística*. A esta segunda pertenece, como precursor, Pitágoras, y a ella pertenecerán, en el ámbito helénico, Parménides y Platón.

La transición de la religión a la filosofía no se produjo mediante una ruptura súbita y completa. La filosofía heredó algunas de las grandes concepciones religiosas, sobre las que aplicó un pensamiento racional, que fueron el origen de las tendencias científica y mística, que acabarían separándose y llegando a conclusiones opuestas.

Sólo desde esta perspectiva es posible comprender el pensamiento de Pitágoras y de sus seguidores, para quienes el núcleo de la filosofía es preguntarse sobre Dios y el alma, y el elemento que le confiere unidad, el número.

En su libro sobre *Pitágoras*, Pedro Miguel González Urbaneja tiene muy presente estos desarrollos al titularlo *el filósofo del número*. Y es que al enfocar el pensamiento de Pitágoras se corre el peligro de ceñirse exclusivamente al Pitágoras

matemático, desvirtuando, al mutilarla, su filosofía. Filósofo, por tanto, en el sentido totalizador que el término tenía para los griegos, en el que se incluye la ciencia, y del número, insistamos, como elemento integrador de su *logos*.

Porque la figura plural de Pitágoras sólo puede disociarse en sus múltiples aspectos para facilitar su estudio y porque su pensamiento y su vida trasciende la Historia de las Matemáticas para situarse como célebre referencia en la historia de la cultura. Racionalista y místico, filósofo y teólogo, matemático y experimentador, sabio y profeta, maestro y asceta, psicólogo y orador, promotor religioso y tauturgo, interrogador del cosmos e instaurador de un estilo de vida, gran conversador y amante del silencio reflexivo, hombre de carne y hueso y personaje mítico, Pitágoras es, como veremos, el primigenio inductor de una parte considerable de los elementos culturales que, perviviendo a lo largo del tiempo, han ido conformando la tradición del pensamiento occidental desde los primeros balbuceos de los pueblos helénicos hasta nuestros días (pág. 39).

Juan Pagola

Interesa, desde luego, el Pitágoras matemático, máxime en una colección, encomiable y novedosa en nuestro ámbito, que lleva por título *La Matemática en sus personajes*, de la editorial Nivola. Pero interesan también, como González Urbaneja se encarga de subrayar, todas las dimensiones de lo pitagórico. Pitagorismo como cultivo de las Matemáticas, pero también como forma de vida en la que la iniciación, la religión y la mística tenían un destacado papel, eran los pilares de la sociedad o comunidad pitagórica, auténtica iglesia con su fundador, su doctrina (los versos de oro), su moral ascética, su atmósfera de fraternidad, sus símbolos matemáticos (pentagrama místico, triángulo rectángulo, *tetractys*, dodecaedro)... Y su disolución o dispersión a la muerte de Pitágoras, enfrentados los aspectos matemáticos y religiosos que habían confluído en el maestro. Las Matemáticas son el instrumento para conocer la armonía del Cosmos, el número es la raíz y fuente de la naturaleza eterna (pág.76) y la música revela una naturaleza matemática.

El mérito del libro de González Urbaneja es presentar el pensamiento de Pitágoras de una forma integrada. Se destacan los logros matemáticos del filósofo griego, pero no se descuidan

los restantes aspectos del pitagorismo que están indisolublemente relacionados con ellos. También es mérito de esta obra el cuidado que pone el autor en estudiar los antecedentes que se encuentran en el Próximo Oriente y en Egipto a la dimensión tanto matemática como religiosa de Pitágoras y, sobre todo, las implicaciones y continuaciones de su pensamiento, no sólo en la Historia de las Matemáticas, sino también en la Historia de la Cultura. En este último sentido, el plural recorrido de las enseñanzas pitagóricas a través del tiempo resulta uno de los aspectos más interesantes del libro.

A la fascinante figura de Pitágoras, hay que añadir el atractivo de su tratamiento por González Urbaneja para recomendar la lectura de *Pitágoras. El filósofo del número*. A los méritos señalados, hay que agregar las cuidadas y numerosas ilustraciones, las síntesis o desarrollos marginales que acompañan como centros de atención el discurrir del libro y una bibliografía que se acomoda al interés o preparación del lector al incluir, junto a las fuentes, tanto obras de largo aliento como obras de divulgación científica. ■



Publicaciones recibidas

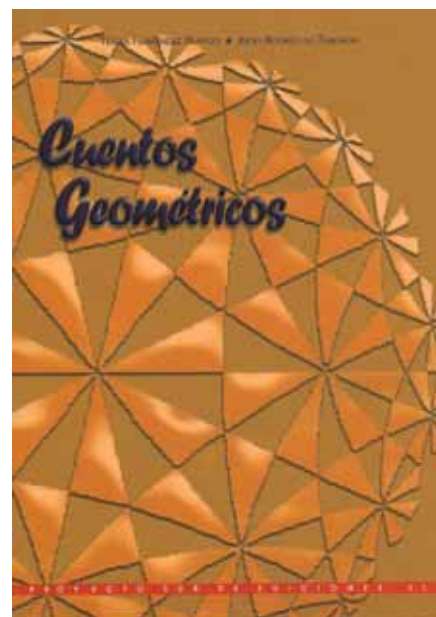


NÚMEROS Y CONVERGENCIA.
PRIMEROS PASOS EN EL ANÁLISIS MATEMÁTICO
Baldomero Rubio
Baldomero Rubio
Madrid, 2006
ISBN: 84-934918-0-2
277 páginas

(Ver página web www.mat.ucm.es
del Dpto. Análisis Matemático de la UCM)



ANDRÉS Y EL DRAGÓN MATEMÁTICO
Mario Campos Pérez
Laertes, S.A. de ediciones
Barcelona, 2005
ISBN: 84-7584-558-4
292 páginas



CUENTOS GEOMÉTRICOS
T. Fernández Blanco y
J. Rodríguez Taboada
Proyecto Sur de Ediciones, S.L.
Granada, 2005
ISBN: 84-8254-357-1
62 páginas

Un misterio en Cambridge

LA INCÓGNITA NEWTON
(THE THREE-BODY PROBLEM. A CAMBRIDGE MYSTERY)

Catherine Shaw

Roca Editorial

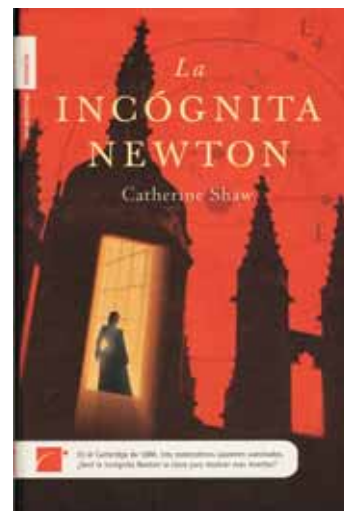
Traducción de H. Sabaté y M. Gurguí

Madrid, Junio de 2005 (1ª Edición)

ISBN: 84-96284-74-3

314 páginas

Para **Catherine Shaw**, ésta es su primera obra y su primer gran éxito editorial. No sabemos si la elección del tema de la novela es por su formación matemática o, por el contrario es puramente accidental.



En la contraportada del libro podemos leer unas líneas en las que nos lo presentan:

Cambridge, año 1888. Vanessa Duncan es una joven institutriz que ha empezado a trabajar recientemente en la ciudad universitaria como maestra de niñas. Gracias a las familias para las que trabaja, tiene la oportunidad de relacionarse con las más privilegiadas mentes matemáticas de la prestigiosa universidad. Además, el momento no podía ser más emocionante: todos se hallan inmersos en la investigación del "problema de los tres cuerpos". El rey Oscar de Suecia ha decidido que para su 60 aniversario concederá un sustancial premio a aquel matemático que consiga resolver el problema, que fue planteado por primera vez por Isaac Newton. Sin embargo, todo da un giro inesperado cuando el profesor adjunto de matemáticas, Akers, es encontrado muerto en sus habitaciones de un violento golpe en la nuca y el enamorado de la Srta. Duncan, otro matemático llamado Weatherburn, es acusado del crimen. Vanesa se verá empujada a una inesperada aventura que la llevará por media Europa en busca del verdadero culpable en una carrera desesperada en contra de la horca.

Nuestro comentario

La primera sorpresa al leer el libro es el modo epistolar en que está escrito. La protagonista escribe cartas a una hermana suya, y en ellas le va desgranando la trama en la que se va viendo inmersa. Esta forma singular de escritura, al principio puede generar una cierta incomodidad en el lector, sobre todo si pensamos en nuestros alumnos y alumnas adolescentes, pero una vez que la acción va tomando cuerpo esa sensación desaparece.

Su lectura es fácil y atrayente, pues la trama principal está aderezada con otros temas interesantes de la época: la educación de las jóvenes en la sociedad de finales del siglo XIX en Inglaterra, la búsqueda de la igualdad entre sexos y los derechos de la mujer, y, como no, la notoriedad e influencia de Lewis Carroll en todos los temas relacionados con la educación, las matemáticas y el razonamiento lógico.

Por otra parte, la aparición de personajes ilustres del mundillo de las matemáticas de la época, la controversia sobre la enseñanza de la Geometría con Euclides como centro de debate, la veracidad histórica del motivo principal de la novela, y la comprobación de que las miserias humanas también han existido en nuestra querida y admirada ciencia matemática, son factores que contribuyen a darle más realismo, insertan más profundamente a nuestras queridas matemáticas en el contexto social e histórico del momento y nos ayudan a comprender la evolución y el desarrollo de sus conocimientos y de su enseñanza.

Sin ningún género de dudas, todos estos factores nos permiten calificar esta obra como una auténtica novela matemática. ■

Propuestas para trabajar en el aula

La lectura de esta novela se puede completar con el desarrollo de un trabajo sobre algunos conocimientos matemáticos que en ella aparecen, tratados siempre a un nivel no superior al de un alumno o alumna de bachillerato, así como sobre otros aspectos de la variada y riquísima cultura matemática: la historia, sus personajes, los problemas del momento, etc.

El guión que presentamos a continuación requiere una lectura pausada y sin prisas de la obra, para propiciar la toma de notas y datos necesarios, aunque desde nuestra experiencia podemos aconsejar que lo mejor es hacer una primera lectura como simples lectores y una segunda como buscadores y rastreadores de ideas matemáticas necesarias para la realización del trabajo. Todo ello se completará con la consulta de otras fuentes bibliográficas, que nos permitirán resolver algunos de los retos planteados en el guión.

En conexión con lo anterior, debemos señalar que la propuesta del trabajo, por parte del profesor o profesora, al alumnado, debe hacer hincapié en el carácter de reto o desafío que el mismo tiene. Se trata de averiguar la respuesta a variados

interrogantes, fomentar la búsqueda y la indagación, conocer mejor el mundo de las matemáticas y su quehacer, asomar a los alumnos y alumnas a un balcón desde el que puedan contemplar paisajes matemáticos, contemplar su belleza, sus distintas formas de vida, así como su naturaleza.

Por último, señalaremos que el guión de trabajo hace especial hincapié en personajes, problemas, competiciones y concursos relacionados con las matemáticas

Nombres de matemáticos

A. Entre los siguientes nombres de matemáticos hay uno que no aparece en el libro. ¿Cuál es?

<i>Isaac Newton</i>	<i>Charles Hermitte</i>
<i>Artur Cayley</i>	<i>Sofía Kobalieskaia</i>
<i>Euclides</i>	<i>Leopold Kronecker</i>
<i>Güsta Mittag-Leffler</i>	<i>Henri Poincaré</i>
<i>Carl Weierstrass</i>	<i>August Cauchy</i>



- B. Recopila datos de la biografía de Sofía Kobalieskaia, de sus aportaciones matemáticas, y exponlos aquí.



Sobre Lewis Carroll

En la página 19 de *La incógnita Newton* aparece un problema de lógica, propuesto por el profesor de Matemáticas Lewis Carroll.

- A. Repasa la resolución del problema y resúmelo, exponiendo las ideas clave del proceso.
- B. Lewis Carroll es un personaje famoso por haber escrito un libro muy leído por niños y jóvenes. ¿Qué libro es? Haz un breve resumen de su vida y obras.

- C. Lewis Carroll escribió varios problemas de ese tipo, a los que llamaba *nudos*. A continuación puedes leer y resolver el Nudo III, en versión resumida.

Nudo III. Mathesis Demente

Problema 1

Dos viajeros, saliendo al mismo tiempo, recorren en direcciones opuestas una vía de tren circular. Los trenes salen en ambas direcciones cada cuarto de hora, el del este dando la vuelta completa en tres horas, el del oeste en dos horas. ¿Cuántos trenes encontrará cada cual en su camino, sin contar los que hallasen al término de su recorrido?

Problema 2

Dan otra vuelta, como antes, cada viajero contando como uno el tren que contiene al otro viajero. ¿Cuántos trenes contará cada uno?

En la página web de SUMA:

www.revistasuma.es/dmdocuments/52anexo.pdf

puedes ver los textos de todos los nudos; el III tal y como fue presentado por Lewis Carroll y el resto en versión resumida.

- D. Resuelve los cuatro nudos que te parezcan más interesantes. Para más información sobre los "nudos" puedes consultar la bibliografía (Carroll, 1979), donde se amplían los datos.
- E. Lewis Carroll también escribió un libro que contenía 72 *Problemas de almohada* que él había resuelto "mentalmente, de noche, mientras permanecía en la cama despierto" (Carroll, 2005). Te planteamos los siguientes:

Encuentra una fórmula para dos cuadrados cuya suma sea igual a 2.

Demostrar que tres veces la suma de tres números elevados al cuadrado es también la suma de cuatro números elevados al cuadrado.

El problema de Newton

Haz un resumen del *problema de los n cuerpos* que da origen al histórico concurso organizado desde Suecia. Como sabes, Isaac Newton es la primera persona que lo planteó e intentó encontrar una solución. Actualmente, ¿en qué estado se encuentra su resolución?

Un premio matemático

Un siglo antes de la acción de la novela, la sección de matemáticas de la Academia de Ciencias de Berlín, cuyo director entre 1766 y 1784 fue Legendre, convocó un premio, para ser

concedido en 1784, a la mejor solución de un problema sobre un concepto matemático complicado. ¿Qué problema era?, ¿quién ganó el premio?

Recoge tres ideas relacionadas con ese problema, las que te parezcan importantes, y desarróllalas en un texto de una página.



Otro Premio matemático

En 1881, la Academia de Ciencias de París estableció un premio al mejor trabajo sobre la descomposición de números enteros en suma de cinco cuadrados. El premio fue concedido a un joven de 17 años, que había comenzado un año antes sus estudios superiores en la Universidad de Königsberg. ¿Quién fue?

Atrévete a escribir una página sobre este problema matemático con la información que recojas y con los tanteos que tú puedas hacer.

Matemáticos, concursos de problemas y ecuaciones

Fíjate bien en esta lista de nombres:

Escipión del Ferro (1465-1526)
Nicolo Fontana (Tartaglia) (1499-1557)
Anibal de la Nave
Antonio M^a del Fiore
Gerolamo Cardano (1501-1576)
Ludovico Ferrari (1522-1565)

A. Dos de ellos se enfrentaron en 1535 en un concurso de resolución de problemas, que ellos mismos se proponían. Estos eran algunos de los problemas:

Hallar un número que añadido a su raíz cúbica resulte 6.

Dos hombres ganan en total 100 ducados. Calcular lo que gana cada uno si la parte del primero es la raíz cúbica de la del segundo.

Cada uno de los contrincantes depositó ante notario una lista de 30 problemas y una cantidad de dinero. El que, en 30 días, hubiese resuelto el mayor número de ellos sería el ganador y se llevaría todo.

Según una versión de esta historia, el perdedor impugnó el resultado y el ganador rechazó el dinero, porque no quería nada de un mal jugador. Lo que es cierto es que el ganador utilizó unos conocimientos que su contrincante no esperaba que supiera... ¿De qué estamos hablando?

Averigua quiénes fueron e intenta resolver los problemas que te hemos presentado. En todos ellos aparecen ecuaciones. ¿De qué tipo son? ¿Sabes cómo se resuelven?

B. Más adelante, un día del año 1539, uno de estos personajes le contó a otro cómo se resolvía cierto problema de matemáticas, relacionado con la resolución de ecuaciones, con el compromiso de mantenerlo en secreto y no publicarlo. Pero esto no fue así, pues pasados unos años...

Averigua quiénes son y el tema de la conversación. Completa la historia y escribe, con sus pasos y transformaciones, el proceso y el método matemático que da lugar a una fórmula que resuelve esas ecuaciones.

C. Averigua el papel que tienen el resto de personajes en esta historia y su relación con el tema matemático que estamos tratando.

D. Uno de los personajes de los que hemos hablado anteriormente escribió libros sobre medicina, filosofía, probabilidades, álgebra, etc. También narró la historia de su propia

vida y sobre sus libros. ¿Cuál es su obra más importante desde el punto de vista matemático? Haz un resumen de su biografía.

E. Otro de los personajes escribió un *Tratado de Aritmética* en el que habla de un triángulo de números que lleva su nombre. ¿De quién estamos hablando? ¿Qué utilidad tiene ese triángulo? ¿Qué representan los números que lo componen?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CARDANO, G. (1991): *Libro de mi vida*, Ed. Alianza Universidad nº 697, Madrid.
- CARROLL, L. (1979) *Matemática demente*. Edición de Leopoldo María Panero. Ed. Tusquets, Barcelona.
- CARROLL, L. (2005) *Problemas de almohada*, Nivola libros y ediciones. Tres Cantos (Madrid)
- DUNHAM, W. (2002) *Viaje a través de los genios*, Ed. Pirámide, Madrid.

Una cuestión opcional

Ferrari (1522-1565) encontró la fórmula para resolver la ecuación de cuarto grado. Partiendo de una ecuación de este tipo:

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

expón el proceso y los pasos que hay que dar para llegar a resolverla. ■

- MARTIN CASALDERREY, F (2000): *Cardano y Tartaglia. Las Matemáticas en el Renacimiento Italiano*. Nivola libros y ediciones. Tres Cantos (Madrid)
- MORENO CASTILLO, R. (2001) *Andanzas y aventuras de las ecuaciones cúbica y cuártica a su paso por España*. Ed. Complutense, Madrid.



NICOLAUS TARTAGLIA,
BRIXIANVS.

[illegible]

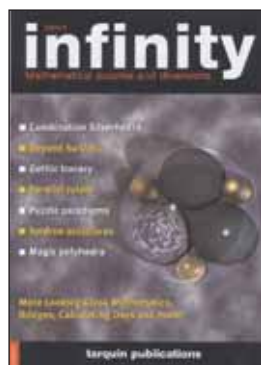
Revistas recibidas



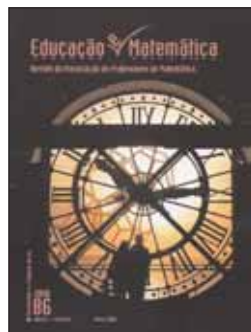
LA GACETA DE LA RSME
RSME
ISSN: 1138-8927



INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL
*Associação Portuguesa de
Investigação Operacional (APDIO)*
ISSN: 0874-5161



**INFINITY. MATHEMATICAL
PUZZLES AND DIVERSIONS**
Tarquin publications
ISSN: 1748-3220



EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA
*Revista de la Associação de
Professores de Matemática (APM)*
Lisboa, 2005
ISSN: 0871-7222



**REVISTA MATEMÁTICA
COMPLUTENSE**
S.P. UCM, Madrid
ISSN: 1139-1138



**TAREA. REVISTA DE EDUCACIÓN
Y CULTURA**
*Asociación de Publicaciones
Educativas*
Lima (Perú)
ISSN: 0252-8819

En marzo de 2006 han coincidido en nuestras pantallas los estrenos de un largometraje y de una serie televisiva donde las Matemáticas tienen un papel estelar. Se trata de *La verdad oculta* (singular traducción del título original *Proof*) y de la serie *Numb3rs*. En ambos casos hay un alto nivel de producción, con directores y actores famosos, y con una puesta en escena y un montaje cuidados; pero divergen en su enfoque de las Matemáticas en relación con el bienestar humano.

Proof: Otra vuelta de tuerca



LA VERDAD OCULTA (PROOF).

Director: **John Madden.**

Actores: *Gwyneth Paltrow (Catherine), Jake Gyllenhaal (Hal), Anthony Hopkins (Robert) y Hope Davis (Claire).*

Guión: *David Auburn y Rebecca Millar (adaptación de la obra de teatro de David Auburn, Premio Pulitzer).*

Producción: *Miramax & Endgame Entertainment. EE.UU. 2005.*

Distribución: *Buena Vista International.*

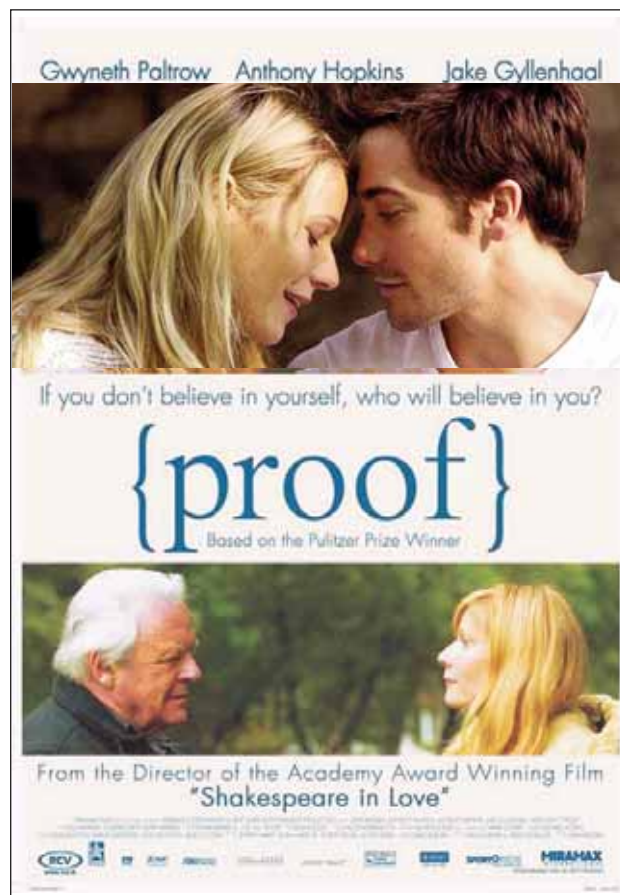
José María Sorando Muzás

decine.suma@fesmp.org

Argumento. Catherine ha renunciado a terminar la carrera de Matemáticas dedicando los últimos cinco años al cuidado de su padre, Robert, que fuera en su juventud un eminente matemático. Éste, sumido en la demencia, intentaba en vano recuperar la creatividad perdida, rellendo cuadernos incoherentes. A su muerte, Hal, un discípulo aventajado busca en esos cuadernos algún destello póstumo de aquel genio. La reticencia inicial de Catherine se torna en confianza, mediando una relación amorosa entre ambos. Por ello le muestra un cuaderno con lo que parece una brillante demostración que tendría repercusión mundial, de la cual se dice autora. Hal duda sobre la autoría y, a la vez, sobre la salud mental de Catherine: ¿ha heredado el genio del padre?, ¿la enfermedad? ... ¿o ambos? En este punto, el título original de la obra adquiere un doble sentido: la validez y el estilo propio de esa demostración matemática demostrarían a la vez su cordura.

Comentario. Los personajes principales de *Proof* son matemáticos que protagonizan un drama sobre su trabajo. Sorprende en ese contexto que haya tan pocos elementos específicamente relacionados con las Matemáticas. Se las cita en todo momento, pero en realidad no se habla tanto de ellas como de la búsqueda del éxito en el mundo académico. En lo esencial, la trama se desarrollaría casi igual si los protagonistas fueran científicos de cualquier otra especialidad. Entre esos escasos aspectos matemáticos, encontramos los siguientes:

- Se insiste en el conocido tópico de que las grandes innovaciones matemáticas han sido obras de juventud (Galois, Abel...). Hal llega incluso a decir que, en los congresos, los matemáticos mayores toman anfetaminas para poder seguir el ritmo.
- Hay una referencia a Sophie Germain (1776–1831), nada casual. También en su caso la autoría de sus trabajos podía ser puesta en duda, entonces por discriminación de género, y llegó a firmarlos con el seudónimo masculino de Antoine Le Blanc, causando gran sorpresa al revelar su identidad.
- Se recrea entre Robert y Catherine la conocida anécdota sucedida entre G. H. Hardy (1877–1947) y S. Ramanujan (1887–1920) acerca del número 1729, el menor que puede ser expresado de dos formas diferentes como suma de dos cubos ($1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$), citada por C.P. Snow en el *Prólogo* a *Autojustificación de un matemático* (G.H. Hardy. Ed. Nivola 1999).
- La sospecha de apropiación indebida de los descubrimientos es recurrente. Primero, por dos veces, sobre las intenciones de Hal en su interés por los cuadernos de Robert; después, a propósito de la autoría de Catherine sobre la maravillosa demostración. Este tipo de conflictos éticos tiene ilustres precedentes: Tartaglia vs Cardano y Newton vs Leibnitz.



Proof es otra película donde, una vez más, aparecen unidos trastornos mentales y Matemáticas, dando otra vuelta de tuerca en el prejuicio social acerca de los “pitagorines”. Siendo tan pocas las ocasiones en que las Matemáticas llegan al cine, resulta bastante significativa esa insistencia en el “matemático loco”, con matices en su patología (*Perros de paja*, *Pi*, *Fé en el caos*, *Cube*, *Enigma*, *Una mente maravillosa*... y ahora *Proof*). Se está convirtiendo en un arquetipo peligroso para nuestro propósito de difundir las Matemáticas y, como decía en un artículo anterior (Suma n° 48), considero desaconsejable darle entrada en el aula. Pero no sólo por eso me parece una película poco adecuada para nuestros alumnos; también por su pesadez, con poca acción, ambientes cerrados y abuso de diálogos, riesgo del teatro llevado a la gran pantalla.

Al igual que John F. Nash en *Una mente maravillosa*, el matemático enfermo es redimido en su sufrimiento por el amor de un ser querido (*los cuidados de mi hija me han salvado*, escribe Robert en uno de sus cuadernos). Y como *El indomable Will Hunting*, en un momento dado Catherine se enfrenta a un dilema que puede vincular su destino a las Matemáticas. Cada cual tiene su respuesta, pero en ambos casos deciden los afectos. ■

Numb3rs: Matemáticas contra el crimen

NUMB3RS

Actores: Rob Morrow (Donald), David Krumholtz (Charlie), Jud Hirsch (el padre), Alimi Ballard (agente David), Navi Rawat (Amita), Sabrina Lloyd (agente Terry) y Peter Mac Nicol (Larry).

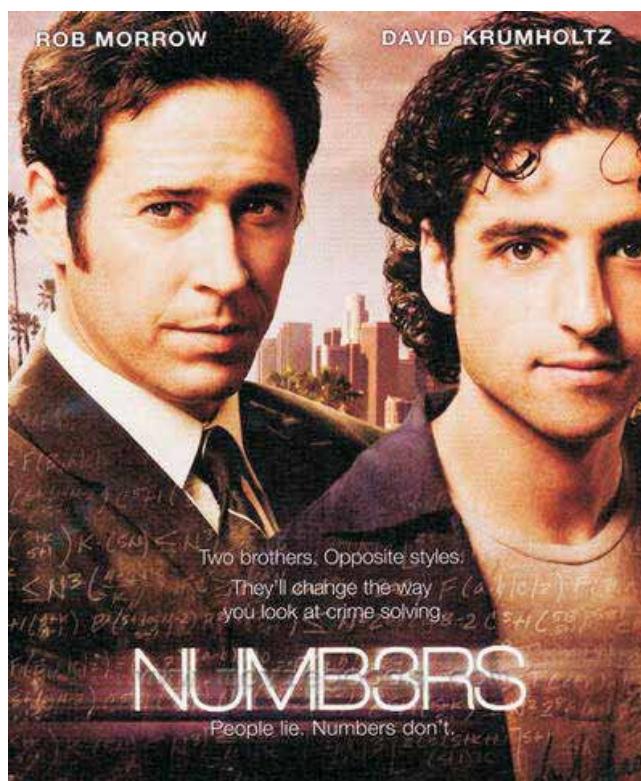
Creadores: Nicolas Falacci y Cheryl Heuton.

Producción ejecutiva: Tony Scott, Alex Gansa, Barry Schindel, Brooke Kennedy y Ridley Scott para CBS. EE.UU. 2005 – 2006

Argumento. Donald Eppes es un agente del FBI en Los Ángeles cuyo hermano Charlie es un genio matemático que trabaja en la Universidad de California. Casualmente, Charlie observa sobre un mapa los escenarios de los crímenes cometidos por un asesino en serie y pone en acción su potente capacidad intelectual, consiguiendo aproximar con gran exactitud el domicilio del asesino (Episodio Piloto). De la inicial desconfianza, en el FBI se pasa a la admiración y Charlie se convierte en un colaborador habitual que llega a ser reclamado por otros servicios policiales.

Charlie aborda cada caso desde un esquema teórico que normalmente no le da la solución en el primer intento. Entonces lo revisa todo con su estilo cuidadoso, pese a las urgencias del FBI para no retrasar la solución. A menudo supera el bloqueo gracias al contrapunto de alguien próximo: unas veces, desde el sentido común que aporta el padre en las reuniones familiares; y otras por los consejos del amigo físico Larry Fleinhardt y sus reflexiones sobre los fundamentos de la Ciencia. La acción y el riesgo corren a cargo de Don que será el encargado de detener ladrones y asesinos o liberar rehenes.

Comentario.- Tras el éxito de las series CSI (Nueva York, Miami y Las Vegas), la cadena CBS hizo una apuesta innova-



NUMB3RS



dora: la medicina forense iba a ceder a las Matemáticas el protagonismo en la investigación policial. Como escribe Juan Cueto en *El País*, ahora la lucha contra el crimen es de Ciencias.

Usamos los números cada día: para predecir el tiempo, para decir la hora, al usar dinero. También los usamos para analizar el crimen, para buscar pautas, para predecir comportamientos. Con los números podemos resolver los mayores misterios que se nos plantean. Así comienza cada episodio de Numb3rs. Según sus creadores, Heuton y Falacci, pensábamos que si podíamos mostrar lo que pueden hacer las Matemáticas y cómo también un matemático puede ser un héroe, inspiraríamos el interés de los jóvenes por estudiarlas. Con esa sugestiva

introducción y tan loable propósito, muchos docentes hemos recibido la serie con simpatía.

Además *Numb3rs* llegaba avalada por su éxito en EE.UU: líder en horario de máxima audiencia (viernes a las 22:00), con una media de 11,45 millones de espectadores, clubes de fans, página web <http://www.cbs.com/primetime/numb3rs/index.shtml> e incluso un programa de actividades en las aulas norteamericanas al hilo de cada capítulo. Actividades patrocinadas por Texas Instruments, bajo el sugestivo lema *We all use Math every day*, que son accesibles en Internet desde el citado enlace, aunque se refieren a los episodios en emisión en EEUU, no a los que nosotros vemos ahora de la primera temporada. Ese éxito ha propiciado que la serie, inicialmente de futuro incier-

to, vaya por su segunda temporada, estando asegurada la producción de la tercera (cada una con 13 episodios).

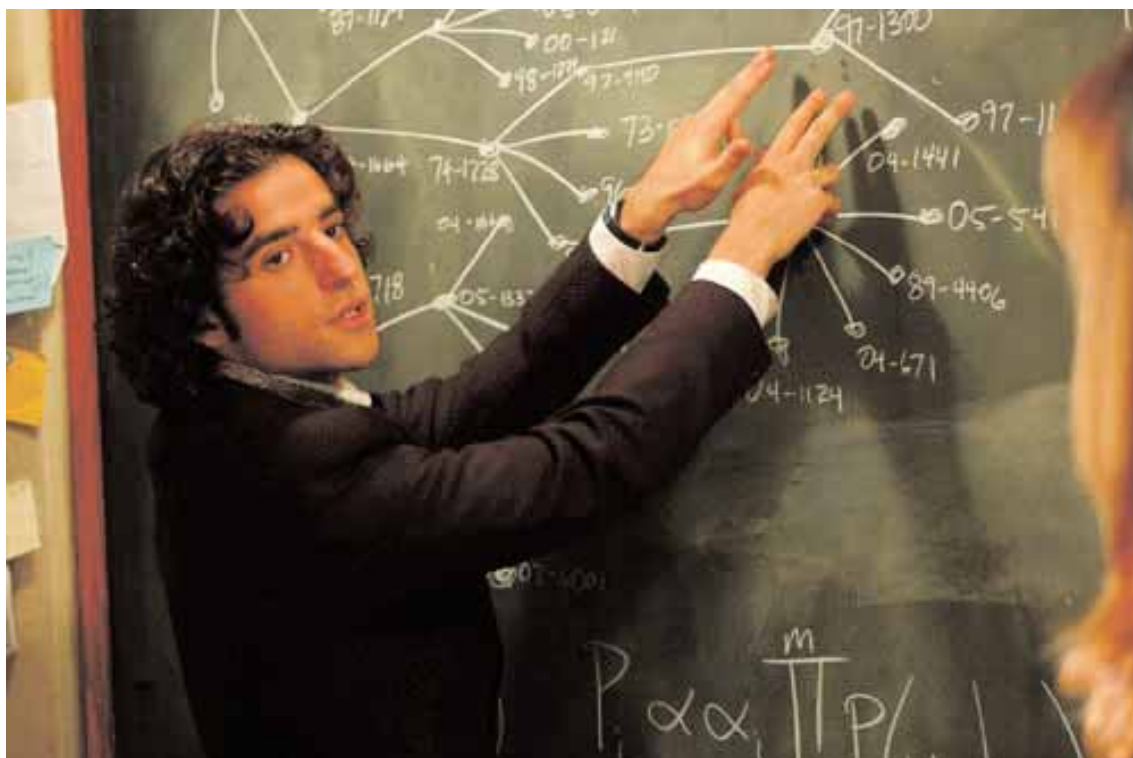
Pero Antena3 TV no nos lo ha puesto fácil con su pase en horario variable a medianoche de los martes, con incumplimientos de la programación anunciada y 20 minutos de publicidad intercalada en cada episodio de 40 minutos. El castigo al espectador ha culminado con la suspensión sin aviso de la serie a las cuatro semanas de su comienzo. Desde mayo, *Numb3rs* se puede ver en el canal temático Calle 13 (en plataformas digitales y por cable, con 4 repeticiones semanales de cada episodio: lunes 21:30, martes 17:25, sábado 20:30 y domingo 15:05). Esperamos que no haya nuevas sorpresas.

Algunos de los casos que resuelve Charlie son reales, documentados en los archivos del FBI. Para el resto, ha trabajado en *Numb3rs* un equipo asesor de matemáticos. Pero, en aras a mantener el ritmo en una serie de acción, se dan explicaciones muy someras que apenas dejan entrever el fundamento científico de cada solución. Para esas rápidas presentaciones de las ideas matemáticas y los procesos de aplicación se utilizan infografías y eficaces metáforas: un aspersor de riego (Episodio Piloto), dos corredores en la playa (Episodio 7: *Realidad falsificada*), etc. De ahí se pasa enseguida a las escenas en que Charlie llena pizarras. Los gráficos y símbolos matemáticos desfilan por la pantalla, incomprensibles para el público, a cuyos ojos puede parecer que se trata de una espe-

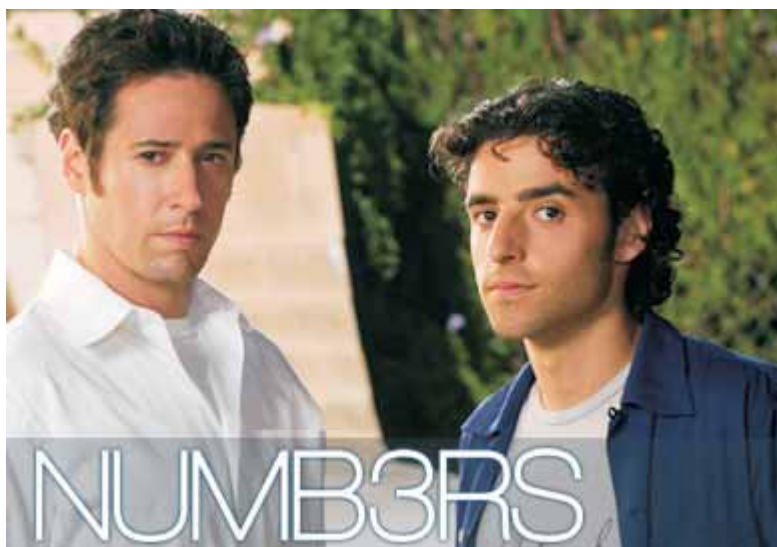
cie de adivino que ha sustituido la bola de cristal por las ecuaciones; simplificación que le quita credibilidad. Y sin embargo, existe un fundamento matemático verosímil en cada caso (zonas de probabilidad, Hipótesis de Riemann, transformadas wavelets aplicadas a gráficas sinusoidales en coordenadas polares, vectores, análisis estadísticos, etc.). Para una revisión de cada capítulo, aconsejamos la lectura de los artículos publicados desde febrero por Alfonso Jesús Población en la sección *Cine y Matemáticas* de www.divulgamat.net.

Parece que la asesoría matemática de la serie no ha tenido continuidad en el doblaje local, pues saltan algunos “gazapos”. Por ejemplo (Episodio 5: *Sabotaje*), cuando a partir de una flor Charlie da a la incrédula agente Terry una bella explicación de la presencia de las Matemáticas en lo cotidiano, se habla de la Sucesión de “Finobacci”.

A diferencia de *Proof*, en *Numb3rs* el matemático protagonista no tiene problemas mentales ni desequilibrios afectivos de ninguna clase. Es joven y atractivo, al igual que su novia, la también matemática Amita Ramanujan (homenaje al matemático hindú). Pero no está ausente de la serie el tópico del “científico raro”, en la figura del físico Larry Fleinhardt. Se trata de un personaje caricaturesco por su gesticulación, potenciada por un peculiar doblaje, además del consabido despiste (al despedirse tras un encuentro con Charlie, no sabe si iba o venía) y de la torpeza social. Larry intenta justificar



desde la Teoría de la Probabilidad su temor a un envite amoroso con una profesora y se refugia en el Departamento de Matemáticas, ya que *no puede haber un sitio menos libidinoso en el campus* (Episodio 5: *Sabotaje*). Está cargado de tics, pero es acertado en sus consejos. Dos ejemplos: *Piensa que predecir no es controlar* (Episodio 2: *Principio de Incertidumbre*); *Intentaste resolver un problema que involucra el comportamiento humano... De acuerdo, Charlie, eres un matemático. Estás siempre buscando la solución elegante. El comportamiento humano casi nunca es elegante. El universo está lleno de giros extraños. Quizá necesites hacer tu ecuación menos elegante, más complicada; menos precisa, más descriptiva. No va a ser bonito, pero podría funcionar un poco mejor*, (Episodio Piloto).

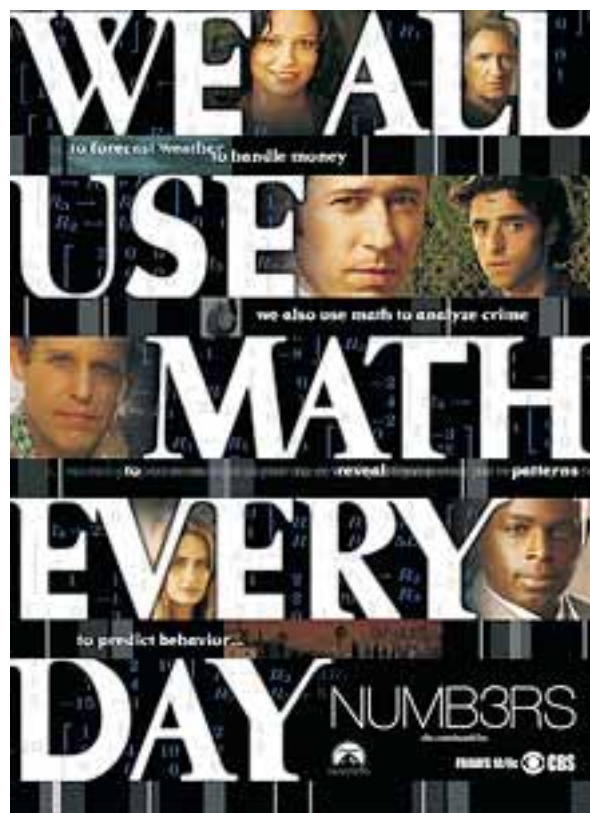


Hay en Numb3rs una inversión de los valores que dominan en el ambiente universitario de Proof; el servicio está por encima del meritaje. Se transmite una imagen positiva y comprometida del matemático.

En resumen, *Numb3rs* trata de un superdotado que tiene un hermano en el FBI; dos requisitos que casi nadie cumple, ni siquiera parcialmente. Y sin embargo, *todos usamos los números cada día....* Por ello, bien está que el imaginario televisivo incluya también algún héroe matemático. Bienvenida sea *Numb3rs*. ■

En *Numb3rs* el matemático resuelve problemas de la realidad más sórdida; en palabras de su padre, *con un alto sentido de servicio público*. Si en un principio la razón de su interés por los casos criminales parece ser la curiosidad intelectual o el deseo de agradar al hermano mayor, episodio tras episodio vemos a Charlie conmovido ante las víctimas o la previsión del daño a inocentes: *Está bien ayudar* (Episodio 3: *Vectores*). Esta actitud de compromiso es contraria a sus propios intereses académicos: en un momento Larry le recuerda que va camino de los 30 y debería aprovechar su etapa de mayor productividad intelectual para la investigación teórica, en vez de distraerse en otros asuntos.

Hay en esta serie una inversión de los valores que dominan en el ambiente universitario de *Proof*; el servicio está por encima del meritaje. Se transmite una imagen positiva y comprometida del matemático, aunque obviamente resulta muy circunstancial, dado el lazo familiar en que se basa la situación. Por otra parte, la resolución de problemas se presenta ligada en exceso al genio: ante un problema, Charlie parece entrar en trance; no se diría que es una experiencia al alcance de la gente corriente. A estas dos últimas objeciones se puede responder que para las series de acción sólo lo extraordinario es interesante.



Barcelona 1981
Sevilla 1982
Zaragoza 1983
Santa Cruz de Tenerife 1984
Castellón 1991
Badajoz 1993
Madrid 1995
Salamanca 1997
Lugo 1999
Zaragoza 2001
Cantabria 2003
Albacete 2005
Granada 2007
Del 4 al 7 de julio

MATEMÁTICAS PARA TODOS

CONGRESO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA



XIII Jornadas sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas

Granada, del 4 al 7 de julio de 2007

Primer anuncio

PRESENTACIÓN

El 6 de julio de 2005 la Junta de Gobierno de la **Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas** encomendó a la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales la organización de las XIII Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (XIII JAEM).

La **Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales** (SAEM Thales) ha aceptado el honor de organizar este congreso, poniendo toda su ilusión y esfuerzo para que éstas sean unas JAEM importantes y útiles para el profesorado y la sociedad. Trataremos de hacer realidad aquella recomendación de F. Pessoa *Pon todo lo que eres en lo mínimo que hagas*.

Las JAEM son un foro de debate, un lugar de reflexión, un espacio y un tiempo de contactos para mejorar la competencia didáctica, metodológica y de recursos de los profesores y profesoras de Matemáticas.

La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) invita a participar en las XIII JAEM a todo el profesorado de Educación Infantil, Primaria, Secundaria y Universitaria.

Todos enseñamos y todos podemos aprender de todos.



OBJETIVOS

1. Reconocer el papel del profesorado de matemáticas de todos los niveles educativos, desde Educación Infantil hasta la Universitaria, y su disposición a afrontar la enseñanza del futuro.
2. Debatir aspectos específicos de la educación matemática actual, prestando especial atención a la diversidad y la interculturalidad.
3. Consolidar los lazos científicos y culturales entre los profesionales de la docencia e investigación en matemáticas.
4. Coordinar esfuerzos de personas, grupos y sociedades relacionadas con la Educación Matemática.
5. Promover la investigación y desarrollo de actividades destinadas a mejorar la Educación Matemática.
6. Establecer espacios para el intercambio de experiencias en docencia e investigación matemática educativa y para la difusión de trabajos de innovación en la enseñanza de las matemáticas, que contribuyan al desarrollo profesional de los participantes y reviertan en mejoras en su quehacer cotidiano
7. Analizar el tipo de matemáticas que debe enseñarse en la sociedad actual que requiere cada vez más la utilización de tecnologías y la modelización matemática.
8. Analizar el impacto de las comunicaciones y los desafíos del siglo XXI en los elementos básicos del acto educativo.
9. Dar a conocer a toda la sociedad el aspecto lúdico que las matemáticas contienen.
10. Mostrar que la enseñanza de las matemáticas está en proceso de renovación permanente.
11. Difundir el modo de pensamiento matemático para incorporar las matemáticas a la oferta cultural actual.

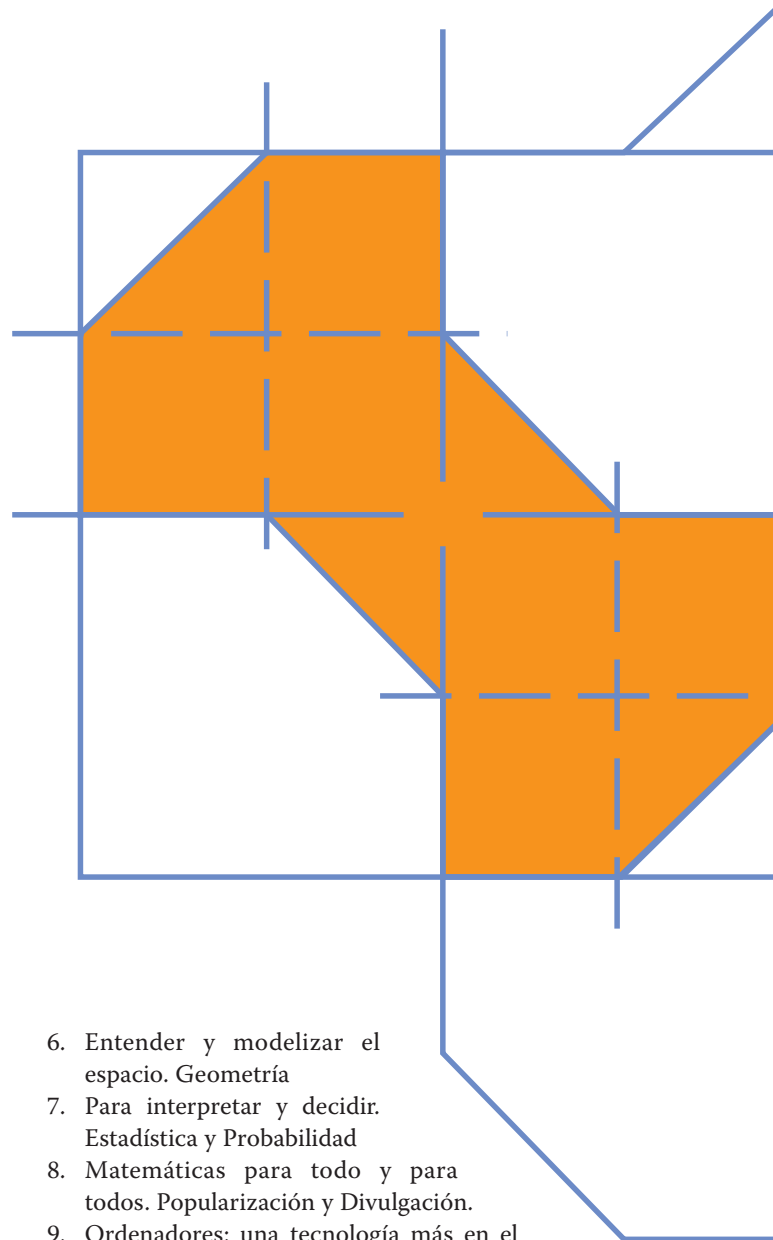
ESTRUCTURA GENERAL

Las XIII JAEM se organizan en torno a las siguientes actividades:

- Cuatro conferencias plenarias
- Diez núcleos temáticos que se desarrollan en ponencias.
- Comunicaciones centradas preferentemente en los núcleos temáticos.
- Grupos de debate.
- Talleres.
- Zoco matemático. Puede presentarse cualquier tipo de material, póster, escultura, etc.
- Exposiciones. Se contará con interesantes muestras de temas relacionados con la Educación Matemática o con la matemática en general y sus relaciones con otras áreas.
- Entrega del Premio Gonzalo Sánchez Vázquez.
- Actividades culturales.
- Exposición y venta de materiales didácticos por parte de casas comerciales, de la FESPM y de las Sociedades.

NÚCLEOS TEMÁTICOS

1. Los profesores de matemáticas, profesionales imprescindibles
2. Ahí empieza todo. Matemáticas en Educación Infantil y Primaria.
3. Iguales, pero diferentes. La diversidad en la clase de Matemáticas
4. De las cuentas a los cuentos. Números y álgebra
5. Relacionar y representar para resolver problemas. Funciones y gráficas.



6. Entender y modelizar el espacio. Geometría
7. Para interpretar y decidir. Estadística y Probabilidad
8. Matemáticas para todo y para todos. Popularización y Divulgación.
9. Ordenadores: una tecnología más en el aula de matemáticas
10. Otros

TALLERES

En sesiones de una o dos horas, el objetivo principal es la manipulación interactiva de materiales, software, la exposición de actividades concretas, etc

Normas para la presentación de Talleres:

Los participantes a las XIII JAEM pueden presentar propuestas de realización de Talleres durante las mismas.

Quienes quieran presentar propuestas, deberán enviar una descripción del Taller, indicando de la manera más detallada posible, el material que de ha poner a su disposición el Comité Organizador de las XIII JAEM.

El plazo de admisión de propuestas finaliza el día 1 de abril de 2007. A conti-

nuación se confirmará a los autores si su propuesta ha sido aceptada por el Comité de Programa y si existe algún problema con el material que ha sido solicitado al Comité Organizador.

La descripción de los Talleres aceptados y realizados se publicará en las actas de las XIII JAEM. Para preparar este documento, seguir las normas para la publicación establecidas en este anuncio.

Se ofertan dos posibilidades de tiempo. La que se elija debe especificarse en la descripción del Taller:

Taller de una hora
Taller de dos horas

COMUNICACIONES

Consisten en intervenciones breves en las que se podrá exponer y compartir, transmitiendo a otros compañeros puntos de vista sobre educación matemática, experiencias de aula, etc.

Normas para la presentación de Comunicaciones:

Las Comunicaciones deben estar referidas a la enseñanza o el aprendizaje de las Matemáticas en cualquiera de los niveles educativos.

Han de encuadrarse en los Núcleos Temáticos propuestos aunque también se ofrece la posibilidad de hacerlas sobre cualquier otro tema.

Deben ser inéditas, no habiéndose publicado con anterioridad. Si es de varios autores, al menos uno ha de estar inscrito. El certificado en este caso, será colectivo. La admisión de los trabajos quedará supeditada a la decisión del Comité de Programa. El plazo de admisión finaliza el día 1 de abril de 2007.

Deberá expresarse con claridad qué tipo de material de apoyo necesita para su exposición (retroproyector para transparencias o de opacos, proyector de diapositivas, video, cañón, ordenador, ordenadores en red, software, etc.). Todas las presentaciones informáticas deben venir en formato Power-Point 2000. En otros supuestos, consultar con la Organización.

Se dispondrá de 15 minutos para su exposición más 10 de coloquio con los asistentes. Se publicarán en las Actas de las XIII JAEM, siempre que se adapten a las condiciones que se especifican en las normas para la publicación establecidas en este documento.

No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de una comunicación.

ZOCO

El Zoco Matemático pretende ser una oferta que se hace a todos aquellos asistentes que deseen disponer de un espacio físico y horario en el que puedan presentar materiales didácticos, recursos, programas informáticos, pósteres, etc. Se trata, junto con las Comunicaciones y Talleres, de un canal ideal para tomar parte activa en las XIII JAEM

Normas de participación en el Zoco Matemático:

Quien desee hacer uso del Zoco deberá enviar una descripción de lo que presentará así como una relación detallada del material que lo compone: paneles, tamaño de las piezas que presenta, etc.

Ha de indicar con claridad qué desea que la organización ponga a su disposición: mesas, lugar para colocar posters, ordenador, etc. El plazo de admisión de peticiones para el Zoco Matemático termina el 1 de abril de 2007. Posteriormente se le comunicará si se ha aceptado su participación y si existe algún problema con las peticiones efectuadas. Se presentará una memoria que resuma el contenido de lo expuesto en el Zoco para publicarlo en las actas de las XIII JAEM, siempre que se adapta a las condiciones que se especifican en las normas para la publicación establecidas en el documento.

Los solicitantes se comprometen a montar y desmontar su material en el espacio que se le asigne y a estar presentes en el lugar en los momentos que se les indique para que los asistentes puedan dialogar con ellos sobre lo expuesto. Para el transporte hasta la sede de las JAEM de los materiales a exponer en el Zoco, deben ponerse en contacto con el Comité Organizador para informarles sobre la forma de hacerlo y, en su caso, los trámites para solicitar alguna ayuda económica.

Publicación actas

La publicación en las Actas de las XIII JAEM de Comunicaciones, Talleres y Zoco Matemático está sujeta a la aceptación y cumplimiento de las siguientes NORMAS

Normas para la publicación de las actas:

Han de enviar dos copias en papel, formato DIN-A4, a:

SAEM. Thales (XIII JAEM)
Apdo. Correos 673
18080 Granada

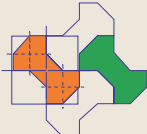
Ocuparán como máximo 5 páginas Din A-4, incluyendo notas, referencias bibliográficas, fotografías, gráficos, etc. Con el objetivo de facilitar la posterior elaboración de las Actas, se deberá enviar un archivo a la dirección de correo electrónico

xiiiiaem@fespm.org

en formato MS-Word 2000 que se ajuste a las siguientes características: *Tipo*: Times New Roman de 11 puntos. *Espaciado* e interlineado sencillo. Evitar el uso de características especiales como letra capital, viñetas, estilos, tabuladores, sangrías, columnas, encabezados, pies. No usar subrayados. En la primera página sólo aparecerá: el título de la comunicación en mayúsculas (Times 14 puntos, centrado), debajo del título los autores (Times 12 puntos, centrado), debajo de los autores, la filiación centro / departamento / universidad, si procede (Times 12 puntos), resumen / abstract (Times 10 puntos, justificado a ambos lados). Los márgenes de la página son: superior e inferior 2,5 cm, laterales: 3 cm. Los gráficos e imágenes se incluirán en el propio documento. ■

BOLETÍN de INSCRIPCIÓN

Apellidos		Nombre	
D.N.I.		N.R.P.	Correo-e
Telf. Móvil			
Domicilio		Población	
Provincia		Código Postal	
Cuerpo al que pertenece		Sociedad a la que pertenece	
Nombre del Centro		Localidad	Código Postal
Teléfono		Nivel educativo	
Forma de pago			
Número talón	Fecha transferencia	Cantidad	
Presenta			
Comunicación ☐	Taller ☐	Zoco ☐	
CUOTA DE INSCRIPCIÓN			
	Hasta el 15/05/07	Después del 15/05/07	
Socios de la FESPM	100 €	130 €	
No socios	160€	200 €	



* c/c nº 2031 0074 15 0115809202.
SAEM THALES. XIII JAEM
(No olvide indicar con claridad su nombre y apellidos).

* Talón nominativo a favor de
SAEM THALES. XIII JAEM

Exposición internacional con el
patrocinio de la *UNESCO*

Arte Fractal:
belleza y
matemáticas

¿Por qué las
matemáticas?

Obras seleccionadas del
concurso internacional de
Arte Fractal:
ICM2006 Benoit Mandelbrot

exposiciones matemáticas en MADRID

Centro Cultural Conde Duque

del 17 de agosto
al 29 de octubre

Demoscene:
matemáticas en movimiento

más información en
<http://www.divulgamat.net>

*Imágenes en movimiento generadas
en tiempo real
por matemáticos y programadores*

VIDA de los NÚMEROS



BIBLIOTECA NACIONAL
Del 8 de junio al 10 de septiembre de 2006
Telf.: 915 807 823/805 info@bne.es

Martes a sábados de 10:00 a 21:00 horas
Domingos y festivos 10:00 a 14:00
Entrada gratuita



BIBLIOTECA NACIONAL
Pº de Recoletos, 20
Madrid

www.bne.es

Con motivo del
INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICIANS

Manifiesto en DEFENSA de las matemáticas

LAS MATEMÁTICAS no son el reino del *2 y 2 son 4*. Entre otras cosas, porque hoy sabemos que *2 y 2* pueden ser 11 ó también 10. Es verdad que se trata del mismo hecho escrito con lenguajes distintos, pero la existencia de enfoques diferentes demuestra que no ha lugar al dogmatismo que se suele encerrar en la frase *2 y 2 son 4*.

Cuando se hace esa afirmación se está hablando, en el fondo, de la vía única, del camino dirigido, de la imposibilidad del pensamiento divergente.

LAS MATEMÁTICAS se ocupan no sólo de los números, sino también de muchas otras cosas. Se ocupan de la forma de los objetos, del azar, del tratamiento numérico de la información, de la cercanía y no sólo de la distancia, de los cruces en las redes de caminos, etc.

Se ocupan de problemas nuevos y de otros que llevan tiempo sin haber podido ser todavía resueltos. Y, para ello, conjeturan, se equivocan, vuelven a conjeturar y a someter a prueba la nueva conjetura. Crean modelos y los sustituyen cuando hace falta, cuando nuevas realidades son observadas o cuando hay nuevas necesidades que atender.

LAS MATEMÁTICAS no son el cálculo, de la misma manera que un idioma no es su diccionario o la pronunciación de sus letras.

LAS MATEMÁTICAS son uno más de los campos en los que se manifiesta la creatividad siempre nueva y cambiante de los seres humanos. Por eso, las matemáticas no son algo eterno, inmutable, acartonado como una revelación descendida que no puede ser revisada.

LAS MATEMÁTICAS tienen que ser defendidas de quienes están convencidos y convencidas del dogma del *2 y 2 son 4*.

De quienes las utilizan para seleccionar y castigar.

De quienes piensan que son una materia instrumental.

De quienes conciben la enseñanza como una descarga de información estructurada en las mentes de alumnos y alumnas.

De quienes no tienen fe en la vida y dudan que los y las estudiantes puedan redescubrir y disfrutar haciéndolo.

Tienen que ser defendidas de los cientistas, que han reducido el mundo al tosco empirismo de lo medible y observable, y del rendimiento económico. Y de los ideólogos que, ofuscados, les hacen caso.

LAS MATEMÁTICAS pueden ser, como afirmaba Tàpies de la pintura, todo: lo que nosotros y nosotras queramos. Incluso *un aire dulce lleno de alboradas*. Hay que defenderlas de quienes no entienden que ese "aire lleno de alboradas" tiene mucho que ver con ellas y con lo que pasa en una clase, en un aula.

LAS MATEMÁTICAS con las que debe entrar en contacto un niño o una niña, una adolescente o un adolescente, son, justamente, aquellas que le sirvan para desarrollarse como personas. Y en la cantidad adecuada para ello, para ir construyendo, recorriendo su propio camino.

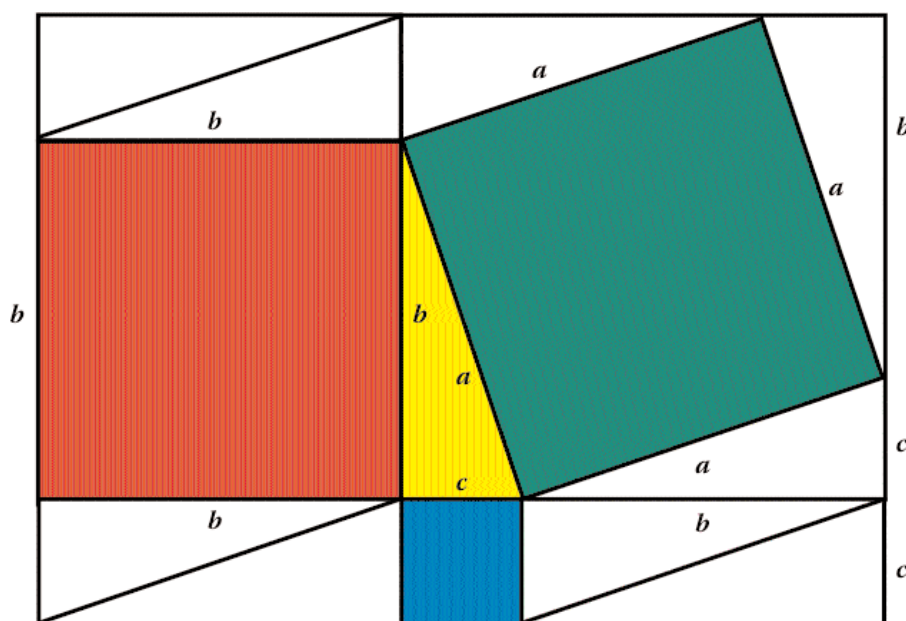
LAS MATEMÁTICAS deben estar al servicio del ser humano y no de los intereses de tecnócratas obnubilados por el dinero.

LAS MATEMÁTICAS...

Se les está dando una importancia académica que las desvirtúa. Por eso tienen que ser defendidas!

Ángel Ramírez

Una nueva demostración geométrico–algebraica del teorema llamado de Pitágoras



De acuerdo con la figura adjunta, dado el triángulo rectángulo de hipotenusa a y catetos b y c , consideremos un rectángulo compuesto por los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo dado: a , b y c , junto con diez triángulos rectángulos congruentes con el dado.

Al calcular, de dos formas diferentes, el área del rectángulo construido:

- a) Mediante el producto de la base $(b+c+b)$ por la altura $(c+c+b)$:

$$A = (b+c+b) \cdot (c+c+b) = (2b+c) \cdot (2c+b) = 4bc + 2c^2 + 2b^2 + bc = 2c^2 + 2b^2 + 5bc$$

- b) Mediante la suma de las tres áreas cuadradas y diez áreas triangulares cuya yuxtaposición engendra el rectángulo considerado:

$$B = a^2 + b^2 + c^2 + 10(bc/2)$$

Obtenemos:

$$2c^2 + 2b^2 + 5bc = a^2 + b^2 + c^2 + 10(bc/2)$$

Y al simplificar esta igualdad, resulta:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Josep Maria Lamarca
IES Sant Josep de Calassanç, Barcelona

NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, Apartado de Correos 19012, 28080 Madrid), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.
2. Los gráficos, diagramas, fotografías y figuras se enviarán impresos en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración. Indíquense los créditos de las fotografías y dibujos.
2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original impreso ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos no serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.
4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de un máximo de 625 caracteres contando los blancos, que no necesariamente tiene que coincidir con la introducción al artículo. De este resumen se remitirá también su traducción al inglés.
5. Los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede) y el resumen en castellano y en inglés deberán ir escritos en una misma hoja aparte.
6. Se enviará también en soporte magnético (disco de tres pulgadas y cuarto con formato PC, CDROM o DVDROM) una copia de los archivos de texto que contenga el artículo y del que contenga la hoja con los datos y los resúmenes, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quieran incluir. La etiqueta debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda Microsoft Word para Windows o RFT. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF. Para las fotografías se recomienda archivos TIF o BMP y con una definición mínima de 600x600 puntos por pulgada cuadrada.
7. Al menos un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.
8. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.
9. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo y se incluirán al final del texto.
10. La bibliografía se dispondrá también al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:
TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma*, n.º 20, 91-98.
En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas*, Labor, Barcelona.
En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas*, 2, ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.
11. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ... supone un gran avance (Hernández, 1992). Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ... según Rico (1993).
12. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como -en caso afirmativo- la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido.
13. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.



Boletín de suscripción

Tarifas	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	25 €	10 €
Centros	40 €	15 €
Europa	50 €	20 €
Resto del mundo	60 €	22 €

Fotocopiar esta hoja y enviar:

por correo a: Revista SUMA. Apartado de correos 19012
E-28080 MADRID

por Fax al: 912 911 879

por correo-e a: suma_administracion@fespm.org

Deseo suscribirme a la revista SUMA:

Nombre y apellidos: _____ NIF/CIF: _____
Dirección: _____ Teléfono: _____
Población: _____ CP: _____
Provincia: _____ País: _____
Correo electrónico: _____ Fax: _____

☐ Suscripción a partir del año (3 números) _____
☐ N.ºs sueltos _____
Total

Importe (€)

- ☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)
☐ Transferencia bancaria (CCC 2085-9981-38-0330066350 ó IBAN ES68 2085 9981 3803 3006 6350)
☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista SUMA
☐ Giro postal dirigido a Revista SUMA

Fecha y firma:

Nombre y apellidos: _____

Código Cuenta Cliente: Entidad: Oficina: DC: Cuenta:

Banco/Caja: _____

Agencia n.º: _____ Dirección: _____

Población: _____ Provincia: _____

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (fecha y firma): _____

Algunos problemas de Lewis Carroll Anexo al artículo *Un misterio en Cambridge**

Lewis Carroll escribió varios problemas de lógica, a los que llamaba *nudos*. A continuación te presentamos los textos de todos los nudos; el III tal y como fue presentado por Lewis Carroll y el resto en versión resumida.



Nudo III Mathesis Demente

Alguna vez esperé un tren

Y bien, creo que me llaman así porque estoy un poco loca, dijo ella, con buen humor, en respuesta a la cautamente planteada pregunta de Clara acerca de cómo es que llegó a hacerse con un sobrenombre tan extraño. Sabes, yo nunca hago lo que cierta gente hace hoy en día, nunca viajo en trenes de largos recorridos (y hablando de trenes, está la estación de Charing Cross, tengo algo que decirte acerca de ello), y nunca juego al tenis, soy incapaz de cocinar una tortilla. ¡No puedo ni siquiera ver un miembro destrozado! Para ti seré una ignorante.

Clara era su sobrina, veinte años más joven que ella; en efecto, todavía hacía el bachillerato superior, una institución de la cual Mathesis Demente hablaba con una no disfrazada aversión. *¡Dejad que la mujer sea dócil y humilde!, habría dicho. ¡Ni una sola de esas escuelas me sirven!* Pero ahora precisamente era la época de las vacaciones, y Clara era su huésped, y Tmesis Demente le estaba enseñando los paisajes de som-

bras que se dibujaban en al Octava Maravilla del Mundo, Londres.

La estación de Charing Cross, dijo reanudando el hilo, indicándole con la mano la entrada como si le estuviera presentando a un viejo amigo. *La extensión de Bayswater y la de*

* Recogidos en Carroll, Lewis: *Matemática Demente*. Edición de Leopoldo M^a Panero. Ed. Tusquets, Barcelona.

Birmingham están ya terminadas, y los trenes ahora circulan sin descanso, bordeando el País de Gales, tocando sólo York, y así, dando la vuelta por la costa Este, regresan de nuevo a Londres. La manera de correr que tienen los trenes es muy peculiar. El tren del Oeste da la vuelta en dos horas; al del Este le toma tres; pero siempre se las arreglan para que salgan dos trenes de aquí, en direcciones opuestas, puntualmente, cada cuarto de hora.

Se dividen para volver a encontrarse, dijo Clara, llenándosele los ojos de lágrimas ante tan romántico pensamiento.

No hay necesidad de llorar por eso, le objetó su tía torvamente, porque no se encuentran en los mismos raíles. Y, hablando de encuentros, me asalta una idea, añadió, cambiando de tema tan abruptamente como acostumbraba, vayamos en sentidos opuestos, y veamos en cuál pueden encontrarse más trenes. No hay necesidad de carabina, sabes, como en un salón de señoras. Tú puedes ir adonde te plazca, ¡y podemos concertar una apuesta acerca de ello!

Yo nunca apuesto, dijo Clara gravemente. Nuestra excelente institutriz nos ha aleccionado a menudo en contra de ello.

No serías nada peor si lo hicieras, le interrumpió Mathesis Demente. E incluso yo creo que serías mejor, ¡estoy segura!

Tampoco gusta nuestra excelente institutriz de retruécanos, dijo Clara. Pero podemos jugar, si quieres. Déjame escoger mi tren, añadió tras un breve cálculo mental, y me comprometo a contar exactamente tantos como tú y la mitad más.

No podrás, si lo haces honestamente, le interrumpió bruscamente Mathesis Demente. Recuerda que sólo cuentan los trenes que encontremos a nuestro paso. No cuenta el tren que salga en el momento en que tú salgas, ni cuenta tampoco el tren que llega en el momento en que tú llegas.

Eso sólo me quita un tren, dijo Clara, mientras daban la vuelta y entraban en la estación. Lo malo es que nunca hasta ahora había viajado sola. No habrá nadie que me ayude a descender del tren. Sin embargo, no me importa. Empecemos el juego.

Un niño andrajoso la alcanzó a oír, y vino corriendo hacia ella. Compre una caja de cerillas, señorita, la suplicaba, tirándola del mantón, para atraer su atención. Clara se detuvo para explicarle.

No fumo cigarrillos, dijo, con tono humilde, excusándose. Nuestra excelente preceptora... Pero Mathesis Demente la empujó hacia delante, con impaciencia, y el niño se quedó atrás mirándola con los ojos como platos, estupefacto.

Las dos mujeres compraron sus billetes y avanzaron lentamente hacia el andén central. Mathesis Demente parlotear como

de costumbre, Clara silenciosa, dándole vueltas al cálculo en el que apoyaba sus esperanzas de ganar la competición.

Mira bien por dónde vas, querida, le gritó su tía, deteniéndola justo a tiempo. Un paso más, ¡y hubieras caído en ese balde de agua fría!

Ya veo, ya veo!, le contestó Clara soñadora. Pálido, frío lunático... Ocupen su lugar en las plataformas de salida, gritó un mozo de servicio.

Únicamente para ayudarnos a subir al tren. La mayor de las dos mujeres hablaba con la despreocupación de alguien acostumbrado a esas cosas. *Muy poca gente podría subir a los vagones sin ayuda en menos de tres segundos, y los trenes sólo paran un segundo.* En ese momento se oyó el silbato, y dos trenes se precipitaron en la estación. Tras de una breve pausa, habrían partido de nuevo; pero en ese pequeño intervalo, algunos cientos de pasajeros se dispersaron hacia ellos, cada cual dirigiéndose a toda prisa a su sitio con la precisión de un obús, mientras un número equivalente llovía sobre los andenes.

Pasadas tres horas, las dos amigas se encontraron de nuevo en los andenes de la estación de Charing Cross, y compararon ansiosamente sus notas. Enseguida Clara se dio la vuelta con un suspiro. Para los jóvenes e impulsivos corazones, el desengaño es siempre una amarga píldora. Mathesis Demente la siguió, llena de amistosa simpatía.

Inténtalo de nuevo, mi amor, dijo alegremente. Pero esta vez hagámoslo de otro modo. Saldremos las dos como antes, pero no empezaremos a contar hasta que nuestros trenes se encuentren. Cuando nos veamos por la ventanilla, diremos “¡uno!” y, a continuación contaremos hasta que lleguemos de nuevo aquí.

La mirada de Clara volvió a encenderse. *¡Esta vez ganaré, exclamó vehementemente, si es que puedo escoger mi tren!*

Otro silbato de los trenes, enderezarse de las plataformas de salida, otra avalancha viviente zambulléndose en los dos trenes al tiempo que aparecieron como dos rayos y mientras los viajeros descendían de ellos de nuevo.

Cada una miraba a la otra ansiosamente desde la ventanilla de su vagón, agitando un pañuelo a guisa de señal para su amiga. Una violenta sacudida, un rugido. Dos trenes salieron disparados y pasaron en sus rincones con un suspiro —o más bien con dos suspiros— de alivio. *¡Una!, Clara se susurró a sí misma. ¡Ganado!: Esta palabra es de buen agüero. Esta vez, sea como fuere, la victoria será mía!*

Pero, ¿ganó? Y, de haber ganado, ¿será aquello realmente una victoria? ■

Lewis Carroll: *Un lugar complicado*

Nudo I. Excelsior

Dos viajeros emplean, desde las tres hasta las nueve en recorrer un camino llano, después una colina, y en regresar a casa: su paso, en el camino llano, era de 4 millas por hora, en la colina 3 y, en el descenso, de 6. Hallar la distancia recorrida y, con media hora de aproximación, la hora en que alcanzaron la cumbre.

Nudo II. Pisos para alquilar

Problema 1. El enigma del almuerzo

El gobernador de Kgovjni quiere dar un pequeño almuerzo e invita al cuñado de su padre, al suegro de su hermano, al hermano de su suegro y al padre de su cuñado, Hallar el número (más pequeño) de invitados.

Problema 2. Los alojamientos

Una plaza (cuadrada) tiene 20 puertas en cada uno de sus lados, que lo dividen en veintiuna partes iguales. Están todas numeradas, comenzando por una de sus esquinas. ¿En cuál de los cuatro lados será menor la suma de las distancias a recorrer, desde el número 9 al 25, 52 o al 73?

Nudo III. Mathesis Demente

Problema 1

Dos viajeros, saliendo al mismo tiempo, recorren en direcciones opuestas una vía de tren circular. Los trenes salen en ambas direcciones cada cuarto de hora, el del este dando la vuelta completa en 3 horas, el del oeste en 2 horas. ¿Cuántos trenes encontrará cada cual en su camino, sin contar los que hallasen al término de su recorrido?

Problema 2

Dan otra vuelta, como antes, cada viajero contando como "uno" el tren que contiene al otro viajero. ¿Cuántos trenes contará cada uno?

Nudo IV. Cálculo muerto

Hay 5 sacos numerados, los números 1 y 2 pesan 12 libras entre los dos; entre los números 2 y 3 pesan 13 libras; entre los números 3 y 4 pesan 11,5 libras; y entre los números 4 y 5 pesan 8 libras. Calcular el peso de cada saco.

Nudo V. Ceros y cruces

Visitamos una exposición de pintura y queremos valorar algunos cuadros según las preferencias (cruces) o no preferencias (ceros) que vamos asignando en sucesivos recorridos por la galería.

Podemos dar 3 cruces a 2 o 3 cuadros, 2 cruces a 4 o 5 cuadros, y una cruz a 9 o 10 cuadros. También podemos asignar 3 ceros para 1 o 2 cuadros, 2 ceros para 3 o 4 cuadros y un cero para 8 o 9 cuadros.

¿Cómo podemos hacer la asignación, con la condición de que se valoren el menor número de cuadros y al mismo tiempo, se les dé el mayor número posible de ceros o cruces?

Nudo VI. Sus radiaciones

Problema 1

A y B comienzan el año con sólo 1000 libras cada uno. No reciben nada en préstamo; tampoco sustraen nada. Al día siguiente de Año Nuevo tienen 60000 libras entre los dos. ¿Cómo lo hicieron?

Problema 2

L hizo 5 bufandas, mientras que M hizo 2; Z hizo 4, mientras M hacía 3. Sabemos que 5 bufandas de Z pesan como una de L; 5 de M pesan como 3 de Z. Por otra parte, una de M da tanto calor como 4 de Z, y una de L es tan caliente como 3 de M. ¿Cuál será la persona más eficiente, si atribuimos el mismo valor a la rapidez de ejecución, a la ligereza y a su calor?

Nudo VII. Gastos menores

Dado que 1 vaso de limonada, 3 sandwiches y 7 bizcochos valen un chelín y 2 peniques; 1 vaso de limonada, 4 sandwiches y 10 bizcochos valen un chelín y 5 peniques, hallar el precio de:

- Un vaso de limonada, un sándwich y un bizcocho.
- Dos vasos de limonada, tres sándwich y 5 bizcochos.

Nudo VIII. La totalidad jeroglífica, o el jeroglífico del ómnibus

Problema 1

Situar 24 cerdos en 4 pocilgas, de modo que si uno las recorre una tras otra, pueda siempre encontrar un número de cerdos en cada pocilga más cercano a 10 que el número de la anterior.

Problema 2

Desde los lugares A y B salen autobuses, unos de A hacia B y otros de B hacia A, cada 15 minutos. Un viajero, saliendo a pie al mismo tiempo que uno de ellos, tropieza con otro viniendo en dirección contraria al cabo de 12 minutos y medio. ¿Cuándo le dará alcance otro autobús?

Nudo IX. Las grietas de una serpiente

Problema 1

Lardner dice que un sólido sumergido en un fluido desplaza una cantidad de agua igual a su volumen. ¿Puede aplicarse esto a un pequeño cubo de agua flotando en el interior de otro cubo más grande?

Problema 2

Balbús afirma que si cierto sólido fuera sumergido en un recipiente de agua, el agua subiría el nivel progresivamente, a través de series de distancias de 2 pulgadas, 1 pulgada, media pulgada, etc, series que parecen no tener fin. De ello concluye que el agua subiría de nivel hasta el infinito. ¿Es eso cierto?

Problema 3

Un jardín oblongo, media yarda más de largo que de ancho, consiste únicamente en un sendero de grava, dispuesto en forma de espiral, de una yarda de ancho y de una longitud de 3630 yardas. Hallar las dimensiones del jardín.

Nudo X. Buñuelos de Chelsea

Problema 1

Si el 70% de los inválidos de Chelsea ha perdido un ojo, el 75% una oreja, el 80% un brazo, y el 85% una pierna, ¿qué porcentaje, como mínimo, tiene que haber perdido las cuatro cosas?

Problema 2

En un determinado momento las edades de tres personas cumplen que la suma de dos de ellas es igual a la tercera. Pasados unos años, dos de ellas suman el doble que la que queda. Cuando el número de años desde la primera ocasión es dos tercios de la suma de las edades en aquel momento, una de las edades es 21. ¿Cuáles son las otras dos? ■

NOTA

* Recogidos en CARROLL, Lewis: *Matemática Demente*. Edición de Leopoldo M^a Panero. Ed. Tusquets, Barcelona.





Σ

SUMA.
REVISTA SOBRE LA
ENSEÑANZA Y EL
APRENDIZAJE DE
LAS MATEMÁTICAS.

ISSN 1130-488X



00052

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS